A. I. Markuschewitsch u.a.

Streifzüge durch die Mathematik
Band 1

Übersetzung: Ludwig Boll, u.a.
Illustrationen: Heinz Bormann
1965 Urania Verlag Leipzig / Jena / Berlin
MSB: Nr. 3
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einige Worte über Mathematik

Würde man die Schüler fragen, welches unter allen Fächern ihnen am besten gefällt, so würden vermutlich die wenigsten das Fach Mathematik nennen. Gewöhnlich bringen sie ihr eher Achtung als Liebe entgegen.
In der Sowjetunion begegnet man zwar dieser Wissenschaft mit großer Verehrung, aber natürlich gibt es auch unter den Schülern solche, die ein Studium der Mathematik für beschwerlich halten. Das liegt anscheinend nicht nur daran, dass vielen das Studium der Mathematik nicht leichtfällt, da es Beharrlichkeit und Mühe erfordert, sondern auch daran, dass einige Probleme der Schulmathematik manchmal als wenig interessant, gelegentlich sogar als langweilig empfunden werden.

Allerdings sind Rechtschreibung und Grammatik einer Sprache auch nicht gerade interessant; aber nur dann, wenn man sie studiert, erhält man Zugang zur Literatur mit ihren schönen Märchen, Sagen, Erzählungen, Romanen und Gedichten.
Ganz ähnlich führt der Weg zur modernen Mathematik - diesem riesigen, fast unüberblickbar reichhaltigen Gebiet menschlichen Wissens, das von Jahr zu Jahr immer breitere Anwendung findet - über jene einfachsten grundlegenden Sätze der Mathematik, die man in der Schule lernt.

Gelegentlich kann man die Meinung hören, in der Mathematik sei im Grunde schon alles bekannt, die Zeit der Entdeckungen sei in dieser Wissenschaft lange vorbei. Man habe jetzt nur noch die Sätze zu lernen, die nach Gelehrten vergangener Jahrhunderte benannt sind, und sie zur Lösung verschiedener Aufgaben anzuwenden.
In Wirklichkeit liegt die Sache ganz anders.

Gerade heute erlebt die Mathematik, obwohl sie schon vor vielen tausend Jahren entstanden ist, eine Epoche außerordentlich stürmischer Entwicklung. Neue mathematische Entdeckungen werden heutzutage buchstäblich täglich gemacht, und zwar in allen Teilen der Welt.

Wenn man sich eine Vorstellung von der riesigen Menge dieser Entdeckungen machen will, braucht man sich nur folgendes vor Augen zu halten: In der Sowjetunion erscheint monatlich das Referatenblatt "Mathematik", in dem kurze Mitteilungen (sogenannte "Referate") über die verschiedenen mathematischen Entdeckungen, die in jüngster Zeit in der Welt gemacht wurden, veröffentlicht werden.

Der Jahrgang 1958 dieser Zeitschrift umfasst mehr als 1600 engbedruckte Seiten im

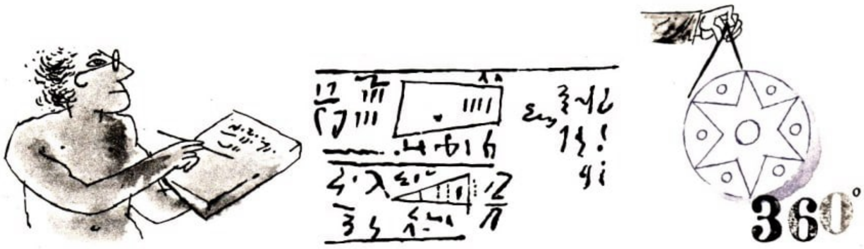
Großformat und enthält über 9000 Referate. Das in Zusammenarbeit mit der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin herausgegebene "Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" brachte im Jahre 1963 mehr als 12000 Referate. So groß ist also die Anzahl der mathematischen Entdeckungen innerhalb eines Jahres, im Durchschnitt etwa 30 bis 40 täglich.

Natürlich sind sie nicht alle von gleicher Bedeutung, aber immerhin bringt jede von ihnen die Wissenschaft vorwärts, und sei es manchmal auch nur um ein ganz kleines Schrittchen. Diese stürmische Entwicklung der Mathematik hängt eng damit zusammen, dass Theorie und Praxis stets neue Aufgaben stellen, die von den Mathematikern gelöst werden müssen. Und wenn dazu das alte Wissen nicht mehr ausreicht, müssen neue Wege gefunden, neue Hilfsmittel gesucht, neue Methoden geschaffen werden.

Heutzutage wird die Mathematik nicht nur auf solchen Gebieten angewandt, wo man sich ihrer auch schon früher bedient hatte, wie in der Astronomie, in der Mechanik, in der Physik, in der Chemie und in der Technik, sondern auch in der Biologie, in einigen Zweigen der Gesellschaftswissenschaften und sogar in der Sprachwissenschaft.
Ein besonders breites Feld der Anwendung wurde ihr im Zusammenhang mit der Entwicklung schneller elektronischer Rechenautomaten erschlossen. Diese Automaten werden zu Wettervorhersagen, zu astronomischen Rechnungen, zur Berechnung der Bahnen künstlicher Satelliten, zur Abrechnung und Planung in der Wirtschaft sowie zur Übersetzung wissenschaftlicher Texte aus einer Sprache in die andere benutzt.

In nächster Zeit werden neue Typen schneller Universal- und Spezialrechenautomaten in der Industrie und Wissenschaft auf den verschiedensten Gebieten breite Anwendung finden, beispielsweise zur Steuerung von Produktionsprozessen, zur Bearbeitung von Problemen in Statistik und Buchhaltung sowie zur Lösung von Planungs- und Projektierungsaufgaben.

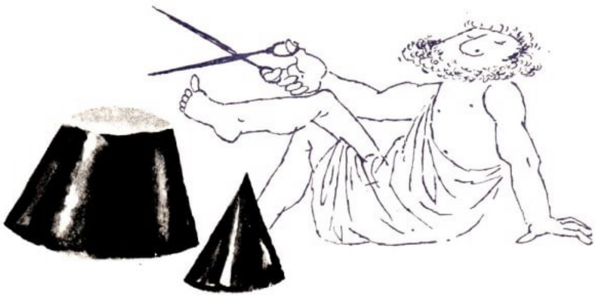
In wenigen Worten lässt sich die Mathematik als Wissenschaft von Zahlen und Figuren charakterisieren. Man wird nur schwer ein Gebiet menschlicher Tätigkeit nennen können, auf dem nicht Fragen nach der Anzahl von Dingen, nach ihren Abmessungen und Formen gestellt und beantwortet werden. Von grauer Vorzeit an sammelten sich im Laufe der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft immer mehr Kenntnisse über Zahlen sowie über Abmessungen und Formen aus der Welt unserer Erfahrungen an.



Dieses Wissen musste irgendwann in ein geordnetes System gebracht werden. So konnte es auch leichter von einer Generation an die nächste weitergegeben werden. Auf diese Weise bildete sich allmählich die Mathematik als selbständige Wissenschaft heraus.

Anfänge mathematischen Wissens lassen sich schon etwa 4000 Jahre v.u.Z. feststellen.

Davon zeugen ägyptische Papyrusrollen und babylonische Keilschrifttafeln, auf denen wir die Lösungen mathematischer, geometrischer und algebraischer Aufgaben finden.
Zu hoher Blüte gelangte die Mathematik jedoch erst im alten Griechenland. Vor mehr als 2000 Jahren, d. h. etwa 300 Jahre v. u. Z., erschienen Euklids "Elemente".
In diesem Werk wird die Geometrie in einer Gestalt systematisch dargestellt, wie sie bis vor kurzem an unseren Schulen gelehrt wurde. Ferner wurden darin die Teilbarkeit von Zahlen und die Lösung quadratischer Gleichungen (in geometrischer Form) behandelt.
Ebenfalls im 3. Jh. v. u. Z. fand Archimedes von Syrakus ein Verfahren zur Bestimmung von Flächeninhalten, Rauminhalten und Schwerpunkten verschiedener einfacher Figuren und Körper.



Gegen Ende des 3. Jh. v. u. Z. verfasste Apollonius von Perga sein Werk über die Kegelschnitte, in dem die Eigenschaften von Ellipse, Hyperbel Parabel behandelt werden.
Im 2. Jh. u. Z. entwickelte Ptolemäus in seinem unter der arabischen Bezeichnung "Almagest" bekannt gewordenen astronomischen Werk die Grundlagen der Trigonometrie, stellte Tabellen der Sinuswerte (genauer gesagt, der Länge von Kreissehnen) auf und gab Methoden zur Berechnung von sphärischen Dreiecken an (d. h. von Dreiecken, deren Seiten Bögen von Großkreisen auf der Kugel sind).

Dies alles lässt deutlich erkennen, wie groß der Einfluss ist, den das Griechenland der Antike während vieler Jahrhunderte, bis in unsere Zeit, auf die Entwicklung des mathematischen Wissens ausübte. Man kann ohne weiteres sagen, dass unsere heutigen Schüler während ihrer ganzen Schulzeit nur einen Teil dieses Wissens erlernen. Allerdings lernen sie dafür auch manches, was den alten Griechen noch nicht bekannt war.

Natürlich blieb die Entwicklung der Wissenschaft dabei nicht stehen. Durch Arbeiten chinesischer, indischer und arabischer Gelehrter entfaltete sich die Mathematik weiter. Besonders große Erfolge erzielten die Inder und die Araber beim Ausbau der Algebra und der Trigonometrie.

Die westeuropäischen Gelehrten mussten nach dem langen Stillstand in der Entwicklung der Wissenschaft während des Mittelalters große Anstrengungen machen, um sich die Ergebnisse der Wissenschaft der Antike anzueignen. Erst danach konnten sie selbständig weiter vorwärtsschreiten.

Die Blüte der Mathematik in Europa beginnt im 16. Jh. In dieser Zeit entstanden neue Zweige der Mathematik, die mit höherer Mathematik zusammenhängen und heute an den Hochschulen und Universitäten gelehrt werden.

Die Grundlagen der höheren Mathematik sind analytische Geometrie und Differential- und Integralrechnung (auch Infinitesimalrechnung genannt). Sie wurden von den großen Gelehrten des 17. Jh., von Descartes, Format, Newton und Leibniz geschaffen.
Damit konnte man den Prozess der Änderung von Größen und geometrischen Figuren mit mathematischen Mitteln untersuchen. Insbesondere konnten die Bewegung von Körpern und andere physikalische Vorgänge mathematisch erfasst und behandelt werden.

In diesem Zusammenhang fanden die Begriffe Koordinaten, Veränderliche und Funktion Eingang in die Mathematik. Diese Begriffe lernen unsere Schüler in Algebra und Trigonometrie kennen.
Dabei bleiben sie jedoch an der Schwelle zur höheren Mathematik stehen. Diese hat sich im Laufe der letzten dreihundert Jahre als unersetzliches Hilfsmittel von außerordentlicher Kraft und Geschmeidigkeit erwiesen, das Generationen von Astronomen, Physikern, Vertretern der Mechanik und anderer Wissenschaften ermöglicht hat, schwierigste Probleme in Naturwissenschaft und Technik zu lösen.

Es ist natürlich unmöglich, an dieser Stelle, und sei es auch nur in großen Zügen, die Errungenschaften der Mathematik in den letzten Jahrhunderten nachzuzeichnen. Wir wollen nur noch auf den großen Einfluss hinweisen, den die russischen Gelehrten Lobatschewski und Tschebyschew und die sowjetischen Mathematiker auf die Weiterentwicklung der Mathematik ausgeübt haben und auch heute ausüben.
Die moderne Mathematik hat eine derartige Entwicklungsstufe und eine solche Reichhaltigkeit ihres Inhalts erlangt, dass ein einzelner sie nicht mehr im ganzen erfassen kann; daher müssen sich selbst Wissenschaftler auf irgendein bestimmtes Teilgebiet spezialisieren.

Es sei noch bemerkt, dass die moderne Mathematik nicht nur aus den Gebieten "Algebra" und "Geometrie" besteht, in die man die Schulmathematik manchmal einteilt; man unterscheidet heute einige Dutzend verschiedener Disziplinen, von denen jede ihren eigenen Gegenstand, ihre Methoden und ihren Anwendungsbereich hat.

In dem vorliegenden Werk findet der Leser Ausführungen über Stoffgebiete, die eng mit dem mathematischen Schulstoff zusammenhängen, den er mit Hilfe dieses Buches vertiefen und ergänzen kann. Wir halten es aber für notwendig, auch den Schleier zu lüften, der die elementare Schulmathematik von der höheren Mathematik trennt.

Einige unserer Artikel können kaum als einfach oder leichtverständlich bezeichnet werden. Wir raten dem Leser, sich bei ihrem Studium mit Geduld zu wappnen, aber auch Papier und Bleistift heranzuziehen und sie Schritt für Schritt zu bewältigen. Wenn er dabei nicht immer gleich Erfolg hat, so möge er nicht aufgeben. Es sei an das Wort erinnert, mit dem sich der berühmte französische Mathematiker d'Alembert an einen jungen Mathematiker wandte: "Gehen Sie nur weiter, junger Mann, die Überzeugung wird schon nachkommen."

Jedenfalls hoffen wir, dass jeder Jugendliche, der für Mathematik Interesse hat, hier solche Artikel findet, die ihm beim ersten Lesen verständlich sind. Den übrigen möge er sich später zuwenden, wenn er in seinem Schulstoff weitergekommen ist. Mit einem Wort, die Überzeugung wird schon nachkommen!

Hinweis: Die besondere Gestaltung des Originalbuches konnte in dieser Abschrift nicht umgesetzt werden. U.a. wurden auch einige, wenige Abbildungen nicht übernommen.

2 Zahlen

2.1 Wie man im Altertum zählte und Ziffern schrieb

I. G. Baschmakowa

Wir sind es gewöhnt, alle Zahlen mit Hilfe der zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu schreiben. Beispielsweise schreiben wir die Zahl, die sich aus vier Hundertern, vier Zehnern und vier Einem zusammensetzt, in der Form 444.
Dabei bezeichnet das Zeichen „4“ die Anzahl der Einer, wenn es an letzter Stelle (von links, d. h. an erster Stelle von rechts) steht, die Anzahl der Zehner, wenn es an vorletzter, und die Anzahl der Zehner von Zehnern, das heißt die Anzahl der Hunderter, wenn es an dritter Stelle von rechts steht.

Das Prinzip, die Zahlen in dieser Weise zu schreiben, nennt man Positions- oder Stellenprinzip. Die Bedeutung jeder Ziffer hängt nicht nur von der Ziffer allein ab, sondern auch davon, an welcher Stelle sie steht. Das Positionsprinzip ermöglicht es, mit Hilfe von zehn Ziffern jede beliebig große Zahl darzustellen.

Um eine vorgegebene ganze Zahl N in unserem System auf- zuschreiben, bestimmen wir zunächst den Rest, der sich bei der Division von N durch 10 ergibt, dann den Rest, der sich bei der Division des Quotienten durch 10 ergibt, usw.; wir setzen dieses Verfahren so lange fort, bis wir als Quotient eine Zahl erhalten, die kleiner als zehn ist.
Beispiel:

$$N = 523 = 10 \cdot 52 + 3$$
$$52 = 10 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 10 \cdot 0 + 5$$

Die bei den aufeinanderfolgenden Divisionen auftretenden Reste sind nun gerade die Ziffern unserer Zahl N im dezimalen Positionssystem, und zwar in der Reihenfolge von rechts nach links, d.h. von den Einem an aufwärts: $N = 523$, oder, ausführlicher,

$$N = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3$$

Für einen schon mit der Algebra vertrauten Leser erwähnen wir, dass man jede Zahl M in dieser Form darstellen kann: Ist $10^n \leq M < 10^{n+1}$ so gilt

$$M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

wobei jeder der Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ kleiner als 10 ist (das sind aber gerade die Reste der schrittweisen Division der Zahl M durch 10). Daher können wir jeden der Koeffizienten mit Hilfe einer unserer zehn Ziffern schreiben. Nach unserem dezimalen Positionsprinzip schreiben wir die Zahl M folgendermaßen:

$$a_N a_{n-1} ... a_1 a_0$$

wobei $a0$ die Anzahl der Einer oder der "Einheiten erster Ordnung", a_1 die Anzahl der "Einheiten zweiter Ordnung", also der Zehner, a_2 die Anzahl der "Einheiten dritter Ordnung", also der Hunderter bezeichnet, usw.

Die Zahl 10 nennt man die Basis oder die Grundzahl unseres Systems. Es ist unter der Bezeichnung Dezimalsystem bekannt, und in diesem System schreiben wir die Zahlen üblicherweise.

2.2 Das Rechnen mit Paaren, Tripeln und Dutzenden

Man braucht aber keineswegs mit Zehnern zu rechnen, wie es uns durch unsere zehn Finger nahegelegt wird. Man kann beispielsweise das Rechnen mit Paaren bzw. mit Tripeln einführen. Zu diesem Zweck wählen wir als Basis des Zahlensystems die Zahl 2 bzw. die Zahl 3, und verfahren im übrigen genauso, wie wir das taten, als wir die Zahl Zehn als Basis gewählt hatten.

Um die Zahlen im System mit der Basis 2 (man nennt es auch Dualsystem oder dyadisches System) aufzuschreiben, braucht man nur die beiden Ziffern 0 und 1. Die Zahl Zwei schreibt man in diesem System als 10. Um uns vor Verwechslungen mit der gewöhnlichen Schreibweise zu schützen, hängen wir rechts unten eine kleine 2 (die Grundzahl) an.
Das soll also bedeuten, dass die Zahl Zwei die Basis des neuen Positionssystems ist. Somit ist 10_2 die Schreibweise für die Zahl 2. Da $3 = 1 \cdot 2 + 1$ ist, wird also die Zahl Drei in der Form 11_2 geschrieben.

Wegen $4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ wird die Zahl Vier in der Form 100_2 geschrieben. Die Zahl Fünf schreibt man 101_2, die Zahl Sieben in der Form 111_2.

Um zu ermitteln, wie man eine beliebige Zahl N zu schreiben hat, muss man die Reste der schrittweisen Division dieser Zahl durch 2 bestimmen. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass die Gleichung

$$35_{10} = 100011_2$$

richtig ist.

Zur Kontrolle: Tatsächlich ist

$$35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Gilt für die Zahl N die Beziehung $2^n \leq N < 2^{n+1}$, so erhalten wir durch aufeinanderfolgende Divisionen durch 2

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Im Dualsystem wird also die Zahl N in der Form

$$a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$$

geschrieben. Hier kann aber jeder der Koeffizienten nur noch zwei Werte annehmen, nämlich 0 oder 1.

Ausführlicher wird auf das Dualsystem, das gegenwärtig im Zusammenhang mit seiner Anwendung in elektronischen Rechenautomaten große Bedeutung erlangt hat, im Abschnitt "Elektronische Rechenmaschinen und -automaten" eingegangen. Wir aber werden uns jetzt mit Systemen mit anderen Grundzahlen beschäftigen.

Zum Aufschreiben einer Zahl im System mit der Basis 3 (im sogenannten "triadischen System") sind drei Ziffern nötig, nämlich 0, 1, 2. Die Zahl Drei wird hier als 10_3 und die Zahl Vier als 11_3 geschrieben. Der Leser möge sich selbst davon überzeugen, dass $35_{10} = 1022_3$ ist.

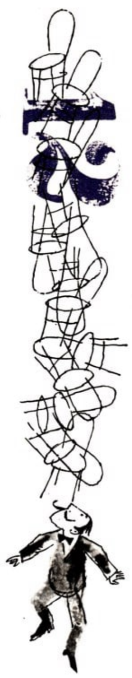
Im triadischen System lauten die Additions- und Multiplikationstabellen folgendermaßen:

Additionstabelle:

	1	2
1	2_3	10_3
2	10_3	11_3

Multiplikationstabelle

	1	2
1	1_3	2_3
2	1_3	11_3

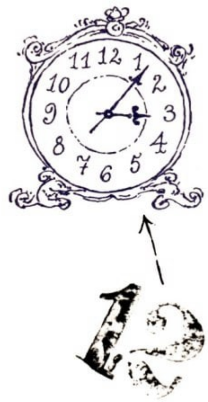


Man kann aber auch mit Dutzenden rechnen, d. h., man kann ein Zahlensystem mit der Basis 12 benutzen. Es ist noch gar nicht so lange her, dass man in Russland und in Westeuropa einige Dinge, beispielsweise Federn und Bleistifte, nach Dutzenden zählte.
Üblicherweise besteht auch heute noch ein Kaffeeservice aus 12 Tassen, 12 Untertassen, 12 Tellern usw.; ein Satz Stühle oder Sessel umfasst gewöhnlich 6 ($= \frac{12}{2}$) Stück. Es existiert sogar eine spezielle Bezeichnung für ein Dutzend Dutzende - das Wort "Gros".

Wir wollen nun einmal untersuchen, wie die Zahlen in diesem System dargestellt werden! Erstens muss es darin 12 Ziffern geben.
Zu unseren zehn Ziffern kommen also noch zwei hinzu; beispielsweise A zur Bezeichnung der Zahl Zehn und B für die Zahl Elf. Zweitens werden die Zahlen in diesem System kürzer als in unserem, während die Multiplikationstabelle länger wird. Die Zahl Zwölf wird in der Form 10_{12} geschrieben (wieder hängen wir "den Index" 12 an, um anzudeuten, in welchem System die Zahlen dargestellt sind), die Zahl Dreizehn als 11_{12}, die Zahl $35 = 2 \cdot 12 + 11$ als $2B_{12}$, die Zahl $133 = 11 \cdot 12 + 1$ als $B1_{12}$, d. h., die im Dezimalsystem dreistellige Zahl 133 ist im Zwölfersystem zweistellig.

Nachstehend finden Sie die Multiplikationstabelle - das Einmaleins - im Zwölfersystem (den Index 12 haben wir weggelassen, der Leser vergesse aber nicht, dass alle Zahlen im Zwölfersystem geschrieben sind!).

	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92
B	1A	29	38	45	56	65	74	83	92	A1



Das Zwölfersystem war einst recht weit verbreitet. Dafür gibt es eine Reihe von Beweisen: Bis heute teilen wir das Jahr in 12 Monate und die Tage in 24 Stunden ein, wobei wir im täglichen Leben nur bis zu 12 Stunden zählen und dann wieder von vorn beginnen (wir sagen z. T. noch ein Uhr nachmittags, zwei Uhr nachmittags, 7 Uhr vormittags, 7 Uhr abends usw.).

Die Zahl 12 kommt oft auch in Märchen und Legenden vor (die zwölfköpfige Hydra, die zwölf Schwäne), was ebenfalls dafür spricht, dass das Zwölfersystem schon sehr frühzeitig entstanden ist.

Einige Gelehrte sind der Meinung, dieses System sei bequemer als das Dezimalsystem, da die Zahl 12 mehr Teiler hat als die Zahl 10 ($10 = 2 \cdot 5$, aber $12 = 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$).
In Wirklichkeit aber bietet dieser Umstand keinerlei nennenswerte Vorteile. Im Verlaufe unserer Ausführungen werden wir sehen, dass in früheren Zeiten auch Zahlensysteme mit der Basis 20 und sogar mit der Basis 60 benutzt wurden.
Zunächst aber wollen wir zusammenfassen:

1. Jede von Eins verschiedene Zahl kann als Basis eines Positionssystems dienen.
2. In jedem Zahlensystem müssen so viele Ziffern vorhanden sein, wie die Basis Einheiten hat.
3. Zwar sind alle Positionssysteme gleichwertig, in Einzelfällen kann sich jedoch das eine oder andere System als vorteilhafter erweisen. Beispielsweise benutzt man, wie schon erwähnt, beim Rechnen mit elektronischen Rechenautomaten fast ausschließlich das Dualsystem.

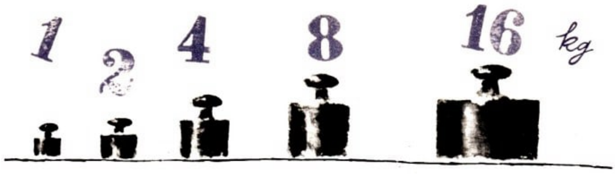
Wir bringen jetzt als Anwendungsbeispiel eine Aufgabe, zu deren Lösung man zweckmäßigerweise nicht das Dezimalsystem, sondern ein anderes Positionssystem benutzt.

2.3 Eine Wägungsaufgabe

Es handelt sich um eine der klassischen Aufgaben, die man sofort lösen kann, wenn man ein Zahlensystem mit einer passenden Basis auswählt. Diese Aufgabe findet sich in einem Mathematikbuch (im "Liber abaci") des berühmten Mathematikers Leonardo von Pisa (italienisch: Fibonacci, d. h. Sohn des Bonacci), der im Jahrhundert lebte. Auch der große Mathematiker Leonhard Euler befasste sich mit dem Problem.

Es sind fünf Wägestücke anzugeben, mit denen man jeden Körper von 1 bis 30 kg wiegen kann, dessen Maßzahl eine ganze Zahl ist, wenn man die Wägestücke nur auf eine Waagschale legen darf. Wie muss man die Wägestücke wählen?
Alle Wägestücke zusammen müssen mindestens 30 kg wiegen. Diese Forderung allein reicht natürlich bei weitem nicht aus.

Würden wir beispielsweise Wägestücke zu 1 kg, 2 kg, 3 kg, 10 kg und 15 kg wählen, so könnten wir damit Massen von 7, 8, 9, 22, 23 und 24 kg nicht wiegen.



Worin besteht nun der mathematische Inhalt der Aufgabe ?
Um eine bestimmte Masse zu wiegen, muss man, wenn man die Wägestücke nur auf eine einzige Waagschale legen darf, diese Masse als Summe der Massen der vorhandenen Wägestücke darstellen, und zwar so, dass jedes Wägestück nicht mehr als einmal genommen wird. Wählen wir die Wägestücke p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, so muss ein Körper mit der Masse $Q \leq 30$ kg folgendermaßen dargestellt werden:

$$Q = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5$$

wobei ein Koeffizient gleich Eins ist, wenn das entsprechende Wägestück auf die Waagschale gelegt wird, und gleich Null, wenn das betreffende Wägestück nicht benutzt wird.
Bei dieser Fragestellung erkennt man die Ähnlichkeit mit der Darstellung der Maßzahl von Q, abgekürzt $\{Q\}$ geschrieben, im Dualsystem. Man braucht als p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 nur die folgenden Wägestücke zu nehmen:

$$p_1 = 1 \text{ kg}, \qquad p_2 = 2 \text{ kg}, \qquad p_3 = 4 \text{ kg}, \qquad p_4 = 8 \text{ kg}, \qquad p_5 = 16 \text{ kg}$$

Die Summe ihrer Maßzahlen ist $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, also größer als 30. Außerdem kann jede Zahl $\{Q\}$, die nicht größer als 31 ist, in der Form

$$\{Q\} = b_4 \cdot 2^4 + b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0$$

dargestellt werden, wobei jeder der Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 so wie wir es brauchen, entweder Null oder Eins ist.
Wollen wir beispielsweise einen Körper von 22 kg wiegen, so schreiben wir die Zahl 22 im Dualsystem

$$22 = 10110_2$$

Wir haben also die Wägestücke $p_2 = 2$ kg, $p_3 = 4$ kg und $p_5 = 16$ kg zu benutzen.

Jetzt ändern wir die Aufgabe etwas ab:
Es sind vier Wägestücke anzugeben, mit denen man jeden Körper von ganzzahliger Masse bis zu 40 kg wiegen kann, wenn man die Wägestücke sowohl auf die linke als auch auf die rechte Waagschale stellen darf.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man zur Lösung dieser Aufgabe das triadische System benutzen muss, d. h. die folgenden 4 Wägestücke auszuwählen hat:

$$p_1 = 1 \text{ kg}, \quad p_2 = 3 \text{ kg}, \quad p_3 = 9 \text{ kg}, \quad p_4 = 27 \text{ kg}$$

Sollen wir zum Beispiel einen Körper von 19 kg wiegen, so stellen wir die Zahl 19 in der folgenden Form dar:

$$19 = 3 \cdot 6 + 1 = 3(3 \cdot 2) + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 0 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 = 201_3$$

Jetzt stellen wir den Körper von 19 kg auf die rechte Waagschale, auf die linke legen wir ein Wägestück von 1 kg. Danach müsste man noch zwei Wägestücke zu je 9 kg dazulegen, wir haben aber nur ein solches Wägestück.
Die Zahl $18 = 2 \cdot 9$ kann man aber auch noch anders darstellen., nämlich in der Form

$$18 = 2 \cdot 9 = (3 - 1) \cdot 9 = 27 - 9$$

Daher müssen wir auf die linke Waagschale noch das Wägestück von 27 kg und auf die rechte das von 9 kg stellen.

Genauso verfahren wir auch in anderen Fällen. Ist $Q \leq 40$ kg, so kann man $\{Q\}$ immer in der Form

$$\{Q\} = b_3 \cdot 3^3 + b_2 \cdot 3^3 + b_1 \cdot 3 + b_0$$

darstellen, wobei jeder der Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3 gleich 0, 1 oder 2 sein kann. Ist er gleich Null, so wird das entsprechende Wägestück nicht verwendet. Ist er gleich Eins, so stellen wir es auf die linke Waagschale, ist er gleich Zwei, so verfahren wir so, wie wir es soeben getan haben, d. h., das Wägestück wird auf die rechte Waagschale, das nächstgrößere auf die linke Waagschale gelegt.

Es sei bemerkt, dass zwar die Zahlen in verschiedenen Systemen auf verschiedene Art und Weise geschrieben, ihre Haupteigenschaften davon aber nicht berührt werden:
Die Zahl 20 ist durch 2 teilbar, gleichgültig, in welchem System wir sie schreiben, und 27 ist nicht durch 2, sondern durch 3 teilbar. Die Zahlen 3, 5 und 7 bleiben in jedem Zahlensystem Primzahlen. Allerdings ändern sich die Teilbarkeitskriterien mit dem System, in dem die Zahlen dargestellt sind, da sie im allgemeinen auf Eigenschaften der Basis beruhen.

So ist im Dezimalsystem eine Zahl durch 5 teilbar, wenn sie auf Null oder Fünf endet. Eine Zahl, deren Darstellung im triadischen System auf Null endet, braucht aber nicht durch 5 teilbar zu sein: Die Zahlen 10_3 (d. h. 3), 100_3 (d. h. 9), 1000_3 (d. h. 27) beispielsweise sind nicht durch 5 teilbar, dagegen ist die Zahl 120_3 (d. h. 15) durch 5 teilbar.

2.4 Unser mündliches Zählen

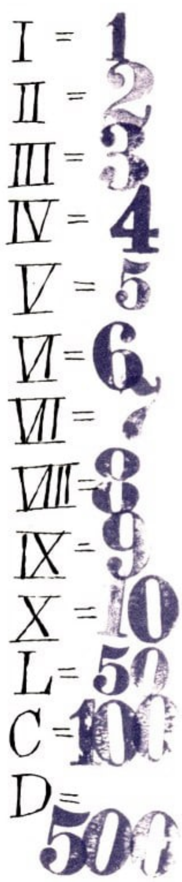
Nun entsteht natürlich die Frage: Warum benutzen wir das Dezimalsystem und nicht ein System mit einer anderen Basis ?
Und weiter: Haben die Menschen die Zahlen immer unter Verwendung des Positionsprinzips geschrieben ?

Diese Fragen wollen wir jetzt beantworten. Um besser zu verstehen, wie die Menschen im Altertum zählten, wenden wir uns dem mündlichen Zählen zu. Dabei fällt auf, dass sich unser mündliches Zählen vom schriftlichen stark unterscheidet. Der bemerkenswerteste Unterschied besteht darin, dass wir die zweistelligen Zahlen zwischen zwei Zehnern (mit Ausnahme von elf und zwölf) zwar von links nach rechts schreiben, 13, 14, 15, ..., 21, 22, ... usw., aber von rechts nach links sprechen, drei-zehn, vier- zehn, fünf-zehn, ..., ein-und-zwanzig, zwei-und-zwanzig usw. Das ist eine Eigenart der deutschen Sprache, die das Erlernen des Rechnens sicherlich nicht erleichtert.

Wie sprechen wir nun die Zahl 444 aus ?
Wir sagen Vierhundertvierundvierzig, d. h., wir sprechen drei verschiedene Wörter aus. Wir schreiben die Zahl aber mit drei gleichen Zeichen. Wenn ein Russe oder ein Franzose dieselbe Zahl aufschreiben muss, so schreibt er die gleichen drei Zeichen hin; jeder von ihnen sagt aber etwas anderes, der eine in Russisch, der andere in Französisch.

Unsere Schreibweise in Ziffern ist also international, während die Zahlwörter und die Methoden zu ihrer Bildung bei verschiedenen Völkern verschieden sind. Das ist aber noch nicht alles.
Sehen wir uns genauer an, wie wir die Zahlen aussprechen. Für die Null und die ersten neun Zahlen haben wir spezielle Benennungen:

"null", "eins", "zwei", ..., "neun"; für die nächste Zahl haben wir ein neues Wort - "zehn"; wir sagen nicht "eins, null", obwohl wir die Zahl Zehn mit Hilfe der Eins und der Null schreiben.
Ebenso haben wir ein besonderes Wort für die Zahl "Elf" und für die Zahl "Zwölf", während wir die folgenden Zahlwörter zunächst aus dem Wort für die Einerziffer und dem Wort "zehn" bilden (also durch Addition).



Die weiteren Zehner werden durch Anhängen der Silbe "zig" gebildet, die bei 30 zu "ßig" wird. Die Benennungen für die Zehner zeigen, dass zur Bildung dieser Zahlwörter die Multiplikation benutzt wurde, zwei mal zehn, drei mal zehn usw. In der Umgangssprache wird die Silbe "zig" vielfach noch für "das Zehnfache" u. ä. benutzt.

Das nächste neue Zahlwort ist hundert, das darauffolgende tausend. Auch später tauchen immer neue Zahlwörter auf : Million, Milliarde, Billion, Trillion, usw. Daraus geht hervor, dass die Zahlbenennung nicht dem Positionsprinzip folgt. Unser mündliches Zählen enthält Spuren verschiedener älterer Zahlensysteme.

Eines davon ist das der römischen Ziffern. die wir ja auch heute noch benutzen. Hier gibt es spezielle Zeichen für die Eins (I), die Fünf (V), die Zehn (X), die Fünfzig (L), die Hundert (C), die Fünfhundert (D) und die Tausend (M).
Die übrigen Zahlen werden mit Hilfe dieser Symbole unter Anwendung von Addition und Subtraktion geschrieben. So ist III beispielsweise die Schreibweise der Zahl Drei (I+I+I), hingegen IV die der Zahl Vier (V-I), VI die der Zahl Sechs (V+I) usw.

Unsere Zahl 444 wird in römischen Ziffern folgendermaßen geschrieben:

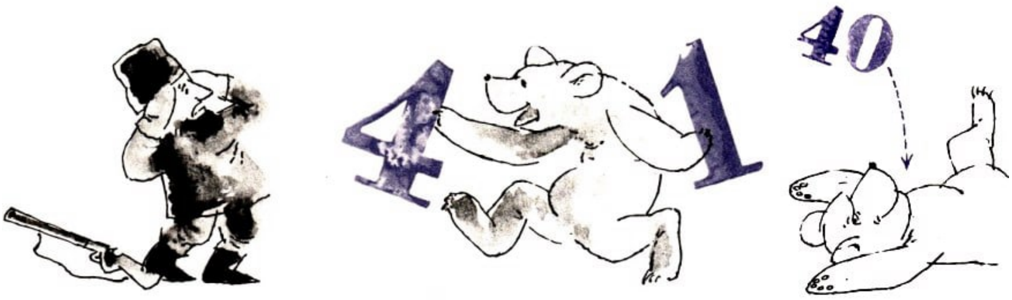
$$CDXLIV \qquad \text{also} \qquad (500-100)+(50-10)+(5-1)$$

Diese Schreibweise ist viel weniger bequem als unsere. Vier Einer werden hier mit dem einen Symbol (IV), vier Zehner mit einem anderen (XL) und vier Hunderter mit einem dritten (CD) geschrieben.

Die schriftliche Darstellung der Zahlen wird bedeutend länger. Das ist aber noch nicht alles. In römischen Ziffern ist das Rechnen ziemlich schwierig. Davon können Sie sich sofort überzeugen, wenn Sie versuchen, 444 mit 36 zu multiplizieren, wenn beide Zahlen mit römischen Ziffern geschrieben sind. Die Römer selbst verwendeten zum Rechnen eine spezielle Rechentafel - den Abakus.

Das römische System hat außerdem noch einen entscheidenden Mangel. Es liefert kein Verfahren zum Aufschreiben beliebig großer Zahlen. Um zum Beispiel 1000000 mit römischen Ziffern zu schreiben, müsste man entweder das Zeichen M tausendmal wiederholen oder ein neues Symbol einführen.
Je größer die Zahlen werden, desto mehr neue Symbole müsste man also einführen, da es keine Multiplikation der Symbole gibt. Das liegt daran, dass das römische System kein Positionssystem ist. Das Zeichen V beispielsweise bezeichnet darin nur fünf Einer und kann weder fünf Zehner noch fünf Hunderter bezeichnen.

Das römische System ist auch kein eigentliches Dezimalsystem. Es sind Spuren einer anderen Basis - der Fünf - darin erhalten geblieben. Das ist daran zu erkennen, dass für Fünf, für Fünfzig und für Fünfhundert spezielle Zeichen vorhanden sind.



Im Russischen haben sich Spuren eines Systems mit der Basis 40 erhalten; für diese Zahl gibt es ein besonderes Zahlwort (sorok). Wendungen wie "vierzig mal vierzig Kirchen", "vierzig mal vierzig schwarze Zobel" usw. erinnern daran, ebenso wie gewisse abergläubische Vorstellungen, die mit dieser Zahl verbunden sind, wie etwa, dass der 41. Bär, den ein Jäger erlegt, ihm Unglück bringe.

Im Deutschen erinnern ähnliche Vorstellungen, die mit 13 oder 7 verbunden sind, an das Rechnen im System mit der Basis 12 ($6 = \frac{1}{2} \cdot 12$). Auch die 7 Tage der Woche oder bestimmte Märchen, z. B. die sieben Zwerge, erinnern an die besondere Stellung der Zahl 7.

Im Französischen gibt es Reste eines Rechnens in einem System mit der Basis 20; beispielsweise werden die Zahlen zwischen 70 und 100 als $60 + 10$, $60 + 11$, ..., 4×20, $4 \times 20 + 1$ usw. benannt.
Im Altfranzösischen wurden noch weitere Zahlen in dieser Weise zusammengesetzt. Spuren des Zwanzigersystems sind auch im Englischen erhalten geblieben (1 Pfund Sterling hat 20 Schillinge), ebenso des Fünfersystems in den skandinavischen Sprachen.

Die gesprochene Sprache zeigt also, dass man früher Zahlensysteme benutzte, die keine Positionssysteme waren; dabei wurden auch andere Zahlen als die Zehn als Basis verwendet.
Welche Quellen ermöglichen es nun, die Frage "Wie zählte man im Altertum ?" zu beantworten?

Erstens haben sich auf der Erde Völkerschaften erhalten, die noch vor kurzem in vielerlei Beziehung auf derselben niedrigen Entwicklungsstufe standen wie unsere fernen Vorfahren. Viele Reisende und Forscher haben die zahlreichen Rechenverfahren beschrieben, die diese Völker verwenden. Das ist eine der Quellen, die wir näher kennenlernen werden. Als zweite Quelle dienen uns die Dokumente, die von den Völkern des Altertums erhalten geblieben sind: von den Ägyptern, den Babyloniern, den Griechen, den Maya u. a. Schließlich helfen uns russische Handschriften des 11. / 12. Jh., zu erkennen, wie man früher in Russland rechnete.

2.5 Das Zählen und Rechnen bei primitiven Völkern

Noch vor kurzem gab es Völker, deren Sprache nur zwei Zahlwörter kannte: "eins" und "zwei". Das heißt natürlich nicht, dass die Angehörigen dieser Stämme nicht auch eine größere Anzahl von Gegenständen zu zählen vermochten.
So kennen die Bewohner der Inseln der Torres-Straße nur die Zahlwörter "urapun" (eine) und "okosa" (zwei). Sie zählten dann folgendermaßen weiter: "okosa - urapun" (drei), "okosa - okosa" (vier), "okosa - okosa - urapun" (fünf) und "okosa - okosa - okosa"(sechs).

Die weiteren Zahlen von 7 an sind für sie einfach "viel" oder "eine Menge". Somit haben sich die Menschen dort nur endlich viele ganze Zahlen angeeignet.

Übrigens zeugen viele russische Sprichwörter davon, dass es bei den Vorfahren der Russen genauso war. Dort sagt man: "Bei sieben Kindermädchen ist das Kind ohne Aufsicht", "Sieben Mann warten nicht auf einen", "Siebenmal abmessen, einmal abschneiden".

Hier wird das Wort "sieben" offenbar im Sinne von "viel" verwendet.
Sind nämlich viele Kindermädchen vorhanden, so ist das Kind ohne Aufsicht; mehrmals messen und dann erst schneiden, usw. Im Deutschen soll man "seine Siebensachen" packen, eine Stadt liegt "hinter den sieben Bergen", im Märchen gibt es "Siebenmeilenstiefel" usw.

Wir wollen aber wieder zu unserem Thema zurückkehren.
Schon sehr früh standen die Menschen vor der Notwendigkeit, einander mitzuteilen, dass eine bestimmte Anzahl von Dingen in soundso viel Tagen geliefert werden müsse oder dass jeder Stamm eine bestimmte Anzahl von Kriegern zu stellen habe.
Auch diejenigen Völker, die nur zwei Zahlwörter kannten, konnten im gewissen Sinne eine recht große Menge von Gegenständen "zusammenzählen". So verfuhren nach einem Bericht des hervorragenden russischen Forschungsreisenden N.N. Miklucho-Maklai die Eingeborenen West-Irians wie folgt:

"Ein beliebtes Zählverfahren besteht darin, dass der Papua einen Finger nach dem anderen umbiegt und dabei einen bestimmten Laut ausstößt, z.B. "be-be-be". Hat er bis fünf gezählt, so sagt er "ibon-be" (ibon=die Hand).

Darauf biegt er die Finger der anderen Hand um und zählt wieder "be-be" bis er zu "ibon- ali" (zwei Hände) gelangt. Dann fährt er fort und zählt so lange "be-be" vor sich hin, bis er zu "samba-be" und "samba-ali" (ein Fuß, zwei Füße) gelangt. Ist es nötig, noch weiter zu zählen, so benutzt der Papua die Finger und Zehen eines anderen."

So wurden die Gegenstände beim Zählen gewöhnlich den Fingern und Zehen zugeordnet. Bei Verhandlungen brauchte der Eingeborene beispielsweise nur zu sagen, dass er bei seinem Zählen bis zur dritten Zehe des rechten Fußes gekommen sei.
Um die nötige Anzahl von Gegenständen abzuzählen, begannen die Primitiven das Abzählen von vorn, vom ersten Finger der rechten Hand an. Während sie die Finger abzählten, zählten sie gleichzeitig die Gegenstände.

Die Inselbewohner der Torresstraße benutzten für dieses Abzählen nicht nur Finger und Zehen, sondern auch andere Körperteile (Handgelenk, Ellbogen, Schulter), aber immer in bestimmter Reihenfolge (ähnlich wie ein Maßschneider seine Messungen in festgelegter Reihenfolge vornimmt und durch nur Zahlen zu notieren braucht). So konnten sie bis zu 33 Gegenständen abzählen.

Das Wesen dieser Methode besteht darin, die Gleichzahligkeit verschiedener Mengen von Gegenständen dadurch zu ermitteln, dass die Gegenstände ganz bestimmten Körperteilen, manchmal auch einfach Stäbchen zugeordnet wurden.
Selbstverständlich sind die Finger die bequemsten "Instrumente" zum Zählen und Rechnen; deshalb wurden die Gegenstände beim Zählen meistens zu fünf, zu zehn oder zu zwanzig gruppiert. Dadurch erklärt sich auch, dass die meisten Zahlensysteme die Zahl 10 (nach der Zahl der Finger an beiden Händen), manchmal auch 5 oder 20, zur Basis haben.

Mit der Zeit wurde das Leben der Stämme immer vielfältiger und umfassender. Immer öfter mussten stets größere Anzahlen verschiedener Gegenstände zusammengezählt werden, und das einfache Ermitteln der Gleichzahligkeit durch Abzählen an den Fingern genügte nicht mehr.
Allmählich gewöhnten sich die Menschen daran, die Gegenstände beim Zählen in Gruppen zu zweien, zehn oder zwölf einzuteilen. Es entstanden spezielle Wörter zur Bezeichnung dieser immer wiederkehrenden Mengen von Gegenständen. So bezeichnete bei den Eingeborenen Floridas das Wort "na - kua" 10 Eier, "na - banara"10 Körbe.

Das Wort "na" aber, das anscheinend der Zahl 10 entspricht, wurde einzeln nicht gebraucht. Dasselbe konnte man auf den Fidschiinseln und den Salomoninseln beobachten, wo es spezielle Bezeichnungen für 100 Kähne, 100 Kokosnüsse, 1000 Kokosnüsse gab, während abstrakte Zahlen nicht existierten.
Die Zahlen waren dem Wesen nach benannte Zahlen, es sind noch "Stück-Anzahlen" konkreter Gegenstände.

Im Laufe der Zeit begann man jedoch, mit diesen festen "Stück-Anzahlen" nicht nur die

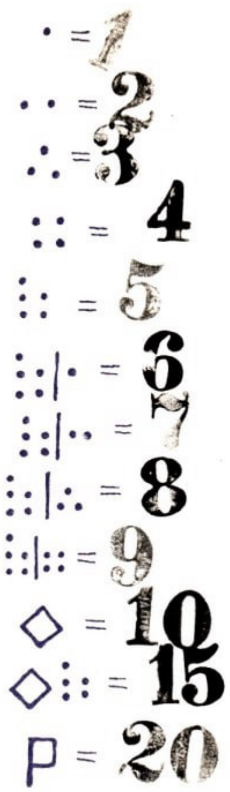
ursprünglichen Gegenstände, sondern auch andere, ihnen ähnliche, zu bezeichnen. Die "Stück-Anzahlen" zum Beispiel, die eine bestimmte Anzahl von Nüssen bezeichneten, konnten nach und nach zum Zählen (kugel-)runder Gegenstände verwendet werden.
Das führte dazu, dass sich in vielen Sprachen primitiver Völker mehrere Reihen von Zahlwörtern bildeten; die einen wurden nur zum Zählen von Menschen benutzt, andere zum Zählen runder Gegenstände, wieder andere für längliche usw. So gibt es z.B. in der Sprache der Tschimsian (Britisch-Kolumbien) sieben verschiedene Reihen von Zahlwörtern, von denen jede zum Zählen einer ganz bestimmten Art von Gegenständen verwendet wurde.

Bei den meisten Völkern verdrängten allerdings diejenigen Zahlen, mit denen das "Geld" gezählt wurde, allmählich alle übrigen. Das geschah vermutlich zu der Zeit, da hauptsächlich Vieh als Geld diente. Man musste die Herden zählen und dafür andere Gegenstände eintauschen. Naturgemäß erlangten die Zahlen, die zum Zählen des Viehs dienten, die größte Verbreitung; diese Zahlen waren allen gut bekannt. Und diese Zahlen wurden zu den universellen Zahlen, mit denen man beliebige Gegenstände zählen konnte.
So entstanden allerdings nur die Zahlen, denen "Stück-Anzahlen" entsprachen. Wurde in Zehnern gezählt, so entstanden Bezeichnungen für Zehn, zehn Zehner (d.h. Hundert), zehn Hunderter, (d.h. Tausend). Außerdem erhielten in der Regel alle Zahlen, die kleiner als Zehn waren, individuelle Bezeichnungen.
Was die Zahlen 11, 12, ..., 19, 21 usw. betrifft, so wurden sie von Anfang an mit Hilfe der Operationen, die ursprünglich mit den zu zählenden Gegenständen durchgeführt wurden, aus den Grundzahlen zusammengesetzt.

So wurden in der Sprache der Klamathen (Nordamerika), aber auch in den Sprachen der Stämme Britisch-Kolumbiens zur Bezeichnung dieser zusammengesetzten Zahlen spezielle Verben verwendet. So sagte beispielsweise der Indianer:
"Auf zweimal zehn Früchte gebe ich sechs dazu", und das bezeichnete 26 Früchte. Dieser Ausdruck entspricht völlig dem tatsächlichen Zählen. Die Indianer legten zehn Gegenstände in eine Reihe, mit dem elften wurde eine neue Reihe begonnen, usw. Allmählich gingen diese Bewegungsoperationen in arithmetische über.

Eine gute Illustration dieser Art des Zählens bilden die Zahlenbezeichnungen, die vom 11. bis zum 16. Jh. bei den Azteken (in Mexiko) benutzt wurden. Die Eins bezeichneten sie durch einen Punkt, die Zwei durch zwei Punkte (siehe Zeichnung) usw. bis zur Fünf. Die Zahl 6 wurde so geschrieben, dass ein senkrechter Strich die ersten fünf Punkte vom sechsten trennte. Offenbar wurde hier in Gruppen zu fünf Gegenständen gezählt. Der Strich trennte eine solche Gruppe von einer anderen, ohne selbst eine Zahl zu bezeichnen.

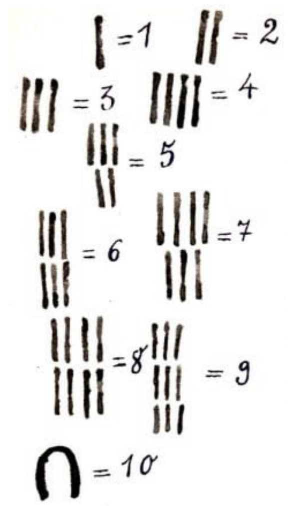
Die Hauptoperation zur Bildung zusammengesetzter Zahlen war die Addition, daneben wurden aber auch die Subtraktion und manchmal sogar die Multiplikation verwendet. Wie wir schon sagten, gebraucht man z.B. im Russischen und im Deutschen zur Bildung der Zahlwörter sowohl Addition als auch Multiplikation (siebenundzwanzig: zwei $\cdot$ zehn $+$ sieben).



In den ugro-finnischen Sprachen wird auch Subtraktion verwendet. Für die Zahl 8 sagt man dort "zwei- (von) zehn" (d. h. zehn minus zwei), für 80 "zwei (mal 10)- (von) hundert", für 800 "zwei (mal 100) von zehn mal hundert" ("zehn mal hundert" d.h. tausend; - Multiplikationsprinzip!).
So entstand allmählich die Reihe der natürlichen Zahlen. Nun wollen wir sehen, wie man die ersten Zahlen schrieb und mit ihnen rechnete.

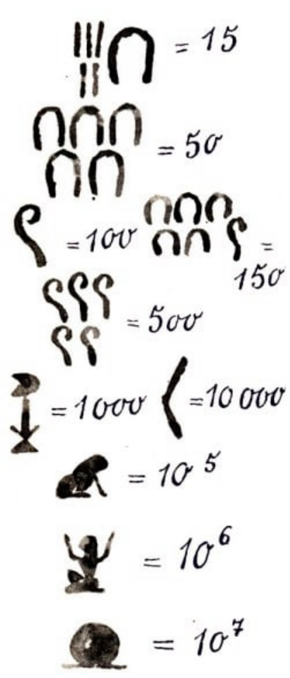
2.6 Die ersten Zahlensysteme

Eines der ältesten Zahlensysteme ist das ägyptische. Wir verfügen über Aufschriften, die sich in Pyramiden, auf Tafeln und Obelisken erhalten haben. Sie bestehen aus Hieroglyphenbildern, welche Vögel, wilde Tiere, Menschen, Teile des menschlichen Körpers (Augen, Beine) und verschiedene unbelebte Gegenstände darstellen.



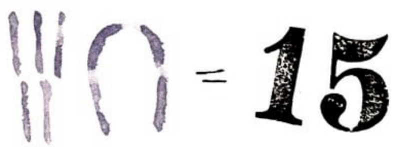
Diese Art der Schrift ist überhaupt für die frühen Kulturstufen charakteristisch. Ähnliche Schriftsysteme gab es bei den Bewohnern Zentralamerikas - den Maya, in Peru und im alten China. Ihre Entzifferung ist außerordentlich schwierig, da oft weder die Sprache der alten Völker noch die Bedeutung der einzelnen Hieroglyphen bekannt sind.

Es könnte scheinen, das Problem sei unlösbar. Trotzdem wurden schon viele Aufschriften entziffert! Zunächst wurden durch Champollion die Schriftsysteme der alten Ägypter enträtselt, danach, nach den Forschungen von Otto Grotefend, die babylonische Keilschrift.



In den 30er Jahren unseres Jahrhunderts entzifferte der tschechische Gelehrte Hrozný die hethitischen Aufschriften, die man lange vergebens untersucht hatte, und schließlich fand vor einigen Jahren der sowjetische Gelehrte Knorosow den Schlüssel zur Enträtselung der Mayaschrift und zu den Aufschriften der Osterinseln. Diese Ergebnisse sind allerdings noch umstritten. Es sind zwei mathematische Papyri erhalten geblieben, die uns darüber unterrichten, wie die alten Ägypter gerechnet haben. Einer von ihnen wird im Britischen Museum aufbewahrt, der andere im Museum der bildenden Künste in Moskau.
Zum Schreiben der Zahlen verwendeten die alten Ägypter folgende Hieroglyphen:

Sie bedeuten (in dieser Reihenfolge): Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, Hunderttausend (Frosch), eine Million (Mensch mit erhobenen Händen), zehn Millionen.
Man nimmt an, dass die Hieroglyphe für Hundert eine Messleine darstellt, die für Tausend eine Lotosblüte, die für 10000 einen erhobenen Finger und die für 10000000 das ganze Weltall.
Alle übrigen Zahlen wurden mit Hilfe einer einzigen Rechenart, der Addition, aus den Grundzahlen zusammengesetzt. Dabei wurde nicht wie bei uns von links nach rechts, sondern von rechts nach links geschrieben. Die Zahl 15 zum Beispiel wurde so geschrieben:



Die Zahl 444 wäre in dieser Bezeichnung folgendermaßen zu schreiben. (rechte Abbildung)
Wir sehen, dass das altägyptische Zahlensystem dem römischen ähnlich ist, allerdings wird dabei keine Subtraktion verwendet.
Bei der Betrachtung des römischen Zahlensystems haben wir uns davon überzeugt, wie unbequem die Multiplikation von Zahlen ist, die nicht in einem Positionssystem geschrieben sind.

Wie haben denn nun die alten Ägypter gerechnet? Es zeigt sich, dass sie mit Hilfe aufeinanderfolgender Verdoppelung der Zahlen multiplizierten und dividierten.
Beispielsweise sei 19 mit 37 zu multiplizieren. Die Ägypter verdoppelten schrittweise, wobei sie in eine rechte Spalte die Ergebnisse der Verdoppelung schrieben und in eine linke die entsprechenden Potenzen von zwei:

,1	37
,2	74
4	148
8	296
,16	592

Die Verdoppelung wurde nun so lange fortgesetzt, bis man aus Zahlen der linken Spalte den Multiplikator additiv zusammenstellen konnte (in unserem Beispiel 19 = 1 + 2 + 16).

Die Ägypter versahen die entsprechenden Zeilen mit vertikalen Strichen und addierten die Zahlen, die in diesen Zeilen in der rechten Spalte stehen, also in unserem Fall 37 + 74 + 592 = 703; so erhielten sie das Produkt.

Sollte nun die Zahl 703 durch 19 dividiert werden, so begannen die Ägypter schrittweise den Divisor zu verdoppeln. Sie setzten das so lange fort, wie die Zahlen der rechten Spalte kleiner als 703 blieben.
Dann versuchten sie, aus Zahlen der rechten Spalte den Dividenden (additiv) zusammenzustellen, und wenn das glückte, ergab die Summe der entsprechenden Zahlen in der linken Spalte den Quotienten:

1	197
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608

In unserem Fall ist 703 = 608 + 76 + 19, d. h., der Quotient ist gleich 1 + 4 + 32 = 37.
Wäre der Dividend nicht ohne Rest durch den Divisor teilbar, so könnte man ihn nicht aus Zahlen der rechten Spalte zusammenstellen. Wir würden sowohl einen Quotienten als auch einen Rest erhalten.

Die ägyptische Multiplikationsmethode ist nicht schwierig, erfordert aber sehr viele Rechenschritte, sogar bei der Multiplikation zweistelliger Zahlen. Müssten wir auf dieselbe Weise sehr große Zahlen miteinander multiplizieren, so kämen wir nicht ohne die Hilfe einer Maschine aus.
Es sei bemerkt, dass die Ägypter zur Multiplikation und Division im Grunde die Darstellung der Zahlen im Dualsystem verwendet haben.

2.7 Alphabetische Zahlensysteme

Wir haben gesehen, dass Zahlensysteme, die keine Positionssysteme sind, wenig zweckmäßig sind. Das Schriftbild einer Zahl wird sehr lang, und das Rechnen ist sehr schwie-

rig. Mit der Entwicklung des Handels und des Handwerks wurden diese Mängel immer spürbarer.
Da entstand in Kleinasien, wo griechische Kolonien bestanden, die einen lebhaften Handel trieben, um die Mitte des 5. Jh. v.u.Z. ein neuartiges Zahlensystem, das sogenannte alphabetische Zahlensystem. Gewöhnlich nennt man es das ionische.

In diesem System bezeichnete man die Zahlen mit Hilfe der Buchstaben des griechischen Alphabets, über die man Striche setzte. Die ersten neun Buchstaben bezeichneten die Zahlen von 1 bis 9, die folgenden neun die Zahlen 10, 20, 30 bis 90 und die nächsten neun die Zahlen 100, 200 bis 900. Auf diese Weise konnte man jede Zahl bis 999 bezeichnen.

Zur Bezeichnung der Zahlen 1000, 2000, ..., 9000 verwendeten die Griechen dieselben Buchstaben wie für die Zahlen 1, 2, ..., 9, nur setzten sie links unten einen schrägen Strich. Wie das gemacht wurde, ist aus dem Bild ersichtlich:

1	$\overline{\alpha}$	20	$\overline{\kappa}$	200	$\overline{\sigma}$	2000	͵β
2	$\overline{\beta}$	30	$\overline{\lambda}$	300	$\overline{\tau}$	3000	͵$\overline{\gamma}$
3	$\overline{\gamma}$	40	$\overline{\mu}$	400	$\overline{\upsilon}$	4000	͵$\overline{\delta}$
4	$\overline{\delta}$	50	$\overline{\nu}$	500	$\overline{\varphi}$	5000	͵$\overline{\varepsilon}$
5	$\overline{\varepsilon}$	60	$\overline{\xi}$	600	$\overline{\chi}$	6000	͵$\overline{\varsigma}$
6	$\overline{\varsigma}$	70	$\overline{o}$	700	$\overline{\psi}$	7000	͵$\overline{\zeta}$
7	$\overline{\zeta}$	80	$\overline{\pi}$	800	$\overline{\omega}$	8000	͵$\overline{\eta}$
8	$\overline{\eta}$	90	$\overline{ϙ}$	900	$\overline{ϡ}$	9000	͵$\overline{\vartheta}$
9	$\overline{\vartheta}$	100	$\overline{\rho}$	1000	͵α	10000	$\overset{\alpha}{M}$
10	$\overline{\iota}$						

20 000 $\overset{\beta}{M}$

Für die Zahl 10000 wurde das Zeichen $\overset{\alpha}{M}$ verwendet; diese Zahl hieß Myriade. Zwei Myriaden, d. h. 20000, wurden durch $\overset{\beta}{M}$ bezeichnet. Mit dieser Methode konnte man alle Zahlen bis zu einer Myriade Myriaden, d. h. (in moderner Bezeichnungsweise) bis 10^8 bezeichnen.
Die höheren Zehnerpotenzen konnten im ionischen Zahlensystem nicht mehr geschrieben werden; es gab im Altgriechischen auch keine Namen dafür.

