H. Belkner / S. Brehmer

Riemannsche Integrale

1985 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 109
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Der vorliegende Band gibt eine Einführung in die Riemannsche Integrationstheorie.
Im Unterschied zum traditionellen Vorgehen beim Aufbau der Integralrechnung wird der Leser anhand eines einfachen Modells an Begriffsbildungen der Funktionalanalysis herangeführt.
Dabei steht der Begriff des positiven linearen Funktionale im Mittelpunkt. Beide Integralbegriffe werden nach einheitlichen Prinzipien durch einen Fortsetzungsprozess gewonnen.

Die in den ersten drei Kapiteln bei der Konstruktion des Riemannschen Integrals entwickelten Methoden und Denkweisen bilden die Grundlage für eine relativ einfache Einführung des in der modernen Mathematik wesentlich wichtigeren Lebesgueschen Integralbegriffs.

Im ersten Kapitel wird mit elementaren Methoden ein Integral für stückweise lineare stetige Funktionen definiert. Im zweiten Kapitel wird dieses Integral zum Riemannschen Integral fortgesetzt.
Die Kenntnis der wichtigsten Sätze über konvergente Zahlenfolgen und der Differentialrechnung im Umfang der Schulmathematik wird dabei vorausgesetzt.

Die für die Integralrechnung wichtigen Sätze über stetige Funktionen werden mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß bewiesen. Ferner wird gezeigt, dass die hier gegebene Definition des Riemannschen Integrals mit der klassischen Begriffsbildung übereinstimmt. Der Mittelwertsatz und der Hauptsatz der Integralrechnung werden in der üblichen Weise behandelt.

Die in den ersten beiden Kapiteln eingeführten Begriffsbildungen und gewonnenen Erkenntnisse werden in den Abschnitten 3.1 und 3.2 abstrahiert und noch einmal zusammenfassend dargestellt. Auf dieser Grundlage wird im Rest des dritten Kapitels das zweidimensionale Riemannsche Integral konstruiert, wobei sich hier der Vorteil der abstrakt entwickelten Theorie zeigt.

Unser Dank gilt dem Verlag sowie der Druckerei für die angenehme Zusammenarbeit und die sorgfältige Gestaltung des vorliegenden Bändchens.

Potsdam, im Sommer 1984

H. Belkner, S. Brehmer

Inhaltsverzeichnis

1 Konstruktion eines positiven linearen Funktionals

1.1 Zackenfunktionen

Unter φ, ψ verstehen wir im folgenden reellwertige Funktionen mit einem festen Definitionsbereich D. In den ersten Abschnitten wird D immer ein Intervall $[a, b]$ sein. Gelegentlich bezeichnen wir den Definitionsbereich einer Funktion φ auch mit $D(\varphi)$. Die Menge der Punkte $P(x, \varphi(x))$ mit $x \in D(\varphi)$ nennen wir das Bild der Funktion φ. Ist λ eine reelle Zahl, so verstehen wir unter

$$\lambda\varphi, \varphi + \psi, \varphi\psi, |\varphi|, \varphi \circ \psi$$

die durch

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi)(x) &:= \lambda\phi(x),\\ (\varphi + \psi)(x) &:= \varphi(x) + \psi(x),\\ (\varphi\psi)(x) &:= \varphi(x)\psi(x),\\ |\varphi|(x) &:= |\varphi(x)|,\\ (\varphi \circ \psi((x) &:= \varphi(\psi(x))\end{aligned}$$

definierten reellwertigen Funktionen.
Es sei φ die durch $\varphi(x) := x$ auf $D(\varphi) = [-1, 2]$ definierte reelle Funktion. Die Bilder der Funktionen φ und $|\varphi|$ sind in Abb. 1.1.1 veranschaulicht.

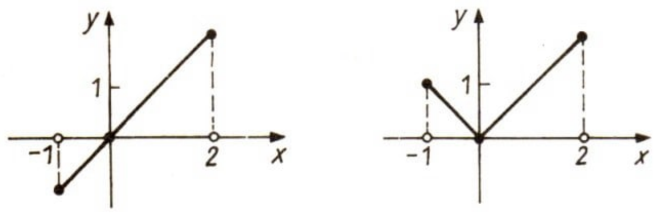


Abb. 1.1.1

Mit o bezeichnen wir die Nullfunktion, die jedem $x \in D$ die reelle Zahl $o(x) = 0$ zuordnet. Wir schreiben $\varphi \leq \psi$ bzw. $\varphi \geq \psi$, wenn $\varphi(x) \leq \psi(x)$ bzw. $\varphi(x) \geq \psi(x)$ für alle $x \in D$ ist.

Eine reellwertige Funktion φ heißt beschränkt genau dann, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl K gibt mit der Eigenschaft

$$|\varphi(x)| \leq K$$

für alle $x \in D$. Insbesondere heißt eine reelle Zahl K_1 bzw. K_2 eine untere bzw. eine obere Schranke der reellwertigen Funktion φ genau dann, wenn

$$K_1 \leq \varphi(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi(x) \leq k_2$$

ist für alle $x \in D$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $|\varphi(x)| \leq |K_1| + |K_2|$ für alle $x \in D$.

Die einfachsten reellen Funktionen sind die linearen Funktionen. Sie haben Gleichungen der Form

$$f(x) = mx + p \tag{1.1.1}$$

und ihre Bilder sind Geraden. Es ist

$$f(x) - f(x_0) = mx + p - (mx_0 + p) \qquad \text{also} \qquad f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) \tag{1.1.2}$$

Wenn $x \neq x_0$ ist, gilt

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.1.3}$$

Die Zahl m heißt der Anstieg der Geraden. Ist $P(x_0), f(x_0))$ ein fester Punkt der Geraden mit der Gleichung (1.1.1), so ist $y_0 = f(x_0)$, und die Gleichung (1.1.1) kann auf Grund von (1.1.2) auch in der Form

$$f(x) = y_0 + m(x - x0) \tag{1.1.4}$$

geschrieben werden.
Wir führen eine allgemeinere Klasse von Funktionen ein.

Beispiel 1.1.1. Gegeben sei die Wertetabelle (1.1.5)

x	-1	2	4	7
y	3	4	-1	2

Verbinden wir die Punkte

$$P_0 = P(-1, 3), \quad P_1 = P(2, 4), \quad P_2 = P(4, -1), \quad P_3 = P(7, 2)$$

geradlinig, so erhalten wir das Bild einer auf dem Intervall $[-1, 7]$ definierten reellen Funktion f, die keine Sprünge macht und die stückweise linear ist (Abb. 1.1.2).

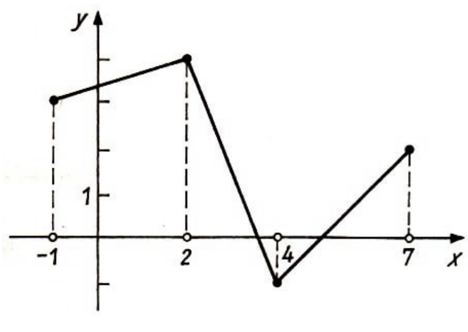


Abb. 1.1.2

Die Anstiege in den Teilintervallen

$$[x_0, x_1] = [-1, 2], \quad [x_1, x_2] = [2, 4], \quad [x_2, x_3] = [4, 7]$$

sind

$$m_1 = \frac{4 - 3}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{-1 - 4}{4 - 2} = -\frac{5}{2}, \quad m_3 = \frac{2 - (-1)}{7 - 4} = 1$$

Um den Funktionswert an einer Stelle $x \in [-1, 7]$ zu berechnen, müssen wir erst untersuchen, in welchem der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ der Punkte liegt. Entsprechend (1.1.4) ist dann

$$f(x) = y_{k-1} + m_k(x - x_{k-1}) \tag{1.1.6}$$

für $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. So ist beispielsweise $6 \in [x_2, x_3] = [4, 7]$, also

$$f(6) = y_2 + m_3(6 - x_2) = -1 + (6 - 4) = 1$$

Die Wertetabelle (1.1.7)

x	-1	2	4	6	7
y	3	4	-1	1	2

definiert also bei dem geschilderten Verfahren auf $[-1, 7]$ dieselbe Funktion f wie die Wertetabelle (1.1.5).

Unter einer Zerlegung Z eines Intervalle $[a, b]$ verstehen wir im folgenden eine endliche, nach ihrer Größe geordnete Folge reeller Zahlen, die wir in der Form

$$Z: \quad a = x_0 < x_{<} ... < x_n = b \tag{1.1.8}$$

angeben. Ist insbesondere

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n) \tag{1.1.9}$$

so ist

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \qquad (k = 1, ..., n) \tag{1.1.10}$$

und Z heißt eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$.

Die folgende Definition wird durch das Funktionsbild der in Beispiel 1.1.1 beschriebenen Funktion nahegelegt.

Definition 1.1.1. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt eine Zackenfunktion genau dann, wenn es eine Zerlegung (1.1.8) gibt, so dass f in jedem der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, ..., n)$ linear ist. Ist diese Bedingung für eine Zackenfunktion f erfüllt, so heißt Z eine für die Funktion f zulässige Zerlegung.

So ist beispielsweise

$$Z: \quad -1 < 2 < 4 < 7$$

eine zulässige Zerlegung für die Zackenfunktion f in Beispiel 1.1.1. Dagegen ist die Zerlegung

$$Z': \quad -1 < 2 < 7$$

für f von Beispiel 1.1.1 nicht zulässig, da f in dem Intervall [2, 7] nicht linear ist. Es ist aber auch

$$Z'': \quad -1 < 2 < 4 < 6 < 7$$

für f von Beispiel 1.1.1 eine zulässige Zerlegung. Alle Punkte von Z treten in der Zerlegung Z'' auf.

Die Menge aller Zackenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnen wir mit $E_0[a, b]$. Eine Zackenfunktion $f \in E_0[a, b]$ ist durch eine zulässige Zerlegung (1.1.8) und die zugehörigen Funktionswerte $y_0, y_1, ..., y_n$ also durch die Wertetabelle

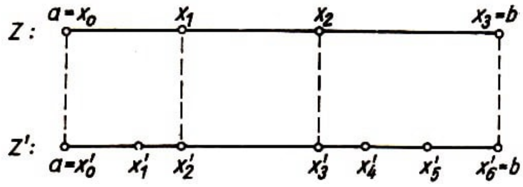
x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

vollständig charakterisiert. Jeder Punkt x mit $x \in [a, b]$ liegt in einem der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, und da f in diesem Intervall linear ist, gilt (1.1.6). Ist y_i die kleinste und y_j die größte unter den Zahlen $y_0, ..., y_n$, so ist stets

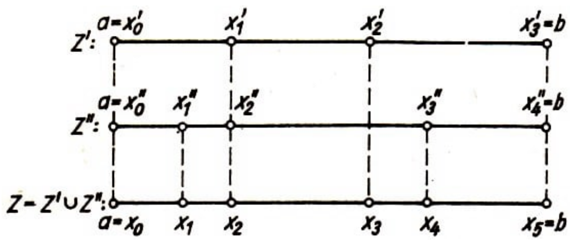
$$y_i \leq f(x) \leq y_j \qquad (a \leq x \leq b)$$

und folglich ist jede Zackenfunktion beschränkt.

Definition 1.1.2. Eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ heißt eine Verfeinerung der Zerlegung Z von $[a, b]$ genau dann, wenn alle Punkte von Z auch in Z' auftreten (Abb. 1.1.3).

Abb. 1.1.3


Definition 1.1.3. Sind Z', Z'' beliebige Zerlegungen von $[a, b]$, so verstehen wir unter der Vereinigung $Z = Z' \cup Z''$ die geordnete Folge aller reellen Zahlen, die in Z' oder in Z'' auftreten (Abb. 1.1.4).

Abb. 1.1.4


Satz 1.1.1. Es sei Z eine zulässige Zerlegung für $f \in E_0[a, b]$. Dann ist jede Verfeinerung von Z wieder eine zulässige Zerlegung von f.

Beweis. Die Zerlegung Z sei durch (1.1.8) gegeben. Dann ist

$$Z' = x_0 < ... < x_{k-1} < \xi < x_k < ... < x_n$$

eine zulässige Zerlegung für f, denn da f im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ linear ist, gilt dies auch in den Teilintervallen $[x_{k-1}, \xi]$, $[\xi, x_k]$. Da jede Verfeinerung durch Hinzufügen von endlich vielen Teilpunkten entsteht, ist der Satz bewiesen.

Offensichtlich gilt

Folgerung 1.1.1. Es sei Z' bzw. Z'' eine zulässige Zerlegung für die Funktion $f \in E_0[a,b]$ bzw. $g \in E_0[a,b]$. Dann ist $Z' \cup Z''$ eine für beide Funktionen zulässige Zerlegung.

Satz 1.1.2. Für alle Zackenfunktionen $f, g \in E_0[a,b]$ und für alle reellen Zahlen λ gilt $\lambda f, f+g \in E_0[a,b]$.

Satz 1.1.3. Für alle Zackenfunktionen $f \in E_0[a,b]$ gilt $|f| \in E_0[a,b]$.

Beweis von Satz 1.1.2 und Satz 1.1.3. Wir wählen eine für f und g zulässige Zerlegung Z'. Wechselt f in einem der Teilintervalle $[x'_{k-1}, x'_k]$ das Vorzeichen, so gibt es genau ein ξ_k mit $x'k-1 < \xi_k < x_k$ und $f(\xi_k) = 0$.
Alle Punkte dieser Art fügen wir zu Z' hinzu. Auf diese Weise entsteht eine für f und g zulässige Zerlegung (1.1.8), und f wechselt in keinem der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ das Vorzeichen. Da f und g im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ linear sind, können sie auf $[x_{k-1}, x_k]$ durch Gleichungen der Form

$$f(x) = mx + p \qquad , \qquad g(x) = m'x + p'$$

dargestellt werden. Für alle x mit $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ gilt also

$$\lambda f(x) = (\lambda m)x + \lambda p \qquad , \qquad f(x) + g(x) = (m + m')x + p + p'$$

Ist $f(x) \geq 0$ bzw. $f(x) \leq 0$ auf $[x_{k-1}, x_k]$, so gilt

$$|f(x)| = f(x) = mx + p \qquad \text{bzw.} \qquad |f(x)| = f(x) = (-m)x + (-p)$$

Die Funktionen λf, $f + g$ und $|f(x)|$ sind somit in jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ linear. Damit sind beide Sätze bewiesen.

Satz 1.1.4. Zu jeder Zackenfunktion $f \in E_0[a,b]$ gibt es eine nichtnegative reelle Zahl M mit

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'| \tag{1.1.11}$$

für alle $x, x' \in [a,b]$.

Beweis. Wir wählen eine für f zulässige Zerlegung (1.1.8) und eine Schranke M für die Zahlen $|m_1|$, ..., $|m_n|$, wobei m_k der Anstieg im k-ten Teilintervall ist. Mit (1.1.2) folgt unter Berücksichtigung von Aufgabe 1.1.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| &\leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}|m_k| \cdot |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

d.h., es ist

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a) \tag{1.1.12}$$

Es seien nun x, x' beliebige Punkte aus dem Intervall $[a,b]$. Wir können etwa $x' < x$ voraussetzen. Fassen wir f als Zackenfunktion im Intervall $[x', x]$ auf, so treten höchstens weniger Anstiegszahlen als im Intervall $[a, b]$ auf, so dass M seine Bedeutung behält. Entsprechend (1.1.12) ist also

$$|f(x) - f(x')| \leq M(x - x') = M|x - x'|$$

und Satz 1.1.4 ist bewiesen.

Die Bedeutung der Zackenfunktionen im Rahmen der vorliegenden Darstellung besteht darin, dass man allgemeinere Funktionen durch sie näherungsweise darstellen kann. So kann man z.B. jeder auf $[a, b]$ definierten reellen Funktion φ in folgender Weise eine Zackenfunktion zuordnen:

Man wählt eine beliebige Zerlegung Z von $[a, b]$ und verbindet die zu benachbarten Teilpunkten gehörenden Kurvenpunkte geradlinig. Der entstehende Streckenzug ist stets das Bild einer Zackenfunktion. Die Teilpunkte der Zerlegung heißen Stützstellen. Aus diesem Grunde nennen wir die so gebildete Funktion f die Stützstellenfunktion von φ auf der Zerlegung Z (Abb. 1.1.5).

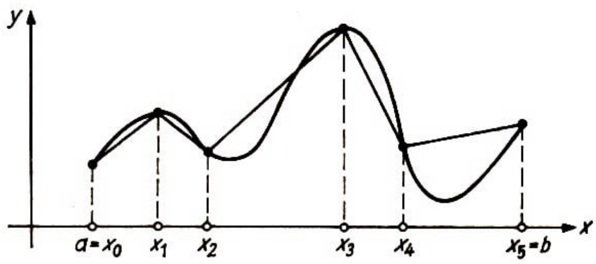


Abb. 1.1.5

Der folgende Satz ermöglicht eine Abschätzung des Fehlers, den wir begehen, wenn wir φ durch f ersetzen.

Satz 1.1.5. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion, und f sei die durch die Wertetabelle (1.1.13)

x	x_0	x_1	...	x_n
y	$\varphi(x_0)$	$\varphi(x_1)$	...	$\varphi(x_n)$

definierte Stützstellenfunktion von φ auf der Zerlegung

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \tag{1.1.14}$$

Für alle x mit $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ gilt dann

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_{k-1})| + |\varphi(x) - \varphi(x_k)| \tag{1.1.15}$$

Beweis. Da f auf $[x_{k-1}, x_k]$ eine lineare Funktion ist, gilt

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \qquad \text{oder} \qquad f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k-1})$$

Somit ist

$$\begin{aligned} &\varphi(x) - f(x_k) \leq \varphi(x) - f(x) \leq \varphi(x) - f(x_{k-1}) \qquad \text{oder} \\ &\varphi(x) - f(x_{k-1}) \leq \varphi(x) - f(x) \leq \varphi(x) - f(x_k) \end{aligned}$$

Hieraus folgt in beiden Fällen die Abschätzung

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq |\varphi(x) - f(x_{k-1})| + |varphi(x) - f(x_k)|$$

Berücksichtigung von $f(x_{k-1}) = \varphi(x_{k-1})$, $f(x_k) = \varphi(x_k)$ liefert die Behauptung (1.1.15), womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 1.1.1. Es seien a, b reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichungen

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad , \qquad ||a| - |b|| \leq |a - b| \tag{1.1.16,1.1.17}$$

Die Ungleichung (1.1.16) heißt Dreiecksungleichung.

Aufgabe 1.1.2. Es seien $a1, ..., a_n$ reelle Zahlen. Man beweise durch vollständige Induktion die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \tag{1.1.18}$$

1.2 Integration von Zackenfunktionen

Wir betrachten die lineare Funktion

$$f(x) = mx + p \tag{1.2.1}$$

im Intervall $[a, b]$. Wenn $f(a)$ und $f(b)$ positiv sind, wird von dem Bild der Funktion und der x-Achse ein Trapez begrenzt, dessen Flächeninhalt wir mit $F(a, b)$ bezeichnen. Er kann bekanntlich nach der Formel

$$F(a, b) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) \tag{1.2.2}$$

berechnet werden (Abb. 1.2.1). Diese Inhaltsformel bleibt auch richtig, wenn $f(a) = 0$ bzw. $f(b) = 0$ ist, d.h., wenn das Trapez zu einem Dreieck entartet. Wenn für $a \leq x \leq b$ stets $f(x) \leq 0$ ist, ergibt (1.2.2) den Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen.

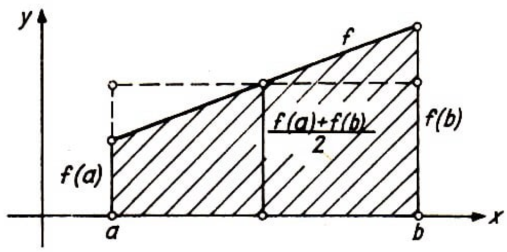


Abb. 1.2.1

Wir setzen (1.2.1) in (1.2.2) ein, wobei wir zunächst keine Voraussetzungen über das Vorzeichen von $f(a)$ bzw. $f(b)$ machen. Wir erhalten

$$F(a, b) = \frac{ma + p + mb + p}{2}(b - a) = \frac{m(a + b)}{2}(b - a) + p(b - a)$$

d.h., es ist

$$F(a, b) = m\frac{b^2 - a^2}{2} + p)b - a) \tag{1.2.3}$$

Ist $a < c < b$, so gilt entsprechend

$$\begin{aligned} F(a, c) + F(c, b) &= m\frac{c^2 - a^2}{2} + p(c - a) + m\frac{b^2 - c^2}{2} + p(b - c) \\ &= m\frac{b^2 - a^2}{2} + p(b - a) \end{aligned}$$

Somit ist für $a < c < b$ stets

$$F(a, c) + F(c, b) = F(a, b) \tag{1.2.4}$$

Haben $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so gibt es ein c mit $a < c < b$ und $f(c) = 0$. In diesem Fall geht (1.2.4) in Verbindung mit (1.2.2) über in

$$F(a, b) = \frac{f(a)}{2}(c - a) + \frac{f(b)}{2}(b - c)$$

Auf der rechten Seite steht die Summe der Inhalte der beiden Teildreiecke (Abb. 1.2.2), deren Inhalt aber mit positivem oder negativem Vorzeichen zu versehen ist, je nachdem, ob das Dreieck ober- oder unterhalb der x-Achse liegt.

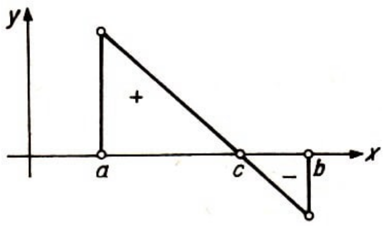


Abb. 1.2.2

Jetzt betrachten wir eine beliebige Zackenfunktion $f \in E_0[a, b]$. Ist

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \tag{1.2.5}$$

eine für f zulässige Zerlegung, so setzt sich die vom Bild der Funktion f und von der x-Achse begrenzte Fläche aus Trapezen bzw. Dreiecken zusammen, denen jeweils ein mit Vorzeichen versehener Inhalt zugeordnet werden kann.

Unter dem "Inhalt" der ganzen Fläche verstehen wir die Summe dieser Teilflächeninhalte, also die reelle Zahl

$$J_0(f) := \sum_{k=1}^{n} F(x_{k-1}, x_k) \tag{1.2.6}$$

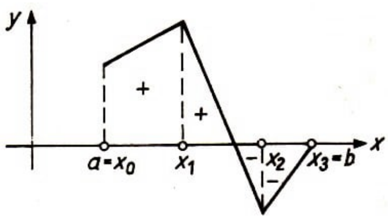


Abb. 1.2.3

Wir zeigen mit Hilfe von (1.2.4), dass die Definition von $J_0(f)$ von der Wahl der für $f \in E_0[a,b]$ zulässigen Zerlegung Z unabhängig ist.

