Mathematik

Ergänzungsheft zum Lehrbuch „Mathematik“ für die Klasse 6

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1964

Verfasser:
Dipl.-Math. Dieter Ilse und Dipl.-Math. Werner Tietz · Abschnitte 1 bis 9
Hans Simon · Abschnitte 10 bis 12

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Ausgabe 1964

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer
Zeichnungen: Ingrid Schäfer
Redaktionsschluß: 10. März 1964
ES 11 G Bestell-Nr. 00 06 04-1 · 0,30 DM · Lizenz-Nr. 203 · 1000/64 (E)
Satz und Druck: (52) Nationales Druckhaus VOB National, Berlin NO 55, Prenzlauer Allee 36 285 331

1. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 6)

1. Schreibe aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 50 alle die Zahlen heraus, die

a) durch 2 teilbar sind, **b)** durch 3 teilbar sind, **c)** durch 6 teilbar sind! Vergleiche die bei a), b) und c) erhaltenen Mengen von Zahlen miteinander!

Für alle natürlichen Zahlen gilt folgender Satz:

▶ **Wenn eine natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.**

Begründe diesen Satz!

Die Umkehrung dieses Satzes lautet: *Wenn eine natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.* Ist diese Aussage auch für alle natürlichen Zahlen richtig?

Begründe deine Antwort!

2. Suche aus der Menge der natürlichen Zahlen von 50 bis 100 alle Zahlen heraus, die
a) durch 9 teilbar sind, **b)** durch 6 teilbar sind, **c)** durch 3 teilbar sind!

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Alle durch 9 teilbaren Zahlen sind auch durch 3 teilbar.

b) Alle durch 9 teilbaren Zahlen sind auch durch 6 teilbar.

c) Alle durch 6 teilbaren Zahlen sind auch durch 3 teilbar.

d) Alle durch 3 teilbaren Zahlen sind auch durch 6 teilbar.

e) Alle durch 3 teilbaren Zahlen sind auch durch 9 teilbar.

f) Alle durch 6 teilbaren Zahlen sind gerade.

Begründe deine Antworten!

4. Wieviel natürliche Zahlen sind in folgenden Mengen enthalten?

a) Menge der durch 10 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

b) Menge der durch 8 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

c) Menge der durch 7 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

d) Menge der durch 5 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

e) Menge der durch 4 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

f) Menge der durch 2 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100.

Die Menge der durch 20 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100 besteht z. B. aus den Zahlen 20, 40, 60, 80.

5. Ordne die folgenden Zahlen **a)** nach ihrer Größe; **b)** nach der Anzahl ihrer Teiler! 150; 54; 211; 39; 48; 1; 45

Hinweis: Jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar. Wir wollen diese beiden Teiler stets mit berücksichtigen.

Unter den Teilern einer Zahl treten stets auch Primzahlen auf. Diese Teiler werden **Primteiler** genannt. Da die Zahl 1 keine Primzahl ist, kann der Teiler 1 auch nicht als Primteiler bezeichnet werden.

6. Wieviel verschiedene Primteiler haben die folgenden natürlichen Zahlen? 12; 47; 63; 144; 64; 91; 101; 246

7. Ergänze die folgende Tabelle!

Zahl	35	70	24	1890	1024	81
Anzahl der Primteiler						

8. Die natürliche Zahl 12 ist ein Teiler von 60.
Bestimme alle Teiler von 12 und alle Teiler von 60!
Sind alle Teiler von 12 auch Teiler von 60?
Sind alle Teiler von 60 auch Teiler von 12?

So wie in Aufgabe 8 jede Zahl, die die Zahl 12 teilt, auch ein Teiler von 60 ist, gilt für beliebige natürliche Zahlen das folgende Gesetz:

▶ **Wenn a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist, so ist a auch ein Teiler von c.**

Bestätige dieses Gesetz durch die folgenden Aufgaben!

9.

a (alle Teiler von b)	b	c
	24	120
	17	85
	42	90
	130	520
	28	130

In welchen Fällen sind alle Teiler von b auch Teiler von c?
Woran liegt es, daß in einigen Aufgaben der Tabelle nicht alle Teiler von b auch Teiler von c sind?

10. Vervollständige die folgende Tabelle!

a	alle Teiler von a	b	alle Teiler von b	$a + b$	
8		12			
15		20			
28		35			
70		30			
105		385			
112		360			

Schreibe in der letzten Spalte jeweils auf, welche Teiler von a und welche Teiler von b auch Teiler der Summe $a + b$ sind!

Wie für die Zahlen in der Tabelle der Aufgabe 10 gilt für natürliche Zahlen stets das folgende Gesetz:

▶ **Wenn x ein Teiler von a und auch ein Teiler von b ist, so ist x auch ein Teiler der Summe $a + b$.**

11. Vervollständige die folgende Tabelle!

a	alle Teiler von a	b	alle Teiler von b	$a - b$	
42		28			
81		27			
143		55			
523		209			
100		60			
1800		675			

Schreibe in der letzten Spalte jeweils auf, welche Teiler von a und welche Teiler von b auch Teiler der Differenz $a - b$ sind!

Wie in den Beispielen der Tabelle der Aufgabe 11 gilt für natürliche Zahlen allgemein das folgende Gesetz:

▶ **Wenn x ein Teiler von a und auch ein Teiler von b ist, so ist x auch ein Teiler der Differenz $a - b$. Dabei darf b nicht größer als a sein, da wir sonst die Differenz nicht bilden können.**

Natürliche Zahlen, die wie in den Aufgaben 10 und 11 gleichzeitig Teiler von zwei oder mehreren Zahlen sind, heißen **gemeinsame Teiler** dieser Zahlen.

12. Bestimme alle gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen!
a) 28, 119 und 63 **b)** 36, 72, 81 und 126
c) 90, 150 und 180 **d)** 15, 32 und 49

Natürliche Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen **zueinander teilerfremd.**

2. Der größte gemeinsame Teiler natürlicher Zahlen

In der Aufgabe 12 hast du die gemeinsamen Teiler mehrerer Zahlen bestimmt. Für das Kürzen von Brüchen ist es zweckmäßig, den **größten gemeinsamen Teiler** zweier Zahlen (Zähler und Nenner) zu bestimmen. Wir kürzen den Ausdruck „größter gemeinsamer Teiler" durch „g. g. T." ab.

■ Beispiel 1:

Der Bruch $\frac{56}{84}$ soll gekürzt werden.

Dazu müssen wir die gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner bestimmen, um Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren zu können.

a) $\frac{56}{84} = \frac{28}{42}$ (gemeinsamer Teiler 2)
b) $\frac{56}{84} = \frac{14}{21}$ (gemeinsamer Teiler 4)
c) $\frac{56}{84} = \frac{2}{3}$ (gemeinsamer Teiler 28)

Die Zahl 28 ist im Beispiel 1 der g. g. T. von 56 und 84. Sie ist die größte Zahl, durch die wir den Bruch $\frac{56}{84}$ kürzen können. Einen größeren gemeinsamen Teiler kann es nicht geben, da der Zähler 2 und der Nenner 3 des gekürzten Bruches zueinander teilerfremd sind.
Für den Fall, daß größere Zahlen mit vielen gemeinsamen Teilern vorliegen, ermittelt man den g. g. T. nach dem Verfahren, das im Beispiel 2 gezeigt wird.
Wir brauchen hierbei nicht alle Teiler dieser beiden Zahlen aufzuschreiben. Dieses Verfahren hat nämlich Ähnlichkeit mit der Bestimmung des kleinsten

gemeinsamen Vielfachen (k. g. V.) durch Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren.

■ Beispiel 2:

Der g. g. T. der Zahlen 56 720 und 27 720 soll ermittelt werden.
Wir zerlegen die beiden gegebenen Zahlen in Primfaktoren:

$56\,700 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$27\,720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Da wir einen gemeinsamen Teiler ermitteln möchten, suchen wir solche Primfaktoren heraus, die in beiden Zahlen auftreten. Die 11 kann also nicht als Faktor im g. g. T. auftreten. Da wir den größten gemeinsamen Teiler suchen, müssen wir die höchsten Potenzen der gemeinsamen Primfaktoren heraussuchen, die in beiden Zahlen vorkommen.

Das sind die folgenden Potenzen:

2^2 (2^2 ist die höchste Potenz von 2, die in beiden Zahlen auftritt, 2^3 tritt in 56 700 nicht auf)

3^2 (3^2 ist die höchste Potenz von 3, die in beiden Zahlen auftritt, 3^4 tritt in 27 720 nicht auf)

5 (5^2 tritt in 27 720 nicht auf)

7

Beide Zahlen sind also durch das Produkt $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar. Der g. g. T. von 56 700 und 27 720 ist daher $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$.

Nach dem gleichen Verfahren bestimmt man auch den g. g. T. mehrerer Zahlen.

■ Beispiel 3:

Der g. g. T. der Zahlen 44 100, 257 985 und 5733 soll ermittelt werden.

$44\,100 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$257\,985 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$

$5\,733 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$

Der g. g. T. ist also $3^2 \cdot 7^2 = 441$.

13. Bestimme den g. g. T. der folgenden Zahlen!

a) 3 685 500, 75 600 und 23 400

b) 5083, 11 339 und 1955

c) 264 600, 126 000, 3780 und 3528

Die Bestimmung der g. g. T. natürlicher Zahlen ist recht einfach, wenn nur die Potenzen kleinerer Primzahlen auftreten. In der Aufgabe 13. b) hast

du bemerkt, daß die Primzahlzerlegung schwieriger wird, wenn Potenzen größerer Primzahlen auftreten. Das erschwert die Primfaktorenzerlegung der gegebenen Zahlen. Wir wollen deshalb noch ein Verfahren zur Bestimmung des g. g. T. zweier Zahlen kennenlernen, bei dem die Primfaktorenzerlegung nicht benötigt wird. Dieses Verfahren, das man den **EUKLIDischen Algorithmus** nennt, ist schon sehr alt. Der griechische Mathematiker EUKLID VON ALEXANDRIA (um 300 v. u. Z.) hat es in seinem Werk *Elemente* angegeben.
Beim EUKLIDischen Algorithmus wird die Division mit Rest verwendet.

