Eberhard Lehmann

Lineare Optimierung für Junge Mathematiker

1970 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 47
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das Gebiet der linearen Optimierung hat in den letzten Jahren derart an Bedeutung zugenommen, dass es für wichtig erachtet wird, die allgemeine Problemstellung so früh wie möglich breitesten Kreisen junger Menschen zugängig zu machen, da diese später die Methoden der Mathematik in der Praxis anwenden sollen.
Der größte Teil derjenigen, die heute noch die Oberschule, Berufsschule oder die Fachschule besuchen, wird bei der so rasch voranschreitenden Verwirklichung der Rationalisierung und der Anwendung mathematischer Methoden in den Betrieben mit Fragen der Datenverarbeitung oder speziell mit Fragen der Optimierung in Berührung kommen.

Der Lehrplan der polytechnischen und auch der erweiterten Oberschule sieht eine Einführung in die lineare Optimierung noch nicht vor. An einigen Berufsschulen wurde für Lehrlinge des Handels seit etwa drei Jahren eine Einführung in das Stoffgebiet gegeben, man ging im allgemeinen aber über Probleme mit zwei Variablen nicht hinaus, weil in der Hauptsache nur die grafische Lösungsmethode behandelt werden konnte.

Literatur auf dem Gebiet der linearen Optimierung existiert genügend für Mathematiker und Ökonomen. In beiden Fällen hat man es mit einem Personenkreis zu tun, der sich beruflich entschieden hat, der die mathematischen Methoden der Rechentechnik für die beruflichen Belange benötigt und die Voraussetzungen dafür auf der Hochschule oder Fachschule erarbeitet hat.

An diesen Personenkreis ist in der vorliegenden Arbeit nicht gedacht.
Es werden vielmehr vor allem Schüler der erweiterten Oberschule und Lehrlinge der Berufseinrichtungen angesprochen, die sich beruflich noch nicht entschieden haben und für die die bereits existierende Literatur ungeeignet ist. Aus diesem Kreis aber sollen junge Menschen gewonnen werden, die sich für Probleme der Rechentechnik interessieren.

Am besten wird das Interesse geweckt einmal durch Umreißen der Problemstellungen der mit den modernen Mitteln der Rechentechnik zu bewältigenden Aufgaben, das andere Mal aber dadurch, dass man sich einen möglichst konkreten Einblick in die betreffenden Stoffgebiete verschafft und lernt, wie man an die Lösung gewisser praktischer Aufgaben herangeht.

Wenn dann später die Lösung auf einem modernen elektronischen Rechner mit anderen Mitteln gewonnen wird, so spielt das für die Einführung in das Gebiet der linearen Optimierung keine große Rolle. Die Erfahrung zeigt, dass ein Beginn mit der Simplexmethode eher schockiert, als für das Gebiet begeistert.
Der Grund dafür mag vor allem sein, dass das Simplexverfahren nicht mit den Mitteln entwickelt wird, die einem Schüler geläufig sind.

Es soll in dem vorliegenden Büchlein darum gehen, mit solchen Methoden in die lineare Optimierung einzudringen, die aus der Schule her bekannt sind. Dazu dürften für Schüler der erweiterten Oberschule die Vektorrechnung und Analytische Geometrie und für Teilnehmer an Zirkeln Junger Mathematiker die Zahlenkongruenzen und Ungleichungen gehören. Dies sind die Stoffgebiete, mit denen in mathematischen Interessengemeinschaften, die heute an fast jeder Oberschule bestehen, begonnen wird.

Vorausgesetzt werden die Vektorrechnung, die Analytische Geometrie der Geraden und der Ebene, die Behandlung von linearen Gleichungssystemen und Ungleichungssystemen, der Umgang mit Zahlenkongruenzen sowie einige Elemente aus der Kombinatorik. Die Voraussetzungen werden im Abschnitt 1 nochmals zusammengestellt und durch einige Beispiele vertieft.

Nach der Einführung eines linearen Optimierungsproblems mit zwei Variablen wird die allgemeine Aufgabenstellung umrissen.
Bei der Lösung weiterer Aufgaben mit mehr als zwei Variablen werden neue Wege beschritten, die sich auf die in den Voraussetzungen genannten Stoffgebiete stützen. Damit weicht die Arbeit von anderen Darstellungen zum gleichen Thema ab.

An entsprechenden Stellen wird auf geeignete Literatur, z.B. [4], verwiesen, die entweder eine breitere Durcharbeitung der in dieser Arbeit gemachten Voraussetzungen oder aber ein tieferes Eindringen in das Stoffgebiet der linearen Optimierung ermöglicht.

Der Leser möge zunächst sehr gründlich die im Abschnitt 1 behandelten Voraussetzungen evtl. unter Zuhilfenahme weiterer Literatur zu den Voraussetzungen (siehe Abschnitt 8) durcharbeiten. Werden die im Abschnitt 1 zusammengestellten Voraussetzungen erfüllt, so dürfte der Leser auf keine größeren Schwierigkeiten mehr stoßen.

Es ist mir ein besonderes Anliegen, den Herren Prof. Dr. W. Stolle, Rostock, Prof. Dr. W. Lange, Dresden, Prof. Dr. J. Piehler, Leuna, und W.Arnold, Leipzig, für manchen Ratschlag und die Unterstützung bei der Abfassung dieses Buches und Herrn Professor Dr. Piehler außerdem für die Überlassung der Aufgabenstellung, Abschnitt 5, herzlich zu danken.
Dem BSE B. G. Teubner Verlagsgesellschaft gilt mein Dank vor allem für die schnelle Aufnahme des Titels.

Rostock, im Herbst 1969

Eberhard Lehmann

Inhaltsverzeichnis

1 Voraussetzungen

1.1 Ungleichungen

Für die Behandlung von Ungleichungen benötigen wir die folgenden Symbole, Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten:

$a > b$: a ist größer als b, bzw. b ist kleiner als a.

$a < b$: a ist kleiner als b, a steht in der geordneten Menge der reellen Zahlen vor b.

$a \neq b$: a ist von b verschieden.

$a \leq b$: a ist entweder kleiner als b oder a ist gleich b, bzw. a ist nicht größer als b.

$a \geq b$: a ist nicht kleiner als b.

Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$. (Transitivität)

Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$.

Aus $a \leq b$ folgt

$$\begin{aligned} a + c &\leq b + c && \text{(c beliebig reell)} \\ ac &\leq bc && \text{(c>0)} \\ ac &\geq bc && \text{(c<0)} \\ \frac{1}{a} &\geq \frac{1}{b} && \text{(ab>0)} \\ \frac{1}{a} &\leq \frac{1}{b} && \text{(a<0, b>0)} \end{aligned}$$

Lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablen

Ein lineares Ungleichungssystem mit einer Variablen x hat entweder keine Lösung (Ungleichungen sind nicht widerspruchsfrei), genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, wenn man die Menge der reellen Zahlen zugrunde legt, was allgemein für die Abschnitte 1.1. und 1.2. gelten soll.

Beispiel: $\left.\begin{aligned} 3x + 2 &\geq 5 \\ x + 1 &\leq 0 \end{aligned}\right\}$

Die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems ist leer ($L = \varnothing$). Es existiert keine reelle Zahl x, die sowohl die eine, als auch die andere Ungleichung erfüllt. Die Ungleichungen widersprechen einander. Die grafische Darstellung dieses Sachverhaltes zeigt das Bild 1.

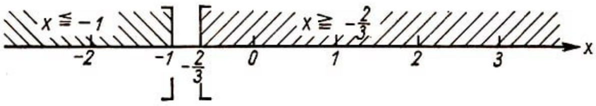


Bild 1

Beispiel: $\left.\begin{aligned} 3x + 2 &\geq 0 \\ x + 2 &\geq 0 \\ 6x + 4 &\leq 0 \end{aligned}\right\}$

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems besteht aus dem einen Element $x = -\frac{2}{3}$. $x = -\frac{2}{3}$ erfüllt alle gegebenen Ungleichungen, wie auch aus der grafischen Darstellung (Bild 2) hervorgeht.

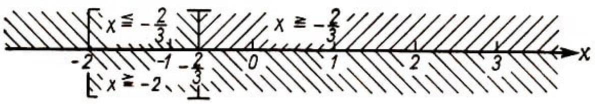


Bild 2

Beispiel: $\left.\begin{array}{r} 3x+2 \geq 0 \\ -6x+4 \leq 0 \end{array}\right\}$

Die Lösungsmenge dieses Systems umfasst alle reellen Zahlen, für die sowohl $x \geq -\frac{2}{3}$, als auch $x \geq \frac{2}{3}$ gilt. Man schreibt dafür $\dfrac{2}{3} \leq x < \infty$ oder $x \in \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$. Alle Punkte des nach rechts offenen Intervalls $\left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$ erfüllen die gegebenen Ungleichungen (Bild 3).

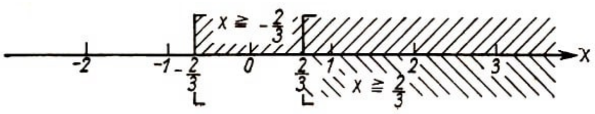


Bild 3

Beispiel: $\left.\begin{array}{r} 3x+2 \geq 0 \\ 6x-4 \leq 0 \end{array}\right\}$

Die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems umfasst alle reellen Zahlen, für die sowohl $x \geq -\frac{2}{3}$, als auch $x \leq \frac{2}{3}$ gilt, $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ oder $x \in \left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$. Alle Punkte des abgeschlossenen Intervalls $\left[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$ sind Lösungspunkte (siehe Bild 4).

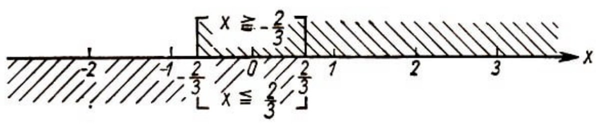


Bild 4

Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

Für die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen x_1 und x_2 gilt:

a) Es existiert keine Lösung, die Lösungsmenge ist leer. (Ungleichungen widersprechen einander !)

b) Die Lösungsmenge besteht aus genau einem Element (x_1, x_2), es existiert genau eine Lösung.

c) Es gibt unendlich viele Paare (x_1, x_2), die die gegebenen Ungleichungen erfüllen. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems wird durch alle Punkte dargestellt, die zu den Wertepaaren (x_1, x_2) gehören.

1.Fall: Der Lösungsraum ist ein von einem geschlossenen Streckenzug begrenzter konvexer Bereich.
Als "konvex" bezeichnet man einen Körper oder Bereich, der mit je zwei Punkten auch die ganze Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte enthält.

2.Fall: Der Lösungsbereich ist unendlich.

Den Ungleichungen der Form $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \leq b_i$ lassen sich Gleichungen $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 = b_i$ zuordnen, deren Bilder Geraden in der x_1x_2-Ebene sind. Die Geraden teilen die Ebene in jeweils zwei Halbräume, von denen die Punkte des einen Halbraumes die betreffende Ungleichung erfüllen.
Gilt das "$\leq$"-Zeichen, so erfüllen auch die Koordinaten der Punkte der Geraden selbst die Ungleichung, im anderen Fall sind die Punkte der Geraden selbst auszuschließen, sie gehören nicht zum Lösungsbereich. Diese Fälle treten in der Praxis jedoch nicht auf und werden deshalb hier auch nicht weiter besprochen.

Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen x_1 und x_2 lässt sich grafisch deuten, wie die Bilder 5, 6, 7 und 8 zeigen.

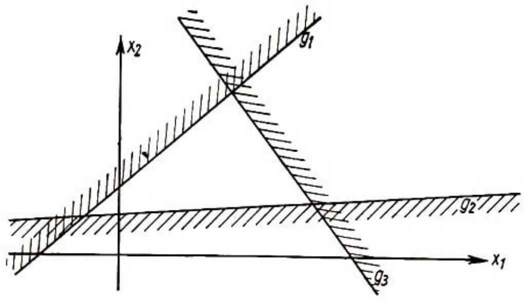


Bild 5

a) Die Lösungsmenge ist leer. Die Ungleichungen sind nicht widerspruchsfrei. Es existiert kein einziges Wertepaar (x_1, x_2), das allen drei Lösungshalbräumen angehört (Bild 5).

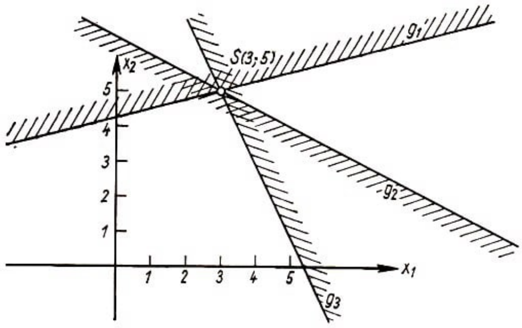


Bild 6

b) Die Lösungsmenge besteht aus dem einen Wertepaar (3, 5). Nur der Punkt S(3; 5) gehört allen drei Lösungshalbräumen an (Bild 6).

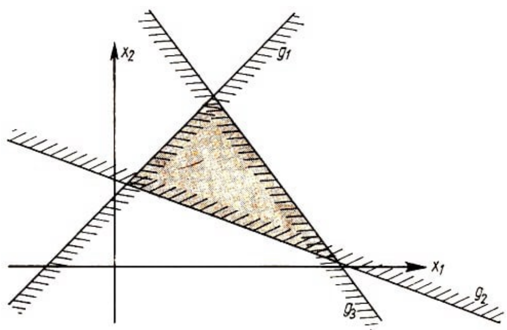


Bild 7

c1) Alle Punkte des von den drei Geraden begrenzten Raumes einschließlich der Randpunkte erfüllen alle drei Ungleichungen. Der Lösungsbereich ist endlich und konvex, was nicht bedeutet, dass endlich viele Lösungen vorliegen müssen (Bild 7).

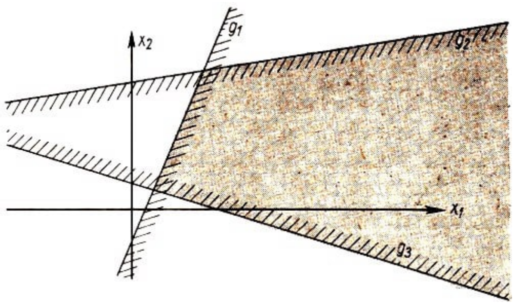


Bild 8

c2) Der Lösungsbereich ist unendlich (Bild 8).

Lineare Ungleichungssysteme mit drei Variablen

Liegt ein lineares Ungleichungssystem mit drei Variablen x_1, x_2, x_3 und den Ungleichungen $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \leq b_i$ vor, so können den Ungleichungen wiederum Gleichungen der Form $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ zugeordnet werden, deren Bilder Ebenen sind, die den dreidimensionalen Raum in jeweils zwei entsprechende Halbräume zerlegen, wobei die Punkte des einen die betreffende Ungleichung erfüllen, die des anderen jedoch nicht. Für den Lösungsbereich bzw. die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems gilt wiederum:

a) Der Lösungsbereich ist leer, die Ungleichungen widersprechen einander.

b) Die Lösungsmenge besteht aus genau einem Element (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})

c) 1.Fall: Der Lösungsbereich ist ein endlicher von Ebenen begrenzter konvexer Raum.
2. Fall: Der Lösungsbereich ist unendlich.

Die geometrische Deutung eines linearen Ungleichungssystems mit zwei bzw. drei Variablen überträgt man sinngemäß auf Ungleichungssysteme mit n Variablen $(n > 3)$. Man ordnet den Ungleichungen $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$ Gleichungen der Form $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ zu, deren Bilder "Hyperebenen" der Dimension $n-1$ sind.

Für den Lösungsbereich eines solchen linearen Ungleichungssystems gilt wiederum:

a) Der Lösungsbereich ist leer, die Ungleichungen widersprechen einander.

b) Die Lösungsmenge besteht aus genau einem Element $(x_{1s}, x_{2s}, ..., x_{ns})$.

c) 1. Fall: Der Lösungsbereich ist ein endlicher, von den Hyperebenen begrenzter, konvexer Raum.
2. Fall: Der Lösungsbereich ist unendlich.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen heißt "bestimmt", wenn die aus den Koeffizienten der Variablen gebildete Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Auf unbestimmte Systeme sowie auf die vielfältigen Lösungsmöglichkeiten eines bestimmten linearen Gleichungssystems zum Beispiel mit Hilfe der Matrizenrechnung wird hier nicht eingegangen. Für den interessierten Leser Sei auf die Literatur [1], [2] oder [11] aufmerksam gemacht.

Es soll hier jedoch die geometrische Deutung des Sachverhalts hervorgehoben werden. Liegt ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit den Variablen x_1 und x_2 vor, so sind damit die Bilder zweier Geraden in der x_1x_2-Ebene gegeben, deren Schnittpunkt die Lösung des Gleichungssystems darstellt, wie im Bild 9 angegeben ist.

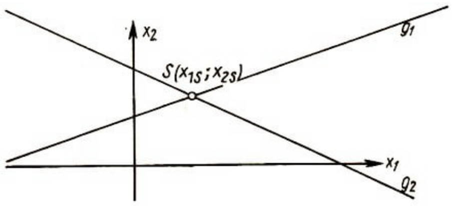


Bild 9

Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x_{1s}; x_{2s})$ erfüllen beide Geradengleichungen.

Ebenso kann die Lösung eines linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen mit den drei Variablen x_1, x_2 und x_3 als Schnittpunkt dreier Ebenen im dreidimensionalen Raum angesehen werden, die Koordinaten des Schnittpunktes erfüllen die drei Ebenengleichungen.

Sinngemäß überträgt man auch hier die geometrische Deutung auf lineare Gleichungssysteme von n Gleichungen mit n Variablen ($n > 3$). Als Lösung des Gleichungssystems sieht man den "Schnittpunkt" $S(x_{1s}; x_{2s}; ...; x_{ns})$ der den Gleichungen zugeordneten Hyperebenen im n-dimensionalen Raum an.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sollen noch zwei Zahlenbeispiele mit zwei und drei Variablen angeschlossen werden.

Beispiel: $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 30 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$ Lösung: $(5; 3)$.

Die grafische Lösung des Gleichungssystems ist im Bild 10 gegeben.

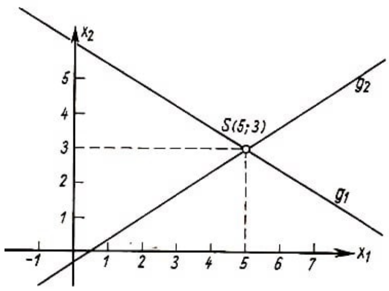


Bild 10

Beispiel: $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 19 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$ Lösung: $(2, 5, 7)$.

Die den Gleichungen zugeordneten Bilder stellen Ebenen im dreidimensionalen Raum dar. Die Ebenen schneiden einander im Punkt $S(2; 5; 7)$.

1.3 Kombinationen

Von n Elementen sollen k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt werden, wie z.B. wöchentlich beim Zahlenlotto oder bei der Wette "6 aus 49" aus einer gegebenen Grundmenge von 90 bzw. 49 Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge 5 bzw. 6 Elemente ausgewählt werden.

n und k sind natürliche Zahlen mit der Bedingung $n \geq k$. Eine solche Auswahl heißt Kombination ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse.

Oft ist die Frage nach der Anzahl aller möglichen Kombinationen von Interesse, wie z.B. bei dem Zahlenlotto oder einer anderen Wette. Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}$$

wobei n und k natürliche Zahlen sind mit $n \geq k$. $(k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k)$
Von n Elementen können k Elemente auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt werden ([10]).

Beispiel: Gegeben sind sieben voneinander verschiedene lineare Gleichungen mit drei Variablen x_1, x_2 und x_3. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung von jeweils drei voneinander verschiedenen der gegebenen Gleichungen gibt es, wenn die Reihenfolge der Gleichungen nicht berücksichtigt werden soll?
Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

1.4 Zahlenkongruenzen

Während in den Abschnitten 1.1. und 1.2. die Menge der reellen Zahlen zugrunde gelegt wurde, ist jetzt eine Beschränkung auf die Menge der ganzen Zahlen notwendig.

Definition: Zwei Zahlen a und b, die bei der Division durch m denselben Rest lassen, heißen "kongruent" nach dem "Modul" m. Man schreibt $a \equiv b$ mod m.

Speziell gilt $a \equiv 0$ mod m, wenn die Zahl a ein Vielfaches des Moduls m ist, $a = k \cdot m$. Es gilt $a \equiv b$ mod m, wenn die Zahl a bei der Division durch den Modul m den Rest b lässt, $a = k \cdot m + b$.

Ohne Beweis seien hier einige Gesetzmäßigkeiten für Zahlenkongruenzen genannt (Beweis sowie weitere Übungen siehe [3]).
Aus $a \equiv b$ mod m und $c \equiv d$ mod m folgt $a \pm c \equiv b \pm d$ mod m, $ac \equiv bd$ mod m sowie $a^n \equiv b^n$ mod m.
Bei Kongruenzen $ax \equiv b$ mod m ist die Bruchdarstellung $x \equiv \frac{b}{a}$ mod m nur dann gestattet, wenn a und m teilerfremd sind. Es gelten dann formal die Gesetze der Bruchrechnung für das Erweitern, Kürzen, für die Addition und die Multiplikation.

Beispiel: Man bestimme x in der Kongruenz $12x \equiv 7$ mod 13. Der Faktor 12 und der

Modul 13 sind teilerfremd, $(12, 13) = 1$. Es gilt also

$$x \equiv \frac{7}{12} \equiv \frac{7+13}{12} \equiv \frac{5}{3} \equiv \frac{5+13}{3} \equiv 6 \text{ mod } 13 \qquad , \qquad x = 13k + 6$$

Probe: $6 \cdot 12 = 72 = 5 \cdot 13 + 7$.

Die Verwendung von Zahlenkongruenzen ist angebracht bei der Lösung von diophantischen Gleichungen.

Beispiel: Gesucht sind die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $17x_1 + 5x_2 = 39$.
Man betrachtet die Gleichung modulo 5, weil dadurch der Term $5x_2$ zum Fortfall kommt:

$$17x_1 \equiv 2x_1 \text{ mod } 5; \qquad 5x_2 \equiv 0 \text{ mod } 5; \qquad 39 \equiv 4 \text{ mod } 5;$$
$$2x_1 \equiv 4 \text{ mod } 5; \qquad x_1 \equiv 2 \text{ mod } 5; \qquad x_1 = 5k + 2$$

Durch Einsetzen des Wertes x_1 in die Ausgangsgleichung erhält man

$$17 \cdot 5k + 5x_2 = 5 \qquad \text{oder} \qquad x_2 = 1 - l7k$$

Allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung $(5k + 2, 1 - 17k)$.
Probe: $85k + 34 + 5 - 85k = 39$; $39 = 39$.
Für $k = 0$ erhält man eine spezielle Lösung $(2, 1)$.

1.5 Vektoren

Ein Vektor lässt sich geometrisch anschaulich durch eine gerichtete Strecke von passend gewählter Länge darstellen. Bei der weiteren Behandlung werden wir neben dieser Pfeildarstellung für den zwei- und dreidimensionalen Raum die Darstellung eines n-dimensionalen Vektors als Zahlen-n-Tupel gebrauchen.
Der Übergang zu dieser Darstellung wird nötig werden, wenn die Begriffe der Vektorrechnung auf höhere Dimensionen $(n > 3)$ übertragen werden. Wir fassen zunächst die aus der Schule bekannten Gesetzmäßigkeiten für Vektoren mit $n = 3$ zusammen.

Für einen Vektor $\mathfrak{v}$ im dreidimensionalen Raum gilt die Komponentendarstellung $\mathfrak{v} = x_1\mathfrak{i} + x_2\mathfrak{j} + x_3\mathfrak{k}$, dabei sind i, j und k die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen eines rechtwinkligen räumlichen Rechtssystems, x_1, x_2 und x_3 die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{v}$.
Der Betrag des Vektors $\mathfrak{v}$ ist gegeben durch $v = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
$\mathfrak{v} = (x_1, x_2, x_3)$ heißt die Koordinatendarstellung des Vektors $\mathfrak{v}$. Hier ist $\mathfrak{v}$ als Zeilenvektor geschrieben. Daneben ist auch die Darstellung als Spaltenvektor $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gebräuchlich.
Vektoren werden komponentenweise oder auch koordinatenweise addiert oder subtrahiert.

Unter dem skalaren Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man die reelle Zahl $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$, wobei $\angle(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ der von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossene Winkel ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in einem gemeinsamen Anfangspunkt angetragen werden.

Sind die Vektoren $\mathfrak{a} = x_1\mathfrak{i}+x_2\mathfrak{j}+x_3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = y_1\mathfrak{i}+y_2\mathfrak{j}+y_3\mathfrak{k}$ in Komponentendarstellung gegeben, so wird

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Speziell gilt: Verschwindet das Skalarprodukt zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so stehen die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht aufeinander. Die Umkehrung dieses Satzes bezeichnet man als die Bedingung für die Orthogonalität zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}$.

Das Skalarprodukt kann auch zur Bestimmung des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels herangezogen werden:

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|}$$

Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\mathfrak{a} = 4\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j}$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} - \mathfrak{k} - 3\mathfrak{k}$.
Die Beträge der Vektoren sind $|\mathfrak{a}| = 3\sqrt{2}$; $|\mathfrak{b}| = \sqrt{2}$; $|\mathfrak{c}| = \sqrt{11}$. Für das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 3$, für den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel wird $\cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \frac{1}{2}$; $\angle(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = 60°$.
Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ stehen senkrecht aufeinander, weil $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = 0$ ist.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, ..., \mathfrak{a}_k$ heißen voneinander linear abhängig, wenn es eine Linearkombination

$$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + ... + \lambda_k\mathfrak{a}_k = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gibt.

Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, ...$, die die gleiche Richtung haben, können durch Vektorpfeile $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, ...$ veranschaulicht werden, die in ein und derselben Geraden liegen; solche Vektoren nennt man "kollinear".
Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind genau dann kollinear, wenn zwischen ihnen eine Beziehung $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$ mit $\lambda \neq 0$ besteht. Dies ist aber gerade die Bedingung für die lineare Abhängigkeit bei Zugrundelegung von zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; d.h. kollineare Vektoren sind stets linear abhängig voneinander.

Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., die durch Vektorpfeile veranschaulicht werden können, die in ein und derselben Ebene liegen, heißen "komplanar" . Drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind genau dann komplanar, wenn zwischen ihnen eine Beziehung $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b} + \lambda_2\mathfrak{c}$ besteht, wobei mindestens eine Zahl λ_i, von Null verschieden ist. Dies ist aber gerade die Bedingung für die lineare Abhängigkeit bei Zugrundelegung von drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$; d.h. komplanare Vektoren sind stets linear abhängig.

Beispiel: Die Vektoren $\mathfrak{a} = 6\mathfrak{i} - \frac{3}{2}\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} - \frac{1}{4}\mathfrak{j} + \frac{2}{3}\mathfrak{k}$ sind linear abhängig. Es gilt $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$, $\lambda = 6$. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind kollinear.

Beispiel: Die Vektoren $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = \frac{2}{5}\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \frac{2}{15}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = -\frac{2}{3}\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ sind linear abhängig. Es gilt $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b} + \lambda_2\mathfrak{c}$, $\lambda_1 = \frac{15}{4}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind komplanar, sie liegen, von einem Punkt aus angetragen, in einer Ebene.

