
I.M. Jaglom, W.G. Boltjanski

Konvexe Figuren

Übersetzung: Joachim Erlebach, Brigitte May
1956 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 32
Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematikalphabet.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Hinweise	8
1 Aufgaben	11
1.1 Allgemeine Eigenschaften konvexer Figuren	11
1.2 Der Satz von Helly und seine Anwendungen	21
1.3 Eine Eigenschaft der stetigen Funktionen	27
1.4 Addition konvexer Figuren und Kurven	35
1.5 Das isoperimetrische Problem	45
1.6 Verschiedene Maximum- und Minimumaufgaben	52
1.7 Kurven konstanter Breite	62
1.8 Kurven, die sich in einem gleichseitigen Dreieck drehen lassen (Δ - Kurven), und verwandte Kurven	73
1.9 Anhang I: Grenzwertsatz für Kurven	89
1.10 Anhang II: Über die Begriffe der konvexen und der nichtkonvexen Figur	96
2 Lösungen	99
3 Literaturverzeichnis	247

Vorwort der Herausgeber

Die Studenten an unseren Universitäten und Hochschulen erhalten ihre Ausbildung in Geometrie durch eine Vorlesungsreihe, die üblicherweise die analytische Geometrie, die Differentialgeometrie, die Grundlagen der Geometrie sowie die meist der angewandten Mathematik zugerechnete darstellende Geometrie durchläuft und je nach den örtlichen Gegebenheiten durch Spezialvorlesungen ergänzt wird.

Diese Vorlesungen, wenn man von der über darstellende Geometrie und vielleicht von der über die Grundlagen absieht, sind durch den Umstand zeitlich stark belastet, dass sie die zum Teil recht umfangreichen Hilfsmittel aus der Algebra und Analysis bereitstellen müssen.

Für rein geometrische Fragestellungen und Methoden bleibt meist nur wenig Zeit. Dies gilt im besonderen Maße von der analytischen Geometrie. Wenn man nun bedenkt, dass der größte Teil der Mathematikstudenten die zukünftigen Lehrer sein werden, die in Elementargeometrie, analytischer und darstellender Geometrie unterrichten sollen, so erscheint es als wünschenswert, die Vorlesungsreihe durch Veranstaltungen zu ergänzen, die die geometrische Vorstellungskraft betont pflegen.

Außerdem ist es wichtig, die Studenten möglichst frühzeitig durch Arbeitszirkel oder Proseminare auf ihre spätere Seminartätigkeit vorzubereiten. Hierfür ist es notwendig, Themen zugrunde zu legen, die keine Spezialkenntnisse voraussetzen.

Die vorliegende Aufgabensammlung erscheint den Herausgebern für beide Zwecke vorzüglich geeignet. Das Buch ist in seinen Voraussetzungen so beschaffen, dass es nicht nur an den Universitäten, sondern auch an den Pädagogischen Instituten mit Erfolg wird benutzt werden können.

Die Verfasser weisen selber auf die Möglichkeit hin, dass die Aufgabensammlung zusammen mit den Lösungen auch als Lehrbuch verwendet werden kann.

In der deutschsprachigen Literatur gibt es über die Theorie der konvexen Körper nur den Ergebnisbericht von T. Bonnesen und W. Fenchel, ein einführendes Lehrbuch fehlt. Die Herausgeber hoffen, dass die Übersetzung dazu beiträgt, diese Lücke zu schließen.

Unser Dank gilt sowohl den beiden Verfassern I. M. Jaglom und W. G. Boltjanski für die Durchsicht der deutschen Ausgabe als auch dem Übersetzer und dem wissenschaftlichen Redakteur für die Mühen der Übertragung und der Herstellung des Manuskriptes sowie dem Verlag Gostechisdat für die Bereitstellung des Abbildungsmaterials und dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für seine Sorgfalt bei der Ausstattung und Herausgabe des Buches.

Greifswald, den 30. Januar 1956

W. Rinow

Vorwort

Dieses Buch ist einigen Aufgaben aus der allgemeinen Theorie der konvexen Körper gewidmet.

Die am Ende des vergangenen Jahrhunderts entstandene Theorie der konvexen Körper ist heute eine an allgemeinen Methoden und bedeutenden Einzelergebnissen reiche Wissenschaft, in der auch jetzt noch intensiv gearbeitet wird.¹

Die Anzahl der gedruckten wissenschaftlichen Arbeiten und der Bücher, die sich mit diesem Thema beschäftigen, ist so bedeutend, dass in den Inhaltsverzeichnissen der modernen mathematischen Referatenblätter, in welchen alle mathematischen Publikationen besprochen werden, die Theorie der konvexen Körper als selbständige mathematische Disziplin neben den anderen Zweigen der mathematischen Wissenschaft steht. Diese Popularität der Theorie der konvexen Körper hängt in erster Linie mit ihrer Wichtigkeit für die Geometrie zusammen, aber auch mit den bedeutenden Anwendungen, die sie sowohl in anderen Gebieten der Mathematik (Algebra, Zahlentheorie u.a.) als auch in den Naturwissenschaften (mathematische Kristallographie) findet.

Die Bedeutung der Theorie der konvexen Körper ist ganz besonders seit den jüngsten hervorragenden Arbeiten des Leningrader Mathematikers A.D. Alexandrow gewachsen, der sie der von ihm begründeten neuen Richtung in einem äußerst wichtigen Zweig der modernen Geometrie - der Differentialgeometrie - zugrunde legte.²

All das rechtfertigt bereits die Veröffentlichung populärer Bücher über die Theorie der konvexen Körper. Es gibt jedoch einen weiteren Umstand, der diese Bücher als besonders nützlich erscheinen lässt.

Die Theorie der konvexen Körper ist das einzige Gebiet der modernen Mathematik, das an keiner Stelle seines Aufbaus sogenannte "höhere Mathematik" wesentlich benutzt. Die Methoden dieser Theorie sind besonders schön, geistvoll und dabei durchaus nicht einfach, in der Regel jedoch völlig elementar und können Schülern der oberen Klassen erklärt werden.

Das hängt damit zusammen, dass die Theorie der konvexen Körper typisch "geometrisch" ist; denn im Gegensatz zu anderen Gebieten der modernen Geometrie benutzt sie keinerlei analytische Hilfsmittel und basiert unmittelbar auf elementargeometrischen Vorstellungen.

Eine gute Illustration zu dem Gesagten gibt das vor kurzem erschienene Buch von A. D. Alexandrow, *Konvexe Polyeder*, Moskau - Leningrad 1950. Diese Monographie ist zwar kein populäres, für einen breiten Leserkreis gedachtes Buch; sie ist aber in wesentlichen Teilen für fortgeschrittene Schüler der höheren Klassen verständlich.

Es gibt ein populäres Buch in russischer Sprache über die Theorie der konvexen Körper, das für Schüler der oberen Klassen und für Studenten der jüngeren Semester der Fach-

¹Eine gute, obwohl ziemlich alte Übersicht über diese Theorie enthält die Arbeit von T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 8 (1934), S. 1-172.

²Siehe das Buch von A. D. Alexandrow, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*. Deutsche Übersetzung: Akademie-Verlag, Berlin 1955.

richtung Mathematik an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen bestimmt ist, und zwar das Buch von L. A. Lusternik, *Konvexe Körper*, Moskau - Leningrad 1941. Daher bedarf das Erscheinen eines weiteren Buches über die Theorie der konvexen Körper, das für denselben Leserkreis bestimmt ist, einer besonderen Begründung.

Unser Buch hat die Form einer Aufgabensammlung mit Lösungen, wodurch es sich erheblich von dem Buch von L. A. Lusternik unterscheidet. Es erscheint in der Reihe "Bibliothek der mathematischen Zirkel", und obwohl es sich in vielem von den vorhergehenden Büchern dieser Reihe unterscheidet, stimmen seine Grundprinzipien mit denen der bisher erschienenen Bücher überein.

Diese bestehen in erster Linie in der Orientierung auf selbständiges schöpferisches Arbeiten des Lesers und nicht auf passive Erlernung des dargebotenen Stoffes.

Wir sind der Meinung, dass bei aller Nützlichkeit der Lektüre populärwissenschaftlicher Literatur eine wirkliche Neigung zur Mathematik nur dann entwickelt werden kann, wenn selbständig über mathematische Aufgaben nachgedacht werden muss. Die Darstellung der Elemente der Theorie der konvexen Körper in Form von Aufgaben erscheint uns auch deshalb besonders zweckmäßig, weil dank der wenigen Vorkenntnisse, die für selbständiges wissenschaftliches Arbeiten auf diesem Gebiet notwendig sind, hier ein solches Arbeiten verhältnismäßig früh beginnen kann.

Eine unserer Aufgaben beim Schreiben dieses Buches bestand also darin, eine gewisse notwendige Übung zum schöpferischen Arbeiten auf dem Gebiet der Theorie der konvexen Körper zu vermitteln.

Die Wahl der Form einer Aufgabensammlung bestimmte auch in hohem Maße den Inhalt des Buches. Bei der Zusammenstellung richteten wir unser Hauptaugenmerk auf die Methoden und nicht auf die Ergebnisse.

Viele der im Buch gebrachten Sätze spielen in der Theorie der konvexen Körper keine wesentliche Rolle; dies fällt besonders beim Vergleich dieses Buches mit dem bereits erwähnten Buch von L. A. Lusternik auf, welches die wirklich wichtigen Tatsachen dieser Theorie enthält.

Unser Bestreben war es vielmehr, in unserem Buch die Hauptmethoden der Theorie der konvexen Körper zu beleuchten, indem wir sie durch einige Beispiele erläutern, auch wenn diese Beispiele nicht besonders wesentlich sind. Um dabei verschiedene Methoden in geeigneter Weise gegenüberzustellen, geben wir häufig mehrere Beweise ein und desselben Satzes.

Wir waren bestrebt, Aufgaben auszuwählen, die in der Formulierung bemerkenswert sind und schon durch ihre Fragestellung den Leser interessieren. Dies erklärt auch den umfangreichen (gewiss nicht der wissenschaftlichen Bedeutung dieser Fragen entsprechenden) Platz, der in dem Buch den verschiedenen Definitionen des "Mittelpunktes" einer beliebigen konvexen Figur und den Abschätzungen des "Grades der Zentriertheit" konvexer Figuren (genauer müsste man sagen, des "Grades der Zentralsymmetrie") eingeräumt wird (siehe die Aufgaben 18b, 18c, 19a, 33, 34, 36, 69); es erklärt ferner das gründliche Eingehen auf den Satz von Jung über den kleinsten Umkreis aller Figuren gegebenen Durchmessers und auf ähnliche Sätze (Aufgaben 16, 17, 19b, 31, 35a, 67,

68), auf Kurven konstanter Breite und verwandte Kurven.

Mit dem Bestreben nach größter Anschaulichkeit hängt die Tatsache zusammen, dass die Aufgaben des Buches im wesentlichen "zweidimensionale" Probleme behandeln. In der Regel lassen sich die in dem Buch angeführten Sätze über konvexe Figuren der Ebene entweder fast ohne jede Änderung der Formulierungen und Beweise auf den Fall konvexer Körper im Raum übertragen, oder aber eine derartige Übertragung bereitet überhaupt beträchtliche Schwierigkeiten.

In einigen Fällen werden am Ende des Paragraphen die entsprechenden Tatsachen für den dreidimensionalen Raum angegeben, und zwar meist ohne Beweis in Form eines Referates. Dabei geht der Inhalt dieses Buches fast nirgends über den Inhalt des erwähnten Buches von L. A. Lusternik hinaus, das im wesentlichen "dreidimensionalen" Problemen gewidmet ist.

In unserem Buch bleibt die Theorie der konvexen Polyeder, die den wichtigsten und interessantesten Teil der Lehre von den konvexen Körpern darstellt, vollkommen unberührt. Diese Theorie wird nämlich in den oben genannten Büchern von L. A. Lusternik und A. D. Alexandrow ausführlich behandelt, ferner in den letzten Abschnitten der "Aufgabensammlung zur Geometrie" von B. N. Delaunay und O.K. Shitomirski (Moskau-Leningrad 1950) sowie im Aufgabenzyklus "Theorie der Polyeder" im zweiten Teil des Buches von D.O. Schklarski u.a. (Ausgewählte Aufgaben und Sätze der Elementarmathematik), welches als Band 3 der "Bibliothek der Mathematischen Zirkel" erschien.

Das Buch ist für Schüler der höheren Klassen an Oberschulen, für Studenten der Anfangssemester an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie für alle Freunde der Mathematik bestimmt.

Es kann beim Studium in mathematischen Arbeitsgemeinschaften sowohl an Oberschulen als auch an Hochschulen benutzt werden. Die Darstellung setzt keinerlei Kenntnisse voraus, die über den Rahmen des Mathematikunterrichts der Schule hinausgehen, und zum Verständnis des größten Teils des Buches genügen sogar Kenntnisse im Umfang des Lehrplans einer achtklassigen Schule.

Überdies bemühten wir uns, in der Darstellung des Stoffes auch einem unerfahrenen Leser möglichst keine Schwierigkeiten zu bereiten, wenn wir dabei auch an einigen Stellen im Interesse einer leichteren Zugänglichkeit auf volle mathematische Exaktheit verzichten mussten.

Wir meinen, alle notwendigen Präzisierungen müsste jeder Student eines mittleren Semesters der Fachrichtung Mathematik einer Universität oder einer Pädagogischen Hochschule selbstständig durchführen können; zur Erleichterung dieser Arbeit führen wir am Ende des Buches die strenge Definition des Begriffes der ebenen Figur an, wie er in diesem Buch benutzt wird (siehe Anhang II; die Lektüre dieses Anhangs ist aber für das Verständnis des Buches keineswegs notwendig).

Wir rechnen darauf, dass die Studenten unter unseren Lesern uns einige Formulierungen verzeihen, die einen mit der Analysis Vertrauten schockieren mögen.

Vor der Lektüre des Buches empfiehlt es sich, die Hinweise zu seinem Gebrauch aufmerksam durchzulesen.

Das Manuskript wurde in der Arbeit des Proseminars für Studenten des ersten Studienjahres der Moskauer Staatlichen Universität unter Leitung des einen Autors und in der Arbeit einer Sektion des mathematischen Schülerzirkels³ an der Moskauer Staatlichen Universität unter Leitung des anderen Autors überprüft.

Einige der Aufgaben wurden bei einem Wettbewerb zur Lösung von Problemen gestellt, der an der Moskauer und an der Leningrader Universität für jüngere Semester durchgeführt wurde, andere bei mathematischen Olympiaden der Moskauer Schulen. In allen Fällen erwiesen sich die Studenten und Schüler den Aufgaben gewachsen.

In dem Buch sind einige Sätze angegeben, die wir in der Literatur nicht gefunden haben, sowie eine große Anzahl neuer Beweise bekannter Sätze. Die Paragraphen 2, 3, 5 und 6 stammen von I. M. Jaglom, der Paragraph 4 und die Anhänge von W. G. Boltjanski, die Paragraphen 1, 7 und 8 wurden von I. M. Jaglom und W. G. Boltjanski gemeinsam verfasst. Die Schlussredaktion des gesamten Textes wurde von beiden Autoren gemeinsam durchgeführt.

Bei der Arbeit zu dem Buch konsultierten wir ständig A.M. Jaglom, dessen Hinweise zu den Ausführungen an einzelnen Stellen des Buches berücksichtigt wurden. Die erste Hälfte des Manuskripts wurde von L. I. Golowina-Kopekina aufmerksam geprüft, deren strenge Kritik zur Verbesserung des Buches beitrug.

Eine Reihe von Hinweisen gaben uns A.D. Alexandrow und seine Schüler I. J. Bakelman, J. A. Wolkow und J. G. Reschtnjark.

Manche Fehler im Text und Ungenauigkeiten in den Abbildungen wurden auf Initiative des Redakteurs des Buches, A. S. Rywkin, beseitigt. Wir sehen es als unsere angenehme Pflicht an, allen genannten Personen unsere aufrichtige Dankbarkeit zu bezeugen.

Moskau, März 1951

I.M. Jaglom - W. G. Boltjanski

Zur deutschen Ausgabe

Diese deutsche Ausgabe unterscheidet sich von dem russischen Original durch Vereinfachung einiger Beweise und durch einige Ergänzungen, die teilweise die in den letzten vier Jahren auf diesem Gebiet errungenen Erfolge widerspiegeln. Weitere Hinweise auf deutsche Literatur wurden aufgenommen.

Moskau, November 1955

I.M. Jaglom - W.G. Boltjanski

³Die mathematischen Schülerzirkel an der Moskauer Universität verdanken ihre Entstehung Leo Schnirelmann, dem dieses Buch gewidmet ist.

Hinweise zur Benutzung des Buches

Dieses Buch besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden 116 Aufgaben über konvexe Figuren angeführt und einige zu ihrem Verständnis notwendige theoretische Kenntnisse vermittelt; der zweite Teil bringt die Lösungen dieser Aufgaben.

Der Inhalt des Buches ist in acht voneinander einigermaßen unabhängige Paragraphen unterteilt; außerdem enthält das Buch noch zwei Anhänge speziellen Charakters. Jeder Paragraph beginnt mit einer kurzen (kleingedruckten) Einführung, in welcher insbesondere die Nummern derjenigen Aufgaben der vorhergehenden Paragraphen angegeben sind, die bei der Lösung der Aufgaben des betreffenden Paragraphen benutzt werden können.

Ebenso wie in den meisten anderen Aufgabensammlungen besteht auch hier im Rahmen des einen oder anderen Paragraphen durchaus die Möglichkeit, die Aufgaben "nach Wahl", je nach dem Geschmack des Lesers, zu lösen, da nur die Lösungen verhältnismäßig weniger Aufgaben sich auf vorhergehende Aufgaben desselben Paragraphen stützen. Es erscheint uns jedoch als das Zweckmäßigste, die Aufgaben in jedem Paragraphen nacheinander zu lösen (unter Auslassung derjenigen, deren Lösung dem Leser nicht gelingt); wir waren nämlich bei der Stellung der Aufgaben jedes Paragraphen bestrebt, sie so anzuordnen, dass sie ein gewisses abgeschlossenes Ganzes darstellen.

Außerdem gehen in der Regel in jedem Paragraphen die leichteren Aufgaben den schwierigeren voran. An einigen Stellen des Buches kommen sogenannte "Hilfsaufgaben" vor, deren Sinn darin besteht, dem Leser die Lösung der unmittelbar danach folgenden schwierigen Aufgaben zu erleichtern.

In dem Buch ist schwierigerer Stoff, zu dessen Verständnis eine größere Vertrautheit mit mathematischen Gedankengängen erforderlich ist, kleingedruckt. Wir empfehlen den Schülern unter den Lesern, bei der ersten Lektüre des Buches diesen Stoff zu überschlagen (einschließlich der beiden Anhänge des Buches, die im wesentlichen für Studenten an Universitäten oder Pädagogischen Hochschulen bestimmt sind).

Dementsprechend sind alle Hinweise auf den Anhang I in den Fußnoten des Buches von den Schülern unter den Lesern unbeachtet zu lassen. Im übrigen werden im gesamten Inhalt des Buches nirgends Kenntnisse des Lesers vorausgesetzt, die über den Rahmen der Schullehrpläne hinausgehen, so dass auch der kleingedruckte Text von einem Schüler verstanden werden kann, wenn er nur die nötige Ausdauer bei der Lektüre an den Tag legt.

Jeder Paragraph enthält einen erläuternden Text und Aufgaben. Die Aufgaben sind zum Unterschied vom Text am linken Rand durch einen senkrechten Strich gekennzeichnet. Bevor sich der Leser mit einer Aufgabe befasst, sollte er sich mit dem vorangehenden erläuternden Text vertraut machen.

Die Aufgaben sind im Durchschnitt ziemlich schwierig, und ihre Lösung wird viel Zeit erfordern. Die Lösung im Buch ist erst dann zu lesen, nachdem die Aufgabe selbständig gelöst ist, um die gefundene Lösung mit der im Buch angeführten zu vergleichen, oder wenn wiederholte Lösungsversuche nicht zum Erfolg führten.

Falls sich der Leser entschließt, nicht mehr auf einen gegebenen Paragraphen des Buches zurückzukommen, so sollte er sich alle noch ungelösten Aufgaben des Paragraphen ansehen, um sich eine Vorstellung von dem Inhalt des Paragraphen als Ganzem zu machen. Dabei kann natürlich die Arbeit an den Aufgaben des einen Paragraphen mit der Arbeit an einem anderen Paragraphen abwechseln.

Diejenigen Aufgaben, die den Autoren etwas schwieriger vorkamen, sind in dem Buch besonders gekennzeichnet. Die Nummern dieser Aufgaben sind mit einem Sternchen und die Nummern der schwierigsten Aufgaben mit zwei Sternchen versehen.

Diese Kennzeichnung der schwierigeren Aufgaben geschieht natürlich nur unter Vorbehalt, insofern als es keinerlei bestimmte Kriterien für den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben gibt (bekanntlich erscheinen ungelöste Aufgaben stets als schwierig, gelöste Aufgaben dagegen als leicht). Es ist möglich, dass sich für manchen Leser mit Sternchen versehene Aufgaben als leicht erweisen, während ihm von uns nicht gekennzeichnete Aufgaben schwierig vorkommen.

Das vorliegende Buch braucht nicht unbedingt als Aufgabensammlung benutzt zu werden, d. h., man kann die Lösungen der Aufgaben auch unmittelbar nach ihrer Formulierung lesen. Obwohl eine solche Verwendung nicht mit der Grundidee des Buches übereinstimmt, kann es auch dann nützlich sein, da in ihm eine Reihe interessanter Probleme aus der Theorie der konvexen Kurven dargelegt werden.

Besonders zu empfehlen wären für eine derartige Lektüre die §§ 5 und 7 (weniger dagegen der auf § 5 folgende schwierigere § 6).

Die Lektüre des Buches ist mit § 1 zu beginnen, der alle für das Weitere notwendigen Begriffe enthält. Dieser Paragraph hat einführenden Charakter; man braucht sich daher nicht allzu sehr dabei aufzuhalten. Nach § 1 kann mit der Lektüre von § 2, § 5 oder § 7 begonnen werden. Damit der Leser die interessantesten Aufgaben 31, 33, 35a und 36 des § 3 besser würdigen kann, empfehlen wir, § 3 nach § 2 zu lesen.

Ebenso empfiehlt es sich, den § 6 (den anscheinend schwierigsten Paragraphen des Buches) nach dem § 5 und § 8 nach § 7 zu lesen. Der § 4 schließlich ist ein Hilfsparagraph; man liest ihn am besten nach dem Studium des § 6 oder des § 7, damit man den Stoff dieses Paragraphen sofort auf die inhaltsreicheren Sätze anwenden kann.

Man sollte auch Teile des Inhalts von § 4 vor den Aufgaben anderer Paragraphen studieren, in denen die darin definierten Begriffe benutzt werden.

Uns scheinen die §§ 7 und 8 wegen der Eleganz der Definitionen und der harmonischen Gliederung einer ganzen Reihe von Sätzen am geeignetsten, das Interesse der Leser zu erwecken. Nach der Wichtigkeit des Inhalts wäre an erster Stelle der § 5 zu nennen, danach der ihm folgende § 6. Der leichteste Paragraph des Buches ist offenbar § 2.

An vielen Stellen formulierten wir bei unseren Ausführungen gewisse noch nicht gelöste Aufgaben. Die meisten davon dürften äußerst schwierig sein, einige mögen sich jedoch für Leser dieses Buches als lösbar herausstellen.

In den Einführungen zu einzelnen Paragraphen wird einige Ergänzungsliteratur angegeben, die für Leser dieses Buches interessant und nützlich sein kann.

Wir empfehlen dem Leser, nach Durcharbeitung des vorliegenden Buches die Lektüre der im Vorwort erwähnten Bücher von L. A. Lusternik, "Konvexe Körper", und von A. D. Alexandrow, "Konvexe Polyeder", in Angriff zu nehmen.

Den deutschen Leser verweisen wir auf E. Steinitz, "Vorlesungen über die Theorie der Polyeder", Berlin 1934, oder W. Blaschke, "Kreis und Kugel", Berlin 1956. Interessant ist auch das Buch von L. Fejes-Toth, "Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum", Berlin 1953, das eng mit der Theorie der konvexen Figuren zusammenhängt; allerdings setzen die letzten beiden Bücher Kenntnisse der höheren Mathematik voraus.

1 Aufgaben

1.1 Allgemeine Eigenschaften konvexer Figuren

Dieser Paragraph hat einführenden Charakter. In ihm werden die grundlegenden Definitionen, die im weiteren benutzt werden, und einfache Aufgaben zur Veranschaulichung dieser Definitionen gegeben.

Es ist möglich, dass die Aufgaben dieses Paragraphen dem Leser langweilig oder allzu einfach vorkommen - sie dienen der Vorbereitung auf die Behandlung der weit interessanteren Aufgaben der folgenden Paragraphen.

Man braucht diese Aufgaben nicht zu lösen, aber man sollte den Text durchlesen, um vertraut zu werden mit den Definitionen der konvexen Figur, der konvexen Kurve, der Stützgeraden einer konvexen Figur (diese Begriffe werden in den §§ 2-8 benutzt), ferner mit den Definitionen der regulären Punkte und Eckpunkte einer konvexen Figur (die in den §§ 4, 7, 8 benutzt werden), der Länge einer konvexen Kurve und dem Flächeninhalt einer konvexen Figur (die in den §§ 4-8 benutzt werden).

Man kann schließlich sofort die Lösungen der Aufgaben lesen, wenn man diesen Paragraphen als "Theorie" ansieht, die den Aufgaben der übrigen Paragraphen vorausgeschickt wird.

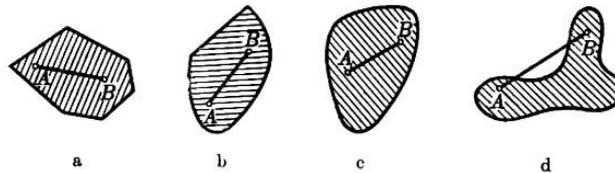


Abb. 1

Eine ebene Figur heißt konvex, wenn sie die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten der Figur ganz in sich enthält. So sind in Abb. 1 die Figuren a, b und c konvex, die Figur d dagegen nicht. Ein Kreis und ein Dreieck sind konvexe Figuren, ein Viereck kann konvex oder auch nichtkonvex sein, je nachdem, ob sich die Diagonalen innerhalb oder außerhalb des Vierecks schneiden (Abb. 2).

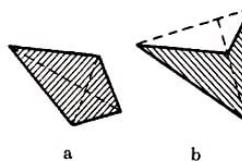


Abb. 2

Unter dem Durchschnitt zweier (oder mehrerer) Figuren versteht man die Figur, die aus allen Punkten besteht, welche in beiden (bzw., wenn es mehrere sind, in allen) Figuren liegen.

1. Man beweise, dass der Durchschnitt zweier oder mehrerer konvexer Figuren wieder eine konvexe Figur ist.

2. Man zeige, dass jedes konvexe Vieleck Durchschnitt endlich vieler Halbebenen ist (Abb. 3).

Eine Figur heißt beschränkt, wenn sie ganz innerhalb eines gewissen Kreises liegt. So

ist jedes Parallelogramm, jedes Dreieck, jeder Kreis beschränkt, ebenso alle Figuren, die in Abb. 1 dargestellt sind.

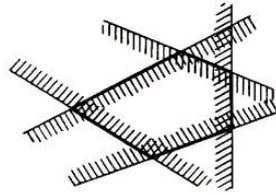


Abb. 3

In den Aufgaben dieses Paragraphen werden wir stets, wenn nichts anderes gesagt wird, zulassen, dass die Figuren auch unbeschränkt sein können. In den folgenden Paragraphen dagegen werden wir in der Regel alle ebenen Figuren als beschränkt voraussetzen, ohne das immer besonders zu erwähnen.