■ Beispiel 4:

Bestimme den g. g. T. von 945 und 120!
Man beginnt mit der größeren der beiden Zahlen und versucht, sie durch die kleinere Zahl zu dividieren. Es handelt sich hier um eine Division mit Rest. Wir schreiben:

(1) $$945 = 7 \cdot 120 + 105.$$

Jetzt versuchen wir, die kleinere der beiden gegebenen Zahlen (120) durch den ersten Rest (105) zu dividieren. Es bleibt bei der Division wieder ein Rest. Wir schreiben:

(2) $$120 = 1 \cdot 105 + 15$$

Im dritten Teil unserer Rechnung versuchen wir, den ersten Rest (105) durch den zweiten Rest (15) zu dividieren.
Diesmal geht die Division auf, es bleibt der „Rest" 0. Wir schreiben:

(3) $$105 = 7 \cdot 15 + 0.$$

Damit haben wir auch den g. g. T. der beiden gegebenen Zahlen gefunden. Es ist der letzte von Null verschiedene Rest, also die Zahl 15. Die Zahl 15 teilt nämlich die Zahl 105, wie du aus der Gleichung (3) erkennst. Die Zahl 15 ist ein Teiler von 120, denn sie teilt sowohl 15 als auch 105. Damit teilt 15 auch die Summe in der Gleichung (2), also die Zahl 120.
Ebenso überlegen wir uns, daß 15 auch die Zahl 945 teilt.
Das geht aus der Gleichung (1) hervor.
Also ist 15 gemeinsamer Teiler von 945 und 120.
Man kann auch beweisen, daß 15 wirklich der größte gemeinsame Teiler ist. Auf den Beweis dafür müssen wir in diesem Schuljahr aber noch verzichten. Du kannst jedoch an einzelnen Beispielen nachprüfen, daß du tatsächlich den größten gemeinsamen Teiler gefunden hast.

■ Beispiel 5:

Bestimme den g. g. T. von 44 022 und 4830!

$$\begin{aligned} 44\,022 &= 9 \cdot 4830 + 552 \\ 4\,830 &= 8 \cdot 552 + 414 \\ 552 &= 1 \cdot 414 + 138 \\ 414 &= 3 \cdot \mathbf{138} + 0 \end{aligned}$$

Der gesuchte g. g. T. ist also 138.

Läßt bei der Durchführung des EUKLIDischen Algorithmus bereits die erste Division den Rest 0, so ist die kleinere der beiden gegebenen Zahlen der gesuchte g. g. T.
Der g. g. T. von 126 und 18 ist z. B. gleich 18, denn $126 = 7 \cdot 18 + 0$.
Ist der erste Rest nicht gleich Null, so tritt auf jeden Fall nach einer bestimmten Anzahl von Rechenschritten (Divisionen mit Rest) der Rest 0 auf. Die Reste werden nämlich immer kleiner, und 0 ist die kleinste natürliche Zahl.

14. Bestimme den g. g. T. der folgenden Zahlen nach dem EUKLIDischen Algorithmus!

a) 36 556 und 19 456
b) 34 884 und 17 850
c) 13 176 und 6 222
d) 46 740 und 16 704

Wenn du den g. g. T. von drei Zahlen nach dem EUKLIDischen Algorithmus suchen willst, so bestimmst du ihn zunächst für zwei der gegebenen Zahlen. Dann wendest du den EUKLIDischen Algorithmus auf den gefundenen g. g. T. und die dritte Zahl an. Das ergibt den g. g. T. der drei gegebenen Zahlen.
Zwischen dem k. g. V. und dem g. g. T. zweier Zahlen besteht ein Zusammenhang. Um diesen zu erkennen, zerlegen wir zuerst die zwei gegebenen Zahlen in Primfaktoren.

■ Beispiel 6:

Der Zusammenhang zwischen dem k. g. V. und dem g. g. T. soll an den Zahlen 63 und 147 gezeigt werden.

$$\begin{aligned} 63 &= \mathbf{3^2} \cdot 7 \\ 147 &= 3 \cdot \mathbf{7^2} \end{aligned}$$

Die Primzahlpotenzen, die das k. g. V. ergeben, sind fett gedruckt.
Die übrigen Potenzen sind die Faktoren des g. g. T.
Das k. g. V. ist $3^2 \cdot 7^2 = 441$.
Der g. g. T. ist $3 \cdot 7 = 21$.

Multiplizieren wir nun das k. g. V. und den g. g. T. miteinander, so erhalten wir das Produkt

$3^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 7 = 9261.$

In diesem Produkt treten alle Primzahlpotenzen aus den Zerlegungen der beiden gegebenen Zahlen auf. Es ist also gleich dem Produkt aus diesen beiden Zahlen.

Man bekommt also das k. g. V. zweier Zahlen, indem man das Produkt dieser Zahlen durch ihren g. g. T. dividiert. Andererseits erhält man den g. g. T. zweier Zahlen, indem man ihr Produkt durch ihr k. g. V. dividiert.

■ Beispiel 7:

Wir betrachten die Zahlen 1320 und 3150.
Das k. g. V. ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 138\,600.$
Der g. g. T. ist $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

a) Wir dividieren das Produkt $1320 \cdot 3150 = 4\,158\,000$ der beiden Zahlen durch ihren g. g. T.:
$4\,158\,000 : 30 = 138\,600.$ Das ist ihr k. g. V.

b) Wir dividieren ihr Produkt durch ihr k. g. V.:
$4\,158\,000 : 138\,600 = 30.$ Das ist der g. g. T. von 1320 und 3150.

3. Gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen

15. Welche Brüche der folgenden Paare sind durch Kürzen oder Erweitern aus einander hervorgegangen? Schreibe diese Paare auf!

a) $\frac{7}{11}$ und $\frac{91}{143}$ **b)** $\frac{16}{23}$ und $\frac{144}{207}$ **c)** $\frac{5}{3}$ und $\frac{50}{32}$

d) $\frac{27}{31}$ und $\frac{189}{217}$ **e)** $\frac{27}{19}$ und $\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{23}{41}$ und $\frac{322}{576}$

g) $\frac{205}{15}$ und $\frac{100}{7}$ **h)** $\frac{37}{51}$ und $\frac{851}{1173}$

Wir wollen jeweils die Brüche, die durch Erweitern oder durch Kürzen aus einander hervorgehen, zu einer Klasse zusammenfassen.

Beispiele:

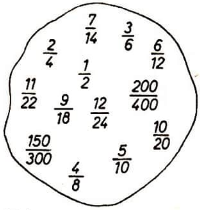


Abb. 1a

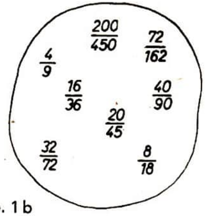


Abb. 1b

16. Suche zu jedem der folgenden Brüche weitere Brüche, die mit ihm in derselben Klasse liegen!

a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{70}{95}$; **c)** $\frac{8}{13}$; **d)** $\frac{1}{5}$; **e)** $\frac{7}{9}$; **f)** $\frac{5}{13}$; **g)** $\frac{7}{19}$; **h)** $\frac{144}{200}$

Schreibe die gefundenen Brüche einer Klasse in einen Kreis!
Wieviel Brüche gehören zu einer Klasse?

Wie kann man nun feststellen, ob zwei Brüche in einer Klasse liegen? Das können wir zunächst dadurch nachprüfen, daß wir beide Brüche solange kürzen, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Für die Brüche $\frac{21}{42}$ und $\frac{7}{14}$ beispielsweise würden wir $\frac{21}{42} = \frac{1}{2}$ bzw. $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ erhalten. Beide gegebene Brüche liegen also in derselben Klasse wie der Bruch $\frac{1}{2}$.

Wir können aber auch die Produkte $21 \cdot 14$ und $42 \cdot 7$ miteinander vergleichen. Wir stellen fest, daß $21 \cdot 14 = 42 \cdot 7$ gilt.

▶ **Allgemein gilt für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, die durch Kürzen oder Erweitern aus einander hervorgegangen sind, die Gleichung**

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Diese Brüche liegen also in einer Klasse.

17. Liegen die folgenden Brüche jeweils in einer Klasse?

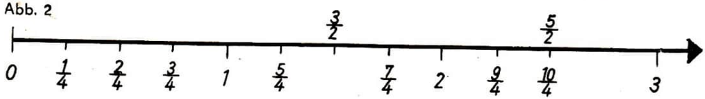
a) $\frac{38}{84}$ und $\frac{50}{120}$ **b)** $\frac{304}{368}$ und $\frac{38}{46}$ **c)** $\frac{100}{240}$ und $\frac{7}{12}$

d) $\frac{231}{343}$ und $\frac{429}{637}$ **e)** $\frac{4}{8}$, $\frac{101}{200}$ und $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{70}{18}$, $\frac{350}{90}$ und $\frac{35}{9}$

g) $\frac{166}{249}$, $\frac{24}{36}$ und $\frac{400}{600}$ h) $\frac{714}{616}$, $\frac{1628}{1232}$ und $\frac{2142}{1848}$

Wir können Brüche auch auf einem Zahlenstrahl darstellen (Abb. 2).

Abb. 2



18. Gib zu jedem eingezeichneten Punkt des Zahlenstrahls in Abbildung 2 weitere Brüche an, die diesem Punkt zugeordnet sind!

Wie hast du diese Brüche gefunden?

Zusammenfassung:

Das Kürzen oder Erweitern eines Bruches bedeutet also, daß man von diesem Bruch zu einem anderen Bruch derselben Klasse übergeht. In einer Klasse liegen also die Brüche, die alle demselben Punkt auf einem Zahlenstrahl zugeordnet sind.
Im Lehrbuch für die 5. Klasse (S. 158) steht, daß Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen aus einander hervorgehen, denselben Wert haben. Wir wollen künftig sagen:
Alle Brüche, die in derselben Klasse liegen, die also alle demselben Punkt auf einem Zahlenstrahl zugeordnet sind, stellen ein und dieselbe Zahl dar. Wir nennen eine solche Zahl eine **gebrochene Zahl.**

So stellen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{200}{300}$ und alle anderen Brüche, die mit diesem in einer Klasse liegen, ein und dieselbe gebrochene Zahl dar. Die Gleichung $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ bedeutet also nicht, daß beide Brüche denselben Wert haben, sondern daß $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{9}$ dieselbe gebrochene Zahl bezeichnen.

4. Die Ordnung der gebrochenen Zahlen

19. Stelle fest, ob in den in der Tabelle angeführten Gleichungen das Gleichheitszeichen richtig gesetzt worden ist! Wenn es notwendig ist, setze das Zeichen „≠" für die Ungleichheit!

Natürliche Zahlen	Gebrochene Zahlen
5 = 5	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
7 = 7	$\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$
40 = 4	$\frac{3}{5} = \frac{30}{50}$
100 = 201	$\frac{7}{8} = \frac{4}{5}$
350 = 350	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
1210 = 1400	$\frac{9}{10} = \frac{10}{11}$

Die Aufgabe 19 zeigt noch einmal, daß dieselbe gebrochene Zahl durch verschiedene Brüche bezeichnet werden kann, z. B.
$\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$. Dagegen bezeichnen bei den natürlichen Zahlen verschiedene Ziffern auch stets verschiedene Zahlen.