Beweis. Wir bezeichnen die durch (1.2.6) mit Hilfe der für f zulässigen Zerlegung Z definierte reelle Zahl zunächst mit $J_Z(f)$. Die Zerlegung

$$Z' : \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < \xi < x_i < ... < x_n = b$$

entsteht aus (1.2.5) durch Hinzufügung des Teilpunktes ξ. Da f im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ linear ist, können wir (1.2.4) auf dieses Intervall anwenden. Hiernach ist

$$F(x_{i-1}, x_i) = F(x_{i-1}, \xi) + F(\xi, x_i)$$

und folglich ist $J_Z(f) = J_{Z'}(f)$.
Wiederholte Anwendung dieses Resultate zeigt, dass $J_Z(f) = J_{Z''}(f)$ ist, wenn Z'' eine beliebige Verfeinerung von Z ist. Ist schließlich Z^* eine beliebige für f zulässige Zerlegung, so ist

$$J_Z(f) = J_{Z \cup Z^*}(f) = J_{Z^*}(f)$$

Dieses Ergebnis rechtfertigt die

Definition 1.2.1. Es sei (1.2.5) eine zulässige Zerlegung der Funktion $f \in E_0[a,b]$. Dann heißt die durch

$$J_0(f) := \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1} + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \tag{1.2.7}$$

definierte reelle Zahl $J_0(f)$ das Integral der Funktion f.
Ist f im Intervall $[a,b]$ linear, so ist

$$Z : \quad a = x_0 < x_1 = b$$

eine für f zulässige Zerlegung, und die Summe in (1.2.7) besteht nur aus dem Summanden

$$J_0(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) \tag{1.2.8}$$

Beispiel 1.2.1. Für die auf $[a,b]$ konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f(a) = f(b) = c$ und aus (1.2.8) folgt

$$J_0(f) = c(b - a) \tag{1.2.9}$$

Beispiel 1.2.2. Für die auf $[a,b]$ lineare Funktion $f(x) = x$ gilt $f(a) + f(b) = a + b$, und aus (1.2.8) folgt

$$J_0(f) = \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{1.2.10}$$

Satz 1.2.1. Für alle Zackenfunktionen $f, g \in E_0[a,b]$ und für alle reellen Zahlen λ gilt

a) $J_0(\lambda f) = \lambda J_0(f)$,
b) $J_0(f + g) = J_0(f) + J_0(g)$,
c) $J_0(f) \geq 0$, falls $f \geq o$ ist.

Beweis. Es sei (1.2.5) eine zulässige Zerlegung für die Funktionen f und g. Da auf Grund von Satz 1.1.2 mit $f, g \in E_0[a,b]$ auch λf, $f+g \in E_0[a,b]$ sind, können wir $J_0(\lambda f)$ und $J_0(f+g)$ gemäß (1.2.7) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
J_0(\lambda f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda f(x_{k-1}) + \lambda f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \lambda J_0(f) \\
J_0(f+g) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + g(x_{k-1}) + f(x_k) + g(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_{k-1}) + g(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \\
&= J_0(f) + J_0(g)
\end{aligned}$$

c) $f \geq o$ bedeutet $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. In Verbindung mit $x_k - x_{k-1} > 0$ für $k = 1, ..., n$ folgt die Behauptung unmittelbar aus (1.2.7).

Wir haben mit Hilfe von (1.2.7) jeder Funktion $f \in E_0[a,b]$ ein Integral $J_0(j)$ zugeordnet. Wir können daher j_0 als eine "Funktion"auffassen.
Die Funktionswerte $J_0(f)$ sind reelle Zahlen, aber als Argumente treten nicht reelle Zahlen, sondern Elemente $f \in E_0[a,b]$ auf. Die Argumente sind also Funktionen.

Zur besseren Unterscheidung wird eine Funktion dieser allgemeineren Art ein Funktional genannt. Das Funktional J_0 ordnet jeder Funktion $f \in E_0[a,b]$ die reelle Zahl $J_0(f)$, das Integral $J_0(f)$, zu. Auf Grund der Eigenschaft a) bzw. b) bzw. c) sagt man, das Funktional J_0 sei homogen bzw. additiv bzw. positiv.
Die Eigenschaften a) und b) fasst man zusammen und sagt, das Funktional J_0 sei linear. Somit ist J_0 ein positives lineares Funktional auf der Menge $E_0[a,b]$. Wir leiten hieraus einige einfache Folgerungen ab.

Folgerung 1.2.1. Für alle Zackenfunktionen $f, g \in E_0[a,b]$ mit $f \leq g$ gilt

$$J_=(f) \leq J_=(g) \tag{1.2.11}$$

Beweis. Es sei $f, g \in E_0[a,b]$. Dann ist auch $g - f \in E_0[a,b]$, und aus $g = f + (g-f)$ folgt wegen der Additivität $J_0(g) = J_0(f) + J_0(g-f)$. Daher ist

$$J_0(g-f) = J_0(g) - J_0(f) \tag{1.2.12}$$

für alle $f, g \in E_0[a,b]$. Ist nun $f \leq g$, so ist $g - f \geq 0$, und aus der Positivität von J_0 folgt $J_0(g-f) \geq 0$.
Mit (1.2.12) ergibt sich $J_0(g) - J_0(f) \geq 0$. Hieraus folgt die Behauptung (1.2.11).

Folgerung 1.2.2.
Für alle Zackenfunktionen $f \in E_0[a,b]$ gilt

$$|J_0(f)| \leq J_0(|f|) \tag{1.2.13}$$

Beweis. Für jede Funktion $f \in E_0[a,b]$ ist auf Grund von Satz 1.1.3 auch $|f| \in E_0[a,b]$. Ferner ist stets $\pm f \leq |f|$. Wegen (1.2.11) ist $J_0(\pm f) \leq J_0(|f|)$ und aus der Homogenität von J_0 folgt $J_0(\pm f) = \pm J_0(f)$.
Es ist also $\pm J_0(f) \leq J_0(|f|)$, und dies besagt (1.2.13).

Die Klasse $E_0[a,b]$ der Funktionen, für die wir ein Integral definiert haben, erweist sich für die Anwendungen als zu eng. Es ist unser Ziel, eine $E_0[a,b]$ umfassende Menge von reellen Funktionen zu konstruieren, denen ein Integral zugeordnet werden kann.

Aufgabe 1.2.1. Es sei f die in Beispiel 1.1.1 definierte Zackenfunktion. Man berechne $J_0(f)$.

Aufgabe 1.2.2. Es seien $f_1, ..., f_n \in E_0[a,b]$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reelle Zahlen. Man beweise durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \in E_0[a,b] \qquad \text{und} \qquad J_0\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k J_0(f_k)$$

ist.

2 Riemannsche Integrale

2.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Die reelle Funktion φ sei auf $[a,b]$ definiert. Genügt eine Funktion $f \in E_0[a,b]$ bzw. $g \in E_0[a,b]$ der Bedingung $f \leq \varphi$ bzw. $g \geq \varphi$, so nennen wir f eine Unterfunktion bzw. g eine Oberfunktion von φ.
Besitzt die Funktion φ eine Unterfunktion $f \in E_0[a,b]$ und eine Oberfunktion $g \in E_0[a,b]$, so ist

$$f \leq \varphi \leq g$$

Da. f und g beschränkt sind, muss auch φ beschränkt sein (Abb. 2.1.1).

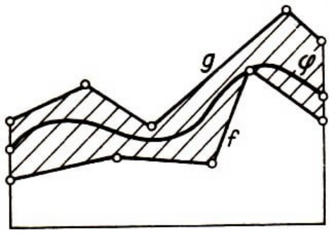


Abb. 2.1.1

Nach (1.2.12) ist

$$J_0(g) - J_0(f) = J_0(g-f)$$

Diese Zahl kann als Inhalt des in Abb. 2.1.1 schraffierten Streifens gedeutet werden.
Den Hauptgegenstand der Untersuchungen im zweiten und dritten Kapitel bildet die Klasse aller derjenigen Funktionen, für die dieser Inhalt beliebig klein gemacht werden kann.

Definition 2.1.1. Es sei φ eine auf $[a,b]$ definierte reelle Funktion. Die Funktion φ heißt über $[a,b]$ Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε Funktionen $f, g \in E_0[a,b]$ mit den beiden Eigenschaften

$$f \leq \varphi \leq g \qquad \text{und} \qquad J_0(g-f) < \varepsilon \tag{2.1.1,2.1.2}$$

gibt.

Mit Satz 2.1.2 werden wir zeigen, dass jeder über $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktion φ ein Integral $J(\varphi)$ zugeordnet werden kann, so dass entsprechend Abb. 2.1.1 für alle Unterfunktionen $f \in E_0[a,b]$ bzw. alle Oberfunktionen $g \in E_0[a,b]$ die Bedingung

$$J_0(f) \leq J(\varphi) \leq J_0(g) \tag{2.1.3}$$

erfüllt ist.

Beispiel 2.1.1. Es sei $c \in [a,b]$, und die Funktion φ_c sei auf $[a,b]$ durch

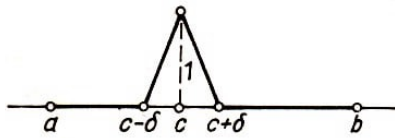
$$\varphi_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = c \\ 0 & \text{für} \quad x \neq c \end{cases} \tag{2.1.4}$$

definiert. Wir wählen eine positive reelle Zahl δ, die im Fall $a < c$ bzw. $c < b$ der Bedingung $a < c - \delta$ bzw. $c + \delta < b$ genügt, und definieren die Zackenfunktion g im Falle $a < c < b$ durch die Wertetabelle

x	a	$c-\delta$	c	$c+\delta$	b
y	0	0	1	0	0

(Abb. 2.1.2) Dann ist $J_0(g) = \delta$.

Abb. 2.1.2



Im Fall $a = c$ bzw. $c = b$ definieren wir g durch die Wertetabelle

x	a	$a+\delta$	b
y	1	0	0

bzw.

x	a	$b-\delta$	b
y	0	0	1

(Abb. 2.1.3, 2.1.4). In beiden Fällen ist

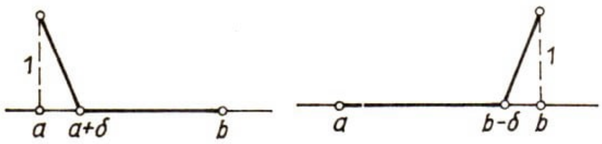
$$J_0(g) = \frac{1}{2}\delta$$

Damit ist in allen Fällen $J_0(g) \leq \delta$. Die Funktion $f := o$ ist ebenfalls eine Zackenfunktion, und es ist

$$f \leq \varphi_c \leq g \qquad \text{sowie} \qquad J_0(g-f) = J_0(g) \leq \delta \tag{2.1.5,2.1.6}$$

Wählen wir also ein δ mit $\delta < \varepsilon$, so ist (2.1.2) erfüllt, und folglich ist φ_c über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Abb. 2.1.3,2.1.4



Das System der Riemann-integrierbaren Funktionen kann auch mit Hilfe des nachfolgenden Begriffe charakterisiert werden.

Definition 2.1.2. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion. Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E_0[a, b]$ heißt eine Riemannsche Näherungsfolge von φ genau dann, wenn es eine Funktionenfolge (h_n) mit $h_n \in E_0[a, b]$ und mit den beiden Eigenschaften

$$|\varphi - f_n| \leq h_n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} J_0(h_n) = 0 \tag{2.1.7,2.1.8}$$

gibt.

Satz 2.1.1. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion φ ist genau dann über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn φ eine Riemann-Näherungsfolge besitzt.

Beweis. a) Die Funktion φ besitze eine Riemannsche Näherungsfolge (f_n) mit $f_n \in E_0[a, b]$. Dann können wir entsprechend Definition 2.1.2 Funktionen h_n mit $h_n \in E_0[a, b]$ und mit den Eigenschaften (2.1.7) und (2.1.8) finden.

Ist ε eine vorgegebene positive reelle Zahl, so wählen wir eine natürliche Zahl n mit

$$J_0(h_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit Satz 1.2.10 folgt

$$J_0(2h_n) = 2J_0(h_n) < \varepsilon \tag{2.1.9}$$

Wegen (2.1.7) ist $-h_n \leq \varphi - f_n \leq h_n$, also

$$f_n - h_n \leq \varphi \leq f_n + h_n \tag{2.1.10}$$

Setzen wir

$$f := f_n - h_n \qquad , \qquad g := f_n + h_n$$

so ist $f, g \in E_0[a, b]$ nach Satz 1.1.2, und wegen (2.1.10) gilt (2.1.1). Ferner ist

$$g - f = (f_n + h_n) - (f_n - h_n) = 2h_n$$

und mit (2.1.9) folgt (2.1.2). Es gibt also zu jeder positiven reellen Zahl ε Funktionen $f, g \in E_0[a, b]$ mit den Eigenschaften (2.1.1) und (2.1.2). Folglich ist φ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

b) Die Funktion φ sei über $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Entsprechend Definition 2.1.1 können wir, wenn wir $\varepsilon := \frac{1}{n+1}$ setzen, Funktionen $f_n, g_n \in E_0[a, b]$ mit den Eigenschaften

$$f_n \leq \varphi \leq g_n \qquad \text{und} \qquad J_0(g_n - f_n) < \frac{1}{n+1} \tag{2.1.11,2.1.12}$$

finden. Wir wollen zeigen, dass jede Funktionenfolge (f_n^*) mit $f_n^* \in E_0[a, b]$, die den Bedingungen

$$f_n \leq f_n^* \leq g_n \tag{2.1.13)}$$

genügt, eine Riemannsche Näherungsfolge von φ ist.
Aus (2.1.11) und (2.1.13), das mit

$$-g_n \leq -f_n^* \leq f_n$$

äquivalent ist, folgt

$$-(g_n - f_n) \leq \varphi - f_n^* \leq g_n - f_n$$

Dies besagt

$$|\varphi - f_n^*| \leq g_n - f_n \tag{2.1.14}$$

Setzen wir $h_n := g_n - f_n$, so ist $h_n \in E_0[a, b]$ wegen Satz 1.1.2, und aus (2.1.14) folgt (2.1.7). Da $h_n \geq o$ ist, gilt unter Berücksichtigung von (2.1.12)

$$0 \leq J_0(h_n) < \frac{1}{n+1}$$

Hieraus folgt (2.1.8), womit gezeigt ist, dass (f_n^*) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ ist.

Damit ist Satz 2.1.1 bewiesen.

Speziell kann im Teil b) des Beweises $f_n^* = f_n$ oder $f_n^* = g_n$ gewählt werden. Es gibt also zu jeder über $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktion φ Riemannsche Näherungsfolgen, deren Glieder sämtlich Unter- bzw. Oberfunktionen von φ sind.

Ist f_n^* die Stützstellenfunktion von φ auf einer für f_n und g_n zulässigen Zerlegung Z_n so gilt (2.1.13). Daher ist auch (f_n^*) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ, wobei insbesondere

$$\varphi(a) = f_n^*(a) \qquad , \qquad \varphi(b) = f_n^*(b) \tag{2.1.15}$$

ist (Abb. 2.1.5).

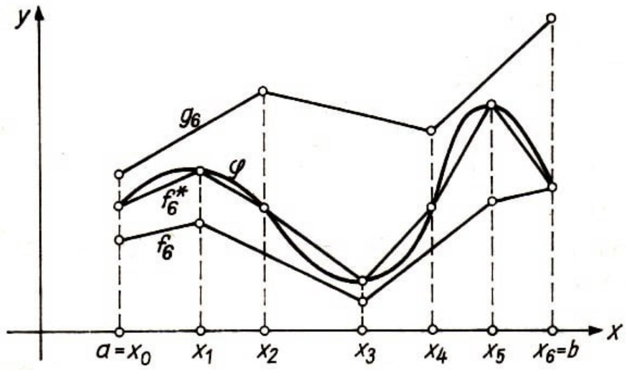


Abb. 2.1.5

Satz 2.1.2. Zu jeder über $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktion φ gibt es genau eine reelle Zahl $J(\varphi)$, die für alle Unterfunktionen $f \in E_0[a, b]$ und alle Oberfunktionen $g \in E_0[a, b]$ den Bedingungen

$$J_0(f) \leq J(\varphi) \leq J_0(g) \tag{2.1.16}$$

genügt. Für jede Riemannsche Näherungsfolge (f_n) von φ ist

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J_0(f_n) \tag{2.1.17}$$

Beweis. a) Wir nehmen an, es gebe eine reelle Zahl $J(\varphi)$, die den Bedingungen (2.1.16) für alle $f, g \in E_0[a, b]$ mit $f \leq \varphi \leq g$ genügt. Ist dann (f_n) eine beliebige Riemannsche Näherungsfolge von φ, so gibt es Funktionen $h_n \in E_0[a, b]$ mit den Eigenschaften (2.1.7) und (2.1.8).
Aus (2.1.7) folgt $-h_n \leq \varphi - f_n,,leqh_n$ oder

$$f_n - h_n \leq \varphi \leq f_n + h_n$$

Somit ist $f_n - h_n$ eine Unterfunktion und $f_n + h_n$ eine Oberfunktion von φ, und nach Voraussetzung (2.1.16) ist

$$J_0(f_n - h_n) \leq J(\varphi) \leq J_0(f_n + h_n)$$

Berücksichtigen wir die Additivität von J_0, so erhalten wir

$$J_0(f_n) - J_0(h_n) \leq J(\varphi) \leq J_0(f_n) + J_0(h_n)$$

bzw.

$$-J_0(h_n) \leq J(\varphi) - J_0(f_n) \leq J_0(h_n) \qquad \text{bzw.} \qquad |J(\varphi) - J_0(f_n)| \leq J_0(h_n)$$

Mit (2.1.8) folgt nun (2.1.17). Dies zeigt zugleich, dass es höchstens eine reelle Zahl $J(\varphi)$ mit der Eigenschaft (2.1.16) für alle $f, g \in E_0[a, b]$ mit $f \leq \varphi \leq g$ gibt.

b) Wir zeigen jetzt, dass es mindestens eine reelle Zahl $J(\varphi)$ mit diesen Eigenschaften gibt. Entsprechend Definition 2.1.1 gibt es Funktionen $f, g \in E_0[a, b]$, die den Bedingungen (2.1.1) genügen. Dann ist $f \leq g$, und mit (1.2.11) folgt

$$J_0(f) \leq J_0(g) \tag{2.1.18}$$

Wir halten die Funktion g zunächst fest und bilden die Menge

$$M := \{J_0(f) : f \in E_0[a, b] \quad \text{und} \quad f \leq \varphi\}$$

aller Integrale von Unterfunktionen. Sie ist nicht leer, und wegen (2.1.18) ist $J_0(g)$ eine obere Schranke von M. Daher besitzt M eine kleinste obere Schranke, die wir mit $J(\varphi)$ bezeichnen. Dann ist für alle $f \in E_0[a, b]$ mit $f \leq \varphi$ stets

$$J_0)f) \leq J(\varphi) \tag{2.1.19}$$

Ferner ist $J(\varphi) \leq J_0(g)$, denn $J(\varphi)$ ist die kleinste unter allen oberen Schranken von M. Da die Oberfunktion g beliebig gewählt war, ist für alle $g \in E_0[a, b]$ mit $\varphi \leq g$ stets

$$J(\varphi) \leq J_0(g) \tag{2.1.20}$$

Auf Grund von (2.1.19) und (2.1.20) ist die Bedingung (2.1.16) erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

Definition 2.1.3. Für jede über $[a, b]$ Riemann-integrierbare reelle Funktion φ heißt die reelle Zahl $J(\varphi)$ mit der Eigenschaft

$$J_0(f) \leq J(\varphi) \leq J_0(g) \tag{2.1.21}$$

für alle Funktionen $f, g \in E_0[a, b]$ mit $f \leq \varphi \leq g$ das Riemannsche Integral der Funktion φ.

Für das Riemannsche Integral $J(\varphi)$ wird auch das Symbol

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx := J(\varphi)$$

verwendet. Das von Leibniz eingeführte Zeichen $\int$ symbolisiert ein "S", weil Integrale, wie wir noch zeigen werden, als Grenzwerte von Summen berechnet werden können.

Satz 2.1.3. Jede Zackenfunktion $h \in E_0[a, b]$ ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$J(h) = \int\limits_a^b h(x)dx = J_0(h) \tag{2.1.22}$$

Beweis. Setzen wir $f = g := h$, so ist $f, g \in E_0[a, b]$, und es sind die Relationen

$$f \leq h \leq g \qquad \text{und} \qquad J_0(g - f) = 0 \tag{2.1.23}$$

erfüllt. Für jede positive reelle Zahl ε gilt demnach

$$J_0(g - f) \leq \varepsilon \tag{2.1.24}$$

Die beiden Beziehungen (2.1.23), (2.1.24) besagen entsprechend Definition 2.1.1, dass h über $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist. Auf Grund von (2.1.21) ist ferner

$$J_0(f) \leq J(h) \leq J_0(g)$$

und da $f = h = g$ ist, folgt $J(h) = J_0(h)$, womit der Satz bewiesen ist.

Das System aller über $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $E[a, b]$. Mit Satz 2.1.3 haben wir bewiesen, dass

$$E_0[a, b] \subseteq E[a, b] \tag{2.1.25}$$

ist und dass J_0 und J für Funktionen f aus $E_0[a, b]$ denselben Wert an nehmen. Wir brauchen daher nicht mehr zwischen $J_0(f)$ und $J(f)$ zu unterscheiden. Im folgenden werden wir häufig $J_0(f)$ durch $J(f)$ ersetzen, wenn wir die bisher abgeleiteten Formeln zitieren.

Beispiel 2.1.2. Gemäß Beispiel 1.2.1, 1.2.2 und (2.1.22) ist

$$\int_a^b c dx = c(b - a) \tag{2.1.26}$$

für jede reelle Zahl c und

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{2.1.27}$$

Beispiel 2.1.3. Für die durch (2.1.4) definierte Funktion φ_c gilt

$$\int_a^b \varphi_c(x) dx = 0 \tag{2.1.28}$$

Beweis. In Beispiel 2.1.1 hatten wir Funktionen $f, g \in E_0[a, b]$ mit $f \leq \varphi_c \leq g$ konstruiert, und zwar war $f = o$, also $J_0(f) = 0$, und $J_0(g) \leq \delta$. Wegen (2.1.16) ist $0 \leq J(\varphi_c) \leq \delta$. Da δ beliebig klein gewählt werden kann. gilt (2.1.28).

Mit Hilfe des folgenden Satzes können wir für die meisten in der Schulmathematik auftretenden Funktionen nachweisen, dass sie Riemann-integrierbar sind und gleichzeitig ein Verfahren für die numerische Berechnung des Integrals bereitstellen.

Satz 2.1.4. Gibt es zu einer auf $[a, b]$ definierten reellen Funktion φ eine nichtnegative reelle Zahl M mit

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M|x - x'| \tag{2.1.29}$$

für alle $x, x' \in [a,b]$, so ist φ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es ist

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(a \frac{b-a}{n} k\right) \tag{2.1.30}$$

Beweis. Für eine zunächst festgehaltene natürliche Zahl n bilden wir die Stützstellenfunktion f_n von φ auf der äquidistanten Zerlegung

$$Z_n : \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Für $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ ist, wenn wir Satz 1.1.5 berücksichtigen,

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_{k-1})| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)|$$

Mit (2.1.29) folgt

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq M(x - x_{k-1}) + M(x_k - x) = M(x_k - x_{k-1}) = M\frac{b-a}{n}$$

Da jeder Punkt $x \in [a,b]$ in einem der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ liegt, kann dies auch in der Form

$$|\varphi - f_n| \leq M\frac{b-a}{n} \tag{2.1.31}$$

geschrieben werden. Die konstante Funktion

$$h_n := M\frac{b-a}{n}$$

liegt in $E_0[a,b]$, und nach (2.1.26) ist

$$J_0(h_n) = M\frac{(b-a)^2}{n}$$

Hieraus folgt (2.1.8), und in Verbindung mit (2.1.31) besagt dies, dass (f_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ ist. Somit ist $\varphi \in E[a,b]$, und es gilt (2.1.17). Mit (1.2.7) und (1.1.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} J_0(f_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\right] \\ &= \frac{b-a}{2n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k) + \sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\right] = \frac{b-a}{2n}\left[2\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k) - \varphi(x_n) + \varphi(x-0)\right] \end{aligned}$$

d.h., es ist

$$J_0(f_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2n}(b-a) \tag{2.1.32}$$

Da der Subtrahend für $n \to \infty$ gegen Null strebt, gilt (2.1.30), und Satz 2.1.4 ist damit bewiesen.