In Abb. 4 sind einige unbeschränkte Figuren dargestellt, unter ihnen sind die Figuren a (Halbebene), b (Streifen,) e (Winkel) und d konvex.

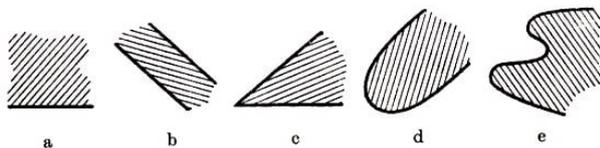


Abb. 4

Für den Begriff "konvexe Figur" kann man auch andere Definitionen geben, die von der oben angeführten verschieden sind, jedoch ist die zu Beginn des Paragraphen angeführte Definition die zweckmäßigste; wir werden daher hauptsächlich diese Definition benutzen.

In Bezug auf jede ebene Figur lassen sich die Punkte der Ebene in drei Klassen einteilen: in innere Punkte, äußere Punkte und Randpunkte. Ein Punkt einer Figur heißt innerer Punkt, wenn es um ihn einen Kreis (mit hinreichend kleinem Radius) gibt, der ganz der Figur angehört. Innere Punkte sind z. B. die Punkte A und A' in Abb. 5.

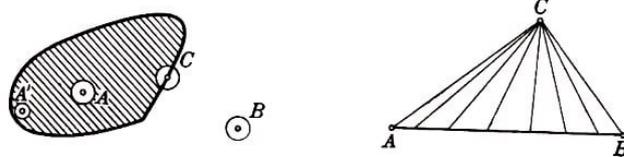


Abb. 5 und 6

Ein Punkt heißt äußerer Punkt in Bezug auf eine Figur, wenn um ihn ein Kreis existiert, der keine Punkte der Figur enthält. Ein äußerer Punkt in Bezug auf eine Figur ist z. B. der Punkt B in Abb. 5.

Schließlich heißt ein Punkt einer Figur Randpunkt, wenn jeder Kreis um diesen Punkt stets sowohl innere als auch äußere Punkte enthält⁴. Der Punkt C in Abb. 5 kann als Beispiel eines Randpunktes einer Figur dienen.

Die Randpunkte bilden eine Linie, eine Kurve oder einen Streckenzug (auch Polygonzug). Diese Kurve heißt Rand der Figur. Ist eine ebene Kurve Rand einer konvexen

⁴Hierfür ist gewöhnlich der Ausdruck Begrenzungspunkt üblich. Da aber ausschließlich abgeschlossene Figuren betrachtet werden, fallen die Begriffe "Randpunkt" und "Begrenzungspunkt" zusammen.

Figur, so heißt sie konvexe Kurve oder, falls sie ein Streckenzug ist, konvexes Vieleck⁵ (konvexes Polygon).

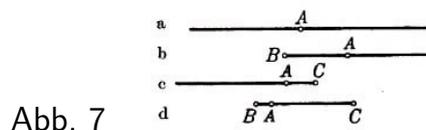
Im folgenden werden wir alle inneren Punkte und alle Randpunkte einer Figur als zu der Figur gehörige Punkte oder kürzer als Punkte der Figur bezeichnen. In allen Fällen, in denen nichts anderes gesagt ist, wollen wir, wenn von ebenen Figuren die Rede ist, annehmen, dass diese Figuren nicht nur aus Randpunkten, sondern auch aus inneren Punkten bestehen (d. h. keine Linien sind).

Wir betrachten jetzt eindimensionale konvexe Figuren, d.h. Linien mit der Eigenschaft, dass die Strecke AB , die zwei beliebige Punkte A und B einer solchen Linie verbindet, ganz zu ihr gehört⁶.

Während zweidimensionale (ebene) konvexe Figuren äußerst vielgestaltig sein können (siehe z. B. die Figuren a, b, c in Abb. 1 und a, b, c, d in Abb. 4), wird die Menge der eindimensionalen konvexen Figuren durch geradlinige Strecken, Strahlen und Geraden erschöpft.

Es ist zunächst leicht einzusehen, dass alle Punkte einer eindimensionalen konvexen Figur auf einer Geraden liegen müssen. Enthält nämlich eine konvexe Figur drei Punkte A, B, C , die nicht auf einer Geraden liegen, so enthält sie infolge der Konvexität alle Punkte der Strecke AB und folglich alle Punkte aller Strecken, die den Punkt C mit einem Punkt der Strecke AB verbinden (Abb. 6), also das ganze Dreieck ABC . Sie kann daher nicht eindimensional sein.

Wir setzen jetzt voraus, die unsere eindimensionale konvexe Figur enthaltende Gerade liege horizontal, und betrachten irgendeinen Punkt A dieser Figur (Abb. 7). Liegen beliebig weit links vom Punkt A Punkte unserer eindimensionalen konvexen Figur, so enthält diese Figur die ganze linke Halbgerade, deren Endpunkt der Punkt A ist (da die Figur alle Verbindungsstrecken je zweier beliebiger Punkte der Figur enthalten muss). Wenn aber die links vom Punkte A gelegenen Punkte der Figur nur beschränkten Abstand von A haben, so muss unsere Figur offensichtlich die Verbindungsstrecke des am weitesten links gelegenen Punktes der Figur (wir bezeichnen ihn mit B) mit dem Punkte A enthalten; sie kann jedoch keinen links von B gelegenen Punkt enthalten.



Insbesondere kann der Punkt B mit dem Punkt A zusammenfallen (d.h. A selbst der am weitesten links gelegene Punkt der Figur sein). Ebenso ergeben die rechts vom Punkte A gelegenen Punkte der Figur entweder eine Halbgerade oder eine gewisse Strecke AC .

⁵Damit heißen sowohl die ebene Figur als auch die Randkurve "konvexes Vieleck". Um eine Begriffsverwirrung zu vermeiden, werden wir gelegentlich von dem Rand des Vielecks sprechen (obwohl dieser Rand selbst ebenfalls konvexes Vieleck genannt wird).

⁶Eindimensionale konvexe Figuren lassen sich als konvexe Figuren charakterisieren, bei denen alle Punkte Randpunkte sind.

Indem wir alle möglichen Fälle zusammenfassen, können wir schließen, dass unsere Figur entweder die volle Gerade (Abb. 7a), eine Halbgerade (Abb. 7b, c), eine Strecke (Abb. 7d) oder ein Punkt ist. Punkte wollen wir als nulldimensionale konvexe Figuren bezeichnen.

Besonders wichtig für das Weitere ist die Tatsache, dass beschränkte eindimensionale konvexe Figuren notwendigerweise Strecken sind. Im folgenden wollen wir stets, wenn nichts anderes gesagt wird, unter einer konvexen Figur eine zweidimensionale konvexe Figur verstehen.

3. Man beweise:

a) Sind A und B innere Punkte einer konvexen Figur Φ , so sind alle Punkte der Strecke AB innere Punkte von Φ .

b) Ist A ein innerer Punkt und B ein Randpunkt einer konvexen Figur Φ , so sind alle Punkte der Strecke AB mit Ausnahme von B innere Punkte von Φ .

c) Sind A und B Randpunkte einer konvexen Figur Φ , so sind entweder alle Punkte der Strecke AB Randpunkte von Φ oder sämtliche Punkte der Strecke AB mit Ausnahme von A und B selbst innere Punkte von Φ .

4. Man beweise, dass jede Gerade, die durch einen inneren Punkt einer konvexen Figur hindurchgeht, den Rand der Figur in höchstens zwei Punkten schneidet. Ist die konvexe Figur beschränkt, so schneidet jede Gerade, die durch einen inneren Punkt der Figur hindurchgeht, den Rand der Figur in genau zwei Punkten.

5. (Umkehrung zu Aufgabe 4.) Schneidet jede Gerade, die durch einen beliebigen inneren Punkt einer beschränkten Figur hindurchgeht, den Rand in zwei Punkten, so ist die Figur konvex.

Unter Benutzung der Aufgaben 4 und 5 kann man eine neue Definition der beschränkten konvexen Figur angeben: Eine beschränkte Figur heißt konvex, wenn jede Gerade, die durch einen beliebigen inneren Punkt dieser Figur hindurchgeht, ihren Rand in zwei Punkten schneidet.

Es sei Φ eine beliebige ebene Figur. Eine Gerade l heißt Stützgerade der Figur Φ , wenn sie durch mindestens einen Randpunkt der Figur hindurchgeht und die ganze Figur Φ auf einer Seite der Geraden l gelegen ist (Abb. 8).

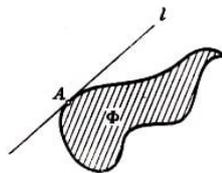


Abb. 8

Beispielsweise ist eine Gerade, die durch die Ecke eines Dreiecks parallel zur gegenüberliegenden Seite verläuft (Abb. 9a) oder eine Seite eines Dreiecks (Abb. 9b) enthält, eine Stützgerade des Dreiecks. Jede Gerade, die eine Seite eines konvexen Vielecks enthält, ist eine Stützgerade des Vielecks (siehe Aufgabe 2).

Die Tangente an einen Kreis ist Stützgerade der durch die Kreislinie begrenzten Kreisfläche (Abb. 9e).

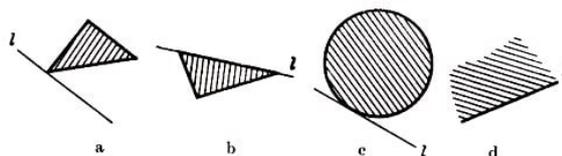


Abb. 9

Eine Stützgerade kann mit einer beschränkten konvexen Figur einen einzigen Punkt (siehe z. B. Abb. 9a, c) oder auch eine ganze Strecke (Abb. 9b) gemeinsam haben. Ist die konvexe Figur unbeschränkt, so kann auch die ganze Stützgerade zur Figur gehören (Abb. 9d).

Man kann eine Stützgerade einer konvexen Figur Φ auch als eine solche Gerade definieren, die zwar Randpunkte, aber keine inneren Punkte der Figur enthält. Es ist zunächst klar, dass eine Stützgerade keinen inneren Punkt A der Figur enthalten kann; sonst ließen sich Punkte der Figur Φ , die im Inneren eines gewissen Kreises um A gelegen wären, auf beiden Seiten der Stützgeraden finden (Abb. 10).

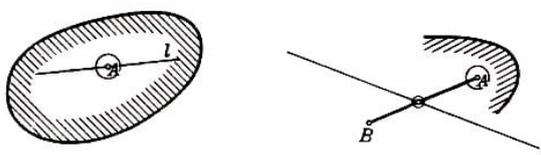


Abb. 10, 11

Enthält andererseits eine Gerade l keine inneren Punkte der Figur Φ , so muss die ganze Figur auf einer Seite von l gelegen sein. Es sei nämlich A irgendein innerer Punkt von Φ ; befände sich irgendein Punkt B (innerer Punkt oder Randpunkt) der Figur auf der anderen Seite der Geraden l , so wäre sowohl der Punkt A als auch der Schnittpunkt der Geraden l mit der Strecke AB (Abb. 11) ein innerer Punkt von Φ (siehe Aufgaben 3a, b).

An jede beschränkte konvexe Figur lassen sich genau zwei zu einer gegebenen Richtung parallele Stützgeraden ziehen. Um das zu beweisen, ziehen wir durch jeden Punkt der beschränkten konvexen Figur Φ eine zur gegebenen Richtung parallele Gerade (Abb. 12).

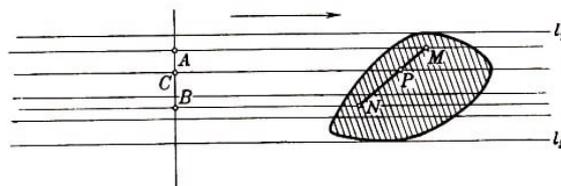


Abb. 12

Alle diese Geraden schneiden eine beliebige, zur gewählten Richtung senkrechte Gerade in einer eindimensionalen konvexen Figur (sind A und B zwei beliebige Schnittpunkte der Menge unserer Geraden mit der zu ihnen senkrechten Geraden und ist C ein beliebiger Punkt der Strecke AB , so muss auch C dieser Schnittfigur angehören, wie sich unter Benutzung der Konvexität der Figur Φ leicht der Abb. 12 entnehmen lässt).

Infolge des schon Gesagten muss diese Schnittfigur eine Strecke auf der Geraden sein (die Beschränktheit des Schnittes ergibt sich aus der Beschränktheit der Figur Φ), und die Menge aller zur gegebenen Richtung parallelen Geraden, die durch die Punkte von Φ hindurchgehen, muss einen Streifen bilden.

Die äußersten (Grenz-) Geraden l_1 , und l_2 dieses Streifens sind die beiden zur gegebenen Richtung parallelen Stützgeraden.

6. Man beweise, dass jede von zwei parallelen Stützgeraden, die maximalen Abstand besitzen, einen einzigen Randpunkt der Figur enthält und dass die Verbindungsstrecke dieser beiden Randpunkte senkrecht auf beiden Stützgeraden steht (Abb. 13).

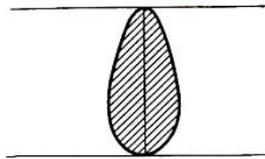


Abb. 13

7. Man beweise, dass der größte Abstand zwischen zwei Punkten einer konvexen Figur mit dem größten Abstand zwischen parallelen Stützgeraden übereinstimmt.

Der maximale Abstand zwischen Punkten einer ebenen Figur Φ heißt Durchmesser der Figur.⁷ Aus Aufgabe 7 folgt, dass man den Durchmesser einer konvexen Figur auch als Maximalabstand paralleler Stützgeraden dieser Figur definieren kann (man vergleiche damit die Definition der Breite einer konvexen Figur).

8. Sind A und B zwei Punkte einer konvexen Figur Φ , deren Abstand d maximalen Wert hat, so sind die Geraden, die durch die Punkte A und B hindurchgehen und senkrecht auf AB stehen, Stützgeraden von Φ .

Die Gesamtheit der von einem Punkt O ausgehenden Strahlen heißt konvex, wenn sie alle Strahlen enthält, die im Innern des Winkels von weniger als 180° verlaufen, der von je zwei nicht auf einer Geraden liegenden Strahlen dieser Gesamtheit aufgespannt wird (wir sprechen von einem konvexen Strahlenbüschel).

Wählt man irgendeinen Strahl a eines konvexen Strahlenbüschels und betrachtet alle Strahlen, die auf einer Seite des Strahls a gelegen sind, dann alle Strahlen, die auf der anderen Seite von a gelegen sind, so lässt sich mit Hilfe der angestellten Überlegungen leicht folgendes beweisen:

Ein konvexes Strahlenbüschel ist entweder ein Strahl, ein auf einer Geraden gelegenes Strahlenpaar, ein Winkel (kleiner als 180°), eine Halbebene oder die ganze Ebene (Abb. 14).

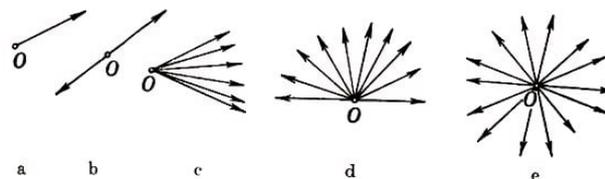


Abb. 14

Diesen Satz erhält man auch als Folgerung aus dem Satz über eindimensionale konvexe Figuren. Aus der Definition des konvexen Strahlenbüschels folgt nämlich unmittelbar, dass der Schnitt eines solchen Büschels mit jeder Geraden, die nicht durch den Punkt O geht, eine konvexe Figur ergibt.

⁷Siehe Anhang I, Aufgabe 5

Betrachtet man die Schnitte des konvexen Strahlenbüschels mit zwei parallelen, auf verschiedenen Seiten vom Punkt O gelegenen Geraden und berücksichtigt man, dass jede dieser Schnittfiguren überhaupt keinen Punkt zu enthalten braucht oder ein einzelner Punkt, eine Strecke, ein Strahl oder die ganze Gerade sein kann, so wird leicht klar, dass ein konvexes Strahlenbüschel nur eine der oben aufgezählten Formen haben kann; alle hierbei möglichen Fälle sind in Abb. 15 dargestellt.

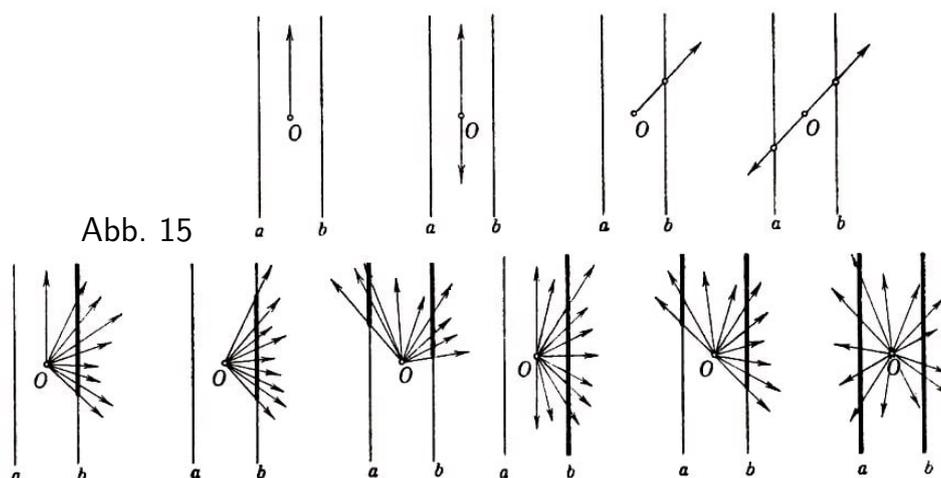


Abb. 15

Es sei Φ eine konvexe Figur und O ein Randpunkt derselben. Wir ziehen vom Punkt O aus Strahlen, die ihn mit jedem Punkt (inneren Punkt oder Randpunkt) von Φ verbinden (Abb. 16), und erhalten ein konvexes Strahlenbüschel.

Sind nämlich OA und OB zwei Strahlen des Büschels (A und B Punkte der Figur Φ), so schneiden alle im spitzen Winkel AOB gelegenen Strahlen die Strecke AB , die ganz aus Punkten der Figur besteht, und sind daher in unserem Büschel enthalten.

Das erhaltene Strahlenbüschel kann kein einzelner Strahl und auch kein einen gestreckten Winkel bildendes Paar von Strahlen sein, weil wir annehmen, dass die Figur nicht eindimensional ist. Ferner ist leicht zu zeigen, dass dieses Strahlenbüschel nicht die ganze Ebene ausfüllen kann.

Würden nämlich die Strahlen die Ebene ausfüllen, so könnte man zwei Strahlenpaare OA und OB , OC und OD unter ihnen auswählen derart, dass die Strahlen jedes Paares Fortsetzungen voneinander wären (d.h. einen gestreckten Winkel bilden würden).

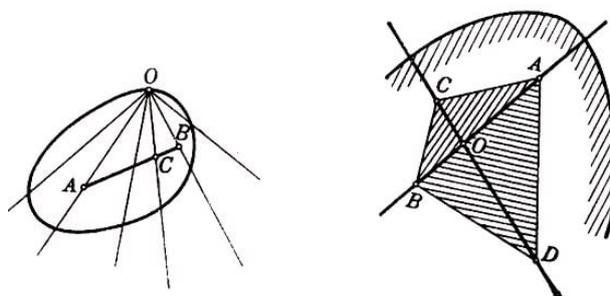


Abb. 16, 17

Es seien A, B, C, D Punkte der konvexen Figur, die auf diesen Strahlen liegen (Abb. 17). Die Figur Φ muss mit den Punkten A, B, C das ganze Dreieck ABC enthalten (Abb. 6) und mit den Punkten A, B, D auch das ganze Dreieck ABD , d. h., sie muss das konvexe Viereck $ABCD$ enthalten, in welchem der Punkt O innerer Punkt ist. Daher

kann in diesem Fall der Punkt O kein Randpunkt der Figur Φ sein.

Das betrachtete Strahlenbüschel bildet folglich entweder eine Halbebene oder einen Winkel, der kleiner als 180° ist. Im ersten Fall (Abb. 18) heißt der Punkt O regulärer Punkt der die Figur Φ begrenzenden konvexen Kurve K .

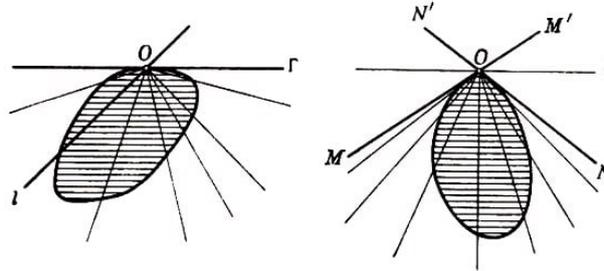


Abb. 18, 19

Die Gerade Γ , die die Halbebene begrenzt, ist eine Stützgerade der Figur Φ (alle Punkte von Φ liegen auf Strahlen unseres Büschels und folglich auf einer Seite von Γ). Dabei ist die Gerade Γ die einzige Stützgerade der Figur Φ im Punkte O , da auf beiden Seiten jeder anderen Geraden l , die durch den Punkt O geht, Strahlen unseres Büschels und damit Punkte der Figur Φ liegen (Abb. 18). Die Gerade Γ heißt Tangente der konvexen Kurve K im Punkte O .

Im zweiten Fall (Abb. 19) heißt der Punkt O Ecke (oder singulärer Punkt) der konvexen Randkurve K der Figur Φ . Alle Punkte der Figur Φ liegen in diesem Falle im Innern des Winkels MON ; daher wird jede Gerade l , die durch den Scheitel des Nebenwinkels MON' des Winkels MON hindurchgeht, eine Stützgerade der Figur Φ sein.

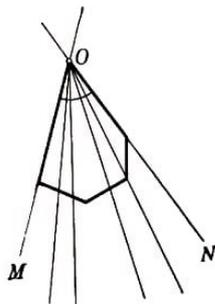


Abb. 20

Insbesondere sind die Strahlen OM und ON , welche Halbtangenten im Punkt O der die Figur Φ begrenzenden konvexen Kurve genannt werden, Stützgeraden der Figur. Der Winkel $MON = \alpha$ heißt Innenwinkel (oder einfach Winkel) der konvexen Kurve K oder der konvexen Figur Φ im Punkte O ; der Winkel $MON' = 180^\circ - \alpha$ heißt Außenwinkel der Kurve K oder der Figur Φ .

Gemäß dieser Definition sind alle Punkte eines konvexen Vielecks, außer den Eckpunkten, regulär; und zwar sind die Tangenten in diesen Punkten die Seiten des Vielecks.

Die Eckpunkte eines konvexen Vielecks sind seine singulären Punkte, und die Ecken im Sinne unserer obigen Definition fallen mit den Eckpunkten des Vielecks im gewöhnlichen Sinne zusammen (Abb. 20).

Fassen wir beide Fälle - den Fall des regulären Punktes und den Fall der Ecke einer konvexen Kurve - zusammen, so gelangen wir zu der Schlussfolgerung, dass durch jeden Punkt einer konvexen Kurve mindestens eine Stützgerade hindurchgeht.

Die Umkehrung dieser Behauptung bildet den Inhalt der Aufgabe 9.

9. Geht durch jeden Randpunkt einer beschränkten Figur mindestens eine Stützgerade, so ist die Figur konvex.

Auf diese Weise erhalten wir eine weitere Definition der beschränkten konvexen Figur: Eine beschränkte Figur heißt konvex, wenn durch jeden ihrer Randpunkte mindestens eine Stützgerade hindurchgeht.

Es sei Φ eine beliebige beschränkte konvexe Figur und K ihr Rand. Wir setzen auf der Kurve K einen bestimmten Umlaufsinn fest, z. B. entgegen dem des Uhrzeigers. Bei Bewegung auf der Kurve in dieser Richtung bleibt die Figur stets links (Abb. 21).

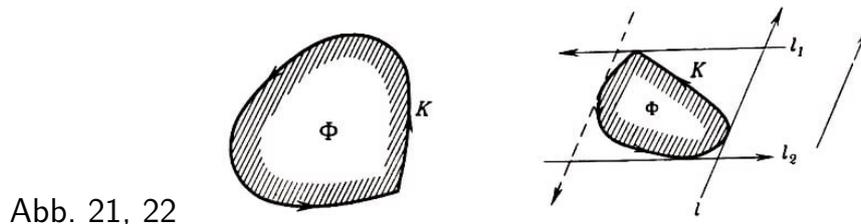


Abb. 21, 22

In Übereinstimmung damit setzen wir auch auf den Stützgeraden der Figur Richtungen fest, und zwar wollen wir die Richtung einer Stützgeraden l der Figur Φ stets so wählen, dass die Figur Φ links der Geraden l gelegen ist (Abb. 22).

In diesem Falle erhalten zwei zueinander parallele Stützgeraden l_1 und l_2 der Figur Φ entgegengesetzte Richtungen. Auf diese Weise wird in der Ebene jeder Richtung (die durch einen Pfeil angegeben werden kann) eine einzige Stützgerade entsprechen, welche diese Richtung besitzt (Abb. 22).

Ist K ein Vieleck, so gestattet die Festlegung des Umlaufsinnnes, von den Richtungen der Seiten des Vielecks zu sprechen. Wir sagen, n Randpunkte A, B, C, \dots, P einer Figur Φ seien in zyklischer Reihenfolge angeordnet, wenn beim Durchlaufen der Randkurve K der Figur Φ entgegen dem Uhrzeigersinn diese Punkte in der angegebenen Reihenfolge vorkommen (Abb. 23).

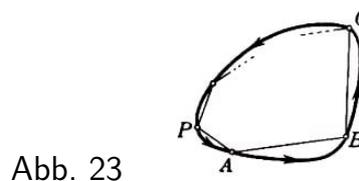


Abb. 23

Sind die Punkte A, B, C, \dots, P der Kurve K zyklisch angeordnet, so heißt das Vieleck $ABC\dots P$ der Kurve K einbeschrieben.

10. Man beweise, dass jedes einer beschränkten konvexen Kurve einbeschriebene Vieleck konvex ist.

11. (Umkehrung zu Aufgabe 10.) Sind je n Punkte einer beschränkten Kurve K Eckpunkte eines konvexen Vielecks, so ist die Kurve konvex.

12. Besitzt eine beschränkte konvexe Kurve nur endlich viele Ecken, so ist die Summe der Außenwinkel aller Ecken höchstens gleich 360° . Ist dabei die Summe aller Außenwinkel gleich 360° , so ist die Kurve ein konvexes Vieleck.

Sind n Stützgeraden l_1, l_2, \dots, l_n der konvexen Figur Φ gegeben, auf denen jeweils die

Richtungen festgelegt sind, und $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ die entsprechenden links gelegenen Halbebenen (Abb. 24), so ist Φ in jeder dieser linken Halbebenen enthalten, also auch in ihrem Durchschnitt.

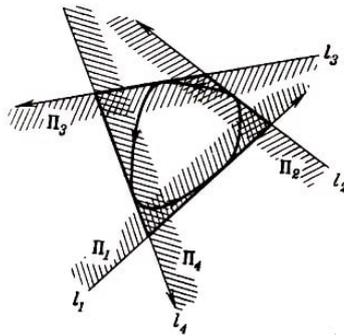


Abb. 24

Ist dieser Durchschnitt beschränkt, also ein Vieleck, so wird dieses Vieleck als der Figur Φ bzw. der Randkurve K umschrieben bezeichnet.

Aus dieser Definition folgt (siehe Aufgabe 1), dass ein einer konvexen Figur umschriebenes Vieleck stets konvex ist. Die Seiten des umschriebenen Vielecks sind Strecken auf den Geraden l_1, l_2, \dots, l_n .