20. Vergleiche zur Wiederholung die folgenden gebrochenen Zahlen miteinander!
Welches ist die größere gebrochene Zahl?

a) $\frac{5}{7}$ oder $\frac{9}{7}$; **b)** $\frac{8}{27}$ oder $\frac{23}{27}$; **c)** $\frac{5}{9}$ oder $\frac{5}{11}$;
d) $\frac{57}{98}$ oder $\frac{43}{98}$; **e)** $\frac{5366}{15899}$ oder $\frac{5366}{15901}$; **f)** $\frac{487}{987}$ oder $\frac{478}{987}$;
g) $\frac{15}{901}$ oder $\frac{15}{900}$; **h)** $\frac{73}{502}$ oder $\frac{37}{502}$

Bei den letzten Aufgaben sind entweder die Zähler oder die Nenner der zu vergleichenden gebrochenen Zahlen gleich groß gewesen.
Wie kann man nun von zwei b e l i e b i g e n verschiedenen gebrochenen Zahlen die größere oder die kleinere finden? Wir wollen dazu erst einige Beispiele rechnen.

■ Beispiel 8:

Vergleiche $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{14}$!
Diese gebrochenen Zahlen sind voneinander verschieden, denn die Brüche $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{14}$, die diese gebrochenen Zahlen bezeichnen, liegen in verschiedenen Klassen.

Es gilt $5 \cdot 14 \neq 7 \cdot 11$. Die Brüche gehen also nicht durch Erweitern oder Kürzen aus einander hervor. Um festzustellen, welche der beiden gebrochenen Zahlen größer bzw. kleiner ist, machen wir die beiden Brüche gleichnamig. In diesem Fall genügt es, den ersten Bruch mit 2 zu erweitern. Wir gehen also in der Klasse des ersten Bruches zu dem Bruch mit dem Nenner 14 über.

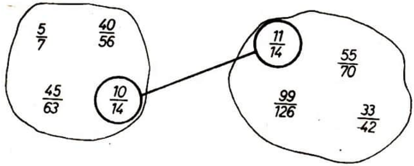


Abb. 3

Wir müssen also jetzt $\frac{10}{14}$ mit $\frac{11}{14}$ vergleichen und stellen fest, daß $\frac{10}{14} < \frac{11}{14}$ ist. Damit gilt auch für die gebrochenen Zahlen $\frac{5}{7} < \frac{11}{14}$.

Beispiel 9:

Vergleiche $\frac{17}{36}$ und $\frac{25}{54}$!

Diese gebrochenen Zahlen sind wieder voneinander verschieden, denn es gilt $17 \cdot 54 \neq 36 \cdot 25$. Zum Vergleich wählen wir aus den Klassen der gebrochenen Zahlen jeweils einen Bruch so aus, daß sie beide den gleichen Nenner haben. Das bedeutet, daß wir die gegebenen Brüche gleichnamig machen.

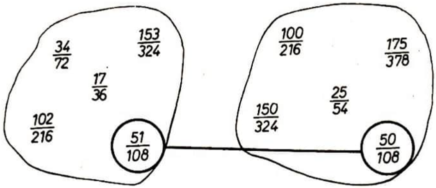


Abb. 4

Der Vergleich läßt sich am leichtesten mit den Brüchen durchführen, die den kleinsten gemeinsamen Nenner haben. Dieser kleinste gemeinsame Nenner ist das k. g. V. der Nenner der gegebenen Brüche. Wir vergleichen also die gegebenen gebrochenen Zahlen mit Hilfe der Brüche $\frac{51}{108}$ und $\frac{50}{108}$ und erkennen, daß $\frac{51}{108} > \frac{50}{108}$ gilt. Also gilt auch $\frac{17}{36} > \frac{25}{54}$.

21. Fülle die folgende Tabelle aus!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Vergleich von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$	Vergleich von $a \cdot d$ und $b \cdot c$
$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$	42	40	$42 > 40$
$\frac{5}{13}$	$\frac{9}{17}$				
$\frac{9}{15}$	$\frac{11}{19}$				
$\frac{21}{36}$	$\frac{29}{41}$				
$\frac{48}{52}$	$\frac{60}{65}$				
$\frac{37}{51}$	$\frac{41}{59}$				
$\frac{201}{97}$	$\frac{171}{109}$				

Wie bei den gebrochenen Zahlen der letzten Aufgabe gilt allgemein das folgende Gesetz:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d < b \cdot c$

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d > b \cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d = b \cdot c$

22. Vergleiche die folgenden gebrochenen Zahlen miteinander, ohne die gegebenen Brüche gleichnamig zu machen!

a) $\frac{19}{102}$ und $\frac{40}{405}$; b) $\frac{96}{57}$ und $\frac{155}{100}$; c) $\frac{72}{81}$ und $\frac{184}{207}$

d) $\frac{50}{71}$ und $\frac{118}{121}$; e) $\frac{39}{102}$ und $\frac{2}{5}$; f) $\frac{10}{7}$ und $\frac{88}{72}$

g) $\frac{209}{113}$ und $\frac{95}{63}$; h) $\frac{215}{105}$ und $\frac{351}{189}$; i) $\frac{11}{27}$ und $\frac{45}{72}$

23. Schreibe auf, welcher der drei Fälle $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$ für die natürlichen Zahlen der folgenden Tabelle gilt!

a	7	8	70	463	5376	70810
b	11	8	93	271	5376	69001

24. Ordne die folgenden gebrochenen Zahlen nach ihrer Größe!

$\frac{2}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{7}{35}$; $\frac{10}{11}$

Wie bei den natürlichen Zahlen gilt auch für zwei gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Es gibt gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 dargestellt werden können. Beim Vergleich dieser gebrochenen Zahlen brauchen wir nur die Zähler derjenigen Brüche untereinander zu vergleichen, die den Nenner 1 haben.

■ Beispiel 10:

$\frac{4}{1} < \frac{7}{1}$, denn $4 < 7$.

Diese Brüche verhalten sich also beim Vergleich genauso wie die in ihrem Zähler stehenden natürlichen Zahlen. Wenn wir uns also mit der Ordnung der gebrochenen Zahlen beschäftigen, können wir von jetzt an die Brüche mit dem Nenner 1 durch ihre Zähler e r s e t z e n . So schreiben wir etwa 4 statt $\frac{4}{1}$ oder 7 statt $\frac{7}{1}$.

5. Die Addition von gebrochenen Zahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 9)

Die Addition von gebrochenen Zahlen ist gegenüber der Addition von natürlichen Zahlen eine neue Rechenoperation. Man stellt die gebrochenen Zahlen durch gleichnamige Brüche dar und addiert nur die Zähler. Den gemeinsamen Nenner behält man bei:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

■ Beispiel 11:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{9} = \frac{27}{72} + \frac{30}{72} + \frac{56}{72} = \frac{113}{72}$$

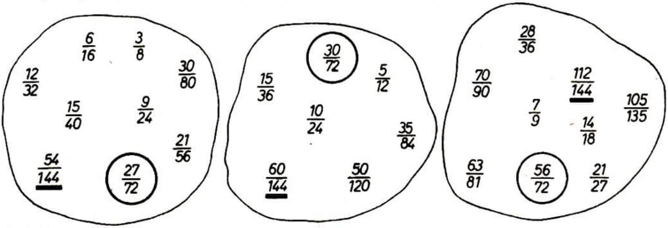


Abb. 5

Das Gleichnamigmachen bedeutet hier also, in den Klassen der drei Summanden zu den Brüchen überzugehen, die einen gemeinsamen Nenner haben. Am einfachsten ist es, den k l e i n s t e n gemeinsamen Nenner, also das k. g. V. der drei einzelnen Nenner, zu nehmen.

25. Ergänze die folgende Tabelle!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{7}$			$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{24}$		
$\frac{12}{11}$	$\frac{40}{33}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		
$\frac{17}{9}$	$\frac{25}{12}$						

Wie bei den Aufgaben der letzten Tabelle gilt für die Addition zweier gebrochener Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ stets das

Kommutationsgesetz:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

Du kennst dieses Gesetz schon vom Rechnen mit natürlichen Zahlen. Wir dürfen also auch im Bereich der gebrochenen Zahlen die Summanden einer zweigliedrigen Summe vertauschen.

Beispiel 12:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{15}{24} + \frac{14}{24} = \frac{15+14}{24} = \frac{14+15}{24} = \frac{14}{24} + \frac{15}{24} = \frac{7}{12} + \frac{5}{8}.$$

26. Welches Gesetz für das Rechnen mit natürlichen Zahlen wurde hier verwendet? Woran liegt es also, daß die Addition im Bereich der gebrochenen Zahlen kommutativ ist?

27. Vervollständige die folgende Tabelle!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$	$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{8}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{15}$				
$\frac{23}{24}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{3}{2}$				

Für die Addition von drei gebrochenen Zahlen gilt ganz allgemein das **Assoziationsgesetz:**

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}.$$

Die Klammern deuten hierbei wieder an, daß du die in ihnen stehenden gebrochenen Zahlen zuerst addieren mußt. Das Assoziationsgesetz bedeutet nun aber, daß die Reihenfolge der Addition beliebig ist. Man kann deshalb die Klammern fortlassen und einfach $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ schreiben.

28. Erkläre an dem folgenden Beispiel, warum auch im Bereich der gebrochenen Zahlen genau wie im Bereich der natürlichen Zahlen das Assoziationsgesetz gilt!

$$\frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{8} + \frac{5+7}{8} = \frac{3+(5+7)}{8} = \frac{(3+5)+7}{8} = \frac{3+5}{8} + \frac{7}{8} = \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) + \frac{7}{8}.$$

Aus dem Kommutationsgesetz und dem Assoziationsgesetz für die Addition von gebrochenen Zahlen folgt nun wieder wie beim Rechnen mit natürlichen Zahlen, daß in einer mehrgliedrigen Summe von gebrochenen Zahlen die Reihenfolge der Summanden beliebig ist.

Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, verhalten sich bei der Addition wieder wie die natürlichen Zahlen.

■ Beispiel 13:

$\frac{9}{1} + \frac{4}{1} = \frac{13}{1}$ und $9 + 4 = 13$.

Auch bei der Addition können wir also die Brüche mit dem Nenner 1 durch ihre Zähler e r s e t z e n .

■ Beispiel 14:

$\frac{5}{1} + \frac{4}{3} = 5 + \frac{4}{3}$. Als Ergebnis erhalten wir $5\frac{4}{3} = \frac{19}{3}$.

Im Bereich der natürlichen Zahlen galt stets $a + 0 = a$.