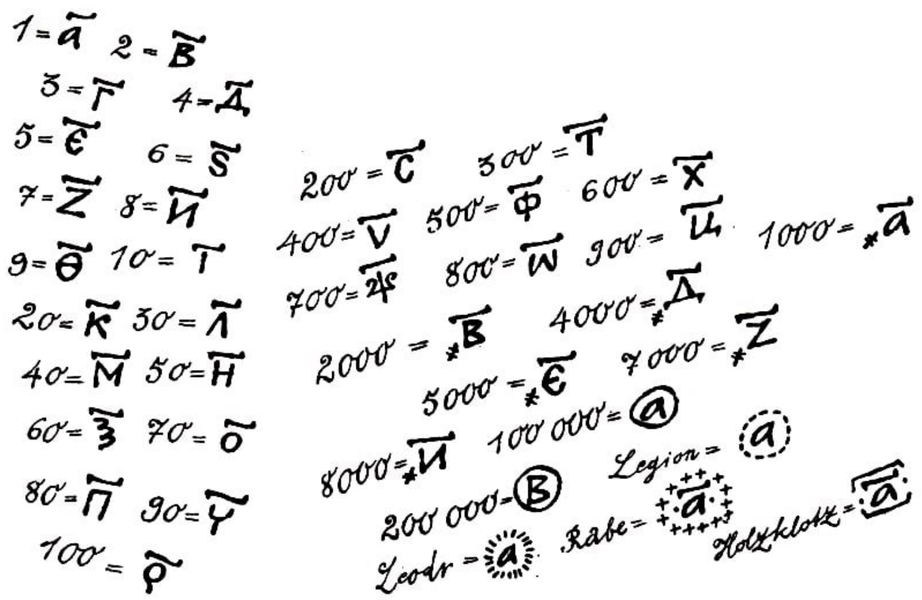
Der größte Mathematiker und Ingenieur des Altertums, Archimedes (3. Jh. v.u.Z.), widmete dem Problem, eine allgemeine Methode zur Bezeichnung beliebig großer Zahlen anzugeben, ein ganzes Werk, das er "Sandrechnung" nannte.
Von alters her diente den Griechen, wie übrigens auch anderen Völkern, der Sand als Veranschaulichung der Vorstellung von einer sehr großen und nicht mehr zählbaren Menge ("wie Sand am Meer").

In Volksmärchen begegnet man der "unlösbaren" Aufgabe, die Sterne am Himmel, die Tropfen im Meer oder die Sandkörner auf der Erde zu zählen. Archimedes zeigte, dass man solche Aufgaben - wenigstens im Prinzip - lösen kann. In der "Sandrechnung" konstruierte er ein System des Zählens, in dem es Zahlen gab, die nicht nur die Anzahl der Sandkörner in seinem heimatlichen Sizilien übertrafen, sondern auch solche, die größer sind als die Anzahl der Sandkörner im Weltall, selbst wenn es ganz mit Sand gefüllt wäre.

Was haben aber die Griechen zur Zeit des Archimedes unter dem ganzen Weltall verstanden?, Wie der griechische Astronom Aristarch von Samos nahm auch Archimedes in seinem Werk an, im Zentrum des Weltalls befinde sich die Sonne, um die sich die Erde und die anderen Planeten drehen.
Das Weltall habe die Form einer Kugel, auf deren Oberfläche die Fixsterne angeordnet seien. Das war sogar das erste heliozentrische System.

Um die Anzahl der Sandkörner berechnen zu können, musste Archimedes zumindest annähernd die Länge des Durchmessers des Weltalls und die Abmessungen des Sandkorns bestimmen und dann das Verhältnis ihrer Rauminhalte finden.
Archimedes machte das, indem er sich auf die Angaben der Astronomie seiner Zeit und auf eigene einschlägige Untersuchungen stützte.
Die Anzahl der Sandkörner, die sich dabei ergeben musste, liegt - in unseren heutigen Bezeichnungen - bei 10^{63}. Das ist eine sehr große Zahl, und vor Archimedes konnte man Zahlen dieser Größenordnung weder schreiben noch benennen.

Um sein Problem zu lösen, verfährt Archimedes wie folgt:
Alle Zahlen, die kleiner als eine Myriade Myriaden sind, d. h. alle Zahlen von 1 bis 10^8 vereinigt er in einer ersten Oktade (d.h. Achtergruppe) und nennt sie "Zahlen erster Ordnung". Die Zahl 10^8 ist die Einheit (die Eins) der zweiten Oktade, die alle Zahlen von 10^8 bis $10^{2\cdot 8}-1$ umfasst. Das sind die "Zahlen zweiter Ordnung".
Analog dazu ist $10^{2\cdot 8}$ die Eins der dritten Oktade, und die Zahlen von $10^{2\cdot 8}$ bis $10^{3\cdot 8}-1$ sind die "Zahlen dritter Ordnung".
Setzt man diese Konstruktion fort, so kommt man zur Myriaden-Myriaden-Oktade, die alle Zahlen von $10^{(10^8-1)\cdot 8}$ bis $10^{8\cdot 10^8}-1$ enthält. Alle diese Oktaden vereinigt Archimedes zur ersten Periode.



Die Zahl $10^{8 \cdot 10^8}$ ist die Eins der ersten Oktade der zweiten Periode usw. Auf diese Weise kann man bis zur letzten Zahl der letzten Oktade der Myriaden-Myriaden-Periode gelangen. Hier hört Archimedes auf, aber es ist klar, dass man mit Hilfe seines Verfahrens auch weiter gehen kann, nach dem man alle Perioden zu irgendeiner neuen Kategorie vereinigt hat.

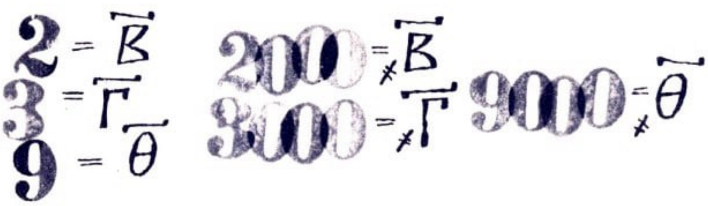
Selbst die von Archimedes konstruierten Zahlen reichen aber schon zur Berechnung der Anzahl der Sandkörner im Weltall völlig aus.
Die benötigte Zahl ist bereits in der achten Oktade der ersten Periode enthalten. Archimedes hat seine Konstruktion nur deshalb weiter fortgesetzt, um zu zeigen, dass man mit seiner Methode beliebig große Zahlen erfassen und benennen kann.

Die Methode des Archimedes kommt nahe an das Positionssystem heran. Es waren aber noch etwa tausend Jahre nötig, bis es der Menschheit gelang, das Dezimal-Positionszahlensystem zu schaffen.
Alphabetische Systeme gab es nicht nur bei den Ioniern, sondern auch bei den Juden, Phöniziern, Armeniern, Grusiniern und anderen Völkern.
Auch im alten Russland war ein alphabetisches Zahlensystem gebräuchlich. Über die Buchstaben, die Zahlen bezeichneten, wurde ein spezielles Zeichen gesetzt - ein Titlor, damit man sie von gewöhnlichen Wörtern unterscheiden konnte.
Sind nun alphabetische Systeme bequem?

Schreiben wir doch einmal im sogenannten kirchenslawischen System die Zahl 444 auf:

Das Schriftbild ist nicht länger als unseres. Das liegt daran, dass es in diesem alphabetischen System 27 Ziffern gibt, während es beispielsweise im ägyptischen System zur Bezeichnung aller Zahlen bis 1000 im ganzen nur drei Ziffern gab.

Die alphabetischen Zahlensysteme hatten aber auch einen großen Mangel. Mit ihrer Hilfe kann man nicht beliebig große Zahlen bezeichnen. Sie waren nur zum Aufschreiben der Zahlen bis 1000 sehr bequem.
Zwar konnten die Slawen wie auch die Griechen auch größere Zahlen schreiben, dazu mussten sie aber dem alphabetischen System neue Bezeichnungen hinzufügen. Die Zahlen 1000, 2000 usw. schrieben sie mit demselben Buchstaben wie 1, 2 usw., nur wurde links unten ein spezielles Zeichen angebracht; die 1000 zum Beispiel bezeichneten sie mit  .
Analog ist



Die Zahl 10000 wurde wieder mit demselben Buchstaben wie 1 bezeichnet, nur ohne Titlor, aber dafür mit einem Kreis umgeben:

Diese Zahl hieß "Unmenge". Hieraus entstand übrigens der Ausdruck "eine Unmenge Menschen".
Zur Bezeichnung der "Unmengen" wurden also die ersten neun Ziffern in einen Kreis geschrieben:

10 Unmengen, d. h. 100000, war die Einheit der höheren Kategorie, der sogenannten "Legion". Zur Bezeichnung der Legionen wurden die ersten 9 Ziffern mit punktierten Kreisen umgeben:

10 Legionen stellten eine neue Einheit dar, die "Leodr" hieß. Zur Bezeichnung der Leodren wurden die entsprechenden Zahlen in gestrichelte Kreise eingeschlossen:

Diese Bezeichnungen kann man als Anfänge eines Positionssystems ansehen, da zur Bezeichnung der Einheiten verschiedener Ordnungen ein und dieselben Symbole verwendet wurden, die man durch Zeichen zur Bestimmung der Ordnung ergänzte. Dieses System hieß die "kleine Zahl". In ihm gingen die Bezeichnungen nicht über die Millionen hinaus.

Daneben gab es aber auch eine "große" Zahl, in der mit dem Wort Unmenge schon 1000000 bezeichnet wurde. Eine Unmenge Unmengen (d. h. 10^{12}) hieß "Legion", eine Legion Legionen (d.h. 10^{24}) "Leodr", ein Leodr Leodren (d. h. 10^{48}) wurde "Rabe" genannt, die Zahl 10^{49} schließlich hieß "Holzklotz".
In einem Manuskript aus dem 17. Jh. heißt es: "Und mehr als das kann der menschliche Verstand nicht begreifen", d. h., für größere Zahlen gibt es keine Bezeichnungen mehr.
Zur Bezeichnung der "Raben" wurden die Buchstaben mit einem Kreis von Kreuzen umgeben:

und einen "Holzklotz" bezeichnete man so:

Die alphabetischen Zahlensysteme waren, wie schon gesagt, zum Rechnen mit großen Zahlen, die schon im Altertum auftraten (zum Beispiel bei astronomischen Berechnungen), wenig geeignet.
Im Laufe der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft haben diese Systeme den Positionssystemen Platz gemacht. Überreste der alphabetischen Zahlensysteme haben sich aber bis zum heutigen Tag erhalten. So nummerieren wir häufig noch Abschnitte mit Hilfe der Buchstaben des Alphabets. Die Buchstaben dienen allerdings nur noch zur Bezeichnung der Reihenfolge und nicht mehr einer Quantität. Mit solchen Buchstaben wird nicht mehr gerechnet.

2.8 Positionssysteme

Das erste uns bekannte Positionssystem ist das Dezimal-Sexagesimalsystem der Babylonier, das etwa 2500 bis 2000 v.u.Z. entstand. Basis dieses Systems ist die Zahl 60. Folglich müsste es in ihm 60 Ziffern geben, und die Multiplikationstabelle müsste aus

$$\frac{60 \cdot 60}{2} = 1800$$

Zahlen bestehen.
Wie haben nun die Babylonier ihre Ziffern geschrieben, und wie haben sie die riesige Multiplikationstabelle im Gedächtnis behalten?

Die Babylonier machten das so: Alle Zahlen von 1 bis 59 schrieben sie unter Anwendung des Additionsprinzips im Dezimalsystem. Dabei verwendeten sie stets zwei Zeichen: den geraden (stehenden) Keil  zur Bezeichnung der Eins und den liegenden Keil  zur Bezeichnung der Zehn. Die Zahl 32 beispielsweise schrieben sie folgendermaßen:  .
Diese Zeichen dienten in ihrem System als Ziffern. Die Zahl 60 wurde wiederum mit demselben Zeichen wie die Eins bezeichnet, d. h. mit . Genauso wurden 3600, 60^3 sowie alle anderen Potenzen von 60 bezeichnet. Die Zahl 92 zum Beispiel schrieb man so: 

Die "Ziffern", d. h. alle Zahlen von 1 bis 59, schrieben die Babylonier also in einem Dezimalsystem, das aber kein Positionssystem war, während die Zahlen an sich in einem Positionssystem mit der Basis 60 geschrieben wurden.

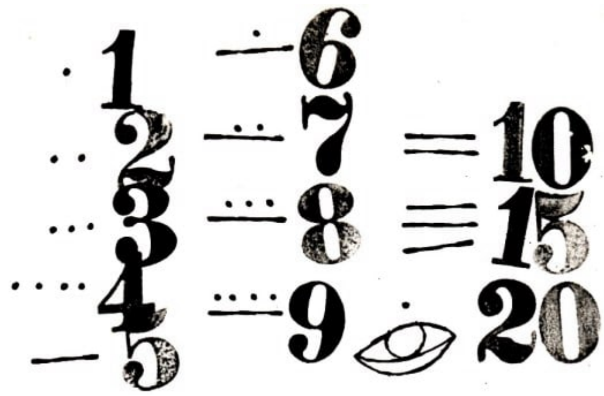
Eben darum nennt man ihr System Dezimal-Sexagesimalsystem (und nicht Sechzigersystem, wie man es nennen müsste, wenn man nur die Basis 60 zu berücksichtigen hätte)

Das Zahlensystem der Babylonier wies aber noch eine weitere wichtige Besonderheit auf: Es gab kein Symbol für die Null. Und wenn ein gerader Keil  dargestellt war, so konnte man ohne zusätzliche Erklärungen nicht bestimmen, welche Zahl aufgeschrieben war: 1, 60, 3600 oder irgendeine andere Potenz von 60.

Das Bild der Zahl 92 konnte also nicht nur 92 = 60 + 32; sondern auch 3600 + 32 = 3632 bedeuten. Es konnte auch $1\frac{32}{60}$. oder $1\frac{32}{3600}$ usw. bezeichnen. Das Zahlenbild im babylonischen System trug also keinen absoluten Charakter, zur Bestimmung der wirklichen Größe einer Zahl benötigte man noch zusätzliche Angaben. In der Folgezeit führten ' > die Babylonier ein spezielles Symbol zur Bezeichnung einer ausgelassenen Sechzigerstelle ein. Die Zahl 3632 beispielsweise müsste dann so geschrieben werden:

Am Ende einer Zahl wurde dieses Symbol jedoch niemals geschrieben.
Die Multiplikationstabelle hatten die Babylonier nicht im Kopf. Das wäre fast unmöglich gewesen. Sie benutzten bei ihren Berechnungen fertige Multiplikationstabellen, so wie wir jetzt z. B. Logarithmentafeln verwenden. Bei Ausgrabungen wurden sehr viele solcher Tabellen gefunden.

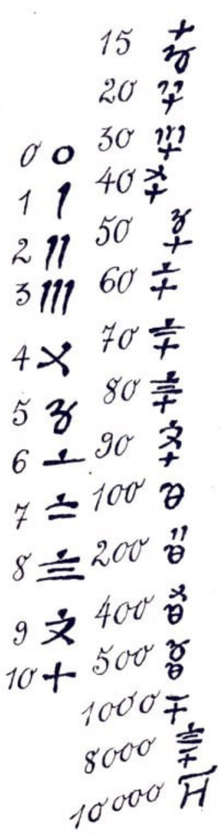
Das Dezimal-Sexagesimalsystem der Babylonier spielte bei der Entwicklung der Mathematik und der Astronomie eine große Rolle. Seine Spuren haben sich bis in unsere Tage erhalten. So teilen wir bis heute die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Sekunden ein, ebenso, wieder nach dem Beispiel der Babylonier, den Kreisumfang bzw. den vollen Winkel in 360 Teile (Grade).



Zu Beginn unserer Zeitrechnung verwendeten die Indianer vom Stamme der Maya, die auf der Halbinsel Yucatan in Mittelamerika lebten, ein anderes Positionssystem - mit der Basis 20.
Ihre Ziffern schrieben sie, ebenso wie die Babylonier, mit Hilfe des Additionsprinzips. Die Eins bezeichneten sie mit einem Punkt, die Fünf mit einem horizontalen Strich. In ihrem System gab es aber schon ein Symbol für die Null; es erinnert an ein halbgeschlossenes Auge.
Die Zahl 20 zum Beispiel schrieben die Maya mit Hilfe des Symbols für die Eins und des Symbols für die Null (darunter, denn die Zahlen wurden nicht in Zeilen, sondern in Spalten geschrieben).

Das Dezimal-Positionssystem entstand in Indien, und zwar nicht später als im 8. Jh. u.Z. Hier wurde auch erstmals die Null eingeführt.
Positionssysteme entstanden also unabhängig voneinander im alten Zweistromland, bei den Maya und schließlich in Indien. All das zeugt davon, dass die Entstehung des Positionsprinzips keine Zufälligkeit war.
Welcher Art waren nun die Voraussetzungen dafür, dass es entstehen konnte? Was führte die Menschen zu dieser bemerkenswerten Entdeckung?

Um diese Frage zu beantworten, wenden wir uns wieder der Geschichte zu. Im alten China, in Indien und in einigen anderen Ländern existierten Zahlbezeichnungssysteme, die auf einem multiplikativen Prinzip beruhten.



Wenn man beispielsweise die Zehner mit X und die Hunderter mit C bezeichnet, so kann man die Zahl 323 schematisch folgendermaßen schreiben: 3 C 2 X 3.

In solchen Systemen werden zum Aufschreiben einer gleichen Anzahl von Einem, Zehnern, Hundertern oder Tausendern ein und dieselben Symbole verwendet; hinter jedes Symbol wird aber die Benennung der entsprechenden Position geschrieben. Auf einem analogen Prinzip beruhen die russischen Rechenbretter.
Ein und dieselbe Anzahl von Kugeln bezeichnet die Anzahl der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw. je nachdem, in welcher Reihe sich diese Kugeln befinden.

Ein ebensolches Zählverfahren wurde beim Zählen mit "Stück-Anzahlen" angewendet. So legten die Iomba, ein Volksstamm in Zentralafrika, die Kaurimuscheln, die bei ihnen die Rolle von Geld spielten, zum Zählen in Häufchen zu je 20 Muscheln, dann legten sie 20 solcher Häufchen zu einem großen Haufen zusammen . usw.
Bei diesem Verfahren wird herausgearbeitet, dass man mit den Haufen genauso verfahren kann wie mit einzelnen Muscheln.

Der Forschungsreisende Miklucho-Maklai berichtet von der Zählweise der Papuas, die dem Zahlenaufbau nach dem Multiplikationsprinzip schon sehr nahe kommt. Um die Tage bis zur Rückkehr der Korvette "Witjas" zu zählen, verfuhren die Papuas wie folgt:

"Der erste legte ein Zettelchen nach dem anderen auf sein Knie und sagte dabei jedesmal "kare - kare" (eins); ein anderer wiederholte das Wort "kare" und krümmte dabei jedesmal einen Finger, zuerst an der einen Hand und danach an der anderen.
Nachdem er so bis zehn gezählt hatte, senkte er beide Fäuste auf die Knie und sagte "zwei Hände", wobei ein dritter Papua einen Finger der einen Hand krümmte. Mit den nächsten zehn Zetteln wurde genauso verfahren, wobei der dritte Papua den zweiten Finger krümmte. Analog machten sie es auch mit dem dritten Zehner."

Man erzählt, dass die Herden in Südafrika genauso gezählt wurden. Ein Neger zählte jedes Stück, ein zweiter die Anzahl der vom ersten gezählten Zehner, ein dritter die Anzahl der vom zweiten gezählten Zehner, d. h. die Anzahl der Hunderter. Bezeichnen wir die Finger des ersten mit I, die Finger des zweiten mit X und die des dritten mit C, so können wir nach dem multiplikativen System das Resultat folgendermaßen schreiben:

$$3\,C\,5\,X\,3\,I$$

In China ebenso wie in Indien existierte seit den ältesten Zeiten ebendiese Form der Zahlenschreibweise. Außerdem zeigten die Inder von alters her ein tiefes Interesse an großen Zahlen und an Methoden, sie aufzuschreiben. In einem alten indischen Buch ist von einem Wettkampf zwischen den Freiern der schönen Gopa die Rede.

Gegenstand des Wettkampfes waren die Kunst des Schreibens, die Arithmetik, der Kampf und die Kunst des Bogenschießens. Fast die Hälfte des Buches ist der Beschreibung der Wettkämpfe in Arithmetik gewidmet. Der Sieger Gauthama erdachte eine Zahlenskale, in der die Zahlen eine geometrische Folge mit dem Quotienten 100 durchlaufen, deren letztes Glied die Zahl $10^{7+9\cdot 46}$ war.

Die nächste Stufe zum Positionsprinzip bestand im Weglassen der Bezeichnungen für die Stellen beim Schreiben, so wie wir "drei zwanzig" sagen und nicht "drei Mark und zwanzig Pfennige".

Beim Schreiben großer Zahlen im System mit der Basis 10 war aber sehr häufig ein Symbol zur Bezeichnung der Null nötig. Die Einführung eines solchen Symbole vollendete die Schaffung des modernen Zahlensystems. Von Indien aus verbreitete es sich über die ganze Welt.

Manche Völker übernahmen dabei von den Indem nur das Prinzip der Zahlenbezeichnung und behielten die alten Schriftzeichen für die Ziffern bei (so war es z. B. in China), andere übernahmen auch die Ziffernschreibweise. Wir bringen eine Tabelle, aus der ersichtlich ist, wie sich die Gobar-Ziffern, die in den maurischen Staaten gebräuchlich waren, allmählich gewandelt haben, bis sie die heutige Form erhielten.

Wo die Gobar-Ziffern selbst herkommen, ist bis jetzt noch nicht geklärt.

Das neue Zahlensystem wurde in den europäischen Ländern keineswegs sofort übernommen. Bis ins 18. Jh. durften in offiziellen Schriftstücken nur römische Ziffern benutzt werden. Die Vorzüge des Positionsprinzips waren jedoch so groß, dass es schon im 13. Jh. von italienischen Kaufleuten verwendet wurde.

Leonardo von Pisa, ein bedeutender Gelehrter des 13. Jh., trat damals als überzeugter Anhänger des neuen Systems auf. In Deutschland, Frankreich und England wurde das neue Zahlensystem bis zum Ende des 15.Jh. kaum verwendet. Gegen Ende des 16. und zu Beginn des 17. Jh. errang das Positionssystem jedoch einen entscheidenden Sieg. Es wurde nicht nur von den Kaufleuten übernommen, sondern auch von allen Gelehrten. Nun wurde es allenthalben benutzt.

In Russland wurde, wie wir schon wissen, vor vielen Jahren ein alphabetisches System verwendet, das im Vergleich zum römischen viele Vorzüge hat. Auch hier setzte sich aber das neue Zahlensystem schnell durch. In allen mathematischen Manuskripten des 17. Jh. wurde ausnahmslos das Positions-Dezimalsystem verwendet.
Unter Peter I. verdrängten die indischen Ziffern die altslawischen schon auf den Münzen, in der Folgezeit verschwanden diese völlig.

In Deutschland wurden in der ersten Hälfte des 16.Jh., also zu Zeiten Luthers und der Bauernkriege, ebenfalls noch die römischen Ziffern benutzt, wie Rechnungen aus Annaberg und Buchholz im Erzgebirge zeigen. Erst dann setzten sich die indisch- arabischen Ziffern durch.
Um ihre Verbreitung erwarb sich der bekannte Rechenmeister Adam Ries, fälschlich oft Adam Riese genannt, große Verdienste. Ries wurde im Jahre der Entdeckung Amerikas, 1492, in Staffelstein (Franken) geboren. Er lebte einige Jahre in Erfurt, wo mehrere Bücher von ihm gedruckt wurden und wo er sich mit den damals vorhandenen Rechenbüchern vertraut machte.

Im Jahre 1523 siedelte er nach Annaberg (Erzgebirge) über, wo er in seinem Hause eine Rechenschule einrichtete und als "Rezessschreiber" und "Gegenschreiber" im Rechnungswesen des Erzbergbaues tätig war. Er starb am 30. 3. 1559. Die Stadt Annaberg hat ihm ein Denkmal gesetzt. Er selber hat sich mit seinen Rechenbüchern, die etwa 200 Jahre lang verwendet und vielfach nachgeahmt wurden, sowie mit seiner Lehrtätigkeit einen Platz in der Geschichte des Rechnens in Deutschland gesichert. (Diese Angaben sind dem Büchlein von Deubner: ... nach Adam Ries. Leipzig/Jena, Urania-Verlag, 1959 entnommen.)

Zum Abschluss zitieren wir den berühmten französischen Mathematiker und Physiker des 18. bis 19. Jh., P. S. Laplace:

"Die Idee, alle Zahlen durch neun Zeichen auszudrücken, indem man diesen außer ihrer Bedeutung durch ihre Form noch eine Bedeutung durch ihre Stellung beilegt, ist so einfach, dass es namentlich wegen dieser Einfachheit schwer zu begreifen ist, wie bewundernswert sie ist.
Wie schwer es war, auf diese Methode zu kommen, sehen wir am Beispiel der großen Genien der griechischen Wissenschaft, Archimedes und Apollonius, denen diese Idee verborgen blieb."

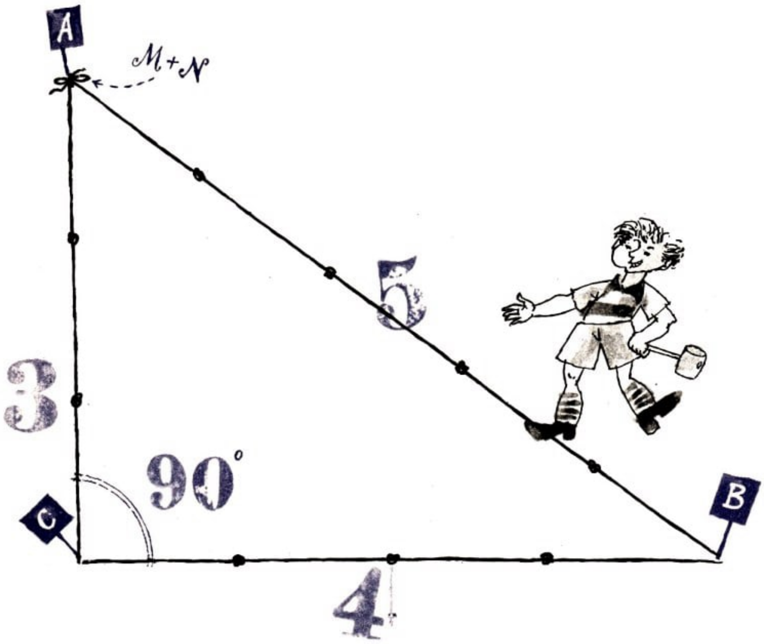
Einfachste diophantische Gleichungen

2.9 Pythagoreische Dreiecke

W. I. Netschajew

Ein Fußballplatz ist eine rechteckige Fläche von 90 m Länge und 60 m Breite. Wie kann man eine solche Fläche abstecken?
Auf dem Papier konstruiert man ein Rechteck mit Hilfe eines Lineals und eines Zirkels oder eines Zeichendreiecks. Zur Arbeit im Gelände sind diese Geräte zu klein. Bei der Konstruktion der rechten Winkel einer Fläche wie des Fußballplatzes können sie keine hinreichende Genauigkeit garantieren. Würde man jedoch Lineal, Zirkel und Zeichendreieck mit genügend großen Abmessungen anfertigen, so könnte man sie weder transportieren noch benutzen.

Seit uralten Zeiten kennt man ein sehr einfaches Verfahren zur Konstruktion von rechten Winkeln im Gelände. Wir wollen eine solche Konstruktion ausführen.
Dazu nehmen wir eine Schnur und drei Pflöcke. Auf der Schnur markieren wir 12 gleiche Abstände. Anschließend markieren wir auf der Schnur durch Knoten drei Abschnitte MB, BC und CN, und zwar soll der Abschnitt MB aus fünf, BC aus vier und CN aus drei solchen Abständen bestehen. Die Knoten M und N knüpfen wir zusammen und bezeichnen diesen neuen Knoten mit A.



Mit Hilfe zweier Pflöcke spannen wir den Teil BC der Schnur längs einer vorgegebenen Geraden, und zwar so, dass C mit dem Punkt zusammenfällt, durch den die Senkrechte zu der gegebenen Geraden verlaufen soll.
Jetzt brauchen wir den Knoten A nur noch auf einen solchen Punkt des Platzes zu legen, dass die Schnur gespannt, also die Abschnitte AB und AC geradlinig werden; an diesem Punkt schlagen wir einen Pflock ein.

Damit ist das Problem der Konstruktion eines rechten Winkels im Gelände gelöst, da der Winkel ACB ein Rechter ist.

Um das zu beweisen, zeigen wir, dass jedes Dreieck, dessen Seiten, in irgendeiner Längeneinheit gemessen, durch die Zahlen 3, 4 und 5 ausgedrückt werden können, rechtwinklig ist. Zu diesem Zweck betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten mit den beiden kleinsten Seiten des gegebenen Dreiecks übereinstimmen, und bestimmen dessen Hypotenuse x.
Nach dem Satz des Pythagoras ist $x^2 = 3^2 + 4^2$, also $x = 5$. Entsprechend liegende Seiten des gegebenen Dreiecks und des rechtwinkligen Dreiecks sind also einander gleich. Hieraus folgt aber, dass auch das gegebene Dreieck rechtwinklig ist.

Diese Eigenschaft des Dreiecks mit den Seiten 3, 4 und 5 war anscheinend schon den Landvermessern des alten Ägyptens bekannt. Daher nennt man ein solches Dreieck ein ägyptisches.
Jedes "ganzzahlige Dreieck" (d. h. jedes Dreieck, dessen Seiten ganzzahlige Längen haben), das einem ägyptischen Dreieck ähnlich ist, ist ebenfalls rechtwinklig. Existieren nun noch andere ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke?

Bezeichnet man Katheten und Hypotenuse irgendeines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks mit den Buchstaben x, y und z, so erhält man nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

Auch die Umkehrung gilt, d. h., sind x, y und z natürliche Zahlen, die der Gleichung (1) genügen, so ist das Dreieck mit den Seiten x, y und z rechtwinklig. Ein ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck nennt man mitunter kurz ein pythagoreisches Dreieck.

Unsere Überlegung zeigt, dass sich das Problem, alle pythagoreischen Dreiecke zu finden, auf die Lösung der Gleichung (1) in natürlichen Zahlen reduziert. Mit der Lösung dieser Gleichung befassen wir uns etwas später, zuvor wollen wir noch einige andere Probleme betrachten.

2.10 Fahrscheinkauf für die Metro

Jeder Fahrscheinautomat in der Moskauer Metro ist mit folgender Aufschrift versehen (Die Zahlenbeispiele entstammen der Zeit vor der Umbewertung des Rubels !):

"Werfen Sie 50 Kopeken in Stücken zu
10 + 20 + 20
10 + 10 + 15 + 15
10 + 10 + 10 + 20
15 + 15 + 20
10 + 10 + 10 + 10 + 10
ein."

Dabei kann man folgende Frage stellen:
Haben die Konstrukteure des Automaten alle Möglichkeiten, die 50 Kopeken in Stücken

zu 10, 15 und 20 Kopeken zu zahlen, vorausgesehen oder gibt es noch mehr Möglichkeiten?
Nehmen wir an, die Summe einiger Geldstücke zu 20, 15 und 10 Kopeken betrage 50 Kopeken. Dabei soll vereinbarungsgemäß die Anzahl der Geldstücke eines bestimmten Wertes gleich Null sein, wenn keine Geldstücke dieses Wertes in der Summe vorkommen. Bezeichnen wir mit x, y und z die jeweilige Anzahl der in der Summe enthaltenen Stücke zu 20, 15 und 10 Kopeken, so erhalten wir die Gleichung

$$20x + 15y + 10z = 50 \tag{2}$$

Jeder Möglichkeit, die 50 Kopeken in Stücken zu 20, 15 und 10 Kopeken zu zahlen, entspricht also eine Lösung der Gleichung (2) in nichtnegativen ganzen, d. h. natürlichen Zahlen bzw. Null. Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung.
Jeder Lösung x, y, z der Gleichung (2) in nichtnegativen ganzen zahlen entspricht eine bestimmte Möglichkeit, die 50 Kopeken in Stücken zu 20, 15 und 10 Kopeken zu zahlen. Das Problem, alle Möglichkeiten des Fahrscheinkaufs in der Metro aufzufinden, reduziert sich also darauf, alle Lösungen der Gleichung (2) in nichtnegativen ganzen Zahlen zu bestimmen.

2.11 Wiegen auf einer Schalenwaage

Kann man 28 g irgendeines Stoffes auf einer Schalenwaage wiegen, wenn man nur Wägestücke zu 3 g und 5 g hat?
Es stellt sich heraus, dass man das sogar auf mehrere Arten machen kann.

Wir wollen uns bemühen, alle Möglichkeiten aufzufinden. Dazu legen wir die Masse von 28 g auf die rechte Waagschale und stellen durch Wägestücke zu 3 g und 5 g das Gleichgewicht her. Es sind folgende Fälle möglich:

a) alle Wägestücke befinden sich auf der linken Waagschale;
b) auf der linken Waagschale befinden sich nur 3-g-Stücke, auf der rechten nur 5-g-Stücke zusammen mit der Masse;
d) auf der linken Waagschale befinden sich nur 5-g-Stücke und auf der rechten nur 3-g-Stücke zusammen mit der Masse.

Bezeichnen wir die Anzahl der verwendeten 3-g-Stücke mit x und die Anzahl der verwendeten 5-g-Stücke mit y, so erhalten wir entsprechend den oben angeführten Fällen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a)\quad & 3x + 5y = 28, \\ b)\quad & 3x = 28 + 5y \quad \text{oder} \quad 3x - 5y = 28, \\ c)\quad & 5y = 28 + 3x \quad \text{oder} \quad 5y - 3x = 28. \end{aligned} \tag{3}$$

Um alle Möglichkeiten aufzufinden, ist jede der erhaltenen Gleichungen in nichtnegativen ganzen Zahlen oder, was dasselbe ist, die Gleichung (3) in natürlichen Zahlen bzw. Null zu lösen. Dabei ist zu beachten, dass die Werte der Unbekannten x und y nicht nur die Anzahl der verwendeten Wägestücke angeben, sondern auch deren Platz auf den Waagschalen.
Ist beispielsweise der Wert der Unbekannten x positiv, so ist die Anzahl der 3-g-Stücke gleich x, und diese befinden sich alle auf der linken Waagschale. Ist der Wert der Unbekannten x negativ, so ist die Anzahl der 3-g- Stücke gleich x, und diese befinden sich alle auf der rechten Waagschale.

2.12 Diophantische Gleichungen

Wie wir gesehen haben, lässt sich jede der betrachteten Aufgaben auf die Lösung einer Gleichung mit mehr als einer Unbekannten in ganzen Zahlen zurückführen. Solche Gleichungen nennt man unbestimmte oder diophantische Gleichungen, nach dem Mathematiker Diophantos von Alexandria, der im 3. Jh. u. Z. lebte und sich mit der Lösung solcher Gleichungen in rationalen Zahlen befasste. Gewöhnlich ergibt sich aus der Aufgabenstellung, dass die Lösungen irgendwelchen arithmetischen Bedingungen genügen müssen, so dass sich der Grad der Unbestimmtheit verringert.
Meistens sollen die Lösungen ganzzahlig oder wenigstens rational sein.

Mit Lösungen in ganzen Zahlen befassten sich als erste die indischen Gelehrten. Sie gaben eine allgemeine Methode zur Lösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten in ganzen Zahlen an. Sie fanden auch die Lösung einiger unbestimmter Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen.

2.13 Rationale und ganzzahlige Lösungen linearer diophantischer Gleichungen

Es ist nicht schwer, eine diophantische Gleichung ersten Grades (dafür sagt man auch lineare diophantische Gleichung) mit ganzzahligen Koeffizienten in rationalen Zahlen zu lösen. Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$29x - 3y = 17 \tag{4}$$

Um alle Lösungen dieser Gleichung aufzufinden, untersuchen wir, für welche rationalen Werte der einen Unbekannten der entsprechende Wert der zweiten Unbekannten rational ist.

Jedem Wert der Unbekannten x entspricht eindeutig ein Wert der Unbekannten y, der durch die Formel

$$y = \frac{29x - 17}{13} \tag{5}$$

bestimmt ist. Hat die Unbekannte x einen rationalen Wert, so ist auch der sich nach Formel (5) ergebende Wert der Unbekannten y rational.

Zur Bestimmung der ganzzahligen Lösungen der Gleichung (4) können wir die Formel (5) nicht unmittelbar verwenden, da die zweite Unbekannte für ganzzahlige Werte der ersteren nicht notwendig ganzzahlige Werte annimmt. Um alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (4) zu bestimmen, suchen wir solche Werte der Unbekannten x, für die der entsprechende Wert der Unbekannten y eine ganze Zahl ist.
Diese auf den ersten Blick unbedeutende Änderung der Problemstellung erschließt einen Weg zur Lösung der Aufgabe.

Da $\frac{29}{13} = 2 + \frac{3}{13}$ und $\frac{17}{13} = 1 + \frac{4}{13}$, erhalten wir aus Formel (5) die Beziehung

$$y = 2x - 1 + \frac{3x - 4}{13} \tag{6}$$

Jetzt müssen wir untersuchen, für welche ganzzahligen Werte von x die Unbekannte y ganzzahlige Werte annimmt. Da die Zahl $2x - 1$ für ganze x eine ganze Zahl ist, folgt aus (6), dass y für ganze x nur dann ganzzahlige Werte annimmt, wenn der Ausdruck $\frac{3x-4}{13}$ eine ganze Zahl ist. Unsere Aufgabe ist zwar noch nicht gelöst, wir sind aber dem Ziel schon näher.
Setzen wir nämlich

$$\frac{3x - 4}{13} = y_1$$

so sehen wir, dass die Frage, für welche ganzzahligen Werte der Unbekannten x die Unbekannte y_1 ganzzahlige Werte annimmt, dem Problem gleichwertig ist, die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$3x - 13y_1 = 4 \tag{7}$$

zu bestimmen. Es ist uns also gelungen, das Problem der Lösung der Gleichung (4) in ganzen Zahlen auf das der Lösung der Gleichung (7) in ganzen Zahlen zurückzuführen. Welchen Vorzug hat nun die zweite Gleichung gegenüber der ersten?

Als einfachste diophantische Gleichung ist natürlich eine Gleichung anzusehen, bei der wenigstens einer der Koeffizienten der Unbekannten gleich 1 oder -1 ist. In diesem Falle ist diese Unbekannte bei jedem ganzzahligen Wert der anderen Unbekannten ganzzahlig.
Je kleiner daher der kleinste Absolutbetrag der Koeffizienten der Unbekannten ist, desto leichter ist die Gleichung zu lösen. In der Gleichung (4) ist der kleinste Absolutbetrag

der Koeffizienten die Zahl 13, in der Gleichung (7) schon 3. Wie haben wir das erreicht?

Der Koeffizient der Unbekannten x und das absolute Glied der Gleichung wurden durch die bei der Division dieser Zahlen durch 13 verbleibenden Reste ersetzt. Der Rest bei der Division einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl ist aber immer kleiner als diese natürliche Zahl. Jetzt wird auch verständlich, weshalb wir zu Beginn die Unbekannte y durch die Unbekannte x ausgedrückt haben.
Wir haben nach der Unbekannten mit dem kleinsten Absolutbetrag des Koeffizienten aufgelöst. Nachdem wir nun eine gewisse Übung erlangt haben, können wir uns der Gleichung (7) annehmen.

Für welche ganzzahligen Werte der Unbekannten y_1 nimmt die Unbekannte x ganzzahlige Werte an?
Aus der Gleichung

$$x = \frac{4+13y_1}{3} = 1 + 4y_1 + \frac{1+y_1}{3} \tag{8}$$

ersehen wir, dass die Unbekannte x für ganzzahlige y_1 nur dann ganzzahlige Werte annimmt, wenn $\frac{1+y_1}{3}$ eine ganze Zahl ist.
Bezeichnet man diesen Ausdruck mit x_1, so erhält man

$$1 + y_1 = 3x_1 \qquad \text{oder} \qquad 3x_1 - y_1 = 1 \tag{9}$$

Das Problem ist somit auf die Lösung der Gleichung (9) in ganzen Zahlen zurückgeführt.
Die Gleichung (9) in ganzen Zahlen zu lösen bedeutet, dass man untersuchen muss, für welche ganzzahligen Werte von x_1 die Unbekannte y_1 ebenfalls ganzzahlige Werte annimmt.
Wegen $y_1 = 3x_1 - 1$ nimmt y_1 für beliebige ganzzahlige x_1 ganzzahlige Werte an. Aus den Gleichungen (8) und (6) finden wir nun nacheinander die Ausdrücke für die Unbekannten x und y:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4(3x_1 - 1) + x_1 = 13x_1 - 3 \\ y &= 2 \cdot (13x_1 - 3) - 13x_1 - 1 = 29x_1 - 8 \end{aligned}$$

Aus den obigen Ausführungen folgt nun, dass

$$x = 13x_1 - 3 \qquad , \qquad y = 29x_1 - 8$$

für $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (4) liefern.

Genauso kann man auch vorgehen, wenn die Zahl der Unbekannten in einer diophantischen Gleichung ersten Grades größer als zwei ist. Zu diesem Zweck ist nach der Unbekannten mit dem (absolut) kleinsten Koeffizienten aufzulösen und die Frage zu stellen, für welche ganzzahligen Werte der anderen Unbekannten die betreffende Unbekannte ganz ist.
Man wird leicht selbst herausfinden, wie weiter zu verfahren ist. Unsere Methode zur Lösung unbestimmter Gleichungen in ganzen Zahlen unterscheidet sich nur wenig von dem Verfahren, das schon von den Indern angegeben worden ist.

Weil nun eine unbestimmte Gleichung bei der Lösung nach dieser Methode durch eine Kette von Gleichungen mit stets kleiner werdenden Koeffizienten ersetzt wird, haben die indischen Mathematiker dieses Verfahren die Methode der absteigenden Koeffizienten gebannt.
Heute sagt man auch Deszendenzmethode.

2.14 Lösung der Wägungsaufgabe

Nun wollen wir also die Gleichung (3) in ganzen Zahlen lösen. Wir lösen nach der Unbekannten x auf:

$$x = \frac{28-5y}{3} = 9 - y + \frac{1-2y}{3}$$

Es gilt natürlich auch folgende Gleichung:

$$x = 9 - 2y + \frac{1+y}{3}$$

und diese wollen wir benutzen. Unser Ziel besteht ja darin, den Koeffizienten von y so klein wie möglich zu machen. Wir führen die Bezeichnung

$$x_1 = \frac{1+y}{3}$$

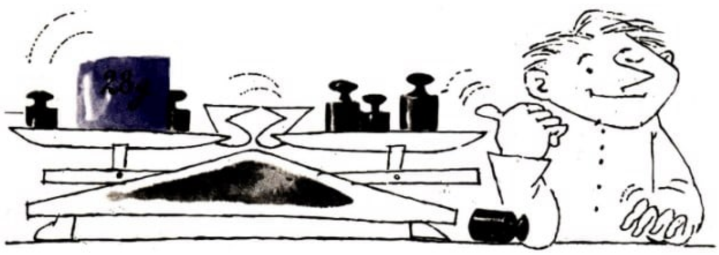
ein. Das Problem ist damit auf die Lösung der Gleichung $3x_1 - y = 1$ in ganzen Zahlen zurückgeführt. Die Lösung dieser Gleichung ergibt $y = 3x_1 - 1$, wobei x_1 eine beliebige ganze Zahl ist. Dann ist aber

$$x = 9 - 2 \cdot (3x_1 - 1) + x_1 = 11 - 5x_1$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (3) kann man also wie folgt schreiben:

$$x = 11 - 5x_1 \qquad , \qquad y = 3x_1 - 1$$

wobei $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ist.



Wir bestimmen einige Lösungen dieser Gleichung, welche folgenden Werten von x_1 entsprechen: $x_1 = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$:

x_1	0	1	-1	2	-2	3	-3
x	11	6	16	1	21	-4	26
y	-1	2	-4	5	-7	8	-10

Die Gleichung (3) besitzt unendlich viele Lösungen. Wir können jedoch nur einige von ihnen verwenden. Das hängt von der Anzahl der Wägestücke ab, die wir zur Verfügung haben, sowie von der Größe der Waagschalen.

2.15 Lösung der Fahrscheinaufgabe

Wir wollen nun die Gleichung (2) in nichtnegativen ganzen Zahlen lösen. Zunächst bestimmen wir alle ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung. Nach der Division beider Seiten der Gleichung durch 5 erhalten wir

$$4x + 3y + 2z = 10$$

Aus dieser Gleichung finden wir, wenn wir wieder nach der Unbekannten mit dem - absolut - kleinsten Koeffizienten auflösen

$$z = \frac{10 - 4x - 3y}{2} = 5 - 2x - y - \frac{y}{2}$$

Hieraus folgt, dass z für ganzzahlige Werte der Unbekannten x und y nur dann ebenfalls ganzzahlig ist, wenn $\frac{y}{2}$ eine ganze Zahl ist, d. h., wenn y eine gerade Zahl ist. Wir setzen also $y = 2y_1$ und erhalten

$$x = 5 - 2x - 3y_1$$

Wir finden alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (2), indem wir den Parametern x und y_1 in den Formeln

$$x = x; \qquad y = 2y_1; \qquad z = 5 - 2x - 3y_1 \tag{10}$$

alle möglichen ganzzahligen Werte geben. Uns interessieren jedoch nur die nichtnegativen Lösungen der Gleichung (2). Deshalb müssen wir solche ganzzahligen Werte der Parameter x und y_1 auffinden, für welche die durch (10) bestimmten Unbekannten x, y, z nichtnegative Werte annehmen. Zu diesem Zweck müssen wir das System der Ungleichungen

$$x \geq 0, \qquad 2y_1 \geq_0, \qquad 5 - 2x - 3y_1 \geq 20$$

oder

$$y_1 \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq \frac{5 - 3y_1}{2}$$

in ganzen Zahlen lösen. Offenbar kann y_1 nur zwei Werte annehmen: 0 und 1. Für $y_1 = 0$ ist x gleich 0, 1 oder 2. Für $y_1 = 1$ kann x nur gleich 0 oder 1 sein.
Die Gleichung (2) besitzt also in nichtnegativen ganzen Zahlen nur die 5 Lösungen:

x	0	1	2	0	1
y	0	0	0	2	2
z	5	3	1	2	0

Mit anderen Worten: Die 50 Kopeken für den Metrofahrschein kann man in Geldstücken zu 10, 15 und 20 Kopeken wirklich nur auf die oben angegebenen fünf verschiedenen Arten bezahlen.

Wir haben einige Gleichungen ersten Grades, sogenannte lineare Gleichungen, betrachtet. Jede von ihnen besaß, wie wir herausgefunden haben, ganzzahlige Lösungen. Man kann jedoch auch Gleichungen angeben, die in ganzen Zahlen keine Lösungen besitzen. Eine solche Gleichung ist z.B.

$$3x - 6y = 5 \tag{11}$$

Würde sie nämlich für ganzzahlige x und y gelten, so müsste 5 durch 3 teilbar sein. So ergeben sich die folgenden Fragen:
Welche diophantischen Gleichungen sind in ganzen Zahlen lösbar? Gibt es Bedingungen für die Lösbarkeit solcher Gleichungen, und wie lauten sie?

Wenn eine diophantische Gleichung ersten Grades Lösungen in ganzen Zahlen besitzt, kann man diese Lösungen dann immer mit der oben beschriebenen Deszendenzmethode auffinden?

Die Antwort auf die erste Frage liefert der folgende Satz:

Die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \tag{12}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten ist in ganzen Zahlen nur dann lösbar, wenn das Absolutglied b durch den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten $a_1, a_2, ..., a_n$ teilbar ist. (Natürlich soll auch b eine ganze Zahl sein.)

Der Beweis des Satzes ist elementar, wir müssen aber aus Platzgründen darauf verzichten, ihn hier anzuführen.

Wir wollen die andere Frage beantworten: Führt die Deszendenzmethode bei der Lösung von diophantischen Gleichungen ersten Grades in ganzen Zahlen immer zum Erfolg?

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Der Grundgedanke der Methode besteht darin, die gegebene Gleichung durch eine ihr gleichwertige (äquivalente) Gleichung zu ersetzen, bei der, der Absolutbetrag eines Koeffizienten kleiner ist als der Absolutbetrag jedes der Koeffizienten der vorgegebenen Gleichung.

Ist a_1 der dem Absolutbetrag nach kleinste Koeffizient der Unbekannten der Gleichung (12), so ersetzen wir diese Gleichung durch eine andere, in der alle Koeffizienten außer dem von x_1 durch die Reste bei der Division dieser Koeffizienten durch a_1 ersetzt wurden.
Wenn dabei auch nur einer der Koeffizienten $a_2, a_3, ..., a_n$ nicht ohne Rest durch a_1 teilbar ist, erhalten wir eine Gleichung mit (absolut) kleineren Koeffizienten. Mit dieser Gleichung verfahren wir genauso wie mit der ursprünglichen.
Sind aber alle Zahlen $a_2, a_3, ..., a_n$ durch a_1 teilbar, so ist auch b durch a_1 teilbar (wenn die gegebene Gleichung überhaupt in ganzen Zahlen lösbar ist). Teilt man in diesem Falle beide Seiten der Gleichung durch a_1 so erhält man eine Gleichung, deren ganzzahlige Lösungen ohne Mühe aufzufinden sind.

Das beschriebene Verfahren ermöglicht es, wenn die Gleichung überhaupt in ganzen Zahlen lösbar ist, diese ganzzahligen Lösungen immer zu bestimmen.

2.16 Unbestimmte Systeme von Gleichungen ersten Grades

Zur ganzzahligen Lösung unbestimmter Gleichungssysteme ersten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, d. h. solcher Gleichungssysteme, bei denen die Anzahl der Unbekannten die Anzahl der Gleichungen übersteigt, verwendet man gewöhnlich die Methode der sukzessiven Elimination der Unbekannten.

Wir wollen zum Beispiel folgendes Gleichungssystem in ganzen Zahlen lösen:

$$3x + 5y - 7z = 15 \qquad , \qquad 2x + 3y - 9z = 12$$

Zunächst betrachten wir die erste Gleichung und stellen fest, für welche ganzzahligen Werte der Unbekannten y und z die Unbekannte x ganzzahlig ist. Wir erhalten

$$x = \frac{15 - 5y + 7z}{3} = 5 - 2y + 2z + \frac{y + z}{3}$$

Setzt man

$$\frac{y + x}{3} = x_1 \qquad \text{so folgt hieraus} \qquad z = 3x_1 - y \qquad \text{und}$$

$$x = 5 - 2y + 2(3x_1 - y) + x_1 = 5 - 4y + 7x_1$$

Diese Werte von x und z setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$2(5 - 4y + 7x_1) + 3y - 9(3x_1 - y) = 12$$

oder

$$4y - 13x_1 = 2$$

Diese Gleichung lösen wir in ganzen Zahlen:

$$y = \frac{2 + 13x_1}{4} = 3x_1 + \frac{2 + x_1}{4}, \qquad y_1 = \frac{2 + x_1}{4}$$
$$x_1 = 4y_1 - 2 \quad \text{und} \quad y = 3(4y_1 - 2) + y_1 = 13y_1 - 6$$

Somit kann man sämtliche ganzzahligen Lösungen des gegebenen Gleichungssystems aus folgenden Formeln erhalten:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 4(13y_1 - 6) + 7(4y_1 - 2) = 15 - 24y_1 \\ y &= 13y_1 - 6 \\ z &= 3(4y_1 - 2) - 13y_1 + 6 = -y_1 \end{aligned}$$

wobei y_1 eine ganze Zahl ist.

Auf unbestimmte Gleichungssysteme ersten Grades lassen sich zum Beispiel die Aufgaben zurückführen, bei denen Zahlen gefunden werden sollen, die bei Division durch gegebene ganze Zahlen vorgegebene Reste ergeben. In der Zahlentheorie findet man diese Aufgaben unter der Bezeichnung "Simultane Kongruenzen".

2.17 Rationale Lösungen diophantischer Gleichungen höheren Grades

Die Lösung solcher Gleichungen ist ein unvergleichbar schwierigeres Problem als die Lösung diophantischer Gleichungen ersten Grades in rationalen Zahlen. Sehen wir uns einmal die Lösung der Gleichung

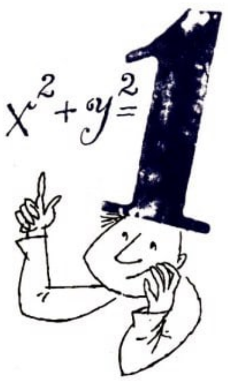
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{13}$$

in rationalen Zahlen an. Dabei verstehen wir unter Lösung ein Paar von Zahlen x und y, in Zeichen $(x; y)$, derart, dass die Gleichung (13) erfüllt ist. Dieselbe Methode kann auch zur Lösung (in rationalen Zahlen) von Gleichungen der Form

$$ax^2 + y^2 = 1$$

benutzt werden, wobei a eine beliebige gegebene rationale Zahl ist, sowie zur Lösung einiger anderer Gleichungen. Sie stammt von Diophantos. Es ist interessant, dass der Gedanke, der dieser Methode zugrunde liegt, auch bei der Berechnung einiger Integrale verwendet wird.

Ist $(x; y)$ eine rationale Lösung der Gleichung (13), so sind $(-x; y)$, $(-x; -y)$ und $(x; -y)$ ebenfalls Lösungen dieser Gleichung. Mindestens eine dieser vier Lösungen ist eine Lösung der gegebenen Gleichung in nichtnegativen rationalen Zahlen.
Gleichung, (13) besitzt die Lösungen $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$ und $(-1; 0)$.
Bei allen anderen Lösungen dieser Gleichung sind die Werte beider Unbekannten von Null verschieden.



Aus unseren Ausführungen folgt, dass wir alle Lösungen von (13) in rationalen Zahlen kennen, wenn wir alle positiven rationalen Lösungen dieser Gleichung gefunden haben. Um aber alle Lösungen der Gleichung (13) in positiven rationalen Zahlen zu bestimmen, untersuchen wir, für welche positiven rationalen Werte der Unbekannten x die Zahl $\sqrt{1-x^2}$ rational ist (unter $\sqrt{a}$ verstehen wir die positive Wurzel).
Diese Zahl stellen wir in der Form

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - tx \tag{14}$$

dar, wobei t eine rationale Zahl sei. Damit haben wir die Frage nach den rationalen Werten der Unbekannten x, für die $\sqrt{1-x^2}$ eine rationale Zahl ist, auf das Problem zurückgeführt, für welche x-Werte die Gleichung (14) gilt. Zur Beantwortung dieser

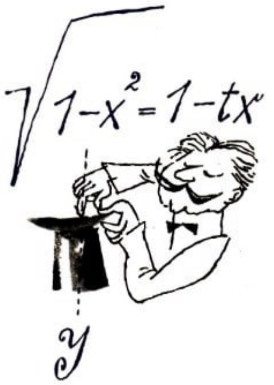
Frage lösen wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= (1 - tx)^2 = 1 - 2tx + t^2x^2 \\ (1 + t^2)x &= 2t \\ x &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Diese Schritte kann man auch in der umgekehrten Reihenfolge ausführen. Gleichung (14) gilt also nur dann, wenn $x = \frac{2t}{1+t^2}$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt, dass für rationale t auch x rational ist. Daher ist die Zahl $\sqrt{1 - x^2}$ für rationale Werte der Unbekannten x rational, wenn $x = \frac{2t}{1+t^2}$ ist, wobei t eine rationale Zahl ist. Andererseits ist

$$1 - tx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$



Daher kann man jede Lösung der Gleichung (13) nach den Formeln

$$x = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

erhalten.

Wie man leicht sieht, erhalten wir alle Lösungen der Gleichung (13) in positiven rationalen Zahlen, wenn wir dem Parameter t alle positiven rationalen Werte zwischen 0 und 1 erteilen.

Besonders schwierig ist die Lösung von Gleichungen höheren als zweiten Grades in rationalen Zahlen. Bis heute gibt es z. B. noch keinen elementaren Beweis des Satzes, dass die Gleichung $x^3 + y^3 = 1$ in positiven rationalen Zahlen keine Lösungen hat.

2.18 Ganzzahlige Lösungen diophantischer Gleichungen höheren Grades

Die Lösung diophantischer Gleichungen höheren Grades mit ganzzahligen Koeffizienten in ganzen Zahlen ist in vielen Fällen bedeutend schwieriger als die Lösung derselben Gleichungen in rationalen Zahlen.

Indische Mathematiker (5. bis 12. Jh.) haben die Lösung einiger Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen gefunden. Vollständig gelöst wurde dieses Problem von dem französischen Mathematiker J. L. Lagrange (1736-1813). Gleichungen dritten Grades mit zwei Unbekannten sind bis heute nicht vollständig erforscht. Einige Typen solcher Gleichungen konnten von dem sowjetischen Mathematiker B. N. Delauney erfolgreich behandelt werden.

Es muss gesagt werden, dass schon die Bestimmung der Anzahl der Lösungen solcher Gleichungen dritten und höheren Grades außerordentlich schwierig ist.
Zu Beginn unseres Jahrhunderts gelang es dem norwegischen Mathematiker A. Thue, folgenden interessanten Satz zu beweisen:

Satz:
Die diophantische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten

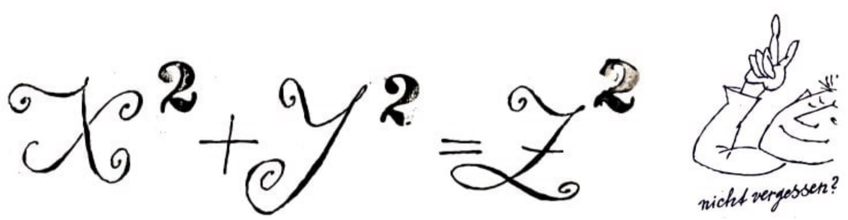
$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_ny^n = b$$

wobei n eine ganze Zahl größer als 2 ist, hat im allgemeinen nur endlich viele Lösungen (eventuell gar keine) in ganzen Zahlen.
Ausnahmen bilden die Fälle, in denen die linke Seite eine Potenz eines homogenen Binoms ersten Grades oder eines Trinoms zweiten Grades ist.

Noch schwieriger ist das Problem der ganzzahligen Lösungen diophantischer Gleichungen höheren Grades mit mehr als zwei Unbekannten. Bis heute kennt man noch keine allgemeine Methode zur Lösung solcher Gleichungen. Gleichung (1) gehört zu den einfachsten von ihnen.