Im dreidimensionalen Raum lässt sich jeder Vektor $\mathfrak{a}$ als Linearkombination dreier beliebig gewählter linear unabhängiger Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ darstellen, so dass gilt

$$\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3$$

Sind die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ speziell die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$, so erhält man die bekannte Komponentendarstellung des Vektors, wobei die reellen Zahlen λ_i, die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{a}$ sind.

Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\mathfrak{a} = 5\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_2 = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_3 = 6\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$. Es soll der Vektor $\mathfrak{a}$ als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_i$ dargestellt werden.

Ansatz: $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3$
oder ausführlich:

$$5\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} = \lambda_1(-\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) + \lambda_2(2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}) + \lambda_3(6\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k})$$

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in den entsprechenden Koordinaten übereinstimmen. Durch Koordinatenvergleich erhält man aus der einen Vektorgleichung die drei skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} 5 &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ -2 &= \lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 6 &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\left(\frac{177}{43}, \frac{121}{43}, \frac{25}{43}\right)$.
Damit gilt $\mathfrak{a} = \frac{177}{43}\mathfrak{a}_1 + \frac{121}{43}\mathfrak{a}_2 + \frac{25}{43}\mathfrak{a}_3$.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ heißen "Basis- oder Grundvektoren", sie bilden ein Basissystem. Stehen die Basisvektoren senkrecht aufeinander, wie z.B. die Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$, so heißt das System "orthogonal", haben die Basisvektoren den Betrag 1, so heißt das System "normiert".

Sollte dem Leser noch die nötige Sicherheit im Umgang mit den Elementen der Vektorrechnung fehlen, so sei an dieser Stelle auf die Bücher [2], [4] und [5] aufmerksam gemacht.

Man überträgt die für dreidimensionale Vektoren gültigen Beziehungen sinngemäß auf Vektoren der Dimension n.
Nach Zugrundelegung eines entsprechenden Basissystems gilt für die Koordinatendarstellung eines n-dimensionalen Vektors $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Der Betrag des Vektors ist $\mathfrak{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Sind die n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\mathfrak{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ gegeben, so gilt für die Summe bzw.

Differenz:

$$\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n)$$

Die Vektoren werden koordinatenweise addiert bzw. subtrahiert.
Für das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... x_n y_n$$

Zwei n-dimensionale Vektoren heißen orthogonal, wenn das aus ihnen gebildete Skalarprodukt den Wert Null hat.

Beispiel: Die Vektoren $\mathfrak{a} = (7, 2, 6, 4, 1)$ und $\mathfrak{b} = (3, 3, -3, -2, -1)$ sind orthogonal, da $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ ist.

Ein Vektor $\mathfrak{a}$ im n-dimensionalen Raum lässt sich als Linearkombination aus n beliebig gewählten, linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_n$ darstellen, so dass gilt

$$\mathfrak{a} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + ... + \lambda_n \mathfrak{a}_n$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ heißen Basisvektoren, sie bilden im n-dimensionalen Raum ein Basissystem.

1.6 Analytische Geometrie

Eine-Gerade g ist bestimmt durch die Angabe von zwei Punkten P_1 und P_2 oder durch einen Punkt P_1 und die Richtung eines Vektors $\mathfrak{s}$.
Zweipunkteform der Geradengleichung: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$.
Punktrichtungsform der Geradengleichung: $\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{s}$

Bei vorgegebenen Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ bzw. $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{s}$ erhält man zu jeder beliebigen reellen Zahl λ einen Vektor $\mathfrak{x}$, der vom Ursprung aus nach einem Punkt der Geraden zeigt (siehe Bild 11).

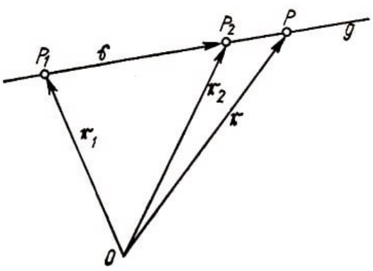


Bild 11

Man erhält alle Punkte der Geraden g, wenn λ alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Umgekehrt lässt sich zu jedem Punkt der Geraden g eine Zahl λ so angeben, dass die Vektorgleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$ bzw. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{s}$ erfüllt wird.
λ heißt der "Parameter" der Geradengleichung.

Beispiel: Es seien die Punkte $P_1(7; 2; 5)$ und $P_2(-1; 6; 3)$ gegeben. Die Gleichung der durch die Punkte P_1 und P_2 bestimmten Geraden ist

$$\mathfrak{x} = 7\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k} + \lambda(-8\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k})$$

Für spezielle Werte des Parameters λ erhält man spezielle Punkte der Geraden.
Für $\lambda = -2, -1, \frac{1}{2}, 3$ erhält man die Punkte $P_3(23; -6; 9)$; $P_4(15; -2; 7)$; $P_5(3; 4; 4)$ und $P_6(-17; 14; -1)$, die auf der Geraden g liegen und deren Koordinaten die Gleichung der Geraden g erfüllen.

Liegen die gegebenen Punkte P_1 und P_2 speziell in der xy- Ebene, so wird die Zweipunktegleichung der Geraden in der xy-Ebene mit $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$

$$x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + \lambda((x_2 - x_1)\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\mathfrak{j})$$

Durch Koordinatenvergleich und Elimination des Parameters λ erhält man eine parameterfreie Darstellung der Gleichung einer Geraden in der xy-Ebene:

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1); \qquad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1); \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Analoge Betrachtungen lassen sich auch an der Punktrichtungsform der Geradengleichung durchführen.

Allgemein stellt $Ax_1 + Bx_2 = C$ in der x_1x_2-Ebene die Gleichung einer Geraden dar, welche die x_1-Achse im Punkt $S_1\left(\frac{C}{A}; 0\right)$ und die x_2-Achse im Punkt $S_2\left(0; \frac{C}{B}\right)$schneidet. Jede Geradengleichung der Form $Ax_1 + Bx_2 = C$ lässt sich in eine Parameterdarstellung der Geradengleichung überführen.

Beispiel: Es sei die Gleichung $3x_1 + 4x_2 = 6$ der Geraden g gegeben. Ein Punkt der Geraden g ist $P_1\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Die Gleichung der durch den Ursprung verlaufenden Parallelen zu g ist $3x_1 + 4x_2 = 0$. Damit erhält man einen die Richtung der Geraden g bestimmenden Vektor $\mathfrak{s} = 4\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j}$ und die Parameterdarstellung der Geraden $g : \mathfrak{x} = \frac{3}{2}\mathfrak{j} + \lambda(4\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j})$.

Die Koeffizienten der in der ersten Form gegebenen Geradengleichung sind die Koordinaten einen zur Geraden g orthogonalen Vektors $\mathfrak{y} = 3\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j}$. es gilt $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{s} = 0$.

Durch skalare Multiplikation des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ in der Richtung des Vektors $\mathfrak{y}$ mit einem vom Ursprung O zu einem beliebigen Punkt P der Geraden g führenden Vektor $\mathfrak{x}$ erhält man den Abstand p der Geraden g vom Ursprung O (Bild 12).

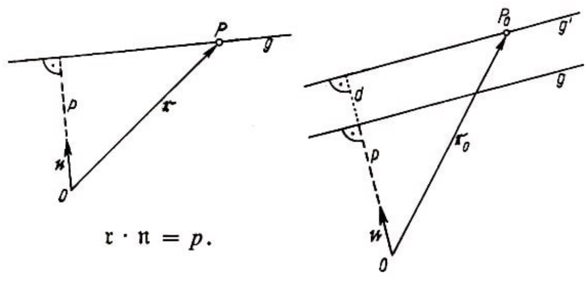


Bild 12, 13

Analog erhält man durch skalare Multiplikation des Vektors $\mathfrak{n}$ mit einem vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt P_0 führenden Vektor $\mathfrak{x}_0$ den Abstand d der durch P_0 verlaufenden Parallelen g' zu g vom Ursprung O (Bild 13).

$$\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{n} = p + d$$

Damit wird der Abstand des Punktes P_0 von der Geraden g:

$$d = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{n}$$

Für das obige Beispiel gilt: $\mathfrak{y} = 3\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j}$

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{y}}{|\mathfrak{y}|} = \frac{1}{5}(3\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j}); \qquad P_1\left(0; \frac{3}{2}\right); \qquad \mathfrak{x} = \frac{3}{2}\mathfrak{j}; \qquad p = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n} = \frac{6}{5}$$

Für den Abstand d des Punktes $P_0(5;-1)$ von der durch die Gleichung $3x_1 + 4x_2 = 6$ gegebenen Geraden g erhält man

$$d = \frac{1}{5}(15 - 10) = 1$$

Eine Ebene ε im dreidimensionalen Raum ist durch die Angabe von drei Punkten P_1, P_2 und P_3 oder durch einen Punkt P_1 der Ebene und die Richtung zweier linear unabhängiger, in der Ebene ε verlaufender Vektoren $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ bestimmt, wie im Bild 14 angegeben ist.

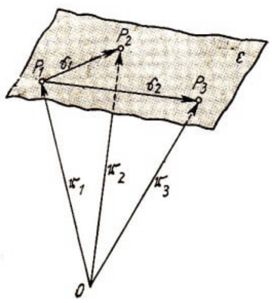


Bild 14

Dreipunkteform der Ebenengleichung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) + \lambda_2(\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1)$$

Punktrichtungsform der Ebenengleichung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1\mathfrak{s}_1 + \lambda_2\mathfrak{s}_2$$

Bei vorgegebenen Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$ bzw. $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ erhält man zu jedem beliebigen reellen Zahlenpaar (λ_1, λ_2) einen Vektor $\mathfrak{x}$, der vom Ursprung aus nach einem Punkt der Ebene ε zeigt.
Man erhält alle Punkte der Ebene ε, wenn die Parameter λ_1 und λ_2 alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Umgekehrt lässt sich zu jedem beliebigen Punkt P der Ebene ε ein Zahlenpaar (λ_1, λ_2) angeben, das die Vektorgleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1\mathfrak{s}_1 + \lambda_2\mathfrak{s}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) + \lambda_2(\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1)$$

erfüllt.

Beispiel: Es seien die Punkte $P_1(3;2;6)$; $P_2(8;-1;5)$ und $P_3(-1;5;7)$ gegeben. Die Gleichung der durch die drei Punkte bestimmten Ebene ist

$$\mathfrak{x} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} + \lambda_1(5\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}) + \lambda_2(-4\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k})$$

Für spezielle Werte der Parameter λ_1 und λ_2 erhält man spezielle Punkte, die der Ebene ε angehören. Für $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 2); (2, -1)$ erhält man die Punkte $P_4(-10; 11; 9)$ und $P_5(17; -7; 5)$, die in der Ebene ε liegen und deren Koordinaten die Gleichung der Ebene ε erfüllen.
Die eine Vektorgleichung der Ebene ε ersetzt wiederum drei skalare Gleichungen

$$x_1 = 3 + 5\lambda_1 - 4\lambda_2; \qquad x_2 = 2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2; \qquad x_3 = 6 - \lambda_1 + \lambda_2$$

Dadurch wird die Aufstellung einer parameterfreien Gleichung der Ebene ε möglich.

Allgemein stellt $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ im dreidimensionalen Raum die Gleichung einer Ebene ε dar. Man erhält deren Spurgeraden in den drei Tafelebenen des rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems durch Nullsetzen der entsprechenden Koordinate x_i.
Zum Beispiel ist für $x_3 = 0$ $Ax_1 + Bx_2 = D$ die Gleichung der Grundrissspur der Ebene ε.

Jede Gleichung der Form $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ lässt sich wieder in eine Parameterdarstellung der Ebenengleichung überführen.

Beispiel: Es sei die Gleichung der Ebene ε durch $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6$ gegeben. Ein Punkt der Ebene ist $P_1(3; 0; 0)$. Die Gleichung der durch den Ursprung verlaufenden Parallelebene zu ε ist $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$.
Es sind zwei linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zu bestimmen, deren Koordinaten die Gleichung dieser Parallelebene erfüllen. Die Ortsvektoren $\mathfrak{s}_1 = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{s}_2 = 3\mathfrak{i} - \mathfrak{k}$ erfüllen die Gleichung der Parallelebene. Damit wird die Parameterdarstellung der Ebene

$$\mathfrak{x} = 3\mathfrak{i} + \lambda_1(3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}) + \lambda_2(3\mathfrak{i} - \mathfrak{k})$$

Die Koeffizienten der in der ersten Form gegebenen Ebenengleichung sind die Koordinaten eines zur Ebene ε orthogonalen Vektors $\mathfrak{y} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k}$.
Es gilt: $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{s}_1 = 0$ und $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{s}_2 = 0$.

Durch skalare Multiplikation des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ in der Richtung des Vektors $\mathfrak{y}$ mit einem zu einem beliebigen Punkt P der Ebene ε führenden Ortsvektor $\mathfrak{x}$ erhält man den Abstand der Ebene ε vom Ursprung O (Bild 15).

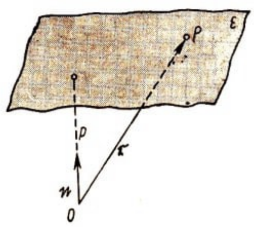


Bild 15

Analog erhält man durch skalare Multiplikation des Vektors $\mathfrak{n}$ mit einem zu einem beliebigen Punkt P_0 führenden Ortsvektor $\mathfrak{x}_0$ den Abstand der durch P_0 verlaufenden Parallelebene zu ε von O (Bild 16).

$$\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{n} = p + d$$

Damit wird der Abstand des Punktes P_0 von der Ebene ε:

$$d = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{n}$$

Für das obige Beispiel gilt:

$$\mathfrak{y} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} \qquad ; \qquad \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{y}}{|\mathfrak{y}|} = \frac{1}{7}(2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k})$$

$$P_1(3;0;0); \qquad \mathfrak{x} = 3\mathfrak{i}; \qquad p = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n} = \frac{6}{7}$$

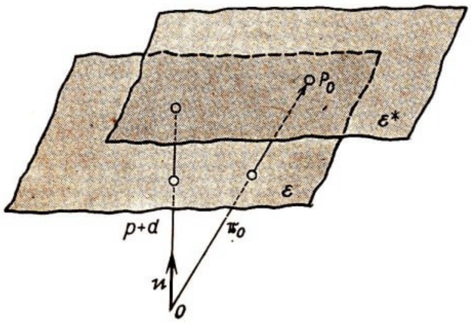


Bild 16

Für den Abstand d des Punktes $P_0(8;4;8)$ von der durch die Gleichung $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6$ gegebenen Ebene ε erhält man:

$$d = \frac{1}{7}(5\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k}) \cdot (2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k}) = 10$$

Für den Punkt $P_0'(1;-2;-3)$ wäre der Abstand d' von der Ebene $d = -4$. Das negative Vorzeichen im Ergebnis gibt an, dass der Punkt P_0' dem gleichen Halbraum angehört wie der Ursprung. P_0' und O liegen auf derselben Seite der Ebene ε.
Weitere Übungen zur Analytik der Geraden und der Ebene findet der Leser in; dem auf Seite 20 erwähnten Ergänzungsbuch oder in [2].

Man überträgt auch hier die für zwei und drei Dimensionen gültigen Ergebnisse sinngemäß auf die beliebige Dimension n.

Im n-dimensionalen Raum ist eine "Hyperebene der Dimension $n-1$" durch die Angabe von n Punkten P_1, P_2, ..., P_n oder durch einen Punkt P_1 und die Richtungen von $(n-1)$ linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$, ..., $\mathfrak{s}_{n+1}$, die die Gleichung der zur Hyperebene durch O verlaufenden Parallelebene befriedigen, eindeutig bestimmt.

Gleichung einer Hyperebene der Dimension $n-1$ in Parameterdarstellung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) + \lambda_2(\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1) + ... + \lambda_{n-1}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_1)$$

oder

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1\mathfrak{s}_1 + \lambda_2\mathfrak{s}_2 + ... + \lambda_{n+1}\mathfrak{s}_{n-1}$$

Bei vorgegebenen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, ..., $\mathfrak{x}_n$ bzw. $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$, ..., $\mathfrak{s}_{n-1}$ erhält man zu jedem beliebigen Zahlen-n-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1})$ einen Ortsvektor $\mathfrak{x}$, dessen Spitze ein Punkt der Hyperebene ε ist.

Man erhält alle Punkte der Hyperebene ε, wenn die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Umgekehrt lässt sich zu jedem beliebigen Punkt P der Hyperebene ε ein n-Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ angeben, das die Vektorgleichung der Hyperebene erfüllt.

Beispiel: Es seien die Punkte $P_1(5;1;1;3)$; $P_2(2;4;6;2)$; $P_3(1;2;3;4)$ und $P_4(5;7;2;5)$ gegeben. Die Gleichung der durch die vier Punkte bestimmten Hyperebene ε ist:

$$\mathfrak{x} = (5,1,1,3) + \lambda_1(-3,3,5,-1) + \lambda_2(-4,1,2,1) + \lambda_3(0,6,1,2)$$

Für spezielle Werte der Parameter λ_i erhält man spezielle Punkte, die der Hyperebene angehören. Für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1,2,3)$; $(2,-1,-1)$ erhält man die Punkte $P_5(0;18;3;12)$ und $P_6(3;0;8;-2)$, die der Hyperebene angehören und deren Koordinaten die Gleichung der Hyperebene erfüllen.
Die eine Vektorgleichung ersetzt vier skalare Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 3\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ x_2 &= 1 + 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 \\ x_3 &= 1 + 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ x_4 &= 3 - \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{aligned}$$

Damit wird wiederum die Aufstellung einer parameterfreien Gleichung der Hyperebene ε möglich.

Allgemein stellt $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = a$ im n-dimensionalen Raum die Gleichung einer Hyperebene der Dimension $n-1$ dar, die sich durch Wahl eines Punktes $P_1(x_1; x_2; ..., x_n)$ und $(n-1)$ linear unabhängiger, der Gleichung der Hyperebene genügender Vektoren wiederum in eine Parameterdarstellung überführen lässt.

Beispiel: Es sei die Gleichung einer Hyperebene ε der Dimension 4 gegeben durch $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 10$. Ein der Hyperebene ε angehörender Punkt ist $P_1(5;0;0;0;0)$. Die Gleichung der durch den Ursprung verlaufenden Parallelebene erhält man durch Nullsetzen des Absolutgliedes: $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$. Es sind vier linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{s}_1 ... \mathfrak{s}_4$ zu bestimmen, deren Koordinaten die Gleichung dieser Parallelebene erfüllen. Man erhält zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= (1,-2,0,0,0); \qquad & \mathfrak{s}_2 &= (0,3,1,0,0); \\ \mathfrak{s}_3 &= (0,1,0,-1,0); \qquad & \mathfrak{s}_4 &= (0,0,0,1,1) \end{aligned}$$

Eine Parameterdarstellung der Hyperebene ε ist:

$$\mathfrak{x} = (5,0,0,0,0) + \lambda_1(1,-2,0,0,0) + \lambda_2(0,3,1,0,0) + \lambda_3(0,1,0,-1,0) + \lambda_4(0,0,0,1,1)$$

Die Koeffizienten der in der ersten Form gegebenen Ebenengleichung sind die Koordinaten eines zur Hyperebene ε orthogonalen Vektors $\mathfrak{y} = (2,1,-3,1,-1)$. Es gilt $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{s}_i = 0$ $(i = 1,2,3,4)$.

Durch skalare Multiplikation des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ in Richtung des Vektors $\mathfrak{y}$ mit einem zu einem beliebigen Punkt der Hyperebene ε führenden Ortsvektor $\mathfrak{x}$ erhält man den Abstand p der Hyperebene ε vom Ursprung O. $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n} = p$.

Analog erhält man durch skalare Multiplikation des Vektors $\mathfrak{n}$ mit einem zu einem beliebigen Punkt P_0 des n-dimensionalen Raumes führenden Ortsvektor $\mathfrak{x}_0$ den Abstand der durch P_0 verlaufenden Parallelebene zu ε von O. $\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{n} = p + d$.
Damit wird der Abstand des Punktes P_0 von der Hyperebene ε

$$d = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{n}$$

Für das obige Beispiel gilt: $\mathfrak{y} = (2, 1, -3, 1, -1)$;

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{y}}{|\mathfrak{y}|} = \frac{1}{4}(2, 1, -3, 1, -1); \qquad P_1(5; 0; 0; 0; 0)$$

$$\mathfrak{x}_1 = (5, 0, 0, 0, 0); \qquad p = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{n}$$

Für den Abstand des Punktes $P_0(8; 4; 1; 3; 2)$ von der durch die Gleichung $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 10$ gegebenen Hyperebene ε erhält man $d = \frac{1}{4}(2, 1, -3, 1, -1) \cdot (3, 4, 1, 3, 2) = 2$.
Von besonderem Interesse ist oft die Gleichung der Schnittgeraden g zweier Ebenen.

Beispiel: Die Gleichungen zweier Ebenen ε_1 und ε_2 seien gegeben durch

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \qquad , \qquad 2x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

Durch Addition der Gleichungen erhält man

$$5x_1 + 3x_2 = 16$$

Die Gleichung wird für $x_1 = 2$ und $x_2 = 2$ erfüllt. Damit erhält man durch Einsetzen dieser Werte in eine der gegebenen Gleichungen den Punkt $P_1(2; 2; 0)$ der Schnittgeraden. Um einen Richtungsvektor der Schnittgeraden zu erhalten, betrachtet man die durch den Ursprung O verlaufenden Parallelebenen $3x_1+2x_2+x_3 = 0$ und $2x_1+x_2-x_3 = 0$. Durch Addition folgt $5x_1 + 3x_2 = 0$ oder $x_1 = -\frac{3}{5}x_2$. Damit erhält man aus einer der Gleichungen $x_3 = -\frac{1}{5}x_2$. Ein Richtungsvektor der Schnittgeraden g ist $\mathfrak{s}^* = -\frac{3}{5}\mathfrak{i}+\mathfrak{j}-\frac{1}{5}\mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{s} = 3\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$.
Die Gleichung der Geraden ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{s}$ oder $\mathfrak{x} = 2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \lambda(3\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k})$.

Allgemein gilt: Alle Punkte, die zwei Hyperebenen (die nicht zueinander parallel sind) der Dimension n angehören, sind Punkte einer Hyperebene der Dimension $(n - 1)$.
Alle Punkte, die k Hyperebenen (die nicht paarweise zueinander parallel sind) der Dimension n angehören, sind Punkte einer Hyperebene der Dimension $(n - k + 1)$.

Oder:

n Hyperebenen der Dimension $n - 1$, die nicht paarweise zueinander parallel verlaufen, haben genau einen Punkt $P_1(x_1, ..., x_n)$ gemeinsam.
$(n - 1)$ Hyperebenen der Dimension $n - 1$, die nicht paarweise zueinander parallel verlaufen, haben genau eine Schnittgerade der Dimension 1 gemeinsam, deren sämtliche Punkte allen gegebenen Hyperebenen angehören.

2 Eine Aufgabe der linearen Optimierung mit zwei Variablen

Zu bestimmen ist das Maximum der Funktion $z = 20x_1 + 30x_2$ für nichtnegative Werte der Variablen x_1 und x_2 unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$x_1 + 8x_2 \leq 160 \tag{I}$$
$$9x_1 + 4x_2 \leq 216 \tag{II}$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 154 \tag{III}$$

Die im Text der Aufgabe gestellte Forderung nach Nichtnegativität für die Variablen x_1 und x_2 wird durch zwei weitere Nebenbedingungen zum Ausdruck gebracht:

$$x_1 \geq 0 \qquad , \qquad x_2 \geq 0 \tag{IV,V}$$

2.1 Ökonomische Deutung der Aufgabe

Annahme: Ein volkseigener Betrieb hat nach Erfüllung der Staatsplanaufgaben noch freie Kapazität für die Produktion zweier Erzeugnisse E_1 und E_2, von denen ein Erzeugnis der Sorte E_1 20, ein Erzeugnis der Sorte E_2 30 Geldeinheiten Gewinn bringt.
Es wird nun die Frage gestellt, wie viele Erzeugnisse von jeder Sorte produziert werden müssen, wenn der Gesamtgewinn durch diese zusätzliche Produktion möglichst groß werden soll.

Die Anzahl der Produkte E_1 sei x_1, die Anzahl der Produkte E_2 sei x_2. Dann ist $z = 20x_1 + 30x_2$ die Gewinnfunktion, die einen maximalen Wert bei Einhaltung gewisser Nebenbedingungen erreichen soll.
Diese Funktion $z(x_1; x_2)$, die ein Extremum erreichen soll, heißt "Zielfunktion".

Das Auftreten der Nebenbedingungen IV und V ist trivial, es ist klar, dass keine "negative Anzahl" von Erzeugnissen produziert werden kann. Die anderen Nebenbedingungen sind meistens irgendwelche Kapazitätsbeschränkungen.
Es werde angenommen, dass für die Herstellung der Erzeugnisse E_1 und E_2 Maschinenstunden, Arbeitsstunden in der Schmiede und Buntmetall benötigt werden, wobei der Betrieb für den betreffenden Zeitraum 160 Maschinenstunden, 216 Stunden in der Schmiede und 15,4 kg Buntmetall zur Verfügung hat.

Wird für ein Erzeugnis der Sorte E_1 eine Maschinenstunde benötigt, während zur Herstellung eines Erzeugnisses der Sorte E_2 8 Maschinenstunden gebraucht werden, so gibt die Ungleichung I $x_1 + 8x_2 \leq 160$ an, dass bei der gesamten Produktion der zusätzlichen Erzeugnisse E_1 und E_2 die freie Kapazität von 160 Maschinenstunden nicht überschritten werden darf. Es wird andererseits nicht gefordert, dass die 160 Stunden voll ausgenutzt werden müssen, was durch das "$\leq$"-Zeichen zum Ausdruck kommt.

Werden für ein Erzeugnis der Sorte E_1 9 und für ein Erzeugnis der Sorte E_2 4 Stunden in der Schmiede benötigt, so gibt die Ungleichung II $9x_1 + 4x_2 \leq 216$ an, dass in dem betreffenden Zeitraum nicht mehr als 216 Stunden für die Produktion der Erzeugnisse

E_1 und E_2 in der Schmiede zur Verfügung stehen, wobei die 216 Stunden nicht voll ausgenutzt zu werden brauchen.

Die Ungleichung III $5x_1 + 6x_2 \leq 154$ sagt aus, dass bei einem Verbrauch von 0,5 kg Buntmetall für ein Erzeugnis der Sorte E_1 und 0,6 kg für ein Erzeugnis E_2 bei der Gesamtproduktion der Erzeugnisse E_1 und E_2 nicht mehr als 15,4 kg Buntmetall verarbeitet werden können.

Die Aufgabenstellung heißt in diesem Fall: Wie viele Erzeugnisse von jeder Sorte müssen produziert werden, wenn der Reingewinn unter Einhaltung der in den Nebenbedingungen zum Ausdruck gebrachten Kapazitätsbeschränkungen möglichst groß werden soll?

2.2 Geometrische Deutung der Aufgabe

Durch die Ungleichungen sind in der x_1x_2-Ebene Halbräume definiert, deren Punkte die betreffende Ungleichung erfüllen.
Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene, die allen Lösungshalbräumen angehören, geben den Lösungsbereich des Ungleichungssystems an. Für den Lösungsbereich eines Ungleichungssystems gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Es existiert kein Punkt, dessen Koordinaten alle Ungleichungen erfüllen.