Satz 2.1.5. Für jede Funktion $f \in E_0[a,b]$ ist $f^2 \in E[a,b]$.

Beweis. Da. f beschränkt ist, gibt es eine nichtnegative reelle Zahl K mit

$$|f(x)| \leq K$$

für alle $x \in [a,b]$. Ferner gibt es gemäß Satz 1.1.4 eine nichtnegative reelle Zahl M mit

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

für alle $x, x' \in [a,b]$. Es folgt

$$\begin{aligned}|f^2(x) - f^2(x')| &= |f(x) + f(x')| \cdot |f(x) - f(x')| \leq (|f(x)| + |f(x')|) \cdot |f(x) - f(x')| \\ &\leq 2KM|x - x'|\end{aligned}$$

und (2.1.29) ist mit $\varphi := f^2$ und $2KM$ statt M erfüllt.

Beispiel 2.1.4. Die Funktion $f(x) = x$ liegt in $E_0[a,b]$, und aus Satz 2.1.5 folgt, dass die quadratische Funktion $\varphi(x) = x^2$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Wir zeigen, dass

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \tag{2.1.33}$$

ist.

Beweis. Auf Grund von (2.1.30) ist

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} k\right)^2$$

Mit Hilfe der bekannten Formeln für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen bzw. Quadratzahlen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} k\right)^2 &= \sum_{k=1}^n \left(a^2 + 2a\frac{b-a}{n} k + \frac{(b-a)^2}{n^2} k^2\right) \\ &= na^2 + 2a\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}\right] = (b-a)\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\end{aligned}$$

und damit (2.1.3).

Aufgabe 2.1.1. Man zeige, dass die Funktion $\varphi(x) = x^3$ über jedes Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, und berechne das Integral.

Aufgabe 2.1.2. Man zeige, dass die Funktion $\varphi(x) = \sin x$ über jedes Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 2.1.3. Man zeige, dass jede reelle Funktion φ, deren Ableitung in $[a,b]$ existiert und beschränkt ist, über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

2.2 Eigenschaften Riemannscher Integrale

Auf Grund von Satz 2.1.1 gilt $\varphi \in E[a,b]$ genau dann, wenn die Funktion φ eine Riemannsche Näherungsfolge (f_n) mit $f_n \in E_0[a,b]$ besitzt, d.h., wenn es zur Folge (f_n) eine weitere Funktionenfolge (h_n) mit $h_n \in E_0[a,b]$ gibt, die die beiden Eigenschaften

$$|\varphi - f - n| \leq h_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} J(h_n) = 0 \tag{2.2.1,2.2.2}$$

besitzt. Auf Grund von (2.1.17) lässt sich das Riemannsche Integral der Funktion φ dann mit Hilfe von

$$J(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} J(f_n) \tag{2.2.3}$$

berechnen.
Wir beweisen zunächst drei Sätze, die den Sätzen 1.1.2, 1.1.3 und 1.2.1 völlig analog sind.

Satz 2.2.1. Für alle Funktionen $\varphi, \psi \in E[a,b]$ und für alle reellen Zahlen λ sind die Funktionen $\lambda\varphi$, $\varphi + \psi$ ebenfalls über $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

Satz 2.2.2. Für alle Funktionen $\varphi \in E[a,b]$ gilt $|\varphi| \in E[a,b]$.

Satz 2.2.3. Für alle Funktionen $\varphi, \psi \in E[a,b]$ und für alle reellen Zahlen λ gilt

a) $\int_a^b \lambda\varphi(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx$

b) $\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$

c) $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$, falls $\varphi \geq 0$ ist.

Beweis. Wegen $\varphi \in E[a,b]$ gibt es Funktionenfolgen (f_n), (h_n) mit $f_n, h_n \in E_0[a,b]$, die die Eigenschaften (2.2.1), (2.2.2) und (2.2.3) besitzen, und wegen $\psi \in E[a,b]$ gibt es weitere Funktionenfolgen (f'_n), (h'_n) mit $f'_n, h'_n \in E_0[a,b]$,

$$|\psi - f'_n| \leq h'_n \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} J(h'_n) = 0 \tag{2.2.4, 2.2.5}$$

$$J(\psi) = \int_a^b \psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} J(f'_n) \tag{2.2.6}$$

a) Es ist

$$|\lambda\varphi - \lambda f_n| = |\lambda(\varphi - f_b)| = |\lambda| \cdot |\varphi - f_n|$$

mit $\lambda f_n \in E_0[a,b]$ auf Grund von Satz 1.1.2. Berücksichtigung von (2.2.1) liefert die Ungleichung

$$|\lambda\varphi - \lambda f_n| \leq |\lambda| h_n \tag{2.2.7}$$

Setzen wir

$$h''_n := |\lambda| h_n \tag{2.2.8}$$

so haben wir eine Funktionenfolge (h''_n) erhalten, deren Glieder h''_n auf Grund von Satz 1.1.2 in $E_0[a,b]$ liegen. Mit (2.2.8) geht die Ungleichung (2.2.7) über in

$$|\lambda\varphi - \lambda f_n| \leq h''_n \tag{2.2.9}$$

Ferner ist $J(h''_n) = J(|\lambda| h_n)$. Diese Gleichung lässt sich wegen Satz 1.2.19. in der Form

$$J(h''_n) = |\lambda| J(h_n)$$

schreiben. Berücksichtigung von (2.2.2) ergibt

$$\lim_{n\to\infty} J(h''_n) = 0 \tag{2.2.10}$$

Die beiden Beziehungen (2.2.9) und (2.2.10) besagen, dass die Funktionenfolge (λf_n) mit $\lambda f_n \in E_0[a,b]$ eine Riemannsche Näherungsfolge der reellen Funktion $\lambda\varphi$ ist, d.h., es ist $\lambda\varphi \in E[a,b]$. Ferner ist

$$J(\lambda\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(\lambda f_n)$$

Berücksichtigung von Satz 1.2.1a liefert

$$J(\lambda\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda J(f_n) \tag{2.2.11}$$

Da der reelle Faktor λ vom Grenzprozess unabhängig ist, geht (2.2.11) über in

$$J(\lambda\varphi) = \lambda \lim_{n\to\infty} J(f_n)$$

Berücksichtigung von (2.2.3) ergibt die erste Behauptung von Satz 2.2.3.

b) Es ist

$$|(\varphi + \psi) - (f_n + f'_n)| = |(\varphi - f_n) + (\psi - f'_n)| \leq |\varphi - f_n| + |\psi - f'_n|$$

mit $f_n + f'_n \in E_0[a,b]$ auf Grund von Satz 1.1.2. Berücksichtigung von (2.2.1) und (2.2.4) liefert

$$|(\varphi + \psi) - (f_n + f'_n)| \leq h_n + h'_n \tag{2.2.12}$$

Setzen wir

$$h''_n := h_n + h'_n \tag{2.2.13}$$

so haben wir eine Funktionenfolge (h''_n) erhalten, deren Glieder h''_n auf Grund von Satz 1.1.2 in $E_0[a,b]$ liegen. Mit (2.2.13) geht (2.2.12) über in

$$|(\varphi + \psi) - (f_n + f'_n)| \leq h''_n \tag{2.2.14}$$

Unter Berücksichtigung von Satz 1.2.1b ist

$$J(h_n'') = J(h_n) + J(h_n')$$

und wegen (2.2.2) und (2.2.5) gilt

$$\lim_{n\to\infty} J(h_n'') = 0 \tag{2.2.15}$$

Die beiden Beziehungen (2.2.14) und (2.2.15) besagen, dass $\varphi+\psi \in E[a,b]$ ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} J(\varphi+\psi) &= \lim_{n\to\infty} J(f_n + f_n') = \lim_{n\to\infty} [J(f_n) + J(f_n')] \\ &= \lim_{n\to\infty} J(f_n) + \lim_{n\to\infty} J(f_n') = J(\varphi) + J(\psi) \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Behauptung von Satz 2.2.3 bewiesen.

c) Auf Grund von (1.1.17) gilt für alle reellen Zahlen a, b die Ungleichung $||a|-|b|| \leq |a-b|$, und eine analoge Abschätzung gilt für Funktionen. Aus (2.2.1) folgt also

$$||\varphi| - |f_n|| \leq |\varphi - f_n| \leq h_n \tag{2.2.16}$$

Da $|f_n| \in E_0[a,b]$ wegen Satz 1.1.3 ist, besagen die beiden Beziehungen (2.2.16) und (2.2.2), dass $|\varphi|$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, womit Satz 2.2.2 bewiesen ist.

d) Auf Grund der Bemerkung im Anschluss an den Beweis von Satz 2.1.1 können wir annehmen, dass alle Funktionen f_n Oberfunktionen von φ sind. Aus $\varphi \geq o$ folgt dann auch $f_n \geq o$ und damit $J_0(f_n) \geq 0$. Daher ist

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(f_n) \geq 0$$

womit die dritte Behauptung von Satz 2.2.3 bewiesen ist.

Der Satz 2.2.3 besagt, dass das Funktional J wiederum homogen, additiv und positiv ist.

Folgerung 2.2.1. Für alle Funktionen $\varphi, \psi \in E[a,b]$ mit $\varphi \leq \psi$ gilt

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx \tag{2.2.17}$$

Folgerung 2.2.2. Für alle Funktionen $\varphi \in E[a,b]$ gilt

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx \tag{2.2.18}$$

Folgerung 2.2.3. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in E[a,b]$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reelle Zahlen. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \in E[a,b]$$

und es gilt

$$\int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)dx \qquad (2.2.19)$$

Diese Folgerungen werden ebenso wie die Folgerungen 1.2.1 und 1.2.2 bzw. wie die Aufgabe 1.2.2 bewiesen.

Satz 2.2.4. Jede Funktion $\varphi \in E[a,b]$ ist beschränkt. Ist K_1 eine untere und K_2 eine obere Schranke von φ, so ist

$$K_1(b-a) \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx \le K_2(b-a) \qquad (2.2.20)$$

Beweis. Da es zu $\varphi \in E[a,b]$ eine Unterfunktion $f \in E_0[a,b]$ und eine Oberfunktion $g \in E_0[a,b]$ gibt und diese Funktionen beschränkt sind, ist auch φ beschränkt. Ist

$$K_1 \le \varphi(x) \le K_2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in [a,b]$$

so folgt unter Berücksichtigung von Folgerung 2.2.1

$$\int\limits_a^b K_1 dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b K_2 dx$$

Dies geht mit (2.1.26) in die Behauptung (2.2.20) über.
Die Funktionen φ, ψ seien über das Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es sei $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Als Inhalt der Punktmenge

$$M := \{P(x,y) : a \le x \le b \text{ und } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

die von den Bildern der Funktionen φ, ψ und den beiden Geraden $x = a$, $x = b$ begrenzt wird, bezeichnen wir die durch

$$\mu(M) := \int\limits_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx \qquad (2.2.21)$$

definierte reelle Zahl $\mu(M)$ (Abb. 2.2.1).

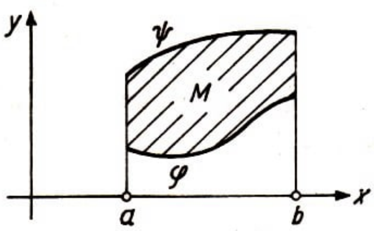


Abb. 2.2.1

Ist insbesondere $\varphi = o$, so gibt

$$\mu(M) = \int\limits_a^b \psi(x)dx$$

den Inhalt der Punktmenge an, die vom Bild der Funktion ψ, der Abszissenachse und den Geraden $x = a$, $x = b$ begrenzt wird (Abb. 2.2.2).

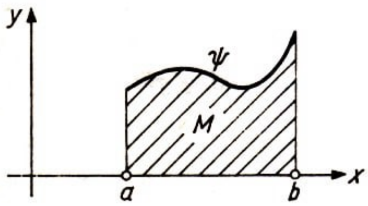


Abb. 2.2.2

Mit Hilfe der Integralrechnung können somit Inhaltsberechnungen für Flächen mit krummliniger Berandung durchgeführt werden.

Satz 2.2.5. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion. Gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε Funktionen $\varphi', \varphi'' \in E[a, b]$ mit

$$\varphi' \leq \varphi \leq \varphi'' \qquad \text{und} \qquad J(\varphi'' - \varphi') < \varepsilon \tag{2.2.22,2.2.23}$$

so ist auch $\varphi \in E[a, b]$.

Beweis. Zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε wählen wir Funktionen $\varphi', \varphi'' \in E[a, b]$ mit den Eigenschaften (2.2.22) und (2.2.23).
Zu φ' bzw. φ'' können wir eine Riemannsche Näherungsfolge (f_n) bzw. (g_n) mit $f_n \leq \varphi'$ bzw. $\varphi'' \leq g$ bestimmen. Dann ist $f_n \leq \varphi' \leq \varphi \leq \varphi'' \leq g_n$, also

$$f_n \leq \varphi \leq g_n \tag{2.2.24}$$

und

$$J(\varphi'' - \varphi') = J(\varphi'') - J(\varphi') = \lim_{n\to\infty} J(g_n) - \lim_{n\to\infty} J(f_n) = \lim_{n\to\infty} J(g_n - f_n)$$

Unter Berücksichtigung von (2.2.23) folgt

$$\lim_{n\to\infty} J(g_n - f_n) < \varepsilon$$

Es gibt daher eine natürliche Zahl n mit

$$J(g_n - f_n) < \varepsilon \tag{2.2.25}$$

Aus (2.2.24) und (2.2.25) können wir schließen, dass $\varphi \in E[a, b]$ ist. Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 2.2.6. Gibt es zu einer auf $[a, b]$ definierten reellen Funktion φ Funktionen $\varphi'_n, \varphi''_n \in E[a, b]$ mit den beiden Eigenschaften

$$\varphi'_n \leq \varphi \leq \varphi''_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} J(\varphi''_n - \varphi'_n) = 0 \tag{2.2.26,2.2.27}$$

so ist auch φ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi'_n) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi''_n) \tag{2.2.28}$$

Die Formelzeile (2.2.28) ist gleichbedeutend mit

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi'_n(x)dx == \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi''_n(x)dx \tag{2.2.28'}$$

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so gibt es zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε eine natürliche Zahl n mit $J(\varphi''_n - \varphi'_n) < \varepsilon$.
Die Bedingungen (2.2.22) und (2.2.23) sind also mit $\varphi' := \varphi'_n$, $\varphi'' := \varphi''_n$ erfüllt, und folglich ist $\varphi \in E[a, b]$.

Aus (2.2.26) ergibt sich

$$o \leq \varphi - \varphi'_n \leq \varphi''_n - \varphi'_n$$

Berücksichtigen wir Folgerung 2.2.1 und Satz 2.2.1, so erhalten wir

$$0 \leq J(\varphi - \varphi'_n) = J(\varphi) - J(\varphi'_n) \leq J(\varphi''_n - \varphi'_n)$$

Mit (2.2.27) schließen wir auf

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi'_n)$$

sowie

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \lim_{n\to\infty} J(\varphi' - n) + \lim_{n\to\infty} J(\varphi''_n) - J(\varphi'_n) = \lim_{n\to\infty} [J(\varphi'_n) + J(\varphi''_n - \varphi'_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} J(\varphi''_n) \end{aligned}$$

Nun kann Satz 2.1.1 verallgemeinert werden.

Satz 2.2.7. Existieren zu einer auf $[a, b]$ definierten reellen Funktion φ zwei Funktionenfolgen (φ_n), (ψ_n), deren Glieder über $[a, b]$ Riemann- integrierbare reelle Funktionen sind, mit den beiden Eigenschaften

$$|\varphi - \varphi_n| \leq \psi_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} J(\psi_n) = 0 \qquad (2.2.29,2.2.30)$$

so ist auch die Funktion φ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$|J(\varphi) - J(\varphi_n)| \leq J(\psi_n) \qquad (2.2.31)$$

Beweis. Die Bedingung (2.2.29) ist mit

$$-\psi_n \leq \varphi - \varphi_n \leq \psi_n \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_n - \psi_n \leq \varphi \leq \varphi_n + \psi_n \qquad (2.2.32,2.2.33)$$

äquivalent. Die Funktionen $\varphi'_n := \varphi_n - \psi_n$ und $\varphi''_n := \varphi_n + \psi_n$ liegen in $E[a, b]$ und erfüllen wegen (2.2.33) die Bedingung (2.2.26). Aus $\varphi''_n - \varphi'_n = 2\psi_n$ und (2.2.30) folgt (2.2.27).
Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.6 erfüllt, und es gilt $\varphi \in E[a, b]$. Aus (2.2.32) folgt

$$-J(\psi_n) \leq J(\varphi) - J(\varphi_n) \leq J(\psi_n)$$

und hieraus die Behauptung (2.2.31). Wegen (2.2.30) ist dann

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi_n) \qquad (2.2.34)$$

Die Formel (2.2.31) ermöglicht die Abschätzung des Fehlers, den wir begehen, wenn wir für $J(\varphi)$ den Näherungswert $J(\varphi_n)$ verwenden.

In Verallgemeinerung von Definition 2.1.1 nennen wir die Funktionenfolge (φ_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ bezüglich J, wenn $\varphi_n \in E[a,b]$ ist und wenn es reelle Funktionen $\psi_n \in E[a,b]$ mit den beiden Eigenschaften (2.2.29) und (2.2.30) gibt.
Sind die beiden Bedingungen (2.2.26) und. (2.2.27) mit $\varphi_n', \varphi_n'' \in E[a,b]$ erfüllt, so sind die Funktionenfolgen (φ_n') und (φ_n'') Riemannsche Näherungsfolgen von φ bezüglich J.

Satz 2.2.8. Das Produkt $\varphi\psi$ zweier über $[a,b]$ Riemann-integrierbarer Funktionen φ, ψ ist ebenfalls über $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis. a) Es sei $f, d \in E_0[a,b]$. Dann liegen auch die Funktionen $f+g$, $f-g$ in $E_0[a,b]$, und nach Satz 2.1.5 ist $(f+g)^2 \in E[a,b]$ und $(f-g)^2 \in E[a,b]$.
Wegen

$$\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] = \frac{1}{4}(f^2 + 2fg + g^2 - f^2 + 2fg + g^2) = fg \qquad (2.2.35)$$

ist auf Grund von Folgerung 2.2.3 auch $fg \in E[a,b]$.

b) Es sei $\varphi \in E[a,b]$ und $g \in E_0[a,b]$. Dann gibt es Funktionenfolgen (f_n), (h_n) mit $f_n, g_n \in E_0[a,b]$ und

$$|\varphi - f_n| \leq h_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} J(h_n) = 0 \qquad (2.2.36,\ 2.2.37)$$

Es ist

$$|\varphi g - f_n g| = |(\varphi - f_n)g| \leq |\varphi - f_n| \cdot |g| \leq h_n|g| \qquad (2.2.38)$$

Da die Funktion $g \in E_0[a,b]$ beschränkt ist, gibt es eine positive reelle Zahl K mit $|g| \leq K$, und (2.2.38) geht über in

$$|\varphi g - f_n g| \leq K h_n \qquad (2.2.39)$$

Hierbei ist $Kh_n \in E_0[a,b]$, und wegen (2.2.37) gilt

$$\lim_{n\to\infty} J(Kh_n) = \lim_{n\to\infty} KJ(h_n) = K \lim_{n\to\infty} J(h_n) = 0 \qquad (2.2.40)$$

Da die Funktionen $f_n g$ auf Grund von a) in $E[a,b]$ liegen, besagen die Beziehungen (2.2.39) und (2.2.40), dass $(f_n g)$ eine Riemannsche Näherungsfolge von φg (bezüglich J) ist. Nach Satz 2.2.7 ist $\varphi g \in E[a,b]$.

c) Es sei $\varphi, psi \in E[a,b]$. Nach Satz 2.2.4 gibt es eine positive reelle Zahl K_1 mit $|\psi| \leq K_1$. Werden zu φ die Funktionen f_n, h_n wie in b) gewählt, so gilt

$$|\varphi\psi - f_n\psi| \leq |\varphi - f_n| \cdot |\psi| \leq K_1 h_n \qquad (2.2.41)$$

und wiederum ist

$$\lim_{n\to\infty} J(k_1 h_n) = 0 \qquad (2.2.42)$$

Da die Funktionen $f_n\psi$ nach b) in $E[a,b]$ liegen, besagen die Beziehungen (2.2.41) und (2.2.42), dass $(f_n\psi)$ eine Riemannsche Näherungsfolge von $\varphi\psi$ ist. Somit gilt

$\varphi\psi \in E[a,b]$, und Satz 2.2.8 ist bewiesen.

Aufgabe 2.2.1. Es sei φ eine auf $[a,b]$ definierte reelle Funktion, die in höchstens endlich vielen Punkten $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ von Null verschiedene Werte annimmt. Dann ist $\varphi \in E[a,b]$ und

$$\int_a^b \varphi(x)dx = 0 \tag{2.2.43}$$

Aufgabe 2.2.2. Es sei φ eine über $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion, und die Funktion ψ stimme in $[a,b]$ mit Ausnahme von höchstem endlich vielen Punkten $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ mit der Funktion φ überein. Dann ist auch ψ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx \tag{2.2.44}$$

Aufgabe 2.2.3. Man zeige, dass die Funktion

$$\varphi(x) = 3x^2 - x + 5$$

über $[-1,2]$ Riemann-integrierbar ist, und berechne das Integral.

Aufgabe 2.2.4. Man zeige an Hand eines Beispiels, dass es Funktionen $\varphi, \psi \in E[a,b]$ mit

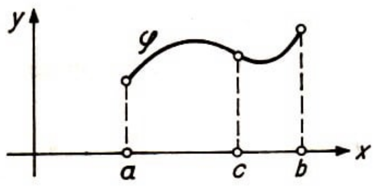
$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \neq \int_a^b \varphi(x)dx \int_a^b \psi(x)dx$$

gibt.

2.3 Integration über Teilintervalle

Während das Intervall $[a,b]$ bisher fest gewählt war, wollen wir nun gleichzeitig Integrationen über verschiedene Intervalle ausführen (Abb. 2.3.1).