Es kann jedoch vorkommen, dass drei (oder mehrere) der n Stützgeraden durch ein und denselben Randpunkt der Figur Φ hindurchgehen (der in diesem Falle sicher ein Eckpunkt ist; Abb. 25). In diesem Falle hat das umschriebene Vieleck weniger als n Seiten.

Wir werden jedoch ein solches Vieleck, das eine oder mehrere Seiten der Länge Null besitzt (Seiten, die in einen Punkt ausgeartet sind), ebenfalls noch als n -Eck ansehen. Diese "Seiten der Länge Null" besitzen bestimmte Richtungen, und zwar die Richtungen der entsprechenden Stützgeraden.

Daher können wir von n Innenwinkeln bzw. n Außenwinkeln des umschriebenen n -Ecks sprechen, unabhängig davon, ob dieses Seiten der Länge Null besitzt oder nicht.

Unter der Länge einer beschränkten konvexen Kurve K und dem Flächeninhalt der von dieser Kurve begrenzten Figur Φ versteht man die Grenzwerte der Umfänge bzw. der Flächeninhalte der in Φ eingeschriebenen Vielecke, deren Seiten unendlich klein werden, bzw. des umschriebenen Vielecks der Figur Φ , deren Außenwinkel unendlich klein werden⁸.

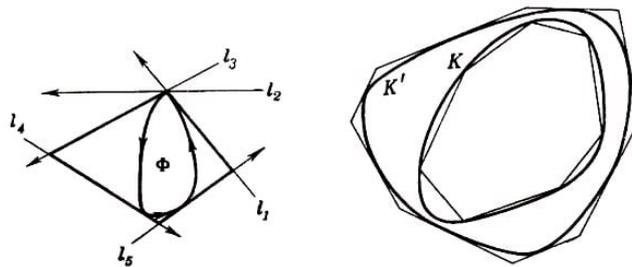


Abb. 25, 26

⁸Die Existenz der Länge einer konvexen Kurve und des Inhalts einer konvexen Figur ist leicht zu beweisen, wenn man gewisse Sätze der Theorie der Grenzwerte benutzt.

Aus dieser Definition folgt, dass die Länge einer ganz im Innern einer konvexen Kurve K' liegenden konvexen Kurve K nicht größer als die Länge von K' sein kann.

Denn betrachten wir eine Folge von Vielecken, die der Kurve K einbeschrieben sind und deren Seiten unbegrenzt abnehmen, und eine Folge von Vielecken, die der Kurve K' umbeschrieben sind und deren Außenwinkel unbegrenzt abnehmen (Abb. 26).

Jedes Vieleck der zweiten Folge enthält jedes Vieleck der ersten Folge und besitzt daher einen größeren Umfang. Daraus ergibt sich, dass der Grenzwert der Umfänge der Vielecke der zweiten Folge - die Länge von K' - nicht kleiner als der Grenzwert der Umfänge der Vielecke der ersten Folge - die Länge von K - sein kann.

Die Definition eines konvexen Körpers im Raum unterscheidet sich nicht von der Definition einer konvexen Figur in der Ebene. Jedoch muss man zur Definition der inneren Punkte, der äußeren Punkte und der Randpunkte eines Körpers nicht Kreise, sondern Kugeln um die Punkte betrachten.

Die Randpunkte eines Körpers bilden seine Berandung. Die Berandung eines konvexen Körpers heißt konvexe Fläche; besteht diese aus ebenen Vielecken, so heißt sie konvexes Polyeder.

An Stelle der Stützgeraden betrachtet man beim räumlichen Körper Stützebenen. Das sind Ebenen, die nur aus Randpunkten des Körpers und aus gewissen Punkten des Raumes bestehen und so beschaffen sind, dass der ganze Körper auf einer Seite dieser Ebenen gelegen ist.

Für konvexe Körper im Raum gelten den Behauptungen der Aufgaben 1-9 analoge Sätze (sie ergeben sich aus den Formulierungen der Aufgaben 1-9, indem man die Ausdrücke "konvexe Figur" durch "konvexen Körper", "Randkurve" durch "Berandungsfläche", "Stützgerade" durch "Stützebene" usw. ersetzt). Wir stellen dem Leser anheim, diese Sätze selbst zu beweisen.

1.2 Der Satz von Helly und seine Anwendungen

Dieser Paragraph ist einem interessanten Satz über konvexe Figuren, dem sogenannten Satz von Helly, gewidmet (siehe Aufgabe 14), der in verschiedenen mathematischen Disziplinen Anwendung findet.⁹

In diesem Paragraphen sind einige Sätze zusammengestellt, die mit Hilfe dieses Satzes bewiesen werden können. Die Aufgaben 16, 17 und 19a werden in etwas verschärfter Formulierung auch in § 6 des Buches angeführt (siehe Aufgaben 67-69).

13. Gegeben seien vier konvexe Figuren in der Ebene, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen. Man beweise, dass alle vier Figuren mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen.

⁹So erhielt z. B. der bekannte sowjetische Mathematiker L. H. Schnirelman mit Hilfe des Satzes von Helly äußerst wichtige Ergebnisse auf dem Gebiet der Analysis (Approximation von Funktionen durch Polynome). Siehe L. H. Schnirelman, Über gleichmäßige Approximation), *Izvestija der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Mathematische Serie*, Bd. 2, 1938, S.53-59). Siehe auch H. Rademacher and I. J. Schoenberg. Helly's theorems on convex domains and Tschebyscheff's approximation problem, *Canadian Journ. of Math.*, 2, 1950, S. 245-256.

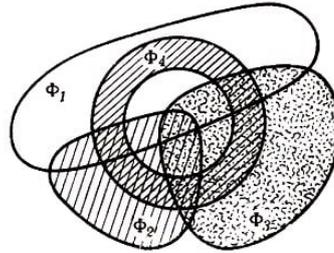


Abb. 27

Für nichtkonvexe Figuren ist dieser Satz selbstverständlich nicht richtig.

In Abb. 27 sind z. B. vier Figuren dargestellt, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen; jedoch haben alle vier Figuren keinen gemeinsamen Punkt.

14. Satz von Helly.

Gegeben seien n konvexe Figuren der Ebene, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt haben. Man beweise, dass alle n Figuren einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es seien jetzt unendlich viele konvexe Figuren in der Ebene gegeben, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen. Nach dem Satz von Helly haben je endlich viele dieser Figuren einen nichtleeren Durchschnitt (der aus einem einzigen Punkt bestehen kann).

Jedoch lässt sich hieraus im allgemeinen nicht folgern, dass alle gegebenen Figuren einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Wir betrachten als Beispiel die Gesamtheit aller "oberen Halbebenen", die durch alle möglichen horizontalen Geraden von unten begrenzt werden. Je drei solcher Halbebenen besitzen einen nichtleeren Durchschnitt; je endlich viele dieser Halbebenen besitzen ebenfalls einen nichtleeren Durchschnitt (Abb. 28).

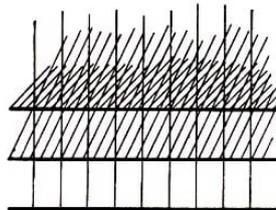


Abb. 28

Fügen wir jedoch zu irgendeiner Menge solcher Halbebenen immer weitere, stets höher gelegene hinzu, so wird sich der Durchschnitt mehr und mehr nach oben verschieben, so dass schließlich jeder Punkt der Ebene außerhalb des Durchschnittes der Halbebenen bleibt. Daher existieren keine Punkte, die gleichzeitig in allen oberen Halbebenen gelegen sind.

Betrachtet man jedoch beschränkte Figuren, so kann durch Hinzufügen immer neuer Figuren zu einer gewissen Menge von Figuren der Durchschnitt nicht "ins Unendliche entweichen"; er bleibt stets in einem beschränkten Teil der Ebene¹⁰.

In diesem Falle muss ein Punkt existieren, der allen Figuren zugleich angehört.¹¹ Mit anderen Worten, es gilt folgender, ebenfalls von Helly stammender Satz:

¹⁰Der aufmerksame Leser bemerkt, dass für die Richtigkeit dieser Überlegung die Beschränktheit wenigstens einer der betrachteten Figuren hinreicht.

¹¹Der strenge Beweis dieses Sachverhaltes, der sich auf einige allgemeine Sätze über unendliche Mengen stützt, wird in Anhang I gegeben.

Sind endlich oder unendlich viele beschränkte ebene konvexe Figuren gegeben, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen, so existiert ein Punkt, der allen Figuren zugleich angehört.

In einigen Aufgaben des vorliegenden Paragraphen wird der Satz von Helly in dieser allgemeinen Formulierung benutzt.

15. Gegeben seien n Punkte in der Ebene, von denen bekannt sei, dass je drei von ihnen in einen Kreis vom Radius 1 eingeschlossen werden können. Man beweise, dass alle n Punkte in einen Kreis vom Radius 1 eingeschlossen werden können.

16*. Satz von Jung. In der Ebene seien n Punkte gegeben, die paarweise höchstens den Abstand 1 voneinander haben. Man beweise, dass alle Punkte in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden können.

Der Satz von Jung ist auch im Fall unendlich vieler Punkte richtig. Bildet die Punktmenge eine gewisse ebene (nicht notwendig konvexe) Figur, so kann der Satz von Jung folgendermaßen formuliert werden:

Jede ebene (nicht notwendig konvexe) Figur vom Durchmesser 1 kann in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden.

In dieser Form wird der Satz bei gewissen zahlentheoretischen Problemen benutzt. Aus dem Satz von Jung folgt: Befindet sich auf einem Tischtuch ein Fleck vom Durchmesser d , so kann man ihn sicher mit einer runden Serviette vom Radius $\frac{d}{\sqrt{3}}$ überdecken (der Fleck kann aber eine Form haben, die es unmöglich macht, ihn mit einer Serviette von kleinerem Radius zu bedecken).

In enger Beziehung zum Satz von Jung steht folgende interessante Aufgabe, deren Lösung bisher nicht bekannt ist:

Gesucht ist eine Figur mit minimalem Flächeninhalt, die jede ebene Figur vom Durchmesser 1 überdeckt (das ist eine Figur II, in der jede ebene Figur vom Durchmesser 1 untergebracht werden kann).

Der Satz von Jung besagt, dass sich jede Figur vom Durchmesser 1 durch einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ überdecken lässt. Man kann zeigen, dass jede Figur vom Durchmesser 1 schon von einem regelmäßigen Sechseck überdeckt werden kann, das einem Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschrieben ist (siehe § 3, Aufgabe 31). Jedoch ist auch dieses Sechseck nicht die kleinste Figur, die die gewünschte Eigenschaft besitzt.¹²

Der kleinste Abstand zwischen parallelen Stützgeraden einer beschränkten konvexen Figur heißt Breite dieser konvexen Figur.¹³

17**, Satz von Blaschke. Man beweise, dass jede beschränkte konvexe Figur der Breite 1 einen gewissen Kreis vom Radius $\frac{1}{3}$ umschließt.

¹²Die Existenz einer Figur kleinsten Flächeninhalts, die jede Figur vom Durchmesser 1 überdecken kann, folgt aus Anhang I, Satz 1.

¹³Siehe Anhang I, Aufgabe 6.

Eine analoge Aufgabe zu der von uns unmittelbar nach dem Satz von Jung angeführten stellt die Frage nach der Figur größten Flächeninhalts dar, die in jeder konvexen Figur der Breite 1 untergebracht werden kann. Auch diese Frage ist, bisher noch ungelöst.¹⁴

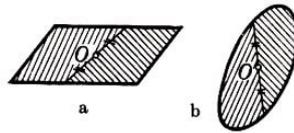


Abb. 29

Die beiden folgenden Aufgaben dieses Paragraphen enthalten Abschätzungen, aus denen ersichtlich ist, bis zu welchem Grade eine beliebige Figur der Ebene "zentriert" ist. Der Mittelpunkt eines Kreises besitzt die Eigenschaft, dass jede Sehne durch den Mittelpunkt den Inhalt der Kreisfläche und die Länge des Kreisumfangs halbiert; die Sehne selbst wird ebenfalls durch den Kreismittelpunkt halbiert. Diese Eigenschaft besitzt der Mittelpunkt jeder zentrosymmetrischen Figur (Abb. 29a, b).

Allerdings besitzt nicht jede ebene Figur ein Symmetriezentrum; im alltäglichen Leben sagt man jedoch oft, ein Springbrunnen befände sich "gerade in der Mitte" eines Platzes oder eine gewisse Person wohne "im Zentrum" einer Stadt, und zwar auch dann, wenn der Platz oder die Stadt kein Zentrum im eigentlichen Sinne besitzt.

Die Aufgaben 18 und 19a können als Erläuterungen der Aussage, ein Punkt O befinde sich im "Zentrum" einer gewissen Figur Φ , angesehen werden. Weitere Aufgaben ähnlicher Art werden später angegeben (siehe 3 3, Aufgaben 33 und 34).

18.a) Gegeben seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n der Ebene. Man beweise, dass ein Punkt O der Ebene existiert derart, dass auf jeder Seite einer beliebigen, durch den Punkt O gehenden Geraden l mindestens $\frac{n}{3}$ der Punkte liegen (einschließlich der Punkte, die auf der Geraden l selbst gelegen sind).

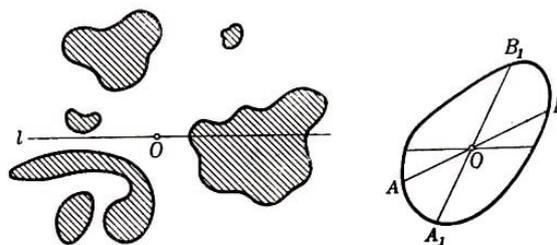


Abb. 30,31

b) Gegeben sei in der Ebene eine beschränkte Kurve K (die aus einzelnen Stücken bestehen darf; Abb. 30) der Länge L . Man beweise, dass es in der Ebene einen Punkt O gibt derart, dass jede Gerade, die durch den Punkt O geht, die Kurve K in zwei Teile teilt, deren Längen jeweils nicht kleiner als $\frac{L}{3}$ sind.

c) Gegeben sei eine ebene beschränkte (eventuell aus einzelnen Stücken bestehende; Abb. 30) Figur Φ mit dem Flächeninhalt S . Man beweise, dass es in der Ebene einen Punkt O gibt derart, dass jede Gerade, die durch den Punkt O geht, die Figur in zwei Teile teilt, deren Flächeninhalte jeweils nicht kleiner als $\frac{S}{3}$ sind.

¹⁴Die Existenz einer Figur größten Flächeninhalts, die im Innern jeder konvexen Figur der Breite 1 eingeschlossen werden kann, folgt ebenfalls aus Anhang I, Satz 1.

Ist Φ eine konvexe Figur, so lässt sich die Abschätzung der Aufgabe 18c bedeutend verschärfen. Man kann nämlich beweisen, dass innerhalb jeder beschränkten konvexen Figur Φ ein Punkt O existiert derart, dass jede Gerade durch O die Figur Φ in zwei Teile teilt, deren Flächeninhalte jeweils nicht kleiner als $\frac{4}{9}$ des Flächeninhalts der Figur Φ sind (siehe § 3, Aufgabe 36).

Es wäre interessant, eine entsprechende Verschärfung der Abschätzung der Aufgabe 18b zu finden für den Fall, dass K eine konvexe Kurve ist.

19*. a) Man beweise: Im Inneren jeder beschränkten konvexen Figur Φ existiert ein Punkt O derart, dass jede durch O verlaufende Sehne AB der Figur Φ durch den Punkt O in zwei Strecken AO und BO geteilt wird, deren Längen jeweils nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ der Länge der Strecke AB sind (Abb. 31).

b) Man leite aus der Behauptung der Aufgabe 19a einen neuen Beweis des Satzes von Blaschke her (siehe Aufgabe 17).

20**. Satz von M. A. Krasnosielski. Existiert zu je drei Punkten A, B, C eines beliebigen Vielecks K ein Punkt M derart, dass alle drei Strecken MA, MB, MC ganz im Innern des Vielecks liegen (Abb. 32a), so existiert im Innern von K ein Punkt O , dessen sämtliche Verbindungsstrecken mit Punkten des Vielecks K ebenfalls ganz im Innern des Vielecks liegen.

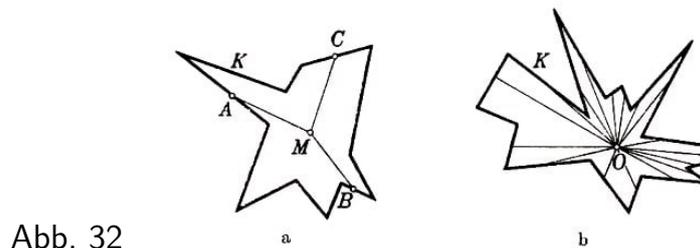


Abb. 32

Vielecke K , welche die Eigenschaft besitzen, dass alle Verbindungsstrecken eines gewissen inneren Punktes O mit allen Randpunkten des Vielecks K in K liegen, heißen sternförmige Vielecke (Abb. 32b). Der Satz von Krasnosielski gibt eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass ein Vieleck sternförmig ist.

Dieser Satz lässt sich folgendermaßen veranschaulichen. Man denke sich eine Gemäldegalerie (die aus mehreren miteinander in Verbindung stehenden Sälen bestehen kann), deren Wände völlig mit Gemälden behängt seien. Der Satz von Krasnosielski besagt: Kann man für je drei Gemälde der Galerie einen Punkt finden, von dem aus sie gleichzeitig zu sehen sind, so existiert ein Punkt, von dem aus man alle Gemälde der Galerie zugleich sehen kann.

In den folgenden Aufgaben werden zwei neue Beweise des Satzes von Helly skizziert, die von den Lösungen der Aufgaben 13 und 14 verschieden sind. Aufgabe 21 zeigt, wie man den Satz von Helly für den Spezialfall, dass alle konvexen Figuren konvexe Vielecke sind, leicht beweisen kann.

Da der Satz von Helly für konvexe Vielecke gilt, lässt er sich auch für beliebige konvexe Figuren leicht beweisen. Ist nämlich in jede der betrachteten konvexen Figuren ein

Vieleck einbeschrieben (oder jeder ein Vieleck umbeschrieben), das die Figur selbst hinreichend approximiert (Abb. 33), so schneiden sich diese Vielecke, oder sie schneiden sich nicht, je nachdem, ob die Figuren selbst sich schneiden oder nicht schneiden.

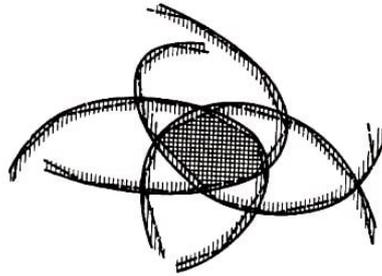


Abb. 33

Ein strenger Beweis des allgemeinen Satzes von Helly aus dem analogen Satz für Vielecke bietet jedoch gewisse Schwierigkeiten.

Der Beweis, dem die Aufgaben 22-24 gewidmet sind, ist etwas komplizierter als unser erster Beweis; er lässt sich jedoch besser zum Beweis des Satzes von Helly für den Fall konvexer Körper im Raum (siehe Aufgabe 25) verallgemeinern.

21.a) Besitzen je drei von n Halbebenen einen gemeinsamen Punkt, so besitzen auch alle n Halbebenen einen gemeinsamen Punkt (Satz von Helly für Halbebenen).

b) Man leite aus der Behauptung der Aufgabe 21a her, dass n konvexe Vielecke einen gemeinsamen Punkt besitzen, wenn je drei der n (nicht notwendig beschränkten) Vielecke einen gemeinsamen Punkt besitzen (Satz von Helly für Vielecke).

22. Besitzen je zwei von n Strecken einer Geraden einen gemeinsamen Punkt, so besitzen alle n Strecken einen gemeinsamen Punkt.

23. (Hilfssatz.) Schneiden sich zwei beschränkte konvexe Figuren Φ_1 und Φ_2 der Ebene nicht, so existiert eine Gerade l derart, dass Φ_1 und Φ_2 auf verschiedenen Seiten von l liegen.

24. Man beweise unter Benutzung der Resultate der Aufgaben 22 und 23, dass vier beschränkte konvexe Figuren der Ebene einen gemeinsamen Punkt besitzen, sobald je drei von ihnen einen Punkt gemeinsam haben.

Aus der Behauptung der Aufgabe 24 folgt ohne Schwierigkeit der Satz von Helly für beschränkte konvexe Figuren (siehe Lösung der Aufgabe 14).

25. Der Satz von Helly für den Raum. Gegeben seien n konvexe beschränkte Körper im Raum, von denen je vier einen gemeinsamen Punkt besitzen mögen. Man beweise, dass alle n Körper einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Überdies gilt: Sind unendlich viele beschränkte konvexe Körper im Raum gegeben, von denen je vier einen gemeinsamen Punkt besitzen, so besitzen auch alle diese Körper einen gemeinsamen Punkt.

26. Man formuliere und beweise die stereometrischen Sätze, die den in den Aufgaben 16-19a enthaltenen Sätzen der ebenen Geometrie analog sind.

Die Behauptung der Aufgabe 22 wird "Satz von Helly für die Gerade" genannt; in den Aufgaben 14 und 25 wird der Satz von Helly für die Ebene und für den Raum formuliert. Fasst man diese Aufgaben zusammen, so erhält man einen allgemeinen Satz, der alle drei Fälle umfasst.

Wir wollen die Gerade einen eindimensionalen, die Ebene einen zweidimensionalen und den ganzen Raum einen dreidimensionalen Raum nennen. Dann gilt folgender Satz:

Ist in einem n -dimensionalen Raum ($n = 1,2,3$) eine gewisse Anzahl beschränkter konvexer Körper gegeben, von denen je $n + 1$ einen gemeinsamen Punkt besitzen, so haben alle diese Körper einen gemeinsamen Punkt.

In der Mathematik und in der Physik spielt der Begriff des n -dimensionalen Raumes für $n > 3$ eine äußerst wichtige Rolle. Der Satz von Helly ist auch für allgemeine n -dimensionale Räume in der oben angegebenen Formulierung richtig. Alle drei Beweise dieses Satzes (siehe Aufgabe 13, 14, 21 und 22-24) können auf den n -dimensionalen Fall übertragen werden.¹⁵

1.3 Eine Eigenschaft der stetigen Funktionen

Dieser Paragraph nimmt einen besonderen Platz in dem Buch ein. Er macht den Leser mit den äußerst wichtigen Begriffen der Funktion und der Stetigkeit vertraut.

Die recht einfache und anschauliche Eigenschaft der stetigen Funktionen, um die es sich hier handelt, ermöglicht es, eine ganze Reihe keineswegs trivialer geometrischer Sätze zu beweisen (siehe etwa Aufgabe 31, 33 und 36 dieses Paragraphen), die sonst oft nur auf sehr komplizierte Art oder überhaupt nicht beweisbar sind.

Der Leser, dem der Inhalt dieses Paragraphen als zu schwierig erscheint, kann ihn überspringen, ohne dass das Verständnis des Folgenden beeinträchtigt wird. Nur für die Lösungen der Aufgabe 89 (§ 7) und 109 (§ 8) werden die Aufgaben 30a bzw. 30b benutzt.

Alle in diesem Paragraphen betrachteten Figuren werden als beschränkt vorausgesetzt.

Eine veränderliche Größe y heißt Funktion¹⁶ einer veränderlichen Größe x , wenn jedem Wert x ein wohlbestimmter Wert y entspricht.

So ist der Umfang eines Kreises eine Funktion des Radius, der Sinus eines Winkels ist eine Funktion dieses Winkels, die Temperatur an einer gegebenen Stelle ist eine Funktion der Zeit usw. Ein geeignetes Mittel, eine Funktion zu veranschaulichen, ist die graphische Darstellung der Funktion (ihre Kurve).

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig, wenn ihre graphische Darstellung eine zusammenhängende Kurve ist. So sind z. B. die Funktionen $y = 2x + 1$ (Abb. 34a), $y = x^2 - 2$

¹⁵Siehe die Arbeit von E. Helly, "Über die Menge konvexer Körper mit gemeinsamen Punkten", Jber. d. Deutsch. Math.-Vereinig., Bd. 82, 1923, S. 175-176, ferner die Arbeit von J. Radon, "Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten", Math. Ann., Bd. 88, 1921, S. 113-115 und die Arbeit von I. G. Dukor, Zum Satz von Helly über die Menge konvexer Körper mit gemeinsamen Punkten, Uspechi mat. nauk, Heft X, 1944, S. 60-61.

¹⁶In der Mathematik werden Funktionen meist mit f , F , φ usw. bezeichnet, z. B. $y = f(x)$.

(Abb. 34b), $y = \sin x$ (Abb. 34c), aber auch die in den Abbildungen 34d und 34e dargestellten Funktionen stetig, nicht jedoch die in Abbildung 35 dargestellten Funktionen.

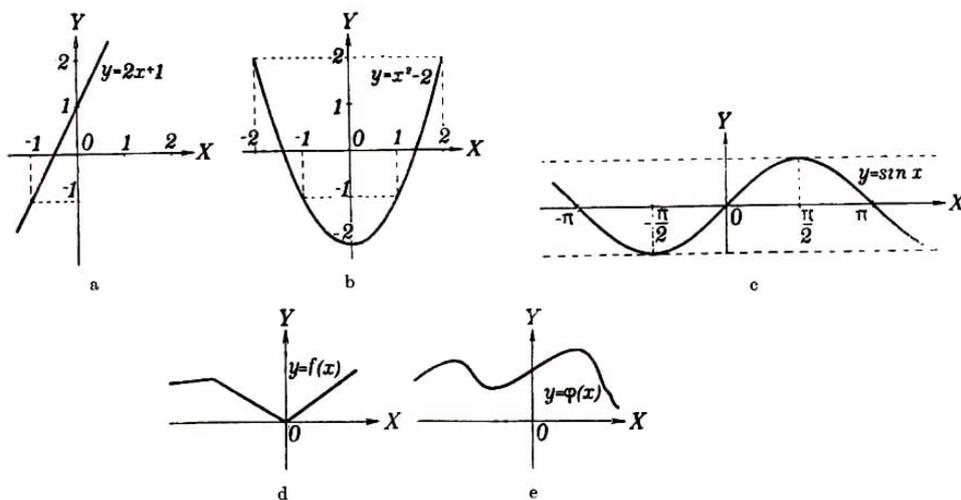


Abb. 34

Man kann auch eine Definition der Stetigkeit angeben, ohne sich auf die Anschauung (graphische Darstellung) zu berufen.

Es sei x_0 ein beliebiger Wert der Variablen x und x_1 ein nahe bei x_0 gelegener Wert derselben Variablen. Die Funktion f ist stetig, wenn bei Annäherung von x_1 an x_0 der absolute Betrag der Differenz $f(x_1) - f(x_0)$ beliebig klein wird.¹⁷

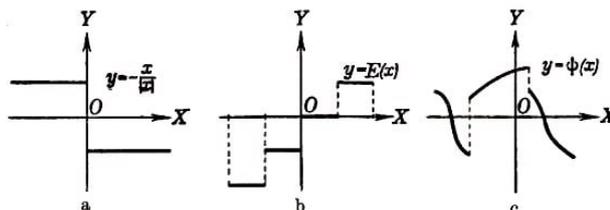


Abb. 35

Offenbar besitzen die in Abb. 35 dargestellten Funktionen Punkte, in denen die Stetigkeit der Funktionen verletzt ist. In der Nähe dieser Punkte machen die Werte der Funktionen "Sprünge", daher können die Differenzen $f(x_1) - f(x_0)$ nicht sehr klein gemacht werden.

Alle stetigen Funktionen besitzen folgende Eigenschaft:

Nimmt eine im Intervall $a < x < b$ stetige Funktion $f(x)$ für $x = a$ den Wert A und für $x = b$ den Wert B an, so nimmt sie im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ jeden zwischen A und B gelegenen Wert M an mindestens einer Stelle an.