2. Es gibt genau einen Punkt, der allen Lösungshalbräumen angehört.

3. Es existieren unendlich viele Punkte, deren Koordinaten alle Ungleichungen erfüllen.

1. Fall: Die Menge der zum Lösungsbereich gehörenden Punkte bildet einen endlichen, konvexen, von den den Ungleichungen zugeordneten Geraden begrenzten Bereich.

2. Fall: Die Menge der zum Lösungsbereich gehörenden Punkte bildet einen unendlichen, nicht begrenzten Bereich.

Eine Aufgabe der linearen Optimierung ist nur dann sinnvoll, wenn der Punkt 3; Fall 1 zutrifft. Es liegt ein durch die Ungleichungen gegebener konvexer Lösungsbereich vor, wobei die Punkte der Grenzgeraden mit zum Lösungsbereich gehören (Bild 17).

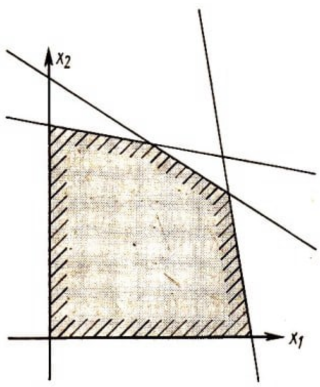


Bild 17

Es ergibt sich die Frage:
Für welchen Punkt, bzw. für welche Punkte des Lösungsbereiches nimmt die Zielfunktion $z = z(x_1; x_2)$ ein Maximum an?

Der Zielfunktion $z = 20x_1 + 30x_2$ ist im dreidimensionalen Raum eine Ebene ε_z zugeordnet, die wegen Fehlens eines Absolutgliedes den Ursprung 0 des Koordinatensystems enthält.

Für $z = 0$ erhält man die Schnittgerade der Ebene ε_z mit der x_1x_2-Ebene: $2x_1+3x_2 = 0$ (Spur der Ebene ε_z).
Eine Parallele im Abstand d, zur Spurgeraden in der x_1x_2-Ebene kann als senkrechte Projektion einer der Ebene ε_z angehörenden Geraden g_i angesehen werden, deren sämtliche Punkte denselben z-Wert besitzen (Bild 18).

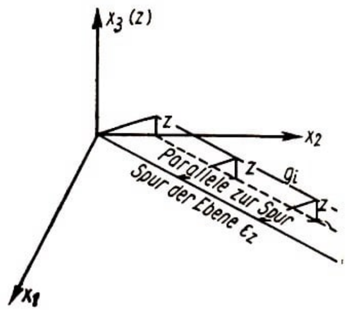


Bild 18

Durch Vergrößerung des Abstandes d, werden die z-Werte der entsprechenden Geraden g_i in der Ebene ε_z größer. Durch den in der x_1x_2-Ebene vorliegenden Lösungsbereich des Ungleichungssystems ist die Parallelverschiebung der Spurgeraden aber nur bis zu einem äußersten Punkt des Lösungsbereiches (Eckpunkt des den konvexen Bereich begrenzenden Polygonzuges) oder bis zu einer Kante desselben möglich.

Der zu diesem Punkt gehörende z-Wert (bzw. der zu der betreffenden Kante gehörende z-Wert) der Ebene ε_z ist der größtmögliche. Die Koordinaten des Punktes erfüllen alle gegebenen Ungleichungen.
Der den größten z-Wert der Ebene ε_z bestimmende Punkt des Lösungsbereiches heißt "optimaler Punkt" und wird kurz mit "Optimum" (P_{opt}) bezeichnet.

Verläuft die Spur der Ebene ε_z parallel zu der Grenzgeraden des Lösungsbereiches, die einen optimalen Punkt enthält, so erhält man bei der Parallelverschiebung der Spurgeraden die zum Lösungsbereich gehörende Strecke dieser Grenzgeraden, deren sämtliche Punkte alle Ungleichungen erfüllen.
Jeder Punkt dieser Strecke ist dann optimaler Punkt und liefert denselben größtmöglichen z-Wert.

2.3 Geometrische Lösung der Aufgabe

Aus den Betrachtungen des vorigen Abschnittes ergibt sich für die geometrische Lösung der Aufgabe ein Lösungsschema. (siehe nächste Seite)

Für $x_1 = 8$ und $x_2 = 19$ wird das Maximum der Zielfunktion $z = 730$ erreicht. Die geometrische Lösung ist im Bild 19 dargestellt. Bei der zusätzlichen Produktion der Erzeugnisse E_1 und E_2 werden maximal 730 Geldeinheiten Gewinn erzielt, wenn 8 Erzeugnisse der Sorte E_1 und 19 Erzeugnisse der Sorte E_2 hergestellt werden.

1. Allen gegebenen Ungleichungen werden Grenzgeraden in der x_1x_2-Ebene zugeordnet.

2. Darstellung der Grenzgeraden in einem rechtwinkligen x_1x_2-System.

3. Aufsuchen des Lösungsbereiches, dessen Punkte alle gegebenen Ungleichungen erfüllen.

4. Der Zielfunktion wird die Ebene ε_z und dieser für $z = 0$ ihre Spurgerade in der x_1x_2-Ebene zugeordnet

5. Darstellung der Spurgeraden in der x_1x_2-Ebene.

6. Größtmögliche Parallelverschiebung der Spurgeraden in den Lösungsbereich hinein.

Man erreicht bei der Parallelverschiebung einen Eckpunkt des Lösungsbereiches.

7. Bestimmung der Koordinaten des optimalen Punktes.

Man erreicht bei der Parallelverschiebung eine Kante des Lösungsbereiches.

7. Bestimmung der Koordinaten der die Strecke begrenzenden Punkte.

8. Angabe des Ergebnisses der Aufgabe: Koordinaten des Optimums, bzw. der die Strecke der optimalen Punkte begrenzenden Randpunkte; optimaler Wert der Zielfunktion.

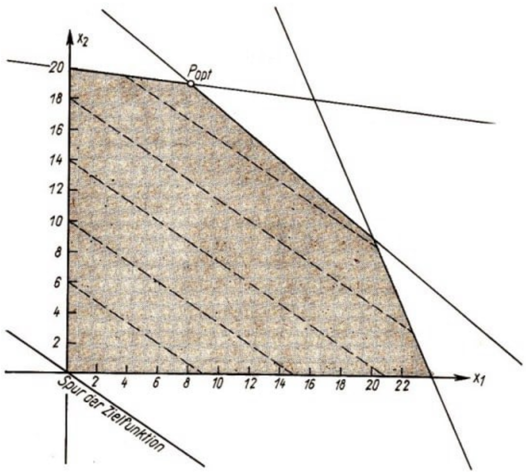


Bild 19

Die 160 zur Verfügung stehenden Maschinenstunden werden voll ausgelastet, das Kontingent an Buntmetall (15,4 kg) wird restlos verbraucht. Die freie Kapazität in der Schmiede wird nicht erschöpft, von den 216 freien Stunden werden nur 148 Stunden benötigt, es bleiben 68 Stunden frei.

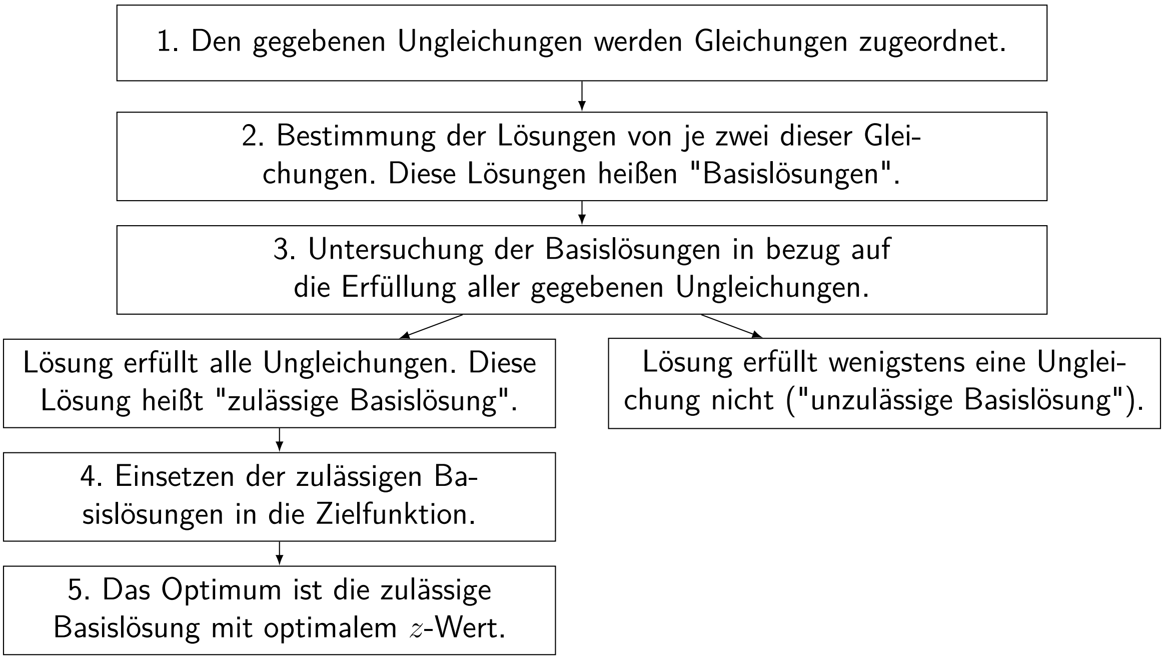
Bemerkung: Die geometrische Lösung des Problems hat den Vorteil größtmöglicher

Anschaulichkeit. Mit Mitteln, die schon einem Schüler der Klasse 8 geläufig sind, erhält man das Ergebnis. Nachteile der Methode sind, dass die geometrische Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung im allgemeinen nicht auf Probleme mit mehr als zwei Variablen angewendet werden kann und dass bei großen oder gebrochenen Zahlen Ungenauigkeiten beim Ablesen der Ergebnisse auftreten können.

2.4 Arithmetische Lösung der Aufgabe

Mit der "arithmetischen Lösung" einer Aufgabe der linearen Optimierung soll hier und im folgenden das in diesem Abschnitt 2.4. angegebene Verfahren bezeichnet werden.
Für das Optimum kommen nur Eckpunkte des Lösungsbereiches in Betracht (siehe Abschnitt 2.3.) und diese Punkte sind Schnittpunkte der Grenzgeraden des Lösungsbereiches.

Lösungsschema für die arithmetische Lösung der Aufgabe:



Auf den Sonderfall, dass auch alle Punkte einer Strecke "optimale Punkte" sein können, wurde hier nicht eingegangen. Dieser Sonderfall wird an späterer Stelle besprochen werden.

1. Die den gegebenen Ungleichungen zugeordneten Gleichungen sind

$$x_1 + 8x_2 = 160 \quad (1)$$
$$9x_1 + 4x_2 = 216 \quad (2)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 154 \quad (3)$$
$$x_1 = 0 \quad (4)$$
$$x_2 = 0 \quad (5)$$

Bemerkung: Die den Ungleichungen zugeordneten Gleichungen sind gerade die Gleichungen der Grenzgeraden in der geometrischen Lösung der Aufgabe (Abschnitt 2.3.).

Es mag auch bei der arithmetischen Lösung angebracht sein, auf gewisse Symbole der geometrischen Lösung als zusätzliches Anschauungsmoment hinzuweisen. Der Vergleich mit der geometrischen Lösung ist möglich und bietet sich an dieser Stelle an.
Der Leser möge aber beachten, dass die hier angegebene arithmetische Lösung völlig unabhängig von der im Abschnitt 2.3. gegebenen geometrischen Lösung ist.

Wenn in den weiteren Ausführungen jedoch auch bei arithmetischen Lösungen von "Gleichungen der Grenzgeraden" oder "Hyperebenen" die Rede ist, so möge der Leser beachten, dass damit nur auf den Vergleich mit der sich durch größte Anschaulichkeit auszeichnenden geometrischen Lösung für Probleme mit zwei Variablen hingewiesen werden soll.
Es handelt sich aber in keinem dieser Fälle um geometrische, sondern um rein arithmetische Momente, nämlich um Gleichungen, die den entsprechenden Ungleichungen zugeordnet sind. Diese Gleichungen wären bei einer geometrischen Deutung des jeweiligen Sachverhalts die Gleichungen von Grenzgeraden oder Grenzebenen.

Auf den Vergleich mit einer geometrischen Lösung soll der Leser auch dann hingewiesen werden, wenn von "Punkten des Lösungsbereiches" die Rede sein wird. Gemeint ist in diesem Fall die rein arithmetische Aussage, dass bestimmte Zahlen-n-Tupel allen gegebenen Ungleichungen der jeweiligen Aufgabe genügen, bzw. zur Lösungsmenge des betreffenden Ungleichungssystems gehören. Ganz bewusst soll in diesem Buch das Anschauungsmoment in den Vordergrund treten, wo es nur irgendwie möglich und sinnvoll ist.

2. Bei 5 Gleichungen und zwei Variablen liegen höchstens $\binom{5}{2} = 10$ Basislösungen vor.

(1-2):	$B_1 = (16, 18)$	(1-3):	$B_2 = (8, 19)$
(1-4):	$B_3 = (0, 20)$	(1-5):	$B_4 = (160, 0)$
(2-3):	$B_5 = (20, 9)$	(2-4):	$B_6 = (0, 54)$
(2-5):	$B_7 = (24, 0)$	(3-4):	$B_8 = (0, \frac{77}{3})$
(3-5):	$B_9 = (30, 8, 0)$	(4-5):	$B_{10} = (0, 0)$

3. Zulässige Basislösungen sind:

$$B_2 = (8, 19); B_3 = (0, 20); B_5 = (20, 9); B_7 = (24, 0); B_{10} = (0, 0)$$

4. Werte der Zielfunktion für die zulässigen Basislösungen:

$$z_2 = 730; z_3 = 600; z_5 = 670; z_7 = 480; z_{10} = 0$$

5. Die zulässige Basislösung mit dem größten z-Wert stellt das Optimum dar. $P_{opt}(8; 19)$ oder $B_{opt} = B_2 = (8, 19)$, $z_{\max} = 730$.

Bemerkung: Die Vorteile des hier angegebenen Lösungsweges sind große Genauigkeit sowie die Möglichkeit der Anwendung auch bei Aufgaben mit mehr als zwei Variablen. Als großer Nachteil soll aber schon hier genannt werden, dass der numerische Rechenaufwand bei zunehmender Variablenanzahl sowie zunehmender Anzahl von Nebenbedingungen gewaltig zunimmt, wie in einer späteren Aufgabe noch gezeigt werden soll.

Der weitaus größere Teil der Lösungen der Gleichungssysteme wird nicht benötigt, weil die Lösungen unzulässige Basislösungen sind. Es muss deshalb unser Anliegen sein, solche Verfahren zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen zu entwickeln, die von vornherein nur zulässige Basislösungen erfassen.

Dennoch sollte die hier beschriebene Methode Beachtung finden, weil sie bei Zugrundelegung von zwei Variablen einen guten Einblick in die Problematik gestattet und mit elementaren Mitteln der Schulmathematik auskommt.

2.5 Lösung mit Hilfe von Zahlenkongruenzen

Gegeben sind fünf Nebenbedingungen mit den ihnen zugeordneten fünf Grenzgeraden, von denen wir annehmen wollen, dass alle "echte" Grenzgeraden sind. Eine überflüssige Nebenbedingung würde vorliegen, wenn die ihr zugeordnete Gerade keinen Punkt mit dem Lösungsbereich gemeinsam hätte, wenn der Durchschnitt der Geraden mit dem Lösungsbereich leer wäre, wie im Bild 20 dargestellt ist.

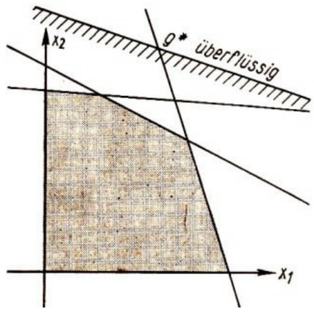


Bild 20

Wir nehmen an, eine zulässige Basislösung liege auf der der Ungleichung (I) zugeordneten Grenzgeraden mit der Gleichung

$$x_1 + 8x_2 = 160 \tag{1}$$

Diese Gleichung wird wie eine diophantische Gleichung behandelt mit dem Unterschied, dass außer ganzzahligen auch rationale Lösungen zugelassen werden.
Da der Term $8x_2$ durch 8 teilbar ist, wählt man den Modul 8 zur Reduzierung der Gleichung auf eine Gleichung mit nur einer Variablen. Mit $8x_2 \equiv 0$ mod 8 und $160 \equiv 0$ mod 8 folgt $x_1 \equiv 0$ mod 8 oder $x_1 = 8k$.

Setzt man diese Beziehung in die Gleichung (1) ein, so folgt für x_2:

$$8k + 8x_2 = 160 \qquad ; \qquad x_2 = 20 - k$$

Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für k durch Einsetzen der Werte $(8k, 20-k)$ in die Ungleichungen II bis V.

$$72k + 80 - 4k \leq 216; \qquad 68k \leq 136; \qquad k \leq 2 \tag{II}$$
$$40k + 120 - 6k \leq 154; \qquad 34k \leq 34; \qquad k \leq 1 \tag{III}$$
$$8k \geq 0; \qquad k \geq 0 \tag{IV}$$
$$20 - k \geq 0; \qquad k \leq 20 \tag{V}$$
$$k \in [0,1]$$

Für jedes rationale k aus dem beiderseits abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ erhält man einen Punkt der Geraden (1), der zum Lösungsbereich gehört. Von diesen Punkten wird derjenige bestimmt, der den optimalen z-Wert liefert.

$$z = 20x_1 + 30x_2 = 160k + 600 - 30k = 600 + 130k$$

z nimmt für den größten zulässigen Wert von k das Maximum an.

$$k = 1; \qquad x_1 = 8; \qquad x_2 = 19; \qquad z = 730$$

Bei Betrachtung aller Punkte auf der Grenzgeraden (1), die zum Lösungsbereich gehören, erhält man die zulässige Basislösung $P_1(8; 19)$, die den Schnittpunkt der Geraden (1) mit der Geraden (3) darstellt, weil $k = 1$ auch die Gleichung der Grenzgeraden (3) erfüllt.
Es muss nun untersucht werden, ob es auf der Grenzgeraden (3) zulässige Lösungen mit größerem z-Wert gibt.

Fall a) Es gibt auf der Grenzgeraden (3) keine zulässigen Lösungen mit größerem z-Wert. Dann ist P_1 das gesuchte Optimum.

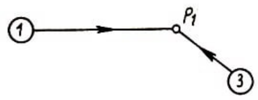


Bild 21

(Die Pfeile geben die Richtung der steigenden z-Werte an. Siehe Bild 21.) Es brauchen keine weiteren Grenzgeraden untersucht zu werden.

Fall b) Es gibt auf der Grenzgeraden (3) zulässige Lösungen mit größerem z-Wert. Dann ist die bessere zulässige Basislösung der Schnittpunkt P_2 der Geraden (3) mit einer weiteren, noch nicht untersuchten Grenzgeraden (*) (Bild 22).

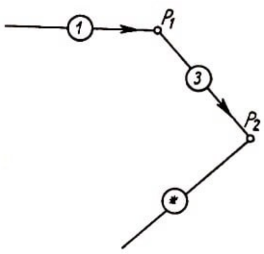


Bild 22

Man kommt auf diese Art auf den Kanten des Lösungsbereiches von einem Eckpunkt zum nächsten, wobei alle Eckpunkte zulässige Basislösungen darstellen, bis man das Optimum erhält. (Die Pfeile geben die Richtung der steigenden z-Werte an.)
Untersuchung der Grenzgeraden (3): $5x_1 + 6x_2 = 154$
Modulo 5 gilt: $x_2 \equiv 4$ mod 5; $x_2 = 5k + 4$; $x_1 = 26 - 6k$.
Berechnung des Gültigkeitsbereiches für k durch Einsetzen der Werte $(26 - 6k, 5k + 4)$ in die Ungleichungen U_j $(j \neq 3)$.

$$k \leq 3 \quad , \quad k \geq 1 \qquad \text{(I,II)}$$

$$k \leq \frac{13}{3} \quad , \quad k \geq -0{,}8, \qquad k \in [1, 3] \qquad \text{(IV,V)}$$

$z = 640 + 30k$. z wird für den größten zulässigen Wert von k maximal. $k = 3$; $x_1 = 8$; $x_2 = 19$; $z = 730$.
$k = 3$ erfüllt die Gleichung der Grenzgeraden (1). $P_1(8; 19)$ stellt das Optimum dar.

Die Methode mit Hilfe von Zahlenkongruenzen soll allgemein im Flussbild dargestellt werden. (siehe nächste Seite)

Bemerkung: Es sollte zu Beginn untersucht werden, ob eine der Grenzgeraden zur Spur der Zielfunktion parallel verläuft, da bei Vorliegen von Parallelität weitere Untersuchungen fortfallen können. Es müssen dann jedoch diejenigen Geraden untersucht werden, die von den Koordinaten der Endpunkte der Parallelstrecke erfüllt werden, da Punkten dieser Geraden eventuell bessere z-Werte zugeordnet sind (vgl. Bild 23).

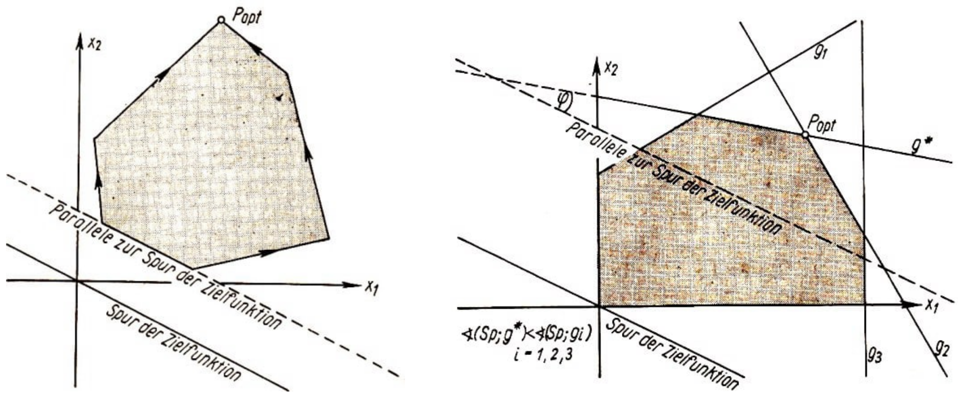


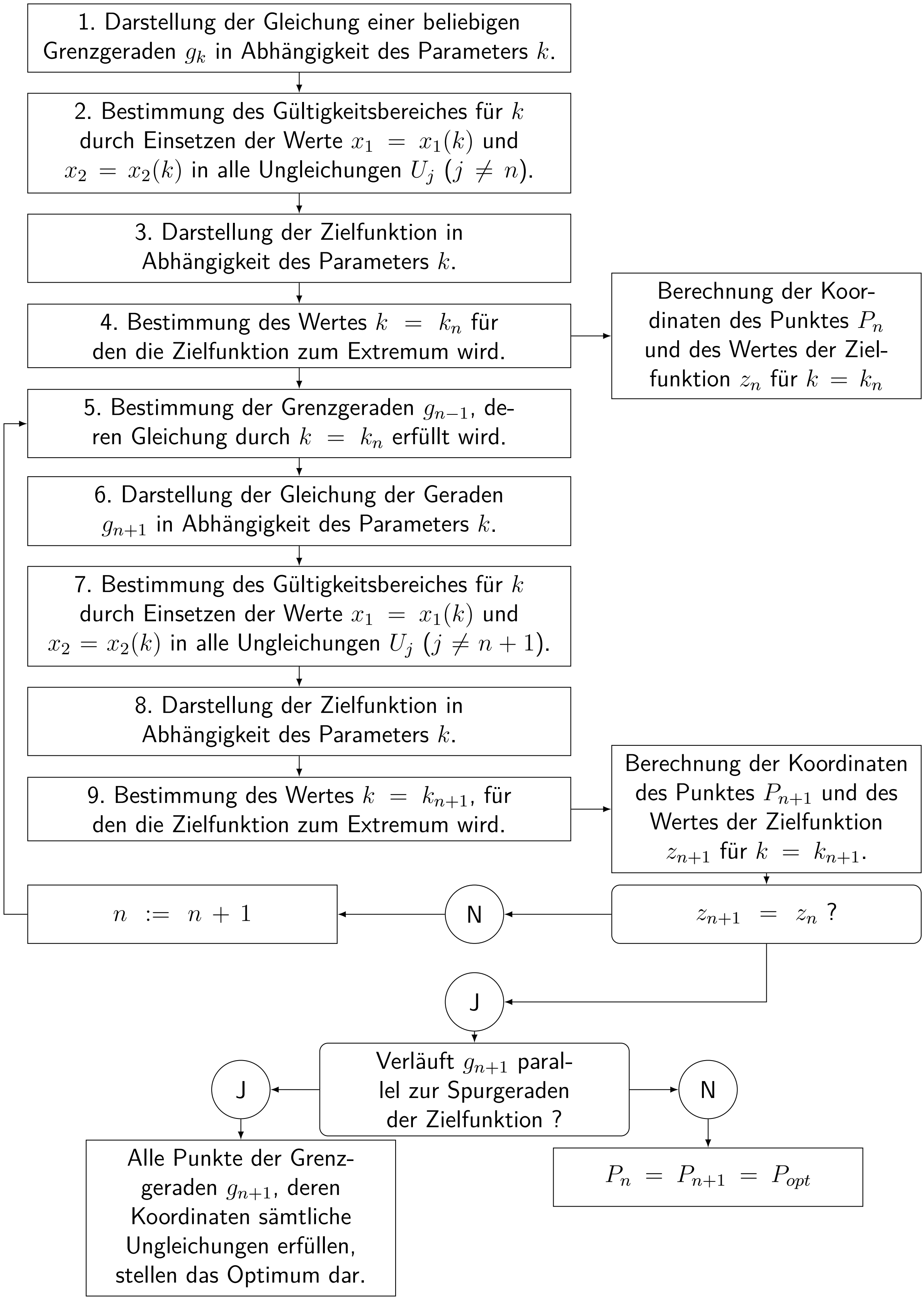
Bild 23, 24

Auch wenn keine Grenzgerade zur Spur der Zielfunktion parallel verläuft, kann oft schon zu Beginn entschieden werden, auf welcher der gegebenen Grenzgeraden das Optimum liegt. In vielen Fällen liegt das Optimum auf derjenigen Grenzgeraden, die den kleinsten Winkel mit der Spur der Zielfunktion einschließt (vgl. Bild 24).
Auf diese Frage wird an späterer Stelle eingegangen werden.

Die Methode mit Hilfe von Zahlenkongruenzen bietet gewisse Vorteile gegenüber den in den vorigen Abschnitten entwickelten Verfahren. Es werden von vornherein nur zulässige Basislösungen betrachtet, überflüssige Schnittpunkte, die keine zulässigen Basislösungen darstellen, werden nicht berechnet.

Die Methode kann auch bei Problemen mit mehr als zwei Variablen Anwendung finden. Schließlich sei hervorgehoben, dass die Methode nur sehr wenige Voraussetzungen erfordert. Wer sich einmal mit Elementen der Zahlenkongruenzen und der Ungleichungen beschäftigt, und das kann durchaus schon in der Klasse 8 oder 9 geschehen, ist in der Lage, einfache Aufgaben der linearen Optimierung als Anwendung der genannten Stoffgebiete durchzuarbeiten.

Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt nicht von der Genauigkeit irgendwelcher Zeichnungen ab, sondern kann bis zu jeder gewünschten Dezimalen erreicht werden.
Nachteile des Verfahrens liegen in der nicht immer sehr eleganten Darstellung und Durchführung der numerischen Rechnung bei einer größeren Anzahl von Variablen oder Nebenbedingungen. Das Verfahren ist nicht geeignet für den Einsatz von Rechenmaschinen.


1. Darstellung der Gleichung einer beliebigen Grenzgeraden g_k in Abhängigkeit des Parameters k.
2. Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für k durch Einsetzen der Werte $x_1 = x_1(k)$ und $x_2 = x_2(k)$ in alle Ungleichungen U_j $(j \neq n)$.
3. Darstellung der Zielfunktion in Abhängigkeit des Parameters k.
4. Bestimmung des Wertes $k = k_n$ für den die Zielfunktion zum Extremum wird.
Berechnung der Koordinaten des Punktes P_n und des Wertes der Zielfunktion z_n für $k = k_n$
5. Bestimmung der Grenzgeraden g_{n-1}, deren Gleichung durch $k = k_n$ erfüllt wird.
6. Darstellung der Gleichung der Geraden g_{n+1} in Abhängigkeit des Parameters k.
7. Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für k durch Einsetzen der Werte $x_1 = x_1(k)$ und $x_2 = x_2(k)$ in alle Ungleichungen U_j $(j \neq n+1)$.
8. Darstellung der Zielfunktion in Abhängigkeit des Parameters k.
9. Bestimmung des Wertes $k = k_{n+1}$, für den die Zielfunktion zum Extremum wird.
Berechnung der Koordinaten des Punktes P_{n+1} und des Wertes der Zielfunktion z_{n+1} für $k = k_{n+1}$.
$z_{n+1} = z_n$?
N
$n := n + 1$
J
Verläuft g_{n+1} parallel zur Spurgeraden der Zielfunktion ?
J
Alle Punkte der Grenzgeraden g_{n+1}, deren Koordinaten sämtliche Ungleichungen erfüllen, stellen das Optimum dar.
N
$P_n = P_{n+1} = P_{opt}$

2.6 Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Die im Abschnitt 2.5. beschriebene Methode zur Lösung einer Aufgabe der linearen Optimierung mit Hilfe von Zahlenkongruenzen lässt sich auch geometrisch mit Elementen der Vektorrechnung behandeln.

Eine zulässige Basislösung liege auf der Grenzgeraden (2):

$$9x_1 + 4x_2 = 216 \tag{2}$$

Die Gleichung der Geraden soll in die vektorielle Form überführt werden. Man bestimmt zunächst die Koordinaten eines Punktes P_0 auf der Geraden (2): $P_0(0; 54)$. Diesem Punkt P_0 ist der Vektor $\mathfrak{x}_0 = 54\mathfrak{j}$ zugeordnet.
Zur Bestimmung eines Richtungsvektors der Geraden (2) betrachtet man die durch den Ursprung 0 verlaufende Parallele zur Geraden (2): $9x_1 + 4x_2 = 0$. Für $x_1 = 4$ wird $x_2 = -9$. Ein Richtungsvektor der Geraden (2) ist: $\mathfrak{a} = 4\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j}$.
Damit wird die Gleichung der Geraden (2) in vektorieller Darstellung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a} = 54\mathfrak{j} + \lambda(4\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j})$$

Es gilt

$$x_1 = 4\lambda \quad , \quad x_2 = 54 - 9\lambda$$

Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für λ durch Einsetzen der Werte $(4\lambda; 54 - 9\lambda)$ in alle Ungleichungen U_j $(j \neq 2)$.

$$\lambda \geq 4 \quad ; \quad \lambda \geq 5 \tag{I,III}$$
$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad \lambda \geq 6; \quad \lambda \in [5, 6] \tag{IV,V}$$

$z = 1620 - 190\lambda$. Für $\lambda = 5$ nimmt z den größten Wert an.

$$\lambda = 5; \quad x1_1 = 20; \quad x_2 = 9; \quad z = 670$$

$\lambda = 5$ erfüllt die Gleichung der Grenzgeraden (3).

$$5x_1 + 6x_2 = 154; \quad P_1(20; 9); \quad \mathfrak{x}_1 = 20\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j} \tag{3}$$

Richtungsvektor der Geraden (3): $\mathfrak{a} = 6\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j}$.
Gleichung der Geraden (3):

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{a} = 20\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j} + \lambda(6\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j}); \quad x_1 = 20 + 6\lambda, \quad x_2 = 9 - 5\lambda$$

Gültigkeitsbereich für λ:

$$\lambda \geq 2 \quad ; \quad \lambda \leq 0 \tag{I,II}$$
$$\lambda \geq -\frac{10}{3} \quad ; \quad \lambda \leq 1,8, \quad \lambda \in [-2, 0] \tag{IV,V}$$

$z = 670 - 30\lambda$. Für $\lambda = -2$ nimmt z den größten Wert an.

$$\lambda = -2; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = 19; \lambda z = 730$$

$\lambda = -2$ erfüllt die Gleichung der Grenzgeraden (1).

$$x_1 + 8x_2 = 160; \qquad P_2(8;19); \qquad \mathfrak{x}_2 = 8\mathfrak{i} + 19\mathfrak{j} \tag{1}$$
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a} = 8\mathfrak{i} + 19\mathfrak{j} + \lambda(8\mathfrak{i} - \mathfrak{j})$$

$x_1 = 8 + 8\lambda$, $x_2 = 19 - \lambda$.

$$\lambda \leq 1 \quad , \quad \lambda \leq 0 \qquad \text{(II,III)}$$
$$\lambda \geq -1 \quad , \quad \lambda \leq 19; \quad \lambda \in [-1, 0] \qquad \text{(IV,V)}$$

$z = 730 + 130\lambda$; $\lambda = 0$; $x_1 = 8$; $x_2 = 19$; $z = 730$.
Der Schnittpunkt der Grenzgeraden (1) und (3) stellt das gesuchte Optimum dar: $P_{opt}(8;19)$; $z_{\max} = 730$.

Bemerkung: Es wurde von der Grenzgeraden (2) ausgegangen, um den Übergang von einer zulässigen Basislösung zu einer besseren deutlich sichtbar zu machen (Weg auf der Begrenzung des Lösungsbereiches von Eckpunkt zu Eckpunkt).
Man hätte eher und besser zum Ziel gelangen können, wenn man sogleich eine der Grenzgeraden (I) oder (3) zugrunde gelegt hätte.

Die Koeffizienten der Variablen in den Gleichungen sind, wie man leicht erkennt, die Koordinaten eines zur betreffenden Geraden orthogonalen Vektors.

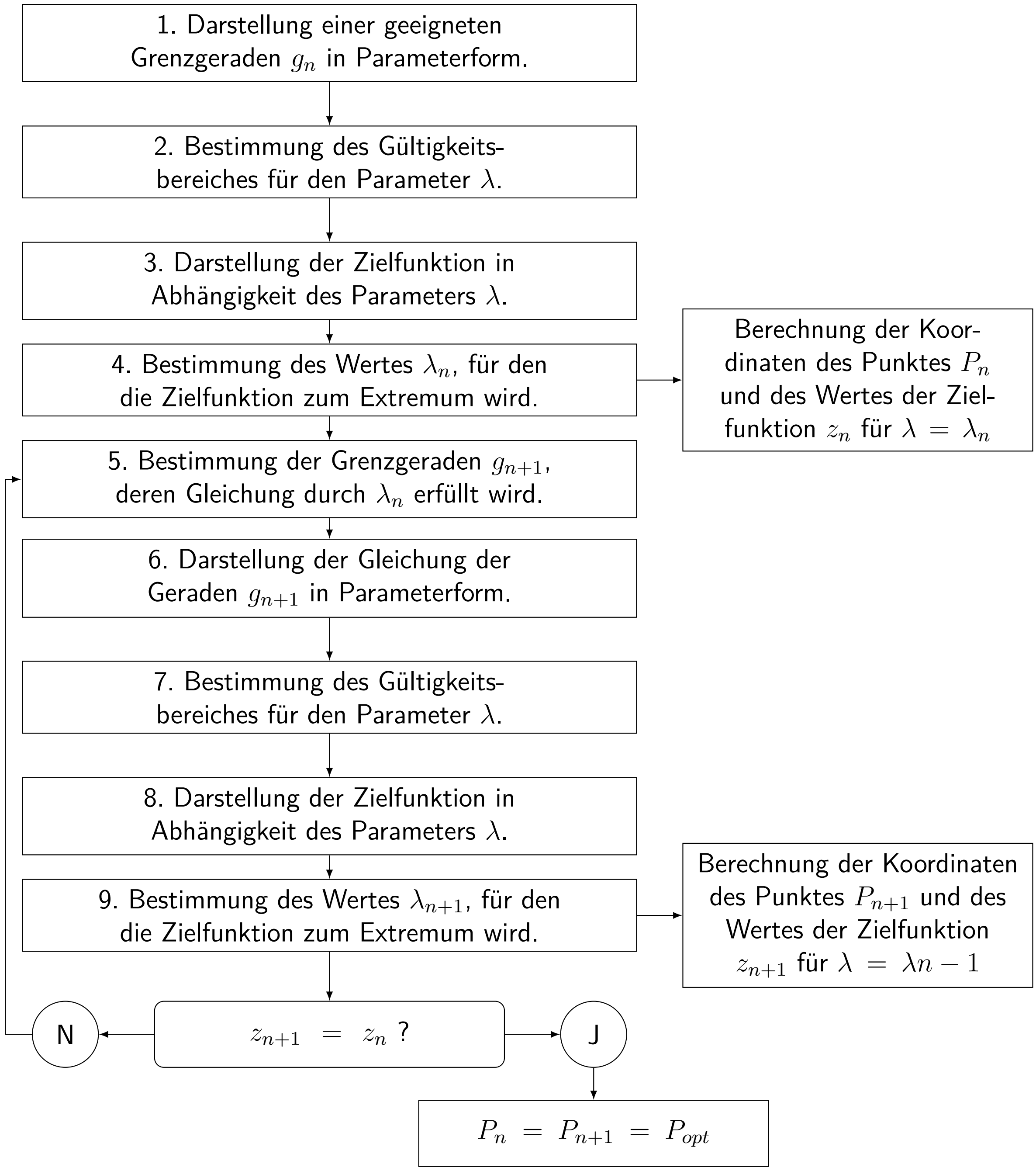
Orthogonale Vektoren für die Grenzgeraden sind:

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} \quad , \quad \mathfrak{y}_2 = 9\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} \qquad \text{(I,II)}$$
$$\mathfrak{y}_3 = 5\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} \quad , \quad \mathfrak{y}_4 = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{y}_5 = \mathfrak{j} \qquad \text{(III,IV,V)}$$

Der Orthogonalvektor zur Spurgeraden der Zielfunktion ist $\mathfrak{y} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$. Die von der Grenzgeraden und der Spurgeraden der Zielfunktion eingeschlossenen Winkel können durch die Beziehung
$$\cos \mathfrak{S}_i = \frac{\mathfrak{y}_i \cdot \mathfrak{y}}{|\mathfrak{y}_i||\mathfrak{y}|}$$
berechnet werden. Dadurch wird man sogleich auf die Untersuchung der Grenzgeraden (3) geführt.

Die Vorteile des Verfahrens zur Lösung einer Aufgabe der linearen Optimierung mit Hilfe der Vektorrechnung entsprechen etwa den im vorigen Abschnitt genannten zur Methode mit Hilfe von Zahlenkongruenzen.
Die Nachteile liegen auch hier in der komplizierten Darstellung und Durchführung der numerischen Rechnung für große oder gebrochene Werte der gegebenen Koeffizienten, für eine größere Anzahl von Variablen oder Nebenbedingungen.
Das Verfahren ist nicht geeignet für den Einsatz von Rechenmaschinen.

Es soll ein Flussbild für die Methode mit Hilfe der Vektorrechnung angeschlossen werden:



(Es sei angenommen, dass der Fall der Parallelität einer Grenzgeraden zur Spur der Zielfunktion vorher untersucht wurde, er wurde hier nicht mit behandelt.)

2.7 Ausblick auf Probleme mit mehr als zwei Variablen

Liegen mehr als zwei Veränderliche vor, so ist die grafische Darstellung nicht ohne weiteres möglich. Bei drei Variablen werden den durch die Nebenbedingungen gegebenen Gleichungen Ebenen im dreidimensionalen Raum zugeordnet, die einen konvexen dreidimensionalen Lösungsbereich einschließen, wenn die entsprechende Aufgabe eine Lösung besitzt (siehe Bild 25).

Das Bild der Zielfunktion wäre eine Hyperebene der Dimension 3, deren Spurebene eine Ebene im dreidimensionalen Raum ist.

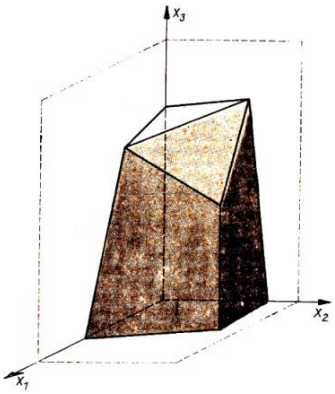


Bild 25

Bei Parallelverschiebung der Spurebene der Zielfunktion in den Lösungsbereich hinein sind für eine bestimmte Parallelebene alle z-Werte einander gleich, die bei Vergrößerung des Abstandes von der Spur jedoch im allgemeinen größer werden.
Es sind drei Fälle möglich:

Man erreicht bei größtmöglicher Parallelverschiebung der Spurebene

a) einen der Eckpunkte des Lösungsbereiches, der das Optimum darstellt,

b) eine Kante des Lösungsbereiches, deren sämtliche Punkte denselben z-Wert besitzen und also optimale Punkte sind,

c) eine zur Spurebene parallele Fläche des konvexen Lösungsbereiches. In diesem Fall sind alle Punkte der von einem Polygonzug begrenzten Fläche optimale Punkte, sie alle haben denselben z-Wert und sind Lösungen der Optimierungsaufgabe.

Die Eckpunkte des Lösungsbereiches sind die zulässigen Basislösungen, sie sind die Schnittpunkte von mindestens drei Grenzebenen.
Die exakte Lösung des Problems durch Berechnung sämtlicher Schnittpunkte der durch die Ungleichungen gegebenen Grenzebenen mit anschließender Auswahl der zulässigen Basislösungen wird für mehr als zwei Variable im allgemeinen einen recht großen Rechenaufwand erfordern, so dass andere Lösungsverfahren vorzuziehen sind.

Bei der Lösung mit Hilfe von Zahlenkongruenzen oder den Elementen der Vektorrechnung muss zunächst eine zulässige Basislösung gefunden werden.

Sodann untersucht man bei beiden Methoden die von dem betreffenden Eckpunkt ausgehenden Kanten des konvexen Lösungsbereichs, um festzustellen, ob auf diesen Kanten Punkte mit größerem z-Wert (bei einem Minimalproblem Punkte mit kleinerem z-Wert) existieren. Ist man in einem Eckpunkt angelangt, von dem aus die Verbesserung des z-Wertes der Zielfunktion in keiner Richtung möglich ist, so hat man das Optimum erreicht.

Sinngemäß überträgt man die hier angegebenen Lösungswege auch auf Aufgaben der linearen Optimierung mit mehr als drei Variablen. Dies soll nach Behandlung der allgemeinen Aufgabe der linearen Optimierung an speziellen Beispielen gezeigt werden. Es wird in vielen Fällen auch eine grafische Lösung im zweidimensionalen Raum für Aufgaben mit mehr als zwei Variablen möglich sein.

Soll die Zielfunktion zum Minimum werden, so sucht man bei der Parallelverschiebung der Spur der Zielfunktion denjenigen Punkt (bzw. diejenigen Punkte) des Lösungsbereiches, für den der z-Wert am kleinsten wird.

3 Die allgemeine Aufgabe der linearen Optimierung

Gegeben sind die Zielfunktion

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

sowie die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m \qquad \text{und} \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &... \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Für welche Werte der Variablen x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ nimmt die Zielfunktion $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ ein Extremum an?

3.1 Arithmetische Lösung der Aufgabe

Annahme: Es existiere mindestens eine Lösung des Problems. Allen Punkten des n-dimensionalen Raumes werden vom Ursprung 0 ausgehende n-dimensionale Ortsvektoren zugeordnet.
Durch die $(m + n)$ Nebenbedingungen ist ein konvexer, von Hyperebenen begrenzter Lösungsbereich definiert, nämlich der Durchschnitt aller durch die Ungleichungen gegebener Lösungshalbräume.

Alle Vektoren, die den Punkten des Lösungsbereiches zugeordnet werden, heißen Lösungsvektoren oder kurz Lösungen.
Alle Vektoren, die den Schnittpunkten der Grenzhyperebenen zugeordnet sind, heißen Basisvektoren $\mathfrak{x}_i$ unter ihnen gibt es etliche unzulässige Basisvektoren, die dem Lösungsbereich nicht angehören.
Speziell heißen die Vektoren, die den Eckpunkten des konvexen Lösungsbereiches zugeordnet sind, zulässige Basisvektoren oder zulässige Basislösungen $\mathfrak{x}_j$.
Mindestens eine der zulässigen Basislösungen stellt das Optimum dar.

Die Frage nach dem Optimum ist gleichzusetzen mit der Frage nach derjenigen zulässigen Basislösung, der der größte bzw. der kleinste z-Wert zugeordnet ist.
Bestimmen k zulässige Basislösungen $\mathfrak{x}_j$ das Optimum, so sind auch alle die Punkte optimale Punkte, die auf der durch die Vektoren $\mathfrak{x}_j$ bestimmten Geraden $(k = 2)$, Ebene $(k = 3)$ bzw. Hyperebene $(k > 3)$ liegen und dem Lösungsbereich angehören.

Anzahl der Basisvektoren $\mathfrak{x}_j$:

Den $(m+n)$ Ungleichungen werden Gleichungen zugeordnet.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \qquad \text{und} \\ x_1 &= 0, \qquad x_2 = 0, \qquad ..., \qquad x_n = 0 \end{aligned}$$

Aus den $(m+n)$ Gleichungen mit n Variablen lassen sich $\binom{m+n}{n}$ lineare Gleichungssysteme bilden, deren Lösungen die Basisvektoren $\mathfrak{x}_i$ sind.
Etliche der linearen Gleichungssysteme werden eine einfachere Form annehmen, weil sie Gleichungen der Form $x_i = 0$ enthalten. Es existiert stets die triviale Lösung $\mathfrak{x}_1 = (0, 0, ..., 0)$.

Es existieren ferner $m \cdot n$ Basisvektoren mit höchstens einer von Null verschieden Koordinate

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{1j} &= (a_{j1}, 0, 0, ..., 0) \\ \mathfrak{x}_{2j} &= (0, a_{j2}, 0, ..., 0) \qquad ... \\ \mathfrak{x}_{nj} &= (0, 0, 0, ..., a_{jn}) \end{aligned}$$

$j = 1, 2, ..., m$.
Ferner gibt es $\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}$ Basisvektoren mit höchstens zwei von Null verschiedenen Koordinaten, $\binom{m}{3} \cdot \binom{n}{3}$ Basisvektoren mit höchstens drei von Null verschiedenen Koordinaten usw., während nur $\binom{m}{n}$ lineare Gleichungssysteme mit n Variablen zu lösen sind, deren Lösungen $\binom{m}{n}$ Basisvektoren ergeben.
Es gilt:

$$\binom{m}{0} \cdot \binom{n}{0} + \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{1} + \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} + ... + \binom{m}{n} \cdot \binom{n}{n} = \binom{m+n}{n}$$

Beispiel: Bei einem Problem der linearen Optimierung mit 5 Variablen und (8 + 5) Nebenbedingungen sind insgesamt $\binom{8+5}{5} = 1287$ Gleichungssysteme zu lösen. Im einzelnen treten auf

1 Nullvektor als Basisvektor
40 Basisvektoren mit höchstens einer von Null verschiedenen Koordinate,
$\binom{8}{2} \cdot \binom{5}{2} = 280$ Basisvektoren mit höchstens zwei von Null verschiedenen Koordinaten,
$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} = 560$ Basisvektoren mit höchstens drei von Null verschiedenen Koordinaten,
$\binom{8}{4} \cdot \binom{5}{4} = 350$ Basisvektoren mit höchstens vier von Null verschiedenen Koordinaten,
$\binom{8}{5} \cdot \binom{5}{5} = 56$ Basisvektoren mit höchstens fünf von Null verschiedenen Koordinaten.
Summe: 1287

Bemerkung: Das Beispiel zeigt deutlich, dass die Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung mit einer größeren Anzahl von Variablen und Nebenbedingungen ohne den Einsatz von elektronischen Rechenmaschinen nicht vertretbar ist.

Die Betrachtungen an dieser Stelle haben deshalb rein theoretischen Charakter. Bedenkt man, dass in der Praxis der volkseigenen Großbetriebe Probleme mit mehr als 100 Variablen und Nebenbedingungen auftreten, so wird die hier angegebene allgemeine Lösung auch für elektronische Rechner nicht mehr durchführbar sein.
Die sehr hohe Anzahl der vorhandenen Speicherplätze wird dennoch nicht ausreichen. Es sind Methoden entwickelt worden, die sich von vornherein auf die Bestimmung der zulässigen Basislösungen konzentrieren.

Es sei hier das von Dantzig entwickelte "Simplexverfahren" genannt, das in den letzten zwei Jahrzehnten mancherlei Verbesserungen erfahren hat. Nach endlich vielen Schritten gelangt man auf den Kanten des Lösungsbereiches durch Iteration zur optimalen Lösung.

Auswahl der zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$:

Sind alle $\binom{m+n}{n}$ Basisvektoren $\mathfrak{x}_i$ bestimmt, so müssen sie auf ihre Verträglichkeit mit den gegebenen Ungleichungen untersucht werden. Es ergeben sich die zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$ deren Anzahl sehr viel kleiner ist als die Anzahl der Basisvektoren.

Lösungsschema :

Gegeben:
1a. Zielfunktion $z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$
1b. Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \leq b_1$ ... $\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \leq b_m$, $i = 1, 2, ..., n$

↓

2. Gleichungen der Grenzebenen ε_i: $\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_1$
... $\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = b_m$, $x_i = 0$ $i = 1, 2, ..., n$

↓

3. Lösungen der $\binom{m+n}{n}$ linearen Gleichungssysteme, die sich aus den Gleichungen (2) bilden lassen.

↓

4. Auswahl der zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$, die allen Ungleichungen (1b) genügen.

↓

5. Orthogonalvektor zur Spur der Zielfunktion $\mathfrak{z} = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$

↓

6. Skalarprodukte des Orthogonalvektors mit den zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$: $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}_j = z_j$

↓

7. Auswahl des Vektors $\mathfrak{x}_j^*$, der den optimalen z-Wert liefert. $\mathfrak{x}^*$ stellt das gesuchte Optimum dar.

Die Anzahl der zulässigen Basislösungen lässt sich im allgemeinen jedoch nicht exakt angeben, da man nicht weiß, wie viele der Hyperebenen einander in jeweils einem Eckpunkt des Lösungsbereiches schneiden.

Bestimmung der den Basislösungen $\mathfrak{x}_j$ zugeordneten z-Werte:

Die Koeffizienten der Variablen in der Zielfunktion sind die Koordinaten eines Orthogonalvektors $\mathfrak{z}$ zur Spurebene der Zielfunktion. Die Skalarprodukte aus diesem Orthogonalvektor $\mathfrak{z}$ und den zulässigen Basisvektoren $\mathfrak{x}_j$ sind die den Basislösungen zugeordneten z-Werte.

Diejenige Basislösung $\mathfrak{x}$, welcher der größte bzw. der kleinste z-Wert zugeordnet ist, stellt das gesuchte Optimum dar.

Bestimmen mehrere zulässige Basislösungen $\mathfrak{x}_j$ das Optimum, so gelten die zu Beginn des Abschnittes über diese Sonderfälle gemachten Aussagen.
Sind z.B. die zulässigen, das Optimum darstellenden Basislösungen die Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, so sind auch alle Punkte der Strecke

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1), \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

optimale Punkte.

4 Eine Aufgabe mit drei Variablen

Für welche Werte der Variablen x_1, x_2 und x_3 nimmt die Zielfunktion

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

unter den folgenden Bedingungen ein Maximum an?

$$5x_1 - x_2 + 12x_3 \leq 144 \tag{I}$$
$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 72 \tag{II}$$
$$x_1 + x_2 \leq 24 \tag{III}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 42 \tag{IV}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{V}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{VI}$$
$$x_3 \geq 0 \tag{VII}$$

4.1 Arithmetische Lösung der Aufgabe

2. Aufstellung der Gleichungen der Grenzebenen ε_i $(i = 1, ..., 7)$

$$5x_1 - x_2 + 12x_3 = 144 \tag{1}$$
$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 72 \tag{2}$$
$$x_1 + x_2 = 24 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 42 \tag{4}$$
$$x_1 = 0 \tag{5}$$
$$x_2 = 0 \tag{6}$$
$$x_3 = 0 \tag{7}$$

3. Lösungen der $\binom{7}{3} = 35$ linearen Gleichungssysteme mit drei Variablen, die sich aus den Gleichungen (2.) bilden lassen:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{x}_{123} = (12, 12, 8) & \mathfrak{x}_{124} = (6, 6, 10) & \mathfrak{x}_{125} = (0, 0, 12) & \mathfrak{x}_{126} = (0, 0, 12) \\
\mathfrak{x}_{127} = (36, 36, 0) & \mathfrak{x}_{134} = (16, 8, 6) & \mathfrak{x}_{135} = (0, 24, 14) & \mathfrak{x}_{136} = (24, 0, 2) \\
\mathfrak{x}_{137} = (28, -4, 0) & \mathfrak{x}_{145} = (0; 4,8; 12,4) & \mathfrak{x}_{146} = (-24, 0, 22) & \mathfrak{x}_{147} = (31, 11, 0) \\
\mathfrak{x}_{156} = (0, 0, 12) & \mathfrak{x}_{157} = (0, -144, 0) & \mathfrak{x}_{167} = (28, 0, 0) & \mathfrak{x}_{234} = (9, 15, 6) \\
\mathfrak{x}_{235} = (0, 24, 0) & \mathfrak{x}_{236} = (24, 0, 16) & \mathfrak{x}_{237} = (0, 24, 0) & \mathfrak{x}_{245} = (0, -12, 18) \\
\mathfrak{x}_{246} = (4, 0, \frac{38}{3}) & \mathfrak{x}_{247} = (\frac{27}{2}, \frac{59}{2}, 0) & \mathfrak{x}_{256} = (0, 0, 12) & \mathfrak{x}_{257} = (0, 24, 0) \\
\mathfrak{x}_{267} = (-72, 0, 0) & \mathfrak{x}_{345} = (0, 24, 6) & \mathfrak{x}_{346} = (24, 0, 6) & \mathfrak{x}_{347} = (-) \\
\mathfrak{x}_{356} = (-) & \mathfrak{x}_{357} = (0, 24, 0) & \mathfrak{x}_{367} = (24, 0, 0) & \mathfrak{x}_{456} = (0, 0, 14) \\
\mathfrak{x}_{457} = (0, 42, 0) & \mathfrak{x}_{467} = (42, 0, 0) & \mathfrak{x}_{567} = (0, 0, 0) &
\end{array}$$

4. Auswahl der zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$ die allen gegebenen Ungleichungen genügen, durch Einsetzen der Lösungen $\mathfrak{x}$ in alle gegebenen Ungleichungen I bis VII.

