Endre Hódi, u.a.

Mathematisches Mosaik

Übersetzung: Günther Eisenreich
Illustrationen: Rita Melzig
1977 Urania Verlag Leipzig / Jena / Berlin
MSB: Nr. 102
Abschrift und LaTex-Satz: 2022 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Errate, an welche Zahl ich gedacht habe!

1.1 Der mathematische Hintergrund von Scherzaufgaben über das Erraten von Zahlen

Tamás Varga

Nur abergläubische Menschen glauben an Gedankenlesen. Stets muss dem "Gedankenleser" auf stofflichem Wege etwas Information zufließen, aus der er dann Schlüsse ziehen kann. Das scheinbar Geheimnisvolle erklärt sich dadurch, dass der Beobachter entweder nicht sofort den Weg der Information verfolgen kann oder nicht in der Lage ist, aus der Information auf den gedachten Namen, die gedachte Zahl usw. zu schließen.

Es geht uns hier jedoch um Mathematik - wenn auch in unterhaltsamer Form -, nicht um Taschenspielerei. Wir sprechen deshalb nur von solchen Zahlenratetricks, in denen die Information keinerlei geheimnisvollen Weg nimmt und die Überraschung allein davon herrührt, wie man aus den erhaltenen Daten die gedachte Zahl ermitteln kann.

In diesem Sinne können wir vom Erraten gedachter Zahlen und anderer Angaben sprechen. Wir können dafür jetzt aber auch - wenn man so will -, ohne dass noch die Gefahr eines Missverständnisses besteht, Gedankenlesen sagen. Den einen oder anderen Trick dieses Gedankenlesens lernen bereits die Schulkinder in der 8. Klasse.

»Ich habe mir eine Zahl gedacht« - sagt der Lehrer. Die Kinder nehmen es zur Kenntnis und schreiben in ihre Hefte:

$$x$$

»Ich habe 4 addiert.« Die Kinder fahren folgendermaßen fort:

$$x+4$$

»Ich habe das Ergebnis mit 5 multipliziert und 50 erhalten«:

$$(x+4)\cdot 5 = 50$$

Indem man rückwärts schließt, kann man hieraus natürlich leicht erraten, dass 10 die Zahl war, die der Lehrer mit 5 multipliziert hat, und 6 die Zahl, aus der er durch Addition von 4 die 10 erhalten hat, und das ist gerade die gedachte Zahl.
Im vorliegenden Falle ist es noch ziemlich überflüssig, sich Notizen zu machen und eine Gleichung aufzuschreiben, da man diese beiden Rechenoperationen leicht im Kopf behalten und, vom Ergebnis ausgehend, zurückverfolgen kann. Wenn aber mehr Operationen vorkommen und die Zahlen nicht so einfach sind, wird man gut daran tun, eine Gleichung aufzuschreiben.

Ein derartiger Fall liegt auch dann vor, wenn der Rückschluss nicht in dieser einfachen Form durchführbar ist, sondern andere Methoden erfordert. Wenn zum Beispiel der Lehrer, nachdem er wie oben mit 5 multipliziert hat, folgendermaßen fortgefahren wäre:

»... von dem Ergebnis habe ich das Doppelte der gedachten Zahl subtrahiert und 50 erhalten«, so wäre es zwar nicht schwer, das zu notieren:

$$(x+4)-5-2x=50$$

Um aber die gedachte Zahl zu erraten, müsste man wissen, dass 5 mal $(x+4)$ dasselbe wie 5 mal x plus 5 mal 4 ist, d. h. $5x+20$:

$$(5x+20)-2x=50$$

Um von diesen $5x+20$ die $2x$ zu subtrahieren, kann man so vorgehen, dass man sie von den $5x$ abzieht und die 20 ungeändert lässt:

$$3x+20=50$$

Hieraus kann man leicht rückwärtsschließen und erraten, dass die gedachte Zahl in diesem Falle 10 ist.

Betrachten wir jetzt eine Variante, die in der Schule kaum gelehrt wird. Zunächst ändern wir die Rollenverteilung.
Jemand denkt sich eine Zahl, der andere (der "Gedankenleser") sagt ihm, was für Operationen er mit der Zahl ausführen soll, erfragt sich danach das Ergebnis und errät auf Grund dessen die gedachte Zahl.
Ein Beispiel für die Vorschrift sei das folgende:

»Denken Sie sich eine Zahl. Das kann eine beliebig große positive ganze Zahl sein. Multiplizieren Sie sie mit 2. Addieren Sie 4 zum Ergebnis. Was Sie damit erhalten haben, multiplizieren Sie mit 5. Subtrahieren Sie hiervon 7. Wie lautet das Ergebnis?
173 ? Dann haben Sie an 16 gedacht.«

Man braucht keine großartigen Rechenoperationen durchzuführen, um in weniger als einer Sekunde auf Grund der als Ergebnis erhaltenen Zahl, der 173, die gedachte Zahl zu erraten, die 16.
Man braucht sich auch nicht auf das Lösen von Gleichungen zu verstehen. Es ist keineswegs notwendig, die Umkehrungen der vorgeschriebenen vier Operationen auf die als Ergebnis erhaltene Zahl anzuwenden. Man braucht vielmehr nur die letzte Stelle des Ergebnisses wegzulassen und von der verbleibenden Zahl 1 abzuziehen.

Die vorgeschriebenen Operationen »machen« nämlich aus x

$$(2x+4)\cdot 5-7$$

Das ist aber dasselbe wie

$$10x+20-7, \qquad \text{d.h.} \qquad 10x+13 \qquad \text{oder} \qquad 10(x+1)+3 \tag{1}$$

Die letzte Ziffer dieser Zahl ist, wenn x eine positive ganze Zahl ist, stets 3, denn diese Zahl ist um 3 größer als ein Vielfaches von 10. Lässt man die letzte Ziffer, die 3, weg, so läuft dies darauf hinaus, von der Zahl 3 zu subtrahieren und das Ergebnis durch 10 zu teilen.

Auf diese Weise er- hält man jedoch aus $10(x+1)+3$ gerade $x+1$.
Man braucht nun nur noch 1 zu subtrahieren, um die gedachte Zahl zu erhalten. Die letzte Ziffer weglassen, von der verbleibenden Zahl 1 subtrahieren ist selbst für den schwächsten Kopfrechner das Werk eines Augenblicks.

Selbst wenn der andere gar an 999 gedacht hat, hatte er keine langwierige Rechnung durchzuführen, um zu 10003 zu gelangen. Uns fällt es auch in diesem Falle leicht, die gedachte Zahl zu ermitteln: $1000-1=999$.

Wir können eine noch größere Wirkung erzielen, wenn wir zu dem Ergebnis (1) noch eine gedachte Zahl - jetzt aber nur eine einstellige! - addieren lassen. Bezeichnen wir diese Zahl mit y, so bekommen wir als Ergebnis dieser Folge von Operationen

$$10(x+1)+3+y \tag{2}$$

und können die beiden gedachten Zahlen erraten.
Wir ziehen 3 ab und erhalten

$$10(x+1)+y$$

Die letzte Ziffer davon ist y (wenn y tatsächlich einstellig ist). x dagegen ist wiederum diejenige Zahl, die um 1 kleiner als der verbleibende Rest ist.

Wir können den Trick noch komplizierter machen.

»Multiplizieren Sie das Ergebnis (2) mit 25, subtrahieren Sie hiervon 74, multiplizieren Sie das mit 4, addieren Sie zum Ergebnis 97 sowie noch eine Zahl, die jetzt auch zweistellig sein darf !«

Subtrahieren wir hiervon 1101, so erhalten wir der Reihe nach von rechts nach links mit den beiden letzten Ziffern, der vorangehenden Stelle sowie den noch verbleibenden Stellen die zuletzt ausgedachte zweistellige, die vorher gedachte einstellige und die zuerst gedachte beliebigstellige Zahl. Rechnen wir dies an einem Beispiel erst nach !

Unter Variation derselben Aufgabe können wir gleichzeitig das Ergebnis von drei Würfen eines Würfels (dann sind die Zahlen von vornherein einstellig) oder das Geburtsjahr, den Geburtsmonat und -tag von jemandem erraten.
Wenn wir uns darauf verlassen, dass wir uns nicht im Jahrzehnt irren, so kann im letzteren Fall die letzte Ziffer des Geburtsjahres nur die als zweites erfragte einstellige Zahl sein. Wir können also beispielsweise die Nummer des Monats als erstes und den Tag als letztes erfragen. Sind wir uns dagegen im Jahrzehnt nicht sicher, so müssen wir den Trick modifizieren. Wer die Grundsätze verstanden hat, dem wird das nicht weiter schwerfallen.

Vielleicht wird der Leser auch durch den folgenden einfachen Trick mehr überrascht:

»Denken Sie sich eine Zahl. Addieren Sie 6 zu ihr. Multiplizieren Sie das Ganze mit 2. Addieren Sie hierzu noch 4. Nehmen Sie von der erhaltenen Zahl die Hälfte. Ziehen Sie hiervon die gedachte Zahl ab. Sind Sie sicher, dass Sie richtig gerechnet haben? Dann ist 8 herausgekommen.«

Wie denn? Habe ich wirklich ohne jedwede Information dieselbe Zahl erraten, die der andere nach langwieriger Kopfrechnung eben im Kopfe hat, wenn ich nicht einmal weiß, von welcher Zahl er ausgegangen ist? Ist also doch Gedankenlesen möglich?
Davon kann keine Rede sein, das Ganze ist ein einfacher mathematischer Kniff. An welche Zahl auch immer der Betreffende gedacht hat, letzten Endes musste immer 8 herauskommen. Sehen wir nur:

$$\frac{(x+6)\cdot 2+4}{2}-x$$

ist das Endergebnis der Folge von Rechenoperationen. Wir wollen es etwas vereinfachen. Wir können beide Glieder des Zählers durch 2 teilen:

$$x+6+2-x$$

Hieraus ersieht jeder, dass das stets 8 ist, wie auch x gewählt war.

Mit ein bisschen Algebra - ja bereits mit einem bisschen Menschenverstand - können wir beliebig viele solcher Folgen von Rechenoperationen ausdenken, die unabhängig davon, wovon wir ausgegangen sind, immer zu demselben Ergebnis führen.
Den folgenden Trick kann man leicht auf- schreiben. Er ist jedoch nicht so leicht zu erklären. Jemand soll sich eine dreistellige Zahl denken, in der die Differenz[1] der äußersten Stellen mindestens gleich 2 ist. (Beispielsweise genügt 365 unseren Bedingungen, 465 oder 565 dagegen nicht.)
Man kehre die Reihenfolge der Ziffern um. Von der größeren Zahl subtrahiere man die kleinere. Auch in der Differenz kehre man die Reihenfolge der Ziffern um und addiere diese beiden Zahlen. Das Ergebnis lautet immer 1089.

Wir wollen die genannten Operationen an einigen Zahlen durchführen, die unseren Forderungen genügen:

$$\begin{array}{r} 563 \\ -365 \\ \hline 198 \\ +891 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 400 \\ -004 \\ \hline 396 \\ +693 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 913 \\ -319 \\ \hline 594 \\ +495 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 801 \\ -108 \\ \hline 693 \\ +396 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Freilich beweisen diese vier Fälle noch nicht, dass auch in den übrigen Hunderten von Fällen 1089 herauskommt. Wir wollen versuchen, die Gesetzmäßigkeit herauszufinden, mit der dies bewiesen werden kann.

Zunächst bemerken wir, dass die mittlere Ziffer der durch die Subtraktion erhaltenen Zahl (des Zwischenergebnisses) immer 9 ist, während die Summe der beiden äußersten Ziffern gleichfalls 9 beträgt. Ist das nur Zufall oder ist das auch sonst immer so ?

Da wir von der größeren Zahl die kleinere abziehen, ist die erste Ziffer auf jeden Fall oben (im Minuenden) größer als unten im Subtrahenden. (Gleichheit ist auf Grund

[1] Unter Differenz ist hier und im folgenden stets die positive Differenz zu verstehen (von der größeren Zahl wird die kleinere subtrahiert).

unserer Voraussetzungen nicht möglich.) Dann verhält sich aber die letzte Ziffer gerade umgekehrt, oben steht die kleinere, unten die größere.
Um die Subtraktion ausführen zu können, müssen wir also eine 1 von den Zehnern "borgen". Nun stehen dort oben und unten gleiche Ziffern, die Differenz würde also 0 sein, wegen des Übertrags einer 1 ergibt sich aber 9, so dass wir wiederum eine 1 von den Hundertern zu "borgen" haben. Daher wird die erste Ziffer des Zwischenergebnisses um 1 kleiner sein als die Differenz der äußeren Ziffern zu Beginn.

Wir ahnen bereits, wozu es gut war, dass wir uns ausbedungen haben, die Differenz der äußeren Ziffern müsse mindestens 2 sein. Dadurch ist die erste Ziffer des Zwischenergebnisses mindestens 1, d. h., wir bekommen eine dreistellige Zahl. Wir werden gleich sehen, warum dies wichtig ist. Vorher wollen wir aber noch verstehen, warum die Summe der äußeren Ziffern des Zwischenergebnisses 9 ist.
Wie groß auch immer die Differenz der äußeren Ziffern der Ausgangszahl ist, sie wird stets durch die letzte Ziffer des Zwischenergebnisses zu 10 ergänzt. (Wenn die Differenz 2 ist, ergibt sich 8 als letzte Ziffer, ist sie 3, so bekommt man 7 usw.) Bei der Subtraktion der Hunderter erhalten wir dagegen 1 weniger, als die Differenz der äußeren Ziffern beträgt. Die erste und letzte Ziffer des Zwischenergebnisses ergänzen einander also nicht zu 10, sondern zu 9.

Jetzt müssen wir uns noch überlegen, warum wir, wenn wir die Reihenfolge der Ziffern des Zwischenergebnisses umkehren und die beiden Zahlen addieren, stets 1089 bekommen. Wir brauchen dazu bloß nachzurechnen:
Die Summe der letzten Ziffern ist 9, die der ersten Ziffern ist ebensogroß, das bedeutet aber 9 Hunderter, die Summe der mittleren Ziffern ist 180, insgesamt ergibt sich also $9 + 900 + 180 = 1089$.

Wenn wir nicht verlangt hätten, dass die Differenz der äußeren Ziffern mindestens 2 ist, so könnte das Zwischenergebnis auch zweistellig (d. h. 99) oder gar einstellig (d. h. 0) sein, und wenn wir in diesen Zahlen die Ziffernreihenfolge umkehren und die beiden Zahlen addieren, bekommen wir als Ergebnis nicht 1089, sondern 198 und 0. (Im ersten Falle können wir durch einen Kunstgriff erreichen, dass sich 1089 als Endergebnis ergibt. Wir sagen, dass wir auch die 99 als dreistellig ansehen, d. h. 099 schreiben; dann wird $099 + 990 = 1089$. Im zweiten Fall hilft auch das nichts.)

Vielen Zahlenratetricks liegt der Satz vom Neunerrest zugrunde, den wir folgendermaßen formulieren können:

»Bei der Division einer natürlichen Zahl durch 9 bekommen wir denselben Rest, wie wenn wir die Quersumme durch 9 dividieren.«

Das bedeutet mit anderen Worten, dass sich jede mehrstellige Zahl von ihrer Quersumme um ein Vielfaches von 9 unterscheidet. (Dies können wir zum Beispiel für dreistellige Zahlen folgendermaßen einsehen: Die Differenz von $100x + 10y + z$ und seiner Quersumme, nämlich $x + y + z$, beträgt $99x + 9y$, und das ist tatsächlich ein Vielfaches von 9, und zwar das $(11x + y)$- fache. Auch im Falle von Zahlen größerer Stellenzahl als Zwei oder Drei verläuft der Beweis ganz ähnlich.)

Wenn also jemand eine unbekannte Zahl mit 9 multipliziert, die erste Ziffer des Produkts ausstreicht und die Summe der übrigen Ziffern ansagt, so können wir bereits hieraus die gestrichene erste Zahl erraten. Wir brauchen nur die erhaltene Zahl zum nächstgrößeren Vielfachen von 9 zu ergänzen.
Beispielsweise ist $555 \cdot 9 = 4995$, die Summe der letzten drei Ziffern beträgt 23, und diese wird gerade durch 4 zum nächstgrößeren Vielfachen von 9, zu 27, ergänzt. (Wenn wir nicht die erste Ziffer wegstreichen lassen, dann müssen wir verlangen, dass die weggestrichene Ziffer nicht 0 ist, anderenfalls gelingt der Trick nicht immer. Wer das oben Gesagte verstanden hat, kommt leicht darauf, warum.)

Natürlich können wir die gedachte Zahl nicht mit 9 multiplizieren lassen, sondern auch mit jedem Vielfachen von 9. Sogar dann gelangt unser Partner zu einer durch 9 teilbaren Zahl, wenn er zum Beispiel von der gedachten Zahl ihre Quersumme oder die durch Umkehrung der Reihenfolge der Ziffern erhaltene Zahl subtrahiert usw.
Da wir auf die eine oder andere Weise erreichen, dass sich eine durch 9 teilbare Zahl ergibt, können wir den Trick ebenso wie den vorigen fortsetzen.

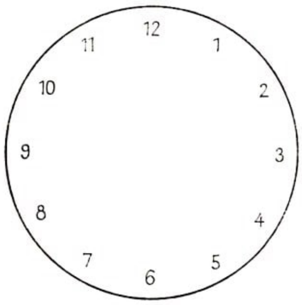


Abb. 1

Wir wollen jetzt ein Zahlenratespiel von ganz anderer Art betrachten, das aber keineswegs weniger überraschend ist. Wir zeichnen das Zifferblatt einer Uhr auf (Abb. 1) und fordern jemanden auf, an eine ganze Zahl zwischen 1 und 12 zu denken (die Grenzen eingeschlossen).
Wir werden dann mehrmals nacheinander mit unserem Bleistift auf das Zifferblatt klopfen, und er muss auf jedes Klopfen hin um 1 weiterzählen. Wenn er zum Beispiel an 8 gedacht hat, dann muss er nach dem ersten Klopfen an 9 denken, bei dem zweiten Klopfen an 10 usw. Wenn er die 20 erreicht, was er uns laut sagen soll, so wird unser Bleistift auf die Zahl des Zifferblatts zeigen, an die er zu Beginn gedacht hat.

Wie müssen wir klopfen, damit alles so abläuft?

Bei den ersten 7 Malen können wir wahllos klopfen, denn selbst wenn er zufällig an die größte mögliche Zahl, an 12, gedacht haben sollte, kann er bis dahin noch nicht die 20 erreicht haben. Mit dem achten Mal kann er dagegen die 20 erreichen, und zwar genau dann, wenn er an 12 gedacht hat; wir müssen also beim achten Mal auf die 12 klopfen. Wenn er an 11 gedacht hat, erreicht er die 20 beim neunten Klopfen; wir müssen also beim neunten Mal auf die 11 klopfen.
Und so geht es weiter, das zehnte Klopfen muss auf die 10 erfolgen, das elfte auf die 9, ..., das neunzehnte auf die 1; dann sind wir sicher, dass wir gerade auf die gedachte Zahl zeigen, wenn er beim Zählen bei 20 angelangt ist, unabhängig davon, an welche

Zahl er gedacht hat.

Wir können freilich nicht voraussagen, wann das geschieht; er wird indessen glauben, dass wir die gedachte Zahl erraten haben, da doch das Klopfen genau dann seine Zahl erreicht, wenn er bei 20 angelangt ist. Dann klopfen wir natürlich nicht weiter, sondern blicken triumphierend auf, und so wird seine Illusion von unseren übernatürlichen Fähigkeiten vollkommen sein - bis wir ihm den Kniff erklären.

Eine interessante Art des Zahlenerratens besteht darin, Mutmaßungen anzustellen. Jemand soll zum Beispiel an eine ganze Zahl zwischen 1 und 100 denken (die Grenzen eingeschlossen). Mit wieviel Versuchen können wir herausfinden, an welche Zahl er gedacht hat?

Wenn wir viel Glück haben, finden wir sie eventuell beim ersten Mal, wir können aber auch Pech haben, so dass wir uns bis zur hundertsten Zahl irren, vorausgesetzt, dass uns der Betreffende nach jedem einzelnen Versuch nur davon informiert, ob wir die gedachte Zahl getroffen haben oder nicht.
Wenn er uns jedoch noch ein bisschen besser informiert, d. h., wenn er sagt, ob die Zahl zu groß oder zu klein ist, dann können wir die Zahl auf jeden Fall mit dem siebenten Mal erraten (eventuell auch schon früher), freilich nicht so, dass wir aufs Geratewohl herumtappen, sondern mit systematischer Aufklärungsarbeit. An einem Beispiel lässt sich leichter erklären, wie das geschieht.

Ich habe mir eine Zahl zwischen 1 und 100 gedacht.
50.
Zuviel.
25.
Zuviel.
12.
Zuviel.
6.
Zuwenig.
9.
Zuwenig.
11.
Zuviel.
Dann ist es 10.
Gefunden.

Wir sehen, dass dem folgendes Prinzip zugrunde liegt:
Jedesmal wird das noch in Frage kommende Zahlenintervall (entweder genau oder näherungsweise) halbiert. Nach zwei Halbierungen gelangen wir zu einem Viertel des ursprünglichen Zahlenintervalls, nach drei Halbierungen ist nur noch ein Achtel übrig, ..., nach sieben Halbierungen ein 128stel. (Wenn die Länge des Zahlenintervalls durch eine ungerade Zahl ausgedrückt wird, müssen wir uns natürlich mit einer näherungsweisen Halbierung zufriedengeben, so dass sich diese Zahl ein wenig ändern kann.)

Hieraus geht hervor, dass wir mit sieben Versuchen eine gedachte Zahl nicht nur aus der Menge der Zahlen von 1 bis 100, sondern auch von 1 bis 128 erraten können, in Wahrheit nur bis 127; denn wenn wir, nachdem wir mit der siebenten Halbierung das Zahlenintervall von 126 bis 128 halbiert haben, 127 sagen und dann die Antwort wiederum »zu klein«, lautet, finden wir die »128« erst mit unserem achten Versuch.
(Auf den letzten Versuch passt freilich nicht mehr der Name »Versuch«, weil wir dann, wie oben schon bei der 10, auf ganz sicher gehen.)

Nach einem ähnlichen Verfahren können wir nicht nur Zahlen erraten, sondern auch Datumsangaben (einen Tag des Jahres im schlimmsten Falle mit dem neunten Versuch), Anfangsbuchstaben, Wörter usw.
Zum Schluss wollen wir noch kurz auf das Erraten von Zahlen mit der sogenannten »Zauberkarte« eingehen.

Auf sechs Papierblättern - dies sind die Zauberkarten - sind der Größe nach Zahlen bis 59 oder 60 aufgeführt, nicht etwa der Reihe nach, sondern mit zahlreichen Lücken dazwischen.
Auf der einen Karte sind diese, auf der anderen jene verzeichnet, nach einem etwas komplizierten System.
Man muss sich nun eine Zahl zwischen 1 und 60 denken und dem »Gedankenleser« alle diejenigen Karten zurückgeben, auf denen die gedachte Zahl zu finden ist. Auf Grund dessen sagt er augenblicklich, welche die gedachte Zahl ist. Die übrigen Karten sieht er gar nicht erst an.

Die Sache ist ganz einfach. Er braucht nur die ersten Zahlen der ihm übergebenen Karten zu addieren, deren Summe ist die gedachte Zahl. Gibt man ihm beispielsweise diejenigen Karten in die Hand, die mit 16, mit 4 und mit 8 beginnen, so ist die gesuchte Zahl $16 + 4 + 8 = 28$. Dieses Geheimnis verrät auch die Gebrauchsanweisung, sie sagt indessen nicht, weshalb die Karten diese wunderbare Eigenschaft haben. Wir wollen jetzt versuchen, darauf eine Antwort zu geben.

Auf der ersten (mit A bezeichneten) Karte finden wir die ungeraden Zahlen von 1 bis 59. Auf den übrigen Karten ist keine solche einfache Gesetzmäßigkeit zu erkennen. Es ist jedoch auffällig, dass ihre ersten Zahlen gerade diejenigen bestimmten ersten Zahlen sind, die man nach der Gebrauchsanweisung zu addieren hat - 2, 4, 8, 16, 32, d. h., jede davon ist doppelt so groß wie die vorhergehende.
Die Mathematiker nennen diese Zahlen »Potenzen von 2«. Beispielsweise ist $2 = 2^1$, $4 = 2^2 = 2 \cdot 2$, $8 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ usw.
Die allererste Zahl auf der ersten Karte ist 1; auch diese gehört zu den Potenzen von 2, sie ist die nullte Potenz von 2 (warum, das ist jetzt nebensächlich).

Der »Gedankenleser« addiert also in jedem Falle eine gewisse Anzahl von Potenzen von 2, und nach der Gebrauchsanweisung ist die Summe dieser Potenzen die gesuchte Zahl. Es scheint somit, dass sich jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen schreiben (oder, wie man zu sagen pflegt, darstellen) lässt, und zwar so, dass jede Potenz höchstens einmal auftritt.
(Wenn eine jede davon auch mehrmals vorkommen könnte, so wäre nichts weiter dabei,

da man doch jede Zahl durch Addition von Einsen bekommen kann.) Probieren wir es nur einmal für die 13 aus:

$$13 = 8 + 4 + 1$$

Betrachten wir dazu noch die 55:

$$55 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1$$

Sind wir aber sicher, ob das immer klappt? Es ist leicht einzusehen, dass dem so ist, nicht nur bis 60, sondern bis zu beliebig großen Zahlen, und zwar nach dem folgenden Verfahren:

Zunächst subtrahieren wir von der betreffenden Zahl diejenige höchste Potenz von 2, die noch nicht größer als die Zahl ist (bei 55 beispielsweise ist 32 noch nicht größer, 64 ist aber bereits größer: $55 - 32 = 23$). Es ist sicher, dass wir auf diese Weise eine Zahl erhalten, die kleiner als die betreffende Potenz von 2 (hier 32) ist, weil dies anderenfalls nicht die größte Potenz gewesen wäre, die man abziehen kann (man hätte sonst auch $32 + 32 = 64$ subtrahieren können).

Von der verbleibenden Zahl subtrahieren wir wiederum die größtmögliche Potenz von 2 und so weiter, bis wir Null erhalten. Die Summe der abgezogenen Zahlen ist dann die Ausgangszahl selbst.
Nach was für einem System ist denn nun der Erfinder der Zauberkarten vorgegangen, als er die Zahlen auf die einzelnen Karten aufgeschrieben hat?

Zunächst hat er gesondert auf ein großes Blatt Papier jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen aufgeschrieben:

1 = 1
2 = 2
3 = 2 + 1
4 = 4
5 = 4 + 1
6 = 4 + 2
7 = 4 + 2 + 1 usw.

Danach hat er auf Grund der Liste diejenigen Zahlen auf die erste Karte geschrieben, in deren Zerlegung die 1 vorgekommen ist:

1, 3, 5, 7 usw.

(In der Zerlegung der ungeraden Zahlen tritt sie immer auf, in der der geraden Zahlen niemals. Mit Ausnahme von 1 ist nämlich jede Potenz von 2 gerade, also ist auch die Summe der Potenzen gerade, wenn in der Zerlegung die 1 nicht vorkommt; wenn sie aber vorkommt, so wird dadurch die Summe ungerade.)

Auf eine zweite Karte hat er diejenigen Zahlen aufgeschrieben, in deren Zerlegung die 2 vorkommt:

2, 3, 6, 7 usw.

Auf eine dritte diejenigen, in deren Zerlegung die 4 vorkommt, usw.
Die erste Zahl auf diesen Karten ist jeweils gerade 1, 2, 4 usw., denn dies sind gerade die kleinsten Zahlen, in deren Zerlegung die 1 bzw. die 2 bzw. die 4 vorkommt usw.

Auf welchen Karten ist zum Beispiel die 13 verzeichnet?
Auf denjenigen, deren erste Zahl in der Zerlegung von 13 $(8 + 4 + 1)$ vorkommt, also auf den Karten, die mit 8, mit 4 oder mit 1 beginnen, auf den übrigen nicht. Wer daher an die 13 denkt, der findet die gedachte Zahl gerade auf diesen Karten, und somit braucht der »Gedankenleser« nichts weiter zu tun, als die Anfangszahlen der Karten zu addieren.

Warum stehen auf den Karten gerade die Zahlen bis 60 ?

Wenn der Zahlenrater bei 7 aufhören würde (wie wir bei der Herstellung der obigen Karte), dann wären drei Karten notwendig - die mit 1, mit 2 und mit 4 beginnenden -, da bei der Zerlegung jeder Zahl von 1 bis 7 nur diese Potenzen von 2 auftreten. Für die 8 wäre jedoch eine neue Karte erforderlich, da die »Zerlegung« von 8 die 8 selbst ist, die folgende Potenz von 2. Mit dieser neuen Karte kann man bis 15 gehen; in der Zerlegung jeder Zahl bis 15 durch Potenzen von 2 kommen nur 1, 2, 4 und 8 vor. Für 16 wird bereits eine fünfte Karte gebraucht (die gerade mit 16 beginnt), mit dieser kann man bis 31 gehen.
Für 32 benötigt man wiederum eine neue Karte, mit der man bis 63 gelangen kann. Auf der »Zauberkarte« sind nur deshalb die 61, 62 und 63 ausgelassen, um zu runden Zahlen zu gelangen. Mit sieben Karten kann man bereits jede positive ganze Zahl bis über 100, und zwar bis 127 erraten.

Und jetzt sollten wir uns darauf besinnen, was wir uns bereits früher klargemacht haben: Durch 7 Versuche kann man gerade jede positive ganze Zahl bis 127 erraten. Diese Übereinstimmung ist natürlich nicht zufällig.
Der Zusammenhang zwischen beidem beruht darauf, dass $127 = 2^7 - 1$ ist.

Wenn der Leser darüber nachdenkt, was den beiden Tricks gemeinsam ist, so kann er damit einen kleinen Einblick in einen interessanten neuen Zweig der Mathematik erhalten, in die Gedankenwelt der Informationstheorie.

2 Mathematik auf dem Schachbrett

Pál Révész

Die Ähnlichkeit zwischen mathematischer Denkweise und den beim Schachspiel notwendigen Überlegungen ist wahrscheinlich für jeden offensichtlich. Beide erfordern hervorragende logische Fähigkeiten und hohes Kombinationsvermögen.
Diese Ähnlichkeit legt die Frage nahe, ob man auf dem Schachbrett mathematische Methoden anwenden kann, ob sich die beste Strategie finden lässt oder ob man zum Beispiel bei der Lösung von Schachaufgaben von mathematischen Methoden Gebrauch machen kann.

In dieser Hinsicht ist es besonders vielversprechend, dass sich ein relativ neuer Zweig der Mathematik entwickelt hat, die Spieltheorie. Diese hat es sich zum Ziel gesteckt, allgemeine Methoden anzugeben, mit denen man entscheiden kann, ob in einzelnen Spielen zugunsten eines gewissen Spielers eine Gewinnstrategie existiert bzw. wie die einzelnen Spieler die beste Strategie finden können.
(Wir merken an, dass sich der Nutzen der Spieltheorie nicht so sehr in der Analyse einzelner Spiele zeigt, sondern in der mathematischen Statistik, einem der im Hinblick auf die Anwendungen der Mathematik wichtigsten mathematischen Teilgebiete.)

Bis jetzt ist es jedenfalls nicht gelungen, aus den Ergebnissen der Spieltheorie inhaltliche Schlussfolgerungen in Bezug auf das Schachspiel zu ziehen. (Auch darauf ist die Antwort unbekannt, ob es für einen der Spieler eine Gewinnstrategie gibt oder ob das Spiel, wenn keiner einen Fehler macht, notwendig unentschieden ausgehen wird.)

Der Grund hierfür liegt in erster Linie darin, dass man beim Schachspiel eine ungeheuer große Anzahl von Kombinationen untersuchen muss. Selbst mit Hilfe der modernsten elektronischen Rechenmaschinen ist es unmöglich, derartig viele Fälle zu überblicken. Lösbar ist dagegen die Aufgabe, eine elektronische Rechenmaschine zu konstruieren, die sich für die Lösung von Schachaufgaben in 2 oder 3 Zügen eignet.
Man kann auch eine Schachspielmaschine konstruieren, die einen Offizier zwei Züge lang nicht aus den Augen lässt. Aber natürlich kann eine solche Maschine von einem besseren Schachspieler geschlagen werden.

Die Anzahl der beim Schachspiel auftretenden Möglichkeiten wird dadurch charakterisiert, dass jeder der Spieler zu Beginn unter 20 Zügen wählen kann, die Anzahl der möglichen Stellungen nach dem ersten Zug beider Spieler also 400 beträgt. Wie man sich überzeugen kann, sind nach dem zweiten Zug von Weiß 5206 Stellungen möglich. (Hierbei haben wir beim Zusammenzählen der Fälle nicht berücksichtigt, dass eine Stellung auf mehr als eine Weise entstehen kann.
So sehen wir zum Beispiel die Fälle e4-e5-Sc3 und Sc3-e5-e4 als identisch an. Wenn wir diese als verschieden betrachten, bekommen wir etwa das Doppelte von 5206).

In der Tat können wir sagen, dass die Mathematik im Schachspiel nur eine untergeordnete Rolle spielt. (Eine andere Frage ist die, ob denn die durch die Beschäftigung mit der Mathematik erworbenen Fähigkeiten zur Kombination beim Schachspiel Vorteile bieten.)

Interessanter ist die umgekehrte Frage: Was für eine Rolle spielt das Schachspiel in der Mathematik, genauer, was für mathematische Probleme werden in Zusammenhang mit dem Schachspiel aufgeworfen? Mit dieser Frage wollen wir uns befassen.

Einer Legende nach hat bereits der Erfinder des Schachspiels dem Monarchen, der ihn belohnen wollte, ein mathematisches Problem gestellt. Er verlangte nämlich eine Belohnung in Form von Weizenkörnern, und zwar so, dass der Monarch auf das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn, auf das folgende zwei, auf das darauffolgende vier legen sollte und so weiter, auf jedes Feld immer doppelt so viel Körner wie auf das vorhergehende, bis schließlich zum 64sten Feld.

Der Geschichte nach entrüstete sich der Monarch darüber, dass der Erfinder eine solche »Kleinigkeit« als Belohnung begehrte. Als er aber an das Ausrechnen heranging, stellte sich heraus, dass er die Forderung nicht erfüllen konnte, denn so viel Weizen gibt es auf der ganzen Welt nicht.

An Stelle des Monarchen wollen wir die Rechenarbeit durchführen. Die Anzahl der auf ein Feld entfallenden Weizenkörner ist 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{63}. Somit beträgt die Zahl der erforderlichen Weizenkörner:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{63}$$

Um die Summe auszurechnen, brauchen wir nur zu beachten, dass die Anzahl aller auf die ersten k Felder des Schachbretts niedergelegten Weizenkörner um 1 kleiner als die Anzahl der auf das $(k + 1)$-te Feld gelegten Weizenkörner ist, d.h.

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Somit ist

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Wir bemerken, dass 2^{64} eine zwanzigstellige Zahl ist.

Eine andere mit dem Schachspiel (aber nicht mehr mit den Schachfiguren) zusammenhängende Aufgabe stammt von John Neumann. Wir nehmen an, dass wir ein Schachbrett und solche Dominosteine haben, mit denen wir jeweils zwei aneinandergrenzende Felder des Schachbretts überdecken können.
Wir schneiden die in zwei gegenüberliegenden Ecken des Schachbretts liegenden Felder (z. B. a1 und h8) aus und fragen, ob sich das verbleibende Brett so mit Dominosteinen bedecken lässt, dass jedes Feld einmal und nur einmal überdeckt wird.

Versucht man, die Aufgabe zu lösen, so wird man feststellen müssen, dass nach der Verteilung von 30 Dominosteinen zwei nicht aneinander angrenzende Felder unbedeckt bleiben, die man mit einem 31. Dominostein nicht mehr überdecken kann.
Es fragt sich natürlich, ob dies nur an der Ungeschicklichkeit des Probierenden liegt oder ob die Aufgabe tatsächlich unlösbar ist. Mit der folgenden geistvollen Idee kann man einsehen, dass die Aufgabe in der Tat unmöglich zu lösen ist:

Jeder einzelne Dominostein wird ein schwarzes und ein weißes Feld des Schachbretts überdecken, während die beiden ausgeschnittenen Felder beide weiß (oder beide schwarz) sind. Somit ist die Aufgabe offensichtlich unlösbar. Aus dem gleichen Grund ist die Überdeckung mit Dominosteinen unmöglich, wenn wir zwei gleichfarbige Felder ausschneiden. Etwas schwerer erkennt man, dass eine Überdeckung möglich ist, wenn wir irgendwo auf dem Schachbrett zwei verschieden gefärbte Felder ausschneiden.

Unter den Zügen der Schachfiguren sind vielleicht am einfachsten die der Türme zu überblicken. Wir wollen uns zunächst mit der folgenden Frage befassen: Wie kann man auf einem Schachbrett Türme so aufstehen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können, (d. h., dass je zwei Türme in verschiedenen Reihen und verschiedenen Spalten stehen.

Es ist einleuchtend, dass man acht Türme auf diese Weise auf dem Schachbrett anordnen kann (beispielsweise so, dass man die Türme auf irgendeine Diagonale des Bretts setzt), mehr als acht jedoch nicht.
Wir fragen, auf wieviel verschiedene Weisen man acht Türme so auf dem Schachbrett anordnen kann, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können. Die Lösung der Aufgabe ist eine überraschend große Zahl: 40320. Dies kann man auf die folgende Weise einsehen:

Wenn wir acht Türme so auf das Schachbrett stellen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können, so wird in jeder Reihe ein und nur ein Turm stehen. Den ersten Turm können wir an jede Stelle der ersten Reihe (also an insgesamt 8 Stellen) setzen.
Den zweiten Turm stellen wir in die zweite Reihe, wobei wir darauf achten, dass er nicht in dieselbe Spalte wie der erste Turm gerät, wir können ihn also auf 7 verschiedene Stellen setzen (unabhängig davon, wo wir den ersten untergebracht haben).
Ebenso erkennt man, dass man den dritten Turm auf sechserlei Weise in die dritte Reihe stellen kann. Durch Fortsetzen des Verfahrens ergibt sich, dass man die 8 Türme auf $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ Arten anordnen kann.

Wir haben zu bemerken, dass wir hier beispielsweise die Anordnungen a1 b2 c3 d4 e5 f6 g7 h8 und a8 b7 c6 d5 e4 f3 g2 h1, d. h. solche Anordnungen, die sich auseinander durch Drehung des Bretts bzw. durch Spiegelung gewinnen lassen, als verschieden ansehen.
Wesentlich schwerer ist die Frage, wieviel wesentlich verschiedene Anordnungen von 8 Türmen existieren, also solche Anordnungen, von denen sich keine zwei durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen.

Bei der analogen Frage für die Dame steht es noch nicht von vornherein fest, wieviel Damen man so auf dem Schachbrett anordnen kann, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können. Auch hier ist ohne weiteres klar, dass man nicht mehr als acht Damen aufstellen kann, es ist aber keineswegs leicht, eine solche Anordnung zu realisieren.

Dass dies überhaupt möglich ist, zeigt das folgende Beispiel: a1 b5 c8 d6 e3 f7 g2 h4 (siehe Abb. 2).

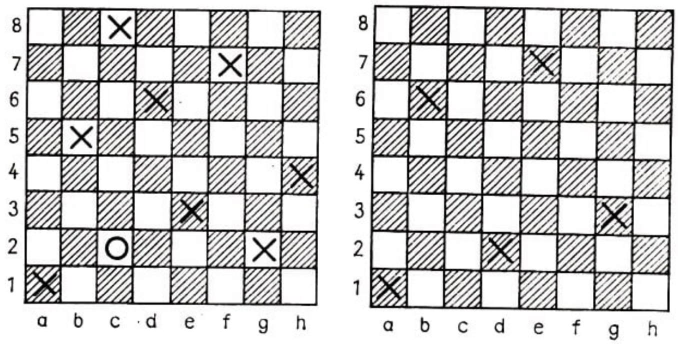


Abb. 2,3

(Wir merken an, dass es 92 nicht wesentlich voneinander verschiedene Anordnungen gibt.)

Offensichtlich bekommen wir, wenn wir auf diese Felder Türme oder Läufer setzen, eine solche Anordnung von Türmen bzw. Läufern, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können. Stellen wir auf diese Felder beispielsweise Läufer, so lässt sich noch ein Läufer auf dem Brett unterbringen (z. B. auf c2, siehe Abb. 2), der keinen der bereits aufgestellten Läufer schlägt.
Wir beobachten an diesem Beispiel auch, dass von den acht Damen genau vier auf weißen und vier auf schwarzen Feldern stehen. Man kann sich davon überzeugen, dass alle 92 möglichen Anordnungen die genannte Eigenschaft besitzen, d. h., dass genau vier Damen auf weißen Feldern stehen.

Es erhebt sich die Frage: Wieviel Damen kann man so auf schwarze Felder setzen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können ?
Unser Beispiel zeigt,dass es mit vier sicher geht. Es fragt sich, ob man mehr als vier aufstellen kann. Es ist leicht einzusehen, dass man fünf Damen so auf schwarze Felder verteilen kann, dass sie einander nicht schlagen können, zum Beispiel auf folgende Weise: a1 b6 d2 e7 g3 (Abb. 3).
Schwerer ist es nachzuweisen, dass das für sechs Damen nicht mehr möglich ist.

Allen diesen Aufgaben liegt die folgende Frage zugrunde:
Was ist die Minimalzahl der Damen, die ausreicht, um das ganze Brett »in Schach zu halten« ? Genauer: Wieviel Damen muss man auf das Schachbrett setzen, wenn man erreichen will, dass jedes Feld von wenigstens einer Dame angegriffen wird?

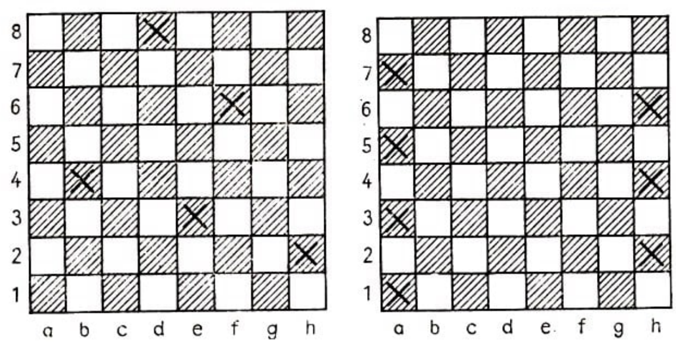


Abb. 4,5

Diese Aufgabe wird bereits von 5 Damen gelöst, beispielsweise in der folgenden Anordnung: b4 d8 e3 f6 h2 (Abb. 4). (In diesem Beispiel steht jede der Damen auf einem schwarzen Feld.) Man kann sich davon überzeugen, dass vier Damen nicht ausreichen, um der genannten Forderung zu genügen. Stellen wir uns aber nur als Aufgabe, die weißen Felder des Bretts mit den Damen zu bedrohen, so reichen bereits vier Damen aus.

Analog können wir fragen, wieviel Läufer sich so auf dem Schachbrett anordnen lassen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Es ist leicht einzusehen, dass man höchstens 7 schwarze Läufer so aufstellen kann. In jeder der »Diagonalen« (a7 b8), (a5 b6 c7 d8), (a3 b4 c5 d6 e7 f8), (a1 b2 c3 d4 e5 f6 g7 h8), (c1 d2 e3 f4 g5 h6), (e1 f2 g3 h4) und (g1 h2) kann nämlich höchstens ein Läufer stehen.

Dass man wirklich 7 Läufer unterbringen kann, zeigt das folgende Beispiel: (a1 a3 a5 a7 h2 h4 h6) (Abb. 5).
Man kann auch die Anzahl aller möglichen Anordnungen berechnen.

Auf eines (und nur auf eines) der Felder a7 und b8 müssen wir einen Läufer setzen. Wenn wir auf a7 einen Läufer gesetzt haben, so müssen wir auch auf h2 einen setzen. Haben wir einen auf h8 gesetzt, so müssen wir auch auf g1 einen setzen. Ferner müssen wir auf eines der Felder a5 und d8 einen Läufer setzen. Je nachdem, ob wir auf a5 oder d8 einen Läufer gesetzt haben, müssen wir dann auf h4 bzw. e1 einen Läufer setzen.

Analog müssen wir auf eines der Felder a3 und f8 und dementsprechend auf h6 bzw. c1 einen Läufer setzen. Schließlich müssen wir noch auf einem der Felder a1 und h8 einen Läufer unterbringen. Aus dieser Überlegung geht hervor, dass es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Möglichkeiten gibt, die 7 weißen Läufer so auf dem Schachbrett anzuordnen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können. Sie zeigt gleichzeitig, dass alle möglichen Anordnungen die Eigenschaft haben, dass alle 7 Läufer auf dem Rand des Bretts stehen.

Natürlich kann man auch für die Springer Fragen dieser Art aufwerfen. Es ist nicht schwer, darauf zu antworten, wieviel Springer man so auf dem Schachbrett anordnen kann, dass keine zwei einander schlagen können, und wie groß die Minimalzahl von Springern ist, die ausreicht, um jedes Feld des Bretts durch wenigstens einen der Springer zu bedrohen.

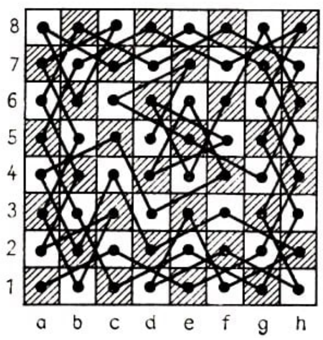


Abb. 6

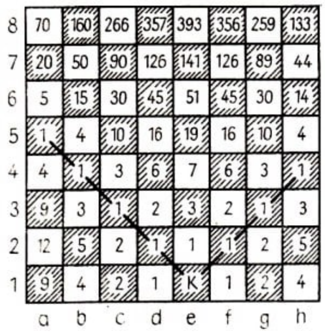
Es liegt auch nicht ohne weiteres auf der Hand, dass man mit einem Springer von jedem Feld des Bretts aus jedes andere Feld erreichen kann. Dem ist natürlich so, man kann sogar das Schachbrett mit einem Springer so durchwandern, dass dabei jedes Feld einmal und nur einmal erreicht wird.

Als Beispiel möge der folgende Weg dienen:

a1-c2-e1-g2-h4-g6-h8-f7-d8-b7-a5-b3-c1-e2-g1-h3-g5-h7-f8-d7-b8-a6-b4-a2-c3-b1-a3-b5-a7-c8-b6-a8-c7-e8-g7-h5-g3-h1-f2-d1-e3-f1-h2-f3-d2-c4-b2-a4-c5-d3-f4-e6-d4-f5-d6-e4-f6-g8-h6-g4-e5-c6-e7-d5

(Abb. 6).
Natürlich interessiert sich ein Schachspieler auch für die Frage, mit wieviel Zügen man mit einem Springer von einem gegebenen Feld aus zu einem anderen vorgegebenen Feld gelangen kann. Man kann sich davon überzeugen, dass von jedem Feld aus jedes Feld in höchstens sechs Zügen erreichbar ist. (Offensichtlich kann man z. B. von a1 aus nach h8 nicht in weniger als sechs Zügen gelangen.)

Die Rolle des Königs ist besonders im Endspiel interessant. Eine wichtige Frage ist zum Beispiel, ob der König einen Bauern »einholen« kann. Es ist bekannt, dass der König des Gegners den »eingehenden« Bauern dann und nur dann einholen kann, wenn sich der König in dem Quadrat des Bauern befindet, d. h. in demjenigen Quadrat, dessen eine Ecke der Bauer und von dem eine Kante die erste bzw. die achte Linie ist, je nachdem, ob der einlaufende Bauer weiß oder schwarz ist.



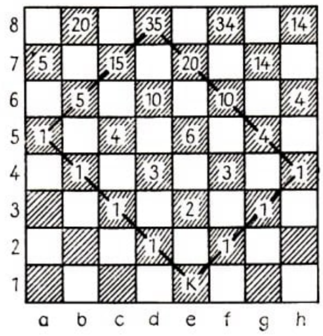


Abb. 7,8

Man kann ausrechnen, mit wieviel Zügen der König von einem gegebenen Feld aus in ein zweites gegebenes Feld gelangen kann. Interessanter ist die Frage, auf wieviel Arten er mit der Minimalzahl von Zügen von einem gegebenen Feld aus (beispielsweise von dem Anfangsfeld aus) nach einem anderen vorgegebenen Feld gelangen kann. Auf diese Frage gibt Abb. 7 Antwort.

Wir stellen fest, dass die Zahl der Züge in einer Tabelle erfasst werden kann, die dem sog. Pascalschen Dreieck ähnelt. Erlaubten wir dem König nur diagonal gerichtete Züge, so entspräche die Tabelle selbst genau dem Pascalschen Dreieck.
(Das volle Pascalsche Dreieck bekämen wir natürlich nur, wenn wir ein unendlich großes Schachbrett benutzten.)

Die sich so ergebende Tabelle ist in Abb. 8 enthalten. Die von der gestrichelten Linie eingeschlossenen Zahlen stimmen genau mit den entsprechenden Elementen des Pascalschen Dreiecks überein.

3 1 Millimeter = 1000 Kilometer

3.1 Fehlerhafte Beweise

Tamás Varga

1. Beispiel. Ich beweise, dass $\frac{2\cdot 6}{6\cdot 5} = \frac{2}{5}$ ist. Ich kurze mit 6:

$$\frac{2\cdot \mathbf{6}}{\mathbf{6}\cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Die Behauptung ist wahr. Der Beweis ist richtig.

2. Beispiel. Ich beweise, dass $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$ ist. Ich kürze mit 6:

$$\frac{2\mathbf{6}}{\mathbf{6}5} = \frac{2}{5}$$

Die Behauptung ist wahr. Der Beweis ist jedoch falsch.
Sechsundzwanzig Fünfundsechzigstel sind tatsächlich gleich zwei Fünftel. Das folgt aber nicht daraus, dass wir durch Streichen der beiden Ziffern 6 einen Ausdruck der Form $\frac{2}{5}$ bekommen. Wir haben zufällig ein richtiges Ergebnis erhalten ($26 = 2\cdot 13$, $65 = 5\cdot 13$). Wie das folgende Beispiel zeigt, ist das Verfahren jedoch nicht allgemeingültig.

3. Beispiel. Ich beweise, dass $\frac{27}{75} = \frac{2}{5}$ ist. Ich kürze mit 7 wie vorher mit 6:

$$\frac{2\mathbf{7}}{\mathbf{7}5} = \frac{2}{5}$$

Das obige Verfahren hat offensichtlich auf einen Irrweg geführt. Es ist $75 = 5\cdot 15$, 27 ist aber nicht gleich $2\cdot 15$; 27 ist von keiner einzigen ganzen Zahl das Doppelte.
Die Behauptung ist falsch. Der Beweis ist fehlerhaft.

Jetzt wäre ein solches Beispiel an der Reihe, bei dem die Behauptung falsch, der Beweis jedoch richtig ist. Ein solches Beispiel kennen wir indessen nicht, weil es das nicht gibt. Ein fehlerhafter Beweis kann sowohl ein wahres als auch ein falsches Ergebnis liefern. Ein richtiger Beweis kann jedoch zu keinem falschen Ergebnis führen, wenn nur sein Ausgangspunkt nicht falsch ist.

Die nachfolgenden Beispiele kann man größtenteils in die beiden Typen einreihen, die durch das 2. und 3. Beispiel veranschaulicht werden; der Fehler wird aber nicht immer auf so einfache Weise durchschaubar sein wie hier.
In Wahrheit hängt es auch von den Kenntnissen des Lesers ab, ob er den Fehler augenblicklich erkennt oder nicht. Manche kann man leicht übers Ohr hauen, andere schwer.

Gerade deshalb lohnt es sich für den Leser, schwindelhafte Beweise kennenzulernen, damit er sich künftig nicht mehr so leicht irreführen lässt. Neben fehlerhaften Beweisen zeigen wir hier und da auch einwandfreie, um den Unterschied zwischen ihnen deutlich zu machen. Wer diesen Unterschied sieht, der hat verstanden, was es bedeutet, etwas zu beweisen.

4. Beispiel. Wir betrachten die beiden folgenden Subtraktionen:

$$\begin{array}{r} 987654321 \\ 123456789 \\ \hline 864197532 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ \hline 8+6+4+1+9+7+5+3+2 \end{array}$$

Die erste ist unzweifelhaft richtig. Bei der zweiten sind wir ebenso vorgegangen, nur dass wir uns nicht um die Pluszeichen gekümmert haben. Vielleicht wird dadurch allein kein Unheil angerichtet?
Prüfen wir sowohl oben als auch in der Mitte und unten nach, was sich als Summe ergibt:

$$\begin{aligned} 9+8+7+6+5+4+3+2+1 &= 45 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= 45 \\ 8+6+4+1+9+7+5+3+2 &= 45 \end{aligned}$$

Es ist verständlich, dass alle drei Ergebnisse gleich sind, denn wir haben jeweils die gleichen Zahlen addiert, nur war ihre Reihenfolge von Mal zu Mal verschieden. Dann haben wir durch die Subtraktion »bewiesen«, dass $45 - 45 = 45$ ist.

Daraus ist ersichtlich, dass man Summen keineswegs auf dieselbe Weise wie mehrstellige Zahlen subtrahieren kann

5. Beispiel. Was ist mehr, 6 Kilogramm oder 6 Tonnen?
Der folgende Beweis zeigt - entgegen aller Erfahrung -, dass sie gleich sind:

$$\begin{array}{l} 2 \text{ kg} = 2000 \text{ g} \\ 3 \text{ kg} = 3000 \text{ g} \\ \hline 6 \text{ kg} = 6000000 \text{ g} = 6000 \text{ kg} = 6 \text{ Tonnen} \end{array}$$

denn wenn wir Gleiches mit Gleichem multiplizieren, bekommen wir Gleiches.

An der Gleichheit gibt es nichts zu rütteln, nur an der Multiplikation. Dort sind auch nicht etwa die Zahlen, sondern ihre Benennungen nicht in Ordnung. Kilogramm mal Kilogramm pflegt im täglichen Leben nicht vorzukommen.
Aber in der Physik hat es einen Sinn, und dann ist es ebensogut Quadratkilogramm, wie Kilometer mal Kilometer. Quadratkilometer ist und nicht etwa Kilometer. Beispielsweise ist 2 km · 3 km = 6 km^2. Wenn wir rechnen: 2000 m · 3000 m = 6000000 m^2, so bekommen wir das gleiche Ergebnis, da in jedem Quadratkilometer eine Million Quadratmeter enthalten sind. Ebenso ist 1 Quadratkilogramm gleich einer Million Quadratgramm, nicht gleich tausend.

6. Beispiel. Ein Mensch hat zwei Eltern, vier Großeltern, acht Urgroßeltern und so weiter. Wenn wir eine Generation zurückgehen, so ergibt sich immer das Doppelte, vor zehn Generationen mehr als das Tausendfache (weil $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$ ist), weitere zehn Generationen vorher nochmals das Tausendfache hiervon, d. h. mehr als das Millionenfache der jetzigen, usw. ...
Zwanzig Generationen führen jedoch erst in das Mittelalter zurück! Die Schlussweise ist also offensichtlich fehlerhaft. Wo steckt der Fehler?

Hierin sind zwei Fehler enthalten. Beide sind nichtmathematischer Art, sondern rühren

davon her, dass das mathematische Modell der Wirklichkeit nicht gut entspricht. "Im Kleinen" kann man sich noch vorstellen, dass es gut angemessen ist, zum Beispiel, wenn jemand einziges Kind seiner Eltern ist, auch seine Eltern Einzelkinder sind, desgleichen deren Eltern und so weiter einige Generationen hindurch.
Dann gehören tatsächlich, wenn wir aufwärts fortschreiten, zu jeder vorangehenden Generation doppelt so viel, abwärts dagegen halb so viel. Dies ist der Typ des aussterbenden Stammbaums oder vielmehr eine einfache Art davon.

Der einzige Fehler des obigen Gedankengangs besteht darin, dass er diesen seltenen Typ zu einem allgemeingültigen Modell macht. Ein weiterer Fehler besteht in Folgendem:

Die Anzahl der Vorfahren eines Menschen vor n Generationen kann zwar nicht größer als 2^n sein, sie kann aber kleiner sein. Sind zum Beispiel die Eltern von jemandem Geschwisterkinder (was keine so große Seltenheit ist), so haben seine Eltern von ihren je vier Großeltern zwei gemeinsam, er besitzt also nicht acht Ureltern, sondern nur sechs. Eine ähnliche "Urverminderung" tritt auch dann auf, wenn Geschwisterkinder zweiten Grades oder noch weiter entfernte Verwandte eine Ehe eingehen.

7. Beispiel. Bekanntlich ist 2 · 2 niemals 5. Man kann jedoch auch das beweisen, und nicht nur auf eine Weise. Es folgen einige »Beweise«.

Zunächst gehen wir von einer Behauptung aus, die niemand in Zweifel ziehen kann:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

Auf der linken Seite ziehen wir den gemeinsamen Faktor a heraus, die rechte Seite zerlegen wir dagegen so in Faktoren wie die Differenz zweier Quadrate:

$$a(a-a) = (a+a)(a-a)$$

Die Division durch den Faktor $a - a$ ergibt:

$$a = 2a$$

Beide Seiten vergrößern wir um $3a$:

$$4a = 5a$$

Jetzt können wir noch durch a dividieren und die 4 in der Form $2 \cdot 2$ schreiben:

$$2 \cdot 2 = 5$$

8. Beispiel. b und c mögen irgend zwei Zahlen bedeuten (beispielsweise $b = 4$, $c = 1$). Wir bezeichnen ihre Summe mit a:

$$b + c = a$$

(Wenn $b = 4$ und $c = 1$ ist, so ist $a = 5$.) Wir multiplizieren beide Seiten mit $a - b$:

$$a \cdot b + a \cdot c - b \cdot b - b \cdot c = a \cdot a - a \cdot b$$

Von beiden Seiten subtrahieren wir $a \cdot c$:

$$a \cdot b - b \cdot b - b \cdot c = a \cdot a - a \cdot b - a \cdot c$$

Wir sehen, dass sowohl auf der linken Seite als auch auf der rechten Seite ein gemeinsamer Faktor enthalten ist (b bzw. a). Wir klammern diesen aus:

$$b(a - b - c) = a(a - b - c)$$

Schließlich dividieren wir durch $a - b - c$. Damit erhalten wir

$$b = a$$

Im obengenannten Fall, in dem $b = 4$, d. h. $2 \cdot 2$, und $a = 5$ ist, bekommen wir

$$2 \cdot 2 = 5$$

Wo steckt der Fehler in diesen Beweisen von 2 · 2 = 5?

Natürlich dort, wo wir - wenn auch in versteckter Form - durch Null dividiert haben. Beim ersten Mal war $a - a$ gleich Null, beim zweiten $a - b - c$ (da doch $a = b + c$ ist). Wenn wir jedoch durch Null dividieren, sei es nun versteckt oder offen, so können wir jede Absurdität herleiten.
(Wir denken daran, dass $0 \cdot 1 = 0 \cdot$ ist und dass niemals $1 = 2$ gilt.)

9. Beispiel. Wir wollen uns nun auch ohne Versteckspiel die Division durch Null ansehen. Wir gehen davon aus, dass

$$0 = 0$$

ist. Dies ist bis jetzt auch wahr. Wir können dies auch folgendermaßen schreiben:

$$0 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \cdot 5$$

und auch das ist immer noch wahr, da sowohl $0 \cdot 2 \cdot 2$ als auch $0 \cdot 5$ gleich Null ist. Dividieren wir dies aber durch Null, so bekommen wir:

$$2 \cdot 2 = 5$$

Wir hätten natürlich auch $0 \cdot 1 = 0 \cdot 1000000000$ schreiben können und somit $1 = 1000000000$ erhalten, zum Beispiel

1 mm = 1000000000 mm = 1000000 m = 1000 km

was wir im Titel behauptet haben. Wir werden hierfür noch einen anderen trügerischen Beweis geben. Jetzt wollen wir jedoch einen weniger durchsichtigen Beweis von 2 · 2 = 5 ansehen.

10. Beispiel. Unzweifelhaft ist wahr, dass

$$16 - 36 = 25 - 45$$

ist, denn auf beiden Seiten steht -20, nur in jeweils anderer Form. Die 16 auf der linken Seite ist ein vollständiges Quadrat (das Quadrat von 4), -36 ist dagegen das doppelte Produkt aus 4 und $-\frac{9}{2}$. Wenn wir noch das Quadrat von $-\frac{9}{2}$ hinzufügen, bekommen wir das Quadrat eines Binoms; wir erinnern dazu nur an die Identität $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ oder, wenn man will, an $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Von der rechten Seite können wir ziemlich dasselbe sagen: 25 ist ein vollständiges Quadrat (das Quadrat von 5), -45 dagegen das doppelte Produkt von 5 und $-\frac{9}{2}$, und somit bekommen wir nach Addition von $-\frac{9}{2}$ auch hier das Quadrat eines Binoms. Wir hatten Glück:
Durch Addition ein und desselben Glieds können wir beide Seiten zu Quadraten von Binomen umformen, wobei die Gleichheit bestehen bleibt:

$$16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

d.h.

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \qquad \text{woraus} \qquad 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

oder in anderer Form

$$2 \cdot 2 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

folgt. Somit bekommen wir, wenn wir zu beiden Seiten $\frac{9}{2}$ addieren, $2 \cdot 2 = 5$.
Wer Zeile für Zeile nachrechnet, was hieran richtig und was falsch ist, wird leicht den Fehler finden.

Es ist $16-36+\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = -20+\frac{81}{4} = \frac{1}{4}$, und ebenso 2 9 2 groß ist auch $25-45+\left(-\frac{9}{2}\right)^2$. Sowohl $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$ als auch $\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$ ist $\frac{1}{4}$, das erste $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, d.h. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$, das zweite $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.
Aber $4 - \frac{9}{2}$ ist nicht ebensogroß wie $5 - \frac{9}{2}$; das erstere ist $-\frac{1}{2}$, das letztere ist um 1 größer, $+\frac{1}{2}$. Der Fehler bestand also in dem unberechtigten Quadratwurzelziehen.

Die Quadrate zweier Zahlen können auch dann gleich sein, wenn die Zahlen selbst nicht gleich sind. Positive und negative Zahlen von gleichem Absolutbetrag ergeben stets dasselbe Quadrat, während sie selbst nicht einander gleich sein können.

11. Beispiel. In einen Kreis zeichnen wir einen Durchmesser ein ($\overline{AB}$ in Abb. 9) und ziehen von seinen Endpunkten aus zwei zueinander parallele Sehnen ($\overline{AC}$ und $\overline{BD}$).

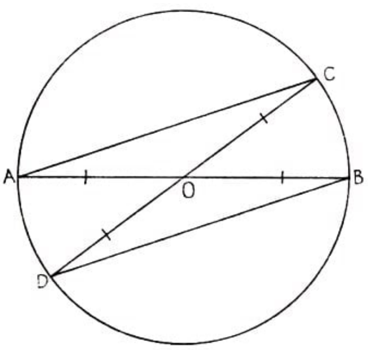


Abb. 9

Wir wollen beweisen, dass diese Sehnen gleich lang sind.
Der Halbierungspunkt des Durchmessers $\overline{AB}$ ist der Kreismittelpunkt O. Wir verbinden diesen mit C und D. Dann ist

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$$

weil dies alles Kreisradien sind. Wegen der Gleichheit von Scheitelwinkeln ist

$$\angle AOC = \angle BOD$$

Auf Grund der Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels gilt

$$\triangle AOC \cong \triangle BOD$$

es stimmen also auch die dritten Seiten dieser Dreiecke überein:

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

Das war aber gerade zu beweisen.

Genauer: Das hätte bewiesen werden sollen, denn bewiesen haben wir es nicht. Richtig ist jedoch, dass die auf die genannte Weise entstehenden Sehnen gleich sind, der obige Beweis ist indessen fehlerhaft. Der Fehler rührt offensichtlich davon her, dass wir eine wesentliche Voraussetzung nicht benutzt haben, nämlich die, dass die beiden Sehnen parallel sind. Ohne diese ist die Behauptung jedoch falsch (Abb. 10).

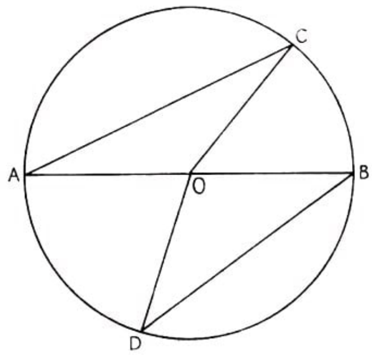


Abb. 10

Statt dessen haben wir von einer Voraussetzung Gebrauch gemacht, die wir nicht begründet haben, nämlich, dass $\angle AOC$ und $\angle BOD$ Scheitelwinkel sind. Dies folgt zwar aus der Parallelität, mit demselben Aufwand können wir aber auch direkt die Gleichheit von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ beweisen.

12. Beispiel. Wir ändern den obigen Beweis in der Weise ab, dass wir die Punkte C und D nicht mit dem Mittelpunkt von $\overline{AB}$, sondern miteinander verbinden und jetzt denjenigen Punkt mit O bezeichnen, in dem $\overline{CD}$ die Strecke $\overline{AB}$ schneidet. Im übrigen soll der Beweis unverändert bleiben.
Jetzt können wir mit Recht sagen, dass $\angle AOC$ und $\angle BOD$ Scheitelwinkel, also gleich sind. Ist dieser Beweis jetzt bereits in Ordnung? Nein, auch jetzt ist er falsch. Wir können nämlich jetzt nicht wissen, ob der Schnittpunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ den Durchmesser

$\overline{AB}$ halbiert und somit Kreismittelpunkt ist. (Dadurch, dass wir ihn mit O bezeichnet haben, wird er noch nicht zum Mittelpunkt.)

13. Beispiel. Wir wollen den im 11. Beispiel aufgeschriebenen Beweis abermals modifizieren. Wir schließen jetzt dadurch auf die Kongruenz von $\triangle AOC$ und $\triangle BOD$, dass $\overline{OA} = \overline{OB}$ und $\overline{OC} = \overline{OD}$ ist und dass auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel als Wechselwinkel gleich sind.

Ist der Beweis in diesem Falle richtig?
Das kommt darauf an, welche Winkel hierbei gleich sein sollen. Wir können davon Gebrauch machen, dass $\angle CAO = \angle DBO$ ist, weil es Wechselwinkel sind, denn wir wissen nicht nur, dass $\overline{CA} \perp \overline{BD}$ ist, sondern auch, dass A, O und B auf einer Geraden liegen (da wir doch im 11. Beispiel mit O den Mittelpunkt des Durchmessers $\overline{AB}$ bezeichnet haben).

Wollten wir indessen verwenden, dass $\angle ACO = \angle BDO$ ist, so würden wir falsch schließen, weil wir nicht berechtigt sind, davon Gebrauch zu machen, dass D, O und C auf einer Geraden liegen, solange wir das nicht bewiesen haben (siehe das 12. Beispiel).

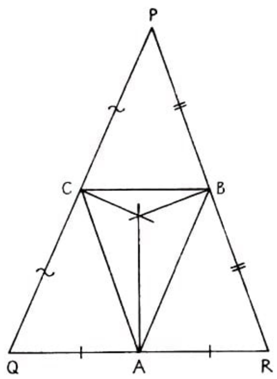


Abb. 11

14. Beispiel. Wir wollen beweisen, dass die Höhen jedes Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.

Wir gehen von dem Satz aus, dass die Mittelsenkrechten des Dreiecks durch einen Punkt gehen (Abb. 11); den Beweis hierfür sehen wir als bekannt an. Durch die Seitenmitten wird ein Dreieck bestimmt (in unserer Abbildung $\triangle ABC$). Die Seiten dieses Dreiecks sind Mittellinien des Ausgangsdreiecks und somit (einem bekannten Satz zufolge) 3 seinen Seiten parallel: $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{BC} \parallel \overline{QR}$, $\overline{CA} \perp \overline{RP}$.
Daher sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks PQR die Höhen des Dreiecks ABC (weil sie durch seine Ecken gehen und auf seinen Seiten senkrecht stehen). Von den Mittelsenkrechten wissen wir aber bereits, dass sie einander in einem Punkt schneiden. Hieraus folgt, dass auch die Höhen einander in einem Punkt schneiden, denn die Höhen von $\triangle ABC$ liegen auf denselben Geraden wie die Mittelsenkrechten von $\triangle PQR$ (und man kann zu jedem $\triangle ABC$ ein $\triangle PQR$ mit dieser Eigenschaft finden).

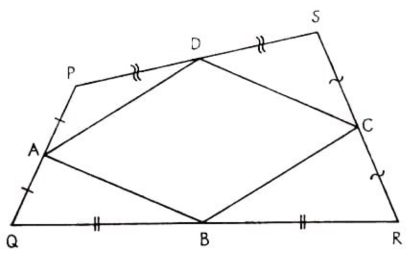


Abb. 12

15. Beispiel. Wir beweisen, dass die Diagonalen eines beliebigen Vierecks einander halbieren.

$PQRS$ sei das fragliche Viereck, und die Mittelpunkte seiner Seiten seien A, B, C und D (Abb. 12).
Nach einem bekannten Satz für die Mittellinien von Dreiecken (siehe das 14. Beispiel) ist $\overline{AB} \parallel \overline{PR}$ und $\overline{CD} \parallel \overline{PR}$ also $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Analog kann man erkennen, dass $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ist. Das Viereck $ABCD$ ist also ein Parallelogramm. Von Parallelogrammen ist jedoch bekannt, dass ihre Diagonalen einander halbieren. Also gilt das auch für die Diagonalen jedes Vierecks.

Das ist nicht richtig! - sagt der Leser. Wie kann denn daraus, dass die Diagonalen von Parallelogrammen einander halbieren, folgen, dass auch die Diagonalen jedes Vierecks einander halbieren. Was in einem Spezialfall richtig ist, gilt nicht unbedingt in jedem Fall.
Mit Recht erhebt der Leser Einspruch. Aber hat er auch gegen den im 14. Beispiel geführten Beweis Einspruch erhoben? Dort haben wir nämlich im wesentlichen denselben Fehler begangen, nur nicht in so augenscheinlicher Form.

Wenn wir etwas für solche Vierecke beweisen, die wir dadurch bekommen, dass wir die Viereckseiten halbieren und die Mittelpunkte benachbarter Seiten verbinden, so können wir nicht behaupten, dass wir damit die betreffende Aussage für jedes Viereck bewiesen haben.
Nur dann wäre dieser Beweis richtig, wenn wir ferner zeigen würden, jedes Viereck lässt sich auf diese Weise konstruieren, dass man benachbarte Seitenmitten eines gewissen Vierecks verbindet. Dem ist jedoch nicht so; nur Parallelogramme lassen sich so konstruieren.

Wenn wir etwas für Dreiecke beweisen, die wir dadurch erhalten, dass wir jeweils die Seitenmitten eines Dreiecks miteinander verbinden, dann können wir ebenfalls nicht behaupten, dass wir die fragliche Aussage für jedes Dreieck bewiesen haben.
Nur dann wäre dieser Beweis richtig, wenn wir auch zeigen würden, dass sich jedes Dreieck durch Verbinden der Seitenmitten eines gewissen Dreiecks konstruieren lässt. Dies ist zwar - im Gegensatz zu der analogen Konstruktion für Vierecke - zufällig richtig.

Wir haben es aber nicht bewiesen, wir haben nicht einmal darauf hingewiesen, dass dies noch eines Beweises bedarf. Da wir böswillig einen wesentlichen Schritt verschwiegen haben, ist unser Beweis bezüglich des Schneidens der Höhen von Dreiecken nicht zu akzeptieren.

16. Beispiel. Wir formen den im 14. Beispiel geführten Beweis um. Wir gehen von dem inneren Dreieck ABC aus und konstruieren dadurch zu ihm das äußere Dreieck PQR, dass wir durch die Ecken A, B, C zu den Gegenseiten Parallelen ziehen (Abb. 13):

$$\overline{AB} \parallel \overline{PQ}, \qquad \overline{BC} \parallel \overline{QR}, \qquad \overline{AC} \parallel \overline{PR}$$

Dadurch entstehen drei Parallelogramme: $ABCQ$, $ABPC$, $ARBC$. Wir wissen, dass die Gegenseiten von Parallelogrammen gleich sind, zum Beispiel ist

$$\overline{AB} = \overline{CQ} \qquad \text{und} \qquad \overline{AB} = \overline{CP}$$

Hieraus folgt, dass $\overline{CQ} = \overline{CP}$ ist. Analog erkennt man, dass B die Seite $\overline{PR}$ und A die Seite $\overline{QR}$ halbiert.

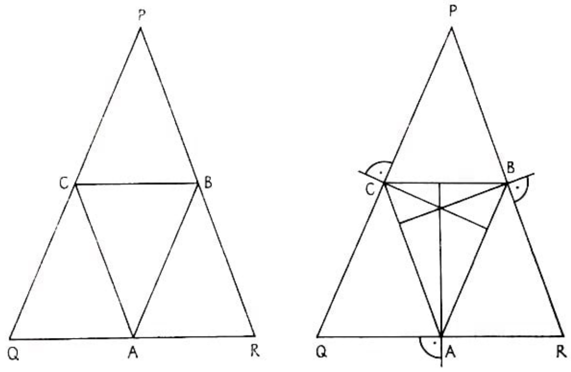


Abb. 13,14

Es hat sich herausgestellt, dass das Dreieck ABC von den Mittellinien des Dreiecks PQR begrenzt wird. (Dies konnten wir jetzt nicht von vornherein wissen, unser Ausgangspunkt war anders als im 14. Beispiel.)

Wir wollen beweisen, dass die Höhen des Dreiecks ABC einander in einem Punkt schneiden. Wir ziehen diese Höhengeraden (Abb. 14). Aus dem Obigen folgt (wiederum auf Grund des schon mehrfach genannten Satzes über die Mittellinien), dass diese Höhengeraden Mittelsenkrechte des Dreiecks PQR sind. Von den Mittelsenkrechten wissen wir aber (haben wir als bekannt vorausgesetzt), dass sie einander in einem Punkt schneiden. Dies gilt also auch für die Höhengeraden.

Ist der Beweis in Ordnung? Zweifellos. Wir sind von dem Dreieck ABC ausgegangen, das wir keinen Einschränkungen unterworfen haben. Was wir bewiesen haben, gilt also für jedes Dreieck.
Wir haben zwar nicht bewiesen, dass sich jedes Dreieck so wie das hier auftretende Außendreieck (PQR) konstruieren lässt, das war aber auch gar nicht notwendig. Der Beweis wäre auch richtig gewesen, wenn sich durch das »Umbeschreiben« immer nur gewisse spezielle Dreiecke ergäben. Wenn die Mittelsenkrechten jedes Dreiecks einander in einem Punkt schneiden, so können wir dasselbe auch für diese speziellen Dreiecke sagen; es kommt nur darauf an, dass das Dreieck ABC nicht speziell ist.

17. Beispiel. Einen »Beweis« dafür, dass 1 mm $=$ 1000 km ist, haben wir bereits gegeben. Jetzt sollen noch zwei folgen.
Wir beweisen mehr, als wir versprechen, nämlich, dass zwei beliebige Strecken gleich lang sind.

In den Beweisen sehen wir die folgenden Kongruenzsätze für Dreiecke als bekannt an:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen
(1) in allen drei Seiten;
(2) in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel;
(3) in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel;
(4) in einer Seite und zwei entsprechend gelegenen Winkeln.

(Unter entsprechend gelegenen Winkeln ist das Folgende zu verstehen: Entweder liegen beide der übereinstimmenden Seite an, oder der eine liegt an und der andere gegenüber; dann sind auch die anliegenden Winkel gleich und natürlich auch die gegenüberliegenden.)

In unseren Abbildungen sind diese vier Fälle dargestellt (Abb. 15 bis 19):

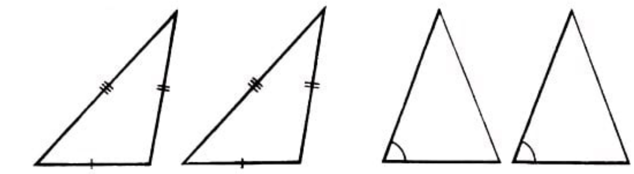


Abb. 15,16

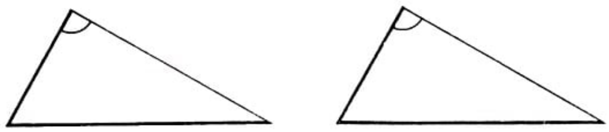


Abb. 17

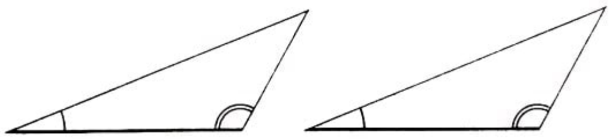


Abb. 18

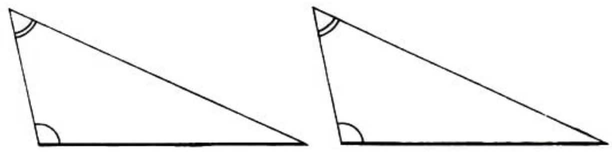


Abb. 19

Die beiden beliebigen Strecken, deren Gleichheit wir beweisen wollen, legen wir so, dass sie zwei Seiten eines Dreiecks bilden ($\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ in Abb. 20).

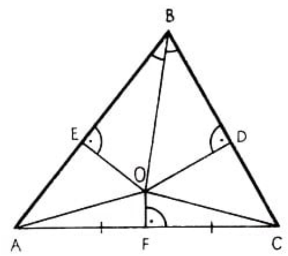


Abb. 20

In dem Dreieck zeichnen wir die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$ und die Winkelhalbierende des Gegenwinkels ein. In unserer Abbildung schneiden diese einander in dem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkt O. Wir verbinden diesen Punkt O mit A und C und fällen von O aus auf die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ die Lote. Die Bezeichnungen gehen aus Abb. 20 hervor.
Wir haben dadurch das Dreieck ABC in sechs kleinere Dreiecke zerlegt. Wir beweisen, dass diese paarweise kongruent sind:
Es ist

$$\triangle AFG \cong \triangle CFO$$

weil die beiden Dreiecke in zwei ihrer Seiten ($\overline{AC} = \overline{FC}$ und $\overline{OF}$ ist gemeinsam) und in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel (rechter Winkel) übereinstimmen. Aus der Kongruenz folgt: $\overline{AO} = \overline{CO}$. Ferner ist

$$\triangle BOE \cong \triangle BOD$$

weil die beiden Dreiecke in einer Seite ($\overline{BO}$) und zwei entsprechend liegenden Winkeln übereinstimmen (die bei B liegenden Winkel sind gleich, weil wir eine Winkelhalbierende

gezogen haben; bei E und D liegen rechte Winkel). Aus der Kongruenz folgt, dass $\overline{EB} = \overline{DB}$ und $\overline{EO} = \overline{DO}$ ist.
Schließlich ist

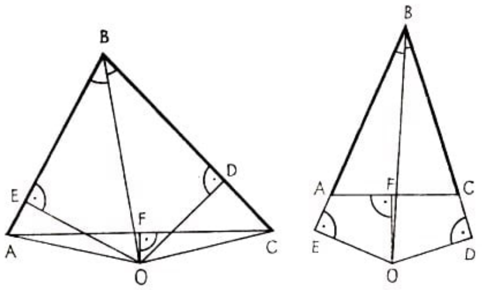
$$\triangle AOE \cong \triangle COD$$

weil die beiden Dreiecke in zwei ihrer Seiten (dem Obigen nach ist $\overline{AO} = \overline{CO}$ und $\overline{EO} = \overline{DO}$ und in den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkeln übereinstimmen (in den rechten Winkeln bei E bzw. D.

Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke folgt, dass $\overline{AE} = \overline{CD}$ ist. Wir haben aber bereits oben gesehen, dass $\overline{EB} = \overline{DB}$ ist, also ist $\overline{AB} = \overline{BC}$ als Summe zweier gleicher Strecken.
In unserer Abbildung ist O in das Innere des Dreiecks gefallen. Wie nun, wenn der Punkt außerhalb des Dreiecks liegt (Abb. 21) ? Der Beweis verläuft auch in diesem Falle wortwörtlich genauso.

Auch das hat keinen wesentlichen Einfluss auf den Beweis, wenn der Schnittpunkt so weit draußen liegt, dass auch noch die Fußpunkte der Lote auf die Verlängerung der Seiten fallen (Abb. 22). Dies führt nur dazu, dass wir dann schließlich die Gleichheit $\overline{AB} = \overline{BC}$ dadurch erhalten, dass wir gleiche Strecken subtrahieren (nicht mehr addieren).

Abb. 21,22



Auch der Grenzfall ist denkbar, dass der Schnittpunkt auf dem Rand des Dreiecks liegt. Dann wird der Beweis noch einfacher (der erste Schritt fällt weg, und die weitere Überlegung bleibt unverändert).

Wir haben eingehend die Fälle durchgeprüft, nur einen haben wir ausgelassen, nämlich den, dass der Schnittpunkt zwar außerhalb liegt, die von ihm aus gefüllten Lote sich jedoch nicht in derselben Weise verhalten: Bei dem einen fällt der Fußpunkt auf eine Seite selbst, bei dem anderen auf die Verlängerung einer Seite.
Diese Vergesslichkeit hat sich gerächt: Das ist nämlich gerade der Fall, der immer eintritt, wenn die Mittelsenkrechte von AC und die Halbierende des Winkels bei B überhaupt einen Schnittpunkt haben.

18. Beispiel. Schließlich soll noch ein »Beweis« dafür folgen, dass 1 mm = 1000 km ist, bzw. für die allgemeinere Behauptung, dass zwei beliebige Strecken gleich sind.
Zur Vorbereitung betrachten wir einen neuen Kongruenzsatz für Dreiecke: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei ihrer Seiten und in den einer davon gegenüberliegenden Winkeln übereinstimmen.

Dieser Satz ist eine Erweiterung des oben unter (3) kennengelernten Kongruenzsatzes. Dort haben wir die Einschränkung gemacht, dass die übereinstimmenden Winkel der größeren Seite gegenüberliegen. Jetzt lassen wir diese Einschränkung fallen.

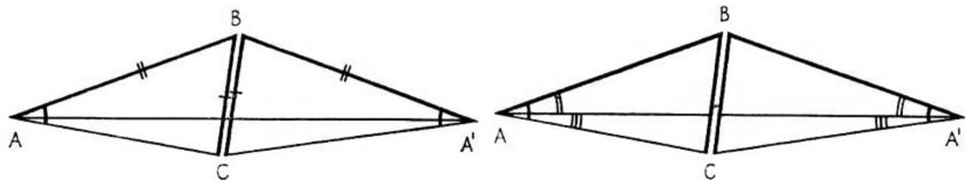


Abb. 23,24

Wir legen die beiden Dreiecke so aneinander, wie es Abb. 23 zeigt. Die dick ausgezogenen gleichbezeichneten Strecken bzw. Winkel sind gleich.

Wir verbinden die einander entsprechenden Ecken A und A' (Abb. 24). Da das Dreieck ABA' gleichschenklig ist, sind die in der Abbildung mit zwei Bögen bezeichneten Winkel gleich. Wenn wir diese von den mit einem Bogen gekennzeichneten gleichen Winkeln subtrahieren, bekommen wir wiederum gleiche Winkel (in Abb. 24 sind diese mit drei Bögen bezeichnet).
Da in dem Dreieck ACA' zwei Winkel gleich sind, sind also auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich: $\overline{AC} = \overline{A'C}$. Somit stimmen nun das Dreieck ABC und das Dreieck $A'BC$ in allen drei Seiten überein und sind daher kongruent.

Wir mussten jetzt von den einbogigen Winkeln die zweibogigen subtrahieren. Im anderen Fall bekommen wir dadurch gleiche Seiten des Dreiecks ABA', dass wir die beiden gleichen Ausgangswinkel von gleichen Winkeln des Dreiecks ABA' abziehen (Abb. 25) oder zu gleichen Winkeln addieren (Abb. 26).

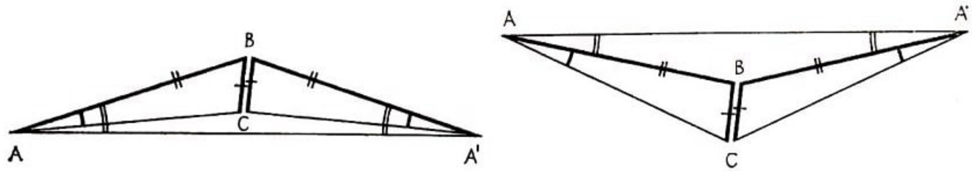


Abb. 25,26

Auf keinen Fall kann es jetzt geschehen, dass man in dem einen Fall addieren und in dem anderen subtrahieren muss wie im 17. Beispiel.