Geometrisch ist dieser Satz völlig klar. Er besagt, dass eine stetige Kurve, die das Bild einer Funktion $y = f(x)$ ist und durch zwei Punkte $P(x = a, y = A)$, $Q(x = b, y = B)$ hindurchgeht, welche auf verschiedenen Seiten einer zur x -Achse im Abstand M parallelen Geraden l gelegen sind, die Gerade l notwendig schneidet (Abb. 36a).¹⁸

Unstetige Funktionen haben diese Eigenschaft nicht (Abb. 36b).

¹⁷Genaue Formulierung: Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig im Punkte $x = x_0$, wenn zu jeder (beliebig kleinen) positiven Zahl ε eine Zahl δ existiert derart, dass $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist, sobald $|x_1 - x_0| < \delta$. Die Funktion $y = f(x)$ heißt stetig im Intervall (a, b) , wenn sie in jedem Punkte dieses Intervalls stetig ist.

¹⁸Ein strenger Beweis dieses Satzes ist in den Lehrbüchern der Analysis zu finden.

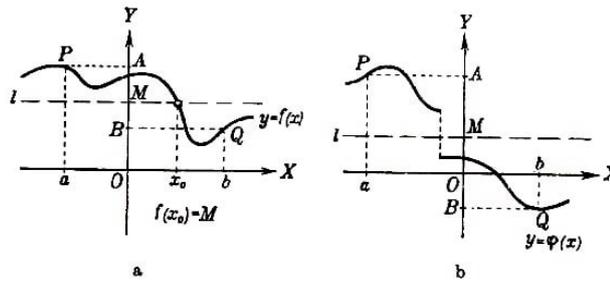


Abb. 36

Diese Eigenschaft der stetigen Funktionen ist trotz ihrer scheinbaren Trivialität äußerst wichtig, da sie es ermöglicht, eine ganze Reihe von Sätzen zu beweisen, die auf den ersten Blick durchaus nicht trivial erscheinen.

Als Beispiel beweisen wir hier folgende Behauptung: Jede kubische Gleichung (Gleichung 3. Grades) mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine reelle Wurzel. In dieser Beziehung verhalten sich die kubischen Gleichungen "anständiger" als die quadratischen Gleichungen, die keine reellen Wurzeln zu haben brauchen. Es sei

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad \left(p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}, r = \frac{d}{a} \right)$$

unsere kubische Gleichung. Wir untersuchen die Funktion

$$y = x^3 + px^2 + qx + r \quad \text{anders geschrieben} \quad y = x^3 \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right)$$

Diese Funktion ist stetig. Offenbar gilt

$$\left| \frac{p}{x} \right| < \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{q}{x^2} \right| < \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{r}{x^3} \right| < \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right| < 1$$

und

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0$$

wenn der absolute Betrag von x größer ist als $|3p|$, $\sqrt{|3q|}$, $\sqrt[3]{|3r|}$ (d. h. größer als die größte dieser Zahlen). Das Vorzeichen des Ausdrucks

$$y = x^3 \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right)$$

stimmt daher mit dem Vorzeichen von x^3 überein, d. h., für x größer als $|3p|$, $\sqrt{|3q|}$, $\sqrt[3]{|3r|}$ ist y positiv, und für x kleiner als $|3p|$, $\sqrt{|3q|}$, $\sqrt[3]{|3r|}$ ist y negativ. Infolge der Stetigkeit der Funktion $y = f(x)$ lässt sich daher ein Wert x , finden derart, dass

$$f(x_0) = x_0^3 + px_0^2 + qx_0 + r = 0$$

gilt; also existiert mindestens eine reelle Wurzel unserer Gleichung.

Die in den Aufgaben des vorliegenden Paragraphen erwähnten Sätze sind Folgerungen der oben formulierten Eigenschaft der stetigen Funktionen.

27. Gegeben sei eine Figur Φ (die Figur braucht nicht unbedingt konvex zu sein, sie kann sogar aus mehreren einzelnen Teilen bestehen) und irgendeine Gerade l : Man beweise die Existenz einer zu l parallelen Geraden l^* , die die Figur Φ in zwei gleichgroße Teile zerlegt (Abb. 37).

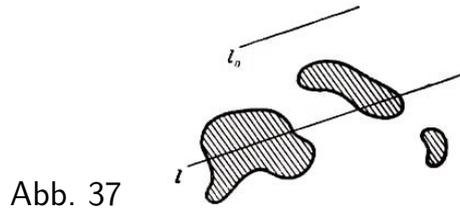


Abb. 37

28.a) Gegeben seien zwei konvexe Figuren Φ_1 und Φ_2 in der Ebene. Man beweise die Existenz einer Geraden l , welche die beiden Figuren Φ_1 und Φ_2 gleichzeitig halbiert (Abb. 38a).

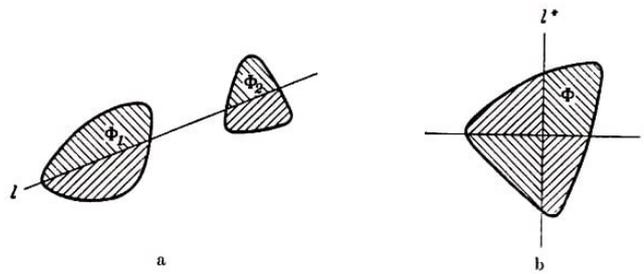


Abb. 38

b) Gegeben sei eine konvexe Figur Φ in der Ebene. Man beweise, dass zwei zueinander senkrechte Geraden l und l^* existieren, welche die Figur Φ in vier gleichgroße Teile teilen (Abb. 38b).

29. Man beweise, dass sich jeder konvexen Figur ein Quadrat umschreiben lässt.

Aus Aufgabe 29 folgt, dass man um jede (nicht notwendig konvexe) Figur Ψ ein Quadrat beschreiben kann (Abb. 39).

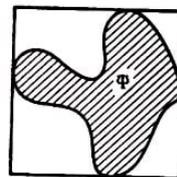


Abb. 39

Um diese Behauptung zu beweisen, zeichnen wir alle möglichen Stützgeraden einer nichtkonvexen Figur (Abb. 40a) und untersuchen den Durchschnitt aller durch diese Geraden bestimmten Halbebenen, in denen die Figur Ψ enthalten ist. Nach Aufgabe 1 des § 1 (die auch für unendlich viele konvexe Körper gültig bleibt) ist dieser Durchschnitt eine konvexe Figur; wir bezeichnen sie mit Φ .

Die konvexe Figur Φ ist, wie man leicht zeigen kann, die kleinste Ψ enthaltende konvexe Figur. Sie wird als konvexe Hülle der Figur Ψ bezeichnet.¹⁹

¹⁹Die konvexe Hülle einer Figur Ψ kann man sich als die Figur vorstellen, die von einem (einer) dünnen, Ψ umfassenden gespannten Gummiband (Gummihaut) gebildet wird.

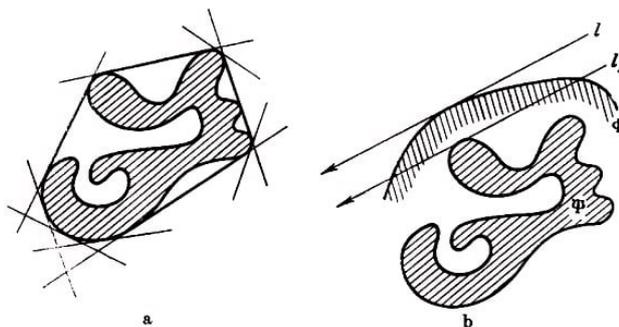


Abb. 40

Man sieht unmittelbar, dass jede Stützgerade der konvexen Figur Φ zugleich eine Stützgerade der nichtkonvexen Figur Ψ ist. Wäre nämlich eine Stützgerade l der Figur Φ nicht Stützgerade von Ψ (Abb. 40b), so erhielten wir durch Parallelverschiebung von l bis zur Berührung mit dem Rand von Ψ eine Stützgerade l_1 der Figur Ψ .

Gemäß Definition der Figur Φ muss diese ganz in der Halbebene enthalten sein, die von der Geraden l_1 begrenzt wird und in der Ψ gelegen ist; folglich kann die Gerade l_1 die der anderen Halbebene angehört, keine Stützgerade von Φ sein.

Hieraus folgt, dass jedes Quadrat, das der konvexen Figur Φ umschrieben ist, zugleich auch der nichtkonvexen Figur Ψ umschrieben sein muss.

Mit Hilfe von Überlegungen, die den Lösungen der Aufgaben dieses Paragraphen analog sind, kann man zeigen, dass jeder konvexen Kurve ein Quadrat einbeschrieben werden kann.

Der sowjetische Mathematiker L. H. Schnirelmann bewies im Jahre 1929, dass jeder (nicht notwendig konvexen) ebenen geschlossenen Kurve ein Quadrat einbeschrieben werden kann (mit anderen Worten, auf jeder geschlossenen Kurve kann man vier Punkte finden, welche die Eckpunkte eines Quadrats sind; Abb. 41). Der Beweis dieses allgemeinen Satzes ist jedoch Abb. 41 recht schwierig.²⁰



Abb. 41

30.a) Man beweise, dass sich jeder konvexen Kurve ein Sechseck mit gleichen Winkeln umschreiben lässt, das ein Paar gleicher gegenüberliegender Seiten besitzt.

b*) Man beweise, dass sich jeder konvexen Kurve ein Sechseck mit gleichen Winkeln umschreiben lässt, das eine Symmetrieachse besitzt (Abb. 42).

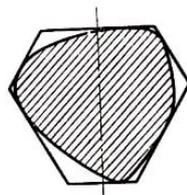


Abb. 42

²⁰Siehe Uspechi mat. nauk, Heft X, 1944, L. H. Schnirelmann, Über einige geometrische Eigenschaften geschlossener Kurven, S. 34-44.

31*. Man beweise, dass jede ebene Figur vom Durchmesser l im Innern eines regelmäßigen Sechsecks der Seitenlänge $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden kann.

Da jedes solches regelmäßige Sechseck einem Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ einbeschrieben werden kann, bedeutet diese Aufgabe eine beträchtliche Verschärfung des Satzes von Jung (siehe § 2).

32*. a) Gegeben sei eine konvexe Kurve K und irgendeine Gerade l in der Ebene. Man beweise, dass sich drei zur Geraden l parallele Sehnen²¹ $A'B'$, $A''B''$, A_0B_0 der Kurve K finden lassen derart, dass die Sehne A_0B_0 in gleichem Abstand von den Sehnen $A'B'$ und $A''B''$ gelegen und $A'B' = A''B'' = \frac{1}{2}A_0B_0$, ist.

b) Man beweise, dass jeder konvexen Kurve ein Sechseck einbeschrieben werden kann derart, dass je zwei gegenüberliegende Seiten zueinander und zu der Diagonalen parallel sind, welche die nicht auf diesen Seiten gelegenen Eckpunkte verbindet.

33*. a) Satz von S. S. Kowner.

Man beweise, dass im Innern jeder konvexen Figur Φ eine zentrosymmetrische konvexe Figur eingeschlossen werden kann, deren Flächeninhalt nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts der Figur Φ ist.

b) Man beweise, dass es unmöglich ist, im Innern eines Dreiecks eine zentrosymmetrische Figur einzuschließen, deren Flächeninhalt größer als $\frac{2}{3}$ des Dreieckinhalts ist.

Der Satz von Kowner kann als eine Abschätzung für den "Grad der Zentriertheit" einer konvexen Figur angesehen werden (in Analogie zu den Sätzen der Aufgaben 18b, 18c und 19a des § 2 oder zur Aufgabe 69 des § 6).

Der Mittelpunkt O einer zentrosymmetrischen Figur Φ lässt sich als Punkt definieren, an dem die Figur symmetrisch gespiegelt werden kann (d. h., ersetzt man jeden Punkt A der Figur durch den bezüglich O zu A symmetrischen Punkt A' , so geht die Figur in sich über; Abb. 43a).

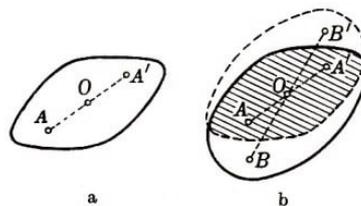


Abb. 43

Nicht jede konvexe Figur Φ besitzt einen Punkt mit dieser Eigenschaft.

Nun besagt aber der Satz von Kowner: Im Innern einer beliebigen konvexen Figur lässt sich ein Punkt O finden derart, dass der Flächeninhalt des Durchschnitts der Figur Φ mit der Figur Φ' , die man durch symmetrische Spiegelung von Φ bezüglich O erhält, nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts der Figur Φ ist.

Ein solcher Punkt ist das Symmetriezentrum der im Innern von Φ eingeschlossenen zentrosymmetrischen Figur, deren Flächeninhalt nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts von Φ ist.

²¹Jede Strecke, deren Endpunkte einer konvexen Kurve angehören, heißt Sehne dieser konvexen Kurve (enthält die Kurve eine geradlinige Strecke, so ist jeder Teil dieser Strecke Sehne der Kurve).

Offenbar liegt diese Figur, die bei symmetrischer Spiegelung bezüglich O in sich übergeht, im Innern des Durchschnitts von Φ und Φ' (Abb. 43b).

Auf diese Weise kann der Satz von Kowner als Begründung dafür angesehen werden, dass man das Wort "Mittelpunkt" auch bei Figuren anwendet, die kein Symmetriezentrum besitzen (vgl. den Text, der den Aufgaben 18 und 19 des § 2 vorausgeschickt wurde).

Eine interessante Gegenüberstellung zur Aufgabe 33 bietet die Aufgabe 34.

34.a) Man beweise, dass jede konvexe Figur Φ im Innern einer zentrosymmetrischen konvexen Figur eingeschlossen werden kann, deren Flächeninhalt nicht mehr als das Doppelte des Flächeninhalts der Figur Φ beträgt.

b) Man beweise, dass ein Dreieck in keine zentrosymmetrische konvexe Figur eingeschlossen werden kann, deren Flächeninhalt kleiner als das Doppelte des Dreiecksinhalts ist.

Die Aufgabe 34 kann analog zur Aufgabe 33 als Abschätzung für den "Grad der Zentriertheit" einer beliebigen konvexen Figur angesehen werden.

Wir weisen darauf hin, dass sich bei den verschiedenen Methoden zur Definition des "Grades der Zentriertheit" einer konvexen Figur (siehe die Aufgaben 33, 34, 36, die Aufgabe 19a des § 2 oder die Aufgabe 69 des § 6) stets das Dreieck als "am wenigsten zentriert" erweist.

Zum Schluss führen wir einige Aufgaben an, die sich auf den Begriff des Schwerpunktes einer konvexen Figur beziehen.

Der Begriff des Schwerpunktes gehört eigentlich der Mechanik an und nicht der Geometrie. Als Schwerpunkt eines Körpers bezeichnet man den Angriffspunkt der auf den Körper wirkenden Schwerkraft (mit anderen Worten, den Angriffspunkt der Resultante aller auf die einzelnen Punkte des Körpers wirkenden Gravitationskräfte).

In der Geometrie bezeichnet man als Schwerpunkt einer (ebenen) Figur Φ den Punkt, in dem sich der Schwerpunkt einer aus homogenem Material gefertigten dünnen Platte gleichmäßiger Stärke in Form der Figur Φ befinden würde (als Schwerpunkt der Platte kann man sich den Punkt M vorstellen, der folgende Eigenschaft hat: Wird die Platte in diesem Punkt senkrecht unterstützt, so befindet sie sich im Gleichgewicht; Abb. 44).

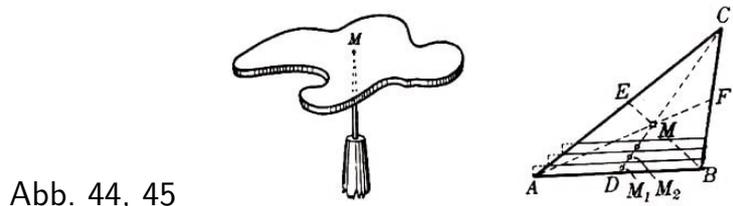


Abb. 44, 45

Der Schwerpunkt einer konvexen Figur lässt sich jedoch auch rein geometrisch definieren, ohne dass irgendwelche physikalischen Überlegungen benutzt werden. Bekanntlich fällt der Schwerpunkt eines Dreiecks mit dem Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden zusammen.²²

²²Wir stellen uns ein Dreieck ABC aus einzelnen Streifen bestehend vor, die parallel zur Seite AB

Besteht nun die Figur Φ aus zwei Teilen, einem Teil Φ_1 mit dem Inhalt S_1 und einem Teil Φ_2 mit dem Inhalt S_2 , so liegt der Schwerpunkt M der Figur Φ auf der Verbindungsstrecke zwischen dem Schwerpunkt M_1 der Figur Φ_1 und dem Schwerpunkt M_2 der Figur Φ_2 , und teilt diese Strecke im Verhältnis (Abb. 46)

$$MM_1 : MM_2 = S_2 : S_1$$

Unter Benutzung dieses Satzes (der die wichtigste Eigenschaft des Schwerpunkts angibt und der auch bei den Lösungen der nachfolgenden Aufgaben benutzt wird) kann der Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks bestimmt werden, nachdem dieses in Dreiecke zerlegt und der Schwerpunkt jedes einzelnen Dreiecks bestimmt worden ist (Abb. 47).²³

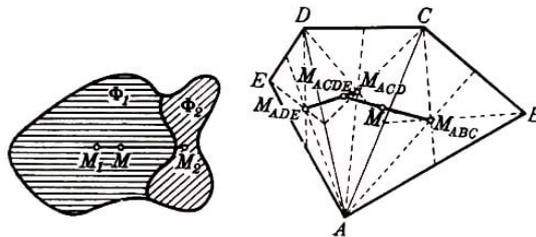


Abb. 46, 47

Der Schwerpunkt einer beliebigen konvexen Figur lässt sich als Grenzpunkt der Schwerpunkte von einbeschriebenen Vielecken definieren, deren Seiten unendlich klein werden (oder als Grenzpunkt der Schwerpunkte umbeschriebener Vielecke, deren Außenwinkel unendlich klein werden).

35.a) Man beweise, dass der Schwerpunkt einer konvexen Figur Φ der Breite 1 von jeder Stützgeraden der Figur Φ mindestens den Abstand $\frac{1}{3}$ hat.

b) Gegeben sei eine konvexe Figur Φ mit dem Flächeninhalt S ; ein Teil ihrer Berandung werde durch eine Strecke AB der Länge l gebildet. Man beweise, dass der Schwerpunkt der Figur Φ von der Geraden AB höchstens den Abstand $\frac{2}{3}S$ hat.

Aus Aufgabe 35a folgt unmittelbar der in § 2, Aufgabe 17 formulierte Satz von Blaschke.

36*. Satz von Winternitz. Eine konvexe Figur wird von jeder durch den Schwerpunkt gehenden Geraden l in zwei Teile geteilt. Man beweise, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der Teile stets zwischen den Grenzen $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{4}$ liegt.

Aus dem Satz von Winternitz folgt, dass für jede konvexe Figur Φ ein Punkt M (Schwerpunkt der Figur Φ) existiert derart, dass das Verhältnis der Flächen S_1 und S_2 (der Teile der Figur Φ , in die Φ von allen möglichen durch M verlaufenden Geraden geteilt

liegen (Abb. 45). Da sich der Schwerpunkt jedes Streifens in seiner Mitte befindet und folglich auf CD , der Seitenhalbierenden des Dreiecks, gelegen ist, können wir sagen, dass auch der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks auf der Seitenhalbierenden CD liegen muss. Aus entsprechenden Überlegungen folgt, dass der Schwerpunkt auch auf den beiden anderen Mittellinien BE und AF des Dreiecks ABC liegen, also mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks zusammenfallen muss.

²³Es lässt sich beweisen, dass der auf diese Weise bestimmte Schwerpunkt nicht von der Art der Zerlegung des Vielecks in Dreiecke abhängt (diese Zerlegung ist selbstverständlich nicht eindeutig).

wird) in den Grenzen $\frac{4}{5} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{5}{4}$ eingeschlossen ist.

Man sieht leicht, dass sich im Innern eines Dreiecks kein Punkt O finden lässt, für den das Verhältnis der Teilflächen (in die das Dreieck von Geraden geteilt wird, welche durch O gehen) in engere Grenzen eingeschlossen werden kann; denn jeder vom Schwerpunkt M verschiedene Punkt O des Dreiecks T vom Flächeninhalt S ist im Innern mindestens eines der drei Dreiecke vom Flächeninhalt $\frac{4}{9}S$ gelegen, die von T durch Geraden abgeteilt werden, welche parallel zu den Dreiecksseiten und durch den Punkt M verlaufen; folglich ist mindestens der Inhalt eines der drei Dreiecke, die aus dem Dreieck T von Geraden abgeteilt werden, welche durch den Punkt O und parallel zu den Dreiecksseiten verlaufen, kleiner als $\frac{4}{9}S$.

Es ist interessant, das Ergebnis dieser Aufgabe mit dem in § 2, Aufgabe 18c, aufgestellten Satz zu vergleichen:

Für jede (nicht notwendig konvexe) Figur Ψ existiert ein Punkt O derart, dass das Verhältnis der Teilflächen S_1 und S_2 der Figur Ψ , in die Ψ von allen möglichen durch O führenden Geraden geteilt wird, in den Grenzen $\frac{1}{2} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{2}{1}$ eingeschlossen ist.

(Es existieren nichtkonvexe Figuren Ψ , zu denen sich kein Punkt O finden lässt derart, dass das Verhältnis der Teile, in die Ψ von Geraden durch O geteilt wird, in engere Grenzen eingeschlossen werden könnte; siehe Lösung der Aufgabe 18).

1.4 Addition konvexer Figuren und Kurven

Der Inhalt dieses Paragraphen zeigt gewisse Eigentümlichkeiten. In ihm wird die Addition konvexer Figuren und konvexer Kurven definiert, die viele Eigenschaften der Addition von Zahlen besitzt, aber schließlich auch solche, die durchaus nicht der gewöhnlichen Addition ähneln.

Es wird auch eine Definition des Abstandes zwischen zwei konvexen Kurven gegeben, die viele Eigenschaften des gewöhnlichen Abstandes besitzt (siehe z. B. Aufgabe 51). Diese Definition mag anfangs kompliziert und unnatürlich erscheinen; später wird sich jedoch zeigen, dass sie bei Aufgaben, die sich auf konvexe Kurven beziehen, oftmals nützlich ist. Der Begriff des Abstandes zwischen Kurven ermöglicht eine naturgemäße Definition des Limes einer Folge konvexer Kurven.

Durch den ungewohnten Stoff mag dieser Paragraph dem Leser schwierig oder wenig interessant vorkommen. In diesem Fall kann er ihn ohne weiteres überschlagen.

Dabei empfiehlt es sich jedoch, die Aufgaben 75-77 des § 6, 92-95 des § 7 und 110, 111, 116 des § 8 sowie die kleingedruckten Teile der §§ 7 und 8 ebenfalls zu überschlagen. Falls nur die Anwendungen interessieren, welche die Aufgaben dieses Paragraphen im folgenden finden, so braucht man diese Aufgaben nicht zu lösen, sondern nur ihre Lösungen nachzusehen. Dabei kann man die Aufgaben 48-50, 53 und 54, die nirgends weiter angewendet werden, auslassen.

Eine interessante Weiterentwicklung des Stoffes des vorliegenden Paragraphen ist die Theorie der linearen Systeme konvexer Figuren, die einen bedeutenden Platz in der modernen Theorie der konvexen Körper einnimmt. Dieser Theorie ist das Kapitel V des in der Einleitung zitierten Buches von L. A. Lusternik, "Konvexe Körper", oder der

dritte Teil des zitierten Buches von W. Blaschke gewidmet.²⁴

Die Kenntnis des "Parallelogrammprinzips" für die Addition vektorieller Größen (Kräfte, Geschwindigkeiten, usw.) ermöglicht es, die "Summe" von Punkten der Ebene zu definieren. Mit dieser Definition, die für die folgenden Ausführungen grundlegend ist, beginnen wir den vorliegenden Paragraphen.

Wir wählen irgendeinen Punkt O der Ebene aus und bezeichnen ihn als Nullpunkt oder Ursprung. Sind jetzt A und B zwei beliebige Punkte der Ebene, so bezeichnen wir den Eckpunkt C des Parallelogramms $OACB$ als Summe der Punkte A und B und schreiben $C = A + B$ (Abb. 48a).

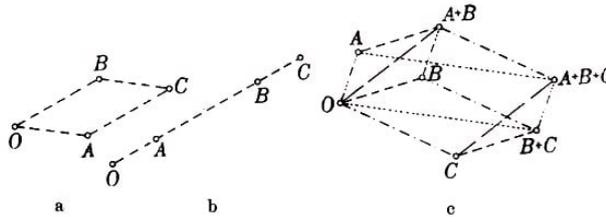


Abb. 48

Liegen die Punkte A und B auf einer Geraden durch den Ursprung O , so ist die Figur $OACB$ (Strecke AC parallel und gleich der Strecke OB) ein ausgeartetes Parallelogramm (Abb. 48b).

Aus dieser Definition folgt unmittelbar

$$A + B = B + A \quad , \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

(Abb. 48c; die Endsumme bezeichnen wir mit $A + B + C$) und

$$A + O = A$$

Es seien jetzt Φ_1 und Φ_2 zwei beschränkte²⁵ ebene konvexe Figuren mit den konvexen Randkurven K_1 und K_2 , ferner O ein beliebiger Punkt der Ebene, den wir als Nullpunkt wählen.

Wir betrachten alle möglichen Summen $A_1 + A_2$, wobei A_1 und A_2 beliebige Punkte (innere oder Randpunkte) der Figur Φ_1 bzw. Φ_2 sind. Die Punkte $A_1 + A_2$ füllen eine gewisse ebene Figur Φ aus (Abb. 49), die wir Summe der Figuren Φ_1 und Φ_2 nennen und mit $\Phi_1 + \Phi_2$ bezeichnen. Bestehen die Figuren Φ_1 und Φ_2 aus einzelnen Punkten, so ist $\Phi_1 + \Phi_2$, die Summe dieser Punkte; mit anderen Worten, die Addition. konvexer Figuren stellt eine Verallgemeinerung der Addition von Punkten dar.

Den Rand der Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ nennen wir Summe der Kurven K_1 und K_2 ; wir bezeichnen ihn mit $K_1 + K_2$. Wir weisen darauf hin, dass die Summe $K_1 + K_2$ nicht mit dem geometrischen Ort aller Summen $A_1 + A_2$ zusammenfällt, wobei A_1 ein Punkt der Kurve K_1 und A_2 ein Punkt der Kurve K_2 ist (der geometrische Ort der Punkte $A_1 + A_2$ ist eine ebene Figur und keine Kurve; siehe z. B. Aufgabe 37).

²⁴Diese Bücher setzen beim Leser Kenntnisse der höheren Mathematik, etwa im Umfang des ersten Semesters des Hochschulstudiums, voraus.

²⁵Da in diesem Paragraphen ausschließlich von beschränkten konvexen Figuren und Kurven gesprochen wird, werden wir das Wort "beschränkt" im folgenden fortlassen.

Eine Definition der Summe konvexer Kurven, die nicht von dem Begriff der Addition von Figuren abhängt, wird in Aufgabe 41 gegeben.

Die Summe konvexer Figuren oder Kurven ist wieder eine konvexe Figur bzw. eine konvexe Kurve (Aufgabe 38).