Es gibt auch im Bereich der gebrochenen Zahlen eine Zahl, die sich wie die Null im Bereich der natürlichen Zahlen verhält. Das ist die gebrochene Zahl, die durch alle Brüche bezeichnet werden kann, die aus $\frac{0}{1}$ durch Erweitern hervorgehen. Sie ist die kleinste gebrochene Zahl. Für jede andere gebrochene Zahl $\frac{c}{d}$ ($c \neq 0$ und $d \neq 0$) gilt nämlich $\frac{0}{1} < \frac{c}{d}$, weil stets $0 \cdot d < 1 \cdot c$ gilt.

■ Beispiel 15:

a) $\frac{5}{1} + \frac{0}{1} = \frac{5+0}{1} = \frac{5}{1}$

b) $\frac{7}{9} + \frac{0}{3} = \frac{7}{9} + \frac{0}{9} = \frac{7+0}{9} = \frac{7}{9}$

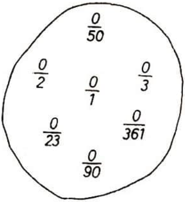


Abb. 6

Wir können deshalb $\frac{0}{1}$ und alle anderen Brüche aus der gleichen Klasse durch die natürliche Zahl 0 e r s e t z e n .

▶ **Brüche, deren Nenner gleich Null sind, stellen keine gebrochenen Zahlen dar.**

Um z. B. die Summe $\frac{3}{4} + \frac{5}{0}$ berechnen zu können, müßten wir die Erweiterung von Brüchen mit Null zulassen, da wir die Summanden nicht anders gleichnamig machen können. Der „Hauptnenner" wäre nämlich Null. Wenn wir aber mit Null erweitern dürften, könnten wir alle Brüche auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen.

Dann würden alle Brüche in einer Klasse liegen, also untereinander gleich sein. Das ist aber sicher falsch, da es dann nur eine gebrochene Zahl gäbe.

6. Die Subtraktion von gebrochenen Zahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 9)

Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen hast du die Subtraktion als Umkehrung der Addition kennengelernt. Die Bestimmung der Zahl x, für die $x + b = a$ gilt, führte auf die Differenz $x = a - b$. Ebenso ist die Subtraktion von gebrochenen Zahlen die Umkehrung der Addition im Bereich der gebrochenen Zahlen. Statt $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ schreiben wir $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

Wir müssen dabei wie im Bereich der natürlichen Zahlen den Minuenden $\frac{a}{b}$ und den Subtrahenden $\frac{c}{d}$ wieder so wählen, daß der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist. Sonst ist die Subtraktion im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht möglich.
Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, verhalten sich bei der Subtraktion wieder wie natürliche Zahlen.

■ Beispiel 16:

$\frac{15}{1} - \frac{9}{1} = \frac{6}{1}$ und andererseits $15 - 9 = 6$.

Wir können also wie bisher auch hier die Brüche mit dem Nenner 1 durch ihre Zähler *ersetzen*.

■ Beispiel 17:

$$\frac{100}{10} - \frac{36}{6} = \frac{10}{1} - \frac{6}{1} = \frac{4}{1}$$

Im Bereich der natürlichen Zahlen gilt: $10 - 6 = 4$.

29. Rechne ebenso, und vergleiche jede Aufgabe mit der entsprechenden Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen!

a) $\frac{195}{13} - \frac{153}{17}$ **b)** $\frac{432}{16} - \frac{414}{18}$ **c)** $\frac{357}{17} - \frac{208}{13}$ **d)** $\frac{925}{37} - \frac{493}{29}$

7. Die Multiplikation von gebrochenen Zahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 12)

Wir haben gelernt, daß die Brüche mit dem Nenner 1 beim Vergleichen, beim Addieren und beim Subtrahieren durch natürliche Zahlen ersetzt werden können. Wir konnten also bis jetzt mit ihnen wie mit natürlichen Zahlen rechnen.

Nun wollen wir auch die Multiplikation von gebrochenen Zahlen so festlegen, daß sich bei ihr die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbaren gebrochenen Zahlen wieder genauso verhalten wie die natürlichen Zahlen.

Dazu überlegen wir uns zunächst, wie diese gebrochenen Zahlen multipliziert werden müssen.

■ Beispiel 18:

$\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{x}{y}$. Da $4 \cdot 5 = 20$ gilt, setzen wir fest:

$\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{20}{1}$.

Man könnte nun denken, daß sich für die Multiplikation eine ähnliche Regel ergibt wie für die Addition. Das Ergebnis $\frac{20}{1}$ könnte ja dadurch erhalten werden, daß man die Zähler multipliziert und den gemeinsamen Nenner beibehält. Gehen wir aber von $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ zu den Brüchen $\frac{8}{2}$ und $\frac{10}{2}$ aus den gleichen Klassen über, so hätten wir das Produkt $\frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2}$ zu bestimmen.

Rechnen wir auch dieses Produkt so aus, daß wir die Zähler multiplizieren und den Nenner beibehalten, so bekommen wir als Ergebnis $\frac{80}{2}$. Dieser Bruch liegt aber nicht in derselben Klasse wie $\frac{20}{1}$. Die beiden Brüche stellen also nicht dieselbe gebrochene Zahl dar.

Nun können wir aber $\frac{20}{1}$ aus $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ auch so erhalten, daß wir die Zähler miteinander multiplizieren und die Nenner miteinander multiplizieren. Gehen wir jetzt zu anderen Brüchen aus den jeweiligen Klassen über, so erhalten wir stets dasselbe Ergebnis.

■ Beispiel 19:

a) $\frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2} = \frac{80}{4} = \frac{20}{1}$

b) $\frac{20}{5} \cdot \frac{25}{5} = \frac{500}{25} = \frac{20}{1}$

Wir setzen deshalb fest:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶ **Zwei gebrochene Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man in den sie darstellenden Brüchen Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.**

30. Ergänze die folgende Tabelle!

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
$\frac{18}{25}$	$\frac{9}{4}$		
$\frac{3}{7}$	$\frac{21}{25}$		
$\frac{36}{70}$	$\frac{4}{7}$		
$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{21}$		
$\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$		

Hinweis: Kürze vor dem Multiplizieren, wenn es möglich ist!

Genauso wie für die Multiplikation von natürlichen Zahlen gilt auch für die Multiplikation von gebrochenen Zahlen das Kommutationsgesetz:

▶ $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Ebenso gilt auch für die Multiplikation von gebrochenen Zahlen das Assoziationsgesetz:

▶ $$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}.$$

Auch das Distributionsgesetz, das wir von den natürlichen Zahlen her schon kennen, bleibt im Bereich der gebrochenen Zahlen gültig:

▶ $$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}.$$

■ Beispiel 20:

a) $\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{7}{3}\left(\frac{36}{45}+\frac{10}{45}\right)$

$\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{7}{3}\cdot\frac{46}{45}$

$\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{322}{135}$

b) $\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{9}$

$\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{28}{15}+\frac{14}{27}$

$\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{252}{135}+\frac{70}{135}$

$\frac{7}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{322}{135}$

Im Bereich der natürlichen Zahlen galt stets $a \cdot 1 = a$. Es gibt auch im Bereich der gebrochenen Zahlen eine Zahl, die sich bei der Multiplikation so verhält wie die 1 bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen. Sie wird durch alle Brüche dargestellt, die in derselben Klasse wie der Bruch $\frac{1}{1}$ liegen, die also aus ihm durch Erweitern hervorgehen:

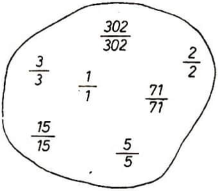


Abb. 7

■ Beispiel 21:

a) $\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5\cdot 1}{9\cdot 1}=\frac{5}{9}$

b) $\frac{7}{4}\cdot\frac{13}{13}=\frac{7\cdot 13}{4\cdot 13}=\frac{7}{4}$ (Kürzen)

31. Welche Zahl verhält sich bei der Multiplikation von gebrochenen Zahlen genauso wie die Null bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen?

8. Die Division von gebrochenen Zahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 13)

Wir wollen auch bei der Division von gebrochenen Zahlen erreichen, daß sich die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbaren gebrochenen Zahlen genauso verhalten wie die natürlichen Zahlen beim Dividieren. Wir überlegen uns nun, wie wir die Division gebrochener Zahlen erklären müssen, um diese Forderung zu erfüllen.

■ Beispiel 22:

a) $\frac{20}{1} : \frac{4}{1} = \frac{x}{y}$. Da $20 : 4 = 5$, setzen wir fest:

$\frac{20}{1} : \frac{4}{1} = \frac{5}{1}$.

b) $\frac{30}{1} : \frac{3}{1} = \frac{10}{1}$. Entsprechend ist $30 : 3 = 10$

c) $\frac{63}{1} : \frac{7}{1} = \frac{9}{1}$. Entsprechend ist $63 : 7 = 9$

Wir betrachten noch einmal die eben gerechneten Aufgaben im Beispiel 22. Bei der Division $\frac{20}{1} : \frac{4}{1}$ erhalten wir das Ergebnis $\frac{5}{1}$ auch, wenn wir folgendermaßen rechnen:

$$\frac{20}{1} : \frac{4}{1} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{20 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{20}{4} = \frac{5}{1}.$$

Statt zu dividieren, multiplizieren wir also den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir Dividend und Divisor beliebig erweitern:

$$\frac{40}{2} : \frac{8}{2} = \frac{40}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{40 \cdot 2}{2 \cdot 8} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{60}{3} : \frac{20}{5} = \frac{60}{3} \cdot \frac{5}{20} = \frac{60 \cdot 5}{3 \cdot 20} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{100}{5} : \frac{40}{10} = \frac{100}{5} \cdot \frac{10}{40} = \frac{100 \cdot 10}{5 \cdot 40} = \frac{5}{1}$$

32. Prüfe auch an den Beispielen 22 b und 22 c nach, ob die Multiplikation des Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors dieselben Ergebnisse liefert! Benutze dabei auch beliebig erweiterte Brüche!

Wir setzen allgemein fest:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

▶ **Zwei gebrochene Zahlen werden dividiert, indem der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird.**

Die Division ist uns aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bereits als Umkehrung der Multiplikation bekannt. Dort muß aber der Dividend ein Vielfaches des Divisors sein, da sonst die Division im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbar ist. In unserem neuen Zahlbereich, dem Bereich der gebrochenen Zahlen, ist nun die D i v i s i o n i m m e r a u s f ü h r b a r.

Aus $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ folgt $\frac{x}{y} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$, also $\frac{x}{y} = \frac{c \cdot b}{d \cdot a}$.