Abb. 2.3.1



Satz 2.3.1. Es sei $a < c < b$ und φ eine über $[a,b]$ Riemann-integrierbare reelle Funktion. Dann ist die Funktion φ auch über die beiden Teilintervalle $[a,c]$, $[c,b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx \tag{2.3.1}$$

Beweis. a) Zunächst sei φ eine Zackenfunktion, also $\varphi = f \in E_0[a,b]$. Offensichtlich ist f dann auch eine Zackenfunktion auf den beiden Teilintervallen $[a,c]$, $[c,b]$ von $[a,b]$. Wegen Satz 2.1.3 ist danach $f \in E[a,c]$ und $f \in E[c,b]$. Es sei ferner

$$Z: \quad a = x_0 < ... < x_r = c < ... < x_n = b$$

eine zulässige Zerlegung für f auf $[a,b]$. Dann ist

$$Z' : \quad a = x_0 < ... < x_r = c$$

eine zulässige Zerlegung für f auf $[a,c]$ bzw.

$$Z'' : \quad c = x_r < ... < x_n = b$$

eine zulässige Zerlegung für f auf $[c,b]$, und es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

also

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{2.3.2}$$

Damit ist der Satz für Zackenfunktionen bewiesen.
Ist insbesondere $f \geq o$ auf $[a,b]$, so folgen aus (2.3.2) unmittelbar die beiden Abschätzungen

$$0 \leq \int\limits_a^c f(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \qquad , \qquad 0 \leq \int\limits_c^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \tag{2.3.3,2.3.4}$$

b) Es sei $\varphi \in E[a,b]$. Dann gibt es Funktionenfolgen (f_n), (h_n) mit $f_n, h_n \in E_0[a,b]$,

$$|\varphi f_n| \leq h_n \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b h_n(x)dx = 0 \tag{2.3.5,2.3.6}$$

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \tag{2.3.7}$$

Wegen (2.3.5) ist stets $h_n \geq o$. Damit gelten die Abschätzungen (2.3.3), (2.3.4) mit h_n statt f. Berücksichtigung von (2.3.6) liefert schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c h_n(x)dx = 0 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^b h_n(x)dx = 0 \tag{2.3.8,2.3.9}$$

Die beiden Beziehungen (2.3.5), (2.3.8) bzw. (2.3.5), (2.3.9) besagen, dass $\varphi \in E[a,c]$ bzw. $\varphi \in E[c,b]$ und (f_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ auf $[a,c]$ bzw. auf $[c,b]$ ist. Mit Hilfe von (2.3.2) geht (2.3.7) über in

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[\int\limits_a^c f_n(x)dx + \int\limits_c^b f_n(x)dx\right] = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c f_n(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^b f_n(x)dx$$

Hieraus folgt die Behauptung (2.3.1), womit der Satz bewiesen ist.

Damit (2.3.1) auch für die beiden Sonderfälle $c = a$ oder $c = b$ Gültigkeit behält, setzen wir

$$\int\limits_a^a \varphi(x)dx := 0 \tag{2.3.10}$$

Ist φ eine über $[a, b]$ Riemann-integrierbare reelle Funktion, so setzen wir

$$\int\limits_b^a \varphi(x)dx := -\int\limits_a^b \varphi(x)dx \tag{2.3.11}$$

Satz 2.3.2. Es sei $a < 0 < b$, und die Funktion φ sei über die Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ Riemann-integrierbar. Dann ist φ auch über $[a, b]$ Riemann- integrierbar.

Beweis. Wir wählen Funktionen $f'_n, h'_n \in E_0[a, c]$ bzw. Funktionen $f''_n, h''_n \in E_0[c, b]$, die in den Teilintervallen $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ den Beziehungen

$$|\varphi - f'_n| \leq h'_n \qquad \text{bzw.} \qquad |\varphi - f''_n| \leq h''_n \tag{2.3.12}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c h'n(x)dx = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^b h''n(x)dx = 0 \tag{2.3.13}$$

genügen, wobei wir annehmen können, dass $f'_n(c) = \varphi(c) = f''_n(c)$ ist (vgl. (2.1.15)). Unter dieser Voraussetzung wird durch

$$f_n(x) := \begin{cases} f'_n(x) & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ f''_n(x) & \text{für} \quad c \leq x \leq b \end{cases} \tag{2.3.14}$$

eine Funktion $f_n \in E_0[a, b]$ definiert. Die Funktionen h'_n bzw. h''_n sind zunächst nur auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ definiert. Wir definieren sie gemäß Abb. 2.3.2 auch in den Intervallen $[c, b]$ bzw. $[a, c]$ durch die Wertetabelle

x	c	$x'_n := c + \frac{b-c}{n}$	b
y	$h'_n(c)$	0	0

bzw.

x	a	$x''_n := c + \frac{c-a}{n}$	c
y	0	0	$h''_n(c)$

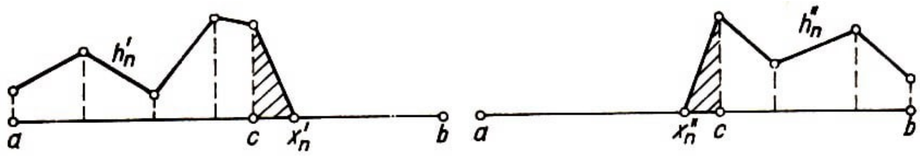


Abb. 2.3.2

(Abb. 2.3.2). Dann sind h'_n, h''_n und $h_n := h'_n + h''_n$ nichtnegative Funktionen aus $E_0[a, b]$. Wegen (2.3.14) und (2.3.12) ist

$$|\varphi - f_n| \leq h'_n + h''_n = h_n \tag{2.3.15}$$

Auf Grund von (2.3.2) ist

$$\int\limits_a^b h'_n(x)dx = \int\limits_a^c h'_n(x)dx + \int\limits_c^b h'_n(x)dx$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite gibt den Inhalt des schraffierten Dreiecks in Abb. 2.3.2 an, d.h., es ist

$$\int\limits_c^b h_n'(x)dx = \frac{h_n'(c)}{2}(x_n' - c) = \frac{h_n'(c)}{2} \cdot \frac{b-c}{n}$$

In Verbindung mit (2.3.13) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b h_n'(x)dx = 0$$

und ebenso zeigt man, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b h_n''(x)dx = 0$$

ist. Für die Funktionen $h_n = h_n' + h_n''$ gilt dann ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b h_n(x)dx = 0$$

Diese Beziehung besagt in Verbindung mit (2.3.15), dass (f_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ im Intervall $[a, b]$ ist. Mit Satz 2.1.1 ergibt sich $\varphi \in E[a, b]$, was zu beweisen war.

Für ein beschränktes Intervall I mit den Begrenzungspunkten α, β heißt die reelle Zahl

$$m(I) := \beta - \alpha \tag{2.3.16}$$

die Länge des Intervalls. Dabei kann I eines der Intervalle $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ oder (α, β) sein. So ist beispielsweise

$$[\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$$

und analog sind die anderen Intervalle definiert. Es ist zweckmäßig, die Einermenge $\{\alpha\}$ als "entartetes" Intervall $[a, a]$ aufzufassen und ihm entsprechend (2.3.16) die "Länge" null zuzuordnen.

Es sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann heißt die durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A \end{cases} \tag{2.3.17}$$

definierte reelle Funktion χ_A die charakteristisch Funktion der Menge A.

Satz 2.3.3. Die charakteristische Funktion eines jeden in $[a, b]$ enthaltenen Intervalls I ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_a^b \chi_I(x)dx = m(I) \tag{2.3.18}$$

Beweis. Das Intervall I habe die Begrenzungspunkte α, β mit $\alpha \leq \beta$.
Mit eventueller Ausnahme der Punkte α, β nimmt die Funktion χ_I in den Intervallen $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ bzw. $[\alpha, \beta]$ den konstanten Wert 0 bzw. 1 an. Sie ist also auf Grund von Aufgabe 2.2.2 über jedes dieser Intervalle Riemann-integrierbar.
Nach Satz 2.3.2 gilt $\chi_I \in E[a, b]$, und aus Satz 2.3.1 und Aufgabe 2.2.2 folgt

$$\int\limits_a^b \chi_I(x)dx = \int\limits_a^\alpha \chi_I(x)dx + \int\limits_\alpha^\beta \chi_I(x)dx + \int\limits_\beta^b \chi_I(x)dx$$
$$= \int\limits_a^\alpha 0dx + \int\limits_\alpha^\beta 1dx + \int\limits_\beta^b 0dx = \beta - \alpha = m(I)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion τ heißt eine Treppenfunktion, wenn sich τ in der Form

$$\tau = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} \tag{2.3.19}$$

darstellen lässt, wobei $c_1, ..., c_n$ reelle Zahlen und $I_1, ..., I_n$ in $[a, b]$ enthaltene Intervalle sind. Dabei wollen wir zulassen, dass auch entartete Intervalle der Form $[a_k, b_k]$ mit $a_k = b_k$ auftreten.

Ist beispielsweise $[a, b] = [0, 4]$ und $I_1 = [0, 1]$, $I_1 = (1, 2]$, $I_2 = [3, 4)$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, so ist

$$\tau = \chi_{I_1} - \chi_{I_2} + 2\chi_{I_3}$$

die in Abb. 2.3.3 dargestellte Treppenfunktion.

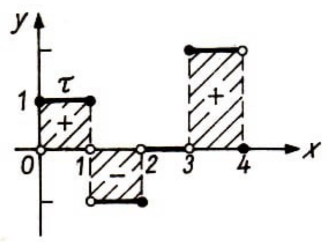


Abb. 2.3.3

Satz 2.3.4. Jede auf $[a, b]$ definierte Treppenfunktion τ der Form (2.3.19) ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$J(\tau) = \int\limits_a^b \tau(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k m(I_k) \tag{2.3.20}$$

Beweis. Da auf Grund von Satz 2.3.3 die Funktionen χ_{I-k} in $E[a, b]$ liegen, gilt auf Grund von Folgerung 2.2.3 stets $\tau \in E[a, b]$, und es ist

$$J(\tau) = J\left(\sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}\right) = \sum_{k=1}^n c_k J(\chi_{I-k})$$

In Verbindung mit (2.3.18) ergibt sich hieraus die Behauptung (2.3.20).
In (2.3.20) kann $J(t)$ als Summe der Inhalte von n Rechtecken gedeutet werden.

Aufgabe 2.3.1. Man untersuche, ob die durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

definierte reelle Funktion über jedes Intervall $[a, b]$ mit $a < 0 < b$ Riemann-integrierbar ist, und berechne gegebenenfalls das Riemannsche Integral dieser Funktion (Abb. 2.3.4).

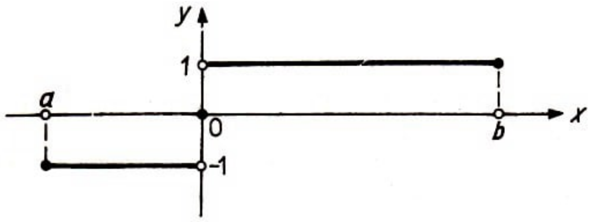


Abb. 2.3.4

Aufgabe 2.3.2. Die Funktion $f \in E_0[a, b]$ sei durch die Wertetabelle

x	1	2	4
y	3	-1	5

definiert. Man berechne

$$\int_1^4 f^2(x)dx$$

Aufgabe 2.3.3. Man zeige, dass für jede Funktion $\varphi \in E[a, b]$ und je drei Punkte $c_1, c_2, c_3 \in [a, b]$ die Identität

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} \varphi(x)dx + \int_{c_3}^{c_1} \varphi(x)dx = 0 \tag{2.3.21}$$

erfüllt ist.

2.4 Integration stetiger Funktionen

Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion φ heißt auf $[a, b]$ stetig genau dann, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:
Für jede konvergente Folge $x_n)$ mit $x_n \in [a, b]$ konvergiert die Folge $(\varphi(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen $\varphi(x)$, wobei $x \in [a, b]$ der Grenzwert der Folge (x_n) ist, d.h., wenn stets

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

gilt.
Jede auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion φ, zu der es eine nichtnegative reelle Zahl M mit der Eigenschaft (2.1.29) gibt, ist stetig, denn für $x, x_n \in [a, b]$ ist

$$|\varphi(x) - \varphi(x_n)| \leq M|x - x_n|$$

und aus $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ folgt $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. Insbesondere folgt somit aus Satz 1.1.4, dass jede Zackenfunktion $f \in E_0[a,b]$ stetig ist.

Die Menge aller auf $[a,b]$ stetigen Funktionen φ wird mit $C[a,b]$ bezeichnet. Aus $\varphi, \psi \in C[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt stets $\lambda\varphi$, $\varphi + \psi$, $\varphi\psi \in C[a,b]$.
Dies ergibt sich aus den Grenzwertsätzen für konvergente Zahlenfolgen.

Ein zentraler Satz der Riemannschen Integrationstheorie besagt, dass jede auf $[a,b]$ stetige Funktion über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Es gelten also die Inklusionen

$$E_0[a,b] \subseteq C[a,b] \subseteq E[a,b] \tag{2.4.1}$$

Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir einige Eigenschaften stetiger Funktionen bereitstellen, wobei der nachfolgende Hilfssatz nützlich ist.

Satz 2.4.1. Ist $\varphi \in C[a,b]$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \in [a,b]$, so gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x \in [a,b]$ mit

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \qquad \text{und} \qquad \varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) \tag{2.4.2,2.4.3}$$

Beweis. Die Folge (x_n) ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie dann eine gegen eine reelle Zahl x konvergierende Teilfolge (x_{n_k}). Dann ist (2.4.2) erfüllt.
Wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ gilt auch $a \leq x \leq b$. Aus (2.4.2) und der Stetigkeit von φ folgt (2.4.3), womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2.4.2. Jede Funktion $\varphi \in C[a,b]$ ist beschränkt. Ferner gibt es reelle Zahlen $\xi', \xi'' \in [a,b]$, in denen die Funktion ihr Minimum bzw. Maximum annimmt. Für alle $x \in [a,b]$ gilt demnach

$$\varphi(\xi') \leq \varphi(x) \leq \varphi(\xi'') \tag{2.4.4}$$

Beweis. Nehmen wir an, die Funktion φ sei nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es reelle Zahlen $x_n \in [a,b]$ mit $|\varphi(x_n)| \leq n$.
Jede Teilfolge der Folge $(\varphi(x_n))$ ist also unbeschränkt. Das ist aber ein Widerspruch zur Formelzeile (2.4.3) von Satz 2.4.1. Somit ist φ nach oben beschränkt.

Ist c die kleinste obere Schranke des Wertebereichs von φ, so gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n \in [a,b]$ und mit $c - \frac{1}{n} \leq \varphi(x_n) \leq c$, woraus

$$c = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

folgt. Auf Grund von Satz 2.4.1 gibt es zur Folge $(x_n$ eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x \in [a,b]$ mit den Eigenschaften (2.4.2) und (2.4.3). Setzen wir $\xi'' := x$, so gilt

$$c = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(\xi'')$$

Da c die kleinste obere Schranke ist, gilt für $x \in [a,b]$ stets

$$\varphi(x) \leq c = \varphi(\xi'')$$

d.h., die Funktion φ nimmt im Punkt ξ'' ihr Maximum an. Analog wird die Existenz von ξ' bewiesen.

Satz 2.4.3. Es sei $\varphi \in C[a,b]$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive reelle Zahl δ mit folgender Eigenschaft:
Für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x_1| < \delta$ gilt

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \geq \varepsilon \tag{2.4.5}$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir an, zu jeder positiven reellen Zahl δ gebe es reelle Zahlen $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$ und

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \geq \varepsilon$$

Dann können wir insbesondere zu $\delta := \frac{1}{n}$ reelle Zahlen $x_n, x'_n \in [a,b]$ mit

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |\varphi(x_n) - \varphi(x'_n)| \geq \varepsilon \tag{2.4.6}$$

finden. Zur Folge (x_n) gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x \in [a,b]$ mit den Eigenschaften (2.4.2) und (2.4.3). Aus (2.4.6) folgt

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

und demnach hat die Folge (x_{n_k}) denselben Grenzwert wie die Folge (x_{n_k}), d.h., es ist auch $x = \lim\limits_{n\to\infty} x'_{n_k}$ und damit

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x'_{n_k})$$

Die Folgen $(\varphi(x_{n_k}))$ und $(\varphi(x'_{n_k}))$ haben also denselben Grenzwert $\varphi(x)$, und folglich ist

$$\lim_{k\to\infty} [\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x'_{n_k})] = 0$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (2.4.7), und der Satz ist bewiesen. Er wird gewöhnlich Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit genannt.

Satz 2.4.4. Es sei $\varphi \in C[a,b]$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine natürliche Zahl n_0, so dass

$$|\varphi - f_n| \leq \varepsilon \tag{2.4.8}$$

ist, wobei f_n die Stützstellenfunktion von φ auf der äquidistanten Zerlegung Z_n von $[a,b]$ mit $n \geq n_0$ ist.

Beweis. Gemäß Satz 2.4.3 können wir zu ε eine positive reelle Zahl δ mit

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4.9}$$

für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$ finden. Wir wählen ein n_0 mit

$$\frac{b-a}{n_0} < \delta$$

und bilden die äquidistante Zerlegung

$$Z_n: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

mit $n \geq n_0$. Zu jeder Zahl $x \in [a, b]$ gibt es ein k mit $x_{k-1} \leq x \leq x_{k+1}$. Nach Satz 1.1.5 ist

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_{k-1})| + |\varphi(x) - \varphi(x_k)|$$

und da

$$|x - x_{k-1}| \leq x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{n_0} < \delta \qquad , \qquad |x - x_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$$

ist, folgt unter Berücksichtigung von (2.4.9) die Abschätzung

$$|\varphi(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Die reelle Zahl $x \in [a, b]$ war aber beliebig gewählt. Daher ist auch (2.4.8) erfüllt.

Satz 2.4.5. Jede auf $[a, b]$ stetige reelle Funktion φ ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \tag{2.4.10}$$

Beweis. Es sei f_n die Stützstellenfunktion von φ auf der äquidistanten Zerlegung Z_n. Das Maximum c_n der stetigen Funktion $|\varphi - f_n|$ werde im Punkt ξ_n angenommen. Dann gilt stets $|\varphi(x) - f_n(x)| \leq c_n$, also

$$|\varphi - f_n| \leq c_n \tag{2.4.11}$$

Zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε wählen wir die Zahl n_0 entsprechend Satz 2.4.4. Für $n \geq n_0$ ist dann $|\varphi - f_n| \leq \varepsilon$, also auch

$$c_n = |\varphi(\xi_n) - f_n(\xi_n)| \leq \varepsilon$$

und folglich ist (c_n) eine Nullfolge. Dann ist aber auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b c_n dx = \lim_{n\to\infty} c_n(b-a) = 0 \tag{2.4.12}$$

Die Beziehungen (2.4.11) und (2.4.12) besagen, dass (f_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ und damit $\varphi \in E[a, b]$ ist. Die Integrale $J(f_n)$ können wieder in der Form (2.1.32) dargestellt werden. Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt unter Berücksichtigung von (2.1.17) die Behauptung (2.4.10).

Zum Schluss dieses Abschnitts beweisen wir den sogenannten Zwischenwertsatz für Funktionen aus $C[a, b]$, da er ebenfalls für die Integralrechnung von Bedeutung ist.

Satz 2.4.6. Es sei $\varphi \in C[a, b]$. Dann wird jede zwischen dem Minimum und dem Maximum des Wertebereiches liegende reelle Zahl c an mindestens einer Stelle $\xi \in [a, b]$

als Funktionswert angenommen.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Satz 2.4.2 gilt nach Voraussetzung $\varphi(\xi') \leq c \leq \varphi(\xi'')$. Wir können etwa $\xi' < \xi''$ voraussetzen. Dann setzen wir

$$a_0 := \xi' \qquad , \qquad b_0 := \xi''$$

Ist nun

$$\varphi\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \leq c \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > c$$

so setzen wir

$$a_1 := \frac{a_0+b_0}{2} \qquad , \qquad b_1 := b-0$$

bzw.

$$a_1 := a_0 \qquad , \qquad b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$$

Wegen $a_0 < b_0$ gilt im ersten Fall

$$b_1 - a_1 = b_0 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} > 0$$

bzw. im zweiten Fall

$$b_1 - a_1 = b_1 - a_0 = \frac{b_0 - a_0}{2} > 0$$

also in beiden Fällen

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0 \qquad , \qquad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

und

$$\varphi(a_1) \leq c \leq \varphi(b_1)$$

In dieser Weise seien die reellen Zahlen $a_0, ..., a_n$, $b_0, ..., b_n$ mit den Eigenschaften

$$a_0 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_0 \qquad , \qquad b_a - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \tag{2.4.13}$$

$$\varphi(a_n) \leq c \leq \varphi(b_n) \tag{2.4.14}$$

konstruiert. Je nachdem, ob

$$\varphi\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq c \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > c$$

ist, setzen wir

$$a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2} \qquad , \qquad b_{n+1} := b_n$$

bzw.

$$a_{n+1} := a_n \qquad , \qquad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$$

Die in dieser Weise induktiv definierten Zahlenfolgen (a_n), (b_n) bilden eine Intervallschachtelung, und folglich existiert ein ξ mit $a \leq a_n \leq \xi \leq b_n \leq b$ und

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(b_n)$$

Wegen der Stetigkeit von φ gilt

$$\varphi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(b_n) \tag{2.4.15}$$

Aus (2.4.14) folgt unter Berücksichtigung von (2.4.15)

$$\varphi(\xi) \leq x \leq \varphi(\xi)$$

d.h., es ist $\varphi(\xi) = c$, womit der Satz bewiesen ist.

2.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Integrationsmethoden

Mit Satz 2.4.5 haben wir bewiesen, dass sich des Riemannsche Integral $J(\varphi)$ jeder Funktion $\varphi \in C[a,b]$ mit Hilfe der Formel

$$J(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \tag{2.5.1}$$

berechnen lässt. Allerdings ist der damit verbundene Rechenaufwand häufig sehr aufwendig.
Wir werden mit Hilfe der Umkehrung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung eine Methode entwickeln, die für gewisse stetige Funktionen eine wesentlich einfachere Berechnung des Riemannschen Integrals gestattet, als dies mit der Formel (2.5.1) der Fall ist.
Um den Hauptsatz beweisen zu können, müssen wir zunächst den Mittelwertsatz der Integralrechnung bereitstellen.

Satz 2.5.1. Es sei $\varphi \in C[a,b]$. Dann gibt es ein ξ mit $\xi \in [a,b]$ und

$$\int_a^b \varphi(x)dx = (b-a)\varphi(\xi) \tag{2.5.2}$$

Beweis. Auf Grund von Satz 2.4.2 nimmt die Funktion φ auf $[a,b]$ ihr Minimum K_1 und ihr Maximum K_2 an, d.h., es gilt für alle $x \in [a,b]$

$$K_1 \leq \varphi(x) \leq K_2$$

Berücksichtigung von (2.2.20) ergibt

$$K_1(b-a) \leq \int_a b^b \varphi(x)dx \leq K_2(b-a)$$

Hieraus folgt

$$K_1 \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le K_2$$

Da nach Satz 2.4.6 eine auf $[a,b]$ stetige Funktion φ jeden Wert zwischen ihrem Minimum K_1 und ihrem Maximum K_2 mindestens einmal annimmt, gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)dx \qquad (2.5.3)$$

ist. Hieraus folgt (2.5.2), womit der Satz bewiesen ist.
Die rechte Seite der Formel in (2.5.3) heißt der Mittelwert $M_a^b(\varphi)$ der Funktion φ im Intervall $[a,b]$.

Ist $\varphi \in C[a,b]$ und $\varphi(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, so besagt der Mittelwertsatz der Integralrechnung anschaulich, dass der Inhalt der Punktmenge

$$M := \{P(x,y) : a \le x \le b \text{ und } 0 \le y \le \varphi(x)\}$$

gleich dem Inhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie $b-a$ und der Höhe $\varphi(\xi)$ ist, wobei ξ ein passend gewählter Punkt aus dem Intervall $[a,b]$ ist (Abb. 2.5.1).