Ist das Tripel a, b, c eine Lösung dieser Gleichung in natürlichen, zueinander teilerfremden Zahlen, dann ist $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ eine Lösung der Gleichung (13) in rationalen Zahlen.
Daher ist $\frac{a}{c} = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\frac{b}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, wobei t eine rationale Zahl ist, die der Bedingung $0 < t < 1$ genügt.
Wir setzen nun $t = \frac{n}{m}$, wobei n und m ganze Zahlen sind, die wir als positiv und teilerfremd voraussetzen; wegen $0 < t < 1$ ist $n < m$. Somit ist $\frac{a}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ und $\frac{b}{c} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$.
Auf der linken Seite der ersten Gleichung steht ein unkürzbarer Bruch. Hätten nämlich a und c einen gemeinsamen Primteiler, so wäre auch b durch diesen Teiler teilbar.
Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht entweder ein unkürzbarer Bruch oder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner durch 2, aber durch keine größere Zahl teilbar sind. Anderenfalls wären mindestens eine der ganzen Zahlen m oder n und der Nenner dieses Bruches, d.h. $m^2 + n^2$, durch irgendeine Primzahl p teilbar.

Dann wäre aber auch die andere Zahl durch p teilbar. Folglich hätten die Zahlen m und n den gemeinsamen Teiler p. Das widerspricht aber der Bedingung, dass die Zahlen m und n keinen gemeinsamen Teiler haben sollen. Weiterhin stellen wir fest, dass die Zahl 2 nur dann gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner des ersten Bruches sein kann, wenn m und n ungerade Zahlen sind.



Sind aber zwei unkürzbare Brüche mit natürlichen Zahlen als Zähler und Nenner gleich, so stimmen die Zähler und die Nenner dieser Brüche ebenfalls überein.

Daher ist im ersten Fall $a = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, und im zweiten Fall $a = mn$, $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$.
Aus der zweiten Gleichung erhalten wir entsprechend $b = m^2 - n^2$ bzw. $b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$.
Folglich lautet die Lösung der Gleichung (1) im ersten Falle

$$a = 2mn, \qquad b = m^2 - n^2, \qquad c = m^2 + n^2$$

wobei die natürlichen Zahlen m und n keinen gemeinsamen Teiler besitzen und $n < m$ ist.
Im zweiten Falle lautet die Lösung der Gleichung (1)

$$a = mn, \qquad b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2), \qquad c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$$

wobei m und n ungerade natürliche Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und $n < m$ ist.

In diesen Formeln ist eine der Zahlen a und b gerade, die andere ungerade. Da die Unbekannten x und y in der Gleichung (1) gleichberechtigt sind, können wir beim Aufsuchen der Lösungen von (1), in denen x gerade ist, die Formeln

$$x = 2mn, \qquad y = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2 \tag{15}$$

benutzen, wobei m und n teilerfremde natürliche Zahlen sind, von denen genau eine gerade und $n < m$ ist.

Aus diesen Formeln kann man nämlich nicht nur jede Lösung der Gleichung (1) in natürlichen teilerfremden Zahlen erhalten, sondern die Formeln (15) liefern für beliebige Werte von n und m, die den genannten Bedingungen genügen, stets Lösungen der Gleichung (1).

Unter Verwendung der Formeln (15) geben wir einige Lösungen der Gleichung (1) für kleine Werte der Parameter m und n an:

m	2	3	4	4	5	5
n	1	2	1	3	2	4
$x = 2mn$	4	12	8	24	20	40
$y = m^2 - n^2$	3	5	15	7	21	9
$z = m^2 + n^2$	5	13	17	25	29	41

Als sich der bekannte französische Mathematiker Pierre Fermat (1601-1655) mit diophantischen Gleichungen befasste, äußerte er die Vermutung, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für kein natürliches $n > 2$ im Bereich der natürlichen Zahlen eine Lösung besitze. Für $n = 3$ und $n = 4$ wurde der Beweis dieser Behauptung von L. Euler gefunden.
In der folgenden Zeit wurden zahlreiche Versuche unternommen, diese Behauptung vollständig zu beweisen. Sie waren aber nicht von Erfolg gekrönt. Diese Versuche waren

jedoch nicht fruchtlos. Sie haben zur Entstehung und Entwicklung eines neuen Zweiges der Mathematik - der algebraischen Zahlentheorie - beigetragen.

Im Jahre 1955 gelang es Wissenschaftlern in den Vereinigten Staaten, auf elektronischen Rechenautomaten die Gültigkeit der Fermatschen Vermutung für alle $n < 4003$ nachzuweisen.
Im Jahre 1770 äußerte der schottische Mathematiker Waring die Vermutung:

Für jedes natürliche $k > 1$ existiert eine natürliche Zahl r derart, dass die Gleichung

$$x_1^k + x_2^k + ... + x_r^k = N \tag{16}$$

für jedes natürliche N in nichtnegativen ganzen Zahlen lösbar ist.
Ein Beweis für einen Spezialfall dieser Behauptung stammt von Lagrange. Er hat bewiesen, dass man jede ganze Zahl als Summe von vier Quadraten nichtnegativer ganzer Zahlen darstellen kann. Beispielsweise ist

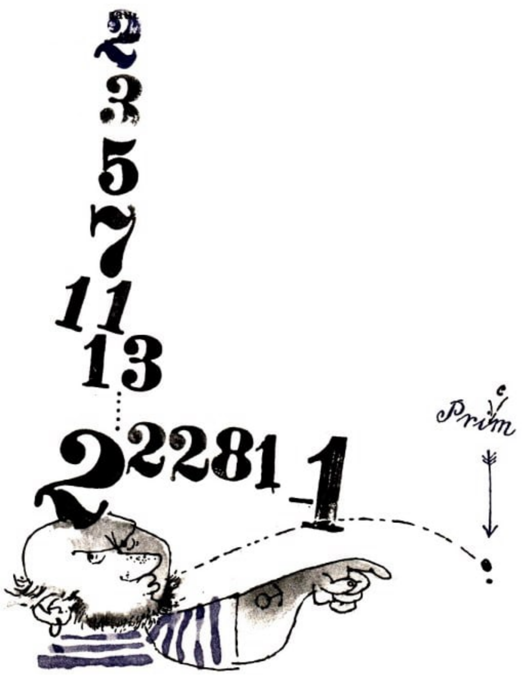
$$23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 \qquad , \qquad 26 = 4^2 + 3^3 + 1^2 + 0^2$$

Vollständig wurde dieser Satz im Jahre 1909 von dem deutschen Mathematiker David Hilbert bewiesen. Er konnte allerdings keine untere Schranke für die Zahl r angeben.
Der exakte Wert des kleinsten r, für das die Gleichung (16) für jedes N in nichtnegativen ganzen Zahlen lösbar ist, konnte erst bestimmt werden, nachdem der sowjetische Mathematiker I. M. Winogradow eine besondere Methode zur Lösung dieser und ähnlicher Probleme geschaffen hatte.

In jüngster Zeit wurde mit der Untersuchung unbestimmter Exponentialgleichungen begonnen. Dazu gehört ein interessanter Satz des sowjetischen Mathematikers A. O. Gelfond.

Satz:
Die Gleichung $a^x + b^y = c^z$, wobei a, b, c ganze, sämtlich von 0 und von Potenzen von 2 verschiedene Zahlen sind, kann höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z besitzen.

Am schwierigsten sind diophantische Gleichungen, die irgendwie mit Primzahlen zusammenhängen. Auch auf diesem Gebiet waren in den letzten Jahren Erfolge zu verzeichnen. Wir wollen hier jedoch auf die schwierigen und interessanten Probleme der Primzahlen nicht eingehen.
Genaueres darüber kann man aus den Büchern erfahren, die im Literaturverzeichnis angegeben sind.



3 Rechenfertigkeiten und Näherungsrechnen

3.1 Könnt ihr gut rechnen?

P. Ju. Germanowitsch

Gerechnet wird überall, in der Straßenbahn und im Geschäft, zu Hause, im Betrieb. im Büro und in der Sparkasse. Die Arbeit des Konstrukteurs, der Maschinen entwirft, ist mit komplizierten Rechnungen verbunden ebenso wie die des Wissenschaftlers, der die Umlaufbahn eines künstlichen Erdtrabanten bestimmt.

In dem Maße, wie die Methoden der wissenschaftlichen Untersuchungen vollkommener wurden, drang die numerische (d. h. rechnende) Mathematik immer mehr und immer tiefer in alle Gebiete der vielseitigen Tätigkeit des Menschen ein.
Durch Berechnungen überprüft der Astronom, der Ingenieur, der Gelehrte in den meisten Fällen seine wissenschaftlichen Voraussagen, bestätigt oder widerlegt sie und damit die aufgestellten Hypothesen.

Die weisen Worte von Leibniz "Wir wollen nicht streiten: sondern rechnen" gelten heute noch genauso wie vor vielen Jahren.
Schon immer suchten und fanden die Menschen mit viel Scharfsinn verschiedene Hilfsmittel, die ihnen die Rechenarbeit erleichterten. In verhältnismäßig kurzer Zeit entwickelte sich die Rechentechnik vom Abakus über Rechentafeln, wie sie schon in der Schule benutzt werden, über Rechenstab und Tischrechenmaschinen zu den modernen elektronischen Rechenautomaten.

Es wurden große Rechenzentren, gewissermaßen Fabriken, in denen maschinell gerechnet wird, eingerichtet - diese Entwicklung ist noch längst nicht abgeschlossen -, in denen wunderbare "denkende" Maschinen die Arbeit von Hunderten von Rechnern übernommen haben.

Man könnte auf den Gedanken kommen, die vielen Rechenhilfsmittel würden das übliche einfache Rechnen, insbesondere das Kopfrechnen, überflüssig machen, und man könne darauf verzichten. Das wäre aber ein ganz großer Irrtum. So nützlich die verschiedensten Hilfsmittel auch sind, sie vermögen bei weitem nicht allen Anforderungen zu genügen, die in Bezug auf das Rechnen in unserem Privatleben oder bei der täglichen Arbeit an uns gestellt werden. Genau wie der Arbeiter an der modernsten Universal-Werkzeugmaschine ab und zu einmal nach Hammer und Meißel greifen muss, kann auch der Rechner trotz Tabellen und Rechengeräten nicht ohne gelegentliches einfaches Rechnen auskommen.

Mehr noch, sehr oft besteht gerade die zweckmäßigste und zuverlässigste Art des Rechnens in einem Zusammenspiel von Rechnungen mit einem Gerät und Hilfsrechnungen im Kopf. Will man eine gewisse Fertigkeit im Kopfrechnen erlangen, so muss man zunächst eine häufig zu beobachtende Scheu vor Rechnungen und Umformungen überwinden, die im Kopf auszuführen sind.
Man muss ständig üben und Erfahrungen sammeln. Übung und Freude am Kopfrechnen sind das Unterpfand des Erfolges. Gerade diese Faktoren erziehen zu jener Konzentration der Aufmerksamkeit, jenem schnellen Erfassen von Zusammenhängen, jener Beharrlichkeit und Findigkeit, ohne die ein erfolgreiches Kopfrechnen undenkbar ist. Großen Nutzen kann auch die Kenntnis allgemeiner Prinzipien und spezieller Methoden des Kopfrechnens bringen.

3.2 Erst überlegen - dann rechnen!

Wir verstehen hier unter Kopfrechnen oder dem "Halb-im-Kopf-Rechnen" keineswegs nur die Ausführung der Grundrechenarten mit gegebenen Zahlen. Das Kopfrechnen kann auf viel umfangreicheren Gebieten angewandt werden. Man kann auch solche Umformungen im Kopf durchführen, die man gewöhnlich als zur Algebra gehörig ansieht.
Oftmals können Ausdrücke, die anscheinend umfangreiche schriftliche Rechnungen erfordern, in Wirklichkeit schnell und leicht im Kopf berechnet werden, wenn man nur geschickt einige Formeln anzuwenden und Umformungen vorzunehmen weiß.
Wir wollen das an einigen Beispielen erläutern.

Beispiel 1:

Man bestimme die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die andere 10,5 cm und die Hypotenuse 37,5 cm lang ist. Nach dem Satz des Pythagoras findet man die gesuchte Kathete, indem man den Ausdruck $\sqrt{37,5^2 - 10,5^2}$ bestimmt.

Das kann man auf zwei Arten tun. Die beiden Verfahren wollen wir dann miteinander vergleichen.

Erstes Verfahren:
Wir erhalten $37,5^2 = 1406,25$ und $10,5^2 = 110,25$, bilden die Differenz $1406,25 - 110,25 = 1296$ und berechnen daraus die Wurzel

$$\sqrt{1296} = 36$$

Von den vier Operationen müssen wir mindestens drei schriftlich durchführen, wenn wir keine Tabelle zur Hand haben.

Zweites Verfahren: Hier beginnen wir nicht mit der unmittelbaren Berechnung, sondern wir formen zuerst den Ausdruck $\sqrt{37,5^2 - 10,5^2}$ nach der dritten binomischen Formel um. Dann ergibt sich

$$\sqrt{37,5^2 - 10,5^2} = \sqrt{(37,5 + 10,5)(37 - 5 - 10,5)} = \sqrt{48 \cdot 27} = 4 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Durch Umformen konnten wir also den zu berechnenden Ausdruck vereinfachen und die Lösung schnell finden. Alle diese Umformungen waren sehr leicht und konnten im Kopf durchgeführt werden.

Beispiel 2:
Man löse die Gleichung $10x^2 - 101x + 10 = 0$ nach x auf. Wieder wollen wir zwei verschiedene Verfahren miteinander vergleichen.

Erstes Verfahren: Wir verwenden unmittelbar die Formel zur Auflösung einer quadratischen Gleichung und erhalten:

$$x_{1;2} = \frac{101 \pm \sqrt{10201 - 400}}{20} = \frac{101 \pm \sqrt{9801}}{20} = \frac{101 \pm 99}{20}$$

$$x_1 = 10; \qquad x_2 = \frac{1}{10}$$

Wer die Formel zur Auflösung einer quadratischen Gleichung in allgemeiner Form nicht kennt, muss erst die Normalform herstellen, d.h. beide Seiten durch 10 dividieren, und erhält

$$x_2 - \frac{101}{10}x + 1 = 0, \qquad x_{1;2} = \frac{101}{20} \pm \sqrt{\frac{101^2}{400} - 1}$$

Zweites Verfahren: Wir stellen fest, dass in der Gleichung der Koeffizient von x^2 gleich dem absoluten Glied ist. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist also das Produkt der beiden Wurzeln gleich 1; die beiden Wurzeln sind also zueinander reziprok.
Andererseits ist nach demselben Satz die Summe der beiden zueinander reziproken Wurzeln gleich dem Koeffizienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen, also gleich $\frac{101}{10} = 10 + \frac{1}{10}$. Daraus lassen sich nun aber die Wurzeln sofort angeben: die eine ist $x_1 = 10$, die andere $x_2 = \frac{1}{10}$.
Nach dem zweiten Verfahren konnten wir die Gleichung fast ohne Rechenarbeit lösen. Wir mussten dabei nur die Koeffizienten richtig ansehen und ihre Eigenart erfassen. Natürlich muss man den Vietaschen Wurzelsatz kennen und anzuwenden verstehen.

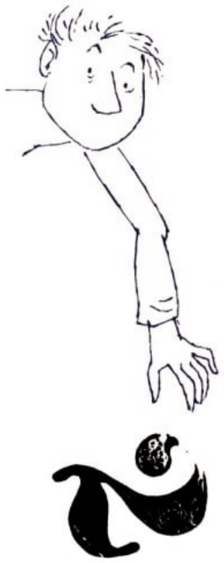
Beispiel 3:
Man berechne den Ausdruck

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{0,25} \cdot \sqrt[3]{12,5} \cdot \sqrt[3]{32}$$

Wenn man diese Zahlen in der Reihenfolge miteinander multiplizieren wollte, in der sie aufgeschrieben sind, würde man ohne schriftliches Rechnen schwerlich zurechtkommen.

Fasst man aber geschickt zusammen, d.h., benutzt man das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Multiplikation und die Gesetze des Rechnens mit Wurzeln, so löst sich alles in Wohlgefallen auf, und man kann im Kopf rechnen:

$$\left(\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{12,5}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{0,25}\right) = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8} = 5 \cdot 2 = 10$$



Beispiel 4:
Man berechne die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 17x + 52 = 0$$

Natürlich kann man diese Gleichung leicht lösen, wenn man die Formel zur Auflösung einer quadratischen Gleichung verwendet.
Wendet man aber wieder den Vietaschen Wurzelsatz an und sucht zwei Zahlen, deren Summe gleich 17 und deren Produkt gleich 52 ist, so kann man nach ein bis zwei Versuchen - im Kopf - sehr schnell die Wurzeln der Gleichung, nämlich

$$x_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 13$$

angeben.

Diese Beispiele zeigen, wie leicht sich viele Aufgaben lösen lassen und sich das Rechnen vereinfachen lässt, wenn man nicht so ungeschickt ist, ohne nachzudenken stur nach einer auswendig gelernten Formel drauflos zu rechnen, sondern mit Verstand untersucht, ob die vorgelegte Aufgabe nicht eine einfache und bequeme Lösung "im Kopf" zulässt.

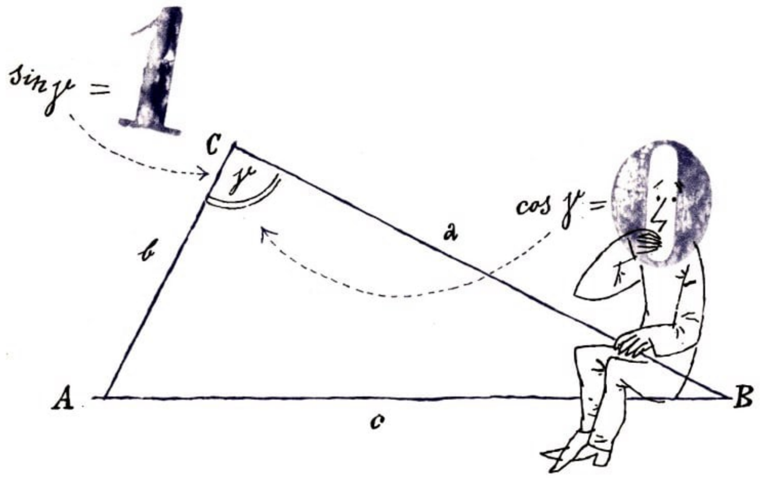
Was ist nun dazu notwendig, um hier erfolgreich zu sein? Wie erkennt man, dass man nicht nach Schema F vorzugehen braucht? Wie merkt man einer Aufgabe an, dass es "elegante" Verfahren zu ihrer Lösung gibt?

Erstens muss man natürlich eine anwendungsbereite und sichere Kenntnis der grundlegenden Formeln und Sätze besitzen. Zweitens muss man sich in eine Aufgabe hineindenken können und imstande sein, bei einer Aufgabe eines bestimmten Typs auf den ersten Blick die Besonderheiten der gegebenen Zahlenwerte zu erfassen.
Drittens schließlich bedarf es einer großen Beharrlichkeit bei der Suche nach einem günstigen Lösungsweg für eine vorgelegte Aufgabe, der dann schnell und einfach das gewünschte Ergebnis zu erhalten gestattet.

3.3 Und wieder nachdenken!

Wer sich ans Nachdenken gewöhnt hat, erntet reiche Früchte.
Diese Gewohnheit entwickelt jenes besondere mathematische Denken, das einem in den verschiedensten Fällen nützlich sein kann. Manchmal kommt es sogar vor, dass diese Gewohnheit unerwartete Dienste leistet, indem sie es möglich macht, sich Formeln ins Gedächtnis zurückzurufen, die teilweise schon vergessen waren. Wir wollen dazu wieder einige Beispiele anführen.

Beispiele:



Es geht um die Formel $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks; das Gedächtnis lässt uns im Stich, wir wissen nicht mehr genau, ob in der Formel $\sin\gamma$ oder $\cos\gamma$ als Faktor steht. Hier kann man sich durch eine einfache Überlegung helfen:

Die Formel muss ja für jedes Dreieck gelten, insbesondere auch für ein rechtwinkliges. Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b ist der Winkel $\gamma = 90°$, also $\cos\gamma = \cos 90° = 0$.
Würde also $\cos\gamma$ in der Formel für den Flächeninhalt eines Dreieckes stehen, dann wäre der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks gleich Null. Das ist aber offenbar Unsinn. Dagegen ist $\sin\gamma = \sin 90° = 1$, und wir erhalten mit

$$A = \frac{1}{2}ab$$

die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks. Damit besteht kein Zweifel mehr, dass in der allgemeinen Formel für den Inhalt des Dreiecks der Faktor $\sin\gamma$ stehen muss.

Man weiß nicht mehr genau, wie die Heronische Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks lautet,

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{oder} \qquad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Auch hier hilft wieder eine ganz einfache Überlegung. Die linke und die rechte Seite der Formel müssen von ein und derselben Dimension sein. Die Dimension einer Fläche ist gleich 2, während $s, s-a, s-b, s-c$ lineare (eindimensionale) Größen sind. Die Produkte

$$(s-a)(s-b)(s-c) \qquad \text{bzw.} \qquad s(s-a)(s-b)(s-c)$$

haben die Dimension 3 bzw. 4. Die Quadratwurzeln aus diesen Größen haben dann die Dimensionen $\frac{3}{2}$ bzw. 2. Damit sind aber alle Unklarheiten beseitigt; die richtige Formel lautet:

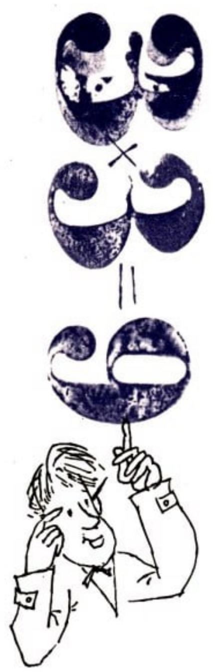
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Es ist schwer, alle Fälle aufzuzählen, in denen die Fähigkeit zu beobachten und zu rechnen es ermöglicht, auf Anhieb sofort das zu entdecken, was anscheinend unbedingt schriftliches Rechnen erfordert.

Es sollen in einem Kaufhaus $7\frac{1}{2}$ Meter Stoff gekauft werden, das Meter zu 13,20 Mark. Der Verkäufer schreibt eine Rechnung aus, wonach 99,60 Mark zu zahlen wären. Noch ehe wir zahlen, stellt er aber fest, dass die Summe nicht stimmt. Wir wollen versuchen, dem Gedankengang unseres aufmerksamen Verkäufers zu folgen.

Der Preis für die $7\frac{1}{2}$ Meter Stoff wird durch das Produkt aus Preis je Meter und Anzahl der Meter bestimmt, in Pfennigen also $1320 \cdot 7\frac{1}{2}$ Pfennige. Das Produkt ändert sich nicht, wenn der eine Faktor durch 10 dividiert und der andere mit 10 multipliziert wird, es ist also gleich $132 \cdot 75$.
Beide Faktoren sind durch 3 teilbar, also muss das Produkt durch 9 teilbar sein. Die Quersumme von 99,60 ist aber 24, und diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar.
Dieser Widerspruch zeigt uns, dass die Rechnung nicht stimmte.

Wir wollen jetzt den wirklichen Preis unseres Einkaufs im Kopf berechnen. Im ersten Moment scheinen die in der Aufgabe vorkommenden Zahlen keine besondere Vereinfachung zuzulassen. Bei aufmerksamer Betrachtung zeigt sich aber, dass man die Aufgabe nicht nur im Kopf rechnen kann, sondern dass sich sogar zwei Methoden dafür anbieten.



Erstes Verfahren: Das Produkt 13,2 mal $7\frac{1}{2}$ ist gleich dem Produkt 6,6 mal 15 (der erste Faktor wird durch 2 dividiert, der zweite mit 2 multipliziert). Führen wir nun die Multiplikation mit 15 auf die bekannte einfache Art durch, so erhalten wir:

$$6,6 \cdot 15 = 6,6 \cdot 10 + \frac{6,6 \cdot 10}{2} = 66 + 33 = 99,00$$

Zweites Verfahren: Wir beachten, dass $7\frac{1}{2}$ gerade $\frac{3}{4}$ von 10 ist; daher können wir auch folgendermaßen rechnen:

$$(13,2 \cdot 10) \cdot \frac{3}{4} = 132 \cdot \frac{3}{4} = [(132:2):2] - 3 == (66:2) \cdot 3 = 33 \cdot 3 = 99$$

Man könnte denken, in unseren Beispielen hätte man die einfachen Verfahren des Kopfrechnens nur deshalb anwenden können, weil die Aufgabenstellungen oder die gegebenen Zahlenwerte speziell gewählt worden seien. Das wäre ein Irrtum.

Andererseits stimmt es natürlich, dass man die verschiedenartigen Verfahren des Kopfrechnens, die wir benutzt haben, längst nicht in allen Fällen vorteilhaft verwenden kann. Wenn es uns beispielsweise in den vorhin betrachteten beiden Beispielen für die Auflösung einer quadratischen Gleichung mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes gelang, ohne schriftliches Rechnen auszukommen und auf die Auflösungsformel zu verzichten, so bedeutet das durchaus nicht, dass man fast immer ohne diese Formel und ohne schriftliches Rechnen auskommen könnte.

Es wäre aber falsch, anzunehmen, die verschiedenen hier betrachteten Verfahren, mit denen man leicht und schnell im Kopf rechnen kann, würden nur für besonders ausgewählte Ausnahmefälle gelten. Viel öfter als es den Anschein hat, vermag ein aufmerksames und wachsames Auge die "Individualität" der Zahlenwerte eines zu berechnenden Ausdruckes oder die Eigenart seiner Form zu erkennen und auszunutzen.

Um so "sehen" und vorteilhaft rechnen zu können, sind vor allem Erfahrung erforderlich sowie die Gewohnheit, zunächst zu überlegen, und eine gute Auffassungsgabe. Beim Ausführen der Grundrechenarten im Kopf leistet außerdem die Kenntnis allgemeiner Prinzipien und spezieller Verfahren des Kopfrechnens eine große Hilfe. Einige der wichtigsten und interessantesten dieser Verfahren wollen wir jetzt behandeln.

Gewöhnlich führen die alltäglichen Rechnungen zu Hause oder im Geschäft sowie die Überschlagsrechnungen, die der Arbeiter oder Ingenieur laufend im Betrieb durchführen muss, auf einfache Operationen mit zweistelligen oder höchstens mit dreistelligen Zahlen.
Dabei muss meistens "auf Anhieb" und sehr schnell gerechnet werden. Daher ist es besonders wichtig, dass man diese Operationen mit zwei- und dreistelligen Zahlen im Kopf auszuführen lernt. In den Fällen, in denen man mit verhältnismäßig großen Zahlen zu rechnen hat, ist es sicherer und leichter, schriftlich oder, wenn man die Möglichkeit hat, mit Rechengeräten zu rechnen.

Einige einfache Verfahren des Kopfrechnens werden bereits in der Schule gelehrt. Dazu gehören insbesondere solche Übungen im Kopfrechnen, die zeigen, wie man durch geschickte Anwendungen der Kommutativ- und Assoziativgesetze von Addition und Multiplikation das Rechnen vereinfachen kann.

Ferner werden einige einfachste Verfahren des Kopfrechnens, wie das Multiplizieren mit 5, 15, 25, 50, einzelne Methoden der Prozentrechnung gelehrt, usw. Diese Verfahren werden wir nicht näher betrachten, sondern uns auf einige Hinweise beschränken.

3.4 Addition mehrerer zweistelliger Zahlen im Kopf

Es soll die Summe $37 + 85 + 29 + 42$ berechnet werden.
Dazu verfahren wir wie folgt: Zuerst addieren wir alle Zehner, $3 + 8 + 2 + 4$, und merken uns das Resultat 17. Dann addieren wir alle Einer, $7 + 5 + 9 + 2$, und erhalten 23. Wir müssen zu den 17 Zehnern also noch 2 Zehner hinzufügen, erhalten 19 Zehner und 3 Einer und damit als Endresultat 193.

Ebenso verfahren wir, wenn sich unter den Summanden auch dreistellige Zahlen befinden. Beispielsweise addieren wir die Zahlen 228, 39, 485 und 91. Wir addieren wieder zuerst die Zehner (und benutzen dabei das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition) und erhalten

$$(22 + 48) + (3 + 9) = 70 + 12 = 82$$

Als dann addieren wir die Einer: $(8 + 5) + (9 + 1) = 23$ und erhalten insgesamt 84 Zehner und 3 Einer, also die Summe 843.

3.5 Multiplikation zweistelliger Zahlen im Kopf

Ein allgemeines Verfahren zur Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen im Kopf ist die "Überkreuz"-Multiplikation (das sogenannte indische Verfahren). Dazu betrachten wir die Multiplikation Zweier beliebiger zweistelliger Zahlen und benutzen dabei die Regeln der Algebra.

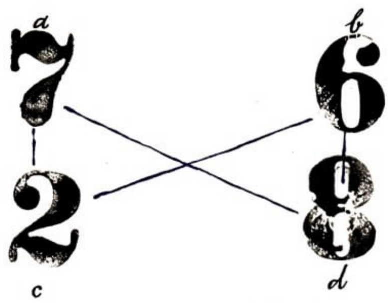
Es seien zwei zweistellige Zahlen $\overline{ab} = 10a + b$ und $\overline{cd} = 10c + d$ gegeben, wobei a, b, c, d Ziffern sind. Dabei soll $\overline{ab}$ eine aus den Ziffern a (Zehner) und b (Einer) bestehende zweistellige Zahl bedeuten; demgegenüber bedeutet ab (ohne Querstrich) wie üblich das Produkt der Zahlen a und b.
Wir multiplizieren $\overline{ab}$ mit $\overline{cd}$ und erhalten

$$(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10ad + 10bc + bd = 100 \cdot ac + 10 \cdot (ad + ba) + bd$$

In Worten lässt sich dieses Ergebnis so deuten: Das Produkt $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ enthält ac Hunderter, $(ad + bc)$ Zehner und bd Einer.
Wenn $bd \geq 10$ ist, d. b., wenn bd Zehner enthält, so werden diese zu den $(ad + bc)$ Zehnern hinzugefügt, und wenn die entstandene Zahl der Zehner Hunderter enthält, dann werden diese zu den ac Hundertern hinzugefügt.

Wir zeigen jetzt an einem Zahlenbeispiel, wie eine solche Multiplikation durchgeführt wird.

Beispiel:
Es sollen die Zahlen 76 und 28 miteinander multipliziert werden. Wir verfahren dabei nach dem folgenden Schema, das allerdings hier nur zur Erläuterung dienen soll; normalerweise werden alle Rechnungen im Kopf durchgeführt.



Wir multiplizieren die 6 Einer mit den 8 Einern und bekommen 48 Einer. Darauf multiplizieren wir über Kreuz, um den Ausdruck $ad + bc$ zu berechnen, und erhalten: 7

Zehner mal 8 Einer und 6 Einer mal 2 Zehner = 56 Zehner plus 12 Zehner = 68 Zehner. Fügen wir noch die 4 Zehner von der Multiplikation der Einer hinzu, so bekommen wir 72 Zehner.

Nun multiplizieren wir die Zehner: 7 Zehner mal 2 Zehner, macht 14 Hunderter. In den 72 Zehnern sind aber noch 7 Hunderter enthalten, so dass wir insgesamt 21 Hunderter erhalten. Also enthält das gesamte Produkt 21 Hunderter, 2 Zehner und 8 Einer, d.h., es ist gleich 2128.
Wir erhielten bei diesem Beispiel das Produkt 2128 mit Hilfe eines allgemeinen Verfahrens, das zur Multiplikation zweier beliebiger zweistelliger Zahlen verwendbar ist.

Ein findiger Rechner wird bei dieser Aufgabe aber auch feststellen, dass, wie es sehr oft vorkommt, die Zahlen hier so beschaffen sind, dass man die Multiplikation noch einfacher durchführen kann.
Man zerlegt nämlich 76 = 75 + I und verfährt bei der Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} 28 \cdot 76 &= 28 \cdot (75+1) = 28 \cdot 75 + 28 = 28 \cdot (50+25) + 28 \\ &= 28 \cdot 50 + 28 \cdot 25 + 28 = \frac{2800}{2} + \frac{1400}{2} + 28 = 2128 \end{aligned}$$

3.6 Multiplikation großer zweistelliger Zahlen

Jede zweistellige Zahl kann in der Form $100 - a$ dargestellt werden. Wir bezeichnen a als das Komplement der gegebenen Zahl zu 100. Wenn die gegebenen Zahlen nahe bei 100 liegen, ist ihr Komplement eine verhältnismäßig kleine Zahl, was günstig für das Kopfrechnen ist.

Wir betrachten eine solche Multiplikation wieder in allgemeiner Gestalt:

$$(100-a)(100-b) = 100 \cdot 100 - 100a - 100b + ab = 100(100 - a - b) + ab$$

Hieraus ersieht man: Um die Zahl der Hunderter des gesuchten Produktes zu erhalten, muss man von dem einen Faktor (z. B. von $100-a$) das Komplement des anderen (also b) abziehen. An das Ergebnis muss dann das Produkt $a \cdot b$ der Komplemente angehängt werden, wenn ab eine zweistellige Zahl ist. Ist jedoch ab einstellig, etwa 8, dann hängt man 08 an.

Beispiel: Berechne $87 \cdot 94$
Die Komplemente zu 100 sind 13 und 6. Zur Berechnung der Hunderter ziehen wir 6 von 87 oder 13 von 94 ab und erhalten 81. An 81 wird dann 13 · 6 = 78 angehängt, und es ergibt sich das Produkt 8178.

Die Idee dieses interessanten Verfahrens ist leicht auch auf die Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen auszudehnen, die nahe bei 1000 liegen. Multiplizieren wir beispielsweise 985 mit 992, so erhalten wir als Komplemente 15 und 8.

Wir subtrahieren dann analog zu oben 8 von 985 oder 15 von 992 und erhalten 977 als Zahl der Tausender des gesuchten Produktes. Hängen wir das Produkt der Komplemente 15 · 8 = 120 wieder an, so erhalten wir das Ergebnis 977120.

3.7 Prozentrechnung

Die einfachen Verfahren der Prozentrechnung, die in der Schule betrachtet werden, sind unschwer auch in einigen komplizierteren Fällen der Prozentrechnung anzuwenden. Vor allem soll darauf hingewiesen werden, dass $p\%$ von einer Zahl a gleich $\frac{a \cdot p}{100}$ und $a\%$ von einer Zahl p gleich $\frac{p \cdot a}{100}$, aber $\frac{a \cdot p}{100}$ ist ja gleich $\frac{p \cdot a}{100}$.
Deshalb können wir immer statt $p\%$ von a, wenn es günstiger ist, $a\%$ von p berechnen. Wir bringen dafür zwei Beispiele.

Beispiele:
Es sollen 72% von 85 bestimmt werden.

Es ist leichter, 85% von 72 zu bestimmen, denn das ist gerade

$$72 - (15\% \text{ von } 72)$$

und 15% von 72 berechnen sich sehr leicht: 7,2 + 3,6 = 10,8.
Damit erhalten wir als Ergebnis: 72 - 10,8 = 61,2.

Es sollen 72,8% von 37$\frac{1}{2}$ berechnet werden.
Auch hier werden wir wieder umstellen und 37$\frac{1}{2}$ von 72,8 suchen. Da $12\frac{1}{2}\%$ einer Zahl gleich dem achten Teil dieser Zahl und $37\frac{1}{2}\% = 12\frac{1}{2}\% \cdot 3$ ist,besteht der ganze Rechenprozess darin, $\frac{3}{8}$ von 72,8 zu bestimmen. Dazu teilen wir 72,8 durch 8, erhalten 9,1 und als gesuchte Zahl 9,1 · 3 = 27,3.

3.8 Einige Regeln über das Quadrieren

Es ist nützlich, auf zwei einfache Fälle beim Quadrieren hinzuweisen, erstens bei ganzen Zahlen, die auf die Ziffer 5 enden, zweitens bei gemischten Zahlen, deren gebrochener Anteil gleich $\frac{1}{2}$ ist.
Für beide Fälle formulieren wir jeweils die allgemeine Regel und beweisen im Anschluss daran deren Gültigkeit.

Regel:
Um eine ganze Zahl, die auf 5 endet, zu quadrieren, braucht man nur die Anzahl der Zehner dieser Zahl mit der nächstgrößeren natürlichen Zahl zu multiplizieren und an dieses Produkt 25 anzuhängen.

Beweis: Jede Zahl, die auf 5 endet, kann in der Gestalt $10a + 5$ dargestellt werden, wobei a die Anzahl der Zehner dieser Zahl ist. Dann erhält man:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25 = a(a + 1)100 + 25$$

Dieser Ausdruck entspricht aber gerade der oben formulierten Regel.

Beispiel: Die Zahl 145 ist zu quadrieren.
Wir multiplizieren die Anzahl der Zehner (14) mit der nächstgrößeren Zahl (15) und erhalten 210. Hängen wir an diese Zahl noch 25 an, so ergibt sich $145^2 = 21025$.

Regel:
Um eine gemischte Zahl zu quadrieren, deren gebrochener Teil gleich $\frac{1}{2}$ ist, muss man den ganzen Teil der gebrochenen Zahl mit der darauffolgenden natürlichen Zahl multiplizieren und $\frac{1}{4}$ hinzufügen.
Der Beweis verläuft genauso wie bei der ersten Regel.

Beispiel
Die Zahl $19\frac{1}{2}$ soll quadriert werden. Wir bilden dazu das Produkt $19 \cdot 20 = 380$ und fügen $\frac{1}{4}$ hinzu. Wir erhalten als Ergebnis

$$\left(19\frac{1}{2}\right)^2 = 380\frac{1}{4}$$

3.9 Zusammenfassung

Wir betrachteten hier nur einige, aber sehr wichtige Verfahren des Kopfrechnens. Es hat natürlich wenig Sinn, zu versuchen, sich eine sehr große Zahl spezieller Regeln einzuprägen, weil man sie ohnedies wieder vergessen wurde, wenn man sie nicht dauernd anwendet.
Solche Regeln mögen vielleicht nützlich sein. Wenn man das Kopfrechnen beherrschen will, ist es aber viel wichtiger, jene Freude am Entdecken und jenen Scharfsinn bei sich zu entwickeln, ohne die man nicht auskommt, wenn auswendig gelernte allgemeine Rechenregeln nicht mehr helfen.

So kennt man das Beispiel der Schüler der 5. Klasse einer Landschule, die $84 \cdot 84$ im Kopf ausrechnen sollten. Innerhalb kürzester Zeit hatte ein Knirps das Ergebnis 7056 im Kopf berechnet. Auf die Frage, wie er das gemacht habe, antwortete er, er habe einfach 144 von 7200 abgezogen.
Verfolgen wir, wie er gerechnet hat:

$$84 \cdot 84 = (12 \cdot 7)(12 \cdot 7) = (12 \cdot 12)(7 \cdot 7) = 144(50-1) = 144 \cdot \frac{100}{2} - 144 = 7200 - 144 = 7056.$$

Manchmal sind auch Zahlenrätsel, zu deren Lösung es keine Regeln gibt, durch einfache Überlegungen leicht zu bewältigen.
Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

wobei a und c bestimmte Ziffern sind. Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$a \cdot \overline{ac} = \overline{ccc} : c$$

Nun gilt aber für jedes c die Beziehung $ccc : c = 111$; also ist $111 = a \cdot ac$. Die Zahl 111 kann aber nur auf eine Weise als Produkt einer einstelligen und einer zweistelligen Zahl dargestellt werden, nämlich als $3 \cdot 37$. Demnach ist $a = 3$, $c = 7$ und $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$ die Lösung des Rebus.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass das Denken, welches oft als mathematisches Denken bezeichnet wird, nicht nur Grundlage eines erfolgreichen Kopfrechnens ist. Es kann darüber hinaus jedem Menschen auf den verschiedensten Gebieten seiner Tätigkeit helfen.

3.10 Rechenhilfsmittel und Rechengeräte

A. P. Domorjad

Kommt man in ein Büro oder in eine Rechenabteilung oder betrachtet man die Arbeit eines Ingenieurs, der zahlreiche Rechnungen durchführen muss, kurz, schaut man sich die Arbeit von Menschen an, die mit Berechnungen zu tun haben, so stellt man fest, dass sie sich der verschiedensten Hilfsmittel zur Erleichterung der Rechenarbeit bedienen. Die Rechner verwenden Rechenbretter und einfache Tischrechenmaschinen. Die Ingenieure arbeiten mit Kurven und Tabellen oder benutzen Rechenstäbe mit zahlreichen Skalen, die jedem, der die Arbeit nicht gewohnt ist, vor den Augen tanzen. In Rechenabteilungen arbeiten Laboranten an elektrischen Tischrechenmaschinen, die sehr schnell mehrstellige Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

In großen Rechenzentren jedoch kann man Maschinen sehen, die mit enormer Geschwindigkeit die schwierigsten mathematischen Rechnungen nach einem vorher eingegebenen Programm automatisch ausführen.

Schon in alten Zeiten waren die Menschen bemüht, sich die Rechenarbeit zu erleichtern, indem sie schwierige Operationen auf einfachere zurückführten. Beispielsweise suchte man im alten Babylon die Division durch die Multiplikation des Dividenden mit der zum Divisor reziproken Zahl zu ersetzen. Dafür zeugen Keilschrifttäfelchen, die für verschiedene Werte von n die Werte für $\frac{1}{4}$ angeben.

Im 16.Jahrhundert war in Europa ein Verfahren zur Multiplikation von Zahlen verbreitet, das auf der Identität

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

beruht.
Sind in einer Tabelle die Werte der Funktion $\frac{x^2}{4}$ für ganze Werte von x zusammengestellt, so braucht man zur Berechnung des Produktes ab (a und b sind ganze Zahlen) nur $a+b$ und $a-b$ zu bestimmen, in der Tabelle die Zahlen $\frac{(a+b)^2}{4}$ und $\frac{(a-b)^2}{4}$ aufzusuchen und voneinander zu subtrahieren.
In der Tabelle brauchen die gebrochenen Anteile von $\frac{x^2}{4}$ (bei ungeradem x) nicht angegeben zu sein, da sie sich bei der Subtraktion gerade wieder aufheben.
Auf dieser Seite sehen wir unten einen Ausschnitt aus einer solchen Tabelle.
Ist etwa $a = 253$ und $b = 224$, so erhält man $a + b = 477$ und $a - b = 29$ und findet in der Tabelle:

$$\frac{(a+b)^2}{4} = 56882 \qquad , \qquad \frac{(a-b)^2}{4} = 210$$

Also ergibt sich $ab = 56882 - 210 = 56672$. Analog erhält man

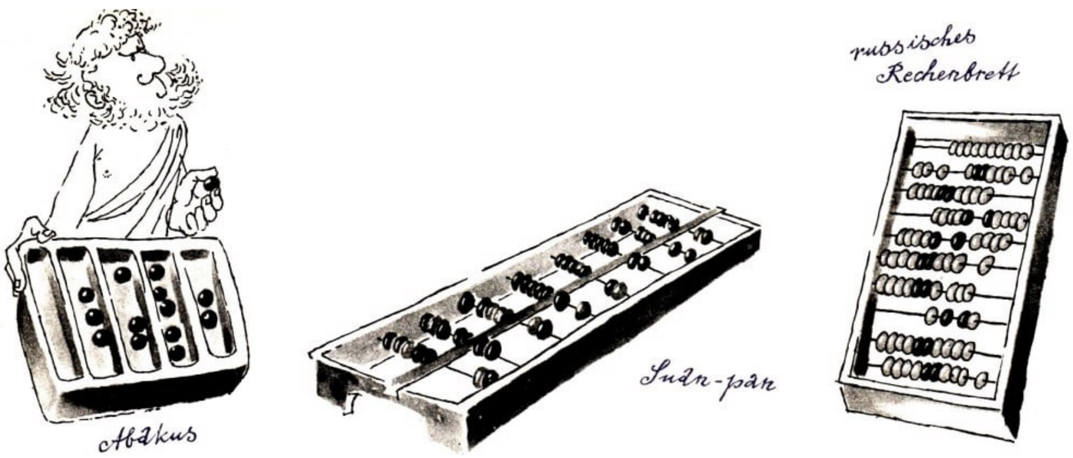
$$1233 \cdot 761 = 994009 - 55696 = 938313$$

Einer / Zehner	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	4	6	9	12	16	20
1	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90
2	100	110	121	132	144	156	169	182	196	210
...										
47	55225	55460	55696	55932	56169	56406	56644	56882	57121	57360
...										
199	990025	991020	992016	993012	994009	995006	996004	997002	998001	999000

Natürlich scheinen Tabellen, die gleich das Produkt der gegebenen Zahlen angeben, zweckmäßiger zu sein. Allerdings sind diese Tabellen sehr viel umfangreicher; man schaue sich einmal in einer Bibliothek Crelles Rechentafeln an!
Beispielsweise würden Tabellen mit den Produkten der Zahlen von 1 bis 99 mit allen dreistelligen Zahlen den üblichen Buchumfang ergeben, mit den Produkten aller dreistelligen Zahlen miteinander aber schon den 10fachen Umfang haben.
Dagegen benötigen die alten "Quadratzahltabellen, mit deren Hilfe sich dasselbe leisten lässt, insgesamt nur 200 Zeilen!

Die oben erwähnten Tabellen wurden Anfang des 17.Jh. von Logarithmentafeln verdrängt, die nicht nur das Multiplizieren, sondern auch das Dividieren, das Potenzieren und das Radizieren erleichterten.

Auch die Erfindung einfacher Rechengeräte liegt lange zurück.
So wurde bereits im alten Griechenland und in Rom zur Erleichterung des Rechnens der Abakus - ein Rechenbrett - verwendet.



Je nachdem, wieviel Marken in den einzelnen Rillen lagen, ergab sich die eine oder die andere Zahl. Der Abakus wurde lange Zeit auch in Westeuropa verwendet.
In China entstand schon im frühen Altertum das Rechengerät Suan-pan, das später die Gestalt eines Rahmens mit einzelnen Drähten annahm, der durch eine Zwischenleiste in zwei Teile geteilt war. Jede der beiden Kugeln, die sich rechts von der Zwischenleiste befinden, stellt 5 Einheiten dar und jede der fünf Kugeln links von der Zwischenleiste eine Einheit.
Dadurch, dass man die Kugeln an die Zwischenleiste heranrückt, kann man auf dem Suan-pan jede beliebige ganze Zahl darstellen.

Das japanische Rechengerät Soroban unterscheidet sich vom Suan-pan nur darin, dass rechts von der Zwischenleiste statt zwei Kugeln nur eine Kugel angeordnet ist.
In der Sowjetunion werden heute noch die sogenannten russischen Rechenbretter verwendet.

3.11 Rechenbretter und Nepersche Streifen

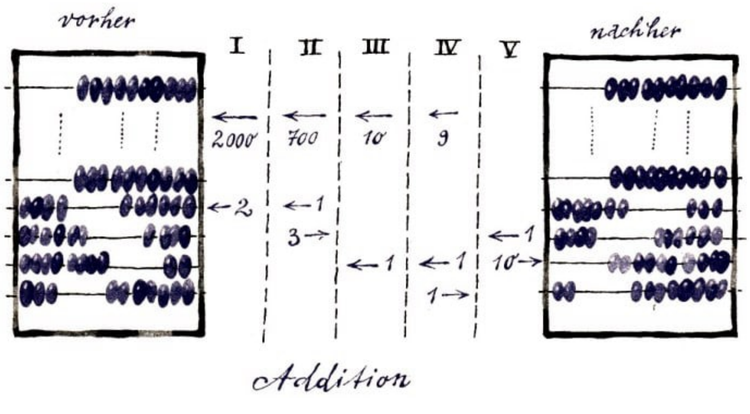
In früheren Zeiten waren die Rechenbretter etwas anders gebaut als heute; die Kugeln waren auf dünnen Fäden aufgereiht. Später wurden die Fäden durch Draht ersetzt, und

schon zu Anfang des 18. Jahrhunderts nahmen die Rechenbretter die heutige Gestalt an.
Vor der Einführung des metrischen Systems in Russland waren auf zwei Drähten je vier Kugeln untergebracht, da damals Viertelteilungen verschiedener Einheiten weit verbreitet waren (in Holland gibt es noch heute eine Münze zu 25 Cents, also einem viertel Gulden, und die CSSR hat Geldscheine zu 25 Kronen).

Im metrischen System wird die Einheit in Zehntel, Hundertstel usw. aufgeteilt, so dass man keine Drähte mit vier Kugeln mehr braucht.
Zum Rechnen mit Dezimalbrüchen ist ein "bewegliches Komma" nützlich, ein gebogenes Drähtchen, das auf den linken Rahmenrand aufgesetzt werden kann.

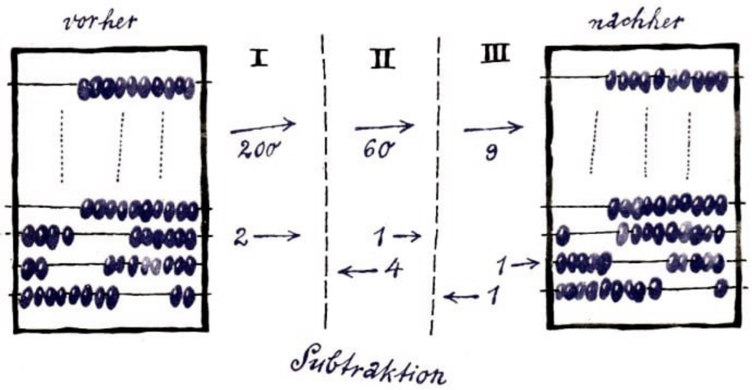
Vielleicht kommen vielen Lesern die Rechenbretter nicht interessant genug vor. Es ist jedoch immer wieder erstaunlich, mit welchem Geschick Kassierer, Rechner usw., überhaupt Leute, die den ganzen Tag eine Vielzahl von Additionen und Subtraktionen mehrstelliger Zahlen durchzuführen haben, damit arbeiten.
Zum Addieren und Subtrahieren sind die Rechenbretter besonders geeignet; davon kann man sich leicht überzeugen.

Will man die Zahlen 4683 und 2719 addieren, so hat man auf den unteren Drähten die Zahl 4683 einzustellen, dann hintereinander die folgenden Zahlen hinzuzufügen: 2000 (2 Kugeln in der Reihe der Tausender), 700 (da in der Reihe der Hunderter rechts nur noch vier Kugeln zur Verfügung stehen, muss man eine weitere Kugel in der Reihe der Tausender hinzufügen und drei Kugeln in der Reihe der Hunderter zurückschieben), 10 (eine Kugel in der Reihe der Zehner) und schließlich 9 (wobei wieder eine Kugel der Reihe der Zehner hinzugefügt und eine Kugel von der Reihe der Einer abgezogen wird).

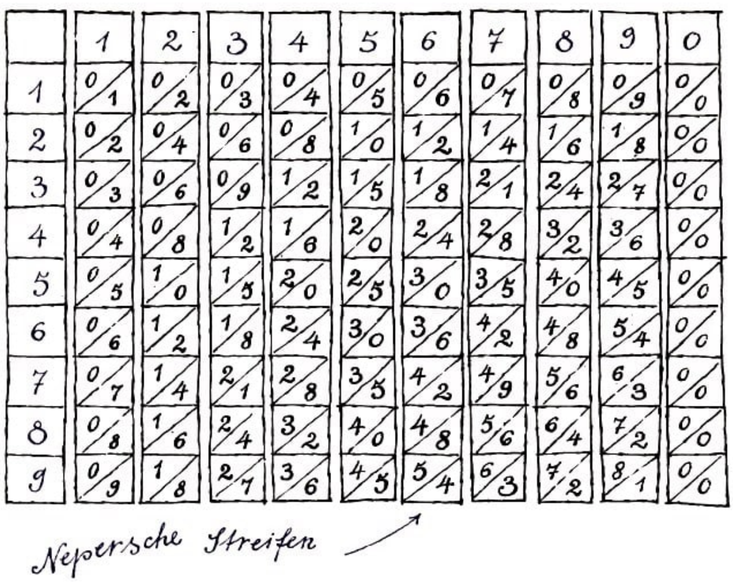


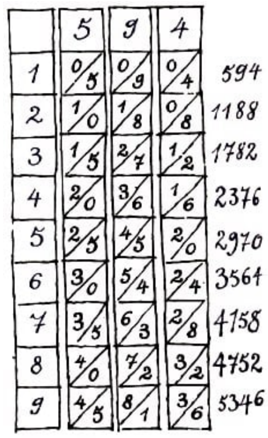
Da man jetzt 10 Kugeln in der Reihe der Zehner hat, fügt man dafür eine Kugel der Reihe der Hunderter hinzu, denn zehn Zehner ergeben ja gerade einen Hunderter.

Analog wird die Subtraktion auf dem Rechenbrett durchgeführt. Beispielsweise geht man zur Berechnung der Differenz 428 - 269 folgendermaßen vor:
Man stellt zuerst die Zahl 428 ein und zieht davon hintereinander die Zahlen 200 (2 Kugeln in der Reihe der Hunderter), dann 60 (indem man eine Kugel von der Reihe der Hunderter wegnimmt und dafür 4 Kugeln der Reihe der Zehner hinzufügt) und schließlich 9 ab (wobei wieder eine Kugel aus der nächsthöheren Reihe abgezogen werden muss und dafür eine Kugel der Reihe der Einer hinzugefügt wird).



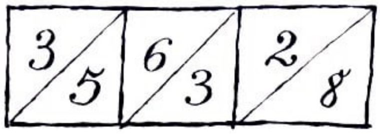
Zur Multiplikation und Division mit den Rechenbrettern sind die Neperschen Streifen sehr nützlich, einfache Hilfsmittel, die aber Multiplikation und Division mehrstelliger Zahlen sehr erleichtern.
Diese Streifen wurden im Jahre 1617 von dem schottischen Mathematiker Neper, dem Erfinder der Logarithmen, beschrieben.
Dieses einfache Rechenhilfsmittel stellt man folgendermaßen her:





Man schreibt auf schmale Streifen Karton, steifes Papier oder dünne Brettchen in quadratische Kästchen das Produkt aus der einstelligen Zahl, die im "Kopf" des Streifens steht, mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In das Kästchen wird die Zahl der Zehner des Produktes oberhalb der Diagonale und der Zahl der Einer unterhalb der Diagonale geschrieben. (vgl. Abbildung, wo links noch ein zusätzlicher Streifen dargestellt ist, der zur Bestimmung der Nummer des Kästchens dient.

Die Neperschen Streifen liefern sofort das Produkt einer mehrstelligen Zahl mit einer einstelligen.
Wollen wir beispielsweise das Produkt 594 · 7 bestimmen, so müssen wir neben der Hilfsstreifen die Streifen mit den Ziffern 5, 9, 4 im "Kopf" legen. Dann steht in der siebenten Zeile



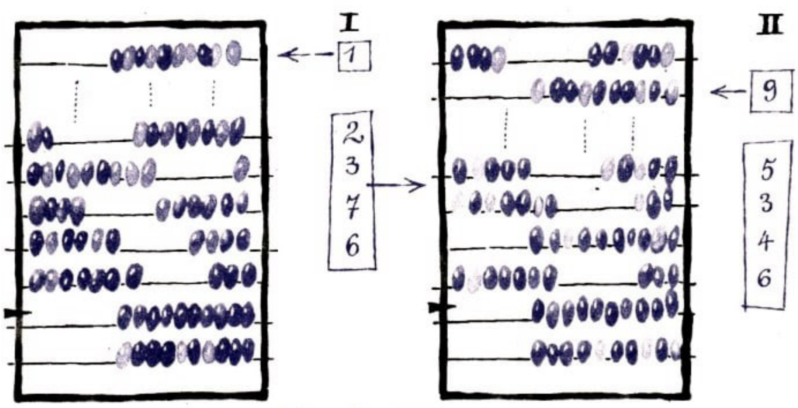
und so ergibt sich $594 \cdot 7 = 4158$.
In jedem Kästchen steht nämlich oberhalb der Diagonale die Ziffer, welche man normalerweise beim Rechnen im Kopf sofort zur nächsthöheren Stelle hinzufügt. Das gesuchte Produkt enthält also 8 Einer, 5 (nämlich $2 + 3$) Zehner, 11 Hunderter ($6 + 5$) und 3 Tausender.

Von den Hundertern wird einer aufgeschrieben, während die anderen zehn einen Tausender ergeben und damit zur nächsten Stelle hinzugefügt werden. Die 4 Tausender ergeben sich aus dem einen gemerkten Tausender und den drei Tausendern, die in dem linken Kästchen oberhalb der Diagonale stehen.
Da im Multiplikanden gleiche Ziffern vorkommen können, ist es sinnvoll, von jedem Streifen gleich mehrere anzufertigen.

Bei der Multiplikation mehrstelliger Zahlen kann man mit den Neperschen Streifen sehr schnell das Produkt des Multiplikanden mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators aufschreiben, und bei der Division kann man die aufeinanderfolgenden Ziffern des Quotienten und das Produkt dieser Ziffern mit dem Divisor bestimmen.

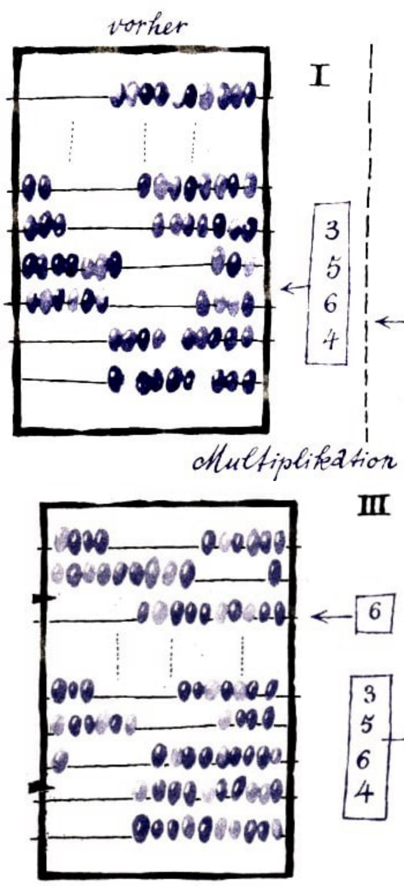
$$\begin{array}{lr}
 & 594 \cdot 467 \\
\hline
\rightarrow & 4158 \\
\rightarrow & 3564 \\
\rightarrow & 2376 \\
\hline
 & 277398
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & 29467 : 594 = 49{,}6 \\
\rightarrow & 2376 \\
\hline
 & 5707 \\
\rightarrow & 5346 \\
\hline
 & 3610 \\
\rightarrow & 3546 \\
\hline
 & 46
\end{array}$$

Die mit Pfeilen bezeichneten Zahlen wurden mit Neperschen Streifen bestimmt.