Aus den Eigenschaften der Addition von Punkten folgt unmittelbar

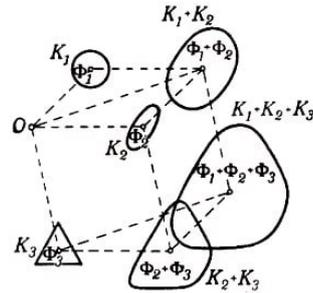
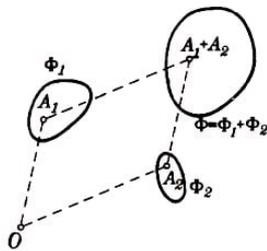
$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1$$

$$K_1 + K_2 = K_2 + K_1$$

$$(\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3 = \Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3)$$

$$(K_1 + K_2) + K_3 = K_1 + (K_2 + K_3)$$

(Abb. 49; die Endsumme wird mit $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ bezeichnet). (Abb. 50; diese Summe bezeichnen wir mit $K_1 K_2 + K_3$).



Ausgehend vom Begriff der Summe von Figuren (oder Kurven) definiert man die Multiplikation konvexer Figuren (oder Kurven) mit ganzen Zahlen; und zwar setzt man

$$\Phi + \Phi = 2\Phi$$

$$K + K = 2K$$

$$\Phi + \Phi + \Phi = 3\Phi$$

$$K + K + K = 3K$$

und allgemein

und allgemein

$$\underbrace{\Phi + \Phi + \dots + \Phi}_{m\text{-mal}} = m\Phi$$

$$\underbrace{K + K + \dots + K}_{m\text{-mal}} = mK$$

Ferner wird die Figur $\frac{1}{n}\Phi$ (die Kurve $\frac{1}{n}K$) gemäß

$$n \left(\frac{1}{n}\Phi \right) = \Phi$$

$$n \left(\frac{1}{n}K \right) = K$$

als Figur (oder Kurve) definiert und danach die Multiplikation konvexer Figuren (oder Kurven) mit rationalen Zahlen durch

$$\frac{m}{n}\Phi = m \left(\frac{1}{n}\Phi \right)$$

$$\frac{m}{n}K = m \left(\frac{1}{n}K \right)$$

eingeführt. Schließlich wird der Begriff der Multiplikation konvexer Figuren (bzw. Kurven) mit beliebigen reellen Zahlen definiert, wobei man unter dem Produkt $\alpha\Phi$ (bzw. αK), α irrational, den Limes versteht, dem die Figuren $a\Phi$ (die Kurven aK) zustreben, wenn die rationale Zahl a gegen α strebt (eine strenge Definition des Limes von Folgen konvexer Figuren bzw. konvexer Kurven wird in diesem Paragraphen noch eingeführt).²⁶

²⁶Man zeigt leicht, dass $\alpha\phi$ (bzw. αK) eine der Figur Φ (der Kurve K) ähnliche Figur (Kurve) mit dem Affinitätszentrum im Punkte O und dem Ähnlichkeitsverhältnis α ist. Diese Tatsache werden

Man sieht leicht, dass die Addition konvexer Figuren (Kurven) und die Multiplikation mit Zahlen durch dieselben Rechenregeln verknüpft sind, denen die Addition und die Multiplikation von Zahlen unterliegt, und zwar gilt

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi_1 + \Phi_2) &= \alpha\Phi_1 + \alpha\Phi_2 & \alpha(K_1 + K_2) &= \alpha K_1 + \alpha K_2 \\ (\alpha + \beta)\Phi &= \alpha\Phi + \beta\Phi & (\alpha + \beta)K &= \alpha K + \beta K \end{aligned}$$

Es gibt jedoch auch Unterschiede zwischen der "Arithmetik konvexer Figuren" und der Arithmetik der Zahlen.

Beispielsweise gibt es keine "Differenz" $\Phi_1 - \Phi_2$ zwischen zwei gegebenen konvexen Figuren Φ_1 und Φ_2 , d.h., es gibt im allgemeinen keine konvexe Figur Φ derart, dass $\Phi_2 + \Phi = \Phi_1$ ist (insbesondere folgt aus Aufgabe 46, dass es keine "Differenz" zwischen einem Dreieck und einem Kreis geben kann).

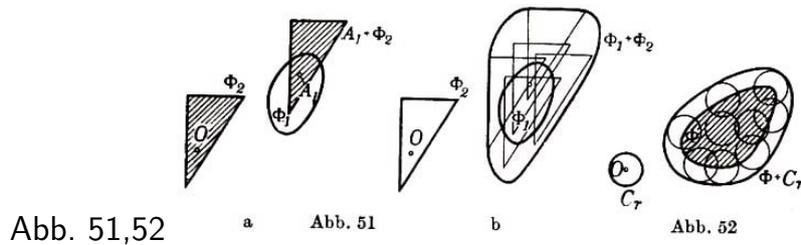
Im Hinblick auf das Folgende ist es angebracht, eine geometrische Beschreibung für die Operation der Addition konvexer Figuren zu haben.

Wir setzen voraus, dass der Punkt O fest mit der Figur Φ_2 verbunden sei (noch günstiger ist der Fall, dass der Punkt O sich im Innern der Figur Φ_2 befindet).

Wir betrachten einen festen Punkt A_1 der Figur Φ_1 ; dann bilden alle möglichen Summen der Form $A_1 + A_2$, wobei A_2 sämtliche Punkte der Figur Φ_2 durchläuft, eine Figur, die der Figur Φ_2 kongruent ist und aus Φ_2 durch eine Parallelverschiebung entsteht, bei der O in A_1 übergeht.

Diese Figur bezeichnen wir sinngemäß mit $A_1 + \Phi_2$ (Abb. 51a).

Die Menge aller Figuren $A_1 + \Phi_2$, wobei A_1 sämtliche Punkte der Figur Φ_1 durchläuft, bildet eine Figur, die gleich der Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ ist (Abb. 51b).



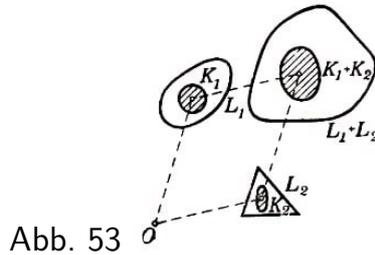
Insbesondere wird die Summe einer Figur Φ und eines Kreises C_r vom Radius r , dessen Mittelpunkt in O liegt, durch eine Figur dargestellt, die aus der Menge aller Kreise vom Radius r um Punkte der Figur Φ besteht (Abb. 52).

37. Sind Φ_1 und Φ_2 zwei nichtparallele Strecken, so ist die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ ein Parallelogramm. Sind dagegen Φ_1 und Φ_2 parallel, so ist die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ eine zu den gegebenen Strecken parallele Strecke, deren Länge gleich der Summe der Längen von Φ_1 und Φ_2 ist.

38. Man beweise, dass die Summe konvexer Figuren eine konvexe Figur ist (oder, was dasselbe ist, dass die Summe konvexer Kurven eine konvexe Kurve ist).

39. Wird die konvexe Kurve K_1 ganz von der konvexen Kurve L_1 und die konvexe Kurve
 wir im folgenden jedoch nicht benutzen.

K_2 ganz von der konvexen Kurve L_2 umschlossen, so wird auch die Kurve $K_1 + K_2$ ganz von der Kurve $L_1 + L_2$ umschlossen (Abb. 53).



Die Geometrie behandelt Eigenschaften der Figuren, die nicht von ihrer Lage in der Ebene abhängen. Die von uns eingeführte Definition der Summe konvexer Figuren (bzw. konvexer Kurven) hängt jedoch von der Lage der Summanden und darüber hinaus auch von der Wahl des Ursprungs ab.

Dieser Umstand bedeutet einen ernsthaften Mangel der Definition. Die folgende Aufgabe zeigt jedoch, dass die Dinge günstiger liegen, als es anfangs scheint.

40. Man beweise, dass die Form der Summenfigur $\Phi_1 + \Phi_2$ (bzw. die Form der Kurve $K_1 + K_2$) bei Änderung des Ursprungs und Parallelverschiebung der Summanden invariant bleibt. Die Summe unterliegt dabei nur einer Parallelverschiebung.

Die Form der Summenfigur (Summenkurve) zweier Figuren (Kurven) hängt also nicht von der Wahl des Nullpunktes ab; sie ändert sich auch nicht bei Parallelverschiebung der Summanden. Eine Drehung der Summanden kann jedoch die Summe wesentlich verändern:

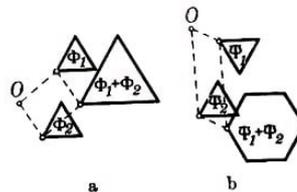


Abb. 54

In Abb. 54a ist die Summe zweier kongruenter Dreiecke dargestellt, in Abb. 54b aber die Summe der gleichen Dreiecke, nachdem eines von ihnen um einen Winkel von 180° gedreht worden ist.

Wir weisen darauf hin, dass die Form der Summenkurve einer Kurve K und einer Kreislinie O , mit dem Radius r in keinerlei Weise von der Lage der Summanden in der Ebene abhängt (siehe Aufgabe 52 und diesbezüglichen Text). Diese Tatsache hängt damit zusammen, dass eine gleichzeitige Drehung beider Summanden K_1 und K_2 um ein und denselben Winkel offensichtlich nur eine Drehung der Summe $K_1 + K_2$ um denselben Winkel zur Folge hat.

Hieraus folgt, dass sich die Summe $K + O_r$ bei Drehung der Kurve K um irgendeinen Winkel nicht ändert, sondern sich nur um den gleichen Winkel dreht.

Es seien jetzt K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven, auf denen ein Umlaufsinn entgegen dem Uhrzeigersinn festgelegt sei (Abb. 55); l_1 und l_2 seien parallele und gleichgerichtete Stützgeraden der Kurven K_1 und K_2 (siehe insbesondere Abb. 22); A_1 und A_2 seien die Berührungspunkte der Geraden l_1 mit der Kurve K_1 bzw. der Geraden l_2 mit der

Kurve K_2 (beliebige Berührungspunkte, falls eine Stützgerade mit der Kurve eine ganze Strecke gemeinsam hat).

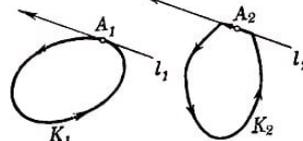


Abb. 55

Wir sagen dann, die Punkte A_1 und A_2 seien einander entsprechende Punkte der Kurven K_1 und K_2 . Zu jedem Punkt der einen Kurve gibt es (möglicherweise nicht nur) einen entsprechenden Punkt auf der anderen Kurve.

41*. (Andere Definition der Summe konvexer Kurven.)

Es seien K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven. Man beweise: Sind A_1 und A_2 entsprechende Punkte der Kurven K_1 und K_2 , so ist die Kurve $K_1 + K_2$ der geometrische Ort aller Punkte $A_1 + A_2$.

Dabei entspricht der Punkt $A_1 + A_2$ der Kurve $K_1 + K_2$ den Punkten A_1 und A_2 der Kurven K_1 und K_2 .

Die Kurve $K_1 + K_2$ besitzt also im Punkte $A_1 + A_2$ eine Stützgerade, die den Stützgeraden der Kurven K_1 und K_2 in den entsprechenden Punkten A_1 und A_2 parallel ist (Abb. 56).

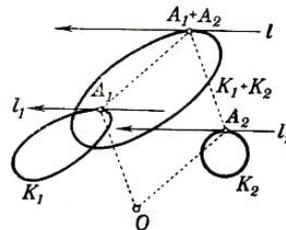


Abb. 56

42. Es sei K ein beliebiges konvexes Vieleck, dessen Umfang gleich L und dessen Flächeninhalt gleich S ist; es sei O_r ein Kreis vom Radius r . Man beweise, dass die Länge der Kurve $K + O_r$ gleich $L + 2\pi r$ und der Flächeninhalt der durch diese Kurve begrenzten Figur gleich $S + Lr + \pi r^2$ ist.

Es sei \bar{K} ein einer beliebigen konvexen Kurve K einbeschriebenes Vieleck (Abb. 57). Werden sämtliche Seiten des Vielecks \bar{K} immer kleiner, wobei ihre Anzahl unbegrenzt wächst (so dass \bar{K} gegen K strebt), so strebt $\bar{K} + O_r$ gegen die Kurve $K + O_r$. Hieraus lässt sich leicht schließen:

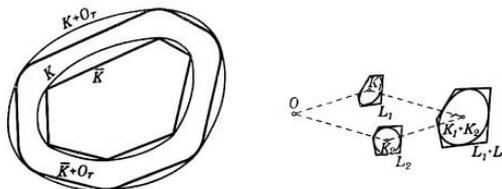


Abb. 57, 58

Hat K die Länge L und umschließt K eine Figur vom Inhalt S , so ist die Länge der Kurve $K + O_r$ gleich $L + 2\pi r$ und der Flächeninhalt der von ihr umschlossenen Figur

gleich $S + Lr + \pi r^2$.²⁷

43. Man beweise, dass die Summe $K_1 + K_2$ zweier konvexer Vielecke K_1 und K_2 wieder ein konvexes Vieleck ist. Besitzen die konvexen Vielecke K_1 und K_2 keine parallelen und gleichgerichteten Seiten, so ist die Anzahl der Seiten des konvexen Vielecks $K_1 + K_2$ gleich der Summe der Seitenzahl von K_1 und der Seitenzahl von K_2 ; das Vieleck $K_1 + K_2$ besteht dann aus Strecken, die den Seiten der Vielecke K_1 und K_2 gleich und parallel sind.

Besitzen die Vielecke K_1 und K_2 parallele gleichgerichtete Seiten, so besitzt das Vieleck $K_1 + K_2$ eine Seite, die den zwei zueinander parallelen Seiten der Vielecke K_1 und K_2 parallel und deren Länge gleich ihrer Summe ist.

In jedem Fall ist der Umfang des Vielecks $K_1 + K_2$ gleich der Summe des Umfangs von K_1 und des Umfangs von K_2 .

44. Sind K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven und L_1 und L_2 , zwei Vielecke mit paarweise parallelen und gleichgerichteten Seiten, die diesen Kurven umschrieben sind, so ist $L_1 + L_2$ ein der Kurve $K_1 + K_2$ umschriebenes Vieleck (Abb. 58).

Bleibt diese Behauptung richtig, wenn die Seiten der Vielecke L_1 und L_2 nicht parallel und gleichgerichtet sind?

Die Länge einer konvexen Kurve haben wir bereits definiert (siehe § 1), und zwar als Grenzwert der Umfänge von Vielecken, die ihr umschrieben sind und deren Außenwinkel gegen Null streben (oder als Grenzwert der Umfänge von Vielecken, die der Kurve eingeschrieben sind und deren Seitenlängen gegen Null streben).

In Aufgabe 44 wird behauptet, dass die Summe von Vielecken mit jeweils parallelen Seiten, die den Kurven K_1 und K_2 umschrieben sind, ein der Kurve $K_1 + K_2$ umschriebenes Vieleck ergibt, dessen Seiten den entsprechenden Seiten von K_1 und K_2 gleichgerichtet sind.

Nach Aufgabe 43 ist der Umfang dieses Vielecks gleich der Summe der Umfänge der den Kurven K_1 und K_2 umschriebenen Vielecke. Betrachten wir Vielecke mit immer kleineren Außenwinkeln und gehen wir zur Grenze über, so ergibt sich, dass die Länge von $K_1 + K_2$ gleich der Summe der Länge von K_1 und der Länge von K_2 ist.

Insbesondere ist die Länge der Kurve $K + O_r$, wobei O_r ein Kreis vom Radius r und K eine konvexe Kurve der Länge L ist, gleich $L + 2\pi r$; diesen Spezialfall unseres Satzes hatten wir schon früher erhalten (siehe Aufgabe 42 und diesbezüglichen Text).

45. Es sei $K = K_1 + K_2$ die Summe zweier konvexer Kurven K_1 und K_2 und enthalte eine geradlinige Strecke AB der Länge a . Man beweise, dass in diesem Fall entweder eine der Kurven K_1 und K_2 eine zu AB parallele Strecke der Länge a enthält oder dass beide Kurven K_1 und K_2 zu AB parallele Strecken enthalten, deren Summe gleich a ist.

²⁷Zum strengen Beweis genügt es, eine Folge von Vielecken zu betrachten, die der Kurve K eingeschrieben sind und deren Seitenzahl wächst, während sämtliche Seiten unendlich klein werden; man bildet die Summe jedes solchen Vielecks mit dem Kreis O_r , und geht nunmehr zum Grenzwert über.

46. Es seien K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven, $K_1 + K_2$ ihre Summe und A_1 und A_2 entsprechende Punkte der Kurven K_1 und K_2 . Man beweise, dass $A_1 + A_2$ nur dann eine Ecke der Kurve $K_1 + K_2$ sein kann, wenn beide Punkte A_1 und A_2 Ecken sind (falls jedoch A_1 und A_2 Ecken der Kurven K_1 und K_2 sind, braucht der Punkt $A_1 + A_2$, keine Ecke der Kurve $K_1 + K_2$ zu sein).

Aus Aufgabe 46 folgt insbesondere, dass die Summe einer beliebigen Kurve K und eines Kreises keine Ecken besitzen kann.

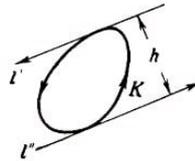


Abb. 59

Es sei K eine konvexe Kurve, und l' und l'' seien zwei parallele Stützgeraden der Kurve. Der Abstand h zwischen diesen Geraden heißt Breite der Kurve K in der zu den Geraden l_1 und l_2 senkrechten Richtung (Abb. 59).

47. Man beweise, dass die Breite h der Kurve $K_1 + K_2$ in jeder Richtung gleich der Summe der Breiten h_1 und h_2 der Kurven K_1 und K_2 in derselben Richtung ist.

48*. Man beweise, dass sich jedes konvexe Vieleck als Summe von Dreiecken und Strecken darstellen lässt.

49. Man beweise, dass jedes konvexe Viereck auf nur eine Weise als Summe zweier Dreiecke (oder eines Dreiecks und einer Strecke oder zweier Strecken) dargestellt werden kann. Es gibt jedoch Fünfecke, die auf verschiedene Weisen als Summen von Dreiecken dargestellt werden können.

Es sei K eine beliebige konvexe Kurve. Wir betrachten die Menge aller Kreise vom Radius r um irgendwelche Punkte der Kurve K . Die Punkte der Ebene, die von mindestens einem dieser Kreise überdeckt werden, bilden eine gewisse Figur (einen "Streifen" oder "Ring"), die die Kurve K in sich einschließt und die wir als r -Umgebung der konvexen Kurve K bezeichnen (Abb. 60).

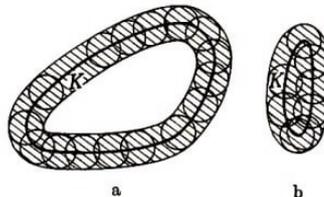


Abb. 60

Diese Figur wird entweder von zwei Kurven, einer inneren und einer äußeren (Abb. 60a), oder von nur einer Kurve begrenzt (Abb. 60b).

Aus der oben gegebenen Definition der Summe einer konvexen Kurve und eines Kreises (siehe Abb. 52 und diesbezüglichen Text) folgt, dass die äußere der beiden Kurven, welche die r -Umgebung begrenzen, die Summe $K + O_r$, der Kurve K und des Kreises O_r vom Radius r mit dem Mittelpunkt im Ursprung ist. Hieraus folgt, dass diese Kurve

stets konvex ist (siehe Aufgabe 38).

50. Existiert eine innere Begrenzungskurve der r -Umgebung einer konvexen Kurve K , so ist sie eine konvexe Kurve.

Es seien K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven und r eine Strecke derart, dass die Kurve K_2 ganz im Innern der r -Umgebung der Kurve K_1 enthalten ist, jedoch K_2 für jedes $r' < r$ die Begrenzung der r' -Umgebung der Kurve K_1 durchstößt. Diese Strecke r heißt Abstand der Kurve K_2 von der Kurve K_1 (Abb. 61).²⁸

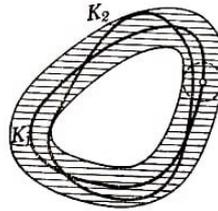


Abb. 61

Sind z. B. K_1 und K_2 zwei konzentrische Kreise, so ist der Abstand jedes der beiden von dem anderen gleich der Differenz ihrer Radien (Abb. 63a, b; in Abb. 63a ist die $(r_1 - r_2)$ -Umgebung des Kreises K_1 schraffiert, in Abb. 63b die $(r_1 - r_2)$ -Umgebung des Kreises K_2).

Jedoch ist keineswegs immer der Abstand der Kurve K_2 von der Kurve K_1 gleich dem Abstand der Kurve K_1 von der Kurve K_2 .

²⁸Da der Begriff des Abstandes einer Kurve K_2 von einer Kurve K_1 äußerst wichtig ist, erläutern wir hier seinen Sinn unter einem anderen Gesichtspunkt. Als Abstand des Punktes A von einer Kurve K_1 bezeichnet man den Abstand zwischen dem Punkt A und dem zu A nächstgelegenen Punkt der Kurve K_1 (Abb. 62a); man sieht sofort, dass diese Definition mit der oben gegebenen zusammenfällt, wenn die Kurve K_2 nur aus einem einzigen Punkt besteht.

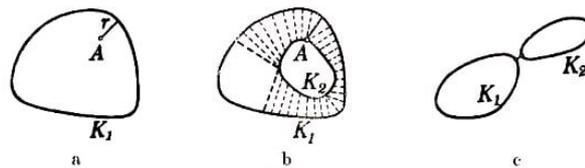


Abb. 62

Der Abstand der Kurve K_2 von der Kurve K_1 ist der Abstand des von der Kurve K_1 am weitesten entfernten Punktes der Kurve K_2 (Abb. 62b). Mit anderen Worten, zur Definition des Abstands der Kurve K_2 von der Kurve K_1 bildet man alle möglichen Abstände zwischen Punkten A_2 und A_1 , wobei A_2 ein Punkt der Kurve K_2 und A_1 ein Punkt der Kurve K_1 ist.

Zu jedem festen Punkt A_2 wird das Minimum aller dieser Abstände gesucht, dieses ist die Entfernung zwischen A_2 und K_1 . Nunmehr wird das Maximum aller Minima gesucht, wobei A_2 sämtliche Punkte der Kurve K_2 durchläuft; dieses Maximum ist dann der Abstand zwischen K_2 und K_1 . Diese Definition ist in ihrer Struktur recht kompliziert, sie erweist sich jedoch in vielen Problemen als praktisch und spielt eine hervorragende Rolle in der modernen Mathematik.

Die Kompliziertheit der Abstandsdefinition für zwei Kurven ist auf die naturgemäße Forderung zurückzuführen, dass ein kleiner Abstand zwischen Kurven zum Ausdruck bringen soll, dass die Kurven in ihrem ganzen Verlauf einander benachbart sind. In diesem Sinne ist die naheliegende Definition des Abstands zwischen Kurven K_1 und K_2 als kürzester Abstand zwischen irgendwelchen Punkten von K_1 und beliebigen Punkten von K_2 unbefriedigend: Zwei Kurven können nahe beieinander gelegene Punkte besitzen und dabei weit voneinander entfernt sein (Abb. 62c).

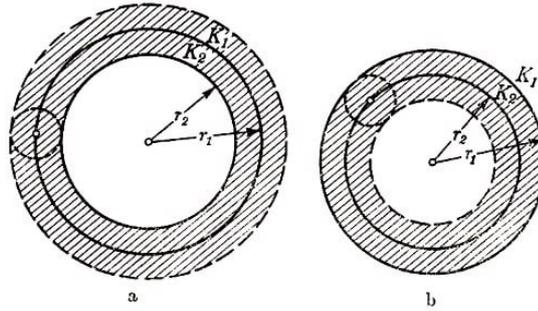


Abb. 63

Sind beispielsweise T_1 und T_2 zwei gleichseitige Dreiecke mit parallelen Seiten und gemeinsamem Mittelpunkt, so ist der Abstand des inneren Dreiecks vom äußeren gleich dem Abstand zwischen den parallelen Seiten der Dreiecke (Abb. 64a), der Abstand des äußeren Dreiecks vom inneren ist jedoch gleich dem Abstand zwischen den entsprechenden Eckpunkten des Dreiecks (Abb. 64b).

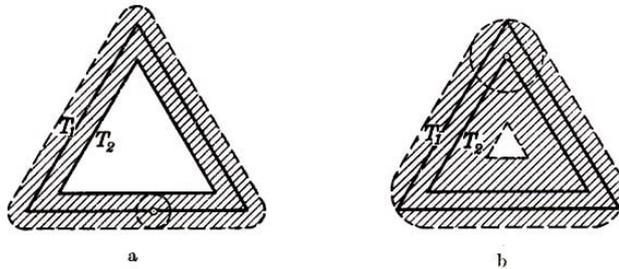


Abb. 64

Der größere der beiden Abstände der Kurve K_1 von der Kurve K_2 bzw. der Kurve K_2 von der Kurve K_1 wird kurz als Abstand zwischen den Kurven K_1 und K_2 bezeichnet. In dem oben betrachteten Fall zweier gleichseitiger Dreiecke (Abb. 64) ist der Abstand zwischen den Dreiecken gleich dem Abstand zwischen ihren entsprechenden Eckpunkten.

Aus der Abstandsdefinition für zwei Kurven K_1 und K_2 und daraus, dass die äußere Begrenzungskurve der r -Umgebung der Kurve K mit der Kurve $K + O_r$ zusammenfällt, folgt:

Ist der Abstand zwischen den konvexen Kurven K_1 und K_2 gleich r , so ist die Kurve K_1 ganz in den Grenzen der Kurve $K_2 + O_r$ und die Kurve K_2 ganz in den Grenzen der Kurve $K_1 + O_r$ eingeschlossen.²⁹

51. Es seien A , B und C drei konvexe Kurven. Wir bezeichnen den Abstand zwischen den Kurven A und B mit AB , den Abstand zwischen den Kurven B und C mit BC und den Abstand zwischen den Kurven A und C mit AC . Man beweise, dass die Ungleichungen

$$AB + BC \geq AC, \quad AC + BC \geq AB \quad \text{und} \quad AB + AC \geq BC$$

gelten.

²⁹Man zeigt leicht, dass der Abstand zwischen zwei konvexen Kurven K_1 und K_2 die kleinste Zahl r ist derart, dass die Kurve K_1 ganz von der Kurve $K_2 + O_r$ umschlossen wird und die Kurve K_2 ganz in den Grenzen von $K_1 + O_r$ eingeschlossen ist.

Die Ungleichung in Aufgabe 51 heißt Dreiecksungleichung. Sie heißt deshalb so, weil die aufgestellte Ungleichung besagt, dass die "Länge" jeder Seite eines "Dreiecks" die Summe der "Längen" der beiden anderen Seiten nicht übertrifft, wobei wir die Kurven A , B und C als "Punkte" eines gewissen "Raumes" (des "Raumes der konvexen Kurven") ansehen, und zwar als Eckpunkte eines gewissen "Dreiecks" ABC , während der von uns definierte Abstand zwischen zwei Kurven als "Abstand" zwischen diesen "Punkten" im "Kurvenraum" oder als "Länge" der Seiten des "Dreiecks" betrachtet wird.³⁰

52. Es seien K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven, deren Abstand nicht größer als r sei. Man beweise, dass die Differenz der Längen dieser Kurven nicht größer als $2\pi r$ ist und die Differenz der Flächeninhalte der von ihnen begrenzten Figuren den Wert $Lr + \pi r^2$ nicht überschreitet, wobei L die größere der Längen dieser Kurven ist.

Man sagt, eine Folge konvexer Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ besitze eine konvexe Kurve K als Limes, wenn der Abstand zwischen den Kurven K und K_n für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.³¹

Beispielsweise hat eine Folge von Vielecken $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, die einer Kurve K eingeschrieben sind und deren Seiten beliebig klein werden, die Kurve K als Limes; ebenso hat eine Folge von Vielecken, die der Kurve K umgeschrieben sind und deren Außenwinkel unbegrenzt klein werden, die Kurve K als Limes.