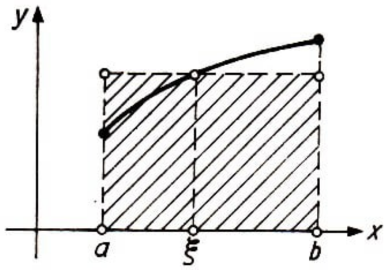


Abb. 2.5.1

Wir geben den Mittelwertsatz der Integralrechnung noch in einer anderen Fassung an.

Satz 2.5.2. Es sei $\varphi \in C[a,b]$, und es seien $x_0, x_0+h \in [a,b]$ mit $h \neq 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl θ mit $0 \le \theta \le 1$ und

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)dx = h\varphi(x_0+\theta h) \qquad (2.5.4)$$

Beweis. a.) Es sei $h > 0$. Dann ist $[x_0, x_0+h] \subseteq [a,b]$, und auf Grund von Satz 2.5.1 gibt es ein ξ mit $\xi \in [x_0, x_0+h]$ und

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)dx = (x_0+h-x_0)\varphi(\xi) = h\varphi(\xi)$$

wobei sich ξ in der Form $\xi = x_0 + \theta h$ mit $0 \le \theta \le 1$ darstellen lässt.

b) Es sei $h < 0$. Dann ist $[x_0+h, x_0] \subseteq [a,b]$, und auf Grund von a) gibt es eine reelle Zahl θ^* mit $0 \le \theta^* \le 1$ und

$$\int\limits_{x_0+h}^{x_0} \varphi(x)dx = [x_0-(x_0+h)]\varphi[(x_0+h)+\theta^*(x_0-(x_0+h))] = -h\varphi[x_0+(1-\theta^*)h]$$

Berücksichtigung von (2.3.11) liefert

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)dx = h\varphi[x_0 + (1-\theta^*)h] \tag{2.5.5}$$

Setzen wir $\theta := 1 - \theta^*$, so ist $0 \leq \theta \leq 1$, und (2.5.5) geht über in (2.5.4), womit der Satz bewiesen ist.

Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion. Eine reelle Funktion Φ heißt eine Stammfunktion von φ auf $[a, b]$ genau dann, wenn $\Phi'(x) = \varphi(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$, wobei in den Randpunkten nur einseitige Differenzierbarkeit gefordert wird.

So sind beispielsweise die Funktionen

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \qquad , \qquad \Phi_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$$

Stammfunktionen der reellen Funktion $\varphi(x) = x^2$ auf $[-2, 4]$, da für alle $x \in [-2, 4]$

$$\Phi_1'(x) = \Phi_2'(x) = x^2$$

ist.
Dieses Beispiel zeigt, dass Stammfunktionen, falls sie existieren, nicht eindeutig bestimmt sind. Es gilt aber der

Satz 2.5.3. Sind Φ_1, Φ_2 Stammfunktionen derselben Funktion $\varphi \in C[a, b]$, so unterscheiden sich Φ_1, Φ_2 auf $[a, b]$ nur um eine additive reelle Konstante.

Beweis. Setzt man $\Psi := \Phi_1 - \Phi_2$, so ist

$$\Psi'(x) = \Phi_1'(x) - \Phi_2'(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

für alle $x \in [a, b]$. Hieraus folgt $\Psi(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$.

Satz 2.5.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
Es sei $\varphi \in C[a, b]$. Dann ist die durch

$$\Phi(x) := \int\limits_a^x \varphi(t)dt$$

mit $D(\Phi) = [a, b]$ definierte reelle Funktion Φ eine Stammfunktion von φ auf $[a, b]$.

Beweis. Für alle $x, x + h \in [a, b]$ mit $h \neq 0$ ist

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{x+h} \varphi(t)dt - \int\limits_a^x \varphi(t)dt\right]$$

Berücksichtigung von (2.3.11), (2.3.1) und Satz 2.5.2 der Reihe nach liefert

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{x+h} \varphi(t)dt + \int\limits_x^a \varphi(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int\limits_x^a \varphi(t)dt + \int\limits_a^{x+h} \varphi(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \varphi(t)dt = \frac{1}{h}h\varphi(x+\theta h) = \varphi(x+\theta h)\end{aligned}$$

Da die Funktion φ auf $[a, b]$ stetig und $0 \leq \theta \leq 1$ ist, gilt

$$\lim_{h \to 0} \varphi(x + \theta h) = \varphi(x)$$

Somit ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} \varphi(x)$$

Dies besagt, dass $\Phi'(x) = \varphi(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$, d.h., Φ ist eine Stammfunktion von φ auf $[a, b]$, womit der Satz bewiesen ist.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass jede auf $[a, b]$ stetige reelle Funktion φ eine Stammfunktion besitzt und dass man mit Hilfe des Riemannschen Integrals eine Stammfunktion von φ konstruieren kann. Ist umgekehrt von einer Funktion $\varphi \in C[a, b]$ eine Stammfunktion Φ bereits bekannt, so liefert die nachfolgende Umkehrung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ein bequemes Mittel für die numerische Berechnung des Riemannschen Integrals der Funktion φ.

Satz 2.5.5. Es sei Φ eine Stammfunktion der Funktion $\varphi \in C[a, b]$. Dann ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{2.5.6}$$

Beweis. Auf Grund von Satz 2.5.4 ist auch

$$\Psi(x) := \int_a^x \varphi(t) dt$$

mit $D(\Psi) = [a, b]$ eine Stammfunktion von φ auf $[a, b]$. Wegen Satz 2.5.3 unterscheiden sich beide Stammfunktionen Φ und Ψ von φ auf $[a, b]$ nur um eine additive reelle Konstante c, d.h., es gilt

$$\Psi(x) = \Phi(x) + c$$

für alle $x \in [a, b]$. Insbesondere ist wegen (2.3.10)

$$\Phi(a) + c = \Psi(a) = \int_a^a \varphi(x) dx = 0$$

Hieraus folgt $c = -\Phi(a)$. Ferner ist

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) + c = \Psi(b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

womit der Satz bewiesen ist.

Setzt man

$$[\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} := \Phi(b) - \Phi(a)$$

so nimmt (2.5.6) die für das praktische Rechnen sehr vorteilhafte Form

$$\int_a^b \varphi(x)dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}$$

an.

Beispiel 2.5.1. Die reelle Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$$

ist eine Stammfunktion der stetigen Funktion $\varphi(x) = x^\alpha$ auf $[a,b]$, wobei α eine reelle Zahl mit $\alpha \neq -1$ bedeutet und das Intervall $[a,b]$ so gewählt ist, dass die Funktionen φ und Φ auf $[a,b]$ definiert sind. Dies besagt, dass das Intervall $[a,b]$ beliebig gewählt werden kann, falls α eine natürliche Zahl ist. Ist α eine negative ganze Zahl, so muss $0 < a < b$ oder $a < b < 0$ gelten. Ist a nicht ganzzahlig, so muss $0 < a < b$ sein.
Auf Grund von Satz 2.5.5 gilt dann

$$\int_a^b x^\alpha dx = \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{2.5.7}$$

Für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = 2$ geht (2.5.7) über in (2.1.26) für $c = 1$ bzw. in (2.1.27) bzw. in (2.1.33).

Eine auf $[a,b]$ definierte reelle Funktion φ heißt auf $[a,b]$ stetig differenzierbar genau dann, wenn $\varphi \in C[a,b]$ ist.
Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 2.5.5 ist der

Satz 2.5.6. Es sei φ eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b \varphi'(x)dx = [\varphi(x)]_{x=a}^{x=b} = \varphi(b) - \varphi(a) \tag{2.5.8}$$

In den folgenden Formeln muss das Intervall $[a,b]$ so gewählt sein, dass die Funktionen φ und Φ auf $[a,b]$ definiert sind:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|b| - \ln|a| \quad (a < b < 0 \text{ oder } 0 < a < b) \tag{2.5.9}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a \tag{2.5.10}$$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a \tag{2.5.11}$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \cos a \tag{2.5.12}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a \tag{2.5.13}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a \tag{2.5.14}$$

In den beiden folgenden Sätzen beweisen wir zwei wichtige Integrationsmethoden, die partielle Integration und die Integration durch Substitution.

Satz 2.5.7. Es seien φ, ψ auf $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\psi'(x)dx = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a) - \int_a^b \varphi'(x)\psi(x)dx \tag{2.5.15}$$

Beweis. Da die Funktionen $\varphi\psi'$ und $\varphi'\psi$ als Produkte stetiger Funktionen wieder stetig sind, gilt auf Grund von Satz 2.4.5 zunächst $\varphi\psi'$, $\varphi', \psi \in E[a, b]$. Ferner ist unter Berücksichtigung von Satz 2.2.3b und Satz 2.5.6

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\psi'(x)dx + \int_a^b \varphi'(x)\psi(x)dx &= \int_a^b [\varphi(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi(x)]dx \\ &= \int_a^b [\varphi(x)\psi(x)]'dx = [\varphi(x)\psi(x)]_{x=a}^{x=b} = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a)\end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich (2.5.15).

Beispiel 2.5.2. Wir berechnen $\int_1^2 xe^x dx$. Dazu setzen wir

$$\varphi(x) := x \qquad , \qquad \psi(x) := e^x$$

Es ist dann

$$\varphi'(x) = 1 \qquad , \qquad \psi'(x) = e^x$$

und damit

$$\int_1^2 xe^x dx = [xe^x]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - [e^x]_{x=1}^{x=2} = 2e^2 - e - (e^2 - e)$$

also $\int_1^2 xe^x dx = e^2$.

Beispiel 2.5.3. Wir berechnen $\int_1^2 \ln x dx$. Um (2.5.15) anwenden zu können, müssen wir $\ln x$ als Produkt einer Funktion φ und der Ableitung einer Funktion ψ darstellen. Wir können etwa

$$\varphi(x) := \ln x \qquad , \qquad \psi(x) := x$$

wählen. Damit ist

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \qquad , \qquad \psi'(x) = 1$$

und wir erhalten

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - \ln 1 - [x]_{x=1}^{x=2}$$

Wegen $\ln 1 = 0$, $2\ln 2 = \ln 4$ ist

$$\int_1^2 \ln x dx = \ln 4 - 1$$

Satz 2.5.8. Es sei $\varphi \in C[a,b]$. Gibt es eine auf einem Intervall $[a,b]$ definierte streng monotone stetig differenzierbare Funktion ψ mit $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_\alpha^\beta \varphi(\psi(z))\psi'(z)dz \tag{2.5.16}$$

Beweis. Auf Grund von Satz 2.5.4 besitzt φ eine Stammfunktion Φ auf $[a,b]$, und wegen Satz 2.5.5 gilt (2.5.6). Da $\Phi' = \varphi$ ist, erhalten wir

$$[\Phi(\psi(z))]' = \Phi'(\psi(z))\psi'(z) = \varphi(\psi(z))\psi'(z)$$

Berücksichtigung von (2.5.8) und (2.5.6) ergibt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(\psi(z))\psi'(z)dx &= \int_\alpha^\beta [\Phi(\psi(z))]'dz = \Phi(\psi(\beta)) - \Phi(\psi(\alpha)) \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x)dx\end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Zur Berechnung des Integrals auf der linken Seite von (2.5. 16) ersetzt man also die Variable x durch die Substitutionsfunktion $x = \psi(z)$ und multipliziert anschließend mit der Ableitung der Substitutionsfunktion ψ. Die neuen Grenzen α, β müssen den Bedingungen $\psi(\alpha) = a$ und $\psi(\beta) = b$ genügen.

Beispiel 2.5.4. Wir berechnen $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$. Die auf dem Intervall $[1,2]$ streng monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion

$$x = \psi(z) := z^2$$

genügt den Bedingungen $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 4$. Wegen $\psi'(z) = 2z$ gilt demnach

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 e^{\sqrt{z^2}}dz = 2\int_1^2 ze^z dz$$

Berücksichtigung von Beispiel 2.5.2 liefert .

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx = 2e^2$$

Beispiel 2.5.5. Wir berechnen $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}dx$. Die auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion

$$x = \psi(z) := \sin^4 z$$

genügt den Bedingungen $\psi(0) = 0$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Wegen $\psi'(z) = 4\sin^3 z \cos z$ und

$$\sqrt{1-\sqrt{\sin^4 z}} = \sqrt{1-\sin^2 z} = \cos z$$

gilt demnach

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \sin^3 z dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z(1-\cos^2 z)\sin z dz \\
&= 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \sin z dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z \sin z dz\right] \\
&= 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}\cos^3 z\right)' dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{5}\cos^5 z\right)' dz\right] \\
&= 4\left\{\left[-\frac{1}{3}\cos^3 z\right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{5}\cos^5 z\right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}}\right\} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5.1. In

$$\varphi(x) := a_0, a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

seien a_0, a_1, a_2, a_3 beliebige reelle Zahlen. Man beweise, dass $\varphi \in E[a, b]$ und

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right]$$

ist.

Aufgabe 2.5.2. Die Bilder der Funktionen $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$ bilden für alle reelle Zahlen x mit $0 \leq x \leq 1$ den Rand einer Punktmenge M. Man berechne den Flächeninhalt von M (Abb. 2.5.2).

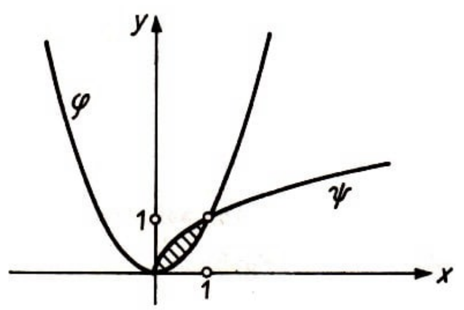


Abb. 2.5.2

Aufgabe 2.5.3. Man berechne $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} dx$.

Aufgabe 2.5.4. Man beweise durch vollständige Induktion nach n, dass für alle von null verschiedenen natürlichen Zahlen m, n stets

$$\int\limits_0^1 (1-x)^m x^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \tag{2.5.17}$$

ist.

2.6 Die klassische Definition des Riemannschen Integrals

Für eine beliebige auf $[a, b]$ definierte beschränkte reelle Funktion φ und eine Zerlegung

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \tag{2.6.1}$$

führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Das Maximum der in der Zerlegung (2.6.1) auftretenden Intervalllängen bezeichnen wir mit $d(Z)$, d.h., wir setzen

$$d(Z) := \max_{k=1,...,n} (x_k - x_{k-1}) \tag{2.6.2}$$

Diese Zahl ist ein Maß für die "Feinheit" der Zerlegung Z.
Die größte untere bzw. die kleinste obere Schranke der Menge aller Funktionswerte $\varphi(x)$, die im Intervall

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \tag{2.6.3}$$

angenommen werden, bezeichnen wir mit $\underline{\varphi}(I_k)$ bzw. $\overline{\varphi}(I_k)$. Die reelle Zahl

$$\underline{S}(Z) := \sum_{k=1}^{n} \underline{\varphi}(I_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{2.6.4}$$

bzw.

$$\overline{S}(Z) := \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi}(I_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{2.6.5}$$

heißt die Untersumme bzw. Obersumme der Funktion φ auf der Zerlegung Z.
Wenn mehrere Funktionen auftreten, schreiben wir $\underline{S}(Z, \varphi)$ bzw. $\overline{S}(Z, \varphi)$ an Stelle von $\underline{S}(Z)$ bzw. $\overline{S}(Z)$. Sind ξ_k beliebige Punkte mit

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k \tag{2.6.6}$$

so nennen wir

$$S(Z) := \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{2.6.7}$$

eine Zwischensumme der Funktion φ auf der Zerlegung Z. Wegen (2.6.6) gilt

$$\underline{\varphi}(I_k) \le \varphi(\xi_k) \le \overline{\varphi}(I_k)$$

(Abb. 2.6.1), und auf Grund von (2.6.4), (2.6.5) und (2.6.7) ist

$$\underline{S}(Z) \le S(Z) \le \overline{S}(Z) \tag{2.6.8}$$

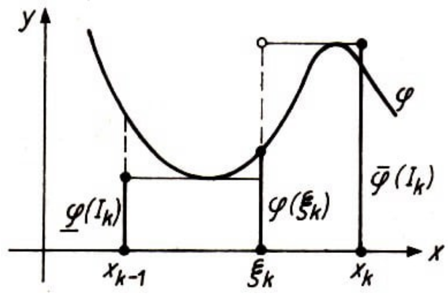


Abb. 2.6.1

Diese drei Zahlen können als Summe der (mit Vorzeichen versehenen) Inhalte von n Rechtecken gedeutet werden. Die Formel (2.6.8) besagt, dass $\underline{S}(Z)$ bzw. $\overline{S}(Z)$ eine untere bzw. obere Schranke der Menge aller Zwischensummen von φ auf Z ist.
Wir zeigen, dass es sich sogar um die größte untere bzw. kleinste obere Schranke handelt. Ist ε eine positive reelle Zahl, so wählen wir entsprechend der Definition von $\underline{\varphi}(I_k)$ einen Zwischenpunkt $\xi_k \in I_k$ mit

$$\varphi(\xi_k) - \underline{\varphi}(I_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Multiplizieren wir mit $x_k - x_{k-1}$ und summieren anschließend über k von 1 bis n, so erhalten wir, wenn wir die Definitionen (2.6.7) und (2.6.4) berücksichtigen,

$$S(Z) - \underline{S}(Z) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad S(Z) < \underline{S}(Z) + \varepsilon$$

Die reelle Zahl $\underline{S}(Z) + \varepsilon$ ist also keine untere Schranke für die Menge aller Zwischensummen, d.h., $S(Z)$ ist die größte untere Schranke. Analog wird die Behauptung für $\overline{S}(Z)$ bewiesen.

Die bisherigen Definitionen und Sätze über Zerlegungssummen reichen aus, um das Riemannsche Integral einer Funktion $\varphi \in E[a, b]$ numerisch zu berechnen. Der folgende Satz besagt, dass die Zwischen-, Unter- und Obersummen bei einer unbegrenzten "Verfeinerung" der Zerlegung gegen das Integral von φ streben. Spezialfälle dieses allgemeinen Satzes wurden bereits früher bewiesen.

Satz 2.6.1. Es sei $\varphi \in E[a, b]$ und (Z_r) eine Folge von Zerlegungen des Intervalle $[a, b]$ mit

$$\lim_{r\to\infty} d(Z_r) = 0 \tag{2.6.9}$$

Dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{r\to\infty} S(Z_r) = \lim_{r\to\infty} \underline{S}(Z_r) = \lim_{r\to\infty} \overline{S}(Z_r) \tag{2.6.10}$$

wobei die Zwischenpunkte zur Bildung von $S(Z_r)$ beliebig gewählt werden können. Speziell ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \tag{2.6.11}$$

Beweis. Zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε wählen wir Funktionen $f, g \in E_0[a, b]$ mit

$$f \le \varphi \le g \qquad , \qquad J(g-f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6.12,2.6.13}$$

Ferner bestimmen wir gemäß Satz 1.1.4 zur Zackenfunktion f bzw. g eine nichtnegative reelle Zahl M_1 bzw. M_2 mit

$$|f(x) - f(x')| \leq M_1|x - x'| \qquad \text{bzw.} \qquad |g(x) - g(x')| \leq M_2|x - x'|$$

für alle $x, x' \in [a, b]$. Mit M bezeichnen wir das Maximum der beiden Zahlen M_1, M_2. Es sei (2.6.1) eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir greifen ein festes Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ heraus. Für $\xi_k, x \in [x_{k-1}, x_k]$ ist $\varphi(\xi_k) \leq g(\xi_k)$ und $f(x) \leq \varphi(x)$, also

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_k) - \varphi(x) &\leq g(\xi_k) - f(x) = g(x) - f(x) + g(\xi_k) - g(x) \\ &\leq g(x) - f(x) + |g(\xi_k) - g(x)| \leq g(x) - f(x) + M|\xi_k - x| \\ &\leq g(x) - f(x) + M(x_k - x_{k-1}) \leq g(x) - f(x) + Md(Z)\end{aligned}$$

Mit Folgerung 2.2.1 und Satz 2.2.3 erhalten wir

$$\varphi(\xi_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)dx \leq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [g(x) - f(x)]dx + Md(Z) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx$$

bzw.

$$\varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)dx \leq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [g(x) - f(x)]dx + Md(Z)(x_k - x_{k-1})$$

Summation über k von 1 bis n ergibt, wenn wir (2.6.7) und Satz 2.3.1 berücksichtigen,

$$S(Z) - J(\varphi) \leq J(g - f) + Md(Z)(b - a)$$

Mit (2.6.13) folgt

$$S(Z) - J(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + Md(Z)(b - a) \tag{2.6.14}$$

Für $x, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ist andererseits

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(\xi_k) &\leq g(x) - f(\xi_k) = g(x) - f(x) + f(x) - f(\xi_k) \\ &\leq g(x) - f(x) + |f(x) - f(\xi_k)| \leq g(x) - f(x) + Md(Z)\end{aligned}$$

Analog wie oben gilt dann

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)dx - \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [g(x) - f(x)|dx - Md(Z)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{bzw.}$$

$$J(\varphi) - S(Z) \leq J(g - f) + Md(Z)(b - a)$$

$$J(\varphi) - S(Z) \leq \frac{\varepsilon}{2} + Md(Z)(b - a) \tag{2.6.15}$$

Eine Zusammenfassung von (2.6.14) und (2.6.15) ergibt

$$|J(\varphi) - S(Z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + Md(Z)(b - a)$$

Da Z beliebig gewählt war, ist auch

$$|J(\varphi) - S(Z_r)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + Md(Z_r)(b-a)$$

Wegen (2.6.9) gibt es ein r_0 mit

$$Md(Z_r)(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $r \geq r_0$. Dann ist

$$|J(\varphi) - S(Z_r)| < \varepsilon$$

für $r \geq r_0$, und hieraus folgt die erste Behauptung (2.6.10). Die Zwischenpunkte können so gewählt werden, dass

$$0 \leq S(Z_r) - \underline{S}(Z_r) < \frac{1}{r} \qquad \text{bzw.} \qquad 0 \leq \overline{S}(Z_r) - S(Z_r) < \frac{1}{r} \tag{2.6.16}$$

ist. Daher haben auch die Folgen $(\underline{S}(Z_r))$ und $(\overline{S}(Z_r))$ den Grenzwert $J(\varphi)$.

Wählen wir speziell die äquidistante Zerlegung Z_n und als Zwischenpunkte ξ_k jeweils die rechten Endpunkte der Intervalle, so nimmt (2.6.7) die spezielle Form

$$S(Z_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

an. Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt (2.6.11), und der Satz ist bewiesen.

Satz 2.6.2. Für jede Funktion $\varphi \in E[a,b]$ ist der Mittelwert

$$M_a^b(\varphi) := \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x)dx \tag{2.6.17}$$

gleich dem Grenzwert der Folge der n-ten Mittelwerte

$$M_n(\varphi) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \tag{2.6.18}$$

(Abb. 2.6.2), d.h., es ist

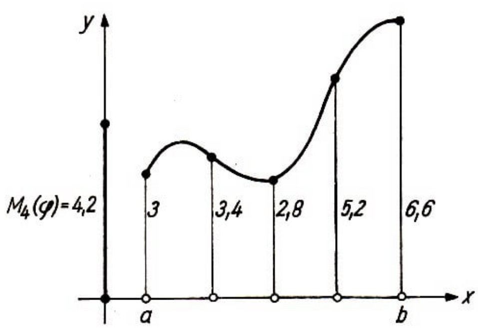


Abb. 2.6.2

$$\int_a^b \varphi(x)dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} M_n(\varphi) \tag{2.6.19}$$

Beweis. Zu (2.6.11) addieren wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\varphi(a) = 0$$

und erhalten

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} M_n(\varphi)$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{2.6.20}$$

ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\varphi) = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)dx \tag{2.6.21}$$

und das ist mit der Behauptung äquivalent.