Das bedeutet:

▶ **Bei der Division von gebrochenen Zahlen erhält man als Ergebnis stets wieder eine gebrochene Zahl.**

Wir können jedoch nicht durch die gebrochene Zahl dividieren, die durch Brüche mit dem Zähler 0 dargestellt werden kann.

■ Beispiel 23:

$$\frac{3}{5} : \frac{0}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{0} = \frac{21}{0}$$

Wir sehen, daß wir in diesem Fall immer einen Bruch erhalten würden, dessen Nenner gleich Null ist. Diese Brüche stellen aber keine gebrochenen Zahlen dar.

Da wir die Brüche mit dem Zähler 0 durch die natürliche Zahl 0 ersetzen können, sagen wir auch im Bereich der gebrochenen Zahlen:

▶ **Durch Null kann nicht dividiert werden.**

Während im Bereich der gebrochenen Zahlen die Division i m m e r ausgeführt werden kann, ist dies bei der Subtraktion nicht immer möglich.

Die Subtraktion ist nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer ist als der Minuend. Wir werden uns deshalb später noch-

mals einen neuen Zahlbereich aufbauen, in dem dann alle vier Grundrechenoperationen uneingeschränkt ausführbar sein werden.
Zusammenfassend stellen wir noch einmal fest, daß sich die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, beim Vergleichen und bei allen vier Grundrechenoperationen wie die natürlichen Zahlen verhalten:

gebrochene Zahlen	natürliche Zahlen
$\frac{5}{1} = \frac{5}{1}$	$5 = 5$
$\frac{7}{1} < \frac{10}{1}$	$7 < 10$
$\frac{3}{1} + \frac{5}{1} = \frac{8}{1}$	$3 + 5 = 8$
$\frac{12}{1} - \frac{7}{1} = \frac{5}{1}$	$12 - 7 = 5$
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{30}{1}$	$6 \cdot 5 = 30$
$\frac{90}{1} : \frac{18}{1} = \frac{5}{1}$	$90 : 18 = 5$

Aus diesem Grunde können wir die Brüche mit dem Nenner 1 beim Vergleichen und beim Rechnen durch natürliche Zahlen, nämlich durch ihre Zähler, ersetzen. Umgekehrt können wir aber auch die natürlichen Zahlen durch Brüche mit dem Nenner 1 ersetzen. Statt 5; 8; 23 können wir z. B. $\frac{5}{1}$; $\frac{8}{1}$; $\frac{23}{1}$ schreiben.
Wir wissen, daß Brüche, die durch Erweitern aus einander hervorgehen, in einer Klasse liegen, also dieselbe gebrochene Zahl darstellen. Deshalb können auch die Brüche, die sich durch Erweitern aus den Brüchen mit dem Nenner 1 ergeben, durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

■ Beispiel 24:

$\frac{30}{5} = \frac{6}{1}$ kann durch 6 ersetzt werden.

Umgekehrt kann man z. B. 9 durch $\frac{27}{3}$ ersetzen, denn es gilt $\frac{27}{3} = \frac{9}{1}$.

Durch diese Ersetzungsmöglichkeit sind die Regeln, die du in deinem Lehrbuch für die „Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl" und für die „Division eines Bruches durch eine ganze Zahl" findest, überflüssig geworden.[1]
Du kannst in solchen Aufgaben die natürlichen Zahlen durch Brüche mit dem Nenner 1 ersetzen und dann die Regeln für die Multiplikation und die Division von gebrochenen Zahlen anwenden.

■ Beispiel 25:

a) $\frac{7}{5} \cdot 8 = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{1} = \frac{7 \cdot 8}{5 \cdot 1} = \frac{56}{5}$

b) $\frac{14}{3} : 5 = \frac{14}{3} : \frac{5}{1} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$

Wenn es möglich ist, kürze vor dem Ausrechnen!

c) $\frac{36}{5} : 9 = \frac{36}{5} : \frac{9}{1} = \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{36 \cdot 1}{5 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$

9. Darstellung von gebrochenen Zahlen durch Dezimalzahlen

(Ergänzung zum Abschnitt 17)

Oft ist es für das Rechnen bequemer, statt der bisher betrachteten gebrochenen Zahlen Dezimalzahlen zu benutzen. Wir wollen jetzt zeigen, daß beide Schreibweisen gleichwertig sind, falls wir nur *periodische* Dezimalzahlen betrachten.
Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Division uneingeschränkt ausführbar, wenn der Divisor nicht Null ist. Also können wir die gebrochene Zahl bestimmen, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{8}{1} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3}{1}.$$

[1] Anmerkung: Außerdem handelt es sich hier nicht um ganze Zahlen, sondern um natürliche Zahlen.

Sie wird durch Dividieren berechnet:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1} : \frac{8}{1}.$$

Nach der Regel für das Dividieren von gebrochenen Zahlen erhalten wir:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}.$$

Nun wissen wir aber andererseits, daß wir Brüche mit dem Nenner 1 bei allen Rechenoperationen durch natürliche Zahlen ersetzen können. Statt $\frac{x}{y} = \frac{3}{1} : \frac{8}{1}$ können wir also auch $\frac{x}{y} = 3 : 8$ schreiben. Wir können also ein und dieselbe Zahl einmal durch den Bruch $\frac{3}{8}$ und einmal durch das Ergebnis der Divisionsaufgabe $3 : 8$ darstellen.

Da die Division nur für den Fall erklärt ist, in dem der Divisor von Null verschieden ist, erkennen wir hier noch einmal, daß Brüche mit dem Nenner 0 sinnlos sind.

Wir können also für beliebige Brüche $\frac{a}{b}$ den Quotienten $a : b$ schreiben, wenn $b \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} = a : b \quad (b \neq 0).$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir jetzt jede gebrochene Zahl durch eine periodische Dezimalzahl darstellen. Beispiele dazu findest du im Lehrbuch, Abschnitt 17.

Falls in einer Dezimalzahl von einer bestimmten Stelle an nur Nullen auftreten, falls die Periode also nur die Ziffer 0 enthält, schreiben wir diese Nullen nicht hin und sagen: Die Dezimalzahl ist e n d l i c h .

Bei der Darstellung einer gebrochenen Zahl durch eine Dezimalzahl entsteht immer eine p e r i o d i s c h e Dezimalzahl. Das muß bewiesen werden. Diesen Beweis können wir aber in der sechsten Klasse noch nicht führen. Wir wollen uns nun noch überlegen, daß umgekehrt jede periodische Dezimalzahl auch eine gebrochene Zahl darstellt.

Endliche Dezimalzahlen stellen gebrochene Zahlen dar. Das wurde bereits im Lehrbuch im Abschnitt 17 beschrieben.

Wir überlegen uns nun, daß auch durch jede unendliche periodische Dezimalzahl eine gebrochene Zahl dargestellt wird.

■ Beispiel 26:

Welche gebrochene Zahl wird durch $0,\overline{3}$ dargestellt?
Wir bilden das Zehnfache von $0,\overline{3}$. Dazu müssen wir das Komma um eine Stelle nach rechts rücken. Wir erhalten als Zehnfaches von $0,\overline{3}$ also die Dezimalzahl $3,\overline{3}$. Dabei steht hinter dem Komma wieder unendlich oft die Ziffer 3. Nun subtrahieren wir $0,\overline{3}$ von $3,\overline{3}$. Als Differenz erhalten wir 3. Dies ist dann das Neunfache von $0,\overline{3}$. Also ist $0,\overline{3}$ der neunte Teil von 3. Wir erhalten

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Wenn wir die Dezimalzahl $0,\overline{3}$ mit x bezeichnen, können wir den Rechengang kürzer aufschreiben:

$$x = 0,\overline{3}$$

Das Zehnfache: $10\,x = 3,\overline{3}$

Das Einfache abziehen: $x = 0,\overline{3}$

Das Neunfache: $9\,x = 3$

$$x = \frac{3}{9}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

■ Beispiel 27:

Welche gebrochene Zahl wird durch $0,\overline{235}$ dargestellt?
Hier ist die Periode dreistellig. Um bei der Subtraktion hinter dem Komma nur Nullen zu erhalten, multiplizieren wir mit 1000:

$$\begin{aligned} 1000\,x &= 235,\overline{235} \\ x &= 0,\overline{235} \\ \hline 999\,x &= 235 \\ x &= \frac{235}{999} \end{aligned}$$

■ Beispiel 28:

Welche gebrochene Zahl wird durch $0,23\overline{6}$ dargestellt?

Hier multiplizieren wir einmal mit 1000 und einmal mit 100:

$$\begin{aligned} 1000\,x &= 236{,}\overline{6} \\ 100\,x &= 23{,}\overline{6} \\ \hline 900\,x &= 213 \\ x &= \frac{213}{900} \\ x &= \frac{71}{300} \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß jede periodische Dezimalzahl eine gebrochene Zahl darstellt. Gleichzeitig haben wir ein Verfahren kennengelernt, um diese gebrochene Zahl zu finden.
Auch hier wollen wir den allgemeinen Beweis nicht führen. Du erkennst aber an den Beispielen, daß dieses Verfahren wegen der Perioden grundsätzlich durchführbar ist.

10. Vom Beweisen geometrischer Sätze

(Ergänzung zum Abschnitt 33)

1. Beim genauen Betrachten sorgfältig gezeichneter Figuren fallen uns manche Eigenschaften auf, die bei allen gleichartigen Figuren (z. B. bei allen gleichschenkligen Dreiecken) aufzutreten scheinen. Wir fassen unsere Beobachtungen dann in einem geometrischen Satz zusammen, z. B.

▶ **In a l l e n gleichschenkligen Dreiecken sind die beiden Basiswinkel jeweils gleich groß.**

Das ist an sich eine voreilige Behauptung, denn wir haben keineswegs a l l e gleichschenkligen Dreiecke untersucht, sondern haben unsere Aussage nur an e i n i g e n Dreiecken bestätigt gefunden. Solche Aussagen können aber durchaus falsch sein.
Da wir aber wegen der meist unbegrenzt großen Anzahl nicht sämtliche Figuren untersuchen können, muß für solche Aussagen, die nur aus einigen Figuren gewonnen (d. h. vermutet) wurden, die Allgemeingültigkeit auf andere Weise gezeigt (d. h. bewiesen) werden.
Aber auch aus zwei anderen Gründen ist es nicht angängig, lediglich durch Betrachten oder Vermessen von Figuren Aussagen als allgemein-

gültig bewiesen zu betrachten. Wenn wir z. B. eine Anzahl von Quadraten, Rechtecken und gleichschenkligen Trapezen konstruieren, ihre Diagonalen einzeichnen und diese sorgfältig mit Hilfe des Zirkels vergleichen, könnten wir zu der Aussage verleitet werden:

In allen Vierecken sind die beiden Diagonalen jeweils gleich lang.