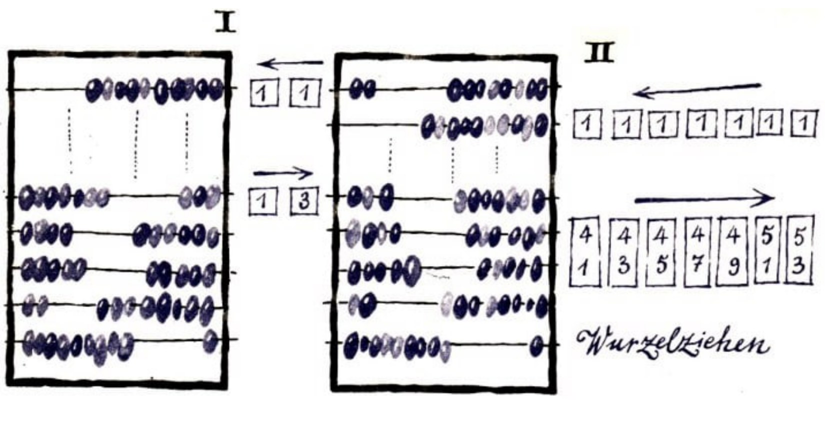
Division

Wird die Multiplikation ($594 \cdot 467$) mit Hilfe eines Rechenbretts durchgeführt, dann sind 2376 Hunderter ($594 \cdot 4$), 3564 Zehner ($594 \cdot 6$) und 4158 Einer ($594 \cdot 7$) zu addieren.



Bei der Division auf einem Rechenbrett (29467 : 594) muss der Dividend auf den unteren Drähten (oder ein wenig höher) eingestellt werden. Man sucht das zu 2946 nächstliegende kleinere Vielfache von 594 (das ist $2376 = 594 \cdot 4$) und zieht diese Zahl von 2946 ab, wobei gleichzeitig auf dem oberen Draht die erste Ziffer des Quotienten (4) eingestellt wird.
Darauf bestimmt man das zu 5707 nächstliegende kleinere Vielfache von 594 (das ist $5346 = 594 \cdot 9$), stellt auf dem zweiten oberen Draht die damit erhaltene zweite Ziffer des Quotienten (9) ein und subtrahiert 5346 von 5707. Analog wird dann die Division weiter fortgesetzt.

In der Abbildung ist der Dividend mit zwei Dezimalstellen hinter dem Komma dargestellt (unter dem beweglichen Komma sind Zehntel und Hundertstel), und analog dazu trennt das Komma im Quotienten (oben) den ganzen Teil vom gebrochenen Teil.

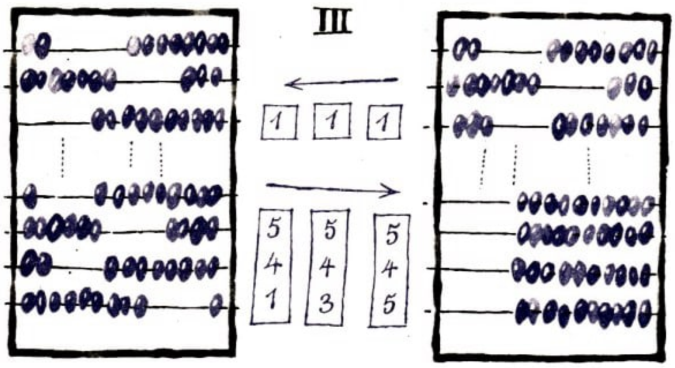


Auf dem Rechenbrett kann man auch Quadratwurzeln aus gegebenen Zahlen ziehen. Da die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (von 1 an),

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1)$$

n^2 ergibt, lässt sich die Berechnung von $\sqrt{N}$ auf die Lösung des Problems zurückführen, wieviel Summanden der Gestalt 1, 3, 5, ... addiert werden können, ohne dass die Summe die Zahl N übersteigt.
Für große N ist diese Bestimmung jedoch ziemlich anstrengend; daher bestimmt man besser die einzelnen Ziffern der gesuchten Wurzel.

Zu diesem Zweck teilt man die Zahl von rechts nach links in Zweiergruppen ein und subtrahiert von der höchsten Gruppe 1, 3, 5 usw., soweit das möglich ist. Dadurch erhält man die Ziffer der höchsten Stelle der gesuchten Zahl.



Diese Ziffer wollen wir mit a bezeichnen. Zu dem Rest fügen wir die folgende Gruppe hinzu und ziehen von der erhaltenen Zahl nacheinander $20a + 1$, $20a + 3$, $20a + 5$ usw. ab, wieder so weit, wie das möglich ist.
Daraus erhalten wir dann die nächste Ziffer der gesuchten Zahl usw. Die Abbildung zeigt, wie man nach diesem Verfahren die Quadratwurzel aus 74529 zieht.

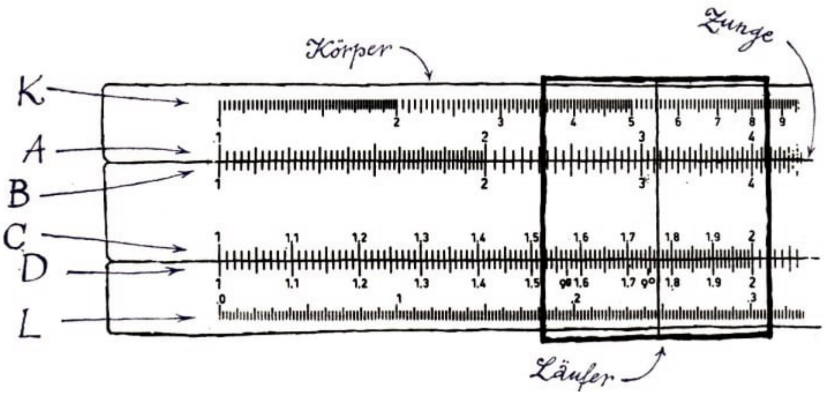
3.12 Der Rechenstab

Obwohl Rechenbretter und Nepersche Streifen die Durchführung arithmetischer Operationen sehr erleichtern, können sie bei komplizierteren Rechnungen, die beispielsweise mit der Bestimmung von Wurzeln höheren Grades oder von Werten trigonometrischer Funktionen verbunden sind, schon nicht mehr helfen.

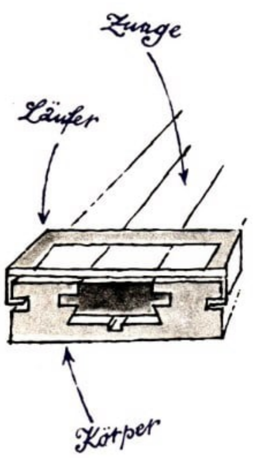
In diesen Fällen sind Logarithmentafeln sehr nützlich. Bei zahlreichen Berechnungen erhält man schon eine ausreichende Genauigkeit mit vierstelligen Tafeln; manchmal muss man jedoch fünf- oder sogar siebenstellige Logarithmentafeln verwenden.

In Fällen, in denen es ausreicht, mit 2 bis 3 richtigen Stellen zu arbeiten, kommt man mit dreistelligen Tafeln aus. An Stelle dieser Tafeln kann man aber auch mit recht gutem Erfolg den logarithmischen Rechenstab verwenden, ein einfaches Rechengerät, das dank seiner handlichen Größe und der Einfachheit, mit der die verschiedensten Operationen darauf ausgeführt werden können, äußerst zweckmäßig ist.

Der Rechenstab besteht aus einem Körper, einer Zunge (d. h. einer schmalen Leiste, die im Körper verschiebbar ist) und einem Läufer (aus Glas oder Kunststoff, mit einem dünnen Strich und meist mit Nebenstrichen zum Ablesen versehen). Die Abbildungen zeigen einen Querschnitt des Rechenstabes und einen Rechenstab von oben.



Das wichtigste am Rechenstab sind die logarithmischen Skalen, die es gestatten, die Multiplikation und Division von Zahlen auf die Addition und Subtraktion von Strecken zurückzuführen.



Will man eine logarithmische Skale herstellen, so wählt man eine Maßstabeinheit E (Modul der Skale) und trägt vom Anfang der Skale aus für verschiedene Werte von x Strecken ab, deren Länge gleich $E - \lg x$ ist. An den jeweiligen Endpunkten der Strecken werden die Zahlen eingetragen (oder wenigstens angedeutet), die dem Wert von x entsprechen.

So werden mit $E = 25$ cm die Skale D (auf dem Körper) und die benachbarte Skale C (auf der Zunge) konstruiert. Für die logarithmischen Skalen A (auf dem Körper) und B (auf der Zunge) wird der Modul $E_1 = \frac{E}{2} = 12,5$ cm und für die Skale K (auf dem oberen Teil des Körpers) der Modul $E_2 = \frac{E}{3} = 8,5$ cm verwendet.

Die Zahlzeichen im mittleren und im rechten Teil der Skale K muss man sich verzehnfacht bzw. verhundertfacht denken, die Skale L auf $\frac{1}{10}$ verkleinert (sie liefern dann den Abstand der entsprechenden Punkte vom Anfang der Skale in Einheiten des Maßstabs $E = 25$ cm).

Nicht alle Punkte der Skalen sind mit Zahlzeichen versehen. Zur Bestimmung des Zahlzeichens bei einem beliebigen Punkt irgendeiner Skale muss man die Anzahl der Teilungen (Intervalle) bestimmen, die sich zwischen den beiderseits benachbarten, mit Zahlen versehenen Punkten befinden. Daraus erkennt man den "Wert" der Teilstriche. So hat das Intervall zwischen 3 und 4

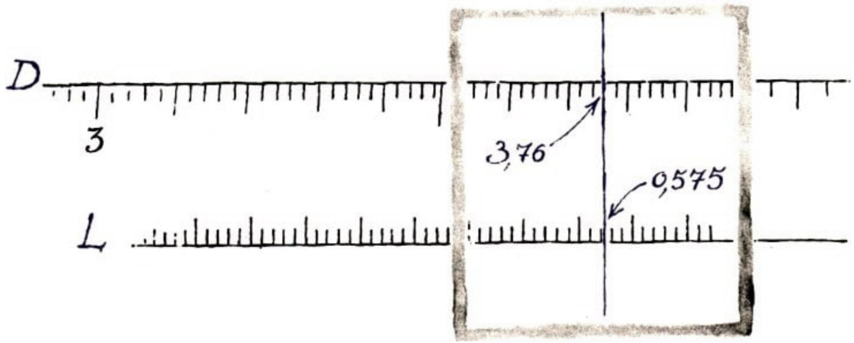
auf der D-Skale 10 Hauptteilungen, von denen wiederum jedes Teilintervall in 5 feinere zerlegt ist. Da an den Enden des gesamten Intervalle die Zahlzeichen 3 bzw. 4 stehen, hat jeder größere Teilstrich den Wert 0,1 und jede feine Unterteilung den Wert 0,02.

Im Intervall 4 bis 5 auf der Skale D bedeutet die erste Unterteilung wiederum 0,1, die feinere dagegen nur 0,05. Im Intervall 1 bis 2 (d. h. 100 bis 200) auf dem rechten Teil der Skale K bedeutet die grobe Unterteilung 10 und die feine 2; auf der gleichmäßigen Skale L bedeutet jeder größere Teilstrich 0,01 und jeder feinere 0,002.

Um mit dem Rechenstab gut umgehen zu können, muss man schnell und richtig die Zahlenwerte der Punkte auf den einzelnen Abschnitten jeder Skale bestimmen können. In der Abbildung sind einige Skalenabschnitte im vergrößerten Maßstab dargestellt. Dabei sind für verschiedene Punkte die Zahlenwerte angegeben. Für Punkte, die auf den Skalen nicht durch Striche gekennzeichnet sind, bestimmt man den Zahlenwert näherungsweise nach Augenmaß.

Mit der Skale L kann man den Abstand eines beliebigen Punktes a der Skale D vom Skalenanfang bestimmen. Mittels des Ablesestrichs auf dem Läufer erhält man dabei eine Genauigkeit von einem Tausendstel. Damit hat man aber zugleich den dreistelligen Logarithmus der Zahl a bestimmt.
In der Abbildung kann man erkennen, dass der Abstand vom Anfang der Skale D bis zum Punkt 3,76 ungefähr gleich 0,575 E ist, d. h. aber, dass $\lg 3,76 \approx 0,575$ ist. Analog erhält man:

$$\lg 478 = \lg 100 + \lg 4,78 \approx 2,679$$



3.13 Multiplikation und Division

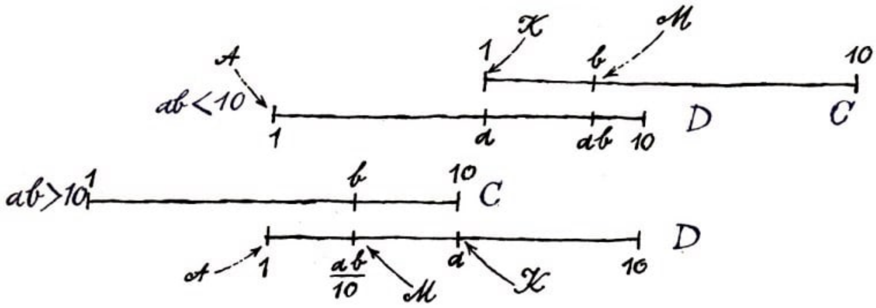
Beim Multiplizieren und Dividieren von Zahlen auf dem Rechenstab ist es immer möglich, diese Operationen mit Zahlen durchzuführen, die zwischen 1 und 10 liegen.
Dazu muss man die gegebenen Zahlen durch Verschieben des Kommas in diesen Bereich transformieren. Die Stellung des Kommas im Ergebnis bestimmt man dann durch eine grobe Überschlagsrechnung mit gerundeten Ausgangszahlen. Da die Beziehungen

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b \qquad \text{und} \qquad \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

gelten, werden Multiplikation und Division von Zahlen auf Addition und Subtraktion der Logarithmen dieser Zahlen zurückgeführt, und diese lassen sich mit Hilfe der Zunge verwirklichen.
Der mit der Theorie der Logarithmen nicht vertraute Leser möge diese Formeln an Hand einiger spezieller Werte von a und b nachprüfen, nachdem er $\lg a$ und $\lg b$ mit Hilfe der Skalen D und L bestimmt hat.

Anfang und Ende der Skale C wollen wir im folgenden der Kürze halber mit $C1$ und $C10$ bezeichnen.
Liegen a und b zwischen 1 und 10, so wird die Multiplikation von a und b folgendermaßen durchgeführt:

1. Ist $ab < 10$, so wird $C1$ auf den Punkt a der Skale D eingestellt; das gesuchte Produkt ab findet man dann auf der Skale D unter dem Punkt b der Skale C.

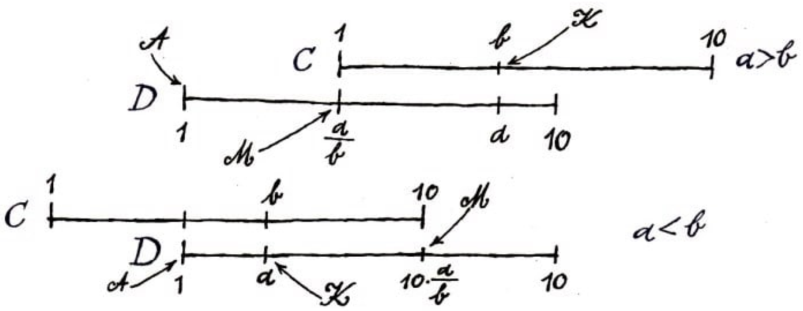


2. Ist $ab > 10$, so wird $C10$ über dem Punkt a der Skale D eingestellt; man erhält unter dem Punkt b der Skale C auf der Skale D den Punkt $\frac{ab}{10}$. Hier sind beide Fälle dargestellt, wobei im ersten Fall

$$AM = AK + KM = E \lg a + E \lg b = E \lg(ab)$$

und im zweiten Fall ist:

$$AM = AK - MK = E \lg a - (E - E \lg b) = E \lg \frac{ab}{10}$$



Bei der Division von a durch b muss man die Punkte a der Skale D und b der Skale C übereinander einstellen. Man erhält dann im Falle $a > b$ den Quotienten $\frac{a}{b}$ auf der Skale D unter $C1$; im Falle $a < b$ erhält man auf der Skale D unter $C10$ den Quotienten $\frac{10a}{b}$.
Dass dies richtig ist, ersieht man aus der Abbildung, denn bei $a > b$ erhält man

$$AM = AK - MK = E \lg a - E \lg b = E \lg \frac{a}{b}$$

und bei $a < b$

$$AM = AK + KM = E \lg a + (E - E \lg b) = E \lg \frac{10a}{b}$$

3.14 Potenzieren und Radizieren

Diese Rechenoperationen lassen sich mit dem Rechenstab nach demselben Schema durchführen wie bei der Verwendung von Logarithmentafeln. Ist beispielsweise

$$x = \sqrt[7]{0,24^4}$$

zu bestimmen, so erhält man durch Logarithmieren

$$\lg x = \frac{4}{7} \lg 0,24 \approx \frac{4}{7} \cdot (0,380 - 1)$$

(mit Hilfe der Skalen D und L) und schließlich

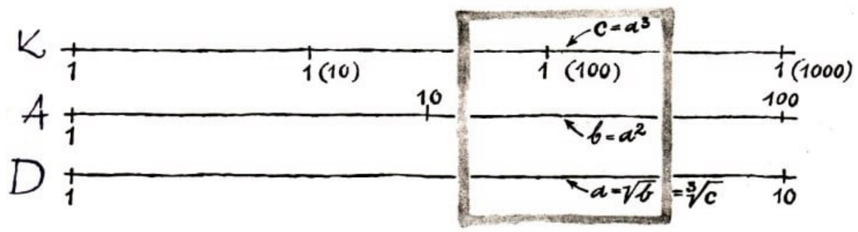
$$\lg x \approx 0,646 - 1$$

Für die Mantisse 646 auf der Skale L finden wir auf der Skale D die Zahl 4,43; da aber die Kennziffer -1 war, erhalten wir

$$x \approx 0,443$$

Zweite und dritte Potenzen einer Zahl lassen sich jedoch bedeutend einfacher mit den Skalen D, A und K bestimmen, ebenso auch Quadrat- und Kubikwurzeln. Wenn bei irgendeiner Stellung des Läufers der Ablesestrich durch die Punkte a, b, c der Skalen D, A, K hindurchgeht (siehe Abbildung), dann sind die Strecken auf den drei Skalen einander gleich; es ist also

$$E \lg a = \frac{E}{2} \lg b = \frac{E}{3} \lg c$$



und daraus folgt dann:

$$a = \sqrt{b} = \sqrt[3]{c} \qquad \text{oder} \qquad b = a^2 \text{ und } c = a^3$$

Will man also eine Zahl a zwischen 1 und 10 ins Quadrat (bzw. in die dritte Potenz) erheben, so stellt man den Ablesestrich auf den Punkt a der Skale D ein und findet dann auf der Skale A durch den Ablesestrich den Punkt $b = a^2$ (bzw. den Punkt $c = a^3$ auf der Skale K).

Ist $a < 1$ oder $a > 10$, so muss man zunächst a in der Gestalt $a = 10^k \cdot a'$ darstellen, wobei a' zwischen 1 und 10 liegt.
Zur Berechnung von $\sqrt{b}$ oder $\sqrt[3]{b}$ muss b zunächst in der Gestalt $b = 10^{2p} \cdot b'$ und c in der Gestalt $c = 10^{3q} \cdot c'$ dargestellt werden, wobei b' zwischen 1 und 100 und c'

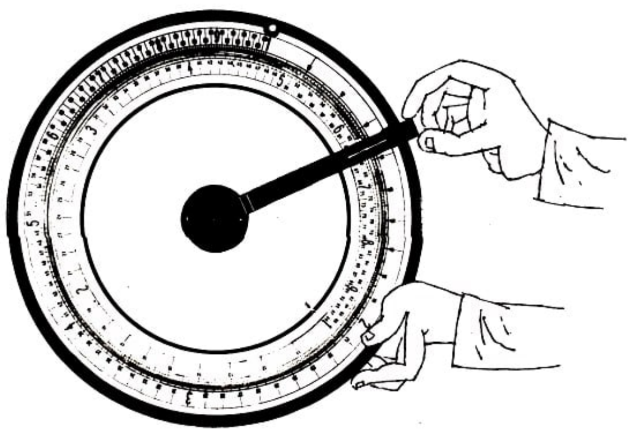
zwischen 1 und 1000 liegt. Mittels des Ablesestrichs findet man dann auf der Skale D die Zahlen $\sqrt{b'}$ bzw. $\sqrt[3]{c'}$. Beispielsweise erhält man

$$\sqrt[3]{0,0002} = \sqrt[3]{10^{-6} \cdot 200} \approx 10^{-2} \cdot 5,85 = 0,0585$$

Wir wollen hier nicht auf die trigonometrischen Skalen eingehen (die sich auf der anderen Seite der Zunge befinden), mit denen man Näherungswerte für die trigonometrischen Funktionen bestimmen und einige Operationen mit ihnen ausführen kann, ebenso nicht auf die reziproke Skale auf der Zunge, die zur Multiplikation einiger Zahlen vorteilhafter ist.

Es gibt eine Vielzahl von Verfahren, die es gestatten, auf dem Rechenstab sehr schnell Berechnungen durchzuführen, auch wenn dabei eine ganze Reihe von Multiplikationen und Divisionen auszuführen oder quadratische Gleichungen zu lösen sind usw.
Darüber kann der Leser in der Spezialliteratur mehr erfahren. Es sollte hier nur gezeigt werden, wie bei dem Rechenstab die grundlegenden Eigenschaften der Logarithmen geschickt benutzt werden.

Die logarithmische Skale wurde schon zu Anfang des 17. Jh., einige Jahre nach dem Erscheinen der ersten Logarithmentafeln, verwendet. Allerdings wurden damals Addition und Subtraktion von Strecken, welche die Logarithmen der Zahlen darstellten, mit Hilfe eines Zirkels durchgeführt. Erst Mitte des 17. Jh. wurde dafür die Zunge verwendet. Der Läufer wurde Mitte des 19. Jh., eingeführt, und damit hatte der Rechenstab in den Grundzügen bereits seine heutige Gestalt gefunden.



Zur Erhöhung der Rechengenauigkeit kann man den Modul der Basis des Logarithmensystems größer wählen. Um dabei aber die Abmessungen des Gerätes nicht zu vergrößern, wird die logarithmische Skale manchmal aufgeschnitten und in Teilen längs der Erzeugenden eines Zylinders aufgetragen. Die Zunge wird durch einen durchsichtigen Hohlzylinder ersetzt, den man leicht über dem Grundzylinder bewegen kann.

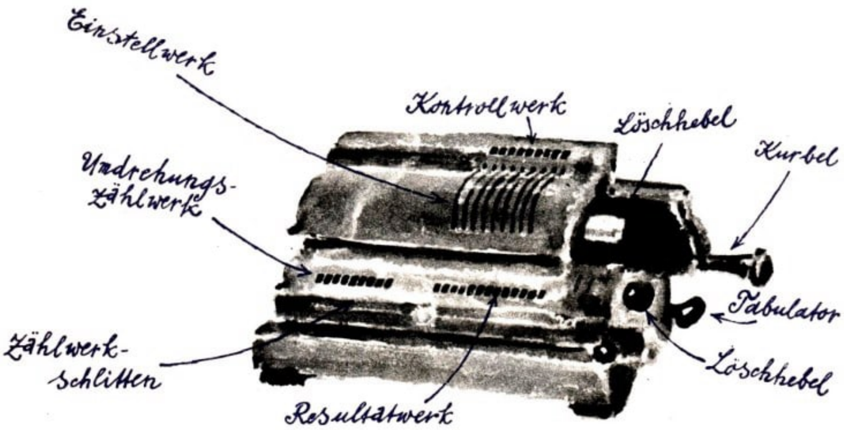
Manchmal werden die logarithmischen Skalen auch auf dem Rand einer Scheibe oder eines Ringes aufgetragen, in deren Mitte sich eine drehbare Scheibe befindet.
Solche Rechenscheiben haben die Gestalt einer Taschenuhr. Es existieren aber auch größere und sehr große Rechenscheiben mit einem Durchmesser von 1 Meter und einem Modul für die logarithmische Skale von 3 Metern. Die Rechengenauigkeit auf

solchen Scheiben ist natürlich bedeutend größer, aber dafür sind zu ihrer Bedienung zwei Personen nötig.

3.15 Tischrechenmaschinen

Die Konstruktion der ersten Rechenmaschinen ist mit den Namen Pascal und Leibniz verknüpft (17. Jh.). Im Jahre 1820 begann man in Paris mit der fabrikmäßigen Herstellung der Leibnizschen Rechenmaschinen, für welche Staffelwalzen verwendet wurden; in 60 Jahren wurden etwa 1500 Maschinen produziert.

Die Verbreitung der Rechenmaschinen wurde besonders durch die Erfindung des Sprossenrades mit veränderlicher Zähnezahl durch den Petersburger Ingenieur W. T. Odhner gefördert. Ende des 19. Jahrhunderts erschienen verschiedene Varianten des Odhnerschen Arithmometers (Handkurbelmaschine).
Eine davon ist die Tischrechenmaschine "Triumphator" , die weit verbreitet ist. Sie besteht aus einem Grundkörper und einem Schlitten, den man mit einem speziellen Hebel nach rechts und links verschieben kann.

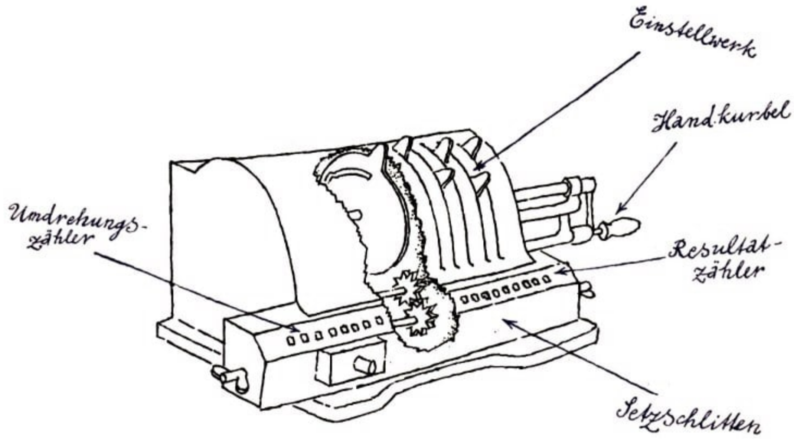


Auf dem Schlitten befinden sich zwei Gruppen von Fensterchen, von denen die rechte (13 Fensterchen) den Blick auf die Zahlen des Resultatzählwerks und die linke (8 Fensterchen) den auf die Zahlen des Umdrehungszählwerks freigibt.
Im Resultatzähler werden die Ergebnisse von Addition, Subtraktion und Multiplikation mit gegebenen Zahlen angezeigt, während im Umdrehungszähler bei der Multiplikation.der Multiplikator und bei der Division der Quotient erscheint.

Seitlich am Schlitten befinden sich die Löschtasten, mit denen man in den Fensterchen des Resultatzählers bzw. des Umdrehungszählers Nullen einstellen kann. Die Fensterchen der beiden Zähler sind nummeriert.
Man sagt, der Schlitten befinde sich in der Stellung n, wenn sich der Zeiger (auf dem Deckel des Grundkörpers) über dem Fensterchen Nummer n des Umdrehungszählen befindet.

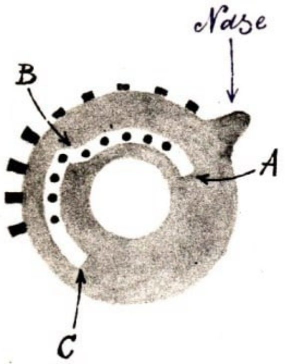
Um eine klare Vorstellung von der Arbeit des Arithmometers zu erhalten, müssen wir das Innere etwas näher betrachten. Im Innern des Körpers befindet sich der Odhnersche Zylinder, der durch eine Handkurbel angetrieben wird und der aus neun Odhnerschen

Sprossenrädern und vier weiteren zusätzlichen Rädern (im linken Teil des Zylinders) besteht.



Die neun Grundräder sind von rechts nach links von 1 bis 9 nummeriert, wobei aber in der Abbildung zur Vereinfachung nur zwei davon dargestellt sind.

Eine Drehung der Handkurbel und des Zylinders bezeichnen wir als Vorwärtsdrehung, wenn die Handkurbel im Uhrzeigersinn bewegt wird. Bei jeder Umdrehung des Zylinders wird das Ziffernrad des Umdrehungszählers, das sich unter dem Zeiger C befindet, um ein Zehntel seines Umfanges gedreht, und es erscheinen bei einer Vorwärtsdrehung der Handkurbel nacheinander in den Fensterchen die weißen Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9; bei Drehung der Handkurbel in umgekehrter Richtung erscheinen die roten Ziffern 1, 2, ..., 7, 8 und dann schließlich die weiße Ziffer 9.



Im Resultatzähler stehen auf dem äußeren Umfang jedes Ziffernrades die 10 Ziffern von 0 bis 9. Zu jedem dieser Räder gehört rechts ein Triebrad mit 10 Zähnen und links ein großer Zahn.
Jedes Odhnersche Sprossenrad besitzt einen Sprossenradkörper, auf dem sich ein Einstellring mit einer Einstellnase befindet. Dieser Einstellring ist in nebenstehender Abbildung dargestellt. In den Einstellringen befinden sich stufenförmige Ausschnitte ABC, in welche die Stifte von neun verschiebbaren Zähnen hineinragen, die sich in radialen Schlitzen des Radkörpers bewegen. Jeder Zahn befindet sich entweder innerhalb des Radkörpers, oder er wird nach außen vorgeschoben.

Das hängt davon ab, ob sich der Stift C des entsprechenden Zahnes im Bogen AB oder im Bogen BC des Ausschnittes im Einstellring befindet. Wenn wir nämlich die Einstellnase in dem Schlitten der Deckplatte des Grundkörpers auf eine bestimmte Ziffer einstellen, wird die entsprechende Anzahl von Zähnen durch den Bogen BC nach außen vorgeschoben.
Außer den verschiebbaren Zähnen besitzt jedes der Odhnerschen Grundräder (außer dem ersten Rad) noch zwei Zähne, die das gegenüberliegende Ziffernrad um ein Zehntel seines Umfanges drehen, wenn das rechts benachbarte Rad eine volle Drehung ausgeführt hat.

Soll auf dem Zylinder die Zahl 2035 eingestellt werden, so werden mit Hilfe der Einstellnase auf dem ersten Rad fünf Zähne, auf dem zweiten drei Zähne und auf dem vierten zwei Zähne nach außen vorgeschoben. Bei einer Vorwärtsdrehung dreht jeder hervorgeschobene Zahn über ein Zwischenzahnrad das sich unter ihm befindliche Ziffernrad um ein Zehntel seines Umfanges, so dass im Resultatzähler die Zahl 2035 erscheint, wenn zuvor alles gelöscht war.

Stellen wir danach beispielsweise die Zahl 7 ein und drehen wir danach wieder die Handkurbel langsam in Vorwärts-Richtung einmal herum, so können wir leicht verfolgen, wie im ersten Fensterchen des Resultatzählers die Ziffern 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2 erscheinen. In dem Moment, in dem die Ziffer 9 durch die 0 abgelöst wird, lenkt der große Zahn auf der linken Seite des Ziffernrades eine spezielle Nase (den Zehnerübertrag) ab, die sich auf der Achse parallel zur Achse des Resultatzählers befindet.
Dadurch wird wiederum einer der zwei Extrazähne auf dem Odhnerschen Sprossenrad, das als nächstes folgt, abgelenkt, und dadurch wird das zweite Ziffernrad um ein Zehntel seines Umfanges gedreht.
Insgesamt erscheint so im Resultatzähler die Zahl 2042 (2035 + 7).
Dreht man anschließend die Handkurbel in umgekehrter Richtung, so kann man verfolgen, wie im ersten Fensterchen statt der Ziffer 2 nacheinander die Ziffern 1, 0, 9, 8, 7, 6, 5 erscheinen, wobei wiederum in dem Moment, in dem die 0 durch die 9 abgelöst wird, im zweiten Fensterchen statt der Ziffer 5 die Ziffer 4 erscheint.

Analog verhält es sich in allen anderen Fensterchen beim Übergang von 9 zu 0 bei einer Vorwärtsdrehung oder beim Übergang von 0 zu 9 bei einer Drehung in umgekehrter Richtung.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie auf einem Arithmometer die Grundrechenoperationen durchgeführt werden. Bei der Berechnung von $a + b$ oder $a - b$ (a und b ganze Zahlen) muss der Resultatzähler gelöscht und der Schlitten in die Stellung 1 gebracht werden.
Nachdem die Zahl a eingestellt worden ist, muss man sie durch eine Vorwärtsdrehung in den Resultatzähler übertragen. Danach wird die Zahl b eingestellt. Durch eine Vorwärtsdrehung wird sie zu a hinzugefügt. Durch eine Drehung in umgekehrter Richtung wird b von a abgezogen. Entsprechend wird die Summe von mehreren Zahlen gebildet.

Zur Multiplikation von a und b muss man die beiden Zähler löschen und den Multiplikanden a mit den einzelnen Nasen einstellen. Ist beispielsweise $b = 437$, dann muss man, nachdem man den Schlitten in die Stellung 3 gebracht hat, 4 Vorwärtsumdrehungen ausführen (im Resultatzähler erscheint $a \cdot 400$).

Danach wird der Schlitten in Stellung 2 gebracht, und man macht 3 Umdrehungen (im Resultatzähler erscheint $a \cdot 400 + a \cdot 30$); in Stellung 1 schließlich werden 7 Umdrehungen durchgeführt (im Resultatzähler kommt zur alten Summe noch $a \cdot 7$ hinzu).
So erhält man im Umdrehungszähler den Multiplikator (437) und im Resultatzähler das gesuchte Produkt.

Man kann aber bei diesem Beispiel auch mit weniger Umdrehungen auskommen, indem man in den Stellungen 3 und 2 jeweils vier Vorwärtsdrehungen mit der Handkurbel und dann in der Stellung 1 drei Umdrehungen in umgekehrter Richtung ausgeführt. Man hat also folgendermaßen gerechnet:

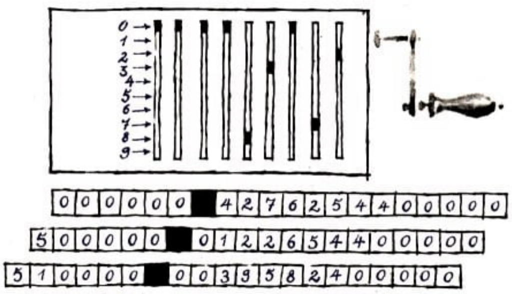
$$a \cdot 437 = a \cdot 400 + a \cdot 40 - a \cdot 3$$

Bei der Division von a durch b muss man den Dividenden in den äußersten linken Feldern des Resultatzählers einstellen, um für den Quotienten die größtmögliche Anzahl von Dezimalstellen zu erhalten, und den Schlitten in die Stellung 8 bringen.
Auf dem Zylinder wird der Divisor entweder über dem äußersten linken Feld des Dividenden oder eine Stelle weiter rechts davon eingestellt, je nachdem, ob die erste Stelle von b kleiner oder größer als die erste Stelle von a ist (sind die beiden ersten Stellen gleich, muss man die zweiten Stellen vergleichen usw.). Danach muss der Umdrehungszähler gelöscht werden.

Die Zahl b wird von der Zahl, die unter ihr in den gleichen Stellen des Resultatzählers steht, so oft subtrahiert, wie es möglich ist, und man erhält dadurch im Umdrehungszähler die erste Stelle des Quotienten. Wird dabei eine Subtraktion ausgeführt, die nicht mehr möglich ist, d. h., wird von einer kleineren Zahl eine größere abgezogen, dann ertönt ein Klingelzeichen, und in den linken Fensterchen des Resultatzählers erscheint eine 9. In diesem Fall muss mit der Handkurbel eine Vorwärtsdrehung ausgeführt werden, wodurch man die vorhergehende Stellung wieder erhält.

Danach wird b wiederholt von der Zahl subtrahiert, welche man aus dem Rest der vorhergehenden Subtraktionen und der folgenden Ziffer der Zahl a erhält. Dazu muss der Schlitten um eine Stelle nach links gefahren werden (die neue Zahl wird unter die Zahl b eingestellt), und man erhält, nachdem alle möglichen Subtraktionen ausgeführt worden sind, im siebenten Fensterchen des Umdrehungszählers die zweite Ziffer des Quotienten. Analog erhält man dann auch die restlichen Stellen des Quotienten.

In der Abbildung ist die Ausgangsstellung für die Division von 42762544 durch 83072 und der Stand der Zähler nach der Bestimmung der ersten und zweiten Ziffer des Quotienten dargestellt.



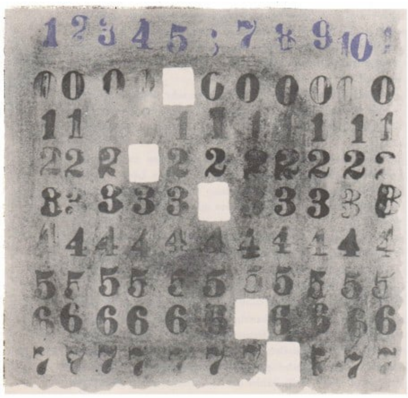
Das Arithmometer gehört zu den einfachsten und verbreitetsten Rechenmaschinen. Der Odhnersche Zylinder wird aber auch in anderen Maschinen benutzt, die beträchtliche Unterschiede zum Arithmometer aufweisen.

Beispielsweise werden in der sowjetischen Rechenmaschine WK-2 die Ziffern auf den Odhnerschen Rädern nicht mittels einer Nase, sondern durch den Druck auf eine Taste (von insgesamt zehn) eingestellt. In der Maschine WK-2 bleiben die Zähler unbeweglich, dafür wird aber die auf dem Zylinder eingestellte Zahl bewegt.
In vielen Maschinen, beispielsweise in der Maschine KSM-1, wird zur Einstellung der Zahlen eine vollständige Tastatur (Volltastatur) verwendet, beider zu jeder Stelle zehn Tasten gehören.

Neben dem Odhnerschen Sprossenrad werden in modernen Maschinen auch andere sinnreiche Verfahren angewendet, bei denen durch Drehung des Rades um einen bestimmten Winkel die betreffende Ziffer einer gegebenen Zahl eingestellt wird.
Am weitesten verbreitet sind heute elektrische Tischrechenmaschinen, bei denen der Rechner keine Kurbel mehr zu bedienen braucht; das Drehen besorgt ein Elektromotor.

Schließlich existieren auch kleine automatische Tischrechenmaschinen, bei denen man beispielsweise nur Dividend und Divisor einzustellen und den Motor einzuschalten hat. Alle Operationen, auch die Bewegung des Schlittens und das Vorwärtsdrehen nach "unmöglichen Subtraktionen" werden automatisch, ohne Mitwirkung des Rechners, durchgeführt. Es gibt jedoch Aufgaben von solcher Schwierigkeit, dass selbst solche kleinen automatischen Rechenmaschinen nicht mehr ausreichen. Wenn auch die einzelnen Operationen auf ihnen sehr schnell durchgeführt werden können, so müssen doch jedesmal die gegebenen Zahlen "in die Maschine eingegeben" werden, was sehr viel Zeit kostet.

In solchen Fällen sind Lochkartenanlagen sehr nützlich, die einen ganzen Maschinenkomplex umfassen (Locher, Sortiermaschine, Tabelliermaschine usw.), von denen jede ihre eigenen Aufgaben hat.
Bei einem Locher werden die gegebenen Zahlen auf genormte Lochkarten übertragen, wobei statt der Ziffern Löcher in verschiedene Spalten gestanzt werden. (Die Abbildung zeigt eine Lochkarte mit der eingestanzten Zahl 203670).



Die Sortiermaschine tastet mit einer Metallbürste die Karten ab. Gleitet diese über Löcher, so wird ein Stromkreis geschlossen, der einen Elektromagneten betätigt. Auf diese Weise werden die Karten entsprechend den eingestanzten Ziffern sortiert.

In den Tabelliermaschinen werden die Löcher durch die Bürsten in mehreren Spalten gleichzeitig abgetastet. Es werden Signale ausgesandt, welche die Ziffernräder der Zähler auf die entsprechenden Winkel einstellen. Auf den 45 Spalten einer Lochkarte können sechs siebenstellige Zahlen untergebracht werden, die gleichzeitig in die sechs Zähler der Tabelliermaschine übertragen werden.
Berücksichtigt man weiterhin, dass die von der Maschine erarbeiteten Resultate von derselben Maschine für weitere Berechnungen verwendet werden können, so wird verständlich, dass eine solche Maschine komplizierte Aufgaben sehr schnell lösen kann.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden diese Maschinen im wesentlichen nur zur Verarbeitung der statistischen Materialien von Volkszählungen verwendet. Für diese Zwecke werden sie auch jetzt noch eingesetzt, neuerdings auch zur Ermittlung der Ergebnisse von Wettkämpfen. Heute werden sie in Verbindung mit Zusatzgeräten auch zur Lösung verschiedener mathematischer Aufgaben eingesetzt, jedoch fast nur für Aufgaben, bei denen mit verhältnismäßig vielen Angaben verhältnismäßig wenige einfache Rechnungen auszuführen sind.

Allerdings sind ihnen die elektronischen Rechenautomaten, die vor etwa 20 Jahren aufkamen, in Bezug auf die Kompliziertheit der Aufgaben, die sie lösen können, und in Bezug auf die Rechengeschwindigkeit haushoch überlegen.
Vom Aufbau und der Arbeitsweise elektronischer Rechenautomaten handelt der nächste Abschnitt.

3.16 Elektronische Rechenmaschinen und -automaten

M. G. Reinberg

Wenn wir das Wort "Maschine" hören, stellen wir uns unwillkürlich einen Komplex aus mechanischen Einzelteilen vor, der irgendwelche Materialien bearbeitet, Lasten hebt oder befördert oder eine Art von Energie in eine andere verwandelt. Mit Hilfe solcher Maschinen wurden dem Menschen, bildlich gesprochen, gewaltige Kräfte an Armen und Beinen verliehen, welche die körperliche Arbeit produktiver machten.

Auch große Rechenanlagen werden gewöhnlich als Maschinen bezeichnet. Diese Maschinen führen aber keinerlei körperliche Arbeit aus.

Auf den einfachsten Rechenmaschinen kann man verschiedenartige Berechnungen durchführen, beispielsweise arithmetische Aufgaben lösen. Die komplizierteren Rechenmaschinen können auch schwierigere Aufgaben der höheren Mathematik lösen. Viele der modernen Rechenmaschinen können außerdem auch zur Lösung logischer Aufgaben herangezogen werden.
Wie wir noch sehen werden, sind Rechenmaschinen Einrichtungen zur Verarbeitung von Zahlenmaterial, Daten, Nachrichten und Informationen. Sie erleichtern dem Menschen in bedeutendem Maße die geistige Arbeit.

Die Rechentechnik hat eine an Ereignissen reiche Geschichte. Besonders stürmisch entwickelt sie sich jedoch in unserer Zeit. Immer zahlreicher und komplizierter werden die mathematischen Aufgaben, die schnell und mit großer Genauigkeit gelöst werden müssen.
Die Entwicklung der Rechentechnik vollzog und vollzieht sich in zwei verschiedenen Richtungen. Die erste betrifft die Entwicklung von "kontinuierlich arbeitenden Maschinen", die man auch Analogrechner oder modellierende Maschinen nennt. Diese Bezeichnungen rühren daher, dass ein dem zu untersuchenden Prozess analoges (ähnliches) Modell untersucht wird. Das wird später ausführlich beschrieben.

Den Rechenstab wird man wohl kaum als Maschine bezeichnen, aber er steht am Anfang einer ganzen Liste von kontinuierlich arbeitenden Geräten, an deren Ende die modernen elektromagnetischen und elektronischen Analogrechner stehen. Einige dieser Maschinen werden oft auch als Integratoren oder Differential-Analysatoren bezeichnet.

Die zweite Richtung in der Rechentechnik bilden die "diskret arbeitenden" Rechenmaschinen oder Digitalrechner (= Ziffernrechner). Auch die Rechenbretter wird man nicht als Maschinen bezeichnen wollen. Aber sie sind sozusagen die Ahnherren der großen Familie der Digitalrechner. Dazu gehören auch die Tischrechenmaschinen mit Handbetrieb, die elektrischen Tischrechenmaschinen und die komplizierteren Lochkartenanlagen, die schon eine ganze Reihe von Operationen automatisch ausführen können.

Es gibt auch Digitalrechner, die mit elektromagnetischen Relais ausgestattet sind. Sie sind außerordentlich zuverlässig, aber relativ langsam, so dass sie bald den Anforderungen, die die moderne Industrie stellte, nicht mehr genügten. Die Spitze in der Entwicklung der digitalen Rechentechnik bilden die programmgesteuerten elektronischen Ziffernrechenautomaten. Wir werden später noch ausführlich darauf eingehen, zunächst aber wenden wir uns den Analogrechnern zu und studieren die Prinzipien, nach denen sie arbeiten.

3.17 Analogrechner oder modellierende Maschinen

Ein Ingenieur steht oft vor der Aufgabe festzustellen, wie ein bestimmter technischer Prozess abläuft, ohne dass es möglich wäre, die Untersuchung an der in Betrieb befindlichen Anlage durchzuführen.

In solchen Fällen bleibt nur eine Möglichkeit, nämlich den Prozess in verkleinerter Form darzustellen, ein Modell zu konstruieren und am Modell zu untersuchen, was sich in Wirklichkeit abspielt. Fast jeder reale Prozess aus Mechanik, Hydraulik, Elektrotechnik, Funktechnik und vielen anderen Gebieten von Wissenschaft und Technik lässt sich in der Sprache der Mathematik darstellen - in der Sprache der Formeln und Gleichungen.

Die Fachleute sagen dann, der Prozess werde mathematisch beschrieben.
Wenn Ingenieure ein vielfach verzweigtes Hochspannungsnetz mit zahlreichen Kraftwerken, Umformstationen und Fernleitungen zu untersuchen oder zu entwerfen haben, benutzen sie gewöhnlich ein Modell davon, ein sogenanntes Netzmodell. In diesem Modell haben sie es genau wie im Original mit elektrischen Strömen zu tun, allerdings mit Schwachstrom. Diese Methode der Modellierung wird als physikalische Modellierung bezeichnet.

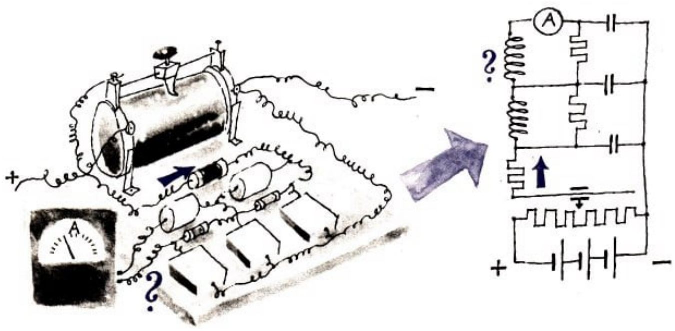
Ein gutes Beispiel für ein physikalisches Modell ist das dynamische Modell eines energetischen Systems. Es besteht aus zahlreichen Schwachstrom-Maschinen und Transformatoren.
Jede einzelne Maschine ist das Modell eines ganzen Kraftwerks oder einer großen Fabrik, die Energie verbraucht. Zwischen den einzelnen Teilen des Modells kann man beliebige Verbindungen herstellen, die zur Modellierung des wirklichen Hochspannungsnetzes erforderlich sind.

Dynamische Modelle ermöglichen es, verschiedene komplizierte Prozesse, die in modernen Energiesystemen ablaufen, hinreichend genau darzustellen und zu untersuchen. Das ist aber sehr wichtig, wenn man die gewaltigen neuen Verbundnetze richtig projektieren will. Für die Schaffung eines elektrodynamischen Modells für das Verbundnetz der Sowjetunion wurden Akademiemitglied Kostjenko und Professor Wenikow im Jahre 1958 mit dem Leninpreis ausgezeichnet.

Viel weiter verbreitet als physikalische Modelle sind mathematische Modelle. In einem mathematischen Modell ist die zu untersuchende Größe ihrer physikalischen Natur nach von der Größe, die durch sie modelliert wird, verschieden. Die Ähnlichkeit zwischen den realen Prozessen und den Prozessen im Modell besteht nur darin, dass beide durch dieselben mathematischen Gleichungen beschrieben werden. Beispielsweise werden in der Sprache der Mathematik die Schwingungen einer Masse an einer Feder genauso dargestellt wie die elektrischen Schwingungen in einem Schwingkreis aus Spule und Kondensator.

In irgendeinem komplizierten Prozess seien verschiedenartige Größen beteiligt, sagen wir mechanische, elektrische, thermische und andere. Beschreibt man sie durch Gleichungen, so erscheinen sie alle "im selben Gewande", im mathematischen.

Zeichen und Buchstaben lassen sich in einer Rechenmaschine weder addieren noch subtrahieren, es sind eben nur Zeichen und Buchstaben. Es müssen nämlich alle Größen aus unserer Gleichung mit Hilfe einer wahrnehmbaren existierenden physikalischen Größe dargestellt werden.



Am besten eignen sich dazu elektrische Spannungen. Die veränderlichen Größen stehen nun sowohl im Verlauf des ganzen Prozesses als auch in seiner mathematischen Darstellung in ständiger Wechselwirkung. Sie werden addiert, multipliziert und subtrahiert. Das heißt aber, dass auch in unserem mathematischen Modell die elektrischen Spannungen nach demselben Gesetz und in einem ganz bestimmten Maßstab aufeinander wirken müssen. Das ist der Grundgedanke bei den elektrischen Analogrechnern.

Für jede mathematische Operation existiert im Modell eine entsprechende Einrichtung. Eine davon addiert oder subtrahiert nur elektrische Spannungen, eine andere multipliziert nur, eine dritte führt Integrationen durch, usw. Spezielle Geräte dienen zur Erzeugung komplizierter funktionaler - logarithmischer, quadratischer, trigonometrischer und anderer - Abhängigkeiten zwischen den Größen.
Ehe man an die Lösung einer Aufgabe herangeht, muss man die einzelnen Teile der Anlage (das können einige Dutzend sein!) durch Drähte in bestimmter Anordnung miteinander verbinden. Hat die Maschine die Aufgabe gelöst, so erscheinen die Ergebnisse ebenfalls in Gestalt veränderlicher Spannungen.

Diese Spannungen werden ihrerseits von einem speziellen elektrischen Gerät - einem Registriergerät - aufgezeichnet: Die Lösung der Aufgabe wird in Gestalt einer Kurve auf einem Papierstreifen dargestellt, oder sie erscheint auf dem Schirm eines Oszillographen.

Von den existierenden modellierenden Maschinen arbeiten viele auf elektronischer Basis. Sie können sehr schnell arbeiten. Zur Lösung einer Aufgabe auf einer solchen Maschine sind keine besonderen Vorbereitungen erforderlich, und die Ergebnisse erscheinen in einer für die weitere Untersuchung bequemen Form.
Neben ihren vielen Vorzügen haben diese Maschinen zwei wesentliche Nachteile, die man nicht immer in Kauf nehmen kann. Erstens ist der Kreis der Aufgaben, die man auf solchen modellierenden Maschinen, bearbeiten kann (selbst auf großen), sehr beschränkt; zweitens ist die Genauigkeit begrenzt, und man kann sie nicht wesentlich erhöhen. Deshalb werden in einer ganzen Reihe von Fällen Ziffernrechenmaschinen gegenüber den modellierenden Maschinen bevorzugt.

3.18 Ziffernrechenmaschinen

Aus den vorhergehenden Abschnitten ist dem Leser schon klar geworden, dass das Arbeitsprinzip der mechanischen Ziffernrechenmaschinen sehr einfach ist. Ihr Hauptbestandteil sind spezielle Zahnräder. Für die Ziffer jeder Dezimalstelle existiert ein Rad, auf dem zehn Zähne die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 bezeichnen.
Jedes Rad ist mit dem folgenden durch einen einzelnen Zahn verbunden, der aber immer nur dann in Tätigkeit tritt, wenn alle Ziffern der betrachteten Stelle durchlaufen sind.

Bei den elektrischen Tisch-Ziffernrechenmaschinen braucht man keine Handkurbel mehr zu drehen. Durch Druck auf eine Taste werden die Zahlen, mit denen man eine bestimmte Operation durchführen will, in die Maschine eingegeben; dann drückt man auf die Additions- oder Multiplikations-Taste und die Maschine läuft. Alles weitere besorgt die Maschine.

Was lässt sich nun über die Genauigkeit bei Ziffernrechenmaschinen sagen?

Darüber braucht man sich nicht zu beunruhigen. Eine hohe Genauigkeit liegt im Wesen des Rechnens mit diskreten Werten, gleichgültig ob auf einer Tischrechenmaschine oder auf einem elektronischen Automaten gerechnet wird. Um das zu verstehen, schreiben wir einen beliebigen Bruch auf, beispielsweise 0,8943. Wir können diese Zahl ohne weiteres in einer Rechenmaschine darstellen, wenn sie Räder für Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und Zehntausendstel besitzt.

Wie ist es nun, wenn wir einen Bruch mit einer größeren Stellenanzahl darstellen müssen, beispielsweise 0,89436012?
Dann nimmt man einfach noch vier weitere Räder hinzu, von denen dann das letzte schon ein Hundertmillionstel darstellt.
Das bedeutet, dass man mit diesen Maschinen praktisch jede beliebige Genauigkeit erhalten kann, wenn man nur die Anzahl ihrer Elemente entsprechend vergrößert.

Sehr wichtig für die Entwicklung der Rechentechnik war der Gedanke, die Arbeit der Ziffernrechenmaschine mittels eines vorher angefertigten Programms zu steuern. Im vorigen Jahrhundert bereits wurde die Lochkarte erfunden, d. h. eine Karte aus steifem Papier mit eingestanzten Löchern. Anfangs wurden mittels der Lochkarten nur die durch diese Löcher dargestellten Zahlen in die Maschine eingegeben. Es wurden spezielle Geräte geschaffen, mit denen die Lochkarten elektrisch abgetastet wurden. Später wurden dann den Maschinen durch Lochkarten auch einige Befehle eingegeben.

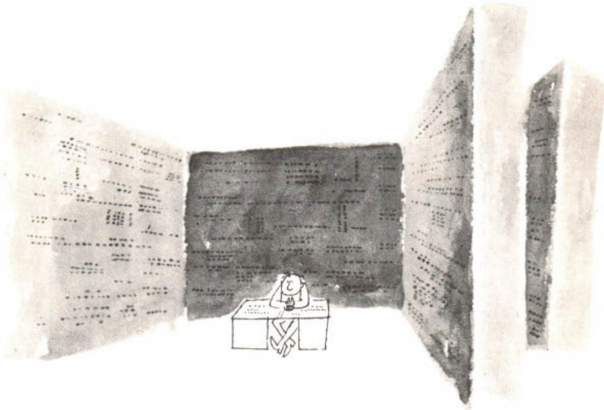
Leider kann man bei mechanischen Rechenmaschinen die Durchführung vieler aufeinanderfolgender Befehle nicht, automatisieren.
Daher muss bei Berechnungen auf modernen Lochkartenanlagen der Mensch wiederholt in die Arbeit der Maschine eingreifen. Erst die Erfolge der Elektrotechnik und Elektronik machten es möglich, die Berechnungen zu automatisieren und das Prinzip der Programmsteuerung anzuwenden.

Mechanische Rechenmaschinen und auch elektrische Tischrechenmaschinen arbeiten ziemlich langsam. Im Rechnungs- und Finanzwesen wirkt sich dieser Mangel nicht weiter störend aus. Jedoch wurden in verschiedenen Gebieten von Wissenschaft, Technik, Wirtschaft und Industrie immer zahlreichere, ganz verschiedenartige und, was besonders wichtig ist, immer kompliziertere Aufgaben gestellt.
Aufgaben, die eine Million, zehn und sogar hundert Millionen arithmetische Operationen erfordern, sind heute keine Seltenheit mehr. Dazu bedurfte es aber der Lösung zweier Aufgaben: der Automatisierung des Rechenganges und der qualitativen Erhöhung der Rechengeschwindigkeiten. Diese Aufgaben konnten nur von der Elektronik - der Technik der hohen Frequenzen und riesigen Geschwindigkeiten - gelöst werden.

Diese Forderung unserer Epoche veranlasste Wissenschaftler und Ingenieure, schnelloperierende programmgesteuerte automatische Rechenmaschinen zu konstruieren. Die ersten dieser Maschinen entstanden vor nicht allzu langer Zeit, Mitte der vierziger Jahre. Anfangs richteten Wissenschaftler und Ingenieure ihre Anstrengungen darauf, große schnelloperierende Universalrechenmaschinen zu schaffen; heute gibt es in der ganzen Welt schon viele Hunderte davon.

Die ersten großen Ziffernrechenmaschinen entstanden in den Vereinigten Staaten und in der Sowjetunion, später wurden sie auch in anderen Staaten gebaut. Zwei verschiedene Typen wurden u. a. vor einigen Jahren bei der Akademie der Wissenschaften der UdSSR entwickelt. Die BESM (schnelloperierende elektronische Rechenmaschine) ent-

stand in Moskau unter der bewährten Leitung von Akademiemitglied Prof. Dr. S. A. Lebedew; sie war damals die schnellste aller europäischen Maschinen.
Die zweite Maschine, die M-2, wurde unter der Leitung des korrespondierenden Mitgliedes der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, I. S. Bruk, entwickelt. Außerdem wurde eine ganze Serie großer Maschinen vom Typ "Strela" industriell hergestellt, deren Entwicklung Prof. Dr. J. J. Basilewski leitete. Neuerdings werden in der Sowjetunion Maschinen von Typ "Ural" gefertigt, die auch exportiert werden.



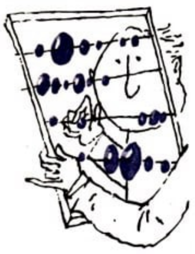
In der Bundesrepublik Deutschland werden mehrere Typen elektronischer Rechenautomaten industriell gefertigt, u. a. unter der Leitung des deutschen Altmeisters der elektronischen Rechentechnik, Konrad Zuse, aber auch von den großen Elektro- und Elektronikfirmen Siemens und Telefunken.

Die großen Maschinen sind aber sehr teuer und kompliziert, erfordern viel Wartung und beanspruchen außerdem verhältnismäßig viel Raum. Deshalb wurde eine Vielzahl verschiedenartiger, ökonomisch günstigerer Maschinen mittleren Ausmaßes entwickelt. Sie sind bedeutend billiger, einfacher, raumsparender und trotzdem zur Lösung einer großen Zahl von Aufgaben ausreichend.

Heute arbeiten in der ganzen Welt schon einige Tausend solcher Maschinen, die in vielen Ländern, u. a. in England und in Holland, produziert werden. Die Entwicklung geht ständig weiter, und jetzt sind Wissenschaftler und Ingenieure bestrebt, leistungsfähige Maschinen möglichst kleiner Abmessungen zu bauen.
Das wird durch die neueste Entwicklung der Elektronik, die Mikromodul- und die Dünnschichttechnik, ermöglicht und gefördert.

Die minimalen Abmessungen - beispielsweise sind die Transistoren in den Grundschaltungen des Systems IBM 360 nur salzkorngroß - haben auch die Schaltzeiten wesentlich gesenkt; man gewinnt also nicht nur Raum, sondern auch Zeit.
Die Zeit dürfte nicht mehr fern sein, da jedes wissenschaftliche Institut und jedes größere Projektierungsbüro seinen eigenen elektronischen Rechenautomaten hat.