Gemäß Aufgabe 52 strebt die Differenz zwischen den Längen konvexer Kurven, deren Abstand unendlich klein wird, gegen Null; ferner wird die Differenz der von diesen Kurven begrenzten Flächeninhalte unendlich klein. Hieraus folgt:

Besitzt eine Folge konvexer Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ eine konvexe Kurve K als Grenzkurve, so ist die Länge der Kurve K der Grenzwert der Längen der Kurven K_n ; ebenso ist der Inhalt der von der Kurve K begrenzten Fläche der Grenzwert der von den Kurven K_n begrenzten Flächeninhalte.

53**. Besitzt eine Folge von Kreisen eine Grenzkurve, so ist diese Grenzkurve ein Kreis oder ein Punkt.

54**. Besitzt eine Folge von Dreiecken einen Limes, so ist dieser Limes ein Dreieck, eine Strecke oder ein Punkt.

1.5 Das isoperimetrische Problem

Der vorliegende Paragraph ist einem bekannten Problem gewidmet, das in vielen Gebieten der Mathematik und Physik eine große Rolle spielt, und zwar dem sogenannten "isoperimetrischen Problem" (d.h. Figuren gleichen Umfangs zu suchen).

Der Paragraph enthält zwölf Aufgaben, von denen die ersten fünf (Aufgaben 55-59)

³⁰In der modernen Mathematik spielen verschiedene Arten von "Räumen" eine bedeutende Rolle (wie z. B. unser "Raum der konvexen Kurven"), zwischen deren Punkten ein "Abstand" definiert ist, welcher der Dreiecksungleichung genügt. Derartige Räume heißen "metrische Räume".

³¹Das heißt mit anderen Worten, zu jedem ε existiert ein N derart, dass für $n > N$ der Abstand zwischen den Kurven K und K_n kleiner als ε ist.

geometrische Aufgaben über Maxima und Minima sind, die in keiner Weise mit konvexen Figuren in Beziehung stehen. Diese Aufgaben stellen jedoch den geeignetsten Weg zur Einführung in das Problem der Isoperimetrie dar, und die Kenntnis einiger von ihnen ist sogar zur Lösung des isoperimetrischen Problems notwendig.

Die Aufgaben 60-62 beziehen sich unmittelbar auf das isoperimetrische Problem (dieses selbst ist der Inhalt der Nummer 62); die Aufgaben 63-66 sind Folgerungen daraus.

Eine gute Ergänzung zum Stoff dieses Paragraphen stellen das elementare Büchlein "Isoperimetrie" von D. A. Kryshanowski oder die ersten beiden Teile des auf S. XV zitierten Buches von W. Blaschke dar.³²

Das isoperimetrische Problem wird folgendermaßen formuliert:

Unter allen ebenen Figuren vom Umfang³³ 1 wird diejenige mit größtem Flächeninhalt gesucht.

Obgleich in dieser Formulierung der Begriff "konvexe Figur" nicht auftritt, wird das Problem im vorliegenden Buch behandelt. Die einfache Abb. 65 zeigt, dass die Lösung des isoperimetrischen Problems nur eine konvexe Figur sein kann, da sich zu jeder nichtkonvexen Figur Ψ vom Umfang 1 eine Figur $\bar{\Psi}$ finden lässt, die einen kleineren Umfang, aber einen größeren Inhalt besitzt³⁴; folglich kann man auch eine Figur vom Umfang 1 finden, die einen größeren Umfang hat als Ψ (diese Eigenschaft besitzt die der Figur Ψ ähnliche Figur vom Umfang 1).

Daher genügt es, für die Lösung des isoperimetrischen Problems eine ebene konvexe Figur vom Umfang 1 zu finden, die einen maximalen Flächeninhalt besitzt.

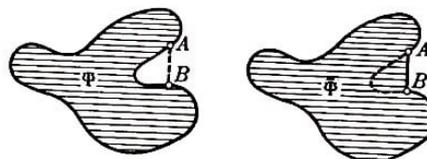


Abb. 65

Da sich bei Ähnlichkeitstransformationen der Flächeninhalt einer ebenen Figur und das Quadrat ihres Umfangs mit dem gleichen Faktor vergrößern oder verkleinern und sich folglich das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs nicht ändert, braucht nicht gefordert zu werden, dass der Umfang der Figur gleich 1 sei; die Aufgabe wird daher folgendermaßen formuliert:

Gesucht wird diejenige unter allen ebenen Figuren, für die das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs am größten ist. Hieraus lässt sich leicht ersehen, dass die Lösung der gestellten Aufgabe sofort eine Antwort auf folgendes Problem gibt:

Gesucht wird eine geschlossene ebene Kurve minimaler Länge, die eine Figur vom Flächeninhalt 1 umschließt.³⁵

³²D.A.Kryshanowski, Isoperimetrie, Moskau-Leningrad 1938.

³³Unter dem Umfang einer ebenen Figur verstehen wir die Länge ihrer Randkurve.

³⁴Aus § 3, Abb. 40a folgt, dass sich zu jeder nichtkonvexen Figur Ψ eine konvexe Figur Φ finden lässt, die einen kleineren Umfang und einen größeren Flächeninhalt besitzt (siehe Text zu Abb. 40a).

³⁵Ist bei einer Figur Φ das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs maximal, so ist das Verhältnis des Quadrats ihres Umfangs zum Flächeninhalt minimal; folglich gibt es unter allen Figuren vom Flächeninhalt 1 eine zu Φ ähnliche Figur mit kleinstem Umfang.

55. a) Man beweise, dass von allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten dasjenige den größten Flächeninhalt besitzt, bei dem diese Seiten senkrecht aufeinander stehen.

b) Man beweise, dass von zwei ungleichen Dreiecken, welche gleiche Basisseiten und gleiche, diesen Seiten gegenüberliegende Winkel besitzen, dasjenige den größeren Flächeninhalt und den größeren Umfang besitzt, bei dem die Differenz der Basiswinkel (oder, was dasselbe ist, die Differenz der beiden anderen Seiten) kleiner ist; von allen Dreiecken mit gegebener Basis und gegebenem, ihr gegenüberliegendem Winkel besitzt das gleichschenklige Dreieck den größten Flächeninhalt und den größten Umfang.

c) Man beweise, dass von allen Parallelogrammen mit gegebenem spitzem Winkel und gegebenem Umfang der Rhombus den größten Flächeninhalt besitzt.

d) Man beweise, dass von zwei ungleichen Dreiecken mit gleicher Basis und gleichem Umfang dasjenige den größeren Flächeninhalt besitzt, bei dem die Differenz der Basiswinkel (oder, was dasselbe besagt, die Differenz der beiden übrigen Seiten) kleiner ist; von allen Dreiecken mit gegebener Basis und gegebenem Umfang besitzt das gleichschenklige Dreieck den größten Flächeninhalt.

e) Man beweise, dass von allen Trapezen mit gegebener Basis und gegebenem Umfang das gleichschenklige Trapez den größten Inhalt hat.

56. a) Man beweise, dass von allen Dreiecken mit gegebenem Umfang das gleichseitige Dreieck den größten Inhalt besitzt.

b) Man beweise, dass von allen Vierecken mit gegebenem Umfang das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

57.a) Man beweise, dass von allen einem gegebenen Kreis einbeschriebenen n -Ecken das regelmäßige n -Eck den größten Flächeninhalt besitzt.

b) Man beweise, dass von allen einem gegebenen Kreis einbeschriebenen n -Ecken das regelmäßige n -Eck den größten Umfang hat.

58*. Man beweise, dass von allen konvexen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen dasjenige den größten Inhalt besitzt, dem ein Kreis umbeschrieben werden kann.

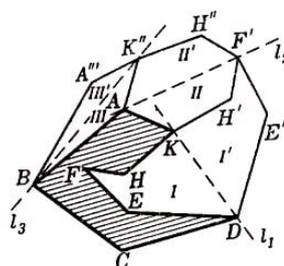


Abb. 66

Zu jedem nichtkonvexen Vieleck lässt sich ein konvexes Vieleck mit denselben Seiten und größerem Flächeninhalt finden (siehe beispielsweise Abb. 66, wo zuerst der Streckenzug $DEFHK$ symmetrisch zur Geraden l_1 , dann der Streckenzug $AKH'F'$ symmetrisch zur Geraden l_2 und schließlich $K''AB$ symmetrisch zur Geraden l_3 gespiegelt worden ist).

Hieraus folgt, dass in der Voraussetzung zur Aufgabe 58 das Wort "konvex" gestrichen werden kann. Ebenso brauchte auch in den Formulierungen der nachfolgenden Aufgaben 63 und 64 nur von beliebigen Vielecken gesprochen zu werden und nicht speziell von konvexen.

59**. a) Man beweise, dass von allen konvexen Vierecken mit gegebenen Winkeln und gegebenem Umfang dasjenige den größten Flächeninhalt besitzt, in das ein Kreis einbeschrieben werden kann!).

b) Man beweise, dass unter allen konvexen n -Ecken mit gegebenen Winkeln und gegebenem Umfang dasjenige den größten Flächeninhalt besitzt, dem sich ein Kreis einbeschreiben lässt.³⁶

Die Formulierungen der Aufgaben 58 und 59a sind einander sehr ähnlich. Diese Ähnlichkeit wird noch größer, wenn man bedenkt, dass alle Vierecke ein und dieselbe Winkelsumme besitzen (und zwar $4R$); die Aufgaben 58 und 59a lassen sich daher folgendermaßen formulieren:

Von allen konvexen Vierecken mit gegebenen Seiten (und der gegebenen Winkelsumme $4R$) besitzt dasjenige den größten Inhalt, dem ein Kreis umbeschrieben werden kann. Von allen konvexen Vierecken mit gegebenen Winkeln und gegebener Seitensumme besitzt dasjenige den größten Flächeninhalt, dem ein Kreis einbeschrieben werden kann. Analog zur Aufgabe 59b lässt sich auch Aufgabe 58 verallgemeinern (siehe Aufgabe 63).³⁷

60. Teilt eine Sehne einer konvexen Figur, die den Umfang halbiert, den Flächeninhalt in zwei ungleiche Teile, so gibt es eine Figur $\bar{\Phi}$ mit dem gleichen Umfang wie Φ , die aber einen größeren Flächeninhalt besitzt.

61. Man beweise unter Benutzung der Ergebnisse der Aufgaben 60 und 55a, dass zu jeder von einem Kreis verschiedenen konvexen Figur Φ eine Figur $\bar{\Phi}$ mit gleichem Umfang wie Φ existiert, die einen größeren Flächeninhalt besitzt.

Das isoperimetrische Problem, dem vorliegender Paragraph gewidmet ist, besteht darin, eine konvexe Figur Φ vom Umfang 1 zu finden, die maximalen Flächeninhalt besitzt. In Aufgabe 61 wird behauptet, dass diese Figur nur der Kreis sein kann. Scheinbar ist damit das isoperimetrische Problem vollständig gelöst:

Von allen konvexen (und folglich allgemein von allen) ebenen Figuren mit dem Umfang 1 besitzt der Kreis vom Radius $r = \frac{1}{2\pi}$ den größten Flächeninhalt (da $2\pi r = 1$ sein muss); alle anderen ebenen Figuren mit dem gleichen Umfang haben einen kleineren Flächeninhalt als die Kreisfläche (gleich $\pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi} = 0,078\dots$).

Obwohl dieses Ergebnis richtig ist (siehe Aufgabe 62), dürfen wir diesen Schluss noch

³⁶In den Aufgaben 59a und b werden nicht nur die Winkel der betrachteten Vielecke als bekannt vorausgesetzt, sondern auch die Reihenfolge, in der sie beim Umlauf auf der Randkurve des Vielecks nacheinander auftreten. Die Forderung, das Viereck (oder Vieleck) sei konvex, besagt, dass keiner der Winkel (die nach Voraussetzung der Aufgabe bekannt sein sollen) größer als 180° sein darf.

³⁷Die Analogie zwischen den Aufgaben 58 und 59a ist nicht zufällig, sondern tiefer begründet; leider können wir im Rahmen dieses Buches nicht ausführlicher auf diese Frage eingehen.

nicht ziehen. Aufgabe 61 deutet die Lösung des isoperimetrischen Problems an, löst es jedoch nicht.

Dass man die Überlegung der Aufgabe 61 nicht als Lösung des isoperimetrischen Problems ansehen darf, kann man sich am leichtesten durch einen Vergleich der Aufgabe 61 mit folgendem äußerst einfachen Satz klarmachen:

Durch Quadrieren jeder von 1 verschiedenen ganzen Zahl erhält man eine neue ganze Zahl $\bar{n} = n^2$, die größer als n ist. Diese Behauptung kann analog zur Aufgabe 61 formuliert werden:

"Ist eine ganze Zahl n von 1 verschieden, so existiert eine ganze Zahl \bar{n} , die größer ist als n ."

Hieraus kann man aber nicht schließen, dass 1 die größte ganze Zahl sei. Offenbar kann jedem, der solchen Unsinn behaupten wollte, erwidert werden, dass die Überlegung, keine einzige von 1 verschiedene ganze Zahl sei die größte, gar nichts beweist, da, ja eine größte ganze Zahl überhaupt nicht existiert.

Behauptet man jedoch, aus Aufgabe 61 folge, der Kreis vom Radius $\frac{1}{2\pi}$ besitze von allen (konvexen) Figuren den größten Inhalt, so muss man auf folgende "boshafte" Frage gefasst sein:

"Woher wissen Sie denn, dass überhaupt eine Figur mit größtem Flächeninhalt existiert?"

Auf diese Frage gibt aber die Lösung der Aufgabe 61 keine Antwort.

Unser Beispiel mit den ganzen Zahlen unterscheidet sich jedoch wesentlich von der Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen. Unter den ganzen Zahlen kann man beliebig große Zahlen finden (in der Mathematik bringt man diese Tatsache gewöhnlich in der Aussage zum Ausdruck, die Menge der ganzen Zahlen sei unbeschränkt); hieraus folgt unmittelbar, dass es keine größte ganze Zahl geben kann.

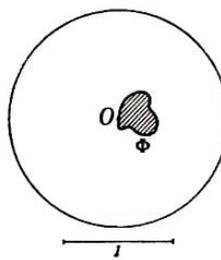


Abb. 67

Demgegenüber sind die Flächeninhalte aller Figuren vom Umfang 1 beschränkt, denn alle diese Figuren müssen offenbar von einem Kreis mit dem Radius 1 umschlossen werden (Abb. 67); folglich ist der Flächeninhalt jeder Figur kleiner als der Inhalt π dieses Kreises.

Der Schweizer Geometer Jakob Steiner, der als erster (und auf fünf verschiedene Arten) zeigte, dass nur der Kreis als Lösung des isoperimetrischen Problems in Frage kommt, nahm an, dass aus der Beschränktheit der Flächeninhalte der Figuren vom Umfang 1 die Existenz einer Figur mit maximalem Flächeninhalt folge.

Jedoch ist auch diese Überlegung nicht einwandfrei. Betrachten wir beispielsweise alle positiven Brüche mit dem Zähler 1:

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Die Menge dieser Brüche ist nach oben beschränkt (außer 1 sind sie alle echte Brüche und daher nicht größer als 1), sie ist auch nach unten beschränkt (alle Brüche sind positiv und folglich größer als Null).

Dennoch lässt sich daraus, dass das Quadrat jedes von $\frac{1}{1} = 1$ verschiedenen dieser Brüche wieder einen Bruch mit dem Zähler 1 ergibt, der kleiner als der ursprüngliche ist, nicht schließen, dass $\frac{1}{1} = 1$ der kleinste der betrachteten Brüche sei, da es überhaupt keinen kleinsten Bruch gibt.

Um noch deutlicher hervorzuheben, dass die Existenz einer konvexen Figur vom Umfang 1 mit maximalem Flächeninhalt keine Trivialität ist, betrachten wir ein Beispiel.

Man kann versuchen, folgende Aufgabe zu lösen, die in ihrer Form sehr an das isoperimetrische Problem erinnert:

Gesucht sei eine konvexe Figur mit maximalem Flächeninhalt, deren Umfang kleiner als 1 ist. Auf den ersten Blick scheint dieses Problem ebenso sinnvoll zu sein wie das isoperimetrische.

Man überzeugt sich jedoch leicht davon, dass diese Aufgabe keine Lösung besitzt; denn zu jeder Figur Φ vom Umfang $p = 1 - \delta < 1$ lässt sich eine Figur $\bar{\Phi}$ finden, deren Umfang ebenfalls kleiner als 1 ist, die aber einen größeren Flächeninhalt als Φ besitzt (beispielsweise die zu Φ ähnliche Figur, deren Umfang gleich $1 - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta$ ist).

Somit bedarf der aus dem Ergebnis der Aufgabe 61 gezogene Schluss, dass der Kreis vom Radius 1 mit dem Umfang 1 den größten Inhalt von allen Figuren habe, noch des Beweises der Existenz einer Figur größten Flächeninhalts.³⁸

Es gibt jedoch auch elementare Lösungen des isoperimetrischen Problems, die sich nicht auf den Satz von der Existenz einer Figur maximalen Flächeninhalts stützen (siehe Aufgabe 62).³⁹

62. Man beweise unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 59, dass der Kreis einen größeren Flächeninhalt besitzt als jede andere Figur mit gleichem Umfang.

63. Man beweise, dass ein Vieleck, das einem Kreis eingeschrieben werden kann, einen größeren Flächeninhalt besitzt als jedes andere Vieleck mit den gleichen Seitenlängen.

Aufgabe 63 stellt eine Verallgemeinerung der Aufgabe 58 dar. Man kann sie analog der Aufgabe 59b formulieren:

Von allen konvexen Vielecken mit gegebenen Seitenlängen besitzt dasjenige den größten Flächeninhalt, das einem Kreis eingeschrieben werden kann.

³⁸Einen Beweis dieser Tatsache, der sich auf einige Begriffe und Methoden der modernen Mathematik stützt, siehe Anhang I

³⁹Einige andere Beweise der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises sind in den oben erwähnten Büchern von D. A. Kryshanowski und W. Blaschke angeführt.

Damit jedoch die Aufgabe in dieser Form sinnvoll ist, muss bewiesen werden, dass stets ein Vieleck mit vorgegebenen Seitenlängen existiert, das einem Kreis einbeschrieben werden kann (dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass jede Seite kleiner ist als die Summe der übrigen, da sonst kein Vieleck gebildet werden kann). Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.⁴⁰

Wir weisen noch darauf hin, dass die in ihrer Form recht ähnlichen Aufgaben 63 und 59b in verschiedener Beziehung zum isoperimetrischen Problem stehen. Die Lösung der Aufgabe 63 ist ohne Benutzung der isoperimetrischen Aufgabe äußerst schwierig.

Dagegen lässt sich die Aufgabe 59b unmittelbar lösen und kann ihrerseits zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises benutzt werden (siehe Lösung der Aufgabe 62).

64. Man beweise, dass von allen konvexen n -Ecken mit gleichem Umfang das regelmäßige n -Eck den größten Inhalt hat.

Die Aufgabe 64 ist offenbar eine Verallgemeinerung der Aufgaben 56a und 56b).

65.a) Man beweise, dass von allen konvexen Figuren Φ , die von einer Strecke der Länge a und von einem Bogen der Länge l mit $l > a$ begrenzt werden, das Kreissegment den größten Flächeninhalt hat.

b) Man beweise, dass von allen konvexen Figuren Φ , die von einer Strecke beliebiger Länge und einem Bogen der Länge l begrenzt werden, der Halbkreis vom Radius $\frac{l}{\pi}$ den größten Flächeninhalt besitzt.

Aufgabe 65b (ebenso eine etwas allgemeinere Aufgabe) führt den Namen "Didosches Problem".

Dido war eine sagenhafte phönizische Herrscherin, die Begründerin der Stadt Karthago. Der Sage nach kam Dido mit einem die Nordküste Afrikas bewohnenden Stamm überein, dass ihr ein Landstreifen, "begrenzt von einem Ochsenfell", überlassen werde.

Dido jedoch bedeckte nicht einfach ein kleines Landstück mit dem Fell, wie es die Absicht der Besitzer der Küste war, sondern griff zu einer List. Sie zerschnitt das Fell in schmale Streifen und knüpfte diese zu einem langen Riemen zusammen.

Nunmehr stellte sich Dido die Aufgabe, mit diesem Riemen einen Landstreifen mit möglichst großem Flächeninhalt abzuzäunen. Dabei lief die Frage, vor der Dido stand, nicht einfach auf das isoperimetrische Problem hinaus, da sie die Meeresküste benutzen konnte; indem sie einen am Meer gelegenen Landstreifen abtrennte, erhielt sie ein größeres Gebiet, als wenn sie einen fern vom Meer gelegenen Landstreifen gewählt hätte.

Sieht man die Meeresküste als geradlinig an, so gelangt man direkt zur Aufgabe 65b.

66. Gesucht wird diejenige konvexe Kurve der Länge 1, die eine Ecke mit dem Winkel α besitzt und eine Figur von maximalem Flächeninhalt begrenzt.

Im dreidimensionalen Raum lautet das "isoperimetrische Problem" folgendermaßen:

⁴⁰Der Beweis ist ebenfalls in dem Buch von D. A. Kryshanowski zu finden.

Gesucht wird derjenige Körper mit der Oberfläche 1, der maximalen Rauminhalt besitzt. Es ist die Kugel (mit dem Radius $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$; der Beweis dieses Satzes ist beispielsweise in den bereits zitierten Büchern von D. A. Kryshanowski und W. Blaschke zu finden.

1.6 Verschiedene Maximum- und Minimaufgaben

In diesem Paragraphen sind einige Aufgaben über größte und kleinste Werte numerischer Größen zusammengestellt, die sich auf konvexe Figuren beziehen. In den §§ 2 und 3 hatten wir bereits eine ganze Reihe ähnlicher Aufgaben (siehe Aufgaben 16-18, 19a des § 2 und Aufgaben 31, 33-36 des § 3); § 5 war ausschließlich einer wichtigen Aufgabe dieser Art und ihren Anwendungen gewidmet.

Einige Aufgaben über Maxima und Minima werden auch in den nachfolgenden §§ 7 und 8 angeführt (Aufgaben 86, 89, 91, 94, 95, 97 des § 7, Aufgaben 103, 104 und 109 des § 8).

Die Aufgaben des vorliegenden Paragraphen sind weitgehend voneinander unabhängig; der Leser kann mit der Lösung derjenigen der hier angeführten Aufgaben beginnen, die ihm am interessantesten erscheint.

Für die meisten Aufgaben dieses Paragraphen ist auch die Kenntnis des Inhalts der vorangegangenen Paragraphen nicht erforderlich (mit Ausnahme des § 1, der eine Einführung in das ganze Buch darstellt).

Ausgenommen in dieser Hinsicht sind nur die Aufgaben 75-77. Aufgabe 75 kann nur gelöst werden, wenn man den Inhalt des § 4 kennt. Diese Aufgabe stellt einen Spezialfall eines allgemeinen Satzes dar, der mannigfaltige Anwendungen findet (die sogenannte Minkowskische Ungleichung; siehe z. B. die schon zitierten Bücher von L. A. Lusternik oder W. Blaschke).

Die Aufgaben 76 und 77 werden mit Hilfe der Aufgabe 75 gelöst; zur Lösung der Aufgabe 77 wird auch der Inhalt des § 5 als bekannt vorausgesetzt.

Zum Verständnis einer Reihe von Aufgaben dieses Paragraphen benötigt der Leser die bereits definierten Begriffe des Durchmessers, der Breite, des Umfangs und des Flächeninhalts einer konvexen Figur.

Den kleinsten eine ebene Figur Φ umfassenden Kreis bezeichnet man als den der Figur umbeschriebenen Kreis.⁴¹

67. Man beweise, dass eine ebene Figur Φ nicht zwei verschiedene Umkreise besitzen kann. Man beweise ferner, dass der Umkreis einer ebenen Figur Φ notwendig entweder zwei Randpunkte von Φ enthält, die diametral gegenüberliegende Punkte des Kreises sind, oder aber drei Randpunkte von Φ , welche ein spitzwinkliges Dreieck bilden.

Man folgere hieraus, dass der Radius R des einer ebenen Figur Φ vom Durchmesser 1 umbeschriebenen Kreises in den Grenzen

$$0,5 \leq R \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577\dots$$

eingeschlossen ist.

⁴¹Siehe Anhang I, Aufgabe 3

Aus Aufgabe 67 folgt unmittelbar der Satz von Jung (siehe § 2, Aufgabe 16). Der größte von einer konvexen Figur Φ umfasste Kreis wird als ein der Figur einbeschriebener Kreis bezeichnet.⁴² Im Gegensatz zum Umkreis braucht der einer konvexen Figur einbeschriebene Kreis nicht eindeutig zu sein (Abb. 68).

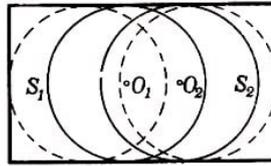


Abb. 68

68. Man beweise, dass ein einer konvexen Figur Φ einbeschriebener Kreis notwendigerweise entweder zwei Randpunkte von Φ enthält, die diametral gegenüberliegende Punkte des Kreises sind, oder aber drei Randpunkte von Φ , welche ein spitzwinkliges Dreieck bilden; im letzten Fall ist der Φ einbeschriebene Kreis eindeutig bestimmt. Man beweise ferner, dass der Radius r eines der konvexen Figur Φ der Breite 1 einbeschriebenen Kreises in den Grenzen

$$\frac{1}{2} \geq r \geq \frac{1}{3}$$

eingeschlossen ist.

Aus Aufgabe 68 folgt unmittelbar der Satz von Blaschke, der den Inhalt der Aufgabe 17 des § 2 bildet.

Als Mittelpunkt einer konvexen Figur Φ bezeichnen wir einen inneren Punkt O von Φ , der die Eigenschaft besitzt, dass das Verhältnis, in dem der Punkt O sämtliche durch ihn verlaufenden Sehnen der Figur Φ teilt, in engsten Grenzen eingeschlossen ist.

Das kleinste dieser Verhältnisse, in welchem der Mittelpunkt O eine durch O verlaufende Sehne von Φ teilt, bezeichnen wir als Zentralitätskoeffizient der Figur Φ . So ist bei zentrosymmetrischen Figuren (und nur bei solchen) der Zentralitätskoeffizient gleich 1, und der Mittelpunkt fällt mit dem Symmetriezentrum zusammen; denn alle durch das Symmetriezentrum führenden Sehnen werden in ihm genau im Verhältnis 1:1 geteilt. Liegt der Zentralitätskoeffizient einer konvexen Figur nahe an 1, so ist die Figur offensichtlich nahezu zentrosymmetrisch.⁴³

69**. Man beweise, dass durch den Mittelpunkt O einer konvexen Figur Φ mit dem Zentralitätskoeffizienten λ mindestens drei Sehnen A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 hindurchgehen derart, dass (Abb. 69)

$$\frac{A_1O}{OB_1} = \frac{A_2O}{OB_2} = \frac{A_3O}{OB_3} = \lambda$$

⁴²Siehe Anhang I, Aufgabe 4

⁴³Andere Abschätzungen für den Grad der Zentriertheit einer konvexen Figur sind in den Aufgaben 33, 34 und 36 des § 3 enthalten; siehe auch den Text, der den Aufgaben 18 und 19 des § 2 vorangeht.

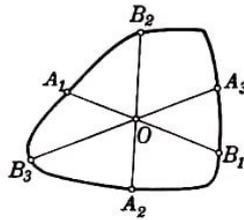


Abb. 69

Man schlieÙe hieraus, dass der Zentralitätskoeffizient einer konvexen Figur λ nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ sein kann.

Siehe auch Aufgabe 19a des § 2.