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{x}_{124} = (6, 6, 10) & \mathfrak{x}_{125} = (0, 0, 12) & \mathfrak{x}_{134} = (16, 8, 6) & \mathfrak{x}_{136} = (24, 0, 2) \\
\mathfrak{x}_{234} = (9, 15, 6) & \mathfrak{x}_{235} = (0, 24, 0) & \mathfrak{x}_{367} = (24, 0, 0) & \mathfrak{x}_{567} = (0, 0, 0)
\end{array}$$

5. Orthogonalvektor zur Spurebene der Zielfunktion $\mathfrak{z} = (2, 3, 4)$.

6. Skalarprodukte des Orthogonalvektors $\mathfrak{z}$ mit den zulässigen Basislösungen $\mathfrak{x}_j$

$$\begin{array}{llll} z_{124} = 70 & z_{125} = 48 & z_{134} = 80 & z_{135} = 56 \\ z_{234} = 87 & z_{235} = 72 & z_{367} = 48 & z_{567} = 0 \end{array}$$

7. Optimum: $z_{234} = 87$; $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}_{234} = (9, 15, 6)$.
$P_{opt}(9; 15; 6)$; $z_{\max} = 87$.

4.2 Lösung mit Hilfe von Zahlenkongruenzen

Annahme, eine zulässige Basislösung liegt auf der Schnittgeraden der Ebenen (1) und (2).

$$\begin{array}{rr} 5x_1 - x_2 + 12x_3 = 144 & (1) \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 72 & (2) \\ \hline x_1 + 3x_3 = 36 & \end{array}$$

$x_1 \equiv 0$ mod 3; $x_1 = 3k$; $x_3 = 12 - k$; $x_2 = 3k$.
Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für k durch Einsetzen der Werte $(3k, 3k, 12 - k)$ in alle Ungleichungen U_j $(j = 1, 2)$.

$$k \leq 4, \quad k \leq 2, \quad k \geq 0, \quad k \geq 0, \quad k \leq 12, \quad k \in [0, 2] \qquad \text{(III-VII)}$$

Gleichung der Zielfunktion in Abhängigkeit des Parameters:

$$z = 48 + 11k$$

Für $k = 2$ wird z am größten: $z = 70$; $x_1 = 6$; $x_2 = 6$; $x_3 = 10$.

$k = 2$ erfüllt die Gleichungen der Ebenen (1), (2) und (4). Es sind vom Eckpunkt $P_1(6; 6; 10)$ des Lösungsbereiches die Wege in Richtung der Schnittgeraden (1-4) sowie (2-4) möglich, auf denen man zu weiteren Eckpunkten des Lösungsbereiches mit eventuell besseren z-Werten gelangen kann.

(1-4)

$$\begin{array}{rr} 5x_1 - x_2 + 12x_3 = 144 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 42 & (4) \\ \hline 2x_1 + 5x_3 = 62 & \end{array}$$

$x_3 \equiv 0$ mod 2; $x_3 = 2k$, $x_1 = 31 - 5k$, $x_2 = 11 - k$

(2-4)

$$\begin{array}{rr} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 72 & (2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 42 & (4) \\ \hline 4x_2 + 9x_3 = 114 & \end{array}$$

$x_3 \equiv 2$ mod 4; $x_3 = 4k - 2$, $x_2 = 24 - 9k$, $x_1 = 12 - 3k$

Bestimmung der Gültigkeitsbereiche für k durch Einsetzen in die Ungleichungen U_j

$j \neq 1,4$

$$k \leq 5, \quad k \geq 3, \quad k \leq 6,2,$$
$$k \leq 11, \quad k \geq 0; \quad k \in [3,5]$$
(II,III,V-VII)

$j \neq 2,4$

$$k \leq 2, \quad k \geq 1, \quad k \leq 4,$$
$$k \leq \frac{8}{3}, \quad k \geq -\frac{1}{2}; \quad k \in [1,2]$$
(I,III,V-VII)

Gleichungen der Zielfunktion in Abhängigkeit der Parameter:

$z = 95 - 5k \to$ Max.
$k = 3$; $z = 80$; $P_2(16;8;6)$

$z = 104 - 17k \to$ Max.
$k = 1$; $z = 87$; $P_3(9;15;6)$

Auf beiden Wegen, die vom Punkt $P_1(6;6;10)$ aus in Richtung der Kanten des Lösungsbereiches möglich sind, gelangt man zu Eckpunkten mit besserem z-Wert.

$k = 3$ erfüllt die Gleichungen der Ebenen (1), (4) und (3)

$k = 1$ erfüllt die Gleichungen der Ebenen (2), (4) und (3).

Beide Wege führen auf die Gleichung der Grenzebene (3) hin, es genügt deshalb, vom Punkt $P_3(9;15;6)$ aus die neuen möglichen Wege längs der Kanten des Lösungsbereiches zu untersuchen, es sind dies die Schnittgeraden (2-3) und (3-4).

(2-3)
$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 72 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 = 24 \qquad (3)$$
$$\overline{2x_2 + 3x_3 = 48}$$

$x_3 \equiv 0$ mod 2; $x_3 = 2k$,
$x_2 = 24 - 3k$, $x_1 = 3k$

(3-4)
$$x_1 + x_2 = 24 \qquad (3)$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 42 \qquad (4)$$
$$\overline{x_1 + x_2 = 24}$$

$x_2 = k$, $x_1 = 24 - k$, $x_3 = 6$

Bestimmung der Gültigkeitsbereiche für k durch Einsetzen der Werte in die Ungleichungen U_j

$j \neq 2,3$

$$k \leq 1, \quad k \leq 3, \quad k \geq 0,$$
$$k \leq 8, \quad k \geq 0; \quad k \in [0,3]$$
(II,III,V-VII)

$j \neq 3,4$

$$k \geq 8, \quad k \leq 15, \quad k \leq 24,$$
$$k \geq 0, \quad k \in [8,15]$$
(I,III,V-VII)

Gleichungen der Zielfunktion in Abhängigkeit der Parameter:

$z = 72 + 5k \to$ Max.
$k = 3$; $z = 87$; $P_3(9;15;6)$

$z = 72 + k \to$ Max.
$k = 15$; $z = 87$; $P_3(9;15;6)$

Beide vom Punkt P_3 aus möglichen Wege längs der Kanten des Lösungsbereiches führen auf den Punkt $P_3(9;15;6)$ zurück.

$$P_{opt}(9;15;6) \qquad ; \qquad z_{\max} = 87$$

4.3 Erste Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Annahme, keine der gegebenen Nebenbedingungen sei überflüssig. Dann liegt eine zulässige Basislösung auf der Grenzebene (1).

$$5x_1 - x_2 + 12x_3 = 144 \tag{1}$$

Der Punkt $P_0(0;0;12)$ erfüllt die Gleichung der Grenzebene (1). Zur Bestimmung zweier linear unabhängiger Vektoren in der Ebene (1) betrachtet man die Parallelebene zu (1), die durch den Ursprung verläuft:

$$5x_1 - x_2 + 12x_3 = 0$$

Man erhält die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a} = (1, 5, 0)$ und $\mathfrak{b} = (0, 12, 1)$. Die Gleichung der Ebene (1) wird damit:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$$

oder

$$x_1 = \lambda, \qquad x_2 = 5\lambda + 12\mu, \qquad x_3 = 12 + \mu$$

Die Bedingungen für λ und μ erhält man durch Einsetzen der Werte $(\lambda, 5\lambda{+}12\mu, 12{+}\mu)$ in alle Ungleichungen U_j $(j \neq 1)$.

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &\leq 0 && \text{(II)} \\ \lambda + 2\mu &\leq 4 && \text{(III)} \\ 2\lambda + 5\mu &\leq 2 && \text{(IV)} \\ \lambda &\geq 0 && \text{(V)} \\ 5\lambda + 12\mu &\geq 0 && \text{(VI)} \\ \mu &\geq -12 && \text{(VII)} \end{aligned}$$

Zielfunktion in Abhängigkeit der Parameter λ und μ:

$$z = 48 + 17\lambda + 40\mu \rightarrow Max.$$

Die Berechnung einer geeigneten zulässigen Basislösung für das Optimierungsproblem mit drei Variablen ist auf die Lösung eines zweidimensionalen Problems mit den Variablen λ und μ zurückgeführt.

Bemerkung: Es ist die grafische Lösung zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung möglich. Man beachte aber, dass der von den Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Ebene (1) eingeschlossene Winkel kein rechter Winkel ist. Man hätte jedoch auch Richtungsvektoren $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ für die Ebene (1) angeben können, die senkrecht zueinander stehen. Auf ein derartiges Lösungsverfahren wird an späterer Stelle eingegangen (siehe 4.5.).

Annahme, eine zulässige Basislösung des zweidimensionalen Problems liegt auf der Grenzgeraden (2):

$$\lambda + 3\mu = 0$$

Ein Richtungsvektor für diese Gerade ist $\mathfrak{c} = (3, -1)$. Damit lautet die Gleichung der Grenzgeraden (2) $\mathfrak{x} = k\mathfrak{c}$ oder $\lambda = 3k$; $\mu = -k$.

Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für den Parameter k:

$$k \leq 4, \quad k \leq 2, \quad k \geq 0, \quad k \geq 0, \quad k \leq 12; \quad k \in [0, 2] \qquad \text{(III-VII)}$$

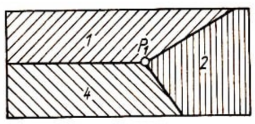
Gleichung der Zielfunktion: $z = 48 + 11k \to Max$.

$k = 2$ erfüllt die Gleichungen der Grenzgeraden (2) und (4) des zweidimensionalen Problems und damit die Gleichungen der Grenzebenen (1), (2) und (4) des dreidimensionalen Problems.

$$\lambda = 6; \quad \mu = -2; \quad z = 70; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 6; \quad x_3 = 10$$

Der Punkt $P_1(6; 6; 10)$ ist eine zulässige Basislösung, er ist Schnittpunkt der Grenzebenen (1), (2) und (4).
Vom Punkt P_1 sind die Wege in Richtung der Schnittgeraden (1-2), (1-4) und (2-4) möglich (siehe Bild 26).

Bild 26



Es ist zu untersuchen, ob auf einem dieser Wege Punkte liegen, die einen besseren z-Wert liefern. Dazu werden die Richtungsvektoren dieser Schnittgeraden bestimmt.

(1-2)	(1-4)	(2-4)
$5x_1 - x_2 + 12x_3 = 0$	$5x_1 - x_2 + 12x_3 = 0$	$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 = -3x_3$	$x_1 = -\frac{5}{2}x_3$	$x_2 = -\frac{9}{4}x_3$
$x_2 = -3x_3$	$x_2 = -\frac{1}{2}x_3$	$x_1 = -\frac{3}{4}x_3$
$\mathfrak{a}_{12} = (-3, -3, 1)$	$\mathfrak{a}_{14} = (-5, -1, 2)$	$\mathfrak{a}_{24} = (-3, -9, 4)$

Die drei Richtungsvektoren bilden ein Basissystem für den dreidimensionalen Raum mit dem Ursprung $P_1(6; 6; 10)$. Jeder Punkt des Raumes lässt sich als Linearkombination aus den drei Grundvektoren darstellen.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_{12} + \lambda_2 \mathfrak{a}_{14} + \lambda_3 \mathfrak{a}_{24}$$

oder

$$x_1 = 6 - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3\lambda_3$$
$$x_2 = 6 - 3\lambda_1 - \lambda_2 - 9\lambda_3$$
$$x_3 = 10 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3$$

In der folgenden Tabelle werden die Bedingungen für die Parameter angegeben, die sich aus den Ungleichungen ergeben.

Da nur die Punkte des Lösungsbereiches von Interesse sind, die auf den Kanten des Bereiches liegen, werden auch sogleich die Bedingungen für die Parameter der einzelnen Schnittgeraden ermittelt.

Bedingungen für λ_i

$$-\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \leq 2 \qquad \text{(III)}$$
$$3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 6 \qquad \text{(V)}$$
$$3\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3 \leq 6 \qquad \text{(VI)}$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq -10 \qquad \text{(VII)}$$
$$\lambda_3 \leq 0 \qquad \text{(I)}$$
$$\lambda_2 \leq 0 \qquad \text{(II)}$$
$$\lambda_1 \leq 0 \qquad \text{(III)}$$

Bedingungen für die Parameter der Schnittgeraden

	(1-2) $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$	(1-4) $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$	(2-4) $\lambda_3 \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
III	$\lambda_1 \geq -2$	$\lambda_2 \geq -2$	$\lambda_3 \geq -1$
V	$\lambda_1 \leq 2$	$\lambda_2 \leq 1,2$	$\lambda_3 \leq 2$
VI	$\lambda_1 \leq 2$	$\lambda_2 \leq 6$	$\lambda_3 \leq \frac{2}{3}$
VII	$\lambda_1 \geq -10$	$\lambda_2 \geq -5$	$\lambda_3 \geq -2,5$
I	-	-	$\lambda_3 \leq 0$
II	-	$\lambda_2 \leq 0$	-
IV	$\lambda_1 \geq 0$	-	-
	$\lambda_1 \in [0,2]$	$\lambda_2 \in [-2,0]$	$\lambda_3 \in [-1,0]$

Gleichung der Zielfunktion:
$z = 70 - 11\lambda_1 - 5\lambda_2 - 17\lambda_3 \rightarrow Max.$

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = -2$	$\lambda_3 = -1$
$z = 70$	$z = 80$	$z = 87$
$P_2(6;6;10)$	$P_3(16;8;6)$	$P_4(9;15;6)$

Es sind zwei neue zulässige Basislösungen gefunden worden.

	Für $\lambda = -2$ wird die Gleichung der Ebene (3) erfüllt.	Für $\lambda = -1$ wird die Gleichung der Ebene (3) erfüllt.

Untersuchung der Ebene (3):
Die einzige Gerade, auf der eine Verbesserung des z-Wertes möglich wäre, ist die Schnittgerade der Ebenen (2) und (3) (Bild 27).

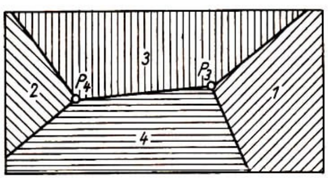


Bild 27

$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (3)$$
$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3; \quad x_2 = \frac{3}{2}x_3$$

$$\mathfrak{a} = (-3, 3, 2); \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_4 + \lambda\mathfrak{a}; \quad x_1 = 9 - 3\lambda; \qquad x_2 = 15 + 3\lambda; \qquad x_3 = 6 + 2\lambda$$
$$\lambda \in [-3; 0]; \qquad z = 87 + 11\lambda \to Max.\lambda = 0; \qquad z = 87$$

Es ist vom Punkt $P_4(9; 15; 6)$ aus keine Verbesserung des z-Wertes in irgendeiner Richtung des Lösungsbereiches möglich. Der Punkt P_4 stellt das Optimum dar. $P_{opt}(9; 15; 6)$; $z_{\max} = 87$.

Bemerkung: In der vorliegenden Aufgabe wäre man bei Annahme einer zulässigen Basislösung auf einer Schnittgeraden einfacher zum Ziel gekommen. Das soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

4.4 Zweite Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Annahme: Es gibt eine zulässige Basislösung auf der Schnittgeraden der Grenzebenen (1) und (2).
Mit $P_0(0; 0; 12)$ und $\mathfrak{a} = (-3, -3, 1)$ wird die Gleichung der Schnittgeraden (1-2): $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}$

$$x_1 = -3\lambda; \qquad x_2 = -3\lambda; \qquad x_3 = 12 + \lambda$$

Durch Einsetzen der Koordinaten in die gegebenen Ungleichungen erhält man: $\lambda \in [-2, 0]$; $z = 48 - 11\lambda \to$ Max.

$$\lambda = -2; \qquad z = 70; \qquad P_1(6; 6; 10)$$

$\lambda = -2$ erfüllt die Gleichung der Grenzebene (4) (Bild 28).

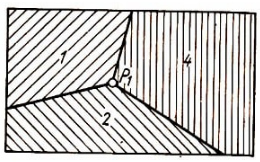


Bild 28

Richtungsvektoren der Schnittgeraden (1-4) und (2-4) sind:

$$\mathfrak{a}_{14} = (-5, -1, 2) \qquad , \qquad \mathfrak{x}_{24} = (-3, -9, 4)$$

Hiermit wird die Gleichung der Grenzebene (4):

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{a}_{14} + \mu\mathfrak{a}_{24}$$

$$x_1 = 6 - 5\lambda - 3\mu, \qquad x_2 = 6 - \lambda - 9\mu. \qquad x_3 = 10 + 2\lambda + 4\mu, \qquad z = 70 - 5\lambda - 17\mu$$

Bedingungen für λ und μ		(1-4) $\mu = 0$	(2-4) $\lambda = 0$
	$\mu \leq 0$	-	$\mu \leq 0$
II	$\lambda \leq 0$	$\lambda \leq 0$	
III	$-\lambda + 2\mu \leq 2$	$\lambda \geq -2$	$\mu \geq -1$
IV	-	-	-
V	$5\lambda + 3\mu \leq 6$	$\lambda \leq 1,2$	$\mu \leq 2$
VI	$\lambda + 9\mu \leq 6$	$\lambda \leq 6$	$\mu \leq \frac{2}{3}$
VII	$\lambda + 2\mu \geq -5$	$\lambda \geq -5$	$\mu \geq -2,5$
		$\lambda \in [-2, 0]$	$\mu \in [-1, 0]$
		$\lambda = -2$	$\mu = -1$
		$z = 80$	$z = 87$
		$P_2(16; 8; 6)$	$P_3(9; 15; 6)$

Für $\mu = -1$ wird die Gleichung der Ebene (3) erfüllt (Bild 29).

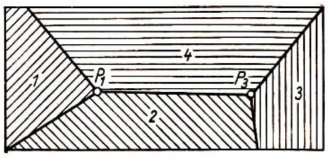


Bild 29

Untersuchung der Schnittgeraden (2-3) und (3-4)

$$\mathfrak{a}_{23} = (3, -3, 2) \qquad ; \qquad \mathfrak{a}_{34} = (-1, 1, 0)$$

Gleichung der Grenzebene (3):

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_3 + \lambda\mathfrak{a}_{23} + \mu\mathfrak{a}_{34}$$

$$x_1 = 9 + 3\lambda - \mu, \qquad x_2 = 15 - 3\lambda + \mu, \qquad x_3 = 6 + 2\lambda, \qquad z = 87 + 5\lambda + \mu$$

Bedingungen für λ und μ		(2-3) $\mu = 0$	(3-4) $\lambda = 0$
I	$7\lambda - \mu \leq 7$	$\lambda \leq 1$	$\mu \geq -7$
II	$\mu \leq 0$	-	$\mu \leq 0$
IV	$\lambda \leq 0$	$\lambda \leq 0$	-
V	$3\lambda - \mu \geq -9$	$\lambda \geq -3$	$\mu \leq 9$
VI	$-3\lambda + \mu \geq -15$	$\lambda \leq 5$	$\mu \geq -15$
VII	$\lambda \geq -3$	$\lambda \geq -3$	-
		$\lambda \in [-3, 0]$	$\mu \in [-7, 0]$
		$\lambda = 0$	$\mu = 0$
		$z = 87$	$z = 87$
		$P_3(9; 15; 6)$	$P_3(9; 15; 6)$

$P_{opt}(9; 15; 6)$, $z_{\max} = 87$

4.5 Lösung unter Benutzung grafischer Methoden

4.5.1. Annahme: Die Nebenbedingung IV der Aufgabe ist in der Form $x_1 + x_2 + 3x_3 = 42$ gegeben.

Dann ist die Grenzebene, auf der das Optimum liegen muss, von vornherein bestimmt. (Derartige Probleme, in denen als Nebenbedingungen auch Gleichungen vorkommen, treten in der Praxis häufig auf.)

Das dreidimensionale Problem wird auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt durch die Aufstellung der Punktrichtungsgleichung für die Ebene (4) in Abhängigkeit der Parameter λ und μ und durch die Transformation aller gegebener Ungleichungen auf die neuen Parameter.

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 42 \qquad , \qquad P_0(0;0;14) \tag{4}$$

Bestimmung zweier orthogonaler Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der Ebene (4).

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \qquad \mathfrak{a}_1 = (3, 0, -1)$$

Ansatz für $\mathfrak{a}_2$: $\mathfrak{a}_2 = (1, x_2, 3)$.
Unter Beachtung der Bedingung für die Orthogonalität $(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = 0)$ erhält man

$$1 + x_2 + 9 = 0, \qquad x_2 = -10, \qquad \mathfrak{a}_2 = (1, -10, 3)$$

Gleichung der Ebene (4): $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}_1 + \mu\mathfrak{a}_2$ oder

$$x_1 = 3\lambda + \mu, \qquad x_2 = -10\mu, \qquad x_3 = 14 - \lambda + 3\mu, \qquad z = 56 + 2\lambda - 16\mu \to Max.$$

$$I: \lambda + 17\mu \leq -8, \qquad II: 9\lambda + 13\mu \geq 12, \qquad III: \lambda - 3\mu \leq 8$$
$$V: 3\lambda + \mu \geq 0, \qquad VI: \mu \leq 0, \qquad VII: \lambda - 3\mu \leq 14$$

In der $\lambda\mu$-Ebene begrenzen die den Ungleichungen zugeordneten Geraden einen konvexen Lösungsbereich, die Spur der Zielfunktion ist eine durch den Ursprung verlaufende Gerade, wenn das Absolutglied 56 bei der zeichnerischen Darstellung vernachlässigt wird.
Bei Parallelverschiebung der Spur erreicht man den Punkt $\lambda = \frac{7}{2}$, $\mu = -\frac{3}{2}$, der das Optimum darstellt, wie man aus dem Bild 30 erkennt. Damit wird $x_1 = 9$, $x_2 = 15$, $x_3 = 6$ und $z = 87$.

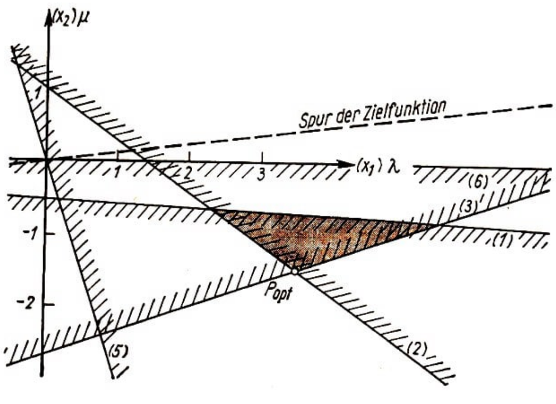


Bild 30

Es ist auch eine grafische Lösung der Aufgabe möglich ohne Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

$P_0(0;0;14)$ ist ein Punkt der Ebene (4) $x_1 + x_2 + 3x_3 = 42$, zwei beliebige, linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene sind $\mathfrak{a}_1 = (3,0,-1)$ und $\mathfrak{a}_2 = (0,3,-1)$.

Hiermit wird die Gleichung der Ebene (4): $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}_1 + \mu\mathfrak{a}_2$ oder

$$x_1 = 3\lambda, \qquad x_2 = 3\mu, \qquad x_3 = 14 - \lambda - \mu, \qquad z = 56 + 2\lambda + 5\mu \to Max.$$

$$I: \lambda - 5\mu \leq -8, \qquad II: -3\lambda + \mu \leq -4, \qquad III: \lambda + \mu \leq 8$$

$$V: \lambda \geq 0, \qquad VI: \mu \geq 0, \qquad VII: \lambda + \mu \leq 14$$

Für den von den Richtungsvektoren eingeschlossenen Winkel gilt:

$$\cos(\mathfrak{a}_1;\mathfrak{a}_2) = \frac{1}{10} \qquad , \qquad \angle(\mathfrak{a}_1;\mathfrak{a}_2) = 84,26°$$

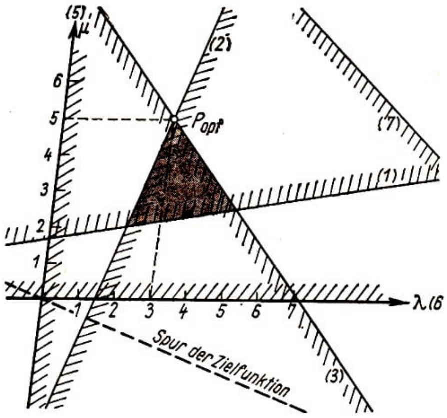


Bild 31

Aus der Zeichnung (Bild 31) folgt: $\lambda = 3$; $\mu = 5$. Damit wird $P_{opt}(9;15;6)$ und $z_{\max} = 87$.

4.5.2. Es ist nicht bekannt, auf welcher der Grenzebenen das Optimum liegt, alle Nebenbedingungen sind als Ungleichungen gegeben. Die grafische Lösungsmethode ist auch in diesem Fall möglich.

Annahme, eine zulässige Basislösung liege auf der Grenzebene (3) $x_1 + x_2 = 24$. Mit $P_0(24;0;0)$ sowie $\mathfrak{a}_1 = (1,-1,0)$ und $\mathfrak{a}_2 = (1,-1,6)$ wird die Gleichung der Ebene $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}_1 + \mu\mathfrak{a}_2$ oder

$$x_1 = 24 + \lambda + \mu, \qquad x_2 = -\lambda - \mu, \qquad x_3 = 6\mu, \qquad z = 48 - \lambda + 23\mu$$

$$I: \lambda + 13\mu \leq 4, \qquad II: -\lambda + 8\mu \leq 24, \qquad III: -, \qquad IV: \mu \leq 1$$

$$V: \lambda + \mu \geq -24, \qquad VI: \lambda + \mu \leq 0, \qquad VII: \mu \geq 0, \qquad \angle(\mathfrak{a}_1;\mathfrak{a}_2) = 76,7°$$

Aus der Zeichnung (Bild 32) folgt:

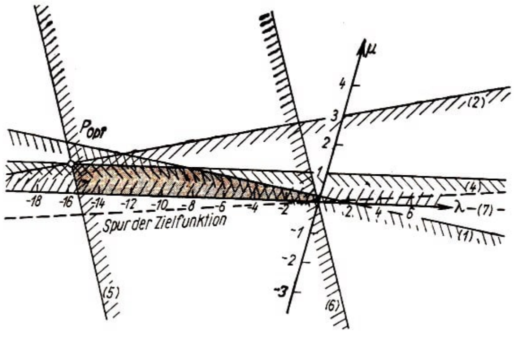


Bild 32

$\lambda = -16$; $\mu = 1$; $P_1(9; 15; 6)$; $z = 87$. Die speziellen Werte der Parameter erfüllen die Gleichungen der Ebenen (2) und (4).