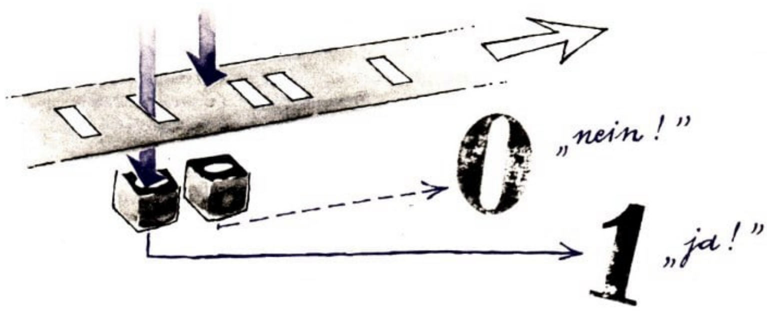
3.19 Die Welt der elektrischen Impulse



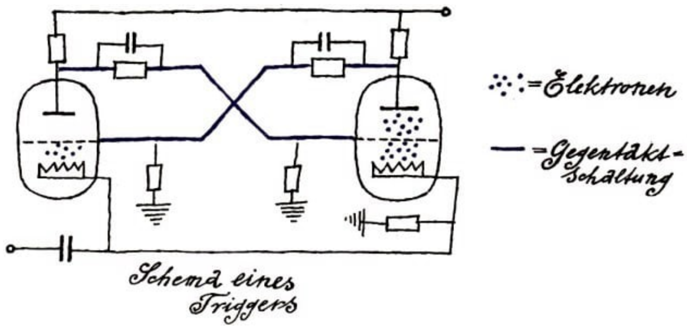
In modellierenden Maschinen ändern sich die elektrischen Spannungen stetig und mehr oder weniger fließend. Die Größe der Spannung spielt eine entscheidende Rolle, da sie in einem bestimmten Maßstab eine ganz bestimmte reale Größe darstellt.
Dagegen vollziehen sich alle Grundoperationen in den Ziffernrechenmaschinen durch kurzzeitige Stöße der elektrischen Spannung oder des Stromes. Diese Stöße bezeichnet man üblicherweise als Impulse.

Wenn wir auf Rechenbrettern rechnen, ist es uns gleichgültig, ob die Kugeln gleichartig sind oder nicht. Wichtig ist nur, dass alle vorhanden sind und dass wir beim Rechnen keine davon aus lassen. Analog dazu spielt es bei den Ziffernrechenmaschinen keine Rolle, wenn sich die Größe der Impulse in bestimmten Grenzen ändert, nur muss jeder einzelne Impuls von dem betreffenden Rechengerät erfasst werden.

Die elektrischen Impulse in den elektronischen Rechenmaschinen bilden die Ziffern, so wie die Kugeln in den alten Rechenbrettern.
Jeder Impuls ist aber nur während einer winzig kleinen Zeitspanne vorhanden - einige millionstel Teile einer Sekunde-, aber die Impulse folgen mit sehr hoher Frequenz aufeinander, zehn- und sogar hunderttausend in der Sekunde. Ehe wir also das Wort "einundzwanzig" ausgesprochen haben, hat die Maschine einige Tausend arithmetischer Operationen ausgeführt.
Ein Impuls ist also entweder vorhanden oder nicht. "Ja" - "nein" - oder "1" - "0" sind also sämtliche Möglichkeiten, die mit dem Vorhandensein eines elektrischen Impulses verknüpft sind. Das ist allerdings nicht viel. Wenn wir aber eine große Anzahl von Impulsen und Pausen (d. h. von Einsen und Nullen) nehmen, können wir die verschiedensten Signale kombinieren und mit ihrer Hilfe eine beliebige Information übertragen.

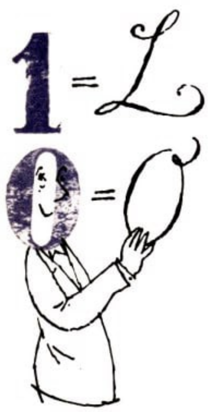


Wie wird das nun in Ziffernrechenautomaten gemacht?
Wir haben uns alle so an das Dezimalsystem gewöhnt, dass wir uns kaum vorstellen können, wie man in einem anderen Zahlensystem rechnen kann.
In den meisten elektronischen Ziffernrechenautomaten wird aber nicht im Dezimalsystem, sondern im Dualsystem gerechnet. Warum wohl?



Die Grundbestandteile eines Rechenautomaten sind elektronische Trigger. Jeder Trigger besteht gewöhnlich aus zwei Elektronenröhren und einigen Widerständen. An Stelle der Röhren werden heute meist Transistoren benutzt. Ein solches Schema hat zwei stabile Gleichgewichtszustände; es wird durch die Impulse gesteuert, die von außen in die Schaltung einlaufen.
Wenn die erste Röhre Stromdurchgang hat und die zweite durch ein negatives Potential am Gitter gesperrt ist, so liegt ein Zustand vor, den man als "1" bezeichnen kann. Tritt dann am Eingang des Triggers ein Impuls auf, so wird der Trigger in den entgegengesetzten Zustand, in den Zustand "0" umgeschaltet.
Die Trigger haben in den Rechenautomaten die verschiedensten Aufgaben, von denen die wichtigsten das Rechnen und das Speichern von Zahlen sind. Da es nun zwei mögliche Zustände der Trigger gibt, sind diese für das Dualsystem besonders geeignet.

Natürlich könnte man auch analoge Schaltungen für das Dezimal- system herstellen, aber sie würden so umfangreich werden, dass man davon absieht.



In den meisten Automaten verwendet man ein dual verschlüsseltes Dezimalsystem, in dem jede Ziffer einer im Dezimalsystem dargestellten Zahl für sich als Dualzahl durch die Zeichen "0" und "1" geschrieben wird. Um Verwechslungen mit unserer gewohnten Dezimalschreibweise vorzubeugen, schreibt man statt "1" oft "L" und statt "0" (Null) "O" (Buchstabe O). Beispielsweise verschlüsselt man 54 in folgender Form:

O	L	O	L	O	L	O	O

Die Maschine arbeitet aber dann wieder auf der Grundlage des Dualsystems und der entsprechenden Rechengesetze.
Das Dualsystem ist also die "Sprache" der meisten elektronischen Ziffernrechenmaschinen. Aus diesem Grunde soll im nächsten Abschnitt das Dualsystem etwas ausführlicher behandelt werden.

3.20 Das Rechnen im Dualsystem

Die Bezeichnung Dezimalsystem rührt daher, dass zur Darstellung der Zahlen zehn verschiedene Zeichen oder Symbole (Ziffern) verwendet werden: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Diese Ziffern geben auch die Anzahl der Einer an.
Dann folgen die Zahlen von 10 bis 99, welche Einer und Zehner enthalten, danach Zahlen, die auch Hunderter enthalten usw. Gewöhnlich denkt man nicht daran, wie

die mehrstelligen Dezimalzahlen eigentlich zustandekommen. Sie werden nämlich in Verbindung mit Potenzen der Zahl 10 dargestellt, welche die Basis des Dezimalsystems ist. So lautet beispielsweise die Zahl 7502 ausgeschrieben:

$$7502 = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Wenn wir eine Zahl hinschreiben, lassen wir natürlich die Potenzen von 10 weg, dafür kommt aber jede Stelle der Zahl an einen ganz bestimmten Platz.

Diese Überlegungen wiederholten wir hier, um das etwas ungewohnte, aber sehr einfache Dualsystem besser zu verstehen. In diesem Zahlensystem werden alle Zahlen nur mit Hilfe zweier verschiedener Zeichen, der Zeichen 0 und 1 (oder O und L), niedergeschrieben.
Schon deshalb kann man vermuten - und wir werden uns auch bald davon überzeugen -, dass viele Dinge im Dualsystem einfacher sind als im Dezimalsystem. Zuvor wollen wir aber erst die folgende Tabelle betrachten:

dezimal		dual	dezimal		dual
0		$= 0$	1	$= 2^0$	$= 1$
2	$= 2^1$	$= 10$	3		$= 11$
4	$= 2^2$	$= 100$	5		$= 101$
6		$= 110$	7		$= 111$
8	$= 2^3$	$= 1000$	9		$= 1001$
10		$= 1010$	11		$= 1011$
12		$= 1100$	13		$= 1101$ usw.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass jedesmal, wenn der Exponent von Zwei links um Eins vergrößert wird, die entsprechende Dualdarstellung um eine neue Stelle wächst. (Analog wird im Dezimalsystem jeweils eine neue Stelle hinzugefügt, wenn sich der Exponent der Potenz von Zehn um Eins vergrößert.)

Die Anzahl der Nullen hinter der 1 in der Dualdarstellung rechts ist gleich dem Exponenten der Zweierpotenz. Dieser einfache Zusammenhang macht es möglich, jede beliebige Zahl als Summe von Zweierpotenzen darzustellen; ohne große Mühe folgt dann daraus die Dualdarstellung dieser Zahl.

Als Beispiel wollen wir die Zahl 6 ins Dualsystem übertragen:

$$6 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0$$

Lassen wir jetzt wieder analog zum Dezimalsystem die Zweierpotenzen weg, so erhalten wir die Dualdarstellung der Zahl 6, wobei jedes Dualzeichen wieder an eine ganz bestimmte Stelle gehört. Es ergibt sich also:

$$6 = 110 (= LLO)$$

Daraus erhält man dann auch leicht die Dualdarstellung der Zahl 7, indem wir der Einerstelle eine Eins hinzufügen:

$$7 = 111$$

Auf diese Art kann man die Dualdarstellung jeder beliebigen Zahl erhalten. Immer werden wir es dabei mit verschiedenen Kombinationen von Nullen und Einsen zu tun haben.
Die arithmetischen Operationen im Dualsystem sind außerordentlich einfach, da man stets nur mit 0 oder 1 rechnen muss. Wir wollen mit der Addition beginnen. Dafür gelten die folgenden Regeln:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=10$$

Dabei bedeutet natürlich bei der letzten Regel 10 nicht etwa die Zahl Zehn, sondern die Dualdarstellung der Zahl 2.
Wir wollen diese Regeln einmal praktisch anwenden und addieren dazu zwei kleine Zahlen, beispielsweise 6 und 7. Wir schreiben diese beiden Zahlen in ihrer Dezimal- und ihrer Dualdarstellung in zwei benachbarte Spalten:

$$\begin{array}{c} 6 = 110 \\ 7 = 111 \end{array}$$

Wir addieren jetzt der Reihe nach von rechts nach links und erhalten für die rechte Spalte: '

$$\begin{array}{lr} \text{Addition der niedrigsten Stelle ergibt:} & 1 \\ \text{Addition der mittleren Stelle ergibt:} & 10 \\ \text{Addition der höchsten Stelle ergibt:} & \underline{10} \\ \text{Folglich erhält man insgesamt:} & 1101 \end{array}$$

Tatsächlich haben wir 13 in der schon aus der Tabelle bekannten Form erhalten.

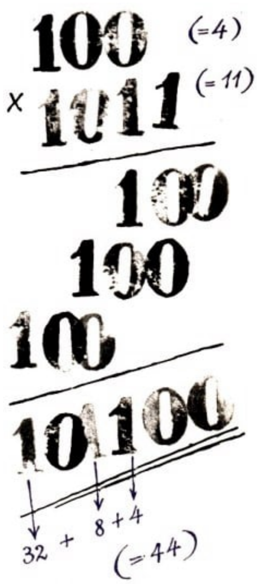
Wir wollen uns nun der Multiplikation zuwenden. Sie ist auch wieder sehr einfach, und ihre sämtlichen Regeln lassen sich in einer einzigen Zeile angeben:

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Als Beispiel multiplizieren wir wieder zwei kleine Zahlen im Dualsystem, etwa 3 und 4. Wenn wir die Multiplikation durchführen, verfahren wir ganz analog zu den Regeln im Dezimalsystem.

$$\begin{array}{rrl} 4 = & 100 & \\ 3 = & 11 & \\ \hline & 100 & \text{durch Multiplikation mit der letzten Stelle} \\ & 100 & \text{durch Multiplikation mit der zweiten Stelle des Multiplikators} \\ & & \text{Addieren wir beide Zahlen nach den Regeln der Addition im Dualsystem,} \\ & & \text{so erhalten wir:} \\ \hline & 1100 & \end{array}$$

Schlagen wir wieder in der Tabelle der Dualzahlen nach, dann sehen wir, dass die Dualzahl 1100 gleich 12 ist, d.h., dass die Multiplikation richtig durchgeführt worden ist.
Betrachten wir die beiden Zeilen, in denen die Ergebnisse der Multiplikation mit 11 stehen, so sehen wir, dass bei der Multiplikation einfach der Multiplikand verschoben worden ist. Bei der Multiplikation mit der 1 aus der zweiten Stelle des Multiplikators wird der Multiplikand so verschoben, dass seine letzte Ziffer rechts ebenfalls in die zweite stelle fällt. Die Multiplikation mit Null liefert wieder Null.



Wenn also in der Maschine eine Multiplikation durchgeführt wird, dann wird der Multiplikand so oft verschoben, wie das nötig ist, und es werden dann die Resultate addiert. Bei einer Multiplikation brauchen also nur Verschiebungen und Additionen durchgeführt zu werden.
Die Subtraktion im Dualsystem kann man ebenfalls auf die Addition zurückführen und die Division auf Addition und Verschiebung.

Aus verschiedenen Gründen führt man die arithmetischen Operationen in Ziffernrechenautomaten gern mit Zahlen durch, die kleiner als Eins sind, d. h. mit echten Brüchen. Das wird bei der Konstruktion der Automaten von den Wissenschaftlern berücksichtigt. Vor der Lösung einer Aufgabe werden die Ausgangsdaten in diesen Bereich transformiert, indem die entsprechenden Zehnerpotenzen herausgezogen werden.
Im Dezimalsystem ist das sehr einfach. Wenn wir beispielsweise die Zahlen 538 und 17 addieren sollen, so schreiben wir sie in der Gestalt

$$0,538 \cdot 10^3 + 0,017 \cdot 10^3$$

- natürlich so, dass gleiche Zehnerpotenzen auftreten - und addieren dann nur die Brüche, d.h. 0,538 + 0,017. Erst am Ende der Rechnung fügen wir dem Ergebnis den Faktor 108 wieder hinzu.
Wie sehen nun aber Brüche im Dualsystem aus? Erinnern wir uns dazu noch einmal an die folgenden Zusammenhänge:

dezimal	dual	
0	0	
$1 = 2^0$	1	
$2 = 2^1$	10	
$4 = 2^2$	100	
$8 = 2^3$	1000	usw.

Analog erhält man dann auch die folgende Tabelle:

dezimal	dual	
0	0	
$1 = 2^0$	1	
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	0,1	
$\frac{1}{4} = 2^{-2}$	0,01	
$\frac{1}{8} = 2^{-3}$	0,001	
$\frac{1}{16} = 2^{-4}$	0,0001	usw.

Es sei dabei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Brüche in der rechten Spalte Dualbrüche und keine Dezimalbrüche sind. So ist beispielsweise der Bruch 0,001 nicht etwa ein Tausendstel, sondern die Dualdarstellung des Bruches $\frac{1}{8}$.

Mit Hilfe der angegebenen Tabellen können wir verschiedene einfache Brüche, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, im Dualsystem darstellen. Beispielsweise hat der Bruch $\frac{3}{8}$ im Dualsystem die Gestalt 0,011.
Das ist nicht schwer zu verstehen. Wir stellen dazu den Bruch $\frac{3}{8}$ in der Form $\frac{1}{8} \cdot 3$ dar und suchen in den Tabellen die Dualdarstellung der Zahlen $\frac{1}{8} = 0,001$ und $3 = 11$. Wir multiplizieren diese beiden Zahlen miteinander und erhalten 0,011.

Ohne große Mühe können wir jetzt (mit einer bestimmten Genauigkeit) jede Zahl als Produkt eines Dualbruchs mit einer Zweierpotenz, ebenfalls im Dualsystem, darstellen. Betrachten wir etwa die Zahl 27. Wir können diese Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellen:

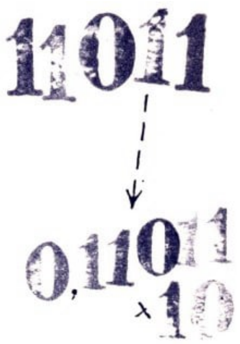
$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

Wir dividieren, um einen echten Bruch zu erhalten, diese Gleichung durch die nächsthöhere Zweierpotenz, d. h. durch $32 = 2^5$. Dann erhalten wir

$$\frac{27}{32} = \frac{16+8+2+1}{32} \qquad \text{oder} \qquad \frac{27}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

Also ist

$$27 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 32$$



Für die einzelnen Brüche erhalten wir aus der Tabelle der Dualbrüche

$\frac{1}{2}$ im Dezimalsystem	= 0,1 im Dualsystem
$\frac{1}{4}$	0,01
$\frac{1}{16}$	0,0001
$\frac{1}{32}$	0,00001

Addieren wir die einzelnen Zeilen der rechten Spalte, so erhalten wir 0,11011. Nun muss nur der Faktor 32 noch in das Dualsystem übergeführt werden. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass $32 = 2^5$ ist; ferner ist bekanntlich 2 im Dualsystem gleich 10 und 5 gleich 101.

Nun können wir endgültig die Dezimalzahl 27 durch einen Dualbruch und einen zugehörigen Faktor darstellen:

$$27 = 0,11011 \cdot 10^{101}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung besteht nur aus Nullen und Einsen. Den Bruch 0,11011 bezeichnet man als Mantisse der Zahl und den Exponenten der Zweierpotenz, in unserem Beispiel 101, als ihre Kennziffer. Bevor der Automat zu rechnen beginnt, werden alle Zahlen dieser Umformung unterworfen.

Als Ergebnis unserer Beschäftigung mit den Rechenregeln im Dualsystem können wir die sehr wichtige und interessante Schlussfolgerung ziehen, dass alle Operationen im Automaten auf Additionen und Verschiebungen von Zahlen, die nur aus Nullen und Einsen bestehen, zurückgeführt werden.

In Automaten können aber nicht nur die vier Grundrechenarten durchgeführt werden. In der Mathematik sind schon lange nummerische Verfahren zur Durchführung komplizierterer Operationen wie Wurzelziehen, Logarithmieren, Berechnung der trigonometrischen Funktionen usw. bekannt. Das bedeutet aber, dass jede noch so komplizierte Operation nach bestimmten Regeln näherungsweise auf Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zurückgeführt werden kann. Das Resultat ergibt sich mit sehr großer Genauigkeit, obwohl ein Näherungsverfahren verwendet wurde.

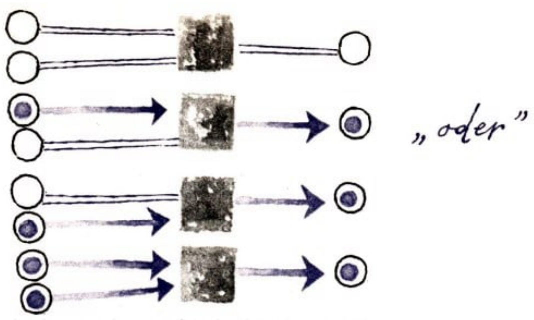
So haben die Wissenschaftler viele sehr komplizierte Aufgaben der höheren Mathematik auf die einfachen arithmetischen Grundoperationen zurückgeführt. Die Automaten arbeiten nicht nur zehntausendmal schneller als der Mensch. Es können dadurch sogar solche Aufgaben gelöst werden, die vor der Existenz von Rechenautomaten gar nicht in Angriff genommen werden konnten. Beispielsweise erfordert eine einigermaßen zuverlässige Wettervorhersage einen solchen Rechenaufwand, dass die Ergebnisse ohne Automaten viel zu spät vorliegen würden.

3.21 Die „Anatomie“ der Ziffernrechenautomaten

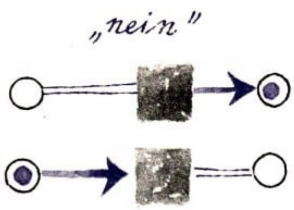
Wir hatten festgestellt, dass die entscheidenden Operationen in der Maschine von den elektronischen Relais oder von Triggern ausgeführt werden. In einer Kette solcher Relais (im sogenannten Register) werden mit ungeheuerer Geschwindigkeit Dualzahlen angesammelt und dort gespeichert. Jedoch reichen die Relais allein zur Durchführung aller notwendigen Operationen nicht aus.

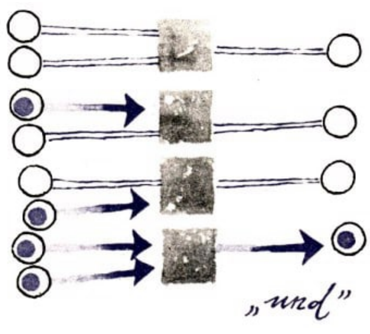
Einen sehr wichtigen Bestandteil der Automaten bilden die sogenannten logischen Schaltungen, die aus gewöhnlichen elektrischen Bestandteilen, Röhren, Dioden oder Transistoren, aufgebaut sind.

Die logischen Grundschaltungen sind "nein-", "und-", "oder-"Schaltungen. Zu jeder solchen Schaltung gehören ein oder mehrere Eingänge, in die die Impulse einlaufen, und ein Ausgang, durch den das in der Schaltung gebildete Signal in andere Teile des Automaten weitergeleitet wird.



Wenn in die Schaltung "nein" ein Impuls einläuft, so entsteht an deren Ausgang kein Signal. Und umgekehrt, wenn am Eingang kein Signal ankommt, dann wird in der Schaltung ein Signal erzeugt. Die Schaltung "und" gibt nur dann ein Signal ab, wenn gleichzeitig an allen Eingängen Impulse auftreten. Schließlich entsteht am Ausgang der Schaltung "oder" ein Signal, wenn entweder an dem einen oder an dem anderen Eingang oder an sämtlichen Eingängen zugleich ein Impuls ankommt. Meistens werden die "und-" und "oder-" Schaltungen mit zwei Eingängen verwendet.





Aus zahlreichen elektronischen Relais und aus den logischen Schaltungen wird das Rechenwerk des Automaten zusammengesetzt; die Maschine arbeitet nach den Regeln des

Dualsystems, wobei die Zahlen durch Impulse dargestellt sind. Natürlich interessiert dabei, mit welcher Genauigkeit das Rechenwerk und der Automat überhaupt arbeiten. Die Dualzahlen, mit denen der Automat arbeitet, haben etwa 30 bis 40 Stellen. Das entspricht etwa zehn Dezimalstellen; die Maschine rechnet also mit sehr großer Genauigkeit - bis zu einer zehntel Milliarde und sogar noch höher.
Außer dem Rechenwerk besitzt die Maschine noch vier weitere sehr wichtige Einrichtungen, ohne die die Arbeit des Automaten undenkbar wäre. Dazu gehört zuerst einmal die Eingabe, durch die es möglich ist, von der Sprache der Ziffern und Buchstaben zur Sprache der Impulse überzugehen. Über die Eingabe wird also die Aufgabe in die Maschine eingegeben.

Bevor aber eine Aufgabe in den Automaten eingegeben werden kann, muss durch Mathematiker ein Programm zu ihrer Lösung aufgestellt werden. Das ist nicht nur eine Liste aller Zahlenwerte, sondern auch ein Verzeichnis der Befehle, die von der Maschine ausgeführt werden müssen.

Das Programm wird durch ein spezielles Gerät - den Locher - auf Lochstreifen oder Lochkarten übertragen. Nicht nur die Zahlen, sondern auch die Folge der Befehle erscheint in der Maschine in Gestalt elektrischer "Nullen" und "Einsen", d.h. in Gestalt von Impulsen.
Auf dem Locher befindet sich ähnlich wie bei einer Tischrechenmaschine eine Tastatur, auf der jeweils diejenigen Tasten betätigt werden, die den einzelnen Zeilen der Liste mit den Zahlen und Befehlen entsprechen. Daher ähnelt die Arbeit einer Locherin der Arbeit einer Stenotypistin.

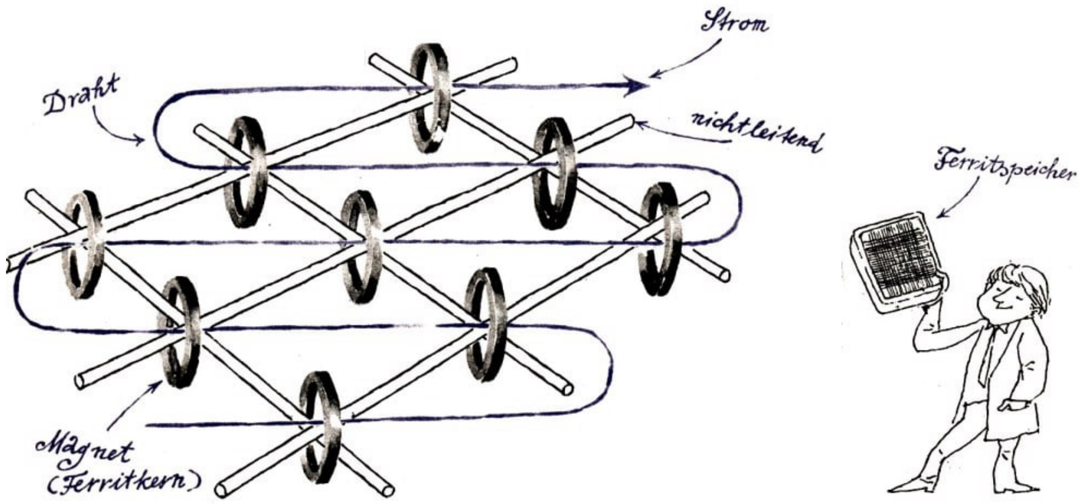
Der fertige Lochstreifen bewegt sich dann seitlich aus dem Locher heraus. Die Bedingungen zur Lösung der Aufgabe sind dann auf dem Lochstreifen durch Löcher, die sich in einer bestimmten Anordnung befinden, gekennzeichnet.

Danach kommt der Lochstreifen in das Eingabegerät des Automaten. Drückt man auf einen bestimmten Knopf, so bewegt sich der Lochstreifen, von einem Motor angetrieben, zwischen Lampen und Fotozellen hindurch. Innerhalb sehr kurzer Zeit ist der Lochstreifen dann vollständig "gelesen", und die auf dem Streifen befindlichen Angaben sind durch die Fotozellen in elektrische Impulse umgewandelt werden, die auf den Speicher - das Gedächtnis des Automaten - gelangen.

Der Speicher ist der dritte wichtige Bestandteil eines elektronischen Rechenautomaten. Vor Beginn der Rechnung werden die Befehle und die Ausgangswerte in den Automaten eingegeben. Im Verlauf der Rechnung können sich nun aber neue Zahlen ergeben, die wiederum für die folgenden Rechnungen wichtig sind. In vielen Fällen muss der Automat diese Weite selbst aufbewahren; das ist aber nur beim Vorhandensein eines Speichers möglich.
Man kennt zwei grundverschiedene Arten von Speichereinrichtungen. Die erste und wichtigste ist der innere oder operative Speicher.

In den Rechenautomaten, die etwa zwischen 1955 und 1958 gebaut wurden, konnten auf dem inneren Speicher durchschnittlich 2000 bis 4000 Zahlen aufbewahrt werden. Die Konstrukteure waren ständig bemüht, die Speicherkapazität der Maschinen zu erhöhen, und so kennen wir heute bereits viele Automaten mit 20000 bis 40000 und mehr Speicherzellen.
Von der Anzahl der Speicherzellen hängt es natürlich auch ab, ob der Automat besonders umfangreiche Aufgaben lösen kann.

Bei der Lösung von Aufgaben wird der innere Speicher laufend benötigt; er muss eine möglichst kurze "Zugriffszeit" haben.
Noch vor kurzer Zeit waren Magnetbänder und Elektronenstrahlröhren als innere Speicher weit verbreitet. Auf den Magnetbändern werden die Zahlen dadurch gespeichert, dass kleine Teile ihrer Oberfläche magnetisiert wurden. Bei den Elektronenröhren werden elektrische Ladungen auf einer speziellen, den Strom nicht leitenden Schicht auf dem Schirm der Röhre verwendet.
Jede Speichereinrichtung ist mit Verstärkern und einer Steuerschaltung versehen.



In den letzten Jahren wurden Ferritspeicher hergestellt, bei denen die Zahlen in Gestalt magnetischer Zustände von Miniaturmagneten gespeichert werden. Eine einzelne Schicht eines solchen Ferritspeichers ist ein eigenartiges Gewebe aus einer Vielzahl von Drähten, auf deren Kreuzungspunkten Ferritkerne angeordnet sind, die aus einem speziellen magnetischen Pulver hergestellt werden.
Ein solcher Speicher ist sehr zuverlässig, hat eine sehr kurze Zugriffszeit und erlaubt viele tausend Zahlen zu speichern.

Die zweite Art von Speicher ist der äußere oder Langzeitspeicher. In ihm werden die Zahlen aufbewahrt, die bei der Arbeit der Maschine nur selten verwendet werden. Dazu werden in vielen Fällen Magnetbänder verwendet, wie man sie von den Tonbandgeräten her kennt und auf denen hunderttausend und mehr Zahlen gespeichert werden können. Bei vielen modernen Automaten kann man - nach dem Baukastenprinzip - nach Bedarf zusätzliche äußere Speicher anschalten.

Der nächste sehr wichtige Bestandteil der Maschine ist die Steuereinrichtung (das Leitwerk). Ohne sie könnte der Automat nicht arbeiten, da er doch alle Operationen selbständig, ohne Eingreifen des Menschen, steuern muss. Wie ist es aber überhaupt möglich, dass eine solche Einrichtung die Steuerung eines so komplizierten Systems, wie es ein elektronischer Ziffernrechenautomat ist, übernehmen kann?

Die Menschen waren schon sehr früh darum bemüht, Leitwerk und Maschine einander anzupassen. Noch vor Beginn der Rechnung werden sowohl die Ausgangszahlen als auch die erforderlichen Befehle in die Maschine eingegeben. Jeder Befehl hat etwa die Gestalt:
"Die Zahlen A und B sind gewissen Speicherzellen zu entnehmen, mit ihnen ist eine bestimmte Operation durchzuführen, und das Ergebnis ist wieder in eine gewisse Speicherzelle zu bringen".

Einer der nächsten Befehle verwendet dann wieder das erhaltene Resultat und führt damit neue Operationen durch usw. Die Befehle werden dem Automaten in Gestalt von Dualzahlen eingegeben.

Das Leitwerk entziffert jeden solchen Befehl und organisiert die Wege für die Impulse in der erforderlichen Richtung. Es besteht aus den uns schon bekannten elektronischen Relais, Impulszählern und logischen Schaltungen.
Ist nun von der Maschine die gestellte Aufgabe vollständig gelöst und befindet sich das Resultat in einer Speicherzelle, so tritt der fünfte wichtige Bestandteil des Automaten, das Ausgabegerät, in Tätigkeit. Als Ausgabegeräte dienen Schreibmaschinen, Drucker, Stanzer oder Funktionserzeuger. Sie liefern uns die Lösung in Gestalt von Tabellen aus Buchstaben und Dezimalzahlen, Lochkarten, Lochstreifen, Kurven usw.

3.22 Bemerkenswerte Eigenschaften eines Ziffernrechenautomaten

Es soll an dieser Stelle noch etwas über zwei sehr wichtige Eigenschaften der Ziffernrechenautomaten gesagt werden, die dazu führten, dass diese Einrichtungen oft auch als "denkende" Maschinen bezeichnet werden.
Wir wissen bereits, dass die Befehle die Gestalt von Dualzahlen haben. Es zeigt sich nun, dass man das Arbeitsprogramm für den Automaten so aufstellen kann, dass die Maschine nicht nur gegebene Befehle ausführt, sondern dass sie sich selbst aus gegebenen Befehlen neue Befehle zusammenstellen kann.

Im Ergebnis erhält die Maschine neue Befehle, welche sie selbst dann auch ausführt. Das heißt also, dass der Automat die Fähigkeit besitzt, sich selbst Befehle herzustellen, die er im weiteren Rechenablauf benutzt. Wie geht dieser Prozess vor sich?

Der Automat kann ohne große Mühe zwei Zahlen miteinander vergleichen und feststellen, welche die größere ist (oder ob sie gleich sind). Das übersteigt nicht den Rahmen der einfachen Arithmetik. Aus dieser Fähigkeit folgt aber die zweite erstaunliche Eigenschaft des Automaten.
Er kann von einem Rechengang zu einem anderen übergehen, wenn der Vergleich zweier Zahlen einen solchen Übergang erforderlich macht. In diesem Fall erhält die Steuereinrichtung ein Signal, und der Automat wird veranlasst, nach den veränderten Befehlen zu rechnen. Man spricht dann von Sprungbefehlen.

Erst durch diese Eigenschaften der Ziffernrechenautomaten ergeben sich für ihre Arbeit so große Möglichkeiten, werden sie universell und befähigt, die verschiedensten Aufgaben zu lösen. Natürlich wird ein solches Verhalten des Automaten durch das Programm im voraus bestimmt.

Die Ziffernrechenautomaten besitzen also erstaunliche Eigenschaften, wodurch sie die richtigen Wege für ihre Arbeit auswählen, sich neue Befehle ausarbeiten und den Rechengang ändern können. Die Arbeit eines programmgesteuerten Automaten erinnert also bis zu einem gewissen Grad an die Tätigkeit des menschlichen Gehirns.

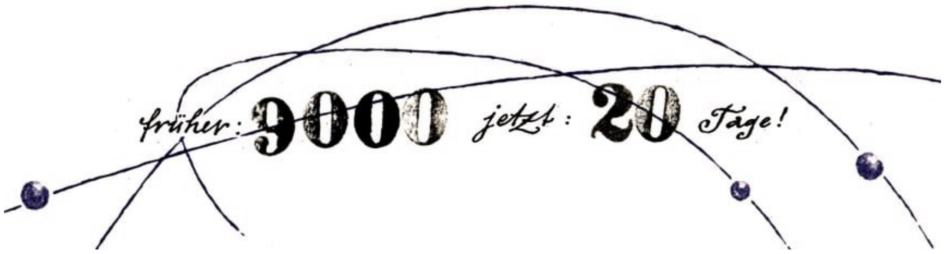
Wir erwähnten schon nebenbei die gewaltigen Rechengeschwindigkeiten der elektronischen Rechenautomaten. Jetzt kommen wir noch einmal auf dieses Thema zurück. Die mittlere Geschwindigkeit der meisten modernen Maschinen beträgt mindestens 10000 bis 20000 Operationen in der Sekunde.
Aber auch hier bemüht man sich, größere Geschwindigkeiten zu erreichen, und es existieren bereits Maschinen mit mehr als 100000 Operationen in der Sekunde. Die Zeit wird nicht fern sein, da die Rechengeschwindigkeit größer als eine Million Operationen in der Sekunde sein wird.

Dies. werden dann allerdings meist.spezielle Entwicklungen sein, während im allgemeinen Maßstab mittlere Maschinen vorherrschend bleiben werden; denn die Vergrößerung der Rechengeschwindigkeit zu solchen unvorstellbaren Werten wird natürlich auch reichlich teuer.
Eine amerikanische Maschine löst beispielsweise ein System von 40 Gleichungen mit 40 Unbekannten in weniger als 60 Sekunden und liefert die Resultate gedruckt aus.

Was bedeuten aber nun diese Rechengeschwindigkeiten? Wir können ohne weiteres behaupten, dass bei dem heutigen Stand die Automaten zehntausendmal schneller arbeiten als ein Mensch mit einer Tischrechenmaschine. Das heißt aber, dass die gesamte Tagesarbeit eines Rechners von einem Automaten in 3 Sekunden erledigt wird.
Im Laufe eines einzigen Tages kann eine solche Maschine beispielsweise den Arbeitslohn für 25000 bis 30000 Menschen, die in einem großen Betrieb arbeiten, berechnen, wobei die verschiedenen Abzüge und Zuschläge berücksichtigt werden.

3.23 Der Ziffernrechenautomat arbeitet

Die Anwendungsmöglichkeiten der Ziffernrechenautomaten sind unerschöpflich. Die Maschinen kontrollierten schon äußerst schwierige astronomische Berechnungen, zu denen man früher Jahrzehnte oder sogar Jahrhunderte benötigte.
Die Berechnung der Bewegungen aller Planeten des Sonnensystems, die früher ein Vierteljahrhundert dauerte, wurde beispielsweise auf einem Rechenautomaten in 500 Stunden, also in etwas mehr als 20 Tagen, bewältigt.



Dabei ist zu beachten, dass der Wissenschaft nicht nur die großen Planeten, sondern noch einige Tausend kleine, die sogenannten Planetoiden, bekannt sind.

Wir erleben zur Zeit die Anfänge der Eroberung des Kosmos. In diesem Zusammenhang haben die elektronischen Ziffernrechenautomaten große und verschiedenartige Aufgaben zu lösen. Kurz nach dem Start eines künstlichen Sputniks erscheinen in den Zeitungen die Angaben über die Flugbahnen dieser Erdtrabanten, und zu dem vorausgesagten Zeitpunkt tauchen sie über den angegebenen Orten auf.
Wer aber kann den Flug eines solchen kleinen künstlichen Mondes so genau voraussagen? Natürlich nur ein Ziffernrechenautomat.

Die Maschinen werden zu unentbehrlichen Helfern von Konstrukteuren und Entwicklungsingenieuren. Um die richtige Lösung zu finden, wurden früher von Ingenieuren mehrere Varianten irgendeiner Konstruktion oder Anlage berechnet, was Monate oder Jahre dauerte. Die Maschine kann aber diese verschiedenen Möglichkeiten in einigen Minuten oder Stunden durchrechnen. Sie ist sogar in der Lage, unter allen Varianten die optimalen herauszufinden.
Früher mussten zehn Menschen etwa zweieinhalb Monate lang rechnen, um bei der Konstruktion eines Flugzeuges die Schwingungen seiner Teile zu bestimmen. Ein Automat aber bewältigt diese Arbeit in einer halben Stunde.

Ziffernrechenautomaten helfen bei der Bestimmung des Bedarfs an Geld und Material im Bauwesen, lösen komplizierte Aufgaben, die im Zusammenhang mit der Untersuchung des Atomaufbaus auftreten, und werden bei Wettervorhersagen eingesetzt.

Das ist aber längst noch nicht alles. Wissenschaftler und Ingenieure haben überzeugend nachgewiesen, dass Ziffernrechenautomaten jede beliebige Geistesarbeit übernehmen können, die nach streng bestimmten Gesetzen verläuft (sogenannte Routine-Arbeiten). Man muss nur erst diese Gesetze finden, sie in Gestalt mathematischer Formeln (Algorithmen) ausdrücken und daraus ein Programm für den Automaten herstellen. Dann hören aber die Ziffernrechenautomaten auf, bloße Recheneinrichtungen zu sein. Sie gehen nämlich jetzt zur Lösung sogenannter logischer Aufgaben über. Diese Eigenschaft der Ziffernrechenautomaten beruht auf den Gesetzen der mathematischen Logik.

Die logischen Aufgaben, die von den Ziffernrechenautomaten gelöst werden können, sind sehr verschiedenartig. Dazu gehören sowohl die Ausarbeitung von Fahrplänen als auch die Steuerung des Zugverkehrs in großen Rangierbahnhöfen, das Aufstellen von Flugplänen über den An- und Abflug von Flugzeugen auf Flugplätzen, das Sortieren von Büchern in einer Bibliothekskartei nach bestimmten Gruppen (beispielsweise Dokumentation) und vieles andere.

Die wohl erstaunlichste Leistung auf dem Gebiet der logischen Aufgaben ist die automatische Übersetzung eines Textes aus einer Sprache in eine andere. Der Laie wird es kaum glauben, dass eine Maschine die Arbeit eines Übersetzers übernehmen kann. Aber es ist eine Tatsache!
Im Januar 1954 fand in New York die erste öffentliche Vorführung einer maschinellen Übersetzung aus der russischen in die englische Sprache statt, und Ende 1955 wurde in Moskau auf der BESM der erste von einer ganzen Serie von Versuchen zur automatischen Übersetzung aus der englischen in die russische Sprache erfolgreich durchgeführt.

Die maschinelle Übersetzung wurde dadurch möglich, dass es den Sprachforschern gelang, jene Regeln aufzuspüren, durch welche zwei verschiedene Sprachen miteinander verknüpft sind. Davon ausgehend war es dann nicht schwer, zur Aufstellung eines Programms überzugehen. Mit Worten und Buchstaben kann aber ein Automat nicht umgehen.
Deshalb wurde statt des Buchstabentextes eine Ziffernschreibweise in Dualform verwendet, wie man das auch in der Telegraphie macht (ähnlich wie z. B. im Morse-Alphabet).

Beispielsweise kodiert (verschlüsselt) man die ersten Buchstaben des lateinischen Alphabets folgendermaßen: a $\hat{=}$ 16, b $\hat{=}$ 06, c $\hat{=}$ 22, d $\hat{=}$ 30 usw. In dieser Ziffernform kann man auch das russische Alphabet ausdrücken, wobei die Buchstaben, die in verschiedenen Sprachen in gleicher Weise ausgesprochen werden, auch dieselben Ziffern erhalten.

Für das englische Wort "bad" - "schlecht" erhalten wir die folgende Zahlenschreibweise: 06 16 30. Auch mit Dezimalzahlen kann aber die Maschine noch nicht operieren. Deshalb gelangt diese Zahl in der Dualgestalt

0000 0110 0001 0110 0011 0000

in den Speicher der Maschine. Jede Vierergruppe (Tetrade) aus Nullen und Einsen dient hierbei zur Darstellung einer Dezimalziffer. Dieser Ausdruck ist zwar unbequem zu lesen, aber zur Übersetzung ist es erforderlich, dass auch die anderen Wörter in der Maschine diese Dualgestalt annehmen.

Die Sprachforscher und Maschinenmathematiker speicherten in das "Gedächtnis" der Maschine vor der eigentlichen Übersetzung ein Wörterbuch, das russische und englische Wortstämme enthält.

Die russischen und die englischen Wörter gleicher Bedeutung befinden sich in Zellen unter ein und derselben Nummer. Bei der Übersetzung muss die Maschine den Ziffern-Code der Zahlen vergleichen und übereinstimmende heraussuchen. Die Sprachforscher "lehrten" die Maschine, auch mit solchen Unannehmlichkeiten fertig zu werden wie mit grammatischen Regeln, Deklination, Konjugation usw.

Die modernen Maschinen übersetzen vorerst nur sehr einfache Texte, und diese nicht viel schneller als der Mensch. Die Bemühungen um eine Vervollkommnung der maschinellen Übersetzung werden fortgesetzt. Wissenschaftler und Ingenieure planen die Entwicklung spezieller Übersetzungsmaschinen. Zweifellos gewinnt die automatische Übersetzung mit der Zeit allgemeine Bedeutung.
Man darf sich aber keine Illusionen machen. Die Maschine kann den Menschen in solchen Dingen wie der Übersetzung schöngeistiger Literatur nie ersetzen.

Ziffernrechenautomaten können auch solche logischen Spiele wie Kartenspiele, Domino und Schach spielen. Den Automaten kann man auch mit Erfolg die Lösung von Aufgaben aus Ökonomie und Planung, aus der Versorgung und sogar aus der militärischen Strategie übertragen.
Schließlich eröffnet sich den elektronischen Ziffernrechenautomaten ein unübersehbares Tätigkeitsfeld in der Produktion.

Den Automaten, die mit Messeinrichtungen und Ausführungsorganen (Servomotoren) ausgerüstet sind, werden jetzt die Steuerung von Werkbänken, Apparaten, Fließbändern und sogar von ganzen Betrieben anvertraut. Dem Menschen bleibt dann nur die Kontrolle der Arbeit solcher "denkender" Automaten.

In einem Werk verwendete man einen solchen Automaten als Fräser. Ein Werkstück, zu dessen Bearbeitung früher ein Mensch 14 Tage brauchte, stellt der elektronische Fräser in einer Stunde her. In einem anderen Betrieb nahm die Bearbeitung eines Präzisions-Werkstücks 3 Wochen in Anspruch. Von Automaten wurde dieselbe Arbeit in 2 Stunden durchgeführt.

Schon heute arbeiten Steuermechanismen mit außerordentlicher Genauigkeit als Dispatcher eines Flugplatzes. Sie bilden das Gehirn eines komplizierten automatischen

Systems, das mit einem Funkgerät ausgerüstet ist, und können ohne menschliche Hilfe gleichzeitig die Landung mehrerer Flugzeuge beordern.

In erdölverarbeitenden Werken, wo die Steuermechanismen gleichsam unbeschränkt herrschen, finden wir überhaupt keine Menschen. In Funkwerken, die nach speziellen Entwürfen errichtet wurden, geschieht ebenfalls alles durch programmgesteuerte Automaten. Hier arbeiten insgesamt zwei Menschen. Sie überwachen nur den Zustand der Automaten.
Dieses Verzeichnis könnte man noch beliebig lange fortsetzen.

Dabei steht die Epoche der Steuermechanismen erst am Anfang. Was aber werden die elektronischen Rechenautomaten für den Menschen leisten, wenn sie wirklich vollkommen geworden sind ?
Werden sie noch schneller und zuverlässiger? Hier sind der Phantasie kaum Grenzen gesetzt!

Die Konstrukteure sind beharrlich um die Verbesserung der. Eigenschaften der elektronischen Rechenautomaten bemüht. Die Maschinen sollen absolut zuverlässig werden, wenig Raum einnehmen und wenig Elektroenergie verbrauchen. Von den zukünftigen Automaten wird auch die Fähigkeit zur Selbstinstandhaltung gefordert.
Wie wir sehen, sind alle gestellten Forderungen sehr wichtig. Deshalb muss die Rechentechnik unverzüglich all jene hervorragenden Errungenschaften der Physik, der Funktechnik und der Elektronik ausnutzen, die für sie wertvoll sind.

Schon jetzt verwendet man in den Automaten weitgehend die neuen Halbleiter- und magnetischen Miniaturbauelemente. In den Betrieben, in denen die Automaten hergestellt werden, wird eine neue Montagetechnik, die der gedruckten Schaltung, verwendet.

Die Abmessungen der universellen Rechenautomaten, die mit den neuen Bauelementen ausgestattet sind und mit gedruckten Schaltungen arbeiten, sind sehr gering. Sie sind kaum größer als ein gewöhnlicher Schreibtisch. Diese Maschinen brauchen keine Kühlung, und sie sind bedeutend zuverlässiger als Röhrenmaschinen.
Die spezialisierten Ziffernautomaten mit Halbleiterbauelementen, besonders jene, die in Flugzeugen untergebracht sind, haben sehr kleine Ausmaße. Eine solche Maschine nimmt gerade so viel Platz ein wie ein Fernsehapparat und verbraucht nur etwa ein Drittel soviel Energie.
Unsere Ausführungen über elektronische Ziffernrechenautomaten und ihre erstaunlichen Eigenschaften waren nur kurz. Trotzdem dürfte daraus hervorgehen: Die Anwendung der elektronischen Automaten verheißt eine gewaltige Arbeitsersparnis fast auf allen Gebieten der menschlichen Tätigkeit, und zwar in erster Linie dort, wo materielle Werte

geschaffen werden - in der Produktion.

Wir befinden uns an der Schwelle einer neuen industriellen Ära: Die Automaten werden nicht nur bearbeiten und herstellen, sondern auch die Produktion lenken.

3.24 Schlussbemerkungen

Wir begannen unsere Ausführungen mit den einfachsten Dingen, die mit Rechenautomaten zusammenhängen (Dualsystem, Impulse, logische Schaltungen); sie führten uns bis zu den erstaunlichsten Beispielen für Anwendungsmöglichkeiten dieser Maschinen.
Die Automaten rechnen schnell und einwandfrei, sie übersetzen aus einer Sprache in eine andere, sie spielen Schach, und sie steuern Flugzeuge oder Werkbänke. Außerdem können die Automaten zur Modellierung von Empfindungen und Reflexen lebender Organismen dienen; mit Hilfe der Automaten kann man die kompliziertesten Prozesse der menschlichen Gehirntätigkeit studieren.

Durch das Lösen logischer Aufgaben besitzt die Maschine die Fähigkeit, Erfahrungen zu sammeln und zu lernen.
All diese Dinge geben Anlass zu einer Menge von ernsthaften Fragen, deren wichtigste lautet: Kann die Maschine denken? ' Kann die Maschine ganz ohne Programm arbeiten?

Diese Frage ist tatsächlich sehr ernst zu nehmen. Wäre das nämlich möglich, so hieße das, dass der Automat völlig dem menschlichen Gehirn gleicht. Der Automat arbeitet bedeutend schneller und macht wesentlich weniger Fehler als das menschliche Gehirn.
Muss also der Mensch den von ihm selbst geschaffenen Automaten und den Mechanismen den Platz überlassen?
Solche Befürchtungen sind natürlich überflüssig. Die Maschine kann den Menschen nicht verdrängen, sie wird niemals mehr als sein zuverlässiger Helfer sein.

Zur Zeit arbeiten viele Wissenschaftler angestrengt daran, die Programme für die Rechenautomaten zu vereinfachen. Sie verfolgen dabei das Ziel, die Automaten so zu bauen, dass sie mit ganz wenigen Ausgangsbefehlen auskommen und alles übrige selbst tun.
Es wurden sogenannte programmierende Programme geschaffen. Dadurch war es möglich, den mühevollsten Teil der Programmierungsarbeit von den Maschinen selbst erledigen zu lassen.

Vielleicht gelingt es mit der Zeit, die Programme so zu vereinfachen, dass 99% aller "Denkarbeit" von den Automaten selbst durchgeführt wird. Trotzdem verrichtet der Automat seine ersten und wichtigsten Schritte immer nach dem Willen des Menschen, nach den Befehlen, die der Mensch in die Maschine eingibt.

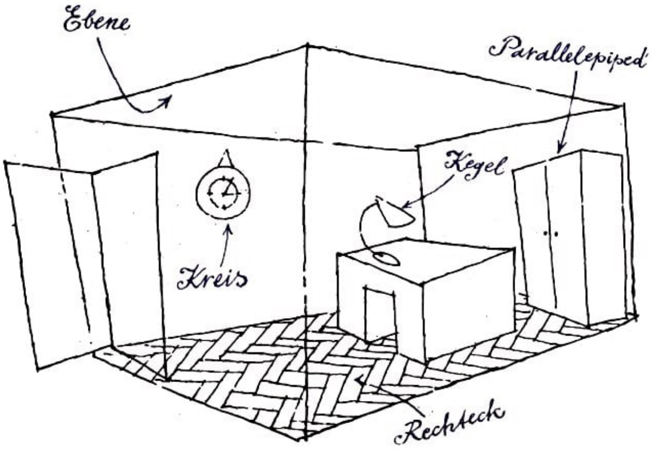
Die Maschine kann also nicht denken. Sie ist kein Gehirn, sondern ein Apparat, der Informationen verarbeitet, die ihm vom Menschen eingegeben werden. Es existieren auch noch andere, nicht weniger wichtige Unterschiede zwischen einem Automaten und dem Gehirn. Es empfiehlt sich, über diese Dinge ausführlicher nachzulesen und darüber nachzudenken.

4 Figuren und Körper

4.1 Geometrie in der Umwelt

M. W. Potozki

Wir haben uns an die Dinge in unserer Umgebung so gewöhnt, dass wir häufig überhaupt nicht mehr bemerken, welche verschiedenartigen geometrischen Figuren sich darunter befinden.
Und der eine oder andere nimmt vielleicht sogar an, komplizierte Linien und Flächen kämen nur in den Büchern der Mathematiker und sonst nirgends vor!



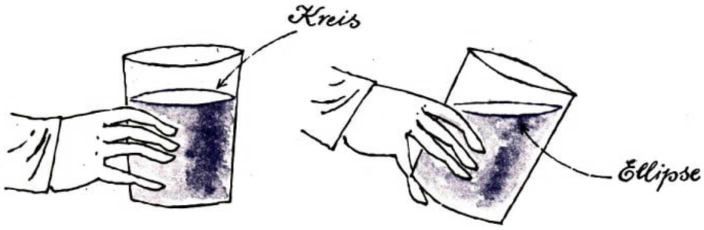
Wenn wir uns aber einmal aufmerksam umsehen, denn entdecken wir bald allerlei geometrische Figuren, und es zeigt sich, dass es davon sehr viele gibt. Vorher hatten wir das nur nicht bemerkt.
Betrachten wir etwa unser Zimmer. Die Wände, der Fußboden sowie die Decke sind Ebenen (wir wollen dabei die Fenster- und Türöffnungen nicht berücksichtigen), und das Zimmer selbst hat die Form eines Parallelepipeds.
Sehen wir uns den Parkettfußboden näher an, so stellen wir fest, dass er aus Rechtecken zusammengesetzt ist.

Oder geben wir einmal in die Küche bzw. ins Badezimmer. Hier sind die Fliesen auf dem Fußboden entweder regelmäßige Sechsecke oder Achtecke, zwischen die man kleinere Quadrate eingefügt hat.
Doch wir wollen ins Zimmer zurückkehren, um uns die Möbel anzusehen. Der Schrank ist ein Parallelepiped. Der Schreibtisch ist nichts anderes als ein sehr flaches Parallelepiped, das auf zwei anderen Parallelepipeden liegt, den Seitenschränkchen, in welchen sich Fächer befinden.

Auf dem Tisch steht eine Lampe, deren Schirm ein Kegel oder ein Kegelstumpf ist. Der Eimer ist ein Kegelstumpf, dessen obere Fläche größer ist als die Grundfläche. Es gibt übrigens auch Eimer von zylindrischer Form.

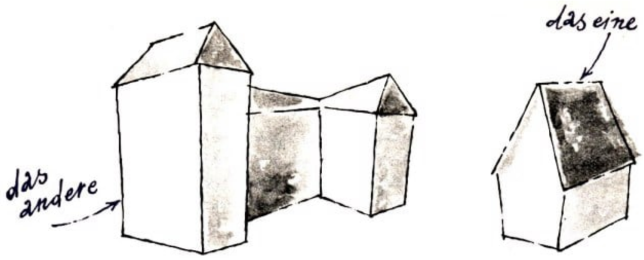
Man findet überhaupt in jedem Hause zahlreiche Kegel und Zylinder. So sind alle

geraden Rohre (Wasserleitung, Zentralheizung, Gasleitung) Hohlzylinder. Dort, wo die Rohre gekrümmt sind, entstehen sogenannte Röhrenflächen.
Im Buffet steht ein Teeservice. Das geschliffene Glas hat Seitenflächen wie ein regelmäßiges vielseitiges Prisma. Die Untertasse ist wieder ein Kegelstumpf. Hier liegt auch ein Trichter. Er ist aus zwei Kegelstümpfen zusammengesetzt, die ineinander übergehen.

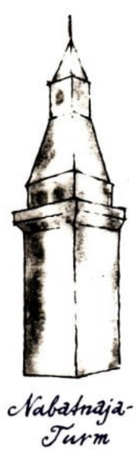


Wenn wir Wasser in ein Glas füllen, dann bildet der Rand der Wasseroberfläche einen Kreis. Neigen wir das Glas, ohne dass das Wasser ausläuft, so wird dieser kreisförmige Rand zu einer Ellipse.

Wir wollen auf die Straße gehen. Dort sehen wir Häuser. Lassen wir die verschiedenen Einzelheiten der architektonischen Gestaltung außer acht, so können wir die Hauswände als Ebenen bezeichnen. Treffen zwei Wände unter einem bestimmten Winkel zusammen, so schneiden sie einander in einer geraden Linie.
Von diesem Standpunkt aus gesehen, ist ein Haus also ein Körper, der von einander schneidenden Ebenen gebildet wird, d. h. ein Polyeder. Hier sind zwei derartige "Hauspolyeder" dargestellt.



Das eine ist eine Parallelepiped, auf dem ein dreiseitiges Prisma liegt; das andere besteht aus mehreren Parallelepipeden und Prismen, die ineinander übergehen.
Oft sind Wohnhäuser, Theater und andere Gebäude mit Säulen verziert. Meistens sind die Säulen Zylinder, doch sie können auch kompliziertere Formen haben.



Wer in Moskau gewesen ist, weiß, wie wundervoll der Kreml ist. Wie schön sind seine Türme! Wie viele interessante geometrische Formen liegen ihnen zugrunde! Sehen wir uns beispielsweise den Nabatnaja-Turm an. Auf einem schlanken Parallelepiped steht ein kleineres Parallelepiped mit Fensteröffnungen und darauf ein Pyramidenstumpf mit viereckiger Grundfläche.
Darüber erheben sich vier Bögen, die abschließend von einer achteckigen Pyramide gekrönt werden. Am Ufer der Moskwa erhebt sich der Beklemischewskaja-Turm. Seine zylindrische Grundform geht in einen achteckigen Pyramidenstumpf über, der eine regelmäßige achteckige Pyramide trägt.

Es lohnt sich auch, die auf der Straße vorüberfahrenden Autos, Straßenbahnen und O-Busse eingehender zu betrachten. Die Räder der Fahrzeuge sind Kreisscheiben. Wir haben uns so daran gewöhnt, dass wir bei ihrem Anblick überhaupt nicht mehr daran denken, welche Erleichterungen diese Figur dem Menschen in seiner Arbeit gebracht hat.
Was muss das für eine Zeit gewesen sein, als man das Rad noch nicht kannte und noch alle Lasten schleppen musste!

Wollen wir doch einmal die Scheinwerfer eines Autos untersuchen. Im Innern ist eine Spiegelfläche. Die Konstrukteure wissen: Wenn das Licht von den Scheinwerfern als Bündel paralleler Strahlen ausgesandt wird, dann nimmt die Leuchtkraft mit wachsender Entfernung am wenigsten ab.
Damit aber der Scheinwerferspiegel die Lichtstrahlen als paralleles Bündel reflektiert, muss man ihm die Form eines Rotationsparaboloids geben und die Glühbirne in seinem Inneren an einem bestimmten Punkt (im Brennpunkt) anbringen. Das Rotationsparaboloid ist diejenige Fläche, welche bei der Drehung einer Parabel um ihre Achse entsteht.

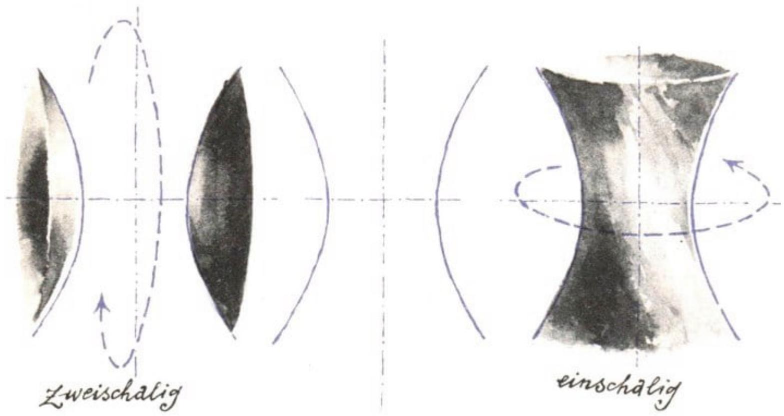
Bei den meisten Autotypen sind die Scheinwerfer verkleidet, so dass man von ihnen nur die Scheiben sieht. Bei Wagen älterer Bauart dagegen liegt der ganze Lampenkörper frei, und es ist deutlich zu sehen, dass er parabolisch geformt ist.
Rotationsparaboloide sind auch die Reflektoren in den Scheinwerfern, die ihre gewaltigen Strahlen gen Himmel senden.