Die Untersumme bzw. Obersumme einer auf $[a,b]$ definierten beschränkten reellen Funktion φ auf der Zerlegung (2.6.1) kann als Riemannsches Integral einer Treppenfunktion dargestellt werden. Setzen wir

$$I'_k := \begin{cases} [x_{k-1}, x_k) & \text{für} \quad k = 1, ..., n-1 \\ [x_{n-1}, x_n) & \text{für} \quad k = n \end{cases} \tag{2.6.22}$$

und

$$\underline{\tau} := \sum_{k=1}^{n} \underline{\varphi}(I_k)\chi_{I'_k} \qquad , \qquad \overline{\tau} := \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi}(I_k)\chi_{I'_k} \tag{2.6.23,2.6.24}$$

so ist

$$\underline{\tau} \leq \varphi \leq \overline{\tau} \tag{2.6.25}$$

und

$$J(\underline{\tau}) = \underline{S}(Z) \qquad , \qquad J(\overline{\tau}) = \overline{S}(Z) \tag{2.6.26}$$

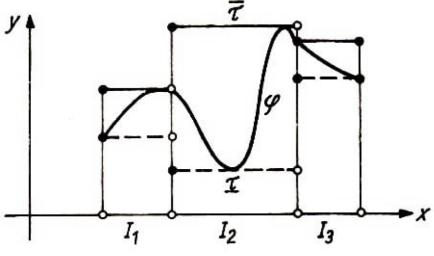


Abb. 2.6.3

Jetzt können wir verschiedene Möglichkeiten für die Charakterisierung des Systems der Riemann-integrierbaren Funktionen angeben.

Satz 2.6.3. Es sei φ eine auf $[a,b]$ definierte beschränkte reelle Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es ist $\varphi \in E[a,b]$, d.h., zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es Funktionen $f, g \in E_0[a,b]$ mit $f \leq \varphi \leq g$ und $J(g-f) < \varepsilon$.

b) Für jede Folge (Z_r) von Zerlegungen mit der Eigenschaft (2.6.9) ist die Folge $(S(Z_r))$ bei beliebiger Wahl der zu Z, gehörenden Zwischenpunkte konvergent.

c) Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine Zerlegung Z mit

$$\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon \tag{2.6.27}$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\varphi \in E[a,b]$ und (Z_r) eine Folge von Zerlegungen mit (2.6.9). Auf Grund von Satz 2.6.1 ist die Folge $(S(Z_r))$ konvergent, da sie gegen $J(\varphi)$ strebt. Somit gilt b).

b) $\Rightarrow$ c): Für jede Folge (Z_r) von Zerlegungen mit (2.6.9) sei die Folge $(S(Z_r))$ konvergent. Wir können dann zwei spezielle Folgen $(S'(Z_r))$ und $(S''(Z_r))$ mit

$$0 \leq S'(Z_r) - \underline{S}(z_r) < \frac{1}{r} \qquad , \qquad 0 \leq \overline{S}(z_r) - S''(Z_r) < \frac{1}{r} \tag{2.6.28}$$

wählen, da $\underline{S}(Z_r)$ bzw. $\overline{S}(Z_r)$ die größte untere.bzw. kleinste obere Schranke aller Zwischensummen auf der Zerlegung Z' ist. Die Folge

$$Z_1, Z_1, Z_2, Z_2, ...$$

genügt ebenfalls der Bedingung (2.6.9), und gemäß Voraussetzung ist die Folge

$$S'(Z_1), S''(Z_1), S_(Z_1), S''(Z_2), ...$$

konvergent. Die beiden Teilfolgen $(S'(Z_r))$ und $(S''(Z_r))$ dieser Folge haben demnach denselben Grenzwert S. Wegen (2.6.28) haben dann auch die Folgen $(\underline{S}(Z_r))$ und $(\overline{S}(Z_r))$ den Grenzwert S, und es ist

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(Z_r) - \underline{S}(Z_r)) = S - S = 0$$

Zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε gibt es dann aber ein r mit

$$\overline{S}(z_r) - \underline{S}(Z_r) < \varepsilon$$

Somit gilt c).

c) $\Rightarrow$ a): Zu jeder positiven reellen Zahl ε gebe es eine Zerlegung (2.6.1) mit der Eigenschaft (2.6.27). Für die durch (2.6.23), (2.6.24) definierten Funktionen gelten dann die Beziehungen (2.6.25) und

$$J(\overline{\tau} - \underline{\tau}) = J(\overline{\tau}) - J(\underline{\tau}) = \overline{S}Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon \tag{2.6.29}$$

Sie besagen auf Grund von Satz 2.2.5, dass $\varphi \in E[a,b]$ ist. Somit gilt a).
Damit ist der Satz bewiesen.

Die ursprüngliche Definition der Integrierbarkeit von Bernhard Riemann entspricht der Aussage b). Die Eigenschaft c) wird gewöhnlich das Riemannsche Integrabilitätskriterium genannt.
Das Riemannsche Integral einer Funktion $\varphi \in E[a,b]$ kann auch wie folgt definiert werden.

Satz 2.6.4. Das Riemannsche Integral einer Funktion $\varphi \in E[a,b]$ ist die kleinste obere Schranke der Menge aller Untersummen und die größte untere Schranke der Menge aller Obersummen von φ.

Beweis. Aus (2.6.25) folgt durch Integration und Berücksichtigung von (2.6.26) die Beziehung

$$\underline{S}(Z) = J(\underline{\tau}) \leq J(\varphi) \leq J(\overline{\tau}) = \overline{S}(Z) \tag{2.6.30}$$

wobei Z eine beliebige Zerlegung ist. Somit ist $J(\varphi)$ eine obere bzw. untere Schranke für die Menge aller Unter- bzw. Obersummen von φ. Wegen (2.6.30) ist ferner

$$J(\varphi) - \underline{S}(Z) \leq \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) \qquad \text{und} \qquad \overline{S}(Z) - J(\varphi) \leq \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z)$$
(2.6.31,2.6.32)

Zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl ε wählen wir eine Zerlegung Z mit (2.6.27). Wegen (2.6.31) und (2.6.82) gilt dann

$$J(\varphi) - \varepsilon < \underline{S}(Z) \qquad , \qquad \overline{S}(Z) < J(\varphi) + \varepsilon$$

Die reelle Zahl $J(\varphi) - \varepsilon$ bzw. $J(\varphi) + \varepsilon$ ist also keine obere bzw. keine untere Schranke für die Menge aller Untersummen bzw. Obersummen von φ, d.h., $J(\varphi)$ ist die kleinste obere Schranke der Menge aller Untersummen und die größte untere Schranke der Menge aller Obersummen von φ, womit der Satz bewiesen ist.

Als Anwendung des Riemannschen Integrabilitätskriteriums beweisen wir die Integrierbarkeit für eine weitere wichtige Klasse von Funktionen und beweisen mit seiner Hilfe, dass es beschränkte reelle Funktionen gibt, die nicht Riemann-integrierbar sind.

Eine auf $[a,b]$ definierte Funktion heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend bzw. streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend genau dann, wenn aus $x_1, x_2 \in [a,b]$ und $x_1 < x_2$ stets

$$\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x_1) < \varphi(x_2) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$$

folgt (Abb. 2.6.4). Eine monotone Funktion braucht also nicht stetig zu sein.

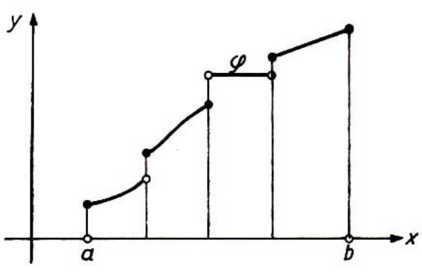


Abb. 2.6.4

Satz 2.6.5. Jede auf $[a, b]$ monotone reelle Funktion φ ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis: Die Funktion φ sei etwa monoton wachsend. Für jedes Teilintervall einer Zerlegung (2.6.1) gilt dann $\varphi(x_{k-1}) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_k)$ für $x_{k-1} \leq x \leq x_k$, d.h., es ist

$$\varphi(x_{k-1}) = \underline{\varphi}(I_k) \qquad , \qquad \varphi(x_k) = \overline{\varphi}(I_k)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) &= \sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}) \\ &\leq d(Z) \sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] = d(Z)[\varphi(b) - \varphi(a)] \end{aligned}$$

Die rechte Seite lässt sich für eine hinreichend feine Zerlegung beliebig klein machen, und der Satz ist damit bewiesen.

Ist φ monoton fallend, so ist $-\varphi$ monoton wachsend und demnach auch $\varphi \in E[a, b]$.

Beispiel 2.6.1. Die durch

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \text{ rationale Zahl,} \\ 0 & \text{für} \quad x \text{ irrationale Zahl} \end{cases}$$

definierte reelle Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ heißt Dirichletsche Funktion. Mit Hilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums beweisen wir, dass die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ über $[0, 1]$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Beweis. Dazu zeigen wir, dass für jede Zerlegung Z von $[0, 1]$ die Ungleichung

$$\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) \geq 1 \tag{2.6.33}$$

gilt. Da für jedes Teilintervall I_k von $[0, 1]$ stets $\underline{\varphi}(I_k) = 0$ und $\overline{\varphi}(I_k) = 1$ ist, erhalten wir

$$\underline{S}(Z) = 0 \qquad , \qquad \overline{S}(Z) = x_n - x_0 = 1$$

Hieraus folgt die Gültigkeit von (2.6.33) für jede Zerlegung Z von $[0, 1]$.

Dieses Beispiel zeigt, dass es relativ einfache beschränkte reelle Funktionen gibt, die nicht Riemann-integrierbar sind. Daher wurde von Henri Lebesque eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integralbegriffs eingeführt.
Der Lebesguesche Integralbegriff ist zwar komplizierter als der Riemannsche Integralbegriff, hat aber den großen Vorteil, dass das System der integrierbaren Funktionen umfassender ist als das System der Riemann-integrierbaren Funktionen.

3 Abstrakte Definition des Riemannschen Integrals

3.1 Positive lineare Funktionale

Wir verallgemeinern einige der in den Kapiteln 1 und 2 eingeführten Begriffsbildungen. Wir betrachten reellwertige Funktionen f, die alle auf einer festen Grundmenge X definiert sind. Dies drücken wir durch die Schreibweise

$$f : X \to \mathbb{R} \tag{3.1.1}$$

aus. Bisher war X stets ein Intervall $[a, b]$. Jetzt wollen wir auch allgemeinere Grundmengen, z.B. die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen oder die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ aller Punkte (x, y) der Zahlenebene zulassen.

Definition 3.1.1. Eine Menge E von reellwertigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ heißt ein linearer Funktionenraum genau dann, wenn mit $f, g \in E$ und jeder reellen Zahl λ auch $\lambda f,\ f + g \in E$ ist.

So sind die Mengen $E_0[a, b]$, $C[a, b]$ und $E[a, b]$ Beispiele für lineare Funktionenräume.

Definition 3.1.2. Ein linearer Funktionenraum E heißt ein linearer Verband genau dann, wenn aus $f \in E$ stets $|f| \in E$ folgt.

Die Mengen $E_0[a, b]$, $C[a, b]$ und $E[a, b]$ sind sogar lineare Verbände.

Definition 3.1.3. Ein linearer Funktionenraum E heißt eine Funktionenalgebra genau dann, wenn aus $f, g \in E$ stets $fg \in E$ folgt. Ist außerdem $|f| \in E$ für alle $f \in E$, so heißt E eine Verbandsalgebra.

So sind beispielsweise $C[a, b]$ und $E[a, b]$ Verbandsalgebren. Dagegen ist $E_0[a, b]$ keine Funktionenalgebra, weil das Produkt zweier nichtkonstanter Zackenfunktionen keine Zackenfunktion ist.

In Abschnitt 1.2 hatten wir festgestellt, dass J_0 ein Funktional ist, das jeder Funktion $f \in E_0[a, b]$ die reelle Zahl $J_0(f)$ zuordnet. Analog zu (3.1.1) schreiben wir

$$J_0 : E_0[a, b] \to \mathbb{R} \tag{3.1.2}$$

Definition 3.1.4. Es sei E ein linearer Funktionenraum. Ein Funktional

$$J : E \to \mathbb{R}$$

heißt ein positives lineares Funktional auf E genau dann, wenn für alle Funktionen $f, g \in E$ und für alle reellen Zahlen λ die Relationen

$$J(\lambda f) = \lambda J(f) \tag{3.1.3}$$
$$J(f + g) = J(f) + J(g) \tag{3.1.4}$$
$$J(f) \geq 0, \quad \text{falls } f \geq o \text{ ist} \tag{3.1.5}$$

erfüllt sind.

In Abschnitt 1.2 bzw. 2.2 haben wir bewiesen, dass (3.1.2) bzw.

$$J : E[a,b] \to \mathbb{R} \tag{3.1.6}$$

positive lineare Funktionale sind.

Unter den Sätzen der Riemannschen Integrationstheorie, wie sie bisher entwickelt wurde, gibt es solche, in denen die speziellen Eigenschaften der auftretenden Funktionen eine wesentliche Rolle spielen. Solche Sätze findet man z.B. vorwiegend in den Abschnitten 2.3 bis 2.6.
Daneben gibt es aber andere, in denen im wesentlichen nur die Tatsache bedeutungsvoll ist, dass J_0 bzw. J positive lineare Funktionale sind. Hierzu gehören u.a. Sätze aus den Abschnitten 2.1 and 2.2. Solche Sätze wollen wir im folgenden abstrakt formulieren und zur Unterscheidung "Theoreme" nennen.
Die bisherigen Beweise wurden bereits so angelegt, dass sie sich ohne Schwierigkeiten auf den allgemeinen Fall übertragen lassen. Die folgenden beiden Theoreme sind einfache Beispiele für diesen Sachverhalt.

Theorem 3.1.1. Ist J ein positives lineares Funktional auf dem linearen Funktionenraum E, so folgt aus $f, g \in E$ und $f \leq g$ stets $J(f) \leq J(g)$.

Beweis. Vgl. den Beweis von Folgerung 1.2.1.

Theorem 3.1.2. Ist J ein positives lineares Funktional auf einem linearen Verband E, so ist für alle $f \in E$ stets $|J(f)| \leq J(|f|)$.

Beweis. Vgl. den Beweis von Folgerung 1.2.2.

Definition 3.1.5. Ein Funktional $J : E \to \mathbb{R}$ heißt eine Fortsetzung eines Funktionale $J_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn $E_0 \subseteq E$ ist und für $f \in E_0$ stets $J_0(f) = J(f)$ gilt.

Mit Satz 2.1.3 wurde gezeigt, dass das Funktional (3.1.6) eine Fortsetzung des Funktionale (3.1.2) ist.

3.2 Riemannsche Fortsetzung eines positiven linearen Funktionals

Wir gehen von einem festen positiven linearen Funktional J_0 auf einem linearen Funktionenraum E_0 von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ aus, ohne dass wir diese Voraussetzung in den folgenden Definitionen und Theoremen nochmals erwähnen.

Definition 3.2.1. Eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar bezüglich J_0 genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε Funktionen $f, g \in E$, mit den beiden Eigenschaften

$$f \leq \varphi \leq g \qquad \text{und} \qquad J_0(g - f) < \varepsilon \tag{3.2.1,3.2.2}$$

gibt.
Die Menge aller bezüglich J_0 Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit E oder auch mit $R(J_0)$. Ist beispielsweise $E_0 = E_0[a,b]$ und J_0 das durch (1.2.7)

definierte positive lineare Funktional, so ist

$$R(J_0) = E[a,b]$$

Definition 3.2.2. Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E_0$ heißt eine Riemannsche Näherungsfolge einer Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ bezüglich J_0 genau dann, wenn es eine Funktionenfolge (h_n) mit $h_n \in E_0$ und mit den beiden Eigenschaften

$$|\varphi - f_n| \leq h_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} J_0(h_n) = 0 \tag{3.2.3,3.2.4}$$

gibt.

Theorem 3.2.1. Es ist $\varphi \in R(J_0)$ genau dann, wenn φ eine Riemannsche Näherungsfolge bezüglich J_0 besitzt.

Beweis. Vgl. den Beweis von Satz 2.1.1. Wiederum gibt es zu $\varphi \in R(J_0)$ Riemannsche Näherungsfolgen $(f_n), (g_n)$ mit $f_n \leq \varphi$ bzw. $\varphi \leq g_n$.

Theorem 3.2.2. Zu jeder Funktion $\varphi \in R(J_0)$ gibt es genau eine reelle Zahl $J(\varphi)$ mit

$$J_0(f) \leq J(\varphi) \leq J_0(g) \tag{3.2.5}$$

für alle $f, g \in E_0$ mit $f \leq \varphi \leq g$, und für jede Riemannsche Näherungsfolge (f_n) von φ ist

$$J(\varphi) = \lim_{n\to\infty} J_0(f_n) \tag{3.2.6}$$

Beweis. Vgl. den Beweis von Satz 2.1.2.

Auf Grund von Theorem 3.2.2 wird jeder Funktion $\varphi \in R(J_0)$ eine reelle Zahl $J(\varphi)$ zugeordnet, d.h., es wird ein Funktional $J : R(J_0) \to \mathbb{R}$ definiert.

Theorem 3.2.3. Das Funktional $J : R(J_0) \to \mathbb{R}$ ist eine Fortsetzung von J_0, d. h., es ist

$$E_0 \subseteq R(J_0) \qquad \text{und} \qquad J(f) = J_0(f) \tag{3.2.7,3.2.8}$$

für alle $f \in E_0$.

Beweis. Vgl. den Beweis von Satz 2.1.3.

Theorem 3.2.4. Die Menge $R(J_0)$ ist ein linearer Funktionenraum, und J ist ein positives lineares Funktional auf $R(J_0)$.

Beweis. Vgl. die Beweise der Sätze 2.2.1 und 2.2.3.

Definition 3.2.3. Das positive lineare Funktional $J : R(J_0) \to \mathbb{R}$ heißt die Riemannsche Fortsetzung des positiven linearen Funktionale $J_0 : E_0 \to \mathbb{R}$.

Da die Riemannsche Fortsetzung auf Grund von Theorem 3.2.4 wieder ein positives lineares Funktional ist, können wir den Erweiterungsprozess wiederholen, indem wir E_0, J_0 durch E, J ersetzen. Dies führt aber zu keinen neuen Funktionen, denn es gilt

Theorem 3.2.5 Es ist $R(J_0) = R(J)$.

Beweis. Entsprechend (3.2.7) gilt zunächst $E \subseteq R(J)$. Wir beweisen die umgekehrte Inklusion.
Es sei $\varphi \in R(J)$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε Funktionen $\varphi', \varphi'' \in E$ mit

$$\varphi' \leq \varphi \leq \varphi'' \qquad \text{und} \qquad J(\varphi'' - \varphi') < \varepsilon$$

Wie im Beweis von Satz 2.2.5 folgt hieraus $\varphi \in E$, und folglich ist $R(J) \subseteq E$. Damit ist das Theorem bewiesen.

Auf Grund von Theorem 3.2.1 liegt eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ in $E = R(J)$ genau dann, wenn φ eine Riemannsche Näherungsfolge bezüglich J besitzt, d.h., wenn es Funktionenfolgen (φ_n), (ψ_n) mit $\varphi_n, \psi_n \in E$ und

$$|\varphi - \varphi_n| \leq \psi_n \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} J(\psi_n) = 0$$

gibt.
Wie Theorem 3.2.5 zeigt, gibt es positive lineare Funktionale, für die der Riemannsche Fortsetzungsprozess zu keiner echten Erweiterung des Funktionensystems führt.

Definition 3.2.4. Ein positives lineares Funktional J auf einem Funktionenraum E heißt ein Riemannsches Integral genau dann, wenn $E = R(J)$ ist.

Die Riemannsche Fortsetzung J eines jeden positiven linearen Funktionals J_0 ist also ein Riemannsches Integral im Sinne von Definition 3.2.4.

Wir leiten nun Kriterien dafür her, dass für alle Riemann-integrierbaren Funktionen φ, ψ auch jeweils die Funktion $|\varphi|$ bzw. $\varphi\psi$ Riemann-integrierbar ist, d.h., dass E sogar ein linearer Verband bzw. eine Funktionenalgebra ist.

Theorem 3.2.6. Ist die Funktion $|f|$ für jede Funktion $f \in E_0$ bezüglich J_0 Riemann-integrierbar, so ist $E = R(J_0)$ ein linearer Verband.

Beweis. Es sei $\varphi \in E$. Nach Theorem 3.2.1 gibt es Funktionenfolgen (f_n), (h_n) mit $f_n, h_n \in E_0$ und mit (3.2.3) und (3.2.4). Auf Grund der Voraussetzung ist $|f_n| \in E$, und wegen

$$||\varphi| - |f_n|| \leq |\varphi - f_n| \leq h_n$$

und (3.2.4) ist $(|f_n|)$ damit eine Riemannsche Näherungsfolge von $|\varphi|$ bezüglich J. Somit ist $|\varphi| \in R(J_0) = E$, und E ist ein linearer Verband.

Theorem 3.2.7. Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:
a) Alle Funktionen $f \in E_0$ sind beschränkt.
b) Für alle Funktionen $f \in E0$ ist $f^2 \in E = R(J_0)$.

Dann sind alle Funktionen $\varphi \in E$ beschränkt, und E ist eine Funktionenalgebra.
Die Menge E ist sogar eine Verbandsalgebra, wenn außerdem noch folgende Bedingung erfüllt ist:
c) Zu jeder Funktion $f \in E_0$ gibt es eine Funktion $g \in E_0$ mit $g \geq o$ und $|f| \leq g^2$.

Beweis. Wegen (3.2.1) und a) sind alle Funktionen $\varphi \in E$ beschränkt. Auf Grund von a), b) kann der Beweis von Satz 2.2.8 übernommen werden. Aus $\varphi, \psi \in E$ folgt somit $\varphi\psi \in E$, und E ist eine Algebra.

Es sei jetzt zusätzlich die Voraussetzung c) erfüllt. Zu $f \in E_0$ wählen wir eine positive reelle Zahl K mit $|f| \leq K$. Durch

$$\varphi_0 := o \qquad , \qquad \varphi_{n+1} := \varphi_n + \frac{f^2 - \varphi_n^2}{2K} \tag{3.2.9}$$

definieren wir induktiv eine Funktionenfolge (φ_n). Da E eine Funktionenalgebra ist, gilt stets $\varphi_n \in E$. Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion, dass stets

$$o \leq \varphi_n \leq |f_n| \tag{3.2.10}$$

ist. Für $n = 0$ ist (3.2.10) offensichtlich erfüllt. Die Induktionsvoraussetzung (3.2.10) sei für eine beliebige natürliche Zahl n erfüllt. Dann folgt

$$K - \varphi_n \geq K - |f| \geq o$$

und damit

$$K^2 - 2K\varphi_n + \varphi_n^2 = (K - \varphi_n)^2 \geq (K - |f|)^2 = K^2 - 2K|f| + f^2$$

bzw.

$$2K|f| \geq 2K\varphi_n + f^2 - \varphi_n^2 \qquad \text{bzw.} \qquad |f| \geq \varphi_n + \frac{f^2 - \varphi_n^2}{2K} = \varphi_{n+1} \tag{3.2.11}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung (3.2.10) folgt andererseits $\varphi_n^2 \leq f2$, also

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{f^2 - \varphi_n^2}{2K} \geq o \qquad \text{bzw.} \qquad o \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \tag{3.2.12}$$

In Verbindung mit (3.2.11) ergibt sich die Induktionsbehauptung

$$o \leq \varphi_{n+1} \leq |f|$$

Damit gilt (3.2.10) für alle natürlichen Zahlen n. Aus (3.2.10) haben wir aber (3.2.12) gefolgert. Somit ist auch (3.2.12) für alle natürlichen Zahlen n erfüllt.