Dabei würden wir in doppelter Weise voreilig handeln. Denn einmal ist es nicht schwer, Vierecke zu zeichnen, für die das nicht zutrifft. Wir hätten also höchstens sagen dürfen:
Es gibt Vierecke, deren beide Diagonalen gleich lang sind.
Zweitens müssen wir aber die Frage stellen, ob wir denn überhaupt die Länge der Diagonalen so genau feststellen können, daß wir mit solcher

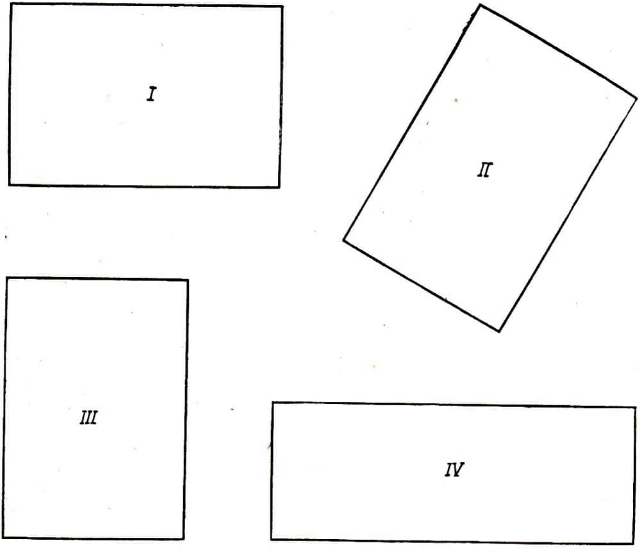


Abb. 8

Sicherheit daraus auf die Gleichheit der Diagonalenlängen bei den untersuchten Figuren schließen können. Das ist sicher nicht der Fall. Denn beim Betrachten von Figuren unterliegen wir oft Täuschungen und beim Vermessen können immer nur Näherungswerte ermittelt werden.

● *Versuche festzustellen, welche der in Abbildung 8 dargestellten Rechtecke den gleichen Flächeninhalt haben, einmal durch Schätzen, dann durch möglichst exaktes Messen!*

Wir stellen also fest:
Das Betrachten und Vermessen einzelner Figuren bietet keine hinreichende Sicherheit, um Aussagen in geometrischen Sätzen als richtig zu erweisen. Denn einmal sollen geometrische Sätze möglichst Aussagen enthalten, die für a l l e Figuren einer bestimmten Art richtig sind, d. h., sie sollen Eigenschaften einer ganzen Klasse von Figuren (z. B. a l l e r gleichschenkligen Dreiecke, a l l e r Vierecke) zum Inhalt haben. Zum anderen sind aber dabei Zufälligkeiten (Täuschungen, Meßfehler u. a.) nicht ausgeschlossen, so daß selbst die Richtigkeit einer Einzelaussage nicht völlig gesichert ist.

2. Wohl aber können Untersuchungen an einer Anzahl von Figuren zum Aufdecken geometrischer Eigenschaften führen, die dann als Vermutung ausgesprochen werden können. So haben wir bisher schon eine ganze Anzahl geometrischer Eigenschaften durch bestimmte Bewegungen einer Figur entdeckt. Wir lernten bisher das Umklappen der Figur um eine Gerade und das Verschieben längs einer Geraden kennen.

a) Beim **Umklappen** wird das Gebilde (Punkt, Strecke, Winkel, Figur) so lange um die Achse der Umklappung bewegt, bis es (natürlich im allgemeinen an einer anderen Stelle) wieder in derselben Ebene liegt. Als Modell benutzten wir das Falten des Zeichenblattes längs dieser Geraden. Wir haben dabei als selbstverständlich angenommen, daß sich die umgeklappte Figur während dieser Bewegung nicht verändert, so daß sie zwar in einer neuen Lage, aber nach Größe und Gestalt unverändert erscheint. Aus dieser Bewegung haben wir z. B. die Sätze über die Achsensymmetrie gewonnen.

b) Beim **Verschieben** eines Gebildes (Punkt, Strecke, Winkel, Figur) längs einer Geraden setzen wir ebenfalls voraus, daß das Gebilde während dieser Bewegung keinerlei Veränderungen in bezug auf Größe und Gestalt erfährt.
Diese Festlegung wollen wir nun auf die Figur in Abbildung 23a im Lehrbuch Mathematik für die 6. Klasse übertragen.
Der Winkel δ wird längs der Geraden g_2 verschoben und geht dadurch in den Winkel δ_1 über. (Die Gerade g geht dabei in die Gerade

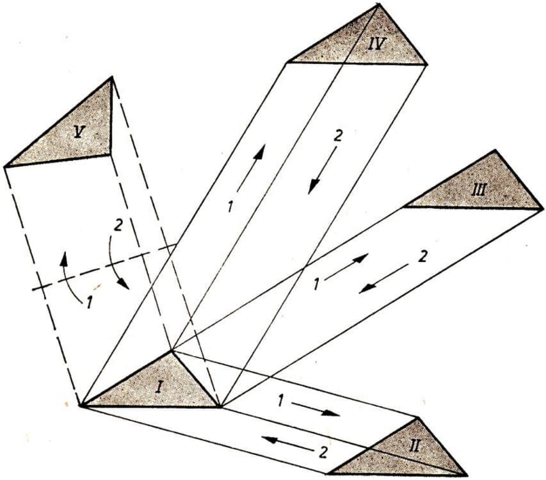


Abb. 9

g_1 über.) Wenn wir nun Winkelpaare (wie δ und δ_1), deren einer Winkel bei einer solchen Verschiebung in den anderen übergeht, Stufenwinkel an Parallelen nennen, so können wir den folgenden Satz herleiten:

▶ **Stufenwinkel an Parallelen sind stets jeweils gleich groß.**

Das Überführen eines geometrischen Gebildes in ein anderes durch eins der genannten Verfahren bezeichnet man kurz als **Bewegung.** Bei jeder Bewegung bleibt also das Gebilde nach Größe und Gestalt unverändert, so daß es möglich ist, zu einer Figur durch Bewegungen eine beliebige Anzahl weiterer Figuren zu erzeugen, die alle dieselbe Größe und Gestalt haben. (Bewegungen 1 in Abb. 9). Umgekehrt ist natürlich auch möglich, diese Figuren durch Bewegungen wieder so aufeinanderzulegen, daß sie sich völlig decken. (Bewegungen 2 in Abb. 9). Man nennt solche Gebilde **deckungsgleich** oder **kongruent.** Es leuchtet anschaulich ein, daß es im zweiten Fall nicht nötig ist, die Figuren durch Bewegungen unbedingt wieder mit der Ausgangsfigur I zur Deckung zu bringen. Man könnte natürlich auch alle z. B. mit der Figur III zur Deckung bringen (Abb. 10). Unter den kongruenten Figuren ist also offenbar keine besonders ausgezeichnet. Man sagt deshalb auch, sie bilden eine **Kongruenzklasse.**

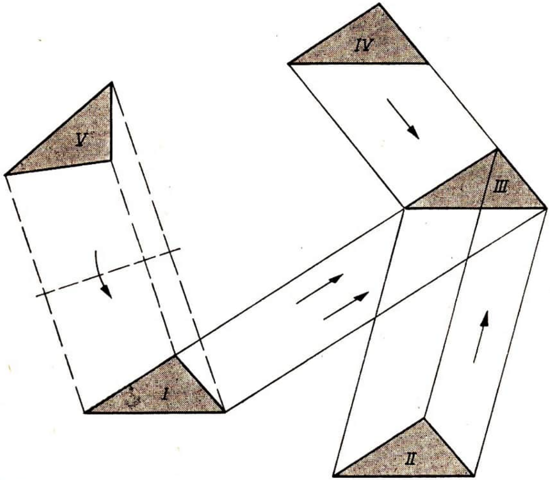


Abb. 10

3. Wenn also Figuren auch oft Anregungen zum Untersuchen und Feststellen besonderer Eigenschaften und damit zum Vermuten geometrischer Sätze geben können, bedarf die Richtigkeit und Allgemeingültigkeit einer solchen Aussage im allgemeinen eines Beweises, der nicht bloß auf der Anschauung beruhen kann. Er muß vielmehr durch Überlegungen geführt werden, die zur Begründung immer nur Tatsachen benutzen, deren Richtigkeit schon vorher durch Festlegungen oder andere Beweise gesichert ist.

a) Einige geometrische Sätze lassen sich unmittelbar aus der Festlegung (Definition) eines Fachbegriffs herleiten, ohne daß zum Beweis noch andere Sätze benötigt werden.

■ Beispiele:

Der Satz *In allen gleichschenkligen Dreiecken sind jeweils zwei Seiten gleich lang* läßt sich unmittelbar aus der Festlegung des Fachbegriffs „gleichschenkliges Dreieck" herleiten und als richtig erkennen. Bekanntlich soll nämlich ein Dreieck gerade dann gleichschenklig heißen, wenn zwei seiner Seiten gleiche Länge haben.

Der Satz *Alle Nebenwinkel betragen zusammen jeweils 180°* läßt sich allein aus der Festlegung des Begriffs „Nebenwinkel" herleiten und beweisen. Diese lautet bekanntlich: „Nebenwinkel sind solche Winkelpaare, die entstehen, wenn von einem Punkt einer Geraden aus in beliebiger Richtung ein Strahl gezeichnet wird." Beide so entstehenden Winkel ergeben dann nämlich stets zusammen einen gestreckten Winkel, also 180°, da ja nach der Definition das eine Schenkelpaar der Nebenwinkel die Ausgangsgerade bildet.

b) Die Mehrzahl geometrischer Sätze bedarf aber zum Beweis einer mehr oder minder langen Kette von Schlüssen, die immer wieder mit Hilfe bereits bewiesener Sätze oder gewisser grundlegender Festsetzungen vollzogen werden müssen. Das geschieht folgendermaßen.

■ Beispiel 29:

In Abbildung 11 werden nach unserer Festlegung Winkel α und Winkel β als Scheitelwinkel bezeichnet. Beim Betrachten der Figur vermutet man, daß Scheitelwinkel stets gleich groß sind. Um die Richtigkeit dieser Vermutung zu beweisen, versuchen wir, aus solchen Sätzen, die bereits durch Beweis

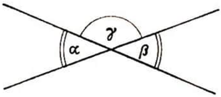


Abb. 11

gesichert sind, Folgerungen auf die Größe der Winkel α und β zu ziehen. Offenbar sind die Winkel α und γ bzw. β und γ Nebenwinkel, betragen also, wie schon bewiesen wurde, jeweils zusammen 180°. Folglich gilt:

$\alpha = 180° - \gamma$, und entsprechend: $\beta = 180° - \gamma$.