Sehen wir uns jetzt eine Brücke an. Brückenbögen können ganz verschiedene Formen haben. Manche sind elliptisch, andere parabolisch. Oft findet man an Brückengeländern Rettungsringe befestigt. Ein Rettungsring ähnelt in seiner Form einem Torus. Die Torusfläche entsteht bei der Drehung einer Kreislinie um eine Achse, welche die Kreislinie nicht schneidet. Der Torus hat viele interessante Eigenschaften.

Wir kommen an einem Rundfunksender vorüber. Hier erheben sich Funkmasten mit Antennen zur Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen. Was für eine seltsame Form haben aber diese Masten? Sie bestehen aus mehreren aufeinandergestellten Teilen (Sektionen). Jede Sektion gleicht einem runden Netz aus geradlinigen Stäben.

Wir wollen einmal irgendeine der Sektionen untersuchen. Sie unterscheiden sich nur in den Abmessungen voneinander. Stellen wir uns vor, dass die Stangen ganz dicht nebeneinander liegen. In diesem Falle bilden sie eine merkwürdige gekrümmte Fläche, die als einschaliges Hyperboloid bezeichnet wird. Jene geradlinigen Streben, die wir sehen, sind nichts anderes als geradlinige Erzeugende dieser Fläche.
Betrachten wir noch einmal das einschalige Hyperboloid. Es ist kaum zu glauben, dass es gerade Linien enthält. Aber es ist so. Eine derartige Konstruktion ist von geringem Gewicht und dabei außerordentlich stabil.

Das einschalige Hyperboloid verdankt seinen Namen der Hyperbel. Es entsteht nämlich bei der Drehung einer Hyperbel um diejenige ihrer Achsen, welche die Hyperbel nicht schneidet. Dann entsteht bei der Rotation eine einzige Fläche (eine Schale).



Hätten wir unsere Hyperbel um die andere Achse gedreht, so wäre eine aus zwei Teilen (Schalen) bestehende Fläche entstanden, die man als zweischaliges Hyperboloid bezeichnet.
Manchmal baut man Türme bis zu der Höhe von mehrstöckigen Häusern, die nur aus einer einzigen Sektion von geradlinigen Metallstreben bestehen. Zum Beispiel ist der Wasserturm in der Nähe der Timirjasew-Akademie der Landwirtschaftswissenschaften in Moskau so konstruiert.
Derartige Türme wurden erstmalig von dem russischen Ingenieur W. G. Schuchow (1853-1939) entworfen und heißen nach ihm Schuchow-Türme.

Und nun sitzen wir in einem Zug. Die Stadt liegt bereits weit hinter uns. Draußen huschen die Telegrafenmasten vorüber. Und auch hier verlässt uns die Geometrie nicht. Längs der Strecke sind an den Telegrafenmasten Leitungen gezogen. Weiter weg verläuft eine Hochspannungsleitung. Die Leitungen hängen infolge ihres Eigengewichts etwas durch.
Was für eine Kurve bilden sie dabei?
Diese Frage ist von großer praktischer Bedeutung. Wenn die Länge einer Überlandleitung bestimmt werden soll, muss dabei berücksichtigt werden, dass diese (eben wegen des Durchhanges) größer sein wird, als der Abstand zwischen den Endpunkten der Überlandleitung.

Um nun die Länge der Leitungen genau ausrechnen zu können, muss man feststellen, was für eine Kurve beim Durchhängen die Leitung zwischen je zwei Masten bildet. Es stellt sich heraus, dass das eine sogenannte Kettenlinie ist.

Die gleiche Kurve bildet auch eine Schnur, die an zwei in die Wand geschlagenen Nägeln befestigt ist. Die Kettenlinie ähnelt zwar der Parabel, ist aber keineswegs eine Parabel; ihre Eigenschaften sind von denen der Parabel ganz verschieden.

Unser Zug eilt über geradlinige Streckenabschnitte dahin und durchführt ab und zu eine Kurve. Die gleichmäßige Bewegung des Wagens in den Kurven rührt daher, dass die Schienen in den Kurven nicht einfach kreisförmig gebogen sind, sondern auch in recht komplizierten anderen Kurven.

Nur manchmal, wenn die Kurven sehr scharf sind, spüren wir, wie wir gegen die eine Wagenseite gedrückt werden. Wie wir wissen, wirkt in Kurven auf die Wagen eine Kraft, die sie umzuwerfen sucht und alle im Zug befindlichen Körper nach der Außenseite der Kurve hin ablenkt, die Zentrifugalkraft.
Damit die Wagen nicht umstürzen, wird die äußere Schiene in den Kurven im Verhältnis zur inneren etwas erhöht, und zwar um so mehr, je stärker die Krümmung ist.

Wenn man jedoch den Zug von einem geradlinigen Streckenstück unmittelbar in eine Kurve übergehen ließe, müsste die eine Schiene plötzlich überhöht sein, und die Wagen würden beim Übergang in die Kurve kräftige Stöße erleiden.
Um das zu vermeiden, geschieht der Übergang in eine Kurve allmählich. An den geraden Gleisabschnitt schließt sich eine sogenannte Übergangskurve an längs deren die Krümmung nach und nach zunimmt, und erst danach geht diese Biegung in eine Kreislinie über. Genauso geht man am Ausgang der Kurve vor.

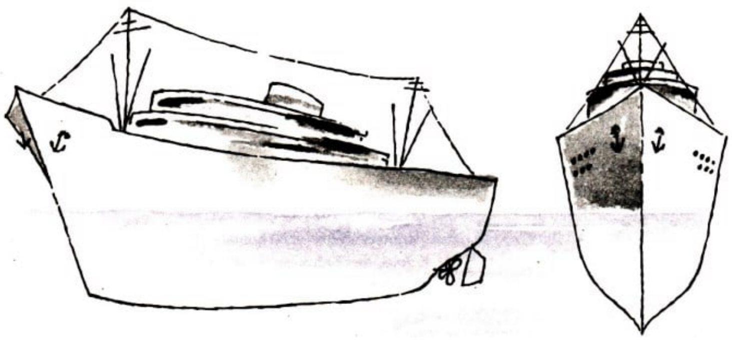
Als Übergangskurven benutzt man verschiedene Linien, je nach der Krümmung der Kurve, der Fahrgeschwindigkeit in der Kurve usw. Meistens verwendet man dazu entweder ein Stück der kubischen Parabel oder einen Lemniskatenbogen, manchmal auch einen Bogen der sogenannten Cornuschen Spirale.

Bisher haben wir nur die einfachsten Kurven und Flächen besprochen, die einem, wo man geht und steht, sofort ins Auge fallen. Sieht man sich aber etwas aufmerksamer um, dann entdeckt man immer neue Kurven und Flächen.
Schauen wir uns beispielsweise eine Fabrik an. Die Schornsteine sind Beispiele für Kegelstümpfe; unten weit, werden sie nach oben hin nach und nach schlanker. In den Werkhallen stehen Maschinen.
Was für eine Vielfalt von verschiedenartigsten Linien beschreiben die einzelnen sich bewegenden Maschinenteile!

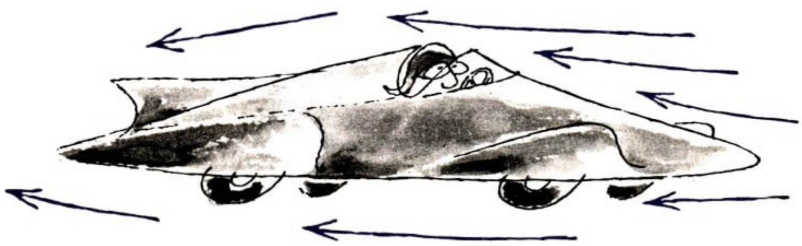
Auf jeder Schraube befindet sich eine Schraubenlinie, wir sehen Maschinen mit elliptischen Rädern, Zahnräder mit ganz unterschiedlichen Zahnformen, die einem Zykloidenbogen, einer Ellipse oder der Evolute eines Kreises nachgebildet sind. Die Eigenschaften dieser Kurven, die in der Technik wichtige Anwendungen finden, werden in der höheren Mathematik untersucht.

Es scheint so, als hätten wir die Kugelflächen vergessen. Doch auch diese treffen wir häufig an. Man braucht nur an Kugellager zu erinnern. Außerdem gibt es auch kugelförmige Gasometer oder Kesselwagen. Das beruht auf folgender bemerkenswerter Eigenschaft der Kugelfläche:
Zur Herstellung einer Kugel braucht man bedeutend weniger Material, als zur Herstellung jedes beliebigen anderen Gefäßes mit dem gleichen Volumen.

Und wie viele kompliziert geformte Flächen sieht man noch, für die es keine besonderen Bezeichnungen gibt!
Da ist zum Beispiel der Dampfkessel, der an einen Zylinder erinnert. In ihm befindet sich Dampf unter hohem Druck. Daher verbiegen sich (für das Auge nicht bemerkbar) die Wände des Zylinders etwas, wobei eine Fläche von sehr komplizierter unregelmäßiger Form entsteht, welche die Ingenieure jedoch genau kennen müssen, damit sie die Festigkeit des Kessels berechnen können. Auch der Körper eines Unterseebootes hat eine komplizierte Form. Er muss stromlinienförmig, druckfest und geräumig sein. Man denke auch an die Form eines Schiffskörpers. Von ihr hängen sowohl die Stabilität des Schiffes und seine Wasserlage als auch seine Geschwindigkeit ab.



Die hohen Fahrtgeschwindigkeiten zwangen die Techniker, den Formen der modernen Züge, Flugzeuge und Automobile besondere Aufmerksamkeit zu widmen; denn von der Form eines Fahrzeuges hängt sein Luftwiderstand ab, der bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit rasch zunimmt.
Ist dagegen die Form gut durchkonstruiert und stromlinienartig, dann kann sich der Luftwiderstand bedeutend verringern. Ein Beispiel dafür ist der Rennwagen.



Man gibt seiner Karosserie eine solche Form, dass der Luftstrom das Fahrzeug leicht umfließen kann.
Der Motor des Wagens liegt unter der stromlinienförmigen Motorhaube, die Windschutzscheibe ist nach rückwärts geneigt, das Dach geht in die schräge Rückwand über. Weder die Motorhaube noch das Dach noch die Rückwand sind eben.
Es sind komplizierte Flächen, die in der Schulmathematik nicht vorkommen. Jedoch interessieren sich die Ingenieure sehr dafür, und sie wissen sie in ihren Konstruktionsbüros sorgfältig zu berechnen.

Inzwischen haben wir eine ganze Anzahl verschiedener Linien, Flächen und Körper kennengelernt, welche uns umgeben. Jetzt können Sie selbst schon eine Menge solcher geometrischer Formen beobachten, die wir bisher nicht erwähnt haben.
Übrigens wollen wir noch über eine Kurve sprechen, die niemand sieht, die aber immer um uns ist und die man gar nicht bemerken kann, wenn man nicht schon vorher etwas über sie weiß.

Fußboden und Decke unseres Zimmers werden von Balken getragen, deren Enden in die Wände eingelassen sind. Diese Balken biegen sich bei großer Belastung etwas durch. Diese Durchbiegung ist kaum wahrnehmbar. Damit der Architekt die zulässige Belastung berechnen kann, muss er die Linie kennen, in der sie sich biegen.

Es zeigt, sich, dass die Decken- und Fußbodenbalken eine Parabel vierter Ordnung bilden, wenn sie belastet werden.
Es ist bestimmt nicht übertrieben, wenn man sagt, dass sich diese Kurve immer zu unseren Füßen befindet und stets über unseren Häuptern schwebt.

Unser Abschnitt nähert sich dem Ende. Zum Schluss sei daran erinnert, dass wir selbst auf einer eigenartigen Fläche leben, welche zwar Erdkugel genannt wird, in Wirklichkeit aber, wie die Astronomen, sagen, ein Geoid ist und in ihrer Form einem Rotationsellipsoid sehr nahe kommt.
Ein solches Ellipsoid entsteht bei der Drehung einer Ellipse um ihre kleine Achse. Freilich unterscheidet es sich im Falle der Erde wenig von einer Kugel. Die Halbachsen der "Ellipse", durch deren Rotation das Geoid entsteht, verhalten sich zueinander wie 299 : 300. Trotzdem muss dieser Unterschied bei der Herstellung geographischer Karten berücksichtigt werden.

Wir haben gesehen, wieviel verschiedene geometrische Kurven und Flächen der Mensch bei seiner Arbeit benutzt, sei es beim Bau von Wohnungen, Fabriken, Brücken und Maschinen oder beim Verkehr zu Wasser, zu Lande und in der Luft. Er verwendet sie nicht aus Freude an den interessanten geometrischen Figuren, sondern deshalb, weil die Eigenschaften dieser geometrischen Kurven und Flächen es ihm ermöglichen, die verschiedensten technischen Probleme möglichst einfach zu lösen.

Um diese Eigenschaften aber in der Technik anwenden zu können, muss man sie kennen. Folglich muss man alle diese Kurven und Flächen untersuchen. Und nicht nur diese allein, sondern noch viele andere; denn die Technik entwickelt sich weiter und braucht Jahr für Jahr für ihre Neuentwicklungen neue geometrische Figuren.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften der verschiedenen Kurven und Flächen wollen wir uns das Ziel stellen, diese Eigenschaften in Gestalt von Formeln auszudrücken, um mit ihrer Hilfe unsere Maschinen, Gebäude und viele andere Anlagen berechnen zu können.
Die bisherigen Ausführungen lassen erkennen, welche wichtige Rolle die Geometrie in unserem Leben spielt.
Unsere elementare Schulgeometrie untersucht nur die einfachsten geometrischen Figuren. Es gibt aber noch andere Zweige in der Geometrie, welche die komplizierten Kurven und Flächen erforschen. Von den Problemen, die auf diesen Gebieten behandelt werden, lernen Sie in den folgenden Abschnitten einige kennen.

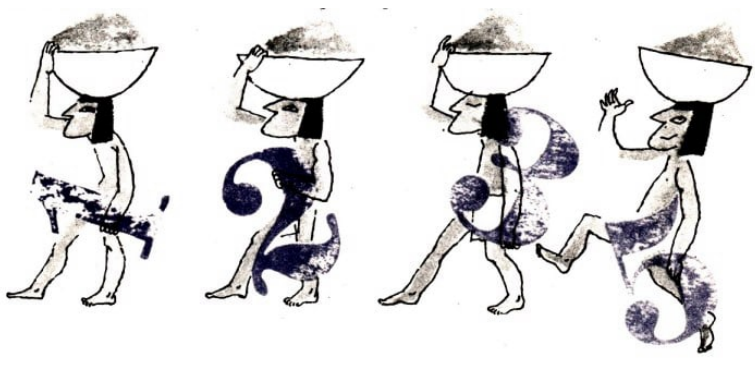
4.2 Wie die Geometrie entstand

I. G. Baschmakowa

Genau wie die anderen Wissenschaften entstand die Geometrie aus praktischen Bedürfnissen. Das Wort "Geometrie" selbst ist griechisch und heißt "Erdmessung".

Die Menschen standen schon sehr früh vor der Notwendigkeit, Landstücke zu vermessen. Bereits 3 bis 4 Jahrtausende v. u. Z. war jedes Fleckchen fruchtbaren Landes in den Tälern des Nils, des Tigris und des Euphrats oder der chinesischen Flüsse für das Leben der Menschen von Bedeutung. Nach großen Überschwemmungen, wie sie besonders am Nil auftraten, musste der Boden wieder neu vermessen werden. Das erforderte gewisse geometrische und arithmetische Kenntnisse.

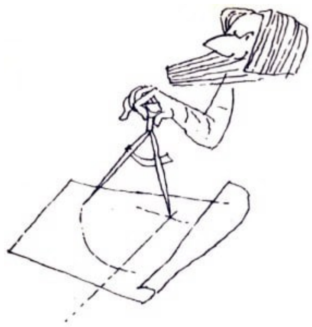
Dann wurde die Ernte eingebracht. Wie hat man zu dieser Zeit Korn abgemessen? Ursprünglich ging man dabei genauso vor, wie wir heute beim Messen von Flüssigkeiten verfahren, d. h., man bestimmte einen Rauminhalt.



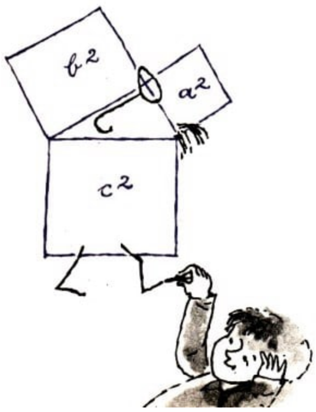
Dazu wählte man sich als Maßeinheit ein Gefäß von bestimmtem Fassungsvermögen und zählte ab, wie oft man dieses Gefäß von einem bestimmten Haufen füllen konnte. Dieses erste Verfahren zur Volumenbestimmung führte zu der Frage nach dem Verhältnis der Rauminhalte verschiedener Körper.

Allmählich begann man dann kompliziertere geometrische Figuren zu messen und ihre Eigenschaften zu untersuchen.
Aus ägyptischen Papyrusrollen und altbabylonischen Texten ist zu ersehen, dass man bereits seit 2000 Jahren v.u.Z. den Flächeninhalt von Dreiecken, Rechtecken und Trapezen bestimmen und den Inhalt des Kreises annähernd berechnen konnte. Man kannte auch Formeln zur Bestimmung des Rauminhaltes von Würfel, Zylinder, Kegel, Pyramide und Pyramidenstumpf.

Bald waren geometrische Kenntnisse nicht mehr nur in der Landvermessung notwendig. Die Entwicklung der Architektur und etwas später auch der Astronomie stellte neue Anforderungen an die Geometrie.



Sowohl in Ägypten als auch in Babylon wurden gewaltige Tempel errichtet, die nur auf Grund vorheriger Berechnungen gebaut werden konnten. Im 6. Jh. v.u. Z. war auf der Insel Samos (einem der altgriechischen Inselstaaten) eine Wasserleitung gebaut worden, durch welche das Wasser aus einer hinter dem Berg Kastro gelegenen Quelle in die Stadt gelangte. Diese Wasserleitung verlief durch einen Tunnel von etwa 1 km Länge.
Es ist bemerkenswert, dass beim Bau dieses Tunnels von beiden Seiten gleichzeitig zu graben angefangen wurde und dass die beiden Abschnitte unter der Erde fast genau zusammentrafen!
Die Richtung des Tunnels musste also vorher bestimmt worden sein. Es war somit eine geometrische Aufgabe gelöst worden, deren Lösung auch in unserem heutigen Ingenieurwesen nicht ganz einfach ist.
Bei diesem Bau müssen die alten Baumeister irgendwelche Zeichnungen benutzt haben, also war ihnen die Ähnlichkeitslehre bekannt.



Zu dieser Zeit waren Spezialfälle des sogenannten Lehrsatzes von Pythagoras bekannt; man wusste bereits, dass Dreiecke mit den Seiten a, b, c rechtwinklig sind, wenn deren Längen ganze Zahlen sind, für welche $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. In dieser Form waren der Lehrsatz des Pythagoras und seine Umkehrung sowohl in Babylon als auch im alten China bekannt.
Trotz dieser schon recht bedeutenden Kenntnisse der Menschen an geometrischen Tatsachen existierte die Geometrie als Wissenschaft noch nicht.

4.3 Wie die Geometrie zur Wissenschaft wurde

Die Geometrie wurde erst zur Wissenschaft, als man begann, systematisch logische Beweisführungen zu verwenden, als man begann, geometrische Sätze nicht mehr nur durch unmittelbares Ausmessen zu entwickeln, sondern mit Hilfe von gedanklichen Schlüssen herzuleiten, eine Aussage aus einer anderen zu folgern und die Sätze in allgemeiner

Form aufzustellen.

Das geschah im antiken Griechenland zwischen dem 6. und dem 4. Jh. v.u.Z. Meist bringt man diese Wende in der Geometrie mit dem Namen des Pythagoras von Samos, eines Gelehrten und Philosophen aus dem 6. Jh. v.u.Z., in Zusammenhang. Über Pythagoras selbst wissen wir fast gar nichts.

Bereits im Altertum wurde er zu einer halblegendären Gestalt. Bekannt ist jedoch, dass sich im 5. Jh. u.u.Z. zahlreiche bedeutende Mathematiker als Pythagoreer bezeichneten. Das lässt uns vermuten, dass Pythagoras das Haupt einer ersten mathematischen Schule war. Und er ist es, dem die Griechen die Begründung der Geometrie als Wissenschaft zuschreiben.

Wir wollen uns jetzt einmal die Frage Vorlegen, weshalb die logischen Beweise in der Geometrie und überhaupt in der Mathematik eine so überaus große Rolle spielen. Die meisten geometrischen Sätze sind Aussagen, die für unendliche Mengen von Objekten gelten.

Kann man beispielsweise ohne Beweis feststellen, dass die Summe der Winkel im Dreieck gleich $180°$, d. h. gleich zwei Rechten ist?
Nein, das kann man offenbar nicht. Erstens deshalb nicht, weil man es in der Praxis niemals mit den in der Geometrie untersuchten Dreiecken zu tun hat. Kein auf Papier gezeichnetes reales Dreieck ist ein exaktes Dreieck (im Sinne der Geometrie).

Sehen wir uns seine Seiten unter dem Mikroskop an, so stellen wir fest, dass es keine Geraden sind, sondern unregelmäßige Graphithäufchen (falls wir mit Bleistift gezeichnet haben). Ein ideales mathematisches Dreieck kann in Wirklichkeit nie realisiert werden. Es ist ein abstraktes mathematisches Bild, das gewisse Grundmerkmale der realen Dreiecke in sich vereinigt.

Zweitens könnten wir die Richtigkeit des angeführten Satzes auch dann nicht feststellen, wenn wir ideale Dreiecke ausmessen könnten, denn es gibt unendlich viele verschiedene Dreiecke, und die müssten wir alle nachmessen! Wir können nicht einmal für ein einziges Dreieck diesen Satz aufstellen, weil wir ja die Winkel nur mit einem bestimmten Genauigkeitsgrad messen können, so dass sich nur feststellen lässt, dass die Winkelsumme im Dreieck annähernd $180°$ beträgt, von $180°$ höchstens um $0°1'$ bzw. um $0°0'1''$ abweicht.

Ein Triumph der neuen Methode war die Entdeckung, dass nicht alle Strecken ein gemeinsames Maß besitzen ("kommensurabel sind"), dass es vielmehr sogenannte inkommensurable Strecken gibt. Von unmittelbaren Messungen ausgehend, hätten die Gelehrten diese Entdeckung niemals machen können, lassen sich doch solche Messungen immer nur mit einer beschränkten Genauigkeit vornehmen, und innerhalb der

Grenzen dieser Genauigkeit sind alle Strecken kommensurabel.

Anscheinend waren die ersten inkommensurablen Strecken, die man entdeckte, die Seite und die Diagonale des Quadrates. Der älteste Beweis dafür ist uns überliefert; er wird indirekt geführt und benutzt den Lehrsatz des Pythagoras sowie einen Satz aus der Zahlentheorie. Wir geben den Beweis wieder:

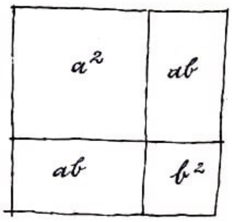
Wir nehmen also an, Seite und Diagonale des Quadrates seien kommensurabel, d. h., es gäbe eine Strecke der Länge f, die sowohl in der Länge der Seite als auch in der der Diagonalen ganzzahlig oft aufgeht: $\overline{AC} = pf$, $\overline{AB} = qf$, und es wäre $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{pf}{qf} = \frac{p}{q}$, wobei wir $\frac{p}{q}$ als nichtkürzbaren Bruch annehmen dürfen. Dann ist $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{p^2}{q^2}$.
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt aber $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$, d. h., es wäre $p^2 = 2q^2$.

Folglich wäre p^2 eine gerade Zahl. Daraus ergibt sich aber nach einem Satz aus der Zahlentheorie, der damals bereits bekannt war, dass auch p gerade ist: $p = 2t$. Dann wäre $4t^2 = p^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2t^2$, d. h., auch q wäre gerade.
Wir sind damit zu einem Widerspruch zu unserer Voraussetzung gelangt, nach der $\frac{p}{q}$ nicht mehr weiter kürzbar sein sollte.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität übte auf die Gelehrten des Altertums einen nachhaltigen Einfluss aus. Bis zu diesem Zeitpunkt hatte sich die ganze metrische Geometrie und die Ähnlichkeitslehre auf die Arithmetik der rationalen Zahlen gestützt.
Man hatte geglaubt, die rationalen Zahlen, d. h., die ganzen Zahlen und die Brüche, würden zum Messen jeder beliebigen Größe ausreichen. Plötzlich stellte sich aber heraus, dass das nicht der Fall ist. Wie klein man auch eine Strecke wählen mag, sie geht nie sowohl in der Diagonalen als auch in der Seite eines Quadrates ganzzahlig oft auf.

Aristoteles, der bedeutendste Philosoph der Antike, sagte, die Wissenschaft beginne beim Staunen, beispielsweise mit der Verwunderung darüber, dass Diagonale und Seite des Quadrates inkommensurabel sind. Plato, ein anderer bedeutender griechischer Philosoph, schrieb, bis zu dem Zeitpunkt, da er gelernt habe, dass es inkommensurable Strecken gibt, habe er einem vernunftlosen Tier geglichen.

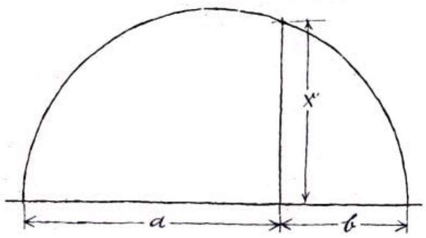
Es lässt sich in wenigen Worten schwer beschreiben, in welchem Maße diese Entdeckung die Entwicklung der Mathematik beeinflusst hat. Man kann sie in ihrer Bedeutung vielleicht mit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie vergleichen, die auf die Entwicklung der Wissenschaft des 19. und 20. Jh. einen so großen Einfluss ausübte. Als unmittelbare Folgen dieser Entdeckung kann man verzeichnen:



1. Die Griechen überzeugten sich davon, dass man zwar viele Strecken nicht zugleich durch rationale Zahlen ausdrücken kann, wie Diagonale und Seite des Quadrates oder Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit, den Seiten 1 und 2, dass man sie aber mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Sie gingen daher in ihren theoretischen Untersuchungen vom Rechnen zum Konstruieren über. Algebraische Identitäten und Gleichungen schrieben sie nicht in Buchstaben auf, wie wir es heute in der Algebra tun, sondern mit Hilfe von Beziehungen zwischen geometrischen Figuren.
Beispielsweise wurde die Identität $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ so geschrieben, wie das in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist.

Die Gleichung $x^2 = ab$ wurde in der Sprache der Geometrie folgendermaßen formuliert: Man verwandle ein gegebenes Rechteck mit den Seiten a und b in ein Quadrat. Die Quadratseite x kann man bekanntlich mit Zirkel und Lineal finden. Wie das gemacht wird, zeigt die Zeichnung.



Die Geometrie wurde also zur mathematischen Sprache jener Zeit. Sowohl Algebra als auch Arithmetik wurden mit ihrer Hilfe dargelegt. Das führte naturgemäß zu einer Weiterentwicklung der Geometrie selbst.

2. Die griechischen Gelehrten stellten das Problem, wie man das Verhältnis von Größen bestimmen kann, auch wenn sie inkommensurabel sind,und lösten es. Um eine Vorstellung davon zu vermitteln, wie tiefliegend diese Theorie war, sei nur gesagt, dass eine ähnliche Theorie erst in neuerer Zeit gegen Ende des vorigen Jahrhunderts entwickelt worden ist, und zwar von dem tschechischen Mathematiker und Philosophen Bernard Bolzano und den deutschen Mathematikern Georg Cantor und Richard Dedekind.

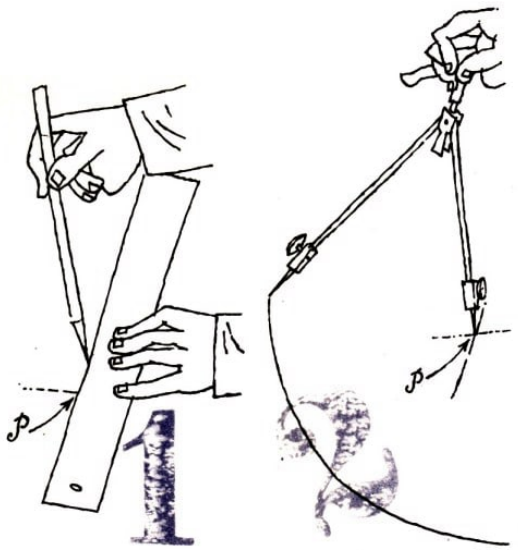
Alle diese neuen Probleme und die in diesem Zusammenhang entstandenen Theorien führten zu einer weiteren Vervollkommnung der mathematischen Beweismethoden, und es entstand das Bedürfnis nach der Schaffung eines streng logischen Systems der Geometrie.

4.4 Der Aufbau des deduktiven Systems

Wie sollte ein derartiges System aufgebaut werden? Wir beweisen doch jeden einzelnen Satz unter Berufung auf andere Sätze.
Diese Sätze ihrerseits werden wieder unter Berufung auf irgendwelche dritten Sätze bewiesen usw. Dieses Verfahren ließe sich bis ins Unendliche fortsetzen, und der Beweis könnte niemals beendet werden. Was ist da zu machen?

Diese Schwierigkeiten wurden bereits im Altertum erkannt, und damals wurde auch ein Ausweg gefunden. Schon im 4. Jh. v.u.Z. wählten griechische Mathematiker zum Aufbau der Geometrie einige Sätze aus, die sie ohne Beweis verwendeten; alle übrigen Sätze dagegen leiteten sie aus ihnen streng logisch ab. Die ohne Beweis verwendeten Sätze nannten sie Axiome oder Postulate.

Als vollkommenstes Beispiel einer solchen Theorie wurden mehr als zwei Jahrtausende lang die "Elemente" des Euklid angesehen, die etwa 300 Jahre v.u.Z. verfasst wurden. Als Postulate wählte Euklid solche Sätze aus, deren Aussagen man mit einfachen Konstruktionen unter Benutzung von Zirkel und Lineal nachprüfen konnte, wie z.B.:



1. Durch zwei Punkte kann man immer eine Gerade legen (dazu braucht man nur ein Lineal).

2. Um einen gegebenen Punkt kann man einen Kreis mit vorgegebenem Radius beschreiben (dazu braucht man einen Zirkel).

Euklid benutzte auch einige allgemeine Sätze, die er Grundsätze nannte, wie etwa den folgenden: Sind zwei Größen ein und derselben dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Auf der Grundlage seiner Postulate und Grundsätze baute Euklid exakt und systematisch die ganze Planimetrie auf, und mit ihrer Hilfe entwickelte er die Elemente der Algebra und die Lehre von den quadratischen Gleichungen. In seinem Werk "Elemente" sind außerdem enthalten: eine allgemeine Theorie der Proportionen, die in der Ähnlichkeitslehre angewendet wird, eine Zahlentheorie, Methoden zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten sowie die Grundlagen der Stereometrie.
Den Schluss bildet die Lehre von den regelmäßigen Polyedern; das sind Polyeder, deren Seiten aus gleichen, regelmäßigen Polygonen bestehen.

Euklid bewies, dass es fünf regelmäßige Polyeder gibt: das Tetraeder, den Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder - und dass es außer diesen keine weiteren gibt.

Man kann sagen, dass Euklid in seinen "Elementen" nicht nur die Grundlagen für die Geometrie legte, sondern für die ganze antike Mathematik.

Erst im 19. Jh. gelang es den Mathematikern, eine neue, höhere Stufe bei der Untersuchung der Grundlagen der Geometrie zu erreichen. Da zeigte es sich dann, dass Euklid nicht alle Axiome angegeben hatte, die zum Aufbau der Geometrie notwendig sind.
Tatsächlich hatte er die fehlenden Axiome bei seinen Beweisen benutzt, allerdings ohne sie formuliert zu haben. Das verringert jedoch die Bedeutung Euklids in keiner Weise; er hatte immerhin als erster gezeigt, wie man eine mathematische Theorie aufbauen

kann und muss.
Die von ihm geschaffene deduktive Methode ging für immer in die Mathematik ein. In diesem Sinne sind alle späteren Mathematiker, einschließlich der heutigen, Schüler Euklids.

Der geniale russische Gelehrte Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792-1856) schuf ein neues geometrisches System, dem ein Parallelenaxiom zugrunde liegt, das anders lautet als das V. Postulat Euklids. Auch der ungarische Mathematiker Janos Bolyai und der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß haben etwa zur selben Zeit - unabhängig voneinander und von Lobatschewski - ähnliche Geometrien entwickelt.
Während man in der euklidischen Geometrie durch einen Punkt außerhalb einer Geraden in der durch diesen Punkt und diese Gerade bestimmten Ebene nur eine einzige Gerade legen kann, die die gegebene Gerade nicht schneidet, gibt es in der Lobatschewskischen Geometrie unendlich viele solcher Geraden.

Das geometrische System Lobatschewskis ist genauso widerspruchsfrei wie das des Euklid. Später entwickelte der hervorragende deutsche Mathematiker Bernhard Riemann ein allgemeines Verfahren zum Aufbau derartiger nichteuklidischer Geometrien, in denen man Längen, Winkel, Flächeninhalte und andere geometrische Größen messen kann.
Mit Hilfe der neuen Geometrien ist es gelungen, physikalische Erscheinungen zu beschreiben, die vom Standpunkt der euklidischen Geometrie und der Newtonschen Physik aus nicht erfasst werden konnten. Näheres darüber erfahren Sie in dem Abschnitt "Von den verschiedenen Geometrien".

4.5 Messen von Längen, von Flächeninhalten und Rauminhalten

N. I. Polski

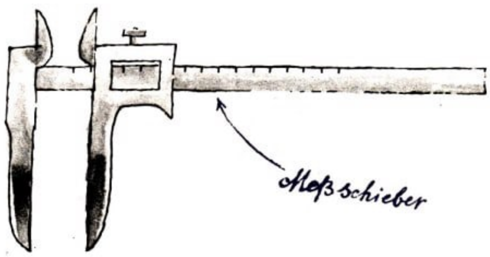
Messen von Längen

Nehmen wir einmal an, wir sollten feststellen, welcher von zwei Gegenständen (z.B. von zwei geraden Metallstäben) der längere ist. Dazu vergleicht man sie, d.h., man hält sie aneinander und erhält so die gesuchte Antwort.

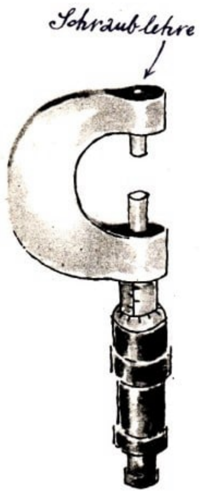
Natürlich kann man in dieser Weise durchaus nicht immer zwei Gegenstände der Länge nach vergleichen. Hat man beispielsweise zu bestimmen, welche von zwei Brücken die längere ist, so ist das angegebene Verfahren schon nicht mehr brauchbar.
In solchen Fällen bedient man sich eines Verfahrens, das Messung genannt wird. Beim Messen wird jedem Gegenstand eine Größe, seine Länge, zugeordnet. Unter einer Größe verstehen wir ganz allgemein das Produkt aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit. Man sieht denjenigen Gegenstand als länger an, dem beim Messen die größere Maßzahl zugeordnet ist.

Meist werden Längenmessungen folgendermaßen ausgeführt:
An den zu messenden Stab legt man einen mit gleichweit voneinander entfernten Teilstrichen (beispielsweise 1 cm bzw. den Bruchteil eines cm) versehenen Maßstab an.

Danach stellt man fest, dass der Stab a_0 ganze und a_1 zehnte] Zentimeter (mm) enthält.



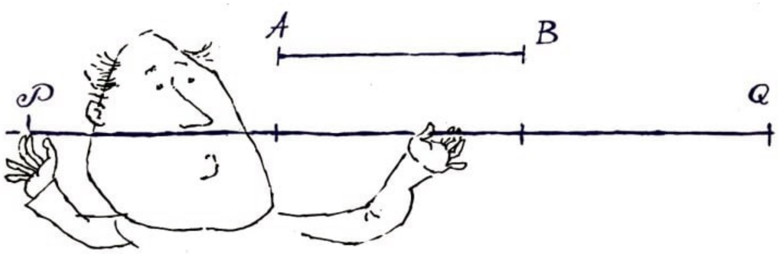
Will man die Messung genauer durchführen und benutzt man z.B. einen Messschieber oder eine Schraublehre, so bemerkt man, dass in einem Abschnitt a_2 hundertstel Zentimeter, a_3 tausendstel Zentimeter usw. enthalten sind.
In jedem Falle erhalten wir im Ergebnis einer solchen Messung den endlichen Dezimalbruch $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n}$.



Diese Zahl wird nun als Maßzahl für die Länge des Stabes bezeichnet.
Eine Erhöhung der Messgenauigkeit kann dazu führen, dass bei diesem Bruch die Anzahl der Ziffern wächst, aber selbstverständlich wird er immer endlich bleiben.
Häufig ist jedoch ein direktes Messen bei vielen Dingen schwierig und manchmal sogar unmöglich. Wie sollte man beispielsweise den Abstand zwischen Himmelskörpern bestimmen? Dazu müssen nun spezielle geometrische Methoden geschaffen werden, die es ermöglichen, die unmittelbare Messung durch Berechnungen nach bestimmten Formeln zu ersetzen.

Die Geometrie untersucht solche abstrakten Begriffe wie Punkte, Geraden und Ebenen (siehe den Abschnitt "Von den verschiedenen Geometrien"), während in der realen Welt nur konkrete Gegenstände vorliegen.

Beim Messen eines konkreten Gegenstandes hört der Messvorgang notwendigerweise irgendwann auf, mit welcher Genauigkeit man ihn auch immer durchführen mag.
Wenn wir eine geometrische Strecke AB mit Hilfe einer anderen geometrischen Strecke PQ messen, wobei $\overline{PQ}$ als Einheit (Längeneinheit, kurz LE) dienen soll, so kann es eintreten, dass der Messvorgang unbeschränkt fortzusetzen ist. Als Ergebnis der Messung erhalten wir dann einen unendlichen Dezimalbruch.



Das tritt z. B. ein, wenn die zu messende Strecke AB gerade $\frac{1}{3}$ der Strecke PQ beträgt. Um die Strecke AB zu messen, teilen wir die Strecke PQ zuerst in 10 Teile, dann in 100 Teile usw. Beim Messen ergibt sich dann der unendliche periodische Bruch 0,333...

Es kann vorkommen, dass die Messung einen unendlichen nichtperiodischen Bruch ergibt. In der Schule wird beispielsweise folgendes bewiesen:
Wenn $\overline{AC}$ die Diagonale eines Quadrates und $\overline{BC}$ seine Seite ist, so erhält man beim Messen von $\overline{AC}$ mit Hilfe von $\overline{BC}$ den unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch 1,4142135..., der die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ darstellt.

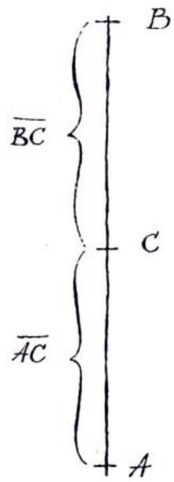
Somit wird in der Geometrie im Ergebnis einer Messung jeder Strecke AB eine (rationale oder irrationale) Zahl zugeordnet, die wir mit $\{l(\overline{AB})\}$ bezeichnen wollen. Diese Zahl heißt die Maßzahl der Länge der Strecke. Welche Eigenschaften hat nun die Länge einer Strecke? Wir geben vier Haupteigenschaften an:

1. Offenbar ist die Maßzahl der Länge einer Strecke eine positive Zahl:

$$\{l(\overline{AB})\} > 0$$

2. Sind die Strecken A_1B_1 und A_2B_2 gleich, d,h., fallen sie beim Übereinanderlegen zusammen, so sind ihre Längen - und damit bei gleicher Längeneinheit auch die Maßzahlen, die man beim Messen erhält - ebenfalls gleich:

$$l(\overline{A_1B_1}) = l(\overline{A_2B_2})$$



3. Liegt auf der Strecke AB ein Punkt C, so ist die Maßzahl, die man als Ergebnis der Messung von AB erhält, gleich der Summe der beiden Maßzahlen, die sich bei den Messungen der Strecken AC und CB ergeben, d.h.

$$l(\overline{AB}) = l(\overline{AC}) + l(\overline{CB})$$

Diese Eigenschaft der Länge erscheint auf den ersten Blick trivial, setzt sich doch die Strecke AB aus den beiden Strecken AC und CB zusammen. Tatsächlich ist das aber nicht so einfach.

Wenn wir beispielsweise beim Messen der Strecke AC den unendlichen Dezimalbruch $\sqrt{2} = 1,4142135...$ herausbekommen, beim Messen von CB dagegen den unendlichen Dezimalbruch $\sqrt{3} = 1,7320508...$, und wenn wir dann diese beiden Strecken zu einer Strecke AB vereinigen und diese mit demselben Maßstab messen, dann muss nachgeprüft werden, ob sich bei der zweiten Messung der unendliche Dezimalbruch $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146264...$ ergibt.
Wenn man sich das gut überlegt, ist es hier durchaus nicht offensichtlich, welche Dezimalstellen die sich beim Messen der Strecke AB ergebende Zahl haben wird.

4. Offenbar erhält man beim Messen der Messstrecke PQ als Maßzahl die Zahl Eins:

$$\{l(\overline{PQ})\} = 1$$

Also wird jeder Strecke durch das Messen eine Zahl, ihre Maßzahl, zugeordnet, die die Eigenschaften 1 bis 4 hat.

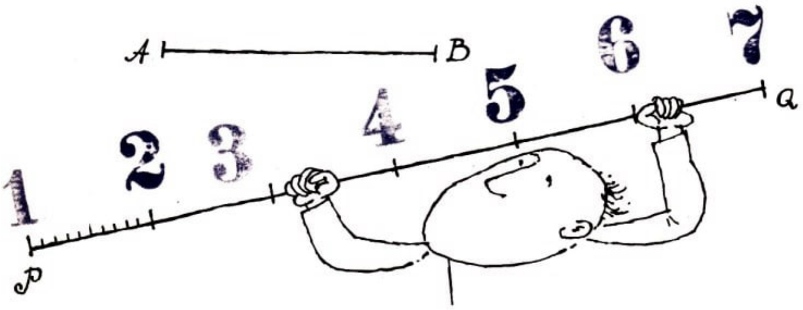
Die Maßzahl $\{l(\overline{AB})\}$ ist jedenfalls ein endlicher oder unendlicher Dezimalbruch, den man folgendermaßen schreiben kann:

$$\{l(\overline{PQ})\} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + ...$$

Stellen wir uns jetzt einmal vor, wir hätten zum Messen der Strecke AB die Strecke PQ nicht in 10, sondern in 7 Teile zerlegt und danach jeden der entstandenen Teile wieder in 7 Teile usf. Beim Messen ergibt sich dann irgendeine Maßzahl

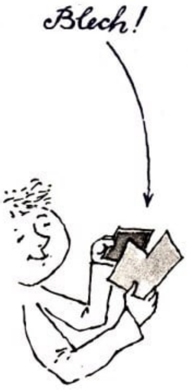
$$\{\lambda(\overline{PQ})\} = b_0 + \frac{b_1}{7} + \frac{b_2}{7^2} + \frac{b_3}{7^3} + ...$$

Jetzt erhebt sich die Frage: Sind die bei den verschiedenen Messverfahren für die Strecke AB erhaltenen Größen gleich, oder, anders ausgedrückt, ist $l(AB)$ gleich $\lambda(AB)$?



Man kann beweisen, dass die Maßzahlen in beiden Fällen gleich sind, d.h., dass das Ergebnis einer Messung nicht davon abhängt, wie man sie durchführt.
Beim Beweis wird nur die Tatsache benutzt, dass die Maßzahlen von $l(AB)$ und auch von $\lambda(AB)$ die Eigenschaften 1 bis 4 haben. Die Eigenschaften 1 bis 4 bestimmen die Längen aller Strecken eindeutig. Diese Eigenschaften sind die minimalen Forderungen, die erfüllt sein müssen, damit die Längen aller Strecken vollständig bestimmt werden können.
Wir benutzen sie als Axiome zum Aufbau einer Theorie der Längenmessung oder Metrik.

4.6 Messen von Flächeninhalten

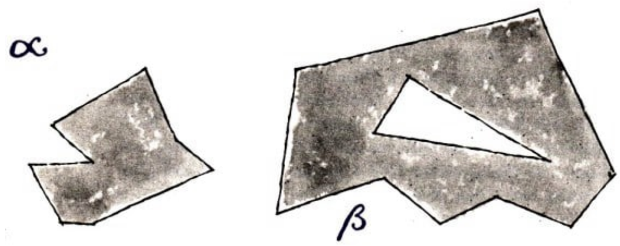


Angenommen, wir wollen zwei Blechstücke beliebiger Form miteinander vergleichen. Man kann sie wie die Strecken aufeinanderlegen. Wenn dabei das erste Blech ganz von dem zweiten überdeckt wird, dann sagt man, das zweite Blech sei größer als das erste. Diese Antwort und auch die Art, wie wir zu ihr gelangt sind, befriedigen aber nicht.
Erstens kann es vorkommen, dass keins der Stücke ganz ins andere hineinpasst. Zweitens sagt die Antwort selbst ("größer" oder "kleiner") noch sehr wenig darüber aus, was man in der Praxis wissen will, nämlich, um wieviel größer oder kleiner.

Drittens kann man im allgemeinen nicht zwei beliebige Gegenstände von einem Ort zum anderen bewegen. Wie sollte man auf diese Art etwa zwei Acker miteinander vergleichen?

Es muss jedem Flächenstück eine Größe zugeordnet werden, sein Flächeninhalt, durch die sein Ausmaß gekennzeichnet ist. Naturgemäß wird das Messen von Flächenstücken ein bedeutend komplizierterer Prozess sein als das Messen von Strecken. Das beruht natürlich auf der größeren Vielfalt der Formen bei Flächenstücken.
Es muss also eine geometrische Theorie aufgebaut werden, die es uns ermöglicht, die vielen wichtigen praktischen Fragen zu beantworten.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie man in der Geometrie das Problem der Flächenmessung lösen kann.



Wir betrachten in der Ebene alle möglichen Flächenstücke, die von einem oder mehreren, aus endlich vielen Strecken bestehenden Streckenzügen begrenzt sind. Zwei solche Flächenstücke, die wir im folgenden Polygone nennen wollen, zeigt die Abbildung.
Das Problem besteht darin, für jedes solche Polygon eine zahlenmäßige Charakteristik anzugeben, die man als Flächeninhalt des Polygons auffassen kann. Wir bezeichnen die Polygone mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, ...$ ihre Flächeninhalte mit $A(\alpha), A(\beta), ...$
Welche Eigenschaften muss nun die Größe A haben, damit sie als Flächeninhalt im gewöhnlichen Sinne angesehen werden kann?
Diese Eigenschaften lassen sich aus der Erfahrung ableiten.

1. Die Maßzahl des Flächeninhalts jedes Polygons muss eine positive Zahl sein:

$$\{A(\alpha)\} > 0$$

2. Wenn die Polygone α und β beim Aufeinanderlegen zusammenfallen, so müssen ihre Flächeninhalte gleich sein:

$$A(\alpha) = A(\beta)$$

3. Wenn das Polygon α in die beiden Polygone β und γ zerfällt, so muss

$$A(\alpha) = A(\beta) + A(\gamma)$$

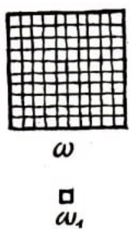
sein.

4. Der Flächeninhalt eines Maßpolygons (z.B. des Quadrates ω mit der Seitenlänge 1 LE) hat die Maßzahl Eins:

$$\{A(\omega)\} = 1$$

Jetzt legen wir uns zwei Fragen vor:
1. Ist die Aufgabe der Flächenmessung für Polygone lösbar?
Anders gesagt, lässt sich ein direktes Verfahren angeben, durch das jedem Polygon eine Größe zugeordnet wird, die die Eigenschaften 1 bis 4 hat?

II. Ist die Aufgabe eindeutig lösbar? Anders ausgedrückt, sind die Flächeninhalte von Polygonen durch die Bedingungen 1 bis 4 eindeutig bestimmt?



Man kann beweisen, dass sich diese beiden Fragen bejahend beantworten lassen. Wir wollen diesen Beweis nicht wiedergeben, sondern nur auf einige prinzipielle Schwierigkeiten hinweisen, die damit zusammenhängen. Genau wie bei der Längenmessung muss man auch hier ein Messverfahren konstruieren, welches gestattet, zu jedem Polygon α eine Größe $A(\alpha)$ so zu bestimmen, dass die Bedingungen 1 bis 4 erfüllt sind. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wir beschreiben kurz ein solches Verfahren zur Flächenmessung.

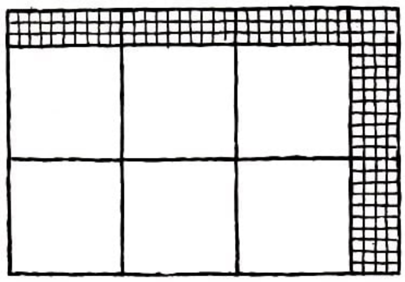
Zu Beginn betrachten wir das Quadrat ω mit der Seitenlänge 1 LE. Wir teilen jede Seite dieses Quadrates in 10 gleiche Teile und legen durch die Teilungspunkte Geraden, die den Seiten des Quadrates parallel sind.
Das Quadrat ω wird dabei offenbar in $10^2 = 100$ kleinere, gleich große Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{10}$ LE zerlegt. Jedes dieser Teilquadrate bezeichnen wir mit ω_1.

Ihre Flächeninhalte müssen gleich sein, wenn der Flächeninhalt die Eigenschaft 2 hat. Auf Grund der Eigenschaft 3 ist die Summe aller Flächeninhalte der Teilquadrate ω_1 gleich dem Flächeninhalt des ganzen Quadrate ω, der nach der Eigenschaft 4 gleich 1 Flächeneinheit (kurz FE) ist. Es ist also

$$10^1 A(\omega_1) = A(\omega) = 1 \text{ FE}$$

Daraus folgt $A(\omega_1) = \frac{1}{10^2}$ FE.
Verfährt man nun genauso mit einem Teilquadrat ω_1 und zerlegt dieses in 100 Teilquadrate ω_2, so sieht man, dass der Flächeninhalt $A(\omega_2) = \frac{1}{100^2}$ FE ist. Durch eine Zerlegung des Teilquadrates ω_2 in 100 Teilquadrate ω_3 erhalten wir $A(\omega_3) = \frac{1}{1000^3}$ FE usw.

Betrachten wir jetzt einmal das Rechteck α, dessen eine Seite $a = 2,3$ LE und dessen Seite $b = 3,4$ LE ist.

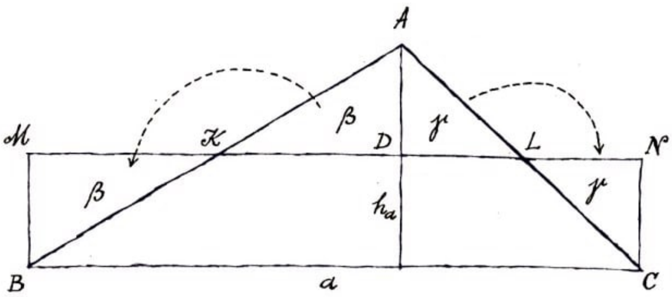


Anhand der Abbildung kann man sich leicht überzeugen, dass das Rechteck α in 6 Teilquadrate ω und 182 Teilquadrate ω_1 zerfällt. Auf Grund der Eigenschaften 2, 3, 4 und der zwischen den Flächeninhalten $A(\omega)$ und $A(\omega_1)$ bestehenden Beziehungen ergibt sich

$$A(\alpha) = 6A(\omega) + 182A(\omega_1) = \left(6 \cdot 1 + 182 \cdot \frac{1}{10^2}\right) = 7,82 \text{ FE } = a \cdot b$$

Analog kann man zeigen, dass auch im allgemeinen Falle der Flächeninhalt $A(\alpha)$ eines Rechteckes gleich dem Produkt ab der Längen von zwei aneinanderstoßenden Seiten ist, weil der Flächeninhalt die Eigenschaften 1 bis 4 hat.
Der Beweis wird aber bedeutend komplizierter, wenn etwa eine der Seiten a oder b durch einen unendlichen Dezimalbruch dargestellt wird.

Wir wollen jetzt mit Δ ein beliebiges Dreieck ABC bezeichnen. Es sei $BC = a$ seine längste Seite und h_a die auf diese Seite gefüllte Höhe. Ziehen wir dann die Mittellinie KL und errichten auf ihr die Lote AD, BM und CN, dann sind die mit gleichen griechischen Buchstaben (β und γ) bezeichneten Dreiecke gleich groß.



Da das Dreieck Δ und das Rechteck $BCNM$ aus gleichen Teilen bestehen (den beiden Dreiecken β und γ und dem Trapez $BKLC$), ergibt sich unter Benutzung der Eigenschaften 2 und 3 sofort, dass

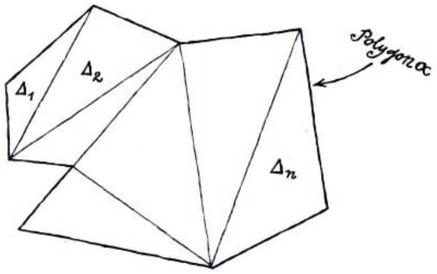
$$A(\Delta) = A(\beta) + A(\gamma) + A(BKLC) = A(BCNM)$$

ist.
Der Flächeninhalt des Rechteckes $BCNM$ ist offenbar gleich ah_a. Damit haben wir bewiesen, dass der Flächeninhalt $A(\Delta)$ eines Dreiecks gleich $\frac{1}{a}ah_a$ ist.

Allerdings muss hier gezeigt werden (was aber leicht ist), dass $ah_a = bh_b = ch_c$ ist, d. h., dass $A(\Delta)$ nicht von der Wahl der Grundseite abhängt.

Wir untersuchen ferner ein Polygon α. In irgendeiner Weise kann man es in endlich viele Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ zerlegen. Wenn die Bedingung 3 erfüllt ist, ist der Flächeninhalt $A(\alpha)$ des Polygons gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke der Zerlegung:

$$A(\alpha) = A(\Delta_1) + A(\Delta_2) + ... + A(\Delta_n)$$



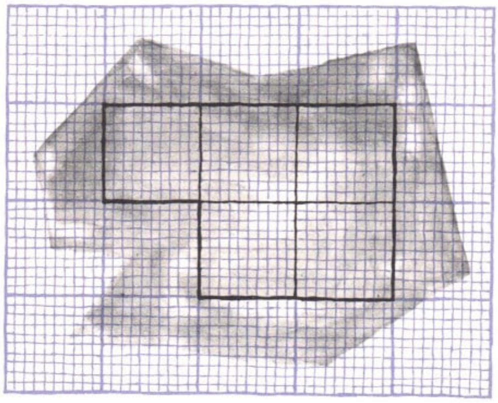
Darauf beruht nun die Messung des Flächeninhaltes eines Polygons. Wir nennen dieses Verfahren Triangulation.
Hier muss man jedoch aufpassen: Es muss ja noch gezeigt werden, dass bei verschiedenen Zerlegungen des Polygons α in Dreiecke, d. h. bei verschiedenen Triangulationen, immer dieselbe Größe $A(\alpha)$ herauskommt.
Mit anderen Worten, es muss bewiesen werden, dass das zahlenmäßige Ergebnis der erwähnten Messung des Polygons nicht von der Art der Durchführung dieser Messung abhängt.

Weiterhin muss man beweisen, dass die Größen $A(\alpha)$, die bei dem angegebenen Verfahren ermittelt werden, den Bedingungen 1 bis 4 genügen. Damit ist dann der Beweis für die Lösbarkeit der Aufgabe einer Flächenmessung vollständig erbracht (Frage I).

Nun zur Frage II. Wir haben ein Messverfahren beschrieben, das in der Zerlegung eines Polygons in Dreiecke besteht. Wir werden jetzt ein anderes Messverfahren angeben, das anscheinend von dem oben beschriebenen völlig verschieden ist, durch das aber ebenfalls allen Polygonen α Größen $\sigma(\alpha)$ zugeordnet werden, welche die Eigenschaften 1 bis 4 besitzen.
Wir wollen dieses Verfahren Quadratur nennen.

Zu diesem Zweck überdecken wir das in der Abbildung dargestellte Polygon α mit einem Netz, das aus Quadraten ω besteht. Jedes dieser Quadrate ω zerlegen wir in 10^2 Teilquadrate ω_1, jedes der Teilquadrate ω_1 in 10^2 Teilquadrate ω_2 usw.

Nun zählen wir ab, wieviel Quadrate ω ganz in dem Polygon α enthalten sind. Es seien k Stück ($k = 5$). Dabei bleibt ein Teil des Polygons α übrig, in den keine ganzen Quadrate ω mehr hineinpassen.
Wir zählen aus, wieviel Teilquadrate ω_1 vollständig in dieser restlichen Fläche liegen. Es seien k_1 Stück.



In dem übrigbleibenden Teil des Polygons α liegen k_2 Teilquadrate ω_2 usw.
Da $A(\omega) = 1$ FE; $A(\omega_1) = \frac{1}{10^2}$ FE; $A(\omega_2) = \frac{1}{100^2}$ FE; ... ist und ferner die Eigenschaften 1 bis 4 erfüllt sein sollen, müssen wir annehmen, dass die Maßzahl des Flächeninhalts des ganzen Polygons α gleich

$$\{\sigma(\alpha)\} = k + \frac{k_1}{10^2} + \frac{k_2}{100^2} + \frac{k_3}{1000^2} + ... \qquad (1)$$

ist.
Diese Summe wird im allgemeinen unendlich viele Summanden haben, sie kann aber niemals größer werden als die Anzahl der Quadrate ω, mit denen man das ganze Polygon (überstehend) überdecken kann (in der Abbildung wird das Polygon α von 20 Quadraten ω vollständig überdeckt).

Das auf Seite 108 dargestellte Rechteck war von einem eben solchen Netz überdeckt. Dort war $k = 64$, $k_1 = 182$, $k_2 = k_3 = ... = 0$, und die Netzlinien waren den Seiten des Rechtecks parallel.
Würde man das Rechteck dieser Abbildung mit demselben Netz überdecken, es vorher jedoch um einen gewissen Winkel drehen, so wären die Zahlen $k, k_1, k_2, ...$ andere. Es entsteht die Frage, ob auch im Falle eines gedrehten Netzes für das Rechteck die Summe (1) gleich $ab =$ 7,82 FE ist.

Oder ganz allgemein. Hängt das Ergebnis einer Quadratur von der Lage des Netzes ab?