Nun bestimmen wir entsprechend Voraussetzung c) eine Funktion $g \in E_0$ mit $g \geq o$ und $|f| \leq g^2$. Mit (3.2.10) und (3.2.9) ergibt sich

$$g^2 \geq |f| \geq \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_0 = \sum_{k=0}^{n} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^2 - \varphi_k^2}{2K}$$

Wegen (3.2.12) ist $\varphi_k^2 \leq \varphi_n^2$, also $f^2 - \varphi_k^2 \geq f^2 - \varphi_n^2$ für $k = 0, ..., n$ und damit

$$g^2 \geq (n+1)\frac{f^2 - \varphi_n^2}{2K}$$

Unter Berücksichtigung von (3.2.10) folgt hieraus

$$\frac{2K}{n+1}g^2 \geq f^2 - \varphi_n^2 = |f|^2 - \varphi_n^2 = (|f| - \varphi_n)(|f| + \varphi_n)$$
$$\geq (|f| - \varphi_n)(|f| - \varphi_n) = (|f| - \varphi_n)^2$$

d.h., es ist

$$||f| - \varphi_n| \leq \sqrt{\frac{2K}{n+1}}g$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} J\left(\sqrt{\frac{2K}{n+1}}g\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2K}{n+1}}J(g) = 0$$

Damit ist (φ_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von $|f|$ bezüglich J. Für jede Funktion $f \in E_0$, ist also $|f| \in E$, und nach Theorem 3.2.6 ist E ein linearer Verband.

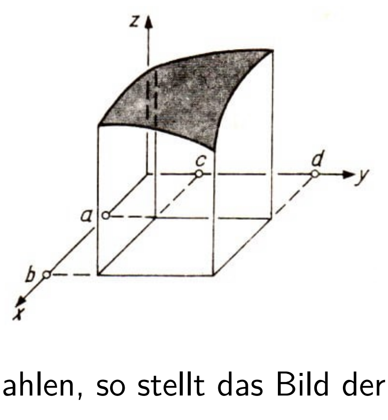
3.3 Zweidimensionale Riemannsche Integrale

In den beiden folgenden Abschnitten wählen wir einen festen Rechtecksbereich

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq y \leq d\} \tag{3.3.1}$$

der Zahlenebene und betrachteten reellwertige Funktionen von zwei Variablen, deren Definitionsbereich die Menge D ist.
Eine solche Funktion f ordnet jedem Punkt (x, y) der Zahlenebene mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ eine reelle Zahl $z = f(x, y)$ zu. Tragen wir den Funktionswert $f(x, y)$ in Richtung der z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems an, so erhalten wir das Bild der Funktion.

In den wichtigsten Fällen stellt es eine Fläche dar, deren Projektion in die x, y-Ebene der Definitionsbereich D ist (Abb. 3.3.1).



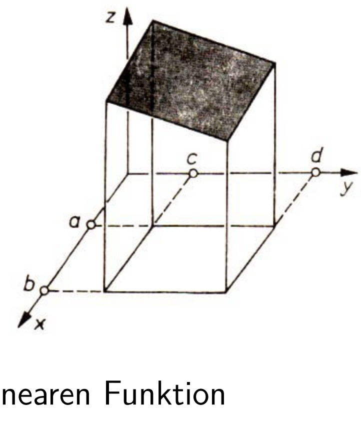


Abb. 3.3.1, 3.3.2

Sind α, β, γ feste reelle Zahlen, so stellt das Bild der linearen Funktion

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \tag{3.3.2}$$

mit $(x, y) \in D$ einen Ausschnitt aus einer Ebene der (Abb. 3.3.2).

Es sei I bzw. I' ein in $[a,b]$ bzw. $[c,d]$ enthaltenes Intervall und λ eine reelle Zahl. Für die Funktion

$$f(x,y) = \lambda \chi_I(x) \chi_{I'}(y) \tag{3.3.3}$$

gilt $f(x,y) = \lambda$, wenn $x \in I$ und $y \in I'$, also $(x,y) \in I \times I'$ ist.
In allen anderen Fällen ist $f(x,y) = 0$ (Abb. 3.3.3). Das Bild der durch (3.3.3) auf D definierten Funktion f ist in Abb. 3.3.3 veranschaulicht.

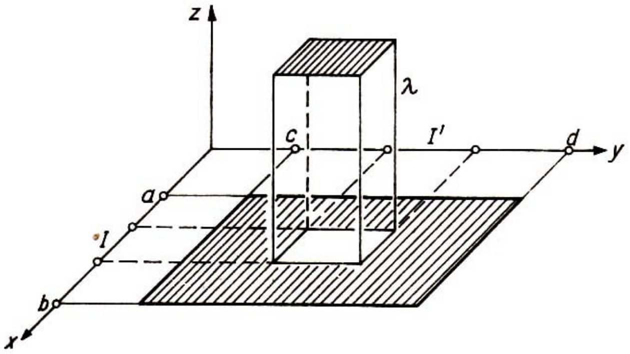


Abb. 3.3.3

Es sei f eine beliebige auf D definierte reellwertige Funktion. Wenn wir in der Funktionsgleichung $z = f(x,y)$ die Variable y festhalten, ergibt sich eine auf dem Intervall $[a,b]$ definierte reelle Funktion. Falls diese Funktion für jedes feste y mit $c \leq y \leq d$ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, können wir durch

$$f^*(y) := \int_a^b f(x,y)dx \qquad (c \leq y \leq d)$$

eine neue Funktion f^* definieren, deren Definitionsbereich das Intervall $[c,d]$ ist. Wenn auch f^* über $[c,d]$ Riemann-integierbar ist, so existiert das Doppelintegral

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy := \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

in der Reihenfolge dx, dy. Analog wird das Doppelintegral in der Reihenfolge dy, dx definiert, falls es existiert.

Beispiel 3.3.1. Es sei

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 1 \leq y \leq 4\} \qquad \text{und} \qquad f(x-y) = 5 - x - y$$

Für jedes feste y mit $1 \leq y \leq 4$ ist $f \in E_0[0,2]$, also ist f über $[0,2]$ Riemann-integrierbar. Wir erhalten

$$f^*(y) = \int_0^2 (5-x-y)dx = \left[5x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 8 - 2y$$

Wegen $f^* \in E_0[1,4]$ ist f^* auch über $[1,4]$ Riemann-integrierbar. Demnach existiert das Doppelintegral in der Reihenfolge dx, dy und es folgt

$$\int_1^4 \int_0^2 (5-x-y)dxdy = \int_1^4 (8-2y)dy = [8y - y^2]_{y=1}^{y=4} = 9$$

Analog ist für jedes feste x mit $0 \le x \le 2$ auch $f \in E_0[1,4]$, und es gilt

$$\tilde{f}(x) = \int_1^4 (5-x-y)dy = \left[5y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=4} = \frac{15}{2} - 3x$$

Da $\tilde{f} \in E_0[0,2]$ ist, existiert auch das Doppelintegral in der Reihenfolge dy, dx, und wir erhalten

$$\int_0^2 \int_1^4 (5-x-y)dydx = \int_0^2 \left(\frac{15}{2} - 3x\right) dx = \left[\frac{15}{2}x - \frac{3}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=2} = 9$$

Sind f, g zwei reellwertige Funktionen von zwei Variablen, deren Doppelintegrale in der Reihenfolge dx, dy existieren, und ist λ eine reelle Zahl, so gilt

$$\lambda \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\lambda \int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b \lambda f(x,y)dxdy \tag{3.3.4}$$

und

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy + \int_c^d \int_a^b g(x,y)dxdy &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx + \int_a^b g(x,y)dx\right] dy \\ &= \int_c^d \int_a^b [f(x,y) + g(x,y)]dxdy \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Die Beziehung (3.3.4) bzw. (3.3.5) besagt, dass auch das Doppelintegral in der Reihenfolge dx, dy für die Funktion λf bzw. $f+g$ existiert.

Analog zeigt man, dass ebenfalls das Doppelintegral in der Reihenfolge dy, dx für die Funktion λf bzw. $f+g$ existiert, falls für die beiden Funktionen f, g jeweils die Doppelintegrale in der Reihenfolge dy, dx existieren.

Kann f in der Form

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{3.3.6}$$

dargestellt werden, wobei f_1 bzw. f_2 über $[a,b]$ bzw. $[c,d]$ Riemann-integrierbar ist, so existieren offensichtlich die Doppelintegrale in beiden Reihenfolgen, und es ist

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \tag{3.3.7}$$

Da solche Funktionen im folgenden von Bedeutung sind, wollen wir sie zur Vereinfachung der Sprechweise Elementarfunktionen nennen. Wir stellen einige einfache Aussagen über Elementarfunktionen zusammen.
Jede Funktion, die auf D den konstanten Wert λ annimmt, ist eine Elementarfunktion, denn die obigen Forderungen sind mit $f_1(x) := \lambda$ und $f_2(y) := 1$ erfüllt. Setzen wir

$$f_1(x) := \lambda\chi_I(x) \qquad , \qquad f_2(y) := \chi_{I'}(y)$$

so erkennen wir, dass auch die Funktion (3.3.3) eine Elementarfunktion ist: Für sie gilt

$$\int_c^d \int_a^b \lambda \chi_I(x)\chi_{I'}(y)dxdy = \lambda \int_a^b \chi_I(x)dx \int_c^d \chi_{I'}(y)dy = \lambda m(I)m(I') \tag{3.3.8}$$

Das Integral ist das Produkt der Kantenlängen, also der mit Vorzeichen versehene Rauminhalt des in Abb. 3.3.3 dargestellten Quaders. Sind die drei Faktoren von null verschieden, so ist das Vorzeichen positiv oder negativ, je nachdem, ob der Quader ober- oder unterhalb der x, y-Ebene liegt.

Jede Elementarfunktion der Form (3.3.6) ist beschränkt, denn die Funktion f_1 bzw. f_2 besitzt eine Schranke K_1 bzw. K_2 und es folgt

$$|f(x, y)| = |f_1(x)| \cdot |f_2(y)| \leq K_1K_2$$

Das Produkt zweier Elementarfunktionen f, g der Form (3.3.6) und

$$g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$$

ist wieder eine Elementarfunktion, denn es ist $h_1 := f_1g_1 \in E[a, b]$, $h_2 := f_2g_2 \in E[c, d]$ und

$$f(x, y)g(x, y) = f_1(x)f_2(y)g_1(x)g_2(y) = h_1(x)h_2(y)$$

Mit $E_0(D)$ bezeichnen wir die Menge aller auf D definierten reellwertigen Funktionen, die sich als Summe von endlich vielen Elementarfunktionen darstellen lassen.

Satz 3.3.1. Das System $E_0(D)$ bildet eine Funktionenalgebra. Alle Funktionen $f \in E_0(D)$ sind beschränkt, und durch

$$J_0(f) := \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \tag{3.3.9}$$

wird ein positives lineares Funktional auf $E_0(D)$ definiert.

Beweis. Es sei $f, g \in E_0(D)$, und λ sei eine reelle Zahl. Dann gibt es Elementarfunktionen $f_1, ..., f_m$ und $g_1, ..., g_n$ mit

$$f = \sum_{j=1}^m f_j \qquad , \qquad g = \sum_{k=1}^n g_k$$

Als Summe von endlich vielen beschränkten Funktionen ist jede Funktion aus $E_0(D)$ beschränkt. Da die Doppelintegrale für alle Funktionen f_j, g_k existieren und übereinstimmen, gilt dasselbe wegen (3.3.5) für die Funktionen f und g.
Wir können daher $J_0(f)$ durch (3.3.9) definieren. Da alle Funktionen λf_j Elementarfunktionen sind, ist $\lambda f \in E_0(D)$, und aus (3.3.4) folgt

$$J_0(\lambda f) = \lambda J_0(f)$$

Wegen

$$f + g = \sum_{j=1}^{m} f_j + \sum_{k=1}^{n} g_k$$

ist $f + g \in E_0(D)$, und aus (3.3.5) folgt

$$J_0(f + g) = J_0\left(\sum_{j=1}^{m} f_j + \sum_{k=1}^{n} g_k\right) = \sum_{j=1}^{m} J_0(f_j) + \sum_{k=1}^{n} J_0(g_k) = J_0(f) + J_0(g)$$

Ist $f \geq o$, d.h., ist $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$. so folgt

$$\int_a^b f(x, y)dx \geq 0$$

und weiter

$$J_0(f) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy \geq 0$$

Somit ist $E_0(D)$ ein linearer Funktionenraum und J_0 ein positives lineares Funktional auf $E_0(D)$. Schließlich ist

$$fg = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f_j g_k$$

und da die Produkte $f_j g_k$ Elementarfunktionen sind, ist $fg \in E_0(D)$, d.h., $E_0(D)$ ist eine Funktionenalgebra. Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt erweisen sich die Vorzüge der in den Abschnitten 3.1 und 3.2 abstrakt entwickelten Theorie. Obwohl die Funktionen $f \in E_0(D)$ eine viel kompliziertere Struktur als die Funktionen $f \in E_0[a, b]$ haben, können wir sofort die Riemannsche Fortsetzung von J_0 bilden.

Wir bezeichnen sie wieder mit J und das System aller über D Riemann-integrierbaren Funktionen mit $E(D)$. Für das Integral einer Funktion $\varphi \in E(D)$ schreiben wir auch

$$\int_D \varphi(x, y)d(x, y) := J(\varphi) \tag{3.3.10}$$

Leider kann dieses Integral nicht für alle Funktionen $\varphi \in E(D)$ durch ein Doppelintegral berechnet werden. Nur für eine Teilmenge von $E(D)$ ist eine Berechnung nach der Formel

$$\int_D \varphi(x, y)d(x, y) = \int_c^d \int_a^b \varphi(x, y)dxdy \tag{3.3.11}$$

bzw.

$$\int_D \varphi(x, y)d(x, y) = \int_a^b \int_c^d \varphi(x, y)dydx \tag{3.3.12}$$

möglich. Jedoch für alle Funktionen $\varphi = f \in E_0(D)$ können wegen $J(f) = J_0(f)$ und (3.3.9) beide Formeln angewendet werden.

Beispiel 3.3.2. Es sei

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$$

und $\varphi(x,y) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)(1-\operatorname{sgn} y)$, wobei $\chi_{\mathbb{Q}}$ die in Beispiel 2.6.1 definierte Dirichletsche Funktion bedeutet.
Wir zeigen, dass die Funktion φ über D Riemann-integrierbar ist, und berechnen das Integral $\int\limits_D \varphi(x,y)d(x,y)$.
Offensichtlich ist

$$|\varphi(x,y)| \leq |\chi_{\mathbb{Q}}(x)| \cdot |1-\operatorname{sgn} y| \leq 1-\operatorname{sgn} y$$

für alle $(x,y) \in D$. Wir definieren auf D zwei Funktionenfolgen (f_n) und (h_n) durch

$$f_n(x,y) := 0 \qquad , \qquad h_n(x,y) := 1-\operatorname{sgn} y$$

Es ist $f_n, h_n \in E_0(D)$, und es gelten die beiden Beziehungen $|\varphi - f_n| \leq h_n$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} J_0(h_n) &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 (1-\operatorname{sgn} y)dy\right] dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \operatorname{sgn} y dy\right] dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (1-1)dx = 0\end{aligned}$$

die besagen, dass (f_n) eine Riemannsche Näherungsfolge von φ ist. Demnach ist die Funktion φ über D Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_D \varphi(x,y)d(x,y) = \lim_{n\to\infty} J_0(f_n) = 0$$

Dagegen kann dieses Integral nicht mit Hilfe des Doppelintegrals

$$\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x)(1-\operatorname{sgn} y)dx\right] dy = \int\limits_0^1 \left[(1-\operatorname{sgn} y)\int\limits_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x)dx\right] dy$$

berechnet werden, da die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$, wie in Beispiel 2.6.1 gezeigt worden ist, über $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar ist, also das Doppelintegral überhaupt nicht existiert.

Satz 3.3.2. Das System $E(D)$ aller über D Riemann-integrierbaren Funktionen φ bildet eine Verbandsalgebra, und alle Funktionen $\varphi \in E(D)$ sind beschränkt.

Beweis. Die Voraussetzungen a) und b) von Theorem 3.2.7 sind erfüllt, denn nach Satz 3.3.1 sind alle Funktionen $f \in E_0(D)$ beschränkt, und es ist $f^2 \in E_0(D) \subseteq E(D)$. Ist K eine Schranke von f, so ist die Funktion

$$g := \sqrt{K}$$

eine nichtnegative Funktion aus $E_0(D)$, und es ist $|f| \leq K = g^2$. Damit ist auch die Voraussetzung c) von Theorem 3.2.7 erfüllt, womit Satz 3.3.2 bewiesen ist.

Wir machen noch einige Bemerkungen zur geometrischen Deutung Riemannscher Integrale von reellwertigen Funktionen zweier Veränderlicher, wobei wir aber auf die Ausführung von Einzelheiten verzichten.

Unter einer zweidimensionalen Treppenfunktion f verstehen wir eine Summe von endlich vielen Funktionen des Typs (3.3.3). Man kann zeigen, dass jede solche Funktion in der Form

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{I_k}(x)\chi_{I'_k}(y) \tag{3.3.13}$$

mit paarweise disjunkten Rechtecksbereichen $I_k \times I'_k$ dargestellt werden kann. Ist stets $\lambda_k > 0$, so bilden die Lote vom Bild von f auf das Rechteck D einen oberhalb der x, y-Ebene liegenden Körper, der sich aus paarweise disjunkten Quadern zusammensetzt. Es ist

$$J(f) = J_0(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k m(I_k)m(I'_k) \tag{3.3.14}$$

d.h., das Integral der Funktion f ist das Volumen dieses Körpers. Es zeigt sich darüber hinaus, dass es in vollem Einklang mit unseren Kenntnissen über den Rauminhalt elementargeometrischer Körper steht, wenn wir für $\varphi \in E(D)$, $\varphi \geq o$ die Zahl $J(\varphi)$ als den Rauminhalt des Körpers

$$M := \{P(x,y,z) : (x,g) \in D \text{ und } 0 \leq z \leq \varphi(x,y)\}$$

bezeichnen.

Beispiel 3.3.3. Es sei

$$D = \{(z,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$$

und $\varphi(x,y) = 1 - x$. Offensichtlich ist $\varphi \in E(D)$, und es gilt

$$\int_D (1-x)d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (1-x)dxdy = \int_0^1 \left(\left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

Die reelle Zahl $\frac{1}{2}$ gibt den Rauminhalt des in Abb. 3.3.4 veranschaulichten Prismas an.

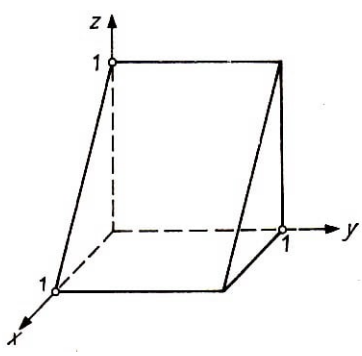


Abb. 3.3.4

Aufgabe 3.3.1. Es sei

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$$

und $\varphi(x,y) = 3 - x - y$. Man zeige, dass die Funktion φ über D Riemann-integrierbar ist, und berechne das Integral $\int\limits_D \varphi(x,y)d(x,y)$, das den Rauminhalt des in Abb. 3.3.5 veranschaulichten Körpers darstellt.

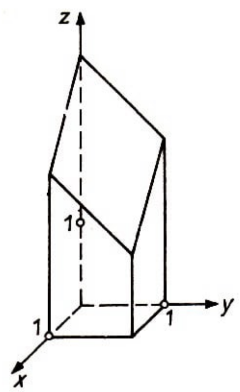


Abb. 3.3.5

Aufgabe 3.3.2. Es sei

$$D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2 \text{ und } -1 \leq y \leq 1\}$$

und $\varphi(x,y) = xe^{x+y}$. Man zeige, dass die Funktion φ über D Riemann-integrierbar ist, und berechne das Integral $\int\limits_D \varphi(x,y)d(x,y)$.

Aufgabe 3.3.3. Es sei

$$D = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

und $\varphi(x,y) = cos(x+y)$. Man zeige, dass die Funktion φ über D Riemann-integrierbar ist, und berechne das Integral $\int\limits_D \varphi(x,y)d(x,y)$.

3.4 Riemannscher Inhalt

Ist X eine beliebige Grundmenge, so definieren wir die charakteristische Funktion χ_A einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq X$ wie in (2.3.17) durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; x \in A \\ 0 & \text{für } \; x \in X \setminus A \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Es seien A, B Teilmengen von X. Dann gelten die Rechenregeln

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi B \tag{3.4.2}$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B \tag{3.4.3}$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B \tag{3.4.4}$$

Man überzeugt sich hiervon, indem man in den Fällen

$$x \in A, x \in B; \quad x \notin A, x \in B; \quad x \in A, x \notin B; \quad x \notin A, x \notin B$$

die Gleichheit der Funktionswerte auf beiden Seiten überprüft. Ferner gilt

$$\chi_A \leq \chi_{A_1} + ... + \chi_{A_n}, \quad \text{falls} \quad A \subseteq A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \tag{3.4.5}$$

ist, denn liegt x in einer der Mengen $A_1, ..., A_n$, so ist

$$\chi_{A_1}(x) + ... + \chi_{A_n}(x) \geq 1 \geq \chi_A(x)$$

Andernfalls nehmen beide Seiten den Wert null an.

Wählen wir als Grundmenge X die Menge $\mathbb{R}^2$, so müssen wir $\chi_A(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an Stelle von (3.4.1) schreiben. Sind A, B zwei Mengen reeller Zahlen, so ist

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und es gilt

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) \tag{3.4.6}$$

In der Tat ist die rechte Seite von (3.4.6) genau dann gleich 1, wenn $x \in A$ und $y \in B$, also $(x, y) \in A \times B$ ist. In allen anderen Fällen nehmen beide Seiten den Wert null an.

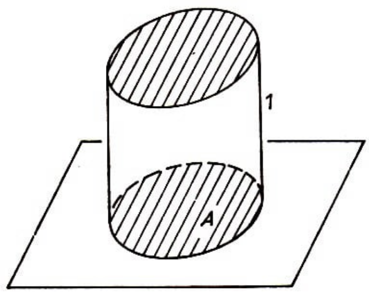


Abb. 3.4.1

Im folgenden betrachten wir nur Teilmengen A der Menge D in (3.3.1). Die Lote, die vom Bild der Funktion χ_A auf die x, y-Ebene gefällt werden, bilden einen zylindrischen Körper der Höhe 1 (Abb. 3.4.1).
Als sein Volumen hatten wir die Zahl $J(\chi_A)$ bezeichnet. Das Volumen eines zylindrischen Körpers ist bekanntlich gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche und der Höhe, in unserem Fall also - dem Zahlenwert nach - gleich dem Flächeninhalt der Grundfläche. Damit wird die folgende Definition verständlich.