Es ist zu untersuchen, ob auf diesen Grenzebenen Punkte des Lösungsbereiches mit besserem z-Wert existieren. Durch Umformung in die Parameterform (Punktrichtungsgleichung der Ebene) erhält man zweidimensionale Probleme, der Einsatz der grafischen Lösungsmethode wird möglich.

$$P_1(9; 15; 6); \qquad \mathfrak{a}_1 = (3, 1, 0); \qquad \mathfrak{a}_2 = (0, 2, -1) \tag{2}$$

$$x_1 = 9 + 3\lambda, \qquad x_2 = 15 + \lambda + 2\mu, \qquad x_3 = 6 - \mu, \qquad z = 87 + 5\lambda + 2\mu$$

$$I: \lambda - \mu \leq 3, \qquad III: 2\lambda + \mu \leq 0, \qquad IV: 4\lambda - \mu \leq 0$$

$$V: \lambda \geq 3, \qquad VI: \lambda + 2\mu \geq -15, \qquad VII: \mu \leq 6, \qquad \angle(\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2) = 73,56°$$

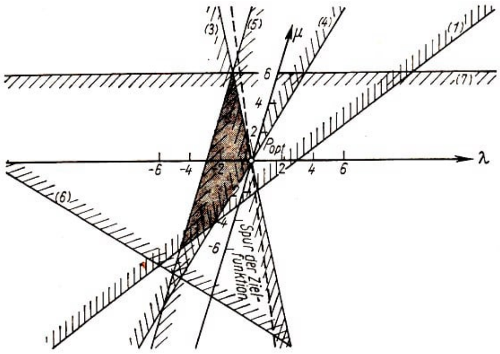


Bild 33

Aus der Zeichnung (Bild 33) ergibt sich: $\lambda = 0$, $\mu = 0$; $P_1(9; 15; 6)$; $z = 87$.

$$P_1(9; 15; 6); \qquad \mathfrak{a}_1 = (1, -1, 0), \qquad \mathfrak{a}_2 = (0, 3, -1) \tag{4}$$

$$x_1 = 9 + \lambda, \qquad x_2 = 15 - \lambda + 3\mu, \qquad x_3 = 6 - \mu, \qquad z = 87 - \lambda + 2\mu$$

$$I: 2\lambda - 5\mu \leq 14, \qquad II: -4\lambda + 3\mu \leq 0, \qquad V: \lambda \geq -9$$

$$VI: -\lambda + 3\mu \geq -15, \qquad VII: \mu \leq 6, \qquad \angle(\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2) = 132,1°$$

Aus der Zeichnung (Bild 34) folgt: $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $P_1(9; 15; 6)$; $z = 87$.

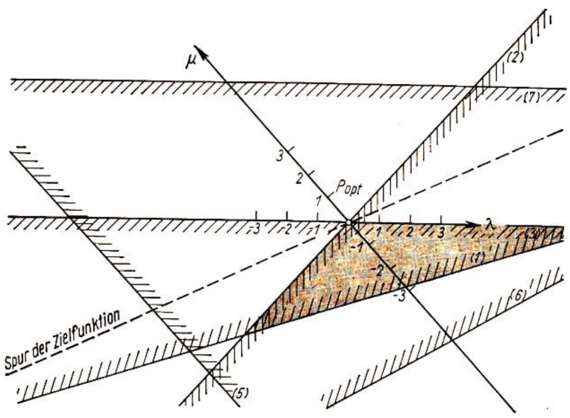


Bild 34

Auf den Grenzebenen (2) und (4) existieren keine Punkte des Lösungsbereiches mit besserem z-Wert. P_1 stellt das Optimum dar. $P_{opt}(9; 15; 6)$; $z_{\max} = 87$.

5 Eine Aufgabe der Praxis mit drei Variablen (Mischungsproblem)

In dem unter [6] genannten Buch von Piehler ist folgende Aufgabe enthalten:
Gegeben seien drei Gase mit unterschiedlichen Herstellungskosten p_i, Heizwerten h_i und Schwefelgehalten s_i $(i = 1, 2, 3)$ gemäß der folgenden Tabelle.

Tabelle 3. Vorgabewerte für Mischungsproblem

		1.Gas	2.Gas	3.Gas
p_i	M/10^3 m^3	12,80	36,60	9,70
h_i	kcal/m^3	1060	1800	5700
s_i	g S/m^3	7,2	0,5	2,0

Aus diesen drei Gassorten ist eine vorgegebene Menge Heizgas zu mischen, dessen Heizwert zwischen gewissen Schranken liegt, dessen Schwefelgehalt eine obere Grenze nicht übersteigt und das möglichst billig ist. Eines der drei Gase erfüllt nicht zugleich alle Bedingungen. Außerdem stehe das dritte Gas nur in beschränkter Menge zur Verfügung.

Die weiteren Zahlenwerte seien wie folgt angenommen
Geforderte Heizgasmenge $m = 25000$ m^3
Untere Heizwertschranke $\underline{h} = 2200$ kcal/m^3
Obere Heizwertschranke $\overline{h} = 2600$ kcal/m^3
Schwefelschranke $\overline{s} = 3,0$ g S/m^3
Schranke für das dritte Gas $t = 6800$ m^3

Dieses Beispiel aus der Praxis soll mit den in diesem Buch entwickelten Methoden durchgerechnet werden.
Bezeichnen wir die einzelnen Gasmengen in 10^3 m^3 mit x_1, x_2, x_3, so lautet das Optimalproblem

$$\begin{aligned} z = 12,8x_1 + 36,6x_2 + 9,7x_3 &\to \text{ Min.} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 25 && \text{(I, Bilanzgleichung)} \\ 1,06x_1 + 1,8x_2 + 5,7x_3 &\leq 65 && \text{(II, obere Heizwertbedingung)} \\ 1,06x_1 + 1,8x_2 + 5,7x_3 &\geq 55 && \text{(III, untere Heizwertbedingung)} \\ 7,2x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 &\leq 75 && \text{(IV, Schwefelbedingung)} \\ x_3 &\leq 6,8 && \text{(V, Mengenbedingung)} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 && \text{(VI-VIII)} \end{aligned}$$

Das Optimum liegt nach Voraussetzung auf der Ebene (1).

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25; \qquad P_0(0; 0; 25); \qquad \mathfrak{a}_1 = (1, -1, 0); \mathfrak{a}_2 = (0, 1, -1)$$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}_1 + \mu\mathfrak{a}_2, \qquad x_1 = \lambda, \quad x_2 = -\lambda + \mu, \quad x_3 = 25 - \mu$$

$$z = 242,5 + 23,8\lambda + 26,9\mu \to \text{ Min.}$$

$$II: 37\lambda + 195\mu \geq 3875, \qquad III: 37\lambda + 195\mu \leq 4375, \qquad IV: 67\lambda - 15\mu \leq 250$$

$$V: \mu \geq 18,2, \qquad VI: \lambda \geq 0, \qquad VII: -\lambda + \mu \geq 0, \qquad VIII: \mu leq 25$$

Eine zulässige Basislösung liege auf der Grenzgeraden (2) $37\lambda + 195\mu = 3875$. Modulo 37 gilt: $10\mu \equiv -10$ mod 37; $\mu \equiv -1$ mod 37; $\mu \equiv 36$ mod 37.

$$\mu = 37k - 1; \qquad \lambda = 110 - 195k, \qquad z = 5636,3k - 2402,4 \rightarrow \text{ Min.}$$

IV: $k \geq 0,52385$, V: $k \geq 0,51892$, VI: $k \leq 0,56410$, VII: $k \geq 0,47844$, VIII: $k \leq 0,7020$, $k \in [0,52385; 0,56410]$
Für k $= 0,52385$ nimmt z den kleinsten Wert an.

$$z = 550,2; \qquad x_1 = 7,850; \qquad x_2 = 10,533; \qquad x_3 = 6,617$$

$k = 0,52385$ erfüllt die Gleichung der Grenzgeraden (4).
Es ist zu untersuchen, ob auf der Grenzgeraden (4) Punkte des Lösungsbereiches existieren, die einen besseren z-Wert liefern.

$$67\lambda - 15\mu = 250; \qquad 7\lambda \equiv 10 \text{ mod } 15; \qquad \lambda \equiv \frac{10}{7} \equiv 10 \text{ mod } 15 \tag{4}$$

$$\lambda = 15k + 10; \qquad \mu = 28 + 67k; \qquad z = 757,7 + 1445,3k$$

II: $k \geq -0,14354$, III: $k \leq -0,10683$, V: $k \geq -0,14627$, VI: $k \geq -0,66667$, VII: $k \geq -0,34615$, VIII: $k \geq -0,04478$; $k \in [-0,14354; -0,10683]$
Für $k = -0,14354$ nimmt z den kleinsten Wert an.

$$z = 550,24; \qquad x_1 = 7,8469; \qquad x_2 = 10,5359; \qquad x_3 = 6,6172$$

Auf der Grenzgeraden (4) existieren keine Punkte des Lösungsbereiches mit besserem z-Wert. Die erhaltene Basislösung stellt das Optimum dar.
Die Ergebnisse stimmen bis auf die vierte Stelle nach dem Komma mit den in [6] angegebenen überein.

Optimale Lösung für die Gasmischung:

	1.Gas	2.Gas	3.Gas	M/10^3 m^3
Menge in 10^3 m^3	7,8469	10,5359	6,6172	550,24

Es bietet sich für dieses Problem, für das man die das Optimum enthaltende Grenzebene kennt, die grafische Lösungsmethode an. Man wird allerdings keine so große Genauigkeit beim Ablesen der Ergebnisse erwarten dürfen!

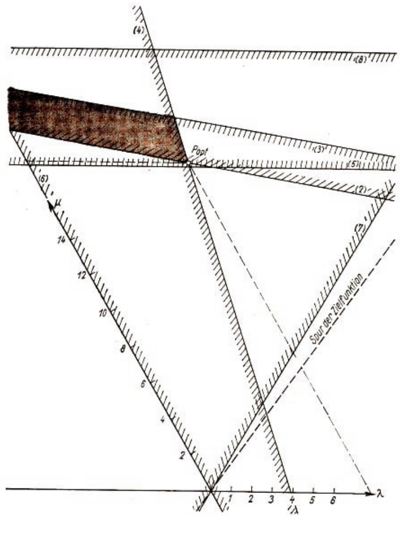


Bild 35: Zeichnerische Lösung für das Mischungsproblem.
Spurgerade der Zielfunktion: $\mu = 0,888\lambda$.
Ergebnisse aus der Zeichnung (Bild 35): $\lambda = 7,8; \mu = 18,4$

Die Richtungsvektoren schließen den Winkel φ miteinander ein.

$$\mathfrak{a}_1 = (1,-1,0); \qquad \mathfrak{a}_2 = (0,1,-1); \qquad \cos\varphi = -\frac{1}{2}; \qquad \varphi = 120^\circ$$

$$II: \mu \geq -0,19\lambda + 19,8; \qquad III: \mu \leq -0,19\lambda + 22,42; \qquad IV: \mu \geq 4,47\lambda - 16,7$$

$$V: \mu \geq 18,2; \qquad VI: \lambda \geq 0; \qquad VII: \mu \geq \lambda; \qquad VIII: \mu \leq 25$$

Damit erhält man für das Optimum sowie den optimalen Wert der Zielfunktion:

$$x_1 = 7,8; \qquad x_2 = 10,6; \qquad x_3 = 6,6; \qquad z = 551,8$$

Die Methoden mit Hilfe der Zahlenkongruenzen oder der Vektorrechnung liefern sehr viel genauere Ergebnisse, sie sind deshalb auch bei zweidimensionalen Problemen der grafischen Methode vorzuziehen, wenn bestimmte Genauigkeiten verlangt werden.

6 Die Basisvektorenmethode bei bekannter zulässiger Basislösung

In den Aufgaben der vorhergehenden Abschnitte wurde auf verschiedene Art eine zulässige Basislösung bestimmt. Es wurden sodann sämtliche von diesem Punkt ausgehende Kanten des Lösungsbereiches dahingehend untersucht, ob auf diesen Kanten Punkte mit besserem z-Wert auftreten. Diese Untersuchung soll jetzt vereinfacht werden.

Eine zulässige Basislösung ist Eckpunkt P^* des Lösungsbereiches, sie ist also der Schnittpunkt von n Hyperebenen des n-dimensionalen Raumes und es gibt n von diesem Basispunkt ausgehende Kanten des Lösungsbereiches.

Als Beispiel soll der Schnittpunkt dreier Ebenen im dreidimensionalen Raum betrachtet werden, die Ebenen seien ε_1, ε_2 und ε_3, die möglichen Schnittgeraden g_{12}, g_{13} und g_{23} (Bild 36).

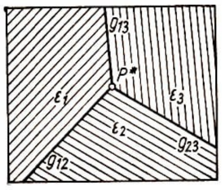


Bild 36:

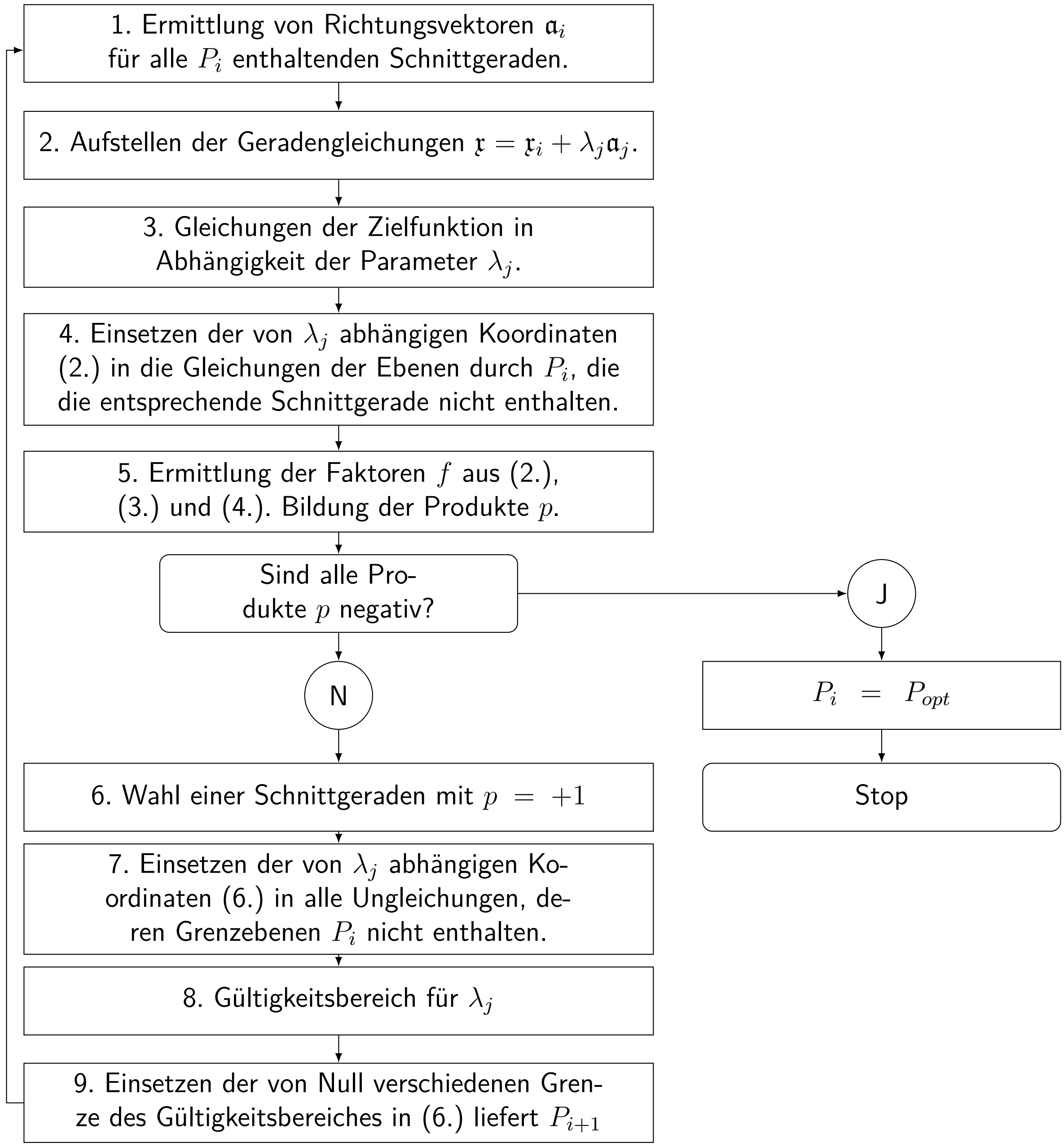
Man ermittelt die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_{ij}$ der Geraden g_{ij}, stellt die Punktrichtungsgleichungen der Geraden auf $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^* + \lambda\mathfrak{a}_{ij}$ und gibt die Zielfunktion in Abhängigkeit des Parameters λ an.
Für $\lambda = 0$ erhält man in allen Fällen die Ausgangsbasislösung P^* bzw. $\mathfrak{x}^*$. Es existieren genau zwei Möglichkeiten:
Entweder gelangt man von $\mathfrak{x}^*$ aus für $\lambda > 0$ oder aber für $\lambda < 0$ in den Lösungsbereich hinein.

Die Entscheidung darüber, welche von beiden Möglichkeiten die richtige ist, liefert in jedem Fall diejenige Ebene ε_0, die die betreffende Schnittgerade nicht enthält. Im dreidimensionalen Fall entscheidet z.B. die Ebene ε_3 über das Vorzeichen des Parameters λ der Schnittgeraden g_{12}.
Man ermittelt für alle n Schnittgeraden das Vorzeichen des Parameters λ, die "Richtung des Parameters λ", für die man auf der betreffenden Schnittgeraden in den Lösungsbereich hinein gelangt.

Ein Vergleich der "Richtung des Parameters λ" mit der von λ abhängigen Zielfunktion zeigt sofort, ob in Richtung der betreffenden Kante des Lösungsbereiches eine Verbesserung des z-Wertes möglich ist oder nicht. Genauer untersucht wird dann nur eine solche Kante (Schnittgerade), die eine Verbesserung des z-Wertes ermöglicht. Man bestimmt durch Einsetzen der von λ abhängigen x_i-Werte in alle übrigen Ungleichungen den Gültigkeitsbereich des Parameters λ und gelangt sofort zu einer weiteren zulässigen Basislösung mit besserem z-Wert.

Von der neuen Basislösung aus verfährt man dann wieder, wie eben beschrieben.

Ordnet man einer Maximumaufgabe, einem für den Lösungsbereich positiven Parameter λ und schließlich einem positiven Linearterm in der von λ abhängigen Zielfunktion jeweils den Faktor $f = (+1)$ zu, einer Minimumaufgabe, einem für den Lösungsbereich negativen Parameter λ und einem negativen Linearterm in der von λ abhängigen Zielfunktion dagegen den Faktor $f = (-1)$, so gilt folgende Regel für die Verbesserung bzw. Verschlechterung des z-Wertes auf einer von der Basislösung P^* ausgehenden Kante des Lösungsbereiches:



Bemerkung: Auch zur Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung kann das hier angegebene Verfahren neben den in den vorangehenden Abschnitten beschriebenen in abgeänderter Form angewendet werden.

Ist das Produkt p aus den drei in der angegebenen Weise definierten Faktoren f positiv, so ist auf der betreffenden Kante des Lösungsbereiches eine Verbesserung des z-Wertes möglich, bei negativem Wert des Produktes p dagegen nicht.
Schneiden mehr als n Hyperebenen einander im Punkt P^*, so sind alle möglichen Schnittgeraden zu untersuchen, um den Faktor für die Richtung des Parameters zu er-

halten. Ergibt das Einsetzen der von λ abhängigen Koordinaten der Geradengleichung in die die Gerade nicht enthaltenden Ebenengleichungen die Ausdrücke $\lambda \geq 0$ und $\lambda \leq 0$, die einander für $\lambda \neq 0$ widersprechen, so wird der Richtung des Parameters der Faktor $f = 0$ zugeordnet. Bei Verschwinden des betreffenden Produktes p ist eine Verbesserung des z-Wertes der Zielfunktion nicht möglich.

Man ermittelt die Lösung eines beliebigen, aus den gegebenen Grenzebenen gebildeten Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Variablen und erhält einen Schnittpunkt der Hyperebenen, der nicht notwendig zulässige Basislösung zu sein braucht. Man bestimmt die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_i$ der Schnittgeraden, stellt die Punktrichtungsgleichungen dieser Schnittgeraden auf, bestimmt die Gültigkeitsbereiche der Parameter und hat durch die Grenzen der Gültigkeitsbereiche auf mindestens einer Schnittgeraden eine zulässige Basislösung gefunden, falls nicht alle einander in P_0 schneidenden Ebenen überflüssige Bedingungen darstellen.
Auf der vorhergehenden Seite wird die allgemeine Lösung einer Aufgabe der linearen Optimierung für den Fall angegeben, dass eine zulässige Basislösung P_i bzw. $\mathfrak{x}_i$ bekannt ist.

6.1 Anwendung auf ein Problem mit drei Variablen

Zu bestimmen sind die Extremwerte der Funktion $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3$ unter den folgenden Nebenbedingungen

$$2x_1 - 5x_2 + 21x_3 \geq_7 7 \qquad \text{(I)}$$
$$68x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 848 \qquad \text{(II)}$$
$$-41x_1 + 14x_2 + 12x_3 \leq 103 \qquad \text{(III)}$$
$$25x_1 + 26x_2 - 3x_3 \geq 343 \qquad \text{(IV)}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad \text{(V-VII)}$$

6.1.1 Ermittlung einer zulässigen Basislösung

Gleichung der Schnittgeraden g_{12} der Grenzebenen (1) und (2).

$$P_0(10; 18; 7); \qquad \mathfrak{a} = (1, -8, -2); \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \lambda\mathfrak{a}$$

$$x_1 = 10 + \lambda, \qquad x_2 = 18 - 8\lambda, \qquad x_3 = 7 - 2\lambda$$

Den Gültigkeitsbereich für den Parameter λ erhält man durch Einsetzen der Koordinaten in alle Ungleichungen U_j $(j \neq 1, 2)$.

$$III : \lambda \geq -1, \quad IV : \lambda \leq 2, \quad V : \lambda \geq -10, \quad VI : \lambda \leq 2,2, \quad VII : \lambda \leq 3,5, \quad \lambda \in [-1, 2]$$

Auf der Geraden g_{12} existieren zwei zulässige Basislösungen. Mit $z = 117 - 40\lambda$ erhält man für $\lambda = -1$ $z = 157$. Die zugehörende Basislösung ist $\mathfrak{x}_1 = (9, 26, 9)$.

6.1.2 Bestimmung des Maximums der Zielfunktion

$P_1(9;26;9)$ erfüllt die Gleichungen der Ebenen (1), (2) und (3). Von der Geraden g_{12} wurde bei Ermittlung der ersten zulässigen Basislösung ausgegangen, es müssen jetzt die Geraden g_{13} und g_{23} untersucht werden.
Beide Produkte p sind negativ, es ist innerhalb des Lösungsbereiches kein Punkt mit einem größeren z-Wert möglich. Die zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_1(9,26,9)$ stellt das Optimum dar.

$$P_{\max}(9;26;9) \qquad ; \qquad z_{\max} = 157$$

84 6. Die Basisvektorenmethode bei bekannter zulässiger Basislösung

	g_{13}	g_{23}
1.	$\mathfrak{a} = (2,5,1)$	$\mathfrak{a} = (0,-6,7)$
2.	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 9 + 2\lambda$ $x_2 = 26 + 5\lambda$ $x_3 = 9 + \lambda$	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 9$ $x_2 = 26 - 6\lambda$ $x_3 = 9 + 7\lambda$
3.	$z = 157 + 30\lambda$, $f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 157 - 23\lambda$, $f = -1$ $z \to$ Max., $f = +1$
4.	(2) $\lambda \leq 0$, $f = -1$	(1) $\lambda \geq 0$, $f = +1$
5.	$p = -1$	$p = -1$

6.1.3 Bestimmung des Minimums der Zielfunktion

$P_1(9;26;9)$ erfüllt die Gleichungen der Ebenen (1), (2) und (3). Es gilt das Lösungsschema 6.1.2. Da die Zielfunktion jetzt einen minimalen Wert annehmen soll, ändert sich in dem entsprechenden Faktor das Vorzeichen, wodurch beide Produkte positiv werden.
Es ist längs der Geraden g_{13}, g_{23} und auch g_{12} eine Verbesserung (Verkleinerung) der z-Werte möglich.
$6.g_{13}$

$$7.IV : \lambda \geq -3, \quad V : \lambda \geq -4,5, \quad VI : \lambda \geq -5,2, \quad VII : \lambda \geq -9, \quad \lambda \in [-3,0]$$

	g_{14}	g_{34}
1.	$\mathfrak{a} = (-3,3,1)$	$\mathfrak{a} = (-2,1,-8)$
2.	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 3 - 3\lambda$ $x_2 = 11 + 3\lambda$ $x_3 = 6 + \lambda$	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 3 - 2\lambda$ $x_2 = 11 + \lambda$ $x_3 = 6 - 8\lambda$
3.	$z = 67 + 10\lambda$, $f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 67 - 7\lambda$, $f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(3) $\lambda \leq 0$, $f = -1$	(1) $\lambda \leq 0$, $f = -1$
5.	$p = +1$	$p = -1$
7.	II $\lambda \geq -3$ V $\lambda \leq 1$ VI $\lambda \geq -\frac{11}{3}$ VII $\lambda \geq -6$, $\lambda \in [-3,0]$	

Für $\lambda = -3$ erhält man aus der Geradengleichung die zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_2 = (3, 11, 6)$. $\lambda = -3$ erfüllt die Gleichungen (1), (3) und (4).
Für $\lambda = -3$ erhält man aus der Gleichung der Geraden g_{14} eine weitere zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_3 = (12; 2; 3)$. $\lambda = -3$ erfüllt die Gleichungen (1), (2) und (4).

	g_{12}	g_{24}
1.	$\mathfrak{a} = (1, -8, -2)$	$\mathfrak{a} = (1, -2, -9)$
2.	$x_1 = 12 + \lambda$ $x_2 = 2 - 8\lambda$ $x_3 = 3 - 2\lambda$	$x_1 = 12 + \lambda$ $x_2 = 2 - 2\lambda$ $x_3 = 3 - 9\lambda$
3.	$z = 37 + 40\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 37 - 17\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(4) $\lambda \leq 0,\ f = -1$	(1) $\lambda \leq 0,\ f = -1$
5.	$p = -1$	$p = -1$

Beide Produkte sind negativ, eine Verbesserung (Verkleinerung!) des z-Wertes der Zielfunktion innerhalb des Lösungsbereiches ist nicht mehr möglich. $\mathfrak{x}_3 = (12, 2, 3)$ stellt das Optimum dar.

$$P_{\min}(12; 2; 3) \qquad ; \qquad z_{\min} = 37$$

6.1.4 Bestimmung des Maximums bei veränderter Zielfunktion $z = x_1 + 7x_2 + 6x_3$ unter den gegebenen Nebenbedingungen $\mathfrak{x}_1 = (9; 26; 9)$

g_{13}	g_{23}
$\mathfrak{a} = (2, 5, 1)$	$\mathfrak{a} = (0, -6, 7)$
$x_1 = 9 + 2\lambda$ $x_2 = 26 + 5\lambda$ $x_3 = 9 + \lambda$	$x_1 = 9$ $x_2 = 26 - 6\lambda$ $x_3 = 9 + 7\lambda$
$z = 245 + 43\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 245$ $z \to$ Max., $f = +1$
(2) $\lambda \leq 0,\ f = -1$	(1) $\lambda \geq 0,\ f = +1$

Für die Gerade g_{13} wird das Produkt negativ. Für die Gerade g_{23} wurden nur zwei Faktoren f ermittelt, die Zielfunktion ist von λ unabhängig. Das bedeutet, für alle Punkte der Geraden g_{23} erhält man denselben Wert $z = 245$. Es sind alle Punkte der Geraden g_{23}, die dem Lösungsbereich angehören, optimale Punkte.

$$IV : \lambda \leq 3; \qquad V : -, \qquad VI : \lambda \leq \frac{13}{3}, \qquad VII : \lambda \geq -\frac{9}{7}, \qquad \lambda \in [0, 3]$$

Für die Grenzen des Gültigkeitsbereiches erhält man die beiden zulässigen Basislösungen $P_1(9; 26; 9)$ und $P_2(9; 8; 30)$. Mit P_1 und P_2 stellen auch alle Punkte der Strecke P_1P_2 optimale Lösungen der Aufgabe dar.
Die vollständige Lösung kann vektoriell dargestellt werden durch den Ausdruck

$$\mathfrak{L}_{opt} = \mathfrak{x}_1 + \lambda(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1), \qquad \lambda \in [0, 1] \qquad \text{oder}$$

$$\mathfrak{L}_{opt} = (9, 26, 9) + \lambda(0, -18, 21), \qquad \lambda \in [0, 1] \qquad z_{\max} = 245$$

6.2 Anwendung auf ein Problem mit vier Variablen

Zu bestimmen sind die Extremwerte der Funktion

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

für nicht negative Werte der Variablen unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$-7x_1 + 8x_2 + 30x_3 - 10x_4 \geq 124 \quad \text{(I)}$$
$$-14x_1 + 9x_2 + 32x_3 - 20x_4 \leq 24 \quad \text{(II)}$$
$$-14x_1 + 13x_2 + 54x_3 - 32x_4 \leq 128 \quad \text{(III)}$$
$$7x_1 - 2x_2 - 18x_3 + 13x_4 \leq 32 \quad \text{(IV)}$$
$$-5x_1 + 4x_2 + 12x_3 - 8x_4 \leq 8 \quad \text{(V)}$$

Die Bedingungen für die Nichtnegativität der Variablen schreiben wir in der Form

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \quad \text{(VI-IX)}$$

6.2.1 Ermittlung einer zulässigen Basislösung

Der Vektor $\mathfrak{x} = (0,0,0,0)$ ist Schnittpunkt der Grenzebenen, er ist aber keine zulässige Basislösung.