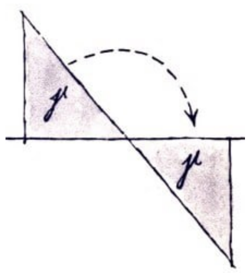
Man kann beweisen, dass bei jeder Lage des Netzes die Summe (1) unverändert bleibt, d.h., das Resultat einer Quadratur hängt nicht davon ab, wie das Netz liegt.
Somit wird durch eine Triangulation dem Polygon α eine Größe $A(\alpha)$ zugeordnet, unabhängig von der Art der Triangulation, und durch eine Quadratur eine Größe $\sigma(\alpha)$, die ebenfalls nicht von der Art der Quadratur abhängt.
Sowohl die Maßzahlen von $A(\alpha)$ als auch die Maßzahlen von $\sigma(\alpha)$ genügen den Bedingungen 1 bis 4.

Zu klären bleibt noch, ob die Maßzahlen von $A(\alpha)$ und $\sigma(\alpha)$ übereinstimmen, d.h., ob die Ergebnisse von Triangulation und Quadratur gleich sind? Es lässt sich beweisen, dass $A(\alpha) = \sigma(\alpha)$ für jedes Polygon α gilt.

Überdies ergibt jedes andere Messverfahren, das den Bedingungen 1 bis 4 genügt, für jedes Polygon dasselbe Resultat wie die oben beschriebenen Verfahren. Damit ist die Frage II vollständig beantwortet.

Wir wollen nun kurz skizzieren, wie man allein auf Grund der vier Haupteigenschaften des Flächeninhaltes eine geometrische Theorie der Flächenmessung aufbauen kann, in der die Eigenschaften 1 bis 4 als Axiome (analog zu den Axiomen 1 bis 4 für Längenmessung) für die Konstruktion einer Theorie der Flächeninhalte betrachtet werden.

Wir wollen noch einen sehr interessanten und wichtigen Satz angeben, der zuerst von dem ungarischen Mathematiker Farkas (Wolfgang) Bolyai, und unabhängig von ihm von dem deutschen Wissenschaftler P. Gerwien bewiesen wurde und der sich auf die Messung der Flächeninhalte von Polygonen bezieht.

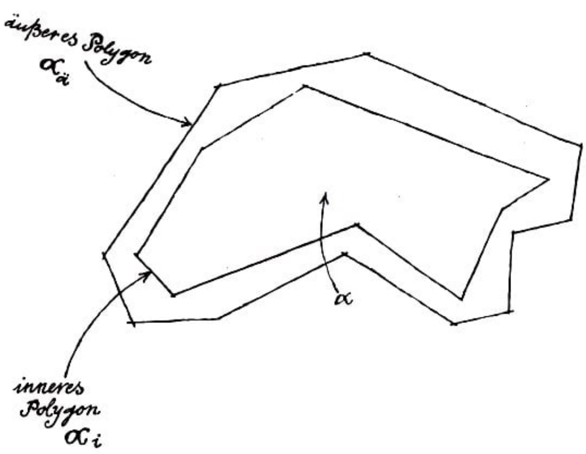


Haben zwei Polygone α und β den gleichen Flächeninhalt, d.h., ist $A(\alpha) = A(\beta)$, so kann man das Polygone α in endlich viele Polygone $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ zerlegen, aus denen sich das andere Polygon β zusammensetzen lässt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in dem hübschen Büchlein von W. G. Boltjanski: "Inhaltsgleiche und zerlegungsgleiche Figuren." So ist beispielsweise in der Abbildung auf Seite 108 das Dreieck ABC so in Teile zerlegt worden, dass aus diesen das Rechteck $BCNM$ zusammengesetzt werden konnte.

Abschließend wenden wir uns kurz der Messung des Flächeninhaltes von Figuren zu, die von krummen Linien begrenzt sind.
Dabei entnehmen wir die Existenz eines Flächeninhalts solcher Figuren zunächst der Anschauung.

Wir wollen eine Figur α näher untersuchen, deren Rand eine krumme Linie ist. Ein Polygon α_i, das ganz im Innern von α enthalten ist, nennen wir ein inneres Polygon, ein Polygon $\alpha_ä$ hingegen, das die Figur α ganz umschließt, nennen wir ein äußeres Polygon der Figur α.



Wir nennen eine Figur α quadrierbar, wenn es zu α ein inneres Polygon α_i und ein äußeres Polygon $\alpha_ä$ gibt derart, dass deren Flächeninhalte sich beliebig wenig voneinander unterscheiden, d.h., dass die Differenz $A(\alpha_ä) - A(\alpha_i)$ beliebig klein ist.

Wenn α ein Polygon ist, dann kann man als α_i und $\alpha_ä$ das Polygon α selbst wählen. Hier ist ja $A(\alpha_ä) - A(\alpha_i) = 0$, also ist jedes Polygon quadrierbar. Man kann beweisen, dass alle in technischen Problemen auftretenden Figuren quadrierbar sind.
In der Schule wird beispielsweise gezeigt, dass der Kreis eine quadrierbare Figur ist. Die dabei benutzten inneren und äußeren Polygone sind regelmäßig. Es sind Sechsecke, Zwölfecke, Vierundzwanzigecke usw. .

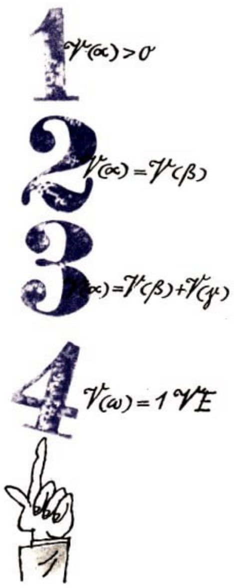
Man sieht leicht, dass eine von einer krummen Linie begrenzte Figur nicht in endlich viele Dreiecke zerlegt werden kann; daher ist auch die Triangulation in der oben angegebenen Weise nicht zur Bestimmung des Flächeninhalts solcher Figuren verwendbar. Statt dessen werden wir hier die oben beschriebene Quadratur benutzen, die auch anwendbar ist, wenn der Rand der Figur keine gerade Linie ist.

Man kann die Frage nach der Definition des Flächeninhaltes, d. h. der zahlenmäßigen Charakteristik $A(\alpha)$ für alle quadrierbaren Figuren stellen.
Wie früher müssen die Maßzahlen von $A(\alpha)$ die Bedingungen 1 bis 4 erfüllen. Es lässt sich beweisen, dass das Problem der Flächenmessung für die ganze Klasse der quadrierbaren Figuren in demselben Sinne eindeutig lösbar ist wie für die Klasse der Polygone.

Unter $\{A(\alpha)\}$ versteht man jetzt eine Zahl mit der Eigenschaft, dass sich Polygone $\alpha_ä$ und α_i so angeben lassen, dass $A(\alpha_ä)$ und $A(\alpha_i)$ sich beliebig wenig von $A(\alpha)$ unterscheiden.

4.7 Messen von Rauminhalten

Das Problem der Volumenmessung ist noch komplizierter als das der Längen- und Flächenmessung. Der unmittelbare Vergleich zweier Körper zur Bestimmung des größeren von beiden ist meist überhaupt nicht durchführbar.



Deshalb muss man hier von vornherein eine geometrische Theorie der Volumenmessung aufbauen. Ähnlich wie bei der Flächenmessung handelt es sich um folgende Aufgabe:

Wir betrachten die Gesamtheit aller geometrischen Körper - Polyeder -, die von endlich vielen Polygonen begrenzt sind. Solche Körper sind beispielsweise das Tetraeder, das Ikosaeder, das Prisma usw. Für alle diese Polyeder, die wir mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, ...$ bezeichnen, soll eine Größe V, das Volumen des Körpers, mit folgenden Eigenschaften angegeben werden: .

1. $V(\alpha) > 0$ für alle Polyeder.
2. Wenn die Polyeder α und β gleich sind, dann ist $V(\alpha) = V(\beta)$.
3. Wenn das Polyedern α aus den Polyedern β und γ besteht, dann gilt

$$V(\alpha) = V(\beta) + V(\gamma)$$

4. Wenn das Polyeder ω ein Würfel ist, dessen Kantenlänge gleich 1 LE ist, dann ist $V(\omega) = 1$ Volumeneinheit (VE).

Hier ergeben sich natürlich ebenso wie bei der Flächenmessung die Fragen I und II, die jetzt sinngemäß in Anwendung auf Körper zu formulieren sind.
Zur Ermittlung des Rauminhaltes von Polyedern muss, wie auch im Falle der Flächenmessung, ein Messverfahren angegeben werden, das es ermöglicht, jedem Polyeder „$alpha$ eine Größe $V(\alpha)$ zuzuordnen, welche den Bedingungen 1 bis 4 genügt.

Die hier vorliegende Situation ähnelt in vieler Hinsicht der bei der Flächenmessung. Man kann auch hier ein Verfahren analog der Triangulation anwenden, d. h. eine Zerlegung jedes Polyeders, aber jetzt nicht in Dreiecke, sondern selbstverständlich in Dreieckspyramiden.
Das Volumen eines Polyeders ist wegen der Eigenschaften 1 bis 4 dabei naturgemäß gleich der Summe der Rauminhalte der Dreieckspyramiden, die man bei der Zerlegung erhält. Auch hier muss wieder bewiesen werden, dass die bei diesem Verfahren gewonnenen Volumenwerte die Bedingungen 1 bis 4 erfüllen und dass das Volumen nicht von der Art der Zerlegung abhängt.

Die Hauptschwierigkeit beim Aufbau einer geometrischen Theorie der Volumenmessung besteht im Beweis der Tatsache, dass das Volumen einer Dreieckspyramide gleich einem Drittel des Produktes von Grundfläche und Höhe ist, d. h. in der Herleitung der Formel für das Volumen einer Dreieckspyramide.
Zur Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks hatten wir ein beliebiges Dreieck in Stücke zerlegt, aus denen man ein Rechteck bilden konnte. Im Falle der Dreieckspyramide wird man natürlich versuchen, diese in endlich viele Stücke zu zerlegen, aus denen man ein rechtwinkliges Parallelepiped zusammensetzen kann.

Wie sich zeigt, geht das nicht; und zwar aus dem Grunde, dass für Polyeder ein dem Satz von W. Bolyai und P. Gerwien für Polygone ähnlicher Satz nicht gilt.

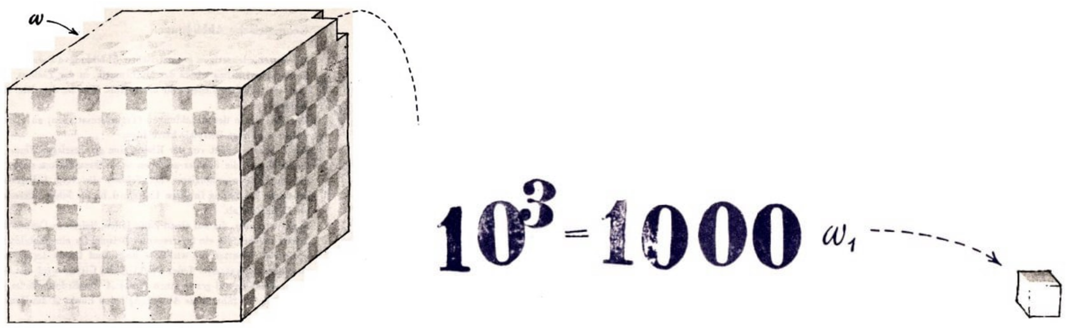
Leider kann man eine Dreieckspyramide nicht so in endlich viele Polyeder zerlegen, dass man aus diesen Teilen einen Würfel oder ein Prisma zusammensetzen könnte. Den Beweis für diese Behauptung findet der Leser in dem weiter oben erwähnten Büchlein von W. G. Boltjanski.

Das erklärt auch, warum sich die Formel $A(\Delta) = \frac{1}{2}ah_a$ für den Flächeninhalt des Dreiecks so einfach herleiten lässt - mit Hilfe einer Verwandlung des Dreiecks in ein Parallelogramm bzw. in ein Rechteck, während die Formel für das Volumen der Pyramide vielfach mit Hilfe der Konstruktion einer sogenannten "Teufelstreppe" und eines Grenzübergangs hergeleitet wird (oder mit Hilfe des Prinzips des Cavalieri, bei dem aber ebenfalls - stillschweigend -ein Grenzübergang verwendet wird).
Daneben kann man hier jedoch, ähnlich wie bei der Quadratur ebener Figuren, ein Verfahren zur Kubatur von Polyedern konstruieren.

Dazu wollen wir zunächst einen Würfel ω der Kantenlänge 1 LE betrachten. Wir teilen jede seiner Kanten in 10 gleiche Teile und durch diese Teilungspunkte legen wir Ebenen, die zu seinen Seitenflächen parallel sind.
Dann wird der Würfel ω in $10^3 = 1000$ gleich große Teilwürfel ω_1 zerlegt. Dasselbe wiederholen wir mit einem Würfel ω_1; dieser wird in 10^3 Teilwürfel ω_2 zerlegt, usw.

Da $V(\omega) = 1$ VE ist, erhält man unter Benutzung der Eigenschaften 1 bis 3

$$V(\omega_1) = \frac{1}{10^3} \text{ VE}; V(\omega_2) = \frac{1}{100^3} \text{ VE}; ...$$



Ferner wollen wir uns vorstellen, in dem Raum, der das Polyeder α enthält, sei ein räumliches Gitter angebracht.
Wir zählen ab, wieviel Würfel ω ganz in dem Polyeder α enthalten sind. Es seien k Stück. Weiter seien im restlichen Teil, des Polyeders α wieder k_1 Würfel α_1 enthalten, k_2 Würfel ω_2 usw. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften 1 bis 4 sieht man natürlich als Maßzahl für das Volumen des Polyeders α die Zahl

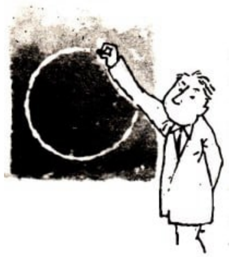
$$\{V(\alpha)\} = k + \frac{k_1}{10^3} + \frac{k_2}{100^3} + ...$$

an.
Es lässt sich beweisen, dass die bei diesem Verfahren bei der Kubatur erhaltenen Werte übereinstimmen und dass die dabei gefundenen Zahlen den Bedingungen 1 bis 4 genügen.
Diese Überlegungen und Ergebnisse entsprechen völlig den früher bei der Längen- und Flächenmessung angegebenen.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass analog zum Problem der Flächenmessung krummliniger Figuren auch die Aufgabe formuliert werden kann, das Volumen von Körpern zu messen, die von krummen Flächen begrenzt sind. Hierbei sind Überlegungen notwendig, die den am Schluss des Abschnittes über Flächenmessung angestellten Überlegungen analog sind.

4.8 Geometrische Abbildungen

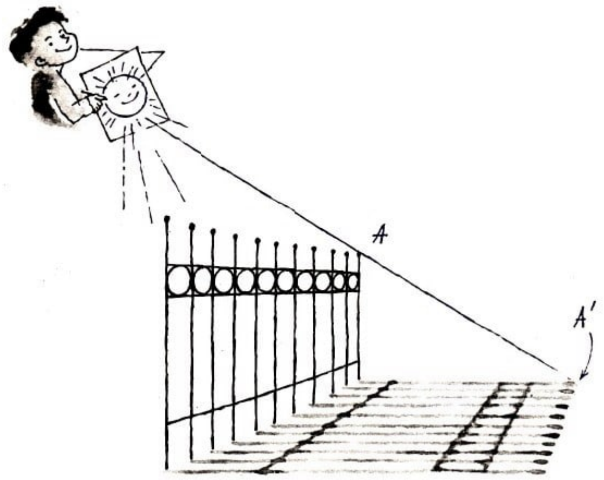
I. M. Jaglom



Mit verschiedenartigen geometrischen Abbildungen (oder Transformationen) haben wir in der Mathematik, in der Technik und auch im täglichen Leben sehr oft zu tun. Was ist das, eine Abbildung?

Um das Wesen der Abbildungen (Transformationen) zu klären, wollen wir einige Beispiele betrachten.

Der Lehrer zeichnet vor der Klasse eine geometrische Figur an die Tafel, und die Schüler zeichnen sie in ihren Heften nach. In diesem Falle reproduzieren die Schüler die vom Lehrer angefertigte Zeichnung in ihren Heften, d. h., sie bilden diese auf die Heftseiten ab.



Sonnenstrahlen, die auf einen Zaun fallen, liefern in Gestalt des Schattens ebenfalls ein interessantes Beispiel für eine Abbildung, wobei der Schatten die wirkliche Form und Größe des Zaunes oft eigenartig verzerrt.

Jeder Punkt A des Gitters wird von den Sonnenstrahlen auf genau einen Punkt A' der Erdoberfläche geworfen. Somit führt diese Abbildung jeden Punkt A des Zaunes (den man als in einer vertikalen Ebene gelegen ansehen kann) in einen bestimmten Punkt A' der Erdoberfläche (die man annähernd als horizontale Ebene ansehen kann) über.

Jede Vorschrift, durch welche jedem Punkt A einer bestimmten Figur (das kann auch die ganze Ebene sein) oder eines Körpers ein Punkt A' einer anderen oder auch derselben Figur (desselben Körpers) zugeordnet wird, vermittelt eine Abbildung oder Transformation.

Eine geometrische Abbildung führt also eine Figur Φ in eine Figur Φ' über. Dabei kann sich die Figur Φ' mehr oder weniger von der Ausgangsfigur Φ unterscheiden.

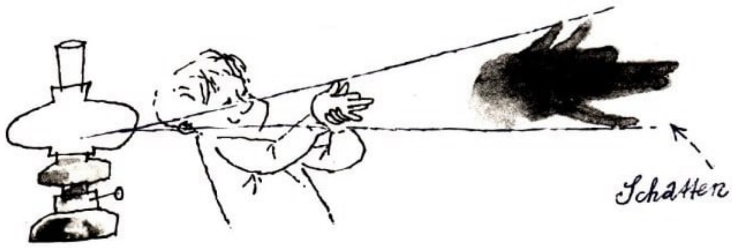
Eine Zeichnung, die ein Schüler aus dem Heft eines Kameraden abzeichnet, kann der ursprünglichen Zeichnung völlig gleichen; der einzige Unterschied zwischen diesen beiden Zeichnungen ist der, dass sie sich auf verschiedenen Blättern befinden.

Bedeutend größere Unterschiede bestehen zwischen der Zeichnung des Lehrers an der

Tafel und deren Kopien in den Heften der Schüler. Allerdings bleibt auch hier eine hinreichende Ähnlichkeit zwischen den Zeichnungen erhalten. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Abmessungen voneinander.

Diese Ähnlichkeit ist so groß, dass der Lehrer von den Schülern oft verlangt, dass sie seine Zeichnung in ihren Heften genau abzeichnen sollen, mit anderen Worten, er hält den Unterschied in der Größe der Zeichnungen für unwesentlich und sieht die dem Maßstab nach verschiedenen Zeichnungen an der Tafel und im Heft durchaus als gleich an. Bedeutend größer sind die Unterschiede zwischen dem Zaun und seinem Schatten.

Doch auch hier lässt sich bei beiden Figuren viel Gemeinsames finden.



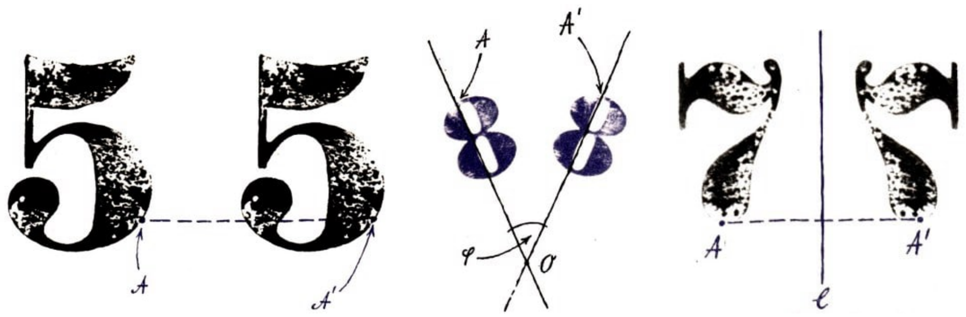
Der Schatten eines von einer Lampe beleuchteten Gegenstandes unterscheidet sich von dem Gegenstand stärker als sein Schatten im Sonnenlicht. Laufen doch die Strahlen einer Lampe in einem Punkt zusammen, d. h., sie bilden ein divergentes Strahlenbündel, während man die Sonnenstrahlen als parallel ansehen kann, weil die Sonne so sehr weit von dem beleuchteten Gegenstand entfernt ist.
Eine Lampe kann beispielsweise den kreisrunden Rand eines Autoscheinwerfers in eine dem Kreis völlig unähnliche Figur abbilden.

4.9 Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen

Abbildungen, welche Form und Größe einer Figur erhalten und nur ihre Lage verändern, heißen Bewegungen. Vielfältige Anwendung finden in der Geometrie die sogenannten Parallelverschiebungen (auch Translationen genannt).
Das sind Bewegungen, bei denen die Verbindungsstrecken von je zwei einander entsprechenden Punkten A und A' gleiche Länge und gleiche Richtung haben.
Auch die Drehung um einen Punkt O um einen Winkel φ ist eine Bewegung. Bei einer solchen Drehung um O geht Punkt A in einen Punkt A' über, der von$O$ genauso weit entfernt ist wie A, und es ist $\angle A'OA = \varphi$.

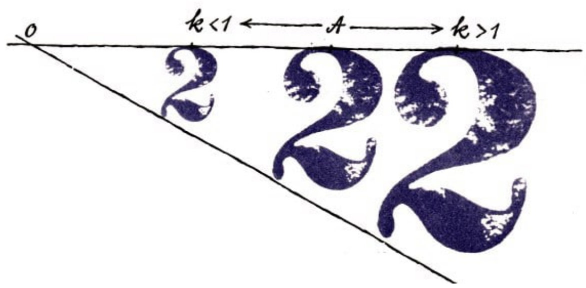
Eine Drehung um $180°$ um den Punkt O nennt man eine Symmetrieabbildung bezüglich des Punktes O. Dabei geht jeder Punkt A in einen Punkt A' über, der so beschaffen ist, dass O der Mittelpunkt der Strecke AA' ist.

Ein anderes Beispiel für eine Bewegung ist die Symmetrie in Bezug auf eine Gerade l. Hierbei geht jeder Punkt A in einen Punkt A' über, der so beschaffen ist, dass die Strecke AA' senkrecht auf der Geraden l steht und von dieser Geraden halbiert wird.

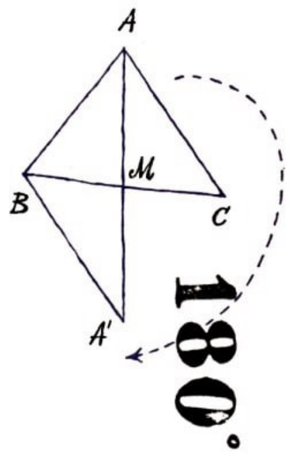


Jeder von uns kann leicht symmetrische Figuren herstellen, wenn er auf ein Blatt Papier einen Klecks macht und dann das Blatt faltet.

Abbildungen, die nur die Größe der Figuren ändern, aber die Form unverändert lassen, heißen Ähnlichkeitstransformationen. Das bekannteste Beispiel einer solchen Abbildung ist die Dehnung oder Homothetie mit dem Zentrum O, bei welcher der Punkt A längs des Strahles OA so verschoben wird, dass man seinen Abstand von O mit einer konstanten Zahl k multipliziert. Für $k < 1$ wird dabei die Figur kleiner, so dass es in diesem Falle besser ist, von einer Stauchung (Kontraktion) zu sprechen.



Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen werden in der Geometrie eben deshalb benutzt, weil sie die Form der geometrischen Figuren nicht verändern. Es sei beispielsweise ein Dreieck zu konstruieren (selbstverständlich mit Zirkel und Lineal), von dem wir die zwei Seiten AB und AC und die zwischen diesen Seiten liegende Seitenhalbierende AM kennen. Hier sind uns drei Strecken gegeben. Allerdings liegen sie in der Zeichnung äußerst ungünstig - alle drei Strecken gehen von einem Punkt aus und bilden kein Dreieck.

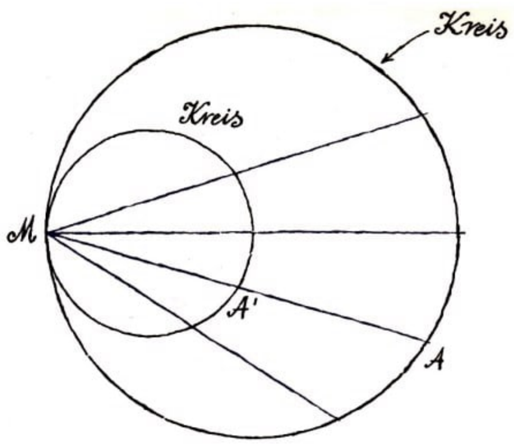


Deshalb ist ein Lösungsweg für diese Aufgabe nicht sofort zu erkennen.
Dabei kann uns aber der Gedanke weiterhelfen, das hier dargestellte Dreieck AMC um $180°$ um den Punkt M zu drehen.

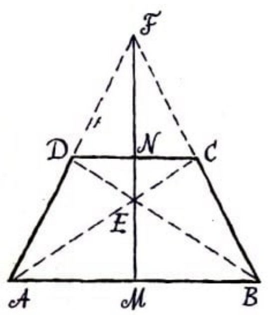
Dabei geht der Punkt C in den Punkt B über (denn M ist der Mittelpunkt der Strecke BC) und der Punkt A in einen Punkt A', auf der Geraden AM, der so beschaffen ist, dass M der Mittelpunkt der Strecke AA' wird (also $\overline{AA'} = 2\overline{AM}$), so dass das Dreieck AMC die neue Lage $A'MB$ erhält. Als Ergebnis dieser Transformation erhalten wir ein Dreieck ABA' mit den bekannten Seiten AB, $AA' = 2AM$ und $A'B = AC$ (wie jede Drehung verändert auch eine Drehung um $180°$ die Länge einer Strecke nicht).

Wenn wir erst dieses Dreieck konstruiert haben, können wir das Dreieck ABC mühelos konstruieren.

Wir bringen noch eine weitere Aufgabe: Man konstruiere die Bestimmungslinie der Mittelpunkte der Sehnen eines Kreises, die durch einen bestimmten Punkt M auf dem Kreis gehen.



Zur Lösung dieser Aufgabe genügt es zu bemerken, dass die Transformation, die dem Endpunkt A der Sehne MA deren Mittelpunkt A' zuordnet, eine Ähnlichkeitstransformation oder Homothetie mit dem Zentrum M ist.
Da aber bei einer Homothetie die Form einer Figur nicht verändert wird, ist die gesuchte Bestimmungslinie ebenfalls ein Kreis.



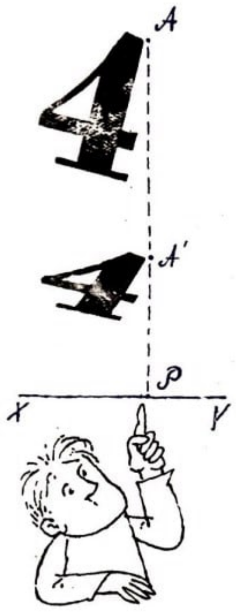
Sehr oft kann man zum Beweis geometrischer Sätze die Symmetrie bezüglich einer Geraden benutzen. So kann man beispielsweise nachprüfen, dass die Gerade, die die Mittelpunkte M und N der Grundlinien eines gleichschenkligen Trapezes verbindet, auch durch den Schnittpunkt E der Diagonalen und durch den Schnittpunkt F der beiden anderen Seiten (der Schenkel) geht. Die Gerade MN ist nämlich Symmetrieachse der Abbildung, d.h., bei einer Symmetrie in Bezug auf die Gerade MN geht diese Zeichnung in sich über.

Daher schneiden die Diagonalen AC und BD einander notwendigerweise in einem Punkte E auf der Achse MN; denn wenn das nicht so wäre, dann würde die Symmetrie bezüglich MN den Punkt E in einen anderen Punkt E' überführen, welcher ebenfalls auf den beiden Diagonalen liegen müsste.
Die Diagonalen schneiden einander aber nur in einem Punkt. Genauso kann man zeigen, dass der Schnittpunkt F der Schenkel auf der Symmetrieachse MN liegt.

4.10 Einige komplizierten Abbildungen

Kann man nun in der Geometrie auch Abbildungen benutzen, die außer der Größe auch die Form einer geometrischen Figur verändern?
Wenn uns von einer Abbildung nur bekannt ist, dass sie die Form der Figuren ändert, dann ist sie natürlich in der Geometrie nicht zu verwenden. Eine bestimmte Abbildung

kann man in geometrischen Aufgaben nur dann benutzen, wenn man weiß, was bei ihr unverändert oder invariant bleibt; mit anderen Worten, man muss wissen, welche Eigenschaften der transformierten Figur Φ' mit den Eigenschaften der Ausgangsfigur Φ übereinstimmen.



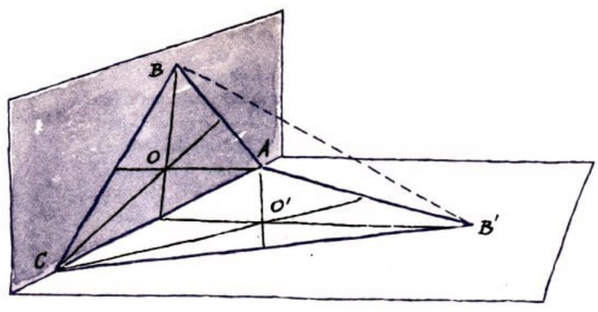
Um das zu illustrieren, sehen wir uns die sogenannten linearen Transformationen einmal etwas näher an, bei welchen gerade Linien wieder in gerade Linien übergehen. Zu den linearen Transformationen gehört auch die Parallelprojektion, bei der jeder Punkt A einer Ebene π (z. B. der Ebene des Zaunes) in einen Punkt A' einer anderen Ebene π' (z. B. des Erdbodens) übergeht, so dass die Gerade AA' (hier ein Sonnenstrahl) einer vorgegebenen Richtung parallel ist.

Zu den linearen Transformationen gehört auch die sogenannte Kontraktion (Stauchung) in Bezug auf eine Gerade XY. Jeder Punkt A geht in einen Punkt A' über, der auf dem von A auf die Gerade XY gefällten Lot AP liegt, wobei der Abstand $A'P$ des Punktes A' von XY um einen konstanten Faktor k kleiner (bzw. größer) ist als der Abstand AP.
Ist $A'P$ größer als AP, dann spricht man besser von einer "Dehnung von der Geraden XY aus". Die linearen Transformationen bilden parallele Geraden in parallele Geraden ab und lassen das Verhältnis von Strecken auf einer Geraden invariant (jedoch nicht das auf verschiedenen Geraden !).

Man überzeugt sich nämlich leicht davon, dass Parallelprojektion auf eine Gerade und Kontraktion in Bezug auf eine solche tatsächlich diese Eigenschaften haben.
Wir benutzen jetzt die linearen Transformationen, um den Satz zu beweisen:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. In der Schule beweist man diesen Satz unter Benutzung gewisser Hilfslinien (aber wie kommt man darauf, dass gerade diese Linien gezogen werden müssen?) durch Untersuchung der dabei entstehenden ziemlich komplizierten Figur.

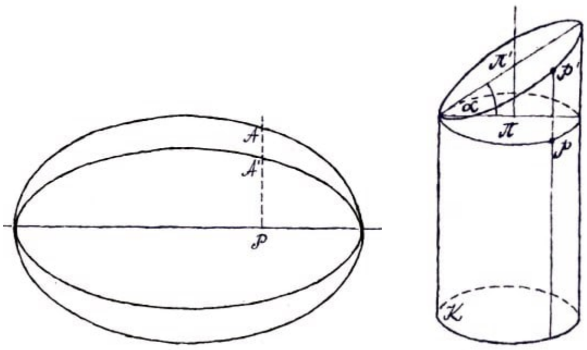
In dieser Beziehung sind die Sätze über den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bzw. der Mittelsenkrechten im Dreieck bedeutend einfacher, da zu ihrem Beweis keine neuen Linien erforderlich sind.



Mit Hilfe einer Parallelprojektion können wir jedes Dreieck ABC in ein gleichseitiges

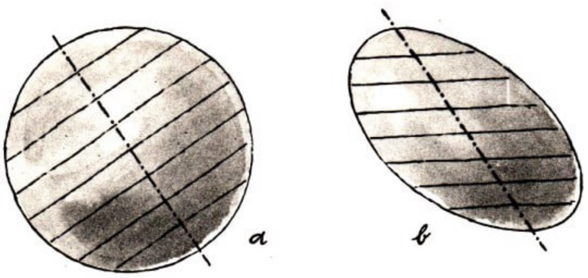
Dreieck $AB'C$ transformieren; dabei gehen die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC in die Seitenhalbierenden des Dreiecks $AB'C$ über (denn eine lineare Transformation bildet den Mittelpunkt jeder Strecke in den Mittelpunkt der transformierten Strecke ab).
Da sich nun die Seitenhalbierenden des Dreiecks $AB'C$ in einem Punkte O'' schneiden (denn sie sind auch Winkelhalbierende bzw. Mittelsenkrechte), schneiden sich also auch die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC in einem Punkt O (und zwar ist das der Punkt, welcher in den Punkt O' projiziert wird). Ähnlich (wie?) kann man beweisen, dass die Seitenhalbierenden einander im Schnittpunkt im Verhältnis 2:1 teilen.

Wir wollen ein anderes Beispiel für die Anwendung der linearen Transformationen betrachten: die Herleitung von Eigenschaften der Ellipse.



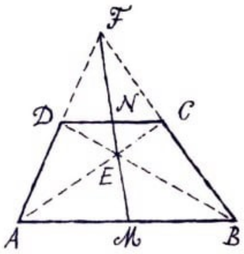
Bekanntlich sind Ellipsen diejenigen Kurven, in die ein Kreis bei einer Kontraktion in Bezug auf seinen Durchmesser übergeht. Die Ellipse kann auch als die Kurve definiert werden, die beim Schnitt einer beliebigen Ebene mit einem Kreiszylinder entsteht; diese Definition besagt, dass die Ellipse durch eine Parallelprojektion aus einem Kreis hervorgeht. (Der Kreis aus der Ebene π wird in die Ebene π' abgebildet.)

Wir werden nun beweisen, dass die Bestimmungslinie der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse eine geradlinige Strecke ist. Die Bestimmungslinie der Mittelpunkte paralleler Sehnen im Kreis ist die zu diesen Sehnen senkrechte Gerade. Daher ist auch für die Ellipse die entsprechende Bestimmungslinie eine Gerade.
In der Tat gehen bei einer Kontraktion oder einer Parallelprojektion parallele Kreissehnen in parallele Sehnen der Ellipse über, und der Kreisdurchmesser, der alle diese Sehnen halbiert, geht in die Gerade über, die alle diese Sehnen in der Ellipse halbiert.



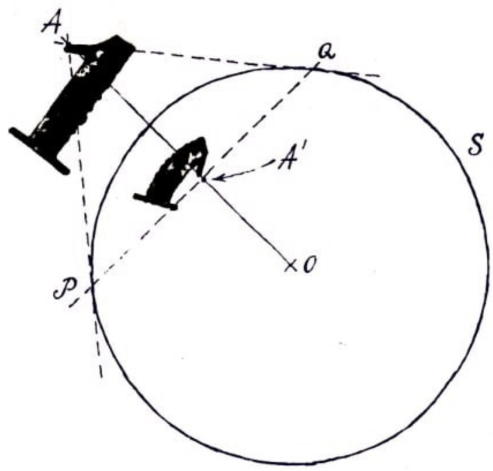
Die linearen Transformationen werden häufig deshalb benutzt, weil sie es ermöglichen, in komplizierteren Fällen einfache Überlegungen anzuwenden, die mit der Symmetrie

der Figuren zusammenhängen. So führten wir beim letzten Beweis den Satz über die Ellipse auf einen Satz über den Kreis zurück.
Wir benutzten nämlich die Tatsache, dass jeder Durchmesser im-Kreis Symmetrieachse ist. Den Satz über den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck leiteten wir aus demselben Satz für das gleichseitige Dreieck her, wo die Verhältnisse wesentlich einfacher liegen; das gleichseitige Dreieck besitzt eine hohe Symmetrie (es hat drei Symmetrieachsen).



Analog dazu kann man beispielsweise zeigen, dass eine Gerade, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen und durch den Schnittpunkt der Schenkel eines beliebigen Trapezes geht, die Grundlinien des Trapezes halbiert.
Zum Beweis genügt es, etwa das Dreieck ABF in ein gleichschenkliges Dreieck zu projizieren und damit diese Abbildung in die symmetrische Abbildung überzuführen. In dieser Weise werden auch andere Transformationsarten in der Geometrie benutzt.

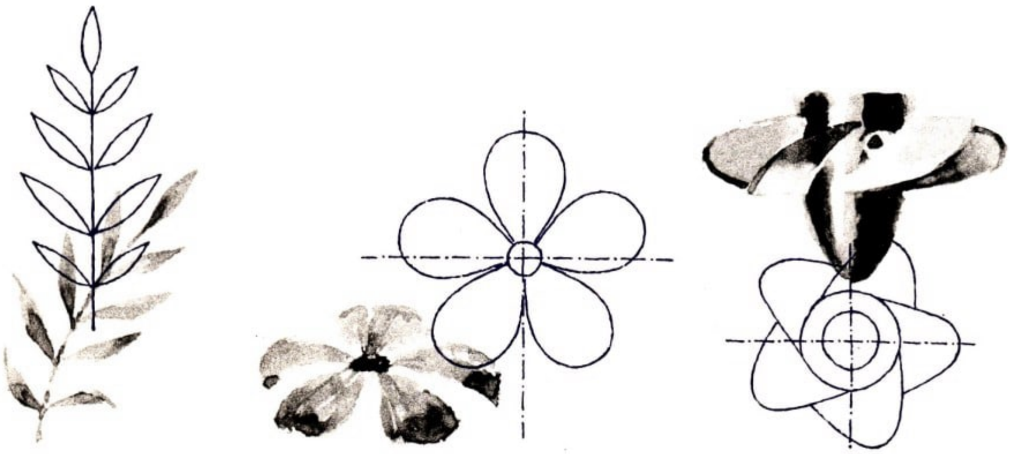
Neben den linearen Transformationen kennt die heutige Geometrie noch zahlreiche andere Transformationen. Sehr eingehend sind auch die sogenannten Kreistransformationen untersucht worden, welche Kreise in Kreise abbilden.



Ein Beispiel für eine Kreistransformation ist die Inversion oder Symmetrie in Bezug auf einen Kreis S mit dem Zentrum O (auch Transformation durch reziproke Radien genannt). Dabei geht jeder Punkt A, der bezüglich des Kreises S äußerer Punkt ist, in den Schnittpunkt A' der Geraden OA mit der Sehne PQ über, welche die Berührungspunkte der von A aus an den Kreis S gelegten Tangenten verbindet.
Man kann beweisen, dass bei einer Inversion Kreise wieder in Kreise abgebildet werden (bzw. in Geraden, die als "Kreise mit unendlich großem Radius" angesehen werden).

Die Geometrie kennt Transformationen mit noch viel überraschenderen Eigenschaften. Ein Beispiel einer geometrischen Abbildung, die man sowohl in der Natur als auch in der Technik sehr häufig antrifft, ist die Symmetrie. Unsere Zeichnungen zeigen einen Zweig, eine Blüte und eine Schiffsschraube sowie die Figuren, die man bei einer orthogonalen Projektion (das ist ein weiteres Beispiel einer Abbildung) dieser Gegenstände auf eine Ebene erhält, d.h. so, wie man diese Körper von oben sieht.

Man erkennt leicht, dass alle diese Körper und Figuren symmetrisch sind.



4.11 Das Erlanger Programm

Der deutsche Mathematiker Felix Klein schlug in seinem Erlanger Programm 1872 vor, die geometrischen Transformationen (Abbildungen) der Klassifikation aller Eigenschaften geometrischer Figuren zugrunde zu legen und somit die geometrischen Eigenschaften nach denjenigen Transformationen zu unterscheiden, die diese Eigenschaften invariant lassen.

Zu ein und derselben Klasse gehören also diejenigen Eigenschaften, welche nur gegenüber Bewegungen invariant sind, beispielsweise alle Eigenschaften, die sich auf die Abstände zwischen Punkten beziehen. In einer anderen Klasse werden diejenigen Eigenschaften zusammengefasst, die bei Ähnlichkeitstransformationen (Ähnlichkeitsabbildungen) unverändert bleiben (z. B. alle diejenigen Eigenschaften, die mit der Größe von Winkeln zusammenhängen).

Eine weitere Klasse bilden diejenigen Eigenschaften, die bei linearen Transformationen invariant bleiben. Da aber die linearen Transformationen die Figuren stärker verändern als die Bewegungen, sind diejenigen Eigenschaften, die gegenüber linearen Transformationen invariant bleiben, als umfassender anzusehen. Von diesem Gesichtspunkt aus ist also die Eigenschaft eines Dreiecks, die durch den Satz "Die Seitenhalbierenden im Dreieck schneiden einander in einem Punkt" ausgedrückt wird, von allgemeinerer Bedeutung als die analoge Eigenschaft der Höhen im Dreieck.

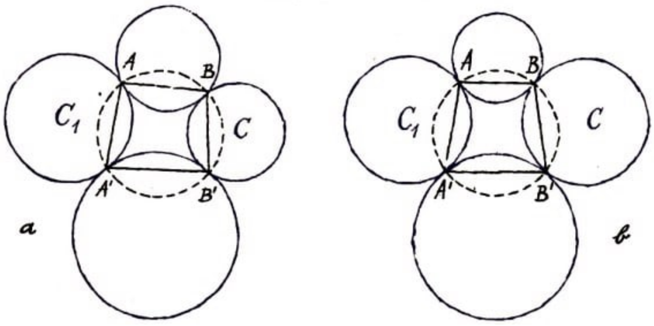
Diese Klassifikation der geometrischen Eigenschaften erklärt auch die anscheinend so merkwürdige Tatsache, dass eine durch eine Abbildung (etwa durch eine Parallelprojektion) deformierte Figur zum Beweis von Sätzen benutzt werden kann, die sich auf die ursprüngliche Figur beziehen.
Tatsächlich haben geometrische Figuren sehr viele Eigenschaften, die bei einer Parallelprojektion völlig unverändert bleiben; beim Beweis dieser Eigenschaften können wir die Parallelprojektion benutzen. So haben wir bereits darauf hingewiesen, dass man beim Beweis des Satzes über den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ohne Beschränkung der Allgemeinheit das untersuchte Dreieck als gleichseitiges Dreieck

ansehen kann (denn jedes Dreieck kann in ein gleichseitiges Dreieck projiziert werden); das erleichtert den Beweis des Satzes wesentlich.

Dagegen dürfen wir beim Beweis des Satzes "Die Höhen im Dreieck schneiden einander in einem Punkt" das Dreieck nicht als gleichseitig voraussetzen; denn wenn wir ein Dreieck ABC auf ein neues Dreieck $AB'C$ projizieren, dann gehen die Höhen von ABC nicht notwendig in die Höhen von $AB'C$ über.

Als weiteres Beispiel kann der folgende Satz angesehen werden:

Wenn zwei einander nicht schneidende Kreise C und C_1 einen Kreis (von außen) in den Punkten A und B berühren, einen anderen Kreis hingegen in den Punkten A' und B', dann liegen die Punkte A, B, A', B' auf einem Kreis (Abb. a).
Die Eigenschaft des Kreises, die den Inhalt dieses Satzes ausmacht, bleibt bei Inversionen invariant.



Durch eine Inversion kann man aber zwei beliebige Kreise in zwei gleich große Kreise überführen. Daher können wir die Kreise C und C_1 als gleich voraussetzen, wodurch unser Satz beinahe selbstverständlich wird (denn das Viereck $A'B'BA$ in Abb. b ist ein gleichschenkliges Trapez).

4.12 Von den verschiedenen Geometrien

Womit beginnt eine Darstellung der Geometrie?
N. I. Polski

Schlagen wir ein Lehrbuch der Geometrie auf und sehen wir uns die Definition irgendeines geometrischen Begriffes an, beispielsweise die des Trapezes! Wenn wir sie ganz verstehen wollen, so müssen wir, wie wir alsbald bemerken, dazu vorher die Definition für die Parallelität von Geraden und die Definition eines Viereckes kennen, und dazu brauchen wir wieder die Definition einer Strecke. Und zu dieser Definition muss man wissen: Was ist eine Gerade, und was ist ein Punkt?

Jede andere Definition führt uns letzten Endes zu genau denselben Grundbegriffen: zur Geraden und zum Punkt bzw. zur Geraden, zum Punkt und zur Ebene. Das bedeutet, dass Punkt, Gerade und Ebene geometrische Grundbegriffe sind und wir mit Recht erwarten dürfen, ihre Definitionen auf den ersten Seiten des Lehrbuches zu finden.

Aber siehe da, wir haben umsonst nachgesehen! Es zeigt sich, dass auf den ersten Seiten unseres Lehrbuches keine mathematisch exakten Definitionen der Begriffe Punkt, Gerade und Ebene zu finden sind, während alle Definitionen, die auf diesen geometrischen Grundbegriffen beruhen, mit voller mathematischer Strenge formuliert sind. Dieser Umstand erscheint auf den ersten Blick doch sehr merkwürdig.

Freilich werden am Anfang des Lehrbuches einige Ausführungen darüber gemacht, was wir unter einem Punkt, einer Geraden und einer Ebene zu verstehen haben. Diese Erläuterungen können jedoch keineswegs als exakte mathematische Definition dienen.
Außerdem werden sie nachher nirgends bei den Beweisen der Sätze benutzt. Wichtig ist nur der Hinweis darauf, dass im weiteren eben diese Punkte, Geraden und Ebenen untersucht werden sollen.

Was ist das nun, ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene?
Zu allererst sei bemerkt, dass in der Natur keine geometrischen Punkte, Geraden oder Ebenen vorkommen.
Wir wollen uns ein Kügelchen von sehr kleinem Durchmesser, sagen wir etwa 1 mm, vorstellen. Wir verkleinern seinen Durchmesser auf die Hälfte, auf ein Drittel, auf den tausendsten Teil usw. Gibt es nun einen Augenblick, da man die bereits ganz winzige Kugel einen Punkt nennen könnte? Nein!

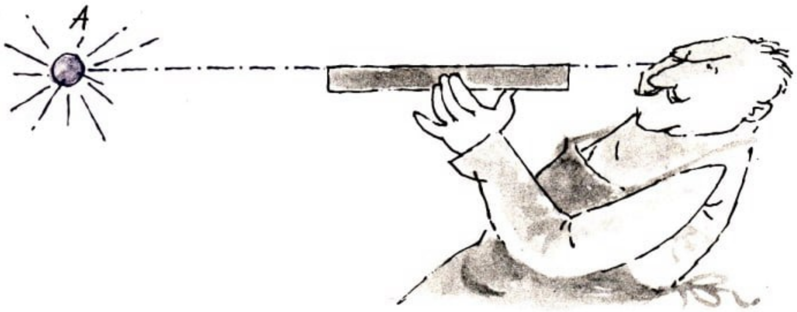
Der Lehrer malt einen ganz "dicken" Punkt an die Tafel, und auch die Schüler zeichnen riesige Punkte in ihre Hefte. In Wirklichkeit werden in allen diesen Fällen kleine Kreise dargestellt.
Sind das etwa Punkte? Die Sterne am Himmel kommen uns ebenfalls wie "Punkte" vor, obwohl einige von ihnen um viele Male größer sind als unsere Sonne.

Und wenn man sich eine Kugel vorstellt, die so klein ist, dass man sie auch mit dem modernsten Mikroskop nicht erkennen kann, ist das dann ein Punkt? Wieder sagen wir: Nein.
Es kann kein Punkt sein, denn Punkte sind keine konkreten Dinge.

Der Punkt ist ein Begriff, ein abstrakter Begriff, den das menschliche Erkenntnisvermögen im Ergebnis von sehr vielen und sich über große Zeiträume erstreckenden Beobachtungen von winzigen (bzw. unter bestimmten Bedingungen winzig klein erscheinenden) realen Objekten wie Kügelchen, kleinsten Kreisen usw. ableitete.
Dieser abstrakte Begriff des Punktes wird von uns mit einer ganzen Reihe der Eigenschaften ausgestattet, die allen denjenigen konkreten Dingen gemein sind, von welchen der Begriff des Punktes abstrahiert wurde.

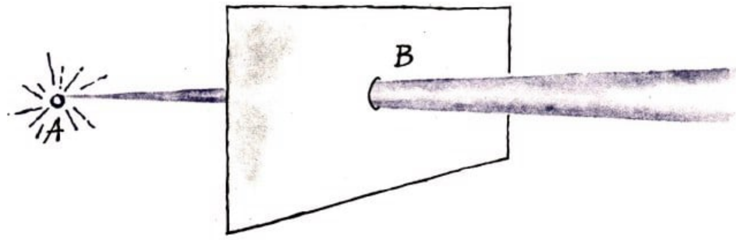
Wir wenden uns jetzt dem Begriff der Geraden zu. Auf einem Blatt Papier ist eine Linie gezeichnet. Ist das eine Gerade? Wie überzeugt man sich davon? Nun, man legt ein Lineal an und vergleicht die Linie mit der Kante des Lineals. Dabei erhebt sich aber die

Frage: Ist denn unser Lineal geradlinig?



Jeder von uns hat sicherlich schon einmal einen Tischler beobachtet und gesehen, wie dieser prüft, ob die Kante eines gehobelten Brettes geradlinig ist. Der Tischler betrachtet das Brett dabei so, wie es hier dargestellt ist. Wenn das Lineal nicht geradlinig ist, dann erkennt man das dabei sehr genau.
Um also festzustellen, ob ein Lineal geradlinig ist, vergleicht man seine Kante mit einem Lichtstrahl! Genauso verhält es sich mit einem straff gespannten Faden, den man praktisch als Gerade ansieht.
Um sich zu vergewissern, ob der Faden gut gespannt ist und nicht durchhängt, sieht man an dem Faden entlang, d.h., man vergleicht ihn (genau wie das Lineal) mit einem Lichtstrahl.

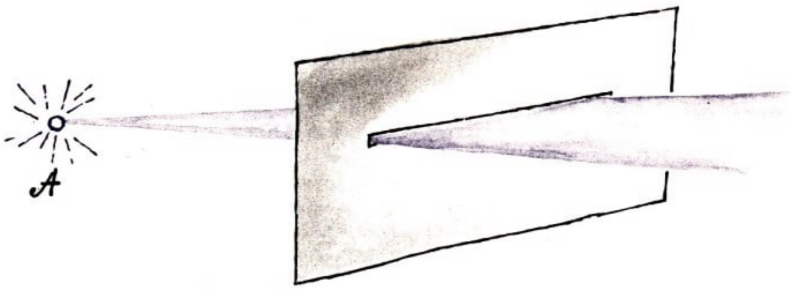
Somit entnehmen wir den Begriff der geraden Linie der Natur, indem wir von Lichtstrahlen ausgehen. Das ist aber gar nicht so ganz einfach; denn nirgends kommt in der Natur etwas vor, was wir als "einen Lichtstrahl" bezeichnen könnten.



Wir wollen das Licht einer kleinen Lichtquelle durch eine winzige Öffnung treten lassen. Es entsteht ein feines Lichtbündel. Wenn wir uns nun vorstellen, dass sowohl die Öffnung als auch die Lichtquelle ständig kleiner werden, so wird das aus der Öffnung tretende Strahlenbündel immer feiner und feiner werden. Natürlich wird dieses Bündel niemals zu einem Strahl, selbst wenn es möglich wäre, es beliebig fein zu machen. (Bei diesem Gedankenexperiment vernachlässigen wir absichtlich die dabei auftretenden physikalischen Erscheinungen wie Beugung, Brechung u. ä.)

Nur wenn die Lichtquelle A und die Öffnung B Punkte wären, würde das Bündel zu einem Strahl. Nun haben wir bereits davon gesprochen, dass es in der realen Welt keine Punkte gibt; daher gibt es auch keine Strahlen. Also ist auch der Lichtstrahl (d. h. die Gerade) ein abstrakter Begriff, obwohl er eng mit realen Erscheinungen zusammenhängt und physikalischen Ursprungs ist.

Wenn wir auf ein Blatt Papier eine Gerade zeichnen, dann schaffen wir wieder nur ein reales Bild, eine Zeichnung, wobei wir zwar anstreben, sie in der einen oder anderen Beziehung (soweit wie nötig) den physikalischen Objekten ähnlich zu gestalten, aus welchen sich der abstrakte Begriff der Geraden herauskristallisiert hat.



Auch hier wird, wie im Fall des Punktes, der abstrakte Begriff der Geraden mit allen Eigenschaften versehen, die all den konkreten Dingen gemeinsam sind, aus deren Untersuchung der Begriff der Geraden selbst entstand.
Genauso verhält es sich mit der Ebene. Wir wollen uns vorstellen, das Licht einer Lichtquelle A falle durch einen geraden Spalt hindurch. Dass der Spalt gerade ist, können wir mit Hilfe unseres "Eichmaßes", des Lichtstrahles, nachprüfen, so wie wir das vorhin geschildert haben.

Es entsteht das in der Abbildung dargestellte Strahlenbüschel. Gelänge es, die Abmessungen der Lichtquelle bis auf einen "idealen" Punkt zu verkleinern und den Spalt bis zu einer "idealen" Geraden zu verengen, dann würde aus dem Strahlenbüschel eine "ideale" Ebene.
Hier lassen sich alle Überlegungen anwenden, die wir bei der Untersuchung des Begriffes der Geraden angestellt haben; daher wollen wir auf diesen Fall nicht weiter eingehen.
Wir sehen also, dass die geometrischen Grundbegriffe - Punkt, Gerade, Ebene - aus der Untersuchung von ganz realen Dingen wie Lichtstrahlen, gespannten Fäden, Linealen usw. entstanden sind.
Wie soll man nun die Eigenschaften dieser geometrischen Begriffe untersuchen? Bedeutet das, dass man bei jeder Überlegung auf die Eigenschaften von Lichtstrahlen und gespannten Fäden zurückgreifen und jeden geometrischen Satz durch eine Konstruktion nachprüfen müsste?
Das würde uns aber nicht gelingen!

Haben wir doch bei der Ableitung der geometrischen Begriffe von vielen realen Eigenschaften der Dinge abstrahiert. Wir haben weder die Beugung noch die Brechung des Lichtes, weder das Durchhängen des gespannten Fadens noch seine unterschiedliche Dicke usw. berücksichtigt.
Obwohl also die Eigenschaften der geometrischen Objekte die Eigenschaften von realen Dingen widerspiegeln, ist diese Übereinstimmung nur eine Näherung. Deshalb muss jede geometrische Aussage bewiesen werden.
Was bedeutet das aber, eine geometrische Aussage beweisen?

4.13 Was sind Axiome?

Jeder Schüler weiß, wie schwer es ihm fällt, den Inhalt eines Beweises, z. B. irgendeines Satzes aus der Schulgeometrie, zu verstehen und vollständig zu erfassen, wenn er nicht alle vorangegangenen Überlegungen im Lehrbuch sorgfältig verfolgt hat. Jeder Satz baut auf einem vorhergehenden auf.
Ein Satz schließt sich an einen anderen an. Wenn wir nun ein Geometrielehrbuch von Anfang bis Ende durchgehen, so finden wir gleich zu Anfang einige Behauptungen, die niemals bewiesen, sondern als unmittelbar einleuchtend angenommen werden. Diese Behauptungen heißen Axiome. Und eine geometrische Aussage beweisen heißt, sie mit Hilfe logischer Schlüsse auf Axiome zurückführen.

Wo kommen nun die Axiome her?

Die Geometrie untersucht Punkte, Geraden und Ebenen. Wie wir schon sagten, müssen diese geometrischen Grundbegriffe Eigenschaften besitzen, die charakteristisch sind für diejenigen realen Dinge, aus deren Untersuchung der Mensch die angegebenen abstrakten Begriffe ableiten konnte.
Von diesen Eigenschaften muss man bei der Formulierung der Axiome ausgehen.

Folglich bringen die Axiome die Eigenschaften von realen, in der Natur vorkommenden Dingen wie etwa kleinen Kugeln, winzigen Öffnungen, feinen Lichtbündeln u.a. m. zum Ausdruck.
Welche Eigenschaften der Punkte und der Lichtstrahlen verwendet man nun als Axiome? Natürlich diejenigen, welche von der menschlichen Erfahrung im Verlauf von Jahrtausenden nachgeprüft wurden und an denen keine Zweifel bestehen, da sie durch Versuche und Beobachtungen oft genug kontrolliert und bestätigt worden sind.

Die der Formulierung der Axiome zugrunde liegenden Experimente wurden selbstverständlich nicht mit den abstrakten Begriffen des Punktes, der Geraden und der Ebene durchgeführt, sondern mit völlig konkreten, realen Objekten, wie z.B. mit Kugeln, Öffnungen, Lichtbündeln usw.

In dem Maße, wie sich diese realen Objekte im Bewusstsein des Menschen in die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene verwandelten, kristallisierten sich auch die Eigenschaften von Punkten, Geraden und Ebenen heraus, die dann später als Axiome formuliert wurden.
So stellte man beispielsweise die folgenden Eigenschaften bei Punkten und Strahlen (Geraden) fest:

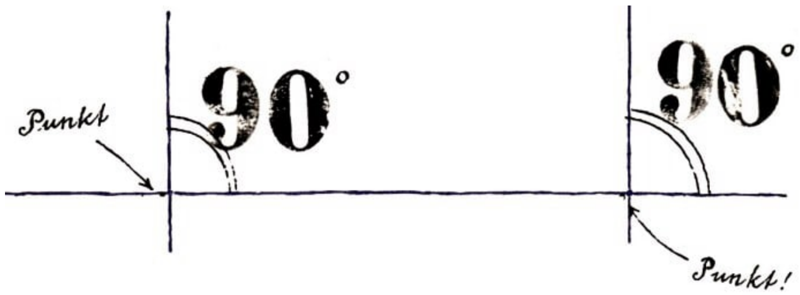
1. Durch je zwei Punkte kann man eine Gerade legen.
2. Durch zwei gegebene Punkte kann man nicht zwei verschiedene Geraden legen.
3. Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte, usw.

Diese und einige andere Aussagen werden in der modernen Geometrie als Axiome verwendet.

Diese Axiome werden ständig zum Beweis verschiedener Sätze benutzt. Dabei dürfen zum Beweis irgendwelcher Sätze in keinem Falle Aussagen herangezogen werden, die nicht in den Axiomen enthalten sind, selbst wenn sie auf den ersten Blick völlig einleuchtend zu sein scheinen.

Selbstverständlich geben die oben formulierten Axiome bei weitem noch keine vollständige Übersicht über die offensichtlich richtigen Aussagen, die durch Erfahrung erhärtet wurden. So sind z. B. auch die folgenden Aussagen zweifellos richtig:

1. In jedem Punkt einer Geraden kann man genau eine Senkrechte errichten.
2. Auf jeder Geraden liegen unendlich viele Punkte, u. a. m.



Und trotzdem beweist man diese Aussagen wie Sätze mit Hilfe der vorhergehenden Axiome. Man kann nicht alle Aussagen, die wahr zu sein scheinen, als Axiome verwenden; es sollen möglichst wenige sein. Wenn es darunter eine Aussage gibt, die mit Hilfe anderer Axiome logisch abgeleitet werden kann, so braucht man sie nicht als Axiom zu benutzen. Diese Aussage ist vielmehr bereits ein Satz.