70*. Man beweise, dass von allen konvexen Kurven der Breite 1 das gleichseitige Dreieck mit der Höhe 1 den kleinsten Flächeninhalt besitzt.

Unter Benutzung von Aufgabe 70 können wir jetzt folgende Aufgabe lösen:

Wie groß muss der Flächeninhalt einer konvexen Figur Φ mindestens sein, wenn gefordert wird, dass sich im Innern von Φ eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen lässt?

Zunächst sieht man leicht, dass die Breite A einer solchen Figur Φ nicht kleiner als 1 sein darf; denn wäre der Abstand zwischen irgendeinem Paar paralleler Stützgeraden l und l' der Figur Φ kleiner als 1, so könnte eine Strecke der Länge 1 mit einer zu l und l' senkrechten Richtung nicht im Innern von Φ gelegen sein (Abb. 70); folglich lieÙe sich eine solche Strecke nicht um 360° drehen, wenn sie dabei stets innerhalb von Φ bleiben soll.

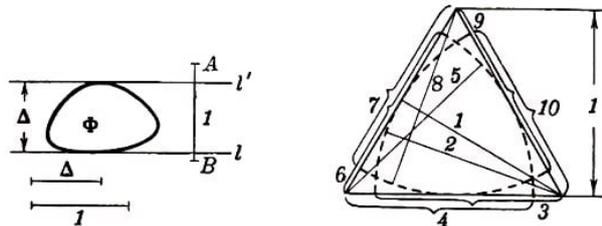


Abb. 70,71

Nach Aufgabe 70 folgt hieraus, dass der Flächeninhalt einer konvexen Figur Φ , innerhalb deren sich eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen lässt, nicht kleiner sein kann als der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks der Höhe (also nicht kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577\dots$).

Andererseits ist völlig klar, dass man im Innern eines gleichseitigen Dreiecks der Höhe 1 eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen kann (Abb. 71).

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, dass der Inhalt einer konvexen Figur, innerhalb deren sich eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen lässt (anschaulich kann man von einem Raum sprechen, in dem eine Stange der Länge 1 gedreht werden soll), nicht kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sein darf, kommt naturgemäß die Frage auf, wie groß der Inhalt einer nicht notwendig konvexen Fläche mindestens sein muss, in der man eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen kann.

Die Antwort auf diese Frage ist völlig überraschend (siehe Aufgabe 72).

71**. (Hilfssatz.) Es ist stets möglich, ein gegebenes Dreieck ABC durch Strecken,

welche den Eckpunkt B mit Punkten der Grundlinie AC verbinden, in eine gewisse (hinreichend große) Anzahl gleichgroßer Dreiecke $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ zu zerlegen und diese dann längs der Geraden AC zu verschieben derart, dass der gemeinsame Teil aller Dreiecke $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ in ihrer neuen Lage kleiner als eine beliebig kleine positive Zahl σ ist (nach der Verschiebung nehmen die Dreiecke $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ eine kleinere Fläche ein als zuvor, da sie einander überdecken; Abb. 72).

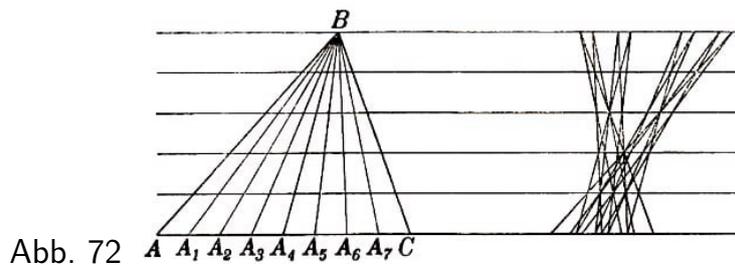


Abb. 72 $A A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 C$

72*. Satz von A. S. Besikowitsch.

Man beweise, dass eine (nichtkonvexe) ebene Figur von beliebig kleinem Flächeninhalt existiert, innerhalb deren eine Strecke der Länge 1 um 360° gedreht werden kann.

Damit existiert eine Figur, deren Flächeninhalt kleiner als etwa $0,001 \text{ mm}^2$ ist und innerhalb der eine Strecke von 1 km Länge um 360° gedreht werden kann.

73*. Man beweise, dass ein Dreieck einen kleineren Flächeninhalt besitzt als jede andere konvexe Figur desselben Durchmessers und gleicher Breite.

Man sieht leicht, dass der Durchmesser D eines Dreiecks gleich seiner längsten Seite und die Breite Δ gleich der auf diese Seite gefällten Höhe ist. Hieraus lässt sich leicht der Schluss ziehen, dass beim Dreieck $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot D$ gilt.

Ist nämlich D die Länge der größten Seite irgendeines Dreiecks, so ist der ihr gegenüberüberliegende Winkel der größte des Dreiecks; hieraus folgt, dass wenigstens ein dieser Seite anliegender Winkel nicht größer als 60° ist; daraus folgt weiter, dass die auf die Seite der Länge D gefällte Höhe des Dreiecks, die gleich dem Produkt einer der beiden übrigen Seiten (die nach Voraussetzung nicht größer als D sind) mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist, nicht größer als $D \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} D$ sein kann.

Die Gleichung $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3} D$ gilt nur für den Fall des gleichseitigen Dreiecks.

Damit kann der Inhalt der Aufgabe 73 folgendermaßen formuliert werden:

Von allen konvexen Figuren mit dem Durchmesser D und der Breite Δ , wobei $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ist, hat das Dreieck den kleinsten Flächeninhalt.

(Für den Fall $\Delta = D$ wird diese Aufgabe im folgenden Paragraphen untersucht; siehe Aufgaben 89 und 97.)

74. Man beweise, dass ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel nicht kleiner sind als seine Basis, keinen größeren Flächeninhalt besitzen kann als jede andere konvexe Figur von

a) demselben Umfang und demselben Durchmesser;

b) demselben Umfang und derselben Breite.

Da der Durchmesser des Dreiecks, von dem hier (Aufgabe 74a) die Rede ist, gleich der Schenkellänge ist, kann der Umfang eines derartigen Dreiecks offenbar nicht größer als der dreifache Durchmesser sein.

Damit lässt sich der Inhalt der Aufgabe 74a folgendermaßen formulieren:

Von allen konvexen Figuren mit dem Durchmesser D und dem Umfang L , wobei $L \leq 3D$ ist, besitzt das gleichschenklige Dreieck mit der Schenkellänge D den kleinsten Flächeninhalt.

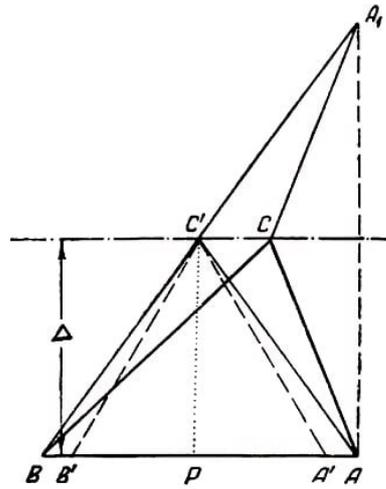


Abb. 73

Unter der Breite des Dreiecks ABC , von der in Aufgabe 74b gesprochen wird, verstehen wir die auf einen Schenkel gefällte Höhe. Der Umfang dieses Dreiecks ist nicht kleiner als der Umfang des gleichschenkligen Dreiecks ABC' mit derselben auf AB gefällten Höhe $C'P = \Delta$; dabei ist $AC' = BC'$, während wie beim ersten Dreieck $AB = BC$ ist (siehe Abb.73, wo der Punkt A_1 zu A bezüglich CC' symmetrisch liegt; $AC' + C'B = A_1B$ und $AC + CB = A_1C + CB$).

Der Umfang des Dreiecks ABC' ist nicht kleiner als der Umfang des gleichseitigen Dreiecks $A'B'C'$ mit derselben Höhe Δ (denn im Dreieck ABC' ist AB die größte Seite: $BC' < BC = AB$).

Deshalb ist der Umfang von ABC nicht kleiner als der Umfang des gleichseitigen Dreiecks $A'B'C'$ mit der Höhe Δ , d. h. nicht kleiner als $3 \cdot \frac{2\Delta}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\Delta$.

Folglich kann man den Satz aus Aufgabe 74b so formulieren:

Unter allen konvexen Figuren von der Breite Δ und dem Umfang L , wobei $L \geq 2\sqrt{3}\Delta$ ist, hat das gleichschenklige Dreieck, dessen auf einen Schenkel gefällte Höhe gleich Δ ist, den kleinsten Flächeninhalt.

75. Es sei K eine beliebige konvexe Kurve und K' eine Kurve, die aus K durch symmetrische Spiegelung an einem gewissen Punkt O hervorgegangen ist; K^* sei eine Kurve, die der Summe der Kurve K und K' ähnlich ist, und zwar im Verhältnis $1 : 2$ (Abb.

74)⁴⁴. Man beweise:

- a) Die Kurve K^* besitzt ein Symmetriezentrum.
- b) Durchmesser und Breite der Kurve K^* sind gleich dem Durchmesser bzw. der Breite der Kurve K .
- c) Die Länge der Kurve K^* ist gleich der Länge der Kurve K .
- d) Die von der Kurve K^* begrenzte Fläche ist nicht kleiner als die von der Kurve K begrenzte Fläche.

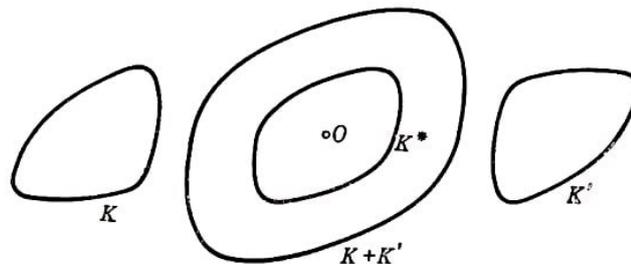


Abb. 74

Da das Ergebnis der Aufgabe 75 in den weiteren Ausführungen eine große Rolle spielt, wollen wir hier noch auf andere Art den Sinn der hier angewandten Konstruktion erläutern.

Die relative Schwierigkeit der Aufgaben, die sich auf konvexe Figuren beziehen, im Vergleich zu den geometrischen Aufgaben des Schulunterrichts erklärt sich dadurch, dass in der Theorie der konvexen Figuren ziemlich allgemeine Figuren untersucht werden, so dass man keinerlei individuelle Besonderheiten der Form dieser Figuren ausnutzen kann.

Daher ist jede Möglichkeit, eine untersuchte Figur durch eine neue zu ersetzen, die symmetrischer als die ursprüngliche ist, äußerst wertvoll (den Sion des Ausdrucks symmetrischere Figur präzisieren wir hier vorerst nicht weiter, er ist unmittelbar verständlich).

In dieser Beziehung nimmt in der Theorie der konvexen Figuren die Methode der Symmetrisierung einen hervorragenden Platz ein, deren Gedanke gerade in der Ersetzung durch verwandte Figuren besteht. Es existiert eine ganze Reihe von verschiedenen Methoden der Symmetrisierung konvexer Figuren. Besonders wichtig in der Theorie der ebenen konvexen Figuren sind zwei Arten der Symmetrisierung: die Symmetrisierung bezüglich einer Achse und die Symmetrisierung in Bezug auf einen Punkt.

Die Symmetrisierung in Bezug auf eine Achse besteht in der Ersetzung einer konvexen Figur durch eine neue Figur, die eine feste Symmetrieachse l besitzt, mit Hilfe folgender Konstruktion:

Jede zur Geraden l senkrechte Sehne AB einer konvexen Figur Φ wird längs der durch AB bestimmten Geraden in eine neue Lage A_1B_1 , verschoben, so dass sie symmetrisch

⁴⁴Die Kurve K^* kann folgendermaßen definiert werden:

$$K^* = \frac{1}{2}(K + K')$$

Man bezeichnet K^* daher als "arithmetisches Mittel" der Kurven K und K' .

zu l liegt; die von allen Sehnen A_1B_1 in ihrer neuen Lage gebildete Figur Φ' heißt Bild der Figur Φ bei Symmetrisierung bezüglich der Achse l (Abb. 75).

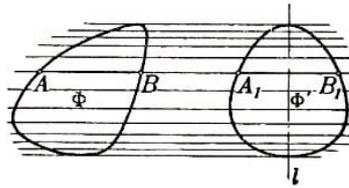


Abb. 75

Die grundlegenden Eigenschaften der Symmetrisierung bezüglich einer Achse und einige Anwendungen dieser Transformation kann der Leser in schon zitierten Buch von D. A. Kryshanowski, "Isoperimetrie", oder in dem zitierten Buch von W. Blaschke, "Kreis und Kugel", finden.⁴⁵

Schwieriger ist die Symmetrisierung in Bezug auf einen Punkt, die eine beliebige konvexe Figur Φ in eine zentrosymmetrische Figur $\bar{\Phi}$ überführt. In Analogie zur Symmetrisierung bezüglich einer Geraden könnte die Symmetrisierung in Bezug auf einen Punkt folgendermaßen definiert werden:

Jede durch einen inneren Punkt O führende Sehne AB einer Kurve wird längs der durch AB bestimmten Geraden in eine neue, bezüglich O symmetrische Lage $A'B'$ verschoben (Abb. 76).

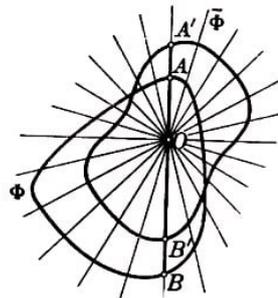


Abb. 76

Diese Symmetrisierungsmethode wird jedoch selten angewendet.⁴⁶

Als bedeutend wichtiger erweist sich die folgendermaßen definierte Methode zur Symmetrisierung in Bezug auf einen Punkt. Die konvexe Figur Φ wird als Durchschnitt unendlich vieler Streifen angesehen, die aus ihren parallelen Stützgeraden gebildet sind. Nunmehr werden alle diese Streifen senkrecht zu ihrer eigenen Richtung in eine neue, zu einem gewissen Punkt O symmetrische Lage verschoben; die Figur $\bar{\Phi}$, die der Durchschnitt der verschobenen Streifen ist, heißt Bild der Figur Φ bei Symmetrisierung in Bezug auf den Punkt O (Abb. 77a).

⁴⁵Wir empfehlen dem Leser zu versuchen, folgende Eigenschaften der Symmetrisierung bezüglich einer Achse selbständig zu beweisen:

- Ist Φ' das Bild einer konvexen Figur Φ bei Symmetrisierung in Bezug auf eine Achse, so gilt:
- die Figur Φ' ist konvex;
 - der Inhalt von Φ' ist gleich dem von Φ ;
 - der Umfang von Φ' ist nicht größer als der Umfang von Φ .

⁴⁶Einer der Gründe dafür besteht darin, dass die so definierte Symmetrisierung eine konvexe Figur in eine nichtkonvexe überführen kann (siehe beispielsweise Abb. 76).

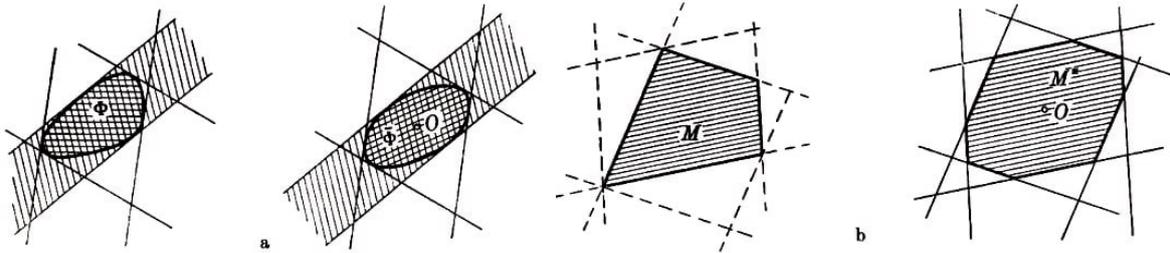


Abb. 77

In Abb. 77b ist die Symmetrisierung eines konvexen Vielecks M dargestellt. Man sieht leicht, dass die in der Voraussetzung zur Aufgabe 75 definierte konvexe Kurve K^* genau mit der Kurve zusammenfällt, die man aus K mit Hilfe der so definierten Symmetrisierung in Bezug auf einen Punkt erhält.

In der Theorie der konvexen Körper im Raum spielen drei Methoden der Symmetrisierung eine große Rolle: die Symmetrisierung bezüglich einer Ebene, die analog zur Symmetrisierung bezüglich einer Geraden in der Ebene definiert wird, die Symmetrisierung bezüglich eines Punktes, die ebenso wie in der Ebene definiert ist (wobei natürlich die Streifen zwischen je zwei parallelen Stützgeraden der Figur durch Streifen zwischen je zwei parallelen Stützebenen des Körpers ersetzt werden), und schließlich die Symmetrisierung bezüglich einer Geraden, bei der jeder senkrecht zu einer gewissen Achse l gelegene Schnitt des konvexen Körpers durch einen Kreis gleichen Flächeninhalts ersetzt wird, dessen Mittelpunkt auf der Achse l liegt (Abb. 78).

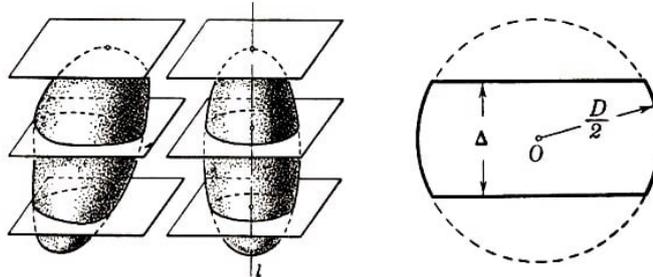


Abb. 78,79

76.a) Man beweise, dass der Kreis von allen konvexen Kurven des Durchmessers 1 die größte Fläche begrenzt.

b) Man beweise, dass von allen konvexen Figuren des Durchmessers D und der Breite Δ die in Abb. 79 dargestellte Figur den größten Inhalt hat. Die Figur ist aus einem Kreis vom Radius $\frac{D}{2}$ durch zwei parallele und vom Mittelpunkt des Kreises gleich weit entfernte Geraden ausgeschnitten, deren Abstand gleich A ist.

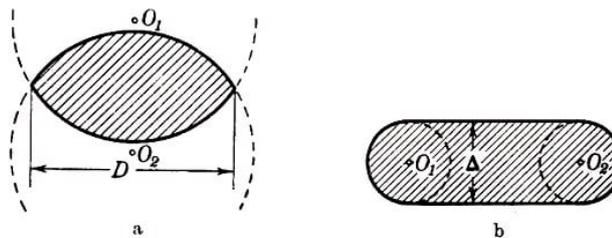


Abb. 80

77.a) Man beweise, dass von allen konvexen Figuren mit dem Durchmesser D und dem Umfang L ($L \leq \pi D$; siehe Aufgabe 94a des § 7) die in Abb. 80a dargestellte Figur,

die aus zwei gleichen Kreissegmenten mit der Sehne D und dem Bogen der Länge $\frac{L}{2}$ besteht, den größten Flächeninhalt besitzt.

b) Man beweise, dass von allen konvexen Figuren der Breite Δ und des Umfangs L ($L \leq \pi\Delta$; siehe Aufgabe 95a des § 7) die in Abb. 80b dargestellte Figur den größten Inhalt besitzt. Die Figur wird von zwei gleichlangen und parallelen Strecken begrenzt, deren Abstand gleich Δ ist, und von zwei Halbkreisen mit dem Durchmesser Δ .

Alle Aufgaben über Maxima und Minima, die sich auf konvexe Figuren beziehen, können in zwei Gruppen geteilt werden. Zur ersten Gruppe gehören Aufgaben, in denen gefordert wird, unter allen konvexen Figuren diejenige zu finden, für die eine gewisse die Figur charakterisierende Zahl einen maximalen oder minimalen Wert annimmt (Aufgaben über unbedingte Maxima oder Minima); zu dieser Gruppe gehört beispielsweise Aufgabe 69 dieses Paragraphen.

Die zweite Gruppe enthält eine bedeutend größere Anzahl von Aufgaben; in diesen Aufgaben wird gefordert, einen größten oder kleinsten Wert einer gewissen Größe zu finden, die sich auf eine konvexe Figur bezieht; dabei muss aber die betrachtete konvexe Figur noch einige zusätzliche Bedingungen erfüllen, die in die Formulierung der Aufgabe eingehen (Aufgaben über bedingte Maxima oder Minima).⁴⁷

Meist bestehen diese Nebenbedingungen darin, dass irgendeine andere charakteristische Zahl der konvexen Figur einen vorgegebenen Wert annehmen muss.

Die bekannteste Aufgabe dieser Art ist das isoperimetrische Problem, das Maxi des Flächeninhalts einer k Figur unter der Bedingung zu finden, dass die Länge der Begrenzungskurve der Figur einen vorgegebenen Wert, etwa den Wert 1, annimmt (siehe § 5).

Viele Beispiele ähnlicher Art sind in vorliegendem Paragraphen zu finden.

Insbesondere werden in den Aufgaben dieses Paragraphen und in einigen Aufgaben der §§ 5 und 7 alle größten bzw. kleinsten Werte bestimmt, die eine der folgenden Größen annehmen kann:

- a) der Durchmesser D einer konvexen Figur,
- b) die Breite Δ ,
- c) der Flächeninhalt S und
- d) der Umfang L , unter der Bedingung, dass irgendwelche andere dieser Größen vorgegebene Werte annehmen. Es zeigt sich nämlich:

1. Ist der Durchmesser einer konvexen Figur gleich D , so gilt

- a) $D \geq \Delta > 0$. Beide Teile dieser Ungleichung sind trivial.
- b) $\frac{\pi D^2}{4} \geq S > 0$. Der erste Teil dieser Ungleichung stellt den Inhalt der Aufgabe 76a dar, der zweite ist trivial.
- c) $3,14D \approx \pi D \geq L > 2D$. Der erste Teil dieser Ungleichung bildet den Inhalt der Aufgabe 94a des § 7, der zweite ist trivial.⁴⁸

⁴⁷Diese Einteilung der Aufgaben über gesuchte Maxima und Minima bezieht sich selbstverständlich nicht nur auf Aufgaben über konvexe Figuren.

⁴⁸Es ist klar, dass der Umfang einer konvexen Figur Φ vom Durchmesser D nicht kleiner sein kann

2. Ist die Breite einer konvexen Figur gleich Δ , so gilt

a) $\infty > D \geq \Delta$. Beide Teile dieser Ungleichung sind trivial.

b) $\infty > S \geq \frac{\sqrt{3}}{3}\Delta^2$. Der erste Teil dieser Ungleichung ist trivial, der zweite bildet den Inhalt der Aufgabe 70.

c) $\infty > L \geq \pi\Delta$. Der erste Teil dieser Ungleichung ist trivial, der zweite stellt den Inhalt der Aufgabe 95a des § 7 dar.

3. Ist der Flächeninhalt einer konvexen Figur gleich S , so gilt

a) $\infty > D \geq \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$. Der erste Teil der Ungleichung ist trivial, der zweite folgt aus dem Ergebnis der Aufgabe 76a.

b) $\sqrt{\sqrt{3}S} \geq \Delta > 0$. Der erste Teil dieser Ungleichung folgt aus dem Ergebnis der Aufgabe 70, der zweite ist trivial.

c) $\infty > L \geq \sqrt{4\pi S}$. Der erste Teil dieser Ungleichung ist trivial, der zweite folgt aus dem Ergebnis der Aufgabe 62 des § 5.

4. Ist der Umfang einer konvexen Figur gleich L , so gilt

a) $\frac{L}{2} > D \geq \frac{L}{\pi} \approx 0,318L$. Der erste Teil dieser Ungleichung ist trivial, der zweite folgt aus dem Ergebnis der Aufgabe 94a des § 7.

b) $\frac{L}{\pi} \geq \Delta > 0$. Der erste Teil dieser Ungleichung folgt aus dem Ergebnis der Aufgabe 95a des § 7, der zweite ist trivial.

c) $\frac{L^2}{4\pi} \geq S > 0$. Der erste Teil dieser Ungleichung stellt den Inhalt der Aufgabe 62 des § 5 dar, der zweite ist trivial.

Schwieriger sind die Aufgaben, in denen gefordert wird, den größten oder kleinsten Wert einer gewissen zu einer konvexen Figur gehörenden Größe zu finden, wenn einige (zwei oder mehrere) der anderen charakteristischen Größen der Figur vorgegebene Werte haben sollen (Maxima- oder Minimaufgaben mit mehreren Nebenbedingungen).

Einige Aufgaben dieser Art werden in diesem und im nächsten Paragraphen behandelt.

Alle diese Aufgaben sind untereinander durch die vier Größen D , Δ , S und L verknüpft. Sie erschöpfen jedoch nicht alle möglichen Aufgaben ähnlicher Art, die sich auf diese vier Größen beziehen, da zu einer ganzen Reihe solcher Aufgaben die Lösungen bisher noch nicht bekannt sind.

In Aufgabe 76b wird das Maximum von S bei gegebenen D und Δ bestimmt, in Aufgabe 73 und in den Aufgaben 89 und 97 aus § 7 wird das Minimum von S bei gegebenen D und Δ unter der Bedingung $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}D$ bzw. $\Delta = D$ bestimmt.

Das Minimum von S bei gegebenen D und Δ , wobei $D > \Delta > \frac{\sqrt{3}}{3}D \approx 0,866D$ ist, wurde im Jahre 1952 (nach Erscheinen der Originalausgabe dieses Buches) gefunden.

als $2D$; denn sind A und B zwei (Rand-)Punkte der Figur Φ , deren Abstand gleich D ist, so kann keiner der beiden Bogen, in die A und B die Begrenzung von Φ teilen, eine kleinere Länge als Δ haben. Andererseits kann man eine konvexe Figur vom Durchmesser D finden, deren Umfang beliebig nahe bei $2D$ liegt; als Beispiel einer solchen Figur mag ein Rhombus dienen, dessen eine Diagonale gleich D sein mag, während die andere sehr klein ist.

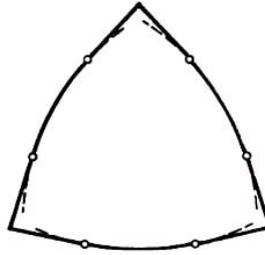


Abb. 81

Es wird für die in Abb. 81 dargestellte Figur erreicht, welche von drei Kreisbögen mit dem Radius Δ begrenzt wird, deren Zentren in den Spitzen des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge D liegen, sowie von den sechs Tangenten, welche aus den Spitzen dieses Dreiecks an diese Kreisbögen gezogen werden.⁴⁹

In den Aufgaben 94b und 95b aus § 7 wird das Maximum bzw. das Minimum von L bei gegebenen D und Δ bestimmt. In Aufgabe 77a wird das Maximum von S bei gegebenen D und L und in Aufgabe 74a sowie in 89 und 97 aus § 7 wird das Minimum von S bei gegebenen D und L unter der Bedingung bestimmt, dass $L \leq 3D$ bzw. $L = \pi D$ ist; das Minimum von S bei gegebenen D und L , wobei $3,14D \approx \pi D > L > 3D$ ist, wurde bisher noch nicht gefunden.

In Aufgabe 77b wird das Maximum von S bei gegebenen Δ und L bestimmt, in Aufgabe 74b und in 89 und 97 aus § 7 wird das Minimum von S bei gegebenen Δ und L unter der Bedingung $L \geq 2\sqrt{3}\Delta$ bzw. $L = \pi\Delta$ bestimmt; das Minimum von S bei gegebenen Δ und L , wobei $3,46\Delta \approx 2\sqrt{3}\Delta > L > \pi\Delta \approx 3,14\Delta$ ist, wurde im Jahre 1952 gefunden (es wird für eine konvexe Figur ebenso wie in Abb. 81 konstruiert).

Aus dieser Aufzählung kann man ersehen, dass es sogar in der elementaren Theorie der konvexen Figuren noch viele ungelöste Fragen gibt.