Da sowohl α als auch β demselben dritten Winkel (eben $180° - \gamma$) gleich sind, sind sie auch untereinander gleich. Da über die Größe von α und β keine besonderen Voraussetzungen gemacht wurden, ist damit die Gleichheit der Scheitelwinkel ganz allgemein als richtig erwiesen.

■ Beispiel 30:

Es soll bewiesen werden, daß Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen stets jeweils gleich groß sind. In Abbildung 12 sind offenbar die Winkel α und β nach der Begriffsfestlegung zwei zusammengehörige Wechselwinkel. Ihre Gleichheit soll mit Hilfe anderer, bereits gesicherter Sätze bewiesen werden.

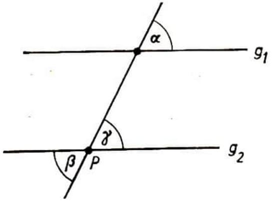


Abb. 12

Dazu muß als erstes gesichert sein (um überhaupt zum Winkel α einen Wechselwinkel β erhalten zu können), daß es möglich ist, zur Geraden g_1 durch den Punkt P (der nicht auf g_1 liegt), stets eine Parallele, aber auch nur eine einzige Parallele (d. h. kürzer: genau eine Parallele g_2) zu zeichnen. Wir setzen voraus, daß diese Möglichkeit immer gegeben ist. Dann kann der Beweis folgendermaßen geführt werden.

Ausführliche Form	Kurzform
Winkel β und Winkel γ sind Scheitelwinkel. Es wurde bereits bewiesen, daß Scheitelwinkel stets gleich groß sind.	$\beta = \gamma$ als Scheitelwinkel
Winkel α und Winkel γ sind Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Deren Gleichheit wurde auf Grund der Erzeugung durch Verschiebung als gesichert angenommen.	$\alpha = \gamma$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
Daraus folgt: Wenn die Winkel α und β ein und demselben dritten Winkel γ gleich sind, müssen sie auch untereinander gleich sein (Grundsatz von der Drittengleichheit).	$\alpha = \beta$ (Drittengleichheit), was zu beweisen war.

■ Beispiel 31:

Es ist zu beweisen:
Die Summe der Innenwinkel beträgt in jedem Dreieck 180°. In Abbildung 91 des Lehrbuches ist durch den Eckpunkt C des Dreiecks ABC die Parallele zur Seite AB gezeichnet. Wir setzen auch hierbei wieder voraus, daß sich zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt genau eine Parallele ziehen läßt. Dann können wir folgendermaßen schließen:

Behauptung (die es zu beweisen gilt):

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180^\circ$

Voraussetzung (für die Beweisführung):

Gerade durch $ECD \parallel AB$ ($\parallel$ lies: parallel zu)

Beweis:

$\sphericalangle DCA + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BCE$ 180° nach Voraussetzung (d. h., sie ergeben zusammen einen gestreckten Winkel, weil nach Voraussetzung E, C und D auf einer Geraden liegen)

$\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$ nach Voraussetzung als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen („nach Voraussetzung" deshalb, weil dadurch CD und AB als parallel gesichert sind; „als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen" darf deshalb als Begründung angegeben werden, weil wir vorher im Beispiel 30 die Gleichheit der Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen bewiesen haben)

$\sphericalangle BCE = \sphericalangle ABC$ ebenfalls nach Voraussetzung als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ (da wir offenbar ohne Zerstörung der Gleichheit in der ersten Gleichung des Beweises an Stelle von $\sphericalangle DCA$ den gleich großen Wert $\sphericalangle CAB$ und entsprechend an Stelle von $\sphericalangle BCE$ auch $\sphericalangle ABC$ schreiben dürfen).

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180^\circ$ (Anwendung des Kommutationsgesetzes der Addition). Das ist aber die am Anfang stehende Behauptung, die damit als richtig bewiesen ist. Wir müssen also sehr genau darauf achten, daß wir bei einer Beweisführung nur solche Aussagen und Sätze benutzen, die vorher durch eine stichhaltige Begründung bewiesen oder als gültig vorausgesetzt wurden. Dadurch ergibt sich meist eine ganze Kette von Aussagen und Sätzen, die für die Beweisführung nacheinander benötigt werden. Für unser Beispiel sieht das folgendermaßen aus:

Es wurde hergeleitet

aus der Festlegung des Begriffs „Nebenwinkel“	der Satz von der Nebenwinkelsumme,
aus dem Satz von der Nebenwinkelsumme	der Satz von der Scheitelwinkelgleichheit,
aus der Kongruenz der Figuren bei Parallelverschiebung	der Satz von der Gleichheit der Stufenwinkel an Parallelen,
aus dem Satz von der Gleichheit der Stufenwinkel an Parallelen und dem Satz von der Scheitelwinkelgleichheit	der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen,
aus dem Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen	der Satz von der Winkelsumme im Dreieck (der zu beweisen war).

In der Geometrie (wie in der Mathematik überhaupt) ist deshalb ein systematischer, lückenloser Aufbau (von einigen Grundbegriffen und grundlegenden Sätzen ausgehend) erforderlich, um das ganze Gebäude zu sichern. Man spricht von einem axiomatischen Aufbau.

Aufgaben

1. Beweise den Winkelsummensatz im Dreieck in Anlehnung an Abbildung 13 und begründe jeden Beweisschritt ausführlich!

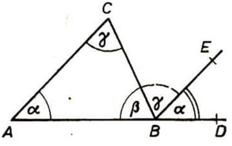


Abb. 13

2. Stelle die beiden Beweise zum Außenwinkelsatz im Dreieck, die im Lehrbuch auf S. 137 in Worten beschrieben sind, in Kurzform dar mit Angabe der Begründung für jeden Beweisschritt!

3. Verfahre genauso mit Satz 5 des Lehrbuchs auf S. 103!

4. a) Zeichne ein beliebiges Viereck mit einer der beiden Diagonalen! Was für Teilfiguren entstehen?
   b) Leite daraus einen Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck aus der Anschauung her! Gilt er wohl für alle Vierecke?
   c) Beweise die Richtigkeit des von dir vermuteten Satzes!
   d) Zeichne auch die vier Außenwinkel ein! Versuche einen Satz über die Summe dieser Außenwinkel zu finden und beweise seine Richtigkeit!

5. a) Verfahre genauso mit einem Fünfeck, einem Sechseck ...!
   b) Könntest du auch für ein Vieleck mit 100 Seiten und 100 Ecken die Summe der Innen- bzw. Außenwinkel angeben?
   Versuche auch diese Sätze zu beweisen!

6. Welche der folgenden Formulierungen ist bei den Sätzen über die Summe der Innenwinkel, über die Summe der Außenwinkel, über die Größe eines Außenwinkels beim Dreieck richtig:
   „Für alle Dreiecke gilt: ..." oder
   „Es gibt Dreiecke, für die gilt: ..."?

11. Von den Kongruenzklassen geometrischer Figuren

(Ergänzungen zum Abschnitt 37)

Schneide aus quadratisch kariertem Papier je fünf Figuren aus, wie sie in Abbildung 14 gezeigt werden!

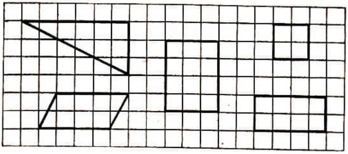


Abb. 14

Kennzeichne die 20 Vierecke mit je einem roten, die fünf Dreiecke mit je einem blauen Kreuz!
Mische dann alle 25 Blättchen gut durcheinander!
Wir wollen jetzt die Figuren wieder sortieren.
Man sagt auch: Aus der Menge aller Figuren sollen Teilmengen gebildet werden, deren Elemente bestimmte gleiche Eigenschaften haben. Du wirst einsehen, daß das nur möglich ist, wenn wir die Elemente nach solchen Eigenschaften ordnen (z. B. nach der Anzahl der Ecken). Dann kann jede Figur eindeutig einer der Teilmengen, aber nicht zugleich auch einer anderen zugewiesen werden (entweder ist es ein Dreieck oder ein Viereck). Außerdem darf keine Figur „übrigbleiben", d. h. zu keiner der gewählten Teilmengen passen.
Für eine solche Einordnung in bestimmte Teilmengen sagt man auch:
Es soll eine Klasseneinteilung vorgenommen werden (wobei alle Elemente einer Klasse gewisse gleiche Eigenschaften besitzen sollen).
Das kann in sehr verschiedener Weise geschehen.

■ Beispiel 32a:

Die eine Klasse soll (wie oben schon erwähnt) alle Vierecke, die andere alle Dreiecke enthalten. Dazu müssen wir entweder bei jeder Figur die Ecken oder die Seiten oder die Winkel zählen oder wir müssen auf die Farben der aufgezeichneten Kreuze achten. Es ist offenbar hinreichend, wenn wir beim Sortieren auf eins dieser Merkmale achten.

■ Beispiel 32b:

Die eine Klasse soll alle Figuren umfassen, die rechte Winkel haben, die andere Klasse die Figuren ohne rechte Winkel.
Dazu müssen wir tatsächlich auf die Größe der Winkel achten, denn die Anzahl der Ecken, Seiten, Winkel und die Farbe der Kreuze ist nicht entscheidend für diese Klasseneinteilung. Wohl aber ist es notwendig, daß in die zweite Klasse keine mit einem blauen Kreuz versehene Figur eingeordnet wird. Es ist aber nicht hinreichend, allein darauf zu achten.

■ Beispiel 32c:

Wir wollen vier Klassen bilden, eine Klasse der Quadrate, eine der Rechtecke, eine der Parallelogramme und eine der Dreiecke.
Dazu können wir etwa so verfahren:
Wir achten zunächst wie im Beispiel 32a auf die Farbe der Kreuze und können so die Elemente der Klasse der Dreiecke herausfinden (blau).

Bei den mit roten Kreuzen versehenen Figuren achten wir nun wie im Beispiel 32b auf die Größe der Winkel und sondern so die Klasse der Parallelogramme aus, die keine rechten Winkel enthalten. Um jetzt Quadrate von Recktecken zu trennen, müssen wir als neue Eigenschaft beachten, welche Elemente dieser Teilmenge von 15 Figuren gleichseitig sind; diese bilden die Klasse der Quadrate, der Rest die Klasse der Rechtecke.