Andererseits darf die Anzahl der Axiome nicht zu klein sein. Es müssen mindestens so viele sein, dass man auf ihrer Grundlage das ganze Gebäude der Geometrie errichten und alle jene Probleme lösen kann, welche der Geometrie von der Praxis gestellt werden.
Als erster hat der bedeutende griechische Geometer Euklid versucht, in der Geometrie ein Axiomensystem zusammenzustellen (siehe dazu den Abschnitt "Wie die Geometrie entstand").

Allerdings war sein Axiomensystem noch unvollständig, und in Wirklichkeit berief sich Euklid oft auf eine Zeichnung, um geometrische Sätze zu beweisen.
Ein vollständiges geometrisches Axiomensystem wurde im Jahre 1899 von dem deutschen Mathematiker David Hilbert aufgestellt. Gegenwärtig benutzt man etwa zwanzig Axiome. Darunter befinden sich auch solche Aussagen, die in der Schule als Sätze angesehen werden, z. B. der erste Kongruenzsatz.

Nun kann die Frage auftauchen: Warum verwendet man gerade ganz bestimmte Aussagen und nicht irgendwelche anderen als Axiome?
Es wäre doch denkbar, z.B. den folgenden Satz als Axiom zu benutzen: In jedem Punkt einer Geraden kann man genau eine Senkrechte errichten. Dafür wäre dann eines der früheren Axiome als Satz zu beweisen. Das stimmt natürlich.

Nur ist dieses Problem nicht prinzipieller Art. Es ist vielmehr eine Frage der historischen Entwicklung, der Tradition, und wir wollen darauf nicht eingehen.

Beim axiomatischen Aufbau der Geometrie können wir die Frage, was ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene ist, ganz konkret beantworten. Es sind abstrakte Begriffe, welche die in den Axiomen aufgezählten Eigenschaften besitzen. Darüber hinaus kann man von ihnen nichts sagen. Das ist auch nicht notwendig; denn zum Beweis der Sätze benutzt man nichts weiter als die Axiome.

4.14 Das Parallelenaxiom

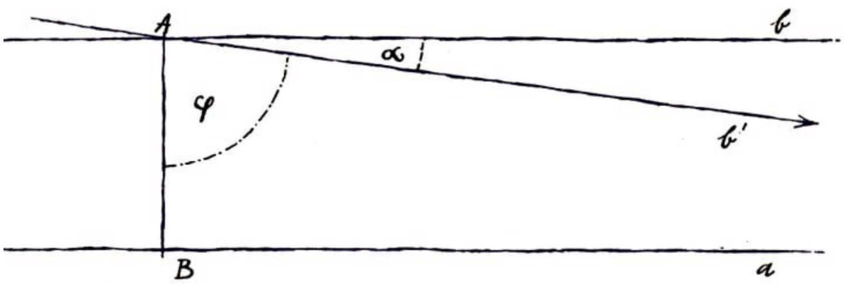
Wir haben also ein System von Axiomen ausgewählt und versuchen nun, auf dieser Grundlage die ganze Geometrie aufzubauen. Die in der Geometrie in Form verschiedener Sätze daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen werden z. B. von Physikern, Ingenieuren und Arbeitern benötigt, die mit ihrer Hilfe Größen bestimmen, die nicht unmittelbar gemessen werden können.
Je gewaltiger aber ein Gebäude ist, desto fester muss sein Fundament sein. Daher begannen die Wissenschaftler, die Grundlagen der Geometrie sorgfältig zu prüfen und zu klären, ob die geometrischen Axiome den Gegebenheiten der realen Außenwelt völlig entsprechen. Als erstes wurde das Parallelenaxiom einer Prüfung unterzogen.
Erinnern wir uns an den folgenden Satz.

Satz:
Zwei Geraden, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen, schneiden einander nicht. (Er lässt sich mit Hilfe des Satzes über die Außenwinkel im Dreieck leicht beweisen.)

Wir führen nun folgende Definition ein:

Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen und einander nicht schneiden, heißen parallel. Aus dem oben angegebenen Satz folgt, dass es parallele Geraden gibt.

Es seien jetzt in einer Ebene ein Punkt A und eine Gerade a gegeben. Offenbar kann man durch den Punkt A eine Gerade b legen, die zu a parallel ist. Dazu genügt es, vom Punkt A auf die Gerade a das Lot AB zu fällen und danach durch den Punkt A die Gerade b zu legen, die auf AB senkrecht steht. Das ist dann die gesuchte Parallele.



Jetzt erhebt sich die Frage, ob man durch den Punkt A nicht noch eine weitere Gerade b' legen kann, die ebenfalls zur Geraden a parallel ist.
Wer sich das noch nie überlegt und diese Frage noch nicht untersucht hat, der möchte sofort und entschieden antworten: Nein, das kann man nicht! Jede von b verschiedene

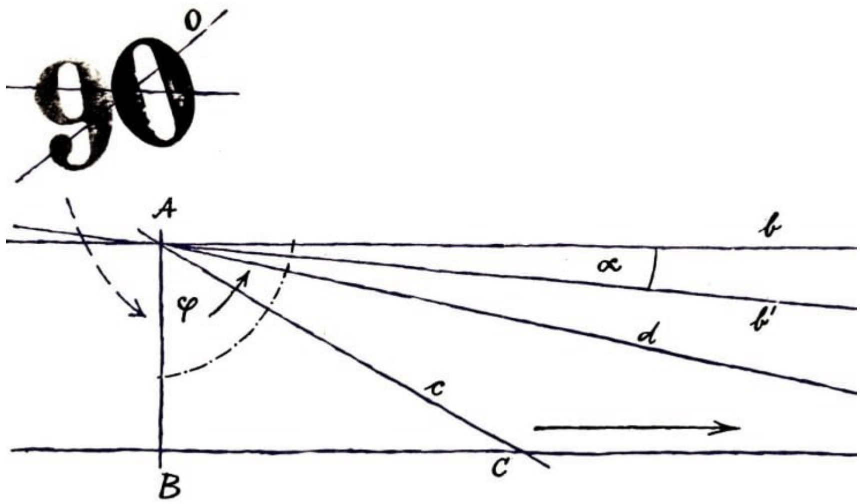
Gerade b' wird die Gerade a schneiden; vielleicht erst in sehr großer Entfernung, aber schneiden wird sie sie auf jeden Fall!

Bevor wir diese Frage endgültig beantworten, wollen wir sie etwas eingehender beleuchten.

Wir wählen auf der Geraden a einen Punkt C und verbinden ihn mit dem Punkt A durch eine Gerade c. Nun bewegen wir den Punkt C längs der Geraden a nach rechts. Dabei wird sich die Gerade c um den Punkt A drehen. Es ist klar, dass die Gerade c niemals mit der Geraden b zusammenfallen wird; denn b und a schneiden einander ja nicht.
Die Gerade c, die sich immer in der gleichen Richtung dreht, wird sich aber irgendeiner bestimmten Grenzlage unbeschränkt nähern, wenn sich der Punkt C unbegrenzt weit nach rechts entfernt. Wir werden uns also fragen:

Ist die Gerade b diese Grenzgerade, der sich die Gerade c unbegrenzt nähert? Oder nähert sich die Gerade c vielleicht einer von b verschiedenen Geraden b' unbeschränkt, so dass die Gerade c bei der Drehung nie ins Innere des Winkels α treten kann? Auch diese Annahme möchte man wieder verneinen!

Denken wir aber einmal scharf nach! Vom Punkte A aus ziehen wir unter einem Winkel $\varphi < 90°$ gegen die Gerade AB einen Strahl d. Wenn dieser Winkel klein ist, so schneiden die Geraden d und a einander auf der Zeichnung. Man braucht nur den Strahl zu verlängern.



Wenn der Winkel φ vergrößert wird, so schneiden die Geraden d und a einander schon nicht mehr auf der Zeichnung, sondern irgendwo außerhalb des Buches.
Wir vergrößern den Winkel φ noch mehr. Jetzt werden die Geraden d und a, wenn man sie hinreichend verlängert, einander in sehr großer Entfernung schneiden, sagen wir, nach einigen hundert Metern. Es ist klar, dass man sich davon in der Praxis nur sehr schwer überzeugen kann; es ist zwar fast unmöglich, prinzipiell aber noch denkbar.

Jetzt vergrößern wir den Winkel φ noch weiter. Er soll sich schließlich von $90°$ um, sagen wir, den millionsten Teil eines Grades unterscheiden. Was kann man jetzt über

den Schnittpunkt der Geraden a und d sagen? In Gedanken möchte man sie wieder verlängern.
Aber kann man sich diese Verlängerung eigentlich noch vorstellen? Verliert dieses Gedankenexperiment nicht seinen Sinn?
Denn bei einer Verlängerung der Geraden würde man doch in unermessliche Fernen kommen,

Die Annahme, dass die Lichtstrahlen a und d einander außerhalb der Reichweite der allerstärksten Fernrohre noch schneiden werden, beruht bereits auf reiner Phantasie. Man weiß doch gar nicht, wie sich Lichtstrahlen dort verhalten. Hier kann man sich auf kein Experiment mehr berufen!

Somit hat unser Gedankenexperiment zu keinem Ergebnis geführt. Vielleicht schneiden die Geraden a und d einander bei jeder beliebigen Abweichung des Winkels φ von $90°$, aber es ist auch möglich, dass es einen ganz kleinen Winkel α gibt, von dem an sich diese Geraden niemals schneiden, wie weit wir sie auch immer verlängern. Das Parallelenaxiom ist also gar nicht so selbstverständlich.

Natürlich braucht eine Aussage, die nicht sofort einleuchtend ist, nicht falsch zu sein. Auch der Lehrsatz des Pythagoras ist beispielsweise nicht selbstverständlich. Unmittelbar kann man überhaupt nicht nachprüfen, dass der Flächeninhalt des über der Hypotenuse eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks errichteten Quadrates gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten ist.
Um sich von der Gültigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes für jedes rechtwinklige Dreieck zu überzeugen, muss man ihn beweisen. Der Beweis beruht wiederum auf den Axiomen.

Möglicherweise verhält es sich in unserem Falle ähnlich. Mit anderen Worten, die Frage ist, ob sich mit Hilfe der übrigen Axiome ein Satz wie der folgende beweisen lässt.

Satz:
(A). Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man höchstens eine Gerade legen, die zu der gegebenen parallel ist.

Es ist möglich, dass sich schon Euklid diese Frage vorgelegt hatte, eine Antwort darauf besaß er jedenfalls nicht. Da man aber diesen Satz (bzw. einen ihm gleichwertigen) zum Beweis der anderen Sätze brauchte, wurde der Satz (A) als Axiom genommen.
(Euklid verwendete als Axiom einen anderen Satz, der jedoch dem Satz (A) gleichwertig ist.) In den Schullehrbüchern der Geometrie wird der Satz (A) als Parallelenaxiom bezeichnet.

4.15 Beweisversuche zum Parallelenaxiom

Nach Euklid haben im Verlauf von zwei Jahrtausenden viele Mathematiker versucht, das Parallelenaxiom zu beweisen, d.h. aus den übrigen Axiomen (der euklidischen Geometrie) abzuleiten.
Als Beweisverfahren benutzten sie dazu den indirekten Beweis. Sie gingen ungefähr

folgendermaßen vor.

Sie nahmen an, das Parallelenaxiom sei falsch. Dann kann man durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden a mindestens zwei Geraden legen, welche die Gerade a nicht schneiden.
Man versucht nun, diese Annahme ad absurdum, d. h. zu einem Widerspruch zu den anderen Axiomen zu führen. Gelingt es, einen solchen Widerspruch zu finden, so heißt das, die Annahme, dass es mindestens zwei Parallelen gebe, ist falsch, und das Parallelenaxiom ist richtig, d.h., es ist ein Satz, der aus den anderen Axiomen ableitbar ist.
Wie scharfsinnig aber auch die Überlegungen angestellt wurden, es gelang nie, einen Widerspruch herbeizuführen. Viele kamen durch die Verneinung des Parallelenaxioms zu Aussagen, die ihnen absurd erschienen. So ergab sich beispielsweise folgendes:
Wenn das Parallelenaxiom nicht gilt, so ist die Summe der Winkel im Dreieck nicht gleich $180°$, die Bestimmungslinie aller Punkte, die von einer Geraden gleich weit entfernt liegen, ist keine gerade Linie, es gibt keine ähnlichen Dreiecke, der Lehrsatz des Pythagoras gilt nicht, u.a.m.
Weil sie solche seltsamen Ergebnisse erhielten, die anscheinend völlig absurd waren, meinten viele Mathematiker, sie hätten damit das Parallelenaxiom bewiesen.
Aber alle diese erstaunlichen Tatsachen ergaben keinen logischen Widerspruch. Sie widersprachen zwar der gewöhnlichen Anschauung, waren aber in sich widerspruchsfrei.

Nun sind die gewohnten Anschauungen das Ergebnis zahlreicher Untersuchungen. Jedes dieser Experimente wurde, mit einem gewissen Messfehler behaftet, durchgeführt. Es entstand nun die Frage, ob man sich nicht durch sehr genaue Untersuchungen von der Richtigkeit bzw. Falschheit der aufgezählten "seltsamen" Aussagen überzeugen könnte. Es zeigte sich, dass das nicht so einfach ging. So kann man, wie wir gleich sehen werden, z.B. nicht ohne weiteres feststellen, ob die Winkelsumme in einem Dreieck $180°$ beträgt.

4.16 Ist die Winkelsumme im Dreieck gleich $180°$?

Wir wollen vorläufig die Frage beiseite lassen, ob das Axiom (A) in das Axiomensystem einer Geometrie aufgenommen werden muss. Es sei zunächst einmal darauf hingewiesen, dass in den Schulbüchern mit Hilfe des Axiomes (A) folgender Satz bewiesen wird.

Satz: (B). Die Summe der Innenwinkel ist in jedem Dreieck gleich $180°$. (bzw. im Bogenmaß gleich π).

Etwas komplizierter ist der Beweis der Umkehrung dieses Satzes:

Wenn auch nur in einem einzigen Dreieck die Summe der Innenwinkel gleich $180°$ ist, dann gilt das Parallelenaxiom, d. h., man kann durch einen Punkt A in einer Ebene nicht zwei Geraden so legen, dass sie eine in dieser Ebene liegende Gerade nicht schneiden.

(Dieser Satz wird in den Schulbüchern nicht bewiesen. Man findet einen Beweis u. a. in dem Buche von N. W. Efimow, "Höhere Geometrie", oder in A.P. Norden, "Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie".)

Somit folgt aus dem Parallelenaxiom, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck $180°$ beträgt; umgekehrt folgt das Axiom (A) daraus, wenn die Summe der Winkel in einem bestimmten Dreieck gleich $180°$ ist.

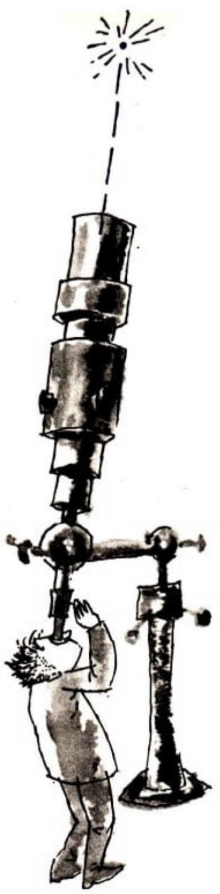
Das bedeutet, dass man das Parallelenaxiom aus dem Axiomensystem der euklidischen Geometrie fortlassen und an seiner Stelle den Satz (B) einfügen kann. Dabei würden alle übrigen Sätze der euklidischen Geometrie unverändert bleiben.

Wir haben weiter oben die Schwierigkeit (ja sogar die praktische Undurchführbarkeit) einer experimentellen Nachprüfung des Parallelenaxioms mit Hilfe von Lichtstrahlen dargestellt. Selbst wenn man ein ganz feines Bündel von Lichtstrahlen erzeugen könnte und keine Absorption der Lichtstrahlen aufträte, so ließe sich auch dann noch nichts darüber aussagen, wie sie sich außerhalb der Reichweite unserer modernen Fernrohre verhalten.
Die Frage, ob die Strahlen d und a einander schneiden, wenn der Winkel φ sehr nahe bei $90°$ liegt, würde immer ungeklärt bleiben.

Wenn wir das Axiom (A) benutzen, so erhalten wir eine Geometrie, in welcher die Winkelsumme für alle Dreiecke $180°$ beträgt. Verwenden wir einen Satz, der dem Axiom (A) entgegen- gesetzt ist, dann werden wir eine Geometrie erhalten, in der die Summe der Winkel in jedem Dreieck von $180°$ verschieden ist.
Soll man nun das Axiom (A) benutzen oder nicht?

Auf Grund der unüberwindlichen Schwierigkeiten, die mit einer experimentellen Überprüfung des Axioms (A) mit Hilfe von Lichtstrahlen verbunden sind, fragt es sich nun, ob man in solchen Versuchen nicht einfacher den Satz (B) überprüfen sollte.
Wir werden die Sachlage, die dabei entsteht, etwas eingehender untersuchen.

Wie uns bereits bekannt ist, kommen in der Natur keine Punkte, Geraden und Ebenen vor. Folglich gibt es in Wirklichkeit auch keine Strecken, Winkel und Dreiecke in der Natur. Wir beobachten immer nur Kugeln, Strahlenbündel u. a. m., die wir näherungsweise als Punkte, Geraden usw. ansehen.
In der Geometrie sind die Punkte, die Geraden, die Strecken, die Winkel usw. abstrakte Begriffe, die im Ergebnis langer Beobachtungen aus diesen Kugeln, Strahlenbündeln, straff gespannten Fäden usw. entstanden sind. Alle Schlussfolgerungen und Sätze der Geometrie sind zur Untersuchung realer Objekte nur insoweit verwendbar, wie diese Objekte im konkreten Falle als Punkte, Geraden, Ebenen usw. angesehen werden können, d. h. also näherungsweise.



Stellen wir uns einmal vor, wir beobachteten durch ein Teleskop einen fernen Stern. Der Stern wird von uns als Punkt wahrgenommen. Selbstverständlich hängt dieses Ergebnis von der Genauigkeit unserer Beobachtungen, von der Qualität des Teleskops, von der Größe des Sterns und seinem Abstand vom Beobachter ab.
In Wirklichkeit ist dieser Stern sehr groß, aber er ist vom Beobachter ungeheuer weit entfernt. Wir sehen sein Bild im Okular als "Punkt" an. Würde sich der Stern dem Beobachter nähern, dann würde sich auch sein Bild im Okular vergrößern, und der Beobachter würde ihn nicht mehr als Punkt wahrnehmen.

Entfernte sich der Stern noch weiter vom Beobachter, dann würde er ihn einfach aus dem Auge verlieren.

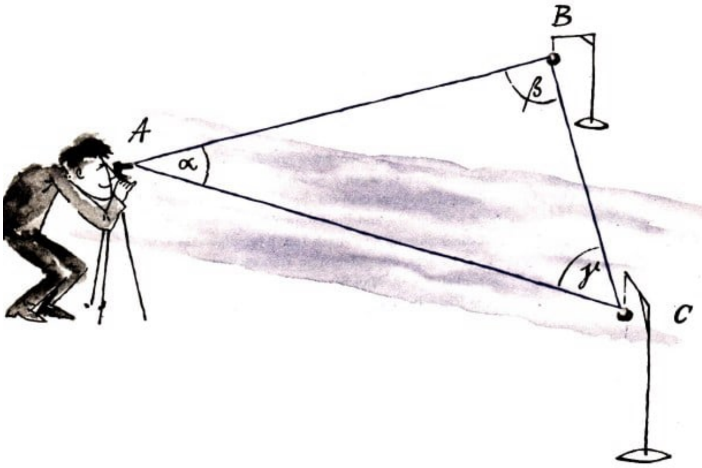
Der Beobachter nimmt dabei an, dass das Licht des Sternes, das auf die Netzhaut seines Auges fällt, eine Gerade beschreibt. Diese "Gerade" ist in Wirklichkeit ein "Bündel", das in der Nähe des Beobachters sehr, sehr fein, in der Umgebung des Sternes dagegen so gewaltig ist, wie der Stern groß ist.
Unter diesen Umständen glaubt der Beobachter, er habe eine Gerade vor sich, die durch zwei Punkte geht, nämlich durch den Stern und durch sein Bild, das er durch das Okular des Teleskope sieht.

Eine solche Situation entsteht aber nicht nur bei astronomischen Beobachtungen, sondern auch bei Beobachtungen auf der Erde.
Stellen wir uns vor, im Gelände würden Vermessungsarbeiten vorgenommen. Im Punkte B hängt an einem Stativ eine Kugel, die der Geometer durch einen im Punkte A aufgestellten Theodolit beobachtet.

Wie groß muss die Kugel im Punkte B bei diesen Beobachtungen sein?
Man muss eine Kugel nehmen, die durch das Okular im Zentrum des Theodolits möglichst deutlich zu erkennen ist. Wenn ihr Bild ein großer Kreis ist, so muss sie verkleinert werden, damit die Richtung genau bestimmt werden kann. Das Verkleinern der Kugel hat aber nur so lange einen Sinn, wie es die Genauigkeit der Einstellung des Theodolits nicht beeinflusst.
Durch die Wahl einer Kugel von passender Größe erreicht der Geometer, dass er es mit "Punkten" A und B zu tun hat, die durch die Strecke AB verbunden werden. Wie in dem Beispiel mit dem Stern kann die Kugel B in Wirklichkeit ziemlich groß sein (das hängt natürlich von der Entfernung AB ab).

Jetzt stellen wir uns vor, es sei auch im Punkt C eine Kugel von entsprechender Größe an einem Stativ angebracht. Nun richtet der Geometer nacheinander den Theodolit auf die Kugeln B und C und bestimmt die Größe α, die gleich der Differenz der Ablesungen auf der Gradeinteilung des Theodolits ist.

Bei Vermessungsarbeiten ist es unmöglich, alles unmittelbar auszumessen (in unserer Abbildung verhindert z. B. ein Fluss das Messen der Entfernung AB). Daher werden manche Größen nicht durch Messen bestimmt, sondern durch Berechnungen, bei denen man die vorher erhaltenen Messwerte benutzt.



Zur Durchführung der Rechnung braucht man Formeln und Sätze, welche die geometrische Theorie liefert (der Zweig der Geometrie, der hier verwendet wird, ist die Trigonometrie).

Wie schon weiter oben ausgeführt, operiert die euklidische Geometrie jedoch mit den abstrakten Begriffen des Punktes, der Geraden, des Dreiecks usw. Daher untersucht der Geometer, während er ein völlig konkretes physikalisches Experiment mit Kugeln und Bündeln von Lichtstrahlen durchführt, ein abstraktes geometrisches Dreieck ABC und nimmt dabei an, die Größe des geometrischen Winkels an der Ecke A sei gleich α, d.h. gleich der Differenz der Ablesungen auf der Gradeinteilung des Theodolits.

Selbstverständlich hängt die Größe α vom Zustand und von der Qualität des Theodolits ab, den man zur Messung benutzt. Der Geometer müsste also, wenn er verschiedene Messgeräte benutzt, jedesmal ein etwas anderes abstraktes Dreieck ABC untersuchen. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, wollen wir uns vorstellen, es sei auf Grund der Konstruktion des Theodolits unmöglich, auf der Gradskale Werte abzulesen, die kleiner sind als $10'$.
In diesem Fall sagt man, wenn man nach der Einstellung des Theodolits auf die Kugel B den Wert auf der Gradskale abliest, die Ablesung erfolge mit einer Genauigkeit bis auf $10'$ (oder bis auf $10'$ genau). Dasselbe gilt für die Einstellung des Theodolits auf die Kugel C.

Wenn der Geometer die Differenz α der Ablesungen bestimmt, so nimmt er an, der Wert des Winkels an der Ecke A in dem abstrakten Dreieck ABC unterscheide sich von α höchstens um $\pm 20'$. Benutzt er genauere Messinstrumente, dann kann er für den Winkel bei A einen etwas anderen Wert erhalten, der jedoch innerhalb der Grenzen $\alpha - 20'$ bis $\alpha + 20'$ liegen wird.

Analog dazu kann man für die Winkel bei B und C die Größen β und γ ermitteln und die Summe bestimmen: $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$.
Ist diese Summe nun gleich $180°$?

Im allgemeinen wird das nicht der Fall sein. Eine derartige Übereinstimmung wäre selbstverständlich Zufall. Man braucht sich ja nur daran zu erinnern, dass jede Einstellung des Theodolits nur bis auf $10'$ genau vorgenommen wurde.
Zur Bestimmung von σ müsste man den Theodolit sechsmal einstellen. Die Benutzung eines genaueren Gerätes könnte deshalb dazu führen, dass man eine andere Summe erhält, die allerdings die Fehlergrenzen $\sigma - 1°$ und $\sigma + 1°$ nicht überschreiten würde.

Also hängt die Wahl der Winkelsumme im betrachteten abstrakten Dreieck von der Genauigkeit der vorgenommenen Messungen ab (im vorliegenden Falle von der Genauigkeit des benutzten Theodolits und der Qualifikation des Messenden). In unserem Falle ist der Geometer berechtigt, ein abstraktes Dreieck zu untersuchen, dessen Winkelsumme von der bei der Messung ermittelten Größe σ um höchstens $1°$ abweicht.

Hier taucht eine weitere Frage auf: Um wieviel weicht die gemessene Winkelsumme von $180°$ ab? Ist diese Abweichung größer als $1°$?
Liegt die Differenz zwischen $180°$ und σ in den Grenzen der Messgenauigkeit der benutzten Instrumente? Anders gesagt, kann der Geometer im vorliegenden Falle ein abstraktes Dreieck mit der Winkelsumme $180°$ untersuchen?
Wir wollen einmal die möglichen Resultate der Messungen analysieren.

Erste Möglichkeit: Die Messung ergibt für $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ einen Wert, dessen Abweichung von $180°$ größer ist als die Genauigkeit der vorgenommenen Messungen (im vorliegenden Falle $1°$).
Unter diesen Umständen muss der Geometer etwa wie folgt überlegen: Der Fluss verhindert ein Messen der Entfernung AB. Noch schwerer ist durch direktes Messen der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu ermitteln.
Zur Bestimmung der genannten Größen braucht man gewisse geometrische Sätze, welche die unbekannten Stücke im Dreieck mit solchen verbinden, deren Größen gemessen wurden.
Das bedeutet, man muss eine Geometrie aufbauen, deren Schlussfolgerungen die Möglichkeit geben, mit der erforderlichen Genauigkeit die zahlreichen praktischen Aufgaben zu lösen, die der hier vorliegenden ähneln.

Wir haben bereits begonnen; auf der Grundlage eines Axiomensystems eine solche Geometrie aufzubauen. Schwierigkeiten bereitete uns allerdings die Frage, ob wir unter die Axiome auch das Axiom (A) aufnehmen sollten. wenn wir dieses Axiom benutzen, dann ist in unserer Geometrie die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich $180°$.
Der durchgeführte Versuch zeigt aber, dass bei der vorliegenden Messgenauigkeit das Messergebnis mit dieser Schlussfolgerung nicht übereinstimmt. Das bedeutet, dass diese Geometrie für unseren Geometer nicht gut genug ist. Die Aussagen dieser Geometrie würden ihm in seiner Arbeit nichts nützen.

Wenn er die Länge AC und die Winkel β und γ kennt, so könnte er mit dem bekannten

Sinussatz die Länge AB nicht mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen, weil der Sinussatz nur dort richtig ist, wo die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt. Genau sowenig könnte er den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe der aus der Schule bekannten Formel mit der gewünschten Genauigkeit ermitteln.
Er müsste für die praktischen Anforderungen eine Geometrie aufbauen, in der das Axiom (A) nicht gilt und folglich die Winkelsumme im Dreieck nicht gleich $180°$ ist.

Zweite Möglichkeit: Die Winkelsumme $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, die der Geometer bei der Messung erhalten hat, unterscheidet sich von $180°$ um einen Wert, der innerhalb der Grenzen der Messgenauigkeit liegt, im vorliegenden Falle $1°$.

Unter diesen Umständen genügt dem Geometer für die Anforderungen der Praxis eine Geometrie, in welcher die Winkelsumme im Dreieck gleich $180°$ ist. Er hat keinen Grund zur Ablehnung des Axioms (A) bzw. des Satzes (B). Hier erweist sich die euklidische "Schulgeometrie" als äußerst nützlich. Ihre Schlüsse gewinnen in der Praxis größere Bedeutung in dem Maße, wie die Genauigkeit der Messungen unseres Geometers wächst.
Es muss allerdings bemerkt werden, dass der Geometer auch in diesem Falle diejenige Geometrie nicht zu sehr vernachlässigen darf, in welcher das Axiom (A) nicht gilt und die Winkelsumme im Dreieck von $180°$ verschieden ist.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass auch eine derartige "seltsame" Geometrie später einmal von ihm gebraucht werden kann. Obgleich alle Messungen des Geometers bisher gut mit derjenigen Geometrie übereinstimmten, in welcher die Winkelsumme im Dreieck gleich $180°$ ist, könnte es später vielleicht vorkommen, dass er bei einer Erhöhung der Messgenauigkeit der Geräte oder bei der Winkelmessung in bedeutend größeren, sagen wir, kosmischen Dreiecken dahin gelangt, dass bei den neuen Messungen die gewöhnliche Geometrie die Welt bereits nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Dann braucht er eine ganz andere Geometrie.

Wir wollen die Ergebnisse zusammenfassen. Falls wir in Versuchen das erste Resultat erhalten, so heißt das, dass die mit Hilfe des Axioms (A) aufgebaute Geometrie unseren Anforderungen nicht genügt, dass sie nicht ausreichend ist.
Man muss eine andere Geometrie aufbauen, in der das Axiom (A) nicht gültig ist.

Wenn sich bei den Untersuchungen stets das zweite Resultat ergibt, dann bedeutet das nur, dass die euklidische Geometrie mit dem Axiom (A) für uns vorläufig völlig ausreicht. Allerdings kann es bei einer Verbesserung der Beobachtungsgenauigkeit möglicherweise eintreten, dass auch eine andere Geometrie gebraucht wird. Das Problem besteht also nur darin, welche Geometrie die reale Welt mit der größeren Genauigkeit beschreibt.

Ganz im Sinne dieser Gedanken maß der bedeutende russische Mathematiker N. I. Lobatschewski bereits in der ersten Hälfte des 19. Jh. unter Benutzung der damaligen astronomischen Hilfsmittel die Winkelsumme eines äußerst großen kosmischen Dreiecks aus. Als Eckpunkte wählte er die beiden am weitesten auseinanderliegenden Punkte auf der Erdbahn und einen weit entfernten Stern. Auch der deutsche Mathematiker C. F. Gauß soll versuchsweise ein sehr großes irdisches Dreieck vermessen haben, um die Winkelsumme nachzuprüfen.

Im Ergebnis dieser Messung ergab sich, wie zu erwarten war, für die Winkelsumme ein von $180°$ verschiedener Wert, jedoch ging diese Abweichung nicht über die Genauigkeitsgrenze der benutzten Instrumente hinaus. Es blieb somit die Frage offen, welche Geometrie die reale Welt genauer beschreibt.
Es blieb ungeklärt, ob überhaupt einmal eine Geometrie gebraucht würde, in der das Axiom (A) nicht gilt. Sollte eine derartige Geometrie vielleicht nur eine Gedankenspielerei sein?

4.17 Die Lobatschewskische Geometrie

Lobatschewski entwickelte im Jahre 1826 als erster eine der möglichen Geometrien, in der das Axiom (A) nicht gilt. Über Leben und Werk dieses hervorragenden Gelehrten gibt es mehrere Bücher, auch in deutscher Sprache.

Die Lobatschewskische Geometrie baut auf den gleichen Axiomen auf, wie die euklidische Geometrie, mit einer Ausnahme: Das Parallelenaxiom gilt nicht, sondern eine entgegengesetzte Aussage, das Lobatschewskische Axiom:
Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man in einer Ebene mindestens zwei Geraden legen, die die gegebene Gerade nicht schneiden.

Wir haben gesehen, dass die Frage, welche Geometrie - die euklidische oder die Lobatschewskische - die Welt der Lichtstrahlen genauer beschreibt, nicht so einfach zu beantworten ist, selbst wenn das Lobatschewskische Axiom auf den ersten Blick paradox erscheint. Das große Verdienst Lobatschewskis bestand gerade darin, dass er diese Frage stellte. Seine Gedanken waren aber so ungewöhnlich, dass sie von seinen Zeitgenossen nicht verstanden wurden.

4.18 Geometrie auf krummen Flächen

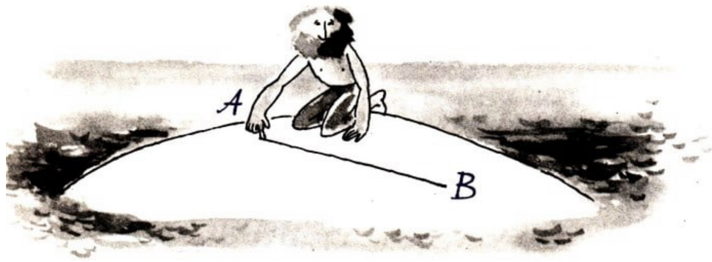
Vieles aus der Lobatschewskischen Geometrie wurde klarer, seit die Mathematiker mit der Geometrie auf krummen Flächen vertraut geworden waren. Um zu zeigen, worum es sich dabei handelt, betrachten wir die Geometrie auf der Kugel. Es gab einmal eine Zeit, in der die Menschen dachten, die Erde sei eine ebene Scheibe. Durch Beobachtung von Schiffen, die hinter dem Horizont verschwanden, kamen sie zu der Schlussfolgerung, die Erde sei kugelförmig.

Dazu mussten sie aber Gegenstände (Schiffe) betrachten, die sich bis zu einer bestimmten Höhe über die Oberfläche erhoben. Nun entsteht die Frage, ob man sich auch von der Kugelgestalt der Erde überzeugen kann, indem man Messungen unmittelbar auf der Erdoberfläche ausführt, ohne sich über diese Fläche zu erheben und Dinge zu betrachten, die sich oberhalb der Erdoberfläche befinden. Diese "innere Geometrie" der Flächen wurde im wesentlichen von C. F. Gauß begründet.

Das kann man natürlich leicht machen; denn wenn man sich ständig in einer Richtung auf der Erde fortbewegt, so kommt man schließlich wieder da an, von wo man ausgegangen ist. Zu einer solchen Nachprüfung muss man allerdings erst eine ganze Weltreise machen. Vielleicht kann man sich aber auch von der Kugelgestalt der Erde überzeugen, wenn man die ganze Zeit an einem bestimmten Ort bleibt, etwa auf einer Insel?

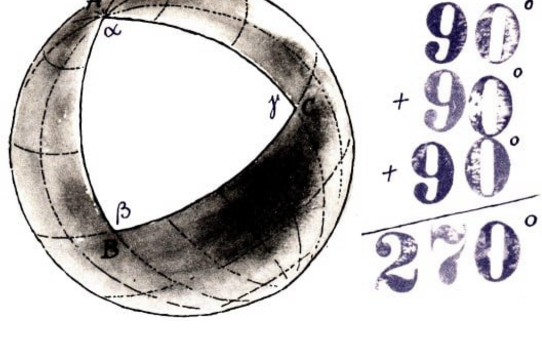
Tatsächlich ist das möglich. Man braucht dazu nur auf der Erdoberfläche geometrische Figuren zu messen. Wir wählen auf dieser Fläche zwei Punkte A und B. Diese Punkte können wir durch ganz verschiedene Linien verbinden, ohne dass wir dabei unsere Insel verlassen müssen. Unter allen Linien, die die Punkte A und B verbinden, gibt es eine, die am kürzesten ist.

Wir, die wir wissen, dass die Erde kugelförmig ist, können sagen, was das für eine Linie ist - es ist ein Großkreisbogen, welcher die Punkte A und B verbindet.



Ein Inselbewohner, der nichts von der Kugelgestalt der Erde weiß, wird diese Verbindungslinie der Punkte A und B aber eine Gerade nennen. Danach wählt er drei nicht auf einer solchen Geraden liegende Punkte A, B, C und misst die Winkel im Dreieck ABC.

Wenn die Insel sehr klein und die Messgenauigkeit seiner Instrumente nicht besonders groß ist, dann wird er feststellen, dass die Winkelsumme in diesem Dreieck gleich $180°$ ist. Ein ganz anderes Resultat wird sich aber ergeben, wenn die Insel groß ist bzw. wenn die Messgeräte der Inselbewohner sehr genau sind.

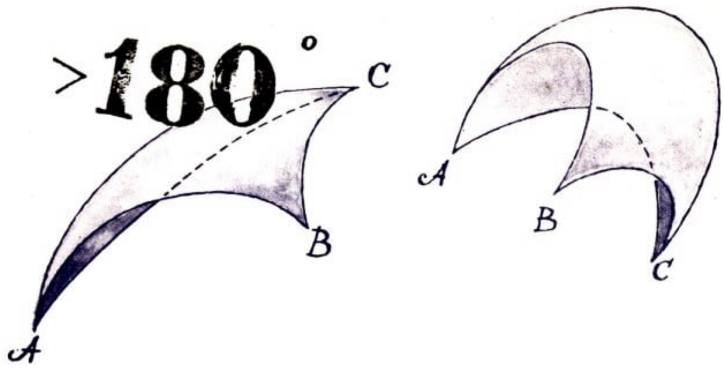


Um das verstehen zu können, wollen wir drei solche Punkte betrachten. Als Punkt A wählen wir den Nordpol, als Punkt B den Schnittpunkt des Äquators mit dem Nullmeridian und als Punkt C den Schnittpunkt des Äquators mit dem 90. Längengrad. Wenn Sie diese drei Punkte auf dem Globus aufsuchen, sehen Sie sofort, dass alle drei Winkel im Dreieck ABC gleich $90°$ sind. Dann beträgt aber die Winkelsumme in diesem Dreieck $270°$. Man kann beweisen, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck auf der Kugeloberfläche größer ist als $180°$, und zwar weicht sie um so mehr von $180°$ ab, je größer der Flächeninhalt des Dreiecks ist (darum beträgt für kleine Dreiecke die Winkelsumme nahezu $180°$).

Somit können wir uns durch eine genaue Messung der Winkel in einem großen Dreieck davon überzeugen, dass wir nicht auf einer Ebene leben, sondern auf einer gekrümmten Fläche. Mit Hilfe von noch genaueren Messungen kann man auch eine Vorstellung von der Gestalt der Fläche erhalten.

Die Messungen, die wir uns auf einer Kugel durchgeführt denken, kann man auch auf jeder anderen Fläche vornehmen. Auf jeder Fläche gibt es Linien, welche zwei Punkte verbinden und kürzer sind als alle anderen Verbindungslinien dieser Punkte. Das sind die sogenannten geodätischen Linien.

Durch Messen der Winkel in Dreiecken, die von geodätischen Linien gebildet werden, kann man auf das Maß der Krümmung der Fläche schließen. Bei einigen krummen Flächen (wie bei der Kugel und dem Ellipsoid) ist diese Summe größer als $180°$; bei anderen, wie etwa bei der Sattelfläche, ist sie kleiner als $180°$. Es gibt auch Flächen, bei denen an gewissen Stellen die Winkelsumme größer ist als $180°$, an anderen dagegen kleiner als $180°$. Je mehr aber die Winkelsumme von $180°$ abweicht, desto stärker ist das zu messende Dreieck gekrümmt.
Es gibt eine Fläche (die sogenannte Pseudosphäre), auf welcher sich die geodätischen Linien so verhalten, wie die Geraden in der Lobatschewskischen Ebene.



Der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann wies darauf hin, dass man nicht nur gekrümmte Flächen betrachten kann, sondern auch gekrümmte Räume. Wir können uns einen gekrümmten Raum schwer vorstellen; denn wenn wir von der Krümmung einer Fläche sprechen, dann stellen wir uns diese Fläche in einem Raum eingebettet vor.

Worin ist nun der gekrümmte Raum eingebettet? Nun kann man sich z. B. davon überzeugen, dass eine Fläche gekrümmt ist, ohne dass man aus der Fläche heraustreten müsste, indem man die Winkel in Dreiecken auf dieser Fläche misst. Analog dazu ist ein Raum als gekrümmt anzusehen, wenn die Winkelsumme der Dreiecke in diesem Raum von $180°$ verschieden ist.

4.19 Die Geometrie unserer Welt

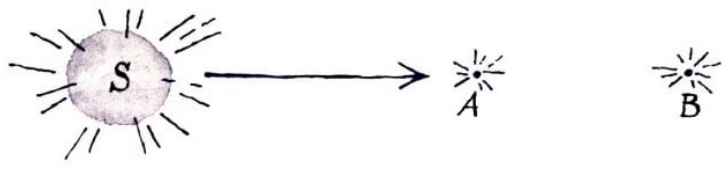
Wir haben von verschiedenen Geometrien gesprochen. Natürlich werden wir uns jetzt fragen: Welches ist die Geometrie unserer Welt?
Diese Frage läuft auf die folgende hinaus: Ist unser Raum gekrümmt oder nicht?

Um diese Frage exakt stellen zu können, muss noch gesagt werden, welche Linien wir im Raum als Geraden ansehen wollen. Wir erinnern daran, dass wir den Begriff der geraden Linie aus einer Untersuchung von Lichtstrahlen im Vakuum abgeleitet haben. Deshalb verstehen wir auch jetzt unter einer Geraden, welche zwei Punkte verbindet, einen Lichtstrahl, der im Vakuum von dem einen Punkt zu dem anderen geht.

Die Frage, welche Geometrie in unserem Raum gilt, hat jetzt einen ganz bestimmten Sinn. Wir nehmen im Raum drei Punkte A, B und C an und untersuchen das Dreieck ABC, das von den Lichtstrahlen gebildet wird, die diese drei Punkte verbinden. Ist nun die Winkelsumme in diesem Dreieck gleich $180°$?

Diese Frage wurde von einem der bedeutendsten Physiker unseres Jahrhunderts, von Albert Einstein, beantwortet. Er schuf die Relativitätstheorie, welche die Krümmung unseres Raumes bestätigt. Nach der Einsteinschen Theorie verursachen materielle Massen die Krümmung des sie umgebenden Raumes. Die Relativitätstheorie wurde durch einen Versuch, den wir jetzt besprechen wollen, glänzend bestätigt. Dieses Experiment wurde mehrmals von Astronomen wiederholt und zeigte eine gute Übereinstimmung zwischen experimentellem Ergebnis und bestimmten Voraussagen der Relativitätstheorie.

Wir wollen uns auf der Erde einen Beobachter vorstellen, der in einem bestimmten Moment zwei Sterne A und B sieht und in der Nähe des Sternes A die Sonne S, die sich "am Himmel" in der durch den Pfeil gekennzeichneten Richtung fortbewegt.

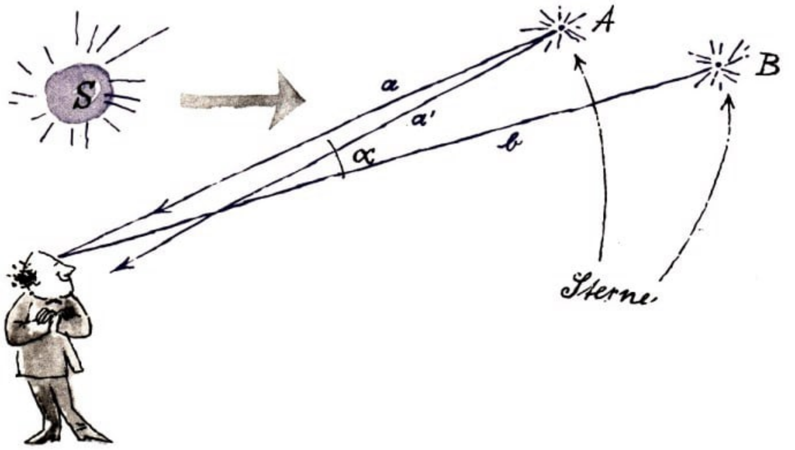


Für einen irdischen Beobachter bewegt sich die Sonne "am Himmel". Ferner sei darauf hingewiesen, dass dieser Versuch bei totaler Sonnenfinsternis durchgeführt wurde. Die Beobachtung wird in einem kleinen Zeitintervall durchgeführt, so dass die Sterne A und B als unbeweglich angesehen werden können (ihre Verschiebung während dieser Zeit ist so gering, dass sie sogar mit den feinsten Messinstrumenten nicht registriert werden kann).

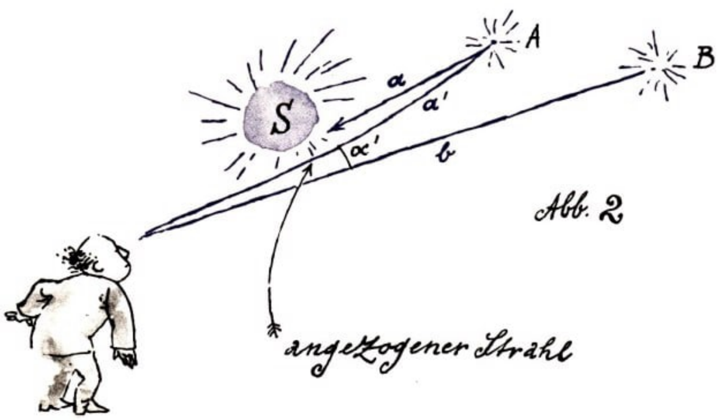
Die Geschwindigkeit der Sonne bei ihrer Bewegung am Himmel lässt sich leicht berech-

nen. In einem kleinen Zeitintervall ist sie konstant. Wenn man diese Geschwindigkeit und die Entfernung der Sonne vom Stern A kennt, ist leicht zu berechnen, in welchem Augenblick die Sonne diesen Stern verdecken wird.
Ein präziser Versuch zeigt jedoch, dass in Wirklichkeit der Stern A mit einer gewissen Verzögerung, d. h. etwas später als zur errechneten Zeit, von der Sonne verdeckt wird. Der Stern A ist zu einem Zeitpunkt noch zu sehen, in welchem ihn nach der Rechnung die Sonne bereits verdecken müsste.
Diese Erscheinung war von der Relativitätstheorie vorausgesagt worden, und dadurch erhielt man eine erste experimentelle Bestätigung.

Wie erklärt die Relativitätstheorie diese Erscheinung? Es zeigt sich, dass das starke Gravitations-(Schwerefeld, das von der Sonne erzeugt wird, den Raum um sie herum krümmt und die Richtung eines Lichtstrahls verändert.



Wir wollen darauf noch etwas näher eingehen. Zu Beginn der Beobachtung (Abb. 1) beeinflusst die Sonne den Weg der Lichtstrahlen nicht, die vom Stern A ausgehen, weil sie weit von der Sonne entfernt sind. Der Strahl a fällt ins Auge des Beobachters, und dieser sieht den Stern. Der Strahl a' bleibt unbemerkt.
Wenn sich die Sonne, die ein starkes Schwerefeld erzeugt, den Strahlen a und a' genügend genähert hat, dann werden diese Strahlen gleichsam von der Sonne angezogen. Bedeckt nun die Sonne für den Beobachter den Strahl a, dann kann dieser den Stern immer noch sehen, weil jetzt der "angezogene" Strahl a' in sein Auge fällt (Abb. 2).



Wenn man in den hier dargestellten Phasen noch den Stern B beobachtet und den Winkel α misst, so wird dieser im zweiten Falle kleiner erscheinen als im ersten, weil es im ersten Falle der Winkel zwischen den Strahlen a und b war, im zweiten dagegen der Winkel zwischen a' und b.

Kann man sagen, der Strahl a' sei anfangs gerade gewesen und sei später (infolge der Gravitation der Sonne) von der geradlinigen Bahn abgelenkt worden und habe sich gekrümmt?
Nein, das kann man nicht. Wir bezeichneten doch als Geraden eben die Lichtstrahlen im Vakuum. Also ist jede Eigenschaft der Lichtstrahlen auch eine Eigenschaft der Geraden. Der Strahl a' ist sowohl im ersten Falle als auch im zweiten gerade. -

Es ist also nicht so, dass sich der Lichtstrahl krümmt, sondern der Raum um die Sonne hat unter dem Einfluss der Schwerkraft der Sonne eine neue Eigenschaft angenommen - er wurde gekrümmt.
Auch die anderen Sterne krümmen den Raum, ja sogar kleine Körper beeinflussen den Verlauf der Lichtstrahlen, nur ist ihre Wirkung natürlich um vieles geringer als die der Sonne.

Nun befinden sich aber alle Körper in der Natur in ständiger Bewegung. Deshalb wird ein Körper, der in einem bestimmten Augenblick den Raum an einer ganz bestimmten Stelle gekrümmt hat, ihn nach einer gewissen Zeit an einer anderen Stelle krümmen. Die Lichtstrahlen verhalten sich also zu verschiedenen Zeitpunkten verschieden, und die Geometrien, die ihr Verhalten in den verschiedenen Augenblicken beschreiben, werden auch verschieden sein.
Folglich ist die Geometrie, die unseren realen Raum mit einer bestimmten Exaktheit beschreibt (die Geometrie der Lichtstrahlen), nicht unveränderlich, sondern verändert sich mit der Zeit. Das bedeutet, dass in die Formulierung der Axiome auch die Zeit aufgenommen werden muss.
Die Begriffe Raum und Zeit sind untrennbar miteinander verbunden.

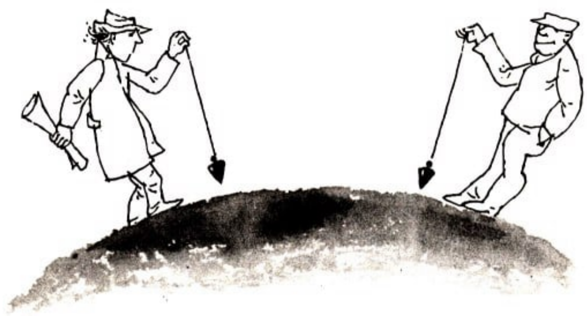
Die Frage nach der Geometrie unseres Raumes im Großen ist also recht kompliziert zu beantworten. In der Praxis muss man vor allem wissen, welche Geometrie mit der jeweils benötigten Genauigkeit die reale Welt am besten beschreibt.
Natürlich wird man jetzt nach der Geometrie in den einzelnen "Teilen" der Welt fragen.

Weiter oben haben wir schon gesagt, dass die Bewohner eines kleinen "Teils" der Welt durch eine Vervollständigung ihrer Beobachtungsapparate und eine Verbesserung der Messgenauigkeit zu der Einsicht gelangen können, dass die von ihnen früher benutzte Geometrie nicht mehr ausreicht und durch eine neue ersetzt werden muss. Zu diesem Schluss konnten sie gelangen, ohne ihren "Teil" der Welt zu verlassen.
Ferner zwingt sie die Entdeckung neuer physikalischer Gesetzmäßigkeiten sowie deren Präzisierung dazu, die von ihnen bisher verwendete Geometrie zu verbessern. Wir haben weiter oben gesehen, dass diese "lokale" Geometrie von der Schwerkraft, also von der Verteilung der Massen im betrachteten Teil des Raumes abhängt.

Die Untersuchung von kosmischen Problemen führte uns also zu der Erkenntnis, dass unser Raum der Lichtstrahlen nichteuklidisch ist.

Natürlich bleibt auch bei der Untersuchung von ganz gewöhnlichen Problemen auf der Erde die gegenseitige Abhängigkeit von Raum und Zeit erhalten, d. h., der Raum wird nichteuklidisch bleiben. Diese Abweichung vom Euklidischen wird allerdings so unwesentlich, dass man sie völlig vernachlässigen kann (und sogar muss !).
Wir können mit unseren Instrumenten nämlich nicht feststellen, dass der irdische Raum nichteuklidisch ist, so wie die Bewohner einer kleinen Insel nicht bemerken können, dass die Erdoberfläche gekrümmt ist.

Die euklidische Geometrie verliert nichts von ihrer Bedeutung für die Praxis, für die Technik usw. Wir würden uns zum Beispiel sehr über einen Ingenieur wundern, der plötzlich zu berücksichtigen begänne, dass die Geraden zweier Lote nicht parallel sind, sondern einander im Erdmittelpunkt schneiden.



Noch weniger Anlass hat ein Ingenieur zu der Annahme, die Winkelsumme in einem von ihm gezeichneten Dreieck sei von 180° verschieden.
Die euklidische Geometrie beschreibt in solchen Fragen unsere reale Welt mit großer Genauigkeit, und nicht zufällig begannen die Menschen die Untersuchung der Raumeigenschaften mit der euklidischen Geometrie.

Das alles mindert aber in keiner Weise die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrien herab. Sie finden ihre Anwendung in den wichtigsten theoretischen und praktischen Problemen der modernen Physik und Mathematik.

4.20 Schlussbemerkungen

Die Geometrie des Euklid dient dem Menschen in den verschiedensten Bereichen seiner Tätigkeit.
Durch die Erweiterung seines Wirkungskreises gelangt der Mensch jedoch unvermeidlich zum Studium der nichteuklidischen Geometrie. Als einer der ersten tat Lobatschewski diesen Schritt. Die jahrhundertealte Gewöhnung an die Vorstellungen der euklidischen Geometrie nahm selbst bedeutenden Zeitgenossen Lobatschewskis, sogar namhaften Mathematikern, die Möglichkeit, die Gedanken Lobatschewskis zu verstehen. Der Triumph seiner Ideen stellte sich erst später ein.

Heute sind die Entdeckungen Lobatschewskis fester Bestandteil der Naturwissenschaften und jedem Physiker und Mathematiker wohlbekannt.

Es war schon davon die Rede, dass man in der Geometrie unter einem Punkt, einer Geraden und einer Ebene abstrakte Begriffe versteht, welche die in den Axiomen aufgezählten Eigenschaften haben.
Die weiter oben besprochenen Axiome sind nun so gewählt worden, dass sie mit der notwendigen Genauigkeit das Verhalten von Lichtstrahlenbündeln in unserem realen physikalischen Raum charakterisieren.

Damit ist ein enger Zusammenhang zwischen der Geometrie und den physikalischen Erscheinungen der realen Welt hergestellt.
Dabei ist zu beachten, dass die Geometrie nicht nur auf das Studium solcher Erscheinungen anwendbar ist, die mit der Lichtausbreitung zusammenhängen. Man kann auch irgendwelche anderen physikalischen Objekte untersuchen, die zur Lichtausbreitung in keinerlei Beziehung stehen. Einige dieser Objekte kann man als Eichmaß für die Geradlinigkeit genauso benutzen, wie wir das mit feinen Bündeln von Lichtstrahlen getan haben.

So lassen sich beispielsweise als Maß für die Geradlinigkeit auch die Bahnen fester Körper hinreichend kleiner Abmessungen verwenden, deren Bewegung sich frei von der Einwirkung äußerer Kräfte vollzieht
Diese Geometrie (ebenso wie die bei der Untersuchung von Lichtstrahlen erhaltene) wird nur in erster Näherung auf den Axiomen des Euklid aufgebaut werden können.

Ende des 1. Bandes

5 Literaturhinweise

Zum Vorwort von Markuschewitsch

Kolmogorow, A. N.: Über den Beruf des Mathematikers. Auszugsweise Übersetzung aus dem Russischen in "Wissenschaftliche Annalen" 2 (12). Berlin 1953

Zum Abschnitt Zahlen

Baschmakowa, I. G., und A. P. Juschkewitsch: Die Entstehung der Bezeichnungssysteme für die Zahlen. In "Enzyklopädie der Elementarmathematik", Band I, 2. Auflage. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1965

Berman, C. N.: Die Zahl und ihre Theorie. Übersetzung aus dem Russischen. Jena 1954

Bermann. G. N.: Wie die Menschen zählen lernten. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1953

Deubner, F.: ... nach Adam Ries. Leipzig/Jena 1959

Chintschin, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1951

Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen II. Aufgaben aus der Zahlentheorie. 2. Auflage. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1965

Gelfond, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. 2. Auflage. Berlin 1960

Juschkewitsch, A. P.: Mathematik im Mittelalter. Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1965

Juschkewitsch, A. P., und B. A. Rosenfeld: Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter. Übersetzung aus dem Russischen, Berlin 1963

Kagan, W. F.: Archimedes. Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1955

Khintchine, A. I .: Kettenbrüche. Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1956

Knochendöppel, C.: Von den Kettenbrüchen und den diophantischen Gleichungen. Leipzig/Berlin 1948

Landau, E.: Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen. Herausgegeben von A. Walfisz. Berlin 1959

Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz. Leipzig 1951

Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. 6. Auflage. Leipzig 1963

Rademacher, H., und O. Toeplitz: Zahlen und Figuren. Berlin 1930

Struik, D. J.: Abriss der Geschichte der Mathematik. Übersetzung aus dem Amerikanischen. 3. Auflage. Berlin 1965

Trost, E.: Primzahlen. Basel - Stuttgart 1957

Willers, E. A.: Zahlenzeichen und Rechnen im Wandel der Zeit. Leipzig/Berlin 1949

Winogradow, I. M.: Elemente der Zahlentheorie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1955

Wußing, H.: Mathematik in der Antike. Aachen 1959

Zum Abschnitt Rechenfertigkeit

Archangelski, N. A., und B. I. Saizew: Automatische Ziffernrechenmaschinen. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1960

Bojko, J.: Lehrbuch der Rechenvorteile, Leipzig/Berlin 1920

Bradis, W. M.: Kopfrechnen und schriftliches Rechnen. Hilfsmittel für das Rechnen. In "Enzyklopädie der Elementarmathematik", Band I, 2. Auflage. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1965

Kitow/Krinitzki: Wie arbeitet eine elektronische Rechenmaschine ? Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1960

Kobrinski, N., und W. Pekelis: Schneller als ein Gedanke. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1961

Lehmann, H.: Der Rechenstab und seine Verwendung. Leipzig 1964

Miller, M.: Rechenvorteile. Frankfurt/M. 1964

Panow, D. J.: Der Rechenstab. Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1964

Rowenski / Ujemow / Ujemowa: Maschine und Gedanke. Passat-Bücherei. Leipzig 1962

Tukatschinski, M. S.: Maschinen als Mathematiker. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1960

Zum Abschnitt Figuren und Körper

Alexandrow, A. D.: Kurven und Flächen. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1959

Alexandrow, A. D.: Geometrie. Aus "Große Sowjet-Enzyklopädie". Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1954

Bonola/Liebmann: Die Nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Leipzig, Berlin 1910

Dubnow, J. S.: Fehler in geometrischen Beweisen. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1958

Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen I, Mehrfarbenprobleme. 2. Auflage. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1965

Efimow, N.W.: Höhere Geometrie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1960

Jaglom, I. M., und W. G. Boltjanski: Konvexe Figuren. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1956

v. Krbek, F.: Geometrische Plaudereien. Leipzig 1963

Landau, L. D., und Ju. B. Rumer: Was ist die Relativitätstheorie? 3. Auflage. Übersetzung aus dem Russischen. Leipzig 1963

Lietzmann, W.: Wo steckt der Fehler? Leipzig 1963

Lusternik, L. A.: Kürzeste Linien. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1957

Markuschewitsch, A. I.: Bemerkenswerte Kurven. Aus dem Russischen. Berlin 1954

Norden, A. P.: Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1958

Parchomenko, A. S.: Was ist eine Kurve? Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1957

Perelman, J. I.: Unterhaltsame Geometrie. Übersetzung aus dem Russischen. Berlin 1954

Steinhaus, H.: Kaleidoskop den Mathematik. Übersetzung aus dem Polnischen und Englischen. Berlin 1959