1. Gleichungen der Schnittgeraden durch $P_0(0;0;0;0)$.

g_{789}	g_{689}	g_{679}	g_{678}
$\mathfrak{x} = \lambda(1,0,0,0)$	$\mathfrak{x} = \lambda(0,1,0,0)$	$\mathfrak{x} = \lambda(0,0,1,0)$	$\mathfrak{x} = \lambda(0,0,0,1)$
$x_1 = \lambda$	$x_2 = \lambda$	$x_3 = \lambda$	$x_4 = \lambda$
$x_2 = x_3 = x_4 = 0$	$x_1 = x_3 = x_4 = 0$	$x_1 = x_2 = x_4 = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

2. Bedingungen für die Parameter λ.

	g_{789}	g_{689}	g_{679}	g_{678}
	$x_1 = \lambda \geq 0$	$x_2 = \lambda \geq 0$	$x_3 = \lambda \geq 0$	$x_4 = \lambda \geq 0$
I	$\lambda \leq -\frac{124}{7}$	$\lambda \geq 15,5$	$\lambda \geq \frac{62}{15}$	$\lambda \leq -12,4$
II	$\lambda \geq -\frac{12}{7}$	$\lambda \leq \frac{8}{3}$	$\lambda \leq 0,75$	$\lambda \geq -1,2$
III	$\lambda \geq -\frac{64}{7}$	$\lambda \leq \frac{128}{13}$	$\lambda \leq \frac{64}{27}$	$\lambda \geq -4$
IV	$\lambda \leq \frac{32}{7}$	$\lambda \geq -16$	$\lambda \geq -\frac{16}{9}$	$\lambda \leq \frac{32}{13}$
V	$\lambda \geq -1,6$	$\lambda \leq 2$	$\lambda \leq \frac{2}{3}$	$\lambda \geq -1$

Bei der Untersuchung aller durch P_0 verlaufender Schnittgeraden ergeben sich für die Parameter widersprechende Aussagen.
Für die Schnittgerade g_{689} und $\lambda = 2$ wird die Gleichung der Grenzebene (5) erfüllt. Man erhält $\mathfrak{x}_1 = (0,2,0,0)$.

	g_{568}	g_{569}	g_{589}
	$\mathfrak{a} = (0,2,0,1)$	$\mathfrak{a} = (0,-3,1,0)$	$\mathfrak{a} = (4,5,0,0)$
	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_1 = 4\lambda$
	$x_2 = 2 + 2\lambda$	$x_2 = 2 - 3\lambda$	$x_2 = 2 + 5\lambda$
	$x_3 = 0$	$x_3 = \lambda$	$x_3 = 0$
	$x_4 = \lambda$	$x_4 = 0$	$x_4 = 0$
I	$\lambda \geq 18$	$\lambda \geq 18$	$\lambda \geq 9$
II	$\lambda \geq -3$	$\lambda \leq 1,2$	$\lambda \geq -\frac{6}{11}$
III	$\lambda \geq -17$	$\lambda \leq 6,8$	$\lambda \leq \frac{34}{3}$
IV	$\lambda \leq 4$	$\lambda \geq -3$	$\lambda \leq 2$
	$\lambda \geq 0$	$\lambda \geq 0$	$\lambda \geq 0$

Auf den betrachteten Schnittgeraden liegt keine zulässige Basislösung. Für die Schnittgerade g_{558} und $\lambda = 4$ wird die Gleichung der Grenzebene (4) erfüllt, man erhält $\mathfrak{x}_2 = (0, 10, 0, 4)$.

	g_{456}	g_{458}	g_{468}
	$\mathfrak{a} = (0, -1, 3, 4)$	$\mathfrak{a} = (-4, -1, 0, 2)$	$\mathfrak{a} = (0, 13, 0, 2)$
	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 0$ $x_2 = 10 - \lambda$ $x_3 = 3\lambda$ $x_4 = 4 + 4\lambda$	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = -4\lambda$ $x_2 = 10 - \lambda$ $x_3 = 0$ $x_4 = 4 + 2\lambda$	$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \lambda\mathfrak{a}$ $x_1 = 0$ $x_2 = 10 + 13\lambda$ $x_3 = 0$ $x_4 = 4 + 2\lambda$
I II III	$\lambda \geq 2$ $\lambda \leq 2$ $\lambda \leq 6$ $\lambda \geq 0$, $\lambda \leq 10$, $\lambda \geq -1$		

Für $\lambda = 2$ erfüllt die Gleichung der Geraden g_{455} auch die Gleichungen der Schnittebenen (1) und (2).
Für $\lambda = 2$ erhält man eine zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_1 = (0, 8, 6, 12)$.

Bemerkung: Nach endlich vielen Schritten kommt man von einem beliebigen Schnittpunkt der durch die Ungleichungen gegebenen Ebenen zu einer zulässigen Basislösung. Im vorliegenden Fall war die Bestimmung einer zulässigen Basislösung mit einiger Mühe verbunden, es wäre in diesem Fall günstiger gewesen, von einer beliebigen Schnittgeraden der durch die Nebenbedingungen gegebenen Ebenen auszugehen.

Untersuchung der Schnittgeraden g_{123}:

$$x_1 = 8 - 7k; \quad x_2 = 4k; \quad x_3 = 8 - k; \quad x_4 = 8 - \frac{3}{7}k$$

Durch Einsetzen der Koordinaten in die übrigen Ungleichungen erhält man für den Parameter den Wert Null und hat damit sofort eine zulässige Basislösung $P_1(8; 0; 8; 6)$ erhalten.

6.2.2 Bestimmung des Maximums der Zielfunktion

Es ist die zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_1 = (0, 8, 6, 12)$ gegeben, welche die Gleichungen der Ebenen (1), (2), (4), (5) und (6) erfüllt.
Die durch den Punkt P_1 verlaufenden Schnittgeraden sind nur so weit zu untersuchen, bis man für eine Gerade ein positives Produkt gefunden hat. Im vorliegenden Fall genügt der Vektor $\mathfrak{x}_1$ fünf Ebenengleichungen, es sind also $\binom{5}{3} = 10$ Schnittgeraden durch P_1 möglich.

Wird in einer gegebenen zulässigen Basislösung schon das Optimum vermutet, so muss für alle möglichen Schnittgeraden nachgewiesen werden, dass das im Abschnitt 7. definierte Produkt negativ ist.

	g_{124}	g_{125}	g_{126}
1.	$\mathfrak{a} = (-6, -4, 1, 4)$	$\mathfrak{a} = (4, -4, 1, -3)$	$\mathfrak{a} = (0, -20, 5, -1)$
2.	$x_1 = -6\lambda$ $x_2 = 8 - 4\lambda$ $x_3 = 6 + \lambda$ $x_4 = 12 + 4\lambda$	$x_1 = 4\lambda$ $x_2 = 8 - 4\lambda$ $x_3 = 6 + \lambda$ $x_4 = 12 - 3\lambda$	$x_1 = 0$ $x_2 = 8 - 20\lambda$ $x_3 = 6 + 5\lambda$ $x_4 = 12 - \lambda$
3.	$z = 82 + 5\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 82 - 13\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 82 - 29\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Max., $f = +1$
4.	(5) $\lambda \geq 0, f = 0$ (6) $\lambda \leq 0, f = 0$	(4) $\lambda \geq 0, f = +1$ (6) $\lambda \geq 0, f = +1$	(4) $\lambda \geq 0, f = +1$ (5) $\lambda \geq 0, f = +1$
5.	$p = 0$	$p = -1$	$p = -1$

	g_{145}	g_{146}
1.	$\mathfrak{a} = (-4, -1, 0, 2)$	$\mathfrak{a} = (0, -5, 2, 2)$
2.	$x_1 = -4\lambda$ $x_2 = 8 - \lambda$ $x_3 = 6$ $x_4 = 12 + 2\lambda$	$x_1 = 0$ $x_2 = 8 - 5\lambda$ $x_3 = 6 + 2\lambda$ $x_4 = 12 + 2\lambda$
3.	$z = 82 + 2\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 82 + 4\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$
4.	(2) $\lambda \leq 0, f = -1$ (6) $\lambda \leq 0, f = -1$	(2) $\lambda \geq 0, f = +1$ (6) $\lambda \geq 0, f = +1$
5.	$p = -1$	$p = +1$

g_{146}: 7. III: $\lambda \geq -4$; VII: $\lambda \leq -1,6$; VIII: $\lambda \geq -3$; IX: $\lambda \geq -6$: $\lambda \in [0; 1,6]$.
9. $\lambda = 1,6$ liefert die neue zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_2 = (0; 0; 9,2; 15,2)$. $\lambda = 1,6$ erfüllt die Gleichungen (1), (4) (6) und (7).

	g_{147}	g_{167}	g_{467}
1.	$\mathfrak{a} = (10, 0, 1, -4)$	$\mathfrak{a} = (0, 0, 1, 3)$	$\mathfrak{a} = (0, 0, 13, 18)$
2.	$x_1 = 10\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 9,2 + \lambda$ $x_4 = 15,2 - 4\lambda$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 9,2 + \lambda$ $x_4 = 15,2 + 3\lambda$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 9,2 + 13\lambda$ $x_4 = 15,2 + 18\lambda$
3.	$z = 88,4 - 3\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 88,4 + 15\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 88,4 + 11\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$
4.	(6) $\lambda \geq 0, f = +1$	(4) $\lambda \leq 0, f = -1$	(1) $\lambda \geq 0, f = +1$
5.	$p = -1$	$p = -1$	$p = +1$
7.			II $\lambda \leq 0,6$ III $\lambda \leq \frac{14}{15}$ V $\lambda \leq 1,6$ VIII $\lambda \geq -\frac{92}{13}$ IX $\lambda \geq -\frac{76}{9}$, $\lambda \in [0; 0,6]$

9. $\lambda = 0,6$ liefert die dritte zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_3 = (0, 0, 17, 26)$. $\lambda = 0,6$ erfüllt die Gleichungen (2), (4), (6) und (7).

	g_{246}	g_{247}	g_{267}
1.	$\mathfrak{a} = (0, -8, 11, 14)$	$\mathfrak{a} = (4, 0, 3, 2)$	
2.	$x_1 = 0$ $x_2 = -8\lambda$ $x_3 = 17 + 11\lambda$ $x_4 = 26 + 14\lambda$	$x_1 = 4\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 17 + 3\lambda$ $x_4 = 26 + 2\lambda$	
3.	$z = 107 + 63\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 107 + 21\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	
4.	(7) $\lambda \leq 0, f = -1$	(4) $\lambda \geq 0, f = +1$	
5.	$p = -1$	$p = +1$	
7.		I $\lambda \geq -3$ III $\lambda \leq 1$ VIII $\lambda \geq -\frac{17}{3}$ IX $\lambda \geq -13$, $\lambda \in [0, 1]$	

9. Für $\lambda = 1$ erhält man die vierte zulässige Basislösung, die den Schnittpunkt der Ebenen (2), (3), (4) und (7) darstellt. $\mathfrak{x}_4 = (4, 0, 20, 28)$.

	g_{234}	g_{237}	g_{347}
1.	$\mathfrak{a} = (1, 2, -2, -3)$	$\mathfrak{a} = (-2, 0, 6, 11)$	$\mathfrak{a} = (-3, 0, 1, 3)$
2.	$x_1 = 4 + \lambda$ $x_2 = 2\lambda$ $x_3 = 20 - 2\lambda$ $x_4 = 28 - 3\lambda$	$x_1 = 4 - 2\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 20 + 6\lambda$ $x_4 = 28 + 11\lambda$	$x_1 = 4 - 3\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 20 + \lambda$ $x_4 = 28 + 3\lambda$
3.	$z = 176 - 13\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 176 + 60\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$	$z = 176 + 12\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Max., $f = +1$
4.	(7) $\lambda \geq 0, f = +1$	(4) $\lambda \leq 0, f = -1$	(2) $\lambda \leq 0, f = -1$
5.	$p = -1$	$p = -1$	$p = -1$

Alle Produkte p werden negativ, es existiert in keiner Richtung vom Punkt P_4 aus die Möglichkeit der Verbesserung des z-Wertes der Zielfunktion. $\mathfrak{x}_4 = (4, 0, 20, 28)$ stellt das Optimum der Zielfunktion dar.

$$P_{\max}(4; 0; 20; 28) \qquad ; \qquad z_{\max} = 176$$

Es wurde gezeigt, wie man schrittweise von einer zulässigen Basislösung zur anderen gelangt, bzw., wie man von einem Eckpunkt des konvexen Lösungsbereiches auf dem Wege der Kanten zu weiteren Eckpunkten mit besserem z-Wert kommt.

Es ist nicht immer der Rechenaufwand nötig, wie er in der vorliegenden Lösung auftrat. Eine Erschwernis ergab sich gleich zu Beginn, als man einen Punkt erreichte, der mehr als n Gleichungen der Grenzebenen genügte. Dadurch erhöhte sich die Anzahl der möglichen Wege. Hätte man die in der Bemerkung zum Abschnitt 6.1.1. gewonnene Basislösung $\mathfrak{x} = (8, 0, 8, 6)$ als Ausgangsbasis zugrunde gelegt, so wäre man in zwei Schritten über die zulässige Basislösung $\mathfrak{x} = (0, 8, 6, 12)$ sogleich zum Optimum gekommen.

Dieser Weg wäre günstiger gewesen, man hätte ein besser konvergierendes Verfahren zur Lösung der Aufgabe gehabt. Es war aber nicht beabsichtigt, den elegantesten

Lösungsweg zu beschreiten, es sollte vielmehr die Methode am Beispiel des vierdimensionalen Problems erläutert werden.

Bei einem mehrdimensionalen Problem der linearen Optimierung ist zu Beginn nicht immer eine Entscheidung darüber möglich, auf welchem Wege man mit kürzestem Aufwand zum Ziel gelangt. Es wäre an dieser Stelle die Frage interessant, wie man den angegebenen Lösungsweg der Aufgabe der linearen Optimierung optimieren könnte.

6.2.3 Bestimmung des Minimums der Zielfunktion

Es ist die zulässige Basislösung $\mathfrak{x}_1 = (0, 8, 6, 12)$ bekannt, welche die Gleichungen der Ebenen (1), (2), (4), (5) und (6) erfüllt.

	g_{124}	g_{125}
1.	$\mathfrak{a} = (-6, -4, 1, 4)$	$\mathfrak{a} = (4, -4, 1, -3)$
3.	$z = 82 + 5\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 82 - 13\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(5) $\lambda \geq 0, f = 0$ (5) $\lambda \leq 0, f = 0$	(4) $\lambda \geq 0, f = +1$ (4) $\lambda \geq 0, f = +1$
5.	$p = 0$	$p = +1$

g_{125}: 7. III $\lambda \leq 2$, VII $\lambda \leq 2$, VIII $\lambda \geq -6$, IX $\lambda \leq 4$: $\lambda \in [0, 2]$.
$\mathfrak{x}_2 = (8, 0, 8, 6)$. Die Ebenen (1), (2), (3), (5) und (7) schneiden einander im Punkt $P_2(8, 0; 8; 6)$.

	g_{123}	g_{125}	g_{127}
1.	$\mathfrak{a} = (-2, -8, 2, 1)$	$\mathfrak{a} = (4, -4, 1, -3)$	$\mathfrak{a} = (-10, 0, 0, 7)$
2.	$x_1 = 8 - 2\lambda$ $x_2 = -8\lambda$ $x_3 = 8 + 2\lambda$ $x_4 = 6 + \lambda$	$x_1 = 8 + 4\lambda$ $x_2 = -4\lambda$ $x_3 = 8 + \lambda$ $x_4 = 6 - 3\lambda$	$x_1 = 8 - 10\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 8$ $x_4 = 6 + 7\lambda$
3.	$z = 56 - 8\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 - 13\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 + 18\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(5) $\lambda \geq 0, f = 0$ (7) $\lambda \leq 0, f = 0$	(3) $\lambda \leq 0, f = -1$ (7) $\lambda \leq 0, f = -1$	(3) $\lambda \geq 0, f = +1$ (5) $\lambda \geq 0, f = +1$
5.	$p = 0$	$p = -1$	$p = -1$

	g_{135}	g_{137}	g_{157}
1.	$\mathfrak{a} = (-4, -6, 1, 1)$	$\mathfrak{a} = (-10, 0, -2, 1)$	$\mathfrak{a} = (20, 0, 1, -11)$
2.	$x_1 = 8 - 4\lambda$ $x_2 = -6\lambda$ $x_3 = 8 + \lambda$ $x_4 = 6 + \lambda$	$x_1 = 8 - 10\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 8 - 2\lambda$ $x_4 = 6 + \lambda$	$x_1 = 8 + 20\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 8 + \lambda$ $x_4 = 6 - 11\lambda$
3.	$z = 56 - 9\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 - 12\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 - 21\lambda,\ f = -1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(2) $\lambda \leq 0, f = -1$ (7) $\lambda \leq 0, f = -1$	(2) $\lambda \leq 0, f = -1$ (5) $\lambda \leq 0, f = -1$	(2) $\lambda \geq 0, f = 0$ (3) $\lambda \leq 0, f = 0$
5.	$p = -1$	$p = -1$	$p = 0$

	g_{235}	g_{237}	g_{257}
1.	$\mathfrak{a} = (0, 4, 2, 5)$	$\mathfrak{a} = (-2, 0, 6, 11)$	$\mathfrak{a} = (4, 0, 3, 2)$
2.	$x_1 = 8$ $x_2 = 4\lambda$ $x_3 = 8 + 2\lambda$ $x_4 = 6 + 5\lambda$	$x_1 = 8 - 2\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 8 + 6\lambda$ $x_4 = 6 + 11\lambda$	$x_1 = 8 + 4\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 8 + 3\lambda$ $x_4 = 6 + 2\lambda$
3.	$z = 65 + 34\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 + 60\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$	$z = 56 + 21\lambda,\ f = +1$ $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(1) $\lambda \geq 0, f = +1$ (7) $\lambda \geq 0, f = +1$	(1) $\lambda \geq 0, f = +1$ (5) $\lambda \geq 0, f = +1$	(1) $\lambda \geq 0, f = 0$ (3) $\lambda \leq 0, f = 0$
5.	$p = -1$	$p = -1$	$p = 0$

	g_{357}
1.	$\mathfrak{a} = (-8, 0, 8, 17)$
2.	$x_1 = 8 - 8\lambda$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8 + 8\lambda$; $x_4 = 6 + 17\lambda$
3.	$z = 56 + 84\lambda,\ f = +1$; $z \to$ Min., $f = -1$
4.	(1) $\lambda \geq 0, f = 0$; (7) $\lambda \leq 0, f = 0$
5.	$p = 0$

Keines der zehn möglichen Produkte ist positiv. Damit ist eine Verkleinerung des z-Wertes der Zielfunktion (Verbesserung der Lösung!) für keinen Punkt des Lösungsbereiches möglich.

$\mathfrak{x}_2 = (8, 0, 8, 6)$ stellt das Optimum dar. $P_{\min}(8; 0; 8; 6)$; $z_{\min} = 56$.

6.3 Lösung unter Verwendung von Rechenschemata

Für die Übung sowie die praktische Anwendung der Basisvektorenmethode wird ein Rechenschema empfohlen, das die gesamte Rechnung übersichtlicher und klarer gestaltet. Blätter der folgenden Form (siehe nächste Seite) mit dem angegebenen Aufdruck sind durch Kleinvervielfältigungsgeräte oder Druck leicht in großer Zahl herzustellen. Je nach der Anzahl der in den Aufgaben auftretenden Variablen und Nebenbedingungen werden die Spaltenzahlen der zweiten, dritten und letzten Zeile sowie die Anzahl der Felder unter (7.) verändert.

Liegen n Variable und m Nebenbedingungen vor, so müssen die zweite, dritte und letzte Zeile genau n Spalten besitzen, während unter (7) $m - n$ Felder benötigt werden.

Anleitung zur Benutzung des Rechenschemas:

- Den gegebenen Ungleichungen I, II, III, ... werden; Gleichungen 1, 2, 3, zugeordnet. (Gleichungen der Grenzebenen).

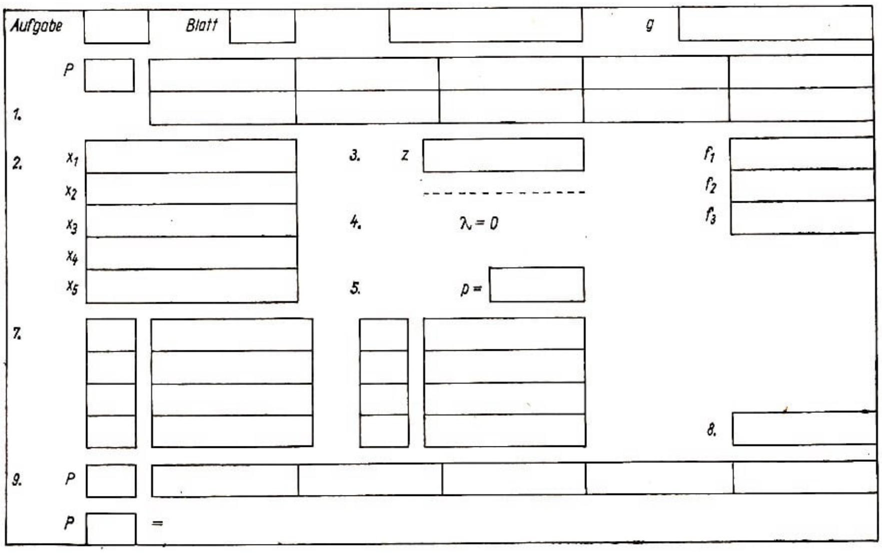
- Wahl eines Gleichungssystems von n geeigneten Gleichungen mit n Variablen. Lösung dieses Gleichungssystems liefert den Punkt P_1 als Basislösung. (Es sei angenommen, dass P_1 zulässige Basislösung ist!)

- Eintragen der Aufgaben- und Blattnummer sowie der Nummern derjenigen n Gleichungen, die den Punkt P_1 ergeben, in Zeile 1 des Rechenschemas.

- Eintragen der Koordinaten des Punktes P_1 in Zeile 2.

- Wahl einer ersten von P_1 ausgehenden Kante des Lösungsbereiches.

- Eintragen der Nummern derjenigen Gleichungen, die diese Kante ergeben, in Zeile 1. (Es handelt sich bei dieser Eintragung stets um eine Kombination von n Elementen zur Klasse $(n-1)$.



- Bestimmung eines Richtungsvektors der die betreffende Kante enthaltenden Geraden g.

- Eintragen der Koordinaten dieses Richtungsvektors unter (1.) (Zeile 3).

- Koordinatendarstellung der Punktrichtungsform der Gleichung der Geraden g unter (2.). (Koordinaten in Abhängigkeit des Parameters λ)

- Zielfunktion in Abhängigkeit des Parameters λ unter (3.). (Es genügt, unter (3.) einzutragen, ob der Linearterm der von λ abhängigen Zielfunktion positiv oder negativ ist.)

- Bestimmung des Faktors f_1:
Einem positiven Linearterm in (3.) wird $f_1 = +1$ zugeordnet.
Einem negativen Linearterm in (3.) wird $f_1 = -1$ zugeordnet.
Einer von λ unabhängigen Zielfunktion wird $f_1 = 0$ zugeordnet.

- Bestimmung des Faktors f_2:
Einer Maximumaufgabe wird der Faktor $f_2 = +1$ zugeordnet.
Einer Minimumaufgabe wird der Faktor $f_2 = -1$ zugeordnet.

- Bestimmung des Faktors f_3:
$\lambda \geq 0$ wird $f_3 = +1$ zugeordnet.
$\lambda \leq 0$ wird $f_3 = -1$ zugeordnet.

- Bestimmung des Produktes der drei Faktoren f_1.

1.Fall: $p = -1$. Es ist längs der betrachteten Kante keine Verbesserung des z-Wertes der Zielfunktion möglich.
Wahl einer zweiten von P_1 ausgehenden Kante des Lösungsbereiches. Fortsetzung: Blatt 2. Sind die Produkte für alle P_1 enthaltenden Kanten negativ, so gilt: $P_1 = P_{opt}$.

2.Fall: $p = +1$. Auf der betreffenden Kante gibt es Punkte mit besserem z-Wert.

- Einsetzen der Koordinaten (2.) in alle gegebenen Ungleichungen, deren zugeordnete Grenzebenen P_1 nicht enthalten. (Es sind alle Ungleichungsnummern zu betrachten, die in Zeile 1 nicht vermerkt wurden.)

- Eintragen der Ungleichungsnummern sowie der sich ergebenden Bedingungen für λ unter (7.).

- Eintragen des sich aus (7.) ergebenden Gültigkeitsbereiches für λ unter (8.).

P_1 ist zulässige Basislösung. Eine Grenze des Gültigkeitsbereiches für λ ist Null. Einsetzen der von Null verschiedenen Grenze in (2.) ergibt eine zweite bessere zulässige Basislösung P_2. Eintragung unter (9.) und Übertrag auf Blatt (2).