1.7 Kurven konstanter Breite

Dieser Paragraph ist einer interessanten Klasse konvexer Kurven gewidmet, den sogenannten Kurven konstanter Breite. Diese Kurven werden auch in Kapitel 25 des vorzüglichen elementaren Buches von H. Rademacher und O. Toeplitz, "Von Zahlen und Figuren", behandelt, das als reichhaltige Ergänzung zum Stoff des vorliegenden Paragraphen dienen mag.

Die Aufgaben der ersten Hälfte dieses Paragraphen (bis Aufgabe 91 einschließlich) stehen mit dem Inhalt der vorangegangenen Paragraphen (außer § 1) in keiner Beziehung; nur zur Lösung der Aufgabe 89 wird das Ergebnis der Aufgabe 30a des § 3 wesentlich benutzt; wird § 7 vor § 3 gelesen, so braucht man sich nur speziell mit Aufgabe 30a vertraut zu machen (etwa, indem man einfach ihre Lösung in diesem Buche nachliest). Die Aufgaben 92-95 setzen die Kenntnis des in den ersten elf Aufgaben des § 4 erläuterten Stoffes voraus. Die Aufgaben 94 und 95 stützen sich wesentlich auf die Aufgabe

⁴⁹Der Beweis dieser Tatsache hängt eng zusammen mit der Lösung der Aufgabe 89 aus § 7. Siehe den Aufsatz von M. Shalander, On certain minimum problems in the theory of convex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 78, N 1, 1952, 139-173.

75 des § 6; wird § 7 vor § 6 gelesen, so muss man diese Aufgaben auslassen.

Schließlich ist für das Verständnis des abschließenden (kleingedruckten) Teils dieses Paragraphen die Kenntnis des ganzen § 4 notwendig.

Als Breite einer konvexen Kurve in einer gegebenen Richtung bezeichnet man den Abstand zwischen einem Paar zu dieser Richtung senkrechten Stützgeraden der Kurve (siehe Abb. 59). Ist die Breite einer Kurve in allen Richtungen die gleiche, so bezeichnet man die Kurve als Kurve konstanter Breite (Abb. 82a).

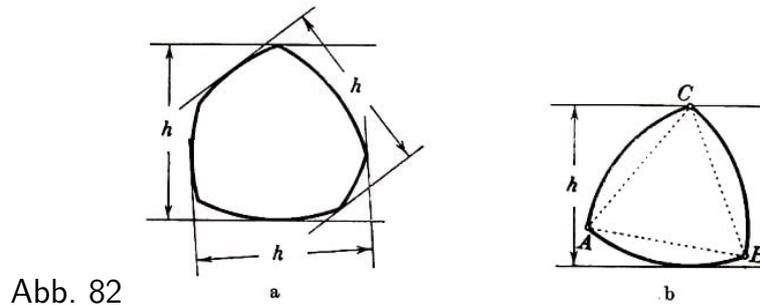


Abb. 82

Bei solchen Kurven spricht man statt von der Breite in gegebener Richtung einfach von der Breite der Kurve. Das einfachste Beispiel einer Kurve konstanter Breite ist der Kreis. Die Breite eines Kreises ist gleich seinem Durchmesser.

Es zeigt sich jedoch, dass es außer dem Kreis noch unendlich viele verschiedene Kurven konstanter Breite gibt. Zum Beispiel denken wir uns ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge h und je zwei seiner Eckpunkte durch einen Kreisbogen vom Radius h um den dritten Eckpunkt verbunden (Abb. 82b).

Diese Kurve heißt Reuleaux-Dreieck.

Von je zwei parallelen Stützgeraden des Reuleaux-Dreiecks geht eine durch einen der drei Eckpunkte des Dreiecks ABC , die auch Ecken der Kurve sind, während die andere den gegenüberliegenden Kreisbogen tangiert. Daher ist der Abstand zwischen je zwei parallelen Stützgeraden eines Reuleaux-Dreiecks gleich h .

Geht man vom Reuleaux-Dreieck aus, so kann man leicht noch andere Beispiele von Kurven konstanter Breite angeben. Wir betrachten wiederum ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge h .

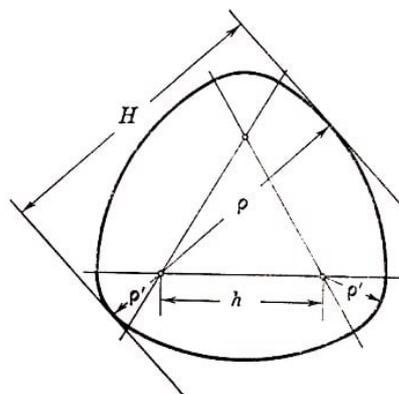


Abb. 83

Um jeden Eckpunkt des Dreiecks schlagen wir innerhalb des zugehörigen Winkels einen Bogen mit einem Radius $\rho > h$; die Endpunkte der erhaltenen drei Bogen verbinden wir durch kleinere Bogen vom Radius $\rho' = \rho - h$ ($\rho + \rho' = H$) um die Eckpunkte des Dreiecks (Abb. 83).

Von je zwei parallelen Stützgeraden der erhaltenen Kurve berührt eine den Bogen des größeren Kreises und die andere den Bogen des kleineren Kreises mit dem gleichen Mittelpunkt. Hieraus ist ersichtlich, dass diese Kurve die konstante Breite H besitzt.

Legen wir an eine Kurve mit konstanter Breite h zwei Paare jeweils paralleler Stützgeraden derart, dass die Geraden des einen Paares senkrecht auf den Geraden des anderen Paares stehen, so erhalten wir ein Quadrat der Seitenlänge h . Auf diese Weise lässt sich einer Kurve konstanter Breite ein Quadrat der Seitenlänge h mit beliebiger Richtung der Seiten umschreiben (Abb. 84a).

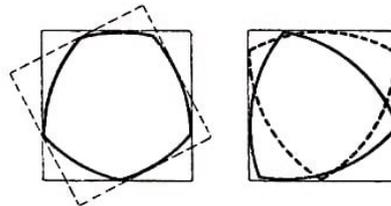


Abb. 84

Mit anderen Worten: Das Quadrat kann ungehindert gedreht werden und bleibt dabei stets der gegebenen Kurve konstanter Breite umschrieben. Oder: eine Kurve konstanter Breite kann frei im Innern des Quadrats so gedreht werden, dass sie stets die Seiten des Quadrats eng berührt (dem Quadrat einbeschrieben bleibt; siehe Abb. 84b). Es ist klar, dass diese Eigenschaft die Kurven konstanter Breite vollständig charakterisiert.

Die Kurven konstanter Breite, insbesondere das Reuleaux-Dreieck, sind neben dem Kreis die einfachsten in der Praxis bei verschiedenen Mechanismen benutzten Kurven. So findet beispielsweise die Tatsache, dass sich das Reuleaux-Dreieck innerhalb eines Quadrates frei drehen lässt und dabei stets sämtliche Seiten berührt, bei der Bohrung quadratischer Löcher Anwendung.

Man benutzt dabei Bohrer von der Form eines Reuleaux-Dreiecks. Betrachten wir noch ein Beispiel.

Es sei II eine ebene Platte mit zwei vertikalen Schlitten S und einem rechteckigen Ausschnitt A (Abb. 85).

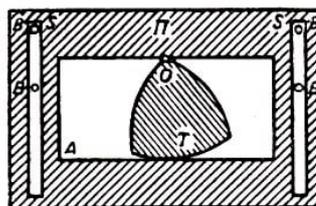


Abb. 85

In den Schlitten S befinden sich je zwei Bolzen B , die auf einer unbeweglichen Unterlage befestigt sind, so dass die Platte II frei nach oben und unten, nicht jedoch seitwärts bewegt werden kann.

In der Öffnung A befindet sich eine Scheibe T von der Form eines Reuleaux-Dreiecks, die an einer senkrecht zur Zeichenebene stehenden Achse O befestigt ist.

Wir lassen die Scheibe T Drehbewegungen um die Achse O ausführen und beobachten, wie sich dabei die Platte Π bewegt. Man sieht leicht, dass bei Drehung der Scheibe T um 120° die Platte Π gehoben wird (Abb. 86a), bei Drehung der Scheibe T um weitere 60° bleibt die Platte Π dann unbewegt (Abb. 86b); bei Drehung um die folgenden 120° senkt sich die Platte bis zur ursprünglichen Lage (Abb. 86c), bei Drehung um die letzten 60° , die den Abschluss einer Umdrehung bildet, bleibt die Platte schließlich nochmals unbewegt (Abb. 86d).

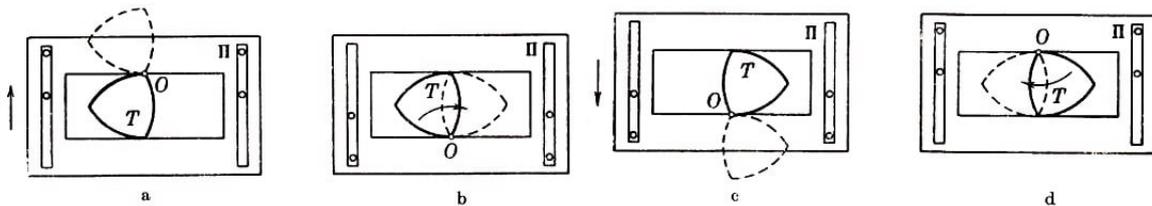


Abb. 86

Auf diese Weise wird die Drehbewegung der Scheibe T in eine geradlinige Bewegung der Platte Π umgewandelt. Der Umstand, dass die zeitweilige Bewegung der Platte mit einem zeitweiligen Stillstand abwechselt, gestattet die Anwendung des beschriebenen Mechanismus beispielsweise als Greifer⁵⁰ für den Transport des Films in Kinematographen.

78. Berechne den Umfang des Reuleaux-Dreiecks und den Inhalt seiner Fläche. Was ist größer: eine Kreisfläche oder der Inhalt der von einem Reuleaux-Dreieck gleicher Breite begrenzten Fläche ?

Man bestimme ferner die Größe der Innenwinkel in den Ecken des Reuleaux-Dreiecks.

79. Man zeichne eine Kurve der konstanten Breite h , die aus fünf, sieben oder allgemein aus einer beliebigen ungeraden Anzahl von Kreisbogen vom Radius h besteht. Welche Länge besitzt jede dieser Kurven?

Kurven der konstanten Breite h , die aus Kreisbogen vom Durchmesser bestehen, spielen in den nachfolgenden Ausführungen eine bedeutende Rolle.

80. Man beweise, dass der Abstand zwischen zwei Punkten einer Kurve der konstanten Breite h nicht größer als h sein kann.

81. Man beweise, dass jede Stützgerade mit einer Kurve der konstanten Breite h nur einen gemeinsamen Punkt hat. Jede Sehne einer Kurve konstanter Breite, welche die Berührungspunkte der Kurve mit parallelen Stützgeraden verbindet, steht senkrecht auf diesen Stützgeraden und hat folglich die Länge h .

Ebene Kurven mit der Eigenschaft, dass der Abstand zwischen je zwei Punkten der

⁵⁰Um eine Unschärfe des Bildes zu vermeiden, muss sich der Film im Kinematographen ruckweise bewegen, d.h., die Bewegung des Films (bei geschlossenem Objektiv) muss mit zeitweislichem Stillstand des Films (bei geöffnetem Objektiv) abwechseln. Der Mechanismus, der diese Bewegung des Films ermöglicht, heißt Greifer.

Kurve eine gewisse Größe h nicht übersteigt und dass sich zu jedem Kurvenpunkt ein anderer Kurvenpunkt finden lässt, der von ihm den Abstand h besitzt, werden gelegentlich als Kurven konstanten Durchmessers bezeichnet.

Aus dem Ergebnis der Aufgabe 81 folgt, dass jede Kurve konstanter Breite zugleich eine Kurve konstanten Durchmessers ist. Man kann ohne Mühe beweisen, dass umgekehrt auch jede Kurve konstanten Durchmessers eine Kurve konstanter Breite ist. (Man führe den Beweis durch.) Damit braucht man die Kurven konstanten Durchmessers nicht weiter zu studieren; diese Klasse von Kurven stimmt mit der Klasse der Kurven konstanter Breite völlig überein.

Die Sehnen, von denen in Aufgabe 81 die Rede ist, bezeichnen wir als Durchmesser der Kurven konstanter Breite.

82. Man beweise, dass bei einer Kurve konstanter Breite jede Sehne, deren Länge gleich der Breite der Kurve ist, ein Durchmesser der Kurve sein muss.

83. Man beweise, dass sich je zwei Durchmesser einer Kurve konstanter Breite im Innern oder auf der Kurve schneiden. Schneiden sie sich auf der Kurve, so ist ihr Schnittpunkt A eine Ecke der Kurve, und der Außenwinkel der Kurve (siehe § 1) im Punkt A ist nicht kleiner als der Winkel zwischen den betrachteten Durchmessern.

84. Man beweise, dass der Kreis die einzige Kurve konstanter Breite ist, die ein Symmetriezentrum besitzt.

85. Besitzt eine Kurve der konstanten Breite h eine Ecke, so ist einer der Bogen dieser Kurve ein Kreisbogen vom Radius h .

Ist umgekehrt ein gewisser Bogen einer Kurve der konstanten Breite h ein Kreisbogen vom Radius h , so besitzt diese Kurve eine Ecke.

86. Man beweise, dass der Innenwinkel an einer Ecke A einer Kurve konstanter Breite nicht kleiner als 120° sein kann. Die einzige Kurve konstanter Breite, die eine Ecke mit einem Innenwinkel von 120° besitzt, ist das Reuleaux-Dreieck.

87. (Hilfssatz.) Es sei $ABCD$ ein Rhombus, MN und PQ seien zwei zu den Diagonalen BD senkrechte Geraden, die einen festen Abstand h haben (Abb. 87).

a) Man beweise, dass der Umfang des Sechsecks $AMNCQP$ nicht von der Lage der Geraden MN und PQ abhängt.

b) Man beweise, dass der Flächeninhalt des Sechsecks $AMNCQP$ den größten Wert annimmt, wenn die Geraden MN und PQ den gleichen Abstand $\frac{h}{2}$ von der Diagonalen AC des Rhombus haben; der Inhalt ist am kleinsten, wenn die Gerade MN durch den Eckpunkt B oder die Gerade PQ durch den Eckpunkt D des Rhombus geht.

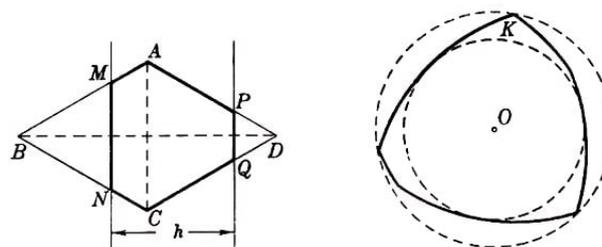


Abb. 87, 88

88. Man folgere aus der Untersuchung gleichwinkliger 2^n -Ecke, die einer beliebigen Kurve K der konstanten Breite h und einem Kreis vom Durchmesser h umschrieben sind, den Satz von Barbier:

Alle Kurven der konstanten Breite h besitzen die gleiche Länge πh .

89*. Man untersuche gleichwinklige $3 \cdot 2^n$ -Ecke, die einer beliebigen Kurve K der konstanten Breite h , einem Kreis O vom Durchmesser h und einem Reuleaux-Dreieck T der Breite h umschrieben sind, und beweise, dass von allen Kurven konstanter Breite der Kreis die größte und das Reuleaux-Dreieck die kleinste Fläche umschließt.

Nach dem Satz von Barbier (Aufgabe 88) ist der erste Teil des Satzes, der den Inhalt der Aufgabe 89 darstellt, ebenfalls eine Folgerung aus dem isoperimetrischen Problem (siehe § 5, Aufgabe 62).

90. Gegeben sei eine beliebige konvexe Kurve konstanter Breite. Man beweise, dass die Kreise, die der Kurve K einbeschrieben und umschrieben sind, konzentrisch sein müssen und die Summe ihrer Radien gleich der Breite der Kurve ist (Abb. 88).

91*. Man beweise, dass von allen Kurven der konstanten Breite h das Reuleaux-Dreieck den Umkreis mit größtem Radius besitzt (und folglich auch den Inkreis mit kleinstem Radius; siehe Aufgabe 90). Der Kreis hingegen besitzt den Umkreis mit kleinstem Radius (und den Inkreis mit größtem Radius).

Bei Problemen, die sich auf Kurven konstanter Breite beziehen, erweist sich der Begriff der Addition konvexer Kurven (siehe § 4) als recht nützlich.

Aus § 4, Aufgabe 47, folgt unmittelbar, dass die Summe zweier Kurven konstanter Breite wieder eine Kurve konstanter Breite ist; dieser Satz ermöglicht, aus irgendwelchen Kurven konstanter Breite neue Beispiele solcher Kurven zu konstruieren. Wir benutzten diese Tatsache bereits; wir betrachteten nämlich als Beispiel einer Kurve konstanter Breite die Summe eines Reuleaux-Dreiecks und eines Kreises (Abb. 83).

92. Man beweise, dass die Summe einer beliebigen Kurve der konstanten Breite h und der gleichen um 180° gedrehten Kurve einen Kreis vom Radius h ergibt. Man folgere aus diesem Satz einen neuen Beweis des Satzes von Barbier (siehe Aufgabe 88).

93. (Umkehrung zur Aufgabe 92.) Ist die Summe einer gewissen Kurve K und der aus K durch Drehung um 180° erhaltenen Kurve K' ein Kreis, so muss K eine Kurve konstanter Breite sein.

Aus den Aufgaben 92 und 93 folgt, dass man die Kurven konstanter Breite auch als diejenigen Kurven definieren kann, deren Summe mit der aus ihnen durch Drehung um 180° entstandenen Kurven (oder, was dasselbe ist, deren Summe mit der aus ihnen durch Spiegelung bezüglich eines Punktes entstandenen Kurve) einen Kreis ergibt.

Aus dieser Definition lassen sich leicht alle Eigenschaften der Kurven konstanter Breite ableiten.

94.a) Man beweise, dass von allen konvexen Kurven vom Durchmesser 1 die Kurven mit konstanter Breite 1 die größte Länge haben.

b) Es seien AB und PQ zwei parallele Sehnen einer Kurve K der konstanten Breite D

derart, dass die Diagonalen AQ und BP des Trapezes $ABQP$ Durchmesser der Kurve sind (Abb. 89).

Den Abstand zwischen den Geraden AB und PQ bezeichnen wir mit Δ . Man beweise, dass die aus den Bogen AP und BQ der Kurve K und den Sehnen AB und PQ gebildete Kurve K die größte Länge von allen konvexen Kurven des Durchmessers D und der Breite Δ besitzt (siehe § 6).

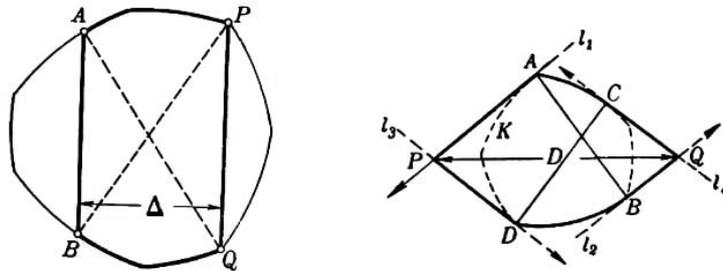


Abb. 89, 90

95.a) Man beweise, dass die Kurven der konstanten Breite 1 unter allen konvexen Kurven der Breite 1 die kleinste Länge besitzen.

b) Es seien AB und CD zwei Durchmesser einer Kurve K der konstanten Breite Δ , ferner l_1 und l_2 zwei zu AB senkrechte Stützgeraden der Kurve K und l_3 und l_4 auf CD senkrechte Stützgeraden, P sei der Schnittpunkt von l_1 mit l_3 und Q der Schnittpunkt von l_2 mit l_4 (Abb. 90).

Den Abstand zwischen den Punkten P und Q bezeichnen wir mit D .

Man beweise, dass die in Abb. 90 dargestellte Kurve K , die aus den Strecken AP , PD , BQ , QC und den Bogen AC und BD der Kurve K gebildet wird, die kleinste Länge von allen Kurven der Breite Δ und des Durchmessers D hat.

Wir beweisen jetzt: Ist K eine beliebige Kurve der konstanten Breite h , so lässt sich eine Kurve der konstanten Breite h konstruieren, die aus Kreisbogen vom Durchmesser h besteht und der Kurve K beliebig nahe kommt (im Sinne des im § 4 definierten Abstandes zwischen Kurven).

Zum Beweis betrachten wir ein der Kurve K umschriebenes Vieleck $A_1A_2\dots A_{2n}$ mit gerader Seitenanzahl, dessen gegenüberliegende Seiten A_kA_{k+1} und $A_{n+k}A_{n+k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), A_nA_{n+1} und $A_{2n}A_1$ parallel sind, sowie ein der Kurve K einbeschriebenes Vieleck $B_1B_2\dots B_{2n}$, dessen Eckpunkte gerade die Berührungspunkte des umschriebenen Vielecks mit der Kurve sind (Abb. 91; dabei soll die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein, dass irgendwelche benachbarten Ecken des umschriebenen oder des einbeschriebenen Vielecks zusammenfallen, wie etwa die Eckpunkte A_2 und A_3 oder B_1 , B_2 und B_3 in unserer Abbildung).

Wir zeigen die Existenz einer Kurve der konstanten Breite h , die aus Kreisbogen vom Radius h besteht, dem Vieleck $A_1A_2\dots A_{2n}$ einbeschrieben und dem Vieleck $B_1B_2\dots B_{2n}$ umschrieben ist.

Sind B_k und B_{n+k} zwei gegenüberliegende Eckpunkte des einbeschriebenen Vielecks, so ist die Sehne B_kB_{n+k} der Kurve K ein Durchmesser (da B_k und B_{n+k} Berührungspunkte der Kurve K mit einem Paar paralleler Stützgeraden sind).

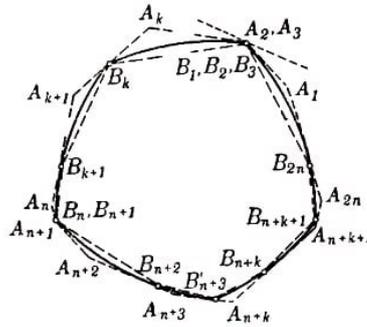


Abb. 91

Hieraus folgt, dass die Länge der Sehne $B_k B_{n+k}$ gleich h ist (Aufgabe 81); ebenso ist die Länge der Sehne $B_{k+1} B_{n+k+1}$ gleich h .

Wir ersetzen jetzt gleichzeitig die gegenüberliegenden Bogen $B_k B_{k+1}$ und $B_{n+k} B_{n+k+1}$ der Kurve K durch neue aus Kreisbogen vom Radius h bestehende Kurven derart, dass die Kurve ihre konstante Breite h behält und dem Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ eingeschrieben bleibt.

Dazu ziehen wir Kreise mit dem Radius h um die Punkte B_k und B_{k+1} ; den Schnittpunkt dieser Kreise (und zwar den, der auf derselben Seite der Sehne $B_k B_{k+1}$ liegt wie die Punkte $B_{n+k} B_{n+k+1}$) bezeichnen wir mit C_k (Abb. 92a).

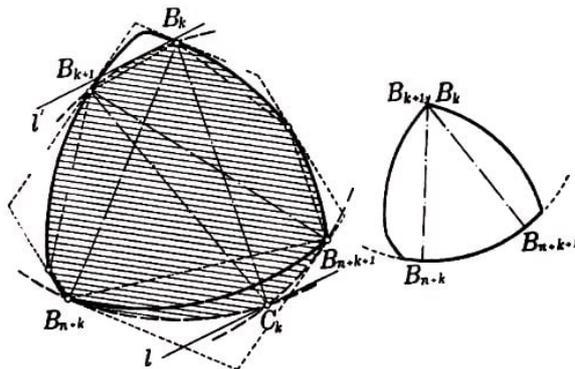


Abb. 92a, b

Der Punkt C_k befindet sich im Abstand h von den Punkten B_k und B_{k+1} . Jetzt ziehen wir einen Kreisbogen vom Radius h um C_k , der die Punkte B_k und B_{k+1} verbindet. Wir ersetzen den Bogen $B_{n+k} B_{n+k+1}$ der Kurve K durch die Kreisbogen $B_{n+k} C_k$, $C_k B_{n+k+1}$ vom Radius h mit den Mittelpunkten in B_k , B_{k+1} und den Bogen $B_k B_{k+1}$ durch einen Kreisbogen um C_k .

Man sieht leicht, dass die bei einer solchen Ersetzung erhaltene neue Kurve K' wieder eine Kurve konstanter Breite h ist. Berührt nämlich eine von zwei parallelen Stützgeraden l und l' der Kurve K' den Bogen $B_{n+k} C_k$, so verläuft die andere durch den Eckpunkt B_k ; geht l durch den Eckpunkt C_k , so tangiert l' den Bogen $B_k B_{k+1}$; berührt l den Bogen $C_k B_{n+k+1}$, so verläuft l' durch den Eckpunkt B_{k+1} .

Dabei bleibt die Kurve K' dem Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ eingeschrieben und dem Vieleck $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ umschrieben.⁵¹

⁵¹Bei dieser Konstruktion kann sich selbstverständlich die Rolle der Punkte A_k , A_{k+1} und A_{n+k} , A_{n+k+1} ändern; in diesem Falle gehen wir zu einer anderen Kurve K'' über, die ebenfalls die gewünschte Eigenschaft besitzt.

In dem Fall, dass B_k mit B_{k+1} zusammenfällt, schneiden sich die Durchmesser $B_k B_{n+k}$ und $B_{k+1} B_{n+k+1}$ auf der Kurve, so dass der Bogen $B_{n+k} B_{n+k+1}$ Kreisbogen vom Radius h um den Punkt $B_k = B_{k+1}$ ist (Abb. 92b; siehe Aufgaben 83, 85). Führen wir dieselbe Konstruktion an jedem Paar gegenüberliegender Bogen der Kurve K durch, so erhalten wir eine Kurve K_0 konstanter Breite, die nur aus Kreisbogen vom Radius h besteht, dem Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ eingeschrieben und dem Vieleck $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ umschrieben ist (Abb. 93).

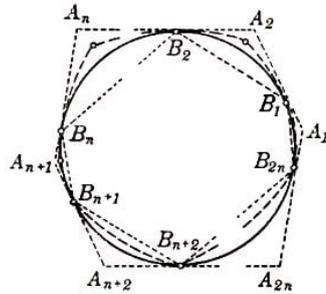


Abb. 93

Nunmehr bleibt uns nur zu zeigen, dass wir durch geeignete Wahl des Vielecks $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ erreichen können, dass der Abstand zwischen K_0 und K beliebig klein wird. Daraus, dass die Kurven K und K_0 beide dem Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ eingeschrieben und dem Vieleck $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ umschrieben sind, folgt sofort, dass der Abstand zwischen diesen Kurven nicht größer als der Abstand zwischen den Vielecken ist; denn umfasst eine r -Umgebung des Vielecks $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ das Vieleck $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ und die r -Umgebung des Vielecks $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ das Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{2n}$, so kann K nicht aus der r -Umgebung von K_0 und K_0 nicht aus der r -Umgebung von K herausragen.

Beweisen wir also, dass der Abstand zwischen den Vielecken $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ und $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ beliebig klein gemacht werden kann, so folgt hieraus auch, dass der Abstand zwischen K_0 und K beliebig klein gemacht werden kann.

Ferner sieht man leicht, dass der Abstand zwischen den Vielecken $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ und $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ gleich dem größten der Abstände zwischen den Eckpunkten A_1, A_2, \dots, A_{2n} und den ihnen entsprechenden Seiten $