Definition 3.4.1. Eine im Rechteck D enthaltene Punktmenge A heißt quadrierbar genau dann, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A über D Riemann-integrierbar ist. Die Zahl

$$\mu(A) := J(\chi_A) = \int_D \chi_A(x, y) d(x, y) \tag{3.4.7}$$

heißt der Riemannsche Inhalt der Menge A.

Beispiel 3.4.1. Es sei I bzw. I' ein in $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ enthaltenes Intervall und A das Rechteck $I \times I'$ (Abb. 3.3.3). Dann ist

$$\chi_A(x, y) = \chi_I(x)\chi_{I'}(y)$$

also $\chi_A \in E_0(D) \subseteq E(D)$. Folglich ist A quadrierbar, und es ist

$$\mu(A) = J(\chi_A) = J_0(\chi_A)$$

Mit (3.3.9) und (3.3.8) folgt

$$\mu(I \times I') = m(I)m(I') \tag{3.4.8}$$

d.h., der Riemannsche Inhalt des Rechtecks $I \times I'$ ist gleich seinem elementargeometrischen Inhalt. Entartet I oder I' zu einem Punkt, so entartet das Rechteck zu einer achsenparallelen Strecke, für die sich als "Flächeninhalt" null ergibt.

Satz 3.4.1. Die leere Menge ist quadrierbar, und es ist

$$\mu(\varnothing) = 0 \tag{3.4.9}$$

Sind die Mengen A, B quadrierbar, so sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B$ quadrierbar, und es gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{3.4.10}$$

Beweis. Die charakteristische Funktion der leeren Menge ist die Nullfunktion, deren Integral gleich null ist. Somit gilt (3.4.9). Sind A, B quadrierbar, so liegen χ_A, χ_B in der Funktionenalgebra $E(D)$. Die Formelzeilen (3.4.2), (3.4.3) und (3.4.4) zeigen, dass auch $\chi_{A\cap B}$, $\chi A \setminus B$ und $\chi_{A\cup B}$ in $E(D)$ liegen.
Damit sind $A \cap B$, $A \setminus B$ und $A \cup B$ quadrierbar. Setzen wir (3.4.2) in (3.4.4) ein, so ergibt sich

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$$

woraus

$$J(\chi_{A\cup B}) + J(\chi_{A\cap B}) = J(\chi_A) + J(\chi_B)$$

folgt. Dies ist mit (3.4.10) gleichbedeutend, und der Satz ist bewiesen.
Aus (3.4.10) können wichtige Schlüsse gezogen werden. Ist der Inhalt des Durchschnitts zweier quadrierbarer Mengen A, $B \subseteq D$ gleich null, so geht (3.4.10) in

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{3.4.11}$$

über. Speziell gilt diese Formel, wenn die Mengen A, B disjunkt sind.
Auf Grund dieser Eigenschaft sagt man, der Riemannsche Inhalt sei eine additive Mengenfunktion. Sind $A_1, ..., A_n \subseteq D$ paarweise disjunkte quadrierbare Mengen, so zeigt man durch vollständige Induktion, dass

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{3.4.12}$$

ist. Für zwei quadrierbare Mengen A, B sind offensichtlich die Mengen $A \cap B$ und $A \setminus B$ disjunkt, und ihre Vereinigungsmenge ist die Menge A

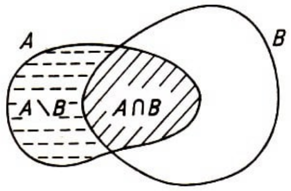


Abb. 3.4.2

(Abb. 3.4.2). Daher ist

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \tag{3.4.13}$$

Im Spezialfall $B \subseteq A$ ist $A \cap B = B$, also

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \mu(B)$$

Die Formel (3.4.10) ist jetzt plausibel, denn der Inhalt des Durchschnitts $A \cap B$ wird auf beiden Seiten der Formel doppelt gerechnet.

In (2.2.21) hatten wir für eine spezielle ebene Punktmenge M den Inhalt $\mu(M)$ anders definiert. Wir zeigen jetzt, dass beide Definitionen übereinstimmen.

Satz 3.4.2. Es sei $\varphi, \psi \in E[a,b]$, $c \leq \varphi \leq \psi \leq d$ und

$$M := \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x))\} \tag{3.4.14}$$

Dann ist

$$\mu(M) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx \tag{3.4.15}$$

Beweis. Für eine Zerlegung

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 < ..., < xn = b$$

definieren wir die Intervalle I'_k wie in (2.6.22) und bilden die achsenparallelen Rechtecke

$$R_k := \{(x,y) : x \in I'_k \text{ und } \underline{\varphi}(I_k) \leq y \leq \overline{\psi}(I_k)\}$$

(Abb. 3.4.3). Da die Intervalle I'_k paarweise disjunkt sind, gilt dasselbe für die Rechtecke R_k Die Vereinigungsmenge

$$R(Z) := \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

ist quadrierbar, und mit (3.4.12) und (3.4.8) erhalten wir

$$\mu(R(Z)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(R_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[\overline{\psi}(I_k) - \underline{\varphi}(I_k)]$$

d.h., es ist

$$\mu(R_Z)) = \overline{S}(Z,\psi) - \underline{S}(Z,\varphi)$$

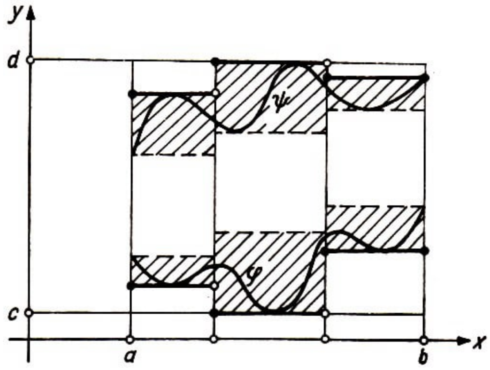


Abb. 3.4.3

Ist $(x,y) \in M$, so gibt es ein k mit $x \in I'_k$, und es ist

$$\underline{\varphi}(I_k) \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq \overline{\psi}(I_k) \qquad \text{also} \qquad (x,y) \in R_k \subseteq R(Z)$$

Somit ist $M \subseteq R(Z)$. Dieses Ergebnis kann auch direkt aus Abb. 3.4.3 abgelesen werden. Wegen (3.4.5) ist somit

$$o \leq \chi_M \leq \chi_{R(Z)}$$

Wir überdecken nun die Bilder der Funktionen φ bzw. ψ durch die Rechtecke

$$R'_k := \{(x,y) : x \in I'_k \text{ und } \underline{\varphi}(I_k) \leq y \leq \overline{\varphi}(I_k)\}$$

bzw.

$$R''_k := \{(x,y) : x \in I'_k \text{ und } \underline{\psi}(I_k) \leq y \leq \overline{\psi}(I_k)\}$$

und setzen

$$R'(Z) := \bigcup_{k=1}^{n} R'_k \qquad , \qquad R''(Z) := \bigcup_{k=1}^{n} R''_k$$

Analog wie oben ergibt sich

$$\mu(R'(Z)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(R'_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[\overline{\varphi}(I_k) - \underline{\varphi}(I_k)]$$

also

$$\mu(R'(Z)) = \overline{S}(Z,\varphi) - \underline{S}(Z,\varphi) \tag{3.4.17}$$

und ebenso

$$\mu(R''(Z)) = \overline{S}(Z,\psi) - \underline{S}(Z,\psi) \tag{3.4.18}$$

Es sei $(x,y) \in R(Z) \setminus M$. Dann liegt (x,y) in einem der Rechtecke R_k und es folgt $\underline{\varphi}(I_k) \leq y \leq \overline{\psi}/I_k)$. Da (x,y) nicht in M liegt, muss (x,y) unterhalb des Bildes von φ oder oberhalb des Bildes von ψ liegen. Dann ist aber

$$\underline{\varphi}(I_k) \leq y < \varphi(x) \leq \overline{\varphi}(I_k) \qquad \text{oder} \qquad \underline{\psi}(I_k) \leq \psi(x) < y \leq \overline{\psi}(I_k)$$

d.h., es ist $(x,y) \in R'_k \subseteq R'(Z)$ oder $(x,y) \in R''_k \subseteq R''(Z)$. Somit ist $(x,y) \in R'(Z) \cup R''(Z)$, und wir haben damit die Beziehung

$$R(Z) \setminus M \subseteq R'(Z) \cup R''(Z) \tag{3.4.19}$$

bewiesen. Die Beziehung (3.4.19) besagt, dass die Menge $R(Z)\setminus M$ von den schraffierten Flächen in Abb. 3.4.3 überdeckt wird. Wegen $M \subseteq R(Z)$ vereinfacht sich (3.4.3) zu

$$\chi_{R(Z)\setminus M} = \chi_{R(Z)} - \chi_M$$

Berücksichtigung von (3.4.19) und (3.4.5) ergibt die Abschätzung

$$o \leq \chi_{R(Z)} - \chi_M = \chi_{R(Z)\setminus M} \leq \chi_{R'(Z)} + \chi_{R''(Z)}$$

Dies können wir in der Form

$$|\chi_M - \chi_{R(Z)}| \leq \chi_{R'(Z)} + \chi_{R''(Z)}$$

schreiben. Für eine Folge (Z_r) von Zerlegungen mit

$$\lim_{r\to\infty} d(Z_r) = 0$$

gilt ebenso

$$|\chi_M - \chi_{R(Z_r)}| \leq \chi_{R'(Z_r)} + \chi_{R''(Z_r)}$$

Wegen $\varphi, \psi \in E[a,b]$, (3.4.7), (3.4.17), (3.4.18) und (2.6.10) ist

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} J(\chi_{R'(Z_r)} + \chi_{R''(Z_r)}) &= \lim_{r\to\infty}(\mu(R'(Z_r)) + \mu(R''(Z_r))) \\ &= \lim_{r\to\infty}[(\overline{S}(Z_r,\varphi) - \underline{S}(Z_r,\varphi)) + (\overline{S}(Z_r,\psi) - \underline{S}(Z_r,\psi))] = 0\end{aligned}$$

Folglich ist $(\chi_{R(Z_r)})$ eine Riemannsche Näherungsfolge von χ_M, d.h., es ist $\chi_M \in E(D)$ und

$$\mu(M) = J(\chi_M) = \lim_{r\to\infty} J(\chi_{R(Z_r)}) = \lim_{r\to\infty} \mu(R(Z_r))$$

Berücksichtigung von (3.4.16) ergibt

$$\mu(M) = \lim_{r\to\infty}[\overline{S}(Z_r,\varphi) - \underline{S}(Z_r,\varphi)]$$

Wiederum aus (2.6.10) folgt die Behauptung (3.4.15).

Mit Hilfe dieser Formel können also die Methoden der Integralrechnung für die numerische Berechnung des Riemannschen Inhalts krummlinig begrenzter Figuren, z.B. des Kreisinhalts eingesetzt werden.

Es sei φ eine auf D definierte reellwertige Funktion und M eine quadrierbare Teilmenge von D. Ist die Funktion φ_{χ_M} über D Riemann-integrierbar, so sagen wir, die Funktion φ sei über die Menge M Riemann-integrierbar. Die reelle Zahl

$$\int\limits_M \varphi)x,y)d(x,y) := \int\limits_D \varphi(x,y)\chi_M(x,y)d(x,y)$$

heißt dann das Riemannsche Integral der Funktion φ über die Menge M.

Ist die Funktion ω sogar stetig und ist M von der in Satz 3.4.2 angegebenen Form, so gilt die Berechnungsformel

$$\int\limits_M \omega(x) d(x,y) = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \omega(x,y) dy dx$$

Auf den Beweis gehen wir hier nicht ein, da in Abschnitt 7.2 ein allgemeinerer Satz bewiesen wird.

Beispiel 3.4.2. Wir berechnen das Integral der Funktion

$$F(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

über den Einheitskreis. Die Punkte $P(x,y,z)$ mit $x^2+y^2 \leq 1$ und $z = F(x,y)$ bilden die obere Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel. Als Integralwert ist daher das halbe Volumen der Einheitskugel zu erwarten.
Der Einheitskreis K ist die Menge der Punkte $P(x,y)$ mit

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{und} \qquad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Somit ist

$$\int\limits_K F(x,y) d(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$

Zur Berechnung des inneren Integrals führen wir für festes x mit $x^2 < 1$ die Substitution $y = \psi(t)$ mit

$$\psi(t) = \sqrt{1-x^2}\sin t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

durch. Wegen

$$\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{1-x^2} \qquad , \qquad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{(1-x^2)(1-\sin^2 t)} = \sqrt{1-x^2}\cos t \qquad , \qquad \psi'(t) = \sqrt{1-x^2}\cos t$$

und (2.5.16) ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)\cos^2 t dt = (1-x^2) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= (1-x^2)\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}(1-x^2) \end{aligned}$$

Diese Beziehung bleibt auch für $x^2 = 1$ richtig. Wir erhalten

$$\int\limits_K \sqrt{1-x^2-y^2} d(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-x^2) dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{x^2}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3}\pi$$

4 Lösungen

1.1.1. Stets gilt $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$. Hieraus folgt durch Addition entsprechender Seiten die Ungleichung

$$\pm(a+b) \leq |a| + |b|$$

Dies besagt (1.1.16).
Wegen $a = (a+b) - b$ und $|-b| = |b|$ gilt auf Grund von (1.1.16)

$$|a| \leq |a+b| + |b|$$

Hieraus folgt

$$|a| - |b| \leq |a+b| \tag{1}$$

In (1) ersetzen wir a durch b und umgekehrt und erhalten

$$|b| - |a| \leq |b+a| = |a+b| \qquad \text{bzw.} \qquad -(|a| - |b|) \leq |a+b| \tag{2}$$

Die Ungleichungen (I) und (2) liefern die Behauptung (1.1.17).

1.1.2. Offensichtlich ist (1.1.18) richtig für $n = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (1.1.18) für eine beliebige natürliche Zahl n die Gültigkeit von (1.1.18) für $n+1$ folgt.
Auf Grund von (1.1.16) und der Induktionsvoraussetzung ist

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + |a_{k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

1.2.1. $J_0(f) = 15.$

1.2.2. Wegen Satz 1.1.2 bzw. Satz 1.2.18. ist $\lambda_1 f_1 \in E_0[a,b]$ bzw. gilt (1.2.14) für $n = 1$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung und Satz 1.1.2 bzw. 1.2.1 ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k \in E_0[a,b] \qquad \text{bzw.}$$

$$J_0\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k\right) = J_0\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right) + \lambda_{n+1} J_0(f_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k J_0(f_k) + \lambda_{n+1} J_0(f_{n+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k J_0(f_k)$$

2.1.1. Für alle $x, x' \in [a,b]$ gilt

$$|x^3 - x'^3| = |x^2 + xx' + x'^2| \cdot |x - x'| \leq 3(a^2 + b^2)|x - x'|$$

Setzen wir $M := 3(a^2 + b^2)$, so ist die Funktion $\varphi(x) = x^3$ auf Grund von Satz 2.1.4

über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^3 dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n}k\right)^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[a^3 + 3a^2\frac{b-a}{n}k + 3a\frac{(b-a)^2}{n^2}k^2 + \frac{(b-a)^3}{n^3}k^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} (b-a) \left[a^3 + 3a^2\frac{b-a}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + 3a\frac{(b-a)^2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right. \\
&\left. + \frac{(b-a)^3}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= (b-a)\left[a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^3\right] = \frac{b^4-a^4}{4}
\end{aligned}$$

2.1.2. Für alle $x, x' \in [a, b]$ gilt

$$|\sin x - \sin x'| = \left|2\sin\frac{x-x'}{2}\cos\frac{x+x'}{2}\right|$$

Da stets $|\sin x| \leq |x|$ und $|\cos x| \leq 1$ ist, folgt

$$|\sin x - \sin x'| \leq \left|2\sin\frac{x-x'}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-x'}{2}\right| = |x-x'|$$

Setzen wir $M := 1$, so ist die Funktion $\varphi(x) = \sin x$ auf Grund von Satz 2.1.4 über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

2.1.8. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu zwei verschiedenen Punkten $x, x' \in [a, b]$ stets ein ξ mit $x < \xi < x'$ oder $x' < \xi < x$ und

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{x - x'} = \varphi'(\xi)$$

Ist M eine Schranke von φ', so folgt

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{x - x'}\right| = |\varphi'(\xi)| \leq M$$

bzw.

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M|x - x'|$$

Diese Ungleichung gilt sogar für alle $x, x' \in [a, b]$, womit auf Grund von Satz 2.1.4 die Riemann-Integrierbarkeit der Funktion φ nachgewiesen ist.

2.2.1. In den paarweise voneinander verschiedenen Punkten $x_1, ..., x_n$ nehme die Funktion φ die Werte $\varphi(x_k) = c_k$, $(k = 1, ..., n)$ an. Mit Hilfe von (2.1.4) lässt sich φ dann in der Form

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_{x_k}(x)$$

darstellen. Auf Grund von Beispiel 2.1.1 und Folgerung 2.2.3 ist $\varphi \in E[a,b]$. Berücksichtigung von (2.1.28) und (2.2.13) liefert die Behauptung (2.2.43).

2.2.2. In den paarweise voneinander verschiedenen Punkten $x_1, ..., x_n$ nehme die Funktion ψ die Werte $\psi(x_k) = d_k$ $(k = 1, ..., n)$ an. Dann lässt sich ψ in der Form

$$\psi(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} [d_k - \varphi(x_k)]\varphi_{x_k}(x)$$

darstellen. Auf Grund von Aufgabe 2.2.1 und Satz 2.2.1 ist $\psi \in E[a,b]$, und es gilt (2.2.44).

2.2.3. Es sei $\varphi_1(x) := x^2$, $\varphi_2(x) := x$, $\varphi_3(x) := 1$. Auf Grund von Beispiel 2.1.4 und Satz 2.1.3 ist $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E[-1,2]$. Berücksichtigung von Folgerung 2.2.3 liefert $\varphi \in E[-1,2]$. Ferner ist

$$\int_{-1}^{2} \varphi(x)dx = \frac{45}{2}$$

2.2.4. Es sei $a := 0$, $b := 1$, $\varphi(x) := x$, $\psi(x) := x^2$. Dann ist

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad , \quad \int_0^1 \varphi(x)dx \int_0^1 \psi(x)dx = \frac{1}{6}$$

2.3.1. Auf Grund von Satz 2.1.3, Aufgabe 2.2.2 und Satz 2.3.2 ist die Funktion $\varphi(x) := \operatorname{sgn} x$ über die Teilintervalle $[a,0]$ und $[0,b]$ und damit über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es ist

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)dx = a + b$$

2.3.2. $\int\limits_a^b f^2(x)dx = \frac{49}{3}$.

2.3.3. Falls zwei der Zahlen c_1, c_2, c_3 übereinstimmen, folgt die Behauptung (2.3.21) aus (2.3.10) und (2.3.11).
Andernfalls können wir wegen der Symmetrie der Formel (2.3.21) in c_1, c_2, c_3 voraussetzen, dass c_2 zwischen c_1 und c_3 liegt. Gilt $c_1 < c_2 < c_3$, so ist auf Grund von (2.3.1) und (2.3.11)

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} \varphi(x)dx + \int_{c_3}^{c_1} \varphi(x)dx = \int_{c_1}^{c_3} \varphi(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx = 0$$

Im Fall $c_3 < c_2 < c_1$ gilt

$$\int_{c_3}^{c_2} \varphi(x)dx + \int_{c_2}^{c_1} \varphi(x)dx + \int_{c_1}^{c_3} \varphi(x)dx = 0$$

Multiplikation mit -1 und anschließende Vertauschung der Grenzen liefert die Behauptung.

2.5.1. Da φ auf $[a,b]$ stetig ist, gilt $\varphi \in E[a,b]$. Ferner ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = a_0(b-a) + a_1\frac{b^2-a^2}{2} + a_2\frac{b^3-a^3}{3} + a_3\frac{b^4-a^4}{4}$$
$$= \frac{b-a}{6}\left[6a_0 + 3a_1(a+b) + 2a_2(a^2+ab+b^2) + \frac{3}{2}a_3(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\right]$$
$$= \frac{b-a}{6}\left[(a_0+a_1a+a_2a^2+a_3a^3) + 4\left(a_0 + a_1\frac{a+b}{2} + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right)\right.$$
$$\left.+(a_0+a_1b+a_2b^2+a_3b^3)\right] = \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right]$$

2.5.2. $\mu(M) = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \dfrac{1}{3}$

2.5.3. Die auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ streng monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion $x = \psi(z) := z^2$ genügt den Bedingungen

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \qquad , \qquad \psi(1) = 1$$

und es ist $\psi'(z) = 2z$. Demnach gilt

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1+z}}{z}2zdz = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+z}dz = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{2}{3}(1+z)^{\frac{3}{2}}\right]' dz$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}(1+z)^{\frac{3}{2}}\right]_{z=\frac{1}{2}}^{z=1} = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(8-3\sqrt{3})$$

2.5.4. Die auf dem Intervall $[0,1]$ streng monoton fallende stetig differenzierbare Funktion $x = \psi(z) := 1-z$ genügt den Bedingungen $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, und es ist $\psi'(z) = -1$. Demnach gilt

$$\int_0^1 (1-x)^m x dx = -\int_1^0 z^m(1-z)dz = \int_0^1 z^m dz - \int_0^1 z^{m+1}dz$$
$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

Da $\frac{m!}{(m+2)!} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$ ist, gilt (2.5.17) für $n=1$ und beliebige natürliche Zahlen m. Die Gleichung (2.5.17) gelte für eine natürliche Zahl n und beliebige natürliche Zahlen m (Induktionsvoraussetzung). Dann setzen wir

$$\varphi(x) := (1-x)^{m+1} \qquad , \qquad \psi(x) := \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Es ist dann

$$\varphi'(x) = -(m+1)(1-x)^m \qquad , \qquad \psi'(x))x^n$$

und

$$\int_0^1 (1-x)^{m+1}x^n dx = \frac{m+1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^m x^{n+1}dx$$

bzw.

$$\int_0^1 (1-x)^m x^{n+1}dx = \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^{m+1}x^n dx$$

Berücksichtigung der Induktionsvoraussetzung ergibt

$$\int_0^1 (1-x)^m x^{n+1}dx = \frac{n+1}{m+1}\frac{(m+1)!n!}{[(m+1)+n+1]!} = \frac{m!(n+1)!}{(m+n+2)!}$$

3.3.1. Offensichtlich ist $\varphi \in E(D)$. Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_D (3-x-y)d(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 (3-x-y)dxdy = \int_0^1 \left(\left[3x-\frac{1}{2}x^2-yx\right]_{x=0}^{x=1}\right)dy\\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}-y\right)dy = \left[\frac{5}{2}y-\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} = 2\end{aligned}$$

3.3.2. Wegen $\varphi(x,y) = xe^xe^y$ und Beispiel 2.5.2 ist $\varphi \in E(D)$, und es gilt

$$\int_D xe^{x+y}d(x,y) = \int_{-1}^1\int_1^2 xe^xe^ydxdy = \int_{-1}^1 e^2e^ydy = e^2(e-e^{-1}) = e(e^2-1)$$

3.3.3. Wegen $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ist $\varphi \in E(D)$. Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_D \cos(x+y)d(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x\cos y - \sin x\sin y)dxdy\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([\sin x\cos y + \cos x\sin y]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\right)dy\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y - \sin y)dy = [\sin y + \cos y]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = 1-1 = 0\end{aligned}$$