Ist P_1 nicht zulässige Basislösung und ist der Bereich (8.) leer: Wahl einer zweiten von P_1 ausgehenden Kante des Lösungsbereiches. Fortsetzung: Blatt 2.

Ist P_1 nicht zulässige Basislösung und ist der Bereich (8.) nicht leer: Beide Bereichsgrenzen ergeben durch Einsetzen in (2.) zulässige Basislösungen. Wahl derjenigen zulässigen Basislösung mit dem besseren z-Wert. Eintragung unter (9.) und Übertrag auf Blatt 2.

Aufgabe 6.2. Blatt 1 1–4–6–7 g 1–4–6

P	1	0	0	9,2	15,2
1.		0	−5	2	2

2. x_1	0	3. z	$\cdots + 4\lambda$	f_1	$+1$
x_2	-5λ		Maximum	f_2	$+1$
x_3	$9{,}2 + 2\lambda$	4. (VII)	$\lambda \leqq 0$	f_3	-1
x_4	$15{,}2 + 2\lambda$	5. $p =$	-1		

Aufgabe 6.2. Blatt 2 1–4–6–7 g 1–4–7

P	1	0	0	9,2	15,2
1.		10	0	1	−4

2. x_1	10λ	3. z	$\cdots - 3\lambda$	f_1	-1
x_2	0		Maximum	f_2	$+1$
x_3	$9{,}2 + \lambda$	4. (VI)	$\lambda \geqq 0$	f_3	$+1$
x_4	$15{,}2 - 4\lambda$	5. $p =$	-1		

Aufgabe	6.2.	Blatt	3	1–4–6–7	g	1–6–7
P	1	0	0	9,2	15,2	
1.		0	0	1	3	

2. x_1	0	3. z	$\cdots + 16\lambda$	f_1	+ 1
x_2	0		Maximum	f_2	+ 1
x_3	$9{,}2 + \lambda$	4. (IV)	$\lambda \leqq 0$	f_3	− 1
x_4	$15{,}2 + 3\lambda$	5. $p =$	− 1		

Als Beispiel für die Anwendung des Rechenschemas sei die Aufgabe 6.2. mit anderen Ausgangswerten durchgerechnet für den Fall, dass die Zielfunktion einen maximalen Wert annehmen soll.
Aus der Zielfunktion ist zu ersehen, dass es günstig ist, die Variablen x_3 und x_4 mit möglichst hohen Werten zu belegen.

Aufgabe	6.2.	Blatt	4	1–4–6–7	g	4–6–7
P	1	0	0	9,2	15,2	
1.		0	0	13	18	

2. x_1	0	3. z	$\cdots + 111\lambda$	f_1	+ 1
x_2	0		Maximum	f_2	+ 1
x_3	$9{,}2 + 13\lambda$	4. (I)	$\lambda \geqq 0$	f_3	+ 1
x_4	$15{,}2 + 18\lambda$	5. $p =$	+ 1		

7.	II	$\leqq 0{,}6$	VIII	$\geqq -0{,}7$	
	III	$\leqq 0{,}933$	IX	$\geqq -0{,}84$	
	V	$\leqq 1{,}6$		8.	0, 0,6

9. P	2	0	0	17	26

Aufgabe	6.2.	Blatt	5	2–4–6–7	g	2–4–6
P	2	0	0	17	26	
1.		0	−8	11	14	

2. x_1	0	3. z	$\cdots + 73\lambda$	f_1	+ 1
x_2	-8λ		Maximum	f_2	+ 1
x_3	$17 + 11\lambda$	4. (VII)	$\lambda \leqq 0$	f_3	− 1
x_4	$26 + 14\lambda$	5. $p =$	− 1		

Aufgabe 6.2. Blatt 6 | 2–4–6–7 | g 2–4–7

P 2

0	0	17	26
4	0	3	2

1.

2. x_1 = 4λ; x_2 = 0; x_3 = $17 + 3\lambda$; x_4 = $26 + 2\lambda$

3. z = $\cdots + 21\lambda$ Maximum

f_1 = + 1; f_2 = + 1; f_3 = + 1

4. (VI) $\lambda \geqq 0$

5. p = + 1

7.

I	$\leqq 3$	VIII	$\geqq -5{,}67$
III	$\leqq 1$	IX	$\geqq -13$

8. 0, 1

9. P 3

4	0	20	28

Aufgabe 6.2. Blatt 7 | 2–3–4–7 | g 2–3–4

P 3

4	0	20	28
1	2	−2	−3

1.

2. x_1 = $4 + \lambda$; x_2 = 2λ; x_3 = $20 - 2\lambda$; x_4 = $28 - 3\lambda$

3. z = $\cdots - 13\lambda$ Maximum

f_1 = − 1; f_2 = + 1; f_3 = + 1

4. (VII) $\lambda \geqq 0$

5. p = − 1

Aufgabe 6.2. Blatt 8 | 2–3–4–7 | g 2–3–7

P 3

4	0	20	28
−2	0	6	11

1.

2. x_1 = $4 - 2\lambda$; x_2 = 0; x_3 = $20 + 6\lambda$; x_4 = $28 + 11\lambda$

3. z = $\cdots + 60\lambda$ Maximum

f_1 = + 1; f_2 = + 1; f_3 = − 1

4. (IV) $\lambda \leqq 0$

5. p = − 1

Aufgabe 6.2. Blatt 9 | 2–3–4–7 | g 3–4–7

P 3

4	0	20	28
−3	0	1	3

1.

2. x_1 = $4 - 3\lambda$; x_2 = 0; x_3 = $20 + \lambda$; x_4 = $28 + 3\lambda$

3. z = $\cdots + 12\lambda$ Maximum

f_1 = + 1; f_2 = + 1; f_3 = − 1

4. (II) $\lambda \leqq 0$

5. p = − 1

9. P 3

4	0	20	28

$= P_{\text{opt}}$ $z_{\max} = 176$

6.4 Lösung des Mischungsproblems (5.) mit der Basisvektorenmethode

Aufgabe 5. Blatt 1 | 1–2–6 | g 1–2

P 1			
1.	0	19.8718	5,1282
	5,2703	−6,2703	1

2. $x_1 = 5{,}2703\lambda$; $x_2 = 19{,}8718 - 6{,}2703\lambda$; $x_3 = 5{,}1282 + \lambda$

3. $z = \cdots - k\lambda$ Minimum; $f_1 = -1$, $f_2 = -1$, $f_3 = +1$

4. $\lambda \geqq 0$

5. $p = +1$

7. IV $\leqq 1{,}4889$; V $\leqq 1{,}6718$; VII $\leqq 3{,}1692$; VIII $\geqq -5{,}1282$

8. $0,\ 1{,}4889$

9. P 2: 7,8469 | 10,5360 | 6,6171

Aufgabe 5. Blatt 2 | 1–2–4 | g 1–4

P 2			
1.	7,8469	10,5360	6,6171
	1	3,4667	−4,4667

2. $x_1 = 7{,}8469 + \lambda$; $x_2 = 10{,}5360 + 3{,}4667\lambda$; $x_3 = 6{,}6171 - 4{,}4667\lambda$

3. $z = \cdots + k\lambda$ Minimum; $f_1 = +1$, $f_2 = -1$, $f_3 = +1$

4. $\lambda \geqq 0$

5. $p = -1$

9. P 2: 7,8469 | 10,5360 | 6,6171 $= P_{opt}\ z_{min} = 550{,}24$

Wegen der Bindung an die Gleichung 1 der Nebenbedingungen brauchte nur die Gerade g_{14} untersucht zu werden. Es kommen nur solche Kanten des Lösungsbereiches in Betracht, die in der Ebene 1 liegen.

6.5 Eine weitere Anwendungsaufgabe

Ein Betrieb stellt fünf Erzeugnisse P_i her, die in drei Stufen gefertigt werden. Die Tabelle gibt an, wieviel Zeiteinheiten (ZE) in den drei Stufen für die Herstellung einer Einheit (E) des Erzeugnisses P_i benötigt werden, sie gibt ferner die für die betreffenden Stufen zur Verfügung stehenden Zeiteinheiten an.

Durch Vertrag ist der Betrieb verpflichtet, von den einzelnen Erzeugnissen eine Mindestanzahl herzustellen, andrerseits ist durch Bedarfsforschung bekannt, dass nicht mehr als eine bestimmte Anzahl der einzelnen Erzeugnisse abgesetzt werden können.

	Erzeugnis					Fonds in ZE
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
Erforderliche Zeit (in ZE)						
Stufe 1	3	2	5	4	1	1000
Stufe 2	1	4	3	3	5	900
Stufe 3	1	2	2	1	3	500
Mindestmengen in E	30	20	50	50	30	
Höchstmengen in E	50	70	100	100	80	

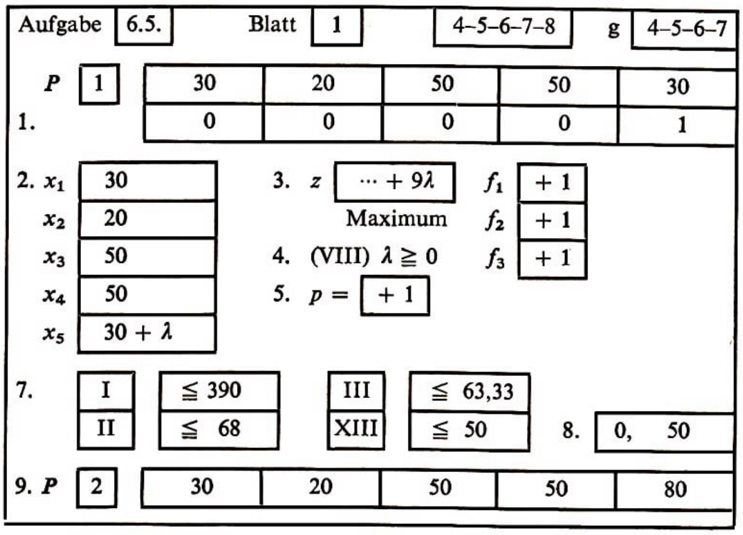
Mindest- und Höchstmengen der zu produzierenden Erzeugnisse sind in der Tabelle angegeben.

Gesucht wird ein Produktionsprogramm, das unter Beachtung der aufgeführten Bedingungen eine maximale Auslastung der Fonds garantiert.

Lösung: $z = 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 \rightarrow$ Maximum

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 1000 \qquad \text{(I)}$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 900 \qquad \text{(II)}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 500 \qquad \text{(III)}$$
$$x_1 \geq 30, x_2 \geq 20, x_3 \geq 50, x_4 \geq 50, x_5 \geq 30 \qquad \text{(IV-VII)}$$
$$x_1 \leq 50, x_2 \leq 70, x_3 \leq 100, x_4 \leq 100, x_5 \leq 80 \qquad \text{(IX-XIII)}$$

Eine erste zulässige Basislösung als Ausgangslösung erhält man mit der Annahme, dass zunächst nur die geforderten Mindestmengen produziert werden. Diese Lösung wird nun schrittweise verbessert.


Aufgabe 6.5. Blatt 1 4–5–6–7–8 g 4–5–6–7

P 1 | 30 | 20 | 50 | 50 | 30
1. | 0 | 0 | 0 | 0 | 1

2. x_1 30; x_2 20; x_3 50; x_4 50; x_5 $30 + \lambda$

3. z $\cdots + 9\lambda$ Maximum

4. (VIII) $\lambda \geqq 0$

5. $p =$ $+1$

f_1 $+1$; f_2 $+1$; f_3 $+1$

7. I $\leqq 390$; II $\leqq 68$; III $\leqq 63{,}33$; XIII $\leqq 50$

8. 0, 50

9. P 2 | 30 | 20 | 50 | 50 | 80

Aufgabe 6.5. Blatt 2 | 4–5–6–7–13 | g 4–5–6–13

P 2	30	20	50	50	80
1.	0	0	0	1	0

2. x_1 = 30, x_2 = 20, x_3 = 50, x_4 = $50+\lambda$, x_5 = 80

3. z = $\cdots + 8\lambda$ Maximum

4. (VII) $\lambda \geqq 0$

5. $p = +1$

f_1 = $+1$, f_2 = $+1$, f_3 = $+1$

7. I $\leqq 85$; II $\leqq 30$; III $\leqq 40$; XII $\leqq 50$

8. 0, 30

9. P 3	30	20	50	80	80

Aufgabe 6.5. Blatt 3 | 2–4–5–6–13 | g 2–4–5–6

P 3	30	20	50	80	80
1.	0	0	0	-5	3

2. x_1 = 30, x_2 = 20, x_3 = 50, x_4 = $80-5\lambda$, x_5 = $80+3\lambda$

3. z = $\cdots - 13\lambda$ Maximum

4. (XIII) $\lambda \leqq 0$

5. $p = +1$

f_1 = -1, f_2 = $+1$, f_3 = -1

7. I $\geqq -12{,}94$; III $\leqq 2{,}5$; VII $\leqq 6$; VIII $\geqq -16{,}667$; XII $\geqq -4$

8. -4, 0

9. P 4	30	20	50	100	68

Aufgabe 6.5. Blatt 4 | 2–4–5–6–12 | g 2–4–5–12

P 4	30	20	50	100	68
1.	0	0	-5	0	3

2. x_1 = 30, x_2 = 20, x_3 = $50-5\lambda$, x_4 = 100, x_5 = $68+3\lambda$

3. z = $\cdots -23\lambda$ Maximum

4. (VI) $\lambda \leqq 0$

5. $p = +1$

f_1 = -1, f_2 = $+1$, f_3 = -1

7. I $\geqq -6{,}9091$; III $\geqq -26$; VIII $\geqq -12{,}667$; XI $\geqq -10$; XIII $\leqq 4$

8. $-6{,}9091$; 0

9. P 5	30	20	84,5455	100	47,2727

Aufgabe 6.5. Blatt 5 1–2–4–5–12 g 1–2–4–5

P 5	30	20	84,5455	100	47,2727
1.	0	0	−17	22	−3

2. x_1	30	3. z	$\cdots -21\lambda$	f_1	−1
x_2	20		Maximum	f_2	+1
x_3	$84{,}5455-17\lambda$	4.	(XII) $\lambda \leqq 0$	f_3	−1
x_4	$100+22\lambda$	5. $p =$	+1		
x_5	$47{,}2727-3\lambda$				

7.	III	$\geqq -0{,}8615$	VIII	$\leqq 5{,}7576$		
	VI	$\leqq 2{,}0321$	XI	$\geqq -0{,}9091$		
	VII	$\geqq -2{,}2727$	XIII	$\geqq -10{,}9091$	8.	−0,8615; 0

9. P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572

Aufgabe 6.5. Blatt 6 1–2–3–4–5 g 1–2–3–4

P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572
1.	0	21	2	−10	−12

2. x_1	30	3. z	$\cdots$	f_1	0
x_2	$20 + 21\lambda$		z ist unabhängig von λ.		
x_3	$99{,}1910 + 2\lambda$				
x_4	$81{,}0470 - 10\lambda$	5. $p =$	0		
x_5	$49{,}8572 - 12\lambda$				

Aufgabe 6.5. Blatt 7 1–2–3–4–5 g 1–2–3–5

P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572
1.	7	0	−6	2	1

2. x_1	$30 + 7\lambda$	3. z	$\cdots$	f_1	0
x_2	20		z ist unabhängig von λ.		
x_3	$99{,}1910 - 6\lambda$				
x_4	$81{,}0470 + 2\lambda$	5. $p =$	0		
x_5	$49{,}8572 + \lambda$				

Aufgabe 6.5. Blatt 8 1–2–3–4–5 g 1–3–4–5

P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572
1.	0	0	11	−13	−3

2. x_1	30	3. z	$\cdots -21\lambda$	f_1	−1
x_2	20		Maximum	f_2	+1
x_3	$99{,}1910 + 11\lambda$	4.	(II) $\lambda \geqq 0$	f_3	+1
x_4	$81{,}0470 - 13\lambda$	5. $p =$	−1		
x_5	$49{,}8572 - 3\lambda$				

Aufgabe 6.5. Blatt 9 | 1–2–3–4–5 | g 2–3–4–5

	P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572
1.		0	0	−4	−1	3

2. x_1	30	3. z	$\cdots -21\lambda$	f_1	−1
x_2	20		Maximum	f_2	+1
x_3	$99{,}1910 - 4\lambda$	4. (I)	$\lambda \geqq 0$	f_3	+1
x_4	$81{,}0470 - \lambda$	5. $p =$	−1		
x_5	$49{,}8572 + 3\lambda$				

9. P 6	30	20	99,1910	81,0470	49,8572

P 6 $= P_{opt}$ $z_{max} = 2399{,}0008$

In den Lösungsblättern 6 und 7 war die Zielfunktion unabhängig von λ. Es wird mehrere Produktionsprogramme geben, die eine maximale Auslastung der Fonds garantieren.

Berechnung weiterer optimaler Punkte:

Fortsetzung: Lösungsblatt 6.

7.	V	$\geqq 0$	X	$\leqq 2{,}3809$
	VI	$\geqq -24{,}5955$	XI	$\leqq 0{,}4045$
	VII	$\leqq 3{,}1047$	XII	$\geqq -1{,}8952$
	VIII	$\leqq 1{,}6548$	XIII	$\geqq -2{,}5219$

8. 0; 0,4045

9. P 7	30	28,4945	100	77,0020	45,0032

P 7 $= P_{opt}$ $z_{max} = 2399{,}0008$

Fortsetzung: Lösungsblatt 7.

7.	IV	$\geqq 0$	IX	$\leqq 2{,}8571$
	VI	$\leqq 8{,}1985$	XI	$\geqq -0{,}1348$
	VII	$\geqq -15{,}5235$	XII	$\leqq 9{,}4760$
	VIII	$\geqq -19{,}8572$	XIII	$\leqq 30{,}1428$

8. 0; 2,8571

9. P 8	49,9997	20	82,0484	86,7612	52,7143

P 8 $= P_{opt}$ $z_{max} = 2399{,}0008$

Mögliche Produktionsprogramme, die eine maximale Auslastung der Fonds garantieren:

	Erzeugnis					Fonds in ZE
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
Programm 1	30	20	99	81	50	2398
Programm 2	30	28	100	77	45	2395
Programm 3	50	20	82	87	52	2394

7 Ausblick auf andere Methoden der linearen Optimierung

Bei den in diesem Buch entwickelten Verfahren zur Lösung von Problemen der linearen Optimierung wurde größtmögliche Anschaulichkeit angestrebt, als Voraussetzungen wurden Mittel der Schulmathematik oder solche Elemente benutzt, die in Schülerzirkeln meistens schon früh erarbeitet werden.
Es wurde mit dieser Arbeit der Versuch gemacht, das Grundsätzliche des Stoffgebietes der linearen Optimierung einem Schüler, Berufsschüler oder interessierten Nichtmathematiker nahe zu bringen.

Es kam an keiner Stelle darauf an, etwa zu erläutern, wie eine moderne elektronische Rechenmaschine diese oder jene Aufgabe der Praxis löst. Ein elektronischer Rechner zieht die Wurzel aus der Zahl 2 übrigens auch auf völlig andere Art als ein Schüler es zu tun pflegt.

In der Praxis wird das von Dantzig im Jahr 1947 entwickelte Verfahren (Simplexmethode) in den meisten Fällen angewendet. Bei der Lösung einer Aufgabe der linearen Optimierung ohne Maschine bietet das Simplexverfahren keine Vorteile gegenüber den in diesem Buch beschriebenen Methoden, es treten eher Nachteile auf wegen der fehlenden Anschaulichkeit.
Schematische Rechnungen treten an die Stelle mathematischer Überlegungen, wie sie bei der Basisvektorenmethode immer wieder nötig sind.

Bei der Simplexmethode werden sogenannte Schlupf- oder Bilanzierungsvariable eingeführt. Man transformiert damit das gegebene lineare Ungleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem, was für die Anwendung von Maschinen notwendig ist.

Es ist aber zu beachten, dass sich die Anzahl der Variablen durch die Einführung der Schlupfvariablen um genau die Anzahl der gegebenen Nebenbedingungen erhöht. Simplexe kann man als spezielle konvexe Körper auffassen.
Beim Simplexverfahren geht man von einem bekannten "Eckpunkt" eines n-dimensionalen konvexen Körpers aus und versucht, auf den Kanten dieses Körpers zu besseren Werten der Zielfunktion zu gelangen. Der Grundgedanke der Basisvektorenmethode ist der gleiche.

Nach dem von Dantzig entwickelten Simplexverfahren sind in den letzten zwei Jahrzehnten viele andere Methoden erarbeitet worden. Hierüber, wie auch über das Simplexverfahren selbst, kann sich der Leser mit Hilfe in der im Abschnitt 8.2. angegebenen weiterführenden Literatur informieren.

Eine besondere Bedeutung hat die sogenannte "ganzzahlige Optimierung". Als Lösungskoordinaten werden ganzzahlige, nicht negative Werte verlangt. In dem im Abschnitt 5. betrachteten Mischungsbeispiel treten durchaus nicht ganzzahlige Lösungen als Optimum auf und finden in der Praxis Verwendung.
Geht es aber um Stückzahlen von Maschinen, Bauelementen, Wohnungseinheiten, um Transporte, Schiffsladungen und ähnliches, so muss Ganzzahligkeit der Lösungen ge-

fordert werden.

Das Problem der ganzzahligen Optimierung ist recht kompliziert. Im allgemeinen hat man aber auch bei der Forderung nach Ganzzahligkeit der Lösungen in den beschriebenen Verfahren recht brauchbare Methoden.
Man kommt bei der Forderung nach ganzzahligen Koordinaten im Optimum ohne die ganzzahlige Optimierung aus, wenn es sich nicht um kleine Zahlenwerte handelt. Bei sechs oder sieben Maschinen einer Sorte kann es schon entscheidend sein, für welches Ergebnis man sich entschließt. Bei größeren Zahlenwerten dagegen wird man eine der angegebenen Methoden anwenden und dann entsprechend runden. (Vgl. Lösung der Anwendungsaufgabe von 6.5.)

Es soll im folgenden auf die Transportoptimierung hingewiesen werden, für die der Leser auch in der im Abschnitt 8.2. angegebenen weiterführenden Literatur Beispiele und Lösungsverfahren findet.

Annahme: p Lieferanten haben q Abnehmer zu beliefern.
Werden keine Zwischenlager oder Zwischenstufen durchlaufen, so spricht man von einem einstufigen Problem. Weiter sei die ganz entscheidende Einschränkung gemacht, dass die p Lieferanten genau soviel produzieren bzw. liefern, wie die q Abnehmer benötigen.

Es könnte sich hierbei um p Kiesgruben und q Baustellen handeln oder um p Plattenwerke und q Baustellen, um bei dem Beispiel der Bauindustrie zu bleiben. Es könnte sich aber auch um p Kohlenlager handeln und q Verbraucher oder gar um p landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften bzw. ihre Milchprodukte und die einzelnen Verkaufsstellen oder Verkaufslager für Milch und Milchprodukte.

Setzen wir diese entscheidende Einschränkung voraus, die in den meisten Fällen der Praxis sehr angebracht und erstrebenswert ist, aber dennoch nicht voll erreicht wird, so spricht man von einem ausgeglichenen System.

Es sind die Kapazitäten K_i (z.B. in Tonnen) der p Lieferanten L_i $(i = 1, 2, ..., p)$ bekannt, ebenso die von den q Verbrauchern Vji benötigten Mengen M_j. Von großer Bedeutung sind nun natürlich noch die Entfernungen der Lieferanten von den Verbrauchern e_{ij} (in Kilometern).

Es kann bei einem solchen Transportproblem die Zeit optimiert (minimiert) werden. Die Frage lautet in diesem Fall:

Welche Lieferanten müssen welche Verbraucher mit welchen Mengen beliefern, wenn der Gesamttransport in kürzester Zeit abgeschlossen sein soll?

Oder es können die Kosten des Transportes optimiert werden. Der Kostenaufwand für den gesamten Transport soll dann möglichst gering sein. Auch die Frage des Einsatzes bestimmter Fahrzeugtypen spielt bei Transportproblemen oft eine gewisse Rolle.

Man kann das ganze Transportproblem in Form einer Matrix schreiben, wobei wir der Anschaulichkeit wegen die Bezeichnungen dazuschreiben. Es handelt sich eigentlich um eine Doppelmatrix insofern, als in ihr die Entfernungen e_{ij}, die ja bekannt sind, auftreten und außerdem die von den p Lieferanten L_i an die Verbraucher V_j gelieferten Mengen m_{ij}.

	V_1	V_2	...	V_j	...	V_q	Kapazität der Lieferanten
L_1	e_{11} m_{11}	e_{12} m_{12}	... ...	e_{1j} m_{1j}	... ...	e_{1q} m_{1q}	K_1
L_2	e_{21} m_{21}	e_{22} m_{22}	... ...	e_{2j} m_{2j}	... ...	e_{2q} m_{2q}	K_2
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
L_i	e_{i1} m_{i1}	e_{i2} m_{i2}	... ...	e_{ij} m_{ij}	... ...	e_{iq} m_{iq}	K_i
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
L_p	e_{p1} m_{p1}	e_{p2} m_{p2}	... ...	e_{pj} m_{pj}	... ...	e_{pq} m_{pq}	K_p
Benötigte Mengen	M_1	M_2	... ...	M_j	... ...	M_q	

Ausführlich könnte man dieses eine Schema als zwei Matrizen (Entfernungen und gelieferte Mengen) und zwei Vektoren (Zeilenvektor für die benötigten Mengen pro Verbraucher und Spaltenvektor für die Kapazitäten der einzelnen Lieferanten) schreiben.
Das Problem ist ausgeglichen, wenn

$$\sum_{j=1}^{q} M_j = \sum_{i=1}^{p} K_i$$

Es lassen sich p Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = K_i \qquad (i = 1, 2, ..., p)$$

und q Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{p} m_{ij} = M_j \qquad (j = 1, 2, ..., q)$$

aufstellen.
Die Zielfunktion würde aus $p \cdot q$ Summanden bestehen, von denen viele allerdings den Wert Null haben, weil eben nicht jeder Lieferant jeden Verbraucher beliefern wird.

Es sind viele Methoden zur Lösung solcher Transportprobleme entwickelt worden. Es sei nochmals auf die Literaturangaben im nächsten Abschnitt hingewiesen. Dort findet der Leser auch, vor allem in [8] und [12], eine Reihe von praktischen Aufgaben.

8 Literaturhinweise

8.1 Literatur zu den Voraussetzungen 1.1. bis 1.6.

[1] Wirtschaftsmathematik für die Berufsbildung, Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1968

[2] Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965

[3] E.Lehmann, Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1, Zahlentheorie, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969

[4] Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 11, Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin 1969

[5] Mathematik, Ergänzungen für Berufsausbildung mit Abitur, Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin 1968

8.2 Weiterführende Literatur

[6] J. Piehler, Einführung in die lineare Optimierung, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966

[7] A. S. Barsow, Was ist lineare Programmierung? B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966

[8] B. Blumenthal, Die Anwendung mathematischer Methoden in der Wirtschaft, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967

[9] K. Schröder, Mathematik für die Praxis III, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

[10] Kleine Enzyklopädie der Elementarmathematik, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1967

[11] R. Kochendörfer, Determinanten und Matrizen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967

[12] Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967

[13] Brehmer-Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968

[14] B. Krekó, Lehrbuch der linearen Optimierung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968