Wir sind also zu der Behauptung gelangt, dass unabhängig von jeder Einschränkung gilt: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und in dem einer beliebigen dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.
Auf Grund dessen kann man leicht beweisen, dass zwei beliebige Strecken gleich sind. Wir legen dazu die beiden Strecken so aneinander, dass sie auf eine Gerade fallen und einen einzigen Punkt gemein haben (Y in Abb. 27).

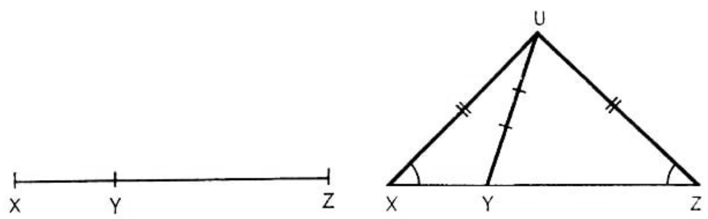


Abb. 27,28

Wir konstruieren ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie die durch die Vereinigung der beiden Strecken entstehende Strecke $\overline{XZ}$ ist. Die Spitze U des gleichschenkligen Dreiecks verbinden wir mit dem Punkt Y (Abb. 28).
Wir wollen die beiden entstehenden Teildreiecke miteinander vergleichen.

Sie stimmen in zwei ihrer Seiten ($\overline{UX} = \overline{UZ}$, $\overline{UY}$ ist beiden gemein) und in den einer davon gegenüberliegenden Winkeln überein (in den einbogigen Winkeln als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks). Unserem Satz zufolge sind sie also kongruent, stimmen also auch in ihren dritten Seiten überein: $\overline{XY} = \overline{YZ}$, wie auch immer die Abbildung aussehen mag. Zwei beliebige Strecken sind also gleich, 1 mm = 1000 km.

Wenn jedoch aus unserem Satz etwas Derartiges folgt, so ist an unserem Satz - und somit auch an seinem Beweis - etwas faul. Wo steckt der Fehler?
Bis dahin war alles in Ordnung, dass $\angle CAA' = \angle CA'A$ Summe oder Differenz zweier gleicher Winkel ist. Hieraus folgt jedoch nicht, dass $\overline{AC} = \overline{A'C}$ ist.
Wie nun, ist es denn möglich, dass zwei Winkel in einem Dreieck gleich sind, die ihnen gegenüberliegenden Seiten jedoch nicht?

Abb. 29

In einem »gewöhnlichen« Dreieck ist dies nicht möglich, aber in einem zu einer Geraden abgeflachten »ausgearteten« Dreieck ist es so: Nach dem Vorbild von Abb. 29 können wir uns vorstellen, dass in diesem Grenzfall zwei gleichen Winkeln von $0°$ auch verschiedene Seiten gegenüberliegen können.

Hier ist eine Lücke in unserer Überlegung; daher gilt auch nicht der vermeintliche »neue mathematische Satz«, dass zwei Dreiecke, die in zweien ihrer Seiten und in den einer beliebigen davon gegenüberliegenden Winkeln übereinstimmen, kongruent sind. Sie können kongruent sein, sie können aber auch verschieden sein.
Wenn sie in diesen Bestimmungsstücken übereinstimmen und doch nicht kongruent sind, so ist dies nur so möglich, dass dann, wenn man sie auf die genannte Weise aneinanderlegt, das dritte Seitenpaar (von dem wir nicht die Gleichheit vorausgesetzt haben; in unserer Abbildung $\overline{AC}$ und $\overline{A'C}$) auf eine Gerade fällt. Gerade dieser Fall liegt in Abb. 28 vor; dort ist XYZ dasjenige ausgeartete Dreieck, von dem zwar zwei Winkel gleich sind ($0°$), die ihnen gegenüberliegenden Seiten ($\overline{XY}$ und $\overline{YZ}$) dagegen nicht gleich sind.

Bemerkungen

1. Warum sind die Umformungen der Form

$$\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{2\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{2\cdot 6}{6\cdot 5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{2\cdot 7}{7\cdot 5} = \frac{2}{5}$$

richtig, die folgenden Umformungen dagegen falsch:

$$\frac{23}{24} = \frac{3}{4}, \quad \frac{23}{35} = \frac{2}{5}, \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{27}{74} = \frac{2}{5}$$

obgleich ihr Ergebnis zuweilen zufällig in Ordnung ist?

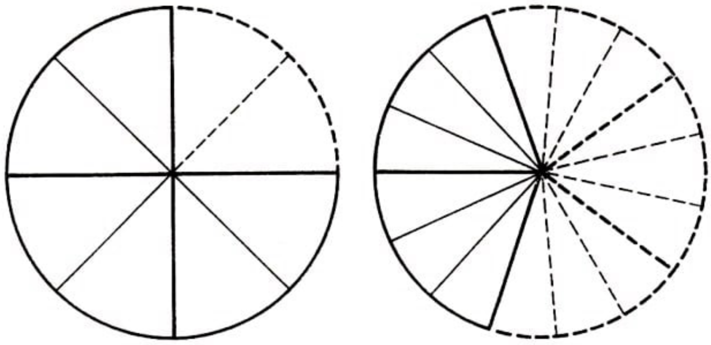


Abb. 30,31

Die Skizzen (Abb. 30 und Abb. 31) zeigen an zwei Beispielen, warum die ersteren gelten:

$$\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Im ersten Fall haben wir das Ganze in $2 \cdot 4$, d. h. 8 gleiche Teile geteilt und $2 \cdot 3$, d. h. 6 solche Teile genommen. Das läuft auf dasselbe hinaus, wie wenn wir das Ganze in 4 gleiche Teile teilen und 3 solcher Teile nehmen. Wenn wir allgemein Zähler und Nenner eines Bruchs durch dieselbe Zahl teilen (oder mit derselben Zahl multiplizieren), ändert der Bruch seinen Wert nicht.

In der folgenden Reihe sind wir nicht auf diese Weise vorgegangen. Dort bedeutete das Weglassen gleicher Zahlzeichen nicht Division, sondern etwas anderes. $\frac{23}{24}$ geht dadurch in $\frac{3}{4}$ über, dass man von Zähler und Nenner jeweils 20 subtrahiert.
Wenn wir $\frac{2}{4}$ statt $\frac{23}{35}$ geschrieben haben, so haben wir vom Nenner 30, vom Zähler dagegen nur 3 subtrahiert. Aber dadurch, dass aus der 2 statt der vorletzten Ziffer die letzte geworden ist, haben wir das, was nach der Subtraktion von 3 geblieben ist, zusätzlich noch durch 10 dividiert.

Ebenso verhält es sich auch mit den übrigen Brüchen. Es ist einzusehen, dass diese komplizierten Umformungen nur ausnahmsweise zu demselben Bruch führen. Derartige Ausnahmebrüche sind noch $\frac{16}{64}$ und $\frac{19}{95}$.

2. Die Wurzel des Fehlers ist auch hier dieselbe wie im 2. und 3. Beispiel: Die mehrstelligen Zahlen verhalten sich anders als die aus ihren Ziffern gebildeten Produkte oder Summen. Dort wollten wir zweistellige Zahlen so behandeln, als ob es Produkte wären (durch Wegstreichen je einer Ziffer kürzen), hier wollten wir mit Summen so rechnen, als ob mehrstellige Zahlen vorlägen.
Ein gutes Beispiel dafür, dass die Methode misslingen kann, ist die Subtraktion

$$\begin{array}{c} 52 \\ 14 \\ \hline 38 \end{array}$$

Hier lässt sich das Verfahren überhaupt nicht anwenden:

$$\begin{array}{c} 5+2 \\ 1+4 \\ \hline \end{array}$$

Oben können wir die 4 auf die Weise subtrahieren, dass wir von den 5 Zehnern einen zu den Einern übertragen und von der entstehenden 12 die 4 abziehen. Unten ist so etwas überhaupt nicht denkbar. Es gibt keine 5 Zehner, nur 5 Einer, man kann also auch keine Zehner in Einer umrechnen.

3. Höhengeraden nennen wir die durch die Ecken des Dreiecks gehenden Geraden, die auf den Gegenseiten senkrecht stehen. Für diese ist auch die Benennung »Höhenlinie« üblich, diese wird aber auch auf die Strecken angewendet, die von einer Ecke bis zur Gegenseite oder bis zu ihrer Verlängerung reichen.

4. Woher wissen wir, dass $\overline{AO}$ größer als $\overline{EO}$ (und somit auch $\overline{CO}$ größer als $\overline{DO}$) ist? Daher, dass dem größeren von zwei verschiedenen Winkeln eines Dreiecks die Seite gegenüberliegt, die größer ist als die dem kleineren Winkel gegenüberliegende Seite. (Dieser bekannte Satz wird hier benutzt.)

Woher wissen wir nun, dass im Dreieck AOE der bei E liegende Winkel größer als der bei A liegende Winkel ist?
Daher, dass der bei E liegende Winkel ein rechter ist (weil wir von O aus auf die Seite $\overline{AB}$ das Lot gefällt haben) und somit die anderen beiden Winkel nur kleiner sein können.
Warum? Weil die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt. Wenn ein Winkel $90°$ ist, so können also die anderen beiden zusammengenommen nur $90°$ ergeben.

5. Wenn nämlich in unserem Dreieck $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist, so fällt die Mittelsenkrechte mit der Winkelhalbierenden zusammen, es gibt also keinen Schnittpunkt.
Ist dagegen $\overline{AB} \neq \overline{BC}$, so gelangen wir von der Annahme, dass die Fußpunkte beider Lote auf die Seiten selbst oder beide mal auf die Verlängerungen der Seiten fallen, zu einem Widerspruch (nämlich darauf, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist, während wir doch davon ausgegangen sind, dass $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ ist).

Die oben dargestellten Beweise sind also falsch, wenn wir durch sie darauf schließen wollen, dass zwei beliebige Strecken gleich sind. Aus ihnen ergibt sich aber ein richtiger Beweis hinsichtlich der Lage der Fußpunkte. Dieser Beweis ist indirekt, d. h., wir beweisen, dass die Negation der Behauptung falsch ist.
Man kann auch einen direkten Beweis dafür angeben, dass die genannten Fußpunkte stets in der beschriebenen Weise liegen.

4 Können Sie fünfte Wurzeln im Kopf ziehen ?

János Surányi

Lieber Leser, der Sie dieses Buch in die Hand genommen haben, sicher denken Sie, stillschweigend auf den Titel dieses Kapitels anspielend: »... weil ich Sie es anderenfalls lehren werde.«
Sie haben schon recht damit, vorher wollen wir aber noch einige einfachere Rechenfertigkeiten kennenlernen.

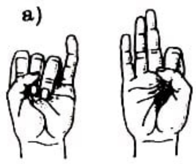
4.1 Einige Rechenerleichterungen

Heute lernt man die Grundrechenarten schon in der Unterstufe der Grundschule (wenn auch nicht immer ohne Mühe).
Im XV. Jahrhundert jedoch wurde die Division erst in den unteren Jahrgängen an der Universität gelehrt. Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, dass man damals noch römische Zahlen benutzte, während die Ausführung der Grundrechenarten durch unsere heutige, auf dem Stellenwertprinzip beruhende Zahlendarstellung einfach wird.

Wir können uns leicht einen Begriff davon machen, was für eine große Erleichterung diese Zahlenschreibweise bedeutet, die wir heute schon für selbstverständlich halten, wenn wir etwa das Produkt MMDCCXLIII · CCCXCVII auszurechnen versuchen (natürlich, ohne es vorher auf arabische Zahlen umzuschreiben).
Es ist daher nur allzu verständlich, dass man in früheren Zeiten zahlreiche Kniffe und Fertigkeiten entwickelte, um die Rechnung zu erleichtern. Hier einige Beispiele:

a) Wenn wir das Einmaleins nur bis $5 \cdot 5$ kennen, können wir Zahlen, die größer als 5 sind, auf die folgende Weise miteinander multiplizieren: Wir strecken an der einen Hand so viel Finger aus, um wieviel der eine Faktor größer als 5 ist, an der anderen so viel, um wieviel der andere Faktor größer als 5 ist (Abb. 32a).

a)



$$6 \cdot 8 = \overset{(1+3)\cdot 10}{40} + \overset{4\cdot 2}{8}$$

b)

$$75^2 = \overset{7\cdot(7+1)}{56}\,25$$

$$155^2 = \overset{15\cdot 16}{240}\,25$$

Abb. 32

Dann multiplizieren wir die Zahl der gebeugten Finger der einen Hand mit der der anderen Hand und addieren dazu so viel Zehner, wie es insgesamt ausgestreckte Finger gibt. So bekommen wir das gesuchte Produkt.

b) Das Quadrat einer Zahl, die auf 5 endet, lässt sich wie folgt berechnen: Wir multiplizieren die nach Streichen der 5 verbleibende Zahl mit der folgenden Zahl und schreiben hinter das Ergebnis noch 25 (vgl. Abb. 32 b).

c) Bei einigen Völkern ist das sogenannte russische Multiplikationsverfahren gebräuch-

lich, das nur wiederholtes Verdoppeln und Halbieren erfordert (und auch bei so unbequemen Zahlendarstellungen wie beispielsweise der römischen ziemlich leicht ausführbar ist). Wir schreiben die beiden Zahlen nebeneinander, verdoppeln dann die eine (zweckmäßigerweise die größere) und halbieren die andere, und wenn ein Rest bleibt, so lassen wir ihn weg.
Dies wiederholen wir so lange, bis wir bei der Halbierung auf 1 gelangen. Dann streichen wir in der durch wiederholtes Verdoppeln entstandenen Spalte diejenigen Zahlen, neben denen in der anderen Spalte eine gerade Zahl steht; die Summe der übriggebliebenen Zahlen ergibt die gesuchte Zahl.

58	249
29	498
14	996
7	1992
3	3984
1	7968
$58 \cdot 249$	$= 14442$

Es sind noch zahlreiche ähnliche Kniffe und Merkwürdigkeiten bekannt. Wir haben nur zur Illustration einige in der Einleitung erwähnt. Der Leser mag die Richtigkeit der Verfahren an Beispielen nachprüfen. Auf ihre Erklärung kommen wir noch zurück. Vorerst wollen wir uns jedoch mit einfacheren Operationen befassen, mit Addition und Subtraktion.

4.2 Wir addieren und subtrahieren gleichzeitig

Wir können mehrere Additionen gleichzeitig ausführen; sobald jedoch zwischendurch auch subtrahiert werden muss, ist jeder Subtrahend einzeln abzuziehen. Wenn wir geschickt sind, können wir uns dadurch helfen, dass wir nach der Addition der Summanden die Subtrahenden für sich addieren und ihre Summe von der ersten Summe abziehen.

Mit einer einfachen Idee können wir jedoch auch noch die 3 Operationen durch eine einzige ersetzen. Wir schreiben die Summanden und Subtrahenden gemischt untereinander, wie es bei der Addition üblich ist, nur - da wir die Operationen ziffernweise ausführen - markieren wir jede Ziffer der Subtrahenden besonders, beispielsweise durch Überstreichen. (Es ist überflüssig, die Ziffern 0 zu überstreichen.)
Danach können wir von den »Einern« ab spaltenweise ebenso rechnen wie bei der Addition, nur dass dabei die markierten Ziffern zu subtrahieren sind.

Es kann der Fall eintreten, dass im Verlauf der Addition der Ziffern die überstrichene Ziffer die größere ist, beispielsweise, wenn die Ziffern $\overline{8}$ und 3 aufeinanderfolgen. Dann bleibt der Subtrahend 5 für die folgende Ziffer übrig, wobei man zur Unterscheidung von der Addition dem Subtrahenden das Wörtchen »minus« voranzustellen pflegt.
Wir rechnen also: minus 8, minus 5. Dies ziehen wir von der folgenden Ziffer ab; wenn dies jedoch gleichfalls eine überstrichene Ziffer ist, z. B. $\overline{7}$, so nimmt der Subtrahend zu, das folgende Teilergebnis lautet also minus 12.

Es kann auch der Fall eintreten, dass wir am Ende einer Spalte zu einem solchen Ergebnis gelangen. Dann schreiben wir die »Einer«stelle $\overline{2}$ an die entsprechende Stelle und übertragen die Zehner, also in unserem Falle minus 1, in die folgende Spalte gerade so wie bei der Addition, jetzt aber natürlich als Subtrahend. Diese zu subtrahierenden Zahlen pflegt man negative Zahlen zu nennen.
Hier einige Beispiele:

$$\begin{array}{rrr}
769 - 2021 + 953 + 1868 - 1070 = & +769 & 769 \\
 & -2021 & \overline{2}0\overline{21} \\
 & +953 & 953 \\
 & +1868 & 1868 \\
 & -1070 & = \overline{1}0\overline{7}0 \\
\hline
 & & 499
\end{array}$$

$342 - 778 + 231 - 549 + 1322 =$

$$\begin{array}{r}
342 \\
\overline{778} \\
231 \\
\overline{549} \\
1322 \\
\hline
1\overline{432}
\end{array}$$

In den einzelnen Spalten der zweiten Aufgabe (von unten nach oben fortschreitend) führen wir beispielsweise die folgenden Reihen von Operationen durch: 2, minus 7, minus 6, minus 14, minus 12; wir schreiben nieder $\overline{2}$, bleibt minus 1, 1, minus 3, 0, minus 7, minus 3, wir schreiben nieder $\overline{3}$ usw.

Wie sind jedoch die gemischt auftretenden gewöhnlichen (mit dem Fachausdruck positiven) und die zu subtrahierenden negativen Ziffern zu verstehen? So, wie die Sprechweise besagt: »das eine Mal neunzehn, das andere Mal zwanzig weniger eins«, das heißt in unserer jetzt eingeführten Schreibweise $19 = 2\overline{1}$.
Dies ist zugleich ein Hinweis darauf, wie man allgemein die auftretenden negativen Ziffern umformen kann.

Wir beginnen von links mit der ersten negativen Ziffer, der $\overline{4}$, subtrahieren von der vorangehenden Ziffer eine Eins, wandeln diese Eins in 10 kleinere Einheiten um und ziehen hiervon die überstrichene Ziffer ab. Danach können wir, von links nach rechts fortschreitend, der Reihe nach auch die übrigen überstrichenen Ziffern beseitigen:

$$1\overline{432} = 6\overline{32} = 57\overline{2} = 568$$

Wenn vor der überstrichenen Zahl eine Null steht, können wir nichts subtrahieren. Daher gehen wir in diesem Falle nach links bis zur ersten von Null verschiedenen Ziffer, vermindern diese um Eins, wandeln diese Einheit in kleinere um, schreiben hiervon 9 auf, wandeln wieder eine Eins um, wenn rechts erneut eine Null folgt, dann schreiben wir wieder 9 nieder und wandeln abermals eine Eins um, bis wir zu der überstrichenen Ziffer gelangen.
Dann ziehen wir diese Ziffer von den bei der letzten Umwandlung entstandenen 10 Einheiten ab:

$$100\overline{7}0\overline{4} = 9930\overline{4} = 99296$$

Wenn die erste Ziffer negativ ist, so können, wenn auch lauter positive Neunen danach stehen sollten, diese zusammen nicht so viel ergeben wie der mit der ersten Ziffer geschriebene Subtrahend, also ist in diesem Falle die Summe der Subtrahenden größer als die der Minuenden.

4.3 Zahlenraten

Es sind außerordentlich viele Zahlenratespiele bekannt; zwei von ihnen wollen wir hier vorstellen.

a) Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 6, subtrahiere 3 hiervon, nimm das Doppelte, addiere die Ziffern, die du erhalten hast, nimm das 3fache, addiere die Ziffern; wenn das Ergebnis mehrstellig ist, addiere auch hiervon die Ziffern und wiederhole das, bis du ein einstelliges Ergebnis bekommst, multipliziere diese Zahl mit 4 und addiere dazu 13. Wenn du richtig gerechnet hast, hast du 49 bekommen.
Wir können die Wirkung dadurch steigern, dass wir vorher auf ein Blatt Papier das Endergebnis aufschreiben und es umgedreht niederlegen, um es zum Schluss emporzuheben: »Hier ist das Ergebnis!«

b) Schreibe eine Zahl nieder, schreibe mit denselben Ziffern, nur in anderer Reihenfolge, eine andere, und subtrahiere die kleinere von der größeren. Verfahre mit mehreren Zahlen auf diese Weise und sage die Endergebnisse an:

$$801, 17612, 2574, 295576, 19998$$

Sieh deine Rechnung an, in der zweiten und vierten Subtraktion ist sicher ein Fehler.

Woher kann man das wissen, kennen wir doch nicht die Zahlen, die der Aufgerufene subtrahiert hat bzw. von denen die Rechnungen im Fall a) ausgegangen sind?
In jedem Fall wird die Erklärung durch die »Neunerprobe« gegeben, die der Leser im ersten Aufsatz kennengelernt hat. Hiernach bleibt bei der Division einer Zahl durch 9 ein ebenso großer Rest, wie sie die Summe ihrer Ziffern ergibt.

Dieser Sachverhalt wird auch zur Überprüfung von Rechnungen ausgenutzt, denn der Rest einer Summe, Differenz und eines Produkts bei der Division durch 9 ist ebenso groß wie derjenige der Summe, Differenz bzw. des Produkts der Reste der einzelnen Zahlen, und dasselbe gilt auch für das Potenzieren, denn Potenzieren ist wiederholte Multiplikation mit lauter gleichen Faktoren.

Auf Grund dessen können wir leicht den Divisionsrest des Ergebnisses einer Operation oder einer Reihe von Operationen aus den Resten der einzelnen Zahlen ausrechnen und den Rest des Endergebnisses bestimmen. Wenn die beiden nicht übereinstimmen, so ist in der Rechnung ein Fehler enthalten. (Ein Fehler ist allerdings auch dann möglich, wenn die Neunerprobe stimmt.)

Das unter Punkt 3a aufgeführte Spiel lässt sich demnach folgendermaßen verstehen:
Bei der Multiplikation mit 6 haben wir eine durch 3 teilbare Zahl erhalten, und daran hat sich auch bei der Subtraktion von 3 und bei der Verdopplung nichts geändert. (Diese Schritte sind übrigens für die Aufgabe unwesentlich.)

Nach der Multiplikation mit 3 bekommen wir bereits ein Vielfaches von 9, wir gelangen also bei der wiederholten Addition der Ziffern zu einer einstelligen und durch 9 teilbaren Zahl. Solcher Art sind nur 9 und 0, da aber die Quersumme nicht 0 sein kann, kann das Ergebnis der Addition der Ziffern nur 9 sein. Das Ergebnis der weiteren Operationen kennen wir bereits, wir können somit dieses Ergebnis so umformen, wie wir es gerade wollen.

In Punkt 3b ergeben die beiden Glieder der Differenz bei der Division durch 9 denselben Rest, weil die Summe der Ziffern beidemal dieselbe ist (die beiden Zahlen bestehen stets aus denselben Ziffern); die Differenz ist also durch 9 teilbar, und somit muss auch ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Dies ist für das zweite und vierte Ergebnis nicht erfüllt, diese sind also sicher aus einer fehlerhaften Rechnung hervorgegangen.

Es ist jedoch zu bemerken, dass auch die drei übrigen Rechnungen falsch sein können, weil viele Rechenfehler möglich sind, durch die das Ergebnis um eine durch 9 teilbare Zahl abgeändert wird, und dann die Quersumme durch 9 teilbar bleibt.

4.4 Die Elferprobe

Auch für die Feststellung des bei der Division durch 11 bleibenden Restes kann man ein einfaches Verfahren angeben.
Addiert man von der letzten Ziffer (den Einem) ab immer eine Ziffer um die andere und subtrahiert von dieser Summe die Summe der übersprungenen Ziffern, so ergibt diese sogenannte »Querdifferenz« einen ebenso großen Rest, wie er bei der Division der Ausgangszahl durch 11 entsteht. Auch hier gilt, dass der Rest einer Summe, einer Differenz, eines Produkts und einer Potenz ebenso groß ist wie der der Summe, der Differenz, des Produkts bzw. der Potenz der Reste. (Wenn der Subtrahend größer ist, so addieren wir zu dem Minuenden 11 oder ein Vielfaches davon, wodurch sich der Rest bei der Division durch 11 nicht ändert.)

Auf Grund dessen können wir auch mit der »Elferprobe« nachprüfen, ob ein Rechenfehler vorliegt. Der Leser kann selbständig versuchen, das Verfahren zu begründen, er kann es aber auch in jedem Buch finden, in dem die Elemente der Zahlentheorie behandelt werden.

Analog zu dem Vorgehen in 3b können wir folgendes Spiel spielen: Wir lassen eine vier- oder sechsstellige (allgemein eine mit einer geraden Anzahl von Ziffern geschriebene) Zahl aufschreiben und unter sie die Zahl, die man dadurch aus ihr erhält, dass man die erste Ziffer weglässt und hinter die letzte Ziffer schreibt. Wir lassen die beiden Zahlen addieren.

Dabei ergibt sich stets eine durch 11 teilbare Zahl. Da wir den Rest bei der Division durch 11 schnell aus den Ziffern ausrechnen können, gibt dies wieder eine Möglichkeit zur Aufdeckung von Fehlern, ohne dass wir die Summanden kennen.

4.5 Fünfte Wurzeln ziehen wir im Kopf

Man kann sich noch größere Rechenfertigkeiten aneignen, beispielsweise aus jeder höchsten 10stelligen fünften Potenz die fünfte Wurzel zu ziehen.
Dies gründet sich in erster Linie darauf, dass die fünfte Potenz jeder Zahl auf dieselbe Ziffer endet wie die potenzierte Zahl selbst. Wenn die Zahl höchstens fünfstellig ist, so hat man damit schon die fünfte Wurzel gefunden, weil die fünfte Potenz der kleinsten zwei- stelligen Zahl ($10^5 = 100000$) bereits sechsstellig ist und somit eine mit weniger Stellen geschriebene Zahl nur die fünfte Potenz einer einstelligen Zahl sein kann.

Wenn die Zahl mehr als 5 Stellen hat, so muss man noch die Zehnerstelle bestimmen. Eine Zahl von mehr als zwei Stellen kommt nämlich für die fünfte Wurzel nicht in Frage, weil die fünfte Potenz der kleinsten dreistelligen Zahl

$$100^5 = 10000000000$$

bereits 11stellig ist.

$$\begin{aligned} 1^5 &= 1 \\ 2^5 &= 32 \\ 3^5 &= 243 \\ 4^5 &= 1024 \\ 5^5 &= 3125 \\ 6^5 &= 7776 \\ 7^5 &= 16807 \\ 8^5 &= 32768 \\ 9^5 &= 59049 \end{aligned}$$

Die Zehnerstelle können wir ermitteln, wenn wir von den fünften Potenzen der einstelligen Zahlen wissen, wieviel stellig sie sind und mit welcher Ziffer sie beginnen. Nebenstehend haben wir die fünften Potenzen der ersten 9 Zahlen aufgeschrieben. Von diesen brauchen wir aber nur die ersten beiden Stellen und die Stellenzahl zu kennen. Die fünften Potenzen der Zahlen $10, 20, 30, ..., 90$ sind jeweils um 5 Stellen länger.
Daher kann diejenige Zahl, deren fünfte Potenz 229345007 ist, nur auf 7 enden.
Weiter muss sie zwischen 40 und 50 fallen, da die aufgeschriebene Zahl 9stellig ist und mit 22 beginnt. Somit kann die aufgeschriebene Zahl nur von 47 die fünfte Potenz sein, und dem ist in der Tat so.

Analog ist 2535525376 10stellig und beginnt mit 25, kann also nur die fünfte Potenz einer zwischen 70 und 80 liegenden und auf 6 endenden Zahl sein. d. h. 76, und die fünfte Potenz von 76 ist in der Tat so groß.

4.6 Die letzte Ziffer der fünften Potenz

Warum endet die fünfte Potenz einer ganzen Zahl auf dieselbe Ziffer wie die Zahl selbst?
Aus der obigen Tabelle ersehen wir, dass dies für einstellige Zahlen gilt. Hieraus folgt die Behauptung jedoch bereits für jede ganze Zahl. Potenzieren ist nämlich wiederholtes Multiplizieren mit gleichen Faktoren.

Das Produkt der letzten Stellen der Faktoren ergibt die letzte Stelle des Produkts. Bei der Multiplikation von mehreren Faktoren liefert die letzte Stelle des Produkts der letzten Stellen der Faktoren die letzte Stelle des Endergebnisses. Wenn wir fünf gleiche Faktoren miteinander multiplizieren - d. h. in die fünfte Potenz erheben -, dann steht an der letzten Stelle des Endergebnisses die letzte Ziffer der fünften Potenz der letzten

Ziffer der potenzierten Zahl. Wir wissen jedoch bereits, dass diese mit der potenzierten Ziffer selbst übereinstimmt.

4.7 Schützen wir uns vor Fallen!

Wir haben ein recht einfaches und schnelles Verfahren für das Ziehen der fünften Wurzel gefunden. Dazu brauchen wir nicht einmal genau die Potenz zu kennen, nur die ersten beiden Ziffern, die letzte Ziffer und die Stellenzahl.
Dies birgt indessen auch Gefahren in sich. Wenn uns jemand auf die Probe stellen will oder einfach in der Rechnung einen Fehler begeht, »erraten« wir auch dann auf Grund des Gesagten - in diesem Falle natürlich falsch -, wovon die fünfte Potenz gebildet wurde?

Betrachten wir z. B. 460065624.
Unser Verfahren ergibt, dass dies nur die fünfte Potenz von 54 sein kann, wenn es die fünfte Potenz einer ganzen Zahl ist. Es ist jedoch $54^5 = 459165024$ (obschon wir das kaum so schnell im Kopf rechnen können), und somit ist die diktierte Zahl nicht die fünfte Potenz einer ganzen Zahl.

Wiederum können wir zur Verminderung der Fehlermöglichkeit zu der Neuner- und Elferprobe greifen. Mit der letzteren ist die Nachprüfung besonders einfach. Die fünfte Potenz der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ergibt nämlich bei der Division durch 11 der Reihe nach die Reste 1, 10, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 1, 10, während natürlich die fünfte Potenz einer durch 11 teilbaren Zahl gleichfalls durch 11 teilbar ist.

Somit müssen wir zunächst nachschauen, was für einen Rest die diktierte Zahl bei der Division durch 11 gibt.
Wenn dieser nicht 0, 1 oder 10 ist, dann ist die diktierte Zahl keine fünfte Potenz. Ergibt sich irgendeiner der drei Reste, so können wir, nachdem wir unser Verfahren angewendet haben, noch einmal nachsehen, ob die fünfte Potenz des entsprechenden Bestes der erhaltenen Zahl tatsächlich den obigen Rest ergibt.

Auch die Neunerregel können wir zur Kontrolle ausnutzen. Das ist aber ein wenig komplizierter, weil man sich die sich bei der Division der fünften Potenzen der Zahlen 1 bis 9 ergebenden Reste merken muss. Diese sind:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rest der 5.Potenz	1	5	0	7	2	0	4	8	0

Hier kommt mit Ausnahme von 3 und 6 alles vor; daher ist es gut, wenn man zunächst feststellt, von welcher Zahl die diktierte Zahl fünfte Potenz sein kann, und danach nachsieht, ob die Teilungsreste der diktierten und der erratenen Zahl der Tabelle nach einander entsprechen (was man leicht im Kopf behalten kann).

4.8 Wir vervollkommnen unsere Kenntnisse

Wir haben diese Tabelle auch deshalb aufgeschrieben, weil wir, wenn wir sie im Kopf behalten, die Zuhörerschaft weiter blenden können.

- Bitte diktieren Sie eine fünfte Potenz!
- 20 ...
- Halten Sie ein! Sie können die übrigen Stellen auch in vertauschter Reihenfolge diktieren.
- 20111459.

Jetzt haben wir uns der größten Hilfe begeben, der Kenntnis der letzten Ziffer. So viel wissen wir auf alle Fälle, dass die diktierte Zahl 5 stellig ist und mit 20 beginnt, dass sie also fünfte Potenz einer zwischen 20 und 30 liegenden Zahl ist.
Wir können auch bereits aussagen, dass die diktierte Zahl bei der Division durch 9 als Rest 5 ergibt, die gesuchte Zahl also 2 ist. Somit ist nur 20 oder 29 möglich. Da aber die fünfte Potenz von 20 fünf Nullen enthält (und 7stellig ist), ist die gesuchte Zahl 29. (In der Tat ist die fünfte Potenz hiervon 20511149.)

Bei diesem Verfahren stößt man auf Schwierigkeiten, wenn die diktierte Zahl durch 9 teilbar ist. Dann kann nämlich jede durch 3 teilbare Zahl in einem 10 Zahlen umfassenden Intervall die gesuchte Zahl sein.
Wenn wir die ersten beiden Ziffern kennen, können wir mit ein wenig Übung jedoch auch dann abschätzen, um welche der in Frage kommenden Zahlen es geht. Sind beispielsweise die ersten beiden Ziffern 1 und 3, die der Größe nach geordneten Ziffern 011223369, so liegt die Zahl zwischen 40 und 50, ganz dicht bei 40 und ist durch 3 teilbar, also 42. (In der Tat ist $42^5 = 130691232$.)

Man könnte das Verfahren noch durch zahlreiche Kniffe verfeinern, ich denke aber, dem Leser wird es nicht darum gehen, ein erstklassiger Rechenkünstler zu werden. Dazu sind im allgemeinen besondere Veranlagungen und außerordentlich viel Übung notwendig.
Es ist jedoch kaum von Nutzen, all dies nur deshalb zu entwickeln, um blendende Schaustellungen durchführen zu können.

4.9 Erklärung der Rechenvereinfachungen

Ist es Ihnen gelungen, die Erklärung der im ersten Abschnitt genannten Rechenverfahren zu finden?

α) Am leichtesten ist das letzte Verfahren zu erklären.
Wenn wir einen Faktor eines Produkts halbieren, den anderen dagegen verdoppeln, so ändert sich der Wert des Produktes nicht. Dies gilt für die ersten beiden Zeilen der Rechnung unter Punkt 1: $58 \cdot 249 = 29 \cdot 498$.
In der folgenden Zeile sieht es dagegen komplizierter aus. Eigentlich haben wir von 28 die Hälfte genommen:

$$28 \cdot 498 = 14 \cdot 996$$

Da wir den Rest weggelassen haben, ist also das Produkt der beiden neuen Zahlen um die neben 29 stehende Zahl 498 kleiner als das der vorhergehenden:

$$29 \cdot 498 = 14 \cdot 996 + 498$$

In den folgenden Schritten gilt analog

$$14 \cdot 996 = 7 \cdot 1992 = 3 \cdot 3984 + 1992 = 1 \cdot 7968 + 3984 + 1992$$

Somit ist in der Tat

$$58 \cdot 249 = 498 + 1992 + 3984 + 7968$$

Auch allgemein ist das so: Irgendwann einmal schreiben wir statt von einer ungeraden Zahl von einer um 1 kleineren Zahl die Hälfte auf. Daher wird das Produkt der beiden neuen Zahlen um die neben dieser ungeraden Zahl stehenden Zahl kleiner sein als das der alten beiden Zahlen.
Wir erhalten also, wenn wir diese stets zu der zuletzt verdoppelten Zahl hinzuzählen, das Produkt der beiden zu Beginn aufgeschriebenen Zahlen.

β) Allgemeiner als unter 1b können wir beispielsweise das Produkt $62 \cdot 68$ auf die Weise ausrechnen, dass wir hinter das Produkt $6 \cdot 7$ das Produkt $2 \cdot 8$ schreiben:

$$62 \cdot 68 = \overbrace{42}^{6\cdot 7}\overbrace{16}^{2\cdot 8}$$

Allgemein ist das Verfahren auf die Multiplikation zweier Zahlen anwendbar, die nur in der letzten Stelle voneinander abweichen und deren letzte Stellen einander zu 10 ergänzen.
In einem solchen Falle multiplizieren wir die nach Streichen der letzten Ziffer übrigbleibende Zahl mit der um 1 größeren Zahl und schreiben dahinter das Produkt der letzten Stellen, letzteres immer zweistellig geschrieben, also $1 \cdot 9$ in der Form 09. Beispielsweise ist

$$141 \cdot 149 = \overbrace{210}^{14\cdot 15}\overbrace{09}^{1\cdot 9}$$

Die Richtigkeit des Verfahrens können wir dadurch erkennen, dass wir die Rechnung etwas umformen, im Falle des vorletzten Beispiels etwa so:

$$62 \cdot 68 = 62 \cdot 60 + 62 \cdot 8 = 62 \cdot 60 + 60 \cdot 8 + 2 \cdot 8$$

In den ersten beiden Summanden steht das Produkt von 60 mal 62 bzw. von 60 mal 8, wir bekommen also

$$62 \cdot 68 = 60 \cdot (62 + 8) + 2 \cdot 8 = 60 \cdot 70 + 2 \cdot 8 = \underline{6 \cdot 7} \cdot 100 + \underline{2 \cdot 8} = 4200 + 16 = 4216$$

Auf Grund des einfachen Zusammenhangs, der zwischen den beiden Faktoren bestehen sollte, wird gerade eine derartige Umformung möglich. Bei einem Produkt mit der genannten Eigenschaft kann man stets in dieser Weise vorgehen.

In der Sprache der Algebra ausgedrückt, nützen wir hier die identische Umformung

$$(n + k) \cdot (n + l) = n \cdot (n + k + l) + k \cdot l$$

aus, wo n die Zehner bedeutet, d. h. von der Form $10t$ ist, und $k + l = 10$ ist. Somit gilt

$$n \cdot (n + k + l) = 10t(10t + 10) = t - (t + 1) - 100$$

Diese Identität ermöglicht zahlreiche weitere Multiplikationsvereinfachungen bei solchen Produkten, bei denen n oder $n + k + l$ oder - wie in unserem Falle - das Produkt der beiden auf mehrere Nullen endet.

γ) Am schwersten ist die Richtigkeit der Rechnung unter 1a einzusehen. Das Produkt, von dem dort die Rede ist, lautet mit Angabe der Anzahl der gebeugten Finger $(5+1) \cdot (5+3)$, das aufgeschriebene Rechenverfahren dagegen $(1+3) \cdot 10 + (5-1) \cdot (5-3)$. Bei anderen Produkten tritt an die Stelle der »1« und »3« eine andere Anzahl von Fingern. Bezeichnen wir allgemein mit k und l die Anzahl der gebeugten Finger, so haben wir nachzuweisen, dass die Multiplikation $(5 + k) \cdot (5 + 1)$ stets zu demselben Ergebnis führt wie die Rechnung $(k + l) \cdot 10 + (5 - k) \cdot (5 - l)$.

Durch einfache Umformungen, wie wir sie mit konkreten Zahlen bereits oben durchgeführt haben, können wir das erste Produkt auf die Form

$$(5 + k) \cdot (5 + l) = \underline{5 \cdot 5 + k \cdot 5 + 5 \cdot l + k \cdot l} \tag{5}$$

den zweiten Ausdruck dagegen auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}(k + l) \cdot 10 + (5 - k) \cdot (5 - l) &= k \cdot 10 + l \cdot 10 + (5 - k) \cdot 5 - (5 - k) \cdot l \\ &= k \cdot 10 + l \cdot 10 + 5 \cdot 5 - k \cdot 5 - 5 \cdot l + k \cdot l = \underline{k \cdot 5 + l \cdot 5 + 5 \cdot 5 + k \cdot l}\end{aligned} \tag{6}$$

Die beiden unterstrichenen Ausdrücke unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Glieder und in den einzelnen Gliedern in der Reihenfolge der Faktoren. Wir wissen jedoch, dass sich das Ergebnis der Operation sowohl bei der Vertauschung der Summanden als auch bei Vertauschung der Faktoren nicht ändert. Beide Rechnungen führen also stets zu demselben Ergebnis.

4.10 Multiplikation ohne Teilprodukte

Wir haben oben gesagt, dass auch für die Kunst des Rechnens gewisse Fertigkeiten notwendig sind. Diese sind durchaus von der mathematischen Begabung zu unterscheiden. Im allgemeinen gehen sie mit dieser nicht einmal parallel.

Gelegentlich gehen übrigens geistige Fähigkeiten mit Schwächen auf diesem Gebiet einher. Es gibt indessen auch bemerkenswerte Ausnahmen. Um die Jahrhundertwende trat ein Rechenkünstler namens Ferrol[2] auf. Dieser entdeckte nicht nur eine - schon von alters her bekannte - Multiplikationsmethode neu, bei der man, ohne Teilrechnungen aufzuschreiben, sofort das Endergebnis anschreiben kann, sondern gab auch an - und dies war vorher nicht bekannt -, wie man hieraus ein Divisionsverfahren herleiten kann, das ohne Teilrechnungen arbeitet. Im folgenden wollen wir diese Verfahren vorstellen.

[2] P. Maennchen: Geheimnisse der Rechenkünstler. Berlin/ Leipzig: B. G. Teubner 1913, S. 33-39

Wir illustrieren am Beispiel 724 · 586, wie man die Multiplikation so ausführen kann, dass man nur das Endergebnis aufzuschreiben braucht. Um den Gang der Handlung verfolgen zu können, schreiben wir hier natürlich auch einen Teil der im Kopf durchgeführten Nebenrechnungen auf.

$$\begin{array}{r} 7\,2\,4 \\ \uparrow \\ \underline{5\,8\,6} \\ 2 \\ 4 \end{array}$$

Die letzte Stelle (Einerstelle) des Produkts bekommen wir aus dem Produkt der Einerstellen der Faktoren: 6 · 4 = 24. Die 4 ist die gesuchte letzte Stelle, geblieben sind zwei Zehner. (Die miteinander multiplizierten Ziffern sind durch einen Pfeil verbunden.) Oberhalb der Zehnerstelle des Ergebnisses haben wir den Zehnerübertrag angegeben, analog geben wir auch die weiteren Schritte an. $2+8\cdot4+6\cdot2 = 46$.

Somit ist die zweite Ziffer 6, und es bleiben 4 Hunderter (Abb. 34). Analog können wir auch die weiteren Ziffern berechnen; wie diese Berechnung im einzelnen durchzuführen ist, geht aus Abb. 35 hervor.

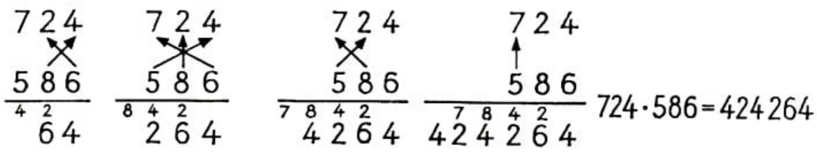


Abb. 34, 35

Wir können die Rechnung dadurch erleichtern, dass wir die Ziffern des Multiplikators in umgekehrter Reihenfolge unter den Multiplikanden schreiben. Dann brauchen wir nämlich nicht in entgegengesetzter Richtung zu laufen, wenn wir die Ziffern des Multiplikators suchen.

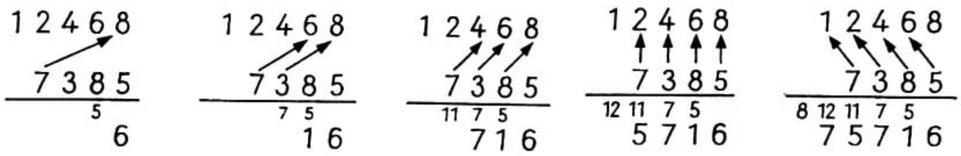


Abb. 36

Betrachten wir dies am Beispiel des Produktes 12468 · 5837 (Abb. 36): und weiter analog:

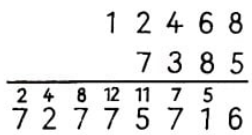


Abb. 37

Wenn mehrere Zahlen mit ein und derselben Zahl zu multiplizieren sind, so ist es zweckmäßig, die Ziffern des gemeinsamen Multiplikators in umgekehrter Reihenfolge auf den (unteren) Rand eines besonderen Papierstreifens zu schreiben und danach diesen Papierstreifen ziffernweise so von links über die Multiplikanden zu schieben, dass die Ziffern des Multiplikanden stets untereinanderstehen.

4.11 Division ohne Nebenrechnungen

Dieses Verfahren lässt sich auch umkehren und führt so auf ein Divisionsverfahren, bei dem man fast ohne Nebenrechnungen nur die Quotienten aufzuschreiben braucht, und zwar auch noch dann, wenn wir diese auf viele Dezimalen zu berechnen haben.

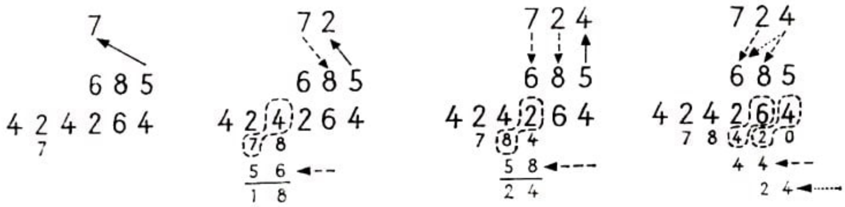


Abb. 38

Wir kehren zunächst unsere erste Multiplikation um:
Wir dividieren 424264 durch 586. Den Divisor schreiben wir über den Dividenden, der Erleichterung halber aber gleich wie bei der zweiten Multiplikation mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern ; den Quotienten schreiben wir darüber (Abb. 38).

Der Quotient wird offensichtlich 3stellig sein (jedenfalls, wenn er ganzzahlig ist; anderenfalls wird er 3 Stellen vor dem Komma haben).

Beim letzten Schritt der Multiplikation haben wir die Ziffern beider Faktoren mit dem höchsten Stellenwert miteinander multipliziert - also die 5 mit der ersten Ziffer des gesuchten Quotienten - und haben den Rest des vorhergehenden Schrittes hinzugezählt. Auf diese Weise haben wir - im vorliegenden Fall - die aus den ersten beiden Ziffern des Produkts bestehende Zahl 42 bekommen; diese müssen wir also durch 5 teilen und bekommen damit die erste Ziffer des Quotienten. Es ist jedoch nicht zu empfehlen, 8 als Quotienten zu nehmen, sondern nur 7, weil wir beim vorhergehenden Schritt zu dem Produkt zweier Ziffernpaare noch den Rest addiert haben, es also unwahrscheinlich ist, dass hiervon nur eine 2 zu übertragen war.
Da sich dann aus dem vorletzten Schritt $42 - 7 \cdot 5 = 7$ aus dem Übertrag ergeben hat, haben wir im vorletzten Schritt 74 bekommen.

Dies ist auf die Weise entstanden, dass wir zu dem Produkt $7 \cdot 8$ noch das 5fache der zweiten Ziffer des noch unbekannten Quotienten und den Rest des vorherigen Schrittes addiert haben. Diese beiden Summanden ergeben also zusammen $74 - 7 \cdot 8 = 18$.
Die 5 geht hierin 3mal auf, es wird aber zweckmäßig sein, als folgende Ziffer 2 zu nehmen, weil 3 für den vom vorhergehenden Übertrag herrührenden Rest zu klein sein wird. Nach Wahl von 2 haben wir von der vorhergehenden Teilrechnung $18 - 2 \cdot 5 = 8$ übertragen und 2 aufgeschrieben, das Ergebnis der vorherigen Teilrechnung war also 82.
Dies setzt sich aus $7 \cdot 6$, $2 \cdot 8$, dem 5fachen der dritten Ziffer des Quotienten und der vom vorangegangenen Schritt übertragenen Zahl zusammen.

Somit ist die folgende Ziffer des Quotienten aus dem Fünftel von $82 - 7 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 24$ zu berechnen. Dies ist bereits eine Ziffer in der Einerstelle des Quotienten. Wir können also sehen, ob wir mit der 4 hinkommen, zumal wenn zu erwarten ist, dass der Quotient eine ganze Zahl ist.

Da die vorhergehende Teilrechnung 46 ergeben hat, können wir schließen, wenn wir hiervon $2 \cdot 6 + 4 \cdot 8$ subtrahieren, dass das Ergebnis der vorhergehenden Teilrechnung 24 ist. Das stimmt mit dem Produkt aus der letzten Ziffer des Divisors und dem Quotienten, mit $4 \cdot 6$, überein, wir haben also den genauen Quotienten gefunden.

4.12 Zuhilfenahme negativer Zahlen

Eine Schwäche des Verfahrens besteht darin, wie wir gesehen haben, dass man sich bei der Bestimmung der Ziffern des Quotienten in ziemlicher Ungewissheit befindet.
Nicht immer errät man richtig, wieviel man zweckmäßigerweise von der vorhergehenden Teilrechnung für den zu übertragenden Summanden zulässt. Wir können diese Ungewissheit mindern, wenn wir daran denken, dass der Divisor nahe bei 600 liegt. Daher können wir die erste Ziffer mit Recht nahe bei 6 annehmen.

Wenn wir die zu bestimmende neue Ziffer kennen, lässt sich auch der Übertrag der folgenden Ziffer abschätzen, und wenn dieser zu groß zu werden droht, können wir die neue Ziffer rechtzeitig verkleinern.

Wer jedoch nicht davor zurückschreckt, auch mit negativen Ziffern zu rechnen, mit denen wir uns bereits unter Punkt 2 befasst haben, braucht für den Fall, dass er irgendwo eine Ziffer zu groß gewählt hat, nicht erst neu zu rechnen.
Man hat dann einfach mit einem »negativen Übertrag« zu arbeiten. Man kann auch zu dem 10fachen hiervon die folgende positive Ziffer hinzunehmen und bekommt ein negatives Teilergebnis.

Hierin ist der Divisor ein negatives Vielfaches einer Zahl, die folgende Ziffer wird also negativ sein (wir kennzeichnen derartige Ziffern auch jetzt durch Überstreichen). Das folgende Teilergebnis kann sowohl positiv als auch negativ sein (es ist zweckmäßig, keine großen negativen Teilergebnisse auftreten zu lassen).

Wir können das Verfahren auch so fortsetzen, dass wir gemischt positive und negative Ziffern benutzen. Zum Schluss können wir die überstrichenen Ziffern auf die unter Punkt 2 kennengelernte Weise beseitigen.

Sehen wir uns hierzu ein Beispiel an (wir werden jetzt bereits unter den Dividenden den Divisor - in umgekehrter Ziffernreihenfolge - und unter diesen den Quotienten schreiben)! Wir dividieren 3742856 durch 4776.

Es ist zweckmäßig, die erste Ziffer des Divisors zu 5 aufgerundet zu nehmen. Der Quotient wird 3 Stellen vor dem Komma enthalten. Die 5 im zweiten Schritt geht 9mal in $94 - 7 \cdot 7 = 45$ auf.
Im folgenden Schritt muss man wegen $94 - 7 \cdot 7 - 9 \cdot 4 = 9$ aus $92 - 7 \cdot 7 - 9 \cdot 7 = -20$ die neue Ziffer bestimmen. Diese wählen wir zu $-6 = \overline{6}$, damit wir, wenn wir das Vierfache davon subtrahieren, eine genügend große Zahl für die Subtraktion der weiteren Ziffernprodukte (Abb. 39) bekommen.

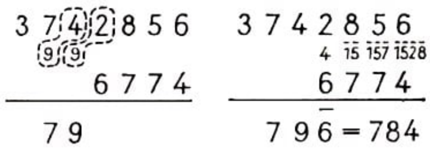


Abb. 39

(Wenn wir auch zu noch so negativen Resten gelangen, so ist das nicht so schlimm, solange auf jeden Fall ersichtlich ist, um wieviel wir den Quotienten vermindern müssen, um zu einem positiven Rest zu gelangen, der kleiner als der Divisor ist.)

Somit kommen wir zu dem vorhergehenden Übertrag 92 - 7 · 7 - 9 · 7 - (-6) · 4 = 4, dann 48 - 7 · 6 - 9 · 7 - (-6) · 7 = -15.
Das folgende Teilergebnis lautet also -150 + 5 = -145 und die weitere Rechnung -145 - 9 · 6 - (-6) · 7 = -157, -1564 - (-6) · 6 = -1528.

Damit haben wir

$$3742856 = 4776 \cdot 79\overline{6} + \overline{1528} = 4776 \cdot 784 - 1528 = 4776 \cdot 783 + 3248$$

erhalten. Hieraus ist auch ersichtlich, dass der sich ergebende Wert 784 näher bei dem Quotienten 3 742856 / 4776 liegt als 783. - Wir können auch nachträglich Dezimalstellen berechnen, indem wir $\overline{1528}$ oder 3248 auf die obige Weise (oder auf anderem Wege) weiter dividieren.

Was die Verfahren der letzten drei Abschnitte betrifft, so ist die Multiplikation auch praktisch gut zu gebrauchen, wenn es damit am Anfang auch langsamer gehen wird als mit Aufschreiben der Teilprodukte.

Man sollte nicht vergessen, wie viele Jahre lang wir das letztere Verfahren in der Schule geübt haben!
Mit dem neuen Verfahren erreicht man indessen nach kurzer Übung bereits wieder die alte Geschwindigkeit. Mit der erforderlichen Übung kann man auch in der Division Sicherheit und Schnelligkeit erwerben.

Die aufgewendete Mühe lohnt hierbei jedoch weit weniger, es ist eher nur im Hinblick auf die Geschicklichkeit als Probestück interessant.

5 Spinne und Fliege

5.1 Geodätische Linien

Ferenc Molnár

In einer Ecke eines würfelförmigen Zimmers sitzt eine Spinne, in der Mitte einer hiervon möglichst weit entfernten Kante befindet sich eine Fliege (Abb. 40).

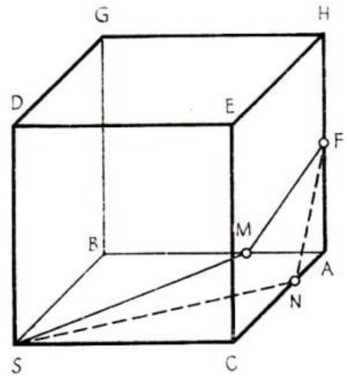


Abb. 40

Die Spinne will die Fliege fangen. Da sie jedoch nicht fliegen kann, muss sie notgedrungen an der Wand klettern, um zu dem Aufenthaltsort der Fliege zu gelangen. Dazu gibt es viele Möglichkeiten.
Sie kann beispielsweise auf die Weise zu der Fliege gelangen, dass sie bis zum Schluss am Rande der Wände, d. h. auf den Würfelkanten, klettert, oder z. B. so, dass sie im Verlauf ihres Weges auf mehreren Zimmerwänden (Decke sowie Fußboden sollen gleichfalls zu den Wänden gerechnet werden), d. h. auf mehreren Seitenflächen des Würfels, entlangläuft und die Kanten nur kreuzt.

Es erhebt sich die Frage, wie die Spinne laufen muss, wenn sie die Fliege auf kürzestem Wege erreichen will. Wenn sie fliegen könnte, so würde sie offensichtlich dann auf kürzestem Wege zum Ziel gelangen, wenn sie in gerader Linie fliegt.
Da sie jedoch nicht fliegen kann, muss sie, an der Wand entlang kletternd, den kürzesten Weg aufsuchen. Die Aufgabe der Spinne ist es also, unter denjenigen Wegen, die auf den Zimmerwänden bzw. der Würfeloberfläche verlaufen und zu der Fliege führen, den kürzesten zu suchen.

Bevor wir die Aufgabe der Spinne lösen, wollen wir uns ein einfacheres Problem ansehen. Würde sich die Fliege auf einer solchen Zimmerwand befinden, in deren Ecke die Spinne sitzt, so brauchte die Spinne nur auf einer ebenen Fläche zu klettern, um die Fliege zu erreichen.
Dann müsste sie offensichtlich entlang einer geraden Linie laufen, da doch der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten die gerade Strecke ist. In unserem Falle ist die Lage nicht so einfach, weil sich Spinne und Fliege nicht auf ein und derselben Fläche des Würfels befinden.

Wie wir sehen, befinden sie sich vielmehr auf zwei benachbarten Würfelflächen (d. h. solchen, die sich in einer Kante treffen, z. B. in Abb. 40 auf den Flächen $SCAB$ und $BAHG$). Der kürzeste Weg kann somit nur über zwei solche benachbarten Flächen führen. Wir stellen ein ebenes Netz der Würfeloberfläche her, in dem die Flächen $SCAB$ und $BAHG$ ebenfalls benachbart sind, und kennzeichnen darauf den Ort der Spinne und der Fliege (Abb. 41).

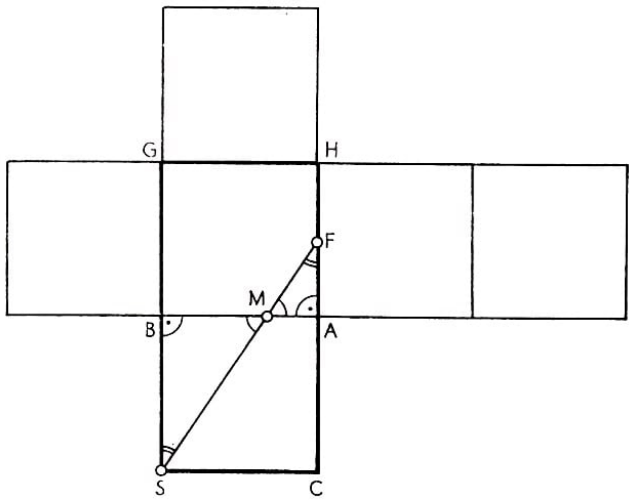


Abb. 41

Auf diese Weise gelangen wir zu einem ebenen Abbild, auf dem die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte die Gerade ist. Auf dem Netz gibt also die gerade Strecke, die die Punkte S und F verbindet, die den Ort der Spinne und den der Fliege kennzeichnen, den kürzesten Weg der Spinne an.

Stellen wir jetzt wieder aus unserem Netz einen Würfel her, so gehen die auf dem Netz gezeichneten Linien in Linien über, die auf der Würfeloberfläche verlaufen. Es ist einleuchtend, dass dabei die Länge dieser Linien erhalten bleibt, da sich die Flächen weder dehnen noch verkleinern. Wir bekommen also nach dem Zusammenfügen des Netzes aus der geraden Verbindungsstrecke des Orts der Spinne und der Fliege den kürzesten Weg, auf dem die Spinne zu der Fliege gelangen kann.

Dieser Weg ist keine gerade Strecke mehr, sondern, wie aus Abb. 40 hervorgeht, ein aus zwei geraden Strecken bestehender sogenannter Polygonzug. Aus Abb. 41 können wir auch entnehmen, dass dieser kürzeste Weg die Würfelkante AB in demjenigen Punkt M kreuzt, der diese Kante im Verhältnis 1 : 2 teilt.[3]

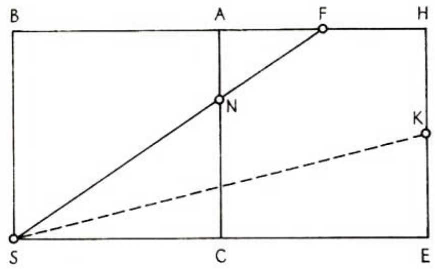


Abb. 42

[3]Das Dreieck FAM ist nämlich dem Dreieck SBM ähnlich (Abb. 39), weil hierin entsprechende Winkel gleich sind (bei den Ecken A und B liegen rechte Winkel, die bei der Ecke M liegenden Winkel sind Scheitelwinkel und die bei den Ecken S und F liegenden Winkel Wechselwinkel). Da jedoch die Strecke AF halb so groß wie die Strecke BS ist, das Ähnlichkeitsverhältnis also 1 : 2 beträgt, ist auch die Strecke AM halb so groß wie die entsprechende Strecke BM, d. h., der Punkt M teilt die Strecke AB im Verhältnis 1 : 2.

Die Spinne kann jedoch auch einen anderen Weg wählen, wenn sie die Fliege auf kürzestem Wege erreichen will. Dieser Weg ist in Abb. 40 durch die gestrichelt eingezeichnete Linie dargestellt. Er unterscheidet sich von dem vorigen dadurch, dass er über zwei andere benachbarte Seiten verläuft und die Kante AC in dem Punkt N kreuzt, durch den AC im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird. Dieser Weg ist genausolang wie der obige, denn beide bestehen aus gleich großen Strecken (Abb. 42).

Das legt die Frage nahe, ob die Spinne nicht vielleicht über andere benachbarte Flächen auf noch kürzerem Wege zu der Fliege gelangen kann. Der über die benachbarten Flächen $SBGD$ und $BAHG$ führende kürzeste Weg beispielsweise ergibt sich dadurch, dass man von der in das Netz von Abb. 43 eingezeichneten geraden Strecke ausgeht und das Netz zusammenfügt.

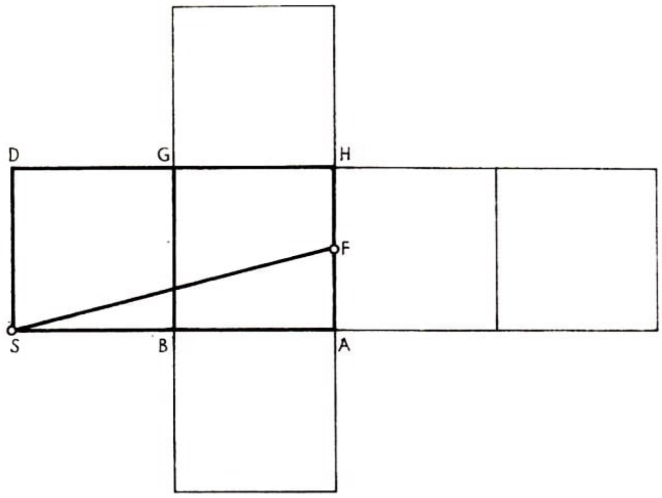


Abb. 43

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die in Abb. 41 auftretende Strecke SF länger ist als die Strecke SF in Abb. 40.
Die Strecke SF in Abb. 43 ist nämlich ebensolang wie die Strecke SK in Abb. 42. Diese ist jedoch offensichtlich größer als die dortige Strecke SF.

Wer den Satz des Pythagoras kennt, kann sich hiervon auch durch eine einfache Rechnung überzeugen. Wenn die Würfelkante die Länge a hat, so bekommt man, wenn man den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck SFB von Abb. 42 anwendet,

$$SF = \sqrt{SB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{13}$$

während aus dem rechtwinkligen Dreieck SKE

$$SK = \sqrt{SE^2 + EK^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a2}{2}\sqrt{17}$$

folgt. $\sqrt{17}$ ist jedoch größer als $\sqrt{13}$, also ist auch die Strecke SK von Abb. 42 größer als die Strecke SF.

Aus Abb. 40 ist ersichtlich, dass die Spinne außer auf den bisherigen Wegen noch auf einem anderen zu der Fliege gelangen kann, indem sie über die den Flächen $BAHG$

und $SBGD$ gegenüberliegenden benachbarten Flächen läuft. Der hierüber verlaufende kürzeste Weg ist jedoch ebensolang wie der, der über die Flächen $BAHG$ und $SBGD$ führt (Abb. 44).

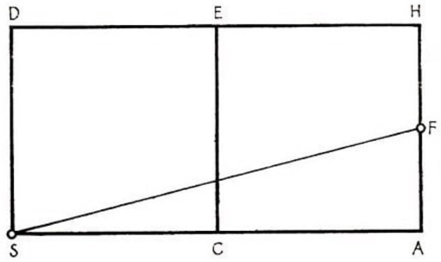


Abb. 44

Der in Abb. 40 eingezeichnete Polygonzug ist also in der Tat der kürzeste Weg der Spinne. Wir weisen jedoch ausdrücklich darauf hin, dass dieser Weg nur unter den auf der Würfeloberfläche verlaufenden Wegen der kürzeste ist und offensichtlich länger ist als die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte.
Wenn die Spinne fliegen könnte, so wäre sie also in der Lage, die Fliege auf noch kürzerem Wege zu erreichen. Wir werden in Kürze auf diesen Sachverhalt zurückkommen, der unsere Aufmerksamkeit verdient.

Nachdem wir die Aufgabe der Spinne gelöst haben, wollen wir einen Schritt weitergehen. Wir nehmen an, dass die Spinne, nachdem sie die Fliege ergriffen hat, auf dem kürzestmöglichen Wege alle sechs Würfelflächen so durchwandern will, dass sie an den Ausgangspunkt, in den Mittelpunkt der einen Kante, zurückkehrt.
Frage: Welchen Weg muss sie durchlaufen? Auf Grund der obigen Überlegung können wir auch diese Frage leicht beantworten. Dazu brauchen wir uns nur ein ebenes Netz der Würfeloberfläche zu suchen, auf dessen Randlinie der Ausgangspunkt der Spinne, d. h. der Punkt F von Abb. 40, an zwei Stellen vorkommt, und zwar so, dass diese beiden Punkte nach dem Zusammenfügen des Netzes auf der Würfeloberfläche zusammenfallen.

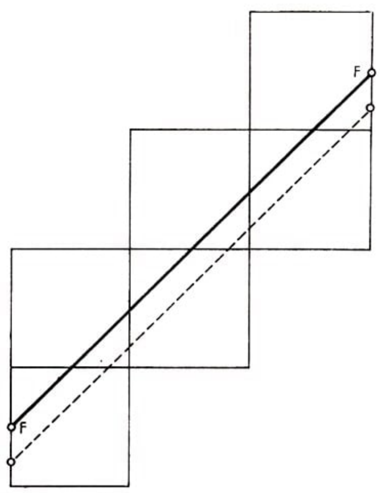


Abb. 45

Die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte F des Netzes ergibt nach dem Zusammenfügen den gesuchten kürzesten Weg. Es ist jedoch nicht gleichgültig, wie wir ein solches Netz herstellen. Wir haben nämlich verlangt, dass die Spinne über alle sechs Flächen des Würfels zu dem Ausgangspunkt zurückgelangen soll.
Dazu ist es notwendig, dass die Verbindungsstrecke der beiden Punkte F auf dem Netz durch alle sechs Flächen verläuft, und zwar ganz im Inneren desselben, kein einziges Stück darf außerhalb des Netzes liegen. Nur dann bekommen wir nämlich nach dem Zusammenfügen des Netzes eine auf der Würfeloberfläche verlaufende geschlossene Linie. Das einzige unseren Forderungen entsprechende Würfelnetz ist in Abb. 45 dargestellt.

Die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte F gibt den kürzesten Weg der Spinne an. Nach dem Zusammenfügen des Netzes ergibt sich als kürzester Weg ein aus sechs gleich langen Strecken bestehender Polygonzug, der die Würfelkanten unter einem Winkel von $45°$ schneidet (Abb. 46).[4]

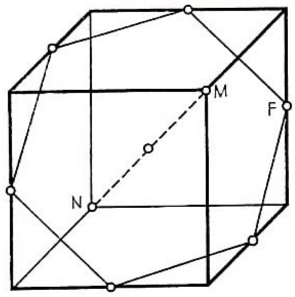


Abb. 46

Aus Abb. 45 ist ferner ersichtlich, dass auch dann, wenn der Ausgangspunkt der Spinne nicht der Kantenmittelpunkt, sondern ein beliebiger anderer Punkt der Kante ist, der hierdurch eingeschlossene kürzeste Weg die gleiche Länge hat. Ein solcher Weg wird nämlich auf dem Netz in einer zu der Strecke FF parallelen Strecke abgebildet, die offensichtlich ebensolang wie die Strecke FF ist, da sie aus dieser durch Verschiebung entstanden ist.

Wir kehren jetzt zu der ursprünglichen Aufgabe der Spinne zurück und wollen etwas genauer sagen, was für eine Aufgabe wir eigentlich gelöst haben.
Wir können die Aufgabe - unabhängig von der Spinne und der Fliege - so formulieren, dass wir unter denjenigen auf der Würfeloberfläche verlaufenden Linien, die zwei Punkte der Würfeloberfläche miteinander verbinden, die kürzeste suchen. Wir können sogar noch etwas weitergehen und ein viel allgemeineres Problem stellen:

Wir wählen auf einer beliebigen (nicht unbedingt aus ebenen Flächen bestehenden) Fläche zwei Punkte und suchen denjenigen Weg, der unter den auf der Fläche verlaufenden Verbindungslinien der beiden Punkte der kürzeste ist. Einen derartigen Weg nennen wir eine die beiden Punkte der Fläche verbindende geodätische Linie.

Wir sind damit zu einer schönen und in vielen Fällen sehr schweren Aufgabe der Geometrie gelangt, zu der Bestimmung der geodätischen Linien von Flächen. Wenn wir bedenken, dass in der Ebene die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte die gerade Strecke ist, so können wir uns vorstellen, dass auf einer beliebigen Fläche die geodätischen Linien die Rolle der geraden Strecken spielen.

In der obigen Definition des Begriffs der geodätischen Linie ist die Forderung entscheidend, dass sie unter den auf der Fläche verlaufenden Verbindungslinien zweier Punkte die kürzeste ist. Wenn wir diese Forderung weglassen, so können wir einfach sagen, dass unter den Verbindungslinien der beiden Punkte die gerade Strecke die kürzeste ist.
Diese gerade Strecke verläuft jedoch im allgemeinen nicht auf der Fläche, wie wir dies bereits bei der Behandlung des Problems von der Spinne und der Fliege gesehen haben.

[4] Diese kürzeste Linie stellt ein auf der Würfeloberfläche liegendes regelmäßiges Sechseck dar, genauer: den Schnitt eines solchen regelmäßigen Sechsecks, das in einer zu der Körperdiagonalen MN des Würfels senkrechten Ebene liegt.

Es kann natürlich vorkommen, dass die gerade Verbindungsstrecke zweier Punkte der Fläche auf der Fläche liegt (das gilt beispielsweise für die Verbindungsstrecke zweier Punkte auf irgendeiner Fläche des Würfels); dann ist natürlich diese gerade Strecke unter den Verbindungslinien der beiden Punkte die kürzeste, d. h. eine geodätische Linie.

Hieraus können wir sogleich die Folgerung ziehen, dass auf der Fläche liegende Geraden geodätische Linien sind. Das Beispiel des Würfels zeigt, dass es Flächen gibt, auf denen man gerade Linien ziehen kann. Ähnlich wie auf dem Würfel kann man auch auf anderen aus ebenen Flächen zusammengesetzten Flächen gerade Strecken finden. Derartige Flächen heißen Polyederflächen.
Solcher Art sind beispielsweise die Oberflächen des Prismas und der Pyramide.

Es gibt indessen auch unter den nicht aus ebenen Flächen bestehenden Flächen solche, auf denen man Geraden finden kann. Die bekanntesten unter diesen sind der Zylindermantel und der Kegelmantel. Deren sogenannte erzeugende Geraden sind nämlich geodätische Linien dieser Flächen.
Im all- gemeinen können wir jedoch nicht sagen, dass die geodätischen Linien von Flächen Geraden sind. Hierfür werden wir in Kürze noch Beispiele kennenlernen.

Wenn daher eine kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Fläche keine gerade Strecke ist, so wird diese offensichtlich nicht unter allen Linien, die die beiden Punkte verbinden (freilich nicht unter den auf der Fläche verlaufenden), die kürzeste sein, da doch unter diesen die gerade Strecke die kürzeste ist. Das haben wir bereits im Beispiel der Spinne und der Fliege gesehen.

Das Gesagte wird vielleicht durch das folgende Beispiel noch klarer: Der kleinste Mensch, der in der ersten Reihe eines Saales sitzt, ist nicht unbedingt von allen im Saal sitzenden Menschen der kleinste, denn es kann in einer anderen Reihe ein noch kleinerer Mensch sitzen. Ähnlich steht es, wenn wir unter den Verbindungslinien zweier Punkte auf einer Fläche bzw. unter allen Linien, die diese Punkte verbinden, die kürzeste suchen.

Wir haben bereits erwähnt, dass es im allgemeinen nicht leicht ist, auf den verschiedenen Flächen die geodätischen Linien zu ermitteln. Auf gewissen Flächen lassen sich jedoch die geodätischen Linien einfach bestimmen, wir müssen uns dazu nur noch einmal aufmerksam die Lösung der Aufgabe von der Spinne anschauen.
Diese Aufgabe konnten wir deshalb verhältnismäßig leicht lösen, weil wir die Würfeloberfläche in die Ebene ausgebreitet haben und davon Gebrauch machen konnten, dass in der Ebene der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten der gerade ist.

Hieraus ist ersichtlich: Wenn sich eine Fläche in die Ebene ausbreiten lässt (gewöhnlich sagt man dazu, dass sie sich in die Ebene abwickeln lässt), dann können wir die kürzeste Linie auf der Fläche, die zwei Punkte der Fläche verbindet, auf folgende Weise bekommen: Wir zeichnen in der in die Ebene ausgebreiteten Fläche die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte ein und gehen durch Zurückbiegen dieser Fläche zu der gesuchten kürzesten Linie über. Die Geraden, die wir in die in die Ebene abgewickelte Fläche eingezeichnet haben, werden also nach dem Zurückbiegen die geodätischen Linien der ursprünglichen Fläche sein.

Das genannte Verfahren können wir stets auf Flächen anwenden, die aus ebenen Flächen zusammengesetzt sind, d. h. auf Polyederflächen, denn diese lassen sich in die Ebene ausbreiten. Jedoch auch andere Flächen können wir in die Ebene abwickeln. Von dieser Art sind z. B. der Zylindermantel und der Kegelmantel, deren geodätische Linien sich also gleichfalls leicht bestimmen lassen.

Wenn wir die kürzeste Verbindungslinie zweier auf dem Mantel eines geraden Kreiszylinders[5] angenommener Punkte (A und B) ermitteln wollen, so können wir so vorgehen, dass wir den Zylindermantel längs der durch den einen Punkt gehenden Erzeugenden aufschneiden. Der abgewickelte Zylindermantel wird dann ein Rechteck sein, dessen Basis die Peripherie des Grundkreises des Zylinders und dessen Höhe die Höhe des Zylinders ist.

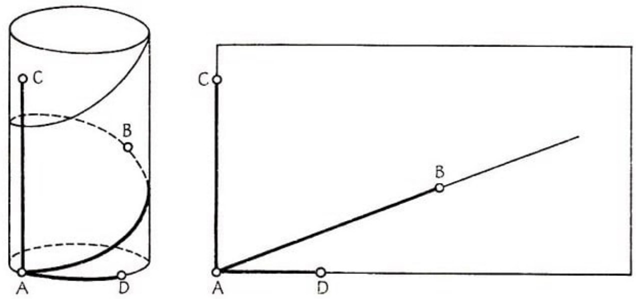


Abb. 47

Wir zeichnen hier die gerade Verbindungsstrecke der Punkte A und B ein und bekommen nach dem Zusammenbiegen die kürzeste Verbindungslinie der beiden Punkte auf dem Zylindermantel. Wir können die erhaltene Linie auch über den Punkt B hinaus zeichnen, wenn wir zuvor auf dem ebenen Bild die Strecke AB verlängern. Je nachdem, wo die Punkte A und B auf dem Zylindermantel liegen, können wir zu verschiedenen geodätischen Linien gelangen.

Wenn die beiden Punkte nicht derselben Erzeugenden angehören und auch nicht auf dem Grundkreis des Zylinders oder einem hierzu parallelen Kreis liegen, so wird die Strecke AB gleichfalls zu keiner Seite des Rechtecks parallel sein.
Die aus einer solchen Geraden nach dem Zusammenbiegen auf dem Zylindermantel erhaltene Linie heißt Schraubenlinie (Abb. 47).

Die Schraubenlinie ist also eine geodätische Linie des Zylinders.
Aus der Abbildung können wir sogleich eine interessante Eigenschaft der Schraubenlinie entnehmen. Wenn wir in das Rechteck von Abb. 47 vertikale Geraden einzeichnen, dann sehen wir sofort, dass die Strecke AB mit jeder der Senkrechten denselben Winkel einschließt. Da diese senkrechten Geraden nach dem Zusammenbiegen in die Erzeugenden des Zylinders übergehen, können wir sagen, dass die Schraubenlinie jede Erzeugende des Zylinders unter ein und demselben Winkel schneidet.

Wir wollen jetzt sehen, zu welchen geodätischen Linien wir sonst noch gelangen können,

[5]Gerader Kreiszylinder heißt ein solcher Zylinder, dessen Grundlinie (Leitlinie) ein Kreis und dessen Erzeugende Senkrechte auf der Ebene des Kreises sind.

wenn die beiden Punkte anders zueinander liegen. Wenn die beiden Punkte derselben Erzeugenden angehören (beispielsweise in Abb. 47 die Punkte A und C), so verläuft der kürzeste Weg von dem einen Punkt zu dem anderen längs der Erzeugenden, d. h., auch die Erzeugenden sind geodätische Linien.
Das haben wir auch schon vorher gewusst, da doch die Erzeugenden Geraden sind, die dem Zylindermantel angehören. Zwei solche Punkte werden durch eine gerade Strecke verbunden, die auf der Grundlinie des Rechtecks senkrecht steht.
Wählen wir dagegen zwei Punkte auf der Kreislinie, die den Kreiszylinder begrenzt (z. B. A und D in Abb. 47), so verläuft der kürzeste Weg auf dem Zylinder auf dieser Kreislinie, weil dieser Kreis bei der Abwicklung in die Ebene in die Grundlinie des Rechtecks, d. h. in eine gerade Strecke übergeht.

Man erkennt auch, dass mit dem Grundkreis zusammen die hierzu parallelen, d. h. auf der Zylinderachse senkrecht stehenden, Ebenenschnitte (die zu dem Grundkreis kongruente Kreise darstellen) gleichfalls durch geodätische Linien begrenzt sind, denn die Kreislinien gehen bei der Abwicklung in die Ebene in Geraden über, die zu der Grundlinie des Rechtecks parallel sind.

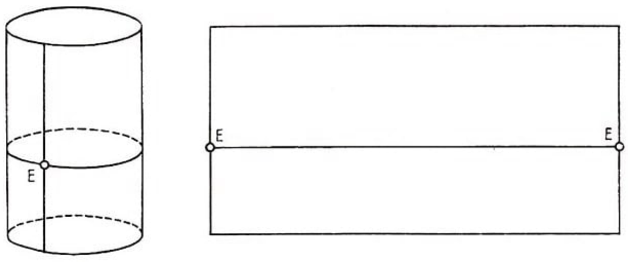


Abb. 48

Auf diese Weise haben wir alle geodätischen Linien des geraden Kreiszylinders erhalten. Das sind also die Erzeugenden, die Kreislinien der auf der Achse senkrecht stehenden Kreise, die sich als Ebenenschnitte ergeben, sowie die Schraubenlinien. Auf einem Zylindermantel führt der kürzeste Weg, der zwei Punkte verbindet, also immer auf einer solchen Linie.

Suchen wir dagegen unter den Wegen, die von einem Punkt E des Zylindermantels ausgehen und nach Umlaufen des Zylinders zu dem Ausgangspunkt zurückführen, den kürzesten, so können wir folgendermaßen vorgehen:
Wir schneiden den Zylindermantel längs der durch den Punkt E gehenden Erzeugenden auf und wickeln ihn in eine Ebene ab. Auf beiden senkrechten Seiten des erhaltenen Rechtecks ist der Punkt E in gleichem Abstand von der Grundlinie zu finden. Die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte E ergibt nach dem Zusammenbiegen den gesuchten kürzesten Weg.
Da die genannte gerade Strecke zu der Grundlinie des Rechtecks parallel ist, geht sie nach dem Zusammenbiegen in einen zu dem Grundkreis parallelen Kreis über (d. h. in einen solchen, der in einer auf der Achse senkrechten Ebene liegt, Abb. 48). Dieser Kreis wird also der kürzeste Weg sein, der den Zylinder umläuft.

Wir wollen uns jetzt dieses letztere Problem für den Fall ansehen, dass der Punkt S auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels[6] liegt.

[6]Gerader Kreiskegel heißt ein solcher Kegel, dessen Grundlinie (Leitlinie) ein Kreis ist und dessen

Zur Lösung des Problems schneiden wir den Kegelmantel längs der durch den Punkt S gehenden Erzeugenden auf und breiten ihn danach in die Ebene aus. Auf diese Weise bekommen wir einen Kreissektor (Abb. 49).

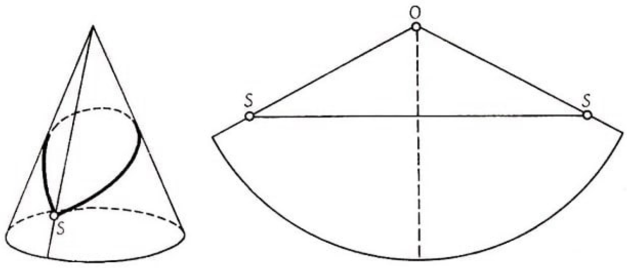


Abb. 49

Der Punkt S ist auf allen beiden Radien des Kreissektors zu finden, und zwar in gleichem Abstand von der Spitze O. Offensichtlich ergibt die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte S nach dem Zusammenbiegen den kürzesten Weg, der den Mantel umläuft und zu dem Ausgangspunkt zurückkehrt. Dieser Weg ist eine schleifenförmige Linie.

Dieses Ergebnis ist etwas überraschend, da wir doch auf Grund der Anschauung und in Hinblick auf das Beispiel des Zylinders hätten erwarten können, dass derjenige Kreis, der in der auf der Kegelachse senkrechten Ebene liegt, der kürzeste Weg ist. (Diese Kreise sind jedoch keine geodätischen Linien, denn sie gehen auf dem abgewickelten Kegelmantel in zu der Basis des Kreissektors konzentrische Kreisbögen über.)
Aus der Abbildung können wir entnehmen, dass die schleifenförmige Linie, die wir erhalten haben, bei ihrer Rückkehr die durch den Punkt S gehende Erzeugende unter demselben Winkel schneidet wie bei ihrem Start, während sie zu der gegenüberliegenden Erzeugenden unter einem rechten Winkel geneigt ist.

Wenn wir Abb. 49 aufmerksam anschauen, so erkennen wir, dass unsere Begründung nur in dem Falle zu Recht besteht, dass der an der Spitze des Kreissektors liegende Winkel kleiner als ein gestreckter Winkel, d. h. als $180°$, ist.
Wenn dieser Winkel konkav ist, d. h. größer als $180°$ (eventuell auch genau $180°$; dann entsteht aus dem Kegelmantel nach Abwicklung in die Ebene ein Halbkreis), dann verläuft die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte S außerhalb des Kreissektors und liegt somit nach dem Zusammenbiegen nicht auf dem Kegelmantel, d. h., wir bekommen nicht die obige schleifenförmige Linie (Abb. 50).

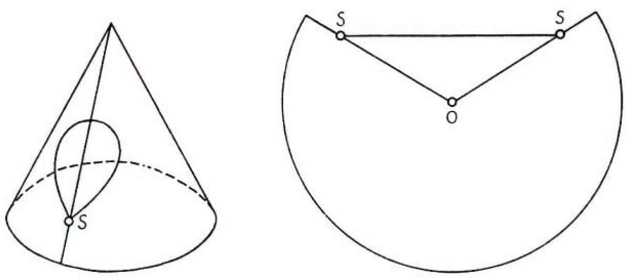


Abb. 50

In diesem Falle ist der gesuchte kürzeste Weg der, der vom Punkt S auf längs der Erzeugenden zur Kegelspitze führt und von dort aus längs derselben Erzeugenden zum

Spitze auf der im Mittelpunkt des Grundkreises auf dessen Ebene errichteten Senkrechten liegt.

Punkt S zurück. Wir können dann freilich nicht sagen, dass dieser Weg den Kegelmantel umläuft. Aus der Abbildung ist jedoch ersichtlich, dass jeder Weg, der, vom Punkte 8 ausgehend, den Mantel umläuft, länger als der obige Weg ist.

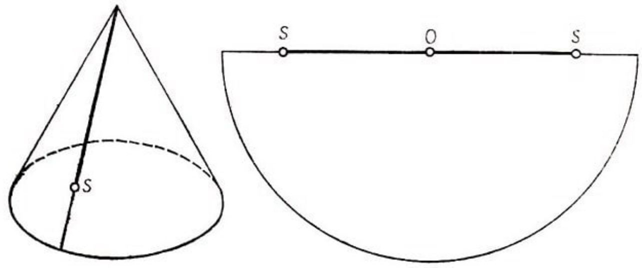


Abb. 51

Wir sind damit auf die überraschende Tatsache gestoßen, dass es unter den Wegen, die den Mantel wirklich umkreisen, eigentlich gar keinen kürzeren gibt. Wenn der Winkel an der Spitze des Kreissektors 180° beträgt, dann verläuft die gerade Verbindungsstrecke der beiden Punkte 8 auf dem Durchmesser des Halbkreises. Nach dem Zusammenbiegen bekommen wir auch jetzt nicht den obigen schleifenförmigen Weg (Abb. 51). In diesem Fall können wir in derselben Weise zu dem gesuchten kürzesten Weg gelangen wie im vor- angegangenen Fall.

Der gerade Kreiszylinder und der gerade Kreiskegel sind nur sehr spezielle Fälle von Zylinder- und Kegelflächen, die sich stets in die Ebene abwickeln lassen.
Allgemeine Zylinderfläche heißt eine Fläche, die man dadurch gewinnen kann, dass man längs irgendeiner ebenen Kurve eine Gerade, die nicht in der Ebene der Kurve liegt, parallel zu sich selbst bewegt. Wenn diese ebene Kurve ein Kreis und die Gerade stets senkrecht auf der Kreisebene ist, so entsteht ein gerader Kreiszylinder.
Zu einer allgemeinen Kegelfläche gelangen wir dagegen auf die Weise, dass wir längs einer ebenen Kurve eine Gerade so bewegen, dass sie stets durch einen festgehaltenen Punkt geht (von diesem Punkt setzen wir voraus, dass er außerhalb der Ebene der Kurve liegt).
Wenn die ebene Kurve ein Kreis ist und der festgehaltene Punkt auf der im Mittelpunkt des Kreises auf dessen Ebene errichteten Senkrechten liegt, so entsteht ein gerader Kreiskegel. Diese Flächen können wir, nachdem wir sie längs einer ihrer Geraden (Erzeugenden) aufgeschnitten haben, in die Ebene abwickeln und können somit ihre geodätischen Linien nach der obigen Überlegung leicht bestimmen.

Außer den Zylinder- und Kegelflächen gibt es auch noch weitere Flächen, die sich in die Ebene abwickeln lassen. Diese lassen sich aber nicht mehr mit so elementaren geometrischen Methoden untersuchen.

Was sind denn nun die geodätischen Linien der dritten bekanntesten krummen Fläche, der Kugel?
Auf der Kugel ist die Lage nicht so einfach, denn diese lässt sich nicht in die Ebene abwickeln. Anschaulich bedeutet das, dass wir zum Beispiel aus Papier durch Biegen kein Modell der Kugelfläche herstellen können.
Wir müssen also die geodätischen Linien der Kugelfläche auf anderem Wege bestimmen.

Wir können hier nicht im einzelnen darauf eingehen, wir wollen nur erwähnen, dass auf der Kugel die sogenannten Großkreise geodätische Linien sind. Die Großkreise sind die Schnittkurven, die die durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebenen mit der Kugelfläche bilden. Sie sind Kreise, deren Radius gleich dem Kugelradius ist. Auf der Erdkugel beispielsweise sind die Längenkreise (Meridiane) allesamt Großkreise. Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte der Kugelfläche können wir also folgendermaßen bekommen:

Wir bringen die Kugelfläche mit der durch die beiden Punkte und den Kugelmittelpunkt bestimmten Ebene zum Schnitt. Der kürzere Bogen des erhaltenen Großkreises, der die beiden Punkte verbindet, ist dann die gesuchte kürzeste Linie (Abb. 52).

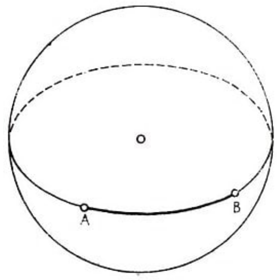


Abb. 52

Wir betonen, dass wir von den durch die beiden Punkte begrenzten Stücken des durch die beiden Punkte gehenden Großkreises das kleinere nehmen müssen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir erwähnen, dass der Begriff geodätische Linie nicht nur in engerem Sinne auf die kürzeste Verbindungslinie der beiden Punkte angewendet wird, sondern allgemeiner auf diejenigen Linien, die auf einer Fläche die Rolle der Geraden spielen.
Die Großkreise der Kugel sind in diesem Sinne geodätische Linien, und in diesem Sinne sind auch diejenigen Kurven auf in die Ebene abwickelbaren Flächen geodätische Linien, die bei der Abwicklung in die Ebene in Geraden übergehen.

Das obige Beispiel zeigt, dass wir auf folgenden Umstand achten müssen:
Wenn wir den Begriff geodätische Linie in dieser Weise gebrauchen, so ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Fläche zwar immer eine geodätische Linie, ein Stück einer geodätischen Linie braucht aber unter den auf der Fläche verlaufenden Linien nicht unbedingt die kürzeste Verbindungslinie ihrer Endpunkte zu sein. Hierfür können wir noch ein weiteres Beispiel nennen.

Zwei auf derselben Erzeugenden liegende Punkte eines geraden Kreiszylinders können wir beispielsweise auch außer durch die Erzeugende durch eine Schraubenlinie verbinden, die eine geodätische Linie darstellt und dabei länger ist als die die beiden Punkte verbindende Strecke auf der Erzeugenden.
Wenn sich also zwei Punkte durch mehrere geodätische Linienstücke verbinden lassen, so müssen wir unter diesen das kürzeste wählen. Mit diesem kürzesten geodätischen Linienstück können wir den Abstand zweier Punkte auf der Fläche in derselben Weise messen, wie in der Ebene der Abstand zweier Punkte die Länge der geradlinigen Verbindungsstrecke ist.

Auf unserer Erde ist der kürzeste Weg, der zwei beliebige Orte verbindet, stets ein

Großkreisbogen. Der Abstand zweier geographischer Orte voneinander wird durch diesen kürzesten Großkreisbogen gemessen, der die durch die beiden Orte bestimmte Orthodrome heißt.
Wenn zwei geographische Orte auf demselben Längenkreis liegen, dann ist die Orthodrome ein Bogen dieses Längenkreises. Betrachten wir dagegen zwei auf demselben Breitenkreis liegende geographische Orte, so verläuft ihr kürzester Verbindungsweg nicht längs des Breitenkreises - wie man auf Grund der Anschauung für einen Moment erwarten könnte -, da doch die Breitenkreise im allgemeinen nicht Großkreise sind.

Der einzige Breitenkreis, der zugleich auch Großkreis ist, ist der Äquator. Von einem Punkt des Äquators zu einem anderen verläuft also der kürzeste Weg längs des Äquators. (In Zusammenhang damit ist es erwähnenswert, dass wir, wenn wir die Erde längs eines Breitenkreises umlaufen, von dem Nord- bzw. dem Südpol in dem gleichen Abstand bleiben, weil die von dem Pol zu den Punkten eines Breitenkreises führenden Großkreisbögen - die zugleich auch Längenkreisbögen sind - die gleiche Länge haben.)

Wenn jemand auf dem kürzesten Wege von einem geographischen Ort zu einem anderen gelangen will, so muss er sich also dem Vorstehenden nach längs der durch die beiden Orte bestimmten Orthodrome bewegen. Die Flugzeuge und Überseeschiffe bewegen sich jedoch aus Sicherheitsgründen im allgemeinen nicht längs der Orthodromen, sondern längs einer anderen Linie, einer die beiden Orte verbindenden Loxodrome.

Eine Loxodrome (Linie konstanter Richtung) ist eine Kurve, die zwei geographische Orte auf der Erdkugel verbindet und dabei zwischendurch mit jedem Meridian den gleichen Winkel einschließt. Für die Flugzeuge und Schiffe ist es einfacher, diese Linie zu verfolgen, weil sie dann nur mittels des Kompasses die entsprechende Richtung einzuhalten brauchen und nur darauf achten müssen, nicht von dieser Richtung abzuweichen.
So haben sie zwar einen längeren Weg zu durchlaufen, die Gefahr einer Verirrung ist aber geringer.

Auf noch eine interessante Tatsache wollen wir in Zusammenhang mit der Erdoberfläche hinweisen. Auf der Erdoberfläche spielen die Großkreise als geodätische Linien dieselbe Rolle wie die Geraden in der Ebene.

Dies bedeutet unter anderem, dass jemand, der sich seiner Meinung nach auf unserer Erde in einer geraden Linie bewegt, von einem Lebewesen eines anderen Planeten aus betrachtet längs eines Großkreises läuft, d. h. in Wahrheit nicht in gerader Linie fortschreitet.
Auf Grund dessen können wir nach dem Vorbild der ebenen Dreiecke auch auf der Kugelfläche Dreiecke bilden, deren Seiten dann aber Großkreisbögen sind. Diese Figuren auf der Kugel, die sphärische Dreiecke heißen, besitzen mehrere von den Eigenschaften, wie sie die ebenen Dreiecke aufweisen.

Hiernach kann man analog zu der ebenen Geometrie auch auf der Kugelfläche eine Geometrie entwickeln. In dieser sogenannten sphärischen Geometrie übernehmen beispielsweise die Großkreise die Rolle der Geraden und die sphärischen Dreiecke die Rolle der ebenen Dreiecke. Diese Geometrie weicht jedoch in mehrerlei Hinsicht wesentlich von der ebenen Geometrie ab.

So kann man beispielsweise beweisen, dass die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks abweichend von der eines ebenen Dreiecks nicht $180°$ beträgt, sondern stets größer ist. Weiter kann man feststellen, dass es in der sphärischen Geometrie keine parallelen Geraden gibt, denn zwei beliebige Großkreise schneiden einander stets in zwei entgegengesetzten Punkten der Kugel.

Gerade wegen dieses letzteren Umstands sagen wir, dass die sphärische Geometrie abweichend von der euklidischen Geometrie eine Form der sogenannten nichteuklidischen Geometrie darstellt.

Nach alledem könnte man denken, dass wir doch eigentlich auf der Erde leben, die mit so guter Annäherung kugelförmig ist, wir also die sphärische Geometrie anwenden müssten. Statt dessen benutzen wir jedoch die ebene euklidische Geometrie.
Das ist indessen keineswegs schlimm, weil ein kleines Stück der Oberfläche einer Kugel mit großem Radius mit guter Annäherung als eben angesehen werden kann. Auch unsere Erde ist eine Kugel mit so großem Radius, dass es praktisch völlig ausreicht, wenn wir die euklidische Geometrie anwenden.
Wir brauchen also beispielsweise nicht mit sphärischen Dreiecken an Stelle von ebenen Dreiecken zu arbeiten, weil die Seiten der in der Praxis auftretenden Dreiecke kleine Großkreisbögen von so großem Radius sind, dass sie bereits mit sehr guter Annäherung als gerade Strecken anzusehen sind.

Ebenso können wir sagen, wenn wir auf unserer Erde unserer Meinung nach in gerader Linie fortschreiten und keine übermäßig große Entfernung zurücklegen, dass wir dann gleichfalls auf einem sehr kleinen Großkreisbogen von sehr großem Radius fortschreiten, uns also praktisch auf einer geraden Strecke bewegen. Wir können uns also mit der Ansicht zufrieden geben, dass wir, obgleich auf unserer Erde in großem Maßstab die sphärische Geometrie gilt, bei den in der Praxis auftretenden Maßen keinen bedeutenden Fehler begehen, wenn wir die euklidische Geometrie anwenden.

6 Mathematische Probleme des Toto-Lotto-Spiels

6.1 Einführung

Pál Révész

Seitdem sich die verschiedenen Glücksspiele verbreitet haben, befassen sich die Menschen auch mit der Frage, wie man möglichst geschickt spielt und ob sich eine solche Strategie ermitteln lässt, durch die der Gewinn gesichert oder wenigstens sehr wahrscheinlich gemacht wird.
Im Falle einiger einfacherer Spiele konnte man auch in der Tat mit mathematischen Hilfsmitteln beweisen, dass einer der Spieler (z. B. derjenige, der anfängt) sicher gewinnt, wenn er eine entsprechende Strategie wählt, und es ist auch gelungen, die Gewinnstrategie anzugeben. Diese Spiele sind jedoch gerade als Spiele uninteressant, denn wenn wir von einem Spiel wissen, dass hierbei beispielsweise derjenige, der anfängt, sicher gewinnt, so lohnt es sich nicht mehr zu spielen.

In der Tat sind diejenigen Spiele, von denen man mit mathematischen Hilfsmitteln zeigen konnte, dass sie einem der Spieler einen Vorteil bieten, auch bereits aus der Mode gekommen. Diejenigen Glücksspiele (z. B. verschiedene Kartenspiele), die wir auch heute zu spielen pflegen, lassen sich ihrer Kompliziertheit wegen nicht mathematisch behandeln, oder man kann von ihnen nur so viel sagen, dass der Ausgang des Spiels, wenn alle Spieler gut spielen, ausschließlich durch den Zufall bedingt ist.

Letzteres kann man im wesentlichen vom Lotto und mehr oder weniger auch vom Toto sagen. Beim Lotto ist keinerlei Spielsystem imstande, die Gewinnaussichten zu erhöhen. Beim Sport-Toto kommt es natürlich darauf an, ob wir die auftretenden Mannschaften kennen und inwieweit wir in der Lage sind, aus den bisherigen Ergebnissen Schlussfolgerungen für die Zukunft zu ziehen; mit mathematischen Mitteln kann man hier jedoch auch nicht mehr als das sagen.

Eine gewisse Hilfe durch die Mathematik ist dann möglich, wenn jemand mit vielen Scheinen spielt und beispielsweise fragt, wie er die gegebene Anzahl von Lottoscheinen ausfüllen muss, damit er mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit wenigstens einen Zweier hat, oder wieviel Scheine er ausfüllen muss, damit ihm zwei Treffer sicher sind.

Wir können jedoch sagen, dass die Hilfe, die die Mathematik den einzelnen Spielern bieten kann, viel weniger interessant ist als die Frage, inwieweit die in den verschiedenen Spielen aufgeworfenen mathematischen Probleme die Entwicklung der Mathematik gefördert haben. Manche Gebiete der Mathematik, die heute bereits im praktischen Leben eine sehr bedeutende Rolle spielen, wie z. B. die Spieltheorie und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, haben vieles mathematischen Untersuchungen zu verdanken, die mit den verschiedenen Glücksspielen zusammenhängen.

I.
Bevor wir auf Untersuchungen in Zusammenhang mit dem Lotto zurückkommen, wollen wir uns zunächst mit einem Spiel befassen, das komplizierter als das Lotto ist.

Von neunzig in einer Urne liegenden Zahlen werden fünf herausgezogen, und wir sollen vorher herausfinden, welche fünf gezogen werden und in welcher Reihenfolge. Die Lage ist also insofern komplizierter als beim gewöhnlichen Lotto, als wir nicht nur die fünf Zahlen zu erraten haben, sondern auch, in welcher Reihenfolge sie gezogen werden.
Wir fragen, wieviel Scheine wir im Falle dieses Spieles benötigen, damit wir die gezogenen fünf Zahlen treffen und obendrein auch noch die Reihenfolge richtig ist, mit anderen Worten, wieviel Ergebnisse bei der Lottoziehung möglich sind, wenn wir auch auf die Reihenfolge der gezogenen Zahlen Wert legen.

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der möglichen Ergebnisse $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ beträgt. Die erste Zahl kann nämlich aus 90 Zahlen offensichtlich auf 90erlei Weise gezogen werden, und wenn die erste Zahl schon feststeht, kann man die zweite Zahl aus den verbleibenden 89 Zahlen auf 89 verschiedene Weisen auswählen, die ersten beiden Zahlen lassen sich also auf 90 · 89 Weisen ziehen. Durch Fortführung dieser Überlegung erhält man als Ergebnis die Zahl 90 · 89 · 88 · 87 · 86.

Es ist klar, dass beim gewöhnlichen Lotto, bei dem wir nicht die Reihenfolge erraten müssen, sondern nur, welche fünf Zahlen überhaupt gezogen worden sind, viel weniger Scheine genügen. Während wir nämlich bei dem obengenannten komplizierteren Lotto, um mit Sicherheit die gezogenen fünf Zahlen in richtiger Reihenfolge zu erraten, beispielsweise die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, wenigstens einmal in jeder möglichen Reihenfolge tippen müssen, genügt es beim gewöhnlichen Lotto, unter den 90 Zahlen alle möglichen fünf je einmal zu tippen.

Wir haben deshalb zu fragen, auf wieviel Weisen man beliebige fünf Zahlen (z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5) anordnen kann, denn die Anzahl dieser Anordnungen gibt an, wievielmal so groß die bei dem komplizierteren Lotto erhaltene Zahl von Anordnungen ist gegenüber der Anzahl der beim gewöhnlichen Lotto für fünf Treffer notwendigen Scheine.

Der Einfachheit halber fragen wir zunächst, auf wieviel Weisen man drei Zahlen anordnen kann. Offenbar sind die möglichen Anordnungen der Zahlen 1, 2, 3 die folgenden:

$$\begin{matrix} 1\,2\,3 & 2\,1\,3 & 3\,1\,2 \\ 1\,3\,2 & 2\,3\,1 & 3\,2\,1 \end{matrix}$$

3 Zahlen kann man also auf 6erlei Weise anordnen.
Als nächstes wollen wir sehen, wieviel Möglichkeiten es gibt, vier Zahlen, z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, in einer Reihe anzuordnen. Die Gruppierung dieser Zahlen können wir z. B. nach dem folgenden System vornehmen: Wir betrachten zunächst diejenigen Reihenfolgen, bei denen die Zahl 1 zuerst steht. Von diesen Anordnungen gibt es offensichtlich ebensoviele, wie man aus den Zahlen 2, 3, 4 (also aus 3 Elementen) bilden kann.
Oben haben wir jedoch gesehen, dass man drei Zahlen auf 6erlei Weise anordnen kann. Ebenso gibt es sechs solche Anordnungen, bei denen die Zwei vorn steht, und sechs, wo die Drei bzw. die Vier vorn steht. Somit ist die Anzahl der möglichen Anordnungen gleich $4 \cdot 6 = 24$. Dies sind die folgenden:

1234	2134	3124	4123	1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213	1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312	1432	2431	3421	4321

Auf dieselbe Weise kann man sehen, dass sich fünf Zahlen auf 5 · 24 Weisen anordnen lassen.

Natürlich lässt sich die geschilderte Überlegung auch an- wenden, wenn man bestimmen will, auf wieviel Weisen sich beliebig viele Zahlen (z. B. n Zahlen) in einer Reihe schreiben lassen. Es ergibt sich, dass die Anzahl der möglichen Anordnungen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$$

beträgt, d. h., die Anzahl der möglichen Anordnungen ist gleich dem Produkt der ersten n ganzen Zahlen. Diese Zahl pflegt man mit $n!$ abzukürzen und liest dieses Zeichen n Fakultät. Wir schreiben für einige n den Wert von $n!$ auf:

$$\begin{aligned}
1! &= 1\\
2! &= 1 \cdot 2 = 2\\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120\\
6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720\\
7! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040\\
8! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320\\
9! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880\\
10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800
\end{aligned}$$

Es ist zu sehen, dass der Wert von $n!$ mit wachsendem n sehr schnell wächst. Wir merken an, dass der Wert von 50! bereits eine 60stellige Zahl ist.

Auf das Lottospiel angewendet, ergibt unsere obige Überlegung, dass die Anzahl der Scheine, die notwendig ist um 5 Treffer zu garantieren,

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268$$

beträgt. Wenn wir soviel (nahezu 44 Millionen) Scheine richtig ausfüllen, sind wir sicher, dass einer unserer Scheine ein Treffer ist. (Richtiges Ausfüllen bedeutet, jedes Zahlenquintupel auf einen und nur einen Lottoschein zu schreiben.)
Wir können unser Ergebnis auch so formulieren, dass man für die Auswahl von 5 beliebigen Zahlen aus $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ Möglichkeiten hat.

Analog können wir fragen, auf wieviel Weisen man von n Stück Zahlen (oder Kugeln oder auch n anderen Gegenständen) k Stück auswählen kann. Die obige Überlegung ergibt sogleich, dass man von n »Dingen« k Stück auf

$$\frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Weisen auswählen kann.
Diese Zahl pflegt man mit $\binom{n}{k}$ zu bezeichnen und "n über k" zu lesen. Wir können also sagen:
Wenn wir

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Scheine richtig ausfüllen, sind wir sicher, dass einer unserer Scheine ein Fünfer ist.

Natürlich wird es, wenn wir auf diese Weise $\binom{90}{5}$ Scheine ausgefüllt haben, nicht nur einen Fünfer unter unseren Scheinen geben, sondern mehrere unserer Scheine werden auch Zweier, Dreier und Vierer sein. Wir fragen uns, wie groß die Anzahl der Zweier, Dreier und Vierer sein wird.

Wir wollen etwa zunächst untersuchen, wieviel unserer Scheine Vierer sein werden. Wir nehmen z. B. an, dass die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gezogen worden sind. Dann sind auf denjenigen unserer Scheine 4 Treffer, auf denen vier von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sowie eine von den übrigen 85 Zahlen angekreuzt sind.
(Da wir jedes Zahlenquintupel ausgefüllt haben, können wir die Frage auch folgendermaßen stellen: Wieviel Zahlenquintupel gibt es, die vier von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 enthalten und als 5. Zahl eine von den übrigen 85 Zahlen?)

Unter den Viererscheinen wird es jeweils einen solchen geben, auf denen die vier Trefferzahlen die 1, 2, 3, 4 bzw. die 1, 2, 3, 5 bzw. 1, 2, 4, 5 bzw. die 1, 3, 4, 5 bzw. die 2, 3, 4, 5 sind. Von unseren Viererscheinen, auf denen wir z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4 getroffen haben, gibt es offensichtlich 85 Stück.
Somit werden, wenn wir die $\binom{90}{5}$ Scheine richtig ausgefüllt haben, neben einem Fünfer 5 $\cdot$ 85 $=$ 425 unserer Scheine Vierer sein, unabhängig davon, welche fünf Zahlen gezogen werden sind.

Analog kann man die Anzahl der Dreierscheine ausrechnen. Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, es seien die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gezogen werden. (Wenn andere fünf Zahlen gezogen worden sind, läuft die Überlegung ganz genauso ab.) Drei Treffer werden diejenigen Scheine ergeben, die eines der $\binom{5}{3} = 10$ Zahlentripel

1 2 3	1 4 5
1 2 4	2 3 4
1 2 5	2 3 5
1 3 4	2 4 5
1 3 5	3 4 5

enthalten, während die übrigen beiden Zahlen unter den Zahlen 6, 7, 8, ..., 90 gewählt sind. Da wir unter den Zahlen 6, 7, 8, ..., 90 (d. h. unter 85 Stück) zwei auf $\binom{85}{2}$erlei Weise wählen können, wird die Anzahl der Scheine mit drei Treffern gleich $10 \cdot \binom{85}{2} = 35700$ sein.

Dieselbe Überlegung zeigt, dass die Anzahl der Scheine mit zwei Treffern gleich $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 987700$ ist.

Wir können unser Ergebnis auch ein wenig anders ausdrücken: Wenn wir einen Schein ausfüllen und fünf Treffer erzielen wollen, so gibt es für unsere Zahlen nur einen einzigen günstigen Fall, nämlich den, dass gerade die fünf Zahlen gezogen werden, die wir ausgefüllt haben.
Wollen wir jedoch nur vier Treffer erreichen, so gibt es bereits 425 Ziehungen, die für unsere Zahlen günstig sind. Im Hinblick auf das Erzielen von drei Treffern beträgt die Anzahl der günstigen Fälle 35700, während es für zwei Treffer 987700 günstige Fälle gibt.

Somit gibt es also bei der Lottoziehung $\binom{90}{5}$ mögliche Ausgänge, aber - unabhängig davon, wie wir unseren Schein ausgefüllt haben - nur ein einziges Zahlenquintupel davon garantiert uns im Falle seiner Ziehung einen Fünfer, während es 425 bzw. 35700 bzw. 987700 solche Zahlenquintupel gibt, bei deren Ziehung wir 4 bzw. 3 bzw. 2 Treffer haben.

Dieses Ergebnis deutet an, wir können erwarten, dass von den ausgefüllten Scheinen etwa $1/\binom{90}{5}$ Fünfer sein wer-den, dagegen $425/\binom{90}{5}$ Vierer bzw. $35700/\binom{90}{5}$ Dreier bzw. $987700/\binom{90}{5}$ Zweier.
Wir können mit anderen Worten erwarten, dass etwa jeder $\binom{90}{5} = 43949268$ste Schein 5 Treffer, jeder $\binom{90}{5}\frac{1}{425} = 103410$te Schein 4, jeder $\binom{90}{5}\frac{1}{35700} = 1231$ste Schein 3 und jeder $\binom{90}{5}\frac{1}{987600} = 44{,}5$te Schein 2 Treffer hat. Es ist interessant, einmal anzusehen, wie sehr diese Vermutung von uns von der Wirklichkeit bestätigt bzw. widerlegt wird. In Zusammenhang damit können wir die folgenden Angaben machen:

Vom 7. März 1957 bis Ende 1961 wurden beim Lottospiel in Ungarn 892 Millionen Scheine eingesendet. (Wir erwähnen, dass 1961 allein 223,6 Millionen Scheine eingegangen sind, d. h. im Wochendurchschnitt 430000 Stück; also spielt in Ungarn fast jeder zweite Mensch Lotto, die Kinder eingeschlossen. In Wahrheit spielen natürlich weniger Lotto, da sich die Lottospieler zu einem großen Teil mit mehreren Scheinen beteiligen.)

In diesem Zeitabschnitt ergab sich für die Anzahl der erzielten Treffer:

Fünfer	23
Vierer	9221
Dreier	749890
Zweier	20605575
	21364709

Daraus geht hervor, dass auf 2,4% der Scheine ein Gewinn entfällt, und zwar in den folgenden Rängen:

Fünfer auf 23/892000000 der Scheine,
Vierer auf 9221/892000000 der Scheine,
Dreier auf 749890/892000000 der Scheine,
Zweier auf 20605575/892000000 der Scheine.

Mit anderen Worten erzielte jeder 38782608te Schein einen Fünfer, 967365te Schein

einen Vierer, 1190ste Schein einen Dreier, 43,3te Schein einen Zweier.
Vergleichen wir diese Angaben mit denen, die wir auf Grund unserer theoretischen Überlegungen erwartet haben, so stellen wir fest, dass es keine wesentliche Abweichung gibt.

Dass eine gewisse Abweichung vorliegt, ist ganz natürlich, da doch die in Wirklichkeit erzielte Trefferzahl vom Zufall abhängt und somit notwendig eine gewisse Schwankung aufweist.
Außer durch zufällige Schwankungen kann man die Abweichungen auch dadurch begründen, dass die Lottospieler oft nicht die einzelnen Scheine zufällig ausfüllen, sondern gleich viele Scheine nach einem gewissen System.

Wir haben unsere Untersuchungen mit der Frage begonnen, wieviel Scheine dafür notwendig sind, um sicher fünf Treffer zu erzielen. Auf diese Frage haben wir zur Antwort erhalten, dass die Anzahl der erforderlichen Scheine $\binom{90}{5} = 43949268$ beträgt.
Wir haben uns jedoch noch nicht mit der Frage befasst, wieviel Scheine notwendig sind, um 2, 3 bzw. 4 Treffer zu sichern. Während es keine Mühe bereitete, die für einen Fünfer erforderliche Anzahl von Scheinen zu berechnen, erweist sich überraschenderweise die genaue Berechnung der Minimalzahl von Scheinen, die einen Zweier, Dreier bzw. Vierer garantiert, selbst mit den modernsten elektronischen Rechenmaschinen noch als hoffnungslos.

Wir können zwar durchaus etwas darüber sagen, wieviel Scheine etwa notwendig sind, um eines Zweiers, Dreiers bzw. Vierers sicher zu sein. Unter nochmaliger Benutzung unserer obigen Überlegung kann man leicht einsehen, dass die Anzahl der Scheine, die wir benötigen, wenn wir einen Vierer, Dreier bzw. Zweier erreichen wollen, nicht kleiner als

$$\frac{\binom{90}{5}}{425}, \qquad \frac{\binom{90}{5}}{35700}, \qquad \frac{\binom{90}{5}}{987700}$$

sein kann. In Wahrheit braucht man noch mehr Scheine.
Man kann nachweisen, dass das richtige Ausfüllen von 100 Scheinen bereits wenigstens einen Zweier garantiert. Es erscheint sehr wahrscheinlich, dass weniger Scheine dazu nicht ausreichen. Es ist aber bisher nicht gelungen, dies zu beweisen.

II.
In diesem Abschnitt untersuchen wir das alte Totosystem (mit 12 Treffern), weil uns hierfür Erfahrungsdaten zur Verfügung stehen, und machen zum Schluss einige Bemerkungen über das neue System.

Wir beginnen unsere Untersuchungen auch hier mit der Frage, wieviel Totoscheine notwendig sind, um einen Zwölfer zu garantieren. (Die Totoscheine sehen wir der Einfachheit halber als einspaltig an.)
Es ist leicht zu erkennen, dass die erforderliche Anzahl von Scheinen gleich $3^{12} = 531441$ ist. Wenn wir nämlich nur zwei Wettkämpfe tippen müssten, würden offensichtlich 9 Scheine ausreichen, die wir auf die folgende Weise ausfüllen können:

1 1	2 1	x 1
1 2	2 2	x 2
1 x	2 x	x x

Um drei Wettkämpfe zu erraten, sind jedoch bereits $3 \cdot 9 = 3^3 = 27$ Scheine erforderlich, da wir die 9 obigen Tippreihen auf dreierlei Weise fortsetzen können. Somit können wir die 27 Scheine folgendermaßen ausfüllen:

1 1 1	1 2 1	1 x 1
1 1 2	1 2 2	1 x 2
1 1 x	1 2 x	1 x x
2 1 1	2 2 1	2 x 1
2 1 2	2 2 2	2 x 2
2 1 x	2 2 x	2 x x
x 1 1	x 2 1	x x 1
x 1 2	x 2 2	x x 2
x 1 x	x 2 x	x x x

Indem wir die obige Überlegung fortsetzen, erhalten wir, dass für 4 Wettkämpfe bereits $3 \cdot 27 = 3^4 = 81$ und für 12 Wettkämpfe 3^{12} Scheine notwendig sind.

Natürlich geht ein bedeutender Teil der Totospieler davon aus, dass er von einer gewissen Anzahl von Wettkämpfen das Endergebnis im voraus weiß, bei einer gewissen Anzahl von Wettkämpfen dagegen nur unter zwei Möglichkeiten zu wählen (eine Zweierentscheidung zu treffen) braucht, da er weiß, dass die dritte Möglichkeit nicht eintritt, während er schließlich von einigen Wettkämpfen überhaupt nicht vorher weiß, wie sie ausgehen werden.

Wir wollen uns anschauen, wieviel Scheine ein Totospieler noch ausfüllen muss, um 12 Treffer zu erzielen, wenn er von 4 Wettkämpfen den Ausgang vorhersieht, bei 4 Wettkämpfen nur unter zwei Möglichkeiten zu wählen hat und von 4 Wettkämpfen überhaupt nichts weiß (vorausgesetzt, dass seine Voraussagen richtig waren).
Die obige Überlegung ergibt für diesen Fall, dass die Anzahl der erforderlichen Scheine $3^4 \cdot 2^4 = 1296$ beträgt.

Allgemein gilt: Hat der Totospieler bei k der 12 Wettkämpfe unter je drei Möglichkeiten zu wählen, bei l unter zweien und bei m unter einer - der Ausgang des Wettkampfes steht fest - $(k + l + m = 12)$, so sind $3^k \cdot 2^l$ Scheine notwendig, um 12 Treffer zu garantieren.

Ähnlich wie beim Lottospiel ist es auch hier viel schwieriger, auf die Frage zu antworten, wieviel Scheine notwendig sind, um 11 bzw. 10 Treffer zu sichern, wenn wir vorher nichts über den Ausgang der Wettkämpfe wissen bzw. wenn wir im voraus auf den Ausgang einer gewissen Anzahl von Wettkämpfen tippen.
Im Hinblick darauf, dass hier die Anzahl der Fälle, um die es geht, viel kleiner als beim Lotto ist, lässt sich die Frage leichter durchschauen. Die verschiedenerlei Totoschlüssel geben an, wieviel Scheine in den verschiedenen Fällen ausreichen (und wie man diese ausfüllen muss), um eines Zehners bzw. Elfers sicher zu sein. Eine sehr schwere Aufgabe

würde es jedoch sein, zu zeigen, dass man dasselbe Ziel mit weniger Scheinen nicht erreichen kann.

Ganz wie bei der Untersuchung des Lottospiels können wir auch hier fragen, wieviel Elfer bzw. Zehner wir neben dem einen Zwölfer mit unseren Scheinen erzielen, wenn wir 3^{12} Scheine ausfüllen.
11 Treffer bekommen wir auf denjenigen Scheinen, auf denen wir einen der 12 Wettkämpfe nicht richtig angekreuzt haben, d. h., auf denen wir an einer Stelle statt des richtigen der Zeichen 1, 2, x eines der anderen beiden geschrieben haben. Das bedeutet, dass $2 \cdot 12 = 24$ unter unseren 3^{12} Scheinen 11 Treffer erzielen werden. Ebenso erkennt man, dass die Anzahl der Zehner $\binom{12}{2} \cdot 2^2 = 264$ beträgt.

Aus diesen Ergebnissen können wir nach dem Vorbild des Lottospiels die Folgerung ziehen, dass von den ausgefüllten Scheinen

1/531441 Zwölfer,
24/531441 Elfer,
264/531441 Zehner

sein werden.
Es liegt auf der Hand, dass sich diese Zahlen in der Wirklichkeit nicht bestätigen werden, da es doch in Wahrheit nicht so ist, dass die Totoscheine zufällig ausgefüllt werden, sondern angenommen werden kann, dass der Ausgang einer gewissen Anzahl von Wettkämpfen vorauszusehen ist.

Wir wollen zum Beispiel ausrechnen, wieviel Scheine notwendig sind, um 12 Treffer zu erzielen, wenn wir annehmen, dass wir von zwei Wettkämpfen wissen, wie sie ausgehen, während wir bei 4 Wettkämpfen nur zwischen zwei Möglichkeiten zu entscheiden haben. Außerdem wollen wir ermitteln, wieviel Elfer bzw. Zehner wir mit unseren Scheinen erringen werden, wenn wir die hierfür notwendige Anzahl von Scheinen ausfüllen.

Unter Anwendung unserer obigen Überlegungen ergibt sich, dass die erforderliche Anzahl von Scheinen $3^6 \cdot 2^4 = 11664$ beträgt. Wenn wir diese Scheine ausgefüllt haben (vorausgesetzt freilich, dass wir die 2 eindeutigen und die 4 zweideutigen Wettkämpfe richtig getippt haben), dann ist, wie man leicht sieht, die

Anzahl der Elfer gleich $6 \cdot 2 + 4 = 16$,
die Anzahl der Zehner gleich $\binom{6}{2} \cdot 4 + \binom{4}{2} + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 114$

Angenommen, die Totospieler sehen tatsächlich den Ausgang von 2 Wettkämpfen voraus und nehmen von 4 Wettkämpfen an, dass sie nur zwischen zwei Möglichkeiten zu unterscheiden brauchen, dann können wir also erwarten, dass von den eingesandten Totoscheinen

1/11664 Zwölfer (1/11664 = 0,0000857),
16/11664 Elfer (16/11664 = 0,00137),
114/11664 Zehner (114/11664 = 0,00977)

sein werden.

Wir wollen uns danach noch ansehen, wie es in Wirklichkeit aussieht. Das Totospiel hat in Ungarn am 19. Oktober 1947 begonnen. Die Anzahl der bis Ende 1961 eingesandten Scheine beträgt 343,8 Millionen. Hiervon beträgt die Anzahl der Gewinnscheine:

12 Treffer	30733
11 Treffer	352258
10 Treffer	2507778

d. h., auf einen eingesandten Totoschein kamen in Wahrheit

0,0000894 Zwölfer, 0,00102 Elfer, 0,0073 Zehner.

Diese Zahlen liegen genügend nahe bei den errechneten Werten. Die Tatsache, dass die theoretischen Werte die wahren Werte so gut approximieren, lässt auch erkennen, dass die Annahme, die Totospieler kennen zwei der 12 Wettkämpfe, während sie von 4 Wettkämpfen nur zwischen zwei Möglichkeiten zu entscheiden haben, im wesentlichen richtig ist.

Bei der Niederschrift dieses Abschnitts standen dem Verfasser noch keine Angaben über das neue Totosystem zur Verfügung. So ist es vielleicht noch interessanter, was für Ergebnisse zu erwarten sind. Wir beschränken uns hier alles in allem auf die Untersuchung einer einzigen Frage: Von wieviel Prozent der Scheine mit 13 Treffern ist zu erwarten, dass sie $(13 + 1)$ Treffer erzielen?

Offensichtlich wird ein Totospieler, der von dem zu erwartenden Ergebnis keinerlei Information besitzt, mit der Wahrscheinlichkeit $1/3 = 0{,}33...$ unter den Tips 1, 2, x den richtigen wählen. Aus dieser Tatsache könnte man schlussfolgern, dass etwa 33% unter den Scheinen mit 13 Treffern $(13 + 1)$ Treffer aufweisen werden.
Berücksichtigen wir jedoch, dass die Totospieler über das Ergebnis der Wettkämpfe in einem gewissen Grade informiert sind, so ist zu erwarten, dass mehr als 33% der Scheine mit 13 Treffern $(13 + 1)$ Treffer enthalten werden.

Aus den zur Verfügung stehenden Daten kann man zu der Schlussfolgerung gelangen, dass etwa 42% der Scheine mit 13 Treffern $(13 + 1)$ Treffer enthalten werden. Hieraus kann man auch schließen, dass es solche Wochen geben wird, in denen die Anzahl der Scheine mit $(13 + 1)$ Treffern größer ist als die Zahl der Scheine mit 13 Treffern. Wir merken an, dass der letztere Umstand bereits in dem Prämierungssystem berücksichtigt worden ist.

III.
Zum Abschluss wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen machen. Wie ich weiß, würde niemand unter den Lottospielern gern die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ankreuzen, und keiner der Totospieler würde bei allen denjenigen Wettkämpfen auf 1 tippen, deren Ausgang seiner Meinung ganz vom Zufall abhängt.

Aus den obigen Ausführungen hat sich zwar eigentlich bereits ergeben, dass es zu dieser Ansicht keine reale Begründung gibt. Wir halten es indessen für erforderlich, hierüber noch einige Worte zu verlieren.
Wie wird von den Lottospielern ihre Absicht begründet, nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu

spielen? Sicher werden sie sagen, dass diese fünf Zahlen noch niemals gezogen worden sind, oder gar, dass »solche« fünf Zahlen noch nicht gezogen worden sind.

Es ist freilich wahr, dass die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 noch nie gezogen worden sind, und wenn jemand aufs Geratewohl fünf Zahlen nennt, so ist es sehr wahrscheinlich, dass diese fünf Zahlen nicht gewählt werden. Auch ist es wahr, dass »regelmäßige« Zahlenfolgen seltener gezogen werden als unregelmäßige.
Hieraus darf man jedoch nicht den Schluss ziehen, dass eine beliebige »regelmäßige« Folge weniger wahrscheinlich als irgendeine regellose ist.

Der Grund für diese Erscheinung ist einfach der, dass die Anzahl der »regelmäßigen« Folgen wesentlich geringer ist als die der regellosen. Wenn wir also von vornherein erraten sollten, ob eine »regelmäßige« oder eine »regellose« Folge gezogen werden wird, so würden wir offensichtlich auf eine regellose zurückgreifen.
Müssen wir jedoch die Zahlen genau erraten, so ist kein Zahlenquintupel vor den übrigen im Vorteil oder Nachteil. (Natürlich könnten wir diesen Aussagen von uns nur dann einen genauen Sinn geben, wenn wir auf irgendeine Weise sagen würden, was wir unter einer regelmäßigen Folge verstehen.)

Wir können sogar sagen, dass es sich eigentlich mehr lohnt, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu tippen, als irgendeine regellose Folge. Wenn wir nämlich in dieser Weise tippen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir 2, 3, 4 oder 5 Treffer erzielen, nicht geringer, als wenn wir fünf andere Zahlen tippen würden. Sollten wir jedoch zufällig einen Vierer oder Fünfer erzielen, so bekommen wir sicher mehr Geld, da es doch sehr wahrscheinlich ist, dass sonst niemand diese Zahlen getippt hat.

Natürlich können wir unsere Behauptung, dass jedes beliebige Zahlenquintupel mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen wird, mit den vorliegenden Erfahrungsdaten nicht beweisen, denn da die Anzahl aller Zahlenquintupel 43949268 beträgt, können wir vor Ablauf von 43949268 Wochen auch nicht hoffen, dass jedes Zahlenquintupel ein- mal gezogen wird. Um durch die Erfahrung zu rechtfertigen, dass die einzelnen Zahlenquintupel etwa gleich oft auftreten, müssten erst viele Male 43949268 Wochen verstreichen.

Wesentlich kürzere Zeit benötigen wir, um die Häufigkeit zu untersuchen, mit der die einzelnen Zahlen auftreten.
Die bisher verflossene Zeit reicht dazu aus, um zu zeigen, dass jede der 90 Zahlen unter den gezogenen etwa gleich oft vorkommt. Eine interessante wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe besteht darin, zu untersuchen, nach Ablauf von wieviel Wochen wir hoffen können, dass jede von den 90 Zahlen mindestens einmal gezogen worden ist. (Offensichtlich sind dazu, dass jede Zahl einmal vorkommt, wenigstens $90/5 = 18$ Wochen erforderlich; wir können jedoch im allgemeinen nicht hoffen, dass nach Ablauf von 18 Wochen bereits jede Zahl gezogen sein wird.)

Eine etwas längere Zeit wird benötigt, um die experimentelle Verteilung der Zahlenpaare zu untersuchen. Da es aber $\binom{90}{2} = 4005$ Zahlenpaare gibt und in einer Woche $\binom{5}{2} = 10$ Zahlenpaare zum Zuge kommen, können wir somit auch nicht erwarten, dass alle Zahlenpaare in weniger als 401 Wochen bei der Ziehung an die Reihe kommen.

7 Zeitvertreib mit Zahlensystemen

Edit Gyarmati

Im Leben der Menschheit war das erste Auftreten der Zahlen nicht so sehr von quantitativer als vielmehr von qualitativer Bedeutung.
Man kann aus der Sprache noch heute lebender Naturvölker sicher darauf schließen, dass die Menschen ursprünglich nur zwischen eins, zwei und viel unterscheiden konnten.

Später bildete man durch Addition die größeren Zahlen, genauer: durch Addition zu zwei. So ist beispielsweise die 5 in der Sprache einzelner Volksstämme als 2 + 2 + 1 entstanden.

Mit der Entwicklung des Handels benötigte man jedoch zugleich auch größere Zahlen, und dafür war diese Zählweise zu schwerfällig. Dann begann sich das Verfahren einzubürgern, gewisse Zahlen zu einer größeren Einheit zusammenzufassen. Es war dabei nur ganz natürlich, dass der Mensch die Anzahl der an seiner Hand und seinem Fuß befindlichen Finger und Zehen als Grundzahlen benutzte.

Von da ab - als man 5, 10 und 20 zu einer Einheit zusammenfasste - musste jedoch noch ein sehr langer Abstraktionsprozess ablaufen, bis sich die heutzutage übliche Zählung (z. B. im dekadischen Zahlensystem) entwickelte und bis es zur Einführung der bekannten Stellenwertschreibweise kam.
Wir wollen zunächst das dekadische Zahlensystem ein bisschen genauer untersuchen.
Was bedeutet z. B. das Zeichen 2305? Wir wissen wohl, dass dies ausführlich aufgeschrieben

$$2305 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

bedeutet oder, anders geschrieben,

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

(Die Zahlen 10^3, 10^2 usw. heißen Potenzen von 10. Beispielsweise bedeutet

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \qquad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \qquad 10^1 = 10$$

Nach Definition ist 10^0 dasselbe wie 1.)

Allgemein kann man jede positive ganze Zahl als Summe der Produkte von Zehnerpotenzen mit zwischen 0 und 9 liegenden ganzen Zahlen aufschreiben. Man kann darüber hinaus auch beweisen, dass diese Darstellung im wesentlichen nur auf eine Weise möglich ist. (Die Faktoren der Zehnerpotenzen nennen wir im weiteren Koeffizienten.)

Wir wollen jetzt nicht nachweisen, wie nützlich das dekadische Zahlensystem ist; das ist wohlbekannt. Statt dessen zeigen wir einige unterhaltsame Tricks, deren Deutung stets auf dem dekadischen Zahlensystem beruht.
Als erstes wollen wir uns mit einem Würfelratespiel befassen.

In einer Gesellschaft sagt der eine (nennen wir ihn A) zu einem anderen (B): Wirf die drei Würfel und schau nach, was auf den einzelnen Würfeln steht. Nimm die auf dem ersten Würfel stehende Zahl, multipliziere sie mit 2, addiere 5 zum Ergebnis, multipliziere die so erhaltene Zahl mit 5, addiere hierzu die auf dem zweiten Würfel stehende Zahl, multipliziere wiederum, und zwar mit 10, und addiere schließlich hierzu die auf dem dritten Würfel stehende Zahl. Nenne das Ergebnis!

B nennt das Ergebnis, und A errät, welche Zahlen auf den einzelnen Würfeln gestanden haben. (Stand z. B. 5, 1, 2 auf den Würfeln, so ergibt sich 762.)
Schauen wir nach, wie die Überlegung von A verläuft!

Er nennt die auf dem ersten Würfel stehende, vorläufig unbekannte Zahl a, die auf dem zweiten Würfel stehende b und die auf dem dritten Würfel stehende c. Wenn wir noch einmal nachspielen, was B nach Anweisung von A mit den auf den Würfeln stehenden Zahlen gemacht hat, gelangen wir zu den folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned}&2a, 2a+5, (2a+5)\cdot 5 = 10a+25,\\&10a+25+b, (10a+b+25)\cdot 10 = 100a+10b+250,\\&100a+10b+250+c.\end{aligned}$$

B hat A diese Zahl genannt. Hiervon hat A im Kopf 250 subtrahiert und auf diese Weise das folgende Ergebnis erhalten:

$$100a+10b+c$$

Wir haben natürlich bemerkt, dass dies gerade die im dekadischen Zahlensystem mit den Ziffern a, b, c gebildete Zahl ist. Hieraus konnte A entnehmen, dass die erste Ziffer dieser dreistelligen Zahl die Zahl a ist, die auf dem ersten Würfel stand, die zweite Ziffer die Zahl b, die auf dem zweiten Würfel stand, und schließlich die dritte Ziffer die Zahl c, die auf dem dritten Würfel stand.

Ein weiterer Trick beruht gleichfalls auf der Darstellung im dekadischen Zahlensystem. In einer Gesellschaft errät A das Lebensalter von B und die Anzahl der Pfennige, die B in seiner Tasche hat. (Wir wollen annehmen, dass es um weniger als 1 Mark geht.)

A spricht dann so zu B: Multipliziere die Anzahl deiner Lebensjahre mit 2, addiere 5 zu dem Ergebnis, multipliziere dann die so erhaltene Zahl mit 50. Zu dem, was du auf diese Weise bekommen hast, addiere die Anzahl der Pfennige, die sich in deiner Tasche befinden, und ziehe von der so erhaltenen Zahl 365 ab. Sage an, was du erhalten hast. B sagt es. A errät das Lebensalter von B und die Anzahl der in seiner Tasche befindlichen Pfennige.

B ist beispielsweise 27 Jahre alt und hat 62 Pfennige in seiner Tasche. Dann hat B der Reihe nach die folgenden Zahlen gewonnen:

54, 59, 2950, 3012, 2647.

Die letzte Zahl, 2647, hat er A genannt. Dann hat A 115 zu 2647 addiert und in Kenntnis der so erhaltenen 2762 B sein Lebensalter und die Anzahl der in seiner Tasche befindlichen Pfennige genannt.

Wie war die Überlegung von A?

Wir nehmen an, das Lebensalter von B sei a und die Anzahl der in seiner Tasche befindlichen Pfennige gleich b. Damit ergaben sich auf Grund der von B durchgeführten Operationen die folgenden Teilergebnisse:

$$2a, 2a + 5, 100a + 250, 100a + 250 + b, 100a + b - 115$$

Dies wusste A, also addierte er zum Endergebnis 115 und gelangte zu der Zahl $100a+b$. Da das Lebensalter von A eine höchstens zweistellige Zahl war und dasselbe auch von der Anzahl der Pfennige gilt, die er in seiner Tasche hatte, sind a und b von der Form

$$a = 10x + y \qquad , \qquad b = 10z + u$$

d. h., es ist

$$100a + b = 1000x + 100y + 10z + u$$

Das ist demnach im dekadischen Zahlensystem eine vierstellige Zahl, bei der die aus den ersten beiden Ziffern gebildete Zahl das Lebensalter von B und die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl die Anzahl der in der Tasche von B befindlichen Pfennige angibt.

Als letztes Ratespiel nennen wir das folgende:
Denken Sie sich eine dreistellige Zahl, bei der die erste Ziffer größer als die letzte ist. Subtrahieren Sie hiervon die durch Umkehrung der Ziffernreihenfolge erhaltene Zahl. Nennen Sie die erste Ziffer der so gewonnenen Zahl. Ich sage Ihnen dann die Zahl, an die Sie zuletzt gerade gedacht haben.
Nun, wie ist das möglich?

Die gedachte Zahl sei

$$100x + 10y + z$$

Hierin ist x größer als z, also die durch Umkehrung der Reihenfolge der Ziffern gewonnene Zahl

$$100z + 10y + x$$

kleiner als die vorige. Somit ergibt sich als Differenz die zwei- oder dreistellige Zahl

$$99(x - z)$$

Da aber x und z unter den Zahlen $0, 1, ..., 9$ vorkommen und x größer als z ist, sind $1, 2, ..., 9$ die möglichen Werte von $x - z$. Somit bestehen für die erhaltene Zahl nur die Möglichkeiten :

99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 und 891.

Wir können beobachten, dass die an der Zehnerstelle stehende Ziffer stets 9 ist, während die Summe der übrigen beiden Ziffern 9 beträgt. Kennt man die erste Ziffer, so kann man somit die Zahl erraten.

Wenn die Gesellschaft bereits der Ratespiele überdrüssig geworden ist, zeigen wir zum Abschluss noch Folgendes.
Schreiben wir eine beliebige dreistellige Zahl zweimal hintereinander auf, dann ist die so gewonnene 6stellige Zahl immer durch 143 teilbar.

Zum Beispiel ist 651651 = 143 · 4557.
Wie kann man allgemein beweisen, dass Zahlen dieses Typs die genannte Eigenschaft besitzen? Wir nutzen dazu aus, dass

$$651651 = 651 \cdot 1000 + 651 = 651 \cdot 1001$$

ist. 1001 ist jedoch durch 143 teilbar, also ist auch das 651fache davon durch 143 teilbar.

Allgemein ergibt sich, wenn x, y, z, x, y, z die Ziffern der untersuchten Zahl sind, für die Zahl die Darstellung

$$(100x + 10y + z) \cdot 1001$$

sie ist also durch 143 teilbar.

Wie wir bereits in der Einleitung erwähnt haben, ist der Gebrauch des dekadischen Zahlensystems nur das Ergebnis einer bequemen Gewöhnung. Nichts hindert uns daran, unsere Zahlen in einem anderen Zahlensystem darzustellen.
In der Praxis hat es sich bei einzelnen Rechenmaschinen als sehr nützlich erwiesen, auch das Binärsystem (oder Dualsystem, Zahlensystem zur Basis 2) zu verwenden. Hier braucht man nämlich nur zwei Zahlzeichen, die 0 und die 1, und das ist sehr vorteilhaft. Freilich ist ein und dieselbe Zahl, im Binärsystem aufgeschrieben, länger als im dekadischen System.

Beispielsweise hat die im Dezimalsystem aufgeschriebene 67 im Binärsystem die Form

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

stellt also eine 7stellige Zahl dar, deren Ziffern der Reihe nach

1, 0, 0, 0, 0, 1, 1

lauten. Im folgenden werden wir mit einem Index an der Zahl die Basis des Zahlensystems angeben[7], in dem wir die untersuchte Zahl aufgeschrieben haben. Dementsprechend gilt zum Beispiel

$$67_{10} = 1000011_2$$

Wir wollen jetzt eine im Binärsystem vorgegebene Zahl in eine im Dezimalsystem dargestellte Zahl umformen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
&100110101_2 = ?_{10}\\
&100110101_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0\\
&\qquad\qquad = 256_{10} + 32_{10} + 16_{10} + 4_{10} + 1_{10} = 309_{10}
\end{aligned}$$

[7]Anmerkung: Im Originaltext werden ein Bogen und die Basis über die Zahl geschrieben.

Wenn wir die Basis des Zahlensystems größer als 10 wählen, so können natürlich auch die Zahlen 10, 11, ... als Ziffern auftreten, wir brauchen also zu ihrer Bezeichnung einheitliche Zahlzeichen. Lautet zum Beispiel die Basis 12, so treten auch die 10 und 11 als Zahlzeichen auf. Sie sollen folgendermaßen bezeichnet werden:

$$\alpha = 10, \qquad \beta = 11$$

Somit ist beispielsweise

$$\begin{aligned} 9\alpha 1\beta_{12} &= 9 \cdot 12^3 + \alpha \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + \beta \cdot 12^0 \\ &= 9 \cdot 12^3 + 10 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 11 = 17015_{10} \end{aligned}$$

Um unsere Rechnung nachzuprüfen, dividieren wir 17015 durch 12. Der Rest ist dann offenbar die letzte Stelle der Darstellung von 17015 im Duodezimalsystem:

$$17015 = 12 \cdot 1417 + 11 \tag{1}$$

Analog dividieren wir jetzt den Quotienten, d. h. 1417, durch 12. Der Rest dabei ist die zweite Ziffer von hinten der im Duodezimalsystem dargestellten Zahl:

$$1417 = 12 \cdot 118 + 1 \tag{2}$$

Indem wir in derselben Weise weiter schließen, gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis:

$$118 = 12 \cdot 9 + 10, \qquad 9 = 12 \cdot 0 + 9 \tag{3}$$

Somit lauten die Duodezimalstellen der Reihe nach 9, 10, 1, 11, d. h., es ist in der Tat

$$17015_{10} = 9\alpha 1\beta_{12}$$

Wie wir sehen, weist die Dezimaldarstellung der Zahl mehr Stellen auf als die Duodezimaldarstellung. Wenn also

$$a_t = b_l$$

gilt und t größer als l ist, so enthält a weniger oder ebensoviel Ziffern wie b.

Wir kehren jetzt zu dem Binärsystem zurück und wollen unsere Gesellschaft mit einem Trick unterhalten, der auf der Grundlage des Binärsystems gedeutet werden kann.[8] Wir stellen die nachfolgende Tabelle her.

[8] Siehe auch den Aufsatz »Errate, an welche Zahl ich gedacht habe«.

1	2	4	8	16	32
1	2	4	8	16	32
3	3	5	9	17	33
5	6	6	10	18	34
7	7	7	11	19	35
9	10	12	12	20	36
11	11	13	13	21	37
13	14	14	14	22	38
15	15	15	15	23	39
17	18	20	24	24	40
19	19	21	25	25	41
21	22	22	26	26	42
23	23	23	27	27	43
25	26	28	28	28	44
27	27	29	29	29	45
29	30	30	30	30	46
31	31	31	31	31	47
33	34	36	40	48	48
35	35	37	41	49	49
37	38	38	42	50	50
39	39	39	43	51	51
41	42	44	44	52	52
43	43	45	45	53	53
45	46	46	46	54	54
47	47	47	47	55	55
49	50	52	56	56	56
51	51	53	57	57	57
53	54	54	58	58	58
55	55	55	59	59	59
57	58	60	60	60	60
59	59	61	61	61	61
61	62	62	62	62	62
63	63	63	63	63	63

Danach fordern wir jemanden auf, eine Zahl zwischen 1 und 63 auszusuchen und zu sagen, in welchen Spalten die Zahl zu finden ist. Hieraus erraten wir die gedachte Zahl. Der Betreffende hat beispielsweise an 53 gedacht und sagt, seine Zahl sei in der ersten, dritten, fünften und sechsten Spalte zu finden. Wie können wir sie dann auf Grund dessen erraten ?

Wenn wir die im Kopf der ersten, dritten, fünften und sechsten Spalte stehenden Zahlen addieren, ergibt sich

$$1 + 4 + 16 + 32 = 53$$

Wie ist denn die Tabelle aufgebaut?
Stellen wir 53 im Binärsystem dar! Da

$$53 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

ist, gilt also $53_{10} = 110101_2$.

An der ersten, dritten, fünften und sechsten Stelle von hinten steht in der Binärentwicklung von 53 eine 1.

Allgemein haben wir eine Zahl (zur Zeit untersuchen wir nur die zwischen 1 und 63 liegenden Zahlen) in die erste Spalte geschrieben, wenn in ihrer Darstellung im Binärsystem die erste Ziffer von hinten eine 1 ist; wir haben sie dagegen nicht hineingeschrieben, wenn diese Ziffer 0 ist.

Analog haben wir die Zahl, wenn die zweite Ziffer von hinten eine 1 ist, in die zweite Spalte geschrieben, wenn diese 0 lautet, dagegen nicht. Und so geht es weiter.
Da in der Kopfleiste gerade die Zahlen

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$$

stehen, gewinnen wir also, wenn wir diejenigen davon addieren, in deren Spalte die gedachte Zahl steht, gerade diejenige Zahl wieder, in deren Darstellung im Dualsystem diese Zweierpotenzen mit dem Koeffizienten 1 auftreten, während die übrigen Zweierpotenzen den Koeffizienten 0 haben.
Der Konstruktion der Tafel zufolge gelangen wir also gerade zu der gedachten Zahl.

Wenn wir uns auch noch dafür interessieren, welcher Art die Zahlen von 1 bis 63 sind, die in den einzelnen Spalten stehen, so können wir auch diese Frage leicht beantworten. Was bedeutet es denn, dass die erste Stelle der Zahl von hinten (mit anderen Worten also die letzte Ziffer) im Binärsystem eine 1 ist? Das bedeutet, dass die Zahl die Form

$$...1_2 = 2k + 1 \cdot 2^0 = 2k + 1$$

hat, wobei k eine ganze Zahl ist, während an Stelle der Punkte irgendwelche Ziffern stehen; letztere stellen eine gerade Zahl dar.
Also stehen in der ersten Spalte alle zwischen 1 und 63 liegenden ungeraden Zahlen.

Was bedeutet es, dass die vorletzte Ziffer 1 ist?
Das bedeutet, dass es sich entweder um eine Zahl der Form

$$...10_2 = 4k + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4k + 2$$

oder um eine Zahl der Form

$$...11_2 = 4k + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4k + 3$$

handelt. Die Zahl ergibt also bei der Division durch 4 den Rest 2 oder 3. (Auch hier können an Stelle der Punkte irgendwelche Ziffern stehen; das diesen entsprechende Glied ist durch 4 teilbar.)

Welcher Art sind die Zahlen der dritten Spalte?
Wenn bei einer im Binärsystem aufgeschriebenen Zahl die dritte Ziffer von hinten eine 1 ist, so sind die folgenden Fälle möglich:

$$...100_2 = 8k + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8k + 4$$
$$...101_2 = 8k + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8k + 5$$
$$...110_2 = 8k + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8k + 6$$
$$...111_2 = 8k + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8k + 7$$

In der dritten Spalte stehen also diejenigen Zahlen, die bei der Division durch 8 als Rest 4, 5, 6 oder 7 ergeben.

Kennt man die Bauweise der Tafel, so braucht man natürlich nicht bei 63 haltzumachen, sondern kann die Tafel beliebig weit fortsetzen. Für weitere Potenzen von 2 werden dabei natürlich auch immer neue Spalten benötigt.

Da wir nun das Binärsystem schon gut kennen, wollen wir jetzt ein Spiel spielen, das NIM heißt.
Wer den in dem Spiel verborgenen Trick nicht kennt und um Geld spielt, kann sicher viel Geld einbüßen.

Das Spiel wird von zwei Personen gespielt, nennen wir sie A und B. Sie schütten eine Menge Streichhölzer auf den Tisch und schichten sie zu einzelnen Haufen auf. Jeder Haufen enthält beliebig viele Streichhölzer, und auch die Anzahl der Haufen ist beliebig.

Sagen wir, A eröffnet das Spiel. Er nimmt von einem Haufen eine gewisse Anzahl Streichhölzer weg. Von jedem beliebigen Haufen kann er Streichhölzer nehmen, aber nur von einem.
Er kann so viel wegnehmen, wie er will (sogar den ganzen Haufen), wenigstens ein Streichholz muss er aber unbedingt wegnehmen. Danach folgt B, der ebenso verfährt wie A. Derjenige verliert, der das letzte Streichholz nehmen muss.

Die erste Frage, die interessiert, ist die, ob es in diesem Spiel »Gewinnstellungen« gibt, d. h. solche Stellungen, bei denen A, wenn er gerade an der Reihe ist, sicher den Sieg erzwingen kann.

Wir werden nachweisen, dass solche Gewinnstellungen existieren, und wenn A gerade dann dran ist, wenn es zu einer solchen Gewinnstellung gekommen ist, so kann er den Sieg erzwingen. Ist jedoch umgekehrt für B eine solche Gewinnstellung entstanden, wenn A ziehen muss, dann kann A den Sieg nicht erzwingen, wenn B immer richtig spielt.
Wenn freilich B auch nur einmal den richtigen Zug verpasst (und wenn er das Spiel nicht kennt, ist die Wahrscheinlichkeit hierfür groß), so kann A gewinnen, aber nur in diesem Falle. Wenn B immer unbedingt richtig spielt, dann verliert A im vorliegenden Falle.

Wir wollen als Beispiel einige einfache Gewinnstellungen für denjenigen anschauen, der gezogen hat. Das sind also für denjenigen, der am Zuge ist, Verliererstellungen.

I. Stellung	im 1. Haufen	2 Streichhölzer	im 2. Haufen	2 Streichhölzer
II. Stellung	im 1. Haufen	3 Streichhölzer	im 2. Haufen	3 Streichhölzer
III. Stellung	im 1. Haufen	3 Streichhölzer	im 2. Haufen	2 Streichhölzer
	im 3. Haufen	1 Streichholz		
IV. Stellung	im 1. Haufen	2 Streichhölzer	im 2. Haufen	2 Streichhölzer
	im 3. Haufen	2 Streichhölzer	im 4. Haufen	2 Streichhölzer

Wir verfolgen das Spiel vom Standpunkt von A aus. Wir behaupten, dass die genannten Fälle, unabhängig davon, was B für einen Zug tut, wenn B als nächster dran ist, Gewinnstellungen für A sind.

I. Stellung

a) Wenn B von einem beliebigen Haufen ein Streichholz nimmt, so nimmt A den anderen Haufen weg. Somit muss B unbedingt das verbleibende einzige Streichholz nehmen, A hat also gewonnen.

b) Wenn B den einen Haufen ganz wegnimmt, so nimmt A von dem anderen Haufen ein Streichholz, B bleibt also wiederum nichts anderes übrig, als das einzige verbliebene Streichholz wegzunehmen, A hat also wieder gewonnen.

II. Stellung

a) Wenn B von irgendeinem Haufen ein Streichholz wegnimmt, so nimmt A von dem anderen Haufen ein Streichholz weg. Wenn B wieder am Zuge ist, befinden sich also auf beiden Haufen zwei Streichhölzer, es liegt somit die I. Stellung vor.

b) Wenn B von irgendeinem Haufen zwei Streichhölzer wegnimmt, so nimmt A den anderen Haufen ganz weg. B muss also das einzige verbliebene Streichholz nehmen, und A hat gewonnen.

c) Wenn B den einen Haufen ganz wegnimmt, so nimmt A von dem anderen Haufen zwei Streichhölzer, B muss also das einzige verbliebene Streichholz nehmen, und A hat wiederum gewonnen.

III. Stellung

a) Wenn B den ganzen ersten Haufen wegnimmt, so nimmt A den ganzen zweiten Haufen.

b) Wenn B von dem ersten Haufen zwei Streichhölzer wegnimmt, so nimmt A von dem zweiten Haufen ein Streichholz. In allen Haufen bleibt dann je ein einziges Streichholz übrig. Da es drei Haufen gibt und B am Zuge ist, nimmt er ein Streichholz weg. Daraufhin tut A das gleiche, daraufhin wieder B, das letzte nimmt also wiederum B.

c) Wenn B ein Streichholz von dem ersten Haufen nimmt, so nimmt A den dritten Haufen weg; damit liegt wiederum die I. Stellung vor.

d) Wenn B den zweiten Haufen nimmt, so nimmt A den ersten Haufen weg.

e) Wenn B von dem zweiten Haufen ein Streichholz wegnimmt, so nimmt A von dem ersten Haufen zwei Streichhölzer. Wir gelangen somit zu dem Fall b).

f) Wenn B den dritten Haufen wegnimmt, so nimmt A ein Streichholz von dem ersten Haufen. Wir gelangen somit zu der Situation der Stellung I. Damit haben wir erkannt, dass A immer gewinnt.

IV. Stellung

a) Wenn B irgendeinen Haufen wegnimmt, so nimmt A einen anderen Haufen weg. Damit gelangen wir zu der Stellung I.

b) Wenn B von irgendeinem Haufen ein Streichholz wegnimmt, so nimmt A von einem anderen Haufen gleichfalls nur ein Streichholz.

α) Wenn B so fortfährt, dass er den einen aus einem Streichholz bestehenden Haufen wegnimmt, so nimmt A den anderen aus einem Streichholz bestehenden Haufen weg. Wir gelangen also zur I. Stellung.

β) Wenn B so fortfährt, dass er den einen aus zwei Streichhölzern bestehenden Haufen wegnimmt, so nimmt A von dem anderen aus zwei Streichhölzern bestehenden Haufen ein Streichholz, es tritt also der Fall b) der III. Stellung ein.

γ) Wenn B so fortfährt, dass er von dem einen aus zwei Streichhölzern bestehenden Haufen ein Streichholz wegnimmt, so nimmt A den anderen aus zwei Streichhölzern bestehenden Haufen weg, was letzten Endes wiederum auf Fall b) der III. Stellung führt.

Somit hat A wiederum gewonnen.
Nachdem wir bereits in einigen herausgegriffenen Fällen die richtige Taktik kennengelernt haben, wollen wir nunmehr allgemein die Gewinnstellungen untersuchen.

Wir schreiben zunächst in den vorausgegangenen untersuchten Spezialfällen die Anzahl der in den einzelnen Haufen liegenden Streichhölzer im Binärsystem auf. Danach addieren wir die letzten Ziffern, anschließend die vorletzten usw., d. h., wir addieren bei unserer im Binärsystem aufgeschriebenen Anzahl von Streichhölzern die Koeffizienten der entsprechenden Zweierpotenzen.
Danach schreiben wir die so gewonnenen Ergebnisse im Dezimalsystem auf und notieren sie der Einfachheit halber nebeneinander, so dass wir im weiteren von ihnen als »von den Stellen der Summe" sprechen können.

Wir merken an, dass wir jetzt unter »Stelle« eine im Dezimalsystem aufgeschriebene, aber nicht notwendig einstellige Zahl verstehen.

	I. Stellung	II. Stellung	III. Stellung	IV. Stellung
1. Haufen	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$	$\|\|\| \; 3_{10} = 11_2$	$\|\|\| \; 3_{10} = 11_2$	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$
2. Haufen	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$	$\|\|\| \; 3_{10} = 11_2$	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$
3. Haufen			$\| \; 1_{10} = 1_2$	$\|\| \; 2_{10} = 10_2$
4. Haufen				$\|\| \; 2_{10} = 10_2$
Summe	20	22	22	40

Wir stellen fest, dass jede Stelle der genannten Summe gerade ist, wenn B an der Reihe ist.
(Die Zahl 0 ist gerade, den es ist $0 = 2 \cdot 0$.)

Wir wollen einige Varianten der III. Stellung unter dem Gesichtspunkt analysieren, was nach dem Zug von B bis zum Schluss der Partie geschieht.

III. Stellung Variante a)

1. Haufen	$\|\|\| \; 11_2$	0_2	0_2	0_2
2. Haufen	$\|\| \; 10_2$	$\|\| \; 10_2$	0_2	0_2
3. Haufen	$\| \; 1_2$	$\| \; 1_2$	$\| \; 1_2$	0_2
Summe	22	11	1	0

III. Stellung Variante b)

1. Haufen	$\vert\vert\vert\ 11_2$	$\vert\ 1_2$	0_2	0_2	0_2
2. Haufen	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	0_2	0_2
3. Haufen	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	0_2
Summe	22	3	2	1	0

III. Stellung Variante c)

1. Haufen	$\vert\vert\vert\ 11_2$	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	0_2
2. Haufen	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\vert\ 10_2$	$\vert\vert\ 10_2$	0_2	0_2
3. Haufen	$\vert\ 1_2$	$\vert\ 1_2$	0_2	0_2	0_2	0_2
Summe	22	21	20	11	1	0

Wir können beobachten, dass B von irgendeinem Haufen beliebig viel wegnimmt und dabei verhindert, dass die einzelnen Stellen in der genannten Summe gerade Zahlen sind.
A zieht so, dass wieder alle Stellen gerade werden, es sei denn, dass sich einsame Streichhölzer in den Haufen befinden. Dann zieht er nämlich so, dass danach eine ungerade Anzahl von einsamen Streichhölzern bleibt.

Nachdem wir in einigen Beispielen die richtige Taktik untersucht haben, wollen wir jetzt allgemein die Gewinnstellungen angeben.

a) Wir nehmen an, dass jeder Haufen ein Streichholz enthält und dass die Anzahl der Haufen beliebig ist.

Es liegt auf der Hand, dass im Falle einer geraden Anzahl von Haufen stets der gewinnt, der anfängt, im Falle einer ungeraden Anzahl von Haufen verliert er.

b) Wir nehmen an, dass es genau einen Haufen gibt, der mehr als ein Streichholz enthält, während die Anzahl der Streichhölzer in den übrigen Haufen stets gleich Eins ist. Die Anzahl der Haufen sei wieder beliebig.

Wir behaupten, dass in diesem Falle stets der siegt, der anfängt, sofern er sich an die folgende richtige Taktik hält.

Wenn die Anzahl aller Haufen gerade ist, so nimmt er denjenigen Haufen ganz weg, in dem sich mehr als ein Streichholz befindet. Somit bleibt eine ungerade Anzahl von Haufen übrig, die nur einsame Streichhölzer enthalten. Wer jetzt am Zuge ist, verliert also nach Punkt a).
Wenn die Haufenzahl ungerade ist, so muss der, der anfängt, von dem einen Haufen, der mehr als ein Streichholz enthält, alle bis auf eines wegnehmen. Es bleibt also wiederum eine ungerade Anzahl von Haufen übrig, die nur einsame Streichhölzer enthalten. Der, der jetzt dran ist, muss also der obigen Überlegung nach verlieren.

c) Wir nehmen an, dass es wenigstens zwei Haufen gibt, die mehr als ein Streichholz enthalten. Die Anzahl der Haufen ist beliebig.

Wir schreiben die Anzahl der in den einzelnen Haufen befindlichen Streichhölzer im Binärsystem auf und addieren die Koeffizienten der entsprechenden Zweierpotenzen. Das Ergebnis der Addition schreiben wir im Dezimalsystem auf.
Auf Grund unserer Beispiele vermuten wir, dass derjenige, der beginnt, danach streben muss, dass nach seinem Zug jede Stelle der genannten Summe eine gerade Zahl wird.

Die erste Frage, die auftaucht, ist die, ob der, der beginnt, stets dieses Ziel erreichen kann, die zweite, ob bejahendenfalls der Sieg für ihn sicher ist. Auf unsere erste Frage ist die Antwort negativ. Wenn nämlich zu Beginn des Spieles alle Stellen der genannten Summe gerade sind, so wird diese Situation von dem, der anfängt, mit Notwendigkeit zerstört, unabhängig davon, wieviel er zieht und von welchem Haufen.

Nehmen wir zum Beispiel an, dass von irgendwo 1 Streichholz genommen wird.
Da $1 = 1 \cdot 2^0$ ist, nimmt also die Koeffizientensumme von 2^0 um 1 ab, d. h., die letzte Ziffer der genannten Summe wird von einer geraden Zahl in eine ungerade Zahl übergehen.
Jetzt mögen etwa 2 gezogen werden. Da $2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ ist, nimmt nun die vorletzte Ziffer in der Summe um 1 ab, sie wird also ungerade werden.

Wurde z. B. 3 gezogen, so ist $3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Es wird daher sowohl die letzte als auch die vorletzte Ziffer in der genannten Summe ungerade usw.

Also besteht auf alle Fälle die Voraussetzung dafür, dass der, der anfängt, sich eine Gewinnstellung sichern kann darin, dass er bereits zu Beginn eine solche Situation vorfindet, bei der wenigstens eine der Stellen der genannten Summe eine ungerade Zahl ist.

Wir haben jetzt nur noch zu untersuchen, ob dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, in jedem Falle der, der beginnt, auch den Sieg erringen kann, wenn er entsprechend spielt, und wie er sein Spiel einrichten muss.

Wie wir bei der Behandlung des Falles b) gesehen haben, besteht dort immer für den, der beginnt, die Möglichkeit zu gewinnen. Könnte es nicht etwa möglich sein, dass B, nachdem A gezogen hat und danach überall in der untersuchten Summe gerade Stellen stehen, die in b) genannte Situation vorfindet und somit nicht A, sondern B gewinnt? Dies ist nicht möglich. Wäre nämlich nur ein solcher Haufen geblieben, der mehr als ein Streichholz enthält, dann würde mindestens eine Stelle in der untersuchten Summe ungerade sein. Befänden sich nämlich in diesem Haufen z. B. 2 Streichhölzer, dann wäre wegen

$$2_{10} = 10_2$$

und wegen der einsamen Streichhölzer, die in den übrigen Haufen enthalten sind, in der Summe die zweite Stelle von hinten ungerade. Befänden sich in diesem Haufen beispielsweise drei Streichhölzer, dann würde wegen

$$3_{10} = 11_2$$

dasselbe gelten. Wären hierin vier Streichhölzer, dann müsste wegen

$$4_{10} = 100_2$$

in der Summe die dritte Stelle von hinten ungerade sein usw.
Also konnte ein solcher Fall nicht eintreten.

Wir wollen uns noch überlegen, was es für A bedeutet, »richtig« zu spielen.

Wenn wir wollen, dass eine ungerade Stelle in der Summe gerade wird, so können wir dies bequem dadurch erreichen, dass wir die betreffende Stelle um Eins vermindern oder vergrößern. Vermindern bedeutet, dass wir von irgendeinem Haufen so viele Streichhölzer nehmen, wie der Stellenwert der betreffenden Stelle im Binärsystem beträgt. Vergrößern würde bedeuten, dieselbe Anzahl von Streichhölzern zu einem gewissen Haufen hinzuzufügen. Das wird jedoch von der Spielregel nicht zugelassen.

Da wir beabsichtigen, durch Wegnahme von Streichhölzern von einem Haufen jede ungerade Stelle der Summe gerade zu machen, gehen wir folgendermaßen vor:

Wir wählen den größten Haufen, in dem die Zweierpotenz, die der allerersten ungeraden Stelle der Summe entspricht, mit dem Koeffizienten 1 auftritt. Diesen Haufen nennen wir Haupthaufen.
Danach sehen wir in diesem Haupthaufen nach, welche der Zweierpotenzen, die in der Summe mit ungerader Stelle auftreten, 1 und welche 0 als Koeffizienten haben. Für jeden Koeffizienten, der 1 ist, nehmen wir von dem Haupthaufen die entsprechende Zweierpotenz von Streichhölzern weg. Für jeden Koeffizienten, der 0 ist, fügen wir entsprechend viele von den weggenommenen Streichhölzern wieder dem Haufen hinzu.

Insgesamt ergibt sich, dass wir eine gewisse Anzahl von Streichhölzern wegzunehmen haben, denn der Koeffizient der größten Zweierpotenz war 1, die Summe der übrigen Zweierpotenzen ist dagegen kleiner.

Zum Beispiel ist $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$, während 2^4 bereits größer als 15 ist.
Natürlich führen wir die Wegnahme in einem Zug durch, das Obige geschieht nur in Gedanken.

Zur Illustration wollen wir uns die folgende Partie bis zum Schluss anschauen.

	vor dem Zug von A	nach dem Zug von A
1. Haufen	$2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ $26_{10} = 11010_2$	$2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ $19_{10} = 10011_2$
2. Haufen	$22_{10} = 10110_2$	10110_2
3. Haufen	$15_{10} = 1111_2$	1111_2
4. Haufen	$13_{10} = 1101_2$	1101_2
5. Haufen	$7_{10} = 111_2$	111_2
Summe	2 3 4 4 3	2 2 4 4 4

Grundmenge ist gegenwärtig der erste Haufen. Hiervon nehmen wir $2^3 = 8$ Streichhölzer weg und legen $2^0 = 1$ zurück. Mit anderen Worten, wir nehmen eigentlich 7 Streichhölzer.
Wie wir schon gesehen haben, kann B tun, was er will, stets ist nach seinem Zug eine der Stellen der Summe eine ungerade Zahl, so dass A analog wie zu Beginn vorgehen kann. Schließlich gewinnt auch A.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass der Spieler A im Falle c) dann und nur dann den Sieg erzwingen kann, wenn er zu Beginn eine solche Lage vorfindet, bei der von den Stellen der schon mehrmals genannten »Summe« wenigstens eine Zahl ungerade ist.

Im umgekehrten Falle entsteht die gewünschte Gewinnstellung, unabhängig davon, wie A beginnt, gerade für den Spieler B; wenn B richtig spielt, dann ist er es also, der den Sieg erzwingen kann.

Da sich der Fall beliebig vieler in beliebig vielen Haufen angeordneter Streichhölzer in einen der behandelten Fälle a), b) bzw. c) einordnen lässt, können wir getrost sagen, dass wir uns mit der Analyse des NIM-Spiels vertraut gemacht haben, dass es also für uns kein Glücksspiel mehr ist.

8 Die Königsberger Brücken, die neun Fußwege und andere graphentheoretische Probleme

Tibor Gallai

8.1 Königsberger Brücken. Eulersche Linie

In den dreißiger Jahren des 18. Jahrhunderts wurde von den Bürgern der Stadt Königsberg, heute Kaliningrad, folgende Frage aufgeworfen:
Der Pregel bildet beim Zusammenfluss des alten und des neuen Pregel eine Insel, und hier befanden sich seinerzeit 7 Brücken (Abb. 53). Gibt es eine Reihenfolge, in der man die einzelnen Brücken durchlaufen kann, um jede Brücke einmal und nur einmal zu passieren?
Diese Frage muss verneint werden; man kann die Brücken nicht in dieser Weise begehen. Wir wollen jetzt überlegen, warum.

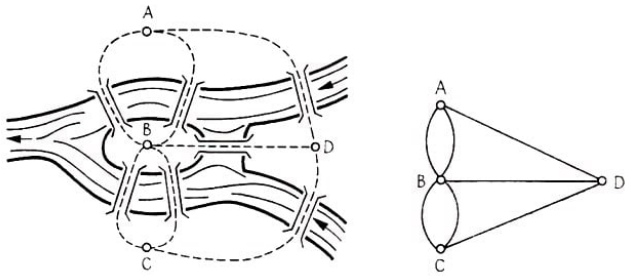


Abb. 53,54

Zunächst ersetzen wir die Landkartenskizze durch ein einfacheres Bild. Wir versinnbildlichen jedes Ufer durch je einen Punkt (A, B, C, D), die Brücken dagegen durch je eine Linie, die die Punkte verbindet (Abb. 54).
Das auf diese Weise entstandene Abbild heißt Graph. Hierin kommt es auf die Lage der Punkte und die Form der Linien nicht an. Wichtig ist nur, welche zwei Punkte durch wieviel Linien verbunden sind. A, B, C, D sind die Knotenpunkte oder Ecken des Graphen (wir werden sie im weiteren meist nur Punkte nennen); die Verbindungslinien der Knotenpunkte sind die Kanten des Graphen. (Von einer Kante sind nur die Endpunkte Knotenpunkte !)

Unser Problem können wir jetzt folgendermaßen formulieren: Wie kann man, ohne den Bleistift zwischendurch abzuheben, so auf den Kanten des Graphen entlangfahren, dass hierbei jede Kante einmal und nur einmal durchlaufen wird; oder noch kürzer, wie kann man die Abbildung in einer einzigen zusammenhängenden Linie zeichnen?

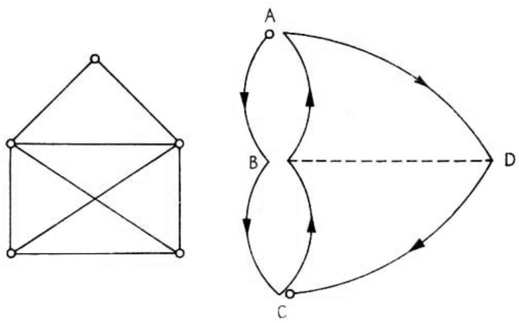


Abb. 55,56

Ähnlich hierzu ist die wohlbekannte Aufgabe, das in Abb. 55 dargestellte »Haus« in einem einzigen Zug zu zeichnen. In diesem Falle besteht der Graph aus 5 Knotenpunkten und 8 Kanten. (Den Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks sehen wir also nicht als Knotenpunkt an; es ist nicht erlaubt, wenn man dort vorbeiläuft, die Richtung zu wechseln; die vollständigen Diagonalen bilden nur eine einzige Kante.)

Versucht man, Abb. 54 in einem Zuge zu zeichnen, so schafft man das bis auf eine Kante. Wir beobachten dabei, dass wir in einem Punkt, der weder Anfangs- noch Endpunkt ist (B und D), ebensooft einlaufen wie auslaufen. In einem Anfangspunkt (A) laufen wir einmal mehr aus als ein, in einem Endpunkt (C) dagegen einmal mehr ein als aus. Es ist nicht schwer, sich zu überlegen, dass diese Feststellungen von uns nicht nur für Abb. 56, sondern auch für jeden durch eine einzige Linie gezeichneten Graphen gelten, bei dem der Anfangspunkt der Linie nicht mit ihrem Endpunkt zusammenfällt.

Der Kürze halber wollen wir eine Linie offen nennen, wenn bei ihr Anfangs- und Endpunkt verschieden sind, geschlossen soll sie dagegen heißen, wenn diese beiden Punkte zusammenfallen. Dann folgt aus unseren Feststellungen, dass in jedem durch eine offene Linie gezeichneten Graphen in den Punkten, die von dem Anfangs- und Endpunkt verschieden sind, eine gerade Anzahl von Kanten zusammenstößt, in dem Anfangs- und Endpunkt dagegen eine ungerade Anzahl.
Die Anzahl der Kanten, die von einem Punkt ausgehen, heißt der Grad oder die Ordnung des Punktes. Einen Punkt, dessen Grad gerade bzw. ungerade ist, werden wir kurz selbst gerade bzw. ungerade nennen. Dann können wir das obige Ergebnis folgendermaßen formulieren:

In einem durch eine einzige offene Linie gezeichneten Graphen sind der Anfangs- und der Endpunkt ungerade, die übrigen Punkte dagegen gerade.

Ebenso ist auch die folgende Behauptung einzusehen:

In einem durch eine einzige geschlossene Linie gezeichneten Graphen ist jeder Punkt gerade.

Auf Grund unserer Sätze stellen wir fest, dass sich der Graph der Königsberger Brücken (Abb. 54) weder durch eine geschlossene noch durch eine offene Linie zeichnen lässt. In diesem Graphen sind nämlich alle vier Punkte gerade. Der Graph von Abb. 55 lässt sich nicht durch eine geschlossene Linie zeichnen, weil die beiden unteren Punkte ungerade sind. Falls er durch eine offene Linie gezeichnet werden kann, so müssen die beiden unteren Punkte Anfangs- und Endpunkt sein.

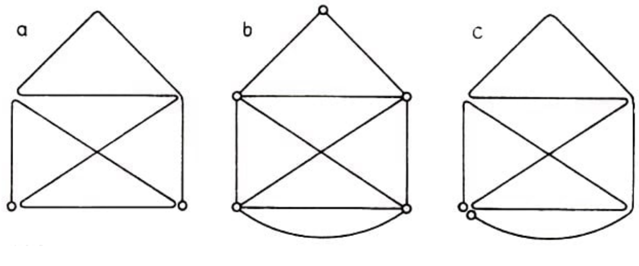


Abb. 57

Nach einigen Versuchen gelingt es in der Tat, eine entsprechende offene Linie zu finden (Abb. 57a). Verbinden wir die beiden unteren Punkte noch durch eine weitere Kante, dann ist in dem neuen Graphen (Abb. 57b) jeder Punkt gerade, und an Hand von Abb. 57a kann man sofort erkennen, dass sich der neue Graph durch eine einzige geschlossene Linie zeichnen lässt (Abb. 57c).

Aus dem Gesagten lässt sich der folgende, auf Euler zurückgehende Satz vermuten (auf den Beweis des Satzes verzichten wir hier):

Jeder endliche und zusammenhängende Graph, der lauter gerade Punkte enthält, lässt sich mit einer einzigen geschlossenen Linie zeichnen.

Dass der Graph zusammenhängend ist, ist offensichtlich notwendig dafür, damit man ihn mit einer einzigen Linie zeichnen kann. (Aus Abb. 58 ist zu ersehen, dass sich ein Graph, der aus zwei getrennt liegenden Dreiecken besteht, nicht mit einer einzigen Linie zeichnen lässt.)

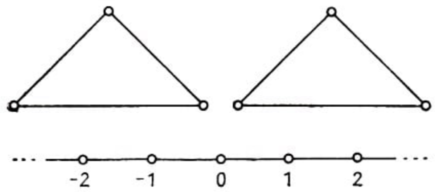


Abb. 58,59

Man muss auch voraussetzen, dass der Graph endlich ist (endlich heißt ein Graph, wenn er endlich viele Kanten und endlich viele Knotenpunkte besitzt), denn jede geschlossene und jede offene Linie besteht aus endlich vielen Kanten, ein unendlicher Graph enthält dagegen im allgemeinen unendlich viele Kanten.
Die Knotenpunkte des Graphen in Abb. 59 sind die zu den ganzen Zahlen gehörenden Punkte der Zahlengeraden, seine Kanten die Verbindungsstrecken benachbarter ganzer Zahlen.
In Abb. 60 haben wir den Graphen des »unendlich ausgedehnten karierten Papiers« oder vielmehr einen Teil davon dargestellt.

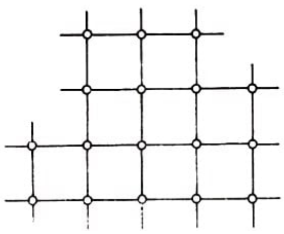


Abb. 60

Wir erwähnen, dass solche geschlossenen Linien, die alle Kanten eines Graphen enthalten, Eulersche Linien des Graphen heißen.

Wir können aus dem Eulerschen Satz schließen, dass sich zusammenhängende und endliche Graphen, die zwei ungerade Punkte enthalten, während alle übrigen Punkte gerade sind, in einem Zug zeichnen lassen. Wir brauchen nämlich in einem solchen Graphen nur die beiden ungeraden Punkte durch eine neue Kante zu verbinden und gelangen damit zu einem zusammenhängenden und endlichen Graphen, in dem alle Punkte gerade sind (vgl. Abb. 55 und Abb. 57a).
Dem Eulerschen Satz zufolge lässt sich dieser mit einer einzigen geschlossenen Linie zeichnen (Abb. 57c).

Lassen wir von dieser geschlossenen Linie die neue Kante weg, so bleibt eine offene Linie zurück, die jede Kante des ursprünglichen Graphen enthält und deren Anfangs- und Endpunkt die beiden ungeraden Punkte sind (Abb. 57a). Damit haben wir die folgende Aussage bewiesen:

Jeder endliche und zusammenhängende Graph, der zwei ungerade Punkte enthält, während die übrigen Punkte gerade sind, lässt sich in einer einzigen offenen Linie zeichnen. Anfangs- und Endpunkt der offenen Linie sind die beiden ungeraden Punkte.

Mit ähnlichen Überlegungen lässt sich aus dem Eulerschen Satz auch der folgende allgemeinere Satz herleiten:

Wenn in einem endlichen und zusammenhängenden Graphen die Anzahl der ungeraden Punkte von der Form $2k$ ist (k beliebige positive ganze Zahl), so lässt sich der Graph mit k offenen Linien zeichnen. Anfangs- und Endpunkt jeder dieser offenen Linien ist je ein ungerader Punkt.

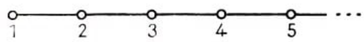
Es ist auch nicht schwer einzusehen, dass sich ein Graph mit der genannten Eigenschaft nicht mit weniger als k Linien zeichnen lässt. (Beispielsweise kann der Graph von Abb. 52 mit zwei Linien, aber nicht in einer Linie gezeichnet werden.)

Mit den genannten Sätzen haben wir jeden endlichen und zusammenhängenden Graphen erfasst. Man kann nämlich leicht zeigen, dass ein endlicher Graph nicht 1 oder 3 oder 5, .. ungerade Punkte enthalten kann. Mit anderen Worten:

In jedem endlichen Graphen ist die Anzahl der ungeraden Punkte gerade.

Die Forderung der Endlichkeit ist wesentlich, denn der Graph beispielsweise, dessen Knotenpunkte die den positiven ganzen Zahlen entsprechenden Punkte der Zahlengeraden und dessen Kanten die Verbindungsstrecken dieser Punkte der Zahlengeraden sind, enthält einen einzigen ungeraden Punkt (Abb. 61).

Abb. 61



Man kann für unendliche Graphen stattdessen die Frage aufwerfen, welche davon sich durch eine einzige nach beiden Richtungen unendliche Linie »zeichnen lassen«. Offensichtlich lässt sich auf diese Weise der Graph von Abb. 59 zeichnen.

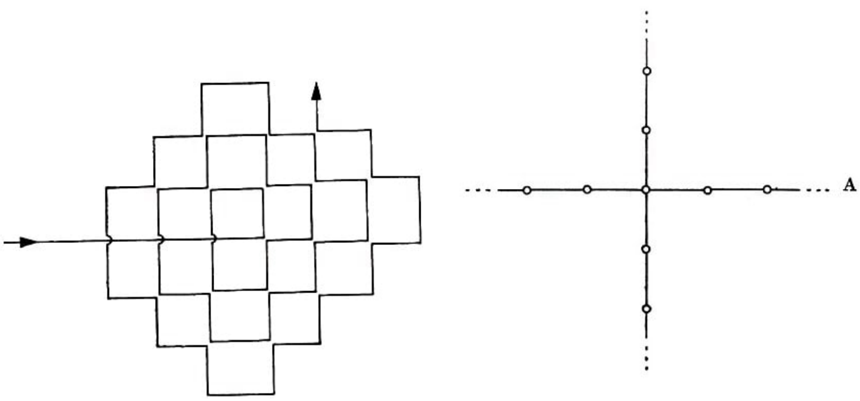


Abb. 62,63

Aus Abb. 62 geht hervor, dass es sich mit dem Graphen von Abb. 60 ebenso verhält. Auch hier ist für die Möglichkeit, den Graphen zu zeichnen, notwendig, dass er zusammenhängend ist und dass alle seine Punkte gerade sind (wir setzen voraus, dass in jedem Punkt nur endlich viele Kanten zusammenstoßen).

Der Graph von Abb. 63 hat als Knotenpunkte die Punkte mit ganzen Koordinaten, die auf den beiden Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegen, während seine Kanten von den Verbindungsstrecken dieser Punkte auf den Achsen gebildet werden.
Dieser Graph zeigt jedoch, dass die Erfüllung dieser beiden Bedingungen nicht ausreicht, um zu garantieren, dass sich ein unendlicher Graph auf die gewünschte Weise zeichnen lässt. Man kann auch notwendige und hinreichende Bedingungen für die Möglichkeit, ihn zu zeichnen, angeben. Diese sind jedoch komplizierter.

8.2 Hamiltonsche Linie. Quadratische Faktoren

Die Linien, die in den bis jetzt behandelten Problemen auftraten, können sich »überkreuzen« (s. z. B. Abb. 57). In der Graphentheorie spielen auch die sich nicht selbst überkreuzenden Linien eine wichtige Rolle. Die geschlossenen unter ihnen heißen Kreiswege, kurz Kreise.
Wenn ein Kreis 3, 4, ... Kanten enthält, dann nennen wir ihn auch Dreieck, Viereck usw.
In Abb. 64 bilden die dick ausgezogenen Kanten einen Kreis (Sechseck), der durch jeden Knotenpunkt des Graphen geht. Ein solcher Kreis heißt Hamiltonsche Linie des Graphen.

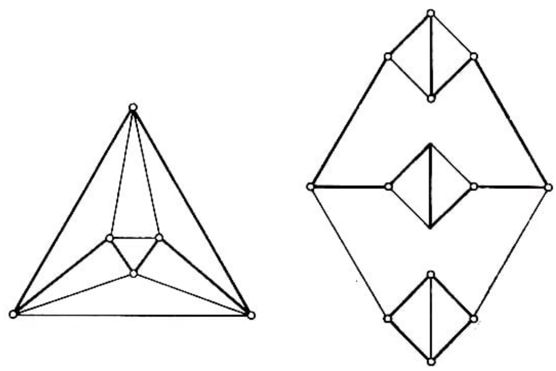


Abb. 64,65

Nicht jeder Graph besitzt eine Hamiltonsche Linie, z. B. hat der in Abb. 65 dargestellte Graph keine.
Wir kennen keine Bedingungen für die Existenz Hamiltonscher Linien, die sowohl notwendig als auch hinreichend sind. Im folgenden geben wir zwei einfach zu formulierende hinreichende Bedingungen an (ihr Beweis ist wesentlich schwerer als der des oben erwähnten Satzes von Euler).

Haben in einem Graphen alle Punkte einen Grad $\geq k$ (k beliebige ganze Zahl größer als 1) und enthält der Graph nicht mehr als $2k$ Punkte, so besitzt er eine Hamiltonsche Linie (Satz von Dirac).
(Dieser Satz lässt sich auf den Graphen von Abb. 64 anwenden.)

Ist ein Dreieck so in Dreiecke zerlegt, dass je zwei Dreiecke (das Ausgangsdreieck eingeschlossen) entweder keinen Punkt oder eine einzige Ecke oder eine einzige Kante gemein haben (s. Abb. 64), und ist ferner, vom Ausgangsdreieck abgesehen, innerhalb keines einzigen Dreiecks ein weiteres Dreieck enthalten (die Zerlegung von Abb. 66 ist nicht von dieser Art), so besitzt derjenige Graph, dessen Knotenpunkte die Ecken der Dreiecke und dessen Kanten die Dreiecksseiten sind, eine Hamiltonsche Linie (Satz von Whitney).

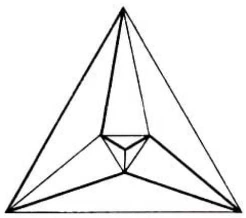


Abb. 66

Auch dieser Satz ist auf den Graphen von Abb. 64 anwendbar. In allen beiden Sätzen sind die Voraussetzungen nicht »notwendig«, es gibt also Graphen, die diesen Bedingungen nicht genügen und dennoch Hamiltonsche Linien besitzen. (Auch der Graph von Abb. 66 ist von dieser Art.)

Wir haben gesagt, dass der Graph von Abb. 65 keine Hamiltonsche Linie besitzt, dass sich also nicht sämtliche Knotenpunkte des Graphen in einem einzigen Kreis durchlaufen lassen. Man kann jedoch die Knotenpunkte in zwei Kreise eingliedern, die keine Punkte gemein haben. (Die dick ausgezogenen Kanten bilden zwei solche Kreise.)
Im Falle eines beliebigen Graphen heißt ein System von Kreisen, die zusammengenommen alle Knotenpunkte des Graphen enthalten, paarweise aber keine Punkte gemein haben, System quadratischer Faktoren des Graphen. (Auch die Hamiltonsche Linie ist ein quadratischer Faktor!)

Nicht alle Graphen besitzen quadratische Faktoren, auch nicht immer solche, in denen - wie im Falle des Graphen von Abb. 65 - jeder Punkt denselben Grad hat.
In dem in Abb. 67 dargestellten Graphen sind alle Punkte von drittem Grade, und trotzdem besitzt der Graph keinen quadratischen Faktor. Wie aus den unten ohne Beweis ausgesprochenen (auf Petersen zurückgehenden) Sätzen hervorgeht, wird durch die »Regularität« eines Graphen (d. h. durch die Forderung, dass jeder seiner Punkte denselben Grad hat) zusammen mit gewissen einfacheren ergänzenden Voraussetzungen garantiert, dass ein quadratischer Faktor existiert.

Wenn alle Punkte eines endlichen Graphen denselben Grad haben und wenn dieser Grad eine positive gerade Zahl ist, so besitzt der Graph einen quadratischen Faktor.
(Dieser Satz lässt sich z. B. auf den Graphen von Abb. 64 anwenden.)

Wenn alle Punkte eines endlichen und zusammenhängenden Graphen denselben Grad haben und dieser Grad eine ungerade Zahl größer als 1 ist und wenn ferner der Graph keine Brücke besitzt, so hat der Graph einen quadratischen Faktor. (Eine Kante eines zusammenhängenden Graphen heißt Brücke, wenn der Graph nach Tilgung dieser Kante in zwei nichtzusammenhängende Teile zerfällt.)

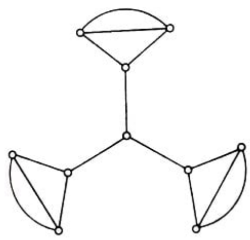


Abb. 67

Der Graph von Abb. 67 besitzt drei Brücken. Der letztere Satz ist auf den Graphen von Abb. 65 anwendbar.

Wir fügen noch hinzu, dass es für die Existenz eines quadratischen Faktors nicht notwendig ist, dass die Bedingungen der beiden letzten Sätze erfüllt sind. So besitzt z. B. der Graph von Abb. 53 einen quadratischen Faktor, obgleich er nicht die Voraussetzungen dieser Sätze erfüllt.

8.3 Elektrische Netzwerke

In der Anwendung der Graphentheorie auf die Elektrotechnik kommt es besonders darauf an, die Kreise von Graphen zu untersuchen. In den 40er Jahren des vergangenen Jahrhunderts hat Kirchhoff die Grundlagen für die rechnerische Behandlung von elektrischen Netzwerken ausgearbeitet. Hierbei hat er von einigen Eigenschaften der Kreise von Graphen Gebrauch gemacht.
Die Zweige eines elektrischen Netzwerks lassen sich als die Kanten, ihre Verbindungspunkte als die Knotenpunkte eines Graphen ansehen.

Im folgenden soll es nur um solche Netzwerke gehen, in denen nur Ohmsche Widerstände (z. B. Glühlampen) und Batterien (z. B. Taschenlampenelemente) vorkommen. In Abb. 68 ist ein aus 6 Zweigen und 4 Knotenpunkten bestehendes Netz dargestellt.

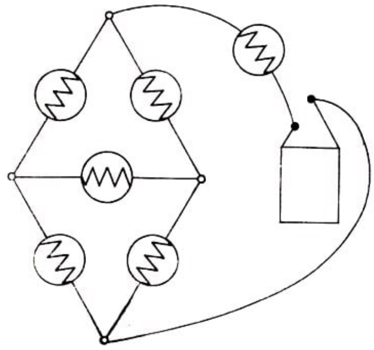


Abb. 68

Nur in einem einzigen Zweig befindet sich eine Batterie. Ihre elektromotorische Kraft (Spannung) bezeichnen wir mit E (bei einer Taschenlampenbatterie sind das 4,5 Volt). Der Widerstand des Zweiges, den die Batterie enthält (der Innenwiderstand der Batterie eingeschlossen), sei R_0 (gemessen in Ohm), die Größe der in den übrigen Zweigen liegenden Widerstände sei der Reihe nach R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5.

In Abb. 69 haben wir die Kreise, die zur Bezeichnung der Glühlampen dienen, weggelassen und nur den Widerstandswert neben die betreffende Kante des Graphen geschrieben, statt der Zeichnung des Elements dagegen das übliche Schaltzeichen verwendet.

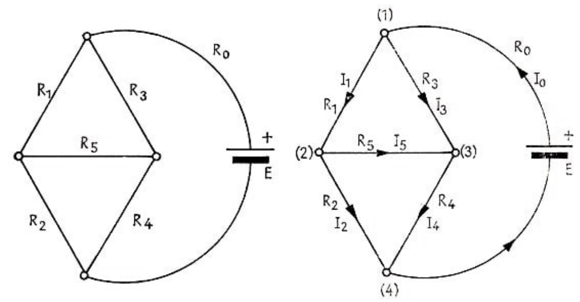


Abb. 69,70

In der einfachsten Rechenaufgabe sind die Spannung E und die Größen der Widerstände R_0, R_1, ..., R_5 vorgegeben und hieraus die in den einzelnen Zweigen fließenden Stromstärken sowie die Stromrichtungen zu bestimmen. Wir wollen im weiteren zeigen, wie durch die Untersuchung der Eigenschaften des Netzwerkgraphen die Bestimmung der Stromstärken erleichtert wird.

Die Ermittlung der Stromrichtungen bereitet keine besondere Mühe. Wir nehmen nämlich in jedem einzelnen Kreis beliebig je eine Stromrichtung an und betrachten damit zusammen die zu bestimmenden Stromstärken I_0, I_1, ..., I_5 als vorzeichenbehaftete (positive oder negative) Größen, indem wir die Stromstärke (etwa I_1) als positiv ansehen, wenn in dem betreffenden Zweig (etwa R_1) die tatsächliche Stromrichtung mit der angenommenen Richtung übereinstimmt, und als negativ, wenn sie entgegengesetzt dazu ist (Abb. 70).
Wenn z. B. die Rechnungen den Wert $I_1 = -0{,}5$ Ampere ergeben, so zeigt die tatsächliche Stromrichtung in dem Zweig R_1 vom Knotenpunkt (2) nach (1).

Wir haben 6 Unbekannte $(I_0, I_1, ..., I_5)$ zu bestimmen. Hierzu benötigen wir 6 Gleichungen, und zwar solche 6 Gleichungen, die voneinander unabhängig sind, d. h., bei denen keine aus den übrigen fünf »folgt«.
(Aus den Gleichungen $x + y = 5$ und $2x + 2y = 10$ zum Beispiel kann man die Unbekannten x und y nicht eindeutig ausrechnen. Diese Gleichungen sind nicht voneinander unabhängig, die zweite sagt im Vergleich zur ersten »nichts Neues« aus; jedes Zahlenpaar x,y das die erste erfüllt, genügt auch der zweiten.)

Die Gleichungen kann man auf Grund der sogenannten Kirchhoffschen Gesetze aufschreiben. Das erste Gesetz sagt aus, dass für jeden Knotenpunkt die Summe der Intensitäten der zufließenden Ströme gleich der der abfließenden ist. Auf Grund dessen können wir zu jedem Knotenpunkt je eine Gleichung aufschreiben:

$$I_0 = I_1 + I_3 \tag{1}$$
$$I_1 = I_2 + I_5 \tag{2}$$
$$I_3 + I_5 = I_4 \tag{3}$$
$$I_2 + I_4 = I_0 \tag{4}$$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz bezieht sich auf die Kreise des Netzes (und ist im wesentlichen eine einfache Folgerung aus dem Ohmschen Gesetz). Wir wählen in dem Graphen einen Kreis und versehen ihn mit einer beliebigen Durchlaufrichtung (gestrichelte Linien in Abb. 71).

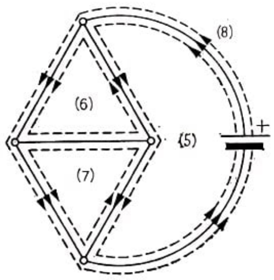


Abb. 71

Den Widerstand jedes einzelnen in dem Kreis liegenden Zweiges (jeder Kante) multiplizieren wir mit der in dem Zweig fließenden Stromstärke und versehen diese Produkte mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem, ob die Richtung des Zweiges mit der Durchlaufrichtung des Kreises übereinstimmt oder entgegengesetzt dazu ist. Dem Kirchhoffschen Gesetz zufolge ist dann die Summe der so erhaltenen Werte gleich der Summe der (mit entsprechenden Vorzeichen versehenen) Spannungen der in den Zweigen des Kreises befindlichen Batterien.

In Abb. 71 haben wir vier gerichtete Kreise angegeben. Die hierzu gehörenden Gleichungen lauten:

$$R_0I_0 + R_3I_3 + R_4I_4 = E \tag{5}$$
$$R_1I_1 + R_5I_5 - R_3I_3 = 0 \tag{6}$$
$$R_2I_2 - R_4I_4 - R_5I_5 = 0 \tag{7}$$
$$R_0I_0 + R_1I_1 + R_2I_2 = E \tag{8}$$

(Ändert man die Durchlaufrichtung eines Kreises ab, so kehrt sich das Vorzeichen der Glieder in der zu dem Kreis gehörenden Gleichung um.)
Wenn wir von der Durchlaufrichtung absehen, so besitzt unser Graph außer den angegebenen 4 Kreisen (die allesamt Dreiecke sind) noch drei weitere Kreise (und zwar Vierecke, s. Abb. 72).

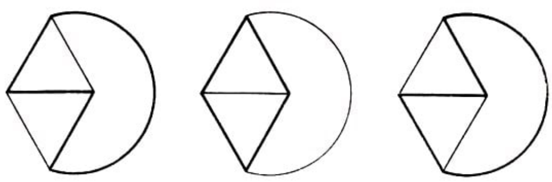


Abb. 72

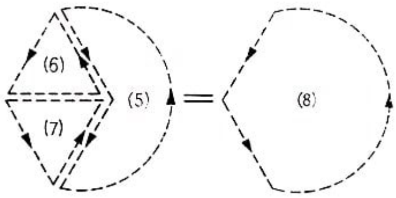
Nachdem wir sie orientiert haben, können wir auch zu ihnen je eine Gleichung aufschreiben. Somit verfügen wir über 7 Kreisgleichungen und 4 Knotenpunktgleichungen, also über insgesamt 11 Gleichungen. Von diesen müssen wir 6 unabhängige auswählen. Hierbei können nicht alle vier Knotenpunktgleichungen auftreten. Man überzeugt sich nämlich leicht davon, dass sich die vierte davon gerade durch Addition der ersten drei ergibt. Es können aber auch nicht alle vier aufgeschriebenen Kreisgleichungen auftreten, weil auch hier die Summe der ersten drei gleich der vierten, der Gleichung (8), ist.

Von den Knotenpunktgleichungen kann man feststellen, dass je drei von ihnen unabhängig voneinander sind. Es gilt sogar allgemein für ein beliebiges zusammengesetztes Netz, das p Knotenpunkte enthält, dass die zu $(p-1)$ beliebigen Knotenpunkten gehörigen Gleichungen voneinander unabhängig sind (während die zu dem p-ten Knotenpunkt gehörigen aus den übrigen folgt).

Schwerer ist es, von den 7 Kreisgleichungen 3 unabhängige auszuwählen (mit den 3 Knotenpunktgleichungen zusammen würden wir auf diese Weise zu 6 unabhängigen Gleichungen gelangen). Unser Hauptziel besteht gerade darin, durch unser Beispiel zu zeigen, wie man durch die Untersuchung des Netzwerkgraphen die erforderliche Anzahl entsprechender Kreise auswählen kann (auch im Falle eines beliebigen Netzes).

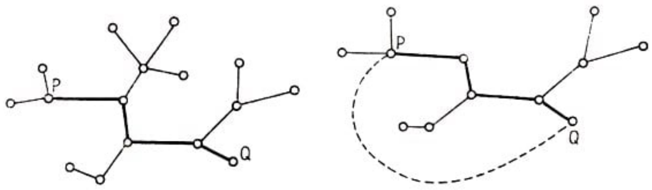
Der Grund für die zwischen den Kreisgleichungen bestehenden Beziehungen ist in dem Zusammenhang zu suchen, der zwischen den gerichteten Kreisen des Graphen besteht. Dass die Summe der mit (5), (6) und (7) bezeichneten Gleichungen gerade die Gleichung (8) ergibt, geht aus Abb. 73 hervor, wenn wir die auf der linken Seite davon entgegengesetzt durchlaufenen Kanten als »vernichtet« ansehen.

Abb. 73



Dementsprechend genügt es, statt der zwischen den Gleichungen bestehenden Beziehungen die Zusammenhänge zwischen den Kreisen des Graphen zu untersuchen. Hierzu müssen wir zunächst einige Eigenschaften solcher Graphen kennen, in denen es überhaupt keinen Kreis gibt.

Abb. 74,75



Da die Zeichnung zusammenhängender kreisloser Graphen einem Baum ähnelt, nennen wir solche Graphen auch Bäume (Abb. 74). Auf Grund der Anschauung sind die folgenden Eigenschaften von Bäumen offensichtlich:

1. Zwei Punkte eines Baumes lassen sich durch genau einen Weg verbinden, der aus Kanten des Baumes besteht. (In Abb. 74 ist durch die dick ausgezogenen Kanten der Verbindungsweg der Punkte P und Q bezeichnet.)

2. Verbinden wir zwei Punkte eines Baumes durch eine neue Kante, so entsteht ein Graph, der genau einen Kreis enthält (Abb. 75).

3. Jeder Baum enthält Endkanten (Endkante ist eine Kante, von der ein Endpunkt nur zu dieser Kante gehört).

Aus der Eigenschaft 3 folgt leicht, dass wir bei sukzessivem Weglassen der Endkanten schließlich zu einem Baum gelangen, der nur aus einer Kante besteht.

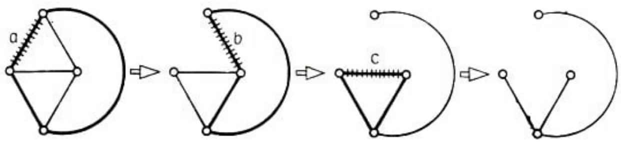
4. In jedem Baum ist die Anzahl der Punkte um 1 größer als die Anzahl der Kanten:

$$p = k + 1$$

p Anzahl der Punkte, k Anzahl der Kanten

Danach wollen wir nun einen beliebigen zusammenhängenden Graphen betrachten, der auch Kreise enthält (z. B. den Graphen von Abb. 69). Wenn wir von einem Kreis des Graphen irgendeine Kante weglassen, bleibt ein zusammenhängender Graph zurück, der noch alle Knotenpunkte des ursprünglichen Graphen enthält. Wiederholen wir dieses Tilgen von Kanten so lange, wie noch ein Kreis in dem Graphen vorhanden ist, so gelangen wir zu einem kreislosen Graphen, der zusammenhängend ist und alle Knotenpunkte des ursprünglichen Graphen enthält (Abb. 76).

Abb. 76



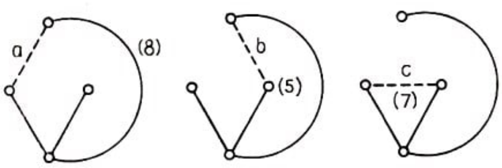
Der zurückbleibende Graph ist also ein Baum, der Teil des ursprünglichen Graphen ist und jeden Knotenpunkt desselben enthält. Ein solcher Baum heißt Gerüst des ursprünglichen Graphen. Ein Graph besitzt im allgemeinen viele Gerüste. (Wir können die Kreise und hierin die wegzulassenden Kanten auf vielerlei Weise auswählen.)

Jedes Gerüst besteht jedoch aus derselben Anzahl von Kanten, und zwar ist diese Anzahl um 1 kleiner als die Anzahl der Knotenpunkte des ursprünglichen Graphen. Man muss also von dem ursprünglichen Graphen stets dieselbe Anzahl, nämlich

$k-(p-1)$	
k	Anzahl der Kanten des ursprünglichen Graphen
p	Anzahl der Knotenpunkte des ursprünglichen Graphen
$p-1$	Anzahl der Kanten des Gerüsts

Kanten weglassen, damit ein Gerüst übrigbleibt. [In Abb. 76 ist $k=6$, $p=4$, $k-(p-1)=3$.]
Wegen der unter 3. genannten Eigenschaft der Bäume bekommen wir, wenn wir zu einem Gerüst eine beliebige der weggelassenen Kanten wieder hinzufügen, einen Graphen, der genau einen Kreis enthält.

Abb. 77



Also bestimmt jede weggelassene Kante zusammen mit dem Gerüst genau einen Kreis des ursprünglichen Graphen (Abb. 77). Man kann beweisen, dass ein Gerüst und die hierzu gehörenden weggelassenen Kanten gerade solche Kreise bestimmen, für die die zugehörigen Gleichungen unabhängig sind. Auf diese Weise kann man mit Hilfe jedes Gerüsts

$$k-(p-1)$$

unabhängige Kreisgleichungen auswählen. Man kann beweisen, dass diese zusammen mit $(p-1)$ Knotenpunktgleichungen ein Gleichungssystem bilden, in dem keine Gleichung Folgerung der übrigen ist. Wir gelangen nun gerade zu

$$k-(p-1)+(p-1)=k$$

unabhängigen Gleichungen, zu ebenso vielen Gleichungen also, wie es in dem Graphen Kanten gibt, d. h., die Anzahl der Gleichungen ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Stromstärken. Aus diesen Gleichungen lassen sich die Stromstärken berechnen, in unserem Beispiel aus den Gleichungen (8), (5), (7), (1), (2) und (3).

Das Problem der zänkischen Nachbarn (Problem der 9 Fußwege oder der drei Häuser und drei Brunnen).

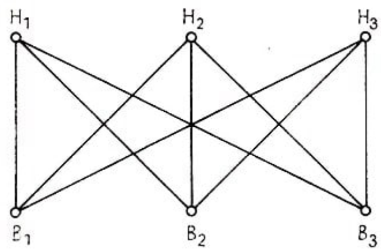


Abb. 78

Von drei Häusern sollen nach drei Brunnen neun Fußwege so angelegt werden, dass von jedem Haus nach jedem Brunnen je ein Fußweg führt und die Fußwege einander nicht kreuzen. Wenn wir die Häuser und Brunnen durch je einen Punkt und die Fußwege durch je eine Linie veranschaulichen, dann besteht unsere Aufgabe darin, den in Abb. 78 dargestellten »3-Häuser-3-Brunnen-Graphen« so zu zeichnen, dass keine zwei der Kanten einander kreuzen. (Der Graph besteht aus 6 Knotenpunkten und 9 Kanten.)

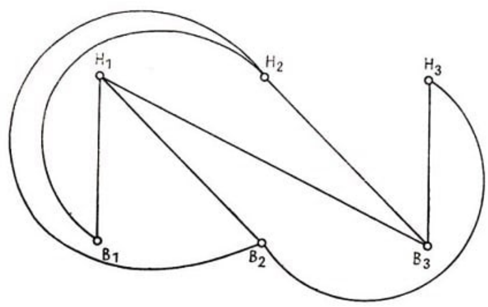
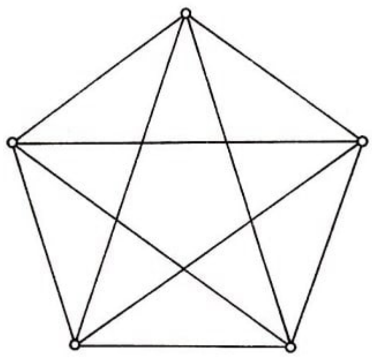


Abb. 79

Aus Abb. 79 geht hervor, dass man acht »Fußwege« noch ohne Kreuzung anlegen kann. Auf dieser Abbildung kann man die fehlende neunte Kante, die Kante H_3B_1, nur so einzeichnen, dass sie eine der bereits gezeichneten Kanten schneidet.
Man kann beweisen, dass es gar nicht anders möglich ist, alle 9 Kanten so in der Ebene zu zeichnen, dass wenigstens zwei von ihnen einander nicht schneiden. Wir können dies kurz so ausdrücken:

Der 3-Häuser-3-Brunnen-Graph ist nicht planar (er lässt sich nicht in der Ebene zeichnen). Es ist auch nicht möglich, diesen Graphen ohne Schnitte auf der Kugeloberfläche zu zeichnen. Es ist jedoch nicht schwer einzusehen, dass sich der 3-Häuser-3-Brunnen-Graph auf einer Ringfläche (Rettungsring) sowie auf einem Möbiusschen Band (einem einmal verdrehten Streifen; siehe den Artikel »Knifflige Flächen« und den über die Färbung von Landkarten) so zeichnen lässt, dass die 9 Kanten einander nicht kreuzen. In dem Artikel über die Färbung von Landkarten kommt der Graph des »vollständigen Fünfecks« vor (Abb. 80).

Dieser enthält fünf Knotenpunkte, und jeder Knotenpunkt ist mit den übrigen vier durch je eine Kante verbunden. Dieser Graph lässt sich weder in der Ebene noch auf der Kugeloberfläche, aber auch nicht auf den eben genannten Flächen so zeichnen, dass seine Kanten einander nicht schneiden.



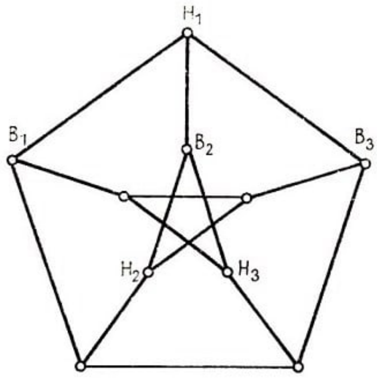


Abb. 80,81

Der 3-Häuser-3-Brunnen-Graph und der Graph des vollständigen Fünfecks sind die »einfachsten« Graphen, die sich nicht in der Ebene zeichnen lassen (nichtplanare Graphen). Man kann nachweisen, dass jeder nichtplanare Graph einen Teilgraphen enthält, der entweder »ähnlich« wie der 3-Häuser-3-Brunnen-Graph oder wie der Graph des vollständigen Fünfecks aufgebaut ist (Satz von Kuratowski). In Abb. 81 haben wir einen nichtplanaren Graphen dargestellt, der aus 10 Knotenpunkten und 15 Kanten besteht. Die dick ausgezogenen Kanten bilden hierin einen Graphen von ähnlicher Struktur wie der 3-Häuser-3-Brunnen-Graph.

9 Das Galtonsche Brett

Katalin Bognár

9.1 Einführung

In diesem Beitrag möchten wir für den Leser kurz zusammenfassen (ohne dabei Vollständigkeit anzustreben), welche verschiedenen Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich mit Hilfe des sogenannten Galtonschen Bretts, das hier besprochen werden soll - bzw. mit gewissen Modifikationen davon - veranschaulichen lassen bzw. welcher über die Anschauung hinausgehende Gebrauch von einzelnen abgeänderten Formen des Galtonschen Bretts möglich ist.

Wir können hier keine eingehende Darstellung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geben.
Wir glauben jedoch, dass das auch nicht notwendig ist, denn dem, der sich dafür interessiert, stehen mehrere deutschsprachige Werke zur Verfügung. (In erster Linie wollen wir in diesem Zusammenhang das Buch [1] nennen, das auch für denjenigen, der über weniger mathematische Vorkenntnisse verfügt, eine sehr gute Einführung in die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet.)

9.2 Beschreibung des Galtonschen Bretts

Das Galtonsche Brett besteht in seiner ursprünglichen Form aus einem Brett, in das in zueinander parallelen Reihen Nägel eingeschlagen sind (Nagelreihen), und zwar so, dass die Nägel einer Reihe immer in gleichen Abständen unter den Mittelpunkten der Lücken zwischen den Nägeln der vorhergehenden Reihe stehen.
Auf das im allgemeinen senkrecht oder geneigt aufgestellte Brett kann man durch einen Trichter, der senkrecht zu den Nagelreihen auf den zentralen Nagel der ersten Nagelreihe gerichtet ist, kleine Kugeln fallen lassen, die alle denselben Durchmesser aufweisen, der nur wenig kleiner als der Abstand zwischen den Nägeln ist.

Die herabrollenden Kugeln prallen an einen Nagel der ersten Nagelreihe und werden dabei zufällig nach rechts oder links abgelenkt. Unabhängig davon, in welche Richtung die Kugel abgelenkt wurde, fällt sie in dem »Kanal« zwischen den Nägeln weiter, stößt dann mit einem Nagel der folgenden Nagelreihe zusammen und wird erneut zufällig nach rechts oder links abgelenkt und so weiter, bis sie schließlich, nachdem sie an der letzten Nagelreihe angeprallt ist, in einen Behälter der im Unterteil des Bretts befindlichen Behälterreihe fällt.

Wenn wir diejenigen physikalisch möglichen Fälle ausschließen, dass eine Kugel, nachdem sie an einen Nagel gestoßen ist, von dort mit großem Impuls nach rechts oder links wegspringt und ihren Weg nicht durch einen der unmittelbar neben dem betreffenden Nagel befindlichen »Kanäle« nach dem Behälter nimmt, sondern durch einen weiter entfernten Kanal, so liegt es auf der Hand, dass die Kugel nur einen Teil des Bretts durchlaufen kann, der die Form eines regelmäßigen Dreiecks hat. Wir können also, wenn wir von einem Galtonschen Brett sprechen, stets an ein solches von der Form eines regelmäßigen Dreiecks denken (Abb. 82).

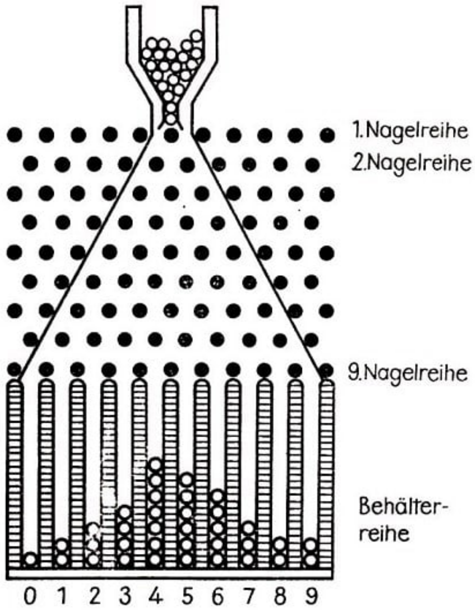
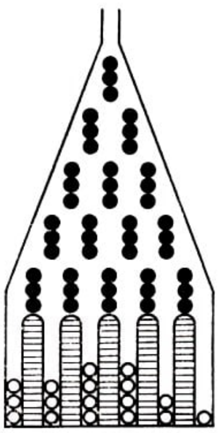


Abb. 82

Die Nagelreihen des Galtonbretts enthalten also der Reihe nach 1, 2, 3, 4, ... Nägel.

Im weiteren wollen wir voraussetzen, dass die Ablenkungen, die die Kugel von den einzelnen Reihen nach rechts oder links erfährt, nicht davon beeinflusst werden, ob sie in der vorhergehenden Reihe nach rechts oder links abgelenkt worden ist. Wir verlangen mit anderen Worten, das Ereignis, dass die Kugel etwa in der i-ten Reihe nach rechts oder links abgelenkt worden ist, sei unabhängig davon, was für eine Ablenkung sie in der $(i-1)$-ten Reihe erfahren hat. Nun ist diese Voraussetzung für ein aus derartigen Nägeln bestehendes Galtonbrett nicht immer erfüllt, denn eine Kugel, die irgendwo nach rechts abgelenkt wurde, neigt auch in der folgenden Reihe dazu, nach rechts abzuweichen. Um dem abzuhelfen, ändert man das ursprüngliche Galtonbrett folgendermaßen ab:



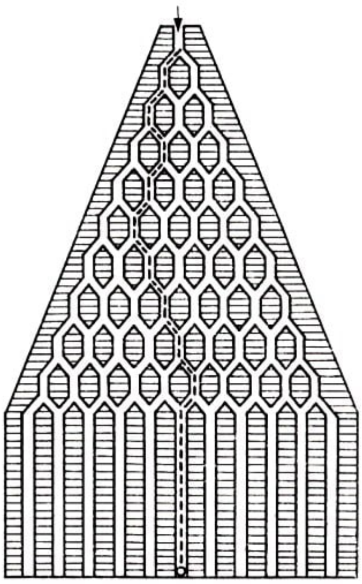


Abb. 83,84

An Stelle je eines Nagels bringt man deren drei unmittelbar untereinander an (Abb. 83). Dadurch gelangen die Kugeln nach einem Stoß in einen längeren Kanal, wo sie sich »beruhigen« können, so dass die Wirkung des vorhergehenden Stoßes bis zum nächsten abgeklungen ist und man voraussetzen kann, dass die bei den einzelnen Stößen erfolgenden Ablenkungen unabhängig voneinander sind. Mit noch größerer Genauigkeit lässt sich diese Bedingung realisieren, wenn man an Stelle der Nägel (bzw. Nageltripel) sechseckige Keile wählt (Abb. 84).
(Von dieser Art ist das Galtonsche Brett des Mathematischen Forschungsinstituts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest.)

Wenn das Galtonsche Brett regelmäßig ist (die Kanäle zwischen den in ein und derselben Reihe befindlichen Keilen zur Symmetrieachse des Dreiecks parallel sind und jeder Keil in die Mittellinie des darüber- bzw. darunterliegenden Kanals fällt), dann werden die Kugeln bei jedem Stoß mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (d. h. mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2 und 1/2) nach rechts oder nach links abgelenkt.
Einen beliebigen zufälligen Lauf einer Kugel werden wir Weg nennen. Schritt soll dagegen der Übergang der Kugel von einer Reihe in die nächste heißen. Abb. 84 stellt einen möglichen Weg auf einem aus 10 Keilreihen bestehenden Galtonschen Brett dar.

9.3 Ein Spiel mit dem Galtonschen Brett. Das Galtonsche Brett und die Binomialverteilung

Das Galtonsche Brett möge aus N Keilreihen bestehen, und an Stelle der $(N+1)$-ten Keilreihe sollen sich unter den Kanälen der N-ten Keilreihe Behälter befinden.
Da sich in der ersten Reihe 1 Keil, in der zweiten Reihe 2 Keile, in der N-ten Reihe schließlich N Keile [und $(N+1)$ Kanäle] befinden, enthält die an Stelle der Keile der $(N+1)$-ten Reihe eingefügte Behälterreihe $(N+1)$ Behälter. Wir zählen diese von links nach rechts, und zwar beginnen wir die Zählung in Hinblick auf das Folgende mit Null. Die Behälter haben also der Reihe nach die Nummern $0, 1, 2, ..., N$.

Wir stellen uns vor, zwei Spieler, A und B, spielen das folgende Spiel: A wettet, dass eine herabgerollte Kugel in den k-ten Behälter fällt $(k = 0, 1, 2, ..., N)$.
Wenn er richtig geraten hat, bekommt er x_k Pfennige von B, andernfalls, wenn die Kugel in den l-ten Behälter fällt $(l \neq k)$, zahlt A an B $y_l(x_k)$ Pfennige. (Die B zu zahlende Summe hängt im allgemeinen von x_k ab.)

In der folgenden Partie wechseln A und B die Rollen. Frage: Wie müssen wir die Werte $y_l(x_k)$ wählen, damit das Spiel gerecht ist, d. h., dass der durchschnittliche Gewinn des Spielers A (B) (genauer, der Erwartungswert des Gewinns von A im Falle jedes Tips) 0 Pfennige beträgt?

Um den zu erwartenden Gewinn bestimmen zu können, interessiert uns in erster Linie, wohin, in welchen Behälter eine herabgerollte Kugel gelangt und mit welcher »Sicherheit« man dies vorhersagen kann, d. h., wir müssen wissen, in dem wievielten Teil der Fälle, genauer, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Kugel in einen vorgegebenen, sagen wir den k-ten, Behälter fällt.

Diese Wahrscheinlichkeit hängt offenbar außer von der Nummer des Behälters auch von der Anzahl der Keilreihen ab. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir im Falle von N Keilreihen mit $P_N(k)$. $P_N(k)$ bedeutet also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel, die auf einem aus N Keilreihen bestehenden Galtonschen Brett herabrollt, in den k-ten Behälter gelangt (oder, was dasselbe bedeutet, dass sie durch den k-ten Kanal der N-ten Keilreihe läuft, $k = 0, 1, 2, ..., N$).

Da eine gegebene Kugel in jeder Reihe zwei Möglichkeiten hat, weiterzulaufen - sie kann nämlich nach rechts oder links abgelenkt werden -, ist die Anzahl der möglichen Abläufe auf dem Brett (die Anzahl der möglichen Wege) gleich $\overbrace{2}^{1} \cdot \overbrace{2}^{2} \cdot ... \cdot \overbrace{2}^{N} = 2^N$. Da wir vorausgesetzt haben, dass das Galtonsche Brett regelmäßig ist und die Ablenkungen in den einzelnen Keilreihen unabhängig voneinander sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Weg $\frac{1}{2^N}$. Hieraus folgt jedoch bei weitem nicht, dass eine Kugel in jeden Behälter mit ein und derselben Wahrscheinlichkeit fallen kann, denn sie kann auf mehreren verschiedenen (günstigen) Wegen in ein und denselben Behälter gelangen.

Wird die Kugel beispielsweise in allen N Reihen nach links abgelenkt, so gelangt sie offensichtlich in den nullten Behälter. Wird sie zwischendurch irgendwo einmal nach rechts abgelenkt, so gelangt sie in den ersten Behälter, wird sie unterwegs in (irgendwelchen) zwei Reihen nach rechts abgelenkt, in den zweiten Behälter, usw.
Allgemein kann die Kugel auf denjenigen Wegen in den k-ten Behälter von links gelangen, auf denen sie insgesamt k-mal nach rechts und $(N - k)$-mal nach links abgelenkt wird. Unter den N Keilreihen lassen sich die k Reihen, in denen sie nach rechts abgelenkt wird, auf

$$\frac{N(N-1)(N-2) \cdot ... \cdot (N-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} = \binom{N}{k}$$

Weisen auswählen. Die Anzahl der Wege, die in den k-ten Behälter führen, ist also gleich $\binom{N}{k}$, und daraus folgt

$$P_N(k) = \frac{\binom{N}{k}}{2^N}, \qquad (k = 0,1,2,...,N) \tag{1}$$

Ist zum Beispiel $N = 8$, so sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, in die einzelnen Behälter zu gelangen, der Reihe nach die folgenden:

$$\frac{1}{256}; \frac{8}{256}; \frac{28}{256}; \frac{56}{256}; \frac{70}{256}; \frac{56}{256}; \frac{28}{256}; \frac{8}{256}; \frac{1}{256}$$

Wir merken an, dass wir die Formel (1) auch noch auf einem anderen Weg beweisen können, und zwar durch vollständige Induktion nach N, der Anzahl der Keilreihen. Für $N = 1$ ist (1) nämlich offensichtlich richtig, denn es ist $P_1(0) = \frac{1}{2} = \frac{\binom{1}{0}}{2^1}$ und $P_1(1) = \frac{1}{2} = \frac{\binom{1}{1}}{2^1}$.
Wenn wir für ein Galtonsches Brett mit N Keilreihen bereits wissen, mit wie großer Wahrscheinlichkeit eine herabgerollte Kugel in die einzelnen Behälter fällt, dann können

wir hieraus leicht die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten auch für ein aus $(N+1)$ Keilreihen bestehendes Galtonsches Brett herleiten.

Eine Kugel kann nämlich auf zweierlei Weise in den k-ten Behälter $(k = 1, 2, ..., N)$ eines aus $(N+1)$ Keilreihen bestehenden Galtonschen Bretts gelangen: Entweder läuft sie durch den $(k-1)$-ten Kanal der N-ten Reihe und wird dann nach rechts abgelenkt, oder sie läuft durch den k-ten Kanal und weicht dann nach links ab.
Da eine Kugel aus der N-ten Reihe nur auf eine Weise in den nullten bzw. $(N+1)$-ten Behälter aus $(N+1)$-ten Reihe gelangen kann, steht dies mit dem Wert $P_N(-1) = P_N(N+1) = 0$ in Einklang. Somit ist

$$P_{N+1}(k) = P_N(k-1)\frac{1}{2} + P_N(k)\frac{1}{2} = \frac{\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k}}{2^{N+1}} = \frac{\binom{N+1}{k}}{2^{N+1}}$$

Damit haben wir zugleich ein einfaches Verfahren gewonnen, um die Wahrscheinlichkeiten $P_{N+1}(k)$ zu berechnen, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten $P_N(k)$ kennen.
Wir wollen diese Wahrscheinlichkeiten etwas näher untersuchen.

Dass eine Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $P_N(k)$ in den k-ten Behälter gelangt, bedeutet, dass von den herabgelassenen Kugeln etwa das $P_N(k)$-fache [100 mal $P_N(k)\%$] in den k-ten Behälter fällt.
Wir lassen eine große Anzahl von Kugeln, sagen wir R Stück, auf dem Galtonschen Brett herabrollen und bezeichnen mit r_k die Anzahl der Kugeln, die in den k-ten Behälter gelangen (diese Zahl, mit dem Kugeldurchmesser multipliziert, gibt zugleich auch die Höhe an, bis zu der der k-te Behälter gefüllt sein wird).

Dann wird der Quotient $\frac{r_k}{R}$, d.h. die relative Häufigkeit des Ereignisses, dass eine herabgerollte Kugel in den k-ten Behälter fällt, im größten Teil der Fälle (wenn man sehr oft R Kugeln herabrollen lässt, dann in den "meisten" davon) nur wenig von der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses, von $P_N(k)$, abweichen.
Somit wird auch r_k nur wenig von $R \cdot P_N(k)$ verschieden sein. Die Kugeln werden also die Behälter bis zu einer Höhe füllen, die zu der Wahrscheinlichkeit, dorthin zu fallen, proportional ist.

Da die Wahrscheinlichkeiten $P_N(k)$ eine sogenannte Binomialverteilung[9] bilden, $(p = \frac{1}{2})$, ist das Galtonsche Brett gut geeignet, um das Bild der Binomialverteilung zu untersuchen.
Wir können beobachten, dass die meisten Kugeln in die mittleren Behälter gelangen, während nach den Seiten des Bretts weniger laufen. In Behälter, die zur Symmetrieachse des Galtonschen Bretts symmetrisch liegen [in die k-ten und $(N = k)$-ten] gelangen

[9] Wir sagen, dass die Zahlen $P_0, P_1,..., P_r$ eine Binomialverteilung N-ter Ordnung mit dem Parameter p bilden, wenn

$$P_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad (k = 0,1,2,...,N)$$

ist. Wir sagen mit anderen Worten von einer Zufallsvariablen ξ, dass sie (von N-ter Ordnung und mit dem Parameter p) binomialverteilt ist, wenn ihre möglichen Werte $0, 1,2,..., N$ sind und der Wert k mit der Wahrscheinlichkeit P_k angenommen wird.

etwa ebensoviele Kugeln [denn es ist $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$.

Auch wenn man nur relativ wenige Kugeln herabrollen lässt, kann man bemerken, dass die meisten Kugeln bei geradem N in den zentralen Behälter mit der Nummer $\frac{N}{2}$, bei ungeradem N dagegen in die beiden mittleren Behälter mit den Nummern $\frac{N-1}{2}$ und $\frac{N*1}{2}$ (wahrscheinlichste Behälter).

Damit der Leser die Ergebnisse der späteren konkreten Zahlenbeispiele leichter verfolgen bzw. kontrollieren kann, nennen wir hier den wichtigen Satz, dass sich die Glieder der Binomialverteilung unter gewissen Voraussetzungen mittels der sogenannten Gaußschen Fehlerfunktion (Glockenkurve)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

approximieren lassen (Werte der letzteren können aus Tabellen entnommen werden; eine solche Tabelle ist z. B. in dem Buch [2] zu finden), und zwar ist in unseren Fällen und mit unseren Bezeichnungen, wenn N genügend groß ist und k nahe bei $\frac{N}{2}$ liegt sowie $\frac{|2k-N|}{\sqrt{N}} = x$ unterhalb einer Schranke bleibt, die von N nicht abhängt,

$$\binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

näherungsweise gleich $\frac{2\varphi(x)}{\sqrt{N}}$.

Danach können wir leicht die Frage beantworten, was für ein Zusammenhang zwischen dem Fassungsvermögen der Behälter und der Anzahl der auf einmal herabrollenden Kugeln bestehen muss.
(Damit bekommen wir auch eine Antwort auf die Frage, wie lange A und B miteinander spielen können, ohne die Behälter zu leeren.)

Wenn in jedem Behälter, sagen wir, S Kugeln Platz haben, dann können wir offenbar höchstens so viele Kugeln herabrollen lassen ($R_{\max}$), dass in den (bzw. in die) mittleren wahrscheinlichsten Behälter höchstens S Kugeln gelangen.
Wenn also das Galtonsche Brett aus $N = 2M$ Keilreihen besteht, so muss die Bedingung $r_M \approx R_{\max} P_{2M}(M) \leq S$, d.h.

$$R_{\max} \leq \frac{S}{P_{2M}(M)}$$

erfüllt sein. Gehen z.B. in einen Behälter 100 Kugeln und besteht das Galtonsche Brett aus S Keilreihen, dann kann man höchstens etwa 366 Kugeln auf einmal herabrollen lassen, im Falle von 16 Keilreihen etwa 509 Kugeln und im Falle von 36 Keilreihen etwa 757 Kugeln.

Wir können auch die Frage untersuchen, wieviel Kugeln wir herabrollen lassen müssen, damit mit großer Wahrscheinlichkeit keine Behälter (insbesondere die am Rand gelegenen) leer bleiben.

Ist nämlich die Anzahl der Keilreihen hinreichend groß und lassen wir insgesamt nicht zu viele Kugeln herabrollen, dann rollt in einige äußere Behälter mit großer Wahrscheinlichkeit überhaupt keine Kugel.

Ist z.B. $N = 25$, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in irgendeinen der je vier äußersten Behälter eine Kugel gelangt:

$$p = 2\frac{\binom{25}{0} + \binom{25}{1} + \binom{25}{2} + +\binom{25}{3}}{2^{25}} = \frac{1 + 25 + 300 + 2300}{2^{24}} = \frac{1313}{2^{23}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 herabgerollten Kugeln keine in die genannten Behälter gelangt, ist dann

$$\binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} = \left(1 - \frac{1313}{2^{23}}\right)^{100} > 0{,}98$$

d. h., mit 98%, Wahrscheinlichkeit fällt nur in die 18 mittleren Fächer überhaupt eine Kugel. Oder lassen wir z. B. im Falle $N = 16$ höchstens etwa 44 Kugeln herabrollen, dann werden mit 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens die beiden äußeren Behälter leer sein.

Wir kehren jetzt zu dem bereits erwähnten Spiel zurück.
Da wir wünschen, dass der mittlere Gewinn von A (auf was für einen Behälter er auch setzt) 0 sein soll, so müssen die Zahlen $y_l(x_k)$ den Gleichungen

$$x_k P_N(k) - \sum_{l \neq k} y_l(x_k) P_N(l) = 0 \tag{2}$$

($k = 0{,}1{,}2{,}..{,}N$) genügen. Wenn wir keine weitere Forderung stellen, dann können wir die Zahlen $y_l(x_k)$ noch auf sehr vielerlei Weise wählen (genauer: mit einer Ausnahme können wir die übrigen beliebig wählen).
Verlangen wir jedoch auch noch, dass B, wo auch immer - anschaulich gesprochen - die Kugel (außerhalb des k-ten Behälters) hinfällt, im Durchschnitt stets ebensoviel bekommt, d. h., dass der Mittelwert $y_l(x_k)P_N(l)$ [den wir mit $c_N(x_k)$ bezeichnen] nicht von l, sondern nur von x_k (und natürlich von N) abhängt, dann folgt hieraus auf Grund von (2), dass

$$x_k P_N(k) = N c_N(x_k) \qquad \text{d.h.} \qquad y_l(x_k) = \frac{x_k P_N(k)}{N P_N(l)} \tag{3}$$

($k = 0{,}1{,}2{,}..{,}N$, $l \neq k$) sein muss.

Auch für die Wahl der ganzen Zahlen x_k haben wir sehr viele Möglichkeiten (wir können sie auch alle gleich einem gewissen Wert wählen, obwohl dies nicht gerade zweckmäßig ist).
Auf jeden Fall empfiehlt es sich, sie so vorzugeben, dass auch die Zahlen $y_l(x_k)$ ganz sind. Eine mögliche Wahl ist in der folgenden Tabelle angegeben ($N = 8$):

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$x_0 = 2240$	-	35	10	5	4	5	10	35	280
$x_1 = 1120$	1120	-	40	20	16	20	40	140	1120
$x_2 = 1120$	3920	490	-	70	56	70	140	490	3920
$x_3 = 1120$	7840	980	280	-	112	140	280	980	7840
$x_4 = 224$	1960	245	70	35	-	35	70	245	1960
$x_5 = 1120$	7840	980	280	140	112	-	280	980	7840
$x_6 = 1120$	3920	490	140	70	56	70	-	490	3920
$x_7 = 1120$	1120	140	40	20	16	20	40	-	1120
$x_8 = 2240$	280	35	10	5	4	5	10	35	-

Die weitere Analyse des Zahlenbeispiels und des Spiels sowie möglicher Modifikationen davon überlassen wir dem Leser.

9.4 Das Galtonbrett und die Poissonverteilung

Das Galtonsche Brett eignet sich auch zur Veranschaulichung der sogenannten Poissonverteilung.
Wir untersuchen zunächst, wieviel Kugeln im Durchschnitt in den k-ten Behälter fallen, wenn wir auf einem aus N Keilreihen bestehenden Galtonschen Brett R Kugeln herabrollen lassen.
Die Anzahl der Kugeln, die dort hineinfallen, fassen wir als Zufallsvariable auf und bezeichnen sie mit ξ_k.

Wir haben gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine herabgerollte Kugel in den k-ten Behälter gelangt, $P_N(k) = \binom{N}{k}\frac{1}{2^N}$ ist. Wir können also mit der bereits wohlbekannten Formel der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür aufschreiben, dass von R Kugeln r Stück in den k-ten Behälter gelangen:

$$P(\xi_k = r) = \binom{R}{r} p_k^r (1 - p_k)^{R-r} \quad (k = 0,1,2,...,N) \tag{4}$$

Wir haben dabei $P_N(k) = P(k) = p_k$ gesetzt.
Wir machen jetzt von dem Satz Gebrauch, dass sich die Binomialverteilung im Falle großer R und kleiner p_k. gut durch die Poissonverteilung[10]

$$\frac{\lambda_k^r}{r!} e^{-\lambda_k} \qquad (r = 0,1,2,...)$$

annähern lässt, wobei jetzt $\lambda_k = Rp_k$ ist.
Wenn also die Anzahl der herabrollenden Kugeln genügend groß ist und wir die zufällige Schwankung der Anzahl derjenigen Kugeln untersuchen, die in vom Mittelpunkt

[10] Eine Zufallsvariable ξ heißt poissonverteilt, wenn ihre möglichen Werte $0, 1, 2,...$ sind und sie den Wert k mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0,1,2,...)$$

annimmt, wo λ eine positive Konstante ist, die den Erwartungswert der Verteilung bedeutet.

hinreichend weit entfernte Behälter fallen (wenn also die Bedingung erfüllt ist, dass p_k sehr klein ist), dann können wir uns der Poissonverteilung bedienen.
Dann ist nämlich die genannte Näherung

$$P(\xi_k = r) \approx \frac{(Rp_k)^r}{r!} e^{-Rp_k}$$

anwendbar.
Wir führen den Versuch beispielsweise auf einem Galtonbrett durch, das aus 8 Keilreihen besteht.
Untersuchen wir den nullten Behälter ($p_0 = \frac{1}{256}$), so ist, wenn die Anzahl der auf einmal herabgerollten Kugeln 512 beträgt (also $R = 512$ ist), auf Grund der genannten Poissonschen Approximation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den untersuchten Behälter überhaupt keine Kugel gelangt, 0,135.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 1 Kugel dorthin gelangt, ist 0,271, für 2 Kugeln 0,271, für 3 Kugeln 0,180, für 4 oder mehr Kugeln 0,143.
Das bedeutet also Folgendes:

Wiederholen wir den Versuch hinreichend oft, lassen wir also etwa 1000 mal stets 512 Kugeln herabrollen, so werden wir dabei etwa 135 mal den nullten Behälter leer finden usw.

Wir ändern jetzt unseren Versuch in der Weise ab, dass bei jedem Mal auch die Anzahl der herabgerollten Kugeln selbst eine Zufallsvariable ist (wir wollen sie mit ν bezeichnen), die gleichfalls poissonverteilt sein soll, d. h.

$$P(\nu = R) = \frac{\mu^R}{R!} e^{-\mu} \qquad (R = 0{,}1{,}2{,}...)$$

(wo μ der Erwartungswert der Verteilung ist, d.h. die mittlere Anzahl der auf einmal herabgerollten Kugeln.

Dann kann man leicht zeigen, dass auch die Anzahl der in die einzelnen Behälter gelangenden Kugeln poissonverteilt ist (nicht nur näherungsweise, sondern genau), und zwar ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den k-ten Behälter r Kugeln fallen,

$$P(\xi_k = r) = \frac{(\mu p_k)^r}{r!} e^{-\mu p_k} \qquad (r = 0{,}1{,}2{,}...) \tag{5}$$

Darüber hinaus kann man sagen, dass die Anzahl der Kugeln, die sich in den Behältern ansammeln, nur in diesem Fall poissonverteilt sein wird. [11]

[11] Das folgt sofort aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit; es ist nämlich

$$\begin{aligned} P(\xi_k = r) &= \sum_{R-r}^{\infty} P(\xi_k = r \mid \nu = R)(P \mid \nu = R) = \sum_{R=r}^{\infty} \frac{R!}{r!(R-r)!} p_k^r (1-p_k)^{R-r} \frac{\mu^r \mu^{R-r}}{R!} e^{-\mu} \\ &= \frac{(\mu p_k)^r}{r!} e^{-\mu} \sum_{R=r}^{\infty} \frac{[(1-p_k)\mu]^{R-r}}{(R-r)!} \end{aligned}$$

Wählen wir also die herabzurollenden Kugeln nicht nach einer Poissonverteilung aus, so wird die Anzahl der in den Behältern befindlichen Kugeln gleichfalls nicht poissonverteilt sein [4].

Wir stellen uns jetzt vor, wir verfügen über ein Galtonbrett, dessen Behälter sich entfernen lassen, und ändern unsere obigen Versuche folgendermaßen ab:
Wir verschieben an einem aus N Keilreihen bestehenden Galtonschen Brett einen Behälter (B) von der Stelle Null sukzessive bis zur Stelle N in der Behälterreihe und lassen in jeder Lage eine gewisse Anzahl von Kugeln herabrollen, und zwar so viele, dass in den k-ten Behälter R_k Kugeln gelangen würden (R_k kann auch Null sein).

Danach untersuchen wir die Anzahl der Kugeln, die sich in diesem durchwanderten Behälter insgesamt angesammelt hat. Man kann beweisen [5], dass die Anzahl der sich in B ansammelnden Kugeln (wir bezeichnen sie mit ξ_N) - wenn die Anzahl der Keilreihen genügend groß ist und wir die Anzahl der in den einzelnen Schritten herabrollenden Kugeln einer gewissen Beschränkung unterwerfen - angenähert poissonverteilt sein wird.

Lassen wir speziell bei jedem Schritt dieselbe Anzahl von Kugeln herabrollen, etwa λ Stück, dann ist λ gerade der Erwartungswert der Verteilung, d.h., in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in B gerade r Kugeln befinden, im Grenzwert (bei wachsendem N)

$$\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} \qquad (r = 0,1,2,...)$$

Wir ändern jetzt den Versuch in der Weise ab, dass auch die Anzahl der Kugeln, die wir in den verschiedenen Lagen des Behälters B herabrollen lassen, eine Zufallsvariable ist, und zwar wiederum poissonverteilt (mit im allgemeinen bei jedem Schritt verschiedenem λ_k), d. h., wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der k-ten Verschiebung x Kugeln herabrollen, $\frac{\lambda_k^x}{x!}e^{-\lambda_k}$ ist.

Dann ist ξ_N auch bereits im Falle eines endlichen N poissonverteilt (und nicht erst im Grenzwert), und ξ_N ist sogar nur in diesem Falle poissonverteilt.

Bisher haben wir stets die Anzahl der Kugeln bzw. deren Verteilung untersucht, die sich in einem Behälter ansammeln.
Wir wählen jetzt von einem Galtonbrett mit N Keilreihen zwei beliebige Behälter aus, sagen wir den i-ten und den j-ten, und beobachten, wieviel von den R herabgerollten Kugeln in den i-ten bzw. j-ten Behälter gelangen.
Wir sehen diese Zahlen als Zufallsvariable an und bezeichnen sie mit ξ_i bzw. ξ_j.

Die Zufallsvariablen ξ_i und ξ_j sind offensichtlich nicht unabhängig. Denn wenn wir die Anzahl der zusammen herabgerollten Kugeln festhalten und in den einen Behälter sehr

Setzen wir $R - r = s$ und nutzen aus, dass $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} = e^x$ ist, dann wird

$$\sum_{R=r}^{\infty} \frac{[(1-p_k)\mu]^{R-r}}{(R-r)!} = e^{\mu} \cdot e^{-p_k\mu}$$

woraus (5) folgt.

viele Kugeln gelangt sind, so können in den anderen nur noch wenige fallen.
Die gemeinsame Verteilung von ξ_i und ξ_j (d. h. die Gesamtheit der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ξ_i gleich r und ξ_j gleich s ist) ist eine Trinomialverteilung. Es ist also

$$P(\xi_i = r, \xi_j = s) = \frac{R!}{r!s!(R-r-s-)!} \cdot p_i^r p_j^s (1 - p_i - p_j)^{R-r-s} \tag{6}$$

Halten wir jedoch die Anzahl der herabzurollenden Kugeln nicht fest, sondern sehen wir auch sie als eine Zufallsvariable (ν) an, so gilt der interessante Satz [4], dass ξ_i und ξ_j dann und nur dann unabhängig sind, wenn die Anzahl der herabgerollten Kugeln poissonverteilt ist. Wenn dabei

$$P(\nu = R) = \frac{\lambda^R}{R!} e^{-\lambda} \qquad (R = 0,1,2,...)$$

gilt, so ergibt sich

$$P(\xi_i = r, \xi_j = s) = \frac{(\lambda p_i)^r}{r!} e^{-\lambda p_i} \cdot \frac{(\lambda p_j)^s}{s!} e^{-\lambda p_j}$$

Letzteres folgt analog zu (5) aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, d. h., ξ_i und x_j sind dann auch einzeln poissonverteilt:

$$P(\xi_i = r) = \frac{(\lambda p_i)^r}{r!} e^{-\lambda p_i} \qquad \text{und} \qquad P(\xi_j = s) = \frac{(\lambda p_j)^s}{s!} e^{-\lambda p_j} \tag{7}$$

Betrachten wir nicht nur zwei Behälter gleichzeitig, sondern alle, und bezeichnen wir die Anzahl derjenigen von den R herabgerollten Kugeln, die in den nullten, ersten, zweiten, ..., N-ten Behälter gelangen, der Reihe nach mit $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N$, so ist die gemeinsame Verteilung von $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N$ im allgemeinen eine Polynomialverteilung, d.h.

$$P(\xi_0 = r_0, \xi_1 = r_1, ..., \xi_N = r_N) = \frac{R!}{r_0!r_1!...r_N!} \cdot p_0^{r_0} p_1^{r_1} ... p_N^{r_N} \qquad (r_0 + r_1 + ... + r_n = R)$$

und die $x ß_0, \xi_1, ..., \xi_N$ sind dann und nur dann unabhängig voneinander, wenn die Anzahl der herabgerollten Kugeln poissonverteilt ist.

Wir ändern jetzt den bereits erwähnten Versuch, bei dem wir die Behälter verschoben haben, folgendermaßen ab:
Wir bezeichnen den nullten Behälter mit B_0 und den k-ten Behälter mit B_k und schieben die Behälterreihe so "zurück", dass B_k an die Stelle von B_0 gelangt.

In dieser Stellung lassen wir eine gewisse Anzahl von Kugeln herabrollen, verschieben dann die Behälterreihe um eine Einheit (um einen Behälter) nach rechts, lassen wiederum beliebig viele Kugeln herabrollen usw. Haben wir auf diese Weise insgesamt $(N+k)$ Verschiebungen durchgeführt, so hat auch B_0 alle $(N+1)$ Kanäle durchwandert.
Auch jetzt gilt, dass die Anzahl der Kugeln, die sich in B_0 und B_k ansammeln, dann und nur dann unabhängig voneinander ist, wenn die Anzahl der Kugeln, die in den einzelnen Stellungen herabgelassen werden, eine poissonverteilte Zufallsvariable ist.

Wir bemerken, dass wir mit den jetzt behandelten Versuchen auch untersuchen können, wie stark die Abhängigkeit ist. Auf Einzelheiten können wir hier jetzt jedoch nicht eingehen.

Eine weitere Besonderheit eines Galtonschen Bretts, das eine verschiebbare Behälterreihe hat, besteht darin, dass wir mit seiner Hilfe auch die bereits erwähnten Gaußschen Fehlerkurven überlagern können.
Wir brauchen nämlich die Kugeln nur in zwei verschiedenen Lagen der Behälterreihe herabrollen zu lassen (in jeder Lage hinreichend viele Kugeln). Wir können beobachten, dass die dabei entstehende Kurve bereits zwei "Spitzen" (zwei Maxima) besitzt, wenn wir die Behälterreihe um hinreichend viele Behälter weiter verschieben.

9.5 Herstellung von Zufallszahlen mit Hilfe des Galtonschen Bretts

Wollen wir von den Zahlen von 0 bis zu einer gewissen Potenz von 2 mit positivem ganzzahligem Exponenten zufällig eine Zahlenfolge auswählen (Zufallszahlen), dann können wir eine solche Zahlenfolge mit Hilfe des Galtonschen Bretts folgendermaßen herstellen:

Wir setzen voraus, dass das Galtonbrett regelmäßig ist und aus N Keilreihen besteht. Wir lassen eine Kugel herabrollen und halten irgendwie ihren Weg fest.
Ein solcher "zufälliger" Weg ist eine Zufallsfolge von Rechts-Links-Ablenkungen. Jeder Ablenkung nach links ordnen wir 0 und jeder Ablenkung nach rechts 1 zu und schreiben die so erhaltenen Ziffern in derselben Reihenfolge wie die einzelnen Schritte hintereinander.

Auf diese Weise bekommen wir eine aus Nullen und Einsen bestehende Zufallsfolge, die der Binärdarstellung einer ganzen Zahl zwischen 0 und $2^N - 1$ (die Grenzen eingeschlossen) entspricht, d.h., die auf diese Weise gewonnene 0-1-Folge stellt eine zwischen 0 und $2^N - 1$ liegende Zufallszahl dar.
Indem wir diese Prozedur hinreichend oft wiederholen, können wir eine Zufallszahlenfolge herstellen, die beliebig viele Zahlen enthält. (Man kann sich eine moderne technische Realisierung vorstellen, bei der mittels einer an das Galtonbrett angeschlossenen elektrischen Apparatur sofort nach dem Herabrollen der Kugel die zufällige 0-1-Folge oder die ganze Zufallszahl angezeigt wird.)

9.6 Das Galtonsche Brett und die Markovschen Ketten

Mit dem Galtonschen Brett können wir auch den Begriff der Markovschen Ketten veranschaulichen. Verwenden wir nämlich das ursprüngliche, benagelte Galtonbrett (oder sind die Keile auf einem aus Keilen bestehenden Galtonschen Brett abgenutzt), so müssen wir unsere Annahme fallenlassen, dass die Ablenkungen, die bei den Stößen an den einzelnen Reihen eintreten, unabhängig voneinander sind.
Diese bilden in diesem Falle eine sogenannte Markovsche Kette.

Versuchsfolgen, bei denen das Ergebnis des $(n+1)$-ten Versuchs nur von dem Ergebnis des n-ten Versuchs abhängt, von dem Ergebnis des ersten, zweiten, ..., $(n-1)$-ten Versuchs jedoch nicht unmittelbar abhängig ist, sondern nur dadurch mittelbar, dass durch diese das Ergebnis des n-ten Versuchs beeinflusst wird, heißen Markovsche Kette. Genauer gilt:

Sind die Ereignisse $A_0, A_1, A_2, ...$ die möglichen Ausgänge eines Versuches, so bildet die Versuchsfolge dann eine Markovsche Kette, wenn unter der Voraussetzung, dass gewisse vorherige Versuche auf ein vorgegebenes Ergebnis geführt haben, die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis des $(n+1)$-ten Versuchs beispielsweise das Ereignis A_k ist, nur von dem Ausgang des vorherigen Versuches abhängt.
Wir können den Begriff auch auf eine Folge von Zufallszahlen anwenden.

Das Ergebnis des n-ten Versuchs werde durch die Zufallsvariable ξ_n bezeichnet, und es sei $\xi_n = k$, wenn bei dem n-ten Versuch das Ereignis A_k eintritt ($n = 1$,2,...; $k = 0, 1$,2,...). Dann können wir unsere Bedingung formelmäßig folgendermaßen angeben:

$$P(\xi_{n-1} = k \mid \xi_1 = j_1, \xi_2 = j_2, ..., \xi_n = j_n) = P(\xi_{n-1} = k \mid \xi_n = j_n)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\xi_{n-1} = k \mid \xi_n = j_n)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit für einen Schritt; der "Übergang" von A_j nach A_k erfolgt nämlich gerade mit dieser Wahrscheinlichkeit.
Der Kürze halber wollen wir hierfür die Bezeichnung P_{jk}^n einführen.

Solche Markovsche Ketten, bei denen die Übergangswahrscheinlichkeit nicht von n abhängt (wir können sie dann also mit P_{jk} bezeichnen), heißen homogene Markovketten.

Stellen wir uns vor, dass die Versuche zeitlich nacheinander ausgeführt werden und der Index $n = 1, 2$,... den jeweiligen Zeitpunkt angibt, dann bedeutet also ξ_n das Ergebnis des zum Zeitpunkt n durchgeführten Versuchs. Die Ereignisse $A_0, A_1, A_2, ...$ werden dagegen gewöhnlich Zustände genannt.
Im Falle des Galtonschen Bretts entsprechen den Zeitpunkten die Reihen und den Zuständen die Ablenkungen nach links bzw. nach rechts (A_0, A_1).

Setzen wir jetzt $\xi_n = 0$ oder 1, je nachdem, ob eine herabgerollte Kugel bei dem Stoß an der n-ten Keilreihe nach links oder nach rechts abgelenkt wird, so können wir sagen, dass die Folge der Zufallsvariablen ξ_n eine Markovsche Kette (und zwar eine homogene Markovkette) bildet.
Wir können hier also die Übergangswahrscheinlichkeiten mit $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ bezeichnen. Somit ist P_{10} beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für eine Ablenkung nach links unter der Voraussetzung, dass in der vorhergehenden Reihe eine Ablenkung nach rechts erfolgt ist. Man kann annehmen, dass $P_{01} = P_{10}$ und $P_{00} = P_{11}$ ist.

$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_N$ gibt an, in den wievielten Behälter eine Kugel gelangt, die auf einem aus N Keilreihen bestehenden Galtonschen Brett herabrollt.
Es ist interessant zu beobachten, dass sich die Kugeln auch in diesem Falle nach der Gaußschen Kurve in den Behältern verteilen, womit ein aus der Theorie der Markovschen Ketten wohlbekannter Satz experimentell bestätigt wird.
Je nachdem, ob $P_{01} < \frac{1}{2}$ oder $P_{01} > \frac{1}{2}$ ist, wird jedoch die Kurve flacher oder "spitzer" als im Falle $P_{01} = \frac{1}{2}$ sein.

10 Parkette, geometrisch betrachtet

István Reimann

Die Geschichte der Parkettierung ist fast ebenso alt wie die Geschichte des Bauwesens. Der Fußboden von Gebäuden wurde von alters her mit Steinstücken ausgelegt. Dieser bestand anfänglich aus aufs Geratewohl nebeneinandergelegten flacheren Steinen.
Später wurden diese Steine bearbeitet, damit der Fußboden beim Zusammenfügen zum größten Teil bedeckt wurde und es weniger Lücken gab. Im Verlauf der weiteren Entwicklung bemühte man sich darum, durch entsprechende Bearbeitung der benutzten Steinstücke auch noch diese Lücken zu beseitigen. (In der Theorie des Mauerbaues findet man übrigens denselben Entwicklungsverlauf wieder.)

Auf Grund experimenteller Erfahrungen kam man darauf, dass es leichter ist, den Fußboden zu bedecken, wenn man gleichförmige Abdecksteine von derselben Gestalt und Größe benutzt, insbesondere dann, wenn diese aus Ton gebrannt werden.
Einige derartige Parkettierungen im antiken Wohnungsbau sind in Abb. 86 bis 90 dargestellt.

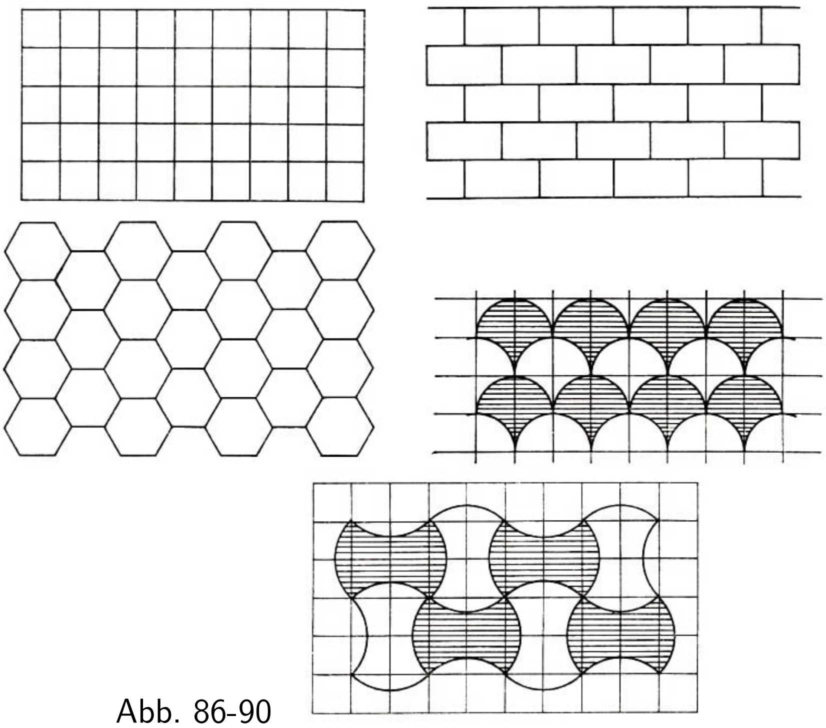


Abb. 86-90

Bereits aus diesen fünf schon vor Jahrtausenden bekannten Parkettierungsarten kann man auf den großen Formenreichtum schließen, der dabei möglich ist. Und hier tritt die Mathematik in unsere Überlegungen ein.
Es geht nämlich um die Frage, was für Parkettierungen denn ganz allgemein möglich sind. Zur Einführung klären wir zunächst einmal die im folgenden zu benutzenden Begriffe.

Zwecks Vereinfachung der mathematischen Behandlung werden wir unter einem Parkett die schlichte und lückenlose Bedeckung der Ebene mit ebenen Figuren verstehen.

Schlicht nennen wir die Bedeckung, wenn jeder Punkt der Ebene von einem inneren Punkt von höchstens einer überdeckenden Figur bedeckt wird. (Ein Punkt kann auch von Randpunkten mehrerer Deckfiguren überdeckt werden.)

Lückenlos ist die Überdeckung, wenn jeder Punkt der Ebene von mindestens einem inneren oder einem Randpunkt einer Deckfigur überdeckt wird. Bei einer Parkettierung denken wir immer an eine Überdeckung der ganzen Ebene.

Wir wollen uns zunächst mit der bereits erwähnten, durch die Praxis aufgeworfenen Frage befassen: Was für Parkettierungen lassen sich aus kongruenten Figuren herstellen, d. h., aus was für kongruenten Figuren lassen sich Parkette anfertigen.
Es ist beispielsweise klar, dass man aus Kreisen keine Parkettierung herstellen kann, wohl aber aus gewissen von Kreisbögen begrenzten Figuren, wie Abb. 89 und Abb. 90 zeigen.

Wir erzielen eine geringfügige Vereinfachung des Problems, wenn wir bemerken, dass sich zum Beispiel Abb. 89 und Abb. 90 dadurch aus Abb. 86 und Abb. 87 erzeugen lassen, dass man in diese gewisse Kreisbögen einzeichnet (Abb. 91 und 92).

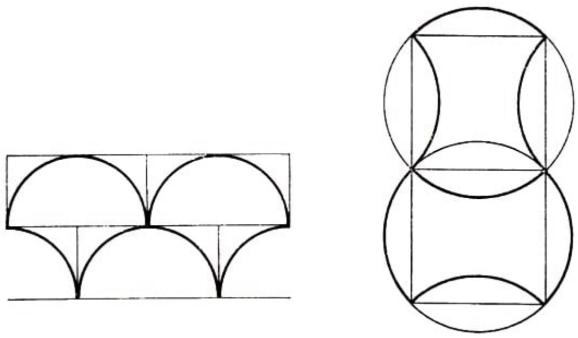


Abb. 91, 92

Es erscheint also der Gedanke naheliegend, jede Parkettierung auf eine Parkettierung aus Vielecken zurückzuführen.
Wir untersuchen zunächst Parkette, die aus kongruenten konvexen Vielecken herstellbar sind. (Ein Vieleck ist konvex, wenn jeder Winkel von ihm kleiner als 180° ist.) Solcherart sind die bisher in Abb. 86, 87 und 88 kennengelernten Parkette.

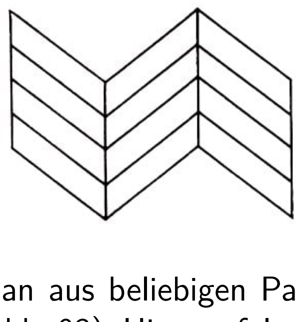


Abb. 93

Es ist sehr leicht einzusehen, dass man aus beliebigen Parallelogrammen auf vielerlei Weisen ein Parkett anfertigen kann (Abb. 93). Hieraus folgt unmittelbar, dass sich auch aus jedem Dreieck eine Parkettierung herstellen lässt. Spiegeln wir nämlich ein Dreieck an einem seiner Seitenmittelpunkte, so bekommen wir ein Parallelogramm.

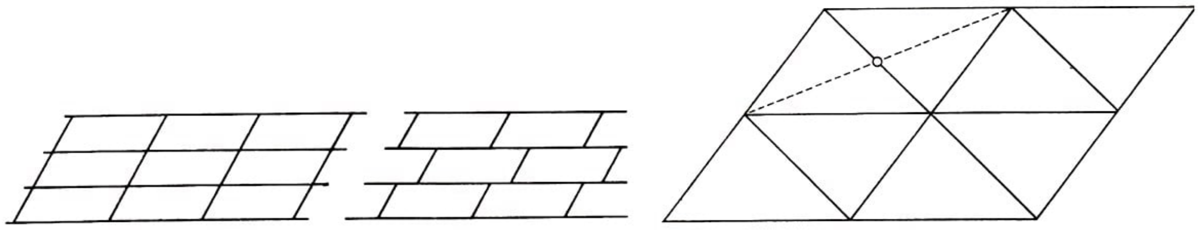


Abb. 94

Mit diesem Parallelogramm - also auch mit dem Dreieck - können wir die Ebene überdecken (Abb. 94).

In Abb. 88 ist ein aus regelmäßigen Sechsecken hergestelltes Parkett dargestellt. Wir können jedoch feststellen, dass dabei nicht so sehr die Regelmäßigkeit des Rechtecks maßgebend ist, sondern vielmehr seine Zentralsymmetrie, d. h., aus jedem zentralsymmetrischen Sechseck lässt sich eine Überdeckung herstellen. Der Beweis hierfür lässt sich aus Abb. 95 ablesen.

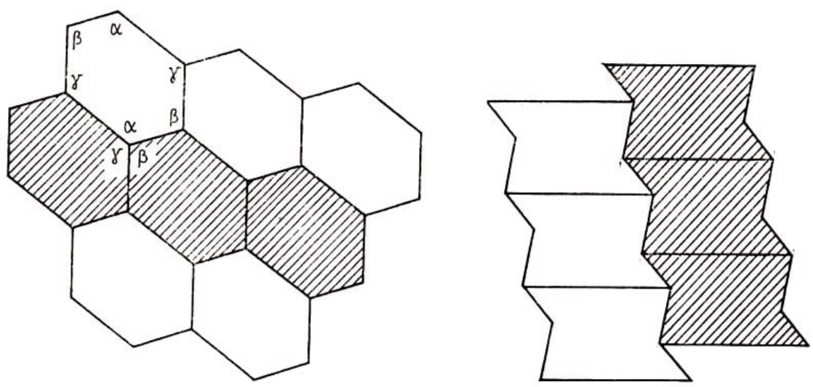


Abb. 95, 96

Man stellt aus den Sechsecken Streifen her, die sich lückenlos aneinanderlegen lassen, da die einander gegenüberliegenden Winkel der Sechsecke gleich sind und somit die Summe von drei benachbarten Winkeln (in Abb. 95 $\alpha + \beta + \gamma$) gerade die Hälfte der Winkelsumme im Sechseck, d.h. von 360°, ist. Wir beachten, dass hierbei nicht die Konvexität des Sechsecks verlangt worden ist (Abb. 96).

Der sehr einfache Zusammenhang zwischen dem Parallelogrammparkett und dem Dreiecksparkett resultiert aus der Zentralsymmetrie des Parallelogramms. Einen derartigen Zusammenhang können wir auch zwischen den Vierecken und den zentralsymmetrischen Sechsecken auffinden.

Spiegeln wir ein beliebiges Viereck am Mittelpunkt einer beliebigen Seite, so erhalten wir wieder ein Viereck, das mit dem ursprünglichen Viereck zusammen ein zentralsymmetrisches Sechseck bildet. (Hier ist die Konvexitätsforderung nicht notwendig, Abb. 97.)
Aus diesen Sechsecken - und somit auch aus den Vierecken - kann man jedoch ein Parkett herstellen.

Fassen wir unsere bisherigen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen:
Aus jedem Dreieck und aus jedem Viereck lässt sich ein Parkett herstellen.

Logischerweise stellt sich nun die Frage: Mit was für Fünfecken kann man die Ebene überdecken? Hier ist keineswegs mehr zu erwarten, dass unsere für Drei- bzw. Vierecke gewonnenen Sätze in Kraft bleiben, denn mit regelmäßigen Fünfecken beispielsweise kann man die Ebene nicht überdecken. (Das folgt leicht daraus, dass jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks $108°$ beträgt.)

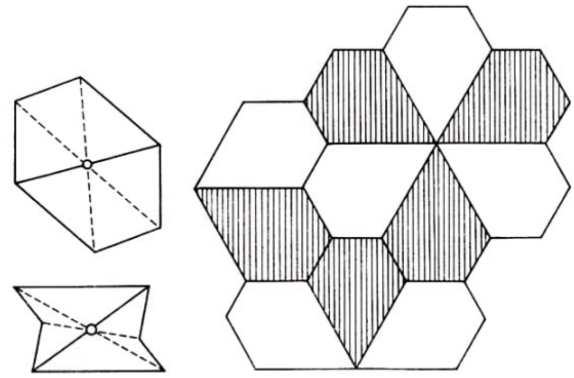


Abb. 97, 98

Es ist jedoch nicht schwer, Parkette anzugeben, die aus andersartigen Fünfecken hergestellt sind. Ein solches lässt sich aus den regelmäßigen Sechsecken von Abb. 88 herleiten (Abb. 98).
Aus dem Viereckparkett (Abb. 87) gehen Fünfeckparkette hervor, die vom vorstehenden verschieden sind (Abb. 99).

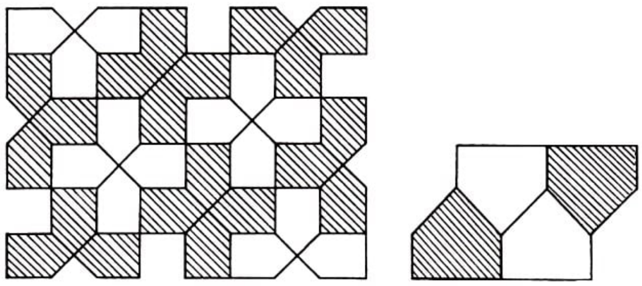


Abb. 99

Wir stellen fest, dass jedes der hierbei auftretenden Fünfecke wenigstens einen Winkel besitzt, der nicht größer als 90° ist. Wir zeigen, dass dies auch notwendig ist:
Wenn jeder Winkel eines Fünfecks stumpf ist, so lässt sich aus ihm kein Parkett herstellen. (Also insbesondere auch nicht aus einem regelmäßigen Fünfeck.)

Wir wollen Knotenpunkte diejenigen Punkte des gedachten Parketts nennen, in denen sich Endpunkte von Kanten treffen können. Da die Summe zweier stumpfer Winkel größer als 180° ist, können in einem Knotenpunkt höchstens drei Vielecke, also höchstens drei Kanten zusammenstoßen. Da sich auch mindestens drei Kanten treffen müssen, ist also jeder Knotenpunkt des betreffenden Fünfeckparketts dreikantig.

Wir beweisen noch mehr, als wir behauptet haben:
Wir zeigen nämlich, das sich nicht einmal aus Fünfecken, die nicht kongruent zu sein brauchen, ein Fünfeckparkett herstellen lässt, bei dem in jedem Knotenpunkt drei Kanten zusammenstoßen.

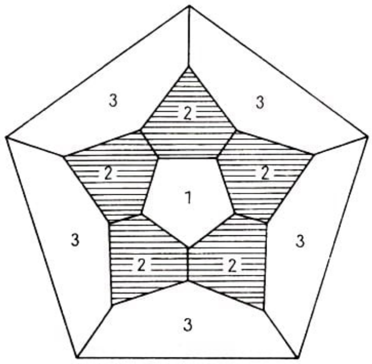


Abb. 100

In Abb. 100 versuchen wir, von einem mit 1 bezeichneten beliebigen Fünfeck ausgehend, ein derartiges Parkett aufzubauen. Das Ausgangsfünfeck wird von den schattierten Fünfecken vom Typ 2 eingefasst, an die sich der Kreis derer vom Typ 3 anschließt. Hier stoßen jedoch in jedem Knoten bereits genau drei Kanten zusammen, die Parkettierung lässt sich also nicht weiter fortsetzen, ein solches Parkett existiert nicht.

Als sehr schwer hat sich die Frage erwiesen, welcher Art alle diejenigen Fünfecke bzw. Sechsecke sind, aus denen sich ein Parkett herstellen lässt; auch heute ist diese Frage noch nicht vollständig geklärt. All dies legt den Schluss nahe, dass die Aufgabe für konvexe Vielecke, die mehr als sechs Seiten besitzen, noch schwerer, noch undurchsichtiger sein wird.
Es erweist sich indessen, dass dem nicht so ist, denn diese Frage lässt sich kurz wie folgt beantworten:

Aus konvexen Vielecken von mehr als sechs Seiten lässt sich kein Parkett herstellen.

Diese Behauptung beweisen wir indirekt.
Angenommen, entgegen der Behauptung existiere ein solches Parkett, dessen Bauelemente kongruente konvexe Vielecke von größerer Seitenzahl als 6 sind. Wir zeigen dann, dass wir, von dieser Annahme ausgehend, zu einer unmöglichen Folgerung gelangen, was die Unmöglichkeit der Prämisse beweist.

Im Hinblick auf das vorausgesetzte Parkett führen wir jetzt einige Bezeichnungen ein. Die Seitenzahl der Basisvielecke der Parkettierung sei n und f ihr Flächeninhalt.
Offensichtlich können wir einen Kreis finden, mit dem sich dieses Vieleck überdecken lässt, d sei sein Durchmesser. Das bedeutet zugleich, dass der Abstand zweier beliebiger Punkte des Grundvielecks nicht größer als d sein kann. (Der Wert von d ist offensichtlich nicht eindeutig bestimmt, von einer gewissen Grenze ab ist er beliebig wählbar.)

Der Kürze halber wollen wir annehmen, dass die Knotenpunkte unseres Parketts nicht innere Punkte einer Kante sind, also z. B. nicht von der Art sind wie die Knotenpunkte von Abb. 86. (Auch ohne diese Voraussetzung würde sich der Beweis in ähnlicher Weise führen lassen, er wäre dann aber um einiges länger.)

Wir legen jetzt auf unser Parkett ein Quadrat mit der Seitenlänge a (Abb. 101). Da nach Voraussetzung ein Parkett herstellbar ist, das die ganze Ebene bedeckt, kann der Wert von a beliebig groß sein.
Mit p bezeichnen wir die Anzahl der Knotenpunkte, die in das Quadrat oder auf seinen

Rand fallen.

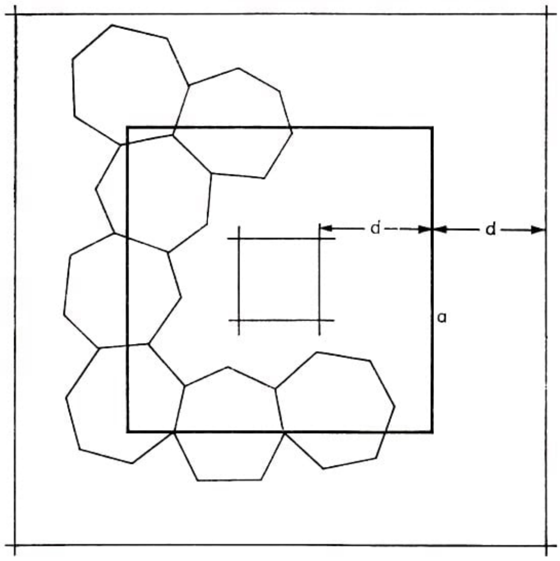


Abb. 101

Dieses Quadrat überdeckt x Vielecke vollständig, y sei dagegen die Gesamtzahl der vollständig oder zum Teil überdeckten Vielecke. Wir ziehen jetzt im Abstand d zu den Seiten des Quadrats Parallelen, die ein Quadrat von der Seitenlänge $a+2d$ bzw. $a-2d$ einschließen.

Die y Vielecke von vorhin werden dann von dem Quadrat mit der Seitenlänge $a+2d$ vollständig überdeckt, da diese Vielecke mit dem Quadrat der Seitenlänge a gemeinsame Punkte haben. Die Summe der Flächeninhalte der y Vielecke ist also kleiner als der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $a+2d$:

$$yf < (a+2d)^2 \qquad \text{d.h.} \qquad y < \frac{(a+2d)^2}{f} \tag{1}$$

Analog gilt: Das Quadrat mit der Seitenlänge $a-2d$ wird von den x ganz in dem Quadrat der Seitenlänge a befindlichen Vielecken vollständig überdeckt. Demzufolge ist die Summe ihrer Flächeninhalte größer als der Inhalt des Quadrates mit der Seitenlänge $a-2d$:

$$xf > (a-2d)^2 \qquad \text{d.h.} \qquad x > \frac{(a-2d)^2}{f} \tag{2}$$

Wir schätzen jetzt die Anzahl der in dem Quadrat mit der Seitenlänge a liegenden Vielecke ab. Zu den im Inneren oder auf dem Rand dieses Quadrats liegenden Knotenpunkten tragen diejenigen Vielecke bei, die entweder in diesem Quadrat liegen oder in dieses hineinragen. Unserer Bezeichnung gemäß ist deren Anzahl gleich y.
Da jedes Vieleck n Ecken besitzt, ist die Anzahl der Ecken, die sich in den betreffenden Knotenpunkten befinden, höchstens yn.
Da jedoch in einem Knoten wegen der Konvexität des Vielecks mindestens drei Ecken zusammenfallen müssen, ist die Anzahl der auf die Knotenpunkte entfallenden Ecken mindestens $3p$. Es ist also

$$3p \leq yn \tag{3}$$

Multiplizieren wir jetzt beide Seiten von (1) mit n, so bekommen wir

$$yn < \frac{(2a+d)^2 n}{f}$$

Hieraus folgt wegen (3)

$$3p < \frac{(a+2d)^2 n}{f} \qquad \text{d.h.} \qquad p < \frac{(a+2d)^2 n}{3f} \tag{4}$$

Wir wollen jetzt die Winkelsumme der in das Quadrat der Seitenlänge a fallenden Vielecke abschätzen. Diese Summe ist offensichtlich

$$(n-2)180° \cdot x$$

da es sich um x Vielecke handelt und die Winkelsumme jedes Vielecks $(n-2)180°$ beträgt. Andererseits ist die Summe der zu irgendeinem Knotenpunkt gehörigen Winkel 360°.

Die Summe der in Betracht kommenden Winkel, die bei allen derartigen Knotenpunkten liegen, kann also nicht größer als $p \cdot 360°$ sein. (Sie kann durchaus kleiner sein, weil von einem Knotenpunkt, der auf dem Rand des Quadrats liegt, nicht alle Winkel zu der Summe beitragen.) Daher ist

$$p \cdot 360° > (n-2)180° \cdot x$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch 360°, so erhalten wir

$$p \geq \frac{(n-2)x}{2}$$

oder, wenn wir noch (2) berücksichtigen,

$$p > \frac{n-2}{2} \cdot \frac{(a-2d)^2}{f} \tag{5}$$

Wir vergleichen jetzt (4) und (5):

$$\frac{(n-2)(a-2d)^2}{2f} < \frac{(a+2d)^2 n}{3f}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung mit $6f$, führen dann identische algebraische Umformungen durch und ordnen um, so bekommen wir

$$(n-6)(a^2+4d^2) < ad(20n-24)$$

Da $n > 6$ ist, können wir die Ungleichung durch $(n-6)$ dividieren:

$$a^2+4d^2 < \frac{20n-24}{n-6} ad \tag{6}$$

Wir verkleinern die linke Seite, indem wir $4d^2$ weglassen, und dividieren hernach beide Seiten durch a:

$$a < \frac{20n-24}{n-6}d$$

Wir untersuchen jetzt, wie groß der maximale Wert des Koeffizienten von d sein kann. Es ist

$$\frac{20n-24}{n-6} = 20 + \frac{96}{n-6}$$

Da $n-6$ mindestens gleich 1 ist, ist der größte Wert von $\frac{96}{n-6}$ gleich 96 und daher

$$\frac{20n-24}{n-6} \leq 20 + 96 = 116$$

Es ist also

$$a < 116d$$

Auf Grund der Existenz des betrachteten Parketts sind wir also zu der Folgerung gelangt, dass die Quadratseite a kleiner als ein festgehaltener Wert sein muss, nämlich kleiner als $116d$. Das widerspricht indessen der Voraussetzung, dass man auf das Parkett ein beliebig großes Quadrat decken kann, d.h., ein Parkett, das die ganze Ebene überdeckt, kann es nicht geben. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Es lohnt sich, den obigen Beweis noch einmal unter dem Gesichtspunkt zu betrachten, wo wir die einzelnen Voraussetzungen benutzt haben. Die Voraussetzung $n > 7$ war für (6) und beim letzten Schritt notwendig.
Aus der Konvexität des Vielecks hat sich ergeben, dass in jedem Knotenpunkt mindestens drei Ecken zusammenfallen. Keinen Gebrauch haben wir davon gemacht, dass die Vielecke kongruent sind, wir haben vielmehr nur benutzt, dass ihre Flächeninhalte gleich sind und dass sich alle mit einem Kreis vom Durchmesser d überdecken lassen.

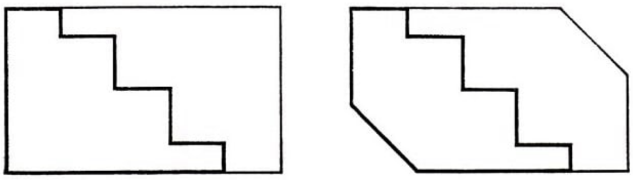


Abb. 102

Aus kongruenten konkaven Vielecken lässt sich auch im Falle $n \geq 7$ ein Parkett herstellen. Man kann sogar Vielecke beliebiger Seitenzahl angeben, aus denen sich eine Ebenenparkettierung anfertigen lässt. Beispiele hierfür sind in Abb. 102 für gerade bzw. ungerade Seitenzahl angegeben.
Je zwei dieser Vielecke lassen sich in ein Rechteck bzw. in ein zentralsymmetrisches Sechseck einsetzen.

Bei der praktischen Anwendung des Parketts spielen auch künstlerische und ästhetische Gesichtspunkte eine Rolle. Schönere Muster als aus kongruenten Elementen hergestellte Parketts ergeben Parketts, die aus verschiedenen Elementen zusammengesetzt sind, und ihre Wirkung lässt sich noch steigern, wenn man die identischen Elemente zusätzlich mit derselben Farbe färbt.

Die Untersuchung der Möglichkeiten, die aus verschiedenen Elementen zu verfertigende Parkettierungen bieten, ist gleichfalls sehr kompliziert.
Wir wollen hier einen speziellen Fall auswählen, dem auch im Hinblick auf die praktischen Anwendungen besondere Bedeutung zukommt. Wir fordern, dass

1. die Parkettbrettchen nur regelmäßige Vielecke sein dürfen,
2. die Knotenpunkte der Parkettierung von keiner einzigen Kante innere Punkte sind,
3. in je zwei verschiedenen Knotenpunkten dieselbe Anzahl von Dreiecken, dieselbe Anzahl von Vierecken, dieselbe Anzahl von Fünfecken usw. auftritt, während in einem Knotenpunkt die Anzahl der verschiedenen Arten von Vielecken nicht übereinzustimmen braucht.

Ein Parkett, das den obigen Bedingungen genügt, heißt homogen.

Die Bestimmung des ganzen homogenen Parketts ist mathematisch nicht schwierig, höchstens ziemlich langwierig.
An Hand einiger konkreter Fälle geben wir den Weg an, auf dem alle Lösungen zu finden sind. Da die regelmäßigen Vielecke konvex sind, treffen in einem Knotenpunkt des homogenen Parketts mindestens drei Vielecke zusammen. Jeder Winkel des regelmäßigen Vielecks beträgt

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

worin n die Seitenzahl bedeutet.
Aus dieser Formel geht zugleich hervor, dass mit wachsendem n auch die Winkel des regelmäßigen Vielecks zunehmen; die kleinsten Winkel hat also das regelmäßige Dreieck, nämlich 60°.

Da die Winkelsumme in einem Knotenpunkt 360° beträgt, folgt hieraus bereits, dass in einem Knotenpunkt höchstens sechs Ecken zusammenfallen können. Wir können also unsere Aufgabe in vier Teile zerlegen, je nachdem, ob ein Knotenpunkt 3, 4, 5 oder 6 Ecken enthält.
Schauen wir uns z.B. an, wie die zu dem zweiten Fall gehörigen Parkette zu bestimmen wären. (Hier befinden sich in jedem Knotenpunkt vier Ecken.)

Die Seitenzahlen der regelmäßigen Vielecke, die den Knotenpunkt bilden, seien der Reihe nach n_1, n_2, n_3 und n_4. Ihre Winkel sind jeweils

$$180^\circ - \frac{360}{n_1}, \quad 180^\circ - \frac{360}{n_2}, \quad 180^\circ - \frac{360}{n_3}, \quad 180^\circ - \frac{360}{n_4}$$

Die Summe der an einem Knotenpunkt liegenden vier Winkel - also der obigen vier Winkel - beträgt 360°:

$$4\cdot 180^\circ - 360^\circ \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right) = 360^\circ$$

Durch Umordnung erhalten wir hieraus

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

Unsere Aufgabe besteht jetzt im wesentlichen darin, positive ganze Lösungen dieser Gleichungen zu finden. Die Werte für n sind natürlich größer als 2. Wir denken sie der Größe nach geordnet:

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4}$$

Wir untersuchen zunächst die Anzahl der Dreiecke. In einem Knotenpunkt können nicht drei Dreiecke zusammenstoßen, denn wenn zum Beispiel $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ wäre, so würde

$$3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{n_4} = 1 \qquad , \qquad \frac{1}{n_4} = 0$$

folgen, was unmöglich ist.
Wir nehmen an, dass es zwei Dreiecke gibt, also $n_1 = n_2 = 3$ ist. Dann ist

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} \qquad , \qquad n_3 = 3 + \frac{9}{n_4 - 3}$$

Da n_3 ganz ist, muss $(n_4 - 3)$ Teiler von 9 sein, ihre möglichen Werte sind also

$n_4 - 3$	1	3	9
n_4	4	6	12
n_3	12	6	4

Da wir die n_i der Größe nach geordnet hatten, sind hieraus nur die Lösungen $n_3 = 6$, $n_4 = 6$ und $n_3 = 4$, $n_4 = 12$ möglich.
Für Knotenpunkte, die zwei Dreiecke enthalten, sind also die möglichen Lösungen:

$$A : (3,3,6,6) \qquad \text{und} \qquad B : (3,3,4,12)$$

Wir nehmen jetzt an, in dem Knoten gäbe es nur ein Dreieck ($n_1 = 3$). Dann kann der kleinste Wert von n_2 gleich 4 sein. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

Hieraus folgt analog zu oben

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12}$$

Da

$$\frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4} \qquad \text{ist, folgt} \qquad \frac{5}{12} = \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{2}{n_3}$$

und damit

$$n_3 \leq \frac{24}{5} < 5$$

n_3 kann also nur 4 sein. Durch Einsetzen in die Gleichung ist ersichtlich, dass dann $n_4 = 6$ ist. Wir haben also die Lösung

$$C : (3,4,4,6)$$

bekommen.
n_2 kann nicht größer als 4 sein, weil sonst auch n_3 und n_4 größer als 4 wären und somit

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{14}{15} < 1$$

gelten würde, was unmöglich ist. Wenn in dem Knoten ein Dreieck liegt, können somit nur die Fälle A, B, C auftreten.

Wenn kein Grundelement des Parketts ein Dreieck ist, so ist der kleinste Wert von n_1 gleich 4. Dann kann aber keiner der Werte n_2, n_3, n_4 größer als 4 sein, weil sonst die Summe der Reziproken kleiner als 1 wäre, also nicht die Gleichung erfüllen würde.
Da wir andererseits gefordert haben, dass die n_i der Größe nach geordnet sind, muss jedes auch mindestens 4 sein. Die einzige Lösung in diesem Falle lautet also

$$D : (4, 4, 4, 4)$$

Aus einem ähnlichen Grund kann n_1 auch nicht größer als 4 sein. Damit haben wir alle vier Lösungen unserer Gleichung gefunden.

Es fragt sich jedoch, ob zu unseren Lösungen der Gleichung stets ein Parkett gehört, das die ganze Ebene bedeckt. Hierfür haben wir von vornherein keine Garantie, denn wir haben die Bedingung für die Existenz eines Parketts nur in einem einzelnen Knotenpunkt untersucht und sind nicht sicher, ob sich das auf die ganze Ebene ausdehnen lässt.
Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir jetzt die Lösungen A, B, C, D untersuchen.

Die Lösung A lässt sich leicht realisieren (Abb. 103).

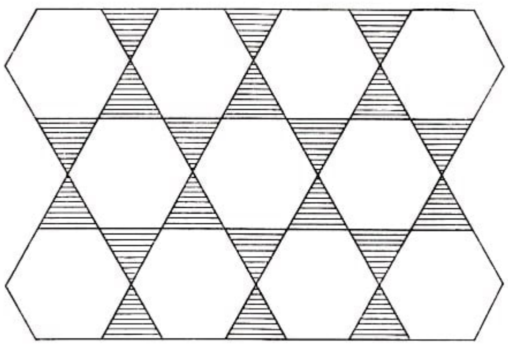


Abb. 103

Wir zeigen jetzt, dass zu der Lösung B kein realisierbares Parkett gehört. Wir wählen nämlich ein Zwölfeck.
An zwei benachbarten Seiten desselben kann sich kein Quadrat anschließen, weil sonst im Widerspruch zur Voraussetzung in der gemeinsamen Ecke zwei Quadrate zusammenstoßen würden. Quadrate bzw. Dreiecke, die an drei benachbarte Seiten des Zwölfecks anstoßen, können, wie in Abb. 104 dargestellt ist, auf vier verschiedene Weisen zueinander liegen.

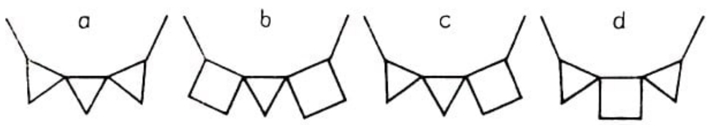


Abb. 104

Wir versuchen, das auf die ganze Ebene fortzusetzen. Die ursprünglichen Vielecke in der Abbildung bezeichnen wir mit a. Die weitere Konstruktion ist in jedem Falle eindeutig festgelegt, die Reihenfolge der Konstruktion wird durch die Nummerierung angegeben (Abb. 105).

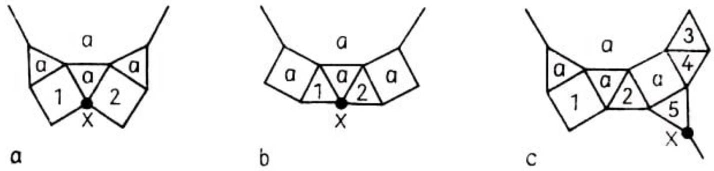
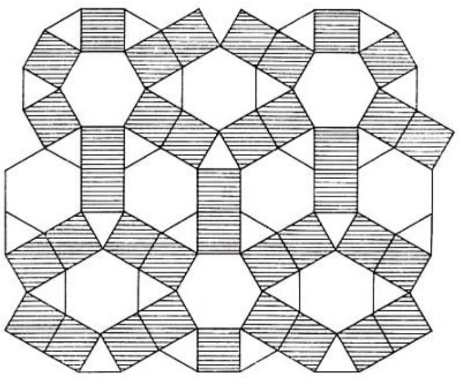
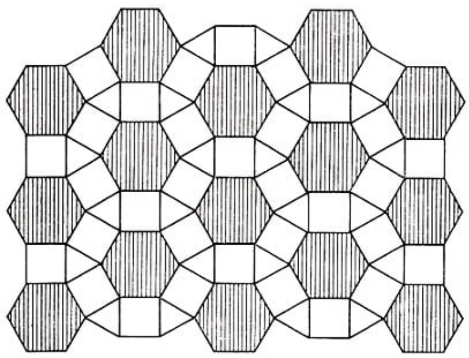


Abb. 105

In den Abbildungen a), b), c) erkennt man die Unmöglichkeit, die Konstruktion fortzusetzen, an dem mit X bezeichneten Knotenpunkt, weil dort notwendig solche Vielecke zusammentreffen, die nicht unseren Bedingungen entsprechen. Dass man im Falle d) die Konstruktion nicht fortsetzen kann, folgt daraus, dass sie notwendig auf den Fall b) bzw. c) zurückführt, je nachdem, ob wir an die benachbarte Zwölfeckseite des einen Dreiecks ein Viereck oder ein Dreieck anlegen.





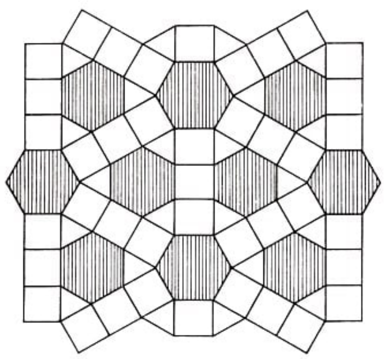
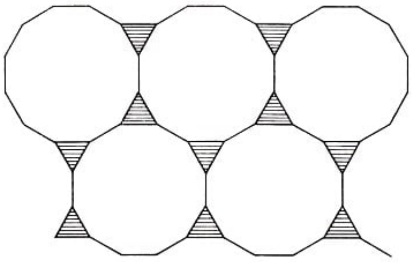


Abb. 106-108

Die Lösung C lässt sich auf mehrerlei Weise realisieren (Abb. 106, 107, 108).
Die Lösung D kennen wir bereits von Abb. 87 her.

Lassen wir die in der Definition des homogenen Parketts gestellte 3. Bedingung weg, so bekommen wir ein sog. inhomogenes Parkett. In Abb. 109 ist ein aus regelmäßigen Zwölfecken und Dreiecken aufgebautes homogenes Parkett und das entsprechende inhomogene Parkett dargestellt.



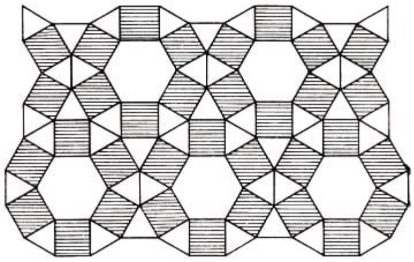


Abb. 109a, b

Die in Zusammenhang mit der Parkettierung auftretenden geometrischen Probleme sind Quelle zahlloser weiterer Gedanken und Fragen. Wir nennen hier nur einige davon.

Es war davon die Rede, dass sich z. B. die Ebene nicht lückenlos mit Kreisen belegen lässt. Wenn wir trotzdem einen Fußboden mit kongruenten Kreisen auslegen möchten, so taucht die Frage auf, wie man die Kreise möglichst dicht anordnen kann, d.h. so, dass das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt des nicht bedeckten und dem des bedeckten Teils möglichst klein ist.
Man kann beweisen, dass dies dann der Fall ist, wenn die Mittelpunkte der Kreise zugleich die Knotenpunkte eines aus regelmäßigen Dreiecken hergestellten Parketts sind.
Im allgemeinen ist es sehr schwer, die dichteste Lagerung herauszufinden, wenn man an Stelle von Kreisen andere ebene Figuren nimmt.

Die Fragen, die wir hier für die Ebene behandelt haben, legen natürlich auch entsprechende Fragen für den Raum nahe: Mit was für Körpern kann man den Raum lückenlos und schlicht ausfüllen ?
Abgesehen von den Parallelepipeda (Prismen mit parallelogrammförmiger Grundfläche, z. B. Quader, Würfel) könnten wir auf den ersten Blick kaum Körper nennen, die hierzu geeignet sind; es gibt jedoch solche.
Auch hier sind aber noch zahlreiche Fragen ungelöst.

Gleichfalls ungelöst ist auch die Frage nach der dichtesten Lagerung kongruenter Kugeln. Insofern besteht ein interessanter Unterschied zwischen dem Bau der Ebene und des Raumes, als wir zwar mit beliebigen Dreiecken sehr leicht ein Parkett herstellen können, der Raum jedoch mit dem räumlichen Analogon zum Dreieck, dem Tetraeder (Pyramide mit dreieckiger Basis), nicht schlicht und lückenlos ausgefüllt werden kann. Mit Tetraedern und Oktaedern gleicher Kantenlänge ist aber bereits eine homogene Ausfüllung des Raumes möglich.

Fragen dieser Art finden auch praktische Anwendung, z.B. bei der Untersuchung der Kristallstruktur. Dieser Problemkreis der Mathematik gehört zu einem in den letzten Jahrzehnten entstandenen Zweig der Geometrie, der sogenannten diskreten Geometrie, zu der gerade von ungarischen Mathematikern entscheidende Beiträge geleistet worden sind.

11 Interessante Zahlen

János Surányi

1. Seit undenklichen Zeiten musste der Mensch im Verlauf seiner Tätigkeit zählen. Anfangs verband er den Namen der Zahlen mit den Gegenständen. Sehr bald begann ihm aber bewusst zu werden, dass es sich hierbei nicht um etwas Fühlbares, Wahrnehmbares, sondern um einen abstrakten Begriff handelt.
Da er sich aber schwer mit der vollen Abstraktheit der Zahlen abfinden konnte, strebte er danach, sie mit verschiedenen Eigenschaften auszustatten.

Auch heute noch sieht man manche Zahlen z. B. als Glücks- oder Unglückszahlen an, während man in früheren Zeiten diese Zahlenmystik unter dem Namen Nummerologie als eine besondere Wissenschaft betrachtete. Neben solchen hineingedeuteten Eigenschaften begann man jedoch auch, tatsächliche Eigenschaften der Zahlen aufzudecken, und brachte diese mit menschlichen Eigenschaften in Zusammenhang.

Ein Beispiel hierfür ist die Gruppe der vollkommenen Zahlen.
Die Griechen sahen die Teiler der Zahlen als Teil der Zahl an. Auch heute pflegen wir noch im Alltagsleben von dem "soundsovielten Teil" einer Menge zu sprechen. Kennt man einen Teiler einer Zahl, so kann man die Zahl leicht in aus ebensoviel Einheiten bestehende gleiche Teile aufteilen.

Es ist verständlich, dass die Zahl selbst dabei nicht als Teiler der Zahl aufgefasst wird. Wir setzen jetzt die verschiedenen "Teile" einer Zahl zusammen. (Dem heutigen Sprachgebrauch nach addieren wir die echten Teiler von ihr, d. h. diejenigen, die kleiner als die Zahl selbst sind.)

Die "Teile" von 4 sind z. B. 1 und 2, ihre Summe ist $1 + 2 = 3$. Der einzige "Teil" von 2 und 5 ist 1. Die "Teile" von 6 sind 1, 2, 3, ihre Summe ist $1+2+3 = 6$. Die "Teile" von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, ihre Summe ist 16.
Die Griechen sahen solche Zahlen, die "aus ihren verschiedenen Teilen zusammensetzbar sind" - wie z. B. die 6 - als Symbol besonders hochgradiger Vollkommenheit an und nannten sie vollkommene Zahlen. Weitere Beispiele für vollkommene Zahlen sind: 28 (ihre Teiler sind 1, 2, 4, 7, 14, ihre Summe ist 28); 496; 8128. Bisher sind 23 vollkommene Zahlen bekannt.

2. Zwei Zahlen, bei denen sich jeweils die andere ergibt, wenn man die Teiler der einen addiert, wurden als höchster Ausdruck der Freundschaft angesehen; man nannte sie daher befreundete Zahlen. Pythagoras hat angeblich von zwei Schülern gesagt, sie seien Freunde wie die 220 und die 284.

In der Tat sind die echten Teiler von 220: $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$,
ihre Summe: $1 + 2 + 4 + 5 - +10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$;

die echten Teiler von 284: $1, 2, 4, 71, 142$,
ihre Summe: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Es ist interessant, dass in den antiken Quellen nur dieses Paar befreundeter Zahlen

auftritt. Zu Anfang der Neuzeit wurden dagegen von Fermat, Mersenne, Descartes eine Reihe solcher Zahlenpaare aufgestellt, darunter auch 6- und 8stellige.
Interessant ist ferner, dass das nächstkleinste Zahlenpaar erst in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts von einem 16jährigen italienischen Jungen namens Niccolo Paganini angegeben wird; es handelt sich dabei um 1184 und 1210.

Die echten Teiler von 1184: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592$,
ihre Summe: $1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$;

echte Teiler von 1210: $1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605$,
ihre Summe: $1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$.

3. Wesentlich neueren Ursprungs ist das Interesse an den Phönixzahlen. Das bekannteste Beispiel davon ist 142857.
Einige Vielfache hiervon sind in der nachstehenden Tabelle

$$\begin{array}{lll} 142857 \cdot 1 = 142857 & 142857 \cdot 2 = 285714 & 142857 \cdot 3 = 428571 \\ 142857 \cdot 4 = 571428 & 142857 \cdot 5 = 714285 & 142857 \cdot 6 = 857142 \end{array}$$

festgehalten. Wir beobachten, dass diese Vielfachen aus den Ziffern der Ausgangszahl, und zwar in derselben Reihenfolge gebildet sind, nur dass dabei bei einer anderen Ziffer begonnen wird, und wenn man am Ende der Zahl angelangt ist, so geht es mit dem Anfang der Zahl weiter.
Die Phönixzahlen haben ihren Namen von dem in der Phantasie existierenden Vogel Phönix erhalten. Wenn man diesen verbrennt, so wird er - der Sage nach - wieder aus seiner Asche auferstehen.

4. Mit der Zeit wurde es jedem denkenden Menschen immer klarer, dass die Zahlen nicht die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften besitzen. Diejenigen jedoch, die sich gern mit Zahlen beschäftigen, achten auch weiterhin auf verschiedene interessante Eigenschaften der Zahlen.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 111 \cdot 1 &= 121 \\ 111 \cdot 111 &= 12321 \\ 1111 \cdot 1111 &= 1234321 \\ 3 \cdot 3 &= 9 \\ 33 \cdot 33 &= 1089 \\ 333 \cdot 333 &= 110889 \\ 3333 \cdot 3333 &= 11108889 \\ 9 \cdot 9 &= 81 \\ 99 \cdot 99 &= 9801 \\ 999 \cdot 999 &= 998001 \\ 9999 \cdot 9999 &= 99980001 \end{aligned}$$

Nach einer sehr einfachen Gesetzmäßigkeit sind die aus lauter gleichen Ziffern geschriebenen Zahlen aufgebaut, z.B. 1, 11, 111, 1111,...

Wir multiplizieren jede mit sich selbst. Das Ergebnis gibt die obenstehende Tabelle wieder.
Ähnlich verfahren wir mit den aus lauter Dreien und lauter Neunen geschriebenen Zahlen. Auch hiervon sind die Ergebnisse angegeben.

5. Statt weitere interessante Eigenschaften aufzuzählen, wollen wir jetzt näher untersuchen, worauf die genannten Erscheinungen beruhen. Wie kann man vollkommene bzw. befreundete Zahlen finden?
Setzen sich die in den zuletzt aufgeschriebenen Tabellen gefundenen Regelmäßigkeiten systematisch fort? Lassen sich weitere ähnliche Tabellen herstellen ?

Beginnen wir mit dem letzten Beispiel! Ist es wahr, dass wir, wenn wir die mit fünf Neunen geschriebene Zahl 99999 mit sich selbst multiplizieren, die Zahl 9999800001 bekommen?
Die 99999 ist gleich 100000 weniger Eins. Wir können also auf die Weise mit ihr multiplizieren, dass wir von dem 100000fachen des Multiplikanden den Multiplikanden einmal subtrahieren. Führen wir dies mit dem Multiplikanden 99999 durch, so gelangen wir, wie leicht ersichtlich ist, zu dem erwarteten Ergebnis:

$$\begin{array}{rcr} 99999 \cdot 99999 & = & 99999 \cdot 100000 \;\; - 99999 \\ & = & 9999900000 \\ & - & 99999 \\ \hline & & 9999800001 \end{array}$$

Es ist auch klar, dass diese Regelmäßigkeit nicht davon abhing, dass wir gerade eine mit fünf Ziffern geschriebene Zahl mit sich selbst multipliziert haben. Ein ähnliches Ergebnis resultiert, wenn wir mit einer mit beliebig vielen Neunen geschriebenen Zahl in derselben Weise verfahren.

Auf ähnliche Weise können wir auch die Multiplikation von Zahlen erklären, die aus lauter Dreien geschrieben sind.
Wir können ein Produkt als eine solche Summe ansehen, bei der jeder Summand gleich dem Multiplikanden und die Anzahl der Summanden gleich dem Multiplikator ist.

Wenn zum Beispiel der Multiplikand 33333 lautet, so können wir jedes Glied in die Summe von drei Summanden 11111 zerlegen. Die Anzahl der Summanden wird also dreimal so groß sein wie zuvor, in unserem Falle also 99999.
Wir haben aber soeben gesehen, wie einfach man mit dieser Zahl multiplizieren kann. Mit derselben Überlegung gelangen wir jetzt zu der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{rcr} 33333 \cdot 33333 & = & 11111 \cdot 99999 \\ & = & 1111100000 \\ & - & 11111 \\ \hline & & 1111088889 \end{array}$$

Wieder liegt auf der Hand, dass wir analog vorgehen können, wenn wir von einer mit beliebig vielen Dreien geschriebenen Zahl ausgehen, und dass wir dabei zu einem ähnlichen Ergebnis gelangen.

Außerordentlich einfach ist die Erklärung für die Regelmäßigkeit, die wir bei der Multiplikation von aus Einsen geschriebenen Zahlen mit sich selbst gefunden haben. Als Beispiel wählen wir wieder die fünfstellige Zahl 11111.
Wir führen die Multiplikation auf die übliche Weise aus. Jedes Teilprodukt besteht dann aus fünf Einsen, jeweils um eine Ziffer nach rechts verschoben. Auf diese Weise gelangt die erste Ziffer des letzten Teilprodukts unter die letzte Ziffer

$$\begin{array}{rcl} 1111 & |1| & \cdot 11111 \\ 111 & |1| & 1 \\ 11 & |1| & 11 \\ 1 & |1| & 111 \\ & |1| & 1111 \\ \hline 1234 & 5 & 4321 \end{array}$$

des ersten Teilprodukts - des Multiplikanden selbst. In dieser Spalte stehen also so viele Einsen, wie es in dem Multiplikanden (bzw. dem Multiplikator) selbst Einsen gibt; und von hier ab nimmt die Anzahl der Einsen nach rechts und nach links um jeweils eine Eins ab.

Diese Regelmäßigkeit bleibt für Zahlen beliebiger Stellenzahl nicht erhalten, denn wenn sich in einer Spalte mehr als 9 Einsen ansammeln, entsteht ein Übertrag, und die Regelmäßigkeit der Ziffern des Ergebnisses wird zerstört.

Führen wir die Rechnung statt im Dezimalsystem in einem Zahlensystem mit größerer Basis durch[12], so bleibt eine ähnliche Regelmäßigkeit bis zu Zahlen von größerer Stellenzahl bestehen.
Stets gilt sie aber nur für Zahlen, die aus weniger Einsen bestehen, als die Basis des Zahlensystems beträgt.

Es ist auch erwähnenswert, dass die obigen Gesetzmäßigkeiten auch in Zahlensystemen mit anderer Basis zu beobachten sind. Wir empfehlen, in anderen Zahlensystemen nach Zahlen zu suchen, die ähnliche Eigenschaften aufweisen.

6. Wir kehren zum dekadischen Zahlensystem zurück und wollen aus lauter Sechsen geschriebene Zahlen mit sich selbst multiplizieren. Die auftretende Gesetzmäßigkeit ist nach dem Vorbild von oben nicht schwer zu erklären.

$$\begin{array}{rrl} 6 & \cdot 6 & = 36 \\ 66 & \cdot 66 & = 4356 \\ 666 & \cdot 666 & = 443556 \\ 6666 & \cdot 6666 & = 44435556 \end{array}$$

Eine noch einfachere Gesetzmäßigkeit ergibt sich, wenn wir Zahlen, die mit lauter Dreien bzw. mit lauter Sechsen geschrieben sind, um Eins vergrößern und dann mit sich selbst multiplizieren. Das Ergebnis haben wir in einer Tabelle zusammengefasst:

$$\begin{array}{rrlrrl} 4 & \cdot 4 & = 16 & 7 & \cdot 7 & = 49 \\ 34 & \cdot 34 & = 1156 & 67 & \cdot 67 & = 4489 \\ 334 & \cdot 334 & = 111556 & 667 & \cdot 667 & = 444889 \\ 3334 & \cdot 3334 & = 11115556 & 6667 & \cdot 6667 & = 44448889 \end{array}$$

[12] Siehe den Aufsatz "Zeitvertreib mit Zahlensystemen" Seite 101; vgl. ferner [9]. Vgl. darüber hinaus, auch für das Folgende, die Literaturhinweise [10] bis [14].

Wiederum ist es nicht schwer, die auftretenden Regelmäßigkeiten unter Zuhilfenahme der früher gefundenen Ergebnisse zu begründen. Wir brauchen nur zu bedenken, um wieviel das Produkt zunimmt, wenn wir seine beiden Faktoren um 1 vergrößern, z. B.

$$\begin{aligned} 3334 \cdot 3334 &= 3334 \cdot 3333 + 3334 \\ &= 3333 \cdot 3333 + 3333 + 3334 \\ &= 11108889 + 1111 + 5556 \\ &= 11115556 \end{aligned}$$

7. Wir wollen uns jetzt die Phönixzahlen ansehen. Was für eine Regelmäßigkeit können wir in der Zahl 142857 entdecken?
Man stellt z. B. fest, dass die aus den mittleren beiden Ziffern gebildete Zahl 28 das Doppelte der vor ihr stehenden 14, die hinter ihr stehende 57 dagegen um 1 größer als das Doppelte von 28 ist. Ob die auf Grund ähnlicher Regelmäßigkeiten gebildete 234693 eine Phönixzahl ist?

$$\begin{aligned} 234693 \cdot 1 &= 234693 \\ 234693 \cdot 2 &= 469386 \\ 234693 \cdot 3 &= 704079 \end{aligned}$$

Wie wir sehen, fängt es bei der Verdopplung der Zahl noch mit einer gewissen ähnlichen Regelmäßigkeit an, in den letzten Ziffern geht sie jedoch verloren, und bei dem Dreifachen ist überhaupt keine Gesetzmäßigkeit mehr zu entdecken.
Wir müssen also den Grund tiefer suchen. Dazu berechnen wir das folgende Vielfache unserer Phönixzahl:

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

Auf diese Weise gelangen wir zu der mit sechs Neunen geschriebenen Zahl. Diese weist bereits eine interessante Eigenschaft auf. Addieren wir hierzu eine Eins, so bekommen wir 1000000. Das bedeutet mit anderen Worten: Wenn wir eine Million durch 7 dividieren, so erhalten wir nach der sechsten Division aufs neue den Rest 1.
Ganz ähnlich verhält es sich, wenn wir nicht 1000000, sondern 1 durch 7 dividieren, nur mit dem Unterschied, dass jetzt die Division mit dem Aufschreiben einer Null beginnt, an die sich nach dem Komma Dezimalstellen anschließen.

In der Tat ist das Verfahren dasselbe, ob der Dividend nun 1 oder 1000000 lautet; an den Rest I hängt man eine 0 und dividiert weiter.
Nach dem sechsten Schritt bekommen wir aufs neue 1 als Rest, und dann wiederholen sich im weiteren die früheren Reste in derselben Reihenfolge. Es wiederholen sich also auch die Ziffern des Quotienten periodisch:
Wir gelangen zu einem periodischen Dezimalbruch, dessen Periode gerade unsere Phönixzahl ist.

Nicht von jeder ganzen Zahl ergibt jedoch die Dezimaldarstellung des Reziproken eine Phönixzahl, denn z.B. $1/2 = 0{,}5$ liefert die Zahl 5, die jedoch nicht Phönixzahl ist. Es ist zwar richtig, dass wir im Falle von $1/2$ auch keinen periodischen Dezimalbruch erhalten haben, aber auch die sich aus der Zahl $1/3 = 0{,}3333...$ ergebende Zahl 3 sowie die sich aus der Periode von $10/99$ ergebende Zahl 10 sind keine Phönixzahlen.

```
1:13 = 0,076923
10
 90
 120
   30
     40
      1
```

076923 · 1 = 076923
$076923 \cdot 2 = 153846$
076923 · 3 = 230769
076923 · 4 = 307692
$076923 \cdot 5 = 384615$
$076923 \cdot 6 = 461538$
$076923 \cdot 7 = 538461$
$076923 \cdot 8 = 615384$
076923 · 9 = 692307
076923 · 10 = 769230
$076923 \cdot 11 = 846153$
076923 · 12 = 923076
076923 · 13 = 999999

Wir wollen eine Probe mit der Zahl 076923 machen, die die Periode von $1/13$ bildet. Die ersten 13 Vielfachen hiervon sind oben rechtsstehend wiedergegeben. Obwohl wir wiederum keine Phönixzahl erhalten haben, weist die aufgeschriebene Tabelle jedoch eine etwas ähnlich interessante Erscheinung auf.

Wenn wir bis zum l2fachen fortschreiten, zeigt sich bei der Hälfte der Produkte die bei den Phönixzahlen gefundene Regelmäßigkeit. (Diese sind in der Tabelle fett gedruckt.) Die übrigen sind dagegen aus den zuerst bei der Verdopplung auftretenden Ziffern nach derselben Gesetzmäßigkeit gebildet wie die anderen Produkte aus der ursprünglichen Zahl.

(Auch hier ist das 13fache der Zahl die mit sechs Neunen geschriebene Zahl, denn der sechste Teilrest ist 1, d. h., das 76923fache von 13 ist um 1 kleiner als eine 1, gefolgt von sechs Nullen, als eine Million.)

Es ist auch gar nicht zu erwarten, dass jedes Produkt aus der ursprünglichen Zahl dadurch entsteht, dass die Reihenfolge der Ziffern nicht geändert, sondern nur mit einer anderen Ziffer begonnen wird; denn hierzu wären 12 Ziffern notwendig, unsere Zahl ist jedoch nur sechsstellig.

8. Die Dezimaldarstellung des Reziproken einer Zahl ergibt dann eine Phönixzahl, wenn dieser Dezimalbruch periodisch ist und seine Periode aus um 1 weniger Ziffern besteht als diejenige Zahl, von der wir das Reziproke gebildet haben.
Nach der 7 hat die 17 als nächstes diese Eigenschaft:

Ihr Reziprokes ist ein periodischer Dezimalbruch, und die Periode ist 16stellig. Diese Periode liefert in der Tat auch eine Phönixzahl, wenn wir die zu Beginn der Periode stehende Null gleichfalls zu der Zahl hinzurechnen, wie wir das auch bereits im Falle von $1/13$ getan haben.
Wir haben nur die ersten drei Vielfachen aufgeschrieben. Jedoch auch ohne die Vielfachen auszurechnen - was eine sehr langwierige Arbeit wäre - können wir uns davon überzeugen, dass wir in der Tat auf diese Weise eine Phönixzahl bekommen haben.
Die Periode wird nämlich dort aufhören, wo im Verlauf der Division erstmalig ein Rest Auftritt, der schon früher einmal vorgekommen ist.

Dividieren wir jedoch durch 17 und ist die Division nicht ohne Rest durchführbar, so können als Reste nur die Zahlen $1, 2, 3, ..., 14, 15$ und schließlich 16 auftreten, insgesamt also 16 Zahlen.
Wenn wir nun eine 16stellige Periode bekommen haben, dann mussten sich 16 verschiedene Reste ergeben,

```
10:17 = 0,0588235294117647
100
 150
  140
    40
     60
      90
       50
       160
         70
          20
           30
           130
            110
              80
              120
                1
```

$$0588235294117647 \cdot 2 = 1176470588235294$$
$$0588235294117647 \cdot 3 = 1764705882352941$$
$$0588235294117647 \cdot 4 = 2352941176470588$$

also alle möglichen Reste. (Bei der obigen Division haben wir die "heruntergezogenen" Nullen mit einer kleineren Ziffer geschrieben und haben auch den zur Ziffer Null des Quotienten gehörenden Rest 10 neu aufgeschrieben, um die 16 verschiedenen Reste deutlich zu machen.)

Nehmen wir jetzt statt $1/17$ beispielsweise $11/17$, so ist das einerseits das 11fache von $1/17$. Andererseits haben wir aber, wenn wir dies in einen Dezimalbruch umwandeln, dieselbe Rechnung auszuführen, wie wir dies bei der Umwandlung von $1/17$ in einen Dezimalbruch von dem hierbei auftretenden Rest 11 ab durchgeführt haben.
Von da an folgen die Ziffern in dem Quotienten und die Reste genauso wie bei der Umwandlung von $1/17$ vom Rest 11 ab, bis wir zu dem Rest 1 gelangen.

Danach folgen dieselben Reste und somit auch dieselben Ziffern des Quotienten wie zu Beginn bei der Division von $1/17$, bis sich der Rest 11 wiederholt. Es ergibt sich also wieder ein periodischer Dezimalbruch, dessen Periode aus denselben Ziffern wie die Periode von $1/17$ und in derselben Reihenfolge besteht, nur dass sie mit einer anderen Ziffer beginnt.
Die auf diese Weise erhaltene Zahl ist aber, wie wir bereits erwähnt haben, das 11fache der Zahl, die aus der Periode von $1/17$ hervorgeht.

Auf dieselbe Weise können wir einsehen, dass bis zum 16fachen der Zahl jedes Vielfache aus denselben Ziffern besteht wie die ursprüngliche Zahl, in derselben Reihenfolge genommen, nur dass dabei mit einer anderen Ziffer begonnen wird und, wenn man ans Ende der Zahl gelangt ist, die zu Beginn der Zahl stehenden Ziffern wieder in der ursprünglichen Reihenfolge zu schreiben sind.
Damit haben wir nachgewiesen, dass die Periode von $1/17$ in der Tat eine Phönixzahl liefert.

Es scheint wahrscheinlich, dass es unendlich viele Phönixzahlen gibt. Das konnte bis jetzt jedoch weder bewiesen noch widerlegt werden.

9. Wir kehren nun zu den vollkommenen und den befreundeten Zahlen zurück. Bereits bei Euklid kann man finden, dass für eine natürliche Zahl p mit der Eigenschaft, dass Subtraktion einer Eins von der p-ten Potenz von 2 eine Primzahl ergibt, das 2^{p-1}-fache dieser Primzahl eine vollkommene Zahl ist.

Für $p = 2, 3, 5, 7$ bekommen wir auf diese Weise gerade die aufgezählten vollkommenen Zahlen. Vollkommene Zahlen von anderer Form sind nicht bekannt.
Erst 2000 Jahre später ist es jedoch Euler gelungen zu beweisen, dass alle geraden vollkommenen Zahlen von dieser Form sind.

Ungerade vollkommene Zahlen sind bisher nicht gefunden worden, und es ist auch nicht wahrscheinlich, dass solche existieren. Bislang ist es jedoch nicht gelungen, das zu beweisen.
Auf jeden Fall haben Euler und nach ihm viele andere verschiedene Bedingungen gefunden, denen ungerade vollkommene Zahlen genügen müssen, wenn es solche gibt.

Beispielsweise muss eine ungerade vollkommene Zahl mindestens 6 verschiedene Primteiler besitzen, und der größte Exponent einer Primzahlpotenz, die noch Teiler der Zahl ist, muss im Falle eines Primteilers ungerade, im Falle mehrerer gerade (also mindestens 2) sein.

Bereits die kleinste Zahl, die allen bis jetzt bekannten Bedingungen genügt, ist astronomisch groß. Das ist auch ein Hinweis darauf, dass die Existenz ungerader vollkommener Zahlen unwahrscheinlich ist.

Der Beweis der genannten Tatsachen erfordert zwar keine sonderlich großen mathematischen Kenntnisse, aber doch gewisse Voraussetzungen. Zumindest muss man zum Beweis den Fundamentalsatz der Zahlentheorie kennen.[13]
Dieser besagt, dass jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, entweder selbst Primzahl ist oder sich in ein Produkt aus endlich vielen Primzahlen zerlegen lässt und dass in jeder derartigen Zerlegung dieselben Primzahlen auftreten, und zwar jede ebenso oft.

Dieser Satz liefert in unserem Falle beispielsweise ein Verfahren, um alle Teiler einer Zahl zu überblicken und auf Grund dessen die Summe der Teiler zu bestimmen.
Auf weitere Einzelheiten des Beweises jedoch, der nicht einmal auf langwierige Rechnungen führt, wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen.

10. Wir können sagen, dass wir von den befreundeten Zahlen noch weniger wissen. Altbekannt ist wiederum Folgendes:
Bilden wir eine Zahlenfolge mit 5 als erstem Glied, bei der jede weitere Zahl um 1 größer als das Doppelte der vorhergehenden ist, und danach noch eine zweite Folge, die bei 17 beginnt und bei der jede Zahl um 3 größer als das 4fache der vorhergehenden ist, dann können wir folgendermaßen Paare befreundeter Zahlen finden:

Sind in der ersten Folge die $(n-1)$-te und n-te Zahl prim und ist auch in der zweiten Folge die n-te Zahl prim, so bekommen wir ein befreundetes Zahlenpaar, wenn wir das Produkt der in der ersten Folge gefundenen beiden Primzahlen mit 2^n multiplizieren

[13] Siehe z. B. [9] Kapitel I, S. 15-17, sowie in Zusammenhang mit vollkommenen Zahlen Kapitel VII, S. 202-205 und 210-214; ferner [14] sowie [10] bis [13] - Anm. des Übers.

und von der in der zweiten Folge gefundenen Primzahl gleichfalls das 2^n-fache nehmen:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\underline{5}, & \underline{11}, & \underline{23}, & \underline{47}, & 95, & \underline{191}, & \underline{383} \\
\underline{17}, & \underline{71}, & 287, & \underline{1151}, & 4607, & 18432, & \underline{73727}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
4 \cdot 5 \cdot 11 &= 220 \\
4 \cdot 71 &= 284 \\
16 \cdot 23 \cdot 47 &= 17296 \\
16 \cdot 1151 &= 18416 \\
128 \cdot 191 \cdot 383 &= 9363584 \\
128 \cdot 73727 &= 9437056.
\end{aligned}$$

Die Primzahlen haben wir durch Unterstreichen gekennzeichnet.
Unter den folgenden 6 Zahlen der ersten Reihe ist nur die vierte prim, in der zweiten ist dagegen die 15. Zahl durch 7 teilbar. Somit können wir höchstens, von der 15. und 16. Zahl der ersten Folge ausgehend, aufs neue befreundete Zahlen bekommen; diese sind bereits größer als tausend Billionen.

Hieraus ist bereits ersichtlich, dass nicht alle bekannten befreundeten Zahlen auf die genannte Weise entstanden sind. Auch unter den früher genannten finden wir welche, die in anderer Weise gebaut sind. Andererseits wissen wir aber auch nicht, ob in den oben aufgeschriebenen beiden Reihen unendlich viele Primzahlen vorkommen, und dementsprechend auch nicht, ob es unendlich viele befreundete Zahlenpaare gibt, die auf die oben aufgeschriebene Weise erzeugbar sind. Wir wissen nicht einmal, ob es unendlich viele Paare befreundeter Zahlen gibt.

Es ist unbekannt, ob eine gerade und eine ungerade Zahl ein befreundetes Zahlenpaar bilden können, geschweige denn, ob ein solches Zahlenpaar aus zwei solchen Zahlen bestehen kann, die keinen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

Analog dazu ist auch nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlen der Form $2^p - 1$ gibt. Wir wissen somit auch nicht, ob es unendlich viele gerade vollkommene Zahlen oder nur endlich viele gibt.

Die Primzahlen der Form $2^p - 1$ pflegt man Mersennesche Primzahlen zu nennen. Es ist nicht schwer einzusehen, dass eine Zahl dieser Art nur dann prim sein kann, wenn auch der Exponent p Primzahl ist.
Dagegen ist es nicht richtig, dass man auf diese Weise etwa zu jedem Exponenten p, der Primzahl ist, eine Primzahl erhält. Beispielsweise ist im Falle $p = 11$

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

Besonders seit der Verbreitung der elektronischen Rechenmaschinen ist es gelungen, von vielen astronomisch großen Mersenneschen Zahlen zu entscheiden, ob sie prim sind oder nicht.
Die größte bisher bekannte Mersennesche Primzahl, $2^{11213} - 1$, ist mit der Rechenmaschine von Illinois entdeckt worden. Die vollkommene Zahl, die sich hiermit bilden lässt, lautet $2^{11212} \cdot (2^{3217} - 1)$, Diese ist etwa 6750stellig.

Mit dieser zusammen sind derzeit 23 vollkommene Zahlen bekannt. Aus all dem geht jedoch nicht hervor, ob es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt oder nur endlich viele. Natürlich wissen wir auf diese Weise auch nicht, ob es unendlich viele gerade vollkommene Zahlen gibt oder nicht.

Es liegt danach auf der Hand, die Frage aufzuwerfen, ob unter den Zahlen der Form $2^n + 1$ Primzahlen vorkommen, und zwar welche bzw. wie viele. Hier kann man jedoch von dem Exponenten aussagen, dass auch er eine Potenz von 2 sein muss.
Fermat hat in der Tat vermutet, dass man eine Primzahl erhält, wenn man hierin irgendeine Potenz von 2 als Exponenten wählt. Diese Vermutung hat sich als falsch erwiesen.

Euler hat gezeigt, dass sich bereits für den Exponenten $32 = 2^5$ eine zusammengesetzte Zahl ergibt:

$$2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Seitdem sind zahlreiche höhere Potenzen von 2 untersucht worden, und es hat sich herausgestellt, dass die zu ihnen gehörigen Fermatschen Zahlen nicht prim sind. Wir wissen jedoch nicht, ob es weitere Fermatsche Primzahlen gibt, geschweige denn, ob es unendlich viele gibt.

Das Interesse an den Fermatschen Primzahlen ist dadurch stark gewachsen, dass sich - anderthalb Jahrhunderte später - auf Grund der Arbeit von Gauß herausgestellt hat, dass ein regelmäßiges Vieleck mit einer Seitenzahl, die Primzahl ist, nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn die Seitenzahl eine Fermatsche Zahl ist.
Auf Grund dessen lässt sich leicht die Konstruierbarkeit solcher Vielecke behandeln, deren Seitenzahl eine zusammengesetzte Zahl ist.

11. Bereits an dem Bisherigen haben wir gesehen, dass eine Zahl unter vielen verschiedenen Gesichtspunkten interessant sein kann. Man könnte denken, dass jede Zahl in gewissem Sinne interessant ist. Das geht auch aus der folgenden Geschichte hervor.

Ein indischer Mathematiker namens Ramanuyan wurde einmal von einem Freund besucht. Dieser erzählte bei seiner Ankunft, er sei mit einem Taxi mit dem Kennzeichen A 1729 zu ihm gefahren.

"Nun, ich denke" - bemerkte er dazu, "dass an dieser Zahl nichts besonders Interessantes ist."
Ramanuyan, der ein großer Kenner der Eigenschaften der Zahlen war, antwortete indessen:
"Du irrst, dies ist die kleinste Zahl, die man auf zwei verschiedene Weisen als Summe zweier dritter Potenzen schreiben kann."
In der Tat ist

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 13 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

Schreiben wir die ersten 12 Kubikzahlen auf und addieren jede zu den vorhergehenden und zu sich selbst, so können wir sehen, dass jede der kleineren Summen nur auf eine Weise zustande kommt. Auch der irrt nicht, der meint, dass jede Zahl eine interessante

Zahl ist. Wir können leicht auch mathematisch streng nachweisen, dass dies nicht anders sein kann.

Wir schicken voraus, dass wir, wenn wir von interessanten Zahlen gesprochen haben, stets an positive ganze Zahlen gedacht haben. Wäre nicht jede positive ganze Zahl interessant, so würde es unter den uninteressanten Zahlen eine kleinste geben.
Da diese jedoch die kleinste uninteressante Zahl wäre, käme ihr bereits ein nicht geringes Interesse zu. Damit sind wir aber schon zu einem Widerspruch dazu gelangt, dass diese Zahl nicht interessant sei.

Die Begründung ist ganz logisch, es lässt sich jedoch ein Einwand gegen sie vorbringen. Der Beweis wäre zu akzeptieren, wenn eindeutig definierbar wäre, wann eine Zahl interessant ist. Auch jemand, dem die Zahl am Anfang nicht interessant war, wird sicher darüber stolpern.
Im übrigen weichen auch die Ansichten verschiedener Leute darüber, wann eine Zahl für interessant und wann sie für weniger interessant gehalten wird, weit voneinander ab. Es wird auch gar nicht so sehr gefragt, ob diese Zahl interessant, jene uninteressant ist, sondern vielmehr, ob die eine sehr interessant, die andere nicht so sehr, eine dritte überhaupt nicht interessant ist.

Wir können daher die obige Überlegung auch nicht als Beweis ansehen, denn diejenige Eigenschaft, von der wir etwas beweisen wollen, ist selbst in hohem Maße unbestimmt. Aus der Begründung können wir allenfalls so viel entnehmen, dass an jeder Zahl etwas Interessantes zu finden ist. Das ist jedoch eine unbestimmte Behauptung, die wir auch ohne Beweis ruhig hinnehmen können.

12. Ich will nicht auf immer weiter hergeholte Eigenschaften die Bezeichnung "interessant" anwenden und nenne deshalb nur noch zwei Arten von Zahlen.
Oft hört man von pythagoreischen Zahlentripeln. Bekanntlich ist die Summe der Flächeninhalte der über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gezeichneten Quadrate gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse. Das kann man auch leicht aus Abb. 110 bis 112 ablesen.

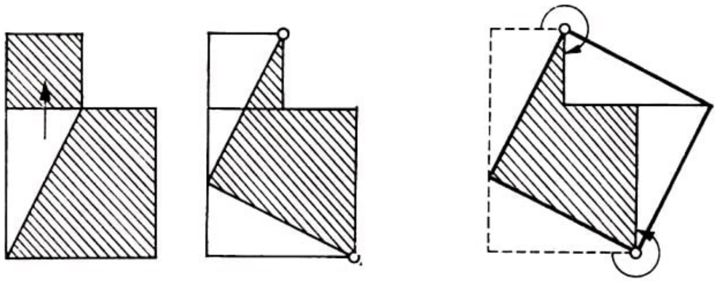


Abb. 110-112

Wir schieben in der in Abb. 110 dargestellten Figur, die aus den über den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks errichteten Quadraten besteht, das Dreieck nach oben und setzen das Dreieck, um $90°$ gedreht, noch einmal darunter (Abb. 111).
Drehen wir dann die Dreiecke um die bezeichneten Punkte um $270°$, so geht die Figur in das Quadrat über der Hypotenuse über (Abb. 112).

Bereits die Griechen haben sich dafür interessiert, ob es ein rechtwinkliges Dreieck gibt,

für das die Maßzahlen seiner Seiten ganze Zahlen sind.
Ein Zahlentripel, das die Seitenlängen eines solchen Dreiecks angibt, heißt pythagoreisches Zahlentripel. Es hat sich herausgestellt, dass es unendlich viele solcher Tripel gibt, und zwar lassen sich alle pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) durch die drei Formeln

$$x = r \cdot 2uv, \qquad y = r \cdot (u^2 - v^2), \qquad z = r \cdot (u^2 + v^2)$$

worin r eine beliebige natürliche Zahl ist, während v und v solche natürliche Zahlen sind, von denen die erste größer als die zweite ist, die keine gemeinsamen Teiler größer als 1 besitzen und von denen die eine gerade und die andere ungerade ist.

Die folgende Tabelle enthält einige sogenannte primitive pythagoreische Tripel, die dem Fall $r = 1$ entsprechen:

u	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9
v	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	1	6	3	5	7	2	4	8
x	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	36	72	144
y	3	5	15	7	21	9	35	11	45	13	33	63	55	39	15	77	65	17
z	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	85	97	145

Wir können beobachten, dass das Produkt der Zahlen jedes Tripels durch 60 teilbar ist. Man kann zeigen, dass dies für jedes pythagoreische Zahlentripel gilt.

Kehren wir zu unseren Formeln zurück, so können wir leicht nachrechnen, dass die Quadratsumme der ersten beiden Ausdrücke das Quadrat des dritten Ausdrucks ergibt, was für Zahlen wir auch für die Buchstaben darin einsetzen.
Klar ist auch, dass der Wert der Ausdrücke ganz ist, wenn die Buchstaben ganze Zahlen bedeuten.
Der Beweis dafür, dass wir auf diese Weise jedes pythagoreische Zahlentripel bekommen, wenn die Buchstaben die den obengenannten Bedingungen genügenden ganzen Zahlen durchlaufen, lässt sich wieder auf Grund des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie führen.

13. Es ist bekannt, dass sich die Mathematik das ganze Mittelalter hindurch nicht wesentlich entwickelt hat. Die mathematische Tätigkeit hat sich in dieser Zeit hauptsächlich auf die Gewinnung einzelner Rechenoperationen beschränkt.
Von den Kenntnissen in dieser Hinsicht wissen wir jedoch nur wenig, da diese möglichst geheimgehalten wurden, damit sie von keinem abgeguckt werden konnten, der dadurch einen Vorteil erlangt hätte.

Aus den Aufgaben, mit denen man sich damals beschäftigt hat, und ihren Lösungen geht jedoch hervor, dass ihnen die pythagoreischen Zahlentripel bekannt gewesen sein mussten, denn diese wurden in ihren Überlegungen oft benutzt.

Ein hervorragend begabter Mathematiker dieses langen Zeitalters war Fibonacci, mit anderem Namen Leonardo Pisano (der Lenard von Pisa, Sohn von Bonaccio), der sich auch als Zauberkünstler einen Namen gemacht hat. In seiner Jugendzeit reiste er mit seinem Vater im Osten umher und lernte dabei die auf dem Stellenwertsystem beruhende arabische Zahlenschreibweise kennen.

Nach seiner Rückkehr setzte er sich als erster in Europa für die Verbreitung dieses Systems ein. Sein Name ist insbesondere von der Fibonaccischen Zahlenreihe her wohlbekannt.

Die erste und zweite Zahl derselben ist 1, während die weiteren auf diese Weise ausgerechnet werden, dass man jeweils die Summe der vorhergehenden beiden Zahlen nimmt. Bezeichnen wir also die n-te Zahl der Folge mit u_n, so drückt sich das Bildungsgesetz der Folge durch die Formel

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \qquad u_1 = u_2 = 1$$

aus. Einige der ersten Zahlen finden wir in der Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$u_1 + ... + u_n$	1	2	4	7	12	20	33	54	88
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
u_n	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
$u_1 + ... + u_n$	143	232	376	609	986	1596	2583	4180	6764

Unter die aufgeschriebenen Glieder der Zahlenfolge haben wir auch die Summe aller Zahlen bis dahin notiert. Vergleichen wir die beiden Folgen, so erkennen wir, dass die untere Reihe aus lauter Zahlen besteht, die um 1 kleiner sind als die Zahlen der ersten Reihe, von der dritten Zahl ab. Wenn unsere Beobachtung richtig ist, dann bedeutet sie, dass die Summe der ersten n Zahlen der Folge um 1 kleiner als die $(n+2)$-te Zahl der Folge ist. Die Richtigkeit dieser Feststellung ist nicht schwer nachzuweisen.
Man braucht nur die aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge von der dritten ab bis zur $(n + 2)$-ten aufzuschreiben und jede, der Bildungsregel entsprechend, aus den vorhergehenden beiden Gliedern auszudrücken.
Addieren wir dann unsere Zahlen, so bekommen wir in der ersten Spalte der rechten Seite

$$\begin{aligned} u_3 &= u_1 + u_2 \\ u_4 &= u_2 + u_3 \\ u_5 &= u_3 + u_4 \quad ... \\ u_{n+1} &= u_{n-1} + u_n \\ u_{n+2} &= u_n + u_{n+1} \\ u_{n+2} - u_2 &= u_{n+2} + 1 = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_N \end{aligned}$$

gerade die Summe der ersten n Fibonaccischen Zahlen.
Die zweite Spalte der rechten Seite unterscheidet sich nur insofern von der Spalte auf der linken Seite, als sie mit einem Glied früher beginnt und mit einem Glied eher endet. Somit ist die Summe der ersten Spalte auf der rechten Seite um das erste Glied in der zweiten Spalte der rechten Seite, d.h. um das zweite Glied der Fibonaccischen Zahlenreihe, kleiner als das letzte Glied auf der linken Seite.
Dieses Glied ist jedoch gleich 1. Damit haben wir nachgewiesen, dass die beobachtete Gesetzmäßigkeit richtig ist.

Man kann an den Fibonaccischen Zahlen noch viele weitere interessante Eigenschaften feststellen. So kann man zum Beispiel zeigen, dass mit Ausnahme der einstelligen Fibonaccischen Zahlen stets entweder vier oder fünf aufeinanderfolgende Fibonaccische Zahlen aus der gleichen Anzahl von Ziffern bestehen.

Schauen wir uns die aufgeschriebenen Fibonaccischen Zahlen näher an, so finden wir unter diesen eine Quadratzahl, die 144. Mehr gibt es auch nicht in der Folge, der Beweis hierfür ist jedoch sehr schwer.
Nicht schwer ist es jedoch nachzuweisen - wenn man über entsprechende Grundkenntnisse aus der Zahlentheorie verfügt -, dass der größte gemeinsame Teiler zweier beliebiger Fibonaccischer Zahlen wiederum eine Fibonaccische Zahl ist, und zwar diejenige, deren Nummer der größte gemeinsame Teiler der Nummern der beiden Fibonaccischen Zahlen ist.

Man kann auch beweisen, dass von jeder ganzen Zahl ein Vielfaches unter den Fibonaccischen Zahlen vorkommt. Für die Nummer der kleinsten Fibonaccischen Zahl mit dieser Eigenschaft konnte man bis jetzt jedoch lediglich eine obere Schranke angeben. Im allgemeinen lässt sich bereits eine Fibonaccische Zahl mit viel kleinerem Index finden, die Vielfaches der gegebenen Zahl ist.

Man könnte noch lange fortfahren, Eigenschaften der genannten Zahlen zu nennen und die Folge der interessanten Zahlen zu verlängern. Soviel dürfte jedoch auch aus dem Gesagten bereits klargeworden sein, dass man das Interessante an den Zahlen unter vielen Gesichtspunkten untersuchen kann und dass man dabei neben bemerkenswerten Zusammenhängen auch auf zahlreiche bisher noch ungelöste Probleme stößt.

12 Wieviel Farben braucht man zur Färbung einer Landkarte ?

Béla Andrásfai

12.1 Das Vierfarbenproblem

Durch die Färbung der Landkarten pflegt man das System der Länder sichtbar zu machen, und zwar so, dass man jeden Teil ein und desselben Landes mit der gleichen Farbe, die verschiedenen Länder dagegen mit verschiedener Farbe einfärbt.
Der Überblick wird nicht gestört, wenn nichtbenachbarte Länder die gleiche Farbe erhalten. Bei der Färbung haben wir zwei Länder dann als benachbart anzusehen, wenn ihre Grenzlinien ein Stück gemeinsam haben.

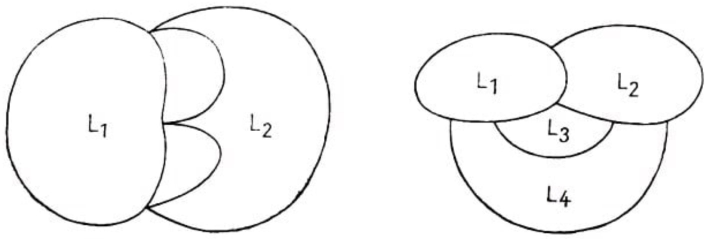


Abb. 113, 114

Die in Abb. 113 dargestellten Länder L_1 und L_2 sind also nicht benachbart.
Wir sagen, eine Landkarte sei mit p Farben zulässig färbbar, wenn wir ihre Länder so mit p Farben färben können, dass zur Färbung eines Landes nur eine der p Farben benutzt wird und dass benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten.

Bei der Herstellung von Landkarten ist es zweckmäßig, möglichst wenige Farben zu benutzen. Befinden sich auf einer Landkarte z. B. 100 Länder, dann ist sie sicher mit 100 Farben zulässig färbbar. Sind aber auch so viele Farben notwendig ?
Wenn unsere Länder so beschaffen sind, dass von jedem davon in jedem anderen ein Teil liegt, dann ja, denn dann sind beliebige Länder irgendwo benachbart. Schließen wir jetzt diese Möglichkeit aus!

Wir wollen eine Landkarte normal nennen, wenn sich zwei beliebige Punkte eines Landes auf ihr durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz innerhalb des betreffenden Landes verläuft. Derartige Länder heißen zusammenhängend.

Vor etwa 100 Jahren hat Cayley das folgende Problem aufgeworfen:
Wieviel Farben reichen aus, um jede normale Landkarte zulässig zu färben ?

Um die in Abb. 114 dargestellte normale Landkarte zulässig zu färben, sind 4 Farben notwendig, denn unter den vier Ländern besitzen je zwei eine gemeinsame Grenze, d. h., die vier Länder sind paarweise benachbart.
Die fragliche minimale Farbenzahl beträgt also mindestens 4. Jede der bisher gezeichneten normalen Landkarten ließ sich mit 4 Farben zulässig färben.

Bis auf den heutigen Tag[14] hat aber niemand beweisen können, dass 4 Farben zur zulässigen Färbung jeder normalen Landkarte ausreichen.
Das ist das berühmte Vierfarbenproblem.

Das Problem ist praktisch nicht allzu interessant, denn einerseits kommen in Wirklichkeit nicht nur normale Landkarten vor, andererseits ist die Tatsache bewiesen worden, dass sich jede normale Landkarte bereits mit 5 Farben zulässig färben lässt. (Das ist das sogenannte Fünffarbenproblem. Mit seiner Lösung befassen wir uns später.)

Dafür ist das Problem tief in die Mathematik eingedrungen, und es ist oft versucht worden, es einer Klärung zuzuführen.
Diese Versuche können durchaus von Nutzen werden, weil es möglich ist, dadurch Verfahren zu bekommen, mit denen man andere, praktisch wichtigere Probleme lösen kann.
Hier möchten wir die Aufmerksamkeit noch auf interessante Dinge aus diesem Problemkreis lenken.

12.2 Unwesentliche Abänderung der Landkarte, Eulerscher Polyedersatz

Bei der Färbung von Landkarten kommt es auf die Maße natürlich nicht an. Zeichnen wir beispielsweise eine zulässig gefärbte Landkarte auf ein Gummituch, so können wir den Gummi nach Belieben dehnen, ohne dass er reißt.
Unsere Landkarte bleibt dabei zulässig gefärbt, und nach wie vor sind dieselben Länder benachbart. Wir brauchen auch zwischen einer auf eine Kugel und einer auf eine Ebene gezeichneten Landkarte nicht zu unterscheiden.

Denn wenn wir derartige Dehnungen zulassen, so lässt sich jede Landkarte, die sich in der Ebene zeichnen lässt, auch auf der Kugel zeichnen, und umgekehrt lässt sich jede auf die Kugel gezeichnete Landkarte in die Ebene ausbreiten.
Im letzteren Fall kann es zu Schwierigkeiten führen, wenn die Länder die Kugeloberfläche vollständig bedecken. Dann nehmen wir vorläufig ein Land L aus, breiten die verbliebene Landkarte auf die Ebene aus und sehen den nicht überdeckten Teil der Ebene als das Land L an (Abb. 115).

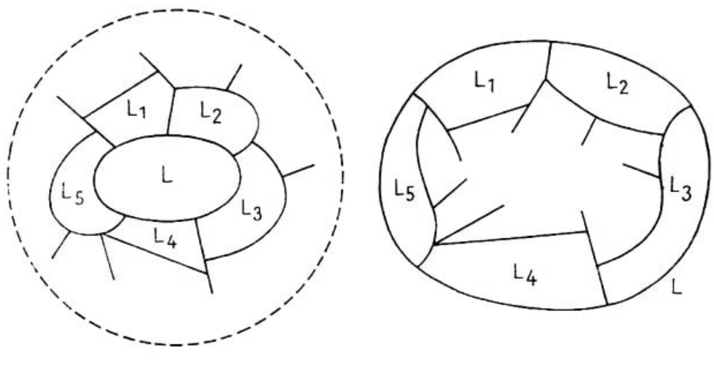


Abb. 115

[14]Durch umfangreiche elektronische Berechnungen konnten 1976 K. Appel und W. Haken die Richtigkeit der Vierfarbenvermutung beweisen. (Anmerkung des Übersetzers)

Eckpunkt auf einer Landkarte heißt ein solcher Punkt, von dem nach wenigstens drei Richtungen eine Grenzlinie ausgeht. Einen solchen Teil der Grenzlinie, dessen Endpunkte Eckpunkte sind, der aber im Inneren keinen Eckpunkt enthält, nennen wir Kante.
Die Grenzlinien können nicht immer aus den Kanten zusammengesetzt werden.

Auf der Landkarte von Abb. 116 beispielsweise enthält die Grenzlinie von L_1 und L_2 keine einzige Kante, die Grenzlinie von L_3 besteht aus einer, die Grenzlinie von L_4 dagegen aus zwei Kanten. Elementarflächenstück nennen wir ein Land, wenn es sich durch eine Dehnung der obigen Art in eine Kreisfläche überführen lässt.

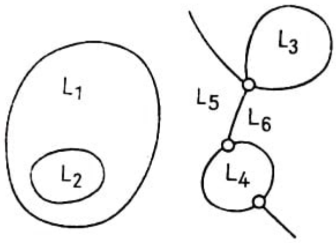


Abb. 116

Bedecken wir die Kugelfläche vollständig und ohne Überlappung mit Elementarflächenstücken, dann besteht zwischen der Anzahl f der Elementarflächenstücke, der Anzahl e der Eckpunkte und der Anzahl k der Kanten die folgende sogenannte Eulersche Polyederformel:

$$f + e = k + 2$$

Beispielsweise kann man die Würfeloberfläche durch die zugelassene Dehnung zu einer Kugel aufblasen. Auf dieser Kugel ist dann die Anzahl der Seiten (der Elementarflächenstücke) gleich 6, die Anzahl der Eckpunkte 8 und die Anzahl der Kanten 12, es ist dann also in der Tat:

$$f + e = k + 2$$

Um diese Beziehung zu beweisen, stellen wir uns vor, dass unsere Kugel ein Himmelskörper ist. Wir errichten auf jeder Kante auf seiner ganzen Länge einen Damm (wir können dann also von jedem Eckpunkt aus in jeden anderen gelangen, indem wir auf den Dämmen laufen). Ein einziges Elementarflächenstück sei mit Wasser bedeckt.
Wir möchten alle Elementarflächenstücke des Himmelskörpers mit Wasser überfluten, indem wir der Reihe nach je einen Damm öffnen. Es ist überflüssig, einen Damm zu öffnen, der bereits auf beiden Seiten von Wasser bespült wird.

Es hätte auch keinen Sinn, einen Damm zu öffnen, dessen beide Seiten trocken sind, denn auf diese Weise könnten wir kein neues Elementarflächenstück mit Wasser überfluten. Wir öffnen also bei jedem Schritt einen solchen Damm, von dem eine Seite trocken ist, während die andere bereits überflutet ist.
Auf diese Weise wird durch die Eröffnung eines Dammes je ein Elementarflächenstück mit Wasser überflutet, wir haben also $(f - 1)$ Dämme zu öffnen.

Wir untersuchen jetzt das System der unversehrten Dämme. Wir behaupten, dass wir noch immer von jedem Eckpunkt in jeden anderen gelangen können, indem wir auf unversehrten Dämmen laufen. Zwischen zwei Eckpunkten, deren dazwischenliegenden Damm wir geöffnet haben, besteht über den verbliebenen Teil der Grenze der dadurch überfluteten Elementarfläche ein Zusammenhang.

Über die unversehrten Dämme können wir von jedem Eckpunkt in jeden anderen nur auf einem einzigen Weg gelangen, wenn wir zwischendurch nicht umkehren dürfen.
Würde es nämlich zwei Wege zwischen zwei Eckpunkten geben, so könnten wir, indem wir über diese laufen, einen Rundgang machen. Das liefe jedoch darauf hinaus, dass es eine geschlossene Dammlinie gibt, durch die kein Wasser hindurchfließen kann. Es würde also ein Elementarflächenstück existieren, das nicht überflutet ist.

Wir zeichnen jetzt einen Eckpunkt aus, etwa A. In jeden anderen Eckpunkt stellen wir einen Wächter. Die Wächter setzen sich auf dem einzig möglichen Weg nach A in Bewegung, bleiben aber stehen, bevor sie einen neuen Eckpunkt erreicht haben. Auf diese Weise wird auf jedem unberührten Damm genau ein Wächter stehen.
Zwei Wächter könnten nämlich nur dann auf denselben Damm gelangen, wenn sie aufeinander zulaufen. Setzten sie ihre Wege bis nach A fort, so würden die beiden Wege zusammengenommen also einen Rundgang ermöglichen. Gelangte jedoch auf einen Damm keiner der Wächter, dann würden dieser Damm und die von seinen Endpunkten aus nach A verlaufenden Wege zusammengenommen wiederum einen Rundgang möglich machen.

Die Anzahl der unversehrten Dämme ist also gleich der Anzahl der Wächter. Die Anzahl der Wächter beträgt jedoch $(e-1)$, weil mit Ausnahme von A in jedem Eckpunkt ein Wächter stand. Unserer Überlegung zufolge ist also die Anzahl der geöffneten und der unversehrten Dämme zusammen $k = (f-1) + (e-1)$.
Damit ist die Eulersche Polyederformel bewiesen.

12.3 Die Maximalzahl paarweise benachbarter Länder

Abb. 114 zufolge ist auf der Kugel eine normale Landkarte möglich, die vier paarweise benachbarte Länder besitzt.
Es ist jedoch keine normale Landkarte möglich, auf der es mehr als vier paarweise benachbarte Länder gibt.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, nehmen wir im Widerspruch dazu an, dass auf einer normalen Landkarte die Länder L_1, L_2, L_3, L_4 und L_5 paarweise benachbart sind. Im Inneren eines jeden von ihnen zeichnen wir je einen Punkt aus. Dies seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5.

Jeden von diesen verbinden wir mit jedem durch je eine auf der Kugel verlaufende Linie auf folgende Weise:
Die Verbindungslinie zweier Punkte verlaufe nur in den beiden Ländern, in deren Inneren die zu verbindenden ausgezeichneten Punkte liegen, und in jedem der fünf Länder sollen die vier einlaufenden Wege nur den ausgezeichneten Punkt P_i als gemeinsamen Punkt haben. Dann schneiden einander die Verbindungslinien der Punkte P_i nicht. (In Abb. 117 haben wir das Verfahren für vier Länder durchgeführt. Die Verbindungslinien der Punkte P_i sind gestrichelt.)

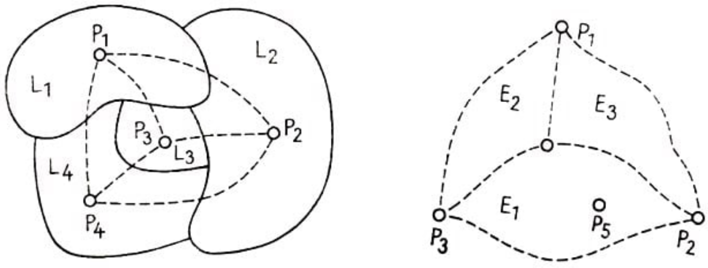


Abb. 117,118

Durch die Linien, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 untereinander verbinden, wird die Kugel in zwei Elementarflächenstücke zerlegt. Da die Verbindungslinie von P_4 und P_5 die übrigen Linien nicht schneidet, liegen P_4 und P_5 in einem von diesen beiden Elementarflächenstücken. Dieses sei E.

In E nehmen wir den Punkt P_4 und ziehen die Verbindungslinien mit den Punkten P_1, P_2 und P_3. Durch diese wird E in drei Elementarflächenstücke zerlegt - in E_1, E_2 und E_3 -, und E_5 ist in einem von ihnen enthalten, etwa in E_1 (Abb. 118).
Dann kann es aber keine Linie geben, die P_5 und P_1 verbindet und keine beliebige der übrigen Linien schneidet.

Wir sind damit zu einem Widerspruch gelangt. Die Annahme, von der wir ausgegangen sind, kann also nicht richtig sein, d. h., es lässt sich auf der Kugel keine normale Landkarte zeichnen, auf der fünf Länder paarweise benachbart sind. Das war aber gerade zu beweisen.

12.4 Das Fünffarbenproblem

Wir beweisen jetzt den schon erwähnten Fünffarbensatz, nach dem gilt: Jede normale Landkarte auf der Kugel lässt sich mit fünf Farben zulässig färben. Wir zeigen, dass es genügt, diese Behauptung für solche normalen Landkarten zu beweisen, auf denen jedes Land ein Elementarflächenstück ist und von jedem Eckpunkt aus nach genau drei Seiten eine Grenzlinie ausgeht.
Solche Landkarten wollen wir regulär nennen.

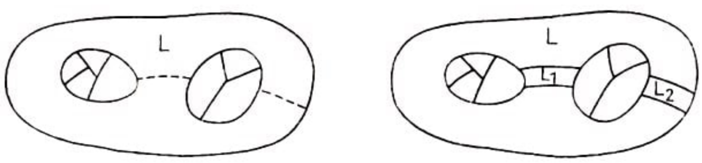


Abb. 119 a,b

I. Auf unserer normalen Landkarte sei L ein Land, das kein Elementarflächenstück darstellt, wie z.B. in Abbildung 119a. Die im Inneren von L befindlichen Ländergruppen verbinden wir mit Wegestücken (gestrichelte Linien), die zu einer L umlaufenden Grenzlinie führen.
Wir verbreitern diese Wegestücke zu je einem in L liegenden Land (Abb. 119b). Auf diese Weise entsteht aus L ein Elementarflächenstück.

Durch die neu hinzugekommenen Länder L_1 und L_2 sind die ursprünglich zwischen den übrigen Ländern bestehenden Nachbarschaftsbeziehungen nicht zerstört worden. Wenn sich also die so abgeänderte Landkarte mit 5 Farben zulässig färben lässt, so auch die ursprüngliche.

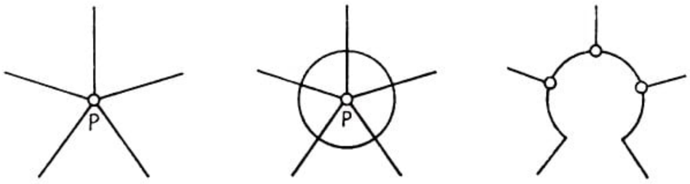


Abb. 120 a,b,c

II. Wenn es auf der normalen Landkarte einen Eckpunkt P gibt, von dem in mehr als drei Richtungen eine Grenzlinie ausgeht (Abb. 120a), dann zeichnen wir einen Kreis um ihn, der außer dem Eckpunkt P keinen weiteren Eckpunkt enthält und der die von P ausgehenden Grenzlinien nur in je einem Punkt schneidet (Abb. 120b).
Das Innere dieses Kreises schließen wir an ein um P liegendes Land an (Abb. 120c). Damit haben wir keine Nachbarschaftsbeziehungen beseitigt, sondern höchstens neue hergestellt.

Wenn sich also die so abgeänderte Landkarte mit 5 Farben zulässig färben lässt, so auch die ursprüngliche. Nach dieser Abänderung kann es vorkommen, dass eine neue Kante innerhalb eines Landes verläuft, wenn z.B. ein Land L mehrmals an den Punkt P heranreicht (Abb. 121a und b).

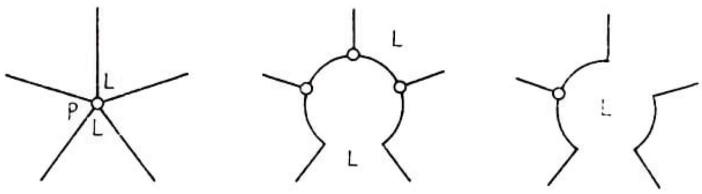


Abb. 121 a,b,c

Eine solche Kante ist überflüssig, wir tilgen sie daher (Abb. 121c).

Durch wiederholte Anwendung der Schritte I und II lässt sich jede normale Landkarte in eine reguläre umwandeln, und wie wir gesehen haben, braucht man zur zulässigen Färbung der ursprünglichen normalen Landkarte nicht mehr Farben als zur zulässigen Färbung einer durch wiederholte Anwendung von I und II gewonnenen regulären Landkarte.

Wir bemerken noch, dass eine reguläre Landkarte auf der Kugel, zu der mehr als zwei Länder gehören, kein Land enthält, auf dessen Grenzlinie kein Eckpunkt liegt. Jede Grenzlinie lässt sich dann also aus Kanten zusammensetzen.
Auch kann auf einer regulären Landkarte kein Land existieren, das nur von einer Kante begrenzt wird. Wir überlassen es dem Leser, diese beiden Behauptungen zu beweisen.

Nachdem wir dies getan haben, werden wir beweisen, dass sich eine beliebige reguläre Landkarte K auf der Kugel mit 5 Farben zulässig färben lässt. Wir bezeichnen die Anzahl der Länder von K mit f, die Anzahl ihrer Kanten mit k und die Anzahl ihrer Eckpunkte mit e. Da jedes Land von K ein Elementarflächenstück ist, gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$f + e = k + 2$$

Zählen wir mit Hilfe der Eckpunkte die Kanten zusammen! In jedem Eckpunkt von K stoßen 3 verschiedene Kanten zusammen. Jede Kante ist mit genau zwei Eckpunkten inzident, nämlich mit ihren beiden Endpunkten. Daher ist

$$3e = 2k$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Eulerschen Formel mit 6 und schreiben $4k$an Stelle von $6e$, so gelangen wir zu

$$6f = 2k + 12 \tag{1}$$

Hieraus folgt jedoch, dass K ein Land enthält, das von weniger als 6 Kanten begrenzt wird. Nehmen wir nämlich an, dem sei nicht so.
Wir nummerieren die Länder mit $1,2,...,f$ durch und bezeichnen mit h_i die Anzahl der Kanten, die das i-te Land begrenzen. Da jede Kante gemeinsamer Grenzabschnitt zweier verschiedener Länder ist, ist

$$h_1 + h_2 + ... + h_f = 2k$$

Unserer Annahme zufolge gilt $h_i \geq 6$ für jedes i, wir vergrößern also die linke Seite nicht, wenn wir 6 an Stelle jedes h_i schreiben. Dann bekommen wir $6f < 2k$. Das ist aber unmöglich, weil $2k$ nach (1) um 12 kleiner als $6f$ ist. Also enthält K ein Land, das von 2, 3, 4 oder 5 Kanten begrenzt wird.

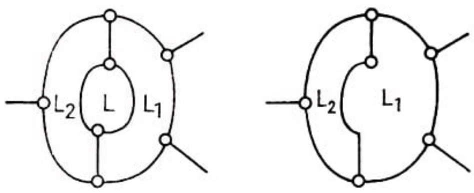


Abb. 122 a,b

Wenn K ein Land L mit nur zwei Kanten enthält, dann sind zu ihm genau zwei andere Länder benachbart (Abbildung 122a). Wir gliedern L an irgendeinen Nachbarn von ihm an, z. B. an L_1 (Abb. 122b). Auf diese Weise haben wir aus K eine reguläre Landkarte K' hergestellt.
Es genügt zu zeigen, dass sich K' mit 5 Farben zulässig färben lässt.

Hieraus folgt nämlich, dass K mit 5 Farben zulässig gefärbt werden kann; denn bei der Färbung von K' haben wir zwei der fünf Farben für L_1 und L_2 verwendet, können also das wiederhergestellte Land L mit jeder der 3 übrigen Farben färben und haben damit bereits K mit 5 Farben zulässig gefärbt.

Wenn K ein Land mit drei Kanten enthält, dann sind zu ihm genau 3 Länder benachbart. Wir können auf dieselbe Weise wie eben vorgehen und haben bei der Wiederherstellung von L noch immer die Wahl unter 2 Farben.

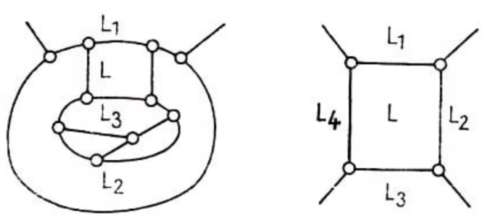


Abb. 123 a,b

Wenn K ein Land L mit vier Kanten enthält, so können zu ihm, wie aus Abb. 123a und 123b hervorgeht, 3 oder 4 Länder benachbart sein. Wir können auch jetzt nach dem obigen Verfahren vorgehen, dürfen aber, damit K' wieder regulär ist, im Falle der Abb. 123a L nicht an L_2 angliedern.
Bei der Wiederherstellung bleiben für L immer noch 2 bzw. 1 Farbe.

Wenn K ein Land L mit fünf Kanten enthält, dann gibt es unter den zu ihm benachbarten Ländern sicher zwei, die nicht benachbart sind. Falls nämlich z. B. L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 die Nachbarn von L sind und L_2 mit L_4 benachbart ist, so erkennt man aus Abb. 124, dass L_3 weder mit L_1 noch mit L_5 benachbart sein kann.

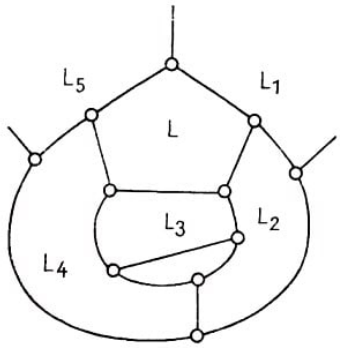


Abb. 124

K' stellen wir jetzt durch Streichen zweier Kanten von L her, und zwar tilgen wir je eine Kante nach L_1 und nach L_3 zu. Wenn sich K' mit 5 Farben zulässig färben lässt, so auch K, weil wir bei der Färbung von K' für die Nachbarn von L insgesamt 4 Farben verwenden (L_1 und L_3 erhalten dieselbe Farbe) und somit für L bei der Wiederherstellung noch eine Farbe übrigbleibt.

Auf Grund unserer Überlegung genügt es zu beweisen, dass sich die Landkarte K', die man mittels der aufgezählten Reduktionen erhält, mit 5 Farben zulässig färben lässt. K' stellt aber wiederum eine reguläre Landkarte dar, für sie gilt also gleichfalls die Beziehung (1), und daher enthält auch K' ein Land mit 2, 3, 4 oder 5 Kanten.
Daher können wir unser Reduktionsverfahren so lange fortsetzen, bis nur noch 5 Länder übrigbleiben. Diese lassen sich mit 5 Farben zulässig färben. Aus unserem Verfahren folgt somit, dass auch K mit 5 Farben zulässig gefärbt werden kann. Unter Berücksichtigung von I und II haben wir damit nachgewiesen, dass sich jede normale Landkarte mit 5 Farben zulässig färben lässt.

12.5 Färbung beliebiger Landkarten

Das Färbungsproblem von Landkarten haben wir auf die Färbung normaler Landkarten beschränkt. Wie wir gesehen haben, bedeutet dies eine wesentliche Einschränkung. Die minimale Anzahl von Farben, die erforderlich ist, hängt davon ab, ob die Länder aus getrennten Teilen bestehen oder nicht. Man kann die Frage stellen:

Werden auch dann beliebig viele Farben benötigt, um eine Landkarte zulässig zu färben, wenn die Länder nicht aus beliebig vielen getrennten Teilen bestehen?

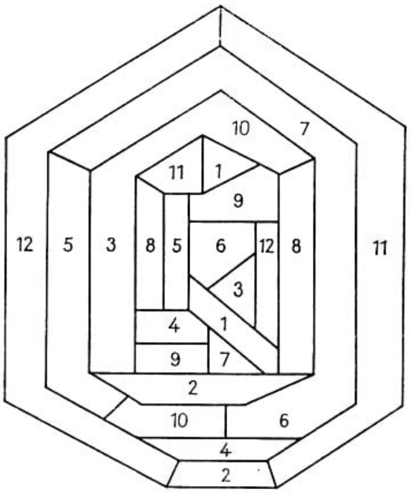


Abb. 125

In Abb. 125 ist eine Landkarte dargestellt, die 12 Länder enthält. Jedes Land besteht aus zwei getrennten Teilen (die zu demselben Land gehörenden Teile haben wir mit denselben Zahlen versehen), und die Länder sind allesamt paarweise benachbart. Um diese Landkarte zulässig zu färben, braucht man offensichtlich 12 Farben.

Andererseits hat man beweisen können, dass sich jede Landkarte, auf der jedes Land aus höchstens zwei getrennten Teilen besteht, mit 12 Farben zulässig färben lässt.

Es ist interessant, dass es gelungen ist, diese kompliziertere Aufgabe vollständig zu lösen. Ungelöst ist noch die entsprechende Frage, wie es aussieht, wenn man auf der Landkarte auch Länder zulässt, die aus mehr als zwei getrennten Teilen bestehen.

12.6 Färbungsproblem zweier Kugeln

Der heutige Entwicklungsstand der Technik lässt die Vorstellung zu, dass die Bewohner unserer Erde auch auf andere Planeten gelangen, z. B. auf den Mars. Wenn wir die Oberfläche des Mars in einzelne Teile zerlegen und diese Teile unter die Länder der Erde aufteilen, so kann es vorkommen, dass Länder, die auf der Erde nicht benachbart sind, auf dem Mars benachbart werden.

Stellt man eine Landkarte von Erde und Mars her, so möchte man natürlich auch, dass zu demselben Land gehörige Teile mit derselben Farbe und benachbarte Länder mit verschiedenen Farben versehen werden. Die Länder auf beiden Kugeln mögen aus je einem zusammenhängenden Teil bestehen.
Wieviel Farben reichen dann aus, um die Landkarten beider Kugeln zulässig zu färben?

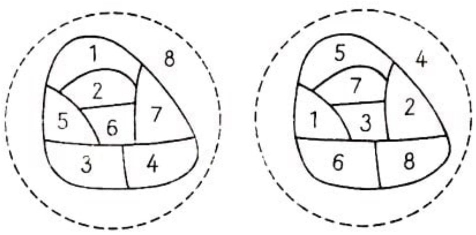


Abb. 126

In Abb. 126 sind auf zwei Kugelflächen 8 Länder dargestellt. Diese Länder sind paarweise benachbart, die minimale Farbenzahl beträgt also mindestens 8. Wir wissen jedoch nicht, ob in jedem Falle 8 Farben ausreichen.

Aus unseren Überlegungen unter I und II geht hervor, dass aus der zulässigen Färbbarkeit der regulären Landkarten mit p Farben folgt, dass sich auch jede normale Landkarte mit p Farben zulässig färben lässt. Daher untersuchen wir im folgenden statt der normalen Landkarten nur reguläre Landkarten.

12.7 Färbung des Möbiusschen Bandes und des Torus

Betrachten wir die in Abb. 127 dargestellte Landkarte, die auf ein Band gezeichnet ist!

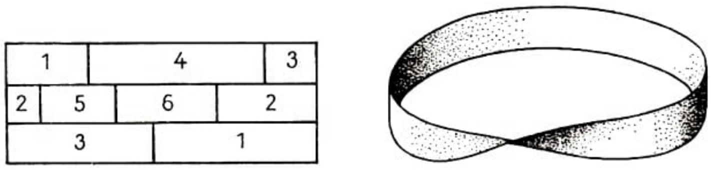


Abb. 127,128

Auf ihr können wir sechs durch Zahlen unterschiedene Länder erkennen. Die mit 1, mit 2 und mit 3 bezeichneten Länder bestehen aus je zwei getrennten Teilen, und alle sechs Länder sind paarweise benachbart. Unsere Landkarte ist nicht regulär, weil ihre Länder nicht zusammenhängend sind.

Kleben wir dagegen zwei Seiten unserer Landkarte nach einer Verdrehung des Bandes zusammen, so werden die getrennten Landesteile vereinigt. Auf dem auf diese Weise entstandenen sogenannten Möbiusschen Band (Abb. 128) stellen dann alle Länder Elementarflächenstücke dar, und alle sind paarweise benachbart.
Steht dies nicht im Widerspruch zu dem, was wir oben unter 3. bewiesen haben? Das bezog sich nur auf solche normale Landkarten, die sich ohne Zerreißen durch Dehnen auf die Kugel ausbreiten lassen. Das ist mit dem Möbiusschen Band nicht möglich.

Allgemein sagen wir, wenn sich zwei Flächen durch die zugelassene Dehnung miteinander zur Deckung bringen lassen, dass die beiden Flächen homöomorph sind. (Wir haben hier stets nur endlich ausgedehnte Flächen im Auge.)
Also sind die Kugel (bzw. die Ebene) und das Möbiussche Band nicht homöomorph. Da man auf das Möbiussche Band eine reguläre Landkarte zeichnen kann, auf der sechs Länder paarweise benachbart sind, benötigt man mindestens 6 Farben, um reguläre Landkarten auf ihm zulässig zu färben. Mehr Farben werden nicht gebraucht, denn es gilt folgender Satz:

Jede auf das Möbiussche Band gezeichnete reguläre Landkarte lässt sich mit 6 Farben zulässig färben.

Das Ergebnis ist überraschend, da es andererseits nicht gelungen ist, die minimale Farbenzahl genau zu bestimmen, die für die zulässige Färbung regulärer Landkarten der einfacheren Ebenenfläche benötigt wird.

Das Möbiussche Band weist mehrere interessante Eigenschaften auf[15], von denen wir hier nur auf eine aufmerksam machen:

[15] Siehe auch den Aufsatz »Knifflige Flächen« in diesem Band.

Diese Fläche besitzt nicht zwei verschiedene Seiten, d. h., wir können, von einem beliebigen Punkt ausgehend, ihre ganze Fläche durchwandern, ohne jemals den Rand des Bandes zu überschreiten. Könnte das vielleicht die Ursache dafür sein, dass wir auf sie eine Landkarte zeichnen konnten, die sechs paarweise benachbarte Länder enthält, und dass wir die zur zulässigen Färbung ihrer regulären Landkarten erforderliche minimale Farbenzahl bestimmen konnten? Wir werden sehen, dass dem nicht so ist.

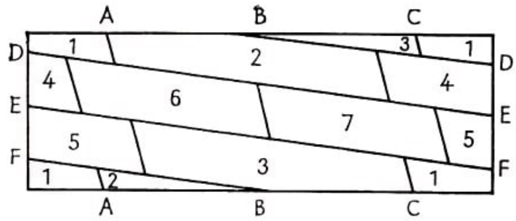


Abb. 129

Dazu nehmen wir die auf ein Band gezeichnete Landkarte von Abb. 129. Wir finden auf ihr sieben Länder, die alle paarweise benachbart sind. Wenn wir das Band aus Gummi anfertigen, können wir es zu einer Fläche zusammenfügen, die so aussieht wie die Fläche eines Rettungsringes:
Wir kleben zuerst die gegenüberliegenden Kanten des Bandes zusammen und passen dann die beiden Enden des auf diese Weise erhaltenen Schlauches aneinander (Abb. 130).

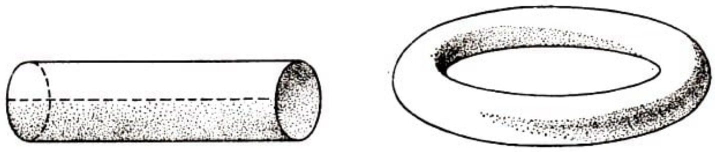


Abb. 130

Bei der Verheftung achten wir darauf, dass die mit demselben Buchstaben bezeichneten Punkte zusammenfallen. Auf der so entstandenen sogenannten Torusfläche (Ringfläche) stellt jedes der zuvor ausgezeichneten sieben Länder ein Elementarflächenstück dar, und sie alle sind paarweise benachbart. (Diese Landkarte ist auf dem Torus regulär.)

Um jede reguläre Landkarte auf dem Torus zulässig zu färben, braucht man also mindestens 7 Farben. Wieder ist es überraschend, dass es für den Torus, der "komplizierter" als die Kugel ist, gelungen ist, folgendes zu beweisen:

Jede auf den Torus gezeichnete reguläre Landkarte lässt sich mit 7 Farben zulässig färben.

Der Torus besitzt ebenso wie die Kugel zwei Seiten (eine äußere und eine innere). Von der Kugel, dem Möbiusschen Band und dem Torus sind keine zwei zueinander homöomorph.

12.8 Färbung auf eine beliebige Fläche gezeichneter Landkarten

Für eine Fläche A bedeute $l_{\max}$ die größte Anzahl paarweise benachbarter zusammenhängender Länder, die sich auf A zeichnen lassen, und $s_{\min}$ die kleinste Anzahl von

Farben, mit denen sich bereits jede auf A zeichenbare normale Landkarte zulässig färben lässt.
Natürlich gilt für jede Fläche

$$l_{\max} \leq s_{\min}$$

Bisher haben wir gesehen, dass für eine Kugel (oder Ebene)

$$4 = l_{\max} \leq s_{\min} = 5$$

für das Möbiussche Band

$$l_{\max} = s_{\min} = 6 \qquad \text{und für den Torus} \qquad l_{\max} = s_{\min} = 7$$

gilt.
Wir können die folgenden Fragen stellen: Gibt es noch andersartige Flächen ? Wenn ja, was wissen wir dann von den ihnen zugeordneten Zahlen $l_{\max}$ und $s_{\min}$?
Kann man zu einer beliebig großen Zahl k eine Fläche finden, für die das zugehörige $l_{\max}$ größer als k ist ? Auf alle diese Fragen können wir im folgenden eine genaue Antwort geben:

Es gibt unendlich viele Flächen, die paarweise nicht homöomorph sind und deren zugehörige Zahlen $l_{\max}$ allesamt verschieden sind.
Daraus folgt, dass auch $l_{\max}$ beliebig groß ist.
Mit Ausnahme der zur Kugel homöomorphen Flächen gilt für jede Fläche $l_{\max} = s_{\min}$.

Es ist überraschend, dass es gerade für die auf Grund unserer Anschauung als am einfachsten anzusehende Kugelfläche bisher niemandem gelungen ist, die Gleichung $l_{\max} = s_{\min}$ zu beweisen. Für jede einseitige Fläche konnte man die Zahlen $l_{\max}$ und $s_{\min}$ genau bestimmen. Für zweiseitige Flächen ist es dagegen in vielen Fällen nur gelungen, solche Näherungswerte anzugeben, die von den genauen Werten um nicht mehr als zwei Einheiten abweichen.

12.9 Umformulierungen des Vierfarbensatzes

Von den Landkartenfärbungsproblemen ist bis heute noch der Vierfarbensatz auf der Kugel dasjenige Problem, von dem am meisten die Rede ist. Uns sind mehrere derartiger Sätze bekannt, die bisher gleichfalls nicht bewiesen werden konnten, von denen man aber zeigen kann, ihre Lösung würde beweisen, dass sich jede beliebige normale Landkarte auf der Kugel mit 4 Farben zulässig färben lässt.
Wir nennen hier drei Sätze dieser Art:

a) Alle Landkarten K der Ebene, die sich auf folgende Weise herstellen lassen, können mit 4 Farben zulässig gefärbt werden: Ein Rechteck K^* wird in Rechtecke zerlegt. Die Länder von K sind die in K^* befindlichen Rechtecke sowie der Teil der Ebene, der K^* umfasst.

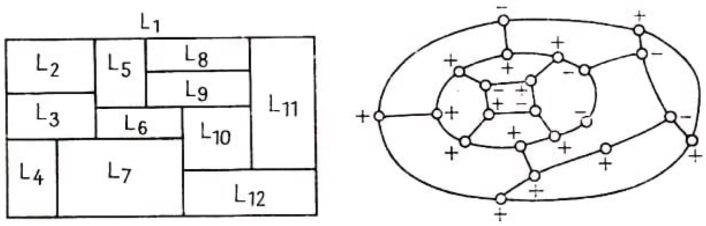


Abb. 131,132

Eine solche Landkarte ist in Abb. 131 dargestellt.

b) Die Kanten jeder auf die Kugel gezeichneten regulären Landkarte lassen sich so mit 3 Farben färben, dass jede Kante eine Farbe erhält und in jedem Eckpunkt verschieden gefärbte Kanten zusammentreffen.

c) Die Eckpunkte jeder auf die Kugel gezeichneten regulären Landkarte lassen sich derart mit den Zahlen $+1$ und -1 versehen, dass für jedes Land die Summe der auf seiner Grenzlinie liegenden Zahlen durch 3 teilbar ist.

Eine derartige Nummerierung ist in Abb. 132 dargestellt. Statt $+$ 1 bzw. - 1 haben wir dabei kurz die Zeichen $+$ und - geschrieben.

12.10 Aufgaben

Unter vielen Unterhaltungsaufgaben zu diesem Thema wollen wir nur einige nennen. Wir haben die Aufgaben so gewählt, dass wir mit ihrer Lösung auch einige Methoden der Forschung auf diesem Gebiet darstellen können.

(1) Wir wollen nach Belieben Geraden in die Ebene zeichnen. Dadurch wird die Ebene in zusammenhängende "Länder" zerlegt. Es ist zu beweisen, dass sich die auf diese Weise entstandene Landkarte mit 2 Farben zulässig färben lässt.

(2) Jedes Land auf einer Landkarte K der Ebene wird von 3 Kanten begrenzt. Die Eckpunkte von K lassen sich so mit den Zahlen 1, 2 und 3 versehen, dass jede Kante Eckpunkte verbindet, die mit verschiedenen Zahlen bezeichnet sind. Es ist zu zeigen, dass sich dann K mit 2 Farben zulässig färben lässt.

(3) Es ist zu beweisen, dass in jedem Eckpunkt einer Landkarte, die die Kugel vollständig bedeckt und sich mit 2 Farben zulässig färben lässt, eine gerade Anzahl von Kanten zusammentrifft.

(4) Wir wollen in die Ebene Kreise zeichnen und in jedem Kreis je eine Sehne ziehen. Dadurch wird die Ebene in zusammenhängende Länder zerlegt. Es soll nachgewiesen werden, dass sich unsere Landkarte, wenn je zwei Sehnen höchstens einen Punkt gemein haben, mit 3 Farben zulässig färben lässt.

12.11 Lösungen

(1) Wir legen die Geraden einzeln in die Ebene. Durch die erste, mit g_1 bezeichnete Gerade wird die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt.

Wir färben die eine weiß, die andere schwarz. Durch die zweite Gerade, g_2, wird die Ebene gleichfalls in zwei Halbebenen zerlegt. In einer von diesen vertauschen wir die Farben: Was vorher weiß war, sei jetzt schwarz, und umgekehrt.

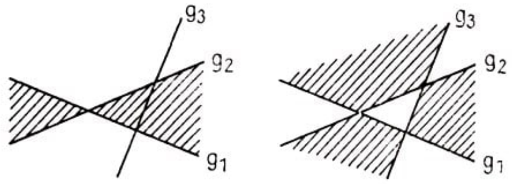


Abb. 133a, b

Wir ziehen die dritte Gerade, g_3 (Abb. 133a). In einer Hälfte der durch g_3 zerlegten Ebene vertauschen wir wiederum die Farben (Abb. 133b).
Dieses Verfahren können wir beliebig weit fortsetzen. Nach jedem Schritt wird unsere Landkarte mit 2 Farben - weiß und schwarz - zulässig gefärbt sein.

(2) Wir betrachten eine Nummerierung der Eckpunkte von K der genannten Art (Abb. 134). Entsprechend der Reihenfolge der den Eckpunkten zugeordneten Zahlen kann man jedes Land entweder im Uhrzeigersinn oder in der hierzu entgegengesetzten Richtung umlaufen.

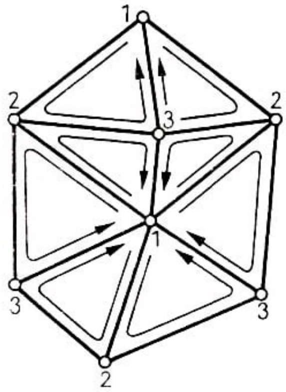


Abb. 134

Die in der einen Richtung umlaufenen Länder färben wir weiß, die in der anderen Richtung umlaufenen schwarz. Dann erhalten die benachbarten Länder stets verschiedene Farbe, da der Durchlaufsinn zweier Länder, die auf den beiden Seiten einer Karte liegen, entgegengesetzt ist.

(3) Wenn wir um jeden Eckpunkt P einer Landkarte, die mit 2 Farben zulässig gefärbt ist, herumlaufen, dann wechseln wir bei jedem Durchgang durch eine Kante die Farbe. Von den um P herum liegenden Ländern ist also jedes zweite gleich gefärbt. Hieraus folgt, dass an P eine gerade Anzahl von Kanten angrenzen muss.

(4) Durch eine Konfiguration (einen der Kreise und die hierin eingezeichnete Sehne) wird die Ebene in drei Teile zerlegt. Wir nummerieren diese drei Teile mit den Zahlen 0, 1 und 2. In jedes Land schreiben wir diejenige Zahl, mit der derjenige der drei Teile bezeichnet ist, in den es fällt.
Diese Nummerierung führen wir für jede Konfiguration durch. Mit jedem Schritt wird in jedes Land je eine neue Zahl geschrieben.

Wir addieren die Zahlen, die in einem Land stehen, dividieren die Summe durch 3 und

schreiben den Rest in das Land. Danach färben wir ein Land weiß, schwarz oder rot, je nachdem, ob der Rest, den wir hineingeschrieben haben, 0, 1 oder 2 beträgt.
Wir haben nachzuweisen, dass dann zwei beliebige benachbarte Länder verschieden gefärbt (d. h. ihre Reste verschieden) sind.

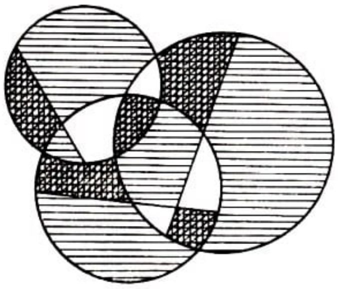


Abb. 135

L_1 und L_2 seien zwei benachbarte Länder, h gemeinsame Kante ihrer Grenzen. Wir entfernen aus der Landkarte diejenige Konfiguration K, die die Kante h enthält. Dann haben L_1 und L_2 keine Grenze gemein. Also fallen L_1 und L_2 bei jeder von K verschiedenen Konfiguration in denselben Teil, dagegen in verschiedene der 3 Teile, in die die Ebene durch K zerlegt wird.
Daher können die Reste von L_1 und L_2 nicht gleich sein. Unsere Landkarte ist also mit 3 Farben zulässig gefärbt (Abb. 135).

13 Die Glücksspiele und die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alfréd Rényi

13.1 Einführung

Das Ziel dieses Aufsatzes ist es, durch allgemeinverständliche und interessante Aufgaben, die sich auf die Glücksspiele - besonders auf die Kartenspiele - beziehen, gewisse Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennenzulernen.[16]

Ich habe zwar nicht die Absicht, die Regeln der als Beispiele gewählten Glücksspiele ganz ausführlich darzustellen. Ich habe mich aber bemüht, die Beispiele so zu formulieren, dass sie auch von denen verstanden werden, die die betreffenden Spiele nicht gründlich kennen.
Es ist natürlich ganz klar, dass jemandem, der Bridge spielt, die Beispiele, die sich auf Bridge beziehen, mehr sagen als demjenigen, der das Spiel nicht kennt.

Der Leser wird sich vielleicht fragen: Lohnt es sich denn, sich mit den Kartenspielen und allgemein mit den Glücksspielen auf wissenschaftlicher Grundlage zu beschäftigen? Auf diese Frage ist meiner Meinung nach unbedingt mit Ja zu antworten. Es lohnt sich nicht nur deshalb, weil dadurch das Verständnis der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefördert wird, sondern auch deshalb, weil diesen Problemen ein wissenschaftsgeschichtliches Interesse zukommt; denn bekanntlich haben die auf Glücksspiele bezüglichen Aufgaben bei der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr große Rolle gespielt.

Überhaupt waren die Erfahrungen, die mit den Glücksspielen gesammelt wurden, und die hieraus gewonnenen mathematischen Erkenntnisse oftmals von sehr großer Bedeutung bei der Herausbildung zahlreicher wichtiger Begriffe der modernen Wissenschaft und Technik.
Ein gutes Beispiel hierfür stellt der Begriff des Kartenmischens dar, der nicht nur mit gebräuchlichen Mischverfahren in der chemischen Technik, sondern auch mit den Grundbegriffen der Thermodynamik zusammenhängt.

13.2 Vom Kartenmischen

Wenn wir Fragen, die sich auf die Gleichverteilung der Karten beziehen, auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung beantworten, nehmen wir stillschweigend immer an, dass das Kartenspiel, von dem die Karten ausgeteilt werden, "gut gemischt" sei.
Dieser Ausdruck wird von den Kartenspielern oft gebraucht, da sie ihn aber nicht präzis zu definieren pflegen, schadet es nicht, wenn wir uns zunächst kurz mit dieser Frage befassen.

[16] Ich kann hier nicht im Detail auf die wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der einzelnen Glücksspiele eingehen, verweise aber in Zusammenhang mit den einzelnen Spielen auf Bücher, in denen der interessierte Leser eine eingehendere Behandlung finden kann.

Vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus nennen wir ein Spiel Karten dann gut gemischt, wenn nach dem Mischen alle möglichen Reihenfolgen (Permutationen) der Blätter die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
Im Falle von n Spielkarten sind $n!$ Permutationen möglich. Gut gemischt ist also ein solches Kartenspiel, von dem wir annehmen können, dass die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Reihenfolge gleich $\frac{1}{n!}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses A, das von der Reihenfolge der Karten abhängt, ist also $\frac{k}{n!}$ worin k die Anzahl derjenigen Reihenfolgen bedeutet, bei denen das Ereignis A eintritt.

Mischen wir beispielsweise ein Kartenspiel aus 52 Blatt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zuoberst liegende Blatt ein Ass ist, gleich $\frac{1}{13}$. Denn von den $52!$ Anordnungen ist die Anzahl der mit einem bestimmten Ass beginnenden Anordnungen gleich $51!$ (denn wenn zum Beispiel das oberste Blatt Herz Ass ist, so können die darunterliegenden 51 Blatt auf $51!$ Weisen angeordnet werden).

Da ein Spiel 4 Asse enthält, ist also $k = 4 \cdot 51!$ und somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{k}{52!} = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

In Wahrheit erfolgt das Mischen so, dass der eine Spieler (oder eine Maschine, die das Mischen durchführt) 10- bis 20mal eine bestimmte Bewegung macht. Jede einzelne Bewegung bedeutet ein Umordnen des Kartenspiels, d. h. die Anwendung einer Permutation auf die Anordnung der Karten. Die Permutationen einer Zahlenfolge bilden bekanntlich eine Gruppe.[17]

Unter dem Produkt zweier Permutationen, z. B. von P und Q (das wir mit PQ bezeichnen), verstehen wir, dass wir als erstes die Umordnung P durchführen und auf die als Ergebnis erhaltene Anordnung die Umordnung Q anwenden.
Wenn beispielsweise $n = 32$ ist, es sich also um ein Kartenspiel aus 32 Blatt handelt, und P die Permutation

$$\begin{matrix} 1...16 & 17...32 \\ 17...32 & 1...16 \end{matrix}$$

ist, also an die erste Stelle das ursprünglich an der 17. Stelle liegende Blatt gelangt, an die zweite Stelle das ursprünglich an 18. Stelle liegende Blatt usw., an die letzte Stelle schließlich das ursprünglich an 16. Stelle liegende Blatt (dies kann man so durchführen, dass man von dem 32blättrigen Kartenspiel die ersten 16 Blatt zusammen abnimmt, diese auf den Tisch ablegt und die unteren 16 Blatt drauflegt), und wenn $Q = P$ ist, d.h. als zweites dieselbe Operation durchgeführt wird, dann ist $PQ = P^2 = I$ die identische Permutation, als Endergebnis der beiden Operationen wird also wieder die

[17] Eine Menge G von Elementen bildet eine Gruppe, wenn jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen a und b aus G eindeutig ein drittes Element ab aus G als ihr Produkt zugeordnet ist, diese Multiplikation assoziativ ist: $a(bc) = (ab)c$, ein Element e (Einselement) in G existiert, das bei der Multiplikation reproduziert: $ae = ea = a$ für alle a aus G, und wenn zu jedem a aus G ein inverses Element a^{-1} in G mit $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ existiert. (Anmerkung des Übersetzers)

ursprüngliche Reihenfolge hergestellt.

Für den Prozess des Mischens können wir nun zwei naheliegende mathematische Modelle (vereinfachte Bilder des tatsächlichen Vorgangs) aufstellen. Das erste Modell werden wir deterministisches Modell, das zweite stochastisches Modell nennen.

Zunächst nehmen wir an, der Mischer führe bei jeder einzelnen Bewegung genau dieselbe Umordnung des Kartenspiels durch.
Bezeichnen wir diese Permutation mit P, so ist die k-malige Ausführung dieser Bewegung mit einer einzigen Umordnung der ursprünglichen Anordnung gleichwertig, und zwar mit derjenigen Umordnung, die der k-ten Potenz der Permutation P entspricht.

Ein solches Mischungsverfahren ist nicht nur grundsätzlich unbefriedigend, da man doch (wenigstens im Prinzip) genau ausrechnen kann, was sich als Endresultat ergeben wird. Es ist auch praktisch nicht geeignet, und zwar um so weniger, je kleiner die Ordnung der Permutation P ist, d. h. die kleinste positive ganze Zahl r, für die $P^r = I$ ist, wo I die identische Permutation bedeutet, bei der jedes Blatt an der Stelle bleibt. (Die Ordnung der oben als Beispiel genannten Permutation P beispielsweise ist $r = 2$.)

Ist nämlich die Ordnung der Permutation P gleich r, so bedeutet das, dass die Permutationen P, P^2, ..., P^r allesamt verschieden sind (während jede höhere Potenz von P bereits mit einer von diesen zusammenfällt).
Wir können also, wenn wir auch noch so oft die Permutation P wiederholen, dadurch prinzipiell nicht mehr als r verschiedene Anordnungen realisieren.

Würde freilich eine Permutation P existieren, deren Ordnung $n!$ ist, so könnten wir, indem wir sie wiederholt anwenden, jede Anordnung herstellen. Eine solche Permutation gibt es jedoch nicht, wenn $n > 3$ ist.
Die symmetrische Gruppe n-ten Grades (das ist die Gruppe aller Permutationen von n Elementen) ist nämlich nicht zyklisch, d. h. von einem Element erzeugt. Sie ist sogar nicht einmal abelsch (kommutativ), während die zyklischen Gruppen abelsch sind.

Vom rein mathematischen Standpunkt aus ist die Aufteilung der Permutationen nach ihrer Ordnung eine sehr interessante Fragestellung. Mit dieser Frage haben sich Pal Erdös und Pal Turan in einer 1965 erschienenen Arbeit ([15]) befasst.
Da beim Mischen jedoch niemals genau dieselbe Operation wiederholt wird (auch dann nicht, wenn das Mischen von einer Maschine durchgeführt wird), befassen wir uns hier nicht im einzelnen mit dieser Frage.[18]

Das zweite - der Wahrheit viel näherkommende - Modell des Mischens ist das folgende:

Wir wollen annehmen, dass die einzelnen Mischbewegungen auch vom Zufall abhängen und dass bei einer Bewegung jede Permutation mit einer gewissen Wahrscheinlich-

[18] Erdös und Turan beweisen in [15], dass die Ordnung der meisten unter den $n!$ Permutationen zwischen den Grenzen $e^{(1/2-\varepsilon)\ln^2 n}$ und $e^{(1/2+\varepsilon)\ln^2 n}$ fällt, wobei für $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl wählbar ist, wenn nur n genügend groß ist. Auf das Kartenmischen bezogen, bedeutet das, dass man im Falle der meisten Permutationen der 52 Karten die Mischbewegung weniger als 200000 mal wiederholen muss, um die Karten wieder in die Ausgangsreihenfolge zu überführen. Zum Vergleich machen wir darauf aufmerksam, dass 52! ein 68stelliger Zahlenriese ist.

keit auftritt. Weiter wollen wir annehmen, dass die einzelnen Bewegungen voneinander unabhängig sind.
Genauer bedeutet dies:

Nummerieren wir die $n!$ möglichen Permutationen von n Elementen irgendwie durch und bezeichnet Q_j diejenige Permutation, die die j-te Nummer erhält, so führt der Mischende bei jeder einzelnen Mischbewegung die Permutation Q_j mit der Wahrscheinlichkeit q_j durch $(j = 1, 2, ..., n!)$. (Natürlich ist $\sum_{j=1}^{n!} q_j = 1$).
Wenn also der Mischer bei seiner i-ten Bewegung die Permutation Π_i ausführt, so ist Π_i eine zufällige Permutation mit der Verteilung

$$P(\Pi_i = Q_j) = q_j \quad (j = 1,2,...,n!; i = 1,2,...)$$

(d. h., die zufällige Permutation Π_i ist mit der Wahrscheinlichkeit q_j gleich einer vorgeschriebenen Permutation Q_j), und die Verteilung von Π_i ist von den Permutationen $\Pi_1, ..., \Pi_{i-1}$ unabhängig.
In diesem Falle kommt nach k Bewegungen (wenn ursprünglich die Blätter in der Reihenfolge $1, 2, ..., n$ lagen) die Permutation

$$\Pi_1 \Pi_2 ... \Pi_k = \Pi^{(k)}$$

zustande. Die Permutationen $\Pi^{(k)}$ bilden eine sogenannte Markovsche Kette.[19]
Nun ist aber bekannt, dass dann, wenn die Verteilung $\{q_j\}$ so beschaffen ist, dass für eine beliebige echte Untergruppe G der Gruppe aller Permutationen

$$\sum_{Q_j \in G} q_j < 1 \tag{2.1}$$

gilt (d. h., die Verteilung nicht auf eine echte Untergruppe konzentriert ist), die Verteilung von $\Pi^{(k)}$ im Falle großer k nahezu eine Gleichverteilung sein wird, d.h., jede Permutation wird nach einer großen Anzahl von Mischoperationen mit etwa derselben Wahrscheinlichkeit (etwa $\frac{1}{n!}$) eintreten. Genauer ist in diesem Falle[20]

$$\lim_{k\to\infty} P(\Pi^{(k)} = Q_j) = \frac{1}{n!} \quad (j = 1,2,...,n!)$$

Die Bedingung (2.1) ist z.B. erfüllt, wenn $q_j > 0$ für jeden einzelnen Wert von j gilt.

Praktisch folgt aus dem Gesagten, dass im Prinzip jede Umordnung realisiert wird, wenn jede einzelne Mischbewegung zufällig ist. Wenn genügend viele Mischbewegungen gemacht werden, so ist somit die Annahme gerechtfertigt, dass das Blatt "gut gemischt" sei. Die "genügend" vielen Bewegungen beschreiben wir nicht näher.

Auf jeden Fall hat es sich gelohnt, sich so eingehend mit dem Vorgang des Mischens zu befassen, denn der am häufigsten gebrauchte Kniff der Falschspieler ist bekanntermaßen gerade das ungenügende Mischen (s. auch unter 5).

[19] Zum Begriff der Markovschen Kette vgl. den Aufsatz »Das Galtonsche Brett«. (Anmerkung des Übersetzers)

[20] Dieser Satz ist ein Spezialfall einer Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf topologische Gruppen, die die Bedingung für die Konvergenz nach dem Haarschen Maß angibt. Siehe z. B. [16] und [17].

13.3 Aufgaben bezüglich des Kartenverteilens

Untersuchen wir einige einfache Beispiele!

A) Poker: Beim Poker werden an jeden Spieler 5 der 52 Karten ausgeteilt. Bei dem Spiel unterscheidet man die folgenden Figuren:

1. Royal Flush: Wenn die 5 Karten von ein und derselben Farbe sind und der Größe nach aufeinanderfolgen (das Ass kann sowohl als 1 als auch nach dem König folgend angesehen werden), z. B. Herz 9, 10, Bube, Dame, König.

2. Poker (Vierständer): Wenn unter den 5 Karten 4 von der gleichen Art sind (z. B. 4 Könige usw.); die fünfte kann dabei beliebig sein.

3. Full Hand (oder Full House): Wenn von den 5 Karten 3 von der gleichen Art sind und die übrigen beiden ebenfalls miteinander übereinstimmen (z. B. drei Zehnen und zwei Könige).

4. Farbe (Couleur): Wenn die 5 Blätter von gleicher Farbe sind (z. B. alle fünf Kreuz).

5. Straße (street, sequence, quinte): Wenn die 5 Blätter der Größe nach aufeinanderfolgen, aber nicht alle von gleicher Farbe sind, z.B. Kreuz 5, Kreuz 6, Pik 7, Herz 8 Karo 9.

6. Drilling (Dreiständer): Drei übereinstimmende Blätter (z. B. drei Siebenen, die anderen beiden beliebig, aber nicht gleich, da das sonst Full Hand bedeutet).

7. Zwei Pärchen: Je zwei gleiche Karten (z. B. zwei Asse, zwei Sechsen), die fünfte beliebig (aber von den beiden Paaren verschieden).

8. Ein Pärchen: Zwei gleiche Karten (z. B. zwei Damen), die anderen drei beliebige, voneinander und von dem Paar verschiedene Karten.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Figuren können wir leicht dadurch ausrechnen, dass wir zusammenzählen, auf wie viele Weisen eine Figur verwirklicht werden kann, und diese Anzahl durch die Anzahl aller möglichen Auswahlen von 5 unter den 52 Karten dividieren. Beispielsweise kann Poker 13 · 48 mal auftreten, während sich von 52 Karten 5 auf $\binom{52}{5}$-erlei Weise auswählen lassen. Die Wahrscheinlichkeit von Poker ist also

$$\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 48 \cdot 120}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1}{4165} = 0{,}000240$$

Wir haben hier anscheinend anders gerechnet als im vorhergehenden Abschnitt, weil wir nicht auf die Reihenfolge der Blätter geachtet haben. Das Ergebnis wird dadurch nicht beeinflusst, denn wir können die fünf Karten in $5! = 120$ Reihenfolgen erhalten, und wenn wir diesen Faktor sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner streichen, ändert sich der Wert des Bruchs nicht.

Nach dem im vorstehenden Punkt genannten Verfahren können wir die Wahrscheinlichkeit von Poker auf folgende Weise ausrechnen: Wenn z. B. 4 Spieler spielen und reihum verteilen, bekommt der an erster Stelle sitzende Spieler das erste, das fünfte,

das neunte, das dreizehnte und das siebzehnte Blatt.
Die Anzahl der Anordnungen, bei denen an diesen fünf Stellen 5 bestimmte Karten in vorgegebener Reihenfolge liegen, beträgt offensichtlich $47!$, denn auf so viele Weisen kann man die übrigen 47 Karten auf die übrigen 47 Stellen verteilen.
Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Spieler Poker ausgeteilt wird, gleich

$$\frac{13 \cdot 48 \cdot 5! \cdot 47!}{52!} = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165}$$

d. h., wir erhalten auch auf diese Weise dasselbe Ergebnis wie oben.

Die Wahrscheinlichkeiten für alle Figuren sind in der folgenden Tabelle (bis auf 6 Dezimalen genau) zusammengestellt:

Royal Flush	0,000014
Poker	0,000240
Full Hand	0,001385
Farbe	0,001967
Straße	0,003532
Drilling	0,021055
Zwei Pärchen	0,047373
Ein Pärchen	0,422570
Überhaupt keine Figur	0,501864
	1,000000

Eine Figur ist also beim Poker um so wertvoller, je kleiner ihre Wahrscheinlichkeit ist. (Die Reihenfolge der Wahrscheinlichkeit nach kann sich jedoch ändern, wenn nicht mit 52 Blatt gespielt wird oder wenn sich ein oder mehrere Joker im Spiel befinden.)

Nach den Regeln des Poker hat jeder Spieler, nachdem er sein Blatt angesehen und eine entsprechende Summe an die Bank eingezahlt hat, das Recht, einzelne von seinen Karten abzugeben und dafür neue zu verlangen.
Während also beim ersten Austeilen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler überhaupt keine Figur erhält, etwas größer als $1/2$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er beim zweiten Mal, wenn er in einem solchen Falle 5 neue Karten verlangt, keine Figur bekommt, wiederum etwa $1/2$.

Da aber die beiden Ereignisse beinahe unabhängig sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler nach dem zweiten Austeilen wiederum keine einzige Figur hat, nur noch etwa $1/4$. Spiele ich also mit 3 anderen Spielern Poker, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle diese nicht einmal ein Pärchen haben, etwa $1/64$.[21]

Wenn ich nur ein Pärchen habe, so kann ich also fast sicher annehmen, dass von den anderen drei Spielern wenigstens einer gleichfalls ein Pärchen oder ein noch besseres Blatt hat.

[21] Diese Ereignisse sind nicht vollständig, nur näherungsweise unabhängig. Wir begehen also keinen großen Fehler, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren.

Weist man die Karten vor, wenn man nur ein Pärchen hat, so ist also die Gewinnwahrscheinlichkeit sehr gering. Auf einem anderen Blatt steht es freilich, dass beim Poker auch das Bluffen erlaubt ist.

Wir verweisen hier auf das Buch [18] von K. Jordan, das zahlreiche weitere mit dem Pokerspiel in Zusammenhang stehende wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgaben behandelt.

B) Bridge[22]:
Beim Bridge werden 52 Karten unter 4 Spieler verteilt, von denen je zwei gegenübersitzende eine Koalition bilden. Das Spiel besteht aus zwei Teilen, dem Reizen (Bieten) und dem tatsächlichen Abspielen. Hinsichtlich des Reizens sind zahlreiche Systeme bekannt.

Nach dem Culbertson-System (siehe [19]) schätzen die Spieler zunächst ihre eigenen Karten ein und entscheiden auf Grund dessen, was sie reizen. Die Einschätzung besteht darin, dass nach den folgenden Regeln sogenannte "Tricks" zusammengezählt werden.

Ass (ohne gleichfarbige Dame und König): 1 Trick
Ass und König (von einer Farbe, ohne die Dame gleicher Farbe): 2 Tricks
Ass und Dame (von einer Farbe, ohne den gleichfarbigen König): 1,5 Tricks
Ass, König und Dame von einer Farbe: 2,5 Tricks
König (ohne Ass und Dame derselben Farbe): 0,5 Tricks
König und Dame von einer Farbe (ohne Ass derselben Farbe): 1 Trick

Den Wert des vollen Blatts ergibt die Summe der in ihm vorhandenen Tricks. Der Wert des folgenden Blatts:

Pik: Ass, Dame, 10, 8, 7
Herz: König, Dame, 4, 3, 2
Karo: Dame, 7
Kreuz: 8

beispielsweise beträgt $1{,}5 + 1 = 2{,}5$ Tricks.
Der Wert der ausgeteilten 13 Karten ist eine vom Zufall abhängige Zahl, also eine Zufallsvariable.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie groß der Erwartungswert der einem Spieler ausgeteilten Karten ist.
Hierzu müssten wir eigentlich die Verteilung des Wertes des Blattes berechnen, also bestimmen, mit wie großer Wahrscheinlichkeit der Gesamtwert der in der Hand eines Spielers befindlichen 13 Karten gleich jeweils einer der Zahlen 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10 ist.
(Es ist leicht einzusehen, dass dies die möglichen Trickzahlen sind.)[23]

[22] Das Bridge stellt eigentlich kein Glücksspiel im engeren Sinne des Wortes dar, da beim Spiel das Können der Spieler eine viel größere Rolle als der Zufall spielt. Da das Austeilen der Blätter jedoch auch hier vom Zufall abhängt, stellen sich auch im Zusammenhang mit dem Bridge zahlreiche wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgaben.

[23] Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird dadurch berechnet, dass man aus allen möglichen

Obwohl dieser Weg nicht allzu schwer ist, werden wir hier nach einem einfacheren Verfahren vorgehen, das sich auf eine wohlbekannte Eigenschaft des Erwartungswertes gründet, und zwar darauf, dass der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen gleich der Summe der Erwartungswerte der Summanden ist.

Die Gesamtwerte der Blätter der vier Spieler mögen der Reihe nach mit ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 bezeichnet werden. Offensichtlich ist (im Falle eines gut gemischten Spiels) der Erwartungswert des Blatts für jeden der vier Spieler gleich groß.
Nun ist aber der Trickwert des Blatts des ersten Spielers seinerseits selbst Summe von vier Gliedern:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14}$$

wo $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$ angeben, wieviel Tricks der erste Spieler der Reihe nach aus Pik, Herz, Karo bzw. Kreuz hat.
Analog dazu lässt sich auch der Gesamtwert des Blatts der übrigen drei Spieler in eine Summe aus 4 Gliedern zerlegen:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{24}$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{34}$$
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_{41} + \varepsilon_{42} + \varepsilon_{43} + \varepsilon_{44}$$

Nun ist aber offensichtlich, dass die Erwartungswerte der Zufallsvariablen ε_{ij} $(i = 1{,}2{,}3{,}4;\ j = 1,2,3,4)$ alle gleich sind. Wenn wir ihren gemeinsamen Wert mit m bezeichnen, d.h.

$$M(\varepsilon_{ij}) = m \qquad (i,j = 1{,}2{,}3,4)$$

ist, folgt also auf Grund der Additivität der Erwartungswerte

$$M(\varepsilon_1) = 4m = M(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{41})$$

Nun ist aber $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{41}$ die Summe der bei den vier Spielern befindlichen Tricks in der Farbe Pik, d.h., wir haben erkannt, dass der Erwartungswert des Blatts, das sich in der Hand eines Spielers befindet, gleich dem Erwartungswert der in der Hand der vier Spieler befindlichen Tricks aus der Farbe Pik ist.
Um diese letztere Größe zu berechnen, brauchen wir nur zu untersuchen, wie sich Pik Ass, König und Dame unter die 4 Spieler verteilen.

Wenn sich jede dieser 3 Karten bei einem anderen Spieler befindet, so ist $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{41} = 1{,}5$. Sind das Pik Ass und der Pik König in einer Hand, die Pik Dame aber

Werten der Variablen das gewogene Mittel mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als Gewichten bildet. Nimmt also die Zufallsvariable ξ die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ der Reihe nach mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, ..., p_n$ an, so ist ihr Erwartungswert

$$M(\xi) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

Die Bedeutung der Erwartungswerte geht aus dem Gesetz der großen Zahlen hervor, nach dem, wenn der Wert der Zufallsvariablen bei einer großen Anzahl unabhängiger Versuche beobachtet wird, das arithmetische Mittel der beobachteten Werte fast sicher sehr nahe bei dem Erwartungswert der Zufallsvariablen liegt.

in einer anderen, oder sind das Pik Ass und die Pik Dame in einer Hand, der Pik König aber bei einem anderen, oder sind schließlich der Pik König und die Pik Dame in einer Hand und das Pik Ass bei einem anderen, dann ist $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}+\varepsilon_{41}=2$. Befinden sich endlich alle drei Karten in einer Hand, so ist $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21}+\varepsilon_{31}+\varepsilon_{41}=2{,}5$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Pik Ass, König und Dame jeweils bei einem anderen Spieler sind, können wir folgendermaßen ausrechnen:
Hat der Spieler A das Pik Ass erhalten, so bekommt er noch weitere 12 Karten, die übrigen 3 Spieler dagegen 39 von den 51 Karten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A nicht den Pik König bekommt, ist also $\frac{39}{51}$. Wenn Pik Ass bzw. König der Spieler A bzw. B bekommen hat, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass C oder D die Pik Dame erhält, aus ähnlichen Gründen $\frac{26}{50}$. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{39\cdot 26}{51\cdot 50}=\frac{169}{425}=0{,}398$$

Analog kann man erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den fraglichen Blättern zwei in einer Hand sind, das dritte aber bei einem anderen ist,

$$3\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{39}{50}=\frac{234}{425}=0{,}550$$

beträgt. Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Pik Ass, König und Dame in einer Hand sind,

$$\frac{4\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{22}{425}=0{,}052$$

Die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten ist natürlich gleich 1: $0{,}398+0{,}550+0{,}052=1$.

Auf diese Weise beträgt der Erwartungswert des Blattes eines Spielers

$$1{,}5\cdot 0{,}398+2\cdot 0{,}550+2{,}5\cdot 0{,}052=0{,}597+1{,}100+0{,}130=1{,}827$$

oder rund 1,8. Mit diesem Ergebnis wird die Regel des Culbertsonschen Reizsystems gerechtfertigt, dass zum Beginn wenigstens 2,5 Tricks notwendig sind - da doch 2 Tricks noch kaum besser als der Durchschnitt sind -, während dann, wenn der Partner beginnt, für das Mehrbieten auch 1,5 Tricks ausreichen, d. h., bereits ein annähernd durchschnittliches Blatt genügt; denn der Gesamterwartungswert des Blatts der beiden Gegenspieler beträgt 3,6 Tricks, und da $2{,}5+1{,}5=4$ ist, kann sein beginnender Partner bereits im Falle von 1,5 Tricks damit rechnen, dass er und sein Partner zusammen stärker als ihre Gegner sind.

Eine andere aufschlussreiche Frage bei Bridge ist die folgende:
Ein Spieler hat in seiner Hand 2 Asse. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die beiden fehlenden Asse bei seinem Partner befinden bzw. dass dieser nur eines von diesen oder überhaupt keines hat?

Da die fraglichen 2 Asse offensichtlich zu den in den Händen der 3 anderen Spieler

befindlichen 39 Karten gehören, gibt es für ihre Verteilung $\binom{39}{2}$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.
In Hinblick auf die erste Frage sind hiervon $\binom{13}{2}$ Fälle günstig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich beide fehlenden Asse beim Partner befinden, ist also

$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{39}{2}} = \frac{6}{57}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich eines der beiden fehlenden Asse bei dem Partner befindet, beträgt

$$\frac{13 \cdot 26}{\binom{39}{2}} = \frac{26}{57}$$

während die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Partner keines von diesen besitzt, gleich

$$\frac{\binom{26}{2}}{\binom{39}{2}} = \frac{25}{37}$$

ist. Die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten ist natürlich gleich Eins: $\frac{6+26+25}{57} = 1$.

Eine eingehende und allgemeinverständliche wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung des Bridgespiels ist in dem Buch [20] von E. Borel und A. Cheron zu finden.

13.4 Spielstrategien

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in diesem Teil auf das folgende vereinfachte Glücksspiel. Ein Spieler (nennen wir ihn Peter) spielt gegen die Bank. Das Spiel besteht aus einer Folge von Partien.
In jeder einzelnen Partie hat Peter das Recht zu entscheiden, eine wie große Summe er riskieren will. Diese Summe nennen wir den Einsatz von Peter. Peter ist verpflichtet, seinen Einsatz zunächst auf den Tisch zu legen, kann also niemals einen größeren Einsatz machen, als er insgesamt Geld bei sich hat.

Danach wird ein zufälliger Versuch durchgeführt, der zwei mögliche Ausgänge besitzt, die Ereignisse A und $\overline{A}$, deren Wahrscheinlichkeiten p und q sind ($p+q = 1$; $0 < p < 1$). Wenn bei dem Versuch das Ereignis A eintritt, so behält Peter seinen Einsatz, und außerdem zahlt die Bank so viel an Peter, wie der Einsatz von Peter betrug. Tritt im Ergebnis des Versuches das Ereignis $\overline{A}$ ein, so bekommt Peters Einsatz die Bank.

Zu diesem Typ gehört beispielsweise das Kopf-und- Wappen-Spiel, bei dem (im Falle einer regelmäßigen Münze) $p = \frac{1}{2}$ ist.
Weiterhin gehört hierzu das Roulett, vorausgesetzt, dass Peter immer auf Rot setzt. Da sich auf der Roulettscheibe 18 rote und 18 schwarze positive Zahlen sowie eine Null befinden und die Bank auch gewinnt, wenn Null herauskommt, ist in diesem Falle $p = \frac{18}{37}$.
Es ist allbekannt, dass bei $p \leq \frac{1}{2}$ kein Spielsystem existieren kann, das für Peter einen sicheren Gewinn garantiert.

Der Einfachheit halber wollen wir uns auf den Fall $p = \frac{1}{2}$ beschränken. Es sei $\varepsilon_k = +1$, wenn Peter bei der k-ten Partie gewinnt (wenn also das Ereignis A eintritt), und $\varepsilon_k = -1$, wenn er verliert (wenn also $\overline{A}$ eintritt). S_k bezeichne den Einsatz von Peter in der k-ten Partie.
S_k kann offensichtlich von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{k-1}$ abhängen: $S_k = S_k(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})$.
Der Wert von S_k kann keine negative Zahl sein. $S_k = 0$ bedeutet, dass Peter am k-ten Spiel nicht teilnimmt. $S_n \neq 0$ und $S_j = 0$ für $j > n$ bedeutet, dass Peter nach der n-ten Partie das Spiel abbricht.

Wenn sich Peter mit N Mark in der Tasche zum Spielen hinsetzt, verstehen wir unter einer möglichen Strategie von Peter eine beliebige Folge nichtnegativer Funktionen $S_k(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1})$ $(k = 1,2,...)$, wobei S_1 eine Konstante ist, jede der Variablen ε_i die Werte $+$ 1 annehmen kann und die Funktionen davon den Bedingungen

$$N + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k S_k(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}) \geq 0 \qquad (n = 1,2...)$$

genügen. Es sei $\xi_0 = N$. Die Summe

$$\xi_n = N + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k S_k(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}) \geq 0 \qquad (n = 1,2...)$$

gibt offensichtlich an, wieviel Geld Peter nach der n-ten Partie hat. Die Zufallsvariablen ξ_n $(n = 0,1,...)$ bilden ein sogenanntes Martingal (s. [21]).
Das bedeutet, dass der Erwartungswert von ξ_n unter der Bedingung, dass die Werte von $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}$ gegeben sind, immer gleich ξ_{n-1} ist.

Es ist leicht einzusehen, dass im Falle $p = \frac{1}{2}$ der Erwartungswert $M(\xi_n) = N$ $(n = 1,2,...)$ ist.
Also garantiert kein Spielsystem für Peter einen sicheren Gewinn.

Es lohnt, sich kurz mit dem folgenden fehlerhaften "Spielsystem" zu befassen, das unter Glücksspielern infolge ihrer Unkenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung populär ist, nach dem man so lange stets 1 Mark setzen soll, bis man einen Gewinn erlangt; dann soll man das Spiel (mit 1 Mark Gewinn) abbrechen.
Tatsächlich sieht es so aus, als würde dieses System Peter einen sicheren Gewinn von 1 Mark garantieren, da Peter doch (mit der Wahrscheinlichkeit 1) früher oder später einmal gewinnt. In Wahrheit bietet dieses Spielsystem jedoch keinen sicheren Gewinn.

Offensichtlich ist nämlich dieses Spielsystem der obigen Definition nach nicht zugelassen, denn wenn z. B. Peter in den ersten N Partien verliert oder im Verlauf der ersten $(N+2M)$ Partien insgesamt $(N+M)$-mal verliert und M-mal gewinnt, so dass er zwischendurch niemals im Gewinn ist, dann kann er das Spiel nicht fortsetzen und verliert somit mit positiver Wahrscheinlichkeit sein ganzes Geld.
In der Tat ist der zu erwartende Gewinn von Peter in diesem Spiel Null, was wir folgendermaßen beweisen können:

Es bezeichne $f_k(N)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter eher seine ganzen N Mark verliert, als dass er sich $(k-N)$ Mark Gewinn verschafft. In diesem Falle ist für $N \geq 2$

$$f_k(N) = \frac{1}{2} f_k(N+1) + \frac{1}{2} f_k(N_1) \tag{4.1}$$

Das fragliche Ereignis kann nämlich auf zweierlei Weise zustande kommen: so, dass Peter in der ersten Partie verliert und im Verlauf der darauffolgenden Partien eher die restlichen $(N-1)$ Mark verliert, als dass er $(k-N+1)$ Mark gewinnt, oder so, dass Peter in der ersten Partie gewinnt und danach eher die $(N+1)$ Mark verliert, als dass er $(k-N-1)$ Mark gewinnt.

Es ist leicht zu sehen, dass alle möglichen Lösungen der Differenzengleichung (4.1) von der Form $f_k(N) = AN + B$ sind.[24]
Da $f_k(0) = 1$ ist (denn wenn Peter überhaupt kein Geld hat, kann er auch nicht spielen und somit auch nicht gewinnen) und $f_k(k) = 0$ gilt (denn wenn Peter zu Beginn des Spiels bereits k Mark besitzt, dann braucht er auch nicht zu spielen), ist also $f_k(N) = 1 - \frac{N}{k}$.

In dem uns interessierenden Falle ist $k = N+1$, also ist $\frac{1}{N+1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter eher alle seine N Mark verliert, als dass er 1 Mark Gewinn verbucht. Demnach beträgt bei dem Spielsystem von Peter der Erwartungswert seines Gewinns

$$1\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - N \cdot \frac{1}{N+1} = 0$$

Auf Grund des Gesagten könnte der Leser denken, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung den Glücksspieler nur davon überzeugen kann, dass er, wenn er nur aus Gewinnstreben spielt (und nicht auch deshalb, weil er sich mit dem Spiel die Zeit vertreibt), besser daran tun würde, nicht zu spielen.

Dem ist indessen nicht so. Wenn der Spieler von dem Mathematiker verlangt, dass er ihm ein Spielsystem ausarbeitet, das sicheren Gewinn garantiert, dann verlangt er etwas Unmögliches, und der Mathematiker kann ihm dabei nicht helfen.
Steckt sich der Spieler jedoch ein erreichbares Ziel, so kann der Mathematiker eine Antwort auf die Frage geben, was der beste Weg ist, um dieses Ziel zu erreichen. Wir wollen zunächst die folgende Frage untersuchen.

Peter spielt Kopf oder Wappen. Zu Beginn des Spiels hat er N Mark, und er beschließt, so lange zu spielen, bis entweder sein Vermögen auf $M > N$ Mark gewachsen ist oder er sein ganzes Geld verloren hat.
Bei was für einem Spielsystem ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er gewinnt, maximal?

[24] Das können wir folgendermaßen beweisen. Wenn $f_k(N)$ der Gleichung (4.1) genügt, so befriedigt auch

$$g(N) = f_k(N) - \frac{N}{k}[f_k(k) - f_k(0)] - f_k(0)$$

(4.1), und es ist $g(0) = g(k) = 0$. Es sei $\max g(N) = G = g(N_1)$; dann kann man durch Induktion beweisen, dass $g(N_1 * j) = G$ $[j = 1,2,...,(k-N_1)]$ und analog $g(N_1 - j) = G$ $(j = 1,2,...,N_1)$, also $g(N) = 0$ für $N = 0,1,...,k$ ist, und somit ist $f_k(N) = AN + B$, wo $A = \frac{1}{k}[f_k(k) - f_k(0)]$ und $B = f_k(0)$ ist.

Wenn $w = w(N,M)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, dass Peter mit M Mark das Spiel abbricht, so muss, da Peter nicht mehr als N Mark verlieren kann und der Erwartungswert seines Gewinns Null ist,

$$w(M-N) - (1-w)N = wM - N \leq 0 \qquad \text{d.h.} \qquad w \leq \frac{M}{N}$$

sein. Frage: Bei welchem Spielsystem kann er erreichen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $w = \frac{N}{M}$ ist?

Wir wollen "kühn" diejenige Strategie nennen, bei der Peter so lange sein ganzes Geld auf einmal als Einsatz setzt, solange es $\leq \frac{M}{2}$ ist, während er, wenn sein Vermögen $x > \frac{M}{2}$ aber $x < M$ ist, nur noch $M - x$ setzt, d.h. genau so viel, dass er, wenn er in der folgenden Partie gewinnt, dann gerade die als Ziel gesteckten M Mark erreicht.

Wenn zum Beispiel $N = 1$ und $M = 10$ ist, dann spielt Peter folgendermaßen:
In der ersten Partie setzt er 1 Mark. Wenn er verliert, bricht er notgedrungen das Spiel ab, gewinnt er dagegen, so gehören ihm jetzt bereits 2 Mark. In diesem Falle setzt er in der zweiten Partie 2 Mark.
Wenn er verliert, zieht er sich bekümmert zurück, während er, wenn er gewinnt, in der folgenden Partie wiederum sein ganzes Geld (jetzt also 4 Mark) setzt.
Verliert er, so geht er mit leerer Tasche nach Hause, gewinnt er, so hat er bereits 8 Mark. Jetzt setzt er nur noch 2 Mark, erreicht also, wenn er gewinnt, die 10 Mark und bricht somit das Spiel ab.

Verliert er dagegen, so bleiben ihm noch 6 Mark, und somit kann er das Spiel noch fortsetzen. Er setzt 4 Mark. Wenn er gewinnt, besitzt er 10 Mark und zieht damit erfreut von dannen, verliert er, so bleiben ihm noch 2 Mark, die er in der folgenden Partie setzen kann, usw.
In diesem Zahlenbeispiel wird die Entwicklung des Geldes von Peter durch den folgenden gerichteten Graphen (Abb. 136) dargestellt, in dem von jedem Punkt 2 Kanten ausgehen und auf beiden Kanten die Wahrscheinlichkeit dafür, weiter fortzuschreiten, gleich 1/2 ist.

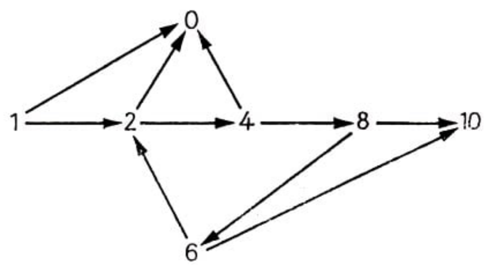


Abb. 136

Wenn p_i die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, dass der Spieler von dem Punkte i ($i = 1, 2, 4, 6, 8$) in den 10. Punkt gelangt, so bestehen offensichtlich die folgenden

Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
p_8 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p_6 \\
p_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p_2 \\
p_4 &= \frac{1}{2} p_8 \\
p_2 &= \frac{1}{2} p_4 \\
p_1 &= \frac{1}{2} p_2
\end{aligned}
$$

Das aus diesen 5 Gleichungen bestehende lineare Gleichungssystem ist lösbar (seine Determinante ist nämlich nicht Null). Durch Einsetzen erhalten wir $p_2 = 2p_1$, $p_4 = 4p_1$, $p_8 = 8p_1$, weiter $16p_1 - p_6 = 1$, $p_6 - p_1 = \frac{1}{2}$, hieraus $p_1 = \frac{1}{10}$ und somit $p_i = \frac{i}{10}$ $(i = 1{,}2{,}4{,}6, 8)$.

Also ist $w(1, 10) = \frac{1}{10}$. Analog kann man $w(N, M)$ berechnen, wenn N und M beliebige ganze Zahlen sind, $N < M$ und $\frac{M}{N}$ rational ist. Sind jedoch N und $M > N$ große Zahlen, so ist diese Methode nicht zweckdienlich, weil sie auf ein Gleichungssystem führt, das aus sehr vielen Gleichungen besteht. Daher ist es im allgemeinen Falle zweckmäßig, ein anderes Beweisverfahren anzuwenden.

Allgemein gilt, dass $w(N, M) = \frac{M}{N}$ ist, wenn N und M beliebige positive (nicht unbedingt ganze) Zahlen sind und $N < M$ ist. Das können wir folgendermaßen erkennen.
Da wir M als Geldeinheit wählen können, dürfen wir offensichtlich annehmen, dass $M = 1$ und $0 < N < 1$ ist. Es sei $w(N,1) = f(N)$ $(0 \leq N \leq 1)$. Offensichtlich besteht hierfür die folgende Gleichung

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(2x) & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(2x - 1) & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.2}
$$

Diese Funktionalgleichung können wir mit einer analogen Methode wie die frühere (4.1) lösen.
Es sei $g(x) = f(x) - x$, dann genügt $g(x)$ offensichtlich der Gleichung

$$
g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} g(2x) & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} g(2x - 1) & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.3}
$$

Nun ist aber $g(x)$ beschränkt, $-1 \leq g(x) \leq 1$, denn $f(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeit und somit $0 \leq f(x) \leq 1$. Es sei $G = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} g(x)$ und $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge, für die $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = G$ ist.

Aus der (beschränkten) Folge der x_n kann man eine konvergente Teilfolge auswählen. Wir wollen sie mit y_n bezeichnen. Dann ist also

$$
\lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = G
$$

Wenn $0 \leq y_n \leq \frac{1}{2}$ für unendlich viele n gilt, dann gilt nach (4.3)

$$G = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \leq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sup g(2y_n) = \frac{G}{2}$$

Ist dagegen $\frac{1}{2} \leq y_n \leq 1$ für unendlich viele n, so gilt

$$G = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \leq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sup g(2y_n - 1) \leq \frac{G}{2}$$

in jedem Falle ist also $G \leq \frac{G}{2}$, d.h. $G \geq 0$.

Es sei jetzt $g = \inf\limits_{0\leq x\leq 1} g(x)$. Mit einer analogen Überlegung kann man erkennen, dass $g \geq 0$ ist. Das bedeutet aber, dass $g = G = 0$, d.h. $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$ ist, was wir beweisen wollten.

Es ist zu bemerken, dass im Falle des Kopf-oder-Wappenspiels die Gewinnwahrscheinlichkeit bei jeder Strategie, bei der Peter mit der Wahrscheinlichkeit 1 in endlich vielen Schritten entweder sein ganzes Geld verliert oder den als Ziel gesteckten Gewinn erringt, ebenso groß ist wie bei der oben behandelten "kühnen" Strategie.

Wir wollen jetzt dagegen ein Spiel untersuchen, bei dem Peter in jeder einzelnen Partie mit der Wahrscheinlichkeit p seinen Einsatz gewinnt und ihn mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ verliert, wobei $0 < p < \frac{1}{2}$ ist. (Ein solches Spiel ist z. B. das Roulett, wenn Peter immer auf Rot setzt, denn wie wir gesehen haben, ist in diesem Falle $p = \frac{18}{37}$)

Hier ist es nicht mehr gleichgültig, was für eine Strategie Peter anwendet, und die "kühne" Strategie ist in der Tat optimal. Wir wollen wiederum annehmen, dass Peter zu Beginn des Spiels das Vermögen x hat, wo $0 < x < 1$ ist, und dass sein Ziel darin besteht, sein Vermögen auf 1 zu vermehren.
$g(x, p)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter sein Ziel erreicht, wenn er die "kühne" Strategie anwendet.

Mit derselben Überlegung, die im Falle $p = \frac{1}{2}$ auf die Funktionalgleichung (4.2) geführt hat, erhalten wir, dass $g(x, p)$ der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$g(x,p) = \begin{cases} pg(2x,p) & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ p + (1-p)g(2x-1,p) & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Ferner genügt $g(0, p) = 0$ und $g(1,p) = 1$ den Bedingungen.
Wenden wir diejenige Überlegung, mit der wir gezeigt haben, dass eine Funktion, die (4.2) genügt, mit x identisch ist, auf (4.4) an, so gelangen wir zu dem Ergebnis, dass die Funktionalgleichung nur eine den Nebenbedingungen $g(0,p) = 0$, $g(1,p) = 1$ genügende Lösung besitzt.
(Dies ist übrigens zuerst von G.de Rham bewiesen worden, s. [22].)

Nun können wir aber folgendermaßen eine Lösung der Funktionalgleichung (4.4) konstruieren. Es seien $\xi_1, \xi_2, ...$ unabhängige Zufallsvariable, die mit der Wahrscheinlichkeit p und $1 - p$ die Werte 0 und 1 annehmen.

Es sei $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}$, und $F_p(x)$ bezeichne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen η. Dann ist unschwer einzusehen, dass $F_p(x)$ der Funktionalgleichung

$$F_p(x) = \begin{cases} pF_p(x) & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ p + (1-p)F_p(2x-1) & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und den Bedingungen $F_p(0) = 0$, $F_p(1) = 1$ genügt. Somit ist also $F_p(x) = g(x,p)$. Das Maß $\mu_p(A)$ auf den Borelmengen des Intervalls $(0,1)$, für das $\mu_p(I_{a,b}) = F_p(b) - F_p(a)$ für $0 \leq a < b \leq 1$ ist, - $I_{a,b}$ bezeichnet das Intervall $a \leq x < b$ -, können wir auch folgendermaßen charakterisieren:

Das Maß des Intervalls $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ist p, das des Intervalls $\left(\frac{1}{2},1\right)$ ist $1-p$. Das auf das Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ entfallende Maß p teilen wir im Verhältnis $p : (1-p)$ auf die Teilintervalle $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ und $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, und ebenso verfahren wir mit dem Intervall $\left(\frac{1}{2},1\right)$ usw.
Von den Intervallen $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ $(k = 0,1,..., 2^n - 1)$ haben somit $\binom{n}{l}$ Intervalle das Maß $p^l(1-p)^{n-l}$ $(l = 0,1,...,n)$.

Von der Funktion $F_p(x)$ kann man leicht nachweisen, dass sie eine streng monoton wachsende, stetige und singuläre Funktion ist, ihre Ableitung also fast überall Null ist. Wenn $p_1 \neq p_2$ ist, sind die Maße μ_{p_1} und μ_{p_2} orthogonal. Offensichtlich ist $\mu_{1/2}$ mit dem gewöhnlichen Lebesgueschen Maß identisch, da $F_{1/2}(x) = g\left(x, \frac{1}{2}\right) = x$ ist $(0 \leq x \leq 1)$.

Dass es im Falle $p < \frac{1}{2}$ nicht gleichgültig ist, was für eine Strategie jemand anwendet, und dass die "kühne" Strategie optimal ist, werden wir nicht allgemein beweisen, sondern an einem Zahlenbeispiel veranschaulichen.
Wir nehmen an, Peter setze sich mit 25 Mark ans Roulett $\left(p = \frac{18}{37}\right)$ mit dem Ziel, 100 Mark zu gewinnen, und er wende die "kühne" Strategie an.
In diesem Falle wird er dann und nur dann sein Ziel erreichen, wenn er die ersten beiden Partien gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $p^2 = 0{,}244...$

Nun wollen wir aber nachschauen, wie groß die Gewinnchance von Peter ist, wenn er eine vorsichtigere Strategie anwendet und stets nur 25 Mark setzt. Es ist leicht zu sehen, dass Peter in diesem Falle nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p^3}{1-2p+2p^2}$ sein Ziel erreicht und dass $\frac{p^3}{1-2p+2p^2} < p^2$ ist, wenn $p < \frac{1}{2}$ ist, denn es gilt

$$p^2 - \frac{p^3}{1-2p+2p^2} = \frac{p^2(1-p)(1-2p)}{p^2+(1-p)^2} > 0$$

Ist insbesondere $p = \frac{18}{37}$ dann wird $\frac{p^3}{1-2p+2p^2} = 0{,}2301...$, die Gewinnchance von Peter bei der "kühnen" Strategie beträgt also mehr als 23,5%, während sie bei der "vorsichtigen" Strategie geringer ist.

Mit der Untersuchung allgemeinerer Fragen, die zu den jetzt behandelten Problemen ähnlich sind, befasst sich das Buch [23] von L. E. Dubbins und L. J. Savage.

13.5 Kampf eines Mathematikers gegen die Spielkasinos

Zum Abschluss wollen wir von einem interessanten Fall berichten, der gut zeigt, wozu die mathematische Theorie der Glücksspiele imstande ist und wozu nicht.
Edward O. Thorp, ein amerikanischer Mathematiker, hat vor einigen Jahren, als er an der Universität von Los Angeles lehrte, in den Winterferien einige Tage in Las Vegas verbracht und im Verlauf derselben einem Spielkasino einen Besuch abgestattet, wo er Siebzehn-und-vier gespielt - und natürlich verloren hat. Hierüber verärgert, begann er darüber nachzudenken, was bei dem Spiel Siebzehn-und-vier [so, wie dies in den Spielkasinos von Nevada gespielt wird[25]] die beste Strategie für einen Spieler ist.

Bekanntlich teilt der "Austeiler" (ein Angestellter des Kasinos) bei Siebzehn-und-vier jedem Spieler je 2 Karten eines aus 52 Blatt bestehenden gut gemischten Kartenspiels aus. Der Austeiler bekommt die Karten der Spieler nicht zu sehen.
Auch sich selbst teilt der "Austeiler" 2 Karten aus, er ist jedoch verpflichtet, die erste davon den Spielern zu zeigen. Die Blätter werden folgendermaßen bewertet:

Jede Figur (Bube, Dame, König) erzielt 10 Punkte, die übrigen mit Ausnahme des Ass soviel, wie auf ihnen steht (die Sieben also z. B. sieben Punkte). Jedem Spieler steht es frei, das Ass mit 1 oder 11 zu bewerten. Im Spiel gewinnt derjenige, für den die Summe der Punktwerte seiner Karten der 21 am nächsten kommt, ohne sie zu überschreiten.

Jeder Spieler hat das Recht, nachdem er seine Karten angesehen hat, so viele neue Karten zu verlangen, wie er nur will. Wenn aber die Punktsumme seiner Karten die 21 überschreitet, ist er verpflichtet, die Karten aufzudecken, und scheidet aus dem Spiel aus.
Der "Austeiler" kann auch an sich selbst neue Karten austeilen. Zwischen einer vorgegebenen unteren und oberen Schranke können die Spieler ihre Einsätze beliebig wählen.

Jeder Spieler spielt getrennt gegen den "Austeiler". Wenn das Blatt des Spielers besser als das des Austeilers ist, gewinnt der Spieler ebensoviel, wie sein Einsatz betrug, ist es schlechter, so verliert er seinen Einsatz, sind sie dagegen gleich gut (haben z. B. alle beide 21), so bleibt alles beim alten.

Ein großer Vorteil des Austeilers besteht darin, dass der Spieler in jedem Falle seine Karten aufdecken muss und somit auf jeden Fall, wenn der Gesamtwert derselben die 21 überschreitet, seinen Einsatz verliert, und zwar auch dann, wenn auch der Gesamtwert der Karten des Austeilers größer als 21 ist.
Letzteres stellt sich nämlich möglicherweise nicht einmal heraus, denn wenn jeder Spieler seine Karten aufgedeckt hat, braucht der Austeiler seine nicht vorzuweisen, sondern braucht nur die Einsätze einzustreichen.

Thorp hat beobachtet, dass die Kasinos ihren Angestellten mit ganz strengen Regeln vorschreiben, nach was für einem System sie spielen sollen.[26]

[25] In mehreren Gliedstaaten der USA dürfen keine Spielkasinos betrieben werden. In Nevada wird dies jedoch vom Gesetz zugelassen.

[26] Mit der Vorschrift der starren Regeln versucht das Kasino zu verhindern, dass die Angestellten mit den Spielern gemeinsame Sache machen und - gegen Gewinnbeteiligung - vorsätzlich auf Kosten

So schreiben sie zum Beispiel vor, dass sich der Austeiler keine neuen Karten austeilen darf, wenn der Gesamtwert seiner Blätter die 17 erreicht oder überschreitet.

Thorp dachte sich, dass es durch den Umstand, dass der Spieler durch keinerlei starre Regeln gebunden ist und - im Gegensatz zu dem Austeiler - auch nicht gezwungen ist, sein erstes Blatt vorzuzeigen, sowie dass er die Summe seines Einsatzes frei wählen kann, prinzipiell möglich sein müsste, auch gegen den obengenannten Vorteil des Austeilers ein Gewinnsystem auszuarbeiten.

Er gründete dies hauptsächlich darauf, dass es damals - im Interesse eines schnelleren Spielablaufs - in den Kasinos von Nevada üblich war, dass der Austeiler nicht nach jeder Partie das Blatt mischte, sondern ein Spiel Karten so lange benutzte, wie es reichte, und erst danach die benutzten Karten einsammelte und mischte.

Auf diese Weise kann ein Spieler, der beobachtet, was für Karten bereits "ausgegangen" sind, und auf Grund dessen seine Strategie elastisch ändert, seine Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen, vorausgesetzt, dass er weiß, wie er sich die zur Verfügung stehende Information zunutze machen kann.
Hierzu muss der Spieler offensichtlich die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen der einzelnen Karten im Falle des unvollständigen Kartenspiels berücksichtigen und kann auf Grund dessen seine vorteilhafteste Strategie ausarbeiten.

Freilich sind dazu einfache und leicht zu beachtende Regeln erforderlich, denn er muss sich in einem Augenblick entscheiden, ob er noch eine weitere Karte verlangt oder nicht. Thorp scheute nicht die Mühe und arbeitete mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine IBM 704 des Massachusetts Institute of Technology eine leicht zu beobachtende Strategie aus, die dem Spieler gegenüber dem Kasino einige Prozent Vorteil sichert.[27]

Auf einer 1960 in Washington abgehaltenen Tagung der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft hat er über seine Rechnungen einen Vortrag gehalten. Der Vortrag erregte großes Aufsehen, und nach einigen Tagen erhielt er von einem Geschäftsmann einen Brief, der ihm 100000 Dollar zu dem Zweck anbot, sein System in der Praxis auszuprobieren.
Thorp nahm das Angebot an und reiste - nachdem er sein System eingeübt hatte - nach Nevada ab, um einen Versuch zu machen.

Der Versuch gelang glänzend. Im Verlauf von weniger als 2 Stunden gewann er 17000 Dollar. Der Besitzer des Kasinos war freilich keineswegs so wie Thorp und sein Partner über den Erfolg des wissenschaftlichen Experiments begeistert und hinderte sie anderntags mit verschiedenen Vorwänden daran, aufs neue zu spielen.
Später versuchte es Thorp auch in anderen Kasinos, aber überall ging ihm das Gerücht voraus, und alle Kasinos schlossen vor ihm ihre Tore.

Einige Male gelang es ihm, mit falschem Bart oder als Chinese verkleidet an den Spieltisch zu gelangen, aber wie er auch immer sein Antlitz veränderte, es verriet ihn, weil er beständig gewann. Somit musste er also die praktische Ausnutzung seines Systems des Kasinos verlieren.

[27] Die Rechnung erforderte 3 Maschinenstunden.

aufgeben.
Er rächte sich an den Kasinos, die ihn ausgewiesen hatten, damit, dass er sein System in einem Buch aufschrieb und verlegte (siehe [24]).

Auf Grund seines Buches lernten so viele seine Gewinnstrategie, dass die Kasinos von Nevada gezwungen waren, die Spielregeln radikal zu ändern. Unter anderem bestand die Veränderung darin, dass heute nach jeder Partie neu gemischt wird. Damit zogen sie seiner Strategie den Boden unter den Füßen weg. So sind wir nun wieder dorthin gelangt, von wo wir ausgegangen sind: zur Bedeutung des Kartenmischens.

14 Magische Quadrate

Tibor Bakos

Ein magisches Quadrat ist eine interessante Anordnung von Zahlen, die viele Regelmäßigkeiten zeigt. Ein Quadrat wird von Geraden, die zu seinen Seiten parallel sind, in eine gewisse Anzahl von Zeilen und ebenso viele Spalten aufgeteilt, und dann wird die folgende Aufgabe gestellt:
Diese Figur ist so mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen auszufüllen, dass in jedes kleine Feld eine Zahl kommt und die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und längs beider Diagonalen dieselbe ist.

Hierin ist für den Menschen von heute nur noch die hochgradige Ordnung interessant. Obgleich in den verschiedenen Reihen jeweils andere Zahlen zusammenstehen, ist ihre Summe stets dieselbe. Dies gefällt uns, und die Hoffnung auf Erfolg spornt uns zur Lösung an.

In früherer Zeit hat jedoch der Anblick eines magischen Quadrats mehr Empfindungen ausgelöst, es hat Ehrerbietung verlangt, Befürchtungen geweckt, es erschien als Hexerei. Von hier rührt auch die Benennung her.
Manche haben z.B. aus dem Verkauf kleiner, mit einem magischen Quadrat ausgelegter Amulette Nutzen gezogen, die vor den Übeln schützen sollten.

In Wahrheit haftet den magischen Quadraten nichts Magisches an, man muss sich nur auf die Regelmäßigkeiten verstehen. Und wenn dies bereits Magie ist, so kann sie ein jeder erlernen. In der Tat haben auch die sogenannten Magier das Staunen in ihren Zuschauern stets nur mit Hilfe von Schaustellungen hervorgerufen, die auf weniger bekannten Naturgesetzen beruhten.
Daher ist es nicht notwendig, die nicht ganz glückliche Benennung "magisches Quadrat" abzuändern.

Wir können an das Studium der magischen Quadrate, bei denen immer mehr Zahlen benutzt werden, nur mit dem Vorsatz herangehen, uns nicht an den bereits ihres Umfangs wegen ermüdenden Additionen zu ergötzen, sondern mit möglichst wenig Arbeit zu einem Ergebnis zu gelangen, nachdem wir die weniger Zahlen in Anspruch nehmenden Ergebnisse erklärt haben.

In zahlreichen alten Büchern, die mit Mathematik unterhalten wollen, werden nur fertige magische Quadrate, "Bildungssrezepte", mitgeteilt. Auch das ist interessant. Besonderes Vergnügen bereitet es aber auch zu verstehen, was wir tun und weshalb. Zu einem kleinen Teil sind auch wir dazu gezwungen, bloß mitzuteilen.
Wir sind aber auf einen Leser aus, der die zum Beweis dienenden erklärenden Einzelheiten nicht überspringt, sondern nach der erforderlichen Ruhe, und sei es erst nach einigen Tagen, wieder hierauf zurückkommt, wenn er sich an das Interessante bereits gewöhnt hat.
Gerade durch die Vertiefung des bereits Bekannten werden nämlich oft neue Erfolge vorbereitet.

Wir wünschen, dass diese Einzelheiten noch mehr zur Unterhaltung beitragen und zu

neuen Problemen Anlass geben. Der Problemkreis ist beinahe unerschöpflich. Auch von den alten Ergebnissen können wir hier nur eine Kostprobe geben, und bereits an diese knüpfen viele weitere, leicht auffindbare interessante Tatsachen an.
Es kann auch nichts schaden, wenn sich bei unseren Entdeckungen herausstellt, dass bereits andere darauf gekommen sind. Es ist jedoch gut zu wissen, dass auch die heutigen Mathematiker immer neue derartige Probleme beschäftigen und dass auch in der letzten Zeit noch zahlreiche interessante Ergebnisse gefunden worden sind.

Die Anzahl der Zeilen, die gleich der Anzahl der Spalten ist, pflegt man die Ordnung des magischen Quadrats zu nennen. Wir werden sehen - oder wenigstens vermuten -, dass man von 3 ab zu jeder Ordnungszahl ein magisches Quadrat bilden kann. (Ein magisches Quadrat zweiter Ordnung ist offensichtlich unmöglich.)

Das Herstellungsverfahren weist wesentliche Unterschiede auf, je nachdem, ob die Ordnungszahl gerade oder ungerade ist. Wir wählen zunächst von allen beiden Arten die jeweils kleinste Ordnung, geben Hinweise für die Erzeugung magischer Quadrate dritter und vierter Ordnung und hernach für magische Quadrate größerer Ordnungszahl.

Die Gesamtheit der Lösungen können wir nur für die Ordnung 3 angeben, weil es an Quadraten vierter Ordnung bereits 7040 Stück gibt, während von solchen fünfter Ordnung ab bisher noch nicht einmal ihre Anzahl bekannt ist.[28]

14.1 Das einfachste magische Quadrat

Mit 3 Zeilen und 3 Spalten ist es aus den Zahlen

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

aufgebaut. Da die Summe dieser Zahlen 45 ist, müssen wir in jeder Zeile, Spalte und Diagonale - kurz: in jeder Reihe (Linie) - als Summe 15 bekommen. Dies ist dann die sogenannte magische Konstante unseres Quadrats.
Wenn man dies weiß, wird man sicher in erster Linie daran denken, die einzelnen Zahlen durch ein Gleichungssystem zu bestimmen. Für die der Abb. 137 entsprechend bezeichneten Unbekannten können wir jedoch nur 8 Gleichungen aufschreiben, nämlich die Bedingungen, die sich für die 3 Zeilen, 3 Spalten und 2 Diagonalen ergeben:

$$x+y+z=15 \tag{1}$$
$$u+v+w=15 \tag{2}$$
$$r+s+t=15 \tag{3}$$
$$x+u+r=15 \tag{4}$$
$$y+v+s=15 \tag{5}$$
$$z+w+t=15 \tag{6}$$
$$x+v+t=15 \tag{7}$$
$$z+v+r=15 \tag{8}$$

[28]Anmerkung: Mittlerweile weiß man, dass es 275305224 magische Quadrate 5.Ordnung gibt. Quadrate, die durch Spiegelung bzw. Drehung auseinander hervorgehen nur einmal gezählt werden.

Von den Gleichungen (1) bis (6), die die Spalten- und Zeilensummen vorschreiben, müssen wir sogar noch eine weglassen, da sie nichts Neues aussagt.
Die Gleichung (6) beispielsweise folgt nämlich aus (1) bis (5), denn wenn wir die Gleichungen (1) bis (3) addieren, bekommen wir wieder, dass die Summe der 9 Unbekannten gleich 45 ist, und wenn wir hiervon die Summe von (4) und (5) subtrahieren, bleibt die Gleichung (6) zurück. Nach Weglassen von (6) bilden die übrigen 7 Gleichungen ein unabhängiges Gleichungssystem, von dem also keine Gleichung aus den anderen folgt.

	x	y	z	5	5	5	4	6	5
Abb. 137-139	u	v	w	5	5	5	6	5	4
	r	s	t	5	5	5	5	4	6

Das ist aber zur Bestimmung der 9 Unbekannten zu wenig, wie dies auch aus den Beispielen der Abb. 138 bis 142 hervorgeht. Auf jeder vorgeschriebenen Reihe derselben ist die Summe 15, und dabei kommen in mehreren Abbildungen die gleichen Zahlen vor.

	5	1,5	8,5	5,6	6,2	3,2	5,6	5,9	3,5
Abb. 140-142	8,5	5	1,5	2,6	5	7,4	2,9	5	7,1
	1,5	8,5	5	6,8	3,8	4,4	6,5	4,1	4,4

Wo wir aber lauter verschiedene Zahlen sehen, dort handelt es sich nicht um die vorgeschriebenen Zahlen. Die aufgeschriebenen Summenforderungen können auch von Zahlen erfüllt werden, die von den vorgeschriebenen verschieden sind. Die Forderung, dass die vorgeschriebenen Zahlen vorkommen sollen, lässt sich dagegen nicht mit einer Gleichung ausdrücken.
Es sind auch nicht etwa die einzutragenden Zahlen unbekannt, sondern die Stellen, an die sie kommen sollen.

Etwas kann man aus unserem Gleichungssystem jedoch entnehmen, dass nämlich die Zahl im mittleren Feld nur $v = 5$ sein kann. Aus den Gleichungen (2), (5), (7) und (8) ergibt sich nämlich für die Summe der durch das mittlere Feld hindurchgehenden 4 Reihen:

$$(u + w) + (y + s) + (x + t) + (z + r) + 4v = 60$$

während andererseits für die Summe der 3 Zeilen aus den Gleichungen (1), (2) und (3)

$$x + y + z + u + v + w + r + s + t = 45$$

folgt. Subtrahiert man dies von der vorigen Summe, so bekommt man $3v = 15$, $v = 5$. (Die 5 steht auch bei der Anordnung der vorgeschriebenen Zahlen der Größe nach in der Mitte.)

Es empfiehlt sich, bei den auf dem Rand liegenden 8 Zahlen einstweilen nur darauf zu achten, ob sie gerade oder ungerade sind. Von jeder Art gibt es 4 Stück: 2, 4, 6 und 8 bzw. 1, 3, 7, 9.
Wir wollen versuchen, die ungeraden davon unterzubringen. Setzen wir die als erstes angeordnete ungerade Zahl an die Stelle x in Abb. 137, so müssen wir das andere Eckfeld der von hier ausgehenden Diagonalen - der sogenannten Hauptdiagonalen -

gleichfalls mit einer ungeraden Zahl ausfüllen, weil die Summe von x und 5 gerade ist und diese zu 15, zu einer ungeraden Summe, nur durch eine ungerade Zahl ergänzt werden kann.

Jetzt ergibt sich aber analog, wenn wir es für die dritte ungerade Zahl an irgendeiner Stelle versuchen, dass wir in jedes Feld eine ungerade Zahl schreiben müssen. Setzen wir zum Beispiel für s eine dritte ungerade Zahl ein, so würde wegen der unteren Zeile auch r und wegen der mittleren Spalte auch y ungerade sein. Wir hätten also bereits 5 ungerade Zahlen untergebracht.

Wenn es überhaupt ein aus den Zahlen 1 bis 9 gebildetes magisches Quadrat dritter Ordnung gibt, kann demnach in einer Ecke keine ungerade Zahl stehen. In einer Ecke kann mit anderen Worten nur eine gerade Zahl stehen. Es sei z.B. $x = 8$, also t =2. Dann gibt es für die Anordnung der geraden Zahlen 4 und 6 an den Enden der anderen Diagonalen - der sogenannten Nebendiagonalen - zwei Möglichkeiten. Es sei beispielsweise $r = 4$ und somit $z = 6$. Damit sind die äußeren Reihen bis auf je ein Feld ausgefüllt.

Die an den leeren Plätzen einzusetzenden Zahlen lassen sich aus der Summenbedingung ausrechnen. Hierhin gelangen gerade die vorgeschriebenen vier ungeraden Zahlen (Abb. 143), und damit ist auf einen Schlag auch die Summe der mittleren Zeile und die der mittleren Spalte gleich 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Abb. 143

In China hat man ein aus einer Metallplatte gefertigtes altes Amulett gefunden, auf das dieses magische Quadrat nicht mit Zahlzeichen aufgraviert, sondern in dessen Felder entsprechend viele Löcher gebohrt waren (Abb. 144).

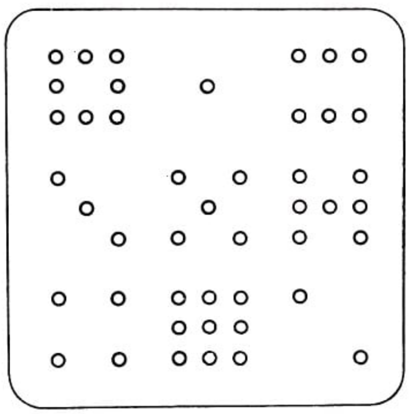


Abb. 144

Stellt man die Platte auf eine beliebige Kante, so kann man somit das Amulett immer noch lesen, sogar, wenn man will, von hinten, als Ob man in einen Spiegel schaut. Das heißt, wir bekommen aus einem einzigen magischen Quadrat durch Spiegelung 8 magische Quadrate.
Füllen wir die Eckfelder anders aus, so bekommen wir kein neuntes magisches Quadrat mehr. Halten wir nämlich z. B. die Werte $x = 8$ und $t = 2$ fest und nehmen $r = 6$ und

$z = 4$ an, so erhalten wir dasselbe, was wir von unserer Platte auch durch Drehung um die Hauptdiagonale ablesen könnten.
Für die Wahl von x aus den Zahlen 2, 4, 6, 8 gibt es 4 Möglichkeiten. Hieraus lässt sich stets t ermitteln, während es für r unter den auf dem Rand liegenden beiden geraden Zahlen 2 Möglichkeiten gibt. Die Rechnung liefert also gleichfalls $4 \cdot 2 = 8$ magische Quadrate.

(Wenn wir bereits wissen, dass unsere ungeraden Zahlen nur auf den Seitenmitten stehen können, wäre es ungeschickt, darauf zu bestehen, diese eher anzuordnen. Dann würde sich nämlich auf jeder Außenreihe nur eine bekannte Zahl von uns befinden, und wir müssten die in die Ecken zu schreibenden Zahlen erst mittels eines Gleichungssystems ausrechnen.)

Betrachtet man die fertigen Quadrate, so erkennt man auch, dass die Summe der beiden Zahlen, die in gegenüberliegenden Ecken oder Seitenmitten stehen, jeweils stets 10 ist und dass diese Paare von Zahlen auch bereits in der ursprünglichen Anordnung zu 5 als Mittelpunkt symmetrisch liegen, z. B. 2 und 8. Der Wert der Summe ist natürlich $15 - v = 15 - 5 = 10$.
Wir können dem aber hinzufügen, dass diese spiegelbildliche Anordnung der Zahlenpaare bereits in Abb. 145, in der Grundstellung, erkennbar ist.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Abb. 145

Es ist üblich, Glieder, die bei der ursprünglichen Anordnung von vorn und von hinten gerechnet dieselbe Nummer erhalten, zueinander komplementär ("arithmetisch spiegelbildlich") zu nennen. Wir können somit sagen:

Paare komplementärer Zahlen der vorgeschriebenen Zahlen liegen in dem magischen Quadrat auch im geometrischen Sinne spiegelbildlich gegenüber dem Mittelfeld, während die Zahl 5, zu der es keinen verschiedenen Partner gibt, auch in ein Feld ohne spiegelbildlichen Partner gelangt, in das Mittelfeld.

Danach greifen wir bereits ein wenig vergrämt die hieraus entspringende Entdeckung auf:
Schreiben wir in einem magischen Quadrat dritter Ordnung an die Stelle jeder Zahl ihr arithmetisches Komplement, so bekommen wir wieder ein magisches Quadrat. Wir wissen aber bereits, dass es nicht mehr magische Quadrate dritter Ordnung gibt. Bei größeren Ordnungszahlen ist es aber durchaus möglich, durch diesen Kniff aus einem magischen Quadrat ein neues zu erhalten.

14.2 Zwei andere Ausgangspunkte für die Konstruktion magischer Quadrate dritter Ordnung

Wir betrachten gleichzeitig die Bedingung, welche Zahlen genommen werden dürfen, und die Summenbedingung.

Mit unseren vorgeschriebenen Zahlen stellen wir alle Kombinationen zu je 3 Gliedern mit der Summe 15 zusammen.

Jede Reihe des magischen Quadrats muss eine solche enthalten. Das magische Quadrat selbst ist also gewissermaßen eine Verflechtung solcher Kombinationen. Es ist leicht zu sehen, dass nur die folgenden 8 Kombinationen in Frage kommen:

I: 1+5+9	IV: 2+5+8	VII: 3+5+7
II: 1+6+8	V: 2+6+7	VIII: 4+5+6
III: 2+4+9	VI: 3+4+8	

Da wir auch gerade 8 magische Reihen zu wählen haben, tritt in jeder Reihe eine derartige Kombination auf.
Wir wollen untersuchen, in welchen Paaren unserer Kombinationen eine gemeinsame Zahl vorkommt. Offensichtlich können sich nur solche zwei Kombinationen kreuzen, die eine Zahl gemein haben. Parallel können mit anderen Worten nur solche stehen, in denen es keine derartige Zahl gibt. Die gemeinsame Zahl - wenn eine solche existiert - ist in unserer Tabelle vermerkt (mehr als eine gemeinsame Zahl kann es natürlich nicht geben).

Die Kombinationen IV und VIII haben mit jeder anderen eine Zahl gemein. Es kann sich dabei also nur um Reihen handeln, zu denen keine andere Reihe parallel ist, d.h. um die Diagonalen.
Ihre gemeinsame Zahl, die 5, kann nur in der Mitte stehen. (Wie es von hier aus weitergeht, haben wir bereits oben gesehen.)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I	x	1	9	5	-	-	5	5
II	1	x	-	8	6	8	-	6
III	9	-	x	2	2	4	-	4
IV	5	8	2	x	2	8	5	5
V	-	6	2	2	x	-	7	6
VI	-	8	4	8	-	x	3	4
VII	5	-	-	5	7	3	x	5
VIII	5	6	4	5	6	4	5	x

Auch mit einer kleinen Statistik können wir die Lösung erraten. Die Eckfelder kommen in 3 Bedingungen vor: in einer Zeile, einer Spalte und einer Diagonalen, das Mittelfeld in 4 und die Seitenmitten in 2 Bedingungen. In unseren obigen Kombinationen ist jedoch die Zahl 5 viermal aufgetreten, die geraden Zahlen dreimal und die übrigen ungeraden zweimal.
Hieraus ergibt sich, dass wir nur so zu probieren brauchen, dass wir in den Mittelpunkt die 5 und in die Ecken die geraden Zahlen setzen.

14.3 Magische Quadrate vierter Ordnung

Werden sie mit den Zahlen von 1 bis 16 gebildet, müssen wir in jeder Reihe 34 bekommen, den vierten Teil der Summe dieser Zahlen. Gingen wir nach unseren obigen

Verfahren vor, so würden wir jedoch auf Schwierigkeiten stoßen, denn nach dem Vorbild des ersten Verfahrens hätten wir 16 Unbekannte, 10 magische Reihen und 9 unabhängige Gleichungen. Es gäbe keine feste Zahl, die der 5 entspricht, denn wenn es eine Lösung gibt, so wird durch Drehung der entsprechenden Amulettplatte jede Zahl verschoben.

Nach dem Vorbild unseres Kombinationsverfahrens hätten wir alle viergliedrigen Kombinationen unserer Zahlen mit der Summe 34 zu bilden. Deren gibt es aber bereits 86 (an Stelle der obigen 8). Es ist zum Verzagen, hier könnten 880 verschiedene Amulettplatten ausgebohrt werden.

Abb. 146,147

1	2	3	4		1	15	14	2
5	6	7	8		12	6	7	9
9	10	11	12		8	10	11	5
13	14	15	16		13	3	2	16

In Hinblick auf die Grundstellung unserer Zahlen (Abb. 146) könnten wir sagen: Gehen wir davon aus, dass die Summe auf den beiden Diagonalen bereits 34 ist. Gut waren nämlich auch die Diagonalen der Grundstellen dritter Ordnung (Abb. 145), obendrein auch noch ihre mittlere Zeile und Spalte, nur sind diese nicht dort geblieben, sondern nur die 5.

Wohlan, sehen wir, wo wir etwas wegzunehmen oder hinzuzutun haben, und wieviel! Die Summe der ersten Zeile beträgt 10, also fehlt 24, bei der zweiten Zeile fehlt 8, später sind es wieder zuviel: nochmals 8 und nochmals 24.
Wir vertauschen also die 2 mit der in der unteren Zeile darunterstehenden 14. Da ihre Differenz 12 beträgt, nimmt dabei sowohl das Defizit als auch der Überschuss um ebensoviel ab.

Die genannten Fehlbestände und Überschüsse heben sich gleichzeitig weg, wenn wir auch noch die übereinanderstehenden Paare von Zahlen 3, 15; 5, 9 und 18, 12 vertauschen. Ebenso fehlen in den aufeinanderfolgenden Spalten 6 und 2 Einheiten und sind 2 und 6 Einheiten zuviel.
Beides hebt sich weg, wenn wir die Zahlen in den folgenden vier Paaren vertauschen: 9, 12; 5, 8; 14, 15; 2, 3. Da deren Glieder auch nach der vorigen Vertauschung noch in derselben Zeile stehen, werden die oben erreichten richtigen Zeilensummen durch ihre Vertauschungen nicht zerstört.

Die so entstandene Anordnung (Abb. 147) stellt eines der am einfachsten aufgebauten magischen Quadrate vierter Ordnung dar. Seine Bildung kann man, wenn man gleich auf das Endergebnis blickt, einfacher folgendermaßen kennzeichnen:
Die acht Diagonalzahlen bleiben an Ort und Stelle, während die übrigen acht Zahlen in symmetrisch zum Mittelpunkt des Quadrats gelegenen Paaren ihre Plätze wechseln. Das sind gegenüber dem vorigen Verfahren nur 4 Paarvertauschungen. Jede vertauschte Zahl hat nämlich an zwei Vertauschungen teilgenommen und ist nach der zweiten Vertauschung an die Stelle derjenigen Zahl gelangt, die ihren ursprünglichen Platz eingenommen hat. Die jetzt vertauschten Zahlen sind zugleich auch komplementär zueinander, ihre Summen sind paarweise gleich 17.

Abb. 148-150

5	11	14	4		1	15	10	8		12	6	3	13
16	6	3	9		14	4	5	11		1	11	14	8
1	15	10	8		7	9	16	2		16	2	7	9
12	2	7	13		12	6	3	13		5	15	10	4

In Abb. 148 und Abb. 149 sind zwei weitere magische Quadrate dargestellt. Wir können auch an diesen drei Lösungen bereits zahlreiche weitere interessante Eigenschaften aufzeigen.
Schreiben wir die arithmetischen Komplemente der Abb. 148, d. h., schreiben wir an die Stelle jeder Zahl diejenige Zahl, die bei der Zählung der Zahlen $1, 2, ..., 15, 16$ von hinten dieselbe Nummer erhält, mit anderen Worten diejenige, die sie zu 17 ergänzt. Auf diese Weise gewinnen wir aus jedem magischen Quadrat wieder ein magisches Quadrat.

Denn wenn mit beliebigen Zahlen $x + y + z + v = 34$ gilt, dann ist zugleich auch

$$(17 - x) + (17 - y) + (17 - z) + (17 - v) = 68 - 34 = 34$$

erfüllt. Die so entstehende neue Anordnung (Abb. 150) lässt sich aus der mit Abb. 148 gebildeten Amulettplatte durch keinerlei Drehung herstellen, sie stellt ein neues magisches Quadrat dar. (In den äußeren Spalten hat sich die Reihenfolge umgekehrt, und mit den inneren Spalten sieht es ähnlich aus.)

Eine neue Lösung liefert auf diese Weise auch Abb. 149, die arithmetischen Komplemente von Abb. 147 bekommen wir dagegen auch durch Drehung um $180°$ um den Mittelpunkt - durch geometrische Spiegelung -, dies ist also keine neue Lösung.

1	10	15	8		1	10	15	8
14	5	4	11		7	16	9	2
7	16	9	2		14	5	4	11
12	3	6	13		12	3	6	13

Abb. 151,152

Wir schreiben unsere Zahlen auf das Etikett je einer Streichholzschachtel und können dann, anstatt zu schreiben und zu radieren, mit Hin- und Herlegen experimentieren.
Wir vertauschen auf diese Weise die beiden inneren Spalten von Abb. 149 als Ganzes miteinander (Abb. 151).

Damit haben wir nur die Magie der Diagonalen zerstört, die mittleren vier Zahlen stehen jetzt schlecht. Wir können sie auch dadurch in ihre ursprünglichen Diagonalen zurückgelangen lassen - und auf diese Weise ein neues magisches Quadrat bekommen -, dass wir die beiden inneren Zeilen der Zwischenlösung (Abb. 151) vertauschen (Abb. 152).
Abb. 149 und 152 unterscheiden sich dadurch voneinander, dass die an den Enden der Pfeile mit zwei Spitzen von Abb. 153 stehenden Zahlen vertauscht wurden.

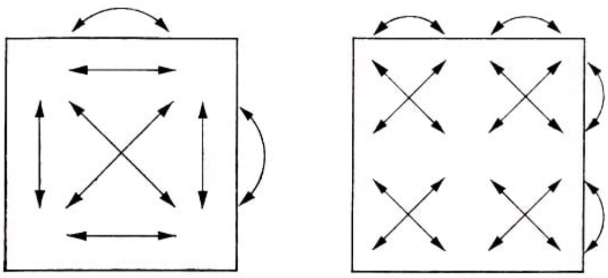


Abb. 153,154

Dieses Verfahren können wir auch auf jedes andere magische Quadrat vierter Ordnung anwenden - mit kleinen Abänderungen auch auf solche von höherer Ordnung. Es verdient also, eine besondere Bezeichnung zu erhalten: Wir nennen es erste magische Transformation (Umformung).

Mit derselben Versinnbildlichung stellen wir in Abb. 154 die zweite magische Transformation vor: Jede Außenreihe wird dabei mit ihrer benachbarten Reihe vertauscht. Auf diese Weise wird jede Zahl verschoben, und zwar zweimal vertauscht.
Das Endergebnis lässt sich auch mit 8 Paar Vertauschungen darstellen.

Abb. 155

16	7	2	9
10	1	8	15
3	12	13	6
5	14	11	4

Auf diese Weise ist aus Abb. 152 die Abb. 155 entstanden. Vergleichen wir diese unmittelbar mit ihrem "Vorfahren", der Abb. 149, so sehen wir, dass die Glieder der folgenden Zahlenquadrupel einander zyklisch ersetzen (daher ist auch die zeichnerische Darstellung komplizierter, Abb. 155).

Der Leser möge ausprobieren, ob er ein neues magisches Quadrat bekommt, wenn er auf Abb. 149 zunächst die zweite Transformation und dann auf das Ergebnis die erste anwendet.

Durch Komplementbildung erhalten wir aus Abb. 147 auch dann ein neues magisches Quadrat, wenn wir nur die mittleren Spalten vertauschen, weil die Summe beider mittlerer Zahlen auf allen beiden Diagonalen gleich groß ist, nämlich 17.
Dieses magische Quadrat ist berühmt geworden, weil es auch auf einem Kupferstich von Albrecht Dürer mit dem Titel "Melencolia" vorkommt.
Die nebeneinanderstehenden Zahlen 15 und 14 geben, zusammen gelesen, das Entstehungsjahr des Bildes an. Wir können auf unseren Abbildungen auch untersuchen, wie die genannten 86 magischen viergliedrigen Kombinationen angeordnet sind.

Unter vielem Interessantem könnte man auch erfahren, dass in den vier Eckfeldern immer eine Kombination "sitzt", eine andere dagegen in den vier Mittelfeldern, d. h., in jedem der bisherigen magischen Quadrate vierter Ordnung sind über die Vorschrift hinaus auch noch "versteckte" Quadrate enthalten. Die genannten Felderguadrate bilden einen sogenannten magischen Rahmen. In Abb. 148 und 149 ist z.B.

$$5+4+13+12=6+3+10+15=1+8+13+12=4+5+16+9=34$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies in jedem magischen Quadrat vierter Ordnung so sein muss. Nehmen wir die Zahlen der 1. Zeile, der 4. Zeile und der beiden Diagonalen eines beliebigen Quadrats. Ihre Summe beträgt $4 \cdot 34$.

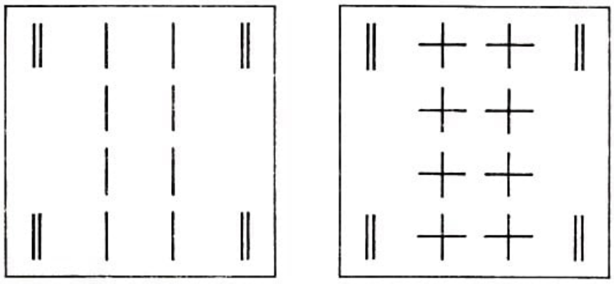


Abb. 156,157

In Abb. 156 haben wir an die Stelle jeder betrachteten Zahl einen kleinen Strich geschrieben, woraus wir ersehen können, dass in unserer bisherigen Summe die Zahlen der Eckfelder 2mal, die Zahlen der 2. und 3. Spalte dagegen einmal auftreten.
Wir lassen jetzt die 2. und 3. Spalte weg und schreiben an die Stelle der weggelassenen Zahlen einen horizontalen Strich (Abb. 157).

Wo unsere Zeichen ein Kreuz miteinander bilden, kommt die entsprechende Zahl in unserer weiteren Überlegung nicht mehr vor. Die Summe der weggelassenen Zahlen beträgt 2· 34, die der verbliebenen ist also auch 2· 34 und damit ebensogroß wie das 2fache der Summe der Eckenzahlen, d. h., deren Summe ist 34.
Lassen wir jetzt von den beiden Diagonalen die Eckenzahlen weg, so bleiben nur noch die Zahlen des mittleren Rahmens zurück, und deren Summe ist wiederum $2 \cdot 34 - 34 = 34$.
Es lassen sich noch zwei weitere magische Rahmen bilden:

Auch die Summe der inneren (d.h. nicht in den Ecken sitzenden) Zahlen der äußeren Zeilen ist gleich der magischen Konstanten, in Abb. 149 z.B. $15 + 10 + 6 + 3$, sowie die Summe der inneren Zahlen der äußeren Spalten: $14 + 7 + 11 + 2$.
Der Leser kann leicht einsehen, dass dem immer so ist, indem er der obigen Überlegung nachgeht. Abb. 149 hat noch eine weitere interessante Eigenschaft, die Abb. 147 und Abb. 148 nicht haben.
Wir schreiben Abb. 149 in vielen Exemplaren auf quadratische kongruente Steinplatten und pflastern nach dem Muster von "kariertem Papier" einen Teil der Ebene. Die Platten sollen in Reih und Glied stehen (Abb. 158).

1	15	10	8	1	15	10	8	1 . . .
14	4	5	11	14	4	5	11	14 . . .
7	9	16	2	7	9	16	2	7 . . .
12	6	3	13	12	6	3	13	12 . . .
1	15	10	8	1	15	10	8	1 . . .
14	4	5	11	14	4	5	11	14 . . .
7	9	16	2	7	9	16	2	7 . . .
.	.	.	.	.	.	.	.	. . . .

Abb. 158

Aus jedem unserer magischen Quadrate stellen wir ein sogenanntes magisches Parkett her. Greifen wir irgendwo hiervon ein aus 4 Zeilen und 4 Spalten bestehendes Quadrat heraus, das dieselbe Stellung wie die Ausgangsquadrate aufweist, so bekommen wir stets ein sogenanntes semimagisches Quadrat.
Hierunter pflegt man ein Quadrat zu verstehen, für das die Zeilen- und Spaltensumme gleich der magischen Konstanten ist - was sich wegen der Wiederholung der Steine von selbst versteht -, während die Diagonalsummen im allgemeinen von der magischen Konstanten verschieden sind.

Zeichnen wir aber in dem aus Abb. 149 gebildeten magischen Parkett irgendwie ein 4×4-Quadrat aus, so bekommen wir stets die richtigen Diagonalsummen, d.h. ein magisches Quadrat. Ein solches steht in dem nach rechts unten verschobenen Rahmen von Abb. 158.

Da wir als linke obere Eckenzahlen des Quadrats jede der 16 Zahlen wählen können, erhalten wir aus Abb. 149 nach dieser Beobachtung 15 neue magische Quadrate, und zwar offensichtlich lauter solche, die wir nicht durch Spiegelung der durchbohrten Platte bekommen können.
Diejenigen magischen Quadrate, die ein derartiges Parkett ergeben, werden pandiagonal (d.h. in jeder Diagonalen magisch), panmagisch, diabolisch oder parkettbildend genannt.

(Um zu erfahren, ob ein magisches Quadrat pandiagonal ist, brauchen wir nicht aus ihm ein Parkett aufzuschreiben, sondern es genügt schon, einen aus 7×7 Feldern bestehenden Teil desselben zu untersuchen. Die Diagonalzahlenquadrupel der Quadrate, die durch irgendeine Verschiebung des Rahmens entstehen, können wir nämlich auch in Abb. 149 zusammensuchen.
Nehmen wir z. B. als linke obere Eckzahl die 5, so finden wir rechts unten neben ihr die 2, dies wird die zweite Zahl der Hauptdiagonalen. Mit dem nächsten Schritt würden wir in den rechts benachbarten Stein hinüberwechseln. Es genügt aber jetzt, wenn wir ihn uns nur hindenken, denn er ist doch wieder genauso der Abb. 149 entsprechend aufgebaut.

Somit ist die 3. Zahl der Hauptdiagonalen die Anfangszahl der folgenden Zeile, die 12, während wir für die 4. Zahl an den unteren benachbarten Stein denken und die 2. Zahl der oberen Zeile erhalten, die 15. Analog können wir die Zahlen der Nebendiagonalen zusammensuchen, indem wir von dem linken Nachbarn der 5 ausgehen, von der 4, und nach links unten laufen. Derartige Felderquadrupel haben den treffenden Namen gebrochene Diagonale erhalten.)

Die oben aus Abb. 149 entstandenen Abb. 152 und Abb. 155 haben die Eigenschaft der Pandiagonalität nicht geerbt. Man kann beweisen, dass man, wenn man in einem pandiagonalen magischen Parkett von einer beliebigen Zahl ausgeht, in jeder Diagonalenrichtung als zweites Element das arithmetische Komplement hierzu findet.
Geht man z.B. in Abb. 158 von 2 nach rechts oben, nach rechts unten, nach links unten oder nach links oben, so stößt man nach zwei Schritten stets auf die Zahl 15.

(Wir addieren z.B. die Hauptdiagonale zweimal, die 1. und 3. Spalte, die von der linken oberen Ecke nach links unten gehende gebrochene Diagonale, hiervon ziehen wir dann die 2. und die 4. Zeile sowie die von dem 3. Feld der 1. Zeile nach links unten verlaufende gebrochene Diagonale ab.
Eine einfache Registrierung aller dieser Reihen nach der Art der Abb. 156 und Abb. 157 zeigt, dass wir dabei das 4fache der Summe der 1. und 3. Zahl der Hauptdiagonale erhalten. Diese ist aber gleich dem Zweifachen der magischen Konstante, weil wir die Konstante zuvor 5mal addiert und dann 3mal subtrahiert haben.)

14.4 Randbemerkungen

Bei den magischen Quadraten vierter Ordnung haben wir keine solche Trennung der geraden und ungeraden Zahlen wie bei denen der Ordnung Drei beobachten können.
Hier sind vielmehr die arithmetischen Komplemente von "entgegengesetzter Parität", z. B. 3 und 4 (wenn die eine Zahl gerade ist, so ist die andere ungerade). Um keine falsche Vorstellung aufkommen zu lassen, bemerken wir, dass auch bei den Quadraten dritter Ordnung nur so lange das Prinzip "die geraden in die Ecke" gilt, wie wir die unterzubringenden Zahlen mit 1 oder mit einer anderen ungeraden Zahl beginnen.

Nehmen wir als die kleinste Zahl die 0 - d. h., ist sowohl der Anfang als auch das Ende der Folge gerade -, dann ist jede Zahl von Abb. 143 durch die um 1 kleinere Zahl zu ersetzen (Abb. 159), und jede Parität kehrt sich um.

	7	0	5
Abb. 159	2	4	6
	3	8	1

In der Tat beginnt man die anzuordnenden Zahlen durchaus nicht immer mit 1 und bildet auch nicht nur aus aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen magische Quadrate.

Man kann auch in größeren Schritten fortschreiten und hin und wieder Zahlen auslassen. Von dieser Art sind auch Abb. 141 und Abb. 142. (Wie sind sie aus Abb. 143 hervorgegangen?)
Freilich ist das Ergebnis nur dann ansprechend, wenn an den eingeschriebenen Zahlen eine gewisse Regelmäßigkeit zu beobachten ist. Man hat indessen auch aus aufeinanderfolgenden Primzahlen magische Quadrate gebildet.

Wir können Abb. 159 auf ein wenig spitzfindige Weise auch folgendermaßen deuten: Zu Abb. 143 ist dasjenige magische Quadrat dritter Ordnung hinzugefügt worden, dessen Zahlen allesamt -1 sind. Unter Hinzufügen ist dabei zu verstehen, dass die an derselben Stelle stehenden Zahlenpaare addiert worden sind, zum Beispiel die an der dritten Stelle der 2. Zeile stehende 7 und die an der 3. Stelle der 2. Zeile des anderen Quadrats stehende -1.

Auf diese Weise ist die im 3. Feld der 2. Zeile von Abb. 159 stehende Zahl 6 zustande gekommen. - Von dieser Überlegung werden wir in Kürze Gebrauch machen.

14.5 Der innere Aufbau magischer Quadrate

In Abb. 159 sind die Zahlen 0 bis 8 gerade alle Zahlen des ternären Zahlensystems, die sich mit zwei Ziffern schreiben lassen. (Die Basis 3 des Zahlensystems entspricht dabei gerade der Ordnung 3 des magischen Quadrats.) Die Zahlen

$$0{,}1, 2{,}3, 4, 5, 6{,}7, 8$$

haben nämlich im ternären Zahlensystem die Form

$$00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.$$

(Wir haben die ersten drei mit einer vorangestellten Null geschrieben, weil es zweckmäßiger ist, wenn jede unserer Zahlen zweistellig ist.)

Beispielsweise ist $7 = 2 \cdot 3 + 1$.
Hiervon schreiben wir in der üblichen Abkürzung die Grundzahl und die Zeichen der Multiplikation und der Addition nicht aus, wie wir auch in "einundzwanzig" an $2 \cdot 10 + 1$ denken.
Hier wollen wir die 21 "zwei-eins" lesen.

Das ternäre Zahlensystem benutzt nur die Ziffern 0, 1, 2. Die "Drei" schreibt sich bereits in der Form "eins-null", stellt also bereits die nächstgrößere Einheit dar, enthält aber keine "Einer".
Wir schreiben an Stelle von Abb. 159 die neue Form unserer Zahlen und verteilen danach die ersten und zweiten Ziffern - mit anderen Worten Dreier und Einer - auf die entsprechenden Felder zweier Quadrate gleicher Form (Abb. 160 bis 162).

	21	00	12	2	0	1	1	0	2
Abb. 160-162	02	11	20	0	1	2	2	1	0
	10	22	01	1	2	0	0	2	1

Bei allen beiden Teilquadraten kommt in jeder magischen Reihe dieselbe Summe heraus: 3. Nun ist daran freilich nichts Interessantes.
In jeder Reihe steht eine 0, eine 1 und eine 2, nur in je einer Diagonalen sehen wir $1 + 1 + 1$. Die Teilbilder zeigen Folgendes:

Gäbe es Papiergeld von 3 Mark und würden wir Abb. 159 aus derartigen Scheinen und aus 1-Mark-Stücken so auslegen, dass wir die Markstücke, sobald wir deren 3 haben, in Papiergeld umwechseln, dann läge in jeder Reihe der Abbildung sowohl in Papiergeld als auch in 1-Mark-Stücken ebensoviel Geld. - Das ist aber das "Geheimnis" des Magischen.

Es ist auch nicht irgendwie anders möglich, von dreierlei verschiedenen Gegenständen je 3 Stück so in 3 Zeilen und 3 Spalten anzuordnen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte lauter verschiedene Gegenstände stehen, sondern nur auf die in Abb. 161 und Abb. 162 dargestellte Art. In diesem Falle sprechen wir freilich von keiner Summe. Diese beiden Abbildungen kann man ineinander überführen, denn man kann ein derartiges Amulett herstellen.

Wir werden uns noch mehrfach mit ähnlichen Gesetzmäßigkeiten beschäftigen. Daher

lohnt es sich, die folgende Sprechweise zu vereinbaren: Abb. 160 ergibt sich durch Vereinigung aus Abb. 161 und Abb. 162 als ihren Komponenten.
Vertauschen wir die beiden Komponenten, so bekommen wir wieder ein magisches Quadrat, das Spiegelbild von Abb. 160 an der senkrechten Achse. Würden wir dagegen Abb. 161 mit sich selbst vereinigen, so bekämen wir kein echtes magisches Quadrat, weil nicht alle Zahlen verschieden wären, ebenso auch nicht als Vereinigung aus Abb. 162.

In den richtigen Vereinigungen entstehen deshalb lauter verschiedene Zahlen, weil an allen Stellen, an denen in Abb. 161 die gleichen Ziffern stehen, in Abb. 162 lauter verschiedene Ziffern stehen, und natürlich auch umgekehrt.
Ähnliche Gesetzmäßigkeiten ergeben sich, wenn wir auch in den magischen Quadraten vierter Ordnung nach Abb. 147 bis 149 der Reihe nach um 1 kleinere Zahlen nehmen, und zwar jetzt im Quarternärsystem (Zahlensystem zur Basis 4) dargestellt. An Stelle von 11 beispielsweise schreiben wir $11 = 2 \cdot 4 + 3$, abgekürzt 23 (lies: zwei-drei).
Auch diese Quadrate zerlegen wir analog in getrennte Quadrate, deren Ziffern gerade die Vierer (4-Mark-Einheiten) und Einer (1-Mark-Stücke) sind (Abb. 163 bis Abb. 165).

Abb. 163	00	32	31	03	0	3	3	0	0	2	1	3
	23	11	12	20	2	1	1	2	3	1	2	0
	13	21	22	10	1	2	2	1	3	1	2	0
	30	02	01	33	3	0	0	3	0	2	1	3
Abb. 164	10	22	31	03	1	2	3	0	0	2	1	3
	33	11	02	20	3	1	0	2	3	1	2	0
	00	32	21	13	0	3	2	1	0	2	1	3
	23	01	12	30	2	0	1	3	3	1	1	0
Abb. 165	00	32	21	13	0	3	2	1	0	2	1	3
	31	03	10	22	3	0	1	2	1	3	0	2
	12	20	33	01	1	2	3	0	2	0	3	1
	23	11	02	30	2	1	0	3	3	1	2	0

Auch die beiden Teilquadrate von Abb. 163 lassen sich durch $90°$-Drehung ineinander überführen. Dasselbe gilt für die Komponenten des aus Abb. 165 zu bildenden magischen Parketts, nicht aber für die Komponenten des Quadrats selbst.
In den Diagonalen der Komponenten von Abb. 164 beträgt die Summe 7 und 5 bzw. 2 und 10. Würden wir diese "mit umgekehrtem Stellenwert" vereinigen, so bekämen wir nur semimagische Quadrate. Diese stellen zwar weniger regelmäßige Figuren dar, sind aber gleichfalls interessant. Vereinigten wir dagegen die Komponenten von Abb. 163 und Abb. 165 mit Vertauschung der Stellenwerte, so erhielten wir magische Quadrate mit richtigen Diagonalen.
(Frage: Sind diese für unsere Zahlen neu ?)

Abb. 166-168	A	B	C	D	A	B	C	D	AX	BY	CZ	DV
	D	C	B	A	C	D	A	B	DZ	CV	BX	AY
	B	A	D	C	D	C	B	A	BV	AZ	DY	CX
	C	D	A	B	B	A	D	C	CY	DX	AV	BZ

Man kann leicht ein solches mit allen vier Ziffern 0, 1, 2, 3 ausgefülltes 4 x 4-Felder-Quadrat bilden, in dem jede Zeile, Spalte und Diagonale lauter verschiedene Ziffern enthält und daher auch die Summen stets gleich sind. Wenn wir dieses erzeugt haben, können wir auf Grund der bisherigen Analyse zur Bildung neuer Quadrate übergehen. Haben wir an Stelle der Ziffern die Buchstaben A, B, C, D in die erste Zeile geschrieben, so müssen wir unter B entweder C oder D schreiben, weil wegen der Diagonalen A nicht mehr möglich ist (Abb. 166 und Abb. 167).

In jedem Falle kommen wir in genau einer Weise zum Abschluss, weil sich daraus sukzessive zwingend ergibt, wie die Hauptdiagonale, die 2. Spalte, die Nebendiagonale, die 4. Zeile, die 3. Spalte und schließlich die auf dem Rand liegenden Felder auszufüllen sind. Diese beiden Quadrate lassen sich zu einem Quadrat vereinigen, das lauter verschiedene Buchstabenpaare enthält.
(In Abb. 168 haben wir die Buchstaben von Abb. 167 auf jedem Feld als zweites geschrieben und haben zur Unterscheidung X, Y, Z, V statt A, B, C, D benutzt.)

Wir haben deshalb Buchstaben verwendet, weil Abb. 168 auf diese Weise gemeinsame "Formel" von 1152 magischen Quadraten ist. Wir können nämlich auf $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Arten an Stelle der Buchstaben A, B, C, D wieder die Zahlzeichen 0, 1, 2, 3 schreiben, und ebenso für die Buchstaben X, Y, Z, V. Schließlich können wir auf zweierlei Weise wählen, welches Buchstabenquadrupel die Ziffern der Viererstelle angeben soll, und diese $24 \cdot 24 \cdot 2$ Anordnungen stellen lauter verschiedene magische Quadrate dar. Machen wir die Probe! Mit je einer Amulettplatte würden sich 8 angeben lassen.

Die auch für sich selbst schon interessanten Abb. 166 und Abb. 167 (und entsprechende höherer Ordnung) treten auch in anderen Problemen auf, z. B. beim Turmproblem auf dem Schachbrett.
Auch der berühmte Mathematiker L. Euler (1707-1783) hat sich mit ihnen beschäftigt. Er nannte sie lateinische Quadrate. Manchmal werden auch Anordnungen so genannt, die die Bedingung an die Diagonalen nicht erfüllen (Abb. 161 und Abb. 162). Die Quadrate der Abb. 168 (und entsprechende höherer Ordnung) heißen dagegen Eulersche Quadrate.
(Euler hat auf Grund solcher Quadrate sechster Ordnung vieles erforscht. Erst 1900 ist bewiesen werden, dass es kein Eulersches Quadrat sechster Ordnung gibt.)

Abb. 169

$$\begin{matrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&1&0 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ 1&0&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{matrix}$$

Man könnte auch die Komponenten von Abb. 163 und Abb. 165 auf Buchstaben umschreiben, die Anzahl der Rückersetzungsmöglichkeiten durch Ziffern ist geringer.
Der deutsche Mathematiker Fitting konnte die Untersuchung der magischen Quadrate vierter Ordnung dadurch wesentlich erleichtern, dass er beobachtete (1932), dass, da auch die 4 selbst eine Quadratzahl ist (22), die Vierer- und Einerkomponentenquadrate im Binärsystem weiter zerlegbar sind. Beispielsweise ergeben sich bei der weiteren Zerlegung der schon mit Abb. 163 zerlegten Abb. 147 die vier Komponenten von Abb.

169, deren Stellenwerte der Reihe nach $2^3 = 8, 4, 2, 1$ sind.

Sicher erkennt der Leser sogleich, dass diese auch in anderer Reihenfolge ein magisches Quadrat ergeben und dass wir, wenn wir in einer beliebigen Komponente 1 statt 0 und 0 statt 1 schreiben, zu immer neuen Quadraten vierter Ordnung gelangen.
Unter ihnen kommen auch solche vor, die für unsere Zahlen neu sind.

Bei einer derartigen Umformung sind zwar die Bedingungen für die Möglichkeit der Vereinigung komplizierter, die Bestimmung der Anzahl und des Aufbaus aller quadratischen Quadrate ist jedoch um vieles schöner und erfordert vor allem viel weniger Arbeit, als dies bei dem früher üblichen geisttötenden Probieren, das keineswegs befriedigen konnte, notwendig war.

14.6 Verfahren, um zu jeder Ordnungszahl ein magisches Quadrat herzustellen

Wir wollen aus Abb. 143 ein magisches Parkett herstellen (Abb. 170). Hieraus können wir einige Gesetzmäßigkeiten ablesen, in deren Verallgemeinerung bereits ehedem einige "Regeln" ausgesprochen worden sind, um zu jeder ungeraden Ordnungszahl ein magisches Quadrat zu bilden.
Wir haben eine Eins des Parketts gekennzeichnet, dann die hierzu am nächsten gelegene 2, die hierzu nächste 3, die hierzu nächstgelegene 4 usw. bis 9. Wir finden die nächstgelegene um 1 größere Zahl fast immer so, dass wir um 1 nach rechts und um 1 nach oben gehen, ausgenommen nur die 4 und die 7. Zu diesen gelangen wir, indem wir von 3 bzw. 6 um 1 nach unten gehen, d. h. wiederum nach ein und demselben Prinzip.

3	5	7	3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2	4	9	2
8	1	6	8	1	6	8	$\boxed{1}$	6
3	5	7	3	5	$\boxed{7}$	3	5	7
4	9	2	$\boxed{4}$	9	2	4	9	2
8	1	6	8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7	3	5	7

Abb. 170

Man kann schon deshalb nicht von der 3 und der 6 nach rechts oben gehen, weil dort bereits wieder die kleinere Zahl 1 bzw. 4 steht.
Wir können ausprobieren, dass wir auf Grund der folgenden Vorschriften zu jeder ungeraden Ordnungszahl ein magisches Parkett erhalten:

I. Wir schreiben unsere Zahlen in wachsender Reihenfolge nacheinander in das Parkett. Das ist so zu verstehen, dass wir für jede Steinplatte des Parketts gleichzeitig die jeweils folgende Zahl einschreiben, d.h. z. B., noch ehe wir die 2 einschreiben, wiederholen wir die erste eingeschriebene 1, indem wir nach rechts und links um so viele Felder fortschreiten, wie die Ordnungszahl des Parketts angibt, und kopieren danach diese Eintragungen, indem wir in derselben Weise nach oben und nach unten fortschreiten.

II. Das erste Exemplar der nächstfolgenden Zahl tragen wir stets an einer Stelle ein, die sich aus dem Feld der vorhergehenden Zahl durch die gleiche Verrückung - den sogenannten Schritt - ergibt, wenn dort noch ein leeres Feld zu finden ist. Der Schritt bedeutet: um ein Feld nach rechts und gleichzeitig um ein Feld nach oben.

III. Wenn der Schritt zu einem bereits besetzten Feld führen würde, dann bringen wir die an der Reihe befindliche Zahl in einem Feld unter, das sich durch eine andersartige Verrückung - den sogenannten Sprung - ergibt; danach geht es in Schritten weiter, bis wir wieder zu einem Sprung gezwungen sind. Der Sprung bedeutet: um ein Feld nach unten.

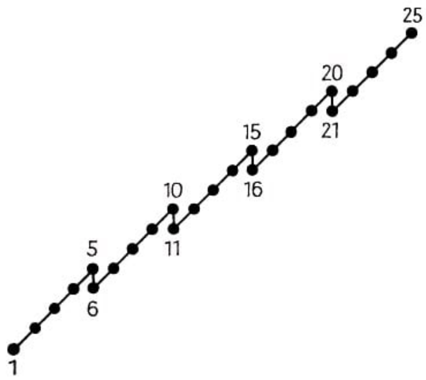


Abb. 171

In Abb. 171 sind von dem auf diese Weise gebildeten magischen Parkett fünfter Ordnung nur die Orte der ersten Eintragungen der Zahlen durch kleine Punkte dargestellt und der Bewegungsablauf markiert.
Wählen wir die Grenzen des Quadrats auf dem Parkett so, dass das der Aufzählung nach mittlere Glied der einzuschreibenden Zahlen - in einem Quadrat fünfter Ordnung zur Summe $1 + 5^2$ beispielsweise die Zahl 13 - im Mittelfeld des Quadrates steht, dann bekommen wir auch auf der Diagonalen die magische Konstante als Summe, haben also ein magisches Quadrat aus dem Parkett herausgeschnitten.

Abb. 172

9	11	18	25	2	9	11
15	17	24	1	8	15	17
16	23	5	7	14	16	23
22	4	6	13	20	22	4
3	10	12	19	21	3	10
9	11	18	25	2	9	11
15	17	24	1	8	15	17

Früher ist dieses (sowie weitere) Verfahren unter der Beschränkung ausgesprochen worden, dass nur ein einziges Quadrat ausgefüllt wird. Daher wurde als erstes der Ort der Zahl 1 angegeben, etwa so: Wir schreiben die 1 in das Mittelfeld der ersten Zeile. Die an die obige II. und III. Vorschrift anknüpfende "Sparsamkeits"anweisung lautete so (siehe für den Fall der Ordnung 5 die Abb. 172):
Wenn der Schritt über die rechtsseitige Grenzlinie des Quadrats geführt hat, dann kehren wir dadurch von dem äußeren Feld, in das wir auf diese Weise gelangt sind, in das Quadrat zurück, dass wir um so viele Felder nach links schreiten, wie die Ordnung angibt (z. B. im Falle von 4).

Analog ist zu verfahren, wenn wir nach oben zu herausgekommen sind (z. B. mit 2). Dann können wir in der entsprechenden Spalte zurück in den Rahmen gelangen. Wir sehen, dass dies gerade die Umkehrungen der Parkettbildungsprinzipien sind.

Unsere Vorfahren hatten auf diese Weise Papier gespart, wir können auf dem Parkett dagegen unseren Blick und unsere Phantasie ungehinderter schweifen lassen und mehr Gesetzmäßigkeiten beobachten.
Das obige, vielleicht schon über 1000 Jahre alte Verfahren heißt siamesische oder indische oder chinesische Regel.

Das Parkett von Abb. 170 hätten wir freilich auch mit einem anderen Schritt und anderen Sprung herstellen können. Wir stellen zwei gleichfalls seit langem wohlbekannte ähnliche Verfahren vor, die einen etwas kühneren Schritt oder Sprung verwenden. Beide lassen sich aus Abb. 170 ablesen. Im Falle der Ordnung 5 oder höherer Ordnungszahlen entstehen dagegen aus Abb. 172 bzw. aus dem entsprechenden indischen Quadrat bereits verschiedene magische Quadrate.

Die sogenannte "Schachbrettregel" benutzt gleichfalls den indischen Schritt.
Ihr Sprung lautet: 2 nach oben; die Stelle der 1 ist dagegen das über dem Mittelfeld des Quadrats liegende Feld.
(Im Quadrat dritter Ordnung ist dies zugleich auch das Mittelfeld der oberen Zeile.)
Der französische Mathematiker Bachet hat dieses Verfahren in etwas anderer Art um 1700 beschrieben.

Seit Mitte des 14. Jahrhunderts ist der Schritt der "Rösselsprungregel" bekannt:
1 nach rechts, 2 nach oben. Ihr Sprung lautet: 4 nach oben.
Auch hier wird von dem Mittelfeld der oberen Zeile ausgegangen (stammt von dem griechischen Forscher Moschopulos). Damit gewinnt man im Falle der Ordnung 5 und 7 ein pandiagonales Parkett, im Falle der Ordnung 9 dagegen nicht.

Man kann unendlich viele solcher Schritt-Sprung-Paare angeben. Diese liefern aber nur dann zu jeder Ordnungszahl ein magisches Quadrat, wenn der horizontale und vertikale Teil des Schritts sowie der Sprung 2^n-feldrig ist, wo n eine positive ganze Zahl oder Null ist.
Der Beweis hierfür würde zu weit führen.

Daher erwähnen wir nur, dass wir jedes lateinische Quadrat bekommen, wenn wir alle anzuordnenden Zahlen um 1 vermindern, danach in ein Zahlensystem umschreiben, dessen Basis gleich der Ordnung ist - wodurch wir gerade stets Zahlen bekommen, die sich in dem betreffenden Zahlensystem sämtlich mit zwei Ziffern schreiben lassen -, und schließlich die Ziffern ihrem Stellenwert nach in zwei Quadrate aufteilen.
In der einen Diagonalen stehen jedoch in der Regel lauter gleiche Ziffern, die der Größe nach mittlere Ziffer.

Ein anderes leicht zu formulierendes Beweisglied ist, dass dabei ein Sprung immer nach Vielfachen der Ordnung notwendig wird (in Abb. 172 nach 5, 10 usw.) und dass der nach der letzten Eintragung erfolgende Sprung - der natürlich nicht mehr notwendig ist - stets auf ein mit 1 besetztes Feld führt.

14.7 Bildung magischer Quadrate gerader Ordnung

Zu jeder Ordnung, die größer als 4 ist, können wir auf Grund der in Abb. 173 bis Abb. 175 dargestellten Vertauschungstabellen ein magisches Quadrat bilden (Devedec-Verfahren).

Wir erkennen in Abb. 173 zu jeder um 2 größeren Ordnung (von 6 ab) je eine Einrahmung, die die Berandung des entsprechenden magischen Quadrats darstellt, in Abb. 174 und Abb. 175 dagegen je ein 4 × 4-Quadrat.

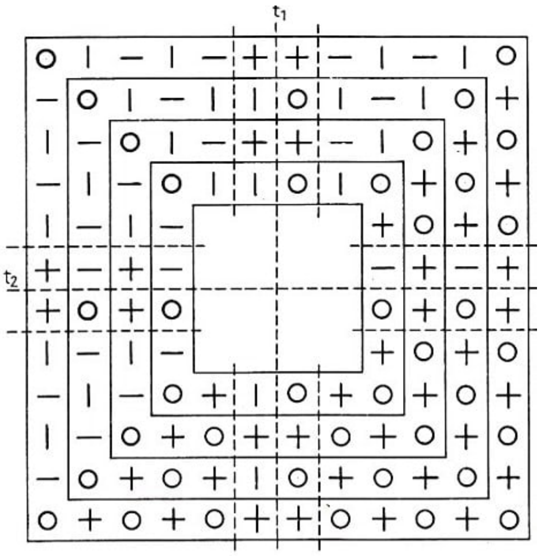


Abb. 173

Wenn die Ordnungszahl durch 4 teilbar ist, denken wir in die Mitte von Abb. 173, in ihren Kern, die Abb. 174 einkopiert. Gibt die Ordnung bei der Division durch 4 dagegen den Rest 2, dann kopieren wir die Abb. 175 ein. Die in den Abbildungen befindlichen Zeichen bedeuten gewisse Zahlenersetzungen.

o	+	+	o
+	o	o	+
+	o	o	+
o	+	+	o

o	|	|	o
−	+	+	+
−	+	+	+
o	+	+	o

Abb. 174,175

In die Felder des auszufüllenden Quadrats tragen wir zunächst nach dem Muster der Abb. 145 und Abb. 146 die anzuordnenden Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge (Grundstellung) ein. Danach übertragen wir neben jede Zahl das in der entsprechenden Umrahmung von Abb. 173 an der entsprechenden Stelle zu findende Zeichen sowie die Zeichen der Abb. 174 bzw. Abb. 175.

Die Zeichen geben einen Hinweis darauf, von was für einem anderen Feld die dort stehende Zahl zu entnehmen ist, um an Stelle der ursprünglichen Zahl eingetragen zu werden. Führt man alle diese Verrückungen durch, so erhält man ein magisches Quadrat. Wir veranschaulichen das für ein Quadrat sechster Ordnung präparierte Verfahren mit Abb. 176.

1 ○	2 |	3 |	4 ○	5 |	6 ○
7 —	8 ○	9 |	10 |	11 ○	12 +
13 —	14 —	15 +	16 +	17 +	18 —
19 ○	20 —	21 +	22 +	23 +	24 ○
25 —	26 ○	27 +	28 +	29 ○	30 +
31 ○	32 +	33 |	34 ○	35 +	36 ○

t_1, t_2

Abb. 176

Das Ergebnis zeigt Abb. 177.
Bedeutung der Zeichen: Die Zahlen der Felder, die einen kleinen Kreis enthalten, bleiben an Ort und Stelle. In die mit "-" bezeichneten Felder wird die Zahl von demjenigen Feld übertragen, das bezüglich der senkrechten Achse t_1 des Quadrats spiegelbildlich zu dem betreffenden Feld liegt, an die Stelle von 7 beispielsweise kommt die 12.

Abb. 177

1	32	33	4	35	6
12	8	27	28	11	25
18	17	22	21	20	13
19	23	16	15	14	24
30	26	10	9	29	7
31	5	3	34	2	36

Die mit "|" bezeichneten Felder werden analog von der bezüglich der waagerechten Achse t_2 spiegelbildlich liegenden Zahl besetzt. Wir schreiben z.B. an die Stelle von 2 die 32. Die mit "+" besetzten Felder schließlich werden mit der Zahl besetzt, die in dem bezüglich des Quadratmittelpunkts spiegelbildlichen Feld steht, die 12 beispielsweise wird durch die 25 ersetzt, was übrigens stets zugleich ihr arithmetisches Komplement ist.

In unserem Beispiel ist jede Zahl entweder an Ort und Stelle geblieben oder hat an einer paarweisen Vertauschung teilgenommen, z. B. 13 und 18, oder sie gehört zu einer viergliedrigen Gruppe, deren Glieder zyklisch vertauscht werden, z. B. tritt 2 an die Stelle von 35, 35 an die Stelle von 5, 5 an die Stelle von 32, diese dagegen an die Stelle von 2.

Für größere Ordnungszahlen als 12 ist Abb. 173 auf Grund folgender leicht zu überblickenden Gesetzmäßigkeit fortzusetzen:
Längs der Diagonalen stehen lauter Kreise, in jeder zweiten Umrahmung wiederholen sich die Zeichen der in gleichem Abstand von den Achsen t_1, t_2 liegenden Zeilen bzw. Spalten.
Auf den von der Nebendiagonale nach links oben liegenden Feldern wechseln die Zeichen "-" und "|" schachbrettartig ab, auf den nach rechts unten liegenden Feldern dagegen Kreise und "+"-Zeichen.

14.8 Magische Transformationen von magischen Quadraten höherer Ordnung als 4

Analog zu den magischen Transformationen, die wir bei den Quadraten vierter Ordnung kennengelernt haben, können wir nach folgenden Vorschriften aus jedem magischen Quadrat größerer Ordnung neue bilden:

I. Nach dem Vorbild der ersten magischen Transformation vertauschen wir zuerst zwei Zeilen, die bezüglich der waagerechten Achse des Quadrats spiegelbildlich liegen, und vertauschen anschließend auch die Spalten der gleichen Nummer.

II. Nach dem Vorbild der zweiten magischen Transformation vertauschen wir zwei zueinander nicht spiegelbildlich gelegene Zeilen und zugleich auch ihre Spiegelbilder und verfahren anschließend mit den Spalten derselben Nummer in der gleichen Weise.
Im Falle ungerader Ordnung besitzt das Quadrat eine mittlere Zeile und eine mittlere Spalte. Diese nehmen an den genannten Vertauschungen nicht teil, weil sie Spiegelbild von sich selbst sind.

14.9 Ausblick auf weitere Probleme

Man glaube bei weitem nicht, dass wir alles kennengelernt haben, was sich von den magischen Quadraten sagen lässt.
Wir erwähnen zwei Verfahren, durch deren Anwendung man aus fertigen magischen Quadraten solche höherer Ordnung herstellen kann. Mit Hilfe des einen, des sogenannten Multiplikationsverfahrens, wird unter Benutzung zweier magischer Quadrate beliebiger Ordnung eines hergestellt, dessen Ordnung gleich dem Produkt der Ordnungen der beiden Quadrate ist.

Geht man z. B. von einem Quadrat dritter und einem vierter Ordnung aus, so erhält man ein magisches Quadrat der Ordnung $3 \cdot 4 = 12$. Bei der weiteren Analyse dieses Prinzips ist man darauf gekommen, dass man die Ordnung auch mit 2 multiplizieren kann, obgleich ein magisches Quadrat zweiter Ordnung nicht existiert (Aubry, um 1930).

Nach dem anderen Verfahren wird aus einem magischen Quadrat dadurch eins von "nur" um 2 höherer Ordnung gebildet, dass man auf jeder Seite einen 1 Feld breiten Saum herumlegt, der zum Teil aus den neu hinzukommenden Zahlen, zum Teil aus den kleinsten Zahlen der unterzubringenden Folge verfertigt wird, und die Zahlen des im Kern liegenden ursprünglichen Quadrats entsprechend um ebensoviel vergrößert (M.Stifel, um 1550).

Der deutsche Mathematiker L. Bieberbach hat 1954 ein allgemeines Verfahren angegeben, um die Einfassungen höherer Ordnung auszufüllen. Seitdem haben sich auf diesem Gebiet aber wieder Vereinfachungen ergeben.

Es sind auch magische Quadrate hergestellt worden, aus denen sich wieder ein magisches Quadrat ergibt, wenn man die Zahlen durch ihre Quadrate oder ihre Kuben ersetzt.

(Benutzt man ganze Zahlen und ihre Quadrate, so ist das kleinste der bis jetzt bekannten Quadrate dieser Art von der Ordnung 8).

Man kann als räumliches Analogon zu den magischen Quadraten auch magische Würfel bilden. Durch diese werden wiederum Unmengen ähnlicher Probleme aufgeworfen.

15 Knifflige Flächen

Mátyás Bognár

15.1 Einführung

Im alltäglichen Sprachgebrauch versteht man unter Fläche eine Figur, die einen Raumteil (Körper) begrenzt. Die Oberfläche einer Kugel ist die Kugelfläche, die eines Rettungsrings die Torusfläche (Abb. 178).

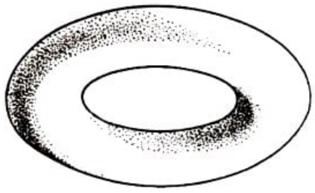


Abb. 178

Die Begrenzungsfläche eines Zylinders besteht aus dem Zylindermantel und zwei Kreisscheiben. Die Pyramidenfläche setzt sich dagegen aus dem Pyramidenmantel und einer Vieleckfläche zusammen.
Flächen dieser Art pflegt man geschlossene oder unberandete Flächen zu nennen.

Fläche wird aber oft auch der Zylindermantel oder die Halbkugel genannt. Diese Flächen begrenzen keinen Teil des Raumes, sie lassen sich aber aus geschlossenen Flächen erzeugen. Sie bilden einen von einer oder mehreren geschlossenen Kurven begrenzten zusammenhängenden Teil einer geschlossenen Fläche. Daher nennen wir sie berandete Flächen.

15.2 Das Möbiussche Band

Wir wollen ein rechteckiges Band (z. B. einen Klebestreifen) umbiegen und seine zwei gegenüberliegenden Seiten zusammenkleben (Abb. 179).

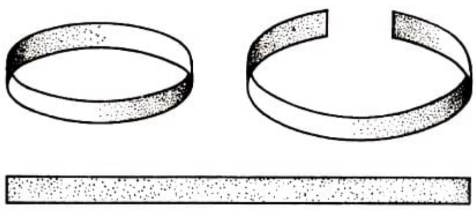


Abb. 179

Auf diese Weise bekommen wir eine berandete Fläche, denn der Streifen stellt nichts anderes als den Mantel eines Zylinders dar. Wir verdrehen jetzt den Streifen erst zweimal und kleben dann seine beiden Enden zusammen (Abb. 180).

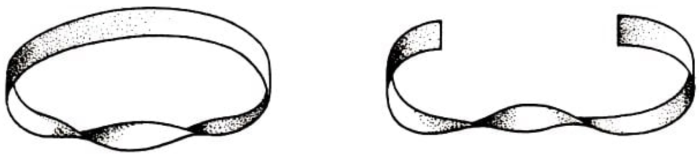


Abb. 180

Wiederum bekommen wir eine berandete Fläche, denn der so gewonnene zweimal verdrehte Streifen lässt sich als begrenzter Teil der Torusfläche auffassen (Abb. 181).

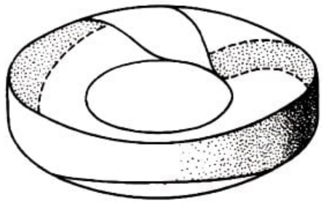


Abb. 181

Danach verdrehen wir jetzt den Streifen nur einmal und kleben dann seine beiden Enden zusammen (Abb. 182).

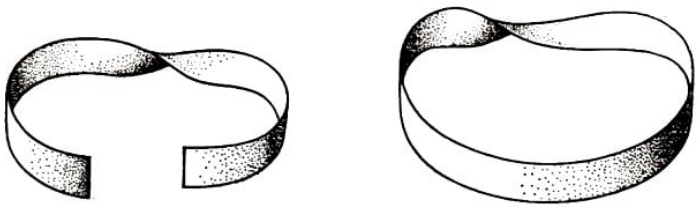


Abb. 182

Die auf diese Weise gewonnene Figur ist erstmals 1862 bzw. 1865 von den deutschen Mathematikern Möbius und Listing beschrieben worden. Nach ihrem Entdecker heißt sie Möbiussches Band. Ein solches Band wurde z. B. gelegentlich beim Antrieb von Dreschmaschinen benutzt (Abb. 183).

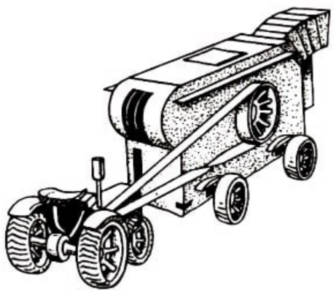


Abb. 183

Es erhebt sich die Frage, ist auch das Möbiussche Band eine berandete Fläche? Mit anderen Worten, gibt es eine solche geschlossene Fläche im Raum, aus der ein Möbiussches Band durch eine oder mehrere geschlossene Kurven herausgeschnitten werden kann?

Wir erkennen, dass es keine derartige geschlossene Fläche gibt. Anderenfalls könnte man nämlich, wenn man deren nach dem Inneren des hierdurch begrenzten Raumteils zeigende Seite rot, ihre Außenseite dagegen grün anmalt, auch auf dem Möbiusschen Band zwei Seiten anmalen.
Wir überzeugen uns aber leicht davon, dass dann, wenn wir an einer Stelle das Möbiussche Band z. B. mit roter Farbe anzumalen beginnen und mit dem Anmalen fortfahren, nach einiger Zeit, ohne dass wir jemals die Randlinie überschreiten würden, auch die andere Seite unseres Ausgangspunktes rot sein wird, und wenn wir so fortfahren, dann bleibt überhaupt nichts unbemalt (Abb. 184).

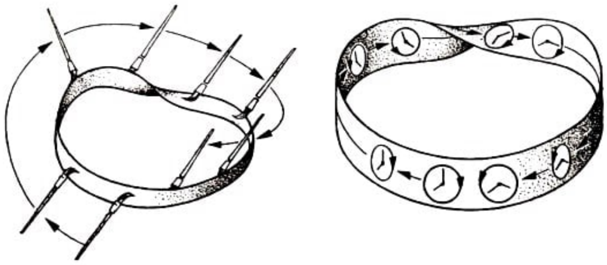


Abb. 184,185

Auch auf eine andere Weise können wir uns davon überzeugen, dass das Möbiussche Band nicht Teil einer geschlossenen Fläche sein kann, die irgendeinen Körper begrenzt.

Anderenfalls würden sich nämlich die Zeiger einer Uhr mit durchsichtigem Zifferblatt und Gehäuse, die man von einem beliebigen Ort des aus durchsichtigem Material gefertigten Bands aus verschiebt und, nachdem man damit einen gewissen Weg beschrieben hat, wieder zu dem Ausgangspunkt zurückbringt, immer noch in derselben Richtung herumdrehen wie vor dem Durchlaufen des Weges.
Verschieben wir aber die Uhr durchweg längs der Mittellinie des Möbiusschen Bands bis an den Ausgangsort zurück, dann drehen sich die Uhrzeiger gerade in entgegengesetzter Richtung wie ursprünglich (Abb. 185).
(Die Umkehrung des Gangs der Uhr ist natürlich nur scheinbar, denn vorher zeigte das Zifferblatt der Uhr zum Betrachter des Bilds hin, nach dem Durchlaufen des Weges liegt ihm die Rückseite der Uhr gegenüber, vorausgesetzt, der Betrachter blickt auf die übliche Weise auf die Abbildung, d.h. aus einer Richtung, von der aus er die Aufschrift geradestehend sieht.)

Das Möbiussche Band lässt sich also nicht den einleitend beschriebenen Flächen zurechnen. Daher müssen wir den Begriff der Fläche erweitern. Zuvor führen wir aber an dem Möbiusschen Band selbst gewisse Transformationen durch. Zerschneiden wir das Möbiussche Band an der Klebstelle, so gewinnen wir wieder ein Rechteck.

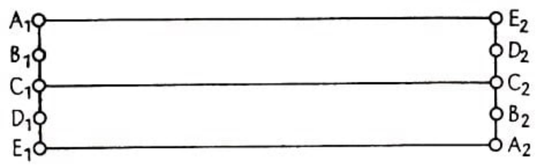
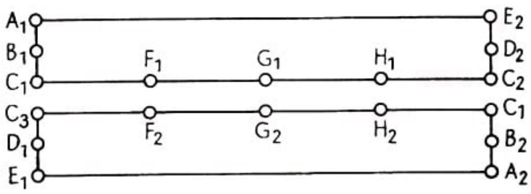
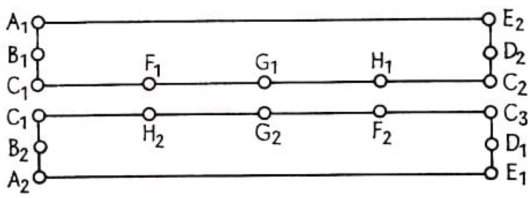


Abb. 186-188





Auf diesem Rechteck kennzeichnen wir die Punktepaare, deren Elemente auf dem Möbiusschen Band zusammengeklebt waren. Von dieser Art sind z. B. A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2, D_1 und D_2, E_1 und E_2 in Abb. 186.
Wir schneiden das Rechteck längs seiner Mittellinie C_1C_2 auf und bezeichnen die "zerschnittenen" Punkte wiederum mit den gleichen Buchstaben (Abb. 187).
Aus diesen beiden Rechtecken gewinnen wir durch Zusammenkleben der zusammengehörigen Punkte das Möbiussche Band. Dieses Zusammenkleben werden wir jetzt in

anderer Reihenfolge als vorher durchführen. Wir wenden das untere Rechteck von Abb. 187 um seine kürzere Mittellinie um (Abb. 188).

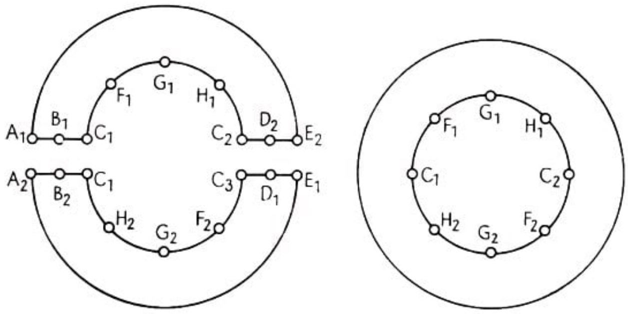


Abb. 189,190

Jetzt verbiegen wir alle beiden Rechtecke zu einem halbkreisringförmigen Gebilde (Abb. 189).
(Hierzu müssen die Rechtecke freilich nicht nur verbiegbar, sondern auch dehnbar sein. Ihr Material kann z. B. Plastilina oder Strudelteig sein.)
Wenn wir die beiden Halbkreisringe zusammenschieben, dann fallen gerade die zusammenzuklebenden Punkte ineinander, und wir können so das Gebilde zu einem Kreisring zusammenkleben (Abb. 190).

Danach brauchen wir nur noch auf dem Innenkreis des Kreisrings jeden Punkt mit dem gegenüberliegenden zusammenzukleben, um zu einer umgewandelten Form des Möbiusschen Bands zu gelangen.

Im dreidimensionalen Raum lässt sich dieses Zusammenkleben nicht durchführen. Lassen wir aber zu, dass die nach dem Zusammenkleben gewonnene Fläche sich selbst durchdringt, dann ist das Kleben durchführbar.

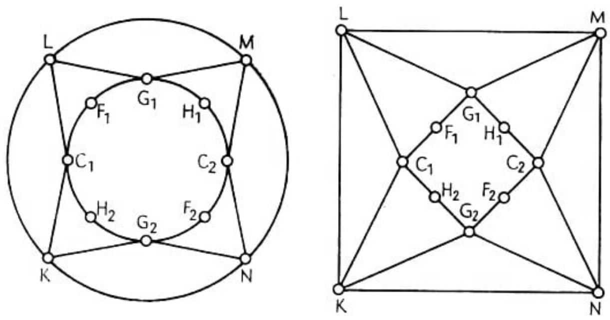


Abb. 191,192

Dazu zerlegen wir den Kreisring auf die in Abb. 191 dargestellte Weise in (zum Teil krummlinige) Dreiecke und machen diese Dreiecke geradlinig (Abb. 192).
Wir erheben die Punkte C_1 und C_2 aus der Ebene und nähern sie einander. Auch die Punkte G_1 und G_2 nähern wir einander an. Auf diese Weise entsteht aus dem Viereck $C_1G_1C_2G_2$ ein windschiefes Viereck (Abb. 193).

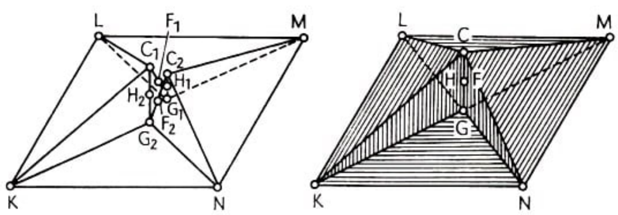


Abb. 193,194

Kleben wir schließlich die Punkte C_1 und C_2 sowie die Punkte G_1 und G_2 und mit ihnen auch die von ihnen aufgespannten Strecken zusammen (Abb. 194), so gelangen die einander gegenüberliegenden Punkte des Innenkreises von Abb. 190 an ein und dieselbe Stelle.
Überflüssigerweise decken sich aber noch gewisse Punkte. So wird z. B. aus F und H derselbe Punkt.

Dem können wir in der Weise abhelfen, dass wir die Punkte der Strecke CG von Abb. 194 als Doppelpunkte betrachten. So sehen wir beispielsweise den Punkt F als auf dem Dreieck LNC, aber nicht auf dem Dreieck KMC liegend an, während der Punkt H Punkt des Dreiecks KMC, aber nicht Punkt des Dreiecks LNC ist.

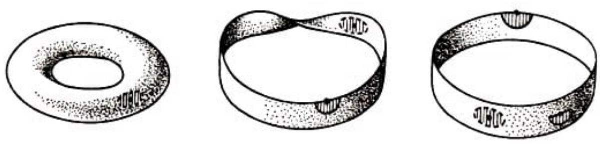
15.3 Der Begriff der Fläche

Im folgenden nennen wir die geschlossenen Flächen, die einen Körper begrenzen, sowie die von einer oder mehreren (und zwar geschlossenen) Kurven begrenzten Teile derselben zweiseitige Flächen.

Dementsprechend wollen wir eine Flächendefinition geben, die sowohl die zweiseitigen Flächen als auch das Möbiussche Band zu den Flächen rechnet. Wir untersuchen daher zunächst, was an der Struktur der zweiseitigen Flächen und des Möbiusschen Bandes gemeinsam ist.

Betrachten wir diejenigen Gebilde, die irgendeinen Punkt einer zweiseitigen Fläche oder eines Möbiusschen Bands umgeben, so erkennen wir, dass, sofern der Punkt nicht auf der Randlinie der Fläche liegt, unter den Figuren, die ihn umgeben, solche vorkommen, die eine starke Ähnlichkeit mit der offenen (der Randlinie beraubten) Kreisscheibe aufweisen (Abb. 195).

Abb. 195



(Eine Kreisscheibe ohne Randlinie ist wie eine Pariser Schnitte ohne Rinde.)
Wenn der Punkt auf der Randlinie liegt, dann kann er von keinem solchen offenen kreisscheibenförmigen Gebilde umgeben werden, von einem zu einer abgeschlossenen (mit der Randlinie zusammengenommenen) Halbkreisscheibe ähnlichen aber durchaus.

Freilich kann ein innerer (nicht auf dem Rand liegender) Punkt auch von Figuren umgeben werden, die einer abgeschlossenen Halbkreisscheibe ähneln (Abb. 195).

Betrachten wir jetzt das geöffnete Buch (Abb. 196)! Hier ist keine der Figuren, die den Punkt P umgeben, ebenso wie eine offene Kreisscheibe oder eine abgeschlossene Halbkreisscheibe aufgebaut. Jede verzweigt sich im Punkt P.
Daher rechnen wir dieses Gebilde auch nicht zu den Flächen.
Die anschauliche Definition einer Fläche lautet also folgendermaßen:

Die Flächen sind solche zusammenhängenden Gebilde, auf denen jeder Punkt von einem

Teilgebilde umgeben wird, das ebenso wie eine abgeschlossene Halbkreisscheibe aufgebaut ist. Die inneren Punkte der Fläche sind diejenigen Punkte, die von Teilgebilden umgeben sind, die denselben Aufbau wie eine offene Kreisscheibe zeigen. Ist ein Punkt der Fläche nicht innerer Punkt, so ist er Randpunkt der Fläche.

Wahrscheinlich wird in Zusammenhang mit der jetzt formulierten Definition auch ein weniger scharfsinniger Kritiker noch zahlreiche Einwände vorzubringen haben. Zunächst ist nicht geklärt, was unter Gebilden verstanden werden soll.
Wir brauchen bloß daran zu denken, dass wir in Abb. 190 zwei Punkte (z. B. G_1 und G_2) als einen, in Abb. 194 dagegen einen Punkt als zwei gezählt haben.

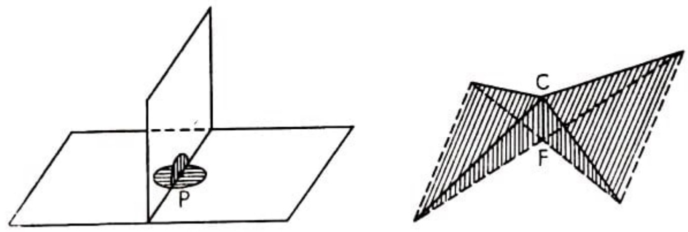


Abb. 196,197

Ungeklärt ist auch, wann man von einem Gebilde behaupten kann, es sei ebenso aufgebaut wie eine offene Kreisscheibe oder eine abgeschlossene Halbkreisscheibe.
Auch in bezug darauf kann der strenge Kritiker eine genaue Formulierung verlangen, ob ein Punkt von einem Teil des Gebildes umgeben wird oder nicht.

Alle diese Fragen bedürfen tatsächlich einer Klärung, denn sonst würden dem Subjektivismus Tür und Tor geöffnet, und es würde beispielsweise vom Betrachter abhängen, ob er den Kegelmantel als ebenso wie eine Kreisscheibe gebaut ansieht oder nicht.

Es gibt auch Fälle, wo die Anschauung unsicher wird.
Wir denken z. B. an den Punkt C in Abb. 194 und an eine kleine Haube, die ihn umgibt (Abb. 197). Hier haben wir natürlich die Punkte der Kante CF - mit Ausnahme des Punktes C - als Doppelpunkte zu betrachten. Ist die Struktur der so gewonnenen Figur der einer Kreisscheibe gleich oder nicht?

Selbst ein Betrachter mit gutem räumlichem Anschauungsvermögen gibt auf diese Frage nicht sofort eine bejahende Antwort. Denken wir jedoch daran, dass der strukturelle Aufbau des Gebildes ebenso wie der des Mantels einer Pyramide mit quadratischer Basis ohne die begrenzende Quadratlinie beschaffen ist, so könnten wir bereits leichter mit Ja antworten.
Auf die eben aufgeworfenen Fragen können wir nur mit den Hilfsmitteln der Topologie, eines sehr abstrakten Zweigs der Mathematik, eine befriedigende Antwort geben.

Es kann nicht unser Ziel sein, hier den Apparat der Topologie in seiner vollständigen Allgemeinheit kennenzulernen, weil wir uns damit zu sehr von unserem ursprünglichen Thema entfernen würden. Wenden wir jedoch vorläufig unsere Aufmerksamkeit nur denjenigen Flächen zu, die keine Doppelpunkte oder Punktepaare enthalten, so wird die Sache wesentlich leichter.

Unter einem Gebilde wollen wir also jetzt eine gewisse Gesamtheit von Raumpunkten verstehen, mit anderen Worten eine Teilmenge derjenigen Menge, die aus den Punkten des Raumes besteht.

Unter einer räumlichen Umgebung irgendeines Punktes P verstehen wir eine Menge, die eine Kugel mit dem Mittelpunkt P enthält. V_P ist mit anderen Worten dann eine Umgebung von P, wenn es eine positive Zahl ε gibt, so dass die von P um weniger als ε entfernten Punkte des Raumes (und auch P selbst) alle zu V_P gehören. Ein Punkt besitzt natürlich unendlich viele Umgebungen.

Es sei jetzt M eine beliebige Teilmenge von Raumpunkten und P ein Punkt der Menge M. Dann verstehen wir unter einer M-Umgebung des Punktes P diejenigen Punkte einer räumlichen Umgebung des Punkts P, die zu M gehören.
So ist z. B. die Umgebung irgendeines Punktes P einer Ebene, einer Geraden bzw. Kugelfläche eine solche Menge in der Ebene, auf der Geraden bzw. der Kugelfläche, die eine Kreisscheibe, eine Strecke bzw. eine Kugelkappe mit dem Mittelpunkt P enthält (Abb. 198).

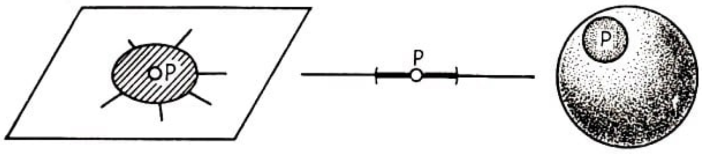


Abb. 198

Eine beliebige Teilmenge G des Raumes ist offen, wenn die Menge G selbst räumliche Umgebung jedes zu G gehörenden Punktes ist. Eine Menge F ist abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge, d.h. diejenige Menge, die übrigbleibt, wenn man alle Punkte von F aus dem Raum entfernt, offen ist.
So bilden z. B. die inneren Punkte sowie die äußeren Punkte einer Kugel offene Mengen (sowohl getrennt als auch zusammen!), während eine Kugelfläche eine abgeschlossene Menge im Raum ist.

Eine Menge M ist beschränkt, wenn sie in einer gewissen Kugel enthalten ist.

Es sei M eine beliebige Teilmenge von Raumpunkten, N eine offene bzw. abgeschlossene Menge im Raum und N' die Gesamtheit der Punkte der Menge N, die zu M gehören. Dann heißt die Menge N' in M offen bzw. abgeschlossen.
So stellt die offene Kreisscheibe eine in der Ebene offene Menge dar, die abgeschlossene Halbkreisscheibe ist dagegen in der Ebene (aber auch im Raum) abgeschlossen.

Wir machen den Leser ausdrücklich darauf aufmerksam, dass wir die Ausdrücke offen und abgeschlossen in mehrerlei Sinn gebraucht haben. Beispielsweise ist eine offene Kreisscheibe keine offene Menge im Raum, während eine nichtgeschlossene (sondern berandete) Fläche im Raum dagegen als abgeschlossene Menge zu betrachten ist.

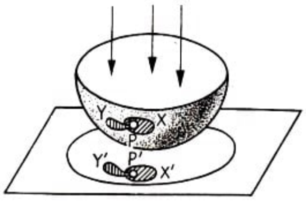


Abb. 199

Betrachten wir jetzt eine offene Kreisscheibe und auf der Kugelfläche von gleichem Radius eine offene Halbkugel (d. h. eine Halbkugel ohne ihren Randkreis). Wir wollen sie auf die in Abb. 199 dargestellte Weise anordnen.
Beleuchten wir dann die Halbkugel von oben mit parallelen Strahlen, so fällt der Schatten jedes Punktes der Halbkugel auf die Kreisscheibe. Die Schatten verschiedener Punkte sind dabei verschieden, und jeder auf der Kreisscheibe liegende Punkt ist der Schatten eines gewissen Punktes der Halbkugel.

Wir sagen dann, dass wir zwischen den Punkten der Halbkugel und denen der Kreisscheibe eine eineindeutige Zuordnung hergestellt haben.
Allgemein sprechen wir von einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten zweier Figuren, wenn jedem Punkt der einen Figur eindeutig ein Punkt der anderen Figur zugeordnet ist, so dass dabei verschiedenen Punkten auch verschiedene Punkte zugeordnet werden und jeder Punkt der zweiten Figur einem Punkt der ursprünglichen Figur entspricht.

Die Projektion der Halbkugel auf die Kreisscheibe ist eine in beiden Richtungen stetige Zuordnung. Darunter ist folgendes zu verstehen:

Wir wählen einen beliebigen Punkt P der Halbkugel, eine beliebige Teilmenge X von ihr, die auf der Halbkugel Umgebung von P ist, sowie schließlich eine beliebige Teilmenge Y von ihr, die auf der Kugel nicht Umgebung von P ist (Abb. 199).
Es sei P' das Bild (der Schatten) des Punktes P, X' das der Menge X, Y' dagegen dasjenige der Menge Y. Dann ist auf der Kreisscheibe X' Umgebung von P', Y' dagegen nicht Umgebung von P'.

Allgemein heißt eine eineindeutige Abbildung irgendeines räumlichen Gebildes M auf ein anderes räumliches Gebilde M' in beiden Richtungen stetig oder topologisch oder homöomorph, wenn für jeden Punkt P des Gebildes M und für jede Teilmenge X folgendes gilt:
X ist dann und nur dann Umgebung des Punktes P in M, wenn das Bild von X Umgebung des Bildes von P in M' ist.

Zwei Gebilde heißen dann homöomorph, oder wir sagen, dass das eine topologisches Bild des anderen ist, wenn zwischen ihnen eine topologische Abbildung hergestellt werden kann.
Sehen wir uns einige Beispiele für homöomorphe Abbildungen an!

Dass die offene Halbkugelfläche und die offene Kreisscheibe homöomorph sind, haben wir bereits gesehen, wenn wir auch den Beweis nicht in allen Einzelheiten zu Ende geführt haben. Ebenso kann man erkennen, dass eine Kreislinie und die Randlinie des eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks homöomorph sind. Durch die Projektion vom Mittelpunkt des Kreises aus wird nämlich eine homöomorphe Abbildung zwischen den beiden Gebilden verwirklicht (Abb. 200).

Homöomorph zueinander sind die abgeschlossene Kreisscheibe und die abgeschlossene Dreieckfläche sowie auch die offene Kreisscheibe und die offene Dreieckfläche. Die Homöomorphie wird durch diejenige Abbildung realisiert, die im Falle eines beliebigen

Punktes P der Kreislinie die Strecke OP proportional auf die Strecke OP' zusammenzieht (Abb. 200).

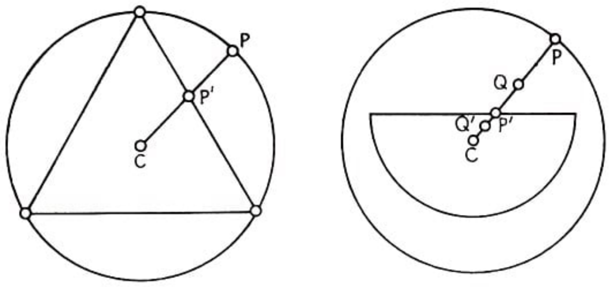


Abb. 200,201

Ebenso ist zu sehen, dass eine abgeschlossene Halbkreisscheibe und eine abgeschlossene Kreisscheibe homöomorph sind (Abb. 201).

Homöomorph ist ferner z.B. eine Kugelfläche zu der Oberfläche eines Würfels. Lassen wir nämlich den Mittelpunkt des Würfels und der Kugel aufeinanderfallen, dann wird durch die Projektion von diesem gemeinsamen Mittelpunkt aus eine homöomorphe Abbildung zwischen den beiden Gebilden hergestellt.

Homöomorph ist eine abgeschlossene Halbkugelfläche mit der Vereinigung aus einem Kreisring und einem auf dessen Außenkreis errichteten Kegelmantel. Hier wird die Homöomorphie gleichfalls durch eine Projektion geliefert.

Diese homöomorphe Abbildung überführt die innere Kreislinie des Kreisrings in den Randkreis der Halbkugel, und zwar so, dass dabei gegenüberliegende Punkte in gegenüberliegende Punkte übergehen (Abb. 202).

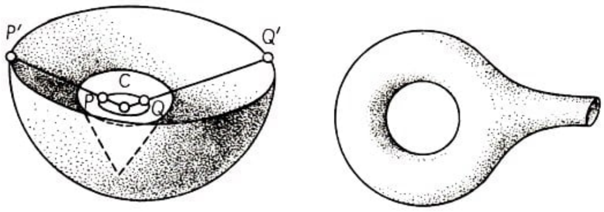


Abb. 202,203

Anschaulich können wir also sagen, dass zwei Gebilde dann homöomorph sind, wenn jedes von ihnen, falls man sie aus elastischem Gummi fertigt, ohne Reißen und Kleben in das andere umgeformt werden kann, wobei natürlich Biegen, Dehnen und Schrumpfen zugelassen sind.
Pumpen wir z. B. eine aus Gummi hergestellte Würfelfläche gut auf, so nimmt sie, ohne einzureißen oder irgendwo zusammengeklebt zu werden, früher oder später Kugelform oder wenigstens nahezu Kugelform an.

Diese "kautschukgeometrische" Definition homöomorpher Gebilde ist jedoch nicht exakt, weil beispielsweise auch das einfach bzw. das doppelt verdrehte Band der Abb. 179 und Abb. 180 zueinander homöomorph sind, obgleich man das eine, wenn man es aus Gummi herstellt, ohne Zerschneiden und Kleben durch keinerlei Dehnen, Biegen oder Stauchen in das andere überführen kann.

Freilich machen "kautschukgeometrische" Abbildungen auch ohne Kleben und Zerschneiden gelegentlich auftretende Umformungen möglich. Betrachten wir etwa die sogenannte Henkelfläche nach Abb. 203.
Wir stellen uns vor, das Äußere der Fläche sei rot, ihr Inneres dagegen schwarz gefärbt. Die Aufgabe besteht darin, die Fläche so umzuformen (umzuwenden,) dass die schwarze Seite außen und die rote innen ist. Wie aus der Folge der Abb. 204a bis m hervorgeht, ist diese Umformung ohne Zerreißen und Kleben möglich.

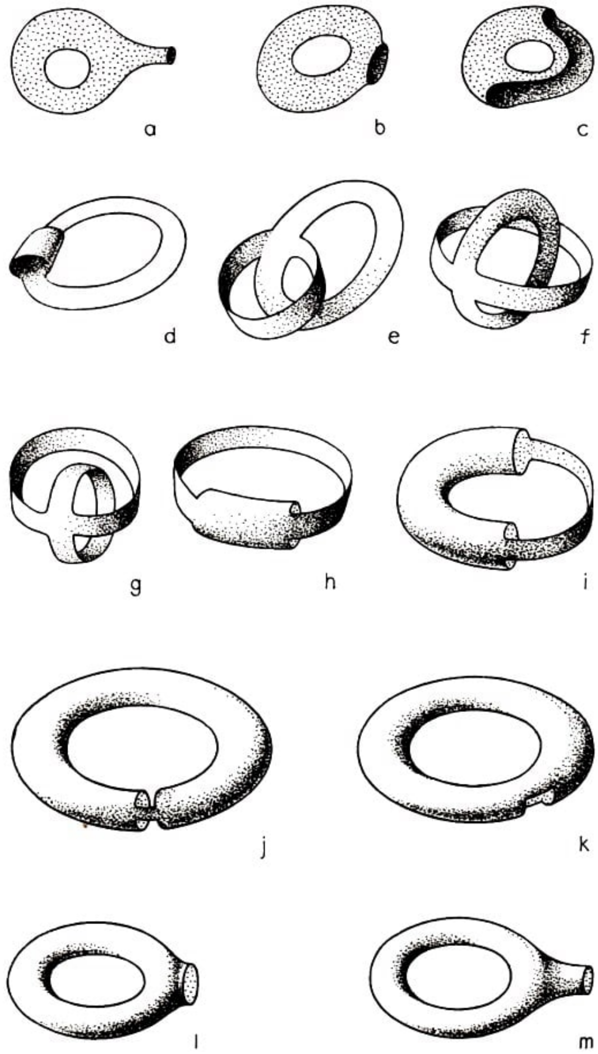


Abb. 204

Zu einer Strecke homöomorphe Gebilde heißen einfache Bögen (Abb. 205). Die beiden Endpunkte des Bogens sind die Bilder der beiden Endpunkte der Strecke bei der homöomorphen Abbildung.

Der einfache Bogen verbindet seine beiden Endpunkte. Wir nennen ein Gebilde bogenverknüpft, wenn je zwei Punkte von ihm durch einen einfachen Bogen verbunden werden können, der ganz in dem Gebilde verläuft.
Einfache geschlossene Kurve heißt das topologische Bild der Kreislinie.

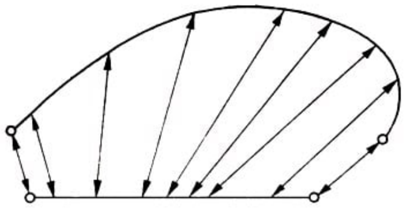


Abb. 205

Nachdem wir nun die notwendigen Vorkehrungen getroffen haben, können wir zur Beantwortung unserer ursprünglichen Frage zurückkehren, nämlich dazu, was wir denn unter einer Fläche verstehen. Wie wir bereits gesagt haben, beschäftigen wir uns vorderhand nur mit sich nicht selbst durchdringenden räumlichen Gebilden.
Wir befassen uns auch nicht mit nach dem Unendlichen offenen Flächen.

Die mathematisch genaue Definition der Fläche (im Raum) lautet folgendermaßen:
Eine beliebige Teilmenge F des Raumes heißt Fläche, wenn sie bogenverknüpft, beschränkt und abgeschlossen ist und außerdem jeder Punkt von ihr eine zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphe F-Umgebung besitzt.

Das ist natürlich eine ziemlich abstrakte Definition, in Wahrheit aber das mathematisch exakt formulierte genaue Abbild der anschaulichen Flächendefinition.
Wenn jeder Punkt von F auch eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe F-Umgebung besitzt, dann ist die Fläche geschlossen oder unberandet, anderenfalls berandet.

Die Randpunkte der Fläche sind diejenigen Punkte, die keine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe Umgebung besitzen. Die Gesamtheit der Randpunkte stellt den Rand der Fläche dar, der aus einer oder mehreren, stets aber aus endlich vielen einfachen geschlossenen Kurven besteht.

15.4 Einteilung der Flächen

Wir wollen jetzt untersuchen, was für Typen von Flächen es gibt. Um diese zu bestimmen, müssen wir zunächst einmal die Frage beantworten, wann zwei Flächen als von demselben Typ und wann sie als von verschiedenem Typ angesehen werden sollen.

In der Elementargeometrie werden die Würfelfläche und die Kugelfläche als verschiedene Typen betrachtet, da sie nicht zueinander ähnlich sind. Ordnen wir zwei Flächen jedoch dann in eine Klasse ein, wenn sie homöomorph sind, so gelangen die Würfel- und Kugelfläche in dieselbe Klasse. Diese topologische Klassifizierung werden wir im folgenden zugrunde legen.
Innerhalb der Geometrie ist die topologische Klasseneinteilung am leichtesten zu überblicken.

Zwar gelangen bei dieser Klassifikation das einfache Band und das zweimal verdrehte Band in dieselbe Klasse und ebenso der Torus mit einem Loch und die Henkelfläche von Abb. 204. Die Kugelfläche und die Torusfläche, das einfache Band und das Möbiussche Band beispielsweise gehören aber auch hier zu verschiedenen Klassen.
Die topologische Klassifizierung der Flächen ist in der zweiten Hälfte des vergangenen

Jahrhunderts von Möbius, Dyck und Petersen durchgeführt worden.

Die Klassen lassen sich am einfachsten überblicken, wenn man aus jeder Klasse ein Modell wählt, mit anderen Worten jede einzelne Klasse durch eine hierzu gehörige Fläche repräsentiert.
Dann sind zwei beliebige der so gewonnenen Modelle niemals zueinander homöomorph, jede Fläche im Raum ist aber zu einem der Modelle homöomorph.
Sehen wir uns also eine derartige Modellsammlung an!

A) Zweiseitige Flächen

Eine Fläche ist dann zweiseitig, wenn eine in der Fläche liegende Uhr, die auf einer beliebigen geschlossenen Kurve zum Ausgangspunkt zurückgeführt wird, bei der Rückkehr in der gleichen Weise geht wie zuvor.
Wir schneiden aus der Kugelfläche $(p+q)$ Kugelkappen (Löcher) aus. Von diesen kleben wir p Stück mit je einem Henkel zu (Abb. 206). Auf diese Weise gewinnen wir eine mit q Randkurven (Konturen) versehene zweiseitige Fläche.

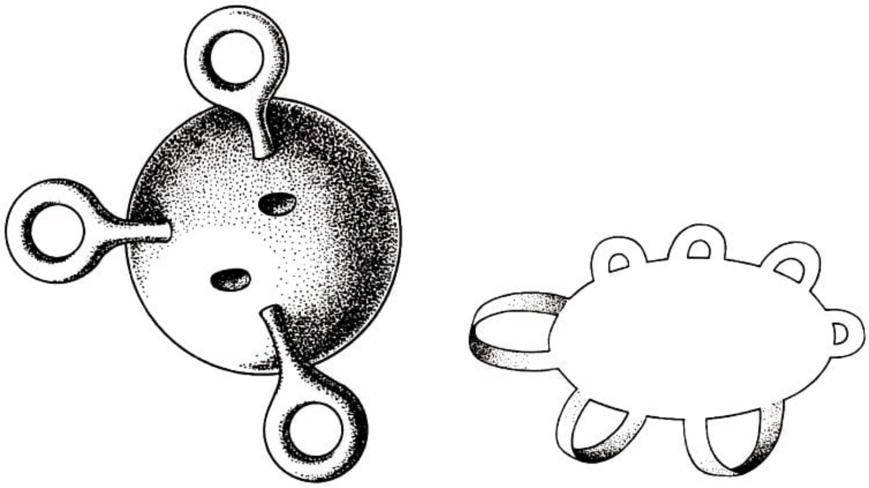


Abb. 206,207

Wenn für zwei solche Modelle die Zahlen p und q nicht die- selben sind, dann sind die Flächen nicht homöomorph.
Andererseits ist jedoch jede zweiseitige Fläche zu einer gewissen Kugel mit p Henkeln und q Löchern homöomorph.

Für die Kugelfläche selbst ist $p = 0$, $q = 0$, für die Torusfläche $p = 1$, $q = 0$, für die Henkelfläche $p = 1$, $q = 1$, für das einfache Band $p = 0$, $q = 2$, für die Kreisscheibe $p = 0$, $q = 1$ usw.

B) Einseitige Flächen

Eine Fläche ist dann einseitig, wenn es auf ihr eine solche geschlossene Kurve gibt, dass sich der Gang einer Uhr, die man an ihr entlangführt, dabei "umkehrt".
Wir kleben an die Randlinie einer Kreisscheibe p (einmal) verdrehte Bänder (gedrehte Brücken) und q einfache Bänder (ungedrehte Brücken) ($p \geq 1$, $q \geq 0$). In Abb. 207 ist z.B. $p = 3$ und $q = 4$.

Wenn für zwei Modelle die Zahlen p und q nicht übereinstimmen, dann sind die Flächen

nicht homöomorph. Umgekehrt gibt es aber zu jeder einseitigen Fläche (im Raum) ein solches p und q, dass sie zu einer mit p verdrehten und q einfachen Bändern versehenen Kreisscheibe homöomorph ist.
Für das Möbiussche Band ist z.B. $p = 1$ und $q = 0$.

15.5 Einseitige geschlossene Flächen

Unter den zweiseitigen Flächen gibt es solche (vom Typ $q = 0$), die keine einzige Randlinie haben, während jede der einseitigen Flächen, die wir bis jetzt kennengelernt haben, wenigstens eine Randlinie besitzt.
Kleben wir jedoch die Randlinie einer einseitigen Fläche mit einer Randlinie ($q = 0$) mit der Randlinie K einer Kreisscheibe L zu, kleben wir mit anderen Worten die Kreisscheibe an die Fläche, so bekommen wir bereits eine geschlossene einseitige Fläche. Nur dass dieses Einkleben niemals durchführbar ist, ohne dass Doppelpunkte auftreten.

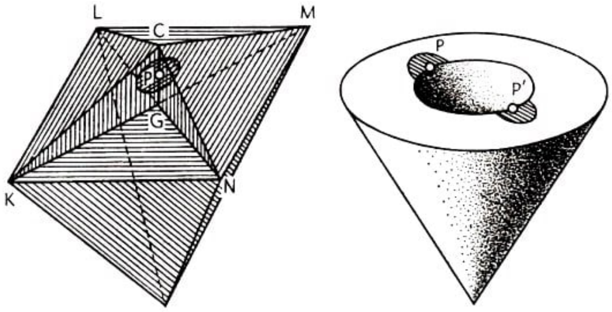


Abb. 208,209

Kleben wir längs der Randlinie einen Pyramidenmantel an das in Abb. 194 dargestellte transformierte Möbiussche Band, so gewinnen wir eine einseitige geschlossene Fläche (Abb. 208).
Die Punkte der Strecke CG mit Ausnahme der Punkte C und G sind dann hierbei aber natürlich Doppelpunkte. Durch Ankleben eines Kegelmantels bekommen wir aus dem Möbiusschen Band von Abb. 190 gleichfalls eine einseitige geschlossene Fläche, nur dass hierbei auf dem Innenkreis des Kreisrings jedes Paar gegenüberliegender Punkte als ein Punkt zählt (Abb. 209).

Das Zusammenkleben des Möbiusschen Bandes mit einer Kreisscheibe können wir auch so deuten, dass wir eine topologische Abbildung f zwischen der die Kreisscheibe L berandenden Kreislinie K und der Randlinie J des Möbiusschen Bandes M herstellen. Wir sehen dann die Paare $[P, f(P)]$, wo P die Kreislinie L durchläuft, als einen Punkt an (Abb. 210).

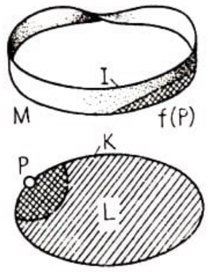


Abb. 210

Mit dieser Identifizierung bilden das Möbiussche Band M und die Kreisscheibe L zusammen eine geschlossene (unberandete) einseitige Fläche F_3.
Es erhebt sich die Frage: Sind die so definierten Gebilde tatsächlich Flächen, und wenn ja, sind sie dann homöomorph oder nicht ?

Dazu müssen wir zunächst sagen, was wir auf diesen merkwürdigen Gebilden unter der Umgebung eines Elements verstehen sollen.
Sehen wir uns das Gebilde F_3 an!

Wir nennen eine Gesamtheit N von Raumpunkten eine mit F_3 verträgliche Menge, wenn mit jedem zu N gehörenden Punkt P der Kreisscheibe K zusammen auch $f(P)$ zu N gehört und außerdem die Zugehörigkeit von $f(P)$ zu N von selbst auch die Zugehörigkeit von P zu N nach sich zieht.

Eine beliebige Umgebung eines gewöhnlichen Punktes Q des Gebildes F_3 erhält man dadurch, dass man von einer mit F_3 verträglichen Menge N ausgeht, die eine räumliche Umgebung von Q bildet, und als Elemente der gesuchten Umgebung die zu M und Z gehörenden, aber nicht in J und K liegenden Punkte der Menge N sowie diejenigen Punktepaare $[P, f(P)]$ nimmt, wo P sowohl zu N als auch zu K gehört.
Wenn $[P, f(P)]$ irgendein Punktepaar von F_3 ist, dann müssen wir, um eine Umgebung von ihm zu gewinnen, von einer solchen verträglichen Menge N ausgehen, die sowohl von P als auch von $f(P)$ Umgebung ist. Der weitere Gang des Verfahrens läuft dann ebenso wie oben ab (Abb. 210).

Analog können wir auch im Falle von F_2 verfahren, nur werden die verträglichen Mengen dort diejenigen Mengen N sein, die mit jedem Punkt P der inneren Kreislinie des Kreisrings zusammen auch den auf dem Kreis gegenüberliegenden Punkt enthalten.

Bei dem Gebilde F_1 müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Die Elemente von F_1 sind die zu F_1 gehörigen Punkte ohne die inneren Punkte der Strecke CG, ferner die Paare $(P, \triangle KCM)$ und $(P, \triangle LCN)$, wobei P innerer Punkt der Strecke CG ist.
Auf diese Weise haben wir die Doppelpunkte gewissermaßen in jeweils zwei getrennte Elemente zerlegt.

Um eine Umgebung eines Elements zu definieren, müssen wir hier drei Typen von Elementen unterscheiden. Gehört P nicht zu der Strecke CG, dann ist eine Teilmenge X von F_1 Umgebung von P, wenn es eine Kugel mit dem Mittelpunkt P gibt, deren zu F_1 gehörende gewöhnliche Punkte auch X angehören.
Wenn $P \equiv C$ oder $P \equiv G$ ist, dann müssen wir zusätzlich noch fordern, dass diejenigen Paare $(Q, \triangle KCM)$ und $(Q, \triangle LCN)$, für die Q zu der Kugel gehört, gleichfalls Elemente der Menge X sind.

Nehmen wir schließlich ein Element vom Typ $(P, \triangle KCM)$, dann müssen wir von den zu $\triangle KCM$ gehörenden Punkten der Kugel mit dem Mittelpunkt P und von denjenigen Paaren $(Q, \triangle KCM)$, für die Q der Kugel angehört, fordern, dass sie Elemente von X sind (Abb. 208).
Wenn es sich um ein Element vom Typ $(P, \triangle LCN)$ handelt, dann verfahren wir ebenso, nur dass an Stelle von $\triangle KCM$ überall $\triangle LCN$ steht.

Obwohl in den Gebilden F_2 und F_3 außer gewöhnlichen Punkten auch (identifizierte) Punktepaare als Elemente vorkommen, während F_1 auch Doppelpunkte enthält, ließ sich auch für diese ein Umgebungsbegriff einführen, und wir können somit von der Homöomorphie oder Nichthomöomorphie dieser Gebilde sprechen.

Man kann nachweisen, dass F_1, F_2 und F_3 homöomorph sind, sowie, dass jedes Element von F_1 (und damit auch von F_2 oder F_3) - sei es nun ein gewöhnlicher Punkt, ein Punktepaar oder ein Doppelpunkt - eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe Umgebung besitzt.
Auch kann man erkennen, dass sich je zwei Punkte von F_1 durch einen einfachen Bogen verbinden lassen. Wir vermuten also, dass wir auch F_1, F_2 und F_3 zu den geschlossenen Flächen rechnen können, wenn sie auch zu keiner zweiseitigen Fläche homöomorph sind, nicht einmal zu einer solchen, von der wir im vorstehenden Abschnitt gesprochen haben.

Um das Gesagte beweisen zu können, müssten wir den Begriff der Fläche noch weiter ausdehnen, so dass darin die alten Flächen und die Gebilde F_1, F_2 und F_3 zugleich Platz haben. Wir können hier nicht darauf eingehen, da dies zu weit weg, zu den abstrakten topologischen Räumen führen würde.
Wir wollen nur soviel bemerken, dass sich jede der einseitigen Flächen, die eine einzige Randlinie besitzt, so mit einer Kreisscheibe zukleben lässt, wie wir dies bei der aus dem Möbiusschen Band gebildeten Fläche F_3 gesehen haben. Auf diese Weise werden die einseitigen geschlossenen Flächen gewonnen.

Diese geschlossenen Flächen sind dann und nur dann homöomorph, wenn die einseitigen berandeten Flächen, die zugeklebt wurden, homöomorph waren.
Zum Abschluss stellen wir einige Beispiele für einseitige geschlossene Flächen vor.

A) Die projektive Ebene

Wir ergänzen jede Gerade der Ebene in der Weise durch einen von den gewöhnlichen Punkten verschiedenen sogenannten unendlich fernen Punkt, dass zu parallelen Geraden derselbe unendlich ferne Punkt gehört, zu nichtparallelen Geraden dagegen verschiedene unendlich ferne Punkte gehören. Die auf diese Weise durch die unendlich fernen Punkte ergänzte Ebene heißt projektive Ebene.

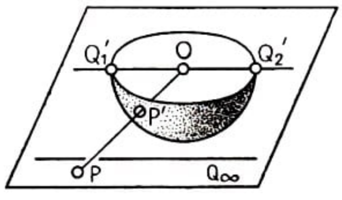


Abb. 211

Wir wollen nachweisen, dass diese projektive Ebene zu der durch Einkleben einer Kreisscheibe aus einem Möbiusschen Band gewonnenen einseitigen geschlossenen Fläche F_3 homöomorph ist.
Dazu legen wir eine Halbkugel so auf die Ebene, dass die Halbkugel von der Ebene gerade in dem von ihrem Rand am weitesten entfernten Punkt berührt wird (Abb. 211).

Indem wir die Kugel von ihrem Mittelpunkt aus projizieren, wird eine homöomorphe Abbildung zwischen der gewöhnlichen Ebene und der offenen Halbkugel hergestellt. Derjenige Punkt, der einem unendlich fernen Punkt entspricht, ergibt sich dadurch, dass man zu irgendeiner Geraden, die den unendlich fernen Punkt enthält, die Parallele durch O zieht. Diese Projektionsgerade schneidet auf der Halbkugel ein Paar gegenüberliegender Punkte aus.

Die projektive Ebene ist also zu derjenigen Fläche homöomorph, die durch Zusammenkleben gegenüberliegender Punkte des Randkreises aus der Halbkugel entsteht, d.h. zu F_2 und damit auch zu F_3.

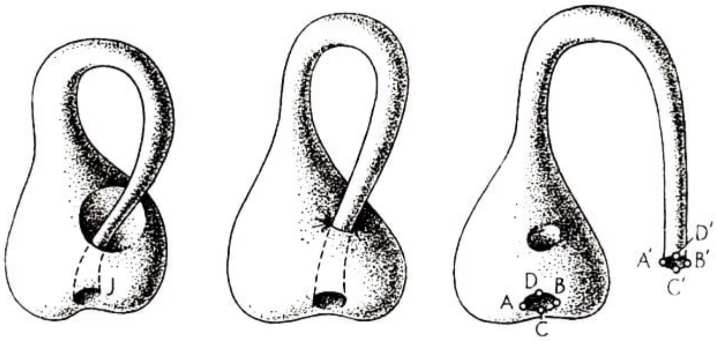


Abb. 212-214

B) Der Kleinsche Schlauch

Betrachten wir die einseitige Fläche von Abb. 212 mit einer Randlinie! Wir wollen die Kreislinie mit einer Kreisscheibe zukleben. Damit gewinnen wir eine sich selbst durchdringende einseitige geschlossene Fläche (Abb. 213).

Das ist der Kleinsche Schlauch. Er ist homöomorph zu einer mit zwei (einmal) verdrehten Bändern versehenen Kreisscheibe ($p = 2$, $q = 0$), in die eine Kreisscheibe eingeklebt wurde.

Um uns davon zu überzeugen, müssen wir von der in Abb. 212 dargestellten Fläche nachweisen, dass sie zu einer mit zwei (einmal) verdrehten Bändern versehenen Kreisscheibe homöomorph ist.
Schneiden wir dazu die Fläche längs der Kreislinie J (Abb. 212) auseinander und ziehen wir den sich verjüngenden Teil des Schlauches aus dem Loch heraus (Abb. 214). Die zerschnittenen Punkte sollen mit denselben Buchstaben bezeichnet werden.
Indem wir die Abb. 214 noch ein wenig deformieren, gelangen wir zu dem Gebilde von Abb. 215.

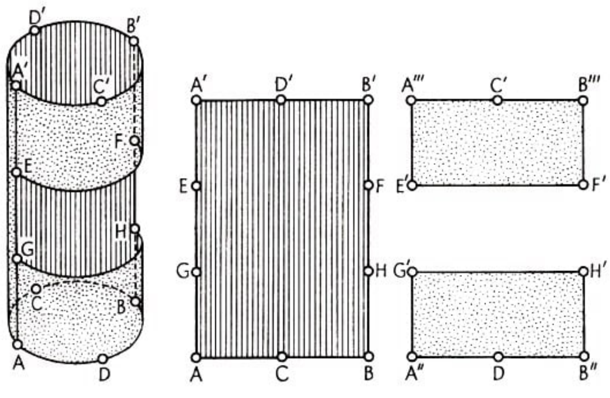


Abb. 215, 216

Wir zerschneiden dies längs der Strecken $A'E$, $B'F$, GA und HB und bezeichnen die zerschnittenen Punkte wiederum mit denselben Buchstaben. Das so gewonnene Gebilde wollen wir in die Ebene ausbreiten (Abb. 216).
Wir verschieben das untere kleine Rechteck von Abb. 216 über das große, das obere dagegen unter das große (Abb. 217).

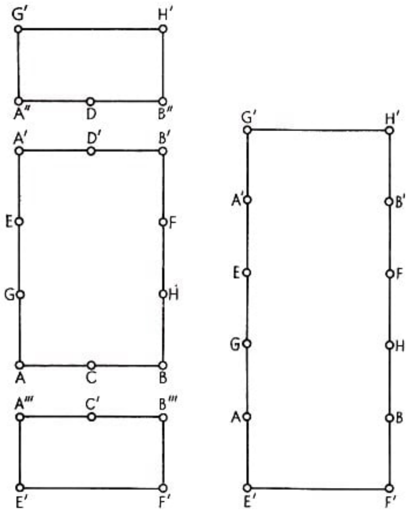


Abb. 217, 218

Auf diese Weise gelangen die zerschnittenen Punkte übereinander, wir können sie also zusammenkleben (Abb. 218).

Wir ziehen die Strecke GAE' zu einem Band aus und verdrehen dieses. Dasselbe tun wir auch mit der Strecke HBF' (Abb. 219). Wieder gelangen die zerschnittenen Punkte nebeneinander. Nachdem wir die gleichbezeichneten Punkte zusammengeklebt und unsere Abbildung ein wenig ausgerichtet haben, bekommen wir eine mit zwei (einmal) verdrehten Bändern versehene Kreisscheibe (Abb. 220).

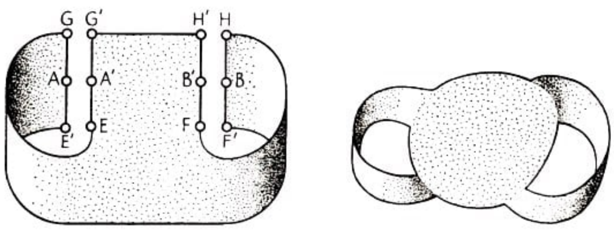


Abb. 219,220

Der gelöcherte Kleinsche Schlauch ist also tatsächlich zu diesem Gebilde homöomorph, während der Kleinsche Schlauch selbst zu der durch Einkleben einer Kreisscheibe aus der Fläche von Abb. 220 hervorgehenden Fläche homöomorph sein wird.

Es liegt nicht in unserer Absicht, die Anzahl der Beispiele weiter zu vermehren. Denjenigen, die sich eingehender mit diesem Thema beschäftigen wollen, empfehlen wir die Bücher [25] und [26]. (Für die deutschen Leser sei noch auf die Bücher [27], [28] und [29] hingewiesen.)

16 Das Ja-Nein-Spiel und die Informationstheorie

Alfréd Rényi

16.1 Einführung

Verbreitet ist das Vorurteil, durch die Formeln würde die Mathematik schwierig. Genau das Gegenteil davon ist der Fall: Ohne Formeln wäre die Mathematik viel schwerer.
Das Ziel der Formeln besteht gerade darin, die Durchführung der komplizierten mathematischen Überlegungen zu erleichtern. Die Formelsprache ist kompakter, genauer, vermindert die Fehlermöglichkeiten und lässt sich leichter überprüfen als die Alltagssprache. Die Formel ist in derselben Weise wie die Rechenmaschine Hilfsmittel des Mathematikers.

Was ist nun aber das "Schwere" an der Mathematik?
Darin stimmen nämlich alle - außer den Mathematikern - überein, dass die Mathematik schwer sei. Eine so weit verbreitete Meinung muss doch irgendeine reale Grundlage haben.
Die eigentliche Schwierigkeit liegt unzweifelhaft in den mathematischen Begriffen und der mathematischen Denkweise. Hat jedoch jemand diese Schwierigkeiten überwunden, die Grundbegriffe vollständig verstanden und in der exakten mathematischen Denkweise eine gewisse Übung erworben, so sind die Schwierigkeiten gewissermaßen beiseite geräumt.

Das Wesen der Mathematik liegt in den mathematischen Begriffen und in der mathematischen Denkweise.
In der Lehre und in der wissenschaftlichen Popularisierung der Mathematik muss man daher das Schwergewicht auf die Erklärung der Grundbegriffe und auf das Kennenlernen der mathematischen Denkweise legen. Das gilt auch dann, wenn jemand einen neuen Zweig, eine neue Richtung der Mathematik kennenlernen will.
Obwohl wir nämlich von der mathematischen Denkweise als von etwas sprechen können, das in jedem Kapitel der Mathematik zur Geltung kommt, hat daneben doch jeder einzelne Zweig, jedes einzelne Gebiet der Mathematik eine ihm eigentümliche Denkweise. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beispielsweise kann nur der wirklich verstehen, der sich daran gewöhnt hat, in zufällig veränderlichen Größen, in Zufallsvariablen zu denken.

Der Informationstheorie, einem neuen Zweig der Mathematik oder genauer der Wahrscheinlichkeitsrechnung von großer Bedeutung, kommt auch eine eigene Denkweise, wenn man so will, eine eigene "Philosophie" zu.
In der vorliegenden Darstellung strebe ich danach, die Betonung auf die Vermittlung der informationstheoretischen Denkweise zu legen.

Ich versuche, den Leser in die Betrachtungsweise der Informationstheorie einzuführen. Meiner Überzeugung nach wird derjenige, der diese Betrachtungsweise verstanden und sich zu eigen gemacht hat, auch die konkreten Ergebnisse der Informationstheorie viel leichter verstehen.

Ich beabsichtige, die Grundbegriffe und die eigentümliche Anschauungsweise der Informationstheorie am Beispiel des allbekannten Ja-Nein-Spiels darzulegen. Konkrete Ergebnisse der Informationstheorie zu vermitteln, ist nicht das Ziel dieses Aufsatzes. Ich habe mich bemüht, den Gebrauch von Formeln auf ein Minimum zu beschränken. Ich muss jedoch voraussetzen, dass die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt sind.[29]

16.2 Das Ja-Nein-Spiel und die Messung der Information

Bei dem Ja-Nein-Spiel[30] denkt der eine Spieler - nennen wir ihn den "Antwortenden" - an irgend etwas (oder an irgend jemanden).
Der andere - nennen wir ihn "Frager" - muss herausfinden, an was der erste gedacht hat. Zu diesem Zweck kann er beliebige mit Ja oder Nein zu beantwortende Fragen stellen, auf die der "Antwortende" nach bestem Wissen wahrheitsgemäß antworten muss.

Aus diesen Antworten muss der "Frager" erraten, an was der "Antwortende" gedacht hat. Leute, die dieses Spiel oft spielen, vereinbaren im allgemeinen, woran gedacht werden darf.
Wer Übung hat, weiß, dass relativ einfach der Name lebender oder historischer Personen zu erraten ist (vorausgesetzt, dass der "Frager" die Person kennt, an die der "Antwortende" gedacht hat). Hat z. B. der erste Spieler an Pascal gedacht, so kann der Frager folgendermaßen vorgehen:

Person ?	Ja
Lebt sie ?	Nein
Künstler ?	Nein
Wissenschaftler ?	Ja
Nach 1900 geboren ?	Nein
Nach 1700 geboren ?	Nein
Nach 1600 geboren ?	Ja
Engländer oder Italiener?	Nein
Deutscher oder Holländer?	Nein
Franzose ?	Ja
Mathematiker ?	Ja
War er auch Philosoph ?	Ja
War er Jansenist ?	Ja

Danach kann der zweite Spieler bereits verkünden, dass er erraten hat, dass es um Pascal geht.
Aus den Fragen ist ersichtlich, dass dem Frager, nachdem er weiß, dass von einem französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts die Rede ist, die Namen von Pascal, Descartes, Desargues, Fermat durch den Kopf gegangen sind. Die beiden letzten hat er

[29] Die zum Verständnis des Artikels notwendigen elementaren wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenntnisse kann der Leser beispielsweise an Hand der ersten drei Kapitel des Buches [1] erwerben.

[30] Im Ungarischen benannt nach Bar-Kochba, Führer des letzten großen Aufstands palästinensischer Juden gegen die Römer, der als Messias Israels galt. (Anmerkung des Übersetzers)

durch die Frage ausgeschlossen, ob er auch Philosoph war, während er Descartes mit der letzten Frage ausgeschlossen hat, so dass er danach fast sicher annehmen konnte, dass es um Pascal ging.

Nun wollen wir aber untersuchen, mit wieviel Fragen man allgemein im Ja-Nein-Spiel etwas erraten kann. Mit wieviel Fragen es gelingt, die gedachte Sache zu erraten, hängt freilich von der Übung, dem Bildungsgrad, der Phantasie, dem psychologischen Gefühl und in gewissem Maße auch vom Zufall ab.
In entscheidendem Maße kommt es aber darauf an, wie groß der Kreis der Dinge ist, an die die Spieler vereinbarungsgemäß denken dürfen. Wenn es z. B. erlaubt ist, an so etwas zu denken wie "derjenige Beiname, mit dem der Berichterstatter der New York Times die Kleidung von Kleopatra charakterisieren würde, wenn Kleopatra auferstehen und als ägyptisches Staatsoberhaupt in der UNO erscheinen würde", so benötigt der Frager offensichtlich weit mehr Fragen, und nicht nur das Fragen, sondern auch das richtige Beantworten der Fragen ist hier nicht einfach.

Um eine Antwort darauf zu erhalten, mit wieviel Fragen man etwas erraten kann, versuchen wir das Problem dadurch zu vereinfachen, dass der "Antwortende" nur an eine 6stellige Zahl denken darf (etwa an eine Telefonnummer). Wir können auch Zahlen geringerer Stellenzahl als 6 zulassen, weil diese durch Voransetzen von Nullen 6stellig gemacht werden können, z.B. $313 = 000313$.

In diesem Falle beträgt die Anzahl derjenigen Dinge, an die der "Antwortende" denken kann, 1000000.
Es ist leicht einzusehen, dass es zweckmäßig ist, als erste Frage beispielsweise die folgende zu stellen: Ist die gedachte sechsstellige Zahl kleiner als 500000?

In diesem Fall nimmt nämlich die Anzahl der nach der auf die erste Frage erhaltenen Antwort noch in Frage kommenden Zahlen um 500000 ab, gleichgültig, ob nun die Antwort Ja oder Nein gelautet hat. (Wenn die Antwort »Ja« ist, muss die Zahl zwischen 000000 und 499999 liegen, während sie, wenn die Antwort »Nein« ist, zwischen 500000 und 999999 liegen muss.)

Wir können freilich auch fragen, ob die Zahl mindestens 500000 ist; das ist eigentlich dieselbe Frage, nur anders formuliert. Analog können wir fragen, ob die Zahl gerade ist, bzw. wir können irgendeine andere Frage von der Art stellen, dass die Antwort für 500000 6stellige Zahlen »Ja« und für die übrigen 500000 6stelligen Zahlen »Nein« lautet.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass nur solche Fragen zweckmäßig sind. Stellen wir nämlich eine Frage, auf die für mehr als 500000 Zahlen die Antwort »Ja« lautet, dann sind wir, wenn wir eine bejahende Antwort erhalten, in einer ungünstigeren Lage, als wenn wir z.B. gefragt hätten, ob die gedachte Zahl gerade ist.
Stellen wir dagegen eine solche Frage, die im Falle von weniger als 500000 Zahlen die Antwort »Ja« nach sich zieht, so gelangen wir im Falle einer verneinenden Antwort in eine ungünstigere Lage.

Genauso können wir bei der zweiten Frage die Anzahl der in Betracht kommenden

Zahlen wiederum halbieren, d. h., wir können sie auf 250000 reduzieren, mit der dritten Frage auf 125000, mit der vierten auf 62500, mit der fünften auf 31250 und mit der sechsten auf 15625.
Da 15625 eine ungerade Zahl ist, kann man so viele Möglichkeiten nicht in zwei gleiche Teile zerlegen. Wir können also nur so fragen, dass im Falle der einen Antwort 7813, im Falle der anderen 7812 Möglichkeiten offen bleiben. Somit beträgt nach der richtig gewählten siebenten Frage die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten höchstens 7813, analog nach der achten 3907, nach der neunten 1954, nach der zehnten 977, nach der elften 489, nach der 12ten 245, nach der 13ten 123, nach der 14ten 62, nach der 15ten 31, nach der 16ten 16, nach der 17ten 8, nach der 18ten höchstens 4, nach der 19ten höchstens 2.

Wir können die gedachte Zahl also mit der 20ten Frage - wenn nicht schon eher - sicher erraten.
Wenn wir uns überlegen, warum sich gerade 20 Fragen ergeben haben, so können wir leicht bemerken, dass dies daran lag, dass

$$2^{19} = 524288 < 1000000 < 1048576 = 2^{20}$$

gilt. Hiernach scheint es auch so zu sein, dass man die gedachte Sache mit 20 Fragen nicht nur unter 1000000 finden kann, sondern sogar unter 1048576 Dingen.

Ist es aber erlaubt, an 1048577 Dinge zu denken, dann ist es nicht mehr sicher, ob 20 Fragen zum Erraten ausreichen.[31] Mit jeder einzelnen Frage können wir nämlich die Anzahl der noch in Betracht kommenden Möglichkeiten auf die Hälfte vermindern.

Wenn ursprünglich 2^{20} Dinge in Betracht gekommen sind, wird also die Anzahl der nach k Fragen noch verbleibenden Möglichkeiten nur noch 2^{20-k} betragen, und somit bleibt nach 20 Fragen - da $2^0 = 1$ ist - nur noch eine einzige Möglichkeit übrig.
Wie leicht zu sehen ist, werden wir die gedachte Sache stets genau mit der 20ten Frage und niemals früher erraten, wenn die Anzahl der Möglichkeiten ursprünglich genau 2^{20} betrug und von uns die dargestellte Frageweise angewendet wird.

Diese Fragemethode läuft freilich ganz mechanisch, so dass das Spiel uninteressant wird. Auch eine Rechenmaschine kann nach dieser Methode das Ja-Nein-Spiel spielen.

Aus dem Gesagten folgt auch: Wenn man an N verschiedene Dinge denken darf, so kann die gedachte Sache stets mit K Fragen erraten werden, wo K die kleinste ganze Zahl ist, für die $2^K \geq N$ gilt, also K die kleinste ganze Zahl mit $K \geq \log_2 N = \operatorname{lb} N$ ist.[32]
Nach dem bis jetzt Gesagten scheint es so, als ob die Formulierung jeder einzelnen Frage von den auf die vorhergehenden Fragen erhaltenen Antworten abhängen müsste.

Dem ist jedoch nicht so. Wenn man nicht darauf aus ist, dass sich die Frage möglichst einfach formulieren lässt, kann man die Fragen zuvor so stellen, dass der Frager die Antworten erst nach dem Stellen aller Fragen erfährt.

[31] In den USA lautet der Name des Ja-Nein-Spiels übrigens "zwanzig Fragen". Es wird dort so gespielt, dass man die gedachte Sache nach höchstens 20 Fragen erraten muss.
[32] $\operatorname{lb} N$ bedeutet den Logarithmus der Zahl N zur Basis 2.

Wenn es z.B. nur erlaubt ist, an eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 zu denken, so lautet ein möglichst optimales Fragesystem (das natürlich aus 3 Fragen besteht, da 8 $= 2^3$ ist) folgendermaßen:

1. Frage: Ist die gedachte Zahl eine der Zahlen 1, 2,3, 4?

2. Frage: Ist die gedachte Zahl eine der Zahlen 1, 2, 5, 6?

3. Frage: Ist die gedachte Zahl eine der Zahlen 1, 3, 5, 7?

Aus den auf diese 3 Fragen erhaltenen Antworten lässt sich die gedachte Zahl auf die folgende Weise eindeutig erraten:

Wenn die Antworten auf die 3 Fragen in obigen Reihenfolge lauten:			dann ist die gedachte Zahl
Ja	Ja	Ja	1
Ja	Ja	Nein	2
Ja	Nein	Ja	3
Ja	Nein	Nein	4
Nein	Ja	Ja	5
Nein	Ja	Nein	6
Nein	Nein	Ja	7
Nein	Nein	Nein	0

Das Wesen dieses Fragesystems wird durch die folgende Bemerkung noch besser verdeutlicht.
Angenommen, man darf an die ersten 2^N nichtnegativen ganzen Zahlen denken. Wir wollen diese Zahlen im Binärsystem darstellen. Wir können leicht sehen, dass sich im Binärsystem jede der Zahlen $0,1,..., 2^N - 1$ durch eine aus genau N Ziffern bestehende Zahl darstellen lässt, wenn wir zulassen, dass die Darstellung einer Zahl mit einer Null oder auch mit mehreren Nullen beginnt. Ist z.B. N =3, so lautet die Darstellung der ersten 8 Zahlen:

$$\begin{array}{ll} 0 = 000 & 4 = 100 \\ 1 = 001 & 5 = 101 \\ 2 = 010 & 6 = 110 \\ 3 = 011 & 7 = 111 \end{array}$$

Nunmehr können wir, wenn der »Antwortende« nur an eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 denken darf, die gedachte Zahl mit den folgenden 3 Fragen eindeutig erraten:

1. Lautet die erste Ziffer der im Binärsystem als 3stellige Zahl aufgeschriebenen gedachten Zahl Null?
2. Lautet die zweite Ziffer der im Binärsystem als 3stellige Zahl aufgeschriebenen gedachten Zahl Null?
3. Lautet die dritte Ziffer der im Binärsystem als 3stellige Zahl aufgeschriebenen gedachten Zahl Null?

Wenn man auf die 3 Fragen beispielsweise die Antworten: Ja - Nein - Nein erhält, so lautet die gedachte Zahl, im Binärsystem geschrieben, 011, die Zahl ist also 3.

Nun können wir vereinbaren, unter der Menge der zum Erraten der gedachten Zahl bzw. Sache notwendigen Information die Anzahl der zum Erraten notwendigen Fragen zu verstehen, vorausgesetzt, wir benutzen das bestmögliche Fragesystem.
Das bedeutet, die in einer einzigen Ja-Nein- Antwort empfangene Information als Einheit der Information zu wählen. Die Einheit der Information heißt bit.[33]

Wenn jemand z. B. eine Liste von Vornamen anfertigt, die 512 Vornamen enthält, und die Spieler vereinbaren, dass es nur erlaubt ist, an einen Vornamen zu denken, der in dieser Liste aufgeführt ist, so sind also, da $512 = 2^9$ ist, zum Erraten des gedachten Vornamens 9 bit Information notwendig.
Da die auf eine Frage erhaltene Antwort höchstens 1 bit enthalten kann, braucht man zum Erraten des gedachten Vornamens also mindestens 9 Fragen.

1. Bemerkung. Oben haben wir gesagt, dass eine Ja-Nein-Antwort höchstens 1 bit Information enthält. In der Tat, stellen wir etwa im vorstehenden Beispiel die erste Frage so, dass die Antwort nicht in 256, sondern in weniger Fällen bejahend ist, so verbleiben im Falle einer verneinenden Antwort noch mehr als 256 Möglichkeiten. In diesem Falle hat die Antwort also weniger als 1 bit Information geliefert.

2. Bemerkung. Damit wir wirklich mit 9 Fragen herausfinden können, an welchen von den 512 Vornamen der Antwortende gedacht hat, ist es notwendig, aber nicht hinreichend, dass jede einzelne Frage 1 bit Information bietet, d.h., dass die Antwort auf jede Frage in genau 256 Fällen der 512 Vornamen Ja und in 256 Fällen Nein lautet.
Es ist nämlich möglich, dass zwei Fragen zwar einzeln gut sind, aber nicht zusammenpassen. Getrennt enthält zwar die Antwort auf jede von ihnen 1 bit Information, die auf die Fragen in der Antwort empfangenen Informationen fallen aber zum Teil oder ganz aufeinander, wir bekommen mit anderen Worten wenigstens zum Teil zweimal dieselbe Information.

Ein extremes Beispiel in dieser Hinsicht besteht darin, dass wir etwa die erste Frage zweimal wiederholen. In diesem Falle liefert die auf die zweite Frage erhaltene Antwort dieselbe 1 bit Information wie die auf die erste Frage erhaltene Antwort, und somit bieten die beiden Antworten, obwohl sie getrennt je 1 bit Information enthalten, zusammen nicht 2 bit, sondern nur 1 bit Information.

Wir haben oben zweimal je 3 Fragen angegeben, mit denen man sicher erraten kann, an welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 der »Antwortende« gedacht hat. Stellen wir jedoch nach der ersten Frage der ersten Fragenfolge (Ist die gedachte Zahl eine der Zahlen 1, 2, 3, 4?) die erste Frage der zweiten Fragenfolge (Ist die erste der Ziffern der im Binärsystem aufgeschriebenen Zahl Null?), so geben die auf die beiden Fragen erhaltenen Antworten zusammen nicht 2 bit Information.

Von der ersten Frage her wissen wir nämlich, ob die Zahl unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 (oder unter den Zahlen 0, 5, 6, 7) vorkommt. Auf Grund der zweiten Frage wissen wir dagegen, ob die Zahl zu den Zahlen 0, 1, 2, 3 (oder zu den Zahlen 4, 5, 6, 7) gehört.

[33] Das Wort »bit« stammt aus der englischen Sprache und ist eine Abkürzung von binary digit (= Ziffer im Binärsystem).

Je nachdem, wie die beiden Antworten lauten, kommen also noch die in der folgenden Tabelle aufgeführten Zahlen in Betracht:

Lauten die Antworten:		so ist die gedachte Zahl eine der folgenden Zahlen:
Ja	Ja	1, 2, 3
Ja	Nein	4
Nein	Ja	0
Nein	Nein	5, 6, 7

Somit beträgt also z. B. in dem Fall, wenn die Antwort auf beide Fragen Ja lautet, die Anzahl der noch verbleibenden Möglichkeiten 3, es sind also weitere 2 Fragen erforderlich.
Mit anderen Worten, die zweite Frage hat zwar 1 bit Information enthalten, aber ein Teil davon war für unsere Zahl keine neue Information[34], sondern eine, über die wir bereits verfügt haben. Stellen wir dagegen nach der ersten Frage der ersten Fragefolge (Ist die gedachte Zahl eine der Zahlen 1, 2, 3, 4?) die zweite Frage der zweiten Fragefolge (erfahren wir also aus der zweiten Antwort, ob die gedachte Zahl unter den Zahlen 0, 1, 4, 5 vorkommt), dann werden die noch in Betracht kommenden Zahlen von der folgenden Tabelle angegeben:

Lauten die Antworten:		so ist die gedachte Zahl eine der folgenden Zahlen:
Ja	Ja	1, 4
Ja	Nein	2, 3
Nein	Ja	0, 5
Nein	Nein	6, 7

Unabhängig davon, was für Antworten wir auf die beiden Fragen bekommen haben, bleiben also in diesem Falle nur noch 2 Möglichkeiten offen. Wir können also die gedachte Zahl mit der dritten Frage genau erraten.
Es ist also nicht nur so, dass die beiden Antworten getrennt je 1 bit Information enthalten, sondern sie geben auch zusammen 2 bit Information. Die in den beiden Antworten erfasste Information deckt sich also auch nicht zum Teil, und die Information, die mit der auf die zweite Frage erhaltenen Antwort geliefert wird, ist vollständig neu.

16.3 Information und Unsicherheit

Bei dem Ja-Nein-Spiel ist der Frager, bevor er die erste Frage gestellt hat, in Ungewissheit darüber, woran der andere Spieler gedacht hat. Nach der auf jede einzelne Frage erhaltenen Antwort nimmt seine Unsicherheit ab, um schließlich, wenn er den Gedanken des anderen erraten hat, gänzlich zu verschwinden.
Die Unsicherheit ist also eigentlich nichts anderes als Informationsmangel, d.h. negative Information, während die Information nichts anderes als Abnahme der Unsicherheit

[34] Man kann zeigen, dass die auf die zweite Frage erhaltene Antwort $\frac{1}{4}\,\mathrm{lb}\,\frac{256}{27} \approx 0{,}8$ bit neue Information und $\frac{1}{4}\,\mathrm{lb}\,\frac{27}{16} \approx 0{,}2$ bit solche Information gibt, die bereits in der vorhergehenden Antwort enthalten war.

(negative Unsicherheit) ist.

Unsicherheit und Information bedeuten also eigentlich dasselbe, nur von anderer Seite betrachtet, sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Es empfiehlt sich also, die Größe der Unsicherheit daran zu messen, wieviel Information notwendig ist, um sie vollständig zum Verschwinden zu bringen.
Wir können somit sagen, wenn man beim Ja-Nein-Spiel vereinbart, dass man nur an irgendeinen von 512 Vornamen denken darf, dann beträgt die Unsicherheit des Fragers bezüglich des gedachten Vornamens vor Beginn des Fragens 9 bit. Diese Unsicherheit nimmt bei möglichst gutem Fragen (durch das also die Menge der verbleibenden Möglichkeiten stets in zwei gleiche Teile geteilt wird) nach jeder einzelnen Antwort um 1 bit ab und verschwindet somit nach 9 Fragen vollständig.

Im Verlaufe des Spiels ist zu jedem Zeitpunkt die Summe aus der bis dahin erhaltenen Information und der noch verbliebenen Unsicherheit (d.h. die Summe aus der bis dahin erhaltenen und der noch fehlenden Information) gleich 9. Die Größe der Unsicherheit heißt in der Informationstheorie Entropie.[35]

Wir wollen jetzt die Frage untersuchen, wie groß die Unsicherheit des Fragenden zu Beginn des Spiels in bezug auf die gedachte Sache ist, wenn die Spieler beim Ja-Nein-Spiel vereinbaren, an irgendeines von N Dingen zu denken, und N nicht gleich einer Potenz von 2 ist.

Angenommen, es sei $2^K < N < 2^{K+1}$. In diesem Falle kann man das gedachte Ding offensichtlich nur mit $(K+1)$ Fragen erraten. Dagegen ist die Unsicherheit offenbar kleiner, als wenn es tatsächlich 2^{K+1} (also mehr) Möglichkeiten geben würde, aber größer, als wenn nur 2^K (also weniger) Möglichkeiten existieren würden.
Da $K = \operatorname{lb} N$ ist (hier und im folgenden bezeichnet $[x]$ den ganzen Teil der reellen Zahl x), gilt also, wenn wir die Unsicherheit des Fragers (die Entropie des Zustands) mit $H(N)$ bezeichnen:

$$[\operatorname{lb} N] < H(N) < [\operatorname{lb} N] + 1$$

Wir werden in Einklang mit unseren bisherigen Überlegungen zeigen, dass es in diesen Fällen vernünftig ist, die auftretende Unsicherheit mit der sogenannten Hartleyschen Formel

$$H(N) = \operatorname{lb} N \qquad (1)$$

zu deuten.
Der Einfachheit halber wollen wir dies am Beispiel $N = 3$ demonstrieren. Für beliebiges N lässt sich die Überlegung im wesentlichen ebenso durchführen.

Wir nehmen also an, die Spieler vereinbaren, dass nur an 3 Dinge gedacht werden darf, zum Beispiel an einen der Buchstaben a, b, c.

[35] Wir können uns hier nicht im einzelnen damit befassen, wie der informationstheoretische Entropiebegriff mit dem Entropiebegriff der statistischen Physik zusammenhängt; wir bemerken nur, dass zwischen den beiden Begriffen ein enger Zusammenhang besteht. In der statistischen Physik wird unter der Entropie eine Maßzahl für die Ungeordnetheit des betreffenden Systems verstanden. Diese Zahl lässt sich auch als Maßzahl dafür auffassen, in welchem Maße der Zustand der Teilchen des gegebenen Systems unsicher ist.

Wegen $2^1 = 2 < 3 < 4 = 2^2$ ist also die bestehende Unsicherheit zu Beginn des Spiels offensichtlich größer als 1 bit, aber kleiner als 2 bit. Dass die Unsicherheit in diesem Falle $\operatorname{lb} 3 = 1{,}58496...$ beträgt, können wir folgendermaßen erkennen:

Der Frager kann z. B. zunächst fragen, ob der gedachte Buchstabe der Buchstabe a ist. Wenn die Antwort Ja lautet, hat er bereits den gedachten Buchstaben gefunden, ist jedoch die Antwort verneinend, so muss er die Frage stellen, ob der gedachte Buchstabe der Buchstabe b ist.
Was auch die Antwort auf diese Frage ist, der Frager erfährt hieraus mit Sicherheit, welcher der gedachte Buchstabe war.

Wiederholt man dieses Spiel oftmals und denkt der Antwortende ebenso oft an die 3 Buchstaben, dann sind in etwa 1/3 der Fälle 1 Frage und in 2/3 der Fälle 2 Fragen notwendig, im Durchschnitt also $1 \cdot (1/3) + 2 \cdot (2/3) = 5/3 = 1{,}66...$ Fragen.
Wir können also sagen, dass bei diesem Spiel die Unsicherheit höchstens 5/3 beträgt. In Wahrheit ist die Unsicherheit jedoch noch kleiner, die genannte »Strategie« (im Falle häufiger Wiederholung des Spiels) ist nicht die bestmögliche.

Wenn die beiden Spieler das Spiel nicht nur einmal, sondern oft spielen, so kann man eine bessere Strategie angeben. Der Frager erfragt die Buchstaben nicht einzeln, sondern verlangt von dem Antwortenden, dass er mit einem Mal an eine aus den Buchstaben a, b, c bestehende 5gliedrige Buchstabenfolge denkt, und versucht, diese Buchstabenfolge gleichzeitig zu erraten.
Aus den Buchstaben a, b, c lassen sich $3^5 = 243$ fünfgliedrige Buchstabenfolgen bilden und $243 < 256 = 2^8$. Der Frager kann also die betreffende aus 5 Buchstaben bestehende Buchstabenfolge sicher mit 8 Fragen erraten, auf das Erraten eines Buchstaben kommen also im Durchschnitt $8/5 = 1{,}6$ Fragen, was etwas kleiner als $5/3$ ist.

Ein noch besseres Ergebnis erhalten wir, wenn der Frager gleichzeitig nach einer aus den Buchstaben a, b, c bestehenden 17gliedrigen Buchstabenfolge fragt. Die Anzahl derartiger Buchstabenfolgen (Wörter) beträgt

$$3^{17} = 129140163 < 2^{27} = 134217728$$

man kann die 17 Buchstaben also mit 27 Fragen erraten, und somit entfallen auf einen Buchstaben im Mittel $\frac{27}{17} = 1{,}588$ Fragen. Fragen wir allgemein gleichzeitig nach einer n-gliedrigen, aus den Buchstaben a, b, c bestehenden Buchstabenfolge und ist $k(n)$ die kleinste Potenz von 2, die größer als 3^n ist, also

$$2^{k(n)-1} < 3^n < 2^{k(n)} \tag{2}$$

so können wir die ganze aus n Buchstaben bestehende Buchstabenfolge mit $k(n)$ Fragen erraten, und somit kommen auf einen Buchstaben $\frac{k(n)}{n}$ Fragen. Aus der Ungleichung (2) folgt jedoch (indem man den Logarithmus zur Basis 2 nimmt), dass

$$k(n) - 1 < n \operatorname{lb} 3 < k(n) \qquad \text{und somit} \qquad \frac{k(n)}{n} - \frac{1}{n} < \operatorname{lb} 3 < \frac{k(n)}{n}$$

das heißt

$$\operatorname{lb} 3 < \frac{k(n)}{n} < \operatorname{lb} 3 + \frac{1}{n}$$

gilt. $\frac{k(n)}{n}$ ist also niemals kleiner als $\operatorname{lb} 3$, nähert sich dieser Zahl jedoch mit beliebiger Genauigkeit von oben her an.
Verlangen wir nämlich z. B., dass die Anzahl der auf einen Buchstaben entfallenden Fragen kleiner als $\operatorname{lb} 3 + \frac{1}{10000}$ sei, so brauchen wir dazu nur n größer als 10000 zu wählen.

Wir sind also berechtigt zu sagen: Wenn man an irgendeinen der Buchstaben a, b, c denken darf, so ist die Unsicherheit des Fragers in bezug auf die gedachte Zahl gleich $\operatorname{lb} 3 = 1{,}58496...$

Dies ist jedoch nicht so zu verstehen, dass man die gedachte Zahl (im Durchschnitt) mit $\operatorname{lb} 3$ Fragen erraten kann, sondern so, dass weniger Fragen im Durchschnitt nicht ausreichen und dass man die Zahl bei einem geeigneten Spielsystem mit im Durchschnitt weniger Zahlen erraten kann, als eine beliebige größere Zahl angibt.
[Es ist interessant zu bemerken, dass die oben erhaltene obere Schranke $\frac{27}{17}$ für die Minimalzahl von Fragen $\operatorname{lb} 3$ nur um weniger als $\frac{4}{1000}$ überschreitet, also eine viel bessere Approximation darstellt, als man auf Grund der Ungleichung (2) für sicher halten könnte.]

Damit haben wir also bewiesen (neben der naheliegenden Ausdehnung der Deutung des Begriffs der Unsicherheit), dass unsere Unsicherheit bezüglich des gedachten Buchstabens $\operatorname{lb} 3 = 1{,}58...$ bit beträgt, wenn der andere Spieler an einen der Buchstaben a, b, c gedacht hat.
In genau derselben Weise kann man zeigen, dass bei einem Ja-Nein-Spiel, bei dem man an N Dinge denken kann, die Unsicherheit des Fragers vor Beginn des Fragens $\operatorname{lb} N$ bit beträgt.
Wenn N gerade eine Potenz von 2 ist, $N = 2^k$, dann ist natürlich $\operatorname{lb} N = k$, und somit enthält das erhaltene Ergebnis als Spezialfall den zuallererst behandelten Fall, dass an 2^k Dinge gedacht werden darf.

16.4 Die Shannonsche Formel

Wir kehren zu dem Beispiel zurück, in dem die Spieler des Ja-Nein-Spiels verabreden, dass nur an einen von 512 Vornamen gedacht werden darf. Wie wir gesehen haben, beträgt in diesem Falle die Unsicherheit des Fragers vor Beginn des Ratens 9 bit.

Bei näherer Untersuchung können wir leicht feststellen, dass wir, als wir dies bewiesen haben, eigentlich stillschweigend angenommen haben, dass der Antwortende an jeden der 512 Vornamen mit derselben Wahrscheinlichkeit denkt (beispielsweise die 512 Vornamen auf je einen Zettel schreibt, diese Zettel in einen Hut legt, mischt und aufs Geratewohl einen Zettel herauszieht und an den hierauf stehenden Vornamen denkt).
Wenn dies nicht so ist, dann ist unsere Behauptung nicht richtig und muss abgeändert werden. Wenn z. B. der Antwortende an den Vornamen derjenigen Person denkt, mit der er kürzlich am Telefon gesprochen hat, so ist die Annahme nicht gerechtfertigt, dass jeder der 512 Vornamen gleichwahrscheinlich ist, da doch die einzelnen Vornamen in ihrer Häufigkeit stark voneinander abweichen.

Es ist viel wahrscheinlicher, dass der, mit dem er gesprochen hat, Eva, Hans, Andreas oder Maria heißt, als Anastasius, Serafin, Kleophas oder Upor.
Wir haben also die folgende bisher nicht behandelte allgemeinere Frage zu untersuchen:

Es mögen $x_1, x_2, ..., x_N$ diejenigen »Dinge« bezeichnen, an die beim Ja-Nein-Spiel gedacht werden darf. ($x_1, x_2, ..., x_N$ können Namen oder allgemein Wörter, Zahlen, Gegenstände usw. sein.)
Wir nehmen an, der Frager weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit der andere Spieler an diese Dinge zu denken pflegt.

P_k bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der andere Spieler an x_k gedacht hat. (In diesem Falle sind natürlich die Zahlen P_k positiv, und es ist $P_1 + P_2 + ... + P_N = 1$; dadurch wird zum Ausdruck gebracht, dass der Spieler vereinbarungsgemäß an nichts anderes als an eines von $x_1, x_2, ..., x_N$ denken kann.)
Frage, wie groß ist in diesem Falle die Unsicherheit des Fragers vor Beginn des Fragens?

Diese Zahl kann offensichtlich nur von den Wahrscheinlichkeiten $P_1, P_2, ..., P_N$ abhängen, von den $x_1, x_2, ..., x_N$ dagegen nicht (denn es ist doch z. B. ganz nebensächlich, ob ich an den gedachten Vornamen selbst oder an die Nummer des Vornamens in einer Vornamenliste denke).

Wir können also x_k stets durch k ersetzen, d.h. durch die Nummer von x_k, und können mit anderen Worten voraussetzen, dass die Folge $x_1, x_2, ..., x_N$ die Folge der Zahlen 1,2,..., N ist.
Die in Rede stehende Unsicherheit werde, mit $H(P_1, P_2, ..., P_N)$ bezeichnet.
Die Zahl $H(P_1, P_2,..., P_N)$ heißt die Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1, P_2, ..., P_N.

C. Shannon (und unabhängig von ihm N. Wiener) hat gezeigt, dass

$$H(P_1,P_2,..., P_N) = P_1 \operatorname{lb} \frac{1}{P_1} + P_2 \operatorname{lb} \frac{1}{P_2} + ... + P_N \operatorname{lb} \frac{1}{P_N} \tag{4}$$

gilt. Die Formel (4) heißt Shannonsche Formel[36].
Dass die Shannonsche Formel richtig ist, wollen wir zunächst an folgendem Beispiel bestätigen:

Wir nehmen an, der erste Spieler werfe vor dem Spiel zwei Geldstücke auf, so dass zwar er, aber nicht der Frager das Ergebnis des Werfens sieht. Der Frager muss erraten, ob das Ergebnis der Würfe 1. bei allen beiden Münzen Zahl, 2. bei allen beiden Münzen Wappen oder 3. bei der einen Münze Zahl und bei der anderen Wappen war.

Bei der dritten Möglichkeit machen wir keinen Unterschied darin, mit welcher Münze der Spieler Zahl und mit welcher er Wappen geworfen hat (wir nehmen nämlich an, dass die beiden Münzen dieselbe Form haben, so dass man die beiden Fälle auch in Wirklichkeit nicht voneinander unterscheiden kann).

[36] Die Shannonsche Formel enthält die Hartleysche Formel als Spezialfall; aus (4) folgt nämlich $H\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right) = \operatorname{lb} N$.

Die Wahrscheinlichkeiten der Möglichkeiten 1, 2 und 3 betragen dann also $P_1 = \frac{1}{4}$, $P_2 = \frac{1}{4}$, $P_3 = \frac{1}{2}$.
Offensichtlich kann der Frager folgendermaßen vorgehen. Zunächst fragt er, ob der dritte Fall eingetreten ist. Wenn die Antwort bejahend ist, hat er bereits erraten, was geschehen ist. Nur im Falle einer verneinenden Antwort muss er die zweite Frage stellen, ob nämlich die zweite Möglichkeit eingetreten ist.

Er kommt also in etwa der Hälfte der Fälle mit 1 Frage, in der anderen Hälfte mit 2 Fragen zum Ziel, d.h., er kann im Durchschnitt mit $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$ Fragen erraten, was geschehen ist.
Während also, wie wir gesehen haben, im Durchschnitt $\operatorname{lb} 3 = 1{,}58...$ Fragen notwendig sind, wenn die Wahrscheinlichkeiten der 3 Möglichkeiten gleich sind, reichen, wenn die Wahrscheinlichkeiten dieser Möglichkeiten $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ betragen, im Durchschnitt bereits 1,5 Fragen aus. Die Shannonsche Formel liefert für diesen Fall dasselbe Ergebnis,

$$\frac{1}{4} \operatorname{lb} 4 + \frac{1}{4} \operatorname{lb} 4 + \frac{1}{2} \operatorname{lb} 2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

ist.
Auf Grund des behandelten Beispiels können wir bereits Folgendes erkennen: Wenn die in Betracht kommenden Möglichkeiten nicht gleichwahrscheinlich sind, dürfen wir nicht danach streben, mit unseren Fragen die Anzahl der Möglichkeiten auf die Hälfte zu reduzieren, sondern danach, die noch verbleibenden Möglichkeiten so in zwei Klassen zu gruppieren, dass für beide Klassen die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Möglichkeiten den gleichen Wert ergibt (oder doch, wenn dies nicht möglich ist, wenigstens nahezu den gleichen Wert).

Im obigen Beispiel ließ sich dies exakt durchführen, im allgemeinen lässt es sich jedoch nicht immer erreichen. Man kann aber ein derartiges Frageverfahren dadurch beliebig gut approximieren, dass man wiederum von dem anderen Spieler verlangt, nicht an ein Ding, sondern gleichzeitig an viele zu denken, und dass diese dann von uns zu erraten sind.
Es ist langwierig, den Beweis dafür genau auszuführen. Daher wollen wir nur die Beweisidee skizzieren, ohne uns mit Einzelheiten aufzuhalten.

Wenn der erste Spieler n-mal nacheinander an eines der Dinge $x_1, x_2, ..., x_N$ denkt und bei jedem Mal x_k ($k = 1, 2,...,N$) mit der Wahrscheinlichkeit P_k wählt (unabhängig von den vorangegangenen Wahlen), dann wird er nach dem Gesetz der großen Zahlen etwa nP_1-mal x_1, nP_2-mal x_2, ..., nP_n-mal x_N wählen, und die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Zufallsfolge der gedachten Dinge wird dementsprechend etwa

$$P_1^{nP_1} \cdot P_2^{nP_2} \cdot ... \cdot P_N^{nP_N}$$

betragen.
Es bezeichne S die Anzahl der Zufallsfolgen. Dann gilt also (da die Gesamtwahrscheinlichkeit der unwahrscheinlichen Folgen sehr klein und somit die Gesamtwahrscheinlichkeit der wahrscheinlichen Folgen nahe bei 1 liegen wird)

$$S \cdot P_1^{nP_1} \cdot P_2^{nP_2} \cdot ... \cdot P_N^{nP_N} \approx 1$$

oder

$$S \approx \left[\left(\frac{1}{P_1}\right)^{P_1}\left(\frac{1}{P_2}\right)^{P_2}...\left(\frac{1}{P_N}\right)^{P_N}\right]^n \tag{5}$$

Da wir eine von diesen Folgen mit nahe bei S liegender Wahrscheinlichkeit offensichtlich mit etwa $\operatorname{lb} S$ Fragen erraten können, kommen auf eine gedachte Sache im Mittel $\frac{1}{n}\operatorname{lb} S$ Fragen.
Aus (5) folgt dagegen

$$\frac{1}{n}\operatorname{lb} S \approx P_1 \operatorname{lb}\frac{1}{P_1} + P_2 \operatorname{lb}\frac{1}{P_2} + ... + P_N \operatorname{lb}\frac{1}{P_N}$$

Die Shannonsche Formel gibt also in Wahrheit an, mit wieviel Fragen man im Durchschnitt fast sicher erraten kann, an was von $x_1, x_2, ..., x_N$ der zweite Spieler denkt.

Wir stellen fest, dass wir in diesem Falle nicht mehr behaupten können, dass $H(P_1, P_2,...,P_N)$ (oder beliebig wenig mehr) Fragen sicher im Mittel ausreichen, um die gedachte Sache zu erraten, sondern nur, mit wieviel Fragen wir diese mit beliebig nahe bei 1 liegender Wahrscheinlichkeit (»fast sicher«) erraten können.
Das ist aber mehr nur ein prinzipieller Unterschied.

16.5 Das Ja-Nein-Spiel und die Kodierung

Zum Schluss wollen wir versuchen, die praktische Bedeutung des Begriffs der Informationsmenge dadurch näher zu erläutern, dass wir zeigen, wie man, vom Ja-Nein-Spiel ausgehend, zu dem Problem der Kodierung der Information gelangen kann.

Wir wollen annehmen, der Frager mache sich von den auf seine Fragen erhaltenen Antworten Notizen. Immer wenn die Antwort »Ja« lautet, schreibt er eine Eins auf, während er eine Null notiert, wenn die Antwort »Nein« ist, so lange, bis er die gedachte Sache gefunden hat.
Auf diese Weise entspricht der Folge der erhaltenen Antworten eine Zeichenfolge, die nur aus den Zeichen 0 und 1 besteht, deren Anzahl gleich der Anzahl der Antworten (Fragen) ist.

Die gedachte Sache wird durch diese Zeichenfolge eindeutig charakterisiert, denn der Frager hat ja die Sache gerade auf Grund der erhaltenen Antworten erraten. Ordnet man beliebigen Daten eine aus vorgeschriebenen Zeichen bestehende Zeichenfolge zu, so spricht man von einer Kodierung dieser Daten. Wir sind damit also zu dem Ergebnis gelangt, dass man, um eine beliebige Angabe mit den Zeichen 0 und 1 zu kodieren, eine aus ebenso vielen Zeichen bestehende Zahlenfolge benötigt, wie Fragen erforderlich sind, um die entsprechende Angabe (unter den in Betracht kommenden Möglichkeiten) beim Ja-Nein-Spiel zu erraten.

Wenn wir feststellen, mit wieviel Fragen man etwas im Ja-Nein-Spiel erraten kann, haben wir damit also zugleich die Frage gelöst, mit wieviel Zeichen 0 oder 1 man das »kodieren« kann, d.h., wir haben auch ein Grundproblem der Kodierung einer Information gelöst.

Wir können uns hier nicht über kompliziertere Probleme der Kodierungstheorie verbreiten wie etwa über die Frage der Übermittlung von Zeichen durch einen rauschenden Kanal. Wir wollen hier nur andeuten, dass diese Probleme einer solchen Modifizierung des Ja-Nein-Spiels entsprechen, bei der der »Antwortende« nicht immer wahrheitsgemäß antwortet, sondern von Zeit zu Zeit lügt.
Die »lügende« Form des Ja-Nein- Spiels (»lügender Bar-Kochba«) ist freilich viel schwerer als die gebräuchliche »wahrsagende« Form, wie auch die Frage der Informationsübermittlung durch einen rauschenden Kanal viel komplizierter als das Problem der einfachen Kodierung der Information ist.

Dem Leser, der sich für die Informationstheorie interessiert, empfehlen wir die im Literaturverzeichnis unter [30] bis [37] aufgeführten Arbeiten.

17 Literatur- und Quellenverzeichnis

Zum Abschnitt K. Bognár: Das Galtonsche Brett

[1] Gnedenko, B. W., und A.J. Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4. Auflage. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964. Übersetzung aus dem Russischen.

[2] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962. Übersetzung aus dem Ungarischen.

[3] Bernstein, F.: Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. Zeitschrift für Physik 77 (1932), S. 104- 113.

[4] Medgyessy Pal: Einige Probleme in Zusammenhang mit dem Galtonschen Brett. MTA Alkalmazott Matematikai Intezetenek Közlemenyei 1 (1952), S. 165-174.

[5] Medgyessy Pal: Ergänzung zu der Arbeit »Einige Probleme in Zusammenhang mit dem Galtonschen Brett«. MTA Alkalmazott Matematikai Intezetenek Közlemenyei 2 (1953), S. 233-237.

[6] Renyi, A.: Über wahrscheinlichkeitstheoretische Versuche, die sich im Fachzirkel durchführen lassen. Vorträge im Rahmen der Schulmathematik.

[7] Schulz, G.: Zur Theorie des Galtonschen Brettes. Zeitschrift für Physik 92 (1934), S. 74- 7754 .

[8] Seitz, W., und K.Hamacher-Odenhausen: Untersuchungen über das Galtonbrett. Naturwiss. 22 (1934), S. 494.

Zum Abschnitt J. Surányi: Interessante Zahlen

[9] Erdös, P., und J.Surányi: Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie. Budapest: Tankónyvkiadó 1960, Kapitel I, S.9-13 und 26.

[10] Jung, H.W.E.: Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig: Fachbuchverlag 1950.

[11] Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin: J. Springer 1950.

[12] Dickson, L.E.: Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig: B. G. Teubner 1931.

[13] Neiss, F.: Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig: S. Hirzel 1952.

[14] Kaloujnine, L. A.: Primzahlzerlegung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.

Zum Abschnitt A. Renyi: Die Glücksspiele und die Wahrscheinlichkeitsrechnung

[15] Erdös, P., und P. Turán: On some problems of statistical group theory. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsrechnung und verwandte Gebiete 4 (1965), S. 175- 186.

[16] Prekopa, A., Renyi, A., und K. Urbanik: Über die Grenzverteilung für Summen unabhängiger Zufallsgrößen auf bikompakten kommutativen topologischen Gruppen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 7 (1956), S. 11- 16.

[17] Grenander, U.: Probabilities on algebraic structures. New York: Wiley 1963.

[18] Jordan, K.: Kapitel aus der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Budapest: Akadémiai Kiadó 1955.

[19] Culbertson, E.: New and Complete Summary of Contract Bridge. Philadelphia: John C. Winston 1935.

[20] Borel, E., und A. Cheron: Theorie mathematique des bridges, & la portee de tous. Paris: Gauthier-Villars 1955.

[21] Doob, J. L.: Stochastic processes. New York: Wiley 1953.

[22] Rham, G. de: Sur quelques courbes definies par des equations fonctionnelles. Rendiconti del Seminario Matem. Univ. Torino 16 (1956- 57), S. 101- 113.

[23] Dubbins, L. E., und L. J. Savage: How to gamble if you must. New York: McGraw-Hill 1965.

[24] Thorp, E. O.: Beat the dealer. A winning strategy for the game of twenty one. New York: Blaisdell 1962.

Zum Abschnitt M. Bognár: Knifflige Flächen

[25] König, Denes: Die Elemente der Analysis situs. Budapest: Akadémiai Kiadó 1918.

[26] Boltjanskij, W. G., und W. A. Jefremovics: Anschauliche Topologie. Budapest: Tankónyvkiadó 1965.

[27] Arnold, B.H.: Elementare Topologie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1971.

[28] Hilbert, D., und S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Berlin: J. Springer 1932.

[29] Alexandroff, P.: Einfachste Grundbegriffe der Topologie. Berlin: J. Springer 1932.

Zum Abschnitt A. Renyi: Das Ja-Nein-Spiel und die Informationstheorie

[30] Jaglom, A. M., und I. M.Jaglom: Wahrscheinlichkeit und Information. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965.

[31] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitstheorie mit einem Anhang über Informationstheorie, 2. Auflage. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966. (Es interessiert hierbei der Anhang des Buches.)

[32] Feinstein, A.: Foundations of information theory. New York: McGraw-Hill 1958.

[33] Fano, R. M.: Transmission of information. A statistical theory of communication. New York: Wiley 1961.

[34] Fey, P.: Informationstheorie. Einführung in die statistische Theorie der elektrischen Nachrichtenübertragung, 3. Auflage. Berlin: Akademieverlag 1967.

[35] Henze, E.: Einführung in die Informationstheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.

[36] Woodward, P. M.: Probability and information theory with applications to radar. London: Pergamon Press 1955.

[37] Reza, F. M.: Einführung in die Informationstheorie. Budapest: Múszaki Kiadó 1966.