■ Beispiel 32d:

Wir wollen eine Klasseneinteilung vornehmen, bei der in jeder Klasse nur untereinander kongruente Figuren vorkommen.
Dazu kann zunächst wie beim Beispiel 32c verfahren werden. Doch müssen wir die Teilmenge der Rechtecke nochmals in bezug auf ihre Seitengrößen (in schmalere und breitere Rechtecke) unterteilen, so daß am Ende fünf Kongruenzklassen entstehen.
Die Einteilung geometrischer Figuren in Kongruenzklassen ist besonders wichtig, insbesondere gilt das für alle Dreiecke. In einer solchen Klasse ist dann die Menge aller Dreicke enthalten, die untereinander kongruent sind, d. h., die in allen entsprechenden Stücken übereinstimmen, so daß sie, aufeinandergelegt, sich völlig decken.
Schneide aus quadratischem kariertem Papier je fünf Dreiecke aus, wie sie in Abbildung 15 gezeigt werden! Mische die 20 Dreiecke gut durcheinander und ordne sie dann wieder nach Kongruenzklassen! Wie viele Klassen erhältst du?

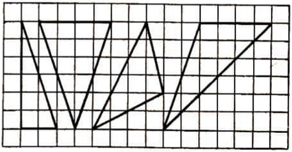


Abb. 15

Wieviel Elemente enthält jede Klasse?
Um festzustellen, ob ein Dreieck einer bestimmten Kongruenzklasse angehört oder nicht, ist es notwendig und hinreichend, zu überprüfen, ob das Dreieck zu einem beliebigen Dreieck aus dieser Kongruenzklasse (einem „Repräsentanten") kongruent ist. Dazu müßte es eigentlich in a l l e n Stücken auf Übereinstimmung mit den entsprechenden Stücken des Repräsentanten untersucht werden. Dazu gehören z. B. alle drei Seiten, sämtliche

Innen- und Außenwinkel, die Höhen, die Winkelhalbierenden usw. Bei Dreiecken genügt es aber schon, die Übereinstimmung in drei geeignet ausgewählten Stücken zu überprüfen. (Beachte: Im Beispiel 32d war es zur Unterteilung der Rechtecke in schmalere und breitere ebenfalls nicht nötig, sämtliche entsprechende Stücke zu vergleichen. Zur Aufteilung der Rechtecke in zwei Klassen genügte es, auf eine Seite zu achten.)
Die Feststellungen derjenigen drei Stücke von Dreiecken, die zur Gewährleistung der Kongruenz übereinstimmen müssen, aber auch genügen, heißen die Kongruenzkriterien für Dreiecke. Wir kennen sie als die vier Kongruenzsätze.
Ihre Herleitung im Lehrbuch kann zu der falschen Ansicht verleiten, daß es sich dabei um eine Aussage über nur je zwei Dreiecke handele. Das ist nicht richtig. Vielmehr können beliebig viele Dreiecke untereinander kongruent sein, und für alle sind dann die Kongruenzkriterien erfüllt. Mit anderen Worten: Die Anzahl der Dreiecke, die zu einer Kongruenzklasse gehören, ist unbegrenzt groß (Abb. 16). Wir können jederzeit weitere Elemente

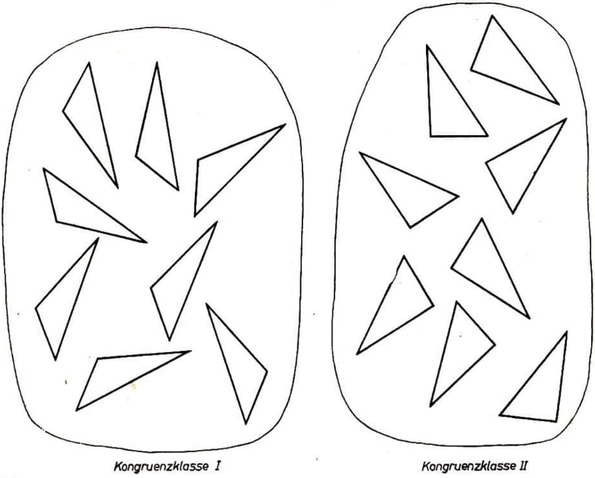


Abb. 16

derselben Kongruenzklasse zeichnen, wenn wir irgend einen Repräsentanten der Klasse

a) längs einer Geraden in beliebige neue Lagen verschieben,
b) um irgendeine Achse in dieselbe Zeichenebene umklappen.

Aufgaben

1. Die Kongruenzsätze für Dreiecke sollten besser folgendermaßen formuliert werden:
„Alle Dreiecke, die in ... übereinstimmen, sind kongruent."
Sprich die Kongruenzsätze in dieser Form aus!

2. Zeichne ein beliebiges Dreieck und dazu eine Anzahl weiterer, die zur gleichen Kongruenzklasse gehören, indem du es längs verschiedener Geraden beliebig verschiebst!
Verwende dazu
   a) eine Schablone des Dreiecks,
   b) die Konstruktion mit Hilfe des Kongruenzsatzes sss,
   c) die Konstruktion mit Hilfe des Kongruenzsatzes sws!

3. Zeichne zu einem beliebigen Dreieck weitere Dreiecke der gleichen Kongruenzklasse, indem du das Ausgangsdreieck um verschiedene Achsen umklappst! (Achsensymmetrie!)
Verwende dazu
   a) eine Schablone des Dreiecks,
   b) die Konstruktion mit Hilfe des Kongruenzsatzes wsw,
   c) die Konstruktion mit Hilfe des Kongruenzsatzes ssw!
   Was mußt du im Falle c) beachten?

4. Kannst du bei Aufgabe 2 und 3 auch zu weiteren Dreiecken derselben Kongruenzklasse kommen, wenn du im weiteren Verlauf nicht immer wieder vom anfänglich gezeichneten Dreieck ausgehst, sondern von einem, das du zunächst aus diesem gewonnen hast?

5. Bezeichne bei allen Dreiecken, die du bei Aufgabe 2 oder 3 erhalten hast, entsprechende Ecken mit den gleichen Buchstaben (A, B, C)! Umfahre die Figuren in der Reihenfolge dieser Buchstaben! Was stellst du fest?

12. Von der Systematisierung der Vierecke

(Ergänzung zum Kapitel V)

Im allgemeinen Viereck haben alle Seiten untereinander verschiedene Größen. Gegenseiten verlaufen nicht parallel zueinander und auch die Winkel sind verschieden groß und im allgemeinen Fall nicht gleich 90°. Die Sonderformen der Vierecke (Trapez, Drachenviereck, Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat) sind dadurch ausgezeichnet, daß gewisse Seiten gleich lang sind, manche Gegenseiten parallel zueinander verlaufen oder die Winkel alle gleich 90° sind. Zwischen den verschiedenen Formen bestehen Zusammenhänge, die bei systematischen Übersichten besonders deutlich werden.

Ubersicht 1:

allgemeines Viereck

1 Paar Gegenseiten parallel

2 Paare Gegenseiten parallel

Nichtparallele Gegenseiten gleich lang

Ubersicht 2:

allgemeines Viereck

2 Paare Nachbarseiten je gleich lang

2 Paare Gegenseiten je gleich lang

Sämtliche Seiten gleich lang

Ubersicht 3:

Parallelogramm

Sämtliche Winkel gleich groß

Sämtliche Seiten gleich lang

Sämtliche Winkel gleich groß
und sämtliche Seiten gleich lang

Aufgaben

1. Ergänze in den Übersichten 1, 2 und 3 die fehlenden Fachbezeichnungen und zeichne jeweils eine entsprechende Figur dazu!

2. Im Abschnitt 39 des Lehrbuchs sind die Eigenschaften des Parallelogramms auf S. 157 zusammengefaßt. Kommen diese Eigenschaften auch den Sonderformen des Parallelogramms (siehe Übersicht 3) zu?

3. a) Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang. Welchen anderen Vierecken der Übersicht 3 kommt diese Eigenschaft ebenfalls zu, welchen nicht?

   b) Beantworte dieselbe Frage für die Eigenschaft des Rhombus, daß seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen!

   c) Beantworte dieselbe Frage für die Eigenschaft des Quadrats, gleich lange, aufeinander senkrecht stehende Diagonalen zu haben!

4. Fasse die Ergebnisse der Aufgaben 2 und 3 in Sätzen folgender Art zusammen!

   a) Alle Quadrate sind ... und haben deshalb sämtliche Eigenschaften der ...

   b) Es gibt Parallelogramme, die ... sind, andere aber, die keine ... sind. Die Eigenschaften der ... kommen deshalb nicht allen Parallelogrammen zu.

   Formuliere entsprechende Aussagen anhand der Übersicht 3!

5. Untersuche genauso die Übersichten 1 und 2!

6. a) Zerlege ein Drachenviereck und ein Parallelogramm (Übersicht 2) durch die Diagonalen in vier Dreiecke und vergleiche diese untereinander! Kannst du kongruente Teildreiecke finden? Wie liegen sie jeweils zueinander?

   b) Ziehe daraus Schlüsse anhand der Übersicht 2 auf die Teildreiecke des Rhombus!

7. a) Zerlege ein Parallelogramm (Übersicht 3) durch eine Diagonale in zwei Teildreiecke und vergleiche sie! Was folgt daraus für die übrigen Vierecke der Übersicht 3?

   b) Zerlege ein Parallelogramm durch zwei Diagonalen in vier Teildreiecke, vergleiche sie und ziehe daraus Schlüsse für die übrigen Vierecke der Übersicht 3!

8. a) Untersuche die Symmetrieverhältnisse (Axialsymmetrie bzw. Zentralsymmetrie) der Vierecke in Übersicht 1, 2 und 3!
Zeichne dazu jeweils sämtliche Symmetrieachsen ein und achte darauf, ob sie durch die Eckpunkte oder durch die Seitenmitten verlaufen!

b) Gilt auch hierbei, daß Symmetrieeigenschaften einer allgemeineren Figur sich bei sämtlichen Sonderformen wiederfinden? Gilt auch das Umgekehrte?

c) Formuliere Sätze in folgender Form:
Alle Parallelogramme sind zentralsymmetrisch, folglich auch alle ...
Bei allen Drachenvierecken ist eine Diagonale Symmetrieachse, folglich auch bei allen ...

d) Warum hat das Quadrat vier Symmetrieachsen?

INHALTSVERZEICHNIS

1. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen 3
2. Der größte gemeinsame Teiler natürlicher Zahlen . . . 6
3. Gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen 10
4. Die Ordnung der gebrochenen Zahlen 12
5. Die Addition von gebrochenen Zahlen 17
6. Die Subtraktion von gebrochenen Zahlen 20
7. Die Multiplikation von gebrochenen Zahlen 21
8. Die Division von gebrochenen Zahlen 25
9. Darstellung von gebrochenen Zahlen durch Dezimalzahlen 28
10. Vom Beweisen geometrischer Sätze 31
11. Von den Kongruenzklassen geometrischer Figuren . . . 40
12. Von der Systematisierung der Vierecke 45

00 06 04-1
0,30 DM