Rósza Péter

Das Spiel mit dem Unendlichen

1957 B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 118
Abschrift und LaTex-Satz: 2022 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch wendet sich in erster Linie an zunächst nicht mathematisch interessierte Intellektuelle, an Schriftsteller, Künstler und Geisteswissenschaftler. Ich habe von ihnen viel Schönes erhalten; jetzt überreiche ich zum Dank die Mathematik. Ich möchte, dass sie begreifen: Wir stehen gar nicht so fern voneinander.

Ich liebe die Mathematik nicht nur, weil sie auf die Technik anwendbar ist, sondern auch, weil sie schön ist, weil der Mensch seine spielerische Lust in sie hineingelegt hat und weil die Mathematik imstande ist, sogar das höchste Spiel zu treiben:
Sie kann das Unendliche fassbar machen. Über Unendlichkeit, über Ideen hat sie Authentisches mitzuteilen. Und doch ist sie so menschlich, keineswegs das gewisse Zweimalzwei: Sie hat den nie abgeschlossenen Charakter menschlichen Schaffens an sich.

Die Gemeinverständlichkeit des Buches bedeutet nicht, dass ich den Gegenstand oberflächlich behandelt habe. Ich habe vollkommene Klarheit der Begriffe angestrebt - die Darstellung in einem neuen Licht hat vielleicht auch dem Mathematiker etwas zu sagen, dem Lehrer sicher sogar Vieles - nur die leicht ermüdend wirkende Systematisierung, die Definition von wirklich anschaulichen Dingen, die technischen Einzelheiten sind weggelassen worden. (Es gehört ja nicht zum Zweck des Buches, dem Leser die Technik der Mathematik beizubringen.)

Gerät das Buch in die Hände eines Studenten, der dem Gegenstand Interesse entgegenbringt, so kann er sozusagen von der gesamten Mathematik ein Bild erhalten. Anfangs war es nicht meine Absicht, eine lückenlose Darstellung zu geben; der Stoff hat sich während des Schreibens von selbst erweitert, und ich fand immer weniger Einzelheiten, die ich weglassen konnte.
Haftete vorher an manchem die Erinnerung an Langeweile, so hatte ich jetzt das Gefühl: Ich nehme irgendeinen alten Tand hervor, blase den Staub von ihm ab, und er beginnt in meinen Händen zu schimmern.

Es kann sein, dass der Ton vom Leser stellenweise als etwas naiv empfunden wird, doch das nehme ich gerne auf mich: die naive Einstellung den einfachen Tatsachen gegenüber ruft immer die Stimmung der neuen Entdeckung hervor.

Die erste Anregung zum Buch erhielt ich von dem Schriftsteller Marcell Benedek.
Auf Quellen berufe ich mich nicht. Ich habe vieles von anderen gelernt, doch das lässt sich heute nicht mehr in seine Elemente zerlegen. Hier und da tauchte in mir mit zwingender Kraft ein Gleichnis auf, dessen Ursprung mir noch bekannt war; wurde einmal "die" Methode von irgend etwas ausgebildet, so mochte ich es nicht anders schreiben, bloß um origineller zu sein.

Das gilt insbesondere von dem, was ich von Laszlo Kalmar übernommen habe. Er gehört zu meinem Jahrgang und war mein Meister in der Mathematik; was ich schreibe, das ist untrennbar mit seinen Gedanken durchwoben. Ich muss besonders hervorheben, dass das "Schokoladenbeispiel" in der Behandlung der unendlichen Reihen von ihm stammt; ebenso auch der ganze Gedankengang im Ausbau der Logarithmentafeln.

Bei den Vornamen werde ich auch meine kleinen unbewussten Mitarbeiter in den Schulbänken zitieren; sie werden es schon auf sich beziehen. Hier erwähne ich meine 15jährige Schülerin Käthe, die eben die Bürgerschule absolviert hat und sich über das Buch noch in seinem Entstehen äußerte. Ihr habe ich es zu danken, dass ich den Stoff auch mit den Augen des begabten Schülers sehen konnte.

Die wichtigste Hilfe waren mir aber die Äußerungen des nicht mathematisch interessierten Lesers. Mein lieber Freund, Bela Lay, Theaterregisseur, der bisher der Meinung war, dass er keine Ohren für die Mathematik habe, erlebte das ganze Zustandekommen des Buches mit; ich habe erst dann nach einem Kapitel den Schlusspunkt gesetzt, wenn er damit zufrieden war.
Ohne ihn wäre dieses Buch vielleicht gar nicht entstanden.

Mit den Augen des Mathematikers hat Paul Csillag das Manuskript revidiert; in der letzten Minute konnte auch L. Kalmar zu einem flüchtigen Überfliegen etwas Zeit erübrigen; ihnen habe ich das Gefühl der Sicherheit zu verdanken.

Budapest, im Herbst 1943 Rózsa Péter

VORWORT ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Seit 1943 sind 11 inhaltsschwere Jahre vergangen. Der Mathematiker Paul Csillag und meine Schülerin Käthe (Käthe Fuchs) sind inzwischen Opfer des Faschismus geworden. Der Vater meiner Schülerin Anna, der damals wegen seiner Teilnahme an der illegalen Bewegung zu 17 Jahren Haft verurteilt war, ist befreit worden; und so treffen sich vielleicht bereits in der Vorstellung von Anna die Geraden, die einander immer näherkommen.

Auch das vollkommen fertiggestellte Buch konnte während der Nazibesatzung Ungarns nicht erscheinen. Die eingelagerten Exemplare wurden teils durch eine Bombe vernichtet; der Rest wurde dann am ersten freien "Büchertag" 1945 herausgegeben. Noch 1944 ist es mir gelungen, eine selbstverfertigte Rohübersetzung nach der Schweiz zu senden, damit wenigstens dieses Exemplar überleben soll.

Prof. Dr. Paul Bernays, Zürich, hat mit Hilfe eines inzwischen verstorbenen jungen ungarischen Flüchtlings Franz Csergö, die Rohübersetzung sprachlich verbessert; ich schulde beiden vielen Dank.
Auf die endgültige Form wurde die Übersetzung durch den Verlag Teubner gebracht, dem ich für die sorgfältige Arbeit am Buche sehr dankbar bin. Hier möchte ich meinen besonderen Dank Herrn Prof. Dr. Rudolf Kochendörffer, Rostock, aussprechen, der das Erscheinen der deutschen Übersetzung ganz zu seiner eigenen Sache gemacht hat und mir auch bei der Korrektur freundlichst behilflich war. Auch Herrn E. Hodi, Budapest, bin ich für seine Hilfe bei der Korrektur zu großem Dank verpflichtet.

Der Leser bedenke, dass das Buch meine Denkweise im Jahre 1943 widerspiegelt; nur hier und da wurde eine kleine Änderung angebracht. Allein zum Schluss befindet sich eine wesentliche Änderung: ich habe ja seitdem gemeinsam mit L. Kalmar selber bewiesen, dass die Existenz der sogenannten "absolut-unentscheidbaren Probleme" eine Folge des Gödelschen Satzes über relativ unentscheidbare Probleme ist; und die Folge kann keineswegs von größerer Tragweite sein als der Satz, dessen Folge sie ist.

Budapest, im Sommer 1954 — Rózsa Péter

Einleitung

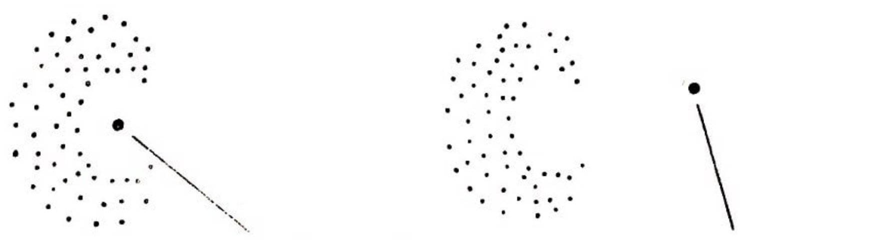
Ich erinnere mich eines Gesprächs mit einem Schriftsteller, den ich zu meinen Freunden zählen darf. Er beklagte sich damals, er habe das Gefühl, dass seine Bildung unvollkommen sei, weil er keine mathematischen Kenntnisse besitze. Er fühlte diesen Mangel sogar bei seiner schriftstellerischen Arbeit.

Er hatte bereits mathematische Begriffe, die ihm aus der Schulmathematik in Erinnerung geblieben waren, z. B. das Koordinatensystem, in Gleichnissen verwendet, meinte aber, seinem Gefühl nach gebe es in der Mathematik noch viel derartig verwendbaren Stoff, und sein Ausdrucksvermögen sei ärmer, weil er aus dieser reichen Quelle nicht schöpfen könne. Die Klage hierüber erschien ihm jedoch sinnlos, da er sich für unfähig hielt, jemals in die Tiefen der Mathematik einzudringen.

Seither drängte sich mir dieses Gespräch immer wieder auf, Gedanken und Pläne erregend. Dass es auf diesem Gebiet zu tun gibt, war mir von Anfang an klar; ist doch auch in dem, was Mathematik für mich bedeutet, immer das Stimmungselement entscheidend, und das ist vielleicht eine Quelle, aus der Schriftsteller und Künstler gleichfalls schöpfen können.
Mir fällt eben ein Beispiel aus meiner Studienzeit ein:

Ich las mit mehreren Universitätskollegen zusammen ein Schauspiel von Shaw. Wir waren bis zu jener Stelle gelangt, an der der Held die Heldin nach dem Geheimnis fragt, das sie befähige, auch die am schwersten zu behandelnden Menschen so gut zu lenken und zu gewinnen.
Die Heldin denkt nach: Vielleicht erkläre sich das dadurch, dass sie im Grunde allen Menschen fernstehe. Da rief plötzlich meine Kollegin, die uns das Stück vorlas: "Das ist ja dasselbe wie der mathematische Satz, den wir heute gelernt haben!"
Die mathematische Frage war nämlich: Kann man sich einer Punktmenge von einem außenliegenden Punkte her derart nähern, dass man sämtlichen Punkten zugleich näherkommt?

Die Antwort lautet: Bedingung ist, dass der außenliegende Punkt weit genug von der Punktmenge entfernt liegt:



Von diesem Punkt aus ist es unmöglich; nähern wir uns gewissen Punkten, so entfernen wir uns zugleich von anderen.

Von diesem Punkt aus jedoch kann man sich allen Punkten zugleich nähern.

Die andere Behauptung des erwähnten Schriftstellers, dass es nämlich in die Tiefen der Mathematik niemals einzudringen vermöge, dass er z.B. den viel erwähnten Begriff des Differentialquotienten nie verstehen werde, wollte ich zunächst nicht glauben.

Ich versuchte, die Einführung dieses Begriffes in möglichst einfache und klare Schritte zu zerlegen, und gewann dabei eine überraschende Erkenntnis: Der Mathematiker kann es sich gar nicht vorstellen, wie schwer es dem Laien fällt, auch nur die einfachste Formel zu verstehen.

Ebenso begreift auch der unerfahrene Pädagoge nicht, dass der kleine Knirps schon zum zwanzigstenmal S..p..a..s..s buchstabiert und noch immer nicht merkt, dass es sich um "Spaß" handelt (dabei handelt es sich hier gar nicht um einen Spaß).

Dies war eine Erfahrung, die mir viel zu denken gab.
Bisher hatte ich geglaubt, der Mangel an mathematischen Kenntnissen bei den Laien sei darauf zurückzuführen, dass noch kein gutes, gemeinverständliches Buch, z.B. über die Differentialrechnung, geschrieben worden ist. Interesse dafür ist offensichtlich vorhanden.

Das Publikum reißt sich ja förmlich um alles, was auf diesem Gebiete geboten wird; aber bisher ist noch nie ein solches Buch von einem Fachmathematiker verfasst worden. Ich meine damit einen Mann, der wirklich "vom Fach" ist, der genau weiß, in welchem Grade etwas ohne Fälschung vereinfacht werden kann.
Er darf auch nicht etwa die alte bittere Arznei der Schulmathematik in irgendeiner gefälligen Packung verabreichen, sondern muss das Wesentliche selbst in einer solchen Beleuchtung darstellen, dass es in die Augen springt. Ein solcher Autor muss auch selbst die Freude am mathematischen Schaffen erlebt haben, um seiner Darstellung einen Schwung zu verleihen, durch den auch der Leser mitgerissen wird.

Nunmehr beginne ich aber zu glauben, dass sogar das wirklich allgemeinverständliche Buch vielen Lesern nicht zugänglich sein wird. Vielleicht ist es das entscheidende Merkmal eines Mathematikers, dass er einer sauren Arbeit mutvoll entgegensieht.
"Zu der Mathematik führt kein königlicher Weg", antwortete Euklid einmal seinem Herrscher, d.h., der Weg zur Mathematik kann auch für Könige nicht bequem gemacht werden.

Oberflächlich lässt sich ein mathematisches Buch nicht lesen; man muss sich vielmehr etwas quälen, um die dazu notwendigen Abstraktionen zu vollziehen, und der Mathematiker ist derjenige, der an dieser Art, sich zu quälen, seine Freude findet.
Selbst das beste volkstümliche Buch wird darum nur von jenen verstanden werden können, die bis zu einem gewissen Grad diese Mühe auf sich nehmen wollen, die das bittere Buchstabieren so lange zu wiederholen gewillt sind, bis sich der Sinn der Formel vor ihnen enthüllt.

Aber ich schreibe nicht für jene. Ich schreibe eine Mathematik ohne Formeln, etwas aus jener gemeinsamen Stimmungsquelle.
Ich weiß nicht, ob dieses Unternehmen gelingt. Mit dem Verzicht auf die Formel verzichte ich auf ein wesentliches Merkmal der Mathematik. Dass die Form zum Wesen gehört, weiß der Schriftsteller ebenso wie der Mathematiker; versuchen wir nur einmal uns vorzustellen, wie die Stimmung eines Sonetts ohne Sonettform wiedergegeben werden könnte!

Dennoch möchte ich den Versuch wagen: Vielleicht lässt sich auch auf diese Weise etwas vom wahren Geist der Mathematik retten.
Nur eine Erleichterung kann ich nicht gewähren: Dieses oder jenes Kapitel darf nicht überblättert, auf später verschoben oder nur überflogen werden. In die Mathematik kann man nur Schritt für Schritt eindringen. Kein einziges Wort ist überflüssig, jede Einzelheit ist auf die vorhergehende gegründet, wenn dies auch hier nicht so sichtbar wird, wie in einem langweilig systematisch angelegten Buche.
Die wenigen Anweisungen müssen auch befolgt werden: Die Abbildungen sollen wirklich angesehen, eine einfache Zeichnung oder Rechnung tatsächlich ausgeführt werden, wenn ich hier und da den Leser darum bitte. Zur Entschädigung dafür verspreche ich, dass das Buch nicht langweilig sein wird.

Aus der Schulmathematik werde ich nichts benutzen. Ich beginne mit dem Zählen und werde bis zum modernsten Zweig der Mathematik gelangen, bis zur mathematischen Logik.

1 Der Zauberlehrling

1.1 Fingerspiel

Beginnen wir bei den Anfängen. Ich habe nicht die Absicht, über die Geschichte der Mathematik zu schreiben; dies könnte ich ohnehin nur an Hand schriftlicher Denkmäler tun, und wie fern von den Ursprüngen sind bereits die ersten schriftlichen Denkmäler!

Wir wollen uns den Urmenschen in seiner primitiven Umgebung vorstellen, wie er eben zu zählen beginnt. Dabei kommt uns der Vergleich mit jenem primitiven Menschlein zu Hilfe, das sich vor unseren Augen zu einem Kulturmenschen entwickelt.
Ich meine das Kind, das sich und die Welt kennenlernt, indem es zum Beispiel mit seinen zehn Fingerchen spielt.

Es ist möglich, dass "eins", "zwei", "drei", "vier", "fünf" nur Abkürzungen sind für: "Das ist der Daumen", "Der schüttelt die Pflaumen", "Der liest sie alle auf", "Der trägt sie nach Haus", "Und der kleine, der isst sie ganz alleine".
Dies ist kein Scherz: Ich hörte einmal von einem Arzt, dass es Gehirnverletzte gibt, die ihre Finger nicht mehr unterscheiden können, und dass dies immer mit dem Ausfallen der Fertigkeit im Rechnen verbunden ist.

Diese ins Unterbewusste geratene Verbindung ist also auch im Kulturmenschen noch untrennbar. Ich meine: auch die spielerische Natur des Menschen ist eine Quelle der Mathematik, und eben darum ist die Mathematik nicht nur eine Wissenschaft, sondern zum mindesten in gleichem Maße auch eine Kunst.

Man ist heute der Ansicht, das Zählen sei von Anfang an eine zweckmäßige Tätigkeit gewesen. Vielleicht wollte der Urmensch über den Umfang seines Eigentums einen Überblick gewinnen, indem er seine Tierhäute abzählte. Das ist möglich. Nicht weniger denkbar ist es aber, dass das Zählen auch irgendeine magische Zeremonie war.
Noch heute dient es ja Zwangsneurotikern als magische Regel, um gewisse unerlaubte Gedanken zu isolieren:

Man muss, sagen wir, von 1 bis 20 zählen, und erst dann ist es erlaubt, an etwas anderes zu denken. So oder so, auf Tierhäute oder auf aufeinanderfolgende Zeiträume bezogen, bedeutet das Zählen immer, über das bereits Vorhandene noch einen Schritt hinauszugehen.

Man kann nun auch über das Abzählen der zehn Finger hinausgehen und gelangt dann bereits zur ersten großartigen mathematischen Schöpfung des Menschen, zur unendlichen Zahlenfolge:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...$$

Das ist die sogenannte Reihe der natürlichen Zahlen. Sie ist unendlich, denn man kann über jede beliebig große Zahl noch um eins weiterzählen. Es gehörte ein hoher Grad von Abstraktionsvermögen dazu, diese Reihe aufzustellen, denn die Zahlen sind ja nur Schatten der Wirklichkeit.

Die Zahl 3 bedeutet hier nicht 3 Finger, 3 Äpfel, 3 Pulsschläge usf., sondern das, was allen diesen Dingen gemeinsam ist: die von ihnen abstrahierte Anzahl.

Sehr große Zahlen wurden überhaupt nicht mehr von der Wirklichkeit abstrahiert, denn kein Mensch hat je eine Milliarde Äpfel gesehen oder eine Milliarde Pulsschläge gezählt. Solche großen Zahlen stellen wir uns nur als Analoga der aus der Wirklichkeit entnommenen kleinen Zahlen vor: In der Vorstellung können wir immer weiter und weiter zählen über alle bisher bekannten Zahlen hinaus.

Aber der Mensch begnügt sich nicht mit dem Zählen. Wenn es sonst nichts geben sollte, dann ist es die Freude am Wiederholen, die ihn darüber hinausführt. Dies ist auch den Dichtern wohlbekannt: Die Rückkehr zu immer wieder demselben Rhythmus, zu demselben Klang, das ist der Ausdruck des Lebendigen. So wird auch das kleine Kind des Spielens nicht müde; es wirft den Ball immer wieder, auch wenn es dem abgestumpften Erwachsenen schon längst zur Last fällt.

Wir halten bei 4? Zählen wir doch weiter um 1! Nochmal um 1! Nun noch einmal um 1! Wo sind wir angelangt ? Natürlich bei 7, ebenso, als hätten wir gleich um 3 weitergezählt: Wir haben die Addition entdeckt:

$$4 + 1 + 1 + 1 = 4 + 3 = 7$$

Jetzt spielen wir mit dieser Rechnungsart weiter: Zählen wir zu 3 noch 3 und noch 3 und noch 3, so haben wir die 3 schon 4 mal addiert. Das lässt sich kurz so aussprechen: 4 mal 3 ist 12; in Zeichen:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Diese Operation wird Multiplikation genannt.
Haben wir einmal am Wiederholen Geschmack gefunden, so ist es schwer, damit aufzuhören. Wir können ja mit der Multiplikation ebenso weiterspielen. Multiplizieren wir 4 mit 4 und noch einmal mit 4, so ergibt sich:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Diese Wiederholung, diese Iteration der Multiplikation nennt man Potenzieren. 4 bezeichnet man hier als Basis und weist durch eine an der rechten oberen Ecke angebrachte kleine Zahl, durch den sogenannten Exponenten, darauf hin, wieviele Vierer zu multiplizieren sind. In dieser Bezeichnung ist also

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Wie man sieht, werden die Ergebnisse unserer Wiederholungen immer größer: $4 \cdot 3$ ergibt mehr als $4 + 3$, und 4^3 ergibt noch mehr als $4 \cdot 3$. Das fröhliche Wiederholen schwingt uns also recht hoch zu den großen Zahlen empor.
Dies geschieht noch mehr, wenn auch noch das Potenzieren iteriert wird. Erheben wir also 4 zunächst in die 4te Potenz:

$$4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \cdot = 256$$

Soll nun 4 in die 4^4te Potenz erhoben werden:

$$4^{4^4} = 4^{256} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot ...$$

so werden wir des Weiterschreibens bald müde. 256 Vierer wären ja hinzuschreiben, und dann müssten noch die Multiplikationen ausgeführt werden!
Das Resultat wäre eine unvorstellbar große Zahl, so dass wir lieber Vernunft annehmen: Wenn es auch noch so schön ist, immer wieder zu iterieren, so führen wir doch die Iteration des Potenzierens nicht unter unsere üblichen Operationen ein.

Vielleicht können wir uns in diesem Sinne verständigen: Der menschliche Geist probiert alle sich ihm bietenden Spiele; es bewährt sich aber nur dasjenige davon auf die Dauer, das vom gesunden Menschenverstand als zweckmäßig anerkannt wird.

Die Addition, die Multiplikation und das Potenzieren erwiesen sich als sehr nützlich und zweckmäßig für die Tätigkeiten des Menschen. Deshalb erhielten sie für immer Bürgerrechte in der Mathematik.
Man entdeckte auch Eigenschaften an ihnen, die das Rechnen erleichtern. Es ist zum Beispiel eine große Erleichterung, dass sich etwa $7 \cdot 28$ nicht nur durch eine 7 malige Addition von 28 berechnen lässt, sondern auch, indem man 28 in zwei Summanden zerlegt und dann gliedweise multipliziert.

Die Berechnung von $7 \cdot 20$ und von $7 \cdot 8$ ist ganz leicht, und auch die Summe von $140 + 56$ zu bestimmen, ist nicht schwer. Nun, und wenn man lange Kolonnen zu addieren hat, dann ist es sehr vorteilhaft zu wissen, dass das Ergebnis durch keinerlei Abänderungen der Reihenfolge verändert wird. Ich kann also z.B. die Addition $8+7+2$ auch so durchführen: $8 + 2 = 10$ und $10 + 7 = 17$.
Damit habe ich die unangenehme Addition $8 + 7$ schlau umgangen. Man hat nur zu bedenken, dass Addieren eigentlich Weiterzählen um so viel bedeutet, als das folgende Glied ausmacht; dann wird auch klar, dass das Ergebnis durch Vertauschungen nicht verändert wird.

Schwieriger ist es schon, dasselbe auch bei der Multiplikation einzusehen: $4 \cdot 3$ bedeutet $3 + 3 + 3 + 3$; die Bedeutung von $3 \cdot 4$ ist aber $4 + 4 + 4$. Dass nun

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$$

ergibt, ist wirklich nicht selbstverständlich. Es wird aber sofort klar, wenn wir uns eine Zeichnung machen. Zeichnen wir 4mal 3 Punkte in dieser Lage . . . untereinander:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Jedermann sieht, dass das gleiche Bild entsteht, wenn man 3mal 4 Punkte in dieser Lage nebeneinander zeichnet. Es ist also tatsächlich $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$. Darum werden Multiplikator und Multiplikand von den Mathematikern mit einem gemeinsamen Namen, nämlich Faktoren, bezeichnet.

Wir wollen noch eine von den Eigenschaften des Potenzierens als Beispiel herausgreifen:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \underbrace{4 \cdot 4} = 4^5$$

Ermüdet mich nun das viele Multiplizieren, so kann ich eine kleine Rast einlegen. Das Produkt der ersten drei Vierer ergibt 4^3, und es bleibt noch 4^2 übrig. Also ist:

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^5$$

Der Exponent des Ergebnisses ist 5, das heißt aber $3+2$. Zwei Potenzen von 4 kann man also multiplizieren, indem man die Exponenten addiert. Dies gilt immer. Zum Beispiel:

$$5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot} \cdot \underbrace{5 \cdot 5} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^9$$

und 9 ist ja $4 + 2 + 3$.

Erinnern wir uns noch einmal des zurückgelegten Weges. Zu sämtlichen Operationen wurden wir durch das Zählen geführt. Natürlich könnte man die Frage stellen: Wo bleiben denn die Subtraktion, die Division?
Diese Rechnungsarten sind aber nichts anderes, als die Umkehrungen der bisherigen Operationen (ebenso auch das Wurzelziehen und das Logarithmieren). $20 : 5$ z.B. bedeutet, dass ich das Ergebnis einer Multiplikation, nämlich 20, bereits kenne und die Zahl suche, die, 5mal genommen, 20 ergeben hat. In diesem Falle gelingt es, eine solche Zahl zu finden, denn es ist ja $20 = 5 \cdot 4$.

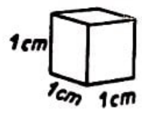
Es ist aber nicht immer so leicht, diese Zahl aufzufinden; ja, es gibt nicht einmal immer eine solche Zahl.
In 23 z.B. geht 5 nicht ohne Rest auf, da $4 \cdot 5 = 20$ weniger, $5 \cdot 5 = 25$ aber schon mehr als 23 ist. Ich muss mich also mit der kleineren Zahl begnügen und sagen, dass 5 auch in 23 4mal enthalten ist, wobei aber noch 3 übrigbleibt.
So etwas macht natürlich mehr Kopfzerbrechen als unsere fröhlichen Wiederholungen.

Die umgekehrten Operationen bedeuten in der Regel eine saure Arbeit; eben darum sind sie beliebte Angriffspunkte der mathematischen Forschung. Ein Mathematiker ist ja bekanntlich derjenige, der an solchen Schwierigkeiten seine Freude hat. Auf die umgekehrten Operationen muss ich also gelegentlich noch zurückkommen.

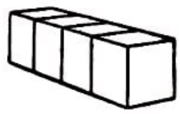
1.2 Die Fieberkurven der Rechnungsarten

Wir haben gesehen, dass die Iterationen der Rechnungsarten uns immer höher in den Bereich der großen Zahlen hinaufführen. In welche Höhen? Es lohnt sich, ein wenig darüber nachzudenken.

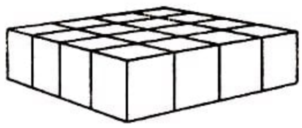
Wenn wir z.B. das Volumen eines Würfels berechnen wollen, müssen wir potenzieren. Wir ernennen zunächst einen kleinen Würfel zur Einheit, und die Frage ist nun, wieviele solcher kleinen Würfel in den zu messenden großen Würfel hineingehen. Die Einheit sei ein Kubikzentimeter, d.h. ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe je 1 cm beträgt



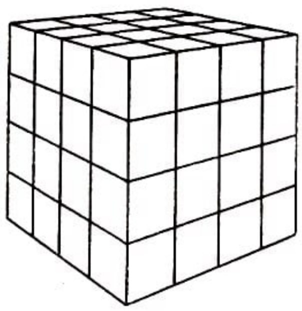
Reihen wir vier solche kleinen Würfel aneinander, so entsteht die folgende Reihe:



Werden nun vier dieser Reihen aneinandergefügt, so entsteht eine Schicht,



in der $4 \cdot 4 = 4^2$ Würfel enthalten sind. Bauen wir schließlich vier solche Schichten aufeinander, so entsteht ein großer Würfel,



der aus $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ kleinen Würfeln besteht.

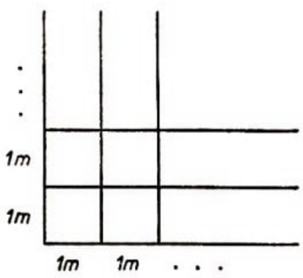
Umgekehrt also: In einen Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe je 4 cm beträgt, gehen 4^3 Kubikzentimeter hinein.
Im allgemeinen erhält man das Volumen eines Würfels, indem man eine seiner Kantenlängen in die dritte Potenz erhebt. Darum wird die dritte Potenz auch Kubus genannt.[1]

Die Folge dieses Potenzierens ist dann, dass ein Würfel mit verhältnismäßig kurzer Kante einen riesigen Rauminhalt haben kann. Die Strecke von 1 Kilometer z. B. ist nicht

[1]Ich kenne die Einwendung der Pädagogen: Ich hätte sagen sollen, dass man die Maßzahl des Volumens erhält, indem man die Maßzahl einer Kante in die dritte Potenz erhebt. Ich will aber den Leser nicht mit derartigen Spitzfindigkeiten langweilen. Es gibt hier auch noch Gewichtigeres, was ich übergangen habe: die Frage, ob sich die Kanten eines beliebigen Würfels in cm ausdrücken lassen. Darauf werde ich noch zurückkommen.

besonders lang, jedermann kann sie sich vorstellen, wenn er daran denkt, dass etwa die Straße "Unter den Linden" in Berlin 1 Kilometer lang ist.
Würde man aber einen Würfel erbauen, dessen eine Kante eben die Straße "Unter den Linden" wäre, so hätte dieser bereits einen so großen Rauminhalt, dass die ganze Menschheit darin Platz finden könnte. Wer es nicht glaubt, möge nachrechnen:

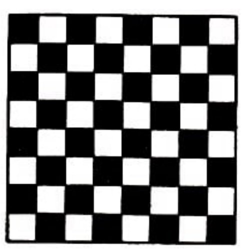
Nehmen wir an, es gäbe keinen Menschen von mehr als 2 Meter Größe. Wir könnten dann in unseren Würfel Dielen im Abstand von 2 Metern übereinander einziehen und erhielten bei der Höhe von 1 Kilometer, d.h. von 1000 Metern, 500 Stockwerke. Teilen wir eine solche Diele der Länge und der Breite nach in Streifen von je 1 Meter Breite ein,



so entstehen in jedem Längsstreifen 1000 Quadrate, und es kommen insgesamt 1000 derartige Längsstreifen zustande. Auf eine Diele fallen also $1000 \cdot 1000 = 1000000$ Quadrate. Länge und Breite jedes Quadrats betragen 1 Meter, und es können sicherlich 4 Menschen auf ein solches Quadrat gestellt werden.
Es lassen sich also in ein Stockwerk 1000000 mal 4, das sind 4 Millionen Menschen, ganz gut hineinstopfen.

In die 500 Stockwerke des Würfels passen also 500 mal 4 Millionen, das sind 2000 Millionen oder 2 Milliarden Menschen. Etwa so viele Menschen aber gibt es gar nicht auf der Erde, oder wenigstens gab es damals noch nicht so viele, als mir von diesem Würfel erzählt wurde.

Dabei tritt in der Berechnung des Würfelvolumens nur die dritte Potenz auf; ein größerer Exponent führt uns noch viel stürmischer in den Bereich der hohen Zahlen. Es dürfte eine tüchtige Überraschung für jenen Herrscher gewesen sein, von dem der Erfinder des Schachspiels nur "einige" Weizenkörner als Belohnung verlangte:



Auf das erste der 64 Felder seines Schachbrettes sollte nämlich 1 Körnchen, auf das zweite doppelt soviel, d.h. 2, auf das dritte wiederum doppelt soviel, d.h. $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$, usf. gelegt werden.

Diese Bitte scheint zunächst wirklich bescheiden zu sein, doch je weiter wir auf den Feldern vorwärtsschreiten, um so höhere Potenzen von 2 kommen an die Reihe, und zum Schluss handelt es sich um

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$$

Körner (bitte auch die dazwischenliegenden Potenzen hinzudenken; ich hatte keine Geduld, alle 64 Summanden hinzuschreiben).

Hätte jemand Lust, die Zahl der Körner zu berechnen, dann würde er so viel Weizen als Resultat erhalten, dass damit die gesamte Erdoberfläche fast 1 cm hoch bedeckt werden könnte.
Danach kann es uns nun nicht mehr überraschen, dass uns die Iteration des Potenzierens in so unvorstellbare Höhen führt. Nur eines möchte ich noch als Kuriosität erwähnen: Man kann abschätzen, dass 9^{9^9} eine so große Zahl ergibt, dass die bloße Niederschrift dieser Zahl einen Papierstreifen von achtzehnhundert Kilometer Länge verlangt, wobei halbzentimeterbreite Ziffern geschrieben würden. Zur genauen Berechnung des Wertes von 9^{9^9} würde nicht einmal ein Menschenleben ausreichen.

Indem ich lese, was ich bisher geschrieben habe, fällt mir auf, dass ich immer wieder Ausdrücke benutzte, wie: eine gewisse Rechenoperation "schwingt uns empor", "führt in die Höhe" in der Reihe der Zahlen, obwohl doch die Reihe der Zahlen eine horizontale Reihe ist:

$$1,2,3,4,5,....$$

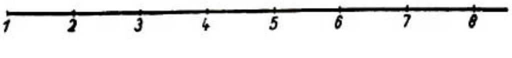
Um mich exakt auszudrücken, dürfte ich nur sagen, dass ich weit nach rechts komme, oder höchstens noch, dass ich vorwärts auf die großen Zahlen zuschreite. Der Ausdruck wurde also schon von einem gewissen Stimmungselement beeinflusst.

Immer größer werden, das bedeutet wachsen, und Wachstum erweckt in uns den Eindruck des Emporstrebens. Der Mathematiker kleidet diese Vorstellung auch in eine konkrete Form: Er drückt seine Vorstellungen häufig in einer Zeichnung aus, und die Abbildung der stürmischen Zunahme ist eine steil emporstrebende Linie.

Die Kranken kennen diese Zeichnung gut; sie wissen, dass ein Blick auf ihre Fieberkurve genügt, um den ganzen Ablauf der Krankheit zu erkennen. Nehmen wir an, dass in regelmäßig aufeinanderfolgenden Zeitpunkten bei einem Kranken der Reihe nach die Temperaturen

$$38^\circ, 38{,}5^\circ, 39^\circ, 39^\circ, 38^\circ, 38{,}5^\circ, 37^\circ, 36{,}5^\circ$$

gemessen wurden, dann können diese so dargestellt werden: Zunächst werden auf einer horizontalen Linie die regelmäßig aufeinanderfolgenden Zeiträume durch gleiche Strecken abgebildet:

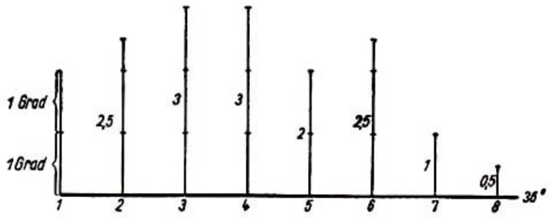


Dann wird eine bestimmte Strecke als ein Grad bezeichnet und von jedem Zeitpunkt aus - dem steigenden Fieber entsprechend - so oft aufwärts[2] eingetragen, wie die Temperatur des Kranken in Grad gemessen zu jenem Zeitpunkt eben betrug.

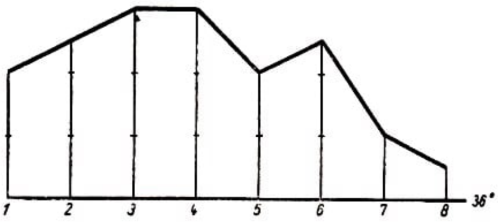
Wir brauchen aber gar nicht so lange Linien zu ziehen, denn die Temperatur unseres Kranken ist ja nie unter $36°$ gesunken. Wir können also festsetzen, dass die Höhe der horizontalen Linie bereits der Temperatur von $36°$ entspricht. Dann sind über diese Linie der Reihe nach nur noch

$$2; 2{,}5; 3; 3; 2; 2{,}5; 1; 0{,}5$$

Grad in die Zeichnung aufwärts einzutragen, und wir erhalten das folgende Bild:



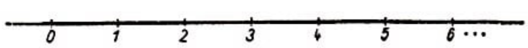
Verbinden wir schließlich noch die Endpunkte der gezeichneten Linien, so erhalten wir die vollständige Fieberkurve:



Diese Kurve erzählt alles. Die emporstrebenden Linien geben vom Steigen, die fallenden vom Sinken des Fiebers Rechenschaft. Auf der horizontalen Linie stagnierte die Krankheit, nachdem das Fieber anfangs gleichmäßig anstieg, wie es die ersten beiden Linienstücke zeigen, die gleich steil ansteigen und deshalb auf dieselbe Gerade fallen. Abgesehen von einem kleinen Rückfall bei der sechsten Temperaturmessung, war die Genesung rapid: Der Fall der Linie ist zwischen der sechsten und der siebenten Temperaturmessung sehr steil, steiler als jede der Steigungen.

Nichts hindert uns nun daran, auch für unsere Rechenoperationen solche Fieberkurven zu zeichnen.

Es ist üblich, die Zahlen auf einer sogenannten Zahlengeraden darzustellen. Das ist eine Gerade, auf der man einen beliebigen, mit 0 bezeichneten Ausgangspunkt annimmt und dann von da aus gleiche Strecken nebeneinander abträgt, also mit einer bestimmten Strecke weiterzählt:



[2] Dieses "aufwärts" ist eigentlich auch nur bildlich gemeint: Auf einem horizontal liegenden Papierblatt lassen sich nur horizontale Linien ziehen. Wir haben aber dennoch das Empfinden, dass eine derart gerichtete Linie: | sich aufwärts erstreckt.

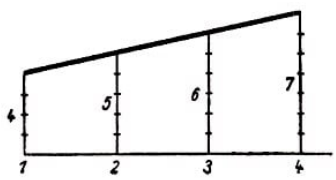
Wer zu bequem zum Rechnen ist, der kann die Rechnungsarten auf einer solchen Zahlengeraden auch ganz mechanisch ausführen. Um z.B. die Aufgabe $2 + 3$ zu lösen, hätte man nur von 2 aus um 3 Schritte nach rechts zu gehen. und dort ließe sich das Ergebnis 5 sofort ablesen. Bei $5 - 3$ müsste man von 5 aus um drei Schritte nach links schreiten, usf.
Ähnlich wie hier wird mit Hilfe von Kugeln, die sich auf Stangen verschieben lassen, mit dem Zählapparat in den Elementarschulen gerechnet.

Nun wollen wir aber vom Horizontalen in die Höhe aufsteigen.
Gehen wir von einer bestimmten Zahl aus, z. B. von 3, und beobachten wir ihre Zunahme, wenn nacheinander 1, 2, 3, usf. zu ihr addiert wird, wenn man sie mit 1, 2, 3, usf. multipliziert, und schließlich, wenn man sie in die erste, zweite, dritte, usf. Potenz erhebt. (Auch in dem Ausdruck "in eine Potenz erheben" ist übrigens das Aufwärtsgehen enthalten.)

Beginnen wir mit der Addition. Das erste Glied sei immer 3:

$$3 + 1 = 4, \qquad 3 + 2 = 5, \qquad 3 + 3 = 6, \qquad 3 + 4 = 7$$

Das sich verändernde zweite Glied der Summe werde ich auf einer horizontalen Geraden darstellen und die entsprechende Summe aufwärts eintragen. Wird also eine Einheit horizontal durch eine solche Strecke: und vertikal durch eine solche: | abgebildet, dann ergibt sich diese Fieberkurve der Addition

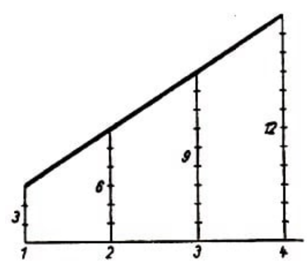


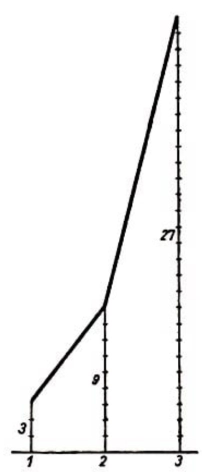
Hier fallen sämtliche die Endpunkte verbindenden Linienstücke auf dieselbe Gerade: Die Summe nimmt gleichmäßig zu, wenn man das eine Glied vergrößert.
Bei der Multiplikation:

$$3 \cdot 1 = 3; \quad 3 \cdot 2 = 6$$
$$3 \cdot 3 = 9; \quad 3 \cdot 4 = 12$$

nimmt das Produkt ebenfalls gleichmäßig zu, wenn einer seiner Faktoren vergrößert wird. Die Zunahme ist aber viel größer als bei der Addition; die hierbei entstandene Gerade ist weit steiler. Potenzieren wir schließlich:

$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

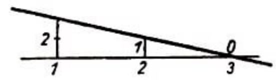




so erkennen wir: Die Potenz nimmt nicht mehr gleichmäßig, sondern immer schneller zu; 3^4 hätte schon nicht mehr auf dieser Seite Platz. Dieser Sachverhalt liegt jener alltäglichen Redensart zugrunde, dass irgendetwas eine "potenzierte" Wirkung ausübt.

In gleicher Weise lassen sich nun auch die Fieberkurven der umgekehrten Operationen darstellen. Die Fieberkurve der Subtraktion:

$$3-1=2; 3-2=1; 3-3=0$$



ist eine fallende Gerade; die Differenz nimmt also gleichmäßig ab, wenn der Subtrahend schrittweise vergrößert wird.
Die Division ist eine heikle Operation; auf ihre Fieberkurve komme ich deshalb erst später zurück.

Bemerken möchte ich vorerst nur noch dies: Die eben gezeichneten Fieberkurven bezeichnet der Mathematiker als "graphische Darstellung von Funktionen". Bei der Addition hängt die Größe der Summe davon ab, wie ihr veränderliches Glied gewählt wird; man sagt, die Summe sei eine Funktion des veränderlichen Summanden, und wir haben die Zunahme dieser Funktion graphisch dargestellt.
Ebenso ist das Produkt eine Funktion des veränderlichen Faktors, die Potenz eine Funktion des Exponenten, usf.

Bereits bei den ersten Rechenoperationen begegneten uns also Funktionen, und auch im Weiteren werden wir solche Zusammenhänge untersuchen. Der Funktionsbegriff ist der Kern des ganzen mathematischen Werkes.

1.3 Die Parzellierung der unendlichen Zahlenreihe

Wie weit sind wir abgekommen vom Spiel mit unseren Fingern!
Wenn wir aber inzwischen schon fast vergessen haben, dass der Mensch 10 Finger hat, so nur deshalb, weil ich den Leser nicht mit vielem Rechnen ermüden wollte. Es hätte sonst nämlich schon längst auffallen müssen, dass man zum Aufschreiben jeder Zahl - und sei sie noch so groß - insgesamt nur 10 verschiedene Zeichen benutzt:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Wie kann man nun eine beliebige der unendlich vielen Zahlen mit Hilfe von nur 10 Zeichen aufschreiben? Dies ist nur möglich, indem man die Zahlenreihe, die sich eintönig bis ins Unendliche erstreckt, parzelliert, in Gruppen einteilt.
Wir zählen 10 Einheiten ab - soviel lassen sich noch mit einem Blick umfassen - und fassen sie zu einem Strauß zusammen, dem wir einen neuen Namen geben. Der Name von 10 Einern ist 1 Zehner.

Auch 10 Pfennigstücke können ja gegen ein einziges Zehnpfennigstück eingetauscht werden. Jetzt können wir bereits in größeren Schritten weiterzählen. Nachdem wir zu den Zehnern vorgeschritten sind, können wir nun auch 10 Zehner zusammenfassen, z.B. mit einem Streifen umbinden, auf den "1 Hunderter" geschrieben wird.

Ebenso lassen sich 10 Hunderter zu einem Tausender, 10 Tausender zu einem Zehntausender, 10 Zehntausender zu einem Hunderttausender, 10 Hunderttausender zu einer Million zusammenfassen.

Tatsächlich lässt sich auf diese Weise jede Zahl mit den genannten 10 Zeichen aufschreiben. Überschreiten wir die 9, so können wir wieder 1 schreiben, aber das ist bereits ein Zehner. Die darauffolgende Zahl besteht aus einem Zehner und aus einem Einer, sie lässt sich also mit zwei Einerzeichen (11) aufschreiben.

Die Benennungen Zehner, Hunderter und ähnliche mehr sind zunächst natürlich beim Schreiben zu gebrauchen. Ein sinnreicher Einfall jedoch macht schließlich auch diese entbehrlich:
Der Kaufmann legt die Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücke usf. in verschiedene Abteilungen seines Kassenfaches, rechterhand etwa die kleinsten Geldeinheiten, zu denen er oft greifen muss um herauszugeben, und nach links immer größere Geldeinheiten.
Seine Hand gewöhnt sich allmählich so an diese Einteilung, dass er auch ohne hinzuschauen immer weiß, welches Geldstück er z.B. aus dem dritten Fach herausnimmt.

Ein ähnliches Übereinkommen können wir auch über die Stellen der Einer, Zehner, Hunderter usf. treffen. Ganz rechts schreiben wir die Einer und dann nach links fortschreitend immer die zunächst größeren Einheiten. Die zweite Stelle ist also für die Zehner bestimmt, die dritte für die Hunderter usf.
Bei dieser Schreibweise können die Benennungen auch weggelassen werden, da man den Wert der Zahlzeichen aus ihrer Stellung erkennen kann. Die Zahlzeichen haben also einen Stellenwert.

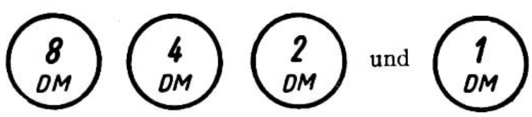
$$354$$

besteht aus 4 Einern, 5 Zehnern und 3 Hundertern. Dieses Zahlensystem, in dem wir alle Zahlen mit 10 Zeichen ausdrücken können, nennt man Dezimalsystem.

Es hätte uns aber auch nichts daran gehindert, bei der Parzellierung der Zahlenreihe früher oder später als bei 10 haltzumachen.
Ich habe von primitiven Völkern gehört, deren ganze Rechenkunst in der Verwendung der Begriffe eins, zwei und viel besteht.
Auch für diese können wir ein Zahlensystem aufstellen, indem wir die Zahlen zu zweien zusammenfassen. Zwei Einer ergeben dann bereits eine neue Einheit: einen Zweier; zwei Zweier wiederum eine neue Einheit, und zwar einen Vierer; zwei Vierer einen Achter; usf. In diesem Zweiersystem genügen bereits zwei Zeichen:

$$0, 1$$

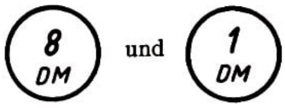
zum Aufschreiben einer beliebigen Zahl. Am leichtesten ist das einzusehen, wenn wir etwa mit folgenden Geldstücken rechnen (wenn es auch in Wirklichkeit keine solche Münzen gibt):



d.h. indem wir uns die Einheiten des Zweiersystems als Geldeinheiten vorstellen. Wie könnten wir dann z.B. 11 DM aus möglichst wenigen Geldstücken zusammenstellen? Es ist leicht zu erkennen, dass die folgenden 3 Stücke:

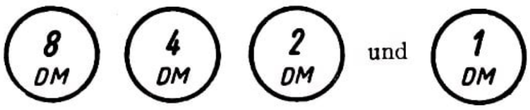
(1)

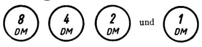
insgesamt 11 DM ergeben und dass sich 11 DM aus weniger Geldstücken auch gar nicht zusammensetzen lassen. Ebenso ergeben



(2)

9 DM und



insgesamt 15 DM. Erproben Sie bitte, dass sich eine jede Zahl von 1 bis 15 aus  so zusammensetzen lässt, dass dabei jedes Geldstück höchstens einmal verwendet wird, also entweder 0 mal oder 1 mal. (Die Zahl 16 jedoch können wir nicht mehr auf diese Weise zusammensetzen. Das ist aber auch kein Wunder, denn $16 = 2 \cdot 8$, ein Sechzehner, ist ja bereits die nächste Einheit.)

Nach Beispiel (1) wird 11 im Zweiersystem also durch

$$1011$$

ausgedrückt. Diese Ziffernfolge bedeutet hier einen Einer, einen Zweier, null Vierer und einen Achter. Tatsächlich ergeben diese insgesamt 11. Ähnlich lässt sich aus unseren Beispielen (2) und (3) herauslesen, dass man 9 bzw. 15 im Zweiersystem folgendermaßen aufschreiben kann:

$$1001 \qquad \text{bzw.} \qquad 1111$$

Wir kommen also hier in der Tat mit nur zwei Zeichen aus. Es lohnt sich, nunmehr auch das Umgekehrte zu üben:

11101 im Zweiersystem = 1 Einer + 1 Vierer + 1 Achter + 1 Sechzehner = 1 + 4 + 8 + 16 = 29 im Dezimalsystem.

Weshalb verwendet man nun eigentlich ein Zahlensystem?
Wenn man auf diese Art unter den Zahlen Ordnung hält, wird jede Rechenoperation wesentlich leichter ausführbar, indem man z.B. bei der Addition Einer mit Einern, Zehner mit Zehnern zusammenrechnet.
Auch der Kaufmann zählt seine Einkünfte abends nicht regellos zusammen, sondern addiert zunächst die gleichen Münzsorten je einer Abteilung seines Kassenfaches, und

rechnet erst dann die Einzelergebnisse zusammen.

Die Bequemlichkeit ist ein oft wiederkehrender wichtiger Gesichtspunkt in der Entwicklung der Mathematik. Die unbequemste Rechnungsart ist die Division.
Vermutlich hat die damit verbundene Plage den ersten Anstoß zur Parzellierung der Zahlenreihe gegeben. Wie angenehm sind die Divisionen, die sich ohne Rest durchführen lassen!

Es gibt liebe, nette Zahlen, die viele andere Zahlen ohne Rest enthalten. Die Zahl 60 ist z.B. eine solche:

$$60 = \begin{cases} 1 \cdot 60 \\ 2 \cdot 30 \\ 3 \cdot 20 \\ 4 \cdot 15 \\ 5 \cdot 12 \\ 6 \cdot 10 \end{cases}$$

Es gehen folglich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60 restlos in 60 auf. Wollen wir also irgendeine große Zahl durch eine dieser 12 Zahlen teilen (obgleich es unnütz ist, auch 1 in ihre Reihe aufzunehmen, da diese zum Glück bei Multiplikationen und Divisionen nicht zählt), so erinnern wir uns daran, dass wir auch den Dividenden (wie jede Zahl) durch Abzählen von Einheiten erhalten haben.

Wir fassen nun die ersten 60 dieser Einheiten zusammen, dann die nächsten 60 usw., bis wir an unsere Zahl so nahe wie möglich herangekommen sind. Die Sechziger zu dividieren ist nicht schwer. Es bleibt dann höchstens noch 59 übrig, also keine große Zahl; man kann sich entschließen, sie zu dividieren, auch wenn dabei noch irgendein Rest übrigbleibt.

Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, hätte man die Zahlen zu 60 zusammenfassen sollen, und die Alten haben in ihrer astronomischen Tätigkeit, die viele unangenehme Divisionen verlangte, auch tatsächlich das Sechzigersystem zur Messung der Winkel und der Zeit eingeführt.

Noch heute wird der $6 \cdot 60 = 360$ste Teil eines ganzen Kreisbogens 1 Grad genannt; 1 Grad besteht aus 60 Minuten, 1 Minute aus 60 Sekunden. Die Einteilung einer Stunde in Minuten und Sekunden ist bekanntlich ebenso.
60 ist aber eine verhältnismäßig große Zahl, mit der es sich nicht bequem genug arbeiten lässt. Unter den Zahlen um 10 herum hat die 12 die meisten Teiler:

$$12 = \begin{cases} 1 \cdot 12 \\ 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 \end{cases}$$

1, 2, 3, 4, 6, 12 - das sind sechs Teiler -, während 10 nur durch vier Zahlen - 1, 2, 5, 10 - restlos teilbar ist. Man findet auch Spuren von der Verwendung des Zwölfersystems: Das Jahr z.B. besteht aus 12 Monaten, das Dutzend aus 12 Stück. Dass doch das Dezimalsystem die Oberhand gewonnen hat, zeugt davon, dass der Mensch durch das Spiel mit den Fingern stärker beeinflusst wird als durch die Zweckmäßigkeit.

Die Franzosen erinnern sich sogar daran, dass man einstmals auch mit den Zehen spielte. Achtzig kann nämlich nur von demjenigen "viermal zwanzig" (quatre-vingt) genannt werden, der sich einst an das Zwanzigersystem gewöhnt hatte.
Doch beschränken wir uns nun auf das Dezimalsystem und untersuchen, welche Vorzüge es der Division bietet.

In erster Linie ist dieses System natürlich dann vorteilhaft, wenn man durch irgendeinen Teiler von 10 dividieren will: durch 2, 5 oder 10 selbst. Diese Zahlen sind in 10 ohne Rest enthalten. Das heißt aber, dass sie auch in $2 \cdot 10 = 20$, in $3 \cdot 10 = 30$, überhaupt in allen Zehnern enthalten sind; demnach auch in $10 \cdot 10 = 100$ und darum auch in $2 \cdot 100 = 200$, $3 \cdot 100 = 300$, kurz in allen Hundertern, Tausendern usf.
Wir sehen also, dass 2, 5 und 10 die Zehner, die Hunderter, die Tausender, usf. ohne Rest teilen. Unbestimmt ist lediglich, ob diese Zahlen (2, 5, 10) auch die Einer teilen. Die 10 zunächst ist größer als alle Einer.

Wenn also bei einer Zahl irgendeine von 0 verschiedene Ziffer an der Einerstelle steht, so kann die Zahl nicht durch 10 teilbar sein. Nur diejenigen Zahlen sind durch 10 teilbar, die keine Einer besitzen. Der fehlende Einer wird durch 0 vertreten, und wir erhalten die bekannte Teilbarkeitsregel, dass 10 nur diejenigen Zahlen teilt, die auf 0 endigen.

Die einzige Einerzahl, die durch 5 teilbar ist, ist die 5 selbst; daher gilt die Regel, dass 5 die auf 0 oder auf 5 endigenden Zahlen teilt. Die durch 2 teilbaren Einerzahlen schließlich sind 2, 4, 6 und 8. Durch 2 sind also alle die Zahlen teilbar, die auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endigen; man nennt sie gerade Zahlen.

Damit haben wir die Teiler von 10 erschöpft; die Möglichkeiten des Dezimalsystems jedoch noch nicht. Die nächste Einheit dieses Zahlensystems ist die Hundert. Auch die Teiler von Hundert lassen sich schnell untersuchen. Z.B. ist 4 in 10 nicht ohne Rest enthalten, wohl aber in 100, da $4 \cdot 25 = 100$ ist. Folglich ist die 4 auch in $2 \cdot 100 = 200$, allgemein in allen Vielfachen von Hundert ohne Rest enthalten; natürlich auch in $10 \cdot 100 = 1000$ und daher in allen Tausendern usf.

Dagegen ist es nicht bestimmt, ob 4 die Zehner und die Einer teilt. Zur Beurteilung, ob eine beliebig große Zahl durch 4 teilbar ist, sind daher nur die beiden letzten Stellen zu untersuchen. Die Zahl

$$34785\underline{24}$$

z.B. ist durch 4 teilbar, weil 24 durch 4 teilbar ist; dies lässt sich mit einem Blick entscheiden, da man die ersten fünf Ziffern gar nicht zu beachten braucht. Ebenso kann man sofort entscheiden, dass

$$3124864\underline{34}$$

nicht durch 4 teilbar ist, da 4 in 34 nicht ohne Rest enthalten ist.

Nach den Teilern von 100 kommen die Teiler von 1000 an die Reihe. Die Zahl 8 z.B. ist kein Teiler von 100, da sie 80 teilt, doch in der übrigbleibenden Zahl 20 nicht ohne Rest enthalten ist.

Dagegen ist sie ein Teiler von 1000, da sich 1000 in $800 + 160 + 40$ zerlegen lässt und 8 in jedem Glied restlos aufgeht. Daher teilt 8 sämtliche Tausender, Zehntausender, Hunderttausender usf., und man braucht zur Beurteilung, ob eine beliebig große Zahl durch 8 teilbar ist, nur die drei letzten Stellen anzusehen.

Wir haben damit ein Rezept gefunden, nach dem wir schnell beurteilen können, ob eine Zahl durch eine gewisse ausgewählte Zahl teilbar ist. Wir müssen nur nachsehen, ob diese ausgewählte Zahl die 10 teilt. In diesem Falle wird die Teilbarkeit bereits durch die Einer entschieden.
Geht die vorliegende Zahl in 10 nicht ohne Rest auf, müssen wir weitergehen und untersuchen, ob sie die 100, die 1000, die 10000 teilt, und entsprechend sind immer mehr Stellen zur Entscheidung über die Teilbarkeit zu untersuchen. Es gibt natürlich auch Zahlen, die weder 10, noch 100, noch 1000, noch irgendeine größere Einheit des Dezimalsystems teilen.

Es ist sogar leicht einzusehen, dass die Mehrzahl der Zahlen so beschaffen ist. Aber auch für solche Zahlen geben diese Untersuchungen eine gewisse Gesetzmäßigkeit. Am einfachsten fällt diese im Falle der Teilbarkeit durch 9 aus:

$$10 = 9 + 1; 100 = 99 + 1; 1000 = 999 + 1; ...$$

9 kann also weder 10, noch 100, noch 1000 teilen. Versucht man nämlich, eine beliebige von diesen durch 9 zu dividieren, so bleibt 1 als Rest.
Aber eben, dass immer 1 als Rest bleibt, führt zu einer einfachen Teilbarkeitsregel: Dividieren wir 10 durch 9, so bleibt 1, dividieren wir 20, so bleibt 2, dividieren wir 30, so bleibt 3 als Rest.

Allgemein: Wenn Zehner durch 9 dividiert werden, bleibt so viel als Rest, wie Zehner dividiert wurden. Das Gleiche gilt für die Division von Hundertern durch 9. Wird 100 durch 9 dividiert, so bleibt 1, wenn 200 durch 9 dividiert wird, bleibt 2.
Es bleibt also auch bei der Division von Hundertern durch 9 stets so viel als Rest, wie Hunderter dividiert wurden. Ebenso ist es bei den Tausendern usf. Wenn wir also die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 zu beurteilen haben, dann ist es am zweckmäßigsten, diese Zahl in Einer, Zehner, Hunderter usw. zu zerlegen. Es ist z. B.

$$234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$$

Bei der Division durch 9 ergeben die 2 Hunderter als Rest 2, die 3 Zehner als Rest 3, die 4 Einer 4. Insgesamt bleibt also 2 + 3 + 4 als Rest. Es ist aber

$$2 + 3 + 4 = 9$$

und diese Summe ist durch 9 teilbar. Die Reste ergeben zusammen eine durch 9 teilbare Zahl, also ist auch 234 durch 9 teilbar.

Damit haben wir die gesuchte Regel: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffern zusammengerechnet eine durch 9 teilbare Zahl ergeben. Die Summe der Ziffern einer vielstelligen Zahl ist aber gewöhnlich viel kleiner als die Zahl selbst.

Darum lässt sich in der Regel mit einem Blick feststellen, ob sie durch 9 teilbar ist. Es sei z.B. die Zahl

$$2304576$$

zu untersuchen. Die Summe der Ziffern beträgt

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 27$$

Wer das Einmaleins kennt, der sieht sofort, dass 27 durch 9 teilbar ist. Dagegen ist

$$2304577$$

nicht durch 9 teilbar, da

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 7 = 28$$

nicht durch 9 teilbar ist.

In allem, was hier geschehen ist, sind wir um die eigentlichen Schwierigkeiten der Division herumgegangen. Bereits diese Umgehungen aber sind fruchtbar: Auf Schritt und Tritt stoßen wir dabei auf unerwartete Zusammenhänge.
Später werden wir es auch wagen, jener Division, die sich nicht ohne Rest durchführen lässt, in die Augen zu schauen. Dies wird uns dann den Ausblick zu den verwegensten Vorstellungen der Mathematik eröffnen.

1.4 Der Zauberlehrling

Der Begriff der Teilbarkeit birgt noch so manches Interessante, womit es sich lohnt zu spielen. Dazu gehört z.B. die Entdeckung, dass es befreundete Zahlen gibt.
Zwei Zahlen sind befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der einen die andere Zahl ergibt und umgekehrt. Die Zahl selbst wird nicht zu ihren echten Teilern gerechnet. (Die echten Teiler von 10 z.B. sind 1, 2 und 5.) Solche befreundete Zahlen sind z.B. 220 und 284, denn

$$220 = \begin{cases} 1 \cdot 220 \\ 2 \cdot 110 \\ 4 \cdot 55 \\ 5 \cdot 44 \\ 10 \cdot 22 \\ 11 \cdot 20 \end{cases} \quad \text{und} \quad 288 = \begin{cases} 1 \cdot 284 \\ 2 \cdot 142 \\ 4 \cdot 71 \end{cases}$$

die Summe der echten Teiler von 220 ist also:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

und die Summe der echten Teiler von 284 ist:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Es gibt sogar Zahlen, die der Summe ihrer eigenen echten Teiler gleich sind. Man nennt sie vollkommene Zahlen. 6 beispielsweise ist eine solche Zahl, da ihre echten Teiler 1, 2 und 3 sind und

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Die Alten schrieben diesen Zahlen gewisse magische Eigenschaften zu, und deshalb ging man auf die Suche nach vollkommenen Zahlen. Es wurden auch mehrere dieser Art gefunden. Von ihnen lässt sich 28 noch am leichtesten kontrollieren

$$28 = \begin{cases} 1 \cdot 28 \\ 2 \cdot 14 \\ 4 \cdot 7 \end{cases} \qquad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Die übrigen sind schon viel größer. Alle bekannten vollkommenen Zahlen sind gerade Zahlen. Es gibt sogar ein Rezept, nach dem man die geraden vollkommenen Zahlen bestimmen kann, doch wissen wir bis heute noch nicht, ob dieses Rezept beliebig viele vollkommene Zahlen liefert. Ungerade vollkommene Zahlen wurden bisher noch nicht gefunden; es ist eine offene Frage, ob es solche überhaupt gibt.

Worum handelt es sich hier eigentlich ?
Der Mensch hat die Reihe der natürlichen Zahlen für seine Zwecke entwickelt, sie ist seine Schöpfung und dient zum Zählen und zur Ausführung der Rechenoperationen, die aus dem Zählen abgeleitet sind. Hat er sie aber einmal geschaffen, so besitzt er keine Macht mehr über sie.

Die Reihe der natürlichen Zahlen ist da, sie hat eine selbständige Existenz erhalten, so dass man an ihr nichts mehr ändern kann. Sie folgt ihren eigenen Gesetzen und hat ihre charakteristischen Eigenschaften, die zum größten Teil den Menschen, als sie die Reihe der natürlichen Zahlen schufen, nicht einmal im Traume eingefallen sind.
Der Zauberlehrling steht wie geblendet vor den heraufbeschworenen Geistern. Der Mensch schafft eine neue Welt, aber dann wird er selbst von den geheimnisvollen, unerwarteten Gesetzmäßigkeiten dieser Welt ergriffen. Von nun an ist er kein Schöpfer mehr, sondern wird zum Forscher: Er fahndet nach den Zusammenhängen, nach den Geheimnissen der von ihm selbst heraufbeschworenen Welt.

Diese Forschung ist darum so verlockend, weil sie fast gar keine Ausrüstung verlangt, lediglich zwei neugierige Augen. Eine zehnjährige Schülerin in meiner Klasse kam einmal mit dem folgenden Problem zu mir:

"Es ist mir schon in der Elementarschule aufgefallen, dass ich bei der Addition der Zahlen bis zu einer ungeraden Zahl, z.B. bis 7, ebenso viel herausbekomme, als hätte ich mit dieser Zahl ihre "Mitte" multipliziert. Die Mitte von 7 z.B. ist 4 (unter den Zahlen von 1 bis 7 liegt 4 in der Mitte: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), und $7 \cdot 4 = 28$, während die Summe der Zahlen bis 7

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

ebenfalls 28 ergibt. Ich weiß, dass dies immer so ist, doch weiß ich nicht, warum".

Natürlich, das ist eine arithmetische Reihe, dachte ich mir. Wie aber soll ich das auf dieser Klassenstufe erklären?

Schließlich stellte ich der Klasse die Frage: "Suschen hat ein interessantes Problem!" Kaum war ich mit der Erläuterung der Frage zu Ende, da meldete sich das scharfsinnigste Mädchen der Klasse so lebhaft, dass sie fast aus der Bank fiel.

"Es wird Unsinn sein, Evchen; so rasch bist du doch wohl nicht dahintergekommen!" sagte ich.
Doch ja, sie wisse es. "Suschen hat $7 \cdot 4$ gesagt. Dies bedeutet

$$4+4+4+4+4+4+4$$

Das aber sagte Suschen statt

$$1+2+3+4+5+6+7$$

Sie sagte also 4 statt 1, das heißt, um 3 mehr; statt 7 hat sie jedoch auch 4 gesagt, das heißt, um 3 weniger, und so wird dieser Unterschied also ausgeglichen. Ebenso ist es richtig, dass 4 um 2 mehr ist als 2, aber auch um 2 weniger als 6; so wird auch das ausgeglichen.

Und gerade so steht es mit den Vierern, die sie statt 3 und 5 aufgezählt hat. Die beiden Summen sind also tatsächlich gleich."

Ich war gezwungen, Evchen Genugtuung zu leisten; ich hätte das nie so schön erklären können.

Solche unbefangenen kleinen Forscher machen doch merkwürdige Beobachtungen! "Das ist ebenso wie in einem Heft!" - rief Mariechen, eine andere kleine Schülerin.
"Wie meinst du das ?"
"In unserer Aufgabe wurde das erste Glied durch das letzte ausgeglichen, dann das zweite durch das vorletzte; in einem Heft hängen die Blätter auch so zusammen: Das erste mit dem letzten, das zweite mit dem vorletzten."

Diese kleinen Forscher wurden durch die reine Neugier geleitet; Gauß, der "princeps mathematicorum", soll als Schulkind aus Zweckmäßigkeitserwägungen hinter denselben Zusammenhang gekommen sein. Es wird folgendes darüber erzählt:

Als der Lehrer von Gauß einmal ein wenig Ruhe genießen wollte, stellte er der Klasse die langwierige Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er hatte aber keine Ruhe, denn nach einigen Augenblicken rief der kleine Gauß:

"Das Ergebnis ist 5050!"

Der Lehrer musste anerkennen, dass dies stimmt. Wie aber ist es gelungen, das Ergebnis so rasch auszurechnen ?
"Ich habe bemerkt, dass $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$ ist. Also treffen sich die jeweils vom Anfang und vom Ende der Zahlenreihe genommenen Summanden nach 50 solchen Additionen in der Mitte, und $50 \cdot 101$ ergibt 5050."

Der kleine Gauß hat die Zahlen bis zu einer geraden Zahl addiert, und er hat dabei eine ebenso geschickte Methode zur Beschleunigung der Addition gefunden wie mein Suschen, als sie bis zu einer ungeraden Zahl vorwärtsschritt.

Denkt man etwas kompliziert, so kann man beide Verfahren vereinigen. Es ist ein bekannter Scherz, dass jemand einen Blick auf eine weidende Herde wirft und dann mit Sicherheit behauptet: "Es sind 357 Lämmer in der Herde."

Auf die Frage, wie er das zählen konnte, antwortet er:
"Sehr einfach: Ich habe die Beine gezählt und das Ergebnis durch 4 dividiert."

Der Mathematiker verfährt manchmal tatsächlich so, Sind z.B. alle Zahlen bis zu einer bestimmten Zahl zu addieren, so kann man ohne Mühe das Doppelte der gesuchten Summe berechnen, indem man zunächst die erste und die letzte Zahl addiert, dann die zweite und die vorletzte usf. Wir schreiben zu diesem Zweck die zu addierenden Zahlen zweimal in Reihen untereinander, und zwar das zweite Mal in umgekehrter Reihenfolge, z. B.

$$\begin{matrix} 1+2+3+4 \\ 4+3+2+1 \end{matrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{matrix} 1+2+3+4+5 \\ 5+4+3+2+1 \end{matrix}$$

So stehen gerade jene Glieder untereinander, welche wir zusammenrechnen wollen. Addieren wir die untereinanderstehenden Zahlen, so erhalten wir:

$$5+5+5+5 = 4 \cdot 5 = 20 \qquad \text{oder} \qquad 6+6+6+6+6 = 5 \cdot 6 = 30$$

Dies ist das Doppelte der gesuchten Summen. Die Summen selbst erhalten wir nach der Division durch 2. Das Ergebnis ist also 10 bzw. 15, und in der Tat ist

$$1+2+3+4 = 10 \qquad \text{und} \qquad 1+2+3+4+5 = 15$$

Wie wir sehen, gilt die Regel für beide Fälle: Die Summe des ersten und des letzten Gliedes ist mit der Anzahl der Glieder zu multiplizieren und das Ergebnis zu halbieren. Diese Regel enthält sowohl das Ergebnis von Suschen als auch das von Gauß.
Im Falle $1+2+3+4+5+6+7$ ist die Summe des ersten und des letzten Gliedes 8; diese Summe mit der Anzahl der Glieder multipliziert ergibt $7 \cdot 8 = 56$, und die Hälfte davon ist 28.
In der Aufgabe $1+2+...+100$ ist die Summe des ersten und des letzten Gliedes 101; dies mit der Anzahl der Glieder multipliziert ergibt $100 \cdot 101 = 10100$, halbiert 5050.

Es ist klar - meine Klasse hat es sofort bemerkt - dass sich durch diese Regel nicht nur die Summe unmittelbar aufeinanderfolgender Zahlen berechnen lässt, sondern ganz allgemein die Summe beliebiger Zahlen, die in gleichem Abstand aufeinanderfolgen, z.B. $5+7+9+11+13$ (der Anfang ist beliebig), wo jedes folgende Glied um 2 größer ist, als das vorhergehende, oder

$$10+15+20+25+30+35$$

in der die Differenz von zwei benachbarten Gliedern immer 5 ist.
Auch hier ist ja die Summe aus dem ersten und dem letzten Glied ebenso groß wie die Summe aus dem zweiten und dem vorletzten Glied, usf. Der Leser möge probieren: Im ersten Beispiel ist

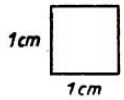
$$5+13 = 18 \qquad , \qquad 7+11 = 18$$

und $9+9$, das beim Berechnen der doppelten Summe in der Mitte auftritt, ist ebenfalls 18. Im zweiten Beispiel ist

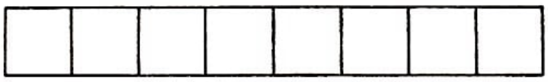
$$10+35=45, \qquad 15+30=45, \qquad 20+25=45$$

Solche äquidistanten Zahlenfolgen werden von den Mathematikern arithmetische Reihen genannt.

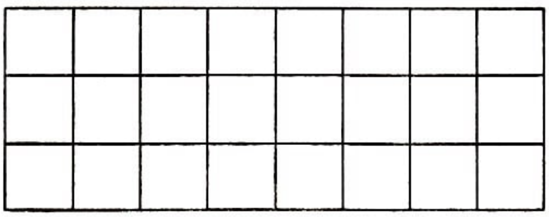
Es ist interessant, dass der gleiche Gedanke in verschiedenen Gebieten der Mathematik auftaucht. Derselbe Kunstgriff, mit dem wir die arithmetischen Reihen summierten, hilft uns z.B. auch in der Flächenberechnung.
Der Flächeninhalt des Rechteckes ist leicht zu berechnen: Wir wählen ein kleines Quadrat als Einheit und prüfen, wieviel solche Einheiten zur Bedeckung des Rechtecks notwendig sind. Die Einheit sei ein Quadratzentimeter, d.h., ein kleines Quadrat, bei dem sowohl die Länge als auch die Breite 1 cm beträgt:



Reihen wir 8 solche kleine Quadrate aneinander,

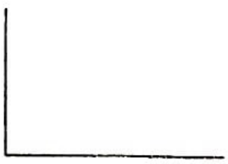


so haben wir schon ein Rechteck; um ein weniger flaches zu erhalten, schichten wir 3 solche Reihen aufeinander:



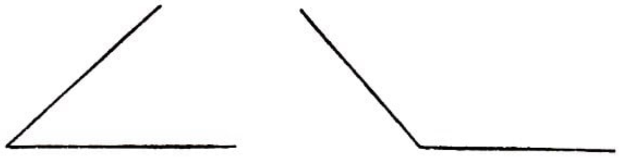
Das so erhaltene Rechteck besteht aus $3 \cdot 8 = 24$ kleinen Quadraten. Geht man umgekehrt von einem Rechteck aus, dessen Länge 8 cm und dessen Breite 3 cm beträgt, so gehen $3 \cdot 8 = 24$ Quadratzentimeter hinein. Im allgemeinen erhält man also den Flächeninhalt eines Rechtecks. indem man die Längen zweier benachbarter Seiten miteinander multipliziert.[3]

Wir wollen uns vom Rechteck noch merken, dass seine benachbarten Seiten einen rechten Winkel bilden (man sagt auch: Die Seiten stehen senkrecht aufeinander). Der rechte Winkel ist eine richtige Ecke, worauf z.B. beim Hausbau sehr geachtet wird:



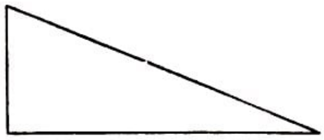
[3]Auf den Fall, dass 1 cm in den Seiten des Rechtecks nicht aufgeht, komme ich noch zurück.

Der eine Schenkel beugt sich nicht gegen den anderen, er neigt sich aber auch nicht von ihm ab, wie das bei spitzen bzw. stumpfen Winkeln der Fall ist!

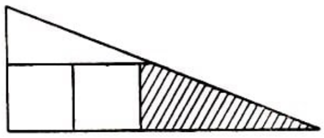


(Mauern, die solche Ecken bilden, können leicht einstürzen.) Beim rechten Winkel dagegen erhalten die Schenkel in rechter Disziplin das Gleichgewicht.

In der durch drei Geraden begrenzten Figur, im Dreieck, kann auch ein rechter Winkel vorkommen, aber nur einer. Bitte zu probieren: Wie man sich auch bemüht, die beiden anderen Winkel werden spitz.

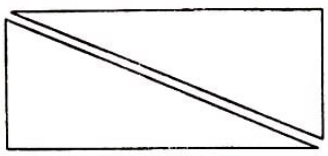


Die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt man Hypotenuse.
Infolge seiner spitzen Winkel nun lässt sich ein solches rechtwinkliges Dreieck nicht mit unseren quadratförmigen Flächeneinheiten vollkommen bedecken:



Schon in der unteren Reihe bleibt die schraffierte Ecke unbedeckt. Hier ist also die Berechnung des Flächeninhaltes ein Problem.

Es ist aber ein sehr leicht lösbares Problem: Können wir den Flächeninhalt eines Dreiecks nicht berechnen, so berechnen wir den Flächeninhalt von zweien. Legen wir zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke so aneinander, dass ihre Hypotenusen aufeinanderliegen, so können wir ein Rechteck erhalten:



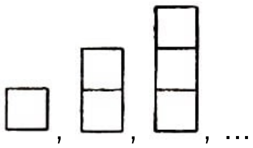
Den Flächeninhalt dieser Figur können wir schon berechnen: Wir haben nur die beiden benachbarten Seiten des Rechtecks miteinander zu multiplizieren. Dabei sind die benachbarten Seiten eben die Katheten unseres Dreiecks.
So können wir den doppelten Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen; den Flächeninhalt des einen Dreiecks erhalten wir dann, indem wir das Resultat durch 2 dividieren: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks lässt sich also berechnen, indem man die

Länge der Katheten miteinander multipliziert und das Ergebnis dann halbiert.

Die Analogie mit der Summierung der Glieder einer arithmetischen Reihe wird völlig deutlich, wenn wir die Ausdrucksweise Euklids anwenden, der vor 2000 Jahren der Welt ein bewundernswert vollständiges mathematisches Werk geschenkt hat. Bei Euklid wird auch alles Arithmetische in einem geometrischen Gewand dargestellt. Bei ihm könnten statt

$$1, 2, 3, ...$$

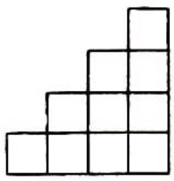
der Reihe nach die Figuren



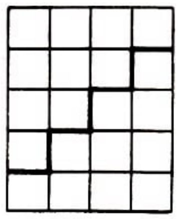
stehen. So wäre bei ihm die Darstellung der Summe

$$1 + 2 + 3 + 4$$

ein solches "Treppendreieck":



Den Kunstgriff, die Summe noch einmal umgekehrt darunter - hier eher darüber - zu schreiben, müsste man hier durchführen, indem man noch ein ebensolches Treppendreieck über das vorherige baut:

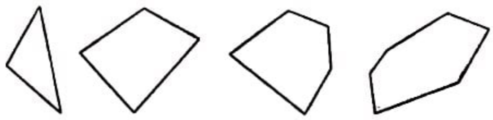


Auf diese Weise kommt ja 4 über 1, 3 über 2, 2 über 3 und 1 über 4: Insgesamt liegen immer jeweils 5 Quadrate übereinander, zusammen $4 \cdot 5 = 20$; in Übereinstimmung damit, dass das so entstandene Rechteck 4 Einheiten lang und 5 Einheiten breit ist, also sein Flächeninhalt $4 \cdot 5$ Flächeneinheiten beträgt.
Das ist das Doppelte der gesuchten Summe; die Summe selbst ist also halb so groß, wie ja auch die Fläche des einen Treppendreiecks der halben Rechtecksfläche gleich ist.

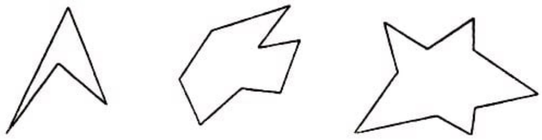
Hier ist wirklich klar ersichtlich, dass wir denselben Gedanken einmal in arithmetischer, das andere Mal in geometrischer Form ausgedrückt haben. Wir werden sehen, dass sich diese Idee noch vielfach variieren lässt.

1.5 Variationen eines Grundthemas

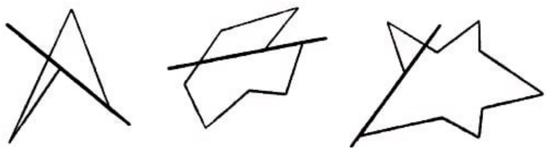
Wann kommt es denn vor, dass die Zahlen von 1 an zu summieren sind? Auch das folgende, scheinbar ganz fernliegende Problem führt dahin.
Dreiecke und Vierecke haben wir bereits betrachtet. Allgemein werden die geschlossenen Figuren mit geradliniger Begrenzung Vielecke genannt:



Die hier gezeichneten sind sogenannte konvexe Vielecke: Sie sind nirgends eingeknickt, wie etwa die folgenden:

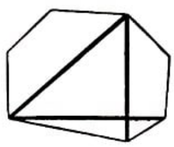


Exakter ausgedrückt unterscheiden sich die unteren Vielecke von den oberen dadurch, dass durch die Verlängerung einer ihrer Seiten das Vieleck zerschnitten wird:

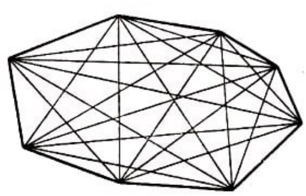


Bitte zu probieren: Mit den umstehenden oberen lässt sich das nicht machen. Dieser Unterschied musste zunächst erläutert werden. Von nun an wird nur von konvexen Vielecken die Rede sein. (Die gleiche Unterscheidung wird auch bei Körpern getroffen.)

Die Verbindungsstrecke zweier nichtbenachbarter Ecken nennt man Diagonale (benachbarte Ecken werden nämlich nicht durch eine Diagonale, sondern durch eine Seite verbunden). In das folgende Vieleck will ich nun einige Diagonalen einzeichnen:

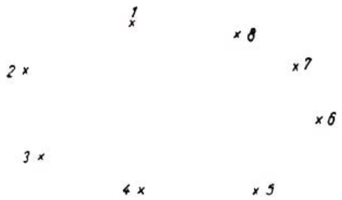


Das Problem lautet nun: Wieviele Diagonalen lassen sich in ein gegebenes Vieleck, sagen wir in ein Achteck, einzeichnen?
Selbst wenn ich sie alle in die Figur einzeichne, ist es nicht leicht, sie zu zählen, so dicht wird die Figur von ihnen bedeckt:

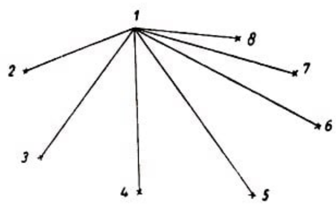


Die Aufgabe wird leichter, wenn wir zwischen benachbarten und nichtbenachbarten Ecken keinen Unterschied machen, wenn wir also einstweilen auch die Seiten hinzuzählen. Wir wissen ja ohnehin, dass es acht Seiten gibt, die dann am Ende der Rechnung vom Resultat abzuziehen sind.

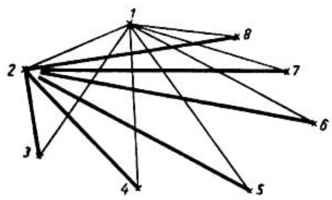
In dieser Form lautet nun die Aufgabe: Es sind die 8 Ecken eines Achtecks gegeben:



Wieviele Möglichkeiten gibt es nun, diese Punkte miteinander zu verbinden?
Zur Lösung bieten sich zwei Wege. Bei der ersten Lösungsart verbindet man zunächst Punkt 1 mit den übrigen sieben; so erhält man bereits 7 Strecken:



Dann verbindet man den Punkt 2 mit den übrigen Punkten, den ersten ausgenommen, da er mit Punkt 2 schon verbunden wurde: so kommen weitere 6 zu den bisherigen 7 Strecken:



Verbinden wir nun den Punkt 3 mit den übrigen - die bereits erledigten beiden Punkte ausgenommen -, so entstehen 5 neue Strecken. Ebenso erhalten wir beim Verbinden des Punktes 4 mit den restlichen 4 Punkten 4 neue Strecken.
Der Punkt 5 liefert 3, der Punkt 6 nur 2 und der Punkt 7 nur noch eine neue Strecke. Punkt 8 wurde bereits mit allen anderen Punkten verbunden; daher ergibt dieser keine neue Strecke mehr. Insgesamt erhalten wir somit

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

oder in umgekehrter Reihenfolge

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Strecken.
Die andere Methode zur Abzählung dieser Strecken besteht darin, nachzuschauen, wieviel Linien sich von je einer Ecke aus ziehen lassen, unabhängig von den übrigen Ecken.

Es sind selbstverständlich 7, da sich ja alle Ecken mit den übrigen sieben verbinden lassen.
Nun könnte man irrtümlich folgern: Lassen sich aus einer Ecke 7 Verbindungslinien ziehen, so erhalten wir bei 8 Ecken insgesamt $8 \cdot 7$ solche Linien. Das stimmt aber deshalb nicht, weil jede Strecke zwei Ecken verbindet.

So haben wir z.B. die Ecken 1 und 6 zweimal verbunden: Einmal bei der Abzählung jener Linien, die von Ecke 1, und nochmals bei der Abzählung der Linien, die von Ecke 6 ausgehen. Folglich bestand unser Fehler lediglich darin, dass wir jede Strecke doppelt gezählt haben. Das richtige Ergebnis wird die Hälfte von $8 \cdot 7 = 56$, d.h. 28 sein.
Beide Wege müssen zu demselben Resultat führen,

$$1+2+3+4+5+6+7$$

ist also der Hälfte von $8 \cdot 7$ gleich. Dies ist aber wiederum das Ergebnis meiner Schülerin Suschen.

Das Thema lässt sich aber noch weiter variieren. Man kann die hier aufgeworfene Frage auch anders formulieren. Da jede Strecke in unserem Achteck zwei Ecken verbindet, lautet die Frage: Wieviel Möglichkeiten gibt es, um aus insgesamt 8 Ecken 2 auszuwählen?

Dabei ist es aber nicht unbedingt erforderlich, dass es sich gerade um Ecken handelt. Man könnte z.B. auch folgende Frage aufwerfen: Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus einem Beutel mit 8 verschiedenfarbigen Kugeln 2 Kugeln herauszunehmen? Oder:
Welche Arten gibt es, von insgesamt 8 Kindern, die zu Paaren aufgestellt werden sollen, das erste Paar auszuwählen? Alle diese Fragen werden vom Mathematiker allgemein so ausgedrückt:

Wieviele zweigliedrige Kombinationen lassen sich aus 8 Elementen bilden? Werden die Elemente mit den Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 8 bezeichnet, so sind ihre zweigliedrigen Kombinationen (einfacher: Paare):

12	23	34	45	56	67	78
13	24	35	46	57	68	
14	25	36	47	58		
15	26	37	48			
16	27	38				
17	28					
18						

Aus dieser Zusammenstellung ist sehr schön ersichtlich, dass ihre Anzahl, von rechts nach links fortschreitend,

$$1+2+3+4+5+6+7$$

beträgt. Andererseits kann man auch hier davon ausgehen, dass sich jedes Element mit den übrigen sieben paaren lässt. Die 8 Elemente würden dann $8 \cdot 7$ Paare liefern. Dabei hätten wir aber jedes Paar zweimal verbunden, da wir sowohl die Paarungen seines ersten als auch die seines zweiten Gliedes abgezählt haben.

Das richtige Ergebnis ist also wieder die Hälfte von $8 \cdot 7$.

Von so verschiedenen Dingen ausgehend; münden die Wege doch alle in dasselbe Endergebnis. Ich kann es nicht übers Herz bringen, dies nicht in die Gestalt einer Formel zu kleiden. Dabei habe ich nur folgendes vorauszuschicken:

Ein Klammerzeichen bedeutet in der Mathematik nicht, dass irgendetwas nebenbei bemerkt wird. Der Mathematiker setzt vielmehr alles das in Klammern, dessen Zusammengehörigkeit hervorgehoben werden soll. So bedeutet z.B. $(2+3) \cdot 6$, dass das Resultat der Addition $2+3$, d.h. 5, mit 6 zu multiplizieren ist, während ohne Klammern $2+3 \cdot 6$ zum Addieren von 2 mit dem Resultat der Multiplikation $3 \cdot 6$ auffordert (es besteht ein Übereinkommen, dass die Multiplikation "stärker bindet" als die Addition. Wir brauchen daher nicht $2+(3 \cdot 6)$ zu schreiben). Jedermann weiß, dass sich die Hälfte von 4, 6 und 10 der Reihe nach als $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}$ und $\frac{10}{2}$ schreiben lässt; man kann eine Division auch in der Form eines solchen "Bruches" ausdrücken. -

Bezeichnet man nun die Zahl, bis zu welcher die Zahlen von 1 an zu summieren sind, mit n, so ist die Summe aus dem ersten und dem letzten Glied $1+n$. Diese Summe ist mit der Anzahl der Glieder, d.h. mit n zu multiplizieren und das Ganze durch 2 zu dividieren. So lassen sich nun sämtliche Abwandlungen unseres Grundthemas durch folgende Formel ausdrücken:

$$1+2+3+...+n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

Die Mathematik ist eigentlich eine Sprache; eine seltsame Sprache, die ausschließlich Symbole gebraucht. Auch die oben angeführte Formel ist nur ein Symbol und hat an sich keine Bedeutung.
Jedermann kann sein eigenes Erlebnis in diese Formel hineinlegen. Für den einen kann sie die Abzählung der Diagonalen eines Vielecks bedeuten, für den anderen die Möglichkeiten der Auswahl eines führenden Paares aus seinen Schülern. Die Aufzeichnung der Formel ist der Ausdruck unserer Freude daran, dass sich alle Aufgaben dieser Art mit Hilfe eines einzigen Gedankens lösen lassen.

Nachschrift über die Geometrie ohne Maß

Inzwischen sind zwei neue Motive ertönt, ein geometrisches und ein arithmetisches. Zunächst möchte ich das geometrische ein Stück verfolgen.

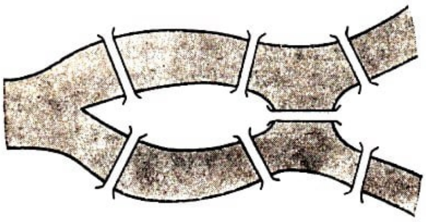
Schauen wir uns noch einmal die Abbildung an, die das Achteck mit all seinen Diagonalen darstellt. Sie ist völlig unübersichtlich, weil die Diagonalen einander kreuz und quer schneiden; es wimmelt ja darin von Schnittpunkten.

Ein Glück, dass das Vieleck konvex ist, so dass seine Ecken alle außen liegen und deshalb wenigstens diese mit den Schnittpunkten nicht verwechselt werden können. Sehr viel größer würde die Übersicht sein, wenn die Diagonalen aus Gummibändern wären, die an den Ecken befestigt sind, so dass man sie in den Raum hinausziehen könnte.

Würde dann jede Diagonale von einem Menschen ergriffen, dann könnte die zweite etwas höher gezogen werden als die erste, die dritte noch etwas höher usf., so dass sie einander nicht schneiden. Man könnte sie dann zugleich besser zählen, denn ihre Anzahl würde sich durch die Dehnung nicht ändern.

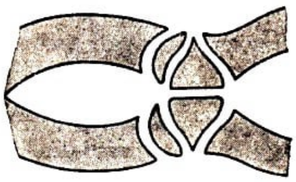
Es gibt nun einen ganz besonderen Zweig der Geometrie - Topologie genannt -, der sich mit solchen Eigenschaften der Figuren befasst, die sich nicht ändern, wenn die Figuren aus Gummi angefertigt sind und nach Belieben gedehnt oder zusammengedrückt werden.
Es ist sonderbar, dass auch diese Wissenschaft zur Geometrie gehört, obwohl hier vom Messen gar keine Rede sein kann, denn beim Dehnen ändern sich ja die Längen der Strecken und die Größen der Winkel.

Von unserem Gesichtspunkt aus ist das Interessante an diesen Untersuchungen, dass sie neu sind: Wir kennen ihren Ursprung: vor unseren Augen hat es sich abgespielt, wie ein Zweig der Mathematik aus einem Spiel entsteht.
Dieses Spiel hatte die Gestalt eines Rätsels, das sich auf die Brücken von Königsberg, des jetzigen Kaliningrad, bezog. Die beiden Inseln des Pregelflusses bei Kaliningrad sind miteinander und mit den Ufern durch sieben Brücken verbunden:

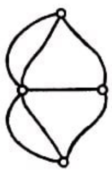


In dem Rätsel wird nun gefragt, ob sich ein Spaziergang - mit beliebigem Ausgangspunkt - unternehmen lässt, bei dem man alle sieben Brücken, doch jede nur einmal, überschreitet und am Schluss zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Bitte zu probieren. Man wird bald einsehen, dass sich die Aufgabe gar nicht ändern würde, wenn die Brücken, die auf dasselbe Ufer bzw. auf dieselbe Insel führen, in den gleichen Punkten der betreffenden Landstücke zusammenträfen (dies würde nur die Durchwanderung des Landes überflüssig machen), wenn also die Landkarte folgendermaßen aussähe



Es ist zwar Unsinn, dass von demselben Punkt der linken Insel zwei Brücken zu demselben Punkt eines Ufers führen, aber wir können ja annehmen, dass die eine für Fußgänger und die andere für Wagen bestimmt ist. Diese Überlegung ermöglicht es, eine einfachere, schematische Zeichnung anzufertigen:



Wir können unsere Frage dann auch so stellen: Kann man diese Figur in einem einzigen Zuge zeichnen, ohne den Bleistift zu heben (der Spaziergänger kann sich ja auch nicht in die Luft erheben) ?
Dabei darf kein einziges Linienstück doppelt gezeichnet werden, und der Bleistift muss an den Ausgangspunkt zurückkehren. Diese Frage klingt bereits nicht mehr unbekannt; man pflegt sie auch in Bezug auf gewisse Briefumschläge aufzuwerfen:

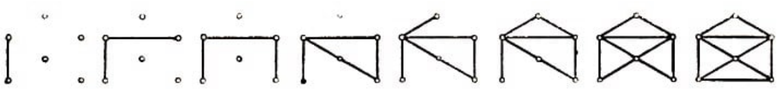
Es leuchtet ein, dass diese Fragen in den Bereich der Topologie gehören. Die Antwort auf die Frage, ob sich eine solche Figur in einem einzigen Zuge zeichnen lässt, ändert sich auch dann nicht, wenn wir uns die Figur aus Gummi hergestellt denken, so dass sie sich nach Belieben dehnen, drücken, deformieren lässt; wir dürfen sie nur nicht zerreißen oder die einzelnen Stücke zusammenkleben.

Der große Mathematiker Euler gab eine allgemeingültige Antwort auf derartige Fragen. Lässt sich eine solche Figur durch einen einzigen in sich zurückkehrenden Zug zeichnen, so muss der Bleistift erst vom Ausgangspunkt weg und zum Schluss wieder dahin geführt werden; sooft er während des Linienzuges in irgendeine Ecke gelangt, muss er aus ihr auch wieder heraustreten, damit er weitergehen kann.

So entspricht jeder hinlaufenden Kante eine weglaufende Kante, und es müssen sich daher in jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten treffen. Man kann beweisen, dass diese Bedingung auch genügend ist: Wenn sich bei einer Figur in jeder Ecke Kanten in gerader Anzahl treffen, so lässt sie sich auf jeden Fall durch einen einzigen in sich zurückkehrenden Linienzug zeichnen.

Der Spaziergang in Kaliningrad ist also unmöglich: Jede Ecke schließt die Lösung aus, denn es treffen sich ja in der linken Ecke 5 und in den übrigen drei Ecken je 3 Kanten, also immer eine ungerade Anzahl.

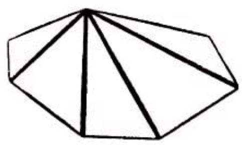
Den ersten Briefumschlag dagegen kann man zeichnen, wenn man nicht darauf besteht, dass der Bleistift in den Ausgangspunkt zurückkehrt. In seinen oberen Ecken treffen sich je 4, in der obersten 2 und in der Mitte ebenfalls 4 Kanten.
Die Anzahl dieser Kanten ist also gerade, und nur die beiden unteren Ecken könnten die Sache verderben, da in diesen je 3 Kanten zusammenlaufen. Wird aber erlaubt, dass der Zug von einer der unteren Ecken ausgeht und in die andere zurückkehrt, dann lässt sich der Umschlag in folgender Reihenfolge dennoch zeichnen:



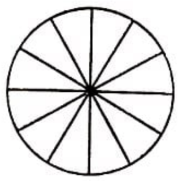
Der zweite Umschlag ist wieder ein hoffnungsloser Fall, denn er besitzt mehr als zwei widerspenstige Ecken: In der obersten und der mittleren Ecke treffen sich zwar Kanten von gerader Anzahl, in den übrigen vier aber je 3 Kanten.

Das ist jenes Spiel, aus dem die Topologie entstanden ist. Man darf aber nicht glauben, dass sie auf der spielerischen Stufe verblieben ist: Sie entwickelte sich zu einer ernsten Wissenschaft, aus der auch andere Wissenschaften reichlich schöpfen, z.B. die Physik, wenn sie über Stromgabelungen, und die Chemie, wenn sie über Molekularmodelle spricht.
Im allgemeinen stellen sich immer topologische Betrachtungen ein, wenn man sich von der Struktur eines Gegenstandes eine Vorstellung machen will, ohne sich um seine Maße zu kümmern.

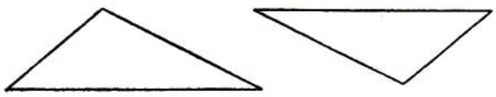
Es lohnt sich, ein Weilchen darüber nachzudenken, welche geometrischen Begriffe in der Topologie verlorengehen. Solche Begriffe sind z. B. die Kongruenz und die Ähnlichkeit. Die Kongruenz und die Ähnlichkeit von Dreiecken spielen eine besonders wichtige Rolle in der Geometrie, denn andere ebene Figuren lassen sich ja in Dreiecke zerlegen, z. B. die Vielecke durch Diagonalen:



Sogar den Kreis kann man mit einer gewissen Nachsicht (darauf komme ich noch zurück) als eine aus Dreiecken zusammengesetzte Figur betrachten, wenn man seine Radien dicht genug einzeichnet:



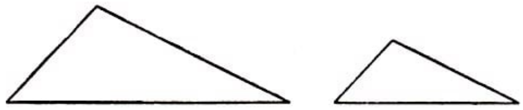
Jedes Bogenstück scheint dann fast gerade zu sein. (Ich weiß, dass dieses gewisse "fast" eine unangenehme Schulerinnerung ist, mit der ein Gefühl der Unsicherheit verbunden ist. Ich verspreche aber, später seinen exakten Sinn anzugeben.)
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn man sie so aufeinanderlegen kann, dass sie sich decken. Die beiden folgenden Dreiecke z. B. sind so beschaffen:



Wir können uns davon überzeugen, wenn wir sie aus Papier ausschneiden und in die gleiche Lage drehen. Aufeinandergelegt, decken sich alle ihre 6 Bestandteile (3 Seiten und 3 Winkel). Für die Kongruenz kann jedoch bereits die Übereinstimmung von je drei Bestandteilen genügen, z.B. von je zwei Seiten der Dreiecke und den dazwischenliegenden Winkeln:

Denn weiß ich nur, dass die hier stark ausgezogenen Bestimmungsstücke übereinstimmen, und lege ich die gleichen Winkel aufeinander, so fallen die entsprechenden Endpunkte der einschließenden Seiten ebenfalls aufeinander.
Die dritte Seite des oberen Dreiecks verläuft zwischen diesen beiden Punkten, und ihr bleibt darum nichts anderes übrig, als samt den anliegenden Winkeln auf die dritte Seite des unteren Dreiecks zu fallen.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwar ihre Form, doch nicht unbedingt ihre Größe gleich ist: Das eine kann das verkleinerte Abbild des anderen Dreiecks sein:

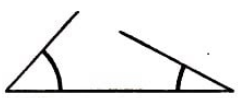


Man kann sich etwa vorstellen, dass das große Dreieck photographiert wird, wobei der Photoapparat ein verkleinertes Bild liefert. Wir erkennen, dass sich eine Seite des kleinen Dreiecks beliebig groß wählen lässt; wir können ja annehmen, dass unser Apparat zu beliebigen Verkleinerungen fähig ist.
Die Hauptsache ist, dass er das Bild nicht verzerrt, sondern die beiden anderen Seiten in dem gleichen Maß verkleinert und ihre Neigungen zueinander unverändert lässt. Die Winkel verändern sich demnach nicht.

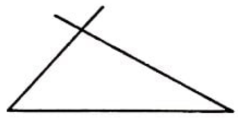
Man sieht also, dass alle Seiten ähnlicher Dreiecke in demselben Maße verkleinert oder vergrößert (kurz ausgedrückt, proportional) sind und dass ihre Winkel gleich sind.
Dazu genügt wiederum bereits, dass zwei einander entsprechende Winkel gleich sind. Wollen wir nämlich zu einem gegebenen Dreieck

ein ähnliches zeichnen, so können wir eine Seite des neuen Dreiecks, z. B. die untere, nach Belieben kleiner oder größer annehmen:

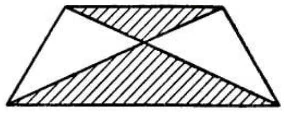
An diese haben wir dann die beiden unteren Winkel des gegebenen Dreiecks anzulegen:



Über weitere Bestandteile können wir nicht mehr frei verfügen; die genügend verlängerten freien Schenkel der beiden Winkel werden das gesuchte Dreieck einschließen,

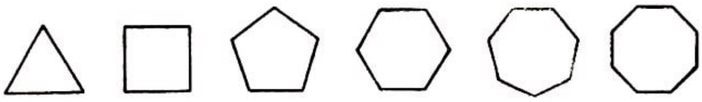


und so kann nur dieses das gesuchte Dreieck sein. Die Ähnlichkeit wird also tatsächlich durch die Übereinstimmung je zweier Winkel entschieden.
In der Geometrie begegnen uns auf Schritt und Tritt kongruente und ähnliche Figuren. Im folgenden sogenannten gleichschenkligen Trapez z.B. sind die weißen Dreiecke kongruent, die schraffierten ähnlich.



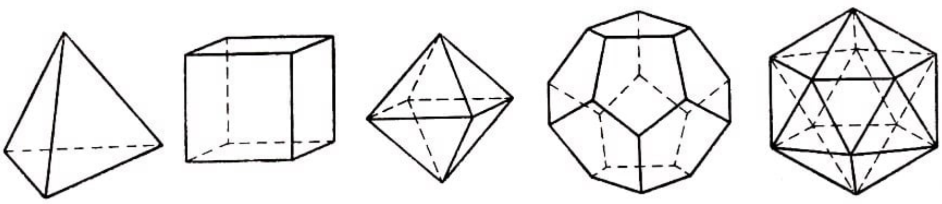
Nun: In der Topologie kann von Kongruenz und Ähnlichkeit nicht mehr gesprochen werden; das Dehnen und Drücken verändert sowohl die Größe als auch die Form der Figuren. Ihre Geraden können sich dabei auch krümmen, ja sogar aus der Ebene heraustreten.

Es ist interessant, dass die Topologie sich trotzdem dazu eignet, z.B. die Frage: Wie viele regelmäßige Körper gibt es? zu entscheiden, obwohl die "Regelmäßigkeit" eines Körpers in engstem Zusammenhang mit der Kongruenz und mit dem Messen allgemein steht. Regelmäßig nennt man nämlich diejenigen konvexen Körper, die ausschließlich von gleichseitigen und gleichwinkligen ebenen Figuren



begrenzt sind; diese sind ihrerseits kongruent, und es treffen sich in allen Ecken des regelmäßigen Körpers gleichviele von ihnen.
Die Topologie löst diese Frage, indem sie von den Eigenschaften der regelmäßigen Körper nur berücksichtigt, dass alle ihre Flächen durch gleich viele Seiten begrenzt sind und in allen Ecken gleich viele Kanten zusammenlaufen. Diese Eigenschaften haben aber mit Größe oder Form des Körpers schon nichts mehr zu tun.

Es gelingt nun, mit den Mitteln der Topologie zu beweisen, dass bereits diese wenigen Bedingungen lediglich von 5 Körperarten erfüllt werden können. Dass 5 solche regelmäßige Körper auch tatsächlich existieren, das wird schon von der messenden Geometrie bewiesen. Drei von ihnen werden durch Dreiecke begrenzt, der allgemein bekannte Würfel durch Vierecke und einer durch Fünfecke:



Das ist eine ziemlich überraschende Entdeckung, da in der Ebene nichts die Bildung von regelmäßigen Vielecken mit beliebig großer Seitenzahl hindert. Ihre vorgezeichnete Reihe ließe sich beliebig weit fortsetzen. Unsere Vorstellungen aus der Ebene lassen sich also nicht ohne weiteres auf den Raum übertragen: Im Raum ist so manches anders.

Es lohnt sich, darüber noch ein wenig nachzudenken. Wir haben natürlich erwartet, dass uns im Raum neue Erscheinungen begegnen werden, denn dort ist ja die Bewegung viel freier als in der Ebene. Gerade deshalb haben wir angenommen, dass hier mehr Möglichkeiten bestehen als in der Ebene, z.B. viel mannigfaltigere Arten von regelmäßigen Körpern.
Doch siehe da, die größeren Möglichkeiten bedeuten für manches auch härtere Bedingungen.

Die Freiheit ist eben auch im Vorschreiben der Bedingungen größer. Während in den Ecken unserer ebenen Figuren stets zwei Kanten aufeinander treffen, können in der Ecke eines Körpers drei oder beliebig mehr Kanten und zugleich auch beliebig viele Flächen zusammenstoßen. Es können sich sogar auch beispielsweise 30 Kanten in der einen und 3 Kanten in einer anderen Ecke treffen, und während eine Fläche ein Dreieck ist, kann eine andere ein Dreißigeck sein.
Dass ein Körper sich dieser reichen Möglichkeiten nicht bedienen darf, dass ihm hierin nur eine einzige Wahl bleibt, sich nämlich mit gleichviel Kanten in allen Ecken und gleichviel Kanten um sämtliche Flächen herum zu begnügen, das ist eine sehr starke Einschränkung. Insgesamt 5 Körper können sie ertragen. -

Die Topologie ist mir sogar eingefallen, als ich mir überlegte, wie man $1+2+3+...+n$ geschickt summieren könnte. Dies zeugt ebenfalls davon, dass die Mathematik ein organisches Ganzes ist. Wo wir sie auch antasten, da drängen sich die damit zusammenhängenden Gedanken aus allen anderen Gebieten der Mathematik auf.

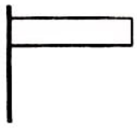
1.6 Wir machen Versuche mit sämtlichen Möglichkeiten

Vom Lehrer wird die Frage vielleicht gar nicht aufgeworfen, auf wieviel verschiedene Arten er seine Klasse zu Paaren aufstellen kann. Er trachtet nur danach, unter Berücksichtigung der Freundschaften und Feindschaften zwischen den Schülern, die Aufstellung zu Paaren im großen und ganzen richtig vorzunehmen.
Der kleine Forscher jedoch, der noch voll frischer Neugierde ist, will Versuche mit sämtlichen Möglichkeiten machen.

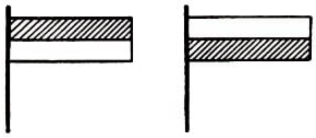
Als bei meinen zehnjährigen Schülerinnen davon die Rede war, dass man die Multiplikation mit 357 sowohl bei den Einern als auch bei den Hundertern beginnen kann, wurde sofort die Frage an mich gestellt:
Könnte man nicht auch mit den Zehnern beginnen? Auf die Antwort, dass auch dies möglich sei - man habe dabei nur scharf darauf zu achten, wohin die Teilprodukte geschrieben werden -, wollten die Kleinen sofort wissen, wieviele Möglichkeiten es gibt, eine angegebene Multiplikation auszuführen.

So wurde ich gezwungen, einen kleinen Exkurs in das Gebiet der Kombinationslehre zu unternehmen (denn so heißt der Zweig der Mathematik, der sich mit der Anzahl der möglichen Anordnungen befasst).

Es gibt wohl kein Kind, das nicht gern erfahren würde, wieviel verschiedene Fahnen sich aus 3 Farben anfertigen lassen. Aus einer Farbe kann man natürlich nur eine Fahne machen:



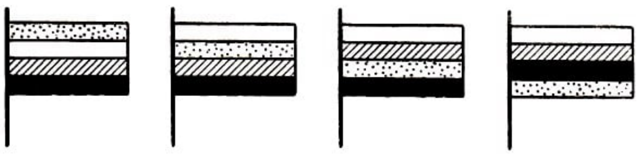
Ein zweiter bunter Streifen lässt sich auf zweierlei Art hinzunehmen, wenn man jede Farbe nur einmal verwenden will. Wir setzen ihn entweder darüber oder darunter an:



Wie kann man nun einen dritten Farbstreifen zu diesen hinzufügen? Wir setzen ihn entweder oben oder unten oder auch zwischen die beiden ersten Farbstreifen. So entstehen aus der linken zweifarbigen Fahne 3 neue dreifarbige Fahnen:

Ebenso gewinnen wir aus der rechten 3 neue Fahnen:

Aus drei Farben lassen sich also insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Fahnen herstellen. Von diesen können wir auf ähnliche Weise zu vierfarbigen Fahnen übergehen. Die vierte Farbe lässt sich in jeder der dreifarbigen Fahnen über die erste, zwischen die erste und die zweite, zwischen die zweite und die dritte Farbe und schließlich unter die dritte Farbe setzen. So entstehen aus jeder dreifarbigen Fahne 4 vierfarbige, aus der letzten z. B. diese:



Wir erhalten daher aus den $2 \cdot 3 = 6$ dreifarbigen Fahnen insgesamt $2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ Fahnen. Wir können auch 1 als Faktor hinzunehmen - das ist ja kein Unterschied -, und so erhalten wir die folgende schöne Gesetzmäßigkeit:

Die Anzahl der einfarbigen Fahnen ist 1,
... zweifarbigen ist $1 \cdot 2 = 2$
... dreifarbigen ist $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

... vierfarbigen ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Selbstverständlich lässt sich diese Reihe ebenso fortsetzen, auch dann, wenn es sich nicht gerade um Fahnen handelt. Man kann z.B. in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Reihenfolgen die Suppe an 5 Kinder austeilen oder beliebige 6 Elemente auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ verschiedene Arten untereinander vertauschen, permutieren.
Dieses

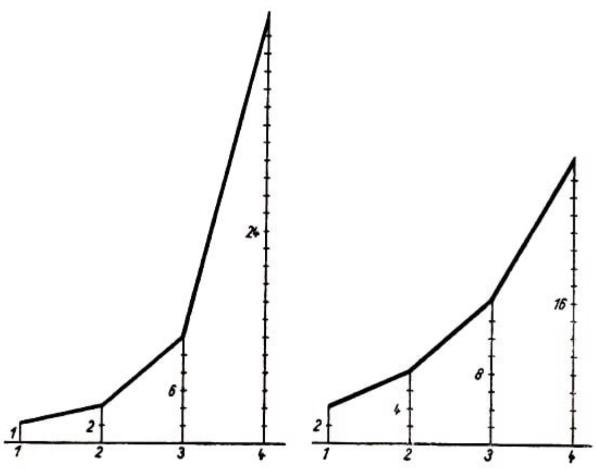
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

enthält folgende Aufforderung: Multipliziere die Zahlen von 1 bis 6 und nicht weiter! Man pflegt dies abzukürzen, indem man nur den letzten Faktor und das Ausrufezeichen niederschreibt. Das oben genannte Produkt wird also

$$6!$$

geschrieben. Da es sich hier um 6 "Faktoren" handelt, liest man diesen Ausdruck 6-Faktoriell oder 6-Fakultät. Es ist z.B. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, usf.

Die Größe der Produkte hängt natürlich davon ab, wie weit wir in der Zahlenfolge vorwärtsgehen. Damit ist uns also eine neue Funktion begegnet. Zeichnen wir sogleich ihre Fieberkurve! Auf der horizontalen Linie tragen wir jene Zahl ab, bis zu der die Zahlen, von 1 ausgehend, zu multiplizieren sind, und aufwärts die entsprechenden Fakultätswerte:



Zum Vergleich sind daneben die Potenzen von 2 dargestellt.
Es ist deutlich sichtbar, dass die Kurve der Fakultät anfangs unter der Kurve der Potenz bleibt (bitte z. B. das Stück zwischen 1 und 2 anzusehen), dann aber plötzlich die Oberhand gewinnt und nun viel steiler als die Potenzkurve in die Höhe steigt.

Dies gilt nicht nur für die Potenzen von 2. Die Fakultät wächst stärker als alle Potenzen. Das ist auch natürlich, denn wie groß auch immer die Basis sein mag, z. B. 100, wir multiplizieren beim Potenzieren doch immer dieselbe Zahl, in diesem Falle 100, mit sich selbst. Die ersten neunundneunzig Faktoren der Fakultät sind zwar kleiner als die entsprechenden der Potenzen, dann aber haben wir mit den stets anwachsenden Faktoren 100, 101, 102, 103, ... weiter zu multiplizieren, und so gewinnt die Fakultät früher oder später die Oberhand.

Aus der Anzahl der einfarbigen Fahnen ließen sich die Zahlen der zwei-, drei-, vierfarbigen Fahnen Schritt für Schritt durch die schönen regelmäßigen Produkte

$$1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

berechnen. Andere Fragen der Kombinationslehre führen zu ebenso schönen Ergebnissen. Z. B. wissen wir bereits, auf wieviel verschiedene Arten sich aus einer gewissen Anzahl von Elementen Paare auswählen lassen: Aus 8 Elementen können wir

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Paare gewinnen; das haben wir bereits bewiesen. Analog erhalten wir aus 15 Elementen

$$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

Paare usf. Wäre es nicht möglich, aus diesen Zahlen auch die Anzahl der Tripel, der Quadrupel, usf., die man aus gegebenen Elementen bilden kann, Schritt für Schritt zu berechnen?

Sehen wir wieder nach, auf wieviel verschiedene Arten man zu einem der Paare, die aus den Elementen 1 2 3 4 5 6 7 8 gebildet werden, z.B. zu

1 2,

ein drittes Element hinzufügen kann. Wir beachten nur, welche Elemente in eine Gruppe aufgenommen werden, die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle. (Stellen wir uns z.B. vor, aus einer 8-köpfigen Gesellschaft soll eine 3-köpfige Delegation irgendwohin geschickt werden. Auch hier ist die Frage nur, wer in die Delegation aufgenommen werden soll.)

Es lässt sich also jedes der restlichen 6 Elemente zu 1 2 hinzufügen, und so entstehen die folgenden 6 Tripel:

$$123, \quad 124, \quad \underline{125}, \quad 126, \quad 127 \quad 128$$

(Um die Unterstreichung braucht sich der Leser vorläufig nicht zu kümmern.) Ebenso lässt sich auch jedes andere Paar auf sechs verschiedene Arten zu einem Tripel erweitern, z. B. das Paar 25 zu den Tripeln:

$$\begin{array}{ccc} 251 & & \underline{125} \\ 253 & & 235 \\ 254 & \text{oder, der Größe nach geordnet, zu den Tripeln:} & 245 \\ 256 & & 256 \\ 257 & & 257 \\ 258 & & 258 \end{array}$$

Im ersten Moment hat es also den Anschein, als ob man 6 mal soviel Tripel wie Paare aus den 8 Elementen bilden könnte. Aber es gibt auch übereinstimmende darunter, z.B. kommt 1 2 5 unter den Tripeln vor, die aus 1 2, aber auch unter jenen, die aus 2 5 entstanden sind (an beiden Stellen habe ich sie unterstrichen).

Dasselbe Tripel muss sogar auch unter den Erweiterungen des Paares 1 5 vorkommen, denn wir können ja die 2 als drittes Element zu ihm hinzufügen. Wir erkennen jetzt, dass man auf diese Weise jedes Tripel dreifach erhält. Es entsteht aus jedem der Paare, die nach Weglassung eines seiner Elemente übrigbleiben. Wird z. B. von 2 3 5 je ein Element weggelassen, so bleiben die folgenden drei Paare:

2 3; 2 5; 3 5

Umgekehrt entsteht 2 3 5 aus diesen Paaren, indem man zum ersten 5, zum zweiten 3 und zum dritten 2 hinzufügt. Will ich also jedes Tripel nur einmal erhalten, so muss ich durch 3 dividieren.
So erhalte ich schließlich die Anzahl der Tripel, die sich aus 8 Elementen bilden lassen, indem ich die Anzahl der Paare, die aus diesen 8 Elementen gebildet wurden, mit 6 multipliziere und das Resultat durch 3 dividiere. Ich weiß bereits, dass die Anzahl der Paare $\frac{8 \cdot 7}{2}$ dass die Division durch 2 auf später verschoben wird: ist. Diese lässt sich mit 6 so multiplizieren,

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2}$$

Jetzt habe ich nur noch durch 3 zu dividieren. Es ist aber völlig belanglos, ob ich erst durch 2 und dann durch 3, oder ob ich durch $2 \cdot 3 = 6$ dividiere. Das Ergebnis ist in beiden Fällen das gleiche. (Z. B. ist $\frac{12}{2} = 6$ und $\frac{6}{3} = 2$; dividiere ich nun 12 durch $2 \cdot 3 = 6$ so erhalte ich ebenfalls 2.)
Folglich lassen sich aus den 8 Elementen, wenn man der Schönheit halber zum Nenner noch eine belanglose 1 als Faktor hinzufügt - Tripel bilden. Es ist leicht einzusehen, dass sich auf die gleiche Weise aus 12 Elementen

$$\frac{12 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

oder aus 100 Elementen

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Tripel bilden lassen.
Kennen wir bereits die Anzahl der Tripel, so können wir analog zu den Quadrupeln übergehen. Wir gehen wieder von 8 Elementen aus. Aus jedem Tripel entstehen 5 Quadrupel, wenn die übrigen Elemente der Reihe nach hinzugenommen werden. Wir erhalten z. B. aus dem Tripel: 1 2 3 die Quadrupel:

$$1234; \quad 1235; \quad 1236; \quad 1237; \quad 1238$$

Demnach würden wir insgesamt 5 mal soviel Quadrupel wie Tripel erhalten. Jedes Quadrupel erscheint jedoch vierfach, z. B. das Quadrupel 1 2 3 4

aus dem Tripel 1 2 3 durch Hinzunahme von 4,
aus dem Tripel 1 2 4 durch Hinzunahme von 3,
aus dem Tripel 1 3 4 durch Hinzunahme von 2,

aus dem Tripel 2 3 4 durch Hinzunahme von 1.

Wir müssen also unser Ergebnis noch durch 4 dividieren. Die Anzahl der Tripel beträgt:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Dieser Ausdruck ist nun mit 5 zu multiplizieren und durch 4 zu dividieren. Folglich ist die Anzahl der Quadrupel:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Die Gesetzmäßigkeit ist jetzt gewiss schon erkennbar. Die Anzahl der 7gliedrigen Gruppen z. B., die man aus 10 Elementen auswählen kann, beträgt

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

Auch dies ist ein schönes regelmäßiges Ergebnis: Beim Auswählen von z. B. 7gliedrigen Gruppen treten sowohl über, als auch unter dem Bruchstrich 7 Faktoren auf, und zwar unten die Zahlen von 1 an aufwärts bis 7 und oben - wenn aus 10 Elementen ausgewählt wird - die Zahlen von 10 an abwärts.

So ist z.B. die Anzahl der einzelnen Elemente, die sich aus 5 Elementen auswählen lassen, $\frac{5}{1} = 5$, und das ist auch durchaus einleuchtend. Die Anzahl der Tripel, die sich aus 3 Elementen bilden lassen, beträgt: $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$, und auch dies ist selbstverständlich, denn es lassen sich ja aus 3 Kugeln alle 3 nur auf eine Art auswählen.
Gleichfalls auf nur eine Art können wir die Hand leer zurückziehen, wieviel Kugeln auch immer in dem Beutel sind. Wir treffen darum die Übereinkunft, dass als Anzahl der "nullgliedrigen Kombinationen" aus beliebig vielen Elementen 1 gelten soll.

Somit ist die Anzahl der immer mehrgliedrigen Kombinationen der Reihe nach:

	null-gliedrig	ein-gliedrig	zwei-gliedrig	drei-gliedrig	vier gliedrig
aus einem Element	1	$\frac{1}{1} = 1$	-	-	-
aus 2 Elementen	1	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$	-	-
aus 3 Elementen	1	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$	-
aus 4 Elementen	1	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 6$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$

Man kann aber die Hand auch aus einem leeren Beutel nur auf eine Art leer zurückziehen, deshalb soll als Anzahl der nullgliedrigen Kombinationen aus 0 Elementen ebenfalls 1 gelten.
Fügt man diese 1 oben noch hinzu, so lassen sich die Ergebnisse unserer Zusammenstellung folgendermaßen anordnen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \ldots
\end{array}$$

Diese dreieckige Figur nennt man das Pascalsche Dreieck. Sie hat so manche interessanten Eigenschaften. Dass sie symmetrisch ist, d.h., dass ihre linke Hälfte gleichsam das Spiegelbild der rechten ist, leuchtet ohne weiteres ein, da es ebenso viele Möglichkeiten gibt, z. B. eine von insgesamt 3 Kugeln herauszunehmen, wie Möglichkeiten, 2 Kugeln im Beutel zu lassen.
Ähnlich ist es, wenn man Paare aus 5 Elementen bildet. Bei jeder Paarbildung entsteht dann auch je ein Tripel aus den unbenutzten Elementen.
Folglich stimmt im Falle von 5 Elementen die Anzahl der Paare mit der Anzahl der Tripel überein, und diese Anzahlen besetzen ja die symmetrischen Stellen im Pascalschen Dreieck.

Eine einfache Regel zur Bildung der weiteren Zeilen ergibt sich aus einer anderen Eigentümlichkeit des Pascalschen Dreiecks.
Ich habe aus gutem Grund die 2 zwischen 1 und 1 geschrieben, da $1+1=2$ ist; ebenso steht 3 zwischen 1 und 2, und es ist $1+2=3$, usf. Diese Gesetzmäßigkeit setzt sich auch weiterhin fort.
Daher folgt auf die zuletzt aufgezeichnete Zeile, weil $1+4=5$ und $4+6=10$ ist,

1 5 10 10 5 1

daraus ergibt sich analog die nächste Zeile:

1 6 15 20 15 6 1

usf. Der Beweis dafür ist nicht schwierig, doch wollen wir uns hier mit einer Probe begnügen. Die erste 15 steht auf dem Platz der Paare aus 6 Elementen; die Anzahl dieser Paare ist

$$\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{30}{2}$$

und dies ist tatsächlich 15.
Aus unserer Regel folgt aber, dass die Summe der Glieder in einer beliebigen Zeile doppelt soviel beträgt wie in der vorangehenden Zeile. Aus der zuletzt aufgeschriebenen Zeile wird nämlich die nächste folgendermaßen gebildet:

$$\underbrace{1\ 1}+\underbrace{6\ 6}+\underbrace{15\ 15}+\underbrace{20\ 20}+\underbrace{15\ 15}+\underbrace{6\ 6}+\underbrace{1\ 1}$$

und es ist wohl zu erkennen, dass hierin sämtliche Glieder der Zeile 1 6 15 20 15 6 1 zweimal auftreten.

Daraus ergibt sich aber noch eine weitere Eigenschaft: Summiert man die Glieder je einer Zeile, so erhält man die aufeinanderfolgenden Potenzen von 2. Anfangs trifft das sicher zu (einstweilen können wir von der obersten 1 absehen), denn es ist $1+1=2=2^1$, $1+2+1=4=2^2$, und weiter brauchen wir es gar nicht nachzuprüfen: Stimmt es für irgendeine Zeile, so "vererbt" sich diese Eigenschaft auch auf die nächste Zeile.
Wir sahen ja, dass die Summe der Glieder in der nächsten Zeile doppelt so groß ist, wie in der vorhergehenden. Wird aber eine Potenz von 2 abermals mit 2 multipliziert, so wird aus ihr ein Produkt $2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2$ mit einem weiteren Faktor 2, d.h. eine um eins höhere Potenz von 2.

Dieses Beweisverfahren, das sich ganz auf den Aufbau der Reihe der natürlichen Zahlen gründet, wird vollständige Induktion genannt. Die Reihe der natürlichen Zahlen beginnt mit 1, und immer um 1 weiterzählend kann man zu einem beliebigen ihrer Glieder gelangen.
Nun besteht die vollständige Induktion in dem Beweisgedanken, dass alles, was am Anfang der Zahlenreihe gilt und in der Zahlenreihe fortschreitend von einer Zahl auf die nächste "vererbt" wird, für sämtliche natürlichen Zahlen gültig ist.
Diese Schlussweise hat es uns ermöglicht, dass wir etwas für sämtliche natürlichen Zahlen beweisen konnten, obwohl der menschliche Verstand nicht alle Zahlen durchzuprobieren vermag.

Wir hatten nur zwei mit unserem Verstand wohl erfassbare Dinge zu beweisen: Erstens, dass die vorliegende Behauptung für 1 stimmt, zweitens, dass sie "vererblicher Natur" ist.
Das ist hier die wichtigste Lehre: Das Unendliche kann in der Mathematik mit endlichen Mitteln erfasst werden. -

Wer gern mit Multiplikationen spielt, dem waren die ersten Zeilen des Pascalschen Dreiecks bereits bekannt. Bilden wir nämlich der Reihe nach die Potenzen von 11:

$$\begin{aligned} 11 &= 1\ 1 \\ 11^2 = 121 &= 1\ 2\ 1 \\ 11^3 = 1331 &= 1\ 3\ 3\ 1 \\ 11^4 = 14641 &= 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \end{aligned}$$

Es liefern also die Ziffern der Ergebnisse eben das Pascalsche Dreieck. Wer die Multiplikationen beobachtet hat, der sah gleich, warum das so ist: Bei der Addition der Teilprodukte wird das gleiche addiert wie bei der Bildung der Zeilen des Pascalschen Dreiecks. (Bei 11^5 hört diese Übereinstimmung bereits auf, da hier bei der Addition der Teilprodukte ein Rest auftritt:

$$11^5 = 14641 \cdot 11 = 146410 + 14641 = 161051$$

während die entsprechende Zeile des Pascalschen Dreiecks aus

1 5 10 20 5 1

besteht.)

11 ist aber gleich $10 + 1$,
$121 = 100 + 20 + 1 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$,
$1331 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$,

usf. Es treten also die Zahlen des Pascalschen Dreiecks eigentlich mit den abnehmenden Potenzen von 10 multipliziert in den Entwicklungen der Potenzen von 10 + 1 auf. Das zweite Glied von 10 + 1 ist 1. Die Potenzen von 1 sind alle 1, da $1 \cdot 1 = 1$ ist, daher ist hier noch nicht zu sehen, dass in die Entwicklungen auch die Potenzen des zweiten Gliedes hineinspielen. Man kann diese aber z. B. in folgender Weise einschmuggeln:

$$11^3 = (10+1)^3 = 1331 = 1000+300+30+1 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3$$

also derart, dass die Potenzen des ersten Gliedes abnehmen, die Potenzen des zweiten Gliedes dafür zunehmen. Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass die Entwicklung in dieser Form sich auch auf Potenzen anderer zweigliedriger Summen verallgemeinern lässt; z.B.

$$7^3 = (5+2)^3 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$$

Nach dem Bisherigen wäre es nicht schwer, dies allgemein zu beweisen. Hier begnügen wir uns aber damit nachzurechnen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125 \\ 3 \cdot 5^2 \cdot 2 &= \underbrace{3 \cdot 5} \cdot \underbrace{5 \cdot 2} = 15 \cdot 10 = 150 \\ 3 \cdot 5 \cdot 2^2 &= 3 \cdot \underbrace{5 \cdot 2} \cdot 2 = 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60 \\ 1 \cdot 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \\ \text{insgesamt} &= 343 \end{aligned}$$

und es ist tatsächlich

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 7 = 343$$

Diese Entdeckung dient wieder den Zwecken der Bequemlichkeit:
Oft ist es bequem, statt einfach zu potenzieren, die Basis in zwei Glieder zu zerlegen, deren Potenzen sich leicht berechnen lassen. Es gibt z. B. Menschen, die nicht mit 7 multiplizieren mögen. Bei der Berechnung der Entwicklung von $(5+2)^3$ sind jedoch nur bequeme Multiplikationen mit 5 und 2 aufgetreten. Diese Multiplikationen führt man möglichst so durch, dass man je eine 5 und eine 2 zusammenfasst. Das Multiplizieren mit 10 ist dann wirklich ein Kinderspiel.

Das Fremdwort für "zweigliedrige Summe" heißt Binom. Deshalb wird das hier betrachtete Entwicklungsgesetz der binomische Lehrsatz genannt, und die Glieder des Pascalschen Dreiecks bezeichnet man entsprechend als Binomialkoeffizienten.

Am häufigsten braucht man die zweite Potenz. Die zweite Zeile des Pascalschen Dreiecks besteht aus den Zahlen

1 2 1

hat man daher z. B. die Aufgabe, $(5+3)^2$ zu entwickeln, so multipliziert man der Reihe nach mit jenen Zahlen, und es treten in der Entwicklung die von 5^2 an abnehmenden Potenzen von 5 und die bis 3^2 zunehmenden Potenzen von 3 auf. Folglich ist

$$(5+3)^2 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2$$

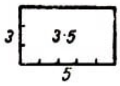
oder, unter Weglassung der überflüssigen Faktoren 1,

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$$

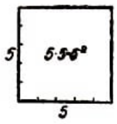
So gelangt man zu der allbekannten - und vielleicht mit unangenehmen Erinnerungen verknüpften - Regel:

Die Summe zweier Glieder lässt sich auch so in die zweite Potenz erheben, dass man zur zweiten Potenz des ersten Gliedes das doppelte Produkt beider Glieder und die zweite Potenz des zweiten Gliedes addiert.

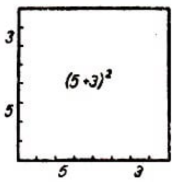
Natürlich kann man dies auch viel leichter einsehen, z.B. auf geometrischem Wege. Wir wissen, dass sich der Flächeninhalt des Rechtecks durch das Produkt zweier benachbarter Seiten berechnen lässt. Hat man nun umgekehrt ein Produkt, so lässt sich dieses durch den Inhalt eines Rechtecks darstellen, dessen benachbarte Seiten die beiden Faktoren sind. Die Darstellung des Produktes $5 \cdot 3$ ist z.B.:



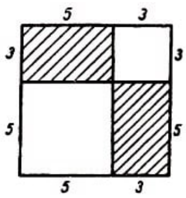
die des Produktes $5^2 = 5 \cdot 5$:



Das ist natürlich ein Quadrat, weshalb man die zweite Potenz auch Quadrat nennt.
In der Darstellung des Ausdrucks $(5+3)^2$:



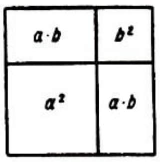
verschwinden die einzelnen Glieder der Summe. Durch folgende Zerlegung aber kommt die Trennung wieder zum Vorschein:



Von den hier entstandenen Stücken beträgt der Inhalt des größeren Quadrates 5^2, der des kleineren Quadrats 3^2 Einheiten. Außer diesen wird unser Quadrat durch zwei Rechtecke mit dem Inhalt von $5 \cdot 3$ Einheiten ausgefüllt. Es ist also tatsächlich

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$$

Dies ist so klar wie die Figuren der indischen Lehrbücher. Die Inder machen nämlich nicht viel Worte. Sie sprechen nur den Satz aus: Eine zweigliedrige Summe lässt sich so und so quadrieren. Dann schreiben sie noch "siehe" und zeichnen eine Figur, die alles erzählt:



Wer Augen hat zu sehen, der sieht es.

1.7 Die Färbung der grauen Zahlenreihe

Die Inder sind von altersher ausgezeichnete Mathematiker und haben eigenartige Fähigkeiten auf diesem Gebiete. Über einen ihrer Gelehrten habe ich folgende Anekdote gehört:
Als sein europäischer Freund im Scherz die Frage stellte, ob die Nummer 1729 des benutzten Autos nicht etwa irgendeine ominöse Zahl sei, gab er im natürlichsten Ton der Welt zur Antwort:

"O nein, diese 1729 ist sogar eine sehr interessante Zahl. Sie ist die erste Zahl, die sich auf zweierlei Arten als die Summe zweier Kuben aufschreiben lässt; sowohl $10^3 + 9^3$ als auch $12^3 + 1^3$ ist 1729."

Für die Inder sind selbst noch die vierstelligen Zahlen persönliche Bekannte, die für sie mit besonderen Eigentümlichkeiten behaftet sind.
In unseren Grundschulen werden die kleinen Zahlen als solche Individuen behandelt. In den Augen des kleinen Schülers ist z.B. die 2 nicht eine der vielen grauen Zahlen, sondern eine vielseitig bekannte Persönlichkeit. Sie ist die erste gerade Zahl, sie ist gleich $1 + 1$, die Hälfte von 4, usf. Doch ob uns nur die Zahlen bis 10 oder aber bis zu den vierstelligen Zahlen (wie bei den Indern) gewissermaßen persönlich bekannt sind -, es bleibt doch immer nur ein bescheidenes Bruchstück der unendlichen Zahlenreihe, die grau darüber hinauswogt.

Wir wissen zwar, dass es gerade Zahlen gibt; ja, dass jede zweite Zahl gerade ist:

$$1, \underline{2}, 3, \underline{4}, 5, \underline{6}, 7, \underline{8}, 9, \underline{10}, 11, \underline{12}, ...$$

Ebenso ist jede dritte Zahl durch 3 teilbar:

$$1, 2, \underline{3}, 4, 5, \underline{6}, 7, 8, \underline{9}, 10, 11, \underline{12}, ...$$

jede vierte durch 4:

$$1, 2, 3, \underline{4}, 5, 6, 7, \underline{8}, 9, 10, 11, \underline{12}, ...$$

usf. Das sind aber nur kleinere oder größere Wellen innerhalb der Zahlenreihe, die, einmal entstanden, eintönig weiterrollen. Gibt es denn wirklich nichts Unerwartetes, gar keine individuelle Launenhaftigkeit, die diese Eintönigkeit beleben könnte?
Doch: Die launenhafte, unregulierbare Verteilung der Primzahlen.

Erinnern wir uns an die Teilbarkeit. Es sind
sämtliche Teiler von 10: 1, 2, 5, 10,

sämtliche Teiler von 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12,
jedoch sämtliche Teiler von 11: 1, 11.

Durch 1 und sich selbst sind alle Zahlen teilbar. Es gibt aber Zahlen, die außer diesen beiden keine weiteren Teiler besitzen, z.B. 11; man nennt sie Primzahlen.

Die Zahl 1 verhält sich in dieser Hinsicht unregelmäßig. Sie hat nur einen einzigen Teiler - die 1 - und dieser ist zugleich sie selbst. Deshalb ist es nicht üblich, die 1 zu den Primzahlen zu zählen. Die kleinste Primzahl ist daher die 2. Sie ist zugleich die einzige gerade Primzahl, da jede gerade Zahl durch 2 teilbar ist und dies die Primzahlbeschaffenheit nur dann nicht verdirbt, wenn der Teiler 2 die Zahl selbst ist.

Ihre Bedeutsamkeit erhalten die Primzahlen durch die Tatsache, dass sich jede andere Zahl aus diesen Bausteinen zusammensetzen lässt. Man nennt darum die übrigen Zahlen auch zusammengesetzte Zahlen. Genauer lässt sich das so formulieren:

Man kann jede zusammengesetzte Zahl als ein Produkt von Primzahlen darstellen.

Versuchen wir z. B. 60 als Produkt aufzuschreiben: $60 = 6 \cdot 10$.
Hierbei lassen sich 6 und 10 weiter in Faktoren zerlegen: $6 = 2 \cdot 3$ und $10 = 2 \cdot 5$.
Setzen wir diese Produkte statt 6 und 10 ein: $60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$, dann sind bereits sämtliche Faktoren Primzahlen.

Wir hätten es auch anders anfangen können. Wir sahen ja schon, dass sich 60 auf vielerlei Arten als Produkt zweier Zahlen aufschreiben lässt. Geht man von folgender Zerlegung aus: $60 = 4 \cdot 15$,
dann ist $4 = 2 \cdot 2$ und $15 = 3 \cdot 5$,
folglich $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Wählt man die Zerlegung $60 = 2 \cdot 30$,
so ist $30 = 5 \cdot 6$ und dabei $6 = 2 \cdot 3$, also $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$,
oder $30 = 2 \cdot 15$ und dabei $15 = 3 \cdot 5$, also $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$,
oder aber $30 = 3 \cdot 10$ und dabei $10 = 2 \cdot 5$, also $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$.

Man sieht also, dass 30 auf jeden Fall in das Produkt der Primzahlen 2, 3 und 5 zerfällt. Wird dieses Produkt statt 30 eingesetzt. dann ist:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Eine beliebige andere zusammengesetzte Zahl lässt sich ebenso leicht in ihre "Primfaktoren" zerlegen (und man kann beweisen, dass die verschiedenen Wege immer zur gleichen Primfaktorenzerlegung der Zahl führen).

Wer im ersten Moment bei der Frage, wie das anzufangen sei, stockt, der braucht sich nur zu überlegen, dass der kleinste Teiler der gegebenen Zahl (außer 1) bestimmt eine Primzahl ist. Wäre nämlich auch dieser eine zusammengesetzte Zahl, so müsste er einen kleineren Teiler als sich selbst enthalten, und dieser würde natürlich auch die ursprüngliche Zahl restlos teilen. Sucht man daher immer den kleinsten Teiler, dann lassen sich die Primfaktoren einer beliebigen Zahl nacheinander schön abtrennen, z.B.

$$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Eine solche Zerlegung gibt uns vollen Aufschluss über die Struktur einer Zahl. Man kann aus ihr z.B. herauslesen, dass 90 folgende Teiler (außer 1) besitzt:

aus einem Faktor gebildet: 2, 3, 5,
aus zwei Faktoren gebildet: $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$, $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 5 = 15$,
aus drei Faktoren gebildet: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$,
aus vier Faktoren gebildet: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

Es lohnt sich also, die Bausteine der Zahlen näher kennenzulernen.
Versuchen wir, die Primzahlen der Reihe nach aufzuschreiben. Wir wissen bereits, dass die kleinste Primzahl die 2 ist. Die übrigen geraden Zahlen können wir überspringen, weil sie alle durch 2 teilbar sind. Auch 3, 5 und 7 sind Primzahlen. Wir sind versucht zu sagen, dass auch 9 eine Primzahl sei. Das stimmt jedoch nicht, denn 9 ist ja durch 3 teilbar.

Man könnte jetzt annehmen, dass die Primzahlen von nun an seltener auftreten, aber das stimmt wiederum nicht, da 11 und 13 beide Primzahlen sind.
Dieses eine Mal bitte ich den Leser, sich ein wenig zu bemühen:

Man versuche, die Primzahlen wenigstens bis 50 selbständig aufzuzählen. Zur Kontrolle schreibe ich diese Folge hier auf. Man wird jedoch nur dann fühlen, wie unregelmäßig sie ist, wenn man selbst - sich immer wieder verrechnend - daran entlangstolpert. Die Folge der Primzahlen ist:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...

Schon von den alten Griechen kennen wir eine geistvolle Idee, die es ermöglicht, diese launenhafte Folge fehlerfrei mechanisch aufzustellen: das sogenannte Sieb des Eratosthenes.

Schreiben wir zunächst die Zahlen von 2 bis 50 auf. Das erste Glied dieser Folge ist - auch unbesehen - sicher eine Primzahl, denn jeder echte Teiler wäre ja kleiner als diese Zahl und würde deshalb (abgesehen von 1) in dieser Folge vor ihr auftreten; vor ihr steht aber nichts. Jetzt sehen wir uns diese erste Zahl an: es ist die 2.
Jede zweite Zahl nach 2 ist ein Vielfaches von 2 und somit keine Primzahl. Von den auf 2 folgenden Zahlen streichen wir also jede zweite Zahl:

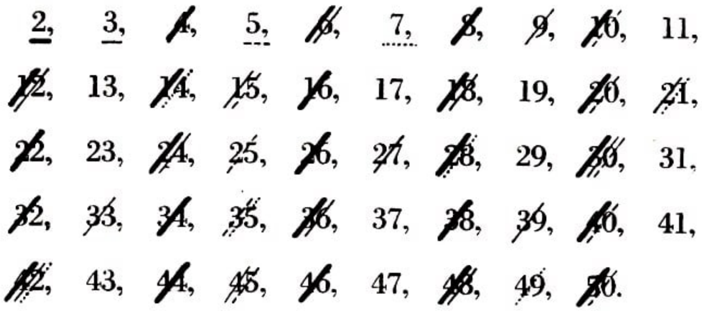
2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11,
~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21,
~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31,
~~32~~, 33, ~~34~~, 35, ~~36~~, 37, ~~38~~, 39, ~~40~~, 41,
~~42~~, 43, ~~44~~, 45, ~~46~~, 47, ~~48~~, 49, ~~50~~.

Die erste Zahl, die nach der 2 erhalten blieb, kann wiederum nur eine Primzahl sein, denn sie könnte ja sonst nur ein Vielfaches einer vor ihr auftretenden Zahl sein; vor ihr steht aber nur eine Zahl, deren Vielfache bereits gestrichen wurden.

Sehen wir uns diese Zahl an: Es ist die 3. Jede dritte Zahl nach 3 ist ein Vielfaches von 3, folglich streichen wir auch diese Zahlen aus. Es macht nichts, dass dabei einige Zahlen doppelt ausgestrichen werden müssen:


2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11,
~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~,
~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31,
~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, 35, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41,
~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, 49, ~~50~~.

Fahren wir entsprechend fort, dann wird als nächstes 5 beibehalten; die Vielfachen von 5 jedoch müssen wir natürlich wieder streichen. So wird von 5 an jede fünfte Zahl und schließlich von 7 an jede siebente Zahl gestrichen:


2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11,
~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~,
~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31,
~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41,
~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~.

Weitere Zahlen brauchen wir gar nicht zu untersuchen, denn die erste beibehaltene Zahl ist 11, und 7 mal 11 ist bereits mehr als 50, die kleineren Vielfachen von 11 treten aber alle unter den gestrichenen Zahlen auf.
Schreiben wir die beibehaltenen Zahlen heraus:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47;

so erhalten wir tatsächlich die vorhin aufgezeichneten Primzahlen zwischen 2 und 50.

Man könnte auch eine Maschine konstruieren, die die gegebenen Anweisungen ausführt, also die Primzahlen bis zu einer gewissen Grenze fehlerlos ausstreut. Dies ändert aber nichts daran, dass die Primzahlen über alle Grenzen immer wieder mit der größten Launenhaftigkeit auftauchen.

So kann man z. B. nachweisen, dass beliebig große Lücken zwischen ihnen zu finden sind, wenn man nur genügend weit in der Zahlenreihe geht. Die Ergebnisse der folgenden Operationen liefern z. B. eine Lücke, die mindestens 6 Einheiten beträgt, d.h. sechs aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine einzige eine Primzahl ist:

$$\begin{array}{ll} 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+2 & 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+3 \\ 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+4 & 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+5 \\ 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+6 & 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+7 \end{array}$$

Dies sind tatsächlich aufeinanderfolgende Zahlen, denn jede von ihnen ist genau um eine Einheit größer als die vorangegangene. Keine von ihnen ist jedoch eine Primzahl, da nämlich $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ durch jeden ihrer Faktoren teilbar ist, daher ist die erste jener Zahlen eine Summe, deren beide Glieder durch 2 teilbar sind; die zweite ist aus den gleichen Gründen durch 3 teilbar, die dritte durch 4, die vierte durch 5, die fünfte durch 6 und die sechste durch 7. Beim Ausrechnen erhalten wir:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

demnach handelt es sich hier um die folgenden sechs Zahlen: 5042, 5043, 5044, 5045, 5046, 5047.

Das sind schon ziemlich große Zahlen; wir mussten in der Zahlenreihe ziemlich weit gehen, um auf diese Weise eine 6-gliedrige Lücke zwischen den Primzahlen zu finden (natürlich ist es möglich, dass eine solche Lücke bereits viel früher vorkommt). Wenn wir die Mühe nicht scheuen, sehr große Zahlen zu betrachten, dann können wir ebenso eine mindestens 100-gliedrige Lücke finden, indem wir zu dem Produkt

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 101$$

der Reihe nach die Zahlen von 2 bis 101 addieren. Auf diese Art lassen sich auch beliebig große Lücken finden.

Soweit man aber auch die Zahlenreihe untersucht hat, wurden doch immer wieder - über beliebig große Lücken hinaus -, benachbarte ungerade Zahlen gefunden, die sich als Primzahlen erwiesen haben, wie z. B. am Anfang der Zahlenreihe 11 und 13 oder 29 und 31. Die Mathematiker vermuten, dass solche "Primzahlzwillinge" in allen Fernen vorkommen, auch über den untersuchten Teil der Zahlenreihe hinaus, doch ist es bis heute nicht gelungen, dies allgemeingültig zu beweisen.

Gibt es denn überhaupt Primzahlen in allen Fernen? Färben diese nicht etwa nur einen Abschnitt der Zahlenreihe?
Auf diese Frage haben wir bereits eine Antwort, und zwar schon seit 2000 Jahren. Euklid hat einen sehr eleganten Beweis dafür mitgeteilt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Dies lässt sich ebenso einsehen wie die Unendlichkeit der Zahlenreihe selbst. Wo immer auch jemand sagen würde: hier ist es aus, da hätte das Lied doch kein Ende; dem könnte ich nachweisen, dass es auch darüber hinaus noch Primzahlen gibt.
Es genügt, dies in einem einzigen Fall zu beweisen; in jedem anderen Fall geht es ebenso. Wir müssen dabei nur bedenken, dass durch 2 nur jede zweite Zahl teilbar ist, durch 3 nur jede dritte usf. Daher kann der unmittelbare Nachfolger eines Vielfachen von 2 nicht durch 2, der unmittelbare Nachfolger eines Vielfachen von 3 nicht durch 3 teilbar sein usf. Würde nun jemand behaupten, es gäbe nur die Primzahlen 2, 3, 5 und 7, so könnte ich dies sofort widerlegen, da ich aus den aufgezählten Primzahlen die Zahl

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$$

aufbauen kann. Die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist sowohl durch 2 als auch durch 3, 5 und 7 teilbar. Die unmittelbar darauffolgende Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot +1$ kann also durch keine dieser Zahlen teilbar sein.
Irgendeinen Primteiler aber müsste die arme doch haben, sie ist ja auch eine Zahl. Entweder also ist auch sie in Primfaktoren zerlegbar, oder sie ist zufällig selbst eine Primzahl, und durch sich selbst ist sie jedenfalls teilbar. Der Betreffende hat sich also geirrt: Es müssen Primzahlen auch über 7 hinaus vorkommen, und genauso auch über jede beliebige Primzahl hinaus.

Berechnen wir nun diese Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$: Das Ergebnis ist 211. Ein wenig Probieren zeigt, dass 211 außer 1 und sich selbst keine Teiler hat. Sie ist also zufällig eine Primzahl, und somit ist sie selbst jene Primzahl nach 7, deren Existenz ich behauptet habe.
Natürlich ist keine Rede davon, dass sie die unmittelbar auf 7 folgende Primzahl ist: Es war keinen Augenblick lang zu erwarten, dass man die aufeinanderfolgenden Primzahlen so regelmäßig konstruieren könnte.

Genauer formuliert liefert unsere Methode als Ergebnis, dass man von 7 höchstens bis $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, von 11 höchstens bis $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ zu gehen hat usf., um eine neue Primzahl zu finden. Das sind aber ziemlich große Abstände. Könnte man nicht auch in engeren Grenzen Primzahlen finden?

Es haben sich viele mit dieser Frage befasst. Um nur eines der schönen Ergebnisse zu erwähnen: Der russische Mathematiker Tschebyschew hat bewiesen, dass sich zwischen einer beliebigen Zahl (außer 1) und ihrem Doppelten stets Primzahlen befinden:

zwischen 2 und 4	3,
zwischen 3 und 6	5,
zwischen 4 und 8	sowohl 5 als auch 7,
zwischen 5 und 10	nur 7.

Obwohl hierbei keine Regelmäßigkeit zu erkennen ist, trifft dies doch in allen Fällen zu, wie weit man auch immer in der Zahlenreihe gehen mag. Wählt man genügend große Zahlen, so fallen sogar beliebig viele Primzahlen zwischen die Zahlen und ihre Zweifachen.

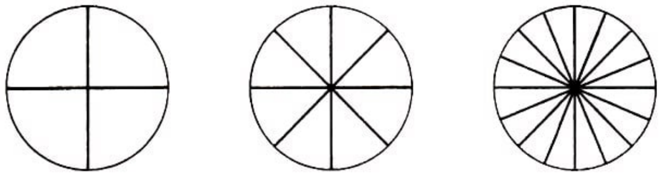
Da haben wir also doch eine Art Regel für die Primzahlen, die so unbändig zu sein scheinen: Beliebig weit können sie sich nicht voneinander entfernen.

Ja noch mehr: Es gibt trotz allem in einem gewissen Sinne einen "Primzahlsatz" mit einer ähnlichen "fast"-Gültigkeit wie die, mit der man auch den Kreis als aus vielen schmalen Dreiecken zusammengesetzt betrachten kann. (Ich habe versprochen, dieses "fast" später zu präzisieren.)

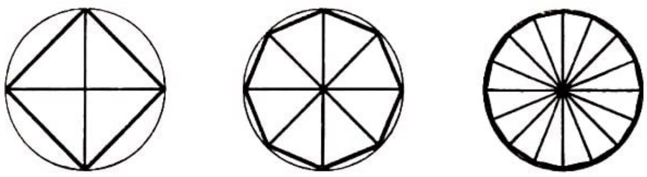
Bis zur 2 - diese eingeschlossen - gibt es eine einzige Primzahl, nämlich die 2 selbst. Bis zur 3 gibt es bereits zwei Primzahlen, und zwar 2 und 3; bis zur 4 wieder nur diese beiden; bis zu 5 bereits drei, da auch 5 hinzukommt; bis zur 6 wieder nur diese drei; bis zur 7 schon vier, nämlich 2, 3, 5 und 7; bis 8, bis 9 und bis 10 dieselben vier Zahlen usf.
Die Anzahl der Primzahlen beträgt also:

bis 2	bis 3	bis 4	bis 5	bis 6	bis 7	bis 8	bis 9	bis 10	...
1	2	2	3	3	4	4	4	4	...

Die Glieder dieser Folge machen einen Sprung, sooft man zu einer neuen Primzahl gelangt, und dies tritt ganz unregelmäßig ein. Jedoch lässt sich eine wohlbekannte Folge aufschreiben, die nach einer gewissen Regel gebildet wird[4] und die so beschaffen ist, dass ihre Glieder und die Glieder unserer Folge einander um so ähnlicher werden, je weiter wir fortschreiten.
Die fernen Teile dieser Folge sind also "fast" als gleich zu betrachten - ebenso, wie die schwer zu behandelnden krummlinig begrenzten Teile des Kreises



und die wohlbekannten geradlinig begrenzten Dreiecke



einander immer ähnlicher werden. Diese sind ja - die Zerlegung genügend weit fortgesetzt - "fast" als identisch zu betrachten.

Eine exakte Regel für die Primzahlen ist gar nicht denkbar, doch hat auch dieses "fast" regelmäßige Verhalten seinen präzisen Sinn. Wie ich versprochen habe, werde ich darauf noch zurückkommen.
Ich kann nicht einmal versuchen, den Beweis des Primzahlsatzes auch nur anzudeuten. Seit geraumer Zeit reichten ihn die hervorragendsten Mathematiker von Hand zu Hand, immer etwas daran formend, bis er endlich seine heutige Gestalt erhielt.
Man versucht immer genauer zu bestimmen, wie groß der Fehler ist, den wir begehen, wenn wir die Glieder unserer unregelmäßigen Folge durch die Glieder jener Folge ersetzen, die sich nach der genannten Regel bilden lässt.

Das, was die Forschung hier reizt, ist weder die Zweckmäßigkeit noch die Bequemlichkeit, sondern die Schönheit und die Schwierigkeit des Gegenstandes. Das ist eine Schönheit anderer Art, als die der spielerischen Zahlen in der Kombinationslehre; es ist das Ästhetische in der Maßlosigkeit. Es ist aber auch ein kühnes Unterfangen, das Unregelmäßige in Regeln zwingen zu wollen.

[4] Jenen zuliebe, die sich noch an die Logarithmen erinnern können, schreibe ich diese Folge hier auf:

$$\frac{2}{\log 2}, \frac{3}{\log 3}, \frac{4}{\log 4}, \frac{5}{\log 5}, \ldots$$

obgleich es kaum möglich ist, dass sich der Leser an diese Logarithmen erinnert: es sind nämlich sogenannte natürliche Logarithmen. Später wird auch von diesen die Rede sein.

Dass es einen Primzahlsatz gibt, zeugt davon, dass die Primzahlen, die sich im Kleinen, in den untersuchten Stücken der Zahlenreihe, unregelmäßig verteilen, in ihrer unendlichen Gesamtheit dennoch irgendeiner Ordnung unterworfen sind.
Mir fällt ein Gleichnis über die Willensfreiheit ein, das ich irgendwo gelesen habe: Beobachten wir die schwärmenden Bienen aus der Nähe, so sehen wir, dass die einzelnen Tiere in den verschiedensten Richtungen durcheinanderfliegen; dennoch wird der ganze Schwarm von einem bestimmten Ziel in irgendeine bestimmte Richtung geleitet.

1.8 „Ich dachte mir eine Zahl“

Kehren wir nun ein wenig zur praktischen Mathematik zurück. Den Rauminhalt eines Würfels können wir schon berechnen; oft ist aber auch die Kenntnis des Volumens eines Körpers von unregelmäßiger Gestalt notwendig. Der Rauminhalt solcher Körper lässt sich jedoch nicht unmittelbar messen.

In solchen Fällen kann man den folgenden Ausweg einschlagen: Nehmen wir an, der Körper sei aus Eichenholz; sein Gewicht kann gemessen werden. Wir müssen dann einen kleinen Würfel von 1 Kubikzentimeter Größe aus Eichenholz aushauen und dessen Gewicht messen.
Wieviel mal dieses Gewicht im Gewicht des vorliegenden Körpers enthalten ist, soviel Kubikzentimeter beträgt dessen Rauminhalt.
Den Rauminhalt kann man hierbei also nicht unmittelbar bestimmen; doch dafür etwas anderes, womit der Rauminhalt in einer wohlbekannten Verbindung steht: das Gewicht des Körpers. Aus dieser Größe muss man dann auf das unbekannte Volumen zurückschließen.

Es kommt in der Mathematik sehr häufig vor, dass man eine Größe nicht unmittelbar kennt, dass aber gewisse Zusammenhänge bekannt sind, in die sie hineinspielt. Aus diesen Zusammenhängen können wir dann entnehmen, welchen Wert die unbekannte Größe haben muss.

Der Grundgedanke dieses Verfahrens - das für viele Anwendungen von entscheidender Bedeutung ist -, ist derselbe, wie bei den wohlbekannten Rätselaufgaben: "Ich dachte mir eine Zahl, addierte zu ihr nochmal soviel, nahm das Dreifache von dem Resultat" usf.
Nachdem ich noch verschiedenes aufgezählt habe, was ich mit der gedachten Zahl ausgeführt habe, sage ich endlich, dass ich nach diesen vielen Operationen z. B. 36 als Endergebnis erhalten habe und bitte zu erraten, welche die gedachte Zahl war.

Also bitte zu erraten: Ich dachte mir eine Zahl, addierte zu ihr 5 und erhielt 7. Was habe ich gedacht? - Selbst ein Blinder sieht, dass dies 2 war.

Nun eine etwas schwerere Aufgabe: Ich dachte mir eine Zahl, multiplizierte sie mit 5, dividierte das Ergebnis durch 2, addierte 3 und erhielt 18. Welche Zahl habe ich mir gedacht? -
Gewöhnlich wird dieses Rätsel nicht schriftlich, sondern mündlich aufgegeben, so dass der Gefragte leicht vergisst, welche Operationen aufgetreten sind. Es ist deshalb gut,

wenn er diese gleich bei der Mitteilung der Aufgabe notiert.

Die gedachte Zahl kennt er nicht, er nennt sie daher x. Soviel wird wohl der Leser erlauben. Darf der Dichter schreiben:

"Aller Flüsse harrt die Styx.
O lösendes, sichres X!"

- so darf ich vom Löser des Rätsels vielleicht auch x für die unbekannte Zahl schreiben lassen, die der Lösung harrt. Er notiert also den Ablauf der Rechenoperationen:
Sein Partner dachte x und multiplizierte dies mit 5. So entstand also $5x$. Dann dividierte er dies durch 2, so dass $\frac{5x}{2}$ daraus wurde. Schließlich addierte er dazu 3, wobei $\frac{5x}{2}+3$ entstand, und behauptet, dass dies gleich 18 sei:

$$\frac{5x}{2}+3=18$$

Die gedachte Zahl erfüllt also eine solche "Gleichung"; sie ist daraus zu erraten.

Es gibt Menschen, die einen so guten Sinn für Zahlen haben, dass sie die Lösung bereits aus dieser Form erraten. Gelingt einem das nicht, so muss man einen Schritt zurückgehen: Wurde aus irgendeiner Größe nach der Addition von 3 die Zahl 18, so war ihr Wert vorher gleich 15:

$$\frac{5x}{2}=15$$

Daraus ist schon leichter zu erraten, welchen Wert x hatte. Wer es auch daraus nicht errät, kann es sich mit noch einem Schritt erleichtern: Was durch 2 dividiert 15 ergeben hat, muss vor der Division 30 gewesen sein:

$$5x=30$$

Nun wird aber bereits jeder erraten, dass jene Zahl, die 5 mal genommen 30 ergibt, nur die 6 sein kann.

Den Abbau, den wir hier allmählich fortschreitend durchgeführt haben, können wir in jeder Gleichung vornehmen. Als wir von

$$\frac{5x}{2}+3=18 \qquad \text{zu} \qquad \frac{5x}{2}=15$$

übergingen, verschwand das Glied 3 von der linken Seite des Gleichheitszeichens. Dafür wurde von der Zahl auf der rechten Seite 3 subtrahiert. Das pflegt man so auszudrücken: Es ist erlaubt, einen Summanden von der einen Seite einer Gleichung als Subtrahenden auf die andere Seite zu bringen.
Als dann

$$\frac{5x}{2}=15 \qquad \text{zu} \qquad 5x=30$$

überging, verschwand der Divisor von der linken Seite. Dafür wurde aber die Zahl auf der rechten Seite mit 2 multipliziert.

Dies drückt man so aus: Es ist erlaubt, einen Divisor als Multiplikator auf die andere Seite der Gleichung zu bringen.

Allgemein: Man darf etwas von der einen Seite einer Gleichung mit der umgekehrten Operation auf die andere Seite bringen.

Werden wir irgendeiner tückischen eingekleideten Gleichung gegenübergestellt, so handelt es sich im Grunde um nichts anderes als um das Erraten einer gedachten Zahl. Es laute z.B. der Text:

"Ein Vater ist 48 Jahre alt, sein Sohn 23. Nach wievielen Jahren wird der Vater gerade doppelt so alt sein wie der Sohn?"

Manche Menschen werden die Lösung natürlich sofort - ohne jede Gleichung - finden. Wer aber etwas schwerfälliger ist, kann in der folgenden Weise schließen: Der rasch Denkende weiß das Ergebnis bereits.
Ich kann also annehmen, dass er sich eine Zahl dachte, die für mich noch unbekannt, d.h. x ist. Der Vater wird also nach x Jahren doppelt so alt sein wie der Sohn. Wie wird nun das Ergebnis vom Löser kontrolliert?
Er zählt einfach nach, wie alt Vater und Sohn nach x Jahren sein werden, und ob die Jahre des Vaters dann tatsächlich doppelt soviel ausmachen wie die Jahre des Sohnes.

Nach x Jahren wird der Vater um x Jahre älter als 48, d.h. $48 + x$, der Sohn dagegen $23 + x$ Jahre alt sein. Der gewandte Rechner dachte sich also eine Zahl, addierte diese sowohl zu 48 als auch zu 23 und behauptet, dass das Resultat der ersten Addition doppelt so groß ist wie das der zweiten:

$$48 + x = 2(23 + x)$$

Daraus wäre nun x zu erraten. Die Multiplikation mit 2 auf der rechten Seite lässt sich ausführen, indem man beide Summanden einzeln mit 2 multipliziert:

$$48 + x = 46 + 2x$$

Das x von der linken Seite bringe ich als Subtrahenden auf die rechte Seite neben $2x$. Die 46 bringe ich von der rechten Seite - ebenfalls als Subtrahenden - neben 48. So sind die Glieder mit x auf einer Seite der Gleichung versammelt:

$$48 - 46 = 2x^{-}x$$

$48 - 46 = 2$; und es ist klar, dass ein x übrigbleibt, wenn von $2x$ ein x weggenommen wird. Es ist demnach:

$$2 = x$$

die gedachte Zahl ist also 2: Nach 2 Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie der Sohn.
In der Tat ist nach 2 Jahren der Vater 50 und der Sohn 25 Jahre alt.

Nun eine weitere Komplizierung: "Ich dachte mir zugleich zwei Zahlen, deren Summe 10 ist. Wie heißen diese Zahlen?"

Um die Aufgabe zu notieren, bezeichnen wir die gedachten Zahlen mit x und y (kennt man weder Vor- noch Zunahmen eines Menschen, so nennt man ihn XY). In der Aufgabe wird also behauptet:

$$x + y = 10$$

Es ist sehr leicht, zwei solche Zahlen zu finden: 1 und 9 sind z. B. so beschaffen. Ja, aber 2 und 8 auch! Die gedachten Zahlen können auch 4 und 6 sein, und es bieten sich noch weitere Lösungen.

Das ist purer Betrug - aus dieser einen Angabe lassen sich die beiden Zahlen noch nicht erraten. Der Gefragte kann mit vollem Recht verlangen: "Sage mir noch etwas über diese beiden Zahlen!" Gut, ich verrate noch, dass ihre Differenz 2 ist:

$$y - x = 2$$

Jetzt können wir schon sehr leicht erraten, dass es nur zwei Zahlen gibt, die diese Bedingungen erfüllen: 4 und 6 sind jene Zahlen, deren Differenz 2 ist und deren Summe 10 beträgt.

Zum Erraten von zwei Unbekannten sind also zwei Gleichungen notwendig, ein sogenanntes "Gleichungssystem".
Wird aus diesem nicht sofort klar, wie die gedachten Zahlen heißen, so kann man auch hier mit gewissen Kunstgriffen zur Lösung gelangen.
Wäre z. B. jemand nicht dahintergekommen, dass die Lösungen des vorherigen Gleichungssystems 4 und 6 sind, so hätte er folgenden Weg einschlagen können: Bringt man den Subtrahenden der linken Seite als Summanden auf die rechte Seite, so bleibt y allein: $y = x + 2$.

Man ersieht hieraus, dass die zweite gedachte Zahl um 2 größer ist als die erste. Folglich hätte man die Aufgabe auch einfacher formulieren können: "Ich dachte mir eine Zahl, addierte eine um 2 größere Zahl zu ihr und habe so 10 erhalten. An welche Zahl habe ich gedacht ?"
Dies lässt sich folgendermaßen notieren:

$$x + (x + 2) = 10.$$

Darin kommt aber nur eine einzige Unbekannte vor, und zum Erraten dieser einen Unbekannten kennen wir bereits die nötigen Kunstgriffe. Ist uns dann x bekannt, so brauchen wir über y nicht mehr viel nachzudenken, Wir wissen ja, dass dieses um 2 größer ist als x.

Ein anderes Beispiel: "Ich dachte mir zwei Zahlen, addierte das Zweifache von der zweiten zur ersten und erhielt 11; dann addierte ich das Vierfache der zweiten zum Zweifachen der ersten, und das Resultat war 22. An welche Zahlen habe ich gedacht ?"
Der Text lässt sich kurz so notieren:

$$x + 2y = 11 \qquad , \qquad 2x + 4y = 2$$

Hat der Leser Augen, so muss er sofort sehen, dass er angeführt wurde. Probieren wir nur: Die Zahlen 1 und 5 erfüllen die erste Bedingung, da $1 + 2 \cdot 5 = 11$
und sie erfüllen auch die zweite Bedingung, da $2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 22$ ist. Man könnte glauben, dass die gedachten Zahlen damit bereits gefunden wurden. Doch sehen wir weiter nach: 3 und 4 erfüllen gleichfalls die Forderung der ersten Gleichung, da $3 + 2 \cdot 4 = 11$, und auch die Forderung der zweiten, da $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$ ist.

Es scheint, dass jedes Zahlenpaar, das die erste Bedingung erfüllt, auch die zweite erfüllt. Die zweite Bedingung hilft hier nicht, ein bestimmtes Paar von Zahlen auszuwählen, Das ist aber auch selbstverständlich. Was auch immer x und y bedeuten mögen, $2x$ ist stets doppelt soviel wie x und $4y$ stets doppelt soviel wie $2y$.
Es leuchtet demnach ein, dass auch ihre Summe $2x + 4y$ doppelt so groß wie $x + 2y$ sein muss.

Ist daher $x + 2y = 11$, dann kann $2x + 4y$ nur 22 sein. Die zweite Gleichung sagt daher nichts Neues über die gedachten Zahlen aus; sie sagt dasselbe wie die erste, nur gezierter.

Ein noch ärgerer Betrug ist es, wenn x und y aus dem Gleichungssystem

$$x + 2y = 11 \qquad , \qquad 2x + 4y = 23$$

berechnet werden sollen. Wir können uns darüber lange den Kopf zerbrechen: Es gibt keine Zahlen, die beide Bedingungen zugleich erfüllen können.
Wir haben ja schon gesehen, dass $2x + 4y$ für beliebige x und y das Doppelte von $x + 2y$ beträgt. Ist also $x + 2y = 11$, so muss $2x + 4y$ eben 22 ausmachen und kann also nicht 23 sein. Die zweite Bedingung straft die erste Lügen.

Fassen wir zusammen: Zwei Unbekannte lassen sich aus zwei Gleichungen erraten, vorausgesetzt, dass diese Gleichungen nicht dasselbe aussagen und einander auch nicht widersprechen. Was kann man aber mit einem Rätsel folgender Art anfangen?

"Ich dachte mir eine Zahl, quadrierte sie, addierte dazu das Achtfache der gedachten Zahl und erhielt 9." Wir notieren:

$$x^2 + 8x = 9$$

Hier gibt es nur eine Unbekannte, dafür aber eine neue Komplikation: Die Unbekannte kommt in der zweiten Potenz vor. Es handelt sich um eine Gleichung zweiten Grades. Fangen wir nicht gleich mit einer so komplizierten Gleichung zweiten Grades an. Die einfachste Form ist:

$$x^2 = 16$$

Jedermann kann mit einem Blick erkennen, dass die gedachte Zahl 4 ist, denn 4 ist diejenige Zahl, die quadriert 16 ergibt. Die Aufgabe

$$(x + 3)^2 = 16$$

ist fast ebenso einfach, da die Zahl, die quadriert 16 ergibt, wiederum 4 ist. Wir erhalten also $x + 3 = 4$ und erkennen sofort, dass $x = 1$ ist.

Hier ist der Ausdruck $(x+3)^2$ aufgetreten. Denken wir nun zurück, wie man das Quadrat einer zweigliedrigen Summe zu entwickeln hat:
Zum Quadrat des ersten Gliedes (hier zu x^2) ist das doppelte Produkt der beiden Glieder (hier $2 \cdot 3x = 6x$) und das Quadrat des zweiten Gliedes (hier $3^2 = 9$) zu addieren. In dieser entwickelten Form lautet also unsere Gleichung:

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

Hätte man sie uns aber so vorgelegt, dann hätten wir keine Ahnung gehabt, was wir damit anfangen sollen. Wir müssen also üben, das Quadrat einer zweigliedrigen Summe auch in entwickelter Form wiederzuerkennen. Lautet eine Gleichung z. B.:

$$x^2 + 8x + 16 = 25$$

so muss man merken, dass hier $8x = 2 \cdot 4x$ und 16 das Quadrat der darin auftretenden 4 ist. Folglich ist

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 = (x+4)^2$$

Wir haben es demnach mit der Gleichung

$$(x+4)^2 = 25$$

zu tun. Diese lässt sich aber bereits wie die vorherigen lösen.
Natürlich ändert sich an der eben betrachteten Gleichung nichts, wenn 16 als Subtrahend auf die rechte Seite gebracht wird $(25 - 16 = 9)$, und wir kommen schließlich auf die zu Anfang gewählte Form:

$$x^2 + 8x = 9$$

Auch in einer solchen Gleichung ist zu erkennen, dass sich die linke Seite zum Quadrat der Summe zweier Glieder ergänzen lässt:

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4x$$

Es fehlt jetzt nur noch $4^2 = 16$, damit $(x+4)^2$ daraus wird. Fügt man zu gleichen Größen dasselbe hinzu, so bleiben sie gleich. In unserem Falle fügen wir also 16 zu beiden Seiten hinzu:

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16 \qquad , \qquad x^2 + 8x + 16 = 25$$

und damit erhalten wir wieder jene Form, mit der wir bereits fertig werden können.

Diese Ergänzung zum Quadrat der Summe zweier Glieder gelingt immer. Ist das Glied zweiten Grades nicht x^2, sondern z.B. $3x^2$, wie in der folgenden Gleichung

$$3x^2 + 24x = 27$$

so kann man beide Seiten der Gleichung durch 3 dividieren. Sind nämlich die linke und die rechte Seite von gleichem Wert, so sind auch ihre Drittel gleich. Das Drittel von $3x^2$ ist x^2, das Drittel von $24x$ ist $8x$ und das Drittel von 27 ist 9. Folglich erhalten wir

$$x^2 + 8x = 9$$

und in dieser Form können wir die Gleichung schon lösen. Wären hier nicht alle Zahlen durch 3 teilbar gewesen, oder wäre der Multiplikator von x eine ungerade Zahl, so würden auch Brüche auftreten. Mit diesen und mit etwaigen Subtraktionen möchte ich mich einstweilen noch nicht abgeben, wenn sie auch keine prinzipiellen Schwierigkeiten verursachen würden.

So können wir also in jedem Fall zu einem Quadrat ergänzen und erhalten dann eine Form, in der wir die Gleichung bereits lösen können.

Diese Art des Schließens ist charakteristisch für die mathematische Denkweise: Sehr oft geht der Mathematiker nicht geradeaus auf eine gegebene Aufgabe zu, sondern formt und knetet sie erst so lange, bis sie sich in eine Aufgabe umgewandelt hat, die er bereits früher gelöst hat. Natürlich, die gute alte Bequemlichkeit!

Diese Denkweise wird in folgendem Rätsel karikiert, das in mathematischen Kreisen wohlbekannt ist:
"Du hast einen Gasherd, eine Wasserleitung, eine Schachtel mit Zündhölzern und einen Topf und möchtest Wasser kochen. Wie machst du das?"

Gewöhnlich kommt die Antwort in einem ziemlich unsicheren Ton: "Ich zünde das Gas an, fülle den Topf mit Wasser und stelle ihn auf den Herd."-
"Das ist richtig, doch jetzt modifiziere ich die Aufgabe: Es ist alles ebenso wie vorhin, mit dem einzigen Unterschied, dass der Topf bereits mit Wasser gefüllt ist. Was machst du nun?"

Da spricht der Gefragte schon mutiger, seines Rechtes bewusst: "Ich zünde die Gasflamme an und stelle den Topf darauf."
Nun kann man ihn überlegen anfallen: "So verfährt ein Physiker! Der Mathematiker dagegen gießt das Wasser aus dem Topf und sagt: Damit habe ich die Aufgabe auf die vorherige zurückgeführt."

Diese Zurückführung ist jedenfalls der Kern der Lösung von Gleichungen zweiten Grades, nicht aber die Formel, die sich daraus ergibt und vom Schüler so gut eingeprägt wird, dass er sie noch Jahrzehnte nach dem Abitur sogar im Traume hersagen könnte.
Es ergibt sich aber noch eine Schwierigkeit: Nehmen wir an, die Ergänzung der linken Seite zu einem vollen Quadrat sei bereits geschehen, wir finden jedoch keine Zahl, die quadriert die Zahl auf der rechten Seite ergibt, z.B.:

$$(x+3)^2 = 2$$

Habe ich wirklich an eine Zahl gedacht und wird diese durch x vertreten, dann kann das eigentlich nicht vorkommen. Es kommt jedoch sehr häufig in ernsteren Anwendungen der Gleichungen vor. Hier erhebt sich die Frage nach der Umkehrung des Potenzierens:

Wir suchen eine Zahl, die quadriert 2 ergibt. Dies ist die Aufgabe des Wurzelziehens und gehört als umgekehrte Operation in ein späteres Kapitel. (Dort werde ich mich auch mit der Frage befassen, wie viele Lösungen eine Gleichung zweiten Grades besitzt. - Vorläufig freuen wir uns noch, wenn wir überhaupt eine finden.) Zur Beruhigung möchte ich aber bereits jetzt sagen, dass die Aufgabe lösbar ist.

Wer sich nicht auf die Formel stützt, sondern den Gedankengang verstanden hat, kann auch Gleichungen höheren Grades von gewisser Form leicht lösen. Es sei z.B.

$$(x+1)^3 = 27$$

Da $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ ist, so ist 3 diejenige Zahl, deren Kubus 27 ist. Folglich ist $x+1=3$, $x=2$.
$(x+1)^2$ lässt sich nach dem bereits bekannten Binomialsatz auch entwickeln. Aus einer so entwickelten Form kann man umgekehrt auch wiedererkennen, dass sie aus dem Potenzieren einer zweigliedrigen Summe entstanden ist.
Die Ergänzung zu einem vollen Kubus gelingt jedoch nicht bei jeder Gleichung dritten Grades. Dennoch gibt es ein allgemeines Verfahren auch zur Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades. Dabei hat man außer der Verwendung der vier Spezies und dem Quadratwurzelziehen noch dritte und vierte Wurzeln zu ziehen, d.h. Zahlen zu suchen, deren Kubus bzw. vierte Potenz einer gegebenen Zahl, z. B. 2, gleich ist.

Derjenige Zweig der Mathematik, der sich mit Gleichungen befasst, wird Algebra genannt. Die Schule nannte alles in der Mathematik Algebra, was nicht zur Geometrie gehört. Es stimmt jedenfalls, dass in allen Teilen der Mathematik - sogar in der Geometrie - auf Schritt und Tritt Gleichungen vorkommen.
So bildete sich im Schüler leicht die Vorstellung, die ganze Mathematik sei die Wissenschaft von den Gleichungen, die höhere Mathematik also wahrscheinlich die Lehre von den komplizierteren Gleichungen.

Es gab aber tatsächlich eine Zeit, in der sich das Augenmerk der Mathematiker vor allem auf die Algebra richtete. Man konnte sich auf diesem Gebiet die Entwicklung der Mathematik so vorstellen, dass nach der Erledigung der Gleichungen dritten und vierten Grades sinnreiche Methoden zur allgemeinen Lösung der Gleichungen fünften, sechsten und immer höheren Grades erdacht würden.
Man muss sich nun vorstellen, wie erschütternd es wirkte, als der Mathematiker Abel die Bedingung angab, unter der es möglich ist, zur Lösung einer Gleichung beliebig hohen Grades eine aus den vier Spezies und aus Wurzelziehungen bestehende allgemeine Methode zu finden, und es sich dann herausstellte, dass diese Bedingung nur von den Gleichungen ersten, zweiten, dritten und vierten Grades erfüllt wird.

Es kann also keine Rede davon sein, etwa Gleichungen fünften Grades mit unseren Operationen allgemein zu lösen. Es hatte den Anschein, als ob die Algebraiker die Feder aus der Hand legen könnten. Hier kommen wir zu der romantischsten Episode in der Geschichte der Mathematik.

Es geschah, dass ein französischer Jüngling von 20 Jahren, namens Galois, für ein Mädchen ein Duell ausfocht und dabei fiel. Am Vorabend seines Todes schrieb er einen Brief an einen Freund und legte darin - gleichsam als eine letztwillige Anordnung - seine Gedanken nieder, die der Algebra, die ihre Daseinsgrundlagen verloren hatte, einen neuen Aufschwung gaben.

Wenn es auch kein allgemeines Verfahren zur Lösung der Gleichungen fünften Grades gibt, so können wir doch spezielle Gleichungen fünften Grades lösen, z.B. die Gleichung

$$x^5 = 32 \qquad \text{und ebenso} \qquad (x+1)^5 = 32$$

Es ist ja $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$. Die Lösung der ersten Gleichung ist also $x = 2$, und die Lösung der zweiten Gleichung, da $x + 1 = 2$ ist, $x = 1$.

Es können aber auch Gleichungen anderer Form lösbar sein. Um nur eine von den vielen herauszugreifen: Eine Lösung der Gleichung

$$x^5 + 2x^4 + x = 0$$

ist sicher $x = 0$, da jede Potenz und jedes Vielfache von 0 wiederum 0, also $0^5+2\cdot 0^4+0$ tatsächlich gleich 0 ist.

Damit bietet sich ein neues Betätigungsfeld für die algebraische Forschung: Kann man auch an ein allgemeines Lösungsverfahren nicht denken, so ist es noch immer ein interessantes Problem zu untersuchen, welche Gleichungen höheren Grades mit unseren Operationen lösbar sind. Das Galoissche Testament gibt eine Methode an, dies zu entscheiden.
Diese Methode erwies sich als sehr fruchtbar. Ihr ist es zu verdanken, dass die in Bedrängnis geratene Algebra sich zu neuer Blüte entfaltet hat, mächtiger als vorher.

Wo der Mathematik eine Wunde geschlagen wird, dort setzt die Regeneration mit allen Kräften ein. Der neue Spross der Algebra bewahrt das Andenken von Galois auch im Namen: Er wird Galoissche Theorie genannt.

Auf eines möchte ich den Leser noch aufmerksam machen: In der Algebra stoßen wir zum erstenmal auf die Erscheinung, dass die Mathematik imstande ist, ihre eigene Unzulänglichkeit auf einem abgegrenzten Gebiet mit ihren eigenen Mitteln zu beweisen. Dies wird uns noch mehrfach begegnen.

2 Die schöpferische Form

2.1 Auseinanderlaufende Zahlen

In den vorherigen Kapiteln hat sich bereits ein Stoß Schulden angesammelt. Diese knüpfen sich alle mehr oder weniger an die Umkehrungen der Rechenoperationen. Es ist jetzt Zeit, den umgekehrten Operationen in die Augen zu schauen.
Die Subtraktion scheint noch am harmlosesten zu sein. Worum handelt es sich denn hier? Die Addition lässt sich folgendermaßen umkehren:

Ich kenne die Summe zweier Glieder, z.B. 10, und den einen Summanden, z.B. 6. Wie groß ist der andere Summand?
Das Ergebnis lautet natürlich 4, denn soviel bleibt ja übrig, wenn der gegebene Summand von 10 abgezogen wird. Wo ist denn hier die Schwierigkeit?

Die Schwierigkeiten beginnen damit, dass ich ein klein wenig nachdenken musste, ehe ich die Zahlen 10 und 6 als Beispiel anführte.
Im Falle der Addition hätte ich blindlings zwei Stellen in der Reihe der natürlichen Zahlen auswählen können. Es ist sicher, dass auch die hier angeführten Zahlen sich hätten zusammenrechnen lassen, und zwar sogar in beliebiger Reihenfolge. Was wäre aber geschehen, wenn ich unser Beispiel so formuliert hätte:

Die Summe zweier Glieder ist 6, das eine Glied ist 10; wie groß ist das andere? Hier ist offenbar schon die Behauptung selbst unmöglich.
Die Summe kann ja nicht geringer sein als eines ihrer Glieder. Wir müssen also darauf achten, dass der Minuend stets größer ist als der Subtrahend.

Das ist alles? Der Leser denkt gewiss: Deshalb lohnte es sich doch nicht, diese einfache Operation auf die lange Bank zu schieben! Es fällt niemandem ein, mehr wegzunehmen, als vorhanden ist, und die anderen vernünftigen Subtraktionen lassen sich ja ohne jede Schwierigkeit durchführen.

Das wäre schon richtig; doch es gibt Fälle, wo die Aufgabe, von einer kleineren Zahl eine größere abzuziehen, sich förmlich aufdrängt. Denken wir nur zurück an unsere eingekleidete Gleichung, bei der zu erraten war, nach wieviel Jahren ein Vater doppelt so alt sein wird wie sein Sohn.

Jetzt stelle ich dieselbe Frage für einen Vater von 52 Jahren und einen Sohn von 27 Jahren. Man schließt wie damals:
Die betreffende Erscheinung wird nach x Jahren eintreten. Dann wird jeder x Jahre älter sein. Der Vater wird $52+x$ Jahre, der Sohn $27+x$ Jahre alt sein, und ich behaupte, dass

$$52 + x = 2 \cdot (27 + x)$$

ist. Verfahren wir in der bekannten Weise: Auf der rechten Seite führen wir die Multiplikation mit beiden Gliedern aus:

$$52 + x = 54 + 2x$$

Nun sammeln wir die Unbekannten auf der rechten Seite; wir bringen also das linke x als Subtrahenden nach rechts, die 54 dagegen als Subtrahenden auf die linke Seite:

$$52 - 54 = 2x - x$$

Von $2x$ ein x abgezogen, ergibt ein x:

$$52 - 54 = x$$

Hier aber bleiben wir stecken: Die zu erratende Zahl müsste so groß sein wie das Resultat der unmöglichen Subtraktion $52 - 54$.
Man könnte nun schließen: Kann die Unbekannte nur das Resultat der Subtraktion $52 - 54$ sein, so haben wir den Fehler in der Fragestellung selbst zu suchen: Dieser Vater wird niemals doppelt so alt werden wie sein Sohn.

Aber sehen wir uns die in der Aufgabe auftretenden Lebenszeiten, 52 Jahre und 27 Jahre, etwas näher an. Wer Sinn für Zahlen hat, wird bemerken, dass vor 2 Jahren der Vater 50 und der Sohn 25 Jahre alt war. So war also damals das Alter des Vaters doppelt so groß wie das des Sohnes.

Es scheint demnach, dass man die Aufgabe nur etwas umformulieren muss: Vor wieviel Jahren war der Vater zweimal so alt wie sein Sohn?

So werden wir mit der Gleichung nicht mehr in Verlegenheit geraten. Vor x Jahren war das Alter eines jeden um x Jahre geringer; damals war also der Vater $52 - x$, der Sohn $27 - x$ Jahre alt, und wir behaupten von diesen Lebenszeiten, dass

$$52 - x = 2 \cdot (27 - x)$$

ist. Auf der rechten Seite kann die Differenz wiederum mit 2 multipliziert werden, indem man sowohl 27 als auch x mit ihr multipliziert:

$$52 - x = 54 - 2x$$

(Hätte man uns nämlich z.B. die Aufgabe $2 \cdot 99$ gestellt, dann könnten wir diese am leichtesten lösen, wenn wir 100 statt 99 mit 2 multiplizieren, aber von der gewonnenen Zahl 200 dann 2 abziehen. Hier haben wir 99 als die Differenz $100 - 1$ aufgefasst, und darum erhielten wir ihr Zweifaches in Gestalt der Differenz $2 \cdot 100 - 2 \cdot 1$)

Jetzt sammeln wir die Unbekannten auf der linken Seite, d.h. wir bringen den Subtrahenden $2x$ als Summanden nach links:

$$2x + 52 - x = 54$$

und dann noch den Summanden 52 als Subtrahenden nach rechts:

$$2x - x = 54 - 52$$

Nun kann man die Subtraktionen getrost durchführen:

$$x = 2$$

wie wir es bereits vermutet haben.

Diese Lösung wurde aber recht sauer erworben. Wir gingen den Weg in der alten Weise, bis wir an eine Wand stießen. Dort mussten wir umkehren, die Frage anders stellen und das Ganze wieder von vorn anfangen. Dabei hatten wir die Lösung bereits in den Händen. Kehren wir nur dahin zurück, wo wir nicht weiter kamen.

$$52 - 54$$

ruft uns beinahe zu: "Ich verrate doch, dass die Differenz 2 ist! Ja noch mehr; auch dass diese 2 Jahre in entgegengesetzter Richtung zu suchen sind; nicht nachher, sondern vorher. Warum wollt ihr das nicht aus mir entnehmen?"

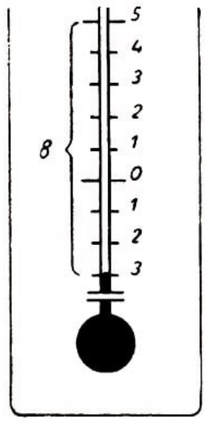
Es liegt also nahe, auch der Differenz $52 - 54$ einen Sinn beizulegen, sie als das zu betrachten, was die Differenz von 54 und 52 ausmacht, jedoch mit einer bestimmten - von der gewohnten abweichenden - Richtung zu versehen. Da diese Richtung in die zurückliegende Zeit weist und somit andeutet, dass von dem gegenwärtigen Lebensalter 2 Jahre abzuziehen sind, bezeichnet man sie mit dem Zeichen der Subtraktion. Demnach ist also

$$2 - 4 = -2$$

Unsere bisherigen Zahlen wären demgemäß eigentlich mit der Bezeichnung "$+$" zu versehen, denn hätte das Ergebnis unserer Gleichung ausgesagt, dass die betreffende Situation nach 2 Jahren eintritt, so wären zu dem gegenwärtigen Alter 2 Jahre zu addieren gewesen. Will ich dies betonen, dann werde ich das Zeichen "$+$" auch hinschreiben.

Das ist nicht der einzige Fall, in dem einer Größe auch eine Richtung zugeschrieben wird. Wenn wir z.B. an einem Wintertag sagen, dass das Thermometer 4 Grad anzeigt, so haben wir damit noch keine erschöpfende Auskunft über die Temperatur erteilt. Es muss auch angegeben werden, ob diese 4 Grad über 0 oder unter 0 liegen. Für empfindliche Menschen kann das einen ernsthaften Unterschied bedeuten.
Ebenso nachlässig ist es, vom 3. Jahrhundert zu sprechen, ohne zu sagen, ob es sich um das 3. Jahrhundert vor oder nach dem Beginn unserer Zeitrechnung handelt; oder über 15° geographische Länge zu sprechen, ohne anzugeben, ob diese 15° östlich oder westlich von jenem Meridian der Erde liegen, von dem aus wir zählen.

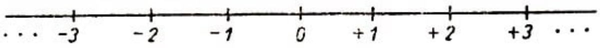
Auch der Buchhalter hat sehr darauf zu achten, ob ein Posten von z.B. 1000 DM rechts oder links von der Mittellinie seines Kontos auftritt, denn den meisten Menschen ist es nicht gleichgültig, ob sich ihr Besitz um 1000 DM vermehrt oder vermindert.
In all diesen Fällen kann man die gegensätzlich gerichteten Größen mit der Bezeichnung "$+$" bzw. "-" und mit verschiedenen Namen versehen: Größen, die ein "$+$ Vorzeichen" erhalten, nennt man positiv, Größen, die ein "- Vorzeichen" erhalten, werden negativ genannt.
Jede negative Zahl lässt sich als das Resultat einer Subtraktion auffassen, bei der von einer kleineren positiven Zahl eine größere abgezogen wird.



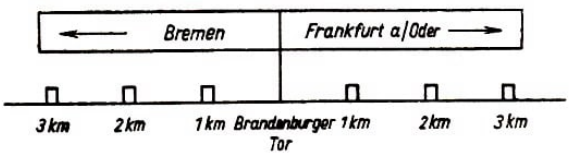
Wenn das Thermometer z. B. 5 Grad über 0 anzeigt und die Temperatur um 8 Grad sinkt, so bedeutet dieses Sinken eine Verminderung, die wir geneigt sind, durch eine Subtraktion auszudrücken.
Es hindert uns nun nichts mehr, $5°$ um $8°$ zu vermindern; wir brauchen nur $0°$ zu überschreiten, und erhalten als Ergebnis $3°$ unter 0, d.h. $-3°$:

$$5 - 8 = -3$$

Eine solche Subtraktion führt immer über 0 hinaus, in die entgegengesetzte Richtung. Wollen wir also die mit Richtungen versehenen Größen auf unserer Zahlengeraden darstellen, so müssen wir die positiven Zahlen in der einen Richtung (gewöhnlich nach rechts) abtragen, die negativen Zahlen aber in der entgegengesetzten Richtung:



Diese Zahlengerade selbst kann als eines unserer Beispiele für gegensätzlich gerichtete Größen aufgefasst werden; wir brauchen sie uns nur als eine Landstraße vorzustellen, mit einem Wegweiser im Nullpunkt:

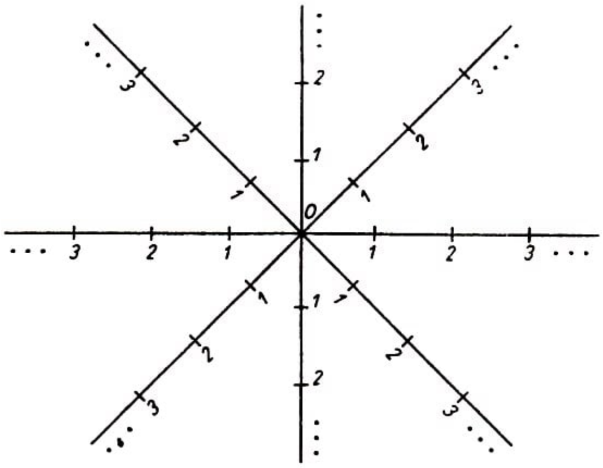


Es gibt auch Fälle, in denen uns nur der "absolute" Wert der Zahlen interessiert und nicht ihre Richtung, z. B. wenn wir wissen wollen, wie groß der Abstand zweier Punkte ist. So hat z.B. eine Schlange die Länge von 3 Metern, ohne jegliches Vorzeichen. Niemand glaubt im Ernst, dass sie vom Schwanz bis zum Kopf 3 Meter und vom Kopf bis zum Schwanz ebenfalls 3 Meter, also insgesamt 6 Meter lang ist.

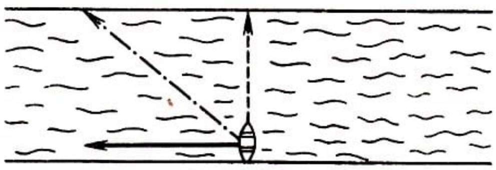
Dennoch war es fast zu erwarten, dass einmal auch in der Mathematik Gegensätze auftauchen werden; Paare gegensätzlicher Natur sind ja so charakteristisch für das menschliche Denken: ja und nein, Licht und Schatten, These und Antithese.

Ein feinerer Sinn spürt aber nicht nur die groben Gegensätze: Es gibt zahllose Übergänge vom Schatten zum Licht. Von einem Ausgangspunkt führen nicht nur nach zwei Richtungen Wege:

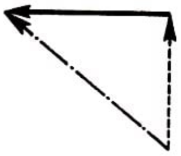
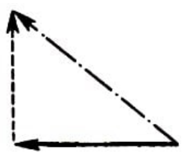
Vom Brandenburger Tor laufen die Straßen nach allen Richtungen der Windrose auseinander. Wir hätten also die Halbgerade, auf der die natürlichen Zahlen dargestellt wurden, nicht nur durch ihren Antipoden zu ergänzen, sondern durch eine ganze Menge von Radialstraßen, die durch den Nullpunkt gehen:



Das ist nicht etwa nur eine vage Vorstellung; die beliebig gerichteten Größen, die sogenannten Vektoren, spielen in der Physik eine wichtige Rolle:
Eine Bewegung kann in beliebiger Richtung verlaufen, eine Kraft in beliebiger Richtung wirken. Es hat auch einen Sinn, über Rechenoperationen mit solchen gerichteten Größen zu sprechen; etwa wenn z. B. zwei Kräfte zugleich wirken und wir ihre gemeinsame Richtung wissen wollen. Jeder Ruderer weiß, dass er bei einer Flussüberfahrt das Ufer nicht gegenüber dem Ausgangspunkt erreicht, sondern weiter unten, da er nicht nur von der eigenen Muskelkraft bewegt, sondern auch vom Strome mitgerissen wird:



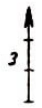
In einem stillen Gewässer würde das Boot entlang der gestrichelten Linie gleiten, und ein Strom würde ein ruhendes Boot in der gleichen Zeit die dicke Linie entlangführen. Unter beiden Wirkungen zugleich gleitet es die strichpunktierte Linie entlang und gelangt so zu demselben Ort, als hätte es gleichsam den gestrichelten und den dickgezeichneten Weg nacheinander zurückgelegt:

 oder in umgekehrter Reihenfolge: 

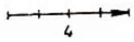
In beiden Reihenfolgen würde das Boot an denselben Ort gelangen; die Glieder lassen sich also auch in dieser Summierung vertauschen. Man kann diese Summierung auch als ein Weiterzählen auffassen:

Wir zählen die Einheiten der einen Komponente in dieser Richtung ↑, dann zählen wir um die Einheiten des anderen Vektors in solcher Richtung ← weiter und sehen nach, welcher Vektor auf geradem Weg dahin geführt hätte, wohin wir auf diese Weise gelangt sind. Dieser Vektor wird das Resultat oder, wie es hier genannt wird, die Resultante sein.

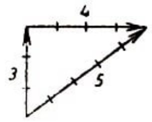
Hier nun eine sonderbare Addition: die Summe z.B. von



und von



:



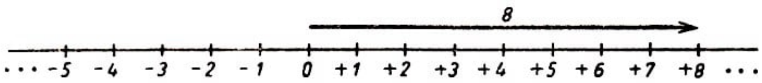
besteht genau gemessen aus 5 Einheiten. Man kommt also scheinbar zu folgendem absurden Resultat:

$$3 + 4 = 5$$

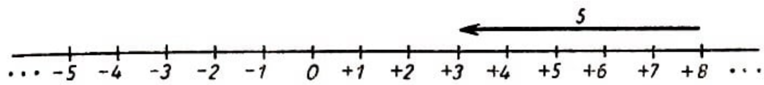
Hierbei darf man sich aber nie nachlässig ausdrücken, sondern muss sagen, wie diese 3, diese 4 und diese 5 gerichtet sind; dann ist es schon nicht mehr so absurd, dass wir ein kleineres Resultat als $3 + 4 = 7$ erhalten haben.

Die Summe entgegengesetzter Kräfte kann ja sogar 0 sein: Die Schildbürger sollen einmal weitere 4 Pferde zum Ziehen eines Vierspänners angespannt haben; doch wie sich die Pferde auch bemühten, der Wagen rührte sich nicht vom Fleck; denn - die neuen Pferde wurden an das andere Ende des Wagens gespannt, den ersten 4 Pferden entgegengesetzt.
Jetzt wollen wir die in allen Richtungen auseinander laufenden Zahlen nicht weiter verfolgen; wir begnügen uns mit den beiden entgegengesetzten Richtungen.

Wir haben bereits eine Anweisung erhalten, wie positive und negative Zahlen auf der Zahlengeraden zu addieren sind. Hat man z.B. -5 zu +8 zu addieren, so zählt man erst, von 0 ausgehend, um 8 Einheiten nach rechts:



dann von hier aus um 5 Einheiten nach links:



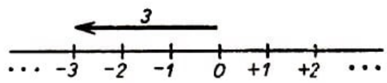
und gelangt dann zu + 3. Folglich ist die Summe von + 8 und - 5 eben +3.
Vergessen wir - im Hinblick auf das später Folgende - nicht, dass

$$8 + (-5) = 3 = 8 - 5$$

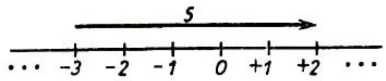
ist. Man kann also auch, anstatt eine negative Zahl zu addieren, eine einfache Subtraktion ausführen.

Auf unserer Zahlengeraden ist auch die Subtraktion nicht schwer, wenn wir das vorige

Verfahren umkehren. Ziehen wir z.B. -3 von +2 ab, so bedeutet das: Es liegt eine Addition mit dem Resultat + 2 vor. Der eine Summand ist - 3, der andere wird gesucht. Die Addition begann damit, dass man von 0 aus um 3 Einheiten nach links ging:



Nun frage ich: Was musste nachher geschehen, wenn man zum Schluss bei + 2 angelangt ist?
Von -3 hat man um 5 Einheiten nach rechts zu gehen, um zu +2 zu gelangen:



Folglich ist die Differenz von +2 und -3 eben +5. Wie interessant! Es ergibt sich dasselbe, als hätte man +3 zu +2 addiert!

Das ist auch immer so: Statt einer Subtraktion kann stets eine Addition ausgeführt werden, jedoch die Addition einer Zahl mit umgekehrtem Vorzeichen.
Man könnte glauben: Da wir bereits in der Lage sind, negative Zahlen zu addieren, so muss auch die Multiplikation glatt gehen. Die -2 dreimal zu nehmen, bedeutet ja die folgende Addition:

$$(-2) + (-2) + (-2)$$

und zählt man von -2 aus nach links um noch 2, dann wieder nach links um noch 2, so gelangt man zu -6:

$$(+3) \cdot (-2) = -6$$

Was aber, wenn der Multiplikator eine negative Zahl ist? Eine Zahl lässt sich 2mal, 3mal, 4mal addieren, es hat aber wirklich keinen Sinn, dass sie -2mal addiert werden soll. Nun haben wir aber bereits einige Erfahrungen gesammelt. Wir werden darum nicht mehr so leichthin sagen: Hat es keinen Sinn, so tun wir es nicht.

Es wurden ja bereits die negativen Zahlen eingeführt, damit wir bei gewissen Aufgaben nicht zwei Fälle zu unterscheiden brauchen, sondern einheitlich verfahren können. Bei der Multiplikation liegt das gleiche vor:
Haben wir eine Aufgabe, die sich im Bereich der positiven Zahlen durch eine Multiplikation lösen lässt, so ist es unbequem, stets verschiedene Fälle zu unterscheiden, indem wir sagen: Im Falle positiver Daten haben wir zu multiplizieren, im Falle negativer Daten haben wir etwas anderes zu tun.

Sehen wir zu, was jenes "andere" ist, das man hier zu tun hat. Eben dies wollen wir im Falle negativer Zahlen unter der Multiplikation verstehen. Wir haben in der Tat das Recht dazu: Was bisher keinen Sinn hatte, dem können wir noch nach Belieben eine Bedeutung erteilen.
Ein Beispiel sagt mehr als viele Worte.

Spaziert jemand in einem gleichmäßigen Tempo von 3 km pro Stunde, welchen Weg

legt er in 2 Stunden zurück? Darauf antwortet offenbar eine Multiplikation: Werden in einer Stunde 3 km vom Spaziergänger zurückgelegt, so in 2 Stunden $2 \cdot 3 = 6$ km.
Ich erhalte also den Weg, wenn ich mit der Zeit des Spazierganges die Geschwindigkeit des Spaziergängers multipliziere.

Richten wir nun die Aufgabe so ein, dass sowohl Weg als auch Zeit und Geschwindigkeit gerichtete Größen sind. Auf dem Wege befindet sich ein Punkt - ich werde ihn "hier" nennen -, und einen Spaziergang werde ich als positiv betrachten, wenn er nach rechts, als negativ, wenn er nach links von "hier" führt.
Wenn 3 km pro Stunde nach rechts zurückgelegt werden, so sage ich, dass die Geschwindigkeit des Spaziergängers $+3$ km beträgt; wenn aber nach links, so sage ich, dass seine Geschwindigkeit -3 km pro Stunde ist.

Endlich wähle ich einen Zeitpunkt - ich werde ihn "jetzt" nennen - und die Zeit, die danach vergeht, wird als positiv, die Zeit, die vor ihm vergangen ist, als negativ betrachtet. Für den Ausgangspunkt heißt es immer: "Jetzt ist der Spaziergänger eben hier":

Beschränken wir uns auf die kritischen Fälle:
1. Ein Spaziergänger hat eine Geschwindigkeit von $+3$ km pro Stunde; jetzt ist er eben hier. Wo war er vor 2 Stunden? Was wir hier erhalten, ist als das Resultat der Multiplikation

$$(-2) \cdot (+3)$$

zu betrachten.
Überlegen wir: Der Betreffende hat eine positive Geschwindigkeit, folglich ist er nach rechts spaziert. Jetzt ist er hier, er ist hier angelangt (bitte auf die Tafel sehen). Vor 2 Stunden muss er also links von der Tafel gewesen sein, und zwar um soviel, wie die Länge des Weges beträgt, den er in 2 Stunden zurückgelegt hat, um $2 \cdot 3 = 6$ km. Doch 6 km links von der Tafel steht -6. Es ist also

$$(-2) \cdot (+3) = -6$$

Wenn also eine positive Zahl mit einer negativen multipliziert wird, dann ergibt sich ein negatives Resultat.

2. Die Geschwindigkeit sei -3 km pro Stunde. Jetzt ist der Spaziergänger eben hier. Wo war er vor 2 Stunden? Dies werden wir als das Resultat der Multiplikation

$$(-2) \cdot (-3)$$

betrachten.
Die negative Geschwindigkeit bedeutet, dass der Spaziergänger nach links ging; jetzt ist er hier angelangt (bitte wieder auf die Tafel sehen). Dies ist aber nur dann möglich,

wenn er vor 2 Stunden rechts von der Tafel war, und zwar wiederum um 6 km. Doch 6 km rechts von der Tafel steht +6. Es ist also

$$(-2) \cdot (-3) = +6$$

Demnach ist das Produkt zweier negativer Zahlen positiv.
Das ist ebenso wie bei der doppelten Verneinung "Es ist nicht wahr, dass ich nicht aufgepasst habe" - bedeutet: "Doch, ich habe aufgepasst".

Aus der Vorzeichen-Regel der Multiplikation können wir sofort ersehen, dass die Division eine ähnliche Regel besitzt.

$$(+6) : (-3)$$

bedeutet z. B., dass die Zahl gesucht wird, die mit -3 multipliziert +6 ergibt. Dies ist aber offenbar -2. Nun die Vorzeichenregel des Potenzierens:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)} = (+4) \cdot (+4) = +16$$

und

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)} \cdot (-2) = \underbrace{(+4) \cdot (+4)} \cdot (-2) = (+16) \cdot (-2) = -32$$

Allgemein ergeben die negativen Faktoren paarweise je ein positives Produkt, und die Frage ist nur, ob außer den Paaren noch ein Faktor übrig bleibt oder nicht. Die Potenzen einer negativen Zahl sind folglich bei geraden Exponenten positiv, bei ungeraden Exponenten negativ.

Wir haben hier die Erweiterung des Multiplikationsbegriffes auf negative Zahlen auf ein einziges Beispiel gegründet. Es könnten nun Zweifel aufsteigen, ob ein anderes Beispiel nicht etwa zu einer anderen Regel geführt hätte.
Eine vollständige Beruhigung gewährt erst die Tatsache, dass unsere neue Multiplikationsregel sämtliche Gesetze erfüllt, die wir für die Multiplikation von natürlichen Zahlen festgestellt haben, so dass wir die neue Regel unbekümmert anwenden können, ohne mit unserer bisherigen Mathematik in Widerspruch zu geraten.
Es stimmt z. B. auch hier, dass man die Faktoren vertauschen kann. Wir haben ja gesehen (und hätten es auch mit Hilfe des Spaziergängerbeispiels ableiten können), dass

$$(-2) + (-2) + (-2) = -6 \qquad \text{das heißt} \qquad (+3) \cdot (-2) = -6$$

ist. Aus dem Spaziergängerbeispiel haben wir aber

$$(-2) \cdot (+3) = -6$$

erhalten. Folglich ist

$$(+3) \cdot (-2) = (-2) \cdot (+3)$$

Wenn wir neue Zahlen oder neue Operationen einführen, werden wir - da es ja der Zweck ist, unser Verfahren einheitlich zu machen -, immer darauf achten müssen, dass die alten Regeln erfüllt bleiben. Diese Behutsamkeit in der Erweiterung der alten Begriffe wird "Prinzip der Permanenz" genannt.

Die Reihe der natürlichen Zahlen war eine spontane Schöpfung. Das Stocken des zunächst gut funktionierenden Mechanismus regte den Menschen an, bewusst neue Zahlen zu erzeugen. Was ihm dabei zu Hilfe kommt, ist die Form.
Für das Rechnen mit den neuen Zahlen ist der genaue Rahmen durch die Gesetze gegeben, die für die alten Zahlen festgestellt wurden und von denen wir so wenig wie möglich abgehen wollen. Dieser Gesichtspunkt gibt uns eine Anleitung für das bewusste Schaffen:

Die neue Zahl ist so zu gestalten, dass sie sich gut in die fertigen Formen einpasst.

Wie Goethe sagt - es ist ja auch das Wort die Form der Gedanken -

"Denn eben wo Begriffe fehlen,
Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein."

2.2 Unbegrenzte Dichte

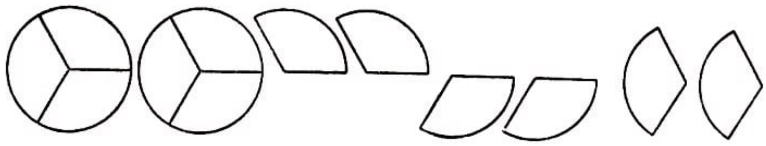
Das neue Problem bedarf nicht einmal einer Gleichung; selbst dem kleinsten Kind kann es zustoßen, dass es vor die Aufgabe einer Division gestellt wird, die sich im Bereich der natürlichen Zahlen nicht durchführen lässt.
Zwei Kinder wollen einen Apfel untereinander teilen. Sie sind sich darin einig, dass keines von ihnen einen ganzen Apfel bekommen wird. Sie werden den Apfel ohne weiteres halbieren,

$\frac{1}{2}$ Apfel

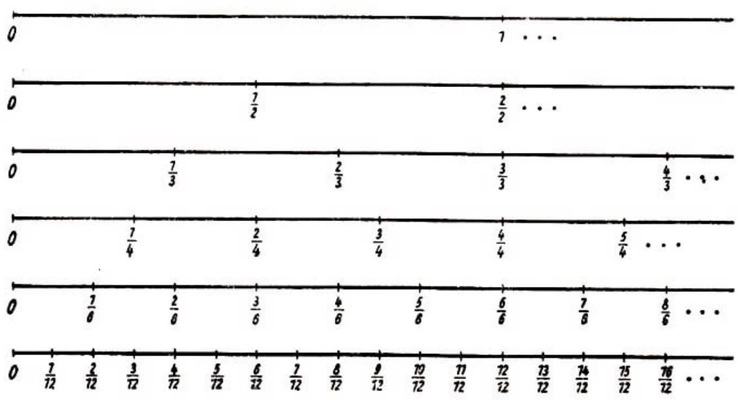
und dabei fällt ihnen bestimmt nicht ein, dass sie damit den Zahlbegriff wieder erweitert haben.

Bisher haben wir einen Einer als eine unteilbare Einheit betrachtet. Jetzt führen wir seine Hälfte als eine neue, kleinere Einheit ein. Ist nun der erste kühne Schritt getan, dann hindert uns nichts daran, ein Ganzes auch in 3, in 4, in 5, ..., in beliebig viele Teile zu teilen und mit den so gewonnenen kleinen neuen Einheiten weiterzuzählen, z. B. an Hälften, drei Hälften, vier Hälften, ..., oder in Zeichen: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$,...

Diese Bezeichnung steht nicht in Widerspruch damit, dass mit dem Bruchstrich bisher eine Division angedeutet wurde. Sollen wir nämlich z.B. 2 durch 3 dividieren, oder gleich konkreter: wollen 3 Kinder 2 Torten untereinander teilen, so können sie das am geschicktesten durchführen, wenn sie beide Torten in Drittel schneiden. Dann bekommt jedes von ihnen zwei Drittel, d.h. $\frac{2}{3}$ Torten:



Die Zahl unter dem Bruchstrich benennt die Einheiten, um die es sich handelt: Sie ist der Nenner. Die Zahl über dem Bruchstrich zählt, wieviele solche Einheiten genommen werden: Sie ist der Zähler.
So vermehrt sich wiederum unsere Zahlengerade: Man kann immer neue Zahlengeraden bilden mit immer kleineren Einheiten. Einige von ihnen gebe ich an:



Unter den Einheiten der verschiedenen Linien gibt es auch gleiche. Beobachten wir nur, welche von ihnen genau untereinander fallen: Es sind z.B.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

und man kann daraus ersehen, welche scheinbaren Veränderungen es sind, die den Wert des Bruches tatsächlich nicht verändern.
Es ist z. B. $\frac{4}{6}$ mit dem einfacheren Bruch $\frac{2}{3}$ gleichwertig; $\frac{4}{6}$ lässt sich zu $\frac{2}{3}$ "kürzen". Man führt dies so aus, dass man sowohl den Zähler als auch den Nenner durch 2 dividiert: $4 : 2 = 2$, $6 : 2 = 3$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Das ist aber auch natürlich.
Bitte nachprüfen, dass die Drittel zweimal so groß sind wie die Sechstel, und dass man das Gleiche erhält, wenn man von doppelt so großen Stücken halb so viele nimmt.

Wir sehen auch, dass z.B. $\frac{3}{3}$ einem Ganzen gleich ist und $\frac{4}{3}$ einem Ganzen und $\frac{1}{3}$ dazu (hierfür schreibt man kurz $1\frac{1}{3}$). Solche Brüche sind also keine echten Brüche, denn ihr Wert ist ja nicht ein Teil von einem Ganzen. Sie werden deshalb unechte Brüche genannt.
Dass sich unsere neuen Einheiten auf einer einzigen Linie durch einfaches Weiterzählen addieren und subtrahieren lassen, ist selbstverständlich: Zählt man z. B. von $\frac{3}{4}$ aus um zwei Viertel weiter, so gelangt man zu $\frac{5}{4}$, es ist also

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Ebenso verläuft die Multiplikation mit einer ganzen Zahl:

$$2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12}$$

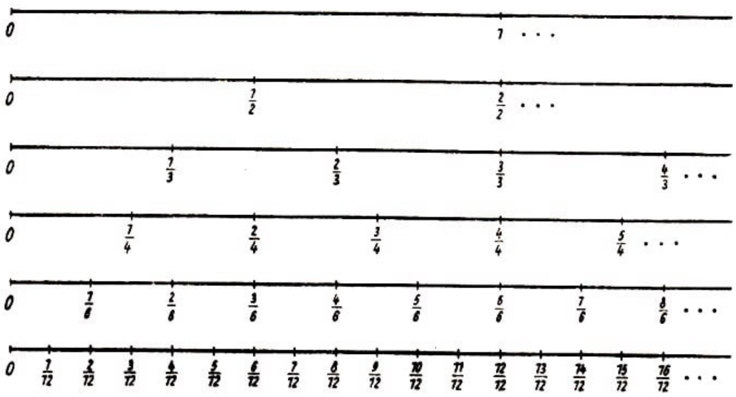
und zählt man von $\frac{5}{12}$ aus um 5 Zwölftel weiter, so gelangt man zu $\frac{10}{12}$.

Wir werden aber ein wenig stocken, wenn wir Zahlen addieren sollen, die aus verschiedenen Einheiten bestehen, z.B. wenn die Aufgabe

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

gestellt ist. Hier kann man den folgenden Ausweg wählen: Man sucht die nächste Zahlengerade, auf der sowohl eine Zahl zu finden ist, die mit $\frac{2}{3}$, als auch eine, die mit $\frac{3}{4}$ gleich ist (man überlegt sich leicht, dass es eine solche Zahlengerade immer gibt). Hier erfüllt die Zahlengerade der Zwölftel den Zweck. Auf ihr sind

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

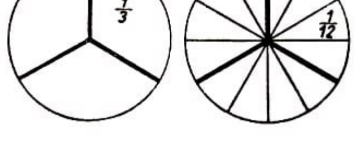


und so kann man nun auf einer einzigen Zahlengeraden die einfache Addition

$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$$

ausführen.
Ähnlich wie in diesem Falle muss man auf eine andere Zahlengerade überspringen, wenn es sich um eine Division handelt.[5]

Bitte nachmessen, dass die Hälfte von $\frac{1}{2}$ soviel wie $\frac{1}{4}$, ein Viertel von $\frac{2}{3}$ soviel wie $\frac{2}{12}$ ist. Das ist auch natürlich, denn ein viermal so großer Nenner bedeutet ja, dass ein Ganzes in viermal so viele Teile geteilt wird, und von den so entstehenden Teilen werden ebenso viele genommen wie zuvor von den größeren Teilen.
Somit muss das Ergebnis viermal kleiner ausfallen, z.B. bei Torten:



[5]Das erinnert mich daran, wie die Elektronen bei der Aussendung von Strahlung von der einen möglichen Bahn auf die andere überspringen. Vielleicht wird es auch Leser geben, denen dieses Bild aus der modernen Atomtheorie etwas zu sagen hat.

Wir sehen also, dass wir bei der Anwendung einer beliebigen der aufgezählten Operationen auf Brüche wieder irgendeinen (echten oder unechten) Bruch als Ergebnis erhalten. Es macht nichts, dass man dabei manchmal auf verschiedenen Klaviaturen unserer Orgel zu spielen hat.

Ein wirkliches Problem bildet wieder die Multiplikation mit einem Bruch. Es hat wiederum keinen Sinn, irgend etwas $\frac{1}{2}$ mal nacheinander zu addieren. Ein kleiner Schüler sagte einmal:
Ist ein Ganzes mal 3 soviel: 3, dann ist $\frac{1}{2}$ mal 3 soviel , - und er hatte damit auch etwas recht.

Immerhin hilft uns hier der Sprachgebrauch: "Peter ist $\frac{2}{3}$ mal so groß wie sein Bruder"; - damit will man ausdrücken, dass die Größe von Peter $\frac{2}{3}$ der Größe seines Bruders beträgt.
Irgend etwas $\frac{2}{3}$ mal zu nehmen, bedeutet hiernach, dass man nicht das Ganze nimmt, sondern nur zwei Drittel davon. Das ist tatsächlich jene Multiplikation, die sich bei eingekleideten Aufgaben empfiehlt:

Wenn 1 kg Trauben 5 DM kostet, dann kosten 4 kg offenbar $4 \cdot 5 = 20$ DM. Ich erhalte also den Preis, wenn ich den Preis von 1 kg mit der Zahl der kg multipliziere, die gekauft werden. Jetzt modifiziere ich die Aufgabe: 1 kg Trauben kostet 5 DM. Was kosten $\frac{3}{4}$ kg?
Was ich dabei erhalte, das werde ich als das Resultat der Multiplikation

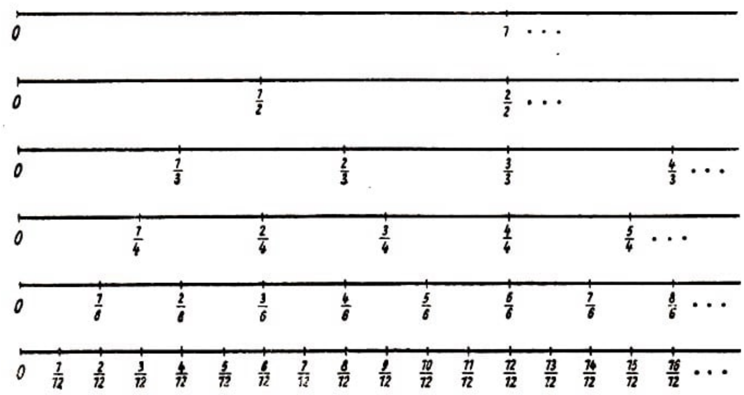
$$\frac{3}{4} \cdot 5$$

betrachten.
Der Preis von dreiviertel Kilogramm lässt sich offenbar berechnen, indem man den Preis von 4 kg 3 mal nimmt. Der Preis von 4 kg ist aber ein Viertel von 5 DM (das ist 1,25 DM); hiervon ist also das Dreifache zu nehmen (man erhält so 3,75 DM).
$\frac{3}{4} \cdot 5$ bedeutet also tatsächlich, dass man drei Viertel von 5 nimmt, und dies führt man aus, indem man durch 4 dividiert und mit 3 multipliziert.

Eine ganz ähnliche Überlegung führt dazu, dass man durch $\frac{3}{4}$ dividiert, indem man mit 4 multipliziert und durch 3 dividiert.

So ergeben diese Operationen als Resultat wieder Brüche (auf irgendeiner Zahlengeraden), und man kann zeigen, dass bei einer solchen Erweiterung des Multiplikationsbegriffes jede der alten Rechnungsregeln erhalten bleibt.

Es ist nicht verwunderlich, dass hier das Ergebnis häufig kleiner ist als die Zahl, die multipliziert wurde. Eine Zahl $\frac{2}{3}$ mal zu nehmen, bedeutet ja, zwei Drittel von ihr zu nehmen. Das ist aber offenbar weniger als die betreffende Zahl selbst.



Es ist sehr leicht, 20 mit $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren. Man hat einfach ein Viertel von 20 zu nehmen; das Ergebnis ist also 5. Ebenso leicht ist die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$, mit $\frac{1}{3}$, mit $\frac{1}{5}$, denn man muss ja dabei nur die Hälfte, ein Drittel, ein Fünftel des Multiplikanden nehmen.
Daher lohnt es sich, die Brüche in sogenannte "Stammbrüche" mit dem Zähler 1 zu zerlegen. Z. B. ist

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$$

und prüfen wir auf den entsprechenden Zahlengeraden nach, so sehen wir, dass $\frac{4}{12}$ ebensoviel ist wie $\frac{1}{3}$. Also ist

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$\frac{1}{12}$ ist aber der vierte Teil von $\frac{1}{3}$ (bitte nachsehen). Demnach lässt sich z.B. die Multiplikation

$$84 \cdot \frac{5}{12} = 84 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)$$

so durchführen, dass man erst ein Drittel von 84 nimmt - das ergibt 28 - und dann ein Viertel davon - das ist 7. Dann liefert $28 + 7$ das Ergebnis 35.
Das ist eine große Erleichterung für die Engländer, die in ihren Maßeinheiten noch immer die Überreste von verschiedenen Zahlensystemen bewahrt haben; so teilt man z.B. ihre Geldeinheit, den Schilling, in 12 Pennies. Sie müssen folglich auf Schritt und Tritt mit Zwölfteln multiplizieren.

Es hat sich herausgestellt, dass man jede unserer Grundrechnungsarten auch im Bereich der Brüche durchführen kann. Nehmen wir noch ein Beispiel dafür:
Jemand löst mathematische Aufgaben. Mit der leichtesten wird er in $\frac{1}{3}$ Stunde (20 Minuten) fertig, über die schwerste aber zerbricht er sich $\frac{1}{2}$ Stunde lang (30 Minuten) den Kopf. Wieviel Zeit braucht er durchschnittlich für die Lösung einer Aufgabe?

Mit dem leichtesten und dem schwersten Exempel plagt er sich insgesamt

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

Stunden. Wären diese gleich schwer, dann würde auf eine von ihnen die Hälfte dieser Summe fallen. Wahrscheinlich hat er so lange an einer durchschnittlichen Aufgabe zu arbeiten. Berechnen wir diese Zeit:

Auf der Geraden mit den Sechsteln finden wir sowohl eine Zahl, die mit $\frac{1}{3}$, als auch eine solche, die mit $\frac{1}{2}$ übereinstimmt:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Die Summe von $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ ist also ebensoviel wie

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

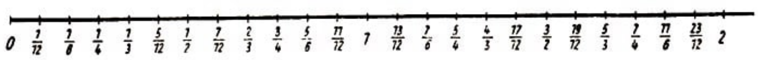
und die Hälfte hiervon beträgt

$$\frac{5}{12}$$

auf der Geraden mit den Zwölfteln (bitte nachprüfen). Die Lösung einer Aufgabe erfordert also im Durchschnitt $\frac{5}{12}$ Stunden (25 Minuten).

Das ist natürlich mehr als die Zeit, die der leichtesten, und weniger als die Zeit, die der schwersten Aufgabe zu widmen war.
Der Durchschnitt zweier beliebiger Zahlen lässt sich berechnen, indem man die Hälfte ihrer Summe nimmt. Dabei erhält man immer eine Zahl als Ergebnis, deren Wert zwischen den beiden gegebenen Werten liegt; eben darum wird sie von den Mathematikern "arithmetisches Mittel" genannt.

Dieses harmlos erscheinende Beispiel eröffnet ungeheure Perspektiven, wenn man darüber ein wenig nachdenkt.
Schieben wir zunächst einmal alle unsere Zahlengeraden auf eine einzige Gerade; wir können ohne weiteres alle Brüche auf einer einzigen Zahlengeraden darstellen. Es ist nur übersichtlicher, wenn man am Anfang gesonderte Geraden für die einzelnen gebrochenen Einheiten nimmt, da auf der gemeinsamen Zahlengeraden die gleichwertigen Brüche in einem Punkt zusammenfallen (jetzt schreibe ich zu allen Punkten den betreffenden Bruch in der Form hin, in der er zum erstenmal aufgetreten ist):



Unsere Zahlengerade ist hier schon ziemlich dicht mit Zahlen bedeckt. Bedenken wir aber, dass nur einige herausgegriffene Zahlengeraden aufeinandergeschoben wurden; die Fünftel, die Siebentel, die Dreizehntel, die Hundertstel und die anderen unzählig vielen gebrochenen Einheiten treten dagegen hier überhaupt noch nicht auf!

Denken wir uns alle diese hinzu, so werden die bezeichneten Punkte schon unvorstellbar dicht auf der Zahlengeraden liegen. Versuchen wir, uns in ihrer Menge zurechtzufinden. Zunächst sehen wir, dass auch die ganzen Zahlen unter ihnen zu finden sind; sie lassen sich auch als Brüche mit dem Nenner 1 auffassen.
$\frac{3}{1}$ z. B. ist, wenn man an die Interpretation denkt, nach der dieser Bruch das Ergebnis der Division von 3 durch 1 darstellt, tatsächlich 3.

Die ganzen Zahlen und die Brüche werden mit einem gemeinsamen Namen als rationale

Zahlen bezeichnet; - dies lässt uns vermuten, dass es auch weniger rational beschaffene Zahlen gibt.

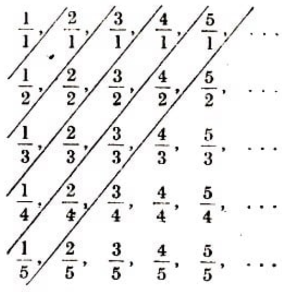
Welches ist der kleinste Bruch außer 0 (0 lässt sich als $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{0}{4}$, ... usw. auffassen)? Es leuchtet ein, dass es nicht $\frac{1}{12}$ ist, dem bereits $\frac{1}{13}$ ist kleiner: Wird eine Torte in mehrere in zerlegt, dann fallen die Stücke immer kleiner aus.
Die Situation ist immer an mit welchem auch auch der Versuch gemacht werden mag: $\frac{1}{101}$ ist kleiner als $\frac{1}{100}$, und $\frac{1}{1001}$ ist kleiner als $\frac{1}{1000}$. Es gibt also unter den rationalen Zahlen nicht nur keine größte - wie auch schon unter den ganzen Zahlen -, sondern auch keine kleinste.

Gut; wir können also das Aufzählen der rationalen Zahlen nicht bei der kleinsten beginnen. Gehen wir darum von einem beliebig gewählten kleinen Bruch aus und versuchen wir, mindestens von da an die rationalen Zahlen der Reihe nach aufzuzählen. Welcher Bruch folgt auf $\frac{1}{12}$? Der Bruch $\frac{1}{6}$, der auf unserer Geraden auf $\frac{1}{12}$ folgt, kann es nicht sein. Wir wissen ja, dass das arithmetische Mittel von $\frac{1}{12}$ und von $\frac{1}{6}$ zwischen diese beiden Brüche fällt und folglich näher an $\frac{1}{12}$ liegt als $\frac{1}{6}$.
Doch hätte ich eine beliebige andere Zahl rechts von $\frac{1}{12}$ angegeben, dann könnte ich ebenso das arithmetische Mittel von dieser Zahl und von $\frac{1}{12}$ bilden, und dieses liegt wieder näher bei $\frac{1}{12}$ als die gedachte Zahl.

Allgemein kann man also erkennen, dass zwei beliebige rationale Zahlen, die man auf der Zahlengeraden ins Auge fasst, wie nahe sie auch beieinander liegen mögen, keine unmittelbaren Nachbarn sind. Es liegen immer noch andere rationale Zahlen zwischen ihnen.
Man sagt: Die Menge der rationalen Zahlen ist überall dicht.

Wir begegnen hier, nach der unendlichen Zunahme der Reihe der natürlichen Zahlen und der Primzahlen, einem neuen Gesicht des Unendlichen: der unbegrenzten Dichte. Es gibt keine so große Zahl, dass es in der Folge der natürlichen Zahlen oder der Primzahlen nicht noch größere gäbe; - das ist der exakte Sinn von dem, was der Mathematiker durch die Redeweise ausdrückt: Diese Folgen nähern sich dem Unendlichen.
Aber auch keine Zahl ist so klein, dass es nicht rationale Zahlen geben würde, die um noch weniger von $\frac{1}{12}$ entfernt liegen. Man sagt: $\frac{1}{12}$ ist ein Häufungspunkt der Menge der rationalen Zahlen. Natürlich ist nicht nur $\frac{1}{12}$ sondern auch jede andere rationale Zahl ein Häufungspunkt dieser Menge.

Dennoch lassen sich alle rationalen Zahlen in eine einzige Folge ordnen, wenn auch nicht der Größe nach.
Dass man sie in unendlich viele Zahlenfolgen einordnen kann, sahen wir bereits, als wir die Folgen der verschiedenen gebrochenen Einheiten auf verschiedenen Zahlengeraden dargestellt haben. Schreiben wir der Einheitlichkeit halber auch die Ganzen in einer Bruchform dazu:



usf. Jetzt handelt es sich aber darum, alle diese Zahlen in eine einzige Folge zu ordnen. Dies gelingt, wenn wir die Zahlen an den schrägen Linien der Reihe nach in einer Linie schreiben. So kommen sie natürlich über kurz oder lang alle an die Reihe:

$$\underbrace{\frac{1}{1}},\underbrace{\frac{2}{1},\frac{1}{2}},\underbrace{\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}},\underbrace{\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}},\underbrace{\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{6}}...$$

Es folgen einander immer längere Gruppen, die jedoch stets nur aus endlich vielen Zahlen bestehen. Wir erhalten so tatsächlich eine einzige Folge, die jeder fortsetzen kann, wenn er die Bildungsregel verstanden hat.
Er kann es sogar dann, wenn er die schrägen Linien der obigen Tabelle gar nicht ansieht, dafür aber merkt, dass die Summe von Zähler und Nenner in dem einzigen Bruch der ersten Gruppe 2, in den beiden Brüchen der zweiten Gruppe 3, in den Brüchen der dritten Gruppe 4, in der vierten Gruppe 5 und in der zuletzt aufgezeichneten Gruppe 6 beträgt. Demgemäß lässt sich nämlich die folgende Gruppe, da

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 = 1 + 6$$

ist, in dieser Weise bilden:

$$\frac{6}{1},\frac{5}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{1}{6}$$

Nun kann schon jeder das Verfahren mechanisch fortsetzen.
Eine unendliche Folge kann aber als vollständig gegeben betrachtet werden, wenn auf Grund der in ihr erkennbaren Gesetzmäßigkeit jeder ihre Glieder beliebig weit aufschreiben kann.

In unserer Folge werden natürlich auch gleichwertige Zahlen vorkommen; wir sahen dies ja bereits auf den Zahlengeraden. Wollen wir also jede rationale Zahl nur einmal aufschreiben, so ist zu der Bildungsregel die Vorschrift hinzuzunehmen, dass jeweils die Brüche, die man kürzen kann, weggelassen werden.
So bleiben z.B. von dem bisher aufgezeichneten Teil der Folge $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$ und $\frac{2}{4}$ weg, denn $\frac{2}{2}$ und $\frac{3}{3}$ sind mit $\frac{1}{1}$, ferner $\frac{4}{2}$ mit $\frac{2}{1}$ und $\frac{2}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ gleichwertig. Die Folge der rationalen Zahlen beginnt demnach mit den Zahlen

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{1}{5},...$$

und sie lässt sich rein mechanisch fortsetzen. So kann man der Reihe nach sagen, welches das erste, das zweite, das dritte, ... Glied der Folge ist; man kann die Glieder nummerieren.

Mit einem etwas missverständlichen Terminus wird darum die Folge "abzählbar" genannt.

Diese einfache Tatsache führt zu einer überraschenden Konsequenz: nämlich, dass trotz der unbegrenzten Dichte der rationalen Zahlen (d. h. sämtlicher Brüche) in einem gewissen Sinne "ebenso viele" rationale wie ganze Zahlen existieren.
Wie lassen sich denn unendliche Mengen vergleichen? Es bietet sich dazu eine einfache Methode. Möchte ich z.B. wissen, ob in einem Tanzsaal ebenso viele Herren wie Damen zugegen sind, so brauche ich sie nicht abgesondert zu zählen. Es genügt die Aufforderung an die Herren, die Damen zum Tanze zu bitten. Bleibt dann kein einziger Herr ohne Dame und spielt keine einzige Dame Mauerblümchen, dann weiß ich, dass Damen und Herren in gleicher Anzahl zugegen sind.

Diese Art der Vergleichung lässt sich auch auf unendliche Mengen übertragen: Kann man die Elemente von zwei unendlichen Mengen miteinander so paaren, dass kein einziges Element der beiden Mengen ohne Partner bleibt, so sagt man, dass diese Mengen von gleicher Mächtigkeit sind.

Nun lässt sich die vorhin aufgezeichnete Folge der rationalen Zahlen mit der Folge der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

paaren. Wir verbinden die 1 mit dem ersten Glied $\frac{1}{1}$ unserer Folge, die 2 mit dem zweiten Glied $\frac{2}{1}$, die 3 mit $\frac{1}{2}$, usf., zum Beispiel die 10 mit dem zehnten Glied $\frac{5}{1}$ der Folge.
Möchte ich wissen, welches Glied mit 100 gepaart wird, so stelle ich erst durch das soeben angegebene Verfahren das hundertste Glied der Folge der rationalen Zahlen fest, - und dieses wird zu 100 gehören.

Es leuchtet ein, dass diese Paarung jeder beliebig weit fortsetzen kann, und es ist sowohl in der Folge der natürlichen Zahlen als auch in der Folge der rationalen Zahlen unmöglich, ein Element anzugeben, das dabei ohne Partner bliebe. In diesem Sinne sind also die betrachteten Mengen - die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen - tatsächlich von gleicher Mächtigkeit. Dies gilt, obwohl doch in der überall dichten Menge der rationalen Zahlen die ganzen Zahlen in scheinbar verschwindender Minderheit als Rosinen verstreut sind.

Hier enthüllt sich uns wiederum eine sehr wichtige Erkenntnis:
Mit dem Unendlichen muss man sehr behutsam umgehen. Es gibt Menschen, die es als ein immer gültiges logisches Prinzip betrachten, dass der Teil kleiner als das Ganze ist. Nun haben wir ein Gegenbeispiel gefunden. Die natürlichen Zahlen bilden nur einen verschwindenden Teil der Menge der rationalen Zahlen, dennoch ist ihre Mächtigkeit ebenso groß wie die der rationalen Zahlen.
Solche allgemeinen logischen Prinzipien sind aus einer Mannigfaltigkeit von Erfahrungen abstrahiert. Aber diese Erfahrungen spielen sich ausschließlich im Endlichen ab, und es hat schon zu vielen Verwirrungen geführt, wenn man ein Prinzip, das aus Erfahrungen im Endlichen entnommen wurde, auch dem Unendlichen aufzuzwingen suchte. Das Unendliche macht einen Sprung und entzieht sich der Geltung des Prinzips.

Wenn man sich dennoch gegen die Annahme sträubt - wo immer es sei -, dass der Teil dem Ganzen gleich werden kann, so hat das gewiss den Grund, dass die logischen Prinzipien nicht nur von der Erfahrung, sondern auch von unbewussten Kräften gestützt werden.
Der Mensch empfindet es gleichsam als eine Erschütterung der sittlichen Weltordnung, wenn der Teil mit dem Ganzen zu wetteifern vermag. Es bedeutet aber vielleicht eben darum eine Art von Freude an verbotenen Früchten, wenn man sich aus der Welt der strengen Gesetze in das freiere Unendliche hinauswagt.

2.3 Wir erfassen das Unendliche wieder

Kehren wir nun für ein Weilchen vom Unendlichen in die greifbare Welt zurück und denken wir wieder daran, dass wir an unseren Händen, mit denen wir die Welt zu ergreifen suchen, 10 Finger haben. Wäre es nicht möglich, die Brüche auch in das Zehnersystem zu zwingen?

Erinnern wir uns nur daran: Links von den Einern war die Stelle der zehnmal größeren Einheiten, der Zehner, links von diesen folgten die zehnmal größeren Hunderter usf. Fast von selbst empfiehlt es sich, diese Anordnung auch nach rechts fortzusetzen:
Rechts von den Einern setzen wir an die erste Stelle die Zehntel, an die zweite Stelle die Zehntel der Zehntel, die Hundertstel, an die dritte Stelle die Tausendstel, usf. Man muss aber diese neuen Einheiten von den Einern irgendwie trennen, denn sonst könnten wir nicht erkennen, dass etwa die 1 in

$$12$$

einen Einer und die 2 zwei Zehntel bedeuten sollen. Wir würden diese Zahl als Zwölf lesen. Deshalb setzt man hier ein Komma:

$$1{,}2$$

Man darf nicht vergessen, dass dies nur eine Abkürzung für

$$1 + \frac{2}{10}$$

ist. Ebenso ist $32{,}456 = 32 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$. Auf diese Weise kommen wir zu den Dezimalbrüchen.

Die Brüche, die im Nenner 10, 100, 1000 oder eine beliebige andere Einheit des Zehnersystems haben, lassen sich alle auch in Dezimalform aufschreiben. So ist z.B.

$$\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100}$$

$\frac{20}{100}$ lässt sich kürzen, indem man Zähler und Nenner durch 10 dividiert:

$$\frac{23}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$$

und da Ganze darin nicht enthalten sind, ergibt sich endlich

$$\frac{23}{10} = 0{,}23$$

Ob sich aber jeder Bruch als Dezimalbruch aufschreiben lässt?
Der einfachste Weg zur Umwandlung ist, die Division durchzuführen, die in der Bruchform angedeutet wird:

$$\frac{6}{5} = 6 : 5 = 1 \qquad \text{Rest } 1$$

Die übriggebliebene 1 wird nun in Zehntel umgewechselt, das sind 10 Zehntel. Diese ergeben durch 5 dividiert 2 Zehntel. Deshalb ist im Resultat das Komma zu setzen:

$$6 : 5 = 1{,}2 \qquad \text{also} \qquad \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Ähnlich ist $\frac{7}{25} = 7 : 25 = 0{,}2$, wobei aber 20 Zehntel übriggeblieben sind. Diese können in 200 Hundertstel umgewechselt werden. Dividiert man nun 200 Hundertstel durch 25, so erhält man 8 Hundertstel:

$$7 : 25 = 0{,}28. \qquad \text{Es ist also} \qquad \frac{7}{25} = 0{,}28$$

Man bleibt aber oft bereits in den einfachsten Fällen stecken:

$$\begin{array}{ll} \frac{4}{9} = & 4 : 9 = 0{,}44... \\ & 40 \\ & \;\;40 \\ & \;\;\;\;4 \end{array}$$

Diese Division endet nie: Soweit sie auch fortgesetzt wird, bleiben doch immer noch 4 übrig. $\frac{4}{9}$ lässt sich also nicht als Dezimalbruch aufschreiben.

Dabei lässt es sich doch so bequem mit Dezimalbrüchen rechnen!
Um nur ein Beispiel dafür anzuführen: Welch ein Kinderspiel ist es, einen Dezimalbruch mit 10 zu multiplizieren! Ist z.B. die Aufgabe

$$45{,}365 \cdot 10$$

zu lösen, dann hat man nur daran zu denken, dass das Zehnfache von 4 Zehnern 4 Hunderter, das Zehnfache von 5 Einern 5 Zehner, das Zehnfache von 3 Zehnteln 3 Ganze sind, usf. So sieht man gleich, dass die Aufgabe zu lösen ist, indem man einfach das Komma um eine Stelle nach rechts rückt: $453{,}65$.

Auf diese Weise verschieben sich ja sämtliche Stellenwerte um eins nach links, und damit werden z. B. die Zehner zu Hundertern. Multipliziert man das Ergebnis noch einmal mit 10, $4536{,}5$, so erhält man schon das 100fache der ursprünglichen Zahl (z.B. die 5 Einer werden hier zu 5 Hundertern), und daraus ist sofort ersichtlich, dass man mit 100 multiplizieren kann, indem man das Komma um zwei Stellen nach rechts rückt.

Ebenso sieht man ein, dass die Division durch 10 durch eine Verschiebung des Kommas nach links gelingt. Dies macht aber wirklich keine große Mühe. Wie gut wäre es also, wenn wir alle Brüche in Dezimalform schreiben könnten!
Nun, sehen wir es uns nochmals an: Wo sind wir denn stecken geblieben?

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{9} = \quad & 4 : 9 = 0{,}44... \\ & 40 \\ & \ \ 40 \\ & \ \ \ \ 4 \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe bleibt stets 4 übrig; daraus wird immer 40, wenn der Rest in kleinere Einheiten umgewechselt wird, und in 40 ist 9 immer 4mal enthalten. Nimmt diese Division auch nie ein Ende, ihr Ergebnis ist trotzdem ganz in unseren Händen:
Es wiederholt sich in ihm die 4 bis ins Unendliche.

Darauf sagt der Mann der Praxis: Würde diese Division auch ein Ende nehmen, z. B. beim zehnten Glied, so würde ich auch dann nicht das ganze Ergebnis verwenden.
Ich brauche ja höchstens Deziliter (ein Deziliter ist ein Zehntel Liter), oder Zentimeter (ein Zentimeter ist ein Hundertstel des Meters), unter Umständen Gramm (ein Gramm ist ein Tausendstel des Kilogramms).

Es wäre wirklich eine Haarspalterei, jene verschwindend geringfügige Größe, die noch hinter den Tausendsteln steht, in Betracht zu ziehen. Von dem ganzen unendlichen Dezimalbruch brauche ich nur

$$0{,}4 \qquad \text{oder} \qquad 0{,}44 \qquad \text{oder} \qquad 0{,}444$$

Ich kann also auch mit $\frac{4}{9}$ so rechnen wie mit einem anständigen endlichen Dezimalbruch.

Der Physiker mag in seinen viel exakteren Messungen auch weitere Stellen benötigen, doch gibt es auch hier eine sogenannte Fehlergrenze: Der Physiker kann abschätzen, wie groß die Schwankung ist, die man infolge der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne und der experimentellen Mittel zu erwarten hat, wenn der Versuch wiederholt wird.
Es lohnt sich dann auch nicht, in der Rechnung eine noch kleinere Einheit in Betracht zu ziehen. Sicherlich werden sich mit der Zeit die Mittel immer mehr vervollkommnen, die Fehlergrenzen der Messungen immer mehr verengen, doch irgendein Fehler wird stets übrigbleiben; irgendwo - wenn auch sehr weit entfernt vom Komma - wird man doch in der Reihe der Dezimalen von

$$0{,}4444...$$

haltmachen müssen. Es macht nichts, dass man nicht von vornherein weiß, wie weit man in einer entfernten Zukunft gehen muss.
Man kann im voraus wissen, dass es möglich ist, auch noch so weit zu gehen, denn die Entwicklung von $\frac{4}{9}$ ist uns über alle Grenzen hinaus bekannt. Wir wissen, dass in ihr über alle Grenzen immer nur Vierer auftreten werden.

Kann man nun wenigstens in diesem Sinne alle Brüche in Dezimalbrüche umwandeln? Oder, die Frage anders gestellt: Wenn eine Division nie endet, folgen dann die Dezimalen des Ergebnisses wenigstens nach irgendeiner Regel aufeinander, so dass sich dennoch eine Übersicht über das Ganze ergibt?

Es ist leicht einzusehen, dass man darauf mit "ja" antworten kann: Jede derartige

Entwicklung wird über kurz oder lang "periodisch", d. h. irgendwann tritt in ihr eine Zahlengruppe auf, die sich von da an wiederholt.
Untersuchen wir z. B. den Bruch $\frac{21}{22}$.
Bei einer Division durch 22 ist der Rest stets kleiner als 22. Wenn die Division nie endet, wird demnach jeder Rest eine der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21$$

sein. Nehmen wir an, wir hätten einen Schrank mit 21 Schubladen, und diese Zahlen seien die Aufschriften je einer Schublade.
Erhält man nun bei der Division z. B. einmal den Rest 7, so legt man eine Kugel in die Schublade Nr. 7. Wird das Dividieren geduldig fortgesetzt, so müsste man bei der 22sten Teildivision bereits 22 Kugeln in die 21 Schubladen gelegt haben, und daher gibt es sicher eine Schublade, in die zwei Kugeln geraten sind: Spätestens nach 21 Schritten muss sich ein Rest wiederholen.

Haben wir Glück, dann wiederholt sich eine von diesen Zahlen schon viel früher. Tritt aber ein Rest ein zweites Mal auf, so wiederholt sich von da an alles. Beobachten wir dies an unserem Beispiel:

$$\begin{aligned}\tfrac{21}{22} = \quad & 21 : 22 = 0{,}954\\ & 210\\ & \ \ 120\\ & \ \ \ \ 100\\ & \ \ \ \ \ \ 12\end{aligned}$$

halt! - Der Rest 12 kam bereits einmal vor. Hier beginnt also die Wiederholung:

$$\begin{aligned}\tfrac{21}{22} = \quad & 21 : 22 = 0{,}9545454...\\ & 210\\ & \ \ 120\\ & \ \ \ \ 100\\ & \ \ \ \ \ \ 120\\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 100\\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 120\\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 100\\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 12\end{aligned}$$

Von einer einzigen ordnungswidrigen 9 abgesehen, wiederholt sich 54 bis ins Unendliche.

Werden wir umgekehrt einem periodischen Dezimalbruch gegenübergestellt, dann können wir erkennen, welcher gemeine Bruch diese Entwicklung besitzt. Gehen wir von 0,9545454... aus und nehmen wir an, dass wir den Bruch, der sich in diesen Dezimalbruch umwandeln ließ, noch nicht kennen. Eine Größe, die wir nicht kennen, wird x genannt. Also ist

$$x = 0{,}9545454...$$

Multipliziert man mit 1000, d.h. bringt man das Komma um drei Stellen nach rechts, so kommt der bis zum Schluss der ersten Periode reichende Teil an die Stelle der Ganzen:

$$1000x = 954{,}5454...$$

Wird aber x mit 10 multipliziert, so kommt an die Stelle der Ganzen der ordnungswidrige Teil vor den Perioden:

$$10x = 9{,}545454...$$

Subtrahieren wir nun das Letztere vom Vorherigen, dann ist einerseits vom 1000fachen von x sein 10faches abzuziehen, und es bleibt das 990fache von x.
Andererseits bestehen in beiden Zahlen die Teile nach dem Komma aus den unendlichen Wiederholungen von 54. Somit stimmen diese Teile vollkommen überein; sie fallen also bei der Subtraktion weg. Die Differenz von 954 und 9 ist 945, also erhalten wir schließlich:

$$990x = 945$$

Wir bringen nun den Faktor 990 als Divisor auf die rechte Seite:

$$x = \frac{945}{990}$$

Dieser Bruch lässt sich mit 45 kürzen: $945 : 45 = 21$ und $990 : 45 = 22$. Folglich ist

$$x = \frac{21}{22}$$

und wir wussten ja auch, dass es soviel ist.

Bei dieser Überlegung haben wir aber einen unvorsichtigen Schritt getan: Wir haben nicht auf das Unendliche geachtet. Wir stellten uns hierbei 0,9545454 ..... nicht nur bis zu irgendeiner Genauigkeit, sondern bis ins Unendliche aufgeschrieben vor und multiplizierten unbesorgt, als wäre es irgendeine endliche Zahl.
Mit welchem Recht nehmen wir von vornherein an, dass 0,9545454 ... irgendeinen endlichen Sinn hat?

Das Weitere durchdenken wir lieber an einem einfacheren Beispiel. Ebenso problematisch ist es ja, ob

$$1{,}111...$$

worin sich 1 bis ins Unendliche wiederholt, einen endlichen Sinn hat. Es ist interessant, dass man an einer derartigen unendlichen Dezimalentwicklung gewöhnlich keinen Anstoß nimmt; sieht man jedoch eine unendliche Summierung

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ...$$

bis ins Unendliche, dann stockt man schon eher, obwohl es sich ja nur um eine andere Schreibweise für unsere unendliche Dezimalzahl handelt. Ich bemängele nicht, dass man an der unendlichen Summierung Anstoß nimmt, sondern vielmehr, dass man sie in der ersten Form akzeptiert. Zwar ist die Folge

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ...$$

auch in ihrer Unendlichkeit als gegeben zu betrachten, denn jedermann kann sie ja beliebig weit fortsetzen; diesen unendlichen Weg aber als durchwandert zu betrachten, so dass man die Glieder summieren kann, ist jedoch eine allzu kühne Vorstellung. Wie ist das gemeint?

Ein bekannter Mathematiker hat sich bereits als kleiner Schüler den Begriff der unendlichen Summe an folgendem Beispiel klargemacht:

Es gab eine Schokoladensorte, die man populär zu machen, suchte, indem man in das umhüllende Stanniol einen Kupon legte. Für 10 dieser Kupons bekam man eine neue Tafel Schokolade. Wieviel ist nun eigentlich eine solche Tafel Schokolade mit ihrer Verpackung wert?

Selbstverständlich ist der Besitz nicht nur eine Tafel Schokolade wert, denn der Kupon ist auch darin, und für einen Kupon bekommt man $\frac{1}{10}$ Tafel Schokolade (für 10 kann man ja 1 Tafel bekommen). Zu diesem Zehntel einer Schokoladentafel gehört aber auch ein Zehntel Kupon, und kann man für einen Kupon $\frac{1}{10}$ Tafel Schokolade bekommen, so erhält man für $\frac{1}{10}$ Kupon den zehnten Teil davon, d. h.; $\frac{1}{100}$ Tafel.
Zu dieser $\frac{1}{100}$ Tat gehört auch $\frac{1}{100}$ Kupon, und hierfür bekommt man wiederum ein Zehntel des Vorigen; ein Zehntel von $\frac{1}{100}$ ist aber $\frac{1}{1000}$ Tafel usf. bis ins Unendliche.
Es ist ersichtlich, dass diese Kette von Additionen nie abbricht und folglich meine Schokolade samt Kupon

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

Tafel Schokolade wert ist.
Andererseits werde ich zeigen, dass ihr Wert genau $1\frac{4}{9}$ beträgt Die 1 in dieser Zahl ist selbstverständlich der Wert der in natura gegebenen Schokolade; ich muss also nur beweisen, dass der Wert des beigelegten Kupons $\frac{1}{9}$ Tafel Schokolade beträgt, und dazu genügt der Nachweis, dass 9 Kupons 1 Tafel Schokolade wert sind, denn dann ist sicher 1 Kupon ein Neuntel davon wert.
Dass nun 9 Kupons genau eine Tafel Schokolade wert sind, lässt sich augenblicklich beweisen.

Nehmen wir an, ich habe 9 Kupons. Nun gehe ich in die Konditorei und sage: "Ich bitte um eine Tafel Schokolade. Ich möchte sie gleich verzehren und werde danach zahlen." Ich esse die Schokolade und nehme den beigelegten Kupon heraus. Jetzt habe ich 10 Kupons und kann meine Schuld begleichen.
Das ist eine glatte Rechnung: Ich habe eine Tafel Schokolade gegessen und besitze keinen Kupon mehr. Das genaue Entgelt für 9 Kupons ist also tatsächlich eine Tafel Schokolade, für einen Kupon $\frac{1}{9}$ Tafel, und eine Tafel samt Kupon ist genau $1\frac{1}{9}$ Tafel Schokolade wert. Folglich ist die Summe der unendlichen Reihe:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

ganz genau $1\frac{1}{9}$, handgreiflich, sogar essbar.

Dieses Ergebnis lässt sich so formulieren: Ist eine Größe in erster roher Annäherung 1, in etwas feinerer Annäherung $1+\frac{1}{10}$, in noch besserer Annäherung, doch immer noch ungenau $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ usf. bis ins Unendliche, so ist diese Größe in voller Genauigkeit

$1\frac{1}{9}$.[6]

Nun kann ich auch die Versprechungen der früheren Kapitel erfüllen:
Im Sinne der gegebenen exakten Formulierung stimmt es nun auch, dass sich der Inhalt des Kreises mit geradlinigen Figuren annähern lässt, und der Primzahlsatz ist ebenfalls in einem solchen präzisen Sinne gültig. Dies hat man mir natürlich auf Ehrenwort zu glauben; auf die langwierigen Beweise kann ich nicht eingehen.

In der Algebra wurde eine Zahl z.B. folgendermaßen angegeben:
x bedeute die Zahl, die durch 2 dividiert und mit 3 multipliziert, nach der Addition von 5 den Wert 11 ergibt, d.h. x sei die Zahl, welche die Gleichung

$$\frac{x}{2} \cdot 3 + 5 = 11$$

erfüllt. Jetzt haben wir einen anderen Weg zur Bestimmung einer Zahl kennengelernt. Jener Zweig der Mathematik, in dem die Zahlen mit Hilfe annähernder Werte, jedoch auch so in voller Genauigkeit angegeben werden, wird Analysis genannt.

Gehen wir nun umgekehrt von $1\frac{1}{9}$ aus: Ein Ganzes lässt sich in 9 Neuntel teilen; es ist also

$$\begin{array}{ll} 1\tfrac{1}{9} = \tfrac{9}{9} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{10}{9} = & 10 : 9 = 1{,}1111\ldots \text{ bis ins Unendliche} \\ & 10 \\ & \ \ 10 \\ & \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

und die Gleichheit von $1\frac{1}{9}$ mit dieser unendlich langen Entwicklung hat gerade vorhin einen exakten Sinn erhalten.
Der Mathematiker drückt dies auch so aus: Die Folge der "Teilsummen"

$$1; \quad 1{,}1 = 1 + \frac{1}{10}; \quad 1{,}11 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}; \ldots$$

konvergiert gegen den "Grenzwert" (mit einem Fremdwort: den Limes) $1\frac{1}{9}$. Man sagt auch: Die Reihe

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$$

ist konvergent, und ihre Summe ist $1\frac{1}{9}$.

Damit haben wir einen neuen Summenbegriff eingeführt, und wir müssen untersuchen, ob er die alten Rechenregeln erfüllt. Ich will auf so peinlich genaue Untersuchungen nicht eingehen und gebe nur ihr Resultat an:
Es kann keine Rede davon sein. Das Unendliche entschlüpft auch hierbei unseren Regeln. Eben darum wurde hier die Frage zum Gegenstand besonderer Untersuchungen, für welche Reihen es zutrifft, dass ihre Glieder nach Belieben vertauscht und gruppiert werden können.

[6] Was allgemein als "annähernder Wert" betrachtet werden kann, werde ich im nächsten Kapitel sagen.

Die vorhin behandelte Reihe $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...$ ist eine solche. Versuchen wir es aber z.B. mit der Reihe

$$1-1+1-1+1-1+...$$

Wenn wir darin die Operationen in einer anderen Reihenfolge aus führen, indem wir je zwei Glieder zusammenfassen:

$$\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+...$$

so erhalten wir eine Reihe aus lauter Nullen, und wie oft wir 0 auch immer addieren, das Ergebnis ist 0: Also ist auch die Summe der Reihe gleich 0.
Werden aber die Glieder in folgender Weise zusammengefasst:

$$1\underbrace{-1+1}_{0}+\underbrace{-1+1}_{0}+\underbrace{-1+1}_{0}+...$$

so entsteht die Reihe

$$1+0+0+0+0+...$$

und die Summe dieser Reihe ist offenbar 1. Es kommt also nicht in Frage, dass die Operationen immer in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden dürfen.

Soviel aber bleibt jedenfalls gültig: Man kann auch eine unendliche Reihe Glied für Glied mit einer Zahl multiplizieren. Spielen wir noch ein wenig mit unserem Ergebnis: Wird von

$$1{,}11111...=1\frac{1}{9}$$

1 abgezogen, so erhält man

$$0{,}11111...=\frac{1}{9}$$

Multiplizieren wir nun mit 9, so ist:

$$0{,}99999...=\frac{9}{9}=1$$

Dieses Ergebnis durch 10 dividiert (wird das Komma auf der rechten Seite - das hinter 1 zu denken ist - um eine Stelle nach links gerückt, so erhält man 0 Ganze), ergibt

$$0{,}099999...=0{,}1$$

noch einmal durch 10 dividiert

$$0{,}0099999...=0{,}01$$

usf. Die endlichen Dezimalbrüche 1, 0,1, 0,01, ... lassen sich also in einer solchen - aus einigen Ziffern 0 und nachher aus lauter Ziffern 9 bestehenden - unendlichen Form aufschreiben, und es folgt daraus zugleich, dass man alle endlichen Dezimalbrüche auf zwei Arten in eine unendliche Form bringen kann. Der endliche Dezimalbruch 0,2 z.B. lässt sich erstens so aufschreiben:

$$0{,}200000...$$

denn die Addition von 0 Hundertstel, von 0 Tausendstel, von 0 Zehntausendstel usf. ändert ja nichts an der Zahl. Wir können aber 0,2 auch in der Form

$$0{,}199999...$$

schreiben, denn das Zehntel, also 0,1, das ich hierbei von 0,2 abgezogen habe, ist ebenso groß wie 0,099999..., das ich dafür addiert habe. (Man kann zeigen, dass diese Zweideutigkeit die einzige ist, die bei den Dezimalentwicklungen der Zahlen auftritt.)

In unserer Reihe

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

ist jedes Glied ein Zehntel des vorherigen; man kann auch sagen:
Jedes Glied ist das $\frac{1}{10}$ fache des vorherigen. Man erinnere sich bitte an die arithmetische Reihe, in der die Differenz zweier beliebiger benachbarter Glieder immer dieselbe war. Eine Reihe nun, in der der Quotient der benachbarten Glieder immer derselbe ist, wird eine geometrische Reihe genannt.

Wir dürfen uns nicht zuviel einbilden und etwa glauben, dass wir jetzt bereits alle unendlichen Reihen summieren können. Betrachten wir z.B. die geometrische Reihe

$$1 + 10 + 100 + 1000 + ...$$

in welcher der Quotient der benachbarten Glieder 10 ist. Es ist klar, dass die Teilsummen dieser Reihe über kurz oder lang größer werden als jede beliebige Zahl (z. B. sind sie von der vierten an alle größer als 1000), und so wächst diese Reihe ins Unendliche.

Das gleiche gilt sogar für die geometrische Reihe mit dem Quotienten 1, in der also auf jedes Glied ein 1 mal so großes Glied folgt:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

hier ist ja jede Teilsumme von der tausendsten an größer als 1000, von der millionsten an größer als 1000000 usf.

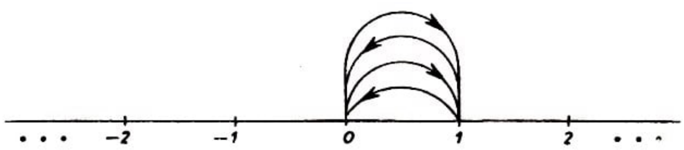
Folgt endlich auf jedes Glied (-1)mal soviel, so lautet die Reihe, da $1 \cdot (-1) = -1$, $(-1) \cdot (-1) = +1$, $(+1) \cdot (-1)$ wieder gleich -1 usf. ist:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

und über diese wissen wir bereits allerhand Böses. Ihre Teilsummen sind der Reihe nach:

$$1; 1 - 1 = 0; 1 - 1 + 1 = 1; 1 - 1 + 1 - 1 = 0; ...$$

usf. Man sieht, dass sie abwechselnd bald gleich 1, bald gleich 0 sind:



sie springen immer zwischen 1 und 0 hin und her (mit einem Fremdwort: sie "oszillieren"), und so können sie sich keiner Zahl annähern. Diese Sprünge werden noch größer und wachsen sogar ständig, wenn der Quotient benachbarter Glieder einer Reihe eine negative Zahl von größerem absoluten Wert als 1 ist. Das Bild hiervon sieht folgendermaßen aus:

Von den bisher betrachteten Reihen konnten wir also nur die Reihe

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

summieren. Das hängt gewiss damit zusammen, dass die Glieder dieser Reihe stets abnehmen; dass sie sogar beliebig klein werden, wenn man in der Reihe genügend weit geht: Sie streben mit der Genauigkeit unserer Schokoladenformulierung gegen 0.
(D. h., man kann zeigen, dass jenes gewisse Etwas, das in erster Annäherung 1, in engerer Annäherung $\frac{1}{10}$, in noch engerer Annäherung $\frac{1}{100}$ usf. ist, in voller Genauigkeit nur 0 sein kann.

Ich werde das nicht immer so langwierig formulieren, sondern mich nur auf die Präzision des Schokoladenbeispiels berufen.) So könnte man glauben, dass dann, wenn zwar unendlich viele Zahlen zu summieren sind, jedoch die ferneren Glieder immer kleiner, immer geringfügiger werden, dann diese Glieder das Ergebnis immer weniger beeinflussen, und dass deshalb die immer längeren Teilsummen die volle Summe immer genauer repräsentieren.

Zur Summierbarkeit einer Reihe genügt indessen noch keineswegs eine solche Beschaffenheit der Glieder. Die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$$

konvergiert ebenfalls gegen 0 (wenn auch langsamer als die vorherige: Dort war schon vom vierten Glied an jedes weitere kleiner als $\frac{1}{1000}$; hier erst vom tausendsten an).
Die Teilsummen der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + ...$$

streben aber dennoch dem Unendlichen zu.
Man kann das durch folgende Überlegung einsehen: Wir wissen bereits, dass sich der Wert eines Bruches vermindert, wenn der Nenner vergrößert wird (teilt man eine Torte in eine größere Zahl von Stücken, so werden die einzelnen Stücke kleiner). Demnach vermindern sich die Teilsummen, wenn ich den kleineren Bruch $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{3}$, dann $\frac{1}{8}$ statt eines jeden der Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{7}$, ferner $\frac{1}{16}$ statt $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$ und $\frac{1}{15}$ in die Reihe einsetze usf.

Allgemein: Ich gehe immer bis zu einem solchen Glied, das im Nenner eine Potenz von 2 besitzt ($4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$) und ersetze die dabei überschrittenen Glieder durch dieses betreffende Glied.
Folglich sind die Teilsummen der folgenden Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\ldots$$

gewiss kleiner als die Teilsummen der obigen Reihe.
Hier sind die Werte der einzelnen Gruppen:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2} \quad \text{usf.}$$

Man sieht, dass dabei jede Gruppe $\frac{1}{2}$ liefert, 2000 mal $\frac{1}{2}$ ist aber bereits 1000 und 2000000 mal $\frac{1}{2}$ bereits 1 Million. So werden die genügend langen Teilsummen dieser Reihe größer als jede Zahl, und um so mehr gilt das von den noch größeren Teilsummen der ursprünglich aufgezeichneten Reihe.

Zur Konvergenz einer Reihe genügt es also noch nicht, dass ihre Glieder sich mit Ach und Krach zur 0 herablassen: Sie müssen sehr rasch der 0 zustreben.

2.4 Die Zahlenlinie wird gefüllt

Die Dezimalentwicklungen der Brüche sind überraschend regelmäßig ausgefallen. Sie lieferten ausschließlich endliche oder dieselbe Periode wiederholende Dezimalbrüche. Indessen haben wir uns schon mit dem Gedanken befreundet, dass man auch eine unendliche Dezimalentwicklung als eine einzige, bestimmte Zahl zu betrachten hat; wir kamen ja, von 1,1111... ausgehend, zu dem Ergebnis, dass diese den Wert $1\frac{1}{9}$ hat.

Es ist fast unvermeidlich, dass uns der Gedanke kommt: Man könnte sich doch auch eine unendliche Dezimalentwicklung vorstellen, die nicht periodisch ist. Wird diese nun keiner Zahl entsprechen?

Man kann ja dabei an schön regelmäßig gebildete Dezimalen denken, deren Ziffernfolge jedermann beliebig weit fortsetzen könnte, so dass man also den gesamten Dezimalbruch übersieht, und dennoch brauchte sich darin keine wiederkehrende Periode zu finden, z. B.:

$$0{,}101001000100001000001.....$$

Die Bildungsregel ist hier sehr einfach: Auf die 1 folgen immer Ziffern 0, doch jedesmal eine mehr. Dabei kann aber von Periodizität keine Rede sein, denn in diesem Falle müssten ja auch die auftretenden Ziffern 1 über kurz oder lang in gleichen Abständen aufeinanderfolgen.

Dies kann nicht die Entwicklung eines Bruches sein, die Teilsummen können gegen keine rationale Zahl konvergieren.

Ich werde zeigen, dass sie dennoch gegen irgend etwas konvergieren, nämlich gegen eine Lücke in der Menge der rationalen Zahlen. Daraus geht hervor, dass zwischen den rationalen Zahlen trotz ihrer unbegrenzten Dichte noch immer Lücken vorhanden sind.

Bleibt man in unserer Dezimalentwicklung bei den Zehnteln stehen, so werden noch eine Menge Ziffern vernachlässigt. Demnach sind die weiteren Teilsummen alle größer als

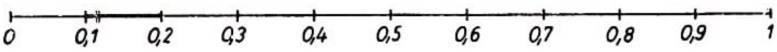
$$0{,}1$$

Andererseits aber sind alle Teilsummen kleiner als

$$0{,}2$$

denn erst dann, wenn lauter Ziffern 9 auf 1 Zehntel folgten, so dass wir 0,19999... erhielten, erreichten wir den Wert 0,2, wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben.

Die weiteren Teilsummen fallen also alle zwischen 0,1 und 0,2, d.h. sie liegen alle in dem dick ausgezogenen Intervall der Zahlenlinie:

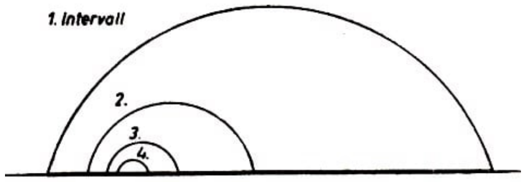


Als ihre erste Annäherung kann jeder Punkt des Intervalls betrachtet werden. Ebenso sieht man ein, wenn wir bei den Tausendsteln stehen bleiben, dass alle weiteren Teilsummen zwischen 0,101 und 0,102 eingeschlossen sind.

Dies kann ich auf der Abbildung nur ungenau andeuten, weil diese Punkte zu nahe aneinanderrücken (sie weichen voneinander nur um ein Tausendstel ab). Somit liefern die Punkte dieses Intervalls, das ganz im Inneren des ersten liegt, bereits eine viel bessere Annäherung.
Die Fortführung dieser Überlegung ergibt, dass alle genügend langen Teilsummen in die immer engeren, ineinander geschachtelten Intervalle

zwischen 0,101001 und 0,101002
zwischen 0,1010010001 und 0,1010010002 ...

fallen müssen. Würden sich diese Intervalle nicht so rasch verengen, so wäre ihr Bild etwa:



Die Länge dieser Intervalle ist der Reihe nach:

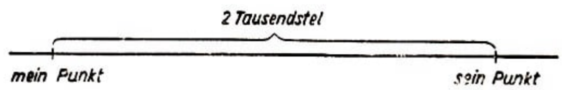
0,1;   0,001;   0,000001;   0,0000000001

d.h. ein Zehntel, ein Tausendstel, ein Millionstel der Einheit usf.
Sie konvergieren natürlich gegen 0, und zwar Hals über Kopf, so dass ich es mit der Zeichnung und sogar auch mit Benennungen nicht verfolgen kann. Unsere genügend langen Teilsummen drängen sich also in diesen unbeschränkt schrumpfenden Intervallen zusammen.

Diese Ineinanderschachtelung gleicht den ineinandergelegten Spielwürfeln der Kinder, oder jenen Scherzpaketen, die nach der Entfaltung ihrer äußeren Umhüllung jedesmal eine neue Hülle aufweisen. Während man aufgeregt eine Hülle allmählich entfaltet, kommt immer nur eine neue Hülle zum Vorschein, das große Paket wird immer dünner. Dennoch gelangt man endlich an ein Ende.
Zum Schluss steckt gewöhnlich doch irgendeine Kleinigkeit in der gemeinsamen Tiefe der vielen Umhüllungen: Wenn sonst nichts, dann zumindest ein Papierknäuel. Einen unendlichen Verdruss kann man mit einem solchen Paket keinesfalls bereiten.

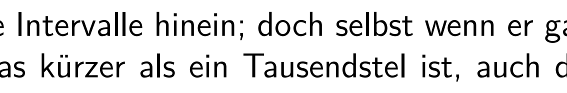
In unserem Falle aber setzt sich der entsprechende Vorgang ins Unendliche fort: Das zweite Intervall liegt ganz im ersten, das dritte liegt sowohl im ersten als auch im zweiten, das vierte ist ein gemeinsamer Teil der drei ersten Intervalle usw.

Unsere Anschauung lehrt: Wird die Bildung der ineinander geschachtelten, zusammenschrumpfenden Intervalle unendlich fortgesetzt, so ist auch jenes gewisse Etwas, zu dem sie zusammenschrumpfen, der ihnen allen gemeinsame Teil. Mehr als ein Punkt kann aber nicht in allen Intervallen liegen, das lässt sich beweisen.
Nehmen wir an, dass ich einen solchen gemeinsamen Punkt gefunden habe, und jemand behauptet nun, er hätte ein Gegenbeispiel zu meiner Behauptung gefunden, einen Punkt also, der sich von dem meinigen unterscheidet, z.B. rechts von ihm liegt, und der trotzdem in jedes unserer Intervalle hineinfällt. Natürlich behauptet der Betreffende nicht, diesen Punkt sehr weit entfernt von dem meinigen gefunden zu haben; ich zeichne nur der Anschaulichkeit wegen einen genügend großen Abstand. Die Überlegungen beziehen sich aber auch auf beliebig kleine Abstände:



Wie nahe auch diese beiden Punkte aneinander liegen mögen, sofern sie verschieden sind, ist doch eine gewisse Distanz zwischen ihnen, sagen wir von 2 Tausendsteln der Einheit. Die Längen der ineinander geschachtelten Intervalle konvergieren aber gegen 0, also werden sie über kurz oder lang alle auch kürzer als 1 Tausendstel der Einheit werden.

Mein Punkt fällt in alle Intervalle hinein; doch selbst wenn er ganz an den linken Rand eines Intervalls fiele, das kürzer als ein Tausendstel ist, auch dann könnte das rechte Ende dieses Intervalls sich nicht bis zu dem Punkte erstrecken, der von ihm um 2 Tausendstel entfernt liegt:



Aus diesem und allen noch kürzeren Intervallen muss also der als Gegenbeispiel angeführte Punkt sicher herausfallen. Demnach kann er keinesfalls ein gemeinschaftlicher Punkt sämtlicher Intervalle sein.

Alle die unendlich vielen Intervalle besitzen also nur einen einzigen gemeinsamen Punkt, und da alle genügend langen Teilsummen von 0,1010010001000010000001...... in jedes der Intervalle hineinfallen, werden ihre Bilder auf der Zahlenlinie diesem Punkt immer näher gedrängt: Sie konvergieren gegen diesen Punkt.

Damit haben wir auf der Zahlenlinie einen Punkt entdeckt, zu dem bisher noch keine Zahl gehört hat. Wie dicht auch die Zahlenlinie von den Brüchen bedeckt wird, in diesen Punkt konnte dennoch kein einziger Bruch fallen.
Die Dezimalform eines Bruches ist ja periodisch, unsere nach diesem Punkt konvergierende dezimale Entwicklung 0,1010010001 ... ist aber nicht periodisch.
Und doch ist der Punkt ein ganz bestimmter, er liegt in einer ganz bestimmten Entfernung vom Nullpunkt.

Probieren wir aber diese Entfernung zu messen, dann gelingt das weder mit ganzen Maßeinheiten, noch mit deren Bruchteilen. Folglich hatte diese Strecke bisher noch gar kein Maß. Um diesem Mangel abzuhelfen, werden wir sagen, das Maß dieser Strecke sei die "irrationale" Zahl

$$0{,}101001000100001....$$

Wir führen also jenes bisher unbenannte, jedoch ganz bestimmte Etwas, das durch die rationalen Werte

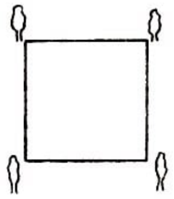
$$0{,}1, 0{,}101, 0{,}101001...$$

immer besser angenähert wird, als eine neue Zahl ein.
Sie ist für den Mann der Praxis, für den Physiker nicht weniger brauchbar als die Entwicklung $\frac{4}{9} = 0{,}444...$: Es gibt keine Genauigkeit, die in der Annäherung dieser Zahl durch jene rationalen Werte nicht erreicht werden könnte. Wir kennen ja sämtliche ihrer Dezimalen, die bei den Anwendungen herangezogen werden können, wir haben ja ein Bild von der Gesamtheit dieser Dezimalen.

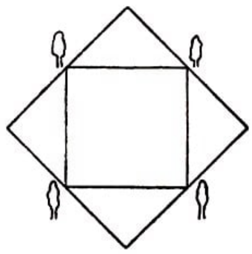
Ganz ebenso zeigt man, dass auch einer beliebigen anderen nichtperiodischen Dezimalentwicklung, die durch irgendeine Bildungsregel angegeben wird, je ein bestimmter Punkt bzw. ein bestimmter Abstand vom Nullpunkt der Zahlenlinie entspricht. Wir betrachten jede derartige unendliche Dezimalentwicklung als das Maß des entsprechenden Abstandes und nennen dies eine irrationale Zahl.

Vielleicht scheinen diese Überlegungen sehr abstrakt zu sein.
Ich hatte aber einmal eine 14jährige Schülerin Eva, die von selbst darauf kam, dass es eine Strecke gibt, deren Maß weder in ganzen noch in gebrochenen Zahlen ausgedrückt werden kann. Sie sollte über folgende scherzhafte Aufgabe nachdenken:

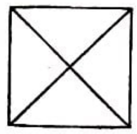
Ein quadratförmiger Fischteich wird an allen vier Ecken von je einem Baum geschmückt:



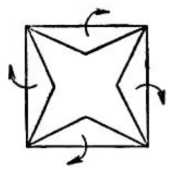
Dieser Teich soll nun erweitert werden, und zwar so, dass seine Fläche doppelt so groß wird, der neue Teich aber ebenfalls eine Quadratform erhält und die Bäume ihren Platz behalten. Eva merkte, dass die Lösung die folgende ist



Hier besitzt das große Quadrat tatsächlich zweimal so großen Inhalt wie das kleine. Zeichnet man nämlich in das ursprüngliche Quadrat die Diagonalen ein,



dann sieht man leicht, dass dann, wenn die so gewonnenen vier Dreiecke nach außen geklappt werden,



das große Quadrat entsteht. Damit wurde aber zu der Fläche des kleinen Quadrats tatsächlich ebensoviel hinzugefügt, wie seine Fläche ursprünglich betrug.

Doch Eva begnügte sich damit nicht. Sie wollte nun auch wissen, wie groß die Seiten des neuen Teiches ausfallen werden, wenn jede Seite des ursprünglichen Fischteiches 1 km lang war. In diesem Falle beträgt der Flächeninhalt des alten Teiches $1 \cdot 1 = 1$ Quadratkilometer, der Inhalt des großen Teiches ist zweimal so groß, d.h. 2 Quadratkilometer.
Folglich erhebt sich die Frage, welche Zahl man quadrieren muss, um 2 als Resultat zu erhalten.

Damit gelangen wir zur Umkehrung des Potenzierens, zum Wurzelziehen.
Die Aufgabe besteht eigentlich in der Berechnung von $\sqrt{2}$, da die Zahl - falls eine solche existiert - die ins Quadrat erhoben 2 ergibt, mit $\sqrt{2}$ bezeichnet wird.

Eva begann also Versuche zu machen: Eine Seite des kleinen Quadrats ist 1 km lang, eine Seite des großen beträgt offenbar mehr. 2 km lang kann sie natürlich nicht sein, denn dann wäre der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ Quadratkilometer. Die betreffende Länge liegt also zwischen 1 und 2.
Nun probierte Eva mit Zahlen, die einige Zehntel größer als 1 sind. Dabei fand sie, dass $1{,}4^2 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ ist.
1,96 ist noch weniger, 2,25 aber schon mehr als der 2 Einheiten betragende Flächeninhalt des großen Teiches. Die gesuchte Länge liegt also zwischen 1,4 und 1,5.

Jetzt teilte sie diese Distanz in Hundertstel ein, und es stellte sich heraus, dass die gesuchte Länge zwischen 1,41 und 1,42 fällt.
Indem sie so fortfuhr, bildete sich in Eva immer mehr die Überzeugung aus, dass sie niemals eine Zahl finden werde, die quadriert 2 ergibt.

"Und doch muss eine solche Zahl existieren, die Seite des großen Teiches ist ja handgreiflich da, ich habe sie konstruiert! Eva hatte richtig vermutet: Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.
Dass es eine ganze Zahl dieser Art nicht gibt, hat Eva bereits bewiesen, als sie zeigte, dass die gesuchte Zahl zwischen 1 und 2 liegt; zwischen 1 und 2 gibt es ja keine weiteren ganzen Zahlen. Es bleiben also noch die Brüche zwischen 1 und 2 zu untersuchen.

Diese Brüche sollen erst so lange gekürzt werden, bis man sie nicht mehr kürzen kann. Dabei kann ihr Nenner nicht 1 werden, denn 3 z.B. bedeutet 3 Ganze, und ganze Zahlen gibt es nicht zwischen 1 und 2. Auch ihr Quadrat kann nicht gekürzt werden, denn es ist z.B.

$$\left(\frac{15}{14}\right)^2 = \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 14}$$

und $\frac{15}{14}$ lässt sich deshalb nicht kürzen, weil

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad \text{und} \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist, also 15 und 14 keine gemeinsamen Primfaktoren besitzen. Gemeinsame Primfaktoren können aber durch die Multiplikation der beiden Zahlen mit sich selbst nicht hinzutreten:

$$\left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}\right)^2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7}$$

und somit kann von einer Kürzung keine Rede sein. Nun kann aber ein Bruch, der sich nicht weiter kürzen lässt und der nicht den Nenner 1 hat, keinesfalls der ganzen Zahl 2 gleich sein.

Jedoch ist das Probieren von Eva der Anfang einer Einschachtelung und damit zugleich auch der Anfang der Dezimalentwicklung für $\sqrt{2}$. Die Dezimalform einer Zahl zwischen 1 und 2 beginnt jedenfalls mit

$$1{,}\ldots$$

jede so beginnende Zahl kann als erste Annäherung von $\sqrt{2}$ aufgefasst werden. Weiß ich ferner, dass diese Zahl zwischen 1,4 und 1,5 liegt, so setzt sich die Dezimalform folgendermaßen fort:

$$1{,}4...$$

die so beginnenden Zahlen ergeben schon eine bessere Annäherung.
Daraus, dass die gesuchte Zahl zwischen 1,41 und 1,42 liegt, ergibt sich die folgende Fortsetzung:

$$1{,}41...$$

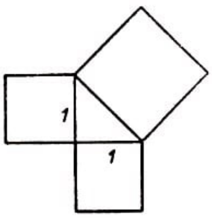
Jetzt wäre die Distanz zwischen 1,41 und 1,42 in Tausendstel zu teilen und zu untersuchen, welche der Zahlen

1,410, 1,411, 1,412, 1,413, 1,414, 1,415, 1,416, 1,417, 1,418, 1,419

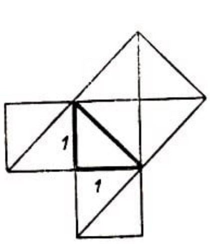
so beschaffen ist, dass ihr Quadrat noch kleiner, das Quadrat der darauffolgenden Zahl aber schon größer als 2 ist. Die betreffenden zwei Zahlen liefern bereits eine Schachtel für $\sqrt{2}$, die nur ein Tausendstel lang ist und daher auch die Tausendstel der Dezimalentwicklung genau angibt.

Es gibt auch ein mechanisches Verfahren zur Bestimmung der Dezimalen von $\sqrt{2}$. Das Wesentliche wird aber durch diese immer engere Zusammenziehung der Grenzen, innerhalb deren die Zahl liegen muss, ersichtlich.
Dieses Verfahren lässt sich unbeschränkt fortsetzen und ergibt eine immer bessere Annäherung. Wir wissen, dass es nie abbrechen und auch keinen periodischen Dezimalbruch ergeben kann, da ja $\sqrt{2}$ niemals rational wird.
Dennoch haben wir genau und handgreiflich vor uns, wie groß diese - durch immer engere Annäherung gegebene - Zahl ist: So groß wie eine Seite des erweiterten Fischteiches.

Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wird uns auch durch den allbekannten pythagoräischen Lehrsatz mit einer ähnlichen Anschaulichkeit nahegebracht. Zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen beide Katheten je eine Einheit betragen, und setzen wir auf seine drei Seiten je ein Quadrat:



Wenn wir in die beiden kleinen Quadrate je eine Diagonale, in das große Quadrat aber beide Diagonalen einzeichnen, dann erhalten wir lauter kongruente Dreiecke:



Die beiden kleinen Quadrate enthalten insgesamt vier Dreiecke, das große Quadrat ebenfalls vier. Folglich ist der Flächeninhalt der beiden kleinen Quadrate zusammen ebenso groß wie der Flächeninhalt des großen Quadrates allein -, d.h. - da sich der Inhalt eines Quadrates durch das Quadrieren einer Seite berechnen lässt -; die Summe der Quadrate der beiden Katheten ist dem Quadrat der Hypotenuse gleich.
(Das gilt nicht nur für dieses spezielle Dreieck, sondern für alle rechtwinkligen Dreiecke. Der allgemeine Beweis ist etwas komplizierter.)
Die Summe der beiden Kathetenquadrate unseres Dreiecks ist

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

und diese ist dem Quadrat der Hypotenuse gleich, d. h. die Länge der Hypotenuse beträgt $\sqrt{2}$ Einheiten.

Man kann zeigen, dass sich die Rechenoperationen im Bereich der irrationalen Zahlen ausführen lassen, indem sie auf die Näherungswerte angewandt werden. Die Näherungswerte sind aber rationale Zahlen, und für diese bleiben die alten Rechenregeln gültig. Wir haben es also mit einem Fall zu tun, in dem die im Endlichen gültigen Gesetze des Rechnens auch durch die Unendlichkeit nicht aufgehoben werden.

Jetzt können wir auf die bisher offene Frage zurückkommen, ob sich die Kante eines Würfels oder die Seiten eines Rechtecks immer in cm ausdrücken lassen. Die Antwort lautet:
Das gelingt nicht immer, und zwar auch insofern nicht, als es sogar Strecken gibt, die man in keinerlei Bruchteil eines Zentimeters genau messen kann. Wird z. B. $\frac{1}{20}$ cm genau 31mal auf irgendeiner Strecke nacheinander aufgetragen, so beträgt diese Strecke $\frac{31}{20}$ cm.

Andererseits haben wir soeben gesehen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten je 1 cm lang sind, die Länge der Hypotenuse in dieser Einheit durch keine rationale Zahl ausgedrückt werden kann.
(Es muss betont werden, dass es sich um die auf diese Einheit bezogene Länge handelt; denn es entspricht ja auch der $\sqrt{2}$ eine bestimmte Länge. Man könnte auch diese als neue Einheit wählen, und in dieser Einheit könnte man natürlich sie selbst ausdrücken.)

Man kann trotzdem mit Hilfe der annähernden rationalen Werte mit der Präzision unseres Schokoladenbeispiels zeigen, dass die alten Ergebnisse der Flächen- und Rauminhaltsberechnung auch in derartigen Fällen richtig bleiben.

In Verbindung mit der Gleichung zweiten Grades bin ich auch noch etwas schuldig geblieben. Dort mussten wir die Gleichung

$$(x + 3)^2 = 2$$

unerledigt lassen. Jetzt können wir auch diese lösen. Da wir bereits über negative Zahlen verfügen und wissen, dass sowohl die positiven als auch die negativen Zahlen ein positives Quadrat besitzen, kann sowohl $+\sqrt{2}$ als auch $-\sqrt{2}$ als jene Zahl betrachtet werden, die quadriert 2 ergibt. So ist

$$x + 3 = +\sqrt{2} \qquad \text{oder} \qquad x + 3 = -\sqrt{2}$$

und wird 3 als Subtrahend auf die rechte Seite gebracht, so erhält man zwei Lösungen:

$$x = -3 + \sqrt{2} \qquad \text{oder} \qquad x = -3 - \sqrt{2}$$

Die negative Zahl bringt aber eine neue Komplikation mit sich: Haben wir die Gleichung

$$x^2 = -9$$

zu lösen, so wissen wir nicht, was wir damit anfangen sollen, denn das Quadrat sowohl von $+3$ als auch von -3 ist ja $+9$. Wir kennen keine Zahl, die quadriert -9 ergeben würde. Darauf komme ich aber noch zurück.

Die irrationalen Zahlen wurden eingeführt, weil wir auf der Zahlenlinie Lücken entdeckten: Punkte, zu denen vorher keine Zahlen gehörten. Die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen, mit einem gemeinsamen Namen: der reellen Zahlen (wir werden auch mit Zahlen zu tun haben, die sich von der Realität mehr entfernen), füllt nun die Zahlengerade vollkommen aus. Nehmen

wir nämlich einen beliebigen ihrer Punkte, so fällt dieser zwischen zwei gewisse Ganze, dann zwischen gewisse Zehntel, ferner zwischen gewisse Hundertstel usf., wie etwa $\sqrt{2}$ in den Untersuchungen meiner Schülerin Eva.
Damit ergeben sich der Reihe nach die Ziffern einer Dezimalentwicklung. Endet diese Entwicklung irgendwo (fällt der Punkt mit irgendeinem Zehntel, Hundertstel, Tausendstel... zusammen), oder fällt sie periodisch aus, so gehört zu unserem Punkt eine rationale Zahl. Wenn keines von beiden der Fall ist, bezeichnet er eine irrationale Zahl.

Suchten wir z.B. den Punkt, welcher der Zahl $1\frac{1}{9}$ des Schokoladenbeispiels entspricht, in solche Intervalle einzuschließen, so würden wir die Erfahrung machen, dass dieser der Reihe nach zwischen 1 und 2, zwischen 1,1 und 1,2, zwischen 1,11 und 1,12, zwischen 1,111 und 1,112 liegt usf.; es fallen also der Reihe nach

$$1; 1{,}1; 1{,}11; 1{,}111...$$

in diese sich immer mehr verengenden Intervalle (sie fallen eben auf die linken Enden von diesen). Dies ist der tiefere Grund dafür, dass diese Zahlen immer bessere Annäherungen für $1\frac{1}{9}$ ergeben, dass sie ihr beliebig nahe kommen. Sie ergeben natürlich eine periodische Dezimalentwicklung, da ja $1\frac{1}{9}$ rational ist.

Gibt es denn viele irrationale Zahlen? Wenn sie uns bisher auch nur ausnahmsweise begegnet sind, so muss es ihrer doch viele geben.
Wir haben ja das Gefühl, dass es nur Zufall ist, wenn eine Dezimalentwicklung periodisch ausfällt. Wir haben uns aber schon einmal getäuscht, als wir ein ähnliches Gefühl hegten:

Von den rationalen Zahlen dachten wir auch, dass es ihrer mehr gibt als natürliche Zahlen. Dennoch stellte sich heraus, dass sämtliche rationalen Zahlen sich in eine einzige Folge ordnen lassen, so dass sie restlos mit den natürlichen Zahlen gepaart werden können: das erste Glied der Folge mit 1, das zweite mit 2 usf.

Was sagt nun die Methode der Paarung über die irrationalen Zahlen aus?
Untersuchen wir erst die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen, also die reellen Zahlen, und zwar alle in ihrer Dezimalform.

Beschränken wir uns dabei auf die Zahlen zwischen 0 und 1, d.h. auf die Zahlen, die mit 0 Ganzen beginnen, damit wir uns nicht mit dem Teil der Ganzen abzuplagen brauchen. Ich behaupte, dass sogar diese Teilmenge der reellen Zahlen von größerer Mächtigkeit ist als die der natürlichen Zahlen:
Es ist nicht möglich, ihre Elemente in eine Folge zu ordnen, ohne gewisse reelle Zahlen aus der Folge auszulassen.

Nehmen wir an, jemand erklärt, ich hätte nicht recht, er wisse ein Gegenbeispiel. Er habe aus den reellen Zahlen, die mit 0 beginnen, eine Folge konstruiert, in der keine von ihnen fehle. Er schreibt diese Folge auch auf.
Natürlich gibt er nur so viele Zahlen an, bis sich in ihrer Aufeinanderfolge eine Gesetzmäßigkeit zeigt, auf Grund deren dann jeder das Aufzählen der Glieder beliebig weit fortsetzen könnte. Bereits die einzelnen irrationalen Zahlen selbst können ja auch nur auf diese Weise angegeben werden, sie sind doch unendliche Dezimalbrüche. Die Folge beginne etwa folgendermaßen:

Die erste Zahl ist: 0,1
... zweite ... 0,202020...
... dritte ... 0,3113111311113...

und diese Zahlen lassen sich angeblich mit einer solchen Gesetzmäßigkeit fortsetzen, dass dabei über kurz oder lang jede reelle Zahl an die Reihe kommt.
Wie diese Gesetzmäßigkeit auch sei, ich werde sofort eine mit 0 Ganzen beginnende reelle Zahl bilden, die in der Folge gewiss nicht enthalten ist.

Zunächst verwandle ich die endlichen Dezimalbrüche der Folge in unendliche durch Hinzufügung von harmlosen Nullen. Somit ist dann

die erste Zahl: 0,1000000000000...
... zweite ... 0,2020202020202...
... dritte ... 0,3113111311113...

Nun kann ich mit meinem Vorhaben beginnen. Die erste Ziffer meiner Zahl ist jedenfalls

$$0,\ldots\ldots$$

Was soll ich nun an die Stelle der Zehntel setzen? Ich sehe nach, welche Ziffer in der ersten Zahl des Gegenbeispiels an der Stelle der Zehntel steht und schreibe eine andere Ziffer an diese Stelle, jedoch nicht 0 und auch nicht 9. Um etwas Bestimmtes zu sagen: Da in der ersten Zahl des Gegenbeispiels 1 Zehntel auftritt, setze ich nun 2 an die Stelle der Zehntel meiner Zahl (an diese Stelle und auch an die weiteren könnte ich ebensogut eine beliebige von den Ziffern 3, 4, 5, 6, 7, 8 hinschreiben).
Hätte an dieser Stelle der ersten Zahl des Gegenbeispiels etwas anderes als 1 gestanden, so hätte ich 1 zum Zehntel gewählt. Meine Zahl lautet also bisher:

$$0,2\ldots$$

Zur Wahl der Hundertstel meiner Zahl sehe ich nach, welche Ziffer an der Stelle der Hundertstel der zweiten Zahl des Gegenbeispiels steht, und ich wähle eine andere Ziffer, nur eben 0 und 9 nicht. Verwenden wir nur die Ziffern 1 und 2.
In der zweiten Zahl des Gegenbeispiels stehen 0 Hundertstel (und nicht 1); ich setze also 1 an diese Stelle (hätte dort 1 gestanden, so würde ich 2 hinschreiben). Meine Zahl wird also fortgesetzt

$$0{,}21...$$

Ebenso verfahre ich auch weiter: Ich setze an die Stelle der Tausendstel 2, da in der dritten Zahl 1 Tausendstel auftritt. Somit ist

$$0{,}212...$$

meine Zahl bis zu drei Dezimalen, und nun kann schon jedermann das Verfahren fortsetzen. Folgen die Zahlen des Gegenbeispiels mit irgendeiner vernünftigen Gesetzmäßigkeit aufeinander, so kann ich auch in der Bildung meiner Zahl nicht stecken bleiben.

So erhalte ich einen mit 0 beginnenden unendlichen Dezimalbruch, der in der Folge sicher nicht enthalten ist. Er unterscheidet sich ja von der ersten Zahl des Gegenbeispiels mindestens in den Zehnteln, von der zweiten mindestens in den Hundertsteln, von der dritten mindestens in den Tausendsteln, von jeder mindestens in einer Ziffer.
Es ist auch unmöglich, dass er sich nur der Form nach von irgendeiner Zahl des Gegenbeispiels unterscheidet, dem Wert nach aber nicht; denn nur jene Zahlen sind einer solchen Doppelzüngigkeit fähig, in denen von einer gewissen Stelle an nur noch 0 oder 9 wiederholt wird. Meine Zahl besteht aber ausschließlich aus den Ziffern 1 und 2.

Auf welche Art man also auch immer die reellen Zahlen in eine Folge zu ordnen, d. h. mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... zu paaren versucht, es wird immer reelle Zahlen geben, die darin fehlen.
Die Mächtigkeit der reellen Zahlen ist also größer als die der natürlichen Zahlen. Beschränken wir uns nicht nur auf solche, die mit 0 Ganzen beginnen, so gilt das natürlich um so mehr.

Allerdings wurde hier die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen betrachtet. Über die rationalen Zahlen wissen wir aber bereits, dass sie abzählbar sind, d.h., dass sie sich in eine Folge ordnen lassen. Könnte man auch die irrationalen Zahlen in eine Folge ordnen, so wäre es sehr leicht, die beiden Folgen zu vereinigen, indem man abwechselnd ein Element aus der ersten, dann eines aus der anderen auswählte. (Die Folgen der positiven und der negativen ganzen Zahlen,

$$1, 2, 3, 4, 5, ... \qquad \text{und} \qquad -1, -2, -3, -4, -5, ...$$

lassen sich z.B. auf diese Weise zu einer einzigen Folge

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, ...$$

vereinigen.) Die vereinigte Folge der rationalen und irrationalen Zahlen würde sämtliche reellen Zahlen enthalten; wir haben aber soeben bewiesen, dass dazu keine einzige Folge fähig ist. Somit kann die Menge der irrationalen Zahlen auch für sich keine Folge bilden, sie kann nicht abzählbar sein. Ihre Mächtigkeit ist also größer als die der rationalen Zahlen.

Es handelt sich also bei der Einführung der irrationalen Zahlen nicht etwa nur darum, dass man einige Lücken in der überall dichten Menge der rationalen Zahlen ausfüllt. Die irrationalen Zahlen sind vielmehr kontinuierlich auf der Zahlenlinie verteilt, und die rationalen Zahlen sind trotz all ihrer Dichte nur die darin verstreuten Rosinen.
Hierbei fühle ich irgendeine Ähnlichkeit mit dem Äther, von dem man annahm, dass er auch in der Atmosphäre der Erde die Leere lückenlos ausfüllt, so dass die scheinbar allgegenwärtigen Luftmoleküle in ihm verstreut schweben.

2.5 Die Fieberkurven glätten sich

Indem ich die Schulden aus den vorherigen Kapiteln nach und nach zusammenlese, fällt mir jene vereinsamte 1 an der Spitze des Pascalschen Dreiecks ein:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \quad ...
\end{array}$$

Wir haben bewiesen, dass die Summen der Glieder in den einzelnen Zeilen von der zweiten Zeile an nacheinander

$$2^1, 2^2, 2^3, ...$$

ergeben. Würde sich auch die oberste 1 in diese Ordnung fügen, so wäre ihr Wert 2^0. Doch 2^0 hatte bisher noch keinen Sinn - man kann 2 nicht 0 mal zum Faktor wählen -, und bis jetzt hatte es sich auch noch nicht als notwendig erwiesen, diesem Ausdruck einen Sinn beizulegen.

Befassen wir uns wieder einmal mit dem Potenzieren. Wir erinnern uns, wie leicht es war, die Potenzen einer Zahl miteinander zu multiplizieren: Man brauchte nur die Exponenten zu addieren, z. B.

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}\cdot\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^6 \qquad \text{und} \qquad 6 = 2 + 4$$

Auch andere Operationen lassen sich leicht durchführen, wenn dabei nur Potenzen einer einzigen Zahl auftreten. Es ist z. B.

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3}$$

Wird hierbei mit $3 \cdot 3$ gekürzt, so erhält man

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Es ist also $\frac{3^6}{3^2} = 3^4$ und $4 = 6 - 2$, d. h. die Division lässt sich ausführen, indem man die Exponenten voneinander subtrahiert. Ferner ist

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8; \qquad \text{und } 8 = 2 \cdot 4$$

Haben wir also eine Potenz zu potenzieren, so multiplizieren wir einfach die Exponenten miteinander.

Es lohnt sich daher, eine Tabelle aus den Potenzen ein und derselben Basis aufzustellen. Wählen wir die 2 zur Basis, denn die Potenzen von 2 lassen sich ja leicht berechnen:

$$\begin{array}{llllll} 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 & 2^5 = 32 & 2^6 = 64 \\ 2^7 = 128 & 2^8 = 256 & 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024 & 2^{11} = 2048 & 2^{12} = 4096 \end{array}$$

Sollen wir zwei Zahlen miteinander multiplizieren, können wir unter günstigen Umständen das Resultat ohne Mühe aus dieser Tabelle ablesen. Ist die aufgegebene Multiplikation z. B.

$$64 \cdot 32$$

so haben wir Glück, denn beide Zahlen sind in der Tabelle enthalten; die entsprechenden Exponenten sind 6 und 5. Diese zusammen zu rechnen, ist keine große Kunst: wir erhalten so 11. Ein rascher Blick auf die 11. Zeile unserer Tabelle liefert uns das Ergebnis 2048.

Oder wir sollen 32 quadrieren. Der entsprechende Exponent ist 5; diesen 2mal zu nehmen, ist wiederum eine Kleinigkeit. Wir erhalten 10, und schon kann man aus der 10. Zeile ablesen: $32^2 = 1024$.

Das ist wirklich ein Kinderspiel. Schade, dass nicht alle Zahlen in der Tabelle auftreten. Es würde sich lohnen, den Begriff des Potenzierens so zu erweitern, dass sich alle Zahlen (z. B. auch 3) als Potenzen von 2 aufschreiben lassen.

So kommen wir zu einer neuen Umkehrung des Potenzierens:
Jetzt suchen wir die Potenz, in die die gegebene Basis 2 erhoben werden muss, damit wir z. B. 3 als Resultat erhalten. Diese Operation nennt man Logarithmieren, und ihr Ergebnis, wenn wir ein solches erhalten, bezeichnet man als Logarithmus.

Am unangenehmsten ist das Rechnen mit Brüchen, und diese treten in der Tabelle bisher noch nicht auf. Bereits die kleinste Potenz von 2, nämlich 2^1, ergibt 2 Ganze. Für unsere angestrebte Erweiterung des Potenzierens ist es unser Leitprinzip, dass sich eine größere Zahl auch fernerhin als eine höhere Potenz von 2 aufschreiben lassen soll, damit man in der Tabelle nicht drunter und drüber herumzusuchen hat.
Wollen wir auch Brüche als Potenzen darstellen, so haben wir die Potenzen von 2 auch für kleinere Exponenten als 1 zu definieren.

Gehen wir in ganzen Schritten nach rückwärts, so warten der Reihe nach die Potenzen

$$2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$$

auf ihre Definition.

Bei dieser Operationserweiterung ist es besonders wichtig, darauf zu achten, dass die alten Rechenregeln erhalten bleiben, denn man darf nicht das Ziel aus den Augen verlieren: Wir wollen ja, dass das Rechnen mit den neuen Zahlen ebenso bequem ist wie mit den alten.

Unter anderem müssen wir darauf achten, dass das Ergebnis der Multiplikation einer Potenz von 2 mit 2^0 mit dem übereinstimmt, was man erhält, wenn zum Exponenten dieser Potenz 0 addiert wird. Die Addition von 0 ändert aber nichts.
Folglich haben wir 2^0 so zu definieren, dass die Multiplikation mit 2^0 den Wert einer Zahl nicht ändert. Jener Multiplikator, der den Wert einer Zahl nicht ändert, ist aber 1. Demnach ist 2^0 (und ebenso auch die nullte Potenz einer beliebigen anderen Basis) durch

$$2^0 = 1$$

zu definieren. Damit wird auch das Pascalsche Dreieck einheitlich.
Bei der Definition von 2^{-1} hat man darauf zu achten, dass

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

wird. Wenn man aber in der Gleichung

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 1$$

den Multiplikator 2^1 als Divisor auf die andere Seite bringt, so erhält man

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Ebenso ergibt sich aus der Forderung

$$2^2 \cdot 2^{-2} = 2^0 = 1 \qquad \text{dass} \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

aus der Forderung

$$2^3 \cdot 2^{-3} = 2^0 = 1 \qquad \text{dass} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

sein muss usf.
Wollen wir also die bequemen Rechenregeln aufrechterhalten, dann müssen wir die Potenzen mit negativen Exponenten so definieren, dass jeweils 1 durch die Potenz mit dem entsprechenden positiven Exponenten zu dividieren ist.

Damit erweitert sich unsere Tabelle jetzt bereits nach rückwärts auf die Brüche:

$$\begin{aligned}
2^{-3} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125 \\
2^{-2} &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25 \\
2^{-1} &= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5 \\
2^0 &= 1 \\
2^1 &= 2 \\
2^2 &= 4 \qquad \ldots
\end{aligned}$$

Wir gewinnen damit ein gutes Hilfsmittel auch für die Rechnung mit den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... bzw. mit den Dezimalbrüchen 0,5, 0,25, 0,125...

Es sind aber noch immer große Lücken zwischen den einzelnen Zahlen der Tabelle, z. B. zwischen $2^1 = 2$ und $2^2 = 4$. Wollen wir eine Zahl zwischen 2 und 4 (z.B. 3, aber auch 2,7) als eine Potenz von 2 aufschreiben, so kann das auf die gewünschte Art nur mit einem Exponenten gelingen, der zwischen 1 und 2 liegt, z.B. mit $1\frac{1}{2}$.
Da $1 = \frac{2}{2}$, ist $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, und wir haben also auch die Potenz von 2 mit dem Exponenten $\frac{3}{2}$, allgemein: mit einem gebrochenen Exponenten, zu definieren.

Diese Definition wird dadurch festgelegt, dass wir die Regel des Potenzierens einer Potenz aufrechterhalten wollen. Soll diese auch hier in Kraft bleiben, so muss gelten:

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3$$

Demnach kann $2^{\frac{3}{2}}$ nur jene Zahl sein, die quadriert 2^3 ergibt. Das ist aber jene Zahl, die mit $\sqrt{2^3}$ bezeichnet wird. So erhalten wir

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

Berechnet man $\sqrt{8}$ bis zu den Zehnteln, so erhält man 2,8. Da ferner

$$\frac{3}{2} = 3 : 2 = 1{,}5$$

und das Rechnen mit Exponenten in Dezimalform leichter ist, lässt sich zwischen die Zeilen von 2^1 und 2^2 die folgende einschalten:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^{1,5} &= 2{,}8 \\ 2^2 &= 4, \qquad ... \end{aligned}$$

Unseren geheimen Wunsch, die 3 als Potenz von 2 auszudrücken, haben wir auch damit noch nicht erfüllt, obwohl 2,8 bereits ziemlich nahe bei 3 liegt.
Man kann beweisen, dass sich 3 durch keinerlei Potenz von der Basis 2 mit gebrochenem Exponenten genau darstellen lässt; sie kann jedoch von solchen Potenzen mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden. Durch solche Annäherungen werden die Potenzen mit irrationalen Exponenten definiert.

Das ist der Grundgedanke bei der Aufstellung von Logarithmentafeln.
Die alten Logarithmentafeln wurden tatsächlich so angefertigt. Die Tabelle, die von der Schule her bekannt ist, hat die Basis 10 (die Basis wird darin nicht angegeben, sondern nur die Exponenten). Um des Fingerspiels willen hat man hierbei bereits ein bedeutendes Opfer gebracht: Zwischen den Potenzen von 10 (zwischen 10, 100, 1000, ...) klaffen noch viel größere Lücken als zwischen den Potenzen von 2. Es kostet noch viel mehr Mühe, diese auszufüllen.

Manche Logarithmentafeln enthalten auch sogenannte natürliche Logarithmen von einer gewissen Basis e. Dieses "e" ist eine irrationale Zahl, die mit 2,71... beginnt. Wie kam man nun auf den Gedanken, gerade sie als eine natürliche Basis zu betrachten?

Man kann auf vielen Wegen dazu gelangen. Nach meinem Gefühl ist der folgende am geschicktesten.
Die Zahl 10 ist nicht die geeignetste Basis für eine Logarithmentafel; es wäre sogar gut, eine kleinere Zahl als 2 zur Basis zu wählen; dann wären die Lücken zwischen den Potenzen mit ganzen Exponenten dieser Basis noch enger. Bis zur 1 kann man natürlich nicht hinabgehen, denn jede Potenz von 1 ist ja 1.

Eine kleinere Zahl als 1 zu nehmen, ist wiederum nicht zweckmäßig; wird nämlich ein echter Bruch potenziert, so ist das Resultat kleiner als der Bruch selbst; z.B. ist $(\frac{1}{2})2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Machen wir den Versuch mit 1,1. Das wird schon deshalb leicht sein, weil uns die Potenzen von 11 bereits vom Pascalschen Dreieck her bekannt sind, und nur, wenn wir das Komma setzen, müssen wir daran denken, dass jede Multiplikation mit Zehnteln eine Division durch 10 bedeutet, das Komma also stets um eine Stelle nach links gerückt werden muss.
Vergessen wir auch nicht, dass die nullte Potenz jeder Basis 1 ergibt.

$$\begin{array}{lll} 1{,}1^0 = 1 & 1{,}1^1 = 1{,}1 & 1{,}1^2 = 1{,}21 \\ 1{,}1^3 = 1{,}331 & 1{,}1^4 = 1{,}4641 & ... \end{array}$$

Diese Potenzen nehmen sehr langsam zu, und so treten hier bereits eine Menge Zahlen zwischen 1 und 2 auf, schon vor der mühsamen Ausfüllung der Lücken.

Natürlich wäre eine noch kleinere, der 1 noch näherliegende Basis noch besser. Machen wir den Versuch mit der Basis 1,001 (die Elemente des Pascalschen Dreiecks sind hierbei durch je zwei Nullen voneinander getrennt):

$$1{,}001^1 = 1, \quad 1{,}001^1 = 1{,}001, \quad 1{,}001^2 = 1{,}002001, \quad 1{,}001^3 = 1{,}003003001$$

Das ist bereits eine enorme Dichte. Diese Potenzen nehmen so schneckenhaft langsam zu, dass man fast den Verdacht schöpft: Erreichen sie denn überhaupt die 2?
Man kann aber beweisen, dass die Potenzen der Zahlen, die 1 um noch so wenig übertreffen, dennoch dem Unendlichen zustreben, wenn auch sehr langsam.

Diese Tabelle hat noch einen kleinen Schönheitsfehler: Infolge der langsamen Zunahme gehören bereits zu verhältnismäßig kleinen Zahlen allzu große Exponenten; erst ungefähr bei der tausendsten Potenz wird die 2 erreicht. Tausendmal so kleine Exponenten würden einen harmonischeren Eindruck auf uns machen. Hier lässt sich aber sehr leicht Abhilfe schaffen, wenn wir die Basis einfach in die tausendste Potenz erheben. Es ist doch

$$\left(1{,}001^{1000}\right)^{\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{\frac{1000}{1000}} = 1{,}001^1$$
$$\left(1{,}001^{1000}\right)^{\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{\frac{2000}{1000}} = 1{,}001^2$$

usf. Folglich hat man die Basis 1,0011 tatsächlich in eine tausendmal kleinere Potenz zu erheben als die Basis 1,001, um dasselbe Resultat zu erhalten.

Wird die Basis $1{,}001^{1000}$ potenziert, so können wir in Tausendstelschritten fortschreiten. Da ferner in Dezimalform

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001, \quad \frac{2}{1000} = 0{,}002, \quad \frac{3}{1000} = 0{,}003, \quad ...$$

ist, so ergibt sich, indem wir den vorhin erhaltenen Zusammenhang zwischen den Potenzen der neuen Basis und denen von 1,001 benutzen:

$$\begin{aligned}
\left(1{,}001^{1000}\right)^{0} &= 1{,}001^{0} = 1 \\
\left(1{,}001^{1000}\right)^{0{,}001} &= 1{,}001^{1} = 1{,}001 \\
\left(1{,}001^{1000}\right)^{0{,}002} &= 1{,}001^{2} = 1{,}002001 \\
\left(1{,}001^{1000}\right)^{0{,}003} &= 1{,}001^{3} = 1{,}003003001, \quad ...
\end{aligned}$$

Damit besteht zwischen den Zahlen und den entsprechenden Exponenten keine Disproportion mehr; andererseits ist die Dichte erhaltengeblieben.
Es ist klar, dass die Basen

$$1{,}0001^{10000}, \quad 1{,}00001^{100000}, \quad 1{,}000001^{1000000}, \quad ...$$

der Reihe nach immer zweckdienlicher werden, und man kann beweisen, dass diese Folge gegen eine irrationale Zahl konvergiert, die mit 2,71... beginnt. Diese Zahl spielt in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle und hat darum auch einen besonderen Namen erhalten: Sie wird e genannt.
Die Logarithmen von der Basis e nennt man die natürlichen Logarithmen: in so natürlicher Weise gelangt man zu ihnen beim Suchen nach immer zweckmäßigeren Basen.

Um der Logarithmen willen haben wir die Lücken ausgefüllt, die sich in der Definition der Potenz noch zeigten: Jetzt hat die Potenz bereits für alle Exponenten einen Sinn und nicht nur für die natürlichen Zahlen. Damit sind wir in der Lage, die noch sehr mangelhafte Fieberkurve der exponentialen Funktion zu ergänzen.
Wir verstehen bereits, mit Gleichungen umzugehen. Daher können wir diese Funktion auch in Form einer Gleichung aufschreiben:

Die Basis sei wieder die 2, den Exponenten werde ich variieren. Er ist somit nicht etwa eine bekannte Zahl und wird demnach mit x bezeichnet. Abhängig von ihm wird sich auch der Wert der Funktion verändern, den wir mit y bezeichnen:

$$y = 2^x$$

Die Werte von x werden auf der horizontalen Geraden (auf dieser wird jetzt ein Nullpunkt angenommen und links von ihm auch negative Zahlen) mit solchen Einheiten: dargestellt; die Werte von y werden wieder aufwärts gemessen, und zwar mit solchen Einheiten: mid:

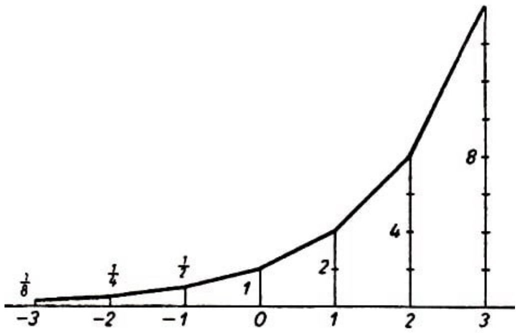
Ist $x = -3$, so ist $y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,
Ist $x = -2$, so ist $y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

Ist $x = -1$, so ist $y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$,
Ist $x = 0$, so ist $y = 2^0 = 1$,
Ist $x = 1$, so ist $y = 2^1 = 2$,
Ist $x = 2$, so ist $y = 2^2 = 4$,
Ist $x = 3$, so ist $y = 2^3 = 8$.

es sind also

in den Punkten	-3	-2	-1	0	1	2	3
der Reihe nach	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Einheiten aufwärts zu messen:



Nun können wir auch Zwischenwerte für x annehmen. Wir sahen z. B. bereits, dass

$$2^{1\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2{,}8...$$

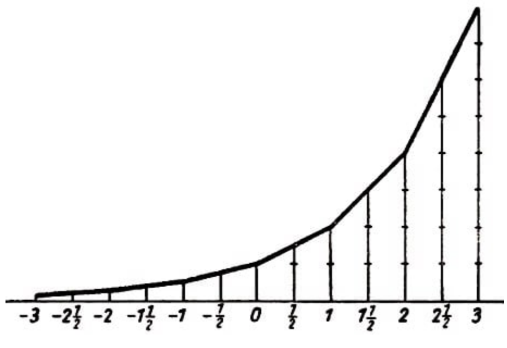
ist. Ähnlich lassen sich auch die Werte zwischen anderen ganzen Zahlen berechnen. Bleibt man bei den Zehnteln stehen, so ergibt sich

für $x = -2\frac{1}{2}$, $y = 0{,}2$ für $x = \frac{1}{2}$, $y = 1{,}4$
für $x = -1\frac{1}{2}$, $y = 0{,}4$ für $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 2{,}8$
für $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0{,}7$ für $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 5{,}7$

Ergänzen wir die vorige Abbildung, indem wir

in den Punkten	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
der Reihe nach	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}7$	$1{,}4$	$2{,}8$	$5{,}7$

Einheiten aufwärts eintragen:



In dieser Fieberkurve gibt es schon kaum noch "Knicke" an den Treffpunkten der geraden Strecken. Wird die Interpolation in unserer Phantasie über alle rationalen und irrationalen Werte ausgedehnt, so glättet sich die Fieberkurve allmählich zu einer einzigen glatten Kurve aus.

Nach links fortschreitend, nähert sich die Kurve augenscheinlich der horizontalen Linie, ohne aber diese je zu erreichen: Wir fanden ja keinen Exponenten, mit dem 2 potenziert 0 ergeben würde. Es kann aber nur ein solcher; Punkt auf der Linie liegen, zu dem ein y von der Größe 0 gehört.

Dieselbe Erscheinung lässt sich auch an der bisher noch fehlenden Fieberkurve der Division wahrnehmen. Solange wir nur ganze Zahlen betrachteten, hätte ich das nicht präzise genug schildern können. Jetzt sei der Dividend z.B. 12 (wir wissen, dass 12 viele Teiler hat); den Divisor werde ich variieren, daher bezeichne ich ihn mit x.
In Abhängigkeit von x wird sich das Resultat der Division, der Quotient, verändern; wir bezeichnen ihn mit y: $y = \frac{12}{x}$

Ist $x = -12$, so ist $y = \frac{12}{-12} = -1$, da $(-12) \cdot (-1) = +12$,
Ist $x = -6$, so ist $y = \frac{12}{-6} = -2$, aus gleichem Grunde,
Ist $x = -4$, so ist $y = \frac{12}{-4} = -3$,
Ist $x = -3$, so ist $y = \frac{12}{-3} = -4$,
Ist $x = -2$, so ist $y = \frac{12}{-2} = -6$,
Ist $x = -1$, so ist $y = \frac{12}{-1} = -12$,
Ist $x = 1$, so ist $y = \frac{12}{1} = 12$,
Ist $x = 2$, so ist $y = \frac{12}{2} = 6$,
Ist $x = 3$, so ist $y = \frac{12}{3} = 4$,
Ist $x = 4$, so ist $y = \frac{12}{4} = 3$,
Ist $x = 6$, so ist $y = \frac{12}{6} = 2$,
Ist $x = 12$, so ist $y = \frac{12}{12} = 1$.

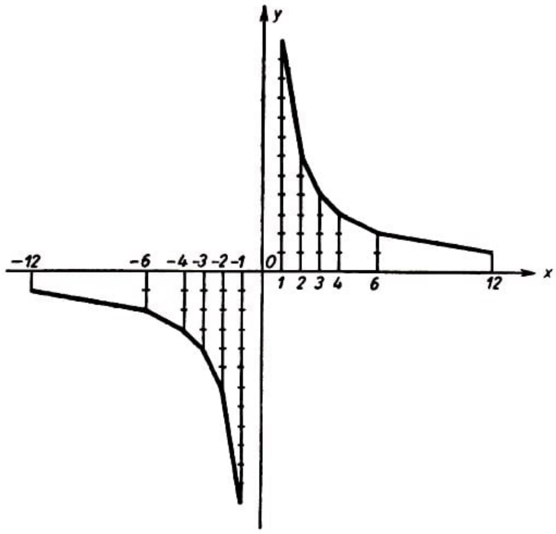
Die positiven y-Werte tragen wir von der Achse an gemessen aufwärts, die negativen abwärts ein. Es sind also

in den Punkten	-12	-6	-4	-3	-2	-1
	-1	-2	-3	-4	-6	-12

Einheiten abwärts,

in den Punkten	1	2	3	4	6	12
	12	6	4	3	2	1

Einheiten aufwärts einzutragen (die Einheit sei in allen Richtungen 1):



Zwischenwerte sind kaum noch nötig; die Kurve glättet sich bereits schön aus. Es wird aber gut sein, ihre Enden etwas näher zu untersuchen.
Dazu empfiehlt es sich, durch den Nullpunkt aufwärts und abwärts, in der Richtung der y-Werte, eine Gerade zu ziehen. In einem solchen Fall ist die horizontale Linie die Achse der x-Werte; die dazu senkrechte Linie durch den Nullpunkt wird y-Achse genannt.

Man sieht, dass sowohl die x-Achse als auch die y-Achse von beiden Kurventeilen immer stärker angenähert wird, ohne von ihnen jemals erreicht zu werden. Man nennt sie die Asymptoten der Kurve. Geht man nämlich auf der x-Achse weiter nach rechts, so wird z.B. für $x = 24$

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{24}, \qquad \text{mit 12 gekürzt:} \quad y = \frac{1}{2}$$

für $x = 36$, wenn man wiederum mit 12 kürzt: $y = \frac{1}{3}$
für $x = 48$, $y = \frac{1}{4}$ usf.

Wenn man auf der x-Achse immer weiter fortschreitet, werden die y-Werte beliebig klein, doch ganz zu 0 werden sie nie. In wieviele Teile auch immer die 12 geteilt wird, irgendeine Größe haben die Teile doch. Ebenso erhält man, in der negativen Richtung fortschreitend, die gegen 0 strebenden, jedoch nie ganz zu 0 werdenden Werte

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Der andere Ast der Kurve nähert sich also der x-Achse von unten ebenfalls immer mehr, ohne sie je zu erreichen.
Ist nun $x = \frac{1}{2}$, so denken wir daran, dass ein Ganzes zwei Hälften enthält. Folglich enthalten 12 Ganze $12 \cdot 2$, d.h. 24 Hälften:

$$y = 24$$

Ebenso sieht man ein, dass in 12 gerade 36 Drittel, 48 Viertel enthalten sind: ist $x = \frac{1}{3}$, so ist $y = 36$, ist $x = \frac{1}{4}$, so ist $y = 48$. usf.

Demnach wächst y für x-Werte, die sich dem Nullpunkt nähern, immer mehr. Die y-Achse kann von der Kurve nie erreicht werden, denn dies könnte nur dort geschehen, wo $x = 0$ ist.
Hier wäre aber $y = \frac{12}{0}$ und diese Division würde gegen das ewige und unüberbrückbare Verbot verstoßen: Es ist nicht erlaubt, durch 0 zu dividieren!

Die Probe der Division besteht nämlich darin, dass man multipliziert: $20 : 5 = 4$, da $5 \cdot 4 = 20$. Was würde aber eine Division durch 0 ergeben? Man erhält zur Antwort gewöhnlich:

$5 : 0 = 0$. Probe: $0 \cdot 0 = 0$, und dies ist nicht 5, oder
$5 : 0 = 5$. Probe: $0 \cdot 5 = 0$, und dies ist nicht 5, oder
$5 : 0 = 1$. Probe: $0 \cdot 1 = 0$, und dies ist nicht 5.

Welche Zahl auch immer mit 0 multipliziert wird, das Ergebnis wird stets 0 sein, und das ist nicht 5. Somit lässt sich 5 nicht durch 0 dividieren. Bedenken wir: Ist eine Zahl sehr klein, so ist sie sehr oft in 5 enthalten. Je kleiner die Zahl ist, durch welche dividiert wird, um so größer fällt das Ergebnis aus. Gäbe es eine größte Zahl, so wäre diese das Ergebnis der Division durch die kleinste Zahl, nämlich durch 0. Es gibt aber keine größte Zahl.

Vielleicht lässt sich wenigstens die 0 selbst durch 0 dividieren? Bitte probieren:
$0 : 0 = 1$; Probe: $0 \cdot 1 = 0$.
Dies scheint zu stimmen. Ja schön, ich sage nun aber: $0 : 0 = 137$, und auch damit habe ich recht, denn $0 \cdot 137$ ist ebenfalls 0.

Hier stimmt also etwas anderes nicht: Das Ergebnis ist ganz und gar unbestimmt; die Probe erklärt jedes Ergebnis für richtig. Das Verbot besteht streng für alle Fälle. Irgendein scherzhaftes Studentenblatt hat dies einmal etwa so formuliert:
Als der Herrgott Adam in das Paradies setzte, sprach er zu ihm: "Du darfst mit jeder Zahl dividieren, nur mit der 0 nicht!"

Man könnte glauben: Wurde dies so streng verboten, dann fällt es niemandem ein, durch 0 zu dividieren. Nun, so unverhüllt vielleicht auch nicht; aber die 0 verkleidet sich manchmal. Sie wird z. B. in folgender Form:

$$(x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 4)$$

nicht gleich von allen erkannt, obwohl hier von $(x + 2)^2$ die eigene entwickelte Form subtrahiert wird.
Die Division durch solche verborgene Nullwerte steht im Hintergrund jener Scherzableitungen, die z. B. einen Beweis für $1 = 2$ liefern.

Wird nämlich in der Mathematik nur ein einziger Fehler begangen, wird nur eine einzige Aussage, die den übrigen Sätzen widerspricht, als wahr angenommen, so kann man daraus bereits alles ableiten; sogar, dass $1 = 2$ ist.

Prägen wir das Bild der vorherigen Kurve gut unserem Gedächtnis ein - ich sage auch ihren Namen: Sie wird Hyperbel genannt - dann werden wir jenes Verbot nicht vergessen. Das auffallendste an der Kurve ist ja, dass sie entzweigerissen ist. Beide Äste ziehen sich schön glatt und stetig hin, doch im Nullpunkt klafft der raue Riss, die bis ins Unendliche ausgedehnte Wunde: Der linke Ast läuft abwärts, der rechte aufwärts ins Unendliche.

Und zwischen ihnen erhebt sich die y-Achse wie ein blankes Schwert: Du darfst dich nähern, doch ganz bis zur 0 wage dich nicht heran!

2.6 Es gibt nur eine Mathematik

Wenn wir auch bereits wissen, wie man einige Funktionen in Gleichungsform aufschreiben kann, so dürfen wir dennoch nicht glauben, dass in der Angabe einer Funktion eine solche Formel eine entscheidende Rolle spielt.
Bitte, man versuche, ob sich das folgende y als Funktion von x durch irgendeine einfache Formel ausdrücken lässt: Sooft x eine rationale Zahl ist, habe y den Wert 1, und sooft x irrational ist, nehme y den Wert 0 an (diese Funktionsbeziehung wird die Dirichletsche Funktion genannt).

Die Definition ist tadellos: Der Wert von y hängt tatsächlich von dem Wert ab, der für x gewählt wird, und zu jedem Wert von x gehört ein ganz bestimmtes y. Wenn z.B. $x = 1{,}5$ ist, so ist $y = 1$, wenn $x = \sqrt{2}$ ist, so ist $y = 0$.
Trotzdem ist es eine recht schwierige Aufgabe, eine Formel für diese Funktion zu finden. Sie lässt sich leider nicht einmal graphisch darstellen, denn ihr Pendeln zwischen 0 und 1 ist allzu toll: Es liegen ja sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen überall dicht.

Das Wesentliche des Funktionsbegriffes ist die Paarung der x-Werte mit den entsprechenden Werten von y. Dabei braucht x nicht unbedingt alle Werte anzunehmen. Wir wissen ja bereits von jener Funktion, die man durch die Gleichung $y = \frac{12}{x}$ angeben kann, dass in ihr das x den Wert 0 nicht annimmt: Für $x = 0$ ist diese Funktion nicht definiert.
Bei allen Funktionsdefinitionen muss man angeben, aus welcher Zahlenmenge x gewählt werden kann, und es muss eine Anweisung darüber gegeben werden, welches y mit einem aus jener Menge ausgewählten x gepaart werden soll.

Es bedeutet natürlich immer eine große Hilfe, wenn sich die Funktion auch graphisch darstellen lässt: Eine gute Abbildung sagt mehr, als wenn wir die Funktion lang und breit mit Worten zu beschreiben suchen.

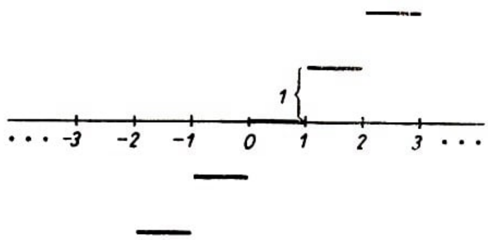
Die Definition einer Funktion sei z. B. folgende: Wie auch x gewählt wird, y soll stets der größten in x enthaltenen ganzen Zahl gleich sein; z. B.,

wenn $x <= 5{,}45$, dann ist $y = 5$,
wenn $= \sqrt{2}$, dann ist $y = 1$

da ja, wie wir bereits sahen, $\sqrt{}=1{,}4...$ ist. Versuchen wir, diese Funktion darzustellen:

Ist $x = 0$, so ist $y = 0$; ist $x = 0{,}1$, so ist $y = 0$; ist $x = 0{,}9999$, so ist $y = 0$, man sieht: Solange x die 1 nicht erreicht, ist stets $y = 0$. Dann wird

für $x = 1$ $y = 1$, für $x = 1{,}001$ $y = 1$, für $x = 1{,}99$ $y = 1$.
also $y = 1$, solange nur x nicht bis zur 2 gelangt, usf., auch in der negativen Richtung.
So erhalten wir folgende graphische Darstellung:



Aus diesen abgesonderten horizontalen Stücken besteht die Kurve.
Ein Blick auf die Zeichnung verrät alles über die Funktion: Wo die Kurve zerrissen wird, da macht der Funktionswert einen Sprung von der Höhe 1; dafür bleibt er auf den horizontalen Stücken konstant. Eine Funktion ist also nicht nur zu solchen unendlichen Rissen fähig wie $y = \frac{12}{x}$ an der Stelle $x = 0$, sondern auch zu milderen Rissen wie hier.
Das Bild von beiden Funktionen zieht sich wenigstens auf den nicht reißenden Stücken stetig und glatt dahin, während die Dirichletsche Funktion nirgends stetig ist:

Kein Intervall kann so eng sein, dass in ihm nicht sowohl rationale als auch irrationale Punkte zu finden wären; zwischen diesen springt aber bereits der Funktionswert.

Man darf auch nicht glauben, dass dann, wenn sich eine Funktion durch eine Formel angeben lässt und die x-Werte genügend dicht genommen werden, das Bild der Funktion sich immer zu einer Linie ohne "Knicke" ausglättet.
Nehmen wir z.B. an, dass die Definition lautet: Was auch x sei, y soll dem absoluten Wert von x gleich sein, d.h. dem Wert von x ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen.

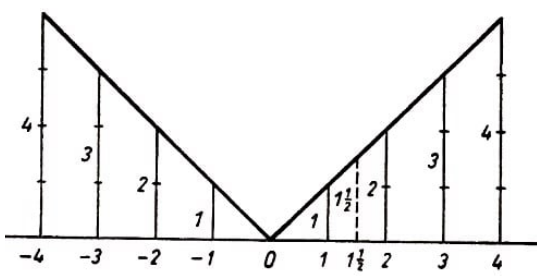
Für den absoluten Wert wurde ein bestimmtes Zeichen eingeführt: je ein senkrechter Strich vor und nach der Zahl; z.B.:

$$|-3| = 3, \quad |+3| = 3, \quad \text{und natürlich} \quad |0| = 0$$

Die eben definierte Funktion lässt sich daher durch die folgende einfache Formel angeben:

$$y = |x|$$

Während also x die Punkte $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ durchläuft, nimmt y nacheinander die Werte $4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4$ an. Die Darstellung ist:



Das Bild unserer Funktion besteht folglich aus zwei Geraden, die sich in einem Winkel voneinander wegneigen; auch dann ändert sich hieran nichts, wenn wir beliebig viele Zwischenwerte durchprobieren. Ist z.B.

$$x = 1\frac{1}{2}, \quad \text{so ist} \quad y = \left|1\frac{1}{2}\right| = 1\frac{1}{2}$$

Dieser Wert ist mit der gestrichelten Linie eingezeichnet: Auch dieser Punkt fällt auf einen Schenkel des Winkels.

Die geometrische Darstellung liefert ein prägnantes, in die Augen springendes Bild von der Funktion, wenn dieses auch nicht genau ist: Unser Bleistift zeichnet nicht ganz scharf, unser Lineal ist nicht ganz gerade, auch unsere Augen und unsere Hände sind unvollkommen. Die Geometrie hat aber über die einzelnen Figuren auch ganz Genaues zu sagen, was nicht an die Zeichnung gebunden ist.
Kenne ich z. B. die geometrischen Eigenschaften der Hyperbel und weiß ich, dass das Bild der Funktion $y = \frac{12}{x}$ eine Hyperbel ist, so weiß ich schon fast alles über diese Funktion.

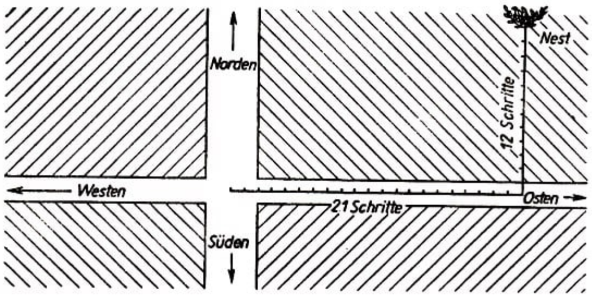
Die Geometrie wendet sich aber auch oft um Hilfe an die übrigen Zweige der Mathematik. Sie borgt sich z.B. eine Formel aus, wenn sie irgendetwas einheitlich behandeln will; wir sahen ja bereits, wieviele verschiedene Probleme durch eine einzige Formel zusammengefasst werden können.
Sie hat das bereits in der Flächen- und Rauminhaltsberechnung getan.

Es gibt nur eine Mathematik. Sie zerfällt nicht in zwei verschiedene Wissenschaften - in Geometrie und in "Algebra" - wie dies der Schüler meint, besonders, wenn der Stoff von seinem Lehrer so eingeteilt wird, dass man Montag und Freitag "Algebra", Mittwoch dagegen Geometrie hat. Bei dieser Einteilung spaltet sich ja die Mathematik geradezu in zwei Lehrgegenstände.

Eine der Brücken, die die Geometrie mit dem anderen Gebiet verbinden, ist das Koordinatensystem, nämlich jene senkrecht aufeinanderstehenden Geraden durch den Nullpunkt - die Achsen der x- und der y-Werte -, die wir bereits zur Beschreibung der Hyperbel benutzt haben. Sie ermöglichen es, die Punkte der Ebene durch Zahlen zu charakterisieren. Sie können als zwei Wege aufgefasst werden, die eine Wiese durchqueren.
Habe ich in einem Busch der Wiese ein Vogelnest gefunden, so kann ich mir die Stelle dadurch merken, dass ich in möglichst gleichmäßigen Schritten geradeaus auf den einen Weg zugehe, meine Schritte zähle und auch jene Schritte, die ich auf diesem Weg bis zur Wegkreuzung zu gehen habe:

Will ich nun jemanden zu dem Nest hinführen, und weiß ich, dass ich von der Wegkreuzung 21 Schritte nach Osten und 12 Schritte in nördlicher Richtung gehen muss, dann werde ich das Nest sicher finden.
Diese beiden gerichteten Zahlen sind die beiden Koordinaten des gesuchten Punktes. In der Geometrie werden die Richtungen natürlich mit den Zeichen „+“ und „-“ angegeben, und zwar nach altem Brauch so, dass die positiven Richtungen nach rechts und

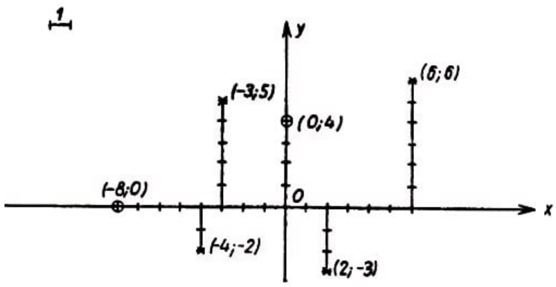
aufwärts, die negativen nach links und abwärts weisen.



Statt der Schritte hat man hier eine bestimmte Einheit anzunehmen, in der die Koordinaten gemessen werden. So gehört zu einem jeden Punkt der Ebene ein bestimmtes Zahlenpaar, und zu jedem Zahlenpaar gehört ein Punkt.

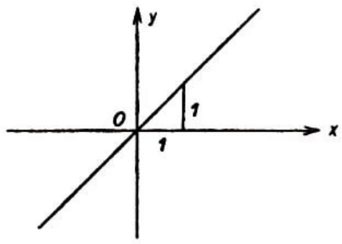
Der Weg, den man in der Richtung der x-Achse zurücklegt - als erster wird immer dieser genannt -, ist die Abszisse des Punktes; der Weg, der in der Richtung der y-Achse zurückgelegt wird, ist seine Ordinate.

Ich schreibe neben einige Punkte ihre Koordinaten, denn es ist gut, wenn man sich darin Übung verschafft:



(Natürlich ist dies nicht der einzige Weg zur Verknüpfung der Punkte mit Zahlen. Man kann sich z.B. vorstellen, dass die Wege nicht senkrecht aufeinanderstehen. Dennoch erhalte ich eine gute Orientierung, indem ich ihre Richtungen verfolge. Es kann aber auch nur ein Weg vorhanden sein, auf dem aber z.B. ein bestimmter Baum bezeichnet wird.
Bis dahin kann ich mich von dem Busch aus schrittweise durchschlagen und finde mich auch zurück, wenn ich über einen Apparat verfüge, mit dem ich feststellen kann, in welcher Richtung der Busch von hier aus liegt.)

Wenn man die Punkte durch Zahlenpaare charakterisiert, so ergibt sich die Möglichkeit, eine Linie durch eine Beziehung zwischen solchen Zahlenpaaren, d.h. durch eine Gleichung festzulegen. Nehmen wir z.B. die Gerade, die durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $(1{,}1)$ geht:



Würde dies einen Eisenbahndamm vorstellen, dann könnte man dessen Steigung in folgender Weise angeben:

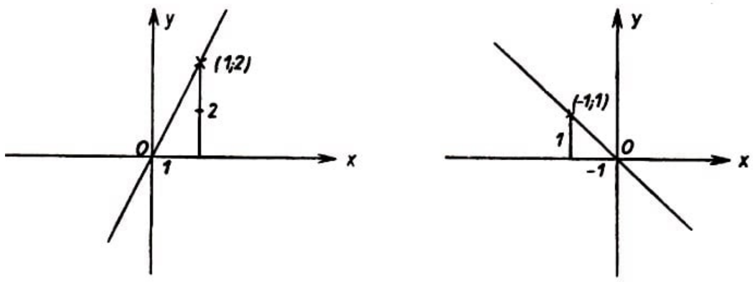
$$1:1$$

Das bedeutet, dass der Damm um 1 Meter ansteigt, während wir neben dem Damm horizontal 1 Meter zurücklegen. Da die Steigung gleichmäßig ist, wird der Damm in einer Entfernung von 2 Metern 2 Meter hoch, in einer Entfernung von 3 Metern 3 Meter hoch sein, usf.
Folglich werden sämtliche Punkte, die auf unserer Geraden liegen, dadurch charakterisiert, dass ihre beiden Koordinaten übereinstimmen: In jedem solchen Punkt ist:

$$y = x$$

Außerhalb unserer Geraden gibt es keinen Punkt in der Ebene, der gleiche Koordinaten hätte: Verbindet man einen beliebigen anderen Punkt mit dem Anfangspunkt, so erhält man ein Gefälle, das anders steigt, vielleicht sogar bergab geht.

Die Steigung in der ersten Abbildung ist durchgehend 2:1; folglich ist die Ordinate eines jeden Punktes, der auf dieser Geraden liegt, zweimal so groß wie seine Abszisse. In der zweiten Abbildung ist die Größe des Gefälles 1:1; aber wir haben hier keine steigende, sondern eine fallende Gerade vor uns. Der Grad ihrer Neigung wäre in unserem Koordinatensystem eigentlich durch 1:(-1) anzugeben.



Das hat zur Folge, dass die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf dieser Geraden zwar im absoluten Wert übereinstimmen, jedoch stets von entgegengesetztem Vorzeichen, also doch nicht einander gleich sind.

Die Koordinaten der Punkte, die außerhalb unserer Geraden liegen, können also tatsächlich nicht einander gleich sein: Die Gleichung

$$y = x$$

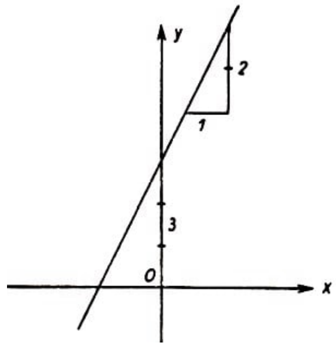
charakterisiert vollkommen die Punkte unserer ursprünglichen Geraden und nur diese. Somit können wir mit vollem Recht sagen, dass sie die Gleichung unserer Geraden ist. Inzwischen ist uns auch das Ergebnis in den Schoß gefallen, dass die beiden anderen Geraden, die ich gezeichnet habe, die folgenden Gleichungen besitzen:

bei der Steigung 2:1 $\qquad y = 2x,$

(mit dieser Gleichung werden wir noch zu tun haben; ich bitte, sie dann wiederzuerkennen) und

bei der Steigung 1:(-1) $\qquad y = -x.$

Schieben wir nun die Gerade von der Steigung 2:1 ein wenig aufwärts, etwa um 3 Einheiten, jedoch so, dass sich ihre Richtung nicht verändert:



Ihre Steigung wird dadurch auch nicht verändert. Davon können wir uns überzeugen, wenn wir von einem beliebigen ihrer Punkte aus um 1 Einheit nach rechts schreiten:
Wir sehen dann, dass das Gefälle um 2 Einheiten höher gelangt ist. Der einzige Unterschied zu der ursprünglichen Lage besteht darin, dass ein jeder Punkt jetzt um 3 Einheiten höher gekommen ist, die Ordinate eines jeden Punktes hat sich um 3 Einheiten vermehrt.
Jenes y, das vorhin $2x$ ausgemacht hat, wird hier zu $2x+3$; folglich lautet die Gleichung der Geraden in dieser Lage:

$$y = 2x + 3$$

Der gemeinsame Charakter der bisher erhaltenen Gleichungen

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = -x, \quad y = 2x + 3$$

besteht darin, dass sie alle Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten sind. Dass dabei zwei Unbekannte vorkommen, versteht sich von selbst; die Punkte werden ja durch zwei Koordinaten charakterisiert.
Die Betonung liegt darauf, dass eine Gerade in beliebiger Lage stets eine Gleichung ersten Grades besitzt. Und auch das Umgekehrte gilt:

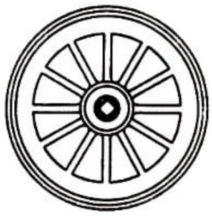
Man kann zeigen, dass eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten, in welcher Form sie auch aufgeschrieben werden mag, z.B. die Gleichung

$$5x - 3y = 7$$

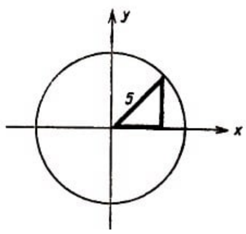
stets als die Gleichung einer bestimmten Geraden betrachtet werden kann. Gleichung ersten Grades und Gerade, das sind also nur zwei verschiedene Darstellungen desselben Begriffes.

Das ist ein schönes, jedoch nicht sehr überraschendes Ergebnis; denn in welcher Lage auch immer Geraden gezeichnet werden, sie sind doch alle Geraden, sie gehören in eine einzige Familie, und so ist es natürlich, dass ihre Gleichungen auch eine bestimmte Gleichungsfamilie bilden.

Betrachten wir nun irgendeine krumme Linie. Jeder kennt den Kreis; man denke z.B. an ein Wagenrad mit sehr vielen gleichen Speichen. Diese sind die Radien des Kreises:



Es betrage jeder Radius 5 Einheiten, und der Mittelpunkt des Kreises sei im Anfangspunkt:



Wo immer man einen Punkt auf der Peripherie wählen mag, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, wenn man seine Koordinaten und den in ihn mündenden Radius einzeichnet. Die Katheten sind die Koordinaten, die Hypotenuse ist der Radius.
Erinnern wir uns nun daran, dass wir einen Zusammenhang zwischen den Katheten und der Hypotenuse bereits kennen, nämlich den guten alten pythagoräischen Lehrsatz:

Die Summe der Quadrate der beiden Katheten ist dem Quadrat der Hypotenuse gleich.

Werden also die Koordinaten eines beliebigen Punktes, der auf dem Kreis liegt, quadriert und diese Quadrate addiert, dann muss man $5^2 = 25$ erhalten:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Das wird die Gleichung unseres Kreises sein.
Man sieht sofort, dass sie eine Gleichung zweiten Grades ist, und zwar nicht einmal eine solche von einfachster Form. Untersuchen wir, welche Kurve zur einfachsten, nämlich zur Gleichung

$$y = x^2$$

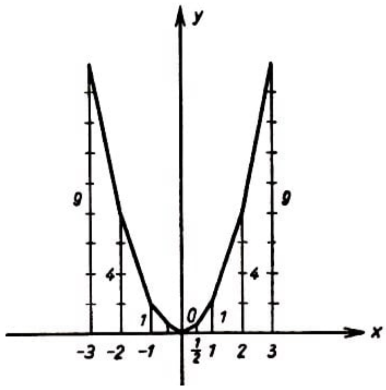
gehört.

Ist $x = -3$, so ist $y = (-3)^2 = +9$
Ist $x = -2$, so ist $y = (-2)^2 = 4$
Ist $x = -1$, so ist $y = (-1)^2 = 1$
Ist $x = 0$, so ist $y = 0^2 = 0$
Ist $x = 1$, so ist $y = 1^2 = 1$
Ist $x = 2$, so ist $y = 2^2 = 4$
Ist $x = 3$, so ist $y = 3^2 = 9$

Nehmen wir noch Zwischenwerte, wenigstens um 0 herum:

Ist $x = \frac{1}{2}$, so ist $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
Ist $x = -\frac{1}{2}$, so ist $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Das Bild ist also:



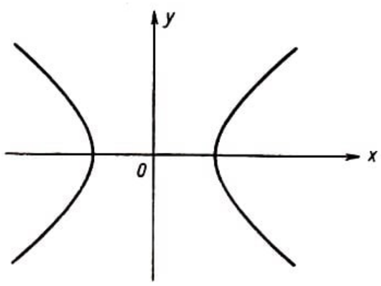
Die Kurve, die entsteht, wenn sich die geknickte Linie vollkommen ausglättet, wird Parabel genannt. Ihre beiden Hälften setzen sich natürlich bis ins Unendliche fort und werden dabei immer steiler, einer vertikalen Geraden immer ähnlicher. Diese Kurve ist alles andere als ein Kreis.

Es ist uns bereits eine andere Kurve begegnet, die ebenfalls eine Gleichung zweiten Grades besitzt, wir haben das nur nicht bemerkt. Ich meine die Hyperbel. Ihre Gleichung lautete zwar

$$y = \frac{12}{x}$$

wird aber hier der Divisor x als Multiplikator auf die linke Seite gebracht, so wird daraus $x \cdot y = 12$.

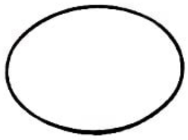
Nun betrachtet man aber in einer Gleichung zwischen x und y das Produkt xy, in dem die Exponenten der beiden Unbekannten insgesamt 2 ergeben, als ein Glied zweiten Grades. Wenn das noch nicht überzeugend genug sein sollte, verrate ich auch, dass, wenn die Hyperbel ein wenig verdreht wird, so dass sie in die folgende Lage gelangt,



ihre Gleichung

$$x^2 - y^2 = 24$$

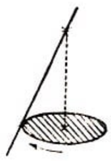
lautet, und diese ist unbestreitbar vom zweiten Grad.
Nur erwähnen möchte ich hier, dass der langgestreckte Kreis, die Ellipse,



ebenfalls eine Gleichung zweiten Grades besitzt. Weitere solche Kurven gibt es (von gewissen "ausgearteten" Fällen abgesehen) nicht:
Zeichne ich die aufgezählten vier Kurven in allen Lagen in das Koordinatensystem ein, so habe ich jene Familie erhalten, der unter den Gleichungen die Gleichungen zweiten Grades entsprechen. Es ist aber schwer, sich eine Familie mit so verschiedenartigen Gliedern vorzustellen. Welcher Art ist denn die Verwandtschaft zwischen diesen teils sich im Endlichen schließenden, teils ins Unendliche schweifenden, zusammenhängenden oder entzweigerissenen Kurven?

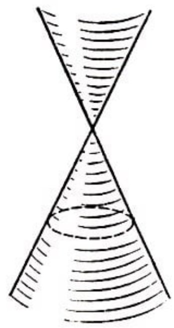
Stelle ich diese Familie vor, dann erfährt man sogleich, worin die Verwandtschaft besteht: Unsere Kurven heißen mit einem gemeinsamen Namen Kegelschnitte.

Jetzt müssen wir wieder aus der Ebene in den Raum hinaustreten. Wie schade, dass wir nicht ebenso in den Raum zeichnen können, wie auf ein ebenes Blatt!
Stellen wir uns aber eine Farbe vor, die die Luft färbt. In der Luft befinde sich eine horizontale Kreisfläche und eine Gerade, die sich über ihren Mittelpunkt neigt, so dass sie den Rand der Kreisfläche in einem Punkt berührt:

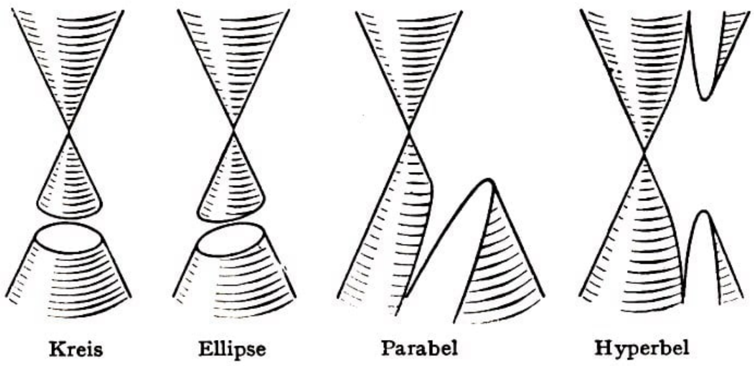


Weiterhin haben wir uns noch vorzustellen, dass jemand die Gerade von Kopf bis Fuß in die "Zauberfarbe" getaucht hat (natürlich hat die Gerade weder "Kopf" noch "Fuß": Die Gerade ist ja unendlich lang).

Nun ergreifen wir die gedachte Gerade und packen fest denjenigen ihrer Punkte an, der gerade über dem Mittelpunkt des Kreises liegt. Mit der anderen Hand erfassen wir sie da, wo sie an den Kreis streift, und führen diesen Punkt um den Kreis herum. Dann malt die Farbe, von der die Luft gefärbt wird, sowohl unter dem fixierten Punkt als auch darüber, eine Fläche in die Luft, die man einen Kegelmantel nennt:



Wird nun der so entstehende Doppelkegel von Ebenen in verschiedenen Lagen durchschnitten, so erscheinen an den Rändern der abgetrennten Teile unsere vier Kurven:



Nur die vierte Ebene hat auch den oberen Kegel getroffen.

Hätten wir aber auch eine solche geometrische Verwandtschaft zwischen den vier Kurven nicht gefunden, so bringt doch schon der Umstand, dass ihre Gleichungen alle zweiten Grades sind, manche verborgenen gemeinsamen Züge an den Tag. Wir haben zu fragen, was die Algebra über solche Gleichungen aussagt und was daraus gefolgert werden kann: Dabei werden sich gemeinsame Eigenschaften der vier Kurven ergeben.

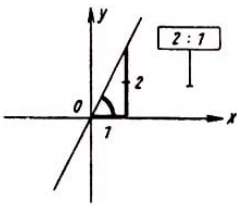
Fassen wir z.B. ihre Schnittpunkte mit einer Geraden ins Auge. Der Schnittpunkt ist ein Punkt, der sowohl auf der Kurve als auch auf der Geraden liegt; folglich erfüllen seine Koordinaten die Gleichungen von beiden. Die Gleichung der Geraden ist ersten Grades, und die Algebra lehrt:

Eine Gleichung ersten Grades und eine Gleichung zweiten Grades mit je zwei Unbekannten besitzen entweder keine gemeinsame reelle Lösung oder sie haben eine gemeinsame Lösung oder aber zwei gemeinsame Lösungen. Folglich gilt für einen jeden unserer Kegelschnitte, dass eine Gerade ihm gegenüber dreierlei Stellungen einnehmen kann: Entweder trifft sie ihn gar nicht, oder sie berührt ihn in einem Punkt, oder aber sie durchschneidet ihn in zwei Punkten:

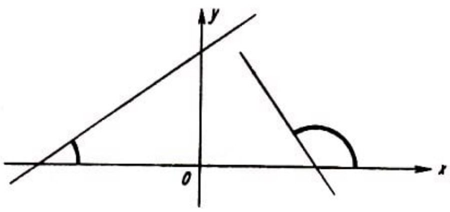
In mehr als zwei Punkten jedoch kann sie nicht einmal die zweiästige Hyperbel schneiden.
Solche Dienste kann die Algebra der Geometrie erweisen.

Nachschrift über die Wellen und über den Schatten

Im Vorhergehenden sind zwei geometrische Motive ertönt; ich möchte nicht, dass sie verloren gehen.
Das eine Motiv hängt mit der Art zusammen, wie die Richtung einer Geraden angegeben wurde. Wir haben das Verhältnis der Steigung zum. zurückgelegten Weg, d.h. der einen Kathete des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks zur anderen festgestellt:

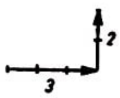


Die Richtung wird natürlich auch dann eindeutig bestimmt, wenn man angibt, unter welchem Winkel sich die Gerade gegen eine bestimmte Richtung neigt. Gewöhnlich wählt man die positive Hälfte der x-Achse als eine solche bestimmte Richtung. Dieser Winkel wird der Richtungswinkel der Geraden genannt. Er ist spitz, wenn die Gerade steigt, und stumpf, wenn sie fällt:

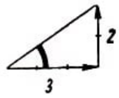


Nun wird die Richtung und damit auch der Richtungswinkel durch das Verhältnis der beiden Katheten vollkommen bestimmt; dieses Verhältnis kann also auch als Maß für die Größe eines Winkels dienen: Nehmen wir den Fall, dass es sich um einen spitzen Winkel handelt, zu dem ein Gefälle von der Steigung 2:3 gehört; d.h., wird von einem beliebigen Punkt des einen Schenkels eine Senkrechte auf den anderen gefällt, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem das Verhältnis jener Kathete, die dem betreffenden Winkel gegenüber liegt, zu der anliegenden Kathete gerade 2:3, oder in anderer Bezeichnung $\frac{2}{3}$ beträgt.

Gebe ich dieses Verhältnis 3 an, so lässt sich der Winkel sofort zeichnen: Man geht um 3 Einheiten nach rechts, dann um 2 Einheiten aufwärts:



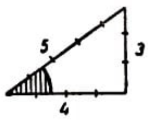
Wird nun der Punkt, zu dem man so gelangt ist, mit dem Ausgangspunkt verbunden, so ist der gesuchte Winkel bereits konstruiert:



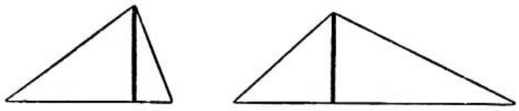
Handelt es sich um einen stumpfen Winkel, so geht das Gefälle bergab, und wir sahen bereits, dass das betreffende Verhältnis negativ wird. Das Rezept bleibt aber unverändert anwendbar. Ist dieses Verhältnis z. B. $-\frac{2}{3}$, so weiß ich, dass die Steigung nach rückwärts, nach links schreitend anwächst; ich gehe also um 3 Einheiten nach links, dann um 2 Einheiten aufwärts, verbinde wieder den erhaltenen Punkt mit dem Ausgangspunkt, und dann ist es offensichtlich, dass der gesuchte Winkel derjenige stumpfe Winkel ist, der von dieser Verbindungslinie und der Richtung der positiven Fortbewegung eingeschlossen wird (der Richtungswinkel wird ja immer mit der positiven Richtung der x-Achse gebildet):

Ein solcher stumpfer Winkel lässt sich nicht in ein rechtwinkliges Dreieck hineinzwängen. Dennoch entsteht links neben ihm ein rechtwinkliges Dreieck, und die Katheten von diesem stehen zueinander im Verhältnis $\frac{2}{3}$.
Dies ist ein Verhältnis, das unseren stumpfen Winkel - abgesehen vom Vorzeichen - charakterisiert.

Man kann zeigen, dass das Verhältnis zweier beliebiger Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dessen Winkel vollständig bestimmt. Diese Quotienten - sie hängen ja von der Größe des betrachteten Winkels ab - werden Winkelfunktionen genannt. Der Name der eben untersuchten Winkelfunktion ist Tangens. Das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse ist der Sinus des Winkels, das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse ist sein Kosinus.
Im folgenden Dreieck

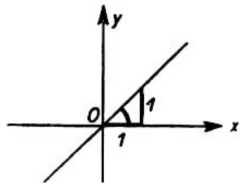


beträgt z. B. der Sinus des bezeichneten Winkels $\frac{3}{5}$ und der Kosinus $\frac{4}{5}$. Die Definition einer jeden Winkelfunktion wird auch auf größere als spitze Winkel ausgedehnt. Die Werte der Winkelfunktionen, die zu den verschiedenen Winkeln gehören, hat man in Tabellen zusammengestellt. Kennen wir nun die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks - und andere lassen sich immer in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen:



- so brauchen wir nur in die Tabelle zu sehen, und schon können wir auch seine Winkel nennen. Es ist wahr, dass man das Dreieck auch zeichnen könnte, wenn seine Seiten bekannt sind, und dann könnten die Winkel auch gemessen werden; doch wie mangelhaft ist die Genauigkeit dieser Messung gegenüber der vom Verfasser der Tabelle durch Rechnen erreichten!

Man darf nämlich nicht denken, dass der Verfasser der Tabelle die Werte der Winkelfunktionen aus Messungen entnimmt. Ihre Berechnung wird einerseits dadurch ermöglicht, dass man einzelne Werte genau kennt; unsere erste Gerade hat z. B. den rechten Winkel genau halbiert,

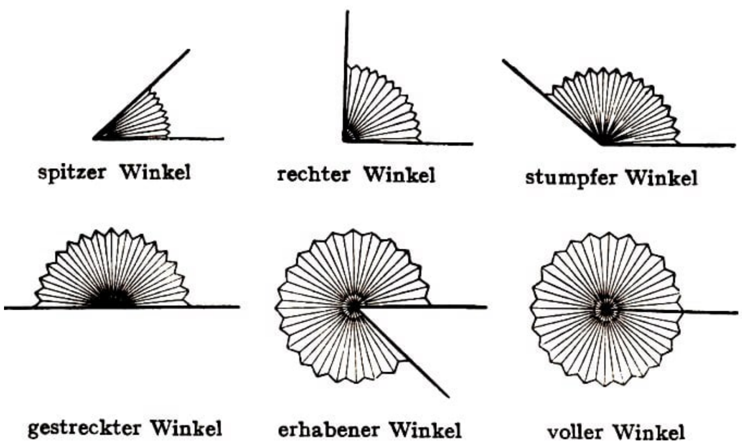


und der Tangens ihres Richtungswinkels war 1:1, d.h. $\frac{1}{1} = 1$. Der rechte Winkel entsteht bei einer Vierteldrehung; wir wissen also über jenen Winkel, der zur Achteldrehung gehört, dass sein Tangens 1 beträgt.

Kennen wir aber bereits die Winkelfunktionen einzelner Winkel, so können wir danach fragen, wie sich aus diesen die Winkelfunktionen z. B. der Summe jener Winkel oder des Zweifachen oder der Hälfte eines Winkels berechnen lassen. Nach solchen Zusammenhängen forscht die Trigonometrie. Die Tabellen jedoch werden auf andere Weise hergestellt; darauf komme ich noch zurück.

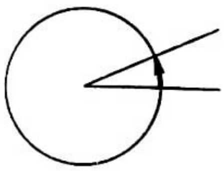
Die Winkelfunktionen haben aber eine Bedeutung, die weit über den Rahmen der Trigonometrie hinausgeht. Wird z. B. die Fieberkurve der Sinusfunktion gezeichnet, während sich der Winkel von 0 bis zu einer vollen Umdrehung ändert, so erhält man die folgende Wellenlinie,

die sich auch weiter fortsetzen lässt. Der Winkel misst eigentlich das Verdrehen einer Geraden von einer anderen fixierten Geraden aus. Stellen wir uns z. B. vor, dass wir einen japanischen Fächer allmählich ausbreiten:



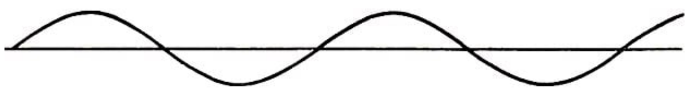
so kommen alle Winkelarten zustande. Es wird aber auch ersichtlich, dass die Größe der Drehung durch den Kreisbogen messbar ist, der sich zwischen den Schenkeln des Winkels erstreckt. Die Länge des Kreisbogens hängt natürlich auch vom Radius des Fächers ab:
Wir messen unsere Winkel mit der Länge des Kreisbogens, der mit einem Einheitsradius eingezeichnet wird:

(Dieses Maß ist oft zweckmäßiger als die Gradeinteilung, an die man sich von der Schule her gewöhnt hat.) Man kann sich nun vorstellen (nicht vom Fächer, dieser würde zerreißen), dass sich die drehbare Gerade nach einer vollen Umdrehung noch weiter dreht,

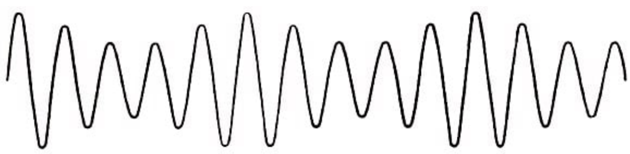


so dass sie den dick ausgezogenen Teil zweimal durchläuft. Es leuchtet ein, dass sie sich dabei zum Schluss in dieselbe Richtung einstellt, als hätte sie sich nur um den kleinen Bogen gedreht:

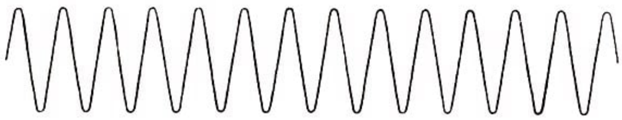
Die Werte der Winkelfunktionen wiederholen sich daher für Winkel, die größer als der volle Winkel sind; die Kurve wogt ebenso weiter:



Dieses Verhalten ist so ähnlich wie die Wiederholung der Perioden in der Entwicklung der Brüche; deshalb wird die Sinusfunktion eine periodische Funktion genannt.
Jeder Physiker kennt diese Linie genau: Sie ist die Funktionskurve der Schwingung und spielt eine entscheidende Rolle in der heutigen Physik. Wen das Radio interessiert, der hat vermutlich auch schon das Bild solcher "modulierter" Wellen gesehen:



Das dichte Wogen darin ist die sogenannte elektromagnetische Welle. Zu dieser allein würde das folgende Bild gehören,



aber ihre Ränder werden vom Schall durch diese großen Wellen moduliert:

Hier kann man noch die beiden Wellen, aus denen die modulierte Welle zusammengesetzt wurde, deutlich erkennen. Die Schallwelle ist aber in Wirklichkeit nie so einfach: Es gibt keinen vollkommen reinen Schall, es schwingen immer mehrere Klänge zusammen, und der Unterschied zwischen diesen ist nicht so groß wie zwischen den elektromagnetischen und den Schallwellen.

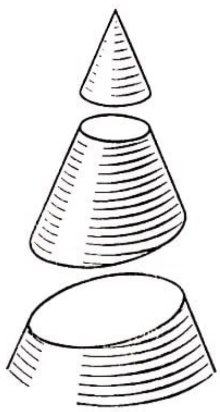
So können sie auch nicht so gut unterscheidbare Rollen erhalten. Durch die Überlagerung wird die Welle einfach nur verzerrt, z.B. in dieser Weise:

Es ist oft erforderlich, dass man aus einer solchen verzerrten Welle herausliest, aus welchen Wellen sie zusammengesetzt wurde. Allgemein erhebt sich die Frage:
Wenn wir eine sich stetig hinziehende, beliebig verzerrte, jedoch periodische Kurve haben, lassen sich dann nicht einfache Wellen finden, deren Zusammenwirkung gerade diese Kurve zustandebringen würde?

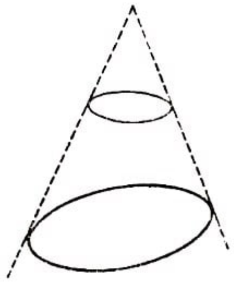
Die Antwort lautet: Wenn dies auch nicht ganz exakt geht, so kann man doch Wellen finden, die - einander überlagernd - unsere Kurve mit beliebiger Genauigkeit annähern, sogar auch dann, wenn unsere Kurve nur aus knickförmigen Stücken besteht, z. B. aus folgenden Geradenstücken zusammengesetzt ist:

Das wird natürlich in der Funktionssprache bewiesen: Man spricht dabei nicht von Wellen, sondern von den Winkelfunktionen, die ihnen entsprechen.

Das andere geometrische Motiv, das erklungen ist, hängt mit den Schnitten des Kegels zusammen. Wir schneiden die untere Kegelfläche zweimal durch, und zwar einmal mit einer horizontalen, das andere Mal mit einer etwas schiefen Ebene:

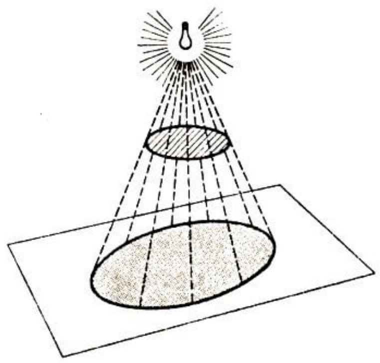


und zeichnen dann gesondert die Spitze des Kegels, den Kreis und die Ellipse:



Wir stellen uns nun vor, dass die Spitze des Kegels eine winzige Glühbirne sei, die nach allen Richtungen Lichtstrahlen entsendet. Der Kreis sei ein Papierblatt im Wege der Strahlen, das die darauf fallenden Strahlen nicht durchlässt.
Die Strahlen, die dann an seinem Rand entlang gleiten, ergeben unsere Kegelfläche, und so wirft der Kreis einen Schatten von Ellipsenform auf eine schiefe Ebene unter ihm.

Die Ellipse kann also als der Schatten des Kreises aufgefasst werden:
Sie entsteht durch die "Projektion" des Kreises aus einem Punkt auf eine schiefe Ebene. Dieselbe Projektion bringt einen Schatten von Parabelform bzw. von Hyperbelform zustande, wenn die Ebene immer weiter gedreht wird (will man auch den anderen Ast der Hyperbel erhalten, so muss man in den Weg der aufwärtsgerichteten Strahlen eine ebensolche Kreisfläche setzen). So verzerrt kann ein Schatten ausfallen.



Die sogenannte "projektive Geometrie" forscht nun nach Eigenschaften, die sogar bei einer durch die Projektion bewirkten Verzerrung nicht verloren gehen. Es ist auch gelungen, solche "projektive" Eigenschaften zu finden, die sich der Projektion gegenüber "invariant" erweisen.

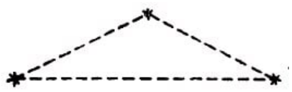
Hierdurch wird eine einheitliche und einfache Untersuchung der Kegelschnitte von einer anderen Seite her ermöglicht: es genügt, wenn wir uns mit dem wohlbekannten Kreis befassen. Alle seine projektiven Eigenschaften gehen ja unverändert auf die Kegelschnitte über, die aus ihm durch Projektion entstehen. Der Schatten mag sich sogar bis ins Unendliche erstrecken, gänzlich kann er sich doch nicht von seinem Urheber losreißen.

2.7 Elemente „Komma“

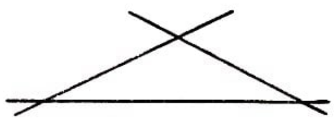
Es gibt eine interessante russische Novelle, deren Umarbeitung ich als Theaterstück "Leutnant Komma" gesehen habe. Die Grundidee besteht darin, dass ein Leutnant, nach Diktat schreibend, den Zuruf: "Leutnant, Komma" - missversteht.
So führt er in eine Liste von Offizieren auch den Namen "Leutnant Komma" ein, und da diese Liste vom allmächtigen Zaren unterschrieben wird, wagt kein Mensch mehr, damit herauszurücken, dass ein Leutnant namens Komma gar nicht existiert. Leutnant Komma ist also eigentlich kein Mensch, nur ein Schreibfehler.
Dennoch spielen sich mit ihm und um ihn herum die mannigfaltigsten Ereignisse ab: Er gerät ins Gefängnis, er heiratet, er stiftet einen Aufruhr an und beeinflusst entscheidend das Leben anderer.

Solche nicht existierende, jedoch eine wichtige Rolle spielende Elemente "Komma" sind auch in der Mathematik zu finden. Hier werden sie ideale Elemente genannt.
Ein solches ist z.B. der bewusste "unendlich ferne Punkt", in dem "die Parallelen sich treffen". Er dient der einheitlichen Behandlung der Geometrie. Man kann nämlich beweisen, dass zwischen den Punkten und den Geraden eine gewisse Dualität besteht:

Gewisse Sätze über Punkte und Geraden bleiben auch dann erhalten, wenn die Worte "Punkt" und "Gerade" vertauscht werden. Betrachten wir ein Beispiel:
Drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen, bestimmen ein Dreieck. Das ist zweifellos wahr:



Der Dualsatz lautet: Drei Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen, bestimmen ein Dreieck:



Diese Dualität ist sehr bequem. Es genügt, die eine Behauptung zu beweisen, und damit haben wir ohne weiteres auch ihre Dublette bewiesen: Mit einem Satz erfassen wir zwei Sätze.

Ja, aber es hinkt mit dem Dualsatz schon in diesem einfachen Beispiel. Man hätte nämlich hinzufügen sollen: "Wenn nur die Geraden nicht parallel sind".
In einem solchen Falle ist es willkommen, dass man sagen kann: Parallele Geraden wurden schon in der Formulierung des Satzes ausgenommen, sie treffen sich ja in einem einzigen, unendlich fernen Punkt.

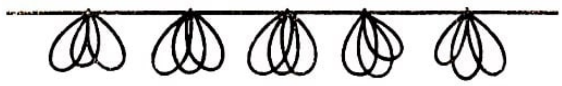
Dieser unendlich ferne ideale Punkt ist aber auch viel größeren Aufgaben gewachsen als dem Ersparen von "wenn nur ..." - Sätzen. Wenn gleichgerichteten, d. h. parallelen Geraden ein einziger gemeinsamer unendlich ferner Punkt zugeschrieben wird, anders

gerichteten Geraden aber ein anderer, dann haben wir so viele ideale Punkte geschaffen, wie es Richtungen gibt.
Man kann jeweils genau beschreiben, von welchem dieser Punkte die Rede ist: Es braucht nur die nach ihm strebende Richtung angegeben zu werden.

Modifizieren wir unsere Koordinaten ein wenig, so lässt sich sogar die Gleichung jener Linie aufschreiben, auf der sämtliche unendlich fernen Punkte liegen. Es stellt sich heraus, dass sie dieselbe Form hat wie die Gleichung einer Geraden. Folglich sagt man, dass die unendlich fernen Punkte alle auf einer unendlich fernen Geraden liegen.

Nun, bisher sieht das Ganze nach einer leeren Spielerei aus:
Wir haben die Gleichung einer nicht existierenden Geraden aufgeschrieben. Es wäre vielleicht besser, wenn wir gar nicht erst versuchten, sie uns vorzustellen. Eine Gerade ist nach zwei Richtungen hin unendlich, dennoch schreiben wir ihr nur einen einzigen unendlich fernen Punkt zu (die Dualität wird hierdurch in Ordnung gebracht; zwei ideale Punkte würden das wieder verderben).

Das wirkt so, als träfen sich ihre beiden Enden im Unendlichen, als werde sie im Unendlichen zu einer Art Kreis. Unsere sich nach zwei Richtungen erstreckenden Geraden hängen also, zu solchen Kreisen verwandelt, an den einzelnen Punkten der unendlich fernen Geraden, wie die Früchte am Ast, und zwar parallele Geraden an demselben Punkt:



Die unendlich ferne Gerade selbst hätte ich auch nicht so gerade zeichnen sollen, sondern wer weiß wie; sie hat ja einen Punkt im Osten und im Westen zugleich, in einem anderen ihrer Punkte treffen sich Norden und Süden usf., durch alle Himmelsgegenden.

Vergessen wir lieber das Ganze; es gehört nicht in die Welt des Vorstellbaren, "Leutnant Komma" ist nur ein Druckfehler.
Doch welcher Wirkungen ist diese unendlich ferne Gerade fähig!

Ihre Gleichung ist uns schon bekannt. Es ist also das Unternehmen, ihre Schnittpunkte, z.B. mit einer Parabel, zu bestimmen, nicht allzu gewagt; man hat ja nur die gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen zu suchen. Dabei stellt sich heraus, dass eben die unendlich ferne Gerade, die wir als die Verwirrung selbst betrachtet haben, die Familie der Kegelschnitte ins rechte Licht rückt.

Es erhebt sich nämlich bei jedem, der sich mit diesem Gegenstand befasst, die Frage: Ist eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten gegeben, wie lässt es sich dann entscheiden, zu welcher der Kegelschnittarten diese Gleichung gehört? Die unendlich ferne Gerade gibt die Antwort:
Hat ihre Gleichung mit der gegebenen keine gemeinsame Lösung, so haben wir es mit einer Ellipse zu tun, haben die beiden eine einzige gemeinsame Lösung, so mit einer Parabel, haben sie zwei gemeinsame Lösungen, so mit einer Hyperbel, und es gibt keine weiteren Möglichkeiten.

(Der Kreis ist der regelmäßigste Spezialfall der Ellipse.)

Jetzt können wir schon unserer Phantasie ruhig freien Lauf lassen: Das erhaltene Resultat entspricht vollkommen unseren Vorstellungen. Die Ellipse liegt ganz im Endlichen; natürlich hat sie keine gemeinsamen Punkte mit der unendlich fernen Geraden.
Die beiden Schenkel der Parabel werden immer steiler, parallelen Geraden immer ähnlicher; selbstverständlich treffen sie sich in einem einzigen unendlich fernen Punkte. Die Hyperbelzweige strecken sich zwei verschieden gerichteten Geraden entlang; sie müssen also in zwei verschiedenen Punkten das Unendliche erreichen.

Nun, wäre es nicht schade darum gewesen, wenn wir diese nicht existierenden Punkte nicht hätten zu Worte kommen lassen?
Jetzt wage ich auch schon, unser letztes unerledigtes Problem anzugreifen, nämlich die Gleichung zweiten Grades von der Form

$$x^2 = -9$$

Die Zahl, die quadriert -9 ergeben würde, müsste mit $\sqrt{-9}$ bezeichnet werden, wenn eine solche Zahl vorhanden wäre. Es hat sich aber bisher noch keine Zahl mit einem negativen Quadrat gefunden. Ob -3, ob $+3$ quadriert wird, stets ist das Resultat $+9$. Es ist bereits fraglich, wieviel $\sqrt{-1}$ beträgt; "i - ch weiß es wirklich nicht" - will ich sagen.
Doch nehmen wir an, ich verzögere das "i"ein bisschen und jemand notiere eifrig, was ich sage und fasse das "i "als Antwort auf:

$$\sqrt{-1} = i$$

Gleich fiele er mir ins Wort: "So weiß ich auch, wieviel $\sqrt{-9}$ ausmacht: $3i$, aber $-3i$ kann es auch sein!" Nun, darin hätte er recht: Wäre $\sqrt{-1} = i$, so wäre i jene Zahl, deren Quadrat -1 ist:

$$i^2 = -1$$

und so wäre auch

$$(+3i)^2 = 3i \cdot 3i = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

und auch

$$(-3i)^2 = (-3i) \cdot (-3i) = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

Das Schlimme daran ist aber, dass dieses "i" gar nicht existiert, das Ganze ist ein Missverständnis, ein Druckfehler. Ich weiß wirklich nicht, wieviel $\sqrt{-1}$ ist.
Doch da wir einmal diesen Druckfehler begangen haben, so wollen wir ein wenig damit spielen, wie soeben bei der Berechnung von $\sqrt{-9}$. Vielleicht vermag dieses nicht existierende Element auch etwas?

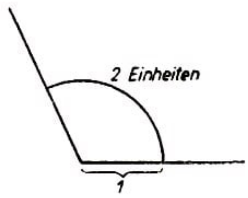
Sogar schwindelerregende Dinge vermag es zu leisten! Auf ihm baut sich die Funktionentheorie auf, der geehrteste, vornehmste Zweig der Mathematik. Will man "i" davon auslassen, so muss man betonen, dass jetzt von reeller Funktionentheorie die Rede ist.

Doch gibt es überhaupt keinen Zweig der Mathematik, der dieses "i" nicht zu Hilfe riefe, gerade dann, wenn etwas sehr Tiefgehendes zu sagen ist, und selbst die Geometrie ist hiervon nicht auszunehmen.

Dieses "i" setzt dem Streben, die zerfließenden einzelnen Sätze in ein einheitliches System zu fassen, die Krone auf. Hier in meiner formelfreien Behandlung der Mathematik kann ich davon nur eine kleine Kostprobe geben; die idealen Elemente werden ja tatsächlich durch die Form belebt.

Wird die Verwendung des Zeichens "i" gestattet, so erschließen sich z. B. Zusammenhänge zwischen einzelnen Funktionen, die wir vorher gar nicht geahnt haben.
Wer würde denken, dass irgendein Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion besteht?

Nun kann man aber folgendes beweisen: Wenn der Winkel durch die Länge des entsprechenden, mit dem Einheitsradius beschriebenen Kreisbogens gemessen wird,



dann lässt sich z. B. der Kosinus des 2 Einheiten betragenden Winkels (kurz: $\cos 2$) durch die Beziehung

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2}$$

aufschreiben, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Eine analoge Formel gilt für beliebige Winkel:

$$\cos 3 = \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2}; \qquad \cos 4 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}; \text{ usf.}$$

Wieso kann denn aber der Kosinus eines Winkels, d. h. das Verhältnis zweier Abstände, das doch eine anständige reelle Zahl ist, der nicht existierenden Zahl auf der rechten Seite gleich sein?
Nur so, dass auch auf der rechten Seite eine reelle Zahl steht.

Bei der Ausführung der Operation erscheint i aus irgendeiner imaginären Welt, beleuchtet die Zusammenhänge und verschwindet dann wieder. Eine ähnliche Erscheinung kommt auch bei den Spielen vor, in denen Zahlen zu erraten sind:
"Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 3, addiere noch 4 dazu, nimm das Resultat 2mal und dann subtrahiere das 6fache der gedachten Zahl". Ich warte, bis mein Partner mit der Aufgabe fertig wird; ohne ihn dann zu fragen, kann ich behaupten: "Das Ergebnis ist 8!"

Der Gang der Rechnung lässt sich nämlich folgendermaßen notieren:

Die gedachte Zahl ist x, dreifach genommen $3x$, dazu 4 addiert $3x+4$, dies ist 2mal zu nehmen, also $2\cdot(3x+4)$, endlich ist davon das 6fache der gedachten Zahl, d.h. $6x$, zu subtrahieren. So ergibt sich

$$2\cdot(3x+4)-6x$$

Wird $3x+4$ Glied für Glied mit 2 multipliziert, so ergibt sich $6x+8-6x$, oder, in einer anderen Reihenfolge, $8+6x-6x$.
Wird aber zu 8 erst $6x$ hinzugezählt und dann ebensoviel wieder weggenommen, dann bleibt eben 8. Die gedachte Zahl tritt in die Rechnung ein, verschwindet aber wieder daraus.

Aus dem Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion lassen sich auch solche Zusammenhänge ableiten, in denen bereits keine Spur mehr von: zu finden ist, nicht einmal scheinbar. Berechnen wir z. B. auf Grund der Gleichung

$$\cos 2=\frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}$$

das Quadrat von $\cos 2$. Damit wir uns nicht mit Brüchen abzuplagen brauchen, bringen wir erst den Divisor 2 von der rechten als Multiplikator auf die linke Seite:

$$2\cos 2=e^{2i}+e^{-2i}$$

Nun quadrieren wir. Das Quadrat der linken Seite ist:

$$(2\cos 2)^2=2\cdot 2\cdot(\cos 2)^2$$

(ich habe guten Grund, von $2\cdot 2=4$ jetzt noch nichts wissen zu wollen). Auf der rechten Seite steht eine zweigliedrige Summe. Diese wird quadriert, indem man zunächst das Quadrat des ersten Gliedes berechnet, wobei man sich vor Augen hält, dass eine Potenz potenziert wird, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$(e^{2i})^2=e^{4i}$$

Dann addiert man dazu das Zweifache des Produktes der beiden Glieder, wobei man bedenkt, dass die Potenzen von e sich in der Weise multiplizieren lassen, dass die Exponenten addiert werden, und ferner, dass der Wert der 0-ten Potenz 1 ist:

$$2\cdot e^{2i}\cdot e^{-2i}=2\cdot e^{2i+(-2i)}=2\cdot e^0=2$$

endlich addiert man noch das Quadrat des zweiten Gliedes:

$$(e^{-2i})^2=e^{-4i}$$

dazu. Das Quadrat der rechten Seite lässt sich demnach als

$$e^{4i}+2+e^{-4i}$$

schreiben, oder in anderer Reihenfolge, als

$$e^{4i} + e^{-4i} + 2$$

und somit ist

$$2 \cdot 2 \cdot (\cos 2)^2 = e^{4i} + e^{-4i} + 2$$

Nun bringen wir einen der Faktoren 2 als Divisor auf die rechte Seite und haben dabei jedes Glied der dort stehenden Summe durch 2 zu dividieren. Die 2 durch 2 dividiert, ergibt 1; die Division der übrigen Glieder wird nur angedeutet:

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2} + 1$$

Hier begegnet uns aber ein Bekannter:

$$\frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}$$

Das ist ja der Ausdruck, von dem behauptet wurde, dass er gleich $\cos 4$ ist. Also ist

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = \cos 4 + 1$$

oder in anderer Reihenfolge (denn so könnte man leicht glauben, dass es sich um den Kosinus von $4 + 1$, d.h. um $\cos 5$, handelt):

$$2 \cdot (\cos 2)^2 = 1 + \cos 4$$

Schließlich bringen wir auch die andere 2 als Divisor auf die rechte Seite:

$$(\cos 2)^2 = \frac{1 + \cos 4}{2}$$

Das ist nun einer der wohlbekannten trigonometrischen Zusammenhänge; von i ist darin keine Spur mehr zu finden. Dieses Ergebnis beruhigt uns, dass wir nicht fehlerhaft gerechnet haben; etwas Neues erhalten wir aber damit nicht.
Doch wenn es uns einfällt, die Summe zweier Glieder nicht zu quadrieren, sondern auf Grund des Binomialsatzes in beliebige Potenzen zu erheben, dann können wir mit einem Schlage auch eine Menge neuer trigonometrischer Formeln ableiten.

Ich bitte um Verzeihung für das lange Rechnen, wobei man sich zugleich an so viele Regeln erinnern musste; ich glaube, es ist unvermeidlich zum Verstehen, dass man einmal selbst erlebt, wie i aus den Berechnungen wieder verschwindet, nachdem es ein frisches Leben in sie gebracht hat.

Hierin besteht aber nicht die wichtigste Rolle des i.
Dass es auch den letzten ungelösten Fall der Gleichung zweiten Grades gelöst hat, ist selbstverständlich, es wurde ja zu diesem Zweck eingeführt: Mit seiner Hilfe wird aus negativen Zahlen die Quadratwurzel gezogen. Es ist wahr, dass man so nur zu "imaginären" Werten kommt; doch die vorangehende Betrachtung hat den Leser vielleicht

schon davon überzeugt, dass auch diese Werte nicht zu verwerfen sind. So erhält z.B. die Gleichung

$$(x-2)^2 = -9 \qquad \text{die Lösung} \qquad x-2 = \sqrt{-9}$$

und es ist $\sqrt{-9} = 3i$ oder $\sqrt{-9} = -3i$. Wird der Subtrahend 2 als Summand auf die rechte Seite gebracht, dann ergeben sich die beiden "Wurzeln" (so werden die Lösungen der Gleichungen auch genannt, da man oft durch Wurzelziehen zu ihnen kommt):

$$x = 2 + 3i \qquad \text{und} \qquad x = 2 - 3i$$

Da haben wir Zahlen erhalten, die aus einem reellen und einem imaginären Teil bestehen; eine solche sonderbare Verknüpfung der reellen und der imaginären Welt wird eine "komplexe Zahl" genannt. Wenn diese beiden Zahlen auch ziemlich unmöglich erscheinen, ihre Summe ist wieder reell:
Bei der Addition fallen ja $+3i$ und $-3i$ weg. Es ist sogar leicht einzusehen, dass auch ihr Produkt reell ist.

Unter den komplexen Zahlen befinden sich auch die reellen und die rein imaginären Zahlen: Es ist z.B. $5 + 0 \cdot i = 5$ reell, $0 + 2i = 2i$ rein imaginär.
Haben wir die vierte Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen, oder die sechste, die achte, usf., dann bleiben wir genauso stecken, wie beim Quadratwurzelziehen. Es ist ja eine Potenz mit geradem Exponenten sowohl für positive als auch für negative Basen immer positiv.

So kann z. B. die vierte Wurzel von -16 weder unter unseren positiven Zahlen noch unter den negativen vorkommen, da

$$(+2)^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad \text{und} \qquad (-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)} = (+4) \cdot (+4)$$

ist, was ebenfalls 16 ergibt. Man könnte glauben, dass diese verschiedenen Wurzeln die Einführung von immer neuen idealen Elementen erfordern.
Es ist ein schönes und überraschendes Ergebnis, dass dies nicht erforderlich ist: Allein mit Hilfe des i werden bereits alle genannten Wurzelaufgaben lösbar. Man kann sogar beweisen, dass im Bereich der komplexen Zahlen jede Gleichung beliebigen Grades eine Lösung hat; das wird der Fundamentalsatz der Algebra genannt.

Dieser Satz steht nicht im Widerspruch mit dem Resultat von Abel, nämlich damit, dass man bereits bei der Lösung der Gleichung fünften Grades notwendigerweise stecken bleibt. Der Fundamentalsatz ist nur ein sogenannter "reiner Existenzbeweis".
Die Herstellung (mit Hilfe der Grundrechnungsarten und der Wurzelziehung) derjenigen Zahl, die die Gleichung erfüllt, wird dadurch nicht ermöglicht.

Das Quadratwurzelausziehen ergibt immer zwei Werte: einen positiven und einen negativen. Deshalb hat die Gleichung zweiten Grades im Bereich der komplexen Zahlen immer zwei Wurzeln. Allerdings doch nicht immer: Die Gleichung

$$(x-3)^2 = 0$$

hat nur eine Lösung; denn die Zahl, die quadriert 0 ergibt, kann nur die 0 selbst sein. Folglich ist $x - 3 = 0$; das heißt: $x = 3$ ist die einzige Lösung. Aber die entwickelte Form dieser Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

und diese Form lässt sich immer enger annähern durch Gleichungen, in denen an Stelle der hier auftretenden 6 und 9 Zahlen stehen, die um immer weniger von jenen abweichen und die alle zwei Wurzeln besitzen. Doch diese zwei Wurzeln fallen immer näher aneinander, während die Gleichungen unserer betrachteten Gleichung immer ähnlicher werden.
Deshalb sagt man, dass im Moment, in dem diese Gleichungen mit der Gleichung

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

vollkommen übereinstimmen, die zwei Wurzeln zusammenfallen.

Wieviel Wurzeln hat eine Gleichung vierten Grades? Die Gleichung

$$x^4 = 1$$

lässt sich auch ohne Hilfe von i lösen: Ob $+1$ oder -1 in die vierte Potenz erhoben wird, man erhält stets $+1$. Folglich scheint es so, als ob es auch hier nur zwei Wurzeln gäbe: $+1$ und -1.

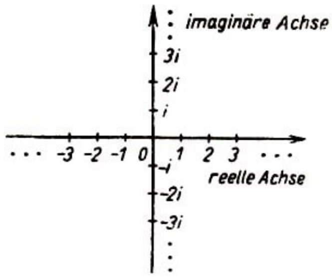
Nun redet aber das i drein: "Halt, das ist keine Ordnung. Die Gleichung ist vierten Grades, sie muss vier Wurzeln haben. Auch ich bin noch da!" Und tatsächlich ist auch i eine Wurzel, sogar auch $-i$, da

$$\begin{aligned} i^4 &= \underbrace{i \cdot i} \cdot \underbrace{i \cdot i} = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ (-i)^4 &= \underbrace{(-i) \cdot (-i)} \cdot \underbrace{(-i) \cdot (-i)} = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

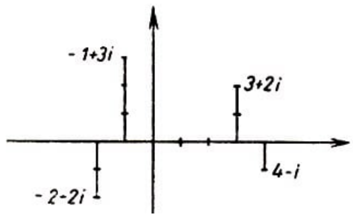
ist. So schafft i unter den Wurzeln einer jeden Gleichung Ordnung:
Man kann beweisen, dass im Gebiet der komplexen Zahlen jede Gleichung so viele Wurzeln besitzt, wie der Grad der Gleichung angibt, abgesehen davon, dass einige der Wurzeln auch "zusammenfallen" können.

Das hat unser i der Algebra zu geben.
Das meiste leistet es aber für die Funktionentheorie. Um davon eine kleine Kostprobe geben zu können, muss ich die komplexen Zahlen erst darstellen.

Betrachten wir i als eine Einheit neuer Art, mit der wir rechnen. So haben wir die Mehrfachen von i auf einer neuen Zahlengeraden darzustellen. Der Nullpunkt dieser Zahlengeraden kann mit dem Nullpunkt der reellen Zahlengeraden zusammenfallen, denn $0 \cdot i$ ist ja auch 0.
So können die beiden Zahlengeraden in die Lage der festen Achsen eines Koordinatensystems gebracht werden:

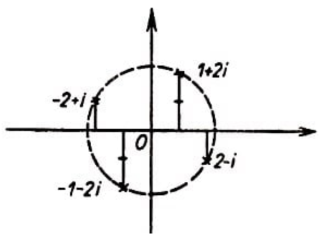


Diese Möglichkeit kann uns dazu veranlassen, die komplexen Zahlen, die aus einem reellen und einem imaginären Teil bestehen, durch die Punkte der Ebene darzustellen; die Abszisse soll der reelle Teil sein, die Ordinate der imaginäre Teil. Das Bild einiger komplexer Zahlen sieht dann so aus:



Die komplexen Zahlen nehmen also nicht nur eine Zahlenlinie, sondern eine Zahlenebene ein.

Unter dem absoluten Wert einer komplexen Zahl versteht man ihre Entfernung vom Nullpunkt. Diese Entfernung kann natürlich kleiner oder größer sein. Es gibt aber eine Menge komplexer Zahlen in derselben Entfernung vom Nullpunkt. Diese liegen auf einem Kreis um 0 herum:



Es liegt kein Grund vor, eine von diesen als kleiner zu betrachten als die übrigen. Von den Begriffen "kleiner" und "größer" kann also im Bereich der komplexen Zahlen nicht gesprochen werden. Trotzdem überzeugt man sich leicht davon, dass eine jede der alten Rechenregeln erhalten bleibt, wenn man mit den komplexen Zahlen wie bisher operiert: als wäre i irgendeine Unbekannte, über die wir nur soviel wissen, dass überall, wo i auftritt, statt seiner -1 zu setzen ist.

Nun kehren wir zu einem alten Resultat zurück. Aus dem Schokoladenbeispiel haben wir

$$1\frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

erhalten. Hier ist auf der rechten Seite jede Zahl $\frac{1}{10}$ mal so groß wie die vorherige; $\frac{1}{10}$ ist der Quotient dieser geometrischen Reihe. Versuchen wir, $1\frac{1}{9}$ so umzuformen, dass dieses $\frac{1}{10}$ irgendeine Rolle darin erhält:

$$1 = \frac{9}{9} \qquad , \qquad 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Wir haben schon viel gekürzt, daher wissen wir, dass man den Zähler und den Nenner durch dieselbe Zahl dividieren darf. Hier dividieren wir durch 10, ungeachtet dessen, dass diese Division im Nenner nur angedeutet werden kann:

$$1\frac{1}{9} = \frac{1}{\frac{9}{10}}$$

Hiermit ist erreicht, dass wir in $\frac{9}{10}$ einen Bruch haben, der sich bereits leicht durch $\frac{1}{10}$ ausdrücken lässt: Ein Ganzes besteht aus 10 Zehnteln; wird davon ein Zehntel abgezogen, so bleiben eben $\frac{9}{10}$ übrig. Demnach ist

$$\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10} \qquad \text{und endlich} \qquad 1\frac{1}{9} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

Setzt man den rechts stehenden Ausdruck an Stelle von $1\frac{1}{9}$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

In dieser Form lässt sich unser Ergebnis verallgemeinern. Ist der Quotient der geometrischen Reihe nicht $\frac{1}{10}$, sondern z.B. $\frac{2}{3}$, so ist jedes folgende Glied $\frac{2}{3}$ mal so groß wie das vorherige; die Glieder der Reihe sind also der Reihe nach

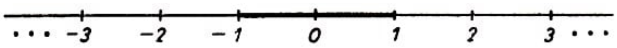
$$1, \quad 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \quad \text{usf.}$$

und auch hierfür kann man beweisen, dass

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + ...$$

ist. Man muss aber achtgeben, denn wir sahen bereits, dass sich nicht alle geometrischen Reihen summieren lassen; diese Reihe ist z.B. für +1, für -1 und für Quotienten von noch größerem absoluten Betrag nicht konvergent.

Man kann aber beweisen, dass die Reihe schon konvergiert, wenn der Quotient um noch so wenig der 0 näher liegt als 1, und dann lässt sich ihre Summe ebenso aufschreiben wie im Falle von $\frac{1}{10}$ und von $\frac{2}{3}$. Es liegen also sämtliche Quotienten, für die die Reihe auf diese Weise summiert werden kann, auf der Zahlengeraden zwischen -1 und +1:



Denke ich an eine der vielen Zahlen, die in dieses Intervall fallen, sage jedoch nicht, an welche, so kann diese Zahl x genannt werden. Auch so, unbekannterweise, kann man über sie berichten, dass die Glieder der mit ihr gebildeten geometrischen Reihe

$$1, \quad 1 \cdot x = x, \quad x \cdot x = x^2, \quad x^2 \cdot x = x^3, \quad x^3 \cdot x = x^4, ...$$

sind, und dass auch für diese geometrische Reihe die Beziehung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

zutrifft. Das ist sicher wahr, wie auch x gewählt wird, wenn man nur darauf achtet, dass es in das Intervall zwischen -1 und $+1$ fällt.

Der Wert von $\frac{1}{1-x}$ hängt natürlich davon ab, welche Zahl x bedeutet; er ist also eine Funktion von x. Es ist üblich zu sagen dass wir hier diese Funktion in eine "Potenzreihe" entwickelt haben: in eine unendliche Reihe, die aus immer höheren Potenzen von x besteht.
Die Teilsummen dieser Reihe nähern sich dem Wert von $\frac{1}{1-x}$ immer besser an. In erster, roher Annäherung können wir sogar auch 1 statt $\frac{1}{1-x}$ sagen, $1+x$ ist schon eine bessere Annäherung, $1+x+x^2$ eine noch bessere usf.

Man kann auch allgemein die Frage stellen, ob sich eine gegebene Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt (natürlich erwartet man im allgemeinen nicht eine mit der vorherigen identische Reihe, sondern eine solche, worin die Potenzen von x mit gewissen Zahlen multipliziert auftreten). Das ist in der Funktionentheorie eine Frage von entscheidender Wichtigkeit.
Denn die Funktion $\frac{1}{1-x}$ ist noch ziemlich einfach. Ist x eine gegebene Zahl, so lässt sich ihr Wert leicht berechnen. Es ist aber gelungen, z.B. auch die Potenz, als Funktion des Exponenten, in eine Potenzreihe zu entwickeln, noch dazu am einfachsten gerade dann, wenn die Basis jenes gewisse $e = 2{,}71...$ ist. Man erhält die folgende Reihe, welche Zahl auch x sei:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

wobei - vielleicht wurde dies noch nicht vergessen -

$$2! = 1 \cdot 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3; \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

usf. ist.
Dies bedeutet bereits eine große Hilfe in der Berechnung der Werte von e^x, wenn an Stelle von x bestimmte Zahlen eingesetzt werden. Den unendlichen Dezimalbruch e zu potenzieren, ist kein großes Vergnügen.

Wenn aber x klein ist, so wird statt seiner $1+x$ eine gute Annäherung sein, und den Wert hiervon zu berechnen, d.h. die gegebene Zahl zu 1 zu addieren, ist wirklich ein Kinderspiel.
Braucht man eine größere Genauigkeit, so nimmt man eben eine längere Teilsumme; in einem solchen Fall, hat man auch einige Potenzen der gegebenen Zahl zu berechnen. Es ist aber wahrhaftig eine einfachere Sache, z.B. $x = \frac{3}{10}$ ins Quadrat, in die dritte und in die vierte Potenz zu erheben, als die zehnte Wurzel aus der irrationalen Zahl $(2{,}71...)^3$ zu ziehen; dies ist ja die Bedeutung von $(2{,}71...)^{\frac{3}{10}}$.

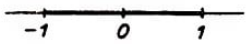
Gut, dass diese Entwicklung für alle x richtig ist.
Die Winkelfunktionen und die Logarithmusfunktion lassen sich auch in Reihen entwickeln, und die Tabellen werden heute bereits auf Grund solcher Reihen angefertigt.

Diese Reihen sind jedoch nicht alle für jedes x konvergent; darauf hat man sehr zu achten, damit es nicht vorkommt, dass irgend etwas auch dann durch angebliche Näherungswerte ersetzt wird, wenn von einer Annäherung keine Rede sein kann. Es erhebt sich also die Frage: Habe ich eine Funktion, wie kann ich erkennen, für welche x sie sich in eine Potenzreihe entwickeln lässt?

Betrachten wir abermals unsere geometrische Reihe. Wir sagten, dass die Entwicklung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

im Intervall von -1 bis +1



gültig ist. Sieht man denn der Funktion $\frac{1}{1-x}$ an, dass gerade 1 (auf der anderen Seite von 0 dann ebenso weit -1) die Grenze sein wird?
Und ob! Wie wäre es, wenn hier das x die Zahl 1 bedeuten möchte?

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

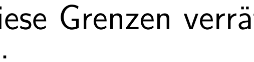
sogar niederzuschreiben, graut einem. Hier steht der ewige Warnungspfahl, die Division durch 0. Wenn wir auch die Reihe gar nicht ansehen, bereits die Funktion selbst gebietet: Halt! - im Punkte 1.
Verrät die Funktion immer so entschieden, wie weit man gehen darf?

Im Bereich der reellen Zahlen verrät sie es nicht. Das hat bei einzelnen Funktionen viele Sorgen und Mühe verursacht. Es war die höchste Zeit für das i, einzugreifen, und dies hat dann volles Licht über diese Frage verbreitet.
Nehmen wir ein Beispiel.

Wer in der Behandlung der Formeln nur ein wenig gewandt ist, kann aus unserer geometrischen Reihe sofort ersehen, dass sich die Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ in die folgende Potenzreihe entwickeln lässt:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$$

und diese Reihe ist ebenfalls dann und nur dann konvergent, wenn x zwischen -1 und +1 liegt:



Ob wohl die Funktion auch hier diese Grenzen verrät?
Setzen wir +1 an die Stelle von x:

$$\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

hier ist alles in Ordnung.

Vielleicht ist der Fehler auf der anderen Grenze zu suchen; setzen wir -1 an die Stelle von x:

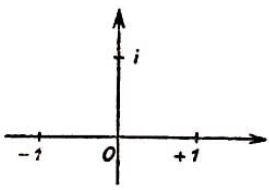
$$\frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

hier ist auch kein Fehler vorhanden. Jetzt sind wir aber in arger Verlegenheit.

Da meldet sich i: "Warum setzt du denn nicht mich an die Stelle von x?" Versuchen wir es damit:

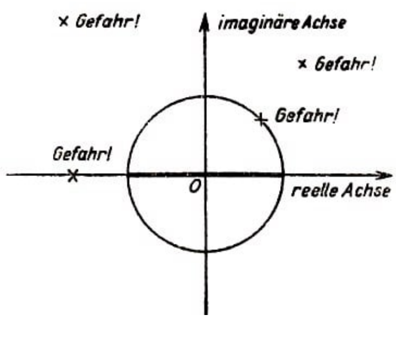
$$\frac{1}{1+i^2} = \frac{1}{1+(-1)} = \frac{1}{0}$$

Halt! - Das ist bereits eine Division durch 0. Denken wir an die komplexe Zahlenebene, dann sehen wir sofort, dass auch die Entfernung des i vom Nullpunkt eine Einheit beträgt. An dem Umstand, dass die Funktion gerade in einem solchen Punkt auf eine Klippe stößt, zeigt sich, dass man sich aus den Einheitsgrenzen nicht hinauswagen darf:



Somit ist es nicht nur an reellen, sondern auch an komplexen Stellen zweckmäßig, den Wert einer Funktion zu untersuchen.

Und es gilt ganz allgemein: Existiert auch nur ein einziger Punkt, in dem die Funktion auf eine Klippe stößt, dann lässt sie sich weiter entfernt von 0 als jener Punkt, nicht mehr in eine Potenzreihe entwickeln.
Man hat also auf der komplexen Zahlenebene unter jenen Punkten, die für die Funktion eine Klemme bedeuten, denjenigen zu suchen, der dem Nullpunkt am nächsten liegt. Bis zu der Entfernung dieses Punktes erstreckt sich dann der Bereich, in dem sich die Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt:



So erhalten wir einen Kreis um den Nullpunkt herum. In seinem Inneren konvergiert die Reihe, eventuell auch in einigen Punkten der Peripherie, doch über ihn hinaus sicher nirgends mehr.
Ein solcher Kreis schneidet aber immer ein Intervall um die 0 herum aus der reellen Achse heraus; dieses Intervall ist in der Abbildung durch eine dicke Linie bezeichnet.

Wieder einmal erschien also das x und brachte alles in Ordnung; und wenn wir es

wollen, verschwindet es wieder: Wir können uns auf jenes reelle Intervall beschränken, das mit seiner Hilfe genau umgrenzt wurde.
Der entzückte Mathematiker lässt es jetzt aber nicht mehr dahinziehen. Wenn i so viel vermag, so kann es nimmermehr als nicht existierend betrachtet werden. Es lohnt sich, die komplexe Funktionentheorie, diese "aus nichts erschaffene Welt", zu durchwandern; es herrscht ja darin eine größere Ordnung als in den wirklichen Welten.

2.8 Geheimnisse aus der Werkstätte

Sobald sich jemand von der ersten Einwirkung eines Kunstwerkes freigemacht hat, erwacht in ihm die Neugierde auf die im Hintergrund stehenden Dinge dieser Welt. Er möchte wissen, wie das Meisterwerk zustande gekommen ist, was darin das Menschliche ist: der Schweiß, das peinlich saubere Feilen. Er möchte auch in die Werkstätte ein wenig hineinblicken.

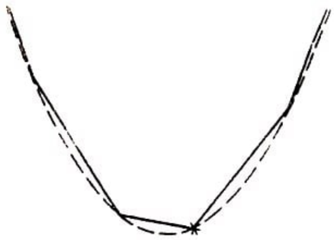
Kehren auch wir aus den gedachten Welten zurück und lauschen wir dem Mathematiker seine Werkstättengeheimnisse ab. Jenes mühsame Herumkramen, das ich dem Leser ersparen wollte, kann ich doch nicht völlig vor seinen Augen verbergen.
Jener Schriftsteller, der dieses Buch angeregt hat, war ja gerade auf den Differentialquotienten neugierig, und der Differentialquotient gehört hierher, in die technische Requisitenkammer des Mathematikers.
Wenn dies auch kein so glänzender Gegenstand ist wie die bisherigen, so ist seine Bedeutung doch außerordentlich groß: Es gibt kein Kunstwerk ohne Kleinarbeit.

Von Anfang an war davon die Rede, dass der Funktionsbegriff der Kern des ganzen mathematischen Werkes ist, und von der Funktion gibt uns die entsprechende Kurve ein Bild. Dieses Bild ist aber notwendigerweise unvollkommen.
Wir haben die Kurve am Anfang aus Geradenstücken zusammengesetzt; dann trachteten wir danach, diese Stücke immer mehr zu verdichten, damit sich die Kurve ausglätte. Jedoch bereits nach den ersten Glättungen verschmolzen die Bleistiftstriche; auf unserer Zeichnung konnte man ein Vieleck von 16 Seiten bereits kaum von einem Kreis unterscheiden.

Es glaubt kein Mensch, dass aus einem so ungenauen Bild präzise Gesetzmäßigkeiten über unsere Funktionen herauszulesen sind. Man bedarf irgendeines Präzisionsinstrumentes, das auch beliebig feine Entgleisungen aufspüren und den Gang der Funktion bis zu einer beliebigen Genauigkeit verfolgen kann. Ein solches Präzisionsinstrument ist der Differentialquotient. Gehen wir von der Zeichnung aus.

Als ich versuchte, von der Parabel ein Bild zu geben, sagte ich, dass ihre Schenkel immer steiler werden. Wie kann man aber von der Richtung einer glatten Kurve sprechen?
Ich weiß wohl, was unter der Richtung einer Geraden zu verstehen ist; ihre Steigung kann ja in jedem Punkt aufs neue kontrolliert werden. Auf die Gerade kann man sich verlassen: Von der einmal eingeschlagenen Richtung wird sie nie abbiegen.
Die Kurve ist aber eben darum eine Kurve, weil sie ihre Richtung fortwährend ändert. Ich fasse sie in einem Punkt an und frage: "Welche Richtung besitzt du hier?"

Aber sie ist glatt und gleitet mir aus der Hand; sie gibt keine bestimmte Antwort. Ich fühle aber doch, dass sie auch in diesem Punkt eine bestimmte Richtung hat; es geschah nicht ohne Sinn, als ich über die Steilheit der Parabel sprach.
Drehen wir den Film ein bisschen zurück, zu einer Zeichnung, in der die Kurve noch nicht so glatt ist. Auf einem solchen Bilde wählen wir einen bestimmten Punkt der Kurve aus:



In dem bezeichneten Punkt ist noch ein Knick, und es ist sicher, dass die Kurve dort keine bestimmte Richtung hat. Vor diesem Punkt ist die Richtung so:

 und hinter ihm so: 

Im Punkte selbst wechselt die Linie ihre Richtung. Jetzt drehen wir den Film langsam vorwärts zu einer Stelle, an der schon mehr Zwischenpunkte eingeschaltet sind:

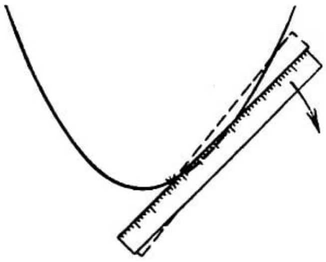
Hier ist der Knick bereits viel weniger scharf:

Die beiden Richtungen, die in unserem Punkte zusammenlaufen weichen kaum noch voneinander ab.
Mit Hilfe einer Zeichnung bin ich nun kaum noch in der Lage, weiter zu verfolgen, wie es sein wird, wenn noch mehr Zwischenwerte auftreten. Man kann sich aber vorstellen, dass sich der Knick immer mehr abschwächt und die Richtungen vor und hinter dem Punkt immer weniger voneinander abweichen. Als die Richtung der Kurve in diesem Punkt wäre jene gemeinsame Richtung anzusehen, die von den beiden Seiten her immer

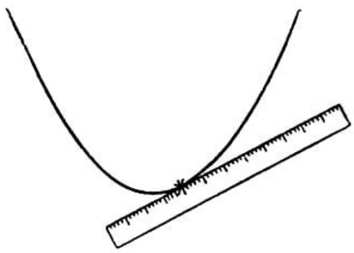
mehr angenähert wird, während sich der Knick ausglättet.

Wenn wir einsehen, dass die beiden in einem Punkt zusammenstoßenden Geradenstücke sich tatsächlich einer gemeinsamen Richtung annähern, so wird es genügen, uns nur mit je einer von ihnen zu befassen. Nehmen wir z.B. jeweils das Geradenstück hinter dem Punkt. Seine Richtung wird besser zu erkennen sein, wenn wir es über die Kurve hinaus verlängern:

So erhalten wir der Reihe nach je eine Sekante der Kurve. Während die Einteilung dichter wird, kommt der benachbarte Punkt unserem Punkte immer näher, und es fallen immer kürzere Stücke der Sekante ins Innere der Kurve. Wir können gut beobachten, was hier geschieht, wenn die Sekante durch ein Lineal vertreten und dieses nach auswärts gedreht wird, wobei man einen Punkt des Lineals stets auf den fixierten Kurvenpunkt presst:

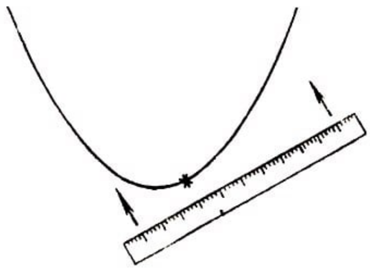


Es wird ein Augenblick kommen, in dem der benachbarte Punkt gerade mit unserem Punkt zusammenfällt und das Lineal von der Kurve abspringt:



Die Sekante wird hier zu einer Tangente:

Wir haben das Gefühl, dass wir eben in diesem Augenblick die Richtung erfasst haben, die von der oberen Seite des Knickes angenähert wird. Wenn wir uns der Kurve mit einem so gerichteten Lineal nähern,



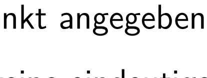
dann wird das Lineal gerade in unserem Punkt die Kurve berühren; hier wird es sich für einen Augenblick an sie schmiegen, und schmiegen sich die beiden aneinander, so haben sie dieselbe Richtung.

Wir sind dann in der glücklichen Lage, diese Richtung nicht an der winzigen Stelle des Anschmiegens untersuchen zu müssen, denn die Gerade bewahrt bis ins Unendliche die Erinnerung an diesen Augenblick; ihre Richtung bleibt stets dieselbe. Jetzt wissen wir bereits, was unter der Richtung einer glatten Kurve in einem gegebenen ihrer Punkte zu verstehen ist: die Richtung der Tangente, die im betreffenden Punkt gezogen wird. Diese Richtung lässt sich vollkommen charakterisieren, z.B. durch einen Quotienten, mit dem man etwa die Steigung eines Dammes auszudrücken pflegt. Nun, das ist der Differentialquotient.

Der Begriff der Tangente ist uns bereits einmal begegnet, als wir auf rein algebraischem Wege zu dem Resultat gelangten, dass ein Kegelschnitt 0, 1 oder 2 gemeinsame Punkte mit einer Geraden hat. Wir sagten damals: Haben die beiden Linien einen Punkt gemein, so berührt die Gerade den Kegelschnitt. Für die Kegelschnitte stimmt das auch.
Es ist aber durchaus keine entscheidende Eigenschaft der Tangente, dass die betreffende Gerade mit der Kurve nur einen einzigen Punkt gemein hat. Besitzt z.B. die Kurve eine Ecke,

so kann die Gerade unserer Abbildung, die durch diese Ecke geht, keineswegs als eine Tangente betrachtet werden, obwohl sie nur einen einzigen gemeinsamen Punkt mit der Kurve hat. Es kann hier keine Rede davon sein, dass durch die Richtung dieser Geraden die Richtung der Kurve in jenem Punkt angegeben würde.

In diesem Punkt hat die Kurve gar keine eindeutige Richtung; unsere Gerade gibt aber nicht einmal die linke oder die rechte Richtung an.
Andererseits hat in der Figur



die Gerade zwei gemeinsame Punkte mit der Kurve; im ersten Punkt ist sie dennoch als Tangente zu betrachten, denn sie schmiegt sich ja gut an die Kurve an.
Sogar auch dies ist noch keine entscheidende Eigenschaft, wenn wir sagen: Eine Tangente tastet nur an, eine Sekante aber durchschneidet die Kurve. Denn z.B. die folgende Gerade

schneidet im Augenblick des Anschmiegens die Kurve meuchlings durch. Aber sie schmiegt sich dennoch tadellos sowohl an den unteren als auch an den oberen Ast an; es liegt demnach kein Grund vor, sie nicht als Tangente zu betrachten.

Allein entscheidend ist, ob man zu der betreffenden Geraden beim Absprung von Sekanten gelangt, die durch immer näher benachbarte Punkte der Kurve gehen. In den beiden letzten Fällen trifft das zu; ich bitte, dies durch Drehung des Lineals zu erproben.

Wollen wir also die Richtung einer Tangente bestimmen, so können wir die mühevolle Kleinarbeit mit den sich immer mehr nähernden Sekanten im allgemeinen nicht vermeiden.
Es fällt uns natürlich gar nicht ein, die Drehung des Lineals als eine exakte Methode zu betrachten. Wäre es notwendig, die Richtung der Kurve genau zu kennen - etwa zur Festsetzung irgendeiner präzisen Gesetzmäßigkeit -, dann würden wir nicht wagen, mit einem Resultat herauszurücken, das durch die Drehung des Lineals erhalten wurde. Die Präzisionsmethode kann nicht von der Zeichnung, sondern nur vom Rechnen erwartet werden.[7]

Ich gehe von einem bestimmten Beispiel aus: Ich möchte den Verlauf der Funktion verfolgen, die durch die Gleichung

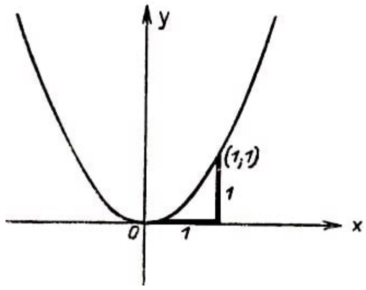
$$y = x^2$$

angegeben wird. Wir wissen bereits, dass ihr Bild eine Parabel ist. Stellen wir nun exakt fest, welche Richtung die Tangente dieser Parabel in dem Punkt besitzt, dessen Abszisse 1 beträgt. In diesem Punkt ist die Ordinate

$$y = 1^2 = 1$$

unsere Parabel geht also durch den Punkt $(1;1)$. Wir suchen die Richtung der Tangente im Punkt $(1;1)$. Das Bild der Kurve ist uns bereits wohlbekannt:

[7] Wer auf die Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals nicht neugierig und der Kleinarbeit überdrüssig ist, der mag ausnahmsweise den folgenden Teil dieses Kapitels und das nächste Kapitel überschlagen.



Wir wissen, was wir zu tun haben: Wir haben zunächst auf der Kurve zu dem Punkt $(1;1)$ benachbarte, immer näher beieinanderliegende Punkte zu wählen. Dann ziehen wir durch den Punkt $(1;1)$ und jeden dieser benachbarten Punkte die Sekante und stellen die Richtungen dieser Sekanten fest, z.B. in der Form eines Quotienten, durch den die Steigung eines Eisenbahndammes ausgedrückt wird.
Schließlich beobachten wir, welcher Richtung sich diese Richtungen allmählich nähern, wenn sich die Sekanten dem Absprung nähern.

Wir werden die benachbarten Punkte so wählen, dass wir vom Punkt $(1;1)$ erst um 1 Einheit, dann um ein Zehntel, um ein Hundertstel, um ein Tausendstel der Einheit nach rechts gehen usf, Die Abszissen der benachbarten Punkte werden also nacheinander

$$1+1=2; \quad 1{,}1; \quad 1{,}01; \quad 1{,}001; \quad ....$$

sein. Auch die Ordinaten dieser Punkte sind zu berechnen, und zwar, gemäß der Gleichung $y=x^2$, durch Quadrieren.
Das wird leicht sein, denn 2^2 ist natürlich 4, und wir wissen noch von der zweiten Zeile des Pascalschen Dreiecks her (abgesehen von dem Komma und von den eingeschalteten 0-Ziffern; aber auch diese sind bereits vorgekommen), dass

$$1{,}1^2 = 1{,}21; \quad 1{,}01^2 = 1{,}0201; \quad 1{,}001^2 = 1{,}002001; \quad ...$$

ist.
Ich schicke noch etwas voraus, damit wir bei den wichtigeren Überlegungen nicht von der Kleinarbeit aufgehalten werden: Wir haben bereits sehr viel gekürzt, und so wissen wir, dass man den Zähler und den Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren darf. Erhält man aber z. B., indem man mit 2 kürzt, $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, so ist auch umgekehrt: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Man darf also den Zähler und den Nenner auch multiplizieren mit derselben Zahl. Dabei wird zwar die Form des Bruches weniger einfach, wir können diese Regel aber unter anderem dann gut gebrauchen, wenn in einem Bruch auch Dezimalbrüche auftreten, wenn wir z.B. folgender unbequemen Division gegenübergestellt werden:

$$\frac{0{,}21}{0{,}1}$$

Wir wissen bereits, dass sich ein Dezimalbruch mit 10 multiplizieren lässt, indem man das Komma um eine Stelle nach rechts bringt. Da es überflüssig ist, am Anfang einer ganzen Zahl eine 0 zu schreiben, erhält man hier, wenn Zähler und Nenner mit 10 multipliziert werden,

$$\frac{0{,}21}{0{,}1} = \frac{2{,}1}{1} = 2{,}1$$

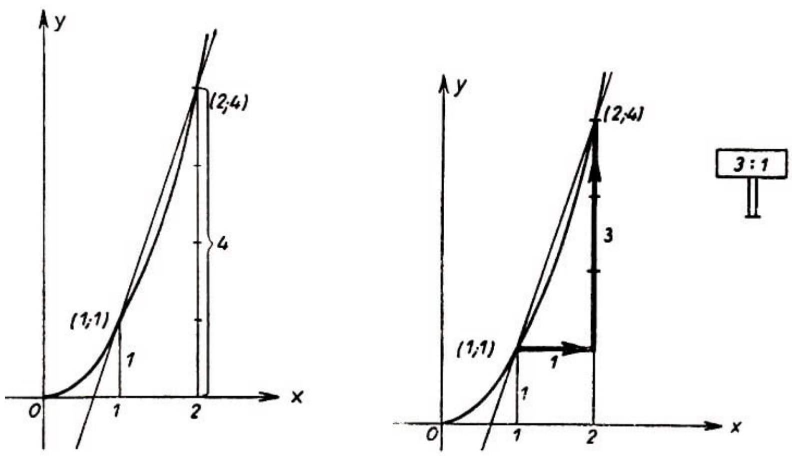
Ebenso wird aus

$$\frac{0{,}0201}{0{,}01}$$

wenn man Zähler und Nenner mit 100 multipliziert,

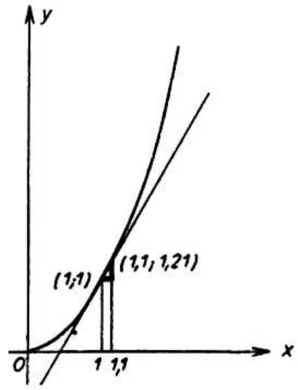
$$\frac{0{,}0201}{0{,}01} = \frac{2{,}01}{1} = 2{,}01$$

Nun können wir uns an unsere Aufgabe wagen. Die Abszisse des Punktes, den wir als ersten benachbarten Punkt ansehen wollen, ist 2, seine Ordinate $2^2 = 4$. Durch diesen Punkt $(2;4)$ und den Ausgangspunkt $(1;1)$ wird die erste Sekante gezogen (linke Abbildung):

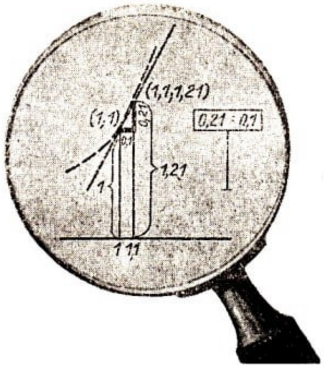


Stellen wir zunächst die Richtung dieser Sekante fest. Vom Punkt $(1;1)$ aus sind wir um 1 Einheit nach rechts geschritten - soviel ist die Differenz der Abszissen - und um 3 Einheiten aufwärts, denn um soviel ist die Ordinate des zweiten Punktes unserer Ordinate über den Kopf gewachsen, soviel beträgt die Differenz der beiden Ordinaten. Ich deute das in einer neuen Abbildung noch einmal verstärkt an. (Abbildung rechts oben).

Hiernach ist die Steigung der ersten Sekante $3:1$, d.h. $\frac{3}{1} = 3 = 2+1$ (ich habe guten Grund, dies so zu schreiben).
Nehmen wir jetzt den folgenden benachbarten Punkt, bei dem $x = 1{,}1$ und, wie ich im voraus berechnet habe, $y = 1{,}1^2 = 1{,}21$ ist; es handelt sich also um den Punkt $(1{,}1;1{,}21)$.
Versuche ich, durch diesen Punkt und durch unseren Anfangspunkt eine Sekante zu ziehen und ihre Steigung wieder durch dicke Linien anzudeuten, so scheinen hier die winzigen Strecken bereits zu verschmelzen:



Nehmen wir das betreffende Stück der Zeichnung unter die Lupe:



Um wieviel sind wir hier nach rechts gegangen? Um 0,1; denn soviel beträgt gerade die Differenz der Abszissen. Um wieviel ist die Ordinate des zweiten Punktes unserem Punkt $(1;1)$ über den Kopf gewachsen? Um soviel, wie die Differenz der beiden Ordinaten ausmacht, d.h. um $1{,}21 - 1 = 0{,}21$ Einheiten. Die Steigung der zweiten Sekante ist also

$$0{,}21 : 0{,}1 \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{0{,}21}{0{,}1}$$

und ich habe bereits vorausgeschickt, dass diese Division $2{,}1 = 2 + \frac{1}{10}$ ergibt.

Gehen wir zum nächsten benachbarten Punkt über, in dem $x = 1{,}01$ und - wie bereits im voraus berechnet - $y = 1{,}01^2 = 1{,}0201$ ist, so ist eine noch viel stärkere Vergrößerung nötig. Wir können uns aber vielleicht schon von der Zeichnung unabhängig machen, denn aus dem Bisherigen ist ja bereits zu ersehen, dass immer die Differenz der Ordinaten durch die Differenz der Abszissen zu dividieren ist.
Bei dem jetzt zu betrachtenden Punkt ist gegenüber dem ursprünglichen Punkt $(1;1)$ die Differenz der Ordinaten $1{,}0201 - 1 = 0{,}0201$, und die Differenz der Abszissen $1{,}01 - 1 = 0{,}01$.
Folglich ist die Steigung der dritten Sekante

$$0{,}0201 : 0{,}01 \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{0{,}0201}{0{,}01}$$

und dieser Bruch - das habe ich vorausgeschickt - beträgt $2{,}01 = 2 + \frac{1}{100}$.

Ebenso können wir auch weitergehen; wir finden dann, dass die Quotienten aus den

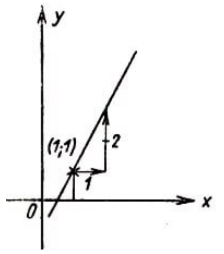
Ordinatendifferenzen und den Abszissendifferenzen - kurz: die Differenzenquotienten -, welche die Steigungen solcher Sekanten angeben, die sich dem Absprung immer mehr nähern, der Reihe nach

$$2+1; \quad 2+\frac{1}{10}; \quad 2+\frac{1}{100}; \quad 2+\frac{1}{1000}; \quad ...$$

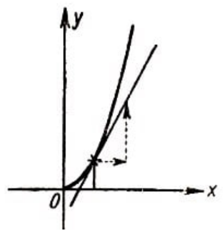
betragen. Wir sahen bereits, dass die Folge

$$1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; ...$$

mit der Genauigkeit des Schokoladenbeispiels gegen 0 konvergiert; somit ist ganz exakt **2** diejenige Zahl, der sich jene Steigungen immer mehr nähern. Nun ist aber die abspringende Sekante eben die Tangente.
Daher ist die Steigung der Tangente, die im Punkt $(1;1)$ der Parabel gezogen wird, gleich 2, d.h. $\frac{2}{1}$. Auf Grund dieser Steigung lässt sich die Tangente auch zeichnen:



Wird daneben mit Hilfe einer großen Zahl von Zwischenwerten die Parabel gezeichnet, so werden wir sehen, dass sie in der Tat von dieser Geraden berührt wird:



Während wir also ungenau gezeichnet haben, ist uns als Nebenprodukt ein vollkommen exaktes Rechnungsverfahren zur Bestimmung der Richtung einer Tangente in den Schoß gefallen:
Wir haben auf der Kurve in der Nachbarschaft unseres Punktes einen anderen Punkt anzunehmen, die Differenz der Ordinaten beider Punkte durch die Differenz der Abszissen zu dividieren und zu beobachten, welchem Wert sich der so erhaltene Quotient annähert, wenn der benachbarte Punkt immer näher an unseren Punkt heranrückt.

Derjenige bestimmte Wert, dem sich die Differenzenquotienten nähern, wird Differentialquotient genannt. Der Differentialquotient ist also, wie ich es im voraus angekündigt habe, ein rechnerisches Präzisionsverfahren zur Bestimmung der Tangenten einer glatten Kurve und damit zugleich zur Untersuchung des gesamten Verlaufs der Kurve.

In allen anderen Punkten lässt sich dieses Verfahren gleichermaßen anwenden: Ist die Kurve glatt, so gibt es in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Tangentenrichtung.

Im Punkt $(2;4)$, der höher als $(1;1)$ liegt, scheint die Parabel bereits steiler zu sein. Werden die Differenzenquotienten in den zu

$$x = 2+1; 2{,}1; 2{,}01; 2{,}001; ...$$

gehörigen Punkten berechnet, die sich dem Punkt $(2;4)$ immer mehr nähern, so erhält man der Reihe nach die Werte

$$4+1; \quad 4+\frac{1}{10}; \quad 4+\frac{1}{100}; \quad 4+\frac{1}{1000}; \quad ...$$

und in voller Genauigkeit ist 4 diejenige Zahl, welche von diesen Werten immer besser angenähert wird. Die Steigung der Tangente im Punkt $(2;4)$ ist daher $4=\frac{4}{1}$, und sie ist tatsächlich größer als die Steigung $2=\frac{2}{1}$ der Tangente im Punkt $(1;1)$.

Ebenso zeigt man, dass in dem Punkt der Parabel, der zu $x=3$ gehört, die Steigung der Tangente 6 beträgt; in dem Punkt, der zu $x=4$ gehört, 8; und allgemein in allen Punkten der Parabel doppelt soviel wie die Abszisse des betreffenden Punktes. Dieser Sachverhalt wird so ausgedrückt: Der Differentialquotient der Funktion

$$y=x^2$$

- was auch der Wert von x sei -, beträgt

$$2x.$$

Damit ist der ganze Verlauf der Parabel tatsächlich in unseren Händen.

Um einen bestimmten Ausgangspunkt zu erhalten, lesen wir noch das eine aus der Funktionsgleichung ab, dass die Parabel durch den Nullpunkt geht. Ist nämlich $x=0$, so ist $y=x^2=0^2=0$.
Alles weitere verrät bereits der Differentialquotient.
Ist z.B. x irgendeine negative Zahl, so ist das Zweifache, $2x$, ebenfalls negativ; die Steigung der Tangente ist also negativ. In einem solchen Punkt muss die Tangente fallen und damit zugleich auch die Kurve, an die sie sich schmiegt.

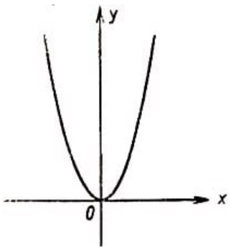
Ist dagegen x positiv, so ist auch das Doppelte positiv: In einem solchen Punkt steigt die Kurve. Ist $x=0$, so ist das Zweifache, $2x$, auch gleich 0. Im Nullpunkt hat also die Kurve eine Tangente mit der Steigung 0; ein Gefälle mit der Steigung 0 ist aber der horizontale Weg, hier die x-Achse selbst.
Nimmt der absolute Wert von x zu, so wird auch das Doppelte immer größer und damit auch die Steilheit der Tangente.

Hieraus ergibt sich von der Kurve das folgende Bild: Links vom Nullpunkt fällt die Kurve, im Nullpunkt wird sie für einen Augenblick horizontal, sie schmiegt sich an die x-Achse an, rechts davon steigt sie dann. Demnach hat sie ihren tiefsten Punkt im Nullpunkt, und während sie sich von dort entfernt, werden ihre beiden Schenkel immer steiler. - Alles das haben wir von unserer Parabel bereits gewusst; im Falle einer weniger bekannten Funktion hätte uns der Differentialquotient darüber aufgeklärt.

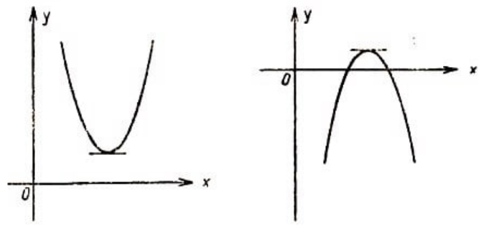
Aber auch unser Wissen über die Parabel wird durch die Kenntnis des Differentialquotienten verschärft: Von der Produktfunktion

$$2x$$

haben wir bereits bei der Zeichnung der ersten Fieberkurven festgestellt, dass ihr Bild eine Gerade ist (das ist auch natürlich, da sie ersten Grades ist); folglich nimmt diese Funktion gleichmäßig zu.
Wenngleich daher die Steilheit der Parabel vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten stets zunimmt, so geschieht dies doch nicht hastig, nicht immer stürmischer, sondern schön gleichmäßig.
Natürlich kann die Parabel auch Positionen einnehmen, die von der gewohnten Lage



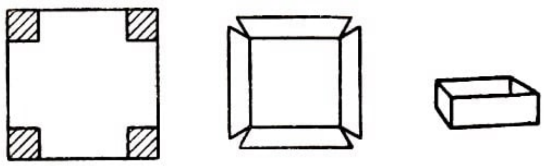
abweichen: z. B.:



und in solchen Fällen kann es bereits problematisch sein, wo ihr tiefster bzw. höchster Punkt liegt. Der Differentialquotient tastet dies sofort ab, denn die Tangente der Parabel wird ja auch jetzt in einem solchen Punkt horizontal.

Das Aufsuchen solcher tiefsten oder höchsten Punkte, oder - in die Sprache der Funktionen übersetzt - die Bestimmung des Minimums bzw. des Maximums einer Funktion, ermöglicht die mannigfaltigsten Anwendungen.

Angenommen, wir wollen aus einem quadratförmigen Blatt eine Schachtel anfertigen, indem wir. an seinen vier Ecken je ein kleines Quadrat ausschneiden und die verstümmelten Teile aufwärts richten:



Die Frage ist, wie groß die auszuschneidenden Stücke sein müssen, wenn man eine Schachtel von maximaler Aufnahmefähigkeit erhalten will.
Die Seite des kleinen Quadrats ist unbekannt, darum werde sie x genannt. Es ist eine sehr leichte Aufgabe festzustellen, wie der Rauminhalt der Schachtel von der Wahl des x abhängt. Soviel ist sicher, dass dann, wenn x klein ist, d.h., wenn kleine Quadrate abgeschnitten werden, die Schachtel zwar breit und lang, aber niedrig ausfällt.

Wenn man dagegen große Quadrate ausschneidet, d. h., wenn eine kleinere Grundfläche übrigbleibt, dann wird die Schachtel höher, aber auch enger. x darf daher weder zu klein noch zu groß gewählt werden; der richtige Wert ist irgendwo in der Mitte zu suchen.

Der Differentialquotient tastet ganz genau ab, dass man eine Schachtel mit maximalem Rauminhalt dann erhält, wenn die Seite des kleinen Quadrats genau den sechsten Teil des großen Quadrates ausmacht.

Eine Kugel kam geflogen; ich hätte aber wissen können, ob sie mir gilt oder dir; denn der Differentialquotient gibt genau an, welche Bahn ein weggeschleuderter Körper durchlaufen wird. Und es gibt noch zahllose Anwendungen.
Untersuchen wir noch einen solchen Fall, in dem die Kurve der Funktion nicht eine so gute Bekannte von uns ist wie die Parabel. Ganz wie vorhin kann man, durch Berechnung von Differenzenquotienten feststellen, dass in einem jeden Punkt der Funktion, die durch die Gleichung

$$y = x^3$$

angegeben wird, die Steigung der Tangente 3 mal soviel beträgt wie das Quadrat der Abszisse des betreffenden Punktes, d.h., der Differentialquotient dieser Funktion ist

$$3x^2$$

Was lässt sich daraus entnehmen?
Um eine Ausgangsstelle zu erhalten, entnehmen wir auch hier der Funktion selbst, dass,

$$\text{wenn } x = 0, \text{ auch } y = 0^3 = 0$$

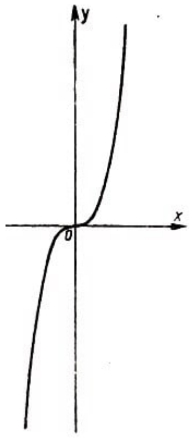
ist. Folglich geht auch diese Kurve durch den Nullpunkt.

Nun lassen wir den Differentialquotienten zu Worte kommen.
An diesem fällt jetzt auf, dass in ihm das Quadrat von x auftritt (sein eigenes Bild ist eine Parabel). Daraus lassen sich gleich zwei Schlussfolgerungen ziehen:
Die eine besteht darin, dass bei der Kurve der Funktion $y = x^2$ bereits keine Rede von einer gleichmäßigen Zunahme der Steigung sein kann. Während sie sich vom Nullpunkt entfernt, nimmt ihre Steigung immer stürmischer zu.

Die andere Schlussfolgerung ist, dass - gleichgültig, ob positive oder negative Abszissen betrachtet werden - x^2 in jedem Falle positiv ist; demnach steigt die Tangente - und zugleich auch die Kurve - sowohl links als auch rechts vom Nullpunkt.
Da die Kurve durch den Nullpunkt geht, kann sie links davon nur dadurch steigen, dass die Funktionswerte hier tiefer als 0 liegen, also die Kurve unterhalb der x-Achse verläuft. Hinter dem Nullpunkt steigt die Kurve über diese Höhe. Somit wird sie im Nullpunkt von der x-Achse geschnitten. Jedoch

$$\text{wenn } x = 0 \text{ ist, so ist } 3x^2 = 3 \cdot 0^2 = 0$$

daher ist die Steigung der Tangente im Nullpunkt 0, d. h., hier ist die Tangente horizontal. Die horizontale Linie durch den Nullpunkt ist wiederum die x-Achse selbst. Folglich berührt die x-Achse unsere Kurve dort, wo sie diese auch durchschneidet, nämlich im Nullpunkt.
Während sich die Kurve diesem Punkt nähert, wird ihre Steigung immer gelinder; hier rastet sie für einen Augenblick. Zu neuen Kräften gekommen, beginnt sie dann wieder zu steigen, erst nur langsam, doch bald immer kühner.
Hiernach gewinnen wir etwa das folgende Bild von der Kurve:



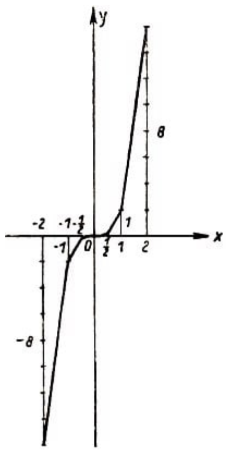
Stellen wir jetzt die Funktion $y = x^3$ direkt dar.

Ist $x = 0$, so ist $y = 0^3 = 0$,
Ist $x = 1$, so ist $y = 1^3 = 1$,
Ist $x = 2$, so ist $y = 2^3 = 8$,
Ist $x = -1$, so ist $y = (-1)^3 = -1$,
Ist $x = -2$, so ist $y = (-2)^3 = -8$.

Berechnen wir noch die Werte für einige Zwischenstellen:

Ist $x = \frac{1}{2}$, so ist $y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
Ist $x = -\frac{1}{2}$, so ist $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$.
Ist $x = \frac{1}{4}$, so ist $y = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

Zur Darstellung von $\frac{1}{64}$ wäre aber bereits ein Punkt, den man mit dem Bleistift setzt, zu hoch. In unserer Zeichnung hat es darum den Anschein, als ob sich die Kurve bereits hier an die x-Achse anschmiege (eine feinere Untersuchung des Differentialquotienten verrät auch dieses stärkere Anschmiegen).
Wir haben also in den Punkten 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2 der Reihe nach 0, $\frac{1}{8}$, 1 ,8 Einheiten aufwärts und in den Punkten $-\frac{1}{2}$, -1, -2 der Reihe nach $-\frac{1}{8}$, -1, -8 Einheiten abwärts zu messen:



Dies ist tatsächlich das Bild, das der Differentialquotient im voraus gespürt hat. Auch an den Zwischenstellen kann nicht die geringste Entgleisung vorkommen, denn der Differentialquotient hätte auch diese verraten. Er spürt natürlich nicht nur das beiläufige Bild, sondern tastet in jedem Punkt die Richtung der Kurve in voller Genauigkeit ab.

Kein Wunder, dass die Mathematiker für alle Funktionen, die in Frage kommen, die entsprechenden Differentialquotienten bestimmt und mit diesen soviel gearbeitet haben, dass sie diese hin und zurück fließend hersagen können.

Und wendet sich der Physiker um eine Funktion an die Requisitenkammer der Mathematik, so überreicht ihm der Mathematiker zusammen mit der Funktion auch gleich den Differentialquotienten, gewissermaßen als eine genaue Gebrauchsanweisung,

2.9 Halten die Kleinen zusammen, so bringen sie es weit

Wir haben im Leben bereits mit so vielen Multiplikationen zu tun gehabt, dass wir das Einmaleins hin und zurück auswendig wissen. So erkennen wir auch die Ergebnisse der umgekehrten Operationen in einem Moment, z.B. dass 5 diejenige Zahl ist, die mit 4 multipliziert 20 ergibt.

Der Mathematiker kann auch die Differentialquotienten der gebräuchlichen Funktionen hin und zurück hersagen; er erkennt sie daher auch sofort, wenn sie ihm unter die Augen kommen. Spricht jemand über die Funktion $2x$, so wird jetzt auch uns gleich einfallen, dass dieses $2x$ uns irgendwoher bekannt ist. Woher denn nur? -
Richtig; das war der Differentialquotient der Funktion $y = x^2$.

Auch hier kann man also von einer Umkehrung der Operation sprechen: Wenn eine Funktion gegeben ist, so kann man danach fragen, ob eine andere Funktion existiert, deren Differentialquotient eben die gegebene ist, und wenn es eine solche gibt, welche es ist.
Falls eine solche Funktion existiert, wird sie das Integral der gegebenen Funktion genannt; z.B. ist das Integral von $2x$ die Funktion $y = x^2$.

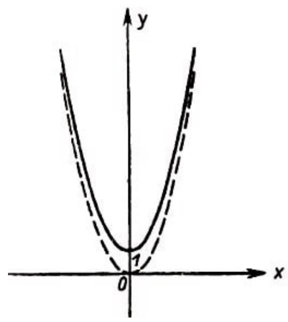
Auch hier gibt es Kunstgriffe, wie bei der Lösung von Gleichungen, mit deren Hilfe die gesuchte Funktion leichter erraten werden kann, wenn man sie nicht sofort erkennt. Es sei z.B. x^2 die gegebene Funktion. Sie erinnert sehr an $3x^2$, von der wir bereits wissen, dass sie der Differentialquotient jener Funktion ist, die durch die Gleichung $y = x^3$ angegeben wird.
Nur ist unser x^2 - was immer auch x sei - gerade ein Drittel von $3x^2$. So wird es vermutlich der Differentialquotient des Drittels von x^3, d. h. der Funktion

$$y = \frac{x^2}{3}$$

sein. Man beweist leicht, dass dies tatsächlich zutrifft.

Jedoch helfen die Kunstgriffe in den meisten Fällen nicht; es ist eine allgemeinere Methode erforderlich. Und es gibt noch einen Fehler in der vorigen Methode des Erratens: Der Differentialquotient konnte nicht verraten, dass z.B. die Kurve der Funktion $y = x^2$ durch den Nullpunkt geht; das musste seinerzeit aus der Funktion selbst herausgelesen werden. Wie können wir dann denken, dass der Differentialquotient allein zur vollständigen Rekonstruktion der Kurve genügen wird?

Tatsächlich genügt er dazu nicht vollkommen; man kann dies sofort einsehen: Wir schieben etwa unsere Parabel z. B. um 1 Einheit höher:



Es ist klar, dass sich die Form der Kurve durch das bloße Hinaufschieben nicht verändert; ihre Steilheit bleibt in jedem Punkt dieselbe. Folglich ist auch ihr Differentialquotient derselbe. Die Gleichung der Kurve hat sich aber dennoch verändert, denn die Ordinate eines jeden Punktes ist um 1 größer geworden. Demnach hat sich jenes y, das bisher gleich x^2 war, zu $x^2 + 1$ erhöht. Die Gleichung der hinaufgeschobenen Parabel ist also

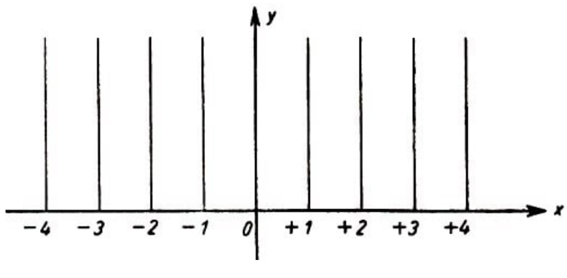
$$y = x^2 + 1$$

Nur aus der Kenntnis der jeweiligen Richtung der Kurve, d.h. nur aus dem Differentialquotienten, kann man noch nicht ersehen, ob es sich um diese Funktion handelt oder um die alte oder um eine der zahllosen Funktionen, die durch das Herauf- und Herunterschieben unserer Parabel zustande kommen. Insofern ist unsere Aufgabe noch unbestimmt.

Gibt man aber auch nur einen einzigen Punkt der gesuchten Kurve an, so wird sie bereits bestimmt: Wird z. B. als "Anfangswert" angegeben, dass die Kurve durch den Nullpunkt geht, so kann diese bei dem gegebenen Differentialquotienten nur unsere ursprüngliche Parabel sein. Dies wird sich im folgenden herausstellen. Ich will die allgemeine Methode an der Parabel demonstrieren:

Nehmen wir an, wir hätten das Integral der Funktion $2x$ nicht erkannt. Gesucht wird eine Kurve, über die wir nur soviel wissen, dass sie durch den Nullpunkt geht und dass die Steigung ihrer Tangente in jedem Punkt $2x$ beträgt.
Ich beginne auch hier mit der Zeichnung, aber das Ziel ist das Erforschen einer Präzisionsmethode.

Teilen wir zuerst die x-Achse in Intervalle, die je eine Einheit betragen, und ziehen wir von den Teilpunkten aus vertikale Linien für die vorläufig noch unbekannten Ordinaten:



Wir wissen, dass im Punkt $x = 0$ der Kurve auch $y = 0$ ist. Hier beginnen wir, die Kurve - natürlich nur annähernd - zu zeichnen!

Der Grundgedanke der Zeichnung ist, dass sich die Kurve für ein Weilchen an die Tangente schmiegt; die Tangente kann in einer kleinen Entfernung vom Berührungspunkt die Kurve noch gut vertreten. Ich betrachte jetzt den Abstand von je zwei vertikalen Linien als eine solche kleine Entfernung.
Ich zeichne also erst jene Tangente, die zum Nullpunkt gehört, und nehme an, dass diese nach rechts ganz bis zu der vertikalen Linie im Punkt $+1$, nach links ganz bis zu der Linie im Punkt -1 unsere gesuchte Kurve repräsentiert.

Die beiden Punkte, zu denen ich so gelange, betrachte ich als diejenigen Punkte der Kurve, de zu $x = +1$ bzw. $x = -1$ gehören, und zeichne von hier aus die entsprechenden Tangenten bis zu den nächsten vertikalen Linien.
Die so erhaltenen Punkte betrachte ich als diejenigen Punkte der Kurve, die $x = +2$ bzw. $x = -2$ gehören, und zeichne die zu diesen Werten gehörigen Tangenten bis zu den nächsten Vertikalen, usf.

Die Tangenten werden natürlich immer auf Grund der gegebenen Steigung gezeichnet.
Im Punkt $x = 0$ beträgt diese $2x = 2 \cdot 0 = 0$,
im Punkt $x = 1$: $2x = 2 \cdot 1 = 2$,
und wir wissen, dass die Produktfunktion gleichmäßig zunimmt.

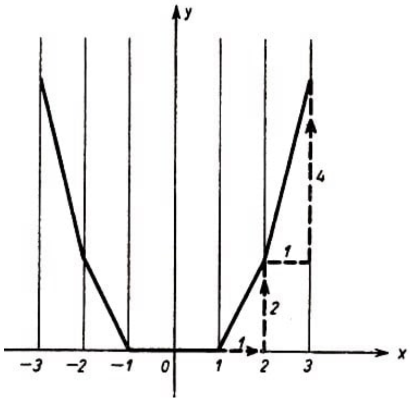
Somit wird die Steigung in den einander in gleichen Abständen folgenden Punkten immer um 2 größer, d.h. von $x = 1$ an der Reihe nach 2, 4, 6, 8,...; analog nach links von 0 nacheinander -2, -4, -6, ... Demnach ist die Steigung der Tangente

in den Punkten	0	1	2	-1	-2
der Reihe nach	0	2	4	-2	-4

Natürlich wissen wir auch, dass man z.B. bei der Steigung 2, d.h. der Steigung $\frac{2}{1}$, um 1 Einheit nach rechts und um 2 Einheiten aufwärts zu gehen hat, und ähnlich bedeutet die Steigung -2, dass man nach links 1 Einheit und aufwärts ebenfalls wieder 2 Einheiten zurücklegen muss.
So geht man z.B. in den Punkten $+1$ und -1 die gleiche Strecke aufwärts.

Dies zeigt, dass die Zeichnung symmetrisch sein wird; es genügt, wenn wir die rechte Hälfte genau zeichnen, die linke lässt sich dann einfach nachzeichnen. Nun können wir an die Zeichnung herangehen. Die Steigung 0 im Nullpunkt bedeutet, dass der Weg horizontal ist, wir gehen also horizontal bis zum Punkt 1. Von da an schreiten wir bis zur nächsten vertikalen Linie mit der Steigung $2 = \frac{2}{1}$ weiter, und von hier aus führt unser Weg mit der Steigung $4 = \frac{4}{1}$ weiter:

So entsteht ein noch ziemlich rohes Bild der Parabel.
Kontrollieren wir nun mit einer Rechnung die Genauigkeit unseres Ergebnisses. Dabei wollen wir uns auf den Punkt $x = 3$ beschränken. Wir berechnen, wie groß die Ordinate der Kurve $y = x^2$: in diesem Punkt ist:
Im Punkt $x = 3$ ist $y = 3^2 = 9$.

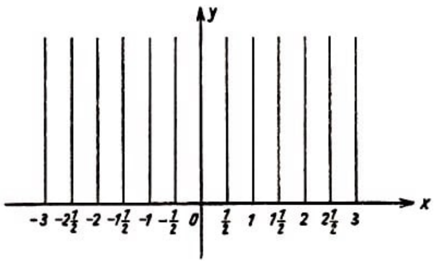


Natürlich dürfen wir jetzt noch nicht wissen, dass es sich um die Funktion $y = x^2$ handelt. Da wir es aber insgeheim doch wissen, kann uns das als Maß für die Genauigkeit unserer Zeichnung dienen: Wir werden nachsehen, um wieviel die zu $x = 3$ gehörige Ordinate unserer stückhaften Kurve von dem Wert 9 abweicht.

Die Zeichnung zeigt, dass wir uns zu der betreffenden Ordinate allmählich erhoben haben, indem sich alle Steigungen zusammensetzen, die vom Nullpunkt an bis hierher eingetragen worden sind; es ist also

$$y = 0 + 2 + 4 = 6 = 9 - 3$$

3 Einheiten Differenz bedeuten noch eine ziemlich große Abweichung. Verdichten wir nun die Teilungspunkte, indem wir in Abständen von je $\frac{1}{2}$ Einheit vertikale Linien ziehen:



Die Steigung der Tangente im Nullpunkt ist wiederum 0 (diese Tangente ist -horizontal). Im Punkt $x = \frac{1}{2}$ ist

$$2x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

und in gleichen Abständen nimmt die Steigung gleichmäßig zu; folglich wird sie jetzt in den aufeinanderfolgenden Teilungspunkten immer um 1 größer.

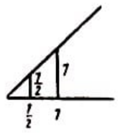
Die Steigung der Tangente ist daher

in den Punkten	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-2\frac{1}{2}$
der Reihen nach	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4	-5

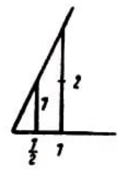
Ehe wir die Zeichnung beginnen, müssen wir noch etwas bedenken: Im Punkt 0 ist die Steigung 0; von hier aus haben wir horizontal bis zum Punkt $\frac{1}{2}$ zu gehen. Bis dahin stimmt alles.

Aber im Punkt $\frac{1}{2}$ ist die Steigung 1, d.h. $\frac{1}{1}$, und von da aus müssten wir um 1 Einheit nach rechts schreiten und um 1 Einheit aufwärts.

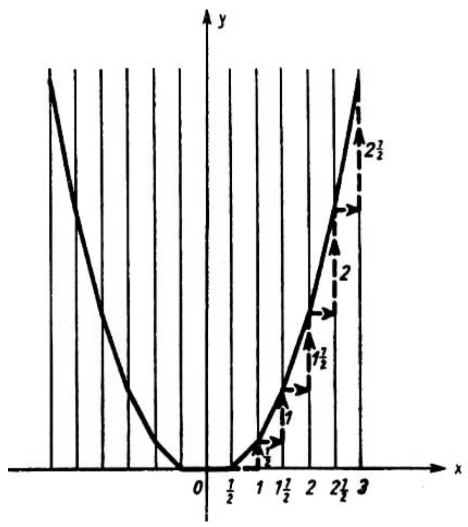
Nun haben wir aber unsere vertikalen Linien nicht darum in Abständen von je $\frac{1}{2}$ Einheit gezogen, damit wir jetzt wieder um eine ganze Einheit nach rechts gehen. Wir brauchen nur zu überlegen: Wenn die Steigung eines Eisenbahndammes $\frac{1}{1}$ ist, d.h. wenn er um 1 Meter steigt, während wir neben ihm horizontal 1 Meter zurücklegen, so wird der Damm, wenn wir nur $\frac{1}{2}$ Meter neben ihm zurücklegen, um $\frac{1}{2}$ Meter steigen:



Ebenso gilt für einen Damm von der Steigung $2 = \frac{2}{1}$, dass er, wenn wir nicht 1, sondern nur $\frac{1}{2}$ Meter neben ihm zurücklegen, nicht um 2, sondern nur um 1 Meter höher steigt:



Schreiten wir also in Schritten von je $\frac{1}{2}$ Einheit weiter, so haben wir immer um die Hälfte der vorhin berechneten Steigungen aufwärts zu gehen, so z. B. von 0 nach rechts fortschreitend in den Punkten 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ statt um 0, 1, 2, 3, 4, 5 der Reihe nach um 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ Einheiten. Jetzt hindert uns nichts mehr daran, die Zeichnung anzufertigen:



Diese Linie ist schon fast zu einer Parabel ausgeglättet, nur deutet sie noch das Anschmiegen an die x-Achse etwas übertrieben an.
Berechnen wir wieder den Wert der zu $x = 3$ gehörigen Ordinate. Diese setzt sich hier nicht aus den Steigungen selbst zwischen 0 und 3 zusammen, sondern aus $\frac{1}{2}$ mal so großen Werten. Es wird besser sein, diese, anstatt in der berechneten Form

$$0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$$

wieder in der Form
$$\frac{1}{2}\cdot 0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 3, \frac{1}{2}\cdot 4, \frac{1}{2}\cdot 5$$
zu schreiben. So ergibt sich hier
$$y = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5$$

$\frac{1}{2}\cdot 0$ ist gleich 0, kann also weggelassen werden.
Sind alle Glieder $\frac{1}{2}$ mal zu nehmen, so ist es einfacher, sie erst zu addieren und dann das Ergebnis. zu halbieren:
$$y = (1+2+3+4+5)\cdot\frac{1}{2}$$

So hat man in den Klammern lediglich ganze Zahlen zu addieren, und auch dieses lässt sich noch vereinfachen, und zwar nach dem Verfahren meiner Schülerin Suschen: Man kann statt der Bildung der Summe aus den ersten fünf Zahlen ihre "Mitte", die 3,5 mal nehmen; das ergibt 15. Dieses Ergebnis ist nun $\frac{1}{2}$ mal zu nehmen, wir erhalten also $\frac{15}{2}$. Würde zu 15 noch 3 addiert, so ergäbe sich 18, das Doppelte von 9. Demnach ist schließlich
$$y = \frac{15}{2} = \frac{18}{2} - \frac{3}{2} = 9 - \frac{3}{2}$$
Die entsprechende Ordinate der vorigen Kurve unterscheidet sich noch um 3 von 9, diese Ordinate bereits nur um $\frac{3}{2}$.

Während sich unsere stückhaften Kurven allmählich ausglätten - was wegen unserer unzulänglichen Mittel natürlich nur ein sehr ungenaues Resultat ergeben kann - fällt uns als Nebenertrag auch ein Verfahren zur Berechnung der zu $x = 3$ gehörigen Ordinate in die Hände, das sich beliebig verfeinern lässt.
Es ist klar, dass bei einer weiteren Teilung der x-Achse zu je $\frac{1}{4}$ Einheiten die Steigung im Nullpunkt wieder 0, im Punkt $\frac{1}{4}$ dagegen
$$2x = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4}, \quad \text{gekürzt} \quad \frac{1}{2}$$
sein wird; sie nimmt also in gleichen Abständen immer um $\frac{1}{2}$ zu. Folglich ist hier vom Nullpunkt an die Steigung der Tangente in den Punkten

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{11}{2}$

Da wir hier immer um $\frac{1}{4}$ Einheit nach rechts gehen wollen, ist auch aufwärts je $\frac{1}{4}$ von dem angegebenen Wert der Steigung abzutragen; denn wird neben einem steigenden Damm $\frac{1}{4}$ eines Weges horizontal zurückgelegt, so erhebt sich der Damm auch nur $\frac{1}{4}$ mal so hoch wie bei dem ganzen Weg.
Aus diesen Vierteln wird unser y zusammengesetzt, bis wir zu dem Punkt $x = 3$ gelangen:
$$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{11}{2}$$

$\frac{1}{4} \cdot 0$ ist natürlich 0 und konnte daher weggelassen werden. Hier ist jedes Glied mit $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren, d. h., man muss eigentlich durch 4 dividieren, und der Nenner eines jeden Gliedes deutet außerdem noch eine Division durch 2 an.
Wir wissen bereits, dass wir, wenn irgend etwas durch 4 und dann durch 2 dividiert wird, das gleiche Ergebnis erhalten, als wenn auf einmal durch $4 \cdot 2 = 8$ dividiert wird; außerdem kann man die Dividenden wieder zuerst addieren und dann das Resultat durch 8 dividieren. Folglich ist

$$y = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) \cdot \frac{1}{8}$$

Im Falle so vieler Glieder ist es schon höchst willkommen, dass uns die Methode Suschens zu Gebote steht: Wir brauchen nur die mittlere der Zahlen, die in der Summe auftreten, d.h. die 6, 11mal zu nehmen; das ergibt 66, und dies durch 8 dividiert $\frac{66}{8}$.
Zu 66 müsste noch 6 addiert werden, um Er das Achtfache von 9, zu erreichen. Es ist also

$$y = \frac{66}{8} = \frac{72}{8} - \frac{6}{8} = 9 - \frac{6}{8}$$

$\frac{6}{8}$ lässt sich noch mit 2 kürzen, so wird

$$y = 9 - \frac{3}{4}$$

In dieser Verfeinerung fehlt bis 9 nur noch $\frac{3}{4}$.

Zu diesem Resultat sind wir bereits ohne Zeichnung gelangt, indem wir jedoch stets daran dachten, was in der Zeichnung zu tun wäre. Fortsetzen können wir diese Methode nun schon, ohne an irgendeine Zeichnung zu denken. Der nächste Schritt wäre, die x-Achse von 0 bis 3 in Achtel zu teilen. Dabei würde sich die Steigung in den Teilpunkten der Reihe nach um

$$2x = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Einheiten vermehren. Die Steigungen in diesen Punkten wären also:

$$0, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}, \quad \frac{5}{4}, \ldots$$

diese Zahlen müssten nacheinander mit der Länge $\frac{1}{8}$ der Abstände multipliziert und dann addiert werden, und zwar bis zum Punkt $x = 3$. Das Resultat wäre

$$y = 9 - \frac{3}{8}$$

Man sieht nun leicht ein, dass sich dieses Verfahren in der gleichen Weise beliebig weit fortsetzen lässt. Die Folge

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$$

konvergiert aber gegen 0 (werden 3 Torten unter immer mehr Menschen gleich verteilt, so fällt auf je einen von ihnen ein Stück von immer mehr verschwindender Größe).

Es ist also in voller Genauigkeit 9 jene Zahl, die von den zu $x = 3$ gehörigen Ordinaten unserer sich immer mehr ausglättenden Kurve immer genauer angenähert wird; 9, d.h. 3^2, also der Wert der Funktion $y = x^2$ im Punkt $x = 3$.

In gleicher Weise beweist man, dass die Ordinaten unserer Kurven im Punkt $x = 1$ gegen $1 = 1^2$, im Punkt $x = 2$ gegen $4 = 2^2$, im Punkt $x = 4$ gegen $16 = 4^2$, allgemein in einem beliebigen Punkt gegen das Quadrat der Abszisse des betreffenden Punktes, d.h. gegen x^2 konvergieren. Unsere stückhaften Kurven glätten sich also zu der Parabel

$$y = x^2$$

aus. In der Funktionensprache ausgedrückt: Wird auch nur ein einziger Anfangswert angegeben, so kann man aus der Funktion

$$2x$$

die Funktion rekonstruieren, deren Differentialquotient die gegebene Funktion ist.

Zugleich haben wir uns auch die gesuchte Präzisionsmethode verschafft: Man hat die x-Achse von dem gegebenen bis zu dem betrachteten Punkt (bei uns von 0 bis 3) in Intervalle zu teilen, die Länge der Intervalle mit denjenigen Werten der gegebenen Funktion, die sie in den Teilpunkten annimmt, zu multiplizieren und alle diese Produkte zu addieren.

Auf diese Weise erhält man sogenannte "Näherungssummen". Wird die Teilung immer mehr verdichtet, so konvergieren diese Summen gegen den Wert des Integrals in dem betrachteten Punkt.
Ich muss gestehen, dass dies in den meisten Fällen mit viel Mühe verbunden ist; nun ja, die umgekehrten Operationen bedeuten eine saure Arbeit.

Die Näherungssummen können auch durch Flächen veranschaulicht werden. Es ist ja ein jedes Glied einer beliebigen Näherungssumme je ein Produkt: Die Länge des Intervalls wird mit je einem Wert der gegebenen Funktion multipliziert.
Nun wissen wir aber, dass sich ein Produkt durch die Fläche eines Rechtecks veranschaulichen lässt, in dem zwei benachbarte Seiten der Größe der beiden Faktoren entsprechen. So ergibt jedes Glied der Näherungssumme je ein Rechteck, und die ganze Summe kann veranschaulicht werden, indem diese Rechtecke schön aneinandergefügt werden.

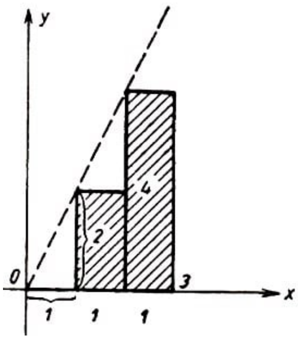
Versuchen wir es nur. Unsere erste Summe war:

$$0 + 2 + 4$$

Hier sind die Produkte nicht zu sehen; in diesem Falle betrug aber die Länge der Intervalle je 1 Einheit. Diese Summe kann also in folgender Form geschrieben werden:

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4$$

Jetzt können wir sie bereits darstellen:

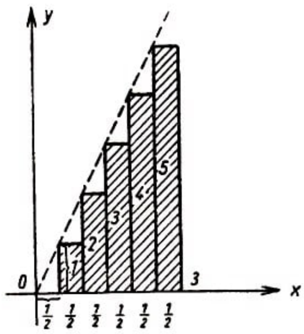


($1 \cdot 0$ darf als ein Rechteck betrachtet werden, dessen Länge sich von 0 bis 1 erstreckt und dessen Höhe 0 beträgt; das ist natürlich nur ein horizontales Linienstück.)

Unsere zweite Näherungssumme war:

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5$$

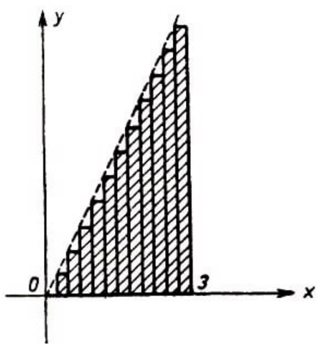
Dazu gehört das folgende Bild



Unsere dritte Näherungssumme bestand bereits aus 12 Gliedern:

$$\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{2}$$

Dies ist mit einer nochmaligen Halbierung der Einheit leicht darzustellen; zum Eintragen der Zahlen ist hier allerdings kein Platz mehr, ich zeichne nur:



Man sieht, dass diese Treppenfiguren sich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks immer mehr annähern. Ich meine jenes Dreieck, das in jeder Abbildung unter die gestrichelt gezeichnete Gerade fällt. Es tritt nämlich in jeder Abbildung dieselbe Gerade auf:

An der ersten Figur ist noch leicht abzulesen, dass ihre Steigung

$$2:1$$

ist, und man kann leicht nachprüfen, dass die Geraden in den beiden anderen Figuren die gleiche Steigung besitzen. Unlängst habe ich darum gebeten, diese Gerade wiederzuerkennen:
Die Gerade mit der Steigung $2:1$ durch den Nullpunkt hatte die Gleichung

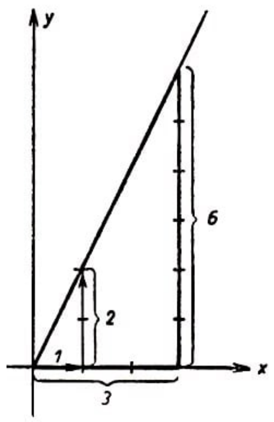
$$y = 2x$$

Das ist aber gerade unsere gegebene Funktion! Ihr Bild ist diese Gerade!
Die Näherungssummen nähern sich also gerade nach der Fläche unter dem Bild der gegebenen Funktion, und zwar immer genauer. Wie schade, dass wir dies nicht von vornherein wussten; der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks lässt sich ja sehr leicht berechnen! -

Man hat nur die Katheten miteinander zu multiplizieren und das Ergebnis zu halbieren. Die horizontale Kathete ist das Stück bis zum betrachteten Punkt $x = 3$, sie beträgt also 3 Einheiten; die vertikale soll berechnet werden:

$$\text{Ist } x = 3, \text{ so ist } y = 2x = 2 \cdot 3 = 6$$

die andere Kathete beträgt daher 6 Einheiten:

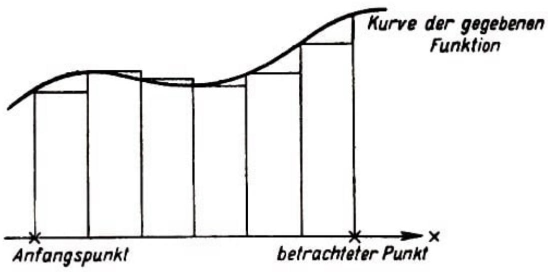


Demnach beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks

$$\frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Einheiten, und das stimmt tatsächlich mit jenem Resultat überein, das wir vorhin auf einem so mühsamen Wege erhalten haben.

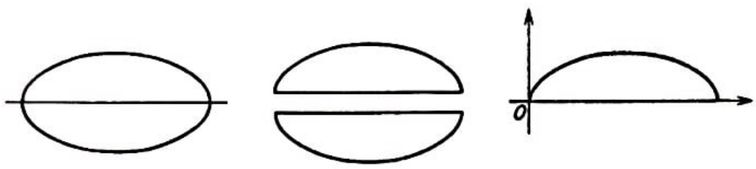
So kann die Flächenberechnung der Integralrechnung zu Hilfe kommen. Aber dies war kein Zufall: Wenn es sich nur nicht um eine allzu unbändige Funktion handelt (wie z. B. die unablässig zwischen 0 und 1 hin- und herspringende Dirichletsche Funktion, wobei es den Näherungssummen gar nicht einfällt zu konvergieren), also im Fall einer normaleren Funktion, lassen sich die Näherungssummen immer durch solche Treppenfiguren darstellen.



und diese nähern die Fläche unter der Kurve der gegebenen Funktion, vom Anfangspunkt bis zu dem betrachteten Punkt, mit der Genauigkeit des Schokoladenbeispiels an, wenn die Teilung unbegrenzt verdichtet wird. Fläche unter einer Kurve und Integral: Beides bedeutet dasselbe, nur in verschiedenen Formulierungen. Umgekehrt hat aber die Flächenberechnung noch viel mehr der Integralrechnung zu danken.

Den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks können wir berechnen, und wir wissen auch, dass sich jedes andere Dreieck in rechtwinklige Dreiecke und jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen lässt. Folglich ist es kein Problem, den Flächeninhalt von solchen Figuren zu berechnen, die von Geraden begrenzt werden.
Im großen und ganzen haben wir uns bereits auch daran gewöhnt, dass sich der Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe immer dichter hineingedrängter Dreiecke berechnen lässt. Wie kann man aber allgemein eine Fläche berechnen, die von krummen Linien begrenzt wird?

Eine solche Fläche kann durch Geraden so zerlegt werden, dass sich jedes Stück mit seiner geraden Seite auf die x-Achse legen lässt:



und wir berechnen dann den Flächeninhalt der einzelnen Teile für sich. Die Berechnung einer solchen Fläche, die unter einer Kurve liegt, ist aber bereits eine Aufgabe der Integralrechnung. Es kann vorkommen, dass man es hier gerade mit einem Integral zu tun hat, das sich leicht erraten lässt, und dann können wir in einem Augenblick sagen, wie groß die Fläche ist.

Wir haben z.B. bereits erraten, dass das Integral von x^2 die Funktion

$$y = \frac{x^3}{3}$$

ist, oder richtiger, dass unter den vielen als Integral in Betracht kommenden Funktionen eben diese Funktion diejenige ist, die durch den Nullpunkt geht, da

$$\text{für } x = 0 \qquad \tfrac{x^3}{3} = \tfrac{0^3}{3} = 0 \text{ ist.}$$

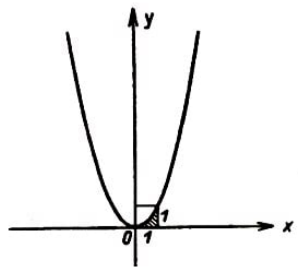
Daraus können wir sofort die Fläche unter der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2$$

berechnen. Sie beträgt z. B. bis zum Punkt $x = 1$ so viel, wie der Wert des Integrals an der Stelle $x = 1$ ist, also

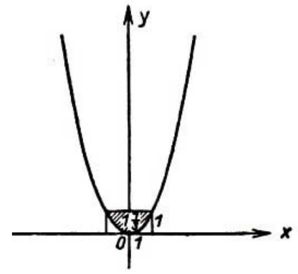
$$\frac{1^2}{3} = \frac{1}{3} \text{ Flächeneinheiten.}$$

Folglich ist die schraffierte Fläche, die offenbar nur einen Teil des Einheitsquadrats einnimmt, genau einem Drittel dieses Quadrats gleich:

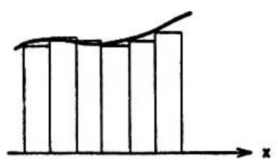


Wen interessiert es denn, wie groß die Fläche ist, die außerhalb der Parabel liegt?
Diese Frage mag ohne Interesse sein, doch es lässt sich daraus sogleich die Fläche zwischen den Parabelschenkeln bis zu einer beliebigen Höhe berechnen. Liegt z.B. der dritte Teil des vorhin betrachteten Einheitsquadrates außen, so liegen zwei Drittel davon innen. Wird noch das linke Spiegelbild hinzugenommen, so errechnet man als Inhalt des in der folgenden Abbildung schraffierten Flächenstückes:

$$2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \quad \text{Einheiten}$$



Ich möchte noch einmal die Aufmerksamkeit auf die vielen kleinen Rechtecke lenken, von denen die Fläche angenähert wurde:



Indem wir die Teilung verdichten, werden unsere Rechtecke immer schmäler; es konvergiert die Fläche eines jeden Rechtecks notwendigerweise gegen 0, im Sinne der schon fast zum Überdruss erwähnten, in viele Stücke geteilten Torte.
Und diese sich zu 0 verengenden Streifen nähern insgesamt doch eine von 0 verschiedene bestimmte Fläche an. Diese braucht nicht einmal klein zu sein:

Der Inhalt des hier behandelten Dreiecks betrug z.B. 9 Einheiten. Ja, die Rechtecke

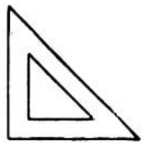
vermehren sich eben auch in demselben Maße, in dem sie sich verdünnen, und halten die Kleinen zusammen, so bringen sie es weit.
Die Aufeinanderlagerung hauchdünner Sandschichten verschüttet mit der Zeit sogar die Pyramiden; viele kleine Menschen denken sich etwas, und auf einmal macht die Welt eine große Wendung. Soviel bewirkt die "Integration" der kleinen Wirkungen.

3 Selbstkritik der reinen Vernunft

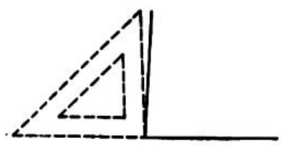
3.1 Und doch gibt es eine Mannigfaltigkeit von mathematischen Welten

Es gibt kaum einen bekannten Mathematiker, dem nicht einmal irgendein geheimnisvoller Fremder ein kürzeres oder längeres Schriftstück als seinen teuersten Schatz anvertraut hat, worin die Quadratur des Kreises "verwirklicht" war. Worum handelt es sich hier eigentlich?

Sagt jemand: "Ich kenne die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und daraus habe ich das Dreieck konstruiert", so erhebt sich sofort die Frage: "Welche Instrumente hast du benutzt?"
Nehmen wir an, dass er das hölzerne Dreieck, das in der Schreibwarenhandlung zu bekommen ist, benutzte,



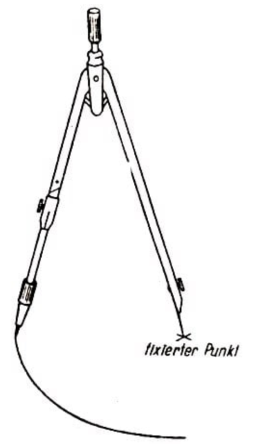
indem er seinen Bleistift an dessen Katheten entlang zog. Der Vollkommenheit solcher Fabrikate darf man nicht allzu sehr vertrauen.
Legt man das hölzerne Dreieck verkehrt an die andere Seite des damit gezeichneten Winkels an und zieht in dieser Lage die Geraden, so fällt das Resultat meist kläglich aus:



Ja, das hölzerne Dreieck ist nicht ganz rechtwinklig.

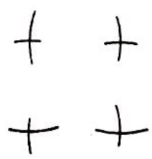
Schon die alten Griechen hatten die zur Konstruktion verwendbaren Instrumente sehr sorgfältig ausgewählt. Das Lineal durfte nur verwendet werden, um eine einzige Gerade an ihm entlang zu ziehen (zum Zeichnen eines rechten Winkels dagegen nicht), obwohl sogar schon dies ein Kompromiss war:
Es gelingt selten, ein Lineal so zu fabrizieren, dass seine Kante vollkommen gerade wird. Einen Kreis können wir schon mit einem viel präziseren Instrument zeichnen; man braucht nicht einen Bleistift an einem kreisförmigen Holzstück entlangzuziehen, sondern man erzeugt den Kreis selber mit dem Zirkel.

Ist die Kupplung zwischen den beiden Stangen nicht locker, und stecken wir das gespitzte Ende der einen Stange fest in einen Punkt, so bewegt sich das zeichnende Ende der anderen Stange tatsächlich in konstanter Entfernung von diesen fixierten Punkt und zeichnet somit einen echten Kreis:



Weitere Instrumente wurden von den alten Griechen für ihre geometrischen Konstruktionen überhaupt nicht zugelassen. Dabei hat sich natürlich erwiesen, dass eine Konstruktion um so zuverlässiger ist, je mehr sie sich nur auf den Zirkel stützt, d.h. je seltener dabei das Lineal verwendet wird. Jahrhunderte später stellte sich heraus, dass man das Lineal vollkommen entbehren kann:

Sämtliche Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal durchführbar sind, lassen sich auch ausschließlich durch Benutzung des Zirkels ausführen. Mit einem Zirkel kann man natürlich keine gerade Linie ziehen; so wird bei Konstruktionen allein mit dem Zirkel z. B. ein Quadrat durch seine vier Ecken angedeutet:



Die durch solche Punkte dargestellte Figur lässt sich aber auch ganz gut anschaulich vorstellen.

Wir wollen aber jetzt bei der Verwendung des Zirkels und des Lineals bleiben. Selbstverständlich erhebt sich die Frage: Welche Konstruktionen lassen sich durch Verwendung nur dieser beiden Instrumente ausführen?
Das Problem der Quadratur des Kreises gehört auch in diesen Fragenbereich. Gegeben ist ein Kreis, und die Aufgabe lautet, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt ebenso groß ist wie der des Kreises.

Wir wissen bereits, dass sich der Flächeninhalt des Kreises exakt bestimmen lässt mittels gewisser, ihn immer mehr annähernder geradliniger Figuren. Ist z. B. ein Kreis mit dem Einheitsradius gezeichnet worden, so erhält man auf diese Weise eine ganz bestimmte irrationale Zahl als Maß seiner Fläche; diese Zahl beginnt mit

$$3{,}14\ \ldots,$$

und die Berechnung der Dezimalen lässt sich ungehindert beliebig weit fortsetzen.

Diese irrationale Zahl spielt eine so wichtige Rolle in der Mathematik, dass sie sogar einen eigenen Namen erhalten hat: Sie ist das von der Schule her wohlbekannte

$$\pi$$

Kennen wir aber den Flächeninhalt des Einheitskreises so genau, dann können wir natürlich gleich sagen, welches das Quadrat von gleich großer Fläche ist. Der Flächeninhalt des Quadrates lässt sich ja berechnen, indem wir die Länge einer Seite quadrieren; und es gibt eine solche Zahl, deren zweite Potenz π ist: nämlich diejenige, die mit $\sqrt{\pi}$ bezeichnet wird.

Folglich wird diese Aufgabe durch das Quadrat, dessen Seiten $\sqrt{\pi}$ betragen, gelöst.
Nun ja; die Frage war aber nicht, ob ein solches Quadrat existiert, sondern ob es sich mit Zirkel und Lineal exakt konstruieren lässt.

Dass $\sqrt{\pi}$ irrational ist, wäre noch kein Hindernis für die Konstruierbarkeit. Ein Quadrat, dessen Seite $\sqrt{2}$ beträgt, haben wir ja schon einmal gezeichnet, als wir den Fischteich verdoppelten, und der dort angedeutete Gedanke lässt sich sehr leicht zu einer genauen Konstruktion umgestalten.
Ob wohl $\sqrt{\pi}$ sich nicht auch irgendwie mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt?

Das Experimentieren führte jahrhundertelang zu keinem Erfolg.
Zur Lösung gelangte man endlich, als man das geometrische Problem in die Sprache der Algebra übersetzte.
Welche Figuren lassen sich mit Lineal und Zirkel zeichnen? Geraden und Kreise.

Wir wissen aber bereits, dass in der Sprache der Algebra eine Gerade durch eine Gleichung ersten Grades und ein Kreis durch eine gewisse Gleichung zweiten Grades ausgedrückt wird. Alle geometrischen Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, bauen sich demnach aus den Lösungen solcher Gleichungen auf.

Es ist nun der Beweis gelungen, dass $\sqrt{\pi}$, und auch π selbst, nicht durch die Lösungen solcher Gleichungen gewonnen werden können; ja, noch viel mehr: π kann überhaupt nicht die Lösung einer Gleichung, gleich welchen Grades, sein, sofern wir es nur nicht irgendwie in die Gleichung einschmuggeln (aus der Gleichung

$$x - \pi = 0$$

z. B. würde sich $x = \pi$ ergeben, indem wir den Subtrahenden π als Summanden auf die rechte Seite bringen). Man sagt, π ist gar keine algebraische Zahl, sondern ist "transzendent".

Hiernach ist es sicher, dass die Quadratur des Kreises nicht ausführbar ist. Der Mathematik ist es wieder einmal glänzend gelungen, ihre eigene Unfähigkeit zu beweisen, eine bestimmte Aufgabe mit abgegrenzten Mitteln zu lösen.

Neben der Entdeckung, dass es transzendente Zahlen gibt, die nicht unter den Lösungen einer algebraischen Gleichung vorkommen können (es lässt sich beweisen, dass $e = 2{,}71...$ - die Basis der natürlichen Logarithmen - ebenfalls eine solche Zahl ist, und sogar, dass die irrationalen Zahlen zum größten Teil transzendent sind), möchte ich aus dem vorhergehenden Gedankengang noch die Reinheit der Methode hervorheben, auf die die alten Griechen so sehr geachtet haben.

Es war nicht allgemein danach gefragt, ob irgendwie ein Quadrat zustande gebracht werden kann, dessen Flächeninhalt mit dem des Kreises übereinstimmt, - am Ende des vorigen Jahrhunderts wurde sogar ein Instrument konstruiert, mit dem man ganz mechanisch ein solches Quadrat fabrizieren kann, - sondern ganz präzis, ob die Konstruktion mit Zirkel und Lineal möglich ist.

So ist die Frage für jeden Mathematiker ein für allemal entschieden, und zwar im negativen Sinne. Nur jene armen Irren wollen das nicht glauben, deren Einbildungskraft durch den phantastischen Ausdruck "Kreisquadratur" erregt wird.

Die Reinheit der Methoden, die klare Formulierung der Bedingungen, - das ist der Grund dafür, dass die Mathematiker nie aneinander vorbeireden, wie dies die Vertreter anderer Wissenschaften so oft tun; die Mathematiker aller Zeiten und aller Länder verstehen einander ganz genau.
Die Mathematiker stehen im Rufe der Schwerverständlichkeit, und dabei formuliert vielleicht kein Mensch seine Mitteilungen mit so weitgehender Rücksicht auf den anderen Menschen wie eben der Mathematiker.

An den Gegenständen der Mathematik haftet selbstverständlich ebensoviel Subjektives wie an allen anderen Gegenständen. Punkte und Geraden z.B. können in der Vorstellung einzelner Menschen sehr verschieden aussehen. Einer meiner Professoren begann seine erste Stunde damit, dass er eine Studentin durch die unerwartete Frage überraschte:

"Haben Sie, Fräulein, schon jemals einen Punkt gesehen?"
"Nein."
"Haben Sie schon jemals einen Punkt gezeichnet?"
"Ja; das heißt,"- besann sich meine Kollegin eines Besseren - "ich hatte nur die Absicht, einen zu zeichnen; es ist mir aber nicht geglückt."

(Ich glaube, unser Professor hat durch diese Antwort unseren Jahrgang auf Lebenszeit liebgewonnen.) Jene Ablagerung von Graphit oder Kreide, die man zeichnet und die unter der Lupe wie ein Gebirge aussieht, ist natürlich kein Punkt.

Jeder Mensch besitzt irgendeine Vorstellung vom Punkt, und dieser Vorstellung gemäß versucht er, einen Punkt zu zeichnen. Die Vorstellungen über die Gerade können noch subjektiver sein.

Die Gerade ist ja gar keine einfache Linie: Kleine Kinder und primitive Menschen zeichnen nie Geraden, ihr spontaner Linienzug ist der krumme Bogen. Zum Ziehen einer Geraden gehört schon eine erhebliche Disziplin.

Wegen der verschiedenartigen Vorstellungen nun, die man auch von den Gegenständen der Mathematik haben kann, teilt der Mathematiker, wenn er irgend etwas über Punkte und Geraden bewiesen hat, dies dem anderen auf folgende Weise mit: "Ich weiß nicht, wie dein Bild von den geometrischen Figuren beschaffen ist. Meine Vorstellung davon ist die, dass ich durch zwei beliebige Punkte eine Gerade ziehen könnte. Stimmt das mit deinem Bild überein?"

Ist die Antwort bejahend, dann erst fährt er fort: "Ich habe etwas bewiesen, wobei ich von den Eigenschaften der Punkte und der Geraden gar nichts benutzt habe, außer der einen, mit der du schon einverstanden warst. So kannst du jetzt getrost an deine Punkte und Geraden denken, du wirst mich dennoch verstehen."

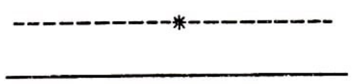
Die Mathematik bildet sich nicht ein, absolute Wahrheiten offenbaren zu können. Ihre Sätze sind immer solche "wenn - so" lautenden bescheidenen Aussagen. Wenn wir nur Zirkel und Lineal benutzen, so gelingt die Quadratur des Kreises nicht. Wenn wir unter Punkten und Geraden das und das verstehen, so gelten für sie die folgenden Sätze.

Es ist wahr, dass wir von der Schule her nicht solche Sätze gewohnt sind, und in den bisherigen Kapiteln wurden die Sätze auch nicht so formuliert. Wer anderen Kenntnisse vermittelt, der verfährt richtig, wenn er die Ergebnisse nicht abgeschlossen, sondern gleichsam im Entstehen liefert, und im Fieber des Entstehens klären sich die genauen Bedingungen noch nicht ab.
Auf die großen schöpferischen Zeiten folgen jedoch meistens Zeiten der Kritik; die Mathematiker überblicken den zurückgelegten Weg und entfalten dann den Kern der fertigen Ergebnisse.

Zu diesen großen Systematikern gehört Euklid; sein geometrisches Werk ist jahrhundertelang ein Muster geblieben. Zu Beginn zählt er die Grundbegriffe und die auf sie bezüglichen Grundbedingungen auf (diese werden bis heute Axiome genannt); die darauffolgenden Beweise sind nur für denjenigen bestimmt, der eine solche Vorstellung von Punkten, Geraden und Ebenen hat, dass er die auf sie bezüglichen Axiome als wahr anerkennt.

Deshalb wurden diese Axiome mit großer Sorgfalt ausgewählt; wir haben es hier mit solchen Aussagen zu tun, in denen die Anschauungen aller Menschen übereinstimmen; z. B. kommt unter ihnen auch die Aussage vor, dass man durch zwei gegebene Punkte immer eine und nur eine Gerade ziehen kann:

Das Werk ist 2000 Jahre alt, und inzwischen hat sich nur um ein einziges Axiom ein Streit erhoben. Es handelt sich dabei um das bekannte Parallelenaxiom: Zu einer Geraden lässt sich durch einen außenliegenden Punkt nur eine einzige Gerade ziehen, welche die erstere nicht schneidet, mögen beide Geraden auch noch so lang gezogen sein:

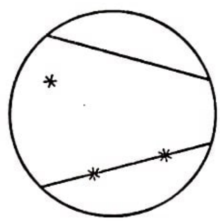


Man sagt: Diese Gerade läuft parallel zu der gegebenen. Darauf komme ich noch zurück.

Vorerst möchte ich aber auf eine andere Möglichkeit der axiomatischen Behandlungsweise hinweisen: Sind die Beweise der Sätze so beschaffen, dass jeder Mensch seiner Phantasie in der Vorstellung von Punkten, Geraden und Ebenen freien Lauf lassen darf, nur mit dem einzigen Vorbehalt, dass diese Figuren den in den Axiomen enthaltenen Bedingungen genügen müssen, dann ist nicht einmal von Belang, ob jene Gegenstände, an die der Betreffende denkt, überhaupt in, irgendeinem Sinn Punkte, Geraden und Ebenen sind.
Es kann ja vorkommen, dass die Bedingungen der Axiome auch von anderen Gegenständen erfüllt werden, und dann liefern die Beweise auch für diese anderen Gegenstände zutreffende Sätze.

Hier heißt es wiederum "mit einem Satz erfassen wir zwei Sätze", wie es uns schon begegnet ist, als wir von der Dualität sprachen: Die dort vorkommenden Sätze würden auch von einem Menschen anzuerkennen sein, dessen Phantasie so verschroben wäre, dass er unter Punkt eine Gerade und unter Gerade einen Punkt verstünde.
(Bitte an das dort angeführte Beispiel zu denken: Drei Punkte bestimmen ein Dreieck, wenn sie nicht derselben Geraden angehören. - Drei Geraden bestimmen ein Dreieck, wenn sie nicht demselben Punkt angehören, d. h. nicht durch denselben Punkt gehen.)

Versteht jemand z.B. unter Punkten nur solche Punkte, die in das Innere eines Kreises fallen (die Punkte der Peripherie schon nicht mehr) und unter einer Geraden nur den Teil einer Geraden, der in das Innere jenes Kreises fällt,



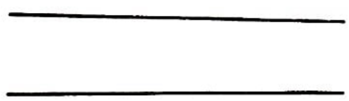
so wird auch in dieser eingeschränkten Welt wahr bleiben, dass man durch zwei Punkte (d. h. durch zwei Punkte innerhalb des Kreises) eine und nur eine Gerade (d.h. einen sich bis zum Rande des Kreises erstreckenden Teil einer Geraden) ziehen kann; es bleiben also auch hier sämtliche Sätze bestehen, die von Punkten und Geraden ausschließlich auf Grund dieses einen Axioms bewiesen werden.

Kommen wir nun wieder auf das Parallelenaxiom zurück. Ich glaube, wer ein wenig darüber nachgedacht hat, der nimmt es an, dass sich zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb dieser liegenden Punkt nur eine einzige Parallele ziehen lässt, und sieht nicht, was daran überhaupt problematisch sein könnte.
Die Vorstellungswelt der meisten Menschen ist in der Tat so beschaffen, dass sie das Parallelenaxiom ohne jede Diskussion anerkennen.

Mir ist aber folgendes begegnet, als ich in der untersten Klasse eines Gymnasiums (10jährige Mädchen) unterrichtete.
Jede Schülerin hatte ein Quadrat in der Hand und sollte sagen, welche Eigenschaften der Seiten sie beobachten können. Bald erklang das Wort "parallel"; die Mädel hatten dieses Wort ja bereits im Leben hören können. Ich fragte, was sie unter parallel verstünden.

Das eine Mädchen sagte, Parallelen seien gleich gerichtet, das andere, dass sie stets gleich weit entfernt voneinander blieben, das dritte, dass sie sich nicht träfen, auch wenn sie noch so weit verlängert werden.
"All das stimmt", sagte ich, "jede dieser Eigenschaften kann schon allein als Kennzeichen für Parallele gelten, die beiden anderen folgen dann daraus".

Da richtet sich in der ersten Bank die am tiefsten denkende Schülerin, die kleine Anna auf. "Es wäre nicht gut, als Kennzeichen anzunehmen, dass sie sich nie treffen; denn ich kann mir auch zwei Geraden vorstellen, die nicht in gleicher Entfernung voneinander bleiben, die sich immer mehr nähern und sich trotzdem nie treffen, so weit man sie auch verlängern mag". Sie deutete auch mit einer Zeichnung an, welche Geraden sie meinte:



Ich musste ihr glauben, dass ihre Anschauung wirklich so geartet ist Empirisch kann man solchen Dingen natürlich nicht nachgehen Neige ich unsere gewohnte Parallele ein wenig,

so kann ich - die beiden entsprechend verlängert - das Zusammentreffen mit der gegebenen Geraden noch nachweisen. Hätte ich sie aber noch sehr viel weniger geneigt, hätte sich die Gerade der Reihe nach um $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ des vorigen Bogens abwärts gedreht; wie könnte ich dann wissen, ob ich bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Reihe nicht einmal zu einer so kleinen Neigung gelangen werde, dass unsere Gerade die untere tatsächlich nicht mehr schneidet?
Den unendlichen Weg kann ich ja niemals zu Ende gehen.

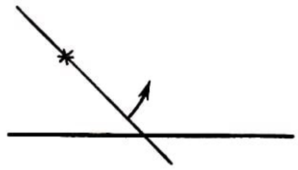
Für eine Linie, die sich immer mehr einer Geraden nähert, ohne sie je zu erreichen, haben wir bereits ein Beispiel kennengelernt: Jeder Hyperbelast ist so geartet.

Es ist also nicht so erstaunlich, dass es Menschen gibt, die sich auch die geradlinige Annäherung in solcher Weise vorstellen können. Unsere Vorstellungen werden ja auch von unserer Gefühlswelt begleitet. Ich kann mir z.B. denken, dass sich in der Phantasie eines schon seit langer Zeit von einem lieben Angehörigen Getrennten das Bild einer unbegrenzten Annäherung ohne Begegnungsmöglichkeit scharf abzeichnet.

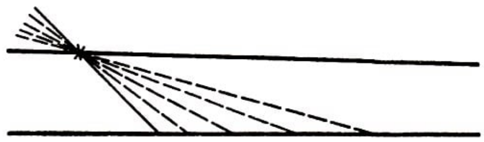
Wie dem auch sei, seit Euklid gab es immer wieder Menschen, die die gleiche Anschauung hatten wie meine Schülerin Anna.
Ganz sicher waren sie ihrer Sache nicht, denn die Mehrheit stand ihnen ja entgegen; doch das bestritten sie jedenfalls, dass das Parallelenaxiom ebenso selbstverständlich sei wie die übrigen Grundsätze.
"Möge man dieses Axiom beweisen, und zwar auf Grund nur solcher Bedingungen, die auch von uns nicht bestritten werden, dann werden wir es auch anerkennen."

Jahrhundertelang versuchten die Mathematiker vergebens, das Parallelenaxiom auf Grund der übrigen Axiome zu beweisen.
Der ungarische Mathematiker Janos Bolyai war einer von denen, die es zuerst wagten, für die entgegengesetzte Anschauung offen Stellung zu nehmen:

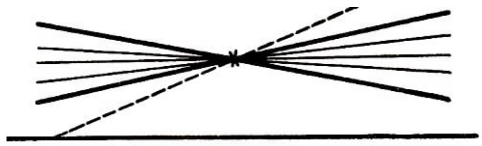
"Es gelingt nicht, das Parallelenaxiom zu beweisen, weil es nicht wahr ist. Ich sehe das so an: Zieht man zu einer Geraden durch einen außerhalb dieser liegenden Punkt eine andere Gerade, die die erste schneidet, und beginnt man, sie zu drehen,



dann wird sie die gegebene Gerade in einem immer weiter entfernt liegenden Punkt schneiden, bis sie sich auf einmal von ihr loslöst:



Diese abspringende Gerade neigt sich noch immer ein wenig gegen die feste. Drehe ich die bewegliche Gerade noch weiter, so wird sie die untere Gerade natürlich erst recht nicht schneiden, und zwar so lange, bis sie sich auf der anderen Seite wieder mehr gegen die feste Gerade neigt:



Durch den außenliegenden Punkt gehen also zwei abspringende Geraden; keine der unendlich vielen Geraden zwischen ihnen schneidet die gegebene Gerade, diese wird nur von den stärker geneigten Geraden geschnitten. Kommt nun alle, die ihr die gleiche Vorstellung habt, jetzt stelle ich unsere Geometrie auf!"

Bolyai hat also die Leugnung des Parallelenaxioms als Grundbedingung angenommen, alle anderen euklidischen Axiome jedoch beibehalten, und hat nachgeprüft, welche Sätze über Punkte, Geraden und Ebenen man aus diesen Bedingungen ableiten kann.
So baut sich diejenige Geometrie auf, die man die hyperbolische zu nennen pflegt (jeder Ast der Hyperbel verhält sich ja zu seiner Asymptote wie eine abspringende Gerade) und in der so manches anders ist als in der euklidischen Geometrie: Es ist Ansichtssache, welche von beiden man annimmt.

Gleichzeitig mit Bolyai haben auch andere die Möglichkeit einer andersartigen Geometrie entdeckt. Der Russe Lobatschewski hat über die gleiche Entdeckung geschrieben. Dies ist eine ziemlich häufige Erscheinung:

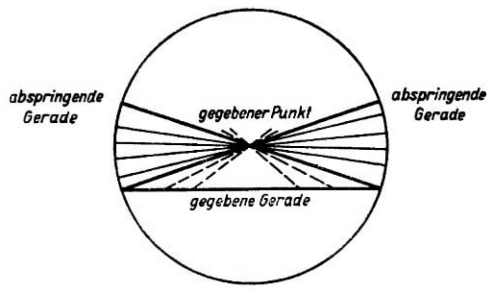
Es scheint so zu sein, dass die Zeit allmählich dieses oder jenes Problem zur Reife bringt, und es finden sich dann Mathematiker, die das spüren, unabhängig voneinander an verschiedenen Punkten der Erde.

Etwas aber ist hier noch nicht in Ordnung: Lässt sich vielleicht das Parallelenaxiom dennoch beweisen, so dass die ganze hyperbolische Geometrie auf einer falschen Annahme beruht und aus ihr früher oder später eine Schar von Widersprüchen an den Tag kommen wird?

Auf diese Frage haben wir heute bereits eine beruhigende Antwort: Die euklidische und die hyperbolische Geometrie sind auch hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit gleichwertig. Würde die hyperbolische Geometrie einmal zu einem Widerspruch führen, so wäre auch die euklidische Geometrie widerspruchsvoll.

Es lässt sich nämlich ganz innerhalb der euklidischen Geometrie ein "Modell" für die hyperbolische Geometrie konstruieren, und zwar so, wie ich schon vorhin eine abgegrenzte Welt geschildert habe, deren Punkte und Geraden alle in das Innere eines Kreises der euklidischen Geometrie eingeschlossen sind.
Dort habe ich gezeigt, dass auch diese in beschränkterem Sinne so genannten Punkte und Geraden eine der euklidischen Grundbedingungen erfüllen.

Nun lässt sich aber zeigen, dass diese Gebilde sämtliche Bedingungen erfüllen (wenn man nur den Begriff der Kongruenz entsprechend modifiziert), abgesehen allein von dem Parallelenaxiom. Für dieses gilt gerade das Gegenteil, die Grundannahme von Bolyai:



Die abspringenden Geraden sind jene, die von dem gegebenen Punkt zu den Endpunkten der gegebenen Geraden, d.h. zum Rande des Kreises führen: die zwischen ihnen liegenden Geraden schneiden die gegebene Gerade (innerhalb des Kreises) auch nach Euklid nicht.
Das Axiom von Bolyai kann also den übrigen euklidischen Axiomen nicht widersprechen; denn siehe, in dieser eingeschränkten Welt vertragen sie sich schön miteinander!

So sind uns schon zwei gleichwertige Geometrien begegnet, und es hindert uns nichts daran, diese Mehrzahl noch weiter zu vermehren. Jetzt können wir nämlich dieses Spiel schon von jeder Anschauung unabhängig weitertreiben: Anstatt eines beliebigen Axioms, das sich auf Grund der übrigen Axiome nicht beweisen lässt, können wir sein Gegenteil annehmen und nachprüfen, welche Sätze sich aus dieser entgegengesetzten Annahme beweisen lassen.

Man kann sogar auch von ganz anderen Bedingungen ausgehen; es erscheint ja nicht als

angebracht, an den aus der Anschauung abstrahierten Grundbedingungen so unbedingt festzuhalten, nachdem einmal die hyperbolische Geometrie gezeigt hat, wie labil dieser Grund ist, wie verschieden es ausfallen kann, wenn von zwei Menschen jeder seiner eigenen Anschauung folgt.
So wird eine ganze Reihe von Geometrien nebeneinander aufgebaut. Das ist keine leere Spielerei; die heutige Physik kann gerade auf Grund solcher abstrakt erbauter Geometrien viele Erscheinungen der Wirklichkeit klären.

Die Anschauung des Menschen ist nicht unabänderlich, sie wird auch durch die Entwicklung der Wissenschaft stets weitergebildet.
Seit man entdeckt hat, dass die Erde nicht eine flache Kreisscheibe ist, und man sich daran gewöhnen musste, dass unsere Gegenfüßler nach der alten Vorstellung mit dem Kopf nach unten auf der Erde spazieren, hat sich die Anschauung des Menschen ungeheuer gewandelt.

Erweisen sich die Ergebnisse der Relativitätstheorie der heutigen Physik als haltbar und gehen sie in das allgemeine Bewusstsein über, so werden sich nach einiger Zeit die Menschen mit euklidischer Anschauung schon nicht mehr in einer so großen Mehrzahl befinden, und es kann eine der heute noch als abstraktes Spiel erscheinenden Geometrien die Geometrie der Wirklichkeit werden.

Nachschrift über die vierte Dimension

Ich möchte noch auf das Wort "Modell" zurückkommen. Innerhalb der euklidischen Geometrie konnten wir für die hyperbolische Geometrie ein "Modell" konstruieren, indem wir ein Stück der euklidischen Ebene mit einem Kreis umgrenzten und jeder Figur der hyperbolischen Geometrie je einen Gegenstand innerhalb des Kreises, jedem Satz der hyperbolischen Geometrie je einen im Inneren dieses Kreises beweisbaren Satz entsprechen ließen.

Ein solches Verflechten zweier Wissenszweige ist uns bereits früher begegnet, als wir in der Algebra ein Modell für die Geometrie fanden. Wir ließen ja den Punkten Zahlenpaare, den Linien Gleichungen mit zwei Unbekannten entsprechen, und so umgrenzten wir einen bestimmten Teil der Algebra, innerhalb dessen jede geometrische Figur ein algebraisches Gebilde, jedes geometrische Ergebnis einen algebraischen Satz repräsentierte.
So konnten wir geometrische Gesetze auf algebraischem Wege ableiten und auch umgekehrt die Ergebnisse der Geometrie in der Untersuchung der Funktionen, die den Kurven entsprechen, verwerten.

Alles das bezog sich auf die Geometrie der Ebene, lässt sich aber auch ohne weiteres auf den Raum übertragen: Im Raume wird ein Punkt durch drei Zahlen bestimmt (wäre jenes bewusste Vogelnest im Gipfel eines Baumes gefunden worden, so hätte zur genauen Bestimmung seines Ortes auch die Angabe gehört, wie hoch der Baum ist: wie lang die Leiter sein muss, die wir mitzunehmen haben, wenn wir es erreichen wollen), folglich können den Figuren des Raumes Gleichungen mit drei Unbekannten entsprechen.
Diese Unbekannten lassen sich mit x, y und z bezeichnen. Haben wir es z.B. mit einer

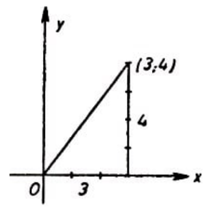
Gleichung von folgender Form zu tun,

$$z = 3x + 2y$$

so sieht man sofort, dass der Wert von z sowohl von der Wahl des x als auch von der Wahl des y abhängt. Dieses z ist eine sogenannte Funktion von zwei Veränderlichen. (Im Leben begegnen wir häufig solchen Funktionen; die Prämie einer Lebensversicherung hängt z. B. sowohl davon ab, wie alt der Versicherte, als auch davon, wie groß die Versicherungssumme ist.)

Was daher über die geometrischen Figuren des Raumes bewiesen wird, das lässt zugleich Feststellungen über die Funktionen von zwei Veränderlichen zu.
Nun brauchen wir im Raume nicht alles von vorn anzufangen:

Ein großer Teil der in der Ebene gültigen Sätze lässt sich für den Raum einfach verallgemeinern. Man erhält z.B. in der Ebene die Entfernung eines Punktes - etwa des Punktes $(3; 4)$ - vom Nullpunkt folgendermaßen:



Diese Entfernung ist die Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die beiden Koordinaten des betreffenden Punktes sind.
Folglich ist ihr Quadrat nach dem pythagoreischen Lehrsatz der Summe der Quadrate dieser beiden Katheten gleich. Die Entfernung selbst ist demnach

$$\sqrt{3^2 + 4^2}$$

Entsprechend kann man beweisen, dass z. B. die Entfernung vom Nullpunkt des durch drei Koordinaten charakterisierten räumlichen Punktes $(3; 4; 5)$

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$$

beträgt.
Man gelangt oft durch eine solche einfache Verallgemeinerung aus der Ebene in den Raum. Dies macht sich für die Funktionen in der Weise geltend, dass eine Menge von Sätzen über Funktionen mit einer Veränderlichen sich einfach auf Funktionen mit zwei Veränderlichen verallgemeinern lassen.

Nun kann es vorkommen, dass man Funktionen mit 3, mit 4,... mit beliebig vielen Veränderlichen gegenübergestellt wird; da ist es wirklich schade, dass man zwar von der zweidimensionalen Ebene zum dreidimensionalen Raum übergehen, über den dreidimensionalen Raum aber nicht hinausgehen kann:
Einen Raum mit vier Dimensionen haben wir nicht zur Verfügung.

Jedoch gestattet das algebraische Modell, so zu tun, als gäbe es einen solchen Raum. Es möge z.B. das Quadrupel $(3;4;5;6)$ ein Punkt und die Zahl

$$\sqrt{3^2+4^2+5^2+6^2}$$

die Entfernung dieses Punktes vom Nullpunkt genannt werden.
Verfahren wir mit diesen Zahlen wie mit den analogen Zahlen, die wirklichen Punkten entsprechen, und sehen wir nach, welche Sätze daraus für die Funktionen von drei Veränderlichen folgen.
Man kann nachweisen, dass diese mittels einer Fiktion erhaltenen Sätze tatsächlich wahr sind; es hat sich also gelohnt, so zu tun, als ob auch eine vierte Dimension existierte.

Auf entsprechende Art lassen sich auch abstrakte Räume von 5, von 6, ..., sogar von unendlich vielen Dimensionen einführen. Das Vorbild bleibt immer unser wohlbekannter Raum, und der Zweck ist die Brauchbarkeit in der Untersuchung der Funktionen.

Diese Art der Begriffsbildung ist uns bereits nicht unbekannt: Die Punkte von mehreren Dimensionen sind ideale Elemente. Sie kommen uns aus einer imaginären Welt zu Hilfe; und wenn wir wollen, verschwinden sie wieder, Ergebnisse hinterlassend, die auch ohne ihre Hinzuziehung standhalten.

3.2 Das Gebäude wird erschüttert

Es gehört zu den Aufgaben der großen kritischen Zeiten, den Kern der fertigen Ergebnisse zu entfalten, die Bedingungen der Sätze klarzulegen, mit einem Wort, zu axiomatisieren. Ein Axiomensystem umgrenzt zugleich einen bestimmten Zweig der Mathematik:

Wir betrachten als ein zusammengehöriges Gebiet alles das, was sich aus dem System derselben Axiome ableiten lässt.
Indem wir aber den zurückgelegten Weg überblicken, bemerken wir, dass gewisse Gedanken bald hier, bald dort auftauchen; es gibt Begriffe, die auch bei der Systematisierung nicht abgegrenzt werden, die in verschiedene Zweige der Mathematik hineinspielen.

So bietet sich eine zweite Tätigkeit, nämlich die Elemente, die in verschiedenen Zweigen auftreten, abzusondern und zum Gegenstand einer selbständigen Betrachtung zu machen.
Erinnern wir uns z.B. daran, dass die Multiplikation und die Division mit rationalen Zahlen - abgesehen von dem Fall eines Divisors 0 - immer ausführbar sind und als Resultat wieder eine rationale Zahl ergeben. Daher bilden die rationalen Zahlen - wenn die 0 ausgenommen wird - gleichsam eine geschlossene Gruppe in Bezug auf die Operationen der Multiplikation und der Division.

Die ganzen Zahlen verhalten sich nicht so exklusiv gegenüber der Umwelt; denn die Division führt ja aus ihrem Kreis heraus. Darin aber stimmen die ganzen Zahlen mit den rationalen Zahlen überein, dass sie in Bezug auf die Addition und die Subtraktion eine geschlossene Gruppe bilden; - ich meine natürlich die positiven und negativen ganzen Zahlen.

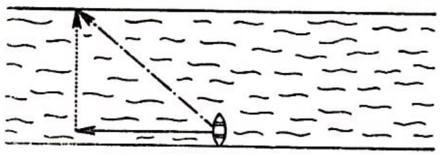
Aus dem Kreis dieser Zahlen führen ja diese Operationen tatsächlich nicht heraus, und sogar die 0 ist dabei nicht auszuschließen.

Es bedarf aber gar nicht so vieler Zahlen, um hinsichtlich gewisser Operationen eine geschlossene Gruppe zu bilden. Fasst man nur die folgenden beiden Zahlen:

$$+1, \qquad -1$$

ins Auge, wievielmal diese auch immer miteinander multipliziert und dividiert werden mögen, das Ergebnis wird immer nur eine der Zahlen $+1$ und -1 sein.

Diese Begriffsbildung beschränkt sich auch nicht nur auf rechnerische Operationen. Erinnern wir uns bloß an die Vektoren:
Diese bilden in Bezug auf ihre seltsame Addition, die wir betrachtet haben, auch eine geschlossene Gruppe; die Resultante zweier Vektoren ist ja wiederum irgendein Vektor:



Diese Operation ist aber nur noch in übertragenem Sinne eine Addition; es handelt sich hier eigentlich um die Zusammensetzung von Bewegungen und von Kräften.
Die Aufzählung der Beispiele könnte noch lange fortgesetzt werden.

Die selbständige Untersuchung des Begriffes "Gruppe", der an so vielen Stellen auftritt - die "Gruppentheorie" - hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Sie ist der Kern der modernen Algebra, und die heutige Physik verwendet sie ebenfalls. Die verschiedenen Geometrien können sogar geradezu als die Theorien je einer Gruppe aufgefasst werden.

Die Gruppen selbst sind auch "Mengen" mit gewissen Eigenschaften, und das ist jener Begriff, dem wir in den verschiedensten Gebieten der Mathematik auf Schritt und Tritt begegnen. Wenn wir über Mathematik sprechen, dann ist es fast unvermeidlich, dass wir bald über Punktmengen, bald über Zahlenmengen, bald über Mengen gewisser Funktionen etwas aussagen.

Dieser Begriff wurde von Cantor zum Gegenstand einer selbständigen Forschung gemacht; die sogenannte "Mengenlehre" ist seine Schöpfung.
Denken wir ein wenig zurück: Wir sprachen z. B. von der Menge der rationalen Zahlen, dann von der entsprechenden Punktmenge auf der Zahlengeraden, und stellten fest, dass jeder Punkt dieser Menge ein "Häufungspunkt" ist. Das ist ein sehr wichtiger Begriff in der Theorie der Punktmengen:
Ein Punkt wird ein Häufungspunkt einer Menge genannt, wenn in jede noch so enge Umgebung von ihm immer noch Punkte der Menge hineinfallen.

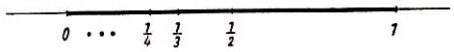
Wir sahen bereits ein Beispiel dafür, welche Methoden in der Theorie der Punktmengen verwendet werden; wir wollen noch an einem weiteren Beispiel diese Methoden beleuchten. Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

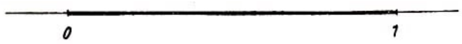
diese häufen sich dennoch nirgends; denn sie schreiten immer in ganzen Einheiten weiter. Werden aber unendlich viele Zahlen in einem endlichen Intervall zusammengedrängt, wie z.B. die Zahlen der Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

die alle in dem Intervall liegen, das sich von 0 bis 1 erstreckt,

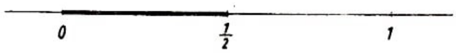


so haben sie sicher eine Häufungsstelle irgendwo im Intervall.
Man kann dies ganz allgemein so beweisen: Wir nehmen an, dass jeder Punkt einer unendlichen Menge in das Intervall zwischen 0 und 1 hineinfällt,

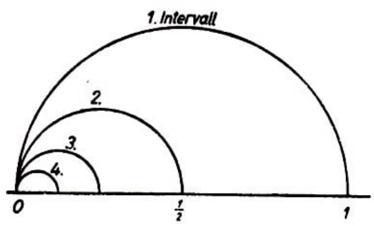


einerlei wohin. Halbieren wir nun dieses Intervall, so fallen mindestens auf eine seiner Hälften noch immer unendlich viele Punkte der Menge. Würden nämlich in beiden Hälften nur endlich viele liegen, etwa 1 Million in der einen und 10 Millionen in der anderen Hälfte, so würde die Gesamtmenge 11 Millionen Elemente enthalten; eine ansehnliche, jedoch endliche Anzahl.

In unserem Beispiel liegen in der linken Hälfte des Intervalls unendlich viele Punkte. Sehen wir uns nun statt des ursprünglichen Intervalls nur diejenige Hälfte an, in der unendlich viele Punkte der Menge liegen (oder eine beliebige Hälfte, wenn beide unendlich viele Punkte enthalten). Das nunmehr zu betrachtende Intervall sei z.B.



Für dieses lässt sich der vorige Gedankengang vollkommen wiederholen. Man kann wiederum zu einer seiner Hälften übergehen, und zwar zu einer Hälfte, die noch immer unendlich viele Punkte der Menge enthält.
Diese Halbierung lässt sich bis ins Unendliche fortsetzen. So gelangt man zu immer mehr zusammenschrumpfenden Intervallen, die ineinandergeschachtelt sind; in unserem Beispiel:



Man sieht leicht ein, dass die Längen dieser Intervalle gegen 0 konvergieren. Wir erinnern uns wieder an das Scherzpaket, das innerhalb jeder Umhüllung eine neue Hülle, und im Inneren all dieser Umhüllungen einen Papierknäuel enthält: Auch hier können wir einsehen, dass sämtlichen Intervallen nur ein einziger Punkt gemeinsam sein wird.
Dieser Punkt wird sicher ein Häufungspunkt der Menge sein; denn in jede auch noch so enge Umgebung von ihm fallen die noch mehr zusammengeschrumpften unter unseren Intervallen hinein, und diese enthalten nicht nur einen, sondern sogar unendlich viele Punkte der Menge.

Jetzt haben wir jene hohe Stufe des Wissens erreicht, von der aus wir bereits die Frage beantworten können, wie der Mathematiker einen Löwen fängt. Die Methode des Löwenfangs durch den Experimentalphysiker ist allbekannt; sie kann ja von jedem Anfänger verstanden und angewandt werden:

Der Experimentalphysiker schüttet die Sahara samt allem, was sie enthält, auf ein Sieb; was durchfällt, das ist die Sahara, was im Sieb bleibt, das ist der Löwe. Der Mathematiker dagegen verfährt methodisch folgendermaßen:
Man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Der Löwe ruht.

Wir fertigen zunächst eine Art Käfig an, der nach unten offen und größer als der Löwe ist. Dann teilen wir die Sahara in zwei gleiche Teile. Mindestens in einem von diesen wird sich der Löwe befinden (ruht er nämlich auf der Grenzlinie, so befindet er sich in beiden). Nun fassen wir eine solche Halbsahara ins Auge.
Halbieren wir auch diese, so liegt der Löwe mindestens in einer von diesen Hälften. Werden diese Halbierungen fortgesetzt, so erhält man immer enger ineinandergeschachtelte Gebiete. Über kurz oder lang wird ein Gebiet bereits kleiner ausfallen als der Grundriss des Käfigs; und in diesem Gebiet befindet sich der Löwe.
Setzen wir den Käfig über dieses kleine Gebiet, so haben wir den Löwen gefangen.

2. Fall: Der Löwe bewegt sich.

Dann ist diese Methode nicht anwendbar.
Punkt. -

Soviel über die Theorie der Punktmengen.
Wir haben bereits auch mengentheoretische Beweise kennengelernt, die nicht nur für Punktmengen gültig sind. Es lässt sich z.B. die Methode der Paarung, mit der wir festgestellt haben, dass die Mengen der rationalen und der natürlichen Zahlen von gleicher Mächtigkeit sind, die Mächtigkeit der irrationalen Zahlen dagegen größer ist als die der rationalen, auch auf beliebige andere Mengen anwenden; wir gingen ja - wenn ich mich recht erinnere - von der Menge tanzender Damen und Herren auf diese weniger fröhlichen Mengen über.

Was man über die Mächtigkeiten von Mengen aussagt, das kann gleicherweise für die Menge tanzender Paare, der reellen Zahlen oder etwa der in deutscher Sprache formulierbaren Sätze gültig sein. Cantor hat so die Mengen allgemein behandelt.

Er bewies eine Fülle schöner Sätze über die Mächtigkeiten der unendlichen Mengen, über diese Erweiterung des endlichen Anzahlbegriffs ins Unendliche. Er zeigte z. B., dass es nicht nur zwei verschiedene Mächtigkeiten gibt: die der natürlichen und die der reellen Zahlen; es gibt keine Menge von so großer Mächtigkeit, dass es nicht eine Menge von noch größerer Mächtigkeit gäbe.

Der ungarische Dichter Babits hat diese sich immer höher türmenden Mächtigkeiten "die getürmten Gebäude des Unendlichen" genannt.
Und Cantor führte nach dem Vorbild der Operationen an unseren kleinen Zahlen auch Rechnungsarten mit diesen ein: Addition, Multiplikation. Das ist das echte große Spiel: das Spiel mit dem Unendlichen. Es schien, als ob der menschliche Geist nicht mehr höher steigen könnte.

Und da wurde das ganze Gebäude erschüttert.

In der Mathematik, in dieser fast bis zur Langweiligkeit für sicher gehaltenen Wissenschaft, tauchten am Ende des vorigen Jahrhunderts Widersprüche auf. Gerade dort, wo sie am höchsten gestiegen war, in der Mengenlehre, kam ihr wunder Punkt an den Tag. Von den vielen Widersprüchen möchte ich einen der ernstesten wiedergeben, die sogenannte Antinomie von Russell; erst in einer scherzhaften Formulierung, wie sie auch allgemein bekannt ist.

Man kann den Barbier einer Armee folgendermaßen definieren:
Er ist dasjenige Mitglied der Armee, das verpflichtet ist, in seiner Truppe alle diejenigen zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren; es ist ihm aber - um Zeit zu ersparen - verboten, auch solche zu rasieren, die sich selbst rasieren. Die Frage ist nun, ob sich dieser Soldat zu rasieren hat oder nicht.

Wenn ja, so ist er einer von denen, die sich selbst rasieren, doch ist ihm ja verboten, einen solchen zu rasieren.
Wenn nicht, so gehört er zu jenen, die sich nicht selbst rasieren, und diese ist er verpflichtet zu rasieren.
Er weiß nicht aus noch ein.

In einem solchen Scherz ist natürlich bereits die Formulierung ungenau. Betrachten wir das ernstere Beispiel.
Eine Menge ist gewöhnlich kein Element von sich selbst; z. B. sind die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen nicht Mengen, sondern Zahlen; so kann sie selbst, da sie doch eine Menge ist, nicht zu ihren eigenen Elementen gehören.

Es kann aber vorkommen, dass zu den Elementen einer Menge auch Mengen gehören. Stellen wir uns z.B. alle möglichen Zahlenmengen vor und betrachten wir deren Gesamtheit als eine einzige Menge. Ein Element der so erhaltenen Mengen ist z. B. die Menge der natürlichen Zahlen, ein anderes Element ist die Menge der Zahlen unter 10, usw.; jedes Element ist je eine Menge.
Sie selbst gehört trotzdem nicht zu ihren Elementen, da ihre Elemente solche Mengen sind, die aus lauter Zahlen bestehen, sie selbst aber eine solche, die aus lauter Mengen besteht.

Werden nun aber alle erdenklichen Mengen zu einer einzigen Menge vereinigt, so haben wir bereits ein Beispiel für eine solche Menge, die auch selbst zu ihren Elementen gehört. Sie ist ja selbst eine Menge, und eine jede Menge muss unter ihren Elementen vorkommen.

Wer das Gefühl hat, dass dies durchzudenken bereits ermüdend ist, der mag es unterlassen; für das Weitere haben wir es nicht nötig. Es genügt, den folgenden Standpunkt einzunehmen: Bei einer anständigen Menge kann diese seltsame Eigenschaft nicht auftreten.
Nennen wir also eine Menge "anständig", wenn sie selbst nicht unter ihren Elementen auftritt, und kümmern wir uns nicht darum, ob es auf der Welt auch andere Mengen gibt. Stellen wir uns vor, dass wir sämtliche "anständigen" Mengen zu einer einzigen großen Menge vereinigen.

Wird aber nun die so erhaltene Menge "anständig" sein?
Ist sie "anständig", so gehört auch sie selbst, wie eine jede "anständige" Menge, zu ihren Elementen. Halt, das ist doch kein anständiges Benehmen!
Ist sie nicht "anständig", so kann sie unter ihren Elementen nicht Platz nehmen - diese sind ja alle "anständige" Mengen.

Aber das ist doch gerade, was wir anständig genannt haben!
Also, wenn sie anständig ist, so ist sie unanständig, wenn sie unanständig ist, so ist sie anständig; wir sind auf jede Weise in einen Widerspruch geraten.
Und da hilft nichts.

Auch kann man nicht den Standpunkt einnehmen: Die Mengenlehre hat sich voreilig emporgeschwungen; lassen wir das Ganze fallen und kehren wir zurück zu den bescheideneren, jedoch sichereren Gebieten der Mathematik.
Wir wissen ja, wovon die Mengenlehre abstrahiert wurde: Ihre Gedanken schleichen in allen Zweigen der Mathematik umher.
Ist die Mengenlehre fehlerhaft, so können wir bereits nichts mehr als unverwundbar betrachten.

Bis heute haben sich die Wellen der Erschütterung nicht gelegt.
Die Mathematiker nehmen ihr gegenüber einen Standpunkt ein, wie allgemein die Menschen im Falle einer anhaltenden Gefahr. Die meisten wollen gar nicht daran denken; ein jeder treibt sein Gewerbe wie zuvor, und sie protestieren gereizt, wenn die Gefahr manchmal doch zur Sprache gebracht wird.
Einige aber versuchen, die Lage zu retten.

Natürlich suchte man den Fehler erst in der Russellschen Antinomie selbst. Russell selbst war der Meinung, die Definition der darin auftretenden Menge sei fehlerhaft, sie enthalte einen "circulus vitiosus"; denn die zu definierende Menge selbst spiele auch hinein.
Sämtliche "anständigen" Mengen könnten nur dann zu einer einzigen Menge vereinigt werden, wenn von der Menge, die so entsteht, bereits entschieden wäre, ob sie anständig und daher unter die Elemente aufzunehmen ist.

Doch leider benutzt jeder Zweig der Mathematik auf Schritt und Tritt diesen circulus vitiosus; bereits im Bereich der natürlichen Zahlen ist es Brauch, auf folgende Art zu definieren: "Fassen wir die kleinste Zahl ins Auge, die so und so beschaffen ist."
Diese Zahl spielt auch in die eigene Definition hinein: Die kleinste kann nur aus allen so beschaffenen Zahlen ausgewählt werden; unter allen diesen befindet sie sich aber auch.

Am radikalsten ist der Rettungsversuch der Intuitionisten. (Die Bezeichnung "Intuitionismus" ist hier nicht eben glücklich; forschen wir nicht nach ihrem Sinn.) Diese Tendenz ist älter als die Antinomien, doch die Antinomien gaben ihr einen neuen Schwung.

Der neue Intuitionismus knüpft sich an den Namen von Brouwer. Er verwirft die ganze bisherige Mathematik und versucht, diese auf neuen, sichereren Grundlagen aufzubauen. Er nimmt nur das an, was sich auf irgendeine Weise konstruieren lässt; was einmal konstruiert wurde, das ist ja unleugbar da, das kann durch Antinomien nie mehr rückgängig gemacht werden.

Er verwirft die "reinen Existenzbeweise", z. B. den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, denn dieser ermöglicht nicht die Konstruktion der Wurzeln einer Gleichung. Von einem "aktualen Unendlichen" will er nichts wissen, man kann ja immer nur endlich viele Elemente einer Menge konstruieren, wenn der Bildungsprozess auch unbegrenzt fortgesetzt werden kann.
Nach ihm wäre also die unendliche Menge bloß "potentiell unendlich": Sie wäre stets im Stadium des Werdens und könnte nie als fertig und abgeschlossen betrachtet werden.

Von der klassischen Mathematik bleiben auf diese Weise nur Trümmer übrig, und was erhalten bleibt, das wird bei der Durchführung der effektiven Konstruktion in jedem Spezialfall fast unüberblickbar verwickelt.

Als eine echte Rettungsaktion kann nur die Hilbertsche betrachtet werden. Deren Bedeutung ist über die bloße Gefahrenabwehr hinausgewachsen: Es entstand daraus ein neuer, fruchtbarer Zweig der Mathematik. Im folgenden wird davon die Rede sein.

3.3 Die Form löst sich los

Man darf nicht glauben, dass die Mengenlehre auch heute noch die Last der Antinomien mit sich schleppt. Als es an der Zeit war (sehr dringend wurde dies eben durch die Widersprüche), die ursprüngliche "naive" Mengenlehre zu ordnen und ein Axiomensystem der Mengenlehre aufzustellen, haben die Mathematiker darauf geachtet, dass der Mengenbegriff in den Grundbedingungen eng genug umgrenzt wurde, so dass alles, was in der Mengenlehre von Wert ist, innen blieb, die Unheil stiftenden Mengen dagegen ausgeschlossen wurden.

Dies scheint aber eine ziemlich gekünstelte Maßregel zu sein; um mit Poincare zu reden: Wir zogen einen Zaun um die Herde herum, um sie vor den Wölfen zu behüten, man kann aber nicht wissen, ob sich nicht einige Wölfe auch innerhalb des Zaunes verkrochen haben. Gegen das Auftauchen neuer Widersprüche sind wir durchaus nicht gesichert.

Hilbert, einer der größten Mathematiker der letzten Zeit, setzte sich in den letzten 20

Jahren seines Lebens zum Ziele, in alle Schlupfwinkel, die innerhalb des Zaunes der Axiome liegen, hineinzuleuchten.
Er gibt zu, dass die Bedenken gegenüber den "zirkelhaften" Definitionen, den "reinen Existenzbeweisen" und dem "aktualen Unendlichen" berechtigt sind; in allen diesen kann Gefahr verborgen sein.

Warum arbeiten wir aber mit so gefährlichen "transfiniten" Begriffen, die unseren endlichen Verstand übersteigen?
Wir haben guten Grund dazu, und ohne einen zwingenden Grund werden wir auf sie auch nicht verzichten; denn sie ermöglichen den Ausbau der großen umfassenden Theorien, das Beleuchten von Zusammenhängen fernliegender Gebiete. Das wird durch die zerkleinerte, in Teilstücke zerfallende Mathematik der Intuitionisten gut erhellt. Wir wollen die gefährlichen Begriffe nicht fallen lassen, denn diese löten die Mathematik zu einem einzigen mächtigen Gebäude zusammen.

Die transfiniten Mittel spielen in unserer Logik eine ähnliche Rolle, wie die unendlich ferne Gerade, oder das i innerhalb der Mathematik: Sie können als die "idealen Elemente" der Logik betrachtet werden. Und man hat sie auch so zu behandeln wie die idealen Elemente:
Man hat sie einzuführen, wenn sie sich als nützlich erweisen (und wie nützlich sie sich erwiesen haben!), aber dann gründlich zu untersuchen, ob sie mit unseren alten Regeln nicht in Widerspruch geraten können.
Demnach ist die Aufgabe, die uns auf diesem Gebiet noch bevorsteht: die Untersuchung der Widerspruchsfreiheit der transfiniten Methoden.

Diesem Ziel gemäß ging Hilbert darauf aus, die in der Mathematik angewandte Logik selbst, - die Schlussfolgerungen und Beweise -, zum Gegenstand einer exakten mathematischen Untersuchung zu machen. Die erste Bedingung hierfür besteht darin, dass die Beweisführungen von allen Zufälligkeiten gereinigt werden, die in der ungenauen sprachlichen Ausdrucksweise an ihnen haften, dass die unmissverständliche reine Form aus ihnen herausgeschält wird.

Die Zahlen konnten auch nur so zum Gegenstand einer genauen Untersuchung werden, dass nicht mehr von 5 Fingern, von 5 Äpfeln, von 5 Sätzen die Rede war, sondern von jener reinen Form, die all diesen Gegenständlichkeiten gemeinsam ist: dies wurde ihre Anzahl genannt und mit dem Zeichen 5 bezeichnet.
Wollen wir die Aussagen in den Kreis der Untersuchungen ziehen, so müssen wir auch von ihrem Inhalt absehen; an solchen Aussagen: "$2 \cdot 2 = 4$", "man kann durch zwei Punkte stets eine Gerade ziehen", "der Schnee ist weiß" - interessiert uns hier nur das, was sie alle gemeinsam haben: Dass sie wahr sind. Auch dafür kann man ein neues Zeichen einführen, z. B.:

$$\uparrow$$

Der gemeinsame logische Wert der Aussagen: "$2 \cdot 2 = 5$", "zwei Geraden schneiden einander in zwei Punkten", "der Schnee ist schwarz" - besteht darin, dass sie alle falsch sind; das Zeichen dafür kann

$$\downarrow$$

sein (wie im Zirkus der alten Römer der aufwärts und der abwärts gewendete Daumen: die ersteren Aussagen werden freigesprochen, die letzteren dagegen nicht).

In der Mathematik interessieren uns nur solche Aussagen, die einen der beiden logischen Werte annehmen (mit einem Wort: die wahr oder falsch sind).

Hier ist also ein Rechnen im Entstehen, das sogar einfacher als das mit den natürlichen Zahlen ausfallen wird: Auch natürliche Zahlen gibt es unendlich viele, hier aber treten insgesamt nur zwei Werte auf. Es wird hier sehr leicht sein, das Einmaleins der Rechnungsarten aufzuschreiben.
Denn es handelt sich wirklich um ein Rechnen, es werden auch logische Rechnungsarten auftreten, nämlich solche Verknüpfungen der einzelnen Aussagen, deren wir uns in der Mathematik auf Schritt und Tritt bedienen.

Welche Verknüpfungen hierher gehören, das kann ein jeder Mathematiker auf sehr einfache Weise entscheiden, wenn er nur nicht sämtliche Kultursprachen der Welt spricht. Er hat nichts anderes zu tun, als ein mathematisches Buch vorzunehmen, das in einer fremden Sprache geschrieben wurde, und zu beobachten, welche Worte er beim Lesen aus dem Wörterbuch herauszusuchen gezwungen ist.
Er wird überrascht wahrnehmen, dass er dann, wenn er die Ausdrücke:

"nicht", "und", "oder", "wenn - dann", "dann und nur dann", "alle", "es gibt", "derjenige, welcher"

bereits gut eingeübt hat, nach einiger Zeit schon gar nicht mehr merkt, dass er ein Buch in fremder Sprache liest, da er alles fließend versteht. Die Formeln sind ja international, der Text gibt nur den Nachdruck, er ist nicht unbedingt erforderlich, und die unentbehrlichen logischen Verknüpfungen sind alle in den aufgezählten wenigen Wörtchen enthalten.

Wie lautet z. B. das Einmaleins des Wörtchens "nicht"?
Das ist sehr einfach: Die Verneinung einer wahren Aussage (z.B. "$2+2$ ist nicht gleich 4") ist natürlich falsch, die Verneinung einer falschen Aussage (z. B. "$2 \cdot 2$ ist nicht gleich 5) ist wahr, so besteht das ganze Einmaleins aus

$$\text{nicht } \uparrow = \downarrow \quad , \quad \text{nicht } \downarrow = \uparrow$$

Man kann das Wörtchen "nicht" mit einem - ebenfalls abwärts gewendeten - Haken $\neg$ abkürzen. Danach ist z. B.

$$\neg(2 \cdot 2 = 5)$$

die Verneinung der Aussage: $2 \cdot 2 = 5$. Mit dieser Bezeichnung wird das Einmaleins von "nicht" zu

$$\neg \uparrow = \downarrow \quad , \quad \neg \downarrow = \uparrow$$

Man stellt auch das Einmaleins jener logischen Operation, die dem "und" entspricht, leicht auf. Werden zwei wahre Aussagen mit "und" verknüpft, so erhält man wieder eine wahre Aussage; z. B. ist "$2 \cdot 2 = 4$, und man kann durch zwei Punkte eine einzige Gerade ziehen" ebenfalls wahr. Folglich ist

$$\uparrow \text{ und } \uparrow = \uparrow$$

Ist aber auch nur eine der beiden verknüpften Aussagen falsch, so verdirbt das bereits alles: "$2 \cdot 2 = 4$ und $2 \cdot 3 = 7$" ist eine falsche Aussage. Es nützt nichts, dass auch eine wahre Teilaussage darin enthalten ist.
Die Verknüpfung zweier falscher Aussagen mit "und" ist natürlich um so mehr falsch. Das Einmaleins von "und" setzt sich also folgendermaßen fort:

$$\uparrow \text{ und } \downarrow = \downarrow; \qquad \downarrow \text{ und } \uparrow = \downarrow; \qquad \downarrow \text{ und } \downarrow = \downarrow$$

Hiermit haben wir sämtliche Möglichkeiten erschöpft; das ist ein schönes, endliches Einmaleins, viel leichter als das der Multiplikation!

Und das Einmaleins von "oder"?
Wir haben erst klarzustellen, welches "oder" gemeint wird; denn die sprachliche Ausdrucksweise ist hier bereits vieldeutig.

"und du möchtest wie ich
den Stürmen Gottes
trotzen oder zerbrechen!"(Dehmel)

- das eine möchtest du bestimmt, doch nicht beides zugleich: das eine schließt das andere aus.

"Wird die Sahara halbiert, so liegt der Löwe in der einen oder in der anderen Hälfte"- in irgendeiner Hälfte sicher; es ist aber auch möglich, dass er in beiden Hälften liegt (wenn er sich auf der Grenzlinie befindet).

"Entweder spricht man, oder man isst" - diese beiden schließen einander aus, doch keines von beiden braucht unbedingt zuzutreffen: Man kann mit dem Mund auch etwas anderes tun; es kann ja sein, dass man ihn gar nicht öffnet.

In der Mathematik ist das Wörtchen "oder" meistens im zweiten Sinne gebräuchlich, d. h., die mit einem "oder" verknüpften Aussagen werden hier dann als wahr betrachtet, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist, wobei auch zugelassen wird, dass beide wahr sind; man schließt also nur den Fall aus, dass keine von beiden zutrifft. Demnach ist das Einmaleins der Operation "oder":

$$\uparrow \text{ oder } \uparrow = \uparrow, \qquad \uparrow \text{ oder } \downarrow = \uparrow, \qquad \downarrow \text{ oder } \uparrow = \uparrow, \qquad \downarrow \text{ oder } \downarrow = \downarrow$$

Ist das Einmaleins schon da, so kann dies als die Definition der logischen Operation "oder" betrachtet werden, und so ist diese von den sprachlichen Zufälligkeiten bereits gereinigt; diese Verknüpfung kann bereits nur auf einerlei Art verstanden werden.

Ein "oder" in einem anderen Sinn lässt sich dann mit der Benutzung von unserem "oder" ebenfalls exakt formulieren.
Es ist klar, dass es auch hier "Rechenregeln" gibt, z.B. ist die Reihenfolge der beiden Aussagen sowohl in der Operation "und" als auch in der Operation "oder" vertauschbar, ebenso wie die Faktoren in der Multiplikation.

Ich möchte diesen Gegenstand nicht ganz erschöpfen, obwohl man die wenigen Möglichkeiten, die aus den beiden logischen Werten entspringen, ziemlich bald erschöpfen könnte.

Ich gebe lieber ein Beispiel dafür, wie hier ein "Rechnen" getrieben werden kann. Wir wissen z. B., dass sich die Potenzen der gleichen Basis so miteinander multiplizieren lassen, dass man die Exponenten addiert; in diesem Fall lässt sich also die Multiplikation auf eine Addition zurückführen. Ob nun nicht ein ähnlicher Zusammenhang auch zwischen den logischen Operationen besteht?

Nehmen wir ein Beispiel aus dem Kreis der so sehr beliebten Detektivromane. Versuchen wir, aus dem folgenden Sachverhalt zu erraten, wer der Täter war:

Ein Mordprozess hat zwei Verdächtigte: Peter und Paul. Es werden vier Zeugen vernommen. Der erste macht die Aussage:
"Ich weiß nur so viel, dass Peter unschuldig ist."
Der zweite: "Ich weiß nur: Paul muss unschuldig sein."
Der dritte: "Ich weiß, dass mindestens eine der beiden ersten Aussagen wahr ist."
Der vierte: "Ich kann in voller Gewissheit behaupten, dass der dritte Zeuge eine falsche Aussage gemacht hat."
Die Tatsachen rechtfertigen den vierten Zeugen. Nun, wer war denn der Täter?

Bauen wir es nur schön ab, allmählich zurückgehend: Die vierte Aussage erwies sich als wahr, folglich machte der dritte Zeuge tatsächlich eine falsche Aussage. Es ist also nicht wahr, dass mindestens eine der ersten beiden Aussagen wahr ist.
Demnach kann keine der beiden Aussagen wahr sein, weder die, dass Peter, noch auch die, dass Paul unschuldig sei. Beide sind also Mörder: Sie waren Mittäter.

Nun schälen wir den logischen Kern des Gedankenganges heraus.
Ich kenne die Aussagen umsonst, ihr logischer Wert muss als unbekannt betrachtet werden; denn ich weiß ja nicht, ob sie wahr sind. Bezeichnen wir die logischen Werte der Aussagen der beiden ersten Zeugen mit x und y.
Der dritte Zeuge machte die Aussage, dass mindestens eine von diesen wahr sei, d. h., - unsere Operation "oder" drückt ja gerade dieses "mindestens" aus - dass x oder y eine wahre Aussage sei.

Dies wurde vom vierten Zeugen verneint, und das Zeichen der Verneinung ist: $\neg$, folglich ist nach seiner Behauptung die Wahrheit:

$$\neg(x \text{ oder } y)$$

Als wir es durchdachten, stellte sich heraus, dass dieses gleichbedeutend damit ist, dass gerade das Gegenteil der ersten und der zweiten Aussage wahr ist; d.h., die Wahrheit ist:

$$\neg x \text{ und } \neg y$$

Der logische Inhalt des Gedankenganges besteht also darin, dass, gleichgültig ob x, ob y wahr ist, oder nicht, die Aussage

$$\neg(x \text{ oder } y)$$

stets mit der Aussage

$$\neg x \text{ und } \neg y$$

gleichbedeutend ist, und so kann man von einer "oder"-Verknüpfung zu einer "und"-Verknüpfung übergehen und umgekehrt.

Allgemein führt der Weg natürlich nicht über einen Spaß zu solchen Zusammenhängen. Die Richtigkeit von diesen kann ganz mechanisch kontrolliert werden, indem man an die Stelle von x und y die möglichen Werte $\uparrow$ bzw. $\downarrow$ einsetzt und nachsieht, ob die beiden obigen Aussagen immer dasselbe Resultat ergeben.
Es sind insgesamt vier Möglichkeiten derart auszuprobieren: Es ist möglich, dass

1. der Wert sowohl von x als auch von y $\uparrow$ ist,
2. der Wert von x $\uparrow$, aber der Wert von y $\downarrow$ ist,
3. der Wert von x $\downarrow$, dafür der Wert von y $\uparrow$ ist,
4. der Wert sowohl von x als auch von y $\downarrow$ ist.

Machen wir den Versuch mit der ersten Möglichkeit. Was wird aus der Aussage

$$\neg(x \text{ oder } y)$$

wenn sowohl x als auch y $\uparrow$ ist? Nach dem Einmaleins von "oder" ist (man braucht darüber nicht nachzudenken, bitte nachsehen)

$$\uparrow \text{ oder } \uparrow = \uparrow$$

also ist in diesem Falle x oder $y = \uparrow$;
wir haben somit mit der Aussage $\neg\uparrow$ zu tun. Diese macht aber nach dem Einmaleins von "nicht"

$$\downarrow$$

aus. Was wird nun der Wert der Aussage

$$\neg x \text{ und } \neg y$$

sein, wenn sowohl x als auch y $\uparrow$ ist? Dann ist

$$\neg x = \neg\uparrow = \downarrow \qquad \text{und} \qquad \neg y = \neg\uparrow = \downarrow$$

folglich haben wir es mit der Aussage $\downarrow$ und $\downarrow$ zu tun, und diese hat nach dem Einmaleins von "und" ebenfalls den Wert

$$\downarrow$$

Ebenso zeigt man in den drei übrigen Fällen, dass die beiden betrachteten Aussagen gleichwertig sind.

Hier kann man auch Algebra treiben, indem man sich eine Aussage denkt, daran allerhand logische Operationen ausübt, zum Schluss sagt, ob man zu einer wahren Operation gelangt oder zu einer falschen, und wünscht, es soll daraus erraten werden, ob die gedachte Aussage wahr oder falsch war. Besonders hat hier das Spiel von folgender Art eine große Bedeutung:

"Denke dir eine Aussage, verknüpfe diese mit ihrer eigenen Verneinung durch "oder";

jetzt hast du gar nichts zu verraten, und ich sage doch: Du bist auf jeden Fall zu einem wahren Wert gelangt".

Man kann dies folgendermaßen notieren: Die gedachte Aussage ist x, ihre Verneinung $\neg x$, die Verknüpfung der beiden durch "oder"

$$x \text{ oder } \neg x$$

und von dieser wird behauptet, dass ihr Wert auf jeden Fall $\uparrow$ sei, ganz gleich, ob $\uparrow$ oder ob $\downarrow$ der Wert von x war. Probieren wir es aus:

Hat x den Wert $\uparrow$, so ist nach dem Einmaleins von "nicht" $\neg x = \neg x = \downarrow$, folglich haben wir mit der Aussage $\uparrow$ oder $\downarrow$ zu tun. Bitte im Einmaleins von "oder" nachsehen, dass der Wert hiervon tatsächlich $\uparrow$ ist.

Hat x dagegen den Wert $\downarrow$, so ist nach dem Einmaleins von "nicht" $\neg x = \neg \downarrow = \uparrow$, es handelt sich also um die Aussage $\downarrow$ oder $\uparrow$, und das Einmaleins von "oder" sagt uns, dass dieses ebenfalls $\uparrow$ ausmacht.

Es gibt also Verknüpfungen von Aussagen, die immer wahr sind, ganz unabhängig von den Aussagen, die darin auftreten - und zwar nicht nur von ihrem Inhalt, sondern auch von ihrem logischen Wert unabhängig. Diese sind allein durch ihre logische Struktur wahr; sie werden logische Identitäten genannt. Und eben diese Aussagen spielen in der Mathematik eine entscheidende Rolle.

Wir können auch so weiterspielen, dass nicht die ganze Aussage unbekannt ist, sondern nur ihr Subjekt nicht verraten wird. Z. B.: "Ich dachte mir eine Zahl und behaupte, dass sie gerade ist. Jetzt übe ich an dieser Aussage allerhand Operationen aus".
Die Aussage lässt sich so notieren:

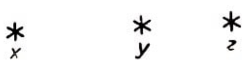
"x ist gerade"

Ob eine solche Aussage wahr oder falsch ist, hängt natürlich davon ab, wieviel x beträgt. Ist z.B. $x = 4$, so ist die Aussage wahr, ist $x = 7$, so ist sie falsch. Hier haben wir also mit einer Aussage zu tun, deren Wert eine Funktion von x ist; und so sind wir zur Funktionentheorie der Logik gelangt.

Wir können sofort auch eine logische Funktion von mehreren Veränderlichen fabrizieren: "Ich dachte mir drei Punkte, und behaupte, dass diese auf einer Geraden liegen." Diese Aussage lässt sich so notieren:

"x, y, z liegen auf einer Geraden."

und ihr Wert hängt von der Wahl der Punkte x, y und z ab. Wählt man drei Punkte in der folgenden Lage



so ist es wahr; wenn dagegen die Lage der Punkte diese ist,

so ist es falsch. Hier muss uns auffallen, dass die Unbekannten nicht beliebig gewählt werden können: In unserem ersten Beispiel hatte man x aus den natürlichen Zahlen zu wählen, im zweiten sind x, y und z aus den Punkten der Ebene herauszusuchen.
Dies war aber schon im Bereich unserer mathematischen Funktionen der Fall: Auch dort hatte man zu sagen, aus welcher Menge die Unbekannten zu wählen sind. Diese Menge wird hier der "Individuenbereich" der betreffenden Funktion genannt.

Und nun kommen die gefährlichen Operationen herein: Diese werden gerade auf die logischen Funktionen angewandt. Eine solche ist z.B. das Wörtchen "alle". Wird es auf unsere erste logische Funktion angewandt, so erhält man:

"Für alle x ist x gerade"

(natürlich ist gemeint: für jedes x, das aus den natürlichen Zahlen entnommen wird); dies ist jedenfalls eine Aussage, wenn sie auch falsch ist: Man kann ja sofort ein Gegenbeispiel dafür angeben; z. B. ist 5 nicht gerade.
Folglich:

"Für alle x ist x gerade"$=\downarrow$.

Wird dagegen das Wörtchen "es gibt" auf unsere Funktion angewandt, so ist die entstehende Aussage

"Es gibt ein x, für welches x gerade ist"

eine wahre Aussage, d.h.

"Es gibt ein x, für welches x gerade ist"$=\uparrow$

Wir sehen also, dass sowohl das Wörtchen "alle" als auch das Wörtchen "es gibt" solche logischen Operationen bedeuten, die sich auf logische Funktionen anwenden lassen und zum Resultat eine Aussage von ganz bestimmtem Wert ergeben.

In unserem Beispiel ist der Wert der Aussage, die mit "alle" beginnt, $\downarrow$, und zwar ganz eindeutig (von x nicht mehr abhängig), und der Wert der mit "es gibt" beginnenden Aussage ist ganz eindeutig $\uparrow$.

Diese neuen Operationen bringen aber bereits das transfinite Element in die Logik hinein.
"Für alle Elemente des Individuenbereichs trifft etwas zu", - ist der Individuenbereich unendlich, z.B. die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der Punkte der Ebene, so wird hier dem Unendlichen: gegenüber ein Ton angeschlagen, als wäre dieses fertig und abgeschlossen in unseren Händen.
"Es gibt ein solches x in einem unendlichen Individuenbereich" - als ob man diesen unendlichen Bereich durchwandern könnte, um in ihm ein solches x zu suchen.

Auf die erstgenannte Art werden Sätze über das "aktuale Unendliche" ausgesprochen, auf die letztere Art fällt man "reine Existenzaussagen": "Es gibt"-Behauptungen, ohne das betreffende Individuum angeben zu können.
So kommen in die Logik die idealen Elemente hinein, die nur nach dem Beweis der Widerspruchsfreiheit das Bürgerrecht erlangen können.

Die Aussagen der logischen Funktionentheorie lassen sich natürlich ebenso exakt formulieren wie beispielsweise die Identität

$$x \text{ oder } \neg x$$

Damit an den rein logischen Aussagen nicht einmal der Schatten der sprachlichen Zweideutigkeit mehr haften kann, ist es besser, auch statt der bisher benutzten Worte Zeichen einzuführen, wie wir dies für das Wörtchen "nicht" schon getan haben.

So entstanden die Werke über symbolische Logik, die nunmehr wirklich international zu lesen sind: Lange Seiten hindurch ist in ihnen kein einziges Wort zu sehen, bloß Folgen von Zeichen. Und der Fachmann entnimmt aus diesen den Text in gleicher Weise wie der Musiker die Melodie, wenn er Noten liest.

Bereits Leibniz hat den Ausbau einer reinen und unzweideutigen Formelsprache begonnen; diese wurde von vielen weiterentwickelt, bis sie endlich von Hilbert und seinem Mitarbeiter Bernays zu dem heutigen geschmeidigen und feinen Instrument geschliffen wurde, das den Schlussweisen der Mathematik eine so exakte Form zu geben vermag, dass diese bereits zum Gegenstand einer mathematischen Untersuchung gemacht werden können.

3.4 Vor dem Tribunal der Über-Mathematik

Nun ist es an der Zeit, einen gut umgrenzten Zweig der Mathematik vorzunehmen und zu untersuchen, ob sich darin Widersprüche befinden können.

Wie die Umgrenzung geschieht, das wissen wir bereits: Man hat die Grundbedingungen der einschlägigen Sätze - die Axiome - herauszuschälen, und dann kann man sagen, dass der ganze Wissenszweig aus dem besteht, was sich aus diesen Axiomen ableiten lässt.
Die Axiome können in der Sprache der symbolischen Logik aufgeschrieben werden, sie bestehen dann - ohne ein einziges missverständliches Wort - aus dem Nacheinander einiger mathematischer und logischer Zeichen.

Es ist noch zu untersuchen, was es zu bedeuten hat, dass irgend etwas aus den Axiomen "ableitbar" ist; d..h., wir haben noch die Schritte der Schlussfolgerung exakt zu formulieren.

Wenn wir aus der Richtigkeit einer Aussage auf die Richtigkeit einer anderen Aussage schließen und diese Folgerung in unserer symbolischen Schreibweise notieren, gehen wir einfach von einer Aufeinanderfolge gewisser Zeichen zu einer anderen Zeichenfolge über. Erinnern wir uns an die Lösung einer Gleichung; diese besteht auch aus solchen

Schritten. Es ist z. B. zweckmäßig, von der Zeichenfolge

$$\frac{5x}{2} + 3 = 18 \qquad \text{zu der Zeichenfolge} \qquad \frac{5x}{2} = 15$$

überzugehen. Dies hatten wir uns zuerst inhaltlich überlegt, indem wir sagten: Wird aus irgend etwas 18, wenn 3 dazugezählt wird, so muss dieses Etwas 15 sein.
Später aber haben wir uns vergegenwärtigt, dass sich die beiden Zeichenfolgen formal nur darin unterscheiden, dass auf der linken Seite der ersten Zeichenfolge noch ein Glied 3 steht, welches in der zweiten Zeichenfolge fehlt, während die rechte Zahl in der zweiten Zeichenfolge um 3 kleiner ist als in der ersten.

Wir konnten daraus die rein formale Regel entnehmen, dass es erlaubt ist, einen Summanden von der einen Seite einer Gleichung als Subtrahenden auf die andere Seite zu bringen. In der Folgezeit haben wir diese Regel ohne jede inhaltliche Überprüfung angewandt. So wurde die inhaltlich begründete Schlussfolgerung zu einer mechanischen "Spielregel":

Es ist erlaubt, gewisse Zeichen so und so verändert von hier nach dort zu bringen. Hier haben wir eine Regel von der Art wie die beim Schachspiel: Es ist erlaubt, mit dem König in alle Richtungen einen Schritt zu tun.

Das ist es also, was wir auch allgemein tun können, wenn wir aus unseren Axiomen weiterschließen: Wir sehen nach, welche formale Änderung in unseren Zeichenfolgen dem betreffenden Schluss entspricht, und wenden fernerhin diese formale Änderung ohne jegliche inhaltliche Überlegung an.

Nun dürfen wir auch vollkommen vergessen, worum es sich in dem betreffenden Wissenszweig handelt, und dürfen sagen: Wir verfügen über einige ungedeutete Zeichenfolgen (diese werden Axiome genannt) und über einige Spielregeln, die besagen, zu welchen anderen Zeichenfolgen man von einer gegebenen Zeichenfolge aus übergehen darf (diese werden Schlussregeln genannt).
Auf diese Weise wird das System der Sätze und der Beweise in den Händen des Mathematikers zu einem ebenso geschmeidigen und fügsamen Stoff wie die Zahlen selbst: Er kann an ihm die bewährten Verfahrensweisen der Mathematik erproben.

Diese Verfahrensweisen dürfen aber nun nicht mechanisch nach Spielregeln angewandt werden. Man hat bei jedem Schritt gut zu bedenken, ob er wohl eine unbestreitbar zulässige Folgerung ist, ob sich nicht gefährliche Elemente eingeschlichen haben. Nicht einen Augenblick darf man das Ziel aus dem Auge verlieren:
Man will die Berechtigung der Benutzung transfiniter Elemente in dem betrachteten Wissenszweig erweisen; ein solcher Nachweis besäße aber gar keine Glaubwürdigkeit, wenn er mit ebenso gefährlichen Elementen geführt würde. Man muss hier die Mittel so rein halten, dass selbst der bedenklichste Intuitionist daran nichts auszusetzen hat.

So spaltet sich die Mathematik: einerseits in vollkommen formale Systeme mit formalen Spielregeln anstatt der Schlussfolgerungen, andererseits in eine Über-Mathematik, die den Inhalt eines jeden ihrer Schritte bedenkt und nur ganz harmlose Schlüsse anwendet, in die sogenannte "Metamathematik", welche die formalen Systeme gleichsam von außen her untersucht und deren Hauptzweck der Beweis der Widerspruchsfreiheit der betrachteten Wissenszweige ist.

Wenn wir aber danach forschen, ob wir an Hand unserer Spielregeln nicht zu einem Widerspruch gelangen können, müssen wir dann nicht dennoch auch den Inhalt der Aussagen des Systems untersuchen? Man könnte ja glauben, dass es nicht zur Form, sondern zum Inhalt eines Satzes gehört, dass er einen Widerspruch enthält.

Dieser Besorgnis ist durch die Bemerkung abzuhelfen, dass es genügt, wenn man sich auf einen einzigen Widerspruch beschränkt, z.B. - sofern die natürlichen Zahlen zum System gehören - auf den folgenden:

$$1 = 2$$

Diese einfache Zeichenfolge kann rein durch ihre Struktur gekennzeichnet werden: Wir nehmen zur Kenntnis, dass das Nacheinander eines 1ers, eines Zeichens "=" und eines 2ers einen Widerspruch bedeutet. Mehr brauchen wir dann nicht.
Einmal war schon die Rede davon, dass es Scherzableitungen gibt, die einen Beweis für $1 = 2$ liefern, und ich habe bereits dort erwähnt; dass sich aus einer einzigen widerspruchsvollen Aussage, die in die Schlussfolgerungen hineingerät, alles ableiten lässt, sogar $1 = 2$.

Es genügt also, zu beweisen, dass die eine Formel $1 = 2$ im System nicht ableitbar ist, dann ist man schon sicher, dass sich in das System in keiner Weise Widersprüche einschleichen konnten.
Die exakt formulierte Aufgabe der Metamathematik besteht demnach darin, zu zeigen, dass man nie zu einer Zeichenfolge der Form $1 = 2$ gelangen kann, sofern man von jenen Zeichenfolgen ausgeht, welche die Axiome des betrachteten Systems genannt werden, und die Spielregeln anwendet.

In einigen einfachen Fällen hat Hilbert selbst ein Beispiel für einen solchen Beweis der Widerspruchsfreiheit gegeben, dann hat seine Schule dieses Verfahren auch auf weitere Systeme übertragen. Nun waren alle Mittel beisammen, um einen großen, umfangreichen Wissenszweig in den Kreis dieser Untersuchung zu ziehen.

Als erste bot sich natürlich die Wissenschaft von den natürlichen Zahlen, die sogenannte Zahlentheorie. Alles sprach dafür, dass man nur ein wenig die Kräfte zu sammeln brauche, um Hilberts Beweisgedanken auf die ganze Zahlentheorie auszudehnen, samt allen darin enthaltenen gefährlichen Begriffen. D

a geschah es, dass Hilberts "Beweistheorie", dieser neue Wissenszweig, der so schön behutsam im Bau begriffen war, von einem Sturm erschüttert wurde.

Ein junger Wiener Mathematiker, Gödel, bewies, - indem er sich eben der Methoden der Beweistheorie bediente (wie er diese verwendete, davon wird das letzte Kapitel ein Bild geben), - dass sich die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht beweisen lässt, wenn nur solche Mittel verwendet werden, die man innerhalb des betrachteten Systems formal beschreiben könnte.

Wohlverstanden: Die Metamathematik verwendet keine formalen Mittel; sie hat stets

zu wissen, was sie macht; sie folgert immer bewusst, nie mechanisch. Daraus folgt aber noch nicht, dass man aus ihren Schlussfolgerungen nicht auch mechanische Spielregeln machen könnte.
Natürlich könnte man das, wenn man unabhängig von den Zwecken der Metamathematik mit ihr ein wenig spielen wollte. Und wenn die Metamathematik formalisiert wird, dann scheint es fast selbstverständlich zu sein, dass sich ihre achtsamen, alle gefährlichen Elemente vermeidenden Schlussweisen bereits in viel engerem Rahmen formalisieren lassen als der betrachtete Wissenszweig mit seinen transfiniten Elementen.

Doch siehe: Gödels Ergebnis besagt, dass der Beweis der Widerspruchsfreiheit nur mit solchen Mitteln gelingen kann, die über den Rahmen des betrachteten Systems hinausreichen. Wer wird denn eine Rechtfertigung der gefährlichen Elemente als beruhigend empfinden, wenn sie mit Mitteln geschieht, die aus einem noch weiteren Kreis von Hilfsmitteln als dem des zu untersuchenden Systems entnommen werden?
Es hatte den Anschein, als ob diese Entdeckung endgültig das Versagen der Beweistheorie bedeute und man die Feder niederlegen könne.

Hilbert selbst hat das nicht einen Augenblick geglaubt. Er war überzeugt davon, dass es einen Ausweg gibt: Es muss irgendeine Schlussweise geben, die den Rahmen des betrachteten Systems überschreitet und sich trotzdem auf eine konkrete Fähigkeit unseres endlichen Verstandes gründet, so dass sie auch von den Intuitionisten angenommen wird.

Es begann das Suchen nach einer solchen Schlussweise, und es führte auch zum Erfolg: Gentzen, ein Schüler Hilberts, fand das geeignete Mittel für die Metamathematik in einem Fall der sogenannten "transfiniten Induktion", und damit bewies er auch die Widerspruchsfreiheit der gesamten Zahlentheorie.

Die Herde der natürlichen Zahlen kann bereits in Frieden leben und gedeihen:
Unter ihnen werden sicher nie Wölfe auftauchen.

Die "transfinite Induktion" klingt gefährlich; es handelt sich aber hier nur um den folgenden harmlosen Gedanken. Schreitet man, von einem beliebig fernen Glied der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

ausgehend, in beliebig großen Schritten nach rückwärts, so ist sicher, dass man hierbei nur endlich viele Schritte tun kann. Wenn man auch bei 1 Million aufbricht und in Schritten von je 1 Einheit nach rückwärts geht, so gelangt man doch nach 1 Million Schritten zur 1 hinunter.

Jetzt ordnen wir die Reihe der natürlichen Zahlen um, z.B. so, dass erst die ungeraden Zahlen genommen werden und die geraden Zahlen erst auf die unendlich vielen ungeraden folgen:

$$1, 3, 5, 7, ..., 2, 4, 6, 8, ...$$

Wenn man in dieser Anordnung von irgendeiner Zahl aus nach rückwärts, d. h. zu

immer weiter vorn stehenden Zahlen schreitet, dann ist nach endlich vielen Schritten auch dieser Weg notwendigerweise zu Ende.
Beginnt man nämlich bei einer ungeraden Zahl, so gelangt man - wie bei der ursprünglichen Reihe der natürlichen Zahlen - nach endlich vielen Schritten zur 1. Beginnt man bei einer geraden Zahl, so sieht man ebenso ein, dass man, nach rückwärts schreitend, über kurz oder lang keine gerade Zahl mehr übrigbehält und dann auf eine ungerade Zahl überspringen muss, wie groß diese auch sein mag.

Damit bewegt man sich aber bereits in einer einzigen Folge, die so beschaffen ist, wie die Reihe der natürlichen Zahlen in der ursprünglichen Anordnung.
Die Reihe der natürlichen Zahlen lässt sich natürlich auch auf viel kompliziertere Arten umordnen, z. B. indem man sie in Gruppen trennt, in denen erst die durch 3 teilbaren Zahlen, dann die Zahlen, die um 1 Einheit größer sind als diese, und endlich die Zahlen, die um 2 Einheiten größer als die ersten sind, aufgereiht werden (wir setzen der Ordnung halber auch die 0 mit ein):

$$0, 3, 6, 9, ..., 1, 4, 7, 10, ..., 2, 5, 8, 11, ...$$

Beginnt man, von irgendeiner Zahl der dritten Gruppe an nach rückwärts zu gehen, so muss man nach endlich vielen Schritten in die zweite Gruppe überspringen, und dann ist die Lage bereits dieselbe wie in dem vorhin betrachteten Fall.

Man kann auch unendlich viele Gruppen erhalten, wenn z. B. zuerst die ungeraden Zahlen ausgesondert werden, dann jene, die nur durch die erste Potenz von 2 teilbar sind, danach jene, die durch $2^2 = 4$, darauf jene, die durch $2^3 = 8$ teilbar sind, usf.:

$$1, 3, 5, 7, ..., 2, 6, 10, 14, ..., 4, 12, 20, 28, ..., 8, 24, 40, 56, ...$$

Darüber, dass hier unendlich viele Gruppen auftreten, möge man nicht erschrecken: Sobald man von einer bestimmten Zahl ausgeht, so befindet sich diese in einer der Gruppen, und dieser Gruppe gehen nur endlich viele andere voraus.

In allen diesen Fällen können wir sehen, dass die Rückwärtsbewegung darauf hinausläuft, dass man von einer komplizierten Anordnung zu einer weniger komplizierten übergeht. So stellt sich zugleich auch heraus, dass man nach endlich vielen Schritten zu einer einfachen Folge ohne Komplikationen gelangen muss, wenn man von irgendeiner komplizierten Anordnung der Reihe der natürlichen Zahlen ausgeht und von dieser zu immer weniger komplizierten zurückschreitet.

Nun hat Gentzen in seinem Beweis die Tatsache benutzt, dass bei einer gewissen Anordnung - die noch viel komplizierter ist, als diejenigen, die hier angeführt wurden - ebenfalls nur endlich viele Schritte rückwärts führen können. Das ist eine Behauptung, die man auch mit endlich-konkretem Denken gut erfassen kann und die dennoch den Rahmen des betrachteten Systems überschreitet. Wie lässt sich dieses Ergebnis im Beweis der Widerspruchsfreiheit benutzen?

Der Gedankengang eines Beweises der Widerspruchsfreiheit verläuft immer auf folgende Art: Nehmen wir an, jemand behauptet, er habe einen Widerspruch aus den Axiomen des Systems gefolgert.

Er überreicht eine Ableitung, die von Axiomen ausgeht, durch Anwendung angeblich nur der zugelassenen Spielregeln fortschreitet und mit $1 = 2$ endet. Wir haben nun zu zeigen, dass die Ableitung fehlerhaft ist, und auch den Fehler darin aufzufinden.

Ist kein einziges gefährliches Element in der vorgelegten Ableitung aufgetreten, so ist offenbar, dass man den Fehler in der Ableitung finden kann: Von wahren Sätzen ausgehend, konnte man durch unbestreitbare Schlussweisen nur zu dem falschen Ergebnis $1 = 2$ gelangen, wenn man dazwischen einen Fehler beging.

Kommt aber irgendein transfinites Element in dem Beweis vor, so ist die Nachweisbarkeit eines Fehlers nicht mehr so sicher: Der Widerspruch könnte auch durch das transfinite Element bewirkt worden sein.

Der Schluss des Beweises lautet aber: $1 = 2$. Darin ist von einem transfiniten Begriff keine Spur zu finden. Hat dennoch ein solcher in den Beweis hineingespielt, so konnte das nur geschehen, indem dieser - wie es ja die Art der idealen Elemente ist - erschien, irgendeine Wirkung ausübte und dann wieder verschwand.

Ob man den Beweis nicht auch ohne ihn hätte ausführen können - so wie sich manche Formeln der Trigonometrie sowohl mit als auch ohne Hilfe von i ableiten lassen?

Kommt nur ein einziges gefährliches Element vor oder treten einige unabhängig voneinander auf, dann ist es tatsächlich so: Hilbert hat gezeigt, dass derartige Beweise sich in harmlose Beweise umformen lassen, und in solchen können wir sofort den Fehler finden.

Jedoch können die idealen Elemente - als unkörperliche Wesen der Phantasie, die einander zu durchdringen imstande sind - auch höchst kompliziert miteinander verkoppelt auftreten. Aus einem sehr verwickelten Beweis kann man aber die transfiniten Elemente nicht mehr nach jener einfachen Methode beseitigen.

Nun hat Gentzen bemerkt, dass diese Verwicklung der Beweise in den komplizierten Umordnungen der Reihe der natürlichen Zahlen eine Analogie besitzt. Wird Hilberts Verfahren auf einen so komplizierten Beweis angewandt, so verschwinden zwar nicht die transfiniten Elemente daraus, der Beweis verwandelt sich aber in eine Ableitung, deren Verwicklung einer weniger komplizierten Umordnung der Reihe der natürlichen Zahlen entspricht.
Dasselbe geschieht, wenn Hilberts Verfahren für diese nunmehr weniger verwickelte Ableitung wiederholt wird. Nun wissen wir aber, dass man nach endlich vielen Schritten zu einer Folge ohne Komplikationen gelangt, wenn man zu immer weniger komplizierten Anordnungen der Reihe der natürlichen Zahlen übergeht.

So muss man nach einer endlichen Anzahl von Anwendungen des Hilbertschen Gedankens zu einem Beweis ohne Verwicklungen gelangen, zu einem Beweis, in dem sich keine transfiniten Elemente mehr befinden, und in diesem kann man dann ohne Schwierigkeiten den Fehler entdecken.

Das ist ein schöner, rein mathematischer Gedankengang, und sein Ergebnis ist von großer Bedeutung: Er stellt das Vertrauen in die alten Methoden, wenigstens auf dem

Gebiete der Zahlentheorie, wieder her.
Die Mehrzahl der Mathematiker - diejenigen, die von der Gefahr nichts wissen wollen - hegen dennoch eine Abneigung gegen die Beweistheorie, sie halten sie eher für Philosophie als für Mathematik.

Sie erkennen die Daseinsberechtigung eines neuen Zweiges der Mathematik nur dann an, wenn dieser auch auf anderen Gebieten der Mathematik fruchtbar angewandt werden kann. Um auch diesen zu zeigen, was die Beweistheorie zu leisten imstande ist, unterwarf Hilbert das grandioseste alte Problem, die Kontinuumhypothese der Mengenlehre, den Methoden der Beweistheorie.

Hier handelt es sich um folgendes: Im Bereich der nach der Größe geordneten natürlichen Zahlen waltet eine vollständige Ordnung; da gehört zu einer jeden Zahl ein bestimmter unmittelbarer Nachfolger: zur 3 die 4, zur 12 die 13. Im Bereich der Brüche kann davon bereits keine Rede sein:
Es sind in beliebiger Nähe von einem Bruch immer noch weitere Brüche zu finden. Und erst recht gilt dies, wenn die Gesamtheit aller reellen Zahlen betrachtet wird: Diese verteilen sich ja kontinuierlich auf der Zahlengeraden, untrennbar ineinanderfließend; eben darum wird ihre Mächtigkeit "Kontinuum" genannt.

Man kann nun auch im Bereich der von Cantor eingeführten unendlichen Mächtigkeiten die Frage aufwerfen, ob eine jede Mächtigkeit einen unmittelbaren Nachfolger hat. Die Antwort lautet:
Ja, in dieser Hinsicht verhalten sich die unendlichen Mächtigkeiten ebenso wie die natürlichen Zahlen. Die kleinste unendliche Mächtigkeit ist die der natürlichen Zahlen. Es erhebt sich die Frage: Welche Mächtigkeit ist ihr unmittelbarer Nachfolger?

Wir wissen, dass das Kontinuum, die Mächtigkeit der reellen Zahlen, größer als jene ist. Aber folgt es denn unmittelbar auf sie, gibt es zwischen ihnen nicht noch andere Mächtigkeiten? Es knüpfen sich manche tiefen Untersuchungen an diese Frage; unter den Mathematikern entwickelte sich allmählich die Vermutung, dass das Kontinuum unmittelbar auf die Mächtigkeit der Reihe der natürlichen Zahlen folge.

Diese Vermutung wurde die "Kontinuumhypothese" genannt oder von jenen, die daran fest glaubten, der "Kontinuumsatz". Man konnte die Frage aber nicht zur Entscheidung bringen.

In der neuesten Zeit bewies dann (von den Gedanken Hilberts ausgehend) Gödel mit den Mitteln der Beweistheorie, dass die Annahme, die Kontinuumhypothese sei richtig, keinen Widerspruch in die Mengenlehre hineinbringen kann.
Der Kontinuumsatz ist also entweder unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre, oder aber er lässt sich aus diesen ableiten; auf jeden Fall benutzen wir ihn mit Recht in unseren Beweisen: Durch ihn werden nie Widersprüche zustande kommen. Das Beweisverfahren ist ähnlich wie im Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie:

Gödel konstruierte ein "Modell" in der Mengenlehre, in dem die Axiome der Mengenlehre und der Kontinuumsatz sich gut miteinander vertragen.

Nun konnte Hilbert mit vollem Recht zu den Zweiflern an der Beweistheorie sagen: "An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen."

Nachschrift über die ins Unendliche projizierie Anschauung

Die Widerspruchsfreiheit der Lehre von den natürlichen Zahlen ist nunmehr gesichert, und der Beweis lässt sich leicht zu einem Beweis der Widerspruchsfreiheit der Lehre von anderen abzählbaren Mengen, also von den positiven und negativen ganzen Zahlen, von den Brüchen, d. h. allgemein von den rationalen Zahlen, umformen.
Es steht noch die Menge der reellen Zahlen aus, und hier stoßen wir auf neue Schwierigkeiten.

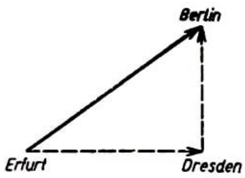
Die irrationalen Zahlen wurden durch immer bessere Annäherungen, durch Einschließen in immer engere Intervalle erfasst. Es handelt sich hier also nicht mehr um Zahlentheorie, sondern um Analysis. Hier ist bereits das Auftreten unendlicher Prozesse permanent, und dies bringt gefährliche Elemente neuer Art mit sich.

Dort, wo von diesem Gedankenkreis zum erstenmal die Rede war, habe ich darauf geachtet, jenen sehr gefährlichen Satz, in dem es um Sein oder Nichtsein der Analysis geht, aufrichtig zu formulieren. Dieser Satz lautete:

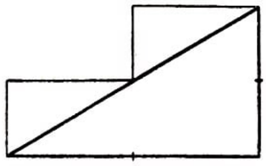
"Unsere Anschauung lehrt, dass auch dann, wenn die Bildung der ineinandergeschachtelten, immer enger zusammenschrumpfenden Intervalle unendlich fortgesetzt wird, jenes gewisse Etwas, zu dem sie zusammenschrumpfen, ihr aller gemeinsamer Teil ist."

Wie könnte aber unsere Anschauung irgend etwas über einen unendlichen Vorgang lehren?
Haben wir denn vergessen, dass wir kein Recht haben, das im Endlichen Vorgefundene auf das Unendliche zu übertragen?

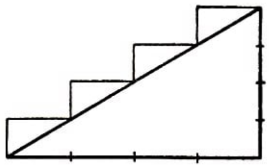
Ich kann dafür auch ein neues Beispiel heranziehen, das wiederum zu denken gibt. Man braucht kein Mathematiker zu sein, um einzusehen, dass die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten der gerade Weg ist. Fliegt z, B. jemand von Erfurt nach Berlin, so gelangt er geradeswegs eher dahin, als wenn er seinen Weg über Dresden nähme:



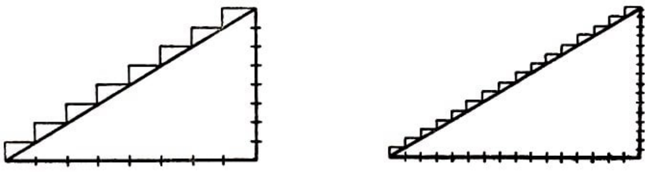
Daraus lässt sich auch sofort entnehmen, dass zwei Seiten eines Dreiecks zusammen länger sind als die dritte Seite.
Nun werde ich trotzdem beweisen, dass die zwei Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks insgesamt genau die Länge der Hypotenuse ergeben. Dies ist offenbar Unsinn; das aber vermag die auf unendliche Vorgänge angewandte "Anschauung".
Zeichnen wir eine Treppe über die Hypotenuse, so dass ihre Linien je einer Kathete parallel laufen:



Es leuchtet ein, dass die beiden vertikalen Stücke insgesamt ebenso lang sind wie die vertikale Kathete, und die beiden horizontalen Stücke zusammen der horizontalen Kathete gleich sind. Die Länge der ganzen Treppenlinie ist also der Summe der beiden Katheten gleich.
Dasselbe gilt auch für eine Treppe aus vier Teilen:



Die horizontalen Stücke sind zusammen wieder der horizontalen Kathete, die vertikalen zusammen der vertikalen Kathete gleich. Und wird die Hypotenuse weiter geteilt,



so bleibt es unverändert richtig, dass die Länge der Treppenlinie der Summe der beiden Katheten gleich ist. Andererseits lässt sich die Treppe immer weniger von der Hypotenuse unterscheiden, und "unsere Anschauung lehrt", dass dann, wenn man die Teilung grenzenlos fortsetzt, die Treppe mit der Hypotenuse verschmelzen wird. Demnach wäre auch die Hypotenuse der Summe der beiden Katheten gleich.

Nun können wir über die Zuverlässigkeit der, ins Unendliche projizierten Anschauung nachdenken.

Trotzdem geht es in jenem kritischen Satz um Sein oder Nichtsein der Analysis. Entweder glauben wir daran ohne jeglichen Grund, nur, weil wir daran glauben möchten, oder es bleibt nichts anderes übrig, als unsere Zuflucht zu den Methoden der Beweistheorie zu nehmen, nachzuforschen, ob eine solche Aussage nicht zu Widersprüchen führen kann.

In das Axiomensystem der Analysis kommen also auch solche neuen transfiniten Elemente hinein. Werden auch diese zugelassen, dann wird das System bereits so weit, dass der von Gentzen benutzte Fall, und sogar auch noch viel kompliziertere Fälle der transfiniten Induktion in ihm darstellbar sind.

Nun gilt aber auch hier der Satz von Gödel: Die Widerspruchsfreiheit des Systems kann nicht mit Mitteln bewiesen werden, die sich in dem betrachteten System selbst formalisieren lassen. Wir können also nicht mehr darauf hoffen, dass die bisherigen Methoden ohne weiteres zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Analysis ausreichen werden; hier hat man neue, schärfere Hilfsmittel zu suchen. Dies ist bis heute noch ein offenes Gebiet der Forschung.

3.5 Was die Mathematik nicht kann

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie deutete zugleich auf einen Mangel in der Axiomatisierung hin. Die transfinite Induktion, die dort angewandt wurde, ist ein Verfahren, das sich in der Sprache der natürlichen Zahlen formulieren und auch mit endlichem Verstand wohl erfassen lässt; dennoch übersteigt sie den Rahmen des Axiomensystems, das die Lehre von den natürlichen Zahlen umfasst.

Das ist keine vereinzelte Erscheinung: Kein einziges Axiomensystem ist imstande, genau das zu umfassen, was es umfassen will.

Es gibt stets Dinge, die ihm entgleiten, und andererseits auch Dinge, die unerwünscht hineinkommen. Es nimmt gleichsam zuviel unter den Arm und muss darum einiges fallen lassen.
Dass es zuviel unter den Arm nimmt, wurde von dem norwegischen Mathematiker Skolem gezeigt.

Wollen wir mit unseren Axiomen nur die Reihe der natürlichen Zahlen in ihrer ursprünglichen Anordnung erfassen, so schleichen sich unvermeidlich auch die komplizierteren Anordnungen dieser Zahlenreihe in das Axiomensystem ein: Die ursprüngliche Zahlenreihe lässt sich diesen gegenüber nicht abgrenzen.

Wollen wir ferner einen größeren Individuenbereich als das Abzählbare, z.B. die Menge der reellen Zahlen, mit Hilfe von Axiomen genau abgrenzen, so wird es immer auch eine abzählbare Menge geben, die sich hier eindrängt und die Bedingungen sämtlicher Axiome erfüllt.

Dass die Axiomensysteme einiges fallen lassen müssen, wurde durch eine überraschende Entdeckung Gödels ans Licht gebracht, die Entdeckung nämlich, dass es in jedem tauglichen Axiomensystem, das die Zahlentheorie enthält, unentscheidbare Probleme gibt.
Wie ist das zu verstehen?

Bis heute unentschiedene, alte Probleme gibt es in der Mathematik eine Fülle. Ich habe bereits einige erwähnt, z. B. jenes: Gibt es unendlich viele "Primzahlzwillinge" (wie z. B. 11 und 13 oder 29 und 31)? Auch die sogenannte Goldbachsche Vermutung ist bisher nicht entschieden: Es wurde beobachtet, dass

$$\begin{aligned} 4 &= 2+2 \\ 6 &= 3+3 \\ 8 &= 3+5 \\ 10 &= 3+7 = 5+5 \end{aligned}$$

ist, und es hat den Anschein, als ob jede gerade Zahl mit Ausnahme von 2 sich als die Summe zweier Primzahlen aufschreiben ließe - eventuell auch auf mehrfache Weise.
Das trifft in der Tat zu, soweit die Zahlen untersucht wurden; bis heute ist es aber nur eine Vermutung geblieben, dass dies auch über alle Grenzen hinaus zutrifft.

Am berühmtesten wurde unter den unentschiedenen Problemen die Fermatsche Vermutung. Hierbei handelt es sich um folgendes: Wir wissen, dass

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 \qquad \text{d.h.} \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

ist, und es gibt auch andere Beispiele von drei Zahlen, die so beschaffen sind, dass zwei von ihnen, ins Quadrat erhoben und addiert, das Quadrat der dritten ergeben.
Nun vermerkte Fermat, als er ein Buch mit Anmerkungen versah, dass er einen Beweis dafür gefunden habe, dass die entsprechende Beziehung für höhere Exponenten als 2 nicht mehr möglich ist; zum Aufzeichnen des Beweises dafür sei aber auf dem Rand nicht genügend Platz.

Er behauptete also, dass man sich nicht drei ganze Zahlen x, y und z denken kann, zwischen denen eine Verknüpfung

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \text{oder} \quad x^4 + y^4 = z^4 \quad \text{oder} \quad x^5 + y^5 = z^5 \quad ...$$

besteht.
Fermat ist schon vor langer Zeit gestorben. Viele Mathematiker versuchten, seinen Beweis zu rekonstruieren, doch bis heute ohne Erfolg. Diese erfolglosen Bemühungen um einen Beweis, den jemand angeblich bereits in den Händen hatte, erweckten für dieses an sich ziemlich uninteressante Problem ein großes Interesse.

Es fand sich sogar ein Testament, das eine sehr beträchtliche Summe demjenigen hinterließ, der das Problem entscheide. Man kann sich denken, dass diese Preisaufgabe die Phantasie der Unkundigen noch mehr anregte als die Quadratur des Kreises. Zum Glück wurde die Unternehmungslust heute bereits dadurch etwas abgekühlt, dass das hinterlassene Geld seitdem seinen Wert völlig verloren hat.

Trotzdem wirkte dieses Problem auch in der Mathematik befruchtend:
Es wurden sogar neue ideale Elemente, sogenannte "Ideale", eingeführt, um das Problem zugänglicher zu machen, und diese Ideale erwiesen sich auch auf bedeutsameren Gebieten der Algebra als sehr brauchbar.

Es gelang aber auch damit nur, für spezielle Exponenten die Fermatsche Vermutung als zutreffend zu erweisen; in ihrer Allgemeinheit ist sie bis heute noch unentschieden. Fermat hat sich vermutlich geirrt; gewiss hat auch er nur den Beweis eines Spezialfalles gefunden.

Es gibt aber auch Aufgaben in der Mathematik, die - bei gewissen abgegrenzten Methoden - erwiesenermaßen unlösbar sind.
Diese bilden vollkommen entschiedene Probleme: Sie wurden entschieden - jedoch in negativem Sinne. Dahin gehören z.B. die allgemeine Lösung der Gleichung fünften Grades und die Quadratur des Kreises. Auch die Winkeldreiteilung und die Würfelverdoppelung

gehören in diese Kategorie von Problemen.

Es ist erwiesen, dass sich diese Aufgaben unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal nicht ausführen lassen. Mit diesen beiden Instrumenten können wir einen beliebigen Winkel halbieren, doch in drei gleiche Teile können wir ihn bereits nicht mehr teilen. Die Würfelverdoppelung ist das räumliche Analogon zur Verdoppelung unseres Fischteiches.

In der Ebene konnten wir noch eine Seite des großen Quadrats mit Zirkel und Lineal konstruieren, dagegen gelingt es im Raume bereits nicht mehr, mit den zugelassenen Instrumenten die Kante eines Würfels zu konstruieren, dessen Rauminhalt doppelt so groß ist wie der des gegebenen Würfels. Diese Aufgabe wird auch als "Delisches Problem" erwähnt, da die Götter angeblich von den vom Unheil betroffenen Deliern verlangten, ihren würfelförmigen Altar zu verdoppeln.

Der gute Wille dazu war zwar vorhanden, doch vergebens. Die Delier wurden dann von Platon getröstet: Die Götter wollten die Griechen mit dieser Aufgabe vermutlich nur zur Pflege der Geometrie anregen.

Der Satz von Gödel handelt aber nicht von bisher unentschiedenen oder in negativem Sinn entschiedenen Problemen, sondern von innerhalb der gebräuchlichen Axiomensysteme unentscheidbaren Problemen.
Ich möchte nun den Gedankengang Gödels in großen Zügen schildern.

Nehmen wir an, wir hätten ein gut aufgebautes Axiomensystem für die Wissenschaft von den natürlichen Zahlen, für die Zahlentheorie; und in die Axiome hätten wir alles aufgenommen, was auf diesem Gebiet nötig werden kann; auch darauf hätten wir natürlich geachtet, dass in dem System kein Widerspruch vorhanden ist.

Wir hätten es in der Sprache der symbolischen Logik dargestellt, so dass darin jede Aussage die Gestalt einer Zeichenfolge annimmt.
Dann ist es möglich, einer jeden dieser Zeichenfolgen je eine Zahl zuzuordnen - genau, wie wir den Punkten der Ebene seinerzeit Zahlenpaare zugeordnet haben. Das kann in folgender Weise geschehen:

Wir haben mathematische und logische Zeichen in endlicher Anzahl; lassen wir nun diesen die ersten Primzahlen entsprechen (jetzt zähle ich auch 1 zu den Primzahlen). So soll z.B. dem Zeichen 1 die Zahl 1 selbst entsprechen; andere Zahlzeichen sind in dem formalen System schon nicht mehr nötig; denn 2 lässt sich ja als $1+1$ aufschreiben, 3 als $1 + 1 + 1$, usf.

Dem Zeichen "$=$" soll die 2, dem "nicht" ausdrückenden Zeichen "$\neg$", die 3 dem Zeichen "$+$" die 5 entsprechen, usf., es bleibt sich gleich, wie man die Reihenfolge wählt.
Dem letzten der Zeichen sei etwa die 17 zugeordnet. Nun ordnen wir von 19 an die Primzahlen jenen unbekannte Werte bezeichnenden Buchstaben x, y, ... zu, die in den Aussagen des Systems vorkommen; es soll z.B. dem x die 19, dem y die 23 entsprechen usf.
So kommen wir zu folgendem Lexikon:

1 1
= 2
¬ 3
+ 5
x 19
y 23

Hieraus lässt sich z. B. sofort ersehen, dass der Formel $1 = 1$ das Zahlentripel 1, 2, 1 entspricht.

Aus diesem Tripel will ich eine einzige Zahl machen. Das lässt sich natürlich leicht tun, sogar auf vielerlei Art; addiere ich z. B. diese drei Zahlen, so erhalte ich auch eine einzige Zahl: 4. Ja.
Doch diese 4 hat jene Zahlen auch verschluckt: Es lässt sich aus ihr in keiner Weise ersehen, aus welchen Zahlen sie zusammengesetzt wurde und in welcher Reihenfolge, ja nicht einmal, aus wievielen Zahlen. 4 kann z. B. auch $1 + 3$ sein oder $3 + 1$, $2 + 2$, $1 + 1 + 2$ und $2 + 1 + 1$, also durchaus nicht nur

$$1 + 2 + 1$$

Ich will aber eine Zahl bilden, die genau erkennen lässt, aus welchen Gliedern sie zusammengeschmolzen ist. Auch dies ist möglich:
Ich kann z.B. die ersten drei Primzahlen 2, 3, 5 mit den Gliedern unseres Zahlentripels

$$1, 2, 1$$

als Exponenten potenzieren und die so erhaltenen drei Potenzen miteinander multiplizieren; so entsteht das Produkt:

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 10 \cdot 3^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

Der Formel $1 = 1$ entspricht hiernach die Zahl 90.
Es ist leicht, aus ihr die Formel wiederzuerkennen, der sie zugeordnet wurde: Man braucht nur die Zahl in Primfaktoren zu zerlegen, die einander der Größe nach folgen:

$$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 == 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

dann tauchen in den Exponenten wieder die Primzahlen 1, 2, 1 auf, die im Lexikon den Zeichen $1 = 1$ entsprechen. Folglich gewinnen wir aus 90 die ihr entsprechende Formel $1 = 1$ tadellos wieder.

Einer jeden Aussage des Systems entspricht so je eine Zahl.
Und es lässt sich auch jedem Beweis nach demselben Verfahren je eine Zahl zuordnen. Ein Beweis ist ja - formal betrachtet - nichts anderes als eine gewisse Aufeinanderfolge von Aussagen (wobei die letzte Aussage eine Folge der vorherigen ist).

Den Aussagen sind aber schon Zahlen zugeordnet; so entspricht z.B. einem Beweis aus drei Aussagen ein Zahlentripel. Die Glieder eines Zahlentripels können aber ganz in der vorhergehenden Weise zu einer einzigen Zahl zusammengeschmolzen werden, so dass sich aus dieser Zahl jederzeit ihre Bestandteile wiedererkennen lassen: Man braucht sie dazu nur in Primfaktoren zu zerlegen.

Angenommen, wir wissen bereits von einer entsetzlich großen Zahl, dass sie in irgendeiner Zuordnung vorgekommen ist, wir hatten ferner die Engelsgeduld, sie in ihre Primfaktoren zu zerlegen, und hatten so

$$2^{90000000000000000000} \cdot 3^{90}$$

erhalten, dann sehen wir erstens, dass die Exponenten keine Primzahlen sind. Folglich wurde diese Zahl nicht einer einzelnen Aussage, sondern einem Beweis zugeordnet. Ferner muss der Beweis ein solcher sein, in dem insgesamt zwei Aussagen vorkommen, jene, denen die Zahlen in den Exponenten

$$90000000000000000000 \qquad \text{bzw.} \qquad 90$$

entsprechen. Werden diese Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, so können wir aus ihnen die entsprechenden Aussagen wiedergewinnen.
In der ersten Zahl sind 19 Nullen, folglich ist diese

$$9 \cdot 10^{19} = 3^2 \cdot 10^{19} = 3^2 \cdot 2^{19} \cdot 5^{19}$$

denn es ist ja $10 = 2 \cdot 5$. Indem wir die Basen der Größe nach ordnen, erhalten wir

$$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$$

in den Exponenten tritt hier das Zahlentripel

$$19, 2, 19$$

auf. Die Zerlegung der zweiten Zahl ist uns schon bekannt:

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

diese wurde also aus dem Zahlentripel

$$1, 2, 1$$

aufgebaut. Ich wiederhole das Lexikon:

1 1
$=$ 2
$\neg$ 3
$+$ 5
x 19
y 23

Man kann hieraus ersehen, dass das erste Zahlentripel, d.h. 19, 2, 19 der Formel $x = x$, das zweite Zahlentripel, d.h. 1, 2, 1, der Formel $1 = 1$ entspricht.

Der betreffende Beweis, dem die betrachtete große Zahl zugeordnet ist, besagt also im ganzen folgendes: Ist für ein beliebiges x

$$x = x, \qquad \text{so folgt, dass} \qquad 1 = 1 \qquad \text{ist.}$$

Nun, das ist noch ein recht kümmerlicher Beweis, und schon zu diesem gehört eine Zahl von astronomischer Größe; man kann sich vorstellen, eine wie große Zahl einem tauglichen Beweis entspricht.

Doch das Wesentliche ist, dass wir wissen, es entspricht ihm trotzdem eine gewisse Zahl, und aus dieser Zahl lässt sich der Beweis - wenn ein Menschenleben dazu auch nicht genügt, doch wenigstens prinzipiell - rekonstruieren.

So kann man die Formeln und die Beweise in gewisse natürliche Zahlen übersetzen. Was hat das aber für einen Zweck?

Die Metamathematik untersucht das System von außen her; ihre Behauptungen sagen etwas über die so und so gebildeten Formeln und Beweise des Systems aus. Jetzt lassen sich diese Behauptungen mittels des, Lexikons so umformen, dass sie von natürlichen Zahlen sprechen, deren Primfaktorenzerlegung so und so geartet ist. Z.B. kann die Metamathematik, indem sie eben die Formeln, die sich mittels der Zeichen des Systems aufschreiben lassen, untersucht, konstatieren, dass man mit den Formeln

$$1 = 1 \qquad \text{und} \qquad \neg(1 = 1)$$

vorsichtig umgehen muss; denn die eine ist die Negation der anderen. Wir hatten schon gesehen, dass der Formel

$$1 = 1 \qquad \text{die Zahl} \qquad 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$$

entspricht. Nach dem Lexikon entspricht (wenn man davon absieht, dass auch die Klammerzeichen Zeichen sind und ihnen eigentlich auch gewisse Zahlen zugeordnet werden müssten): der Formel $\neg(1 = 1)$ das Quadrupel 3, 1, 2, 1,
d.h., da die ersten vier Primzahlen 2, 3, 5, 7 sind, die Zahl $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

Berechnen wir auch diese:

$$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200$$

Stellen wir nun die beiden Primfaktorenzerlegungen noch einmal nebeneinander:

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 51 \qquad , \qquad 4200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

so sehen wir, dass die metamathematische Behauptung: "Die Formeln $1 = 1$ und $\neg(1 = 1)$ sagen das Gegenteil voneinander aus"sich übersetzen lässt in die folgende Aussage: "90 und 4200 sind so beschaffen, dass die Primfaktorenzerlegung der zweiten mit 2^3 beginnt und die Exponenten der darauf folgenden Primzahlen der Reihe nach dieselben sind wie die Exponenten in der Primfaktorenzerlegung von 90".

In diesem letzten Satz ist keine Spur mehr von Metamathematik zu finden, er ist eine rein zahlentheoretische Behauptung.
Das betrachtete System dient nun aber gerade dazu, die zahlentheoretischen Behauptungen darin zu formulieren. Der genannte zahlentheoretische Satz lässt sich daher auch vollkommen mit den Zeichen unseres betrachteten Systems aufschreiben, so dass kein einziges Wort darin übrigbleibt.

Er wird zu einer der gewöhnlichen grauen Zeichenfolgen, und dieser sieht man es nicht mehr an, wie zweideutig sie ist. Sie ist aber zweideutig: Es lassen sich zwei verschiedene Texte aus ihr herauslesen. Der eine ist der zahlentheoretische Text, wie man ihn aus jeder Formel des Systems entnehmen kann, wenn man sich besinnt, welcher Inhalt ursprünglich den Zeichen beigelegt worden ist; der andere ist das, was die in ihr verkörperte metamathematische Behauptung aussagt.

Und mitten in der Spielerei mit diesen zweideutigen Zeichenfolgen und mit den ihnen entsprechenden Zahlen stieß Gödel auf eine Zahl - sagen wir 8 Milliarden; in Wirklichkeit wissen wir genau, wie diese Zahl aus Primfaktoren aufgebaut wird, es würde aber zu ihrer Berechnung ein Menschenleben nicht genügen - und bemerkte, dass diese Zahl folgendes leisten kann:
Schreibt man nach dem Muster des vorhin behandelten Satzes die folgende metamathematische Behauptung mit den Zeichen des Systems auf:

"Die Formel, der 8 Milliarden entspricht, ist im System nicht beweisbar"

- und prüft man nach, welche Zahl gemäß dem Lexikon der so gewonnenen Formel entspricht, so wird man staunend erfahren, dass diese eben 8 Milliarden ausmacht. "Die Formel, der die Zahl 8 Milliarden entspricht", ist also diese Formel selbst. In ihrem einen Sinn sagt sie also aus:

"Ich selber bin nicht beweisbar."

Wohlverstanden - das ist kein Spiel mit Worten, kein Sophismus; eine gewöhnliche graue Formel steht vor uns, eine unleugbare Zeichenfolge, so wie alle anderen. Nur wenn wir mit Hilfe unseres Lexikons nachprüfen, was für eine Nebenbedeutung durch die Metamathematik in diese Zeichenfolge eingeschmuggelt wurde, bemerken wir, dass sie mit ihrem unschuldigen Gesicht diesen seltsamen Text vor sich hin summt: "Ich bin nicht beweisbar."

Kein Wunder, dass diese Formel im System unentscheidbar ist, möge sie auch eine noch so unschuldige zahlentheoretische Behauptung in ihrem anderen Sinn ausdrücken.

Nämlich wäre sie beweisbar, so würde das mit dem, was die Formel in ihrem metamathematischen Sinn aussagt, in Widerspruch geraten: Dies ist ja gerade, dass sie nicht beweisbar ist.
Wäre sie dagegen widerlegbar, so würde diese Widerlegung ihre metamathematische Behauptung, nämlich, dass sie nicht beweisbar ist, bestätigen: Sie wäre also gerade

durch die Widerlegung bewiesen.

Man kann sie weder beweisen noch widerlegen: Sie ist unentscheidbar.
Ich betone noch einmal: Fällt einem das Lexikon nicht ein, dann ist diese Zeichenfolge eine gewöhnliche graue Formel des Systems, eine unschuldige zahlentheoretische Behauptung über Additionen und Multiplikationen. Gödel hat die Existenz so gearteter unentscheidbarer Formeln für jedes taugliche System nachgewiesen.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass z.B. auch die Goldbachsche Vermutung zu ihnen gehört: Es ist möglich, dass es darum nicht gelungen ist, diese bis heute zu entscheiden, weil dann, wenn ein formales Axiomensystem aus den Mitteln, mit denen man bisher an dieser Vermutung experimentiert hat, herauspräpariert würde, der formale Ausdruck der Vermutung eben jene Formel wäre, die nach dem Lexikon das Liedchen summt: "Ich bin im System nicht beweisbar."

Dasselbe gilt für jedes bisher nicht entschiedene Problem; diese Möglichkeit hat ein jeder Mathematiker ins Auge zu fassen. Eine Einwendung wäre noch denkbar: Alles dies folgt nur aus der Mangelhaftigkeit der Axiomensysteme.

Die Gödelschen Probleme lassen sich vermutlich auch entscheiden, wenn man sich nicht an ein gewisses Axiomensystem bindet. Nun hat aber Church ein Problem konstruiert, das mit keiner der bis heute vorstellbaren mathematischen Überlegungen entschieden werden kann; ganz unabhängig davon, ob sich unsere Schlussfolgerungen in den Rahmen eines Axiomensystems pressen lassen oder nicht.

Hier habe ich meine Ausführungen zu beenden: Wir stießen an die Schranken des heutigen mathematischen Denkens. Unsere Zeit ist die Zeit des Bewusstwerdens; auf diesem Gebiet hat auch die Mathematik das Ihrige getan: Sie enthüllte selbst die Grenzen ihrer eigenen Fähigkeiten.

Stießen wir aber an endgültige Hindernisse? Aus sämtlichen Sackgassen in der Geschichte der Mathematik fand sich bisher ein Ausweg. Auch der Beweis von Church hat einen sehr bedenklichen Punkt: Er hatte exakt zu formulieren, was als "bis heute vorstellbare mathematische Überlegung" betrachtet werden soll, wenn er ein mathematisches Verfahren auf diesen Begriff anwenden wollte.

Sobald aber etwas formuliert wird, wird es zugleich auch abgegrenzt, und jeder Zaun ist zu eng. Die auftauchenden unentscheidbaren Probleme schlüpfen darunter hinweg.

Die Schranken werden von der zukünftigen Entwicklung gewiss erweitert, wenn heute auch noch nicht zu sehen ist, wie. Stets gilt die Lehre:

Die Mathematik ist nichts Statisches und Abgeschlossenes, sondern etwas Lebendiges, sich weiter Entwickelndes; wie immer man sie auch in abgeschlossenen Formen zum Erstarren zu bringen sucht, sie findet eine Lücke: Lebendig stürzt sie hinaus ins Freie.

Nach dem Gebrauch

Möchte der Leser zurückblättern, z.B. zum Integral, so findet er im Inhaltsverzeichnis nur den Titel: "Halten die Kleinen zusammen, so bringen sie es weit".
Deshalb teile ich nachträglich mit, welche mathematischen Begriffe in den einzelnen Kapiteln zu finden sind. (Man lasse sich davon nicht abschrecken!)

1. TEIL:

1. Addition, Multiplikation, Potenzieren.
2. Der Rauminhalt des Würfels; Graphische Darstellung von Funktionen.
3. Zahlensysteme. Teilbarkeitsregeln.
4. Arithmetische Reihe. Flächeninhalt des Rechtecks und des Dreiecks.
5. Diagonalen konvexer Vielecke. Zweigliedrige Kombinationen. Die Formel.
Nachschrift: Topologie. Kongruenz und Ähnlichkeit. Regelmäßige Körper.
6. Kombinationslehre. Vollständige Induktion. Das Quadrat der Summe zweier Glieder.
7. Zerlegung in Primfaktoren. Die Verteilung der Primzahlen. Primzahlsatz.
8. Gleichungen. Die Unlösbarkeit der Gleichung fünften Grades. Galoissche Theorie.

2. TEIL:

1. Negative Zahlen. Vektoren. Prinzip der Permanenz.
2. Operationen mit Brüchen. Überall dichte Menge. Die Mächtigkeit der rationalen Zahlen.
3. Umformung von Brüchen in die Dezimalform und umgekehrt. Unendliche Reihen.
4. Die irrationale Zahl. Pythagoreischer Lehrsatz. Die Mächtigkeit der reellen Zahlen.
5. Logarithmentafeln. Die Erweiterung des Potenzbegriffs. Glatte Kurven. Hyperbel. Die 0 als Divisor.
6. Der allgemeine Funktionenbegriff. Analytische Geometrie.
Nachschrift:
a) Winkelfunktionen. Approximation einer periodischen Funktion.
b) Projektive Geometrie. Invarianten.
7. Die unendlich ferne Gerade. Komplexe Zahlen. Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion. Der Fundamentalsatz der Algebra. Potenzreihenentwicklungen von Funktionen.
8. Die Richtung der Tangente. Der Differentialquotient. Maximum und Minimum.
9. Unbestimmtes und bestimmtes Integral. Flächenberechnung.

3. TEIL:

1. Die Quadratur des Kreises. Das Axiomensystem Euklids. Hyperbolische Geometrie. Verschiedene Geometrien.
Nachschrift: Die vierte Dimension.
2. Gruppentheorie. Mengenlehre. Antinomien. Intuitionismus.
3. Symbolische Logik.
4. Beweistheorie. Metamathematik. Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie. Kontinuumsatz.
Nachschrift: Die Axiomatisierung der Analysis.
5. Unentschiedene und mit gegebenen Mitteln unlösbare Aufgaben. Die Frage der sogenannten unentscheidbaren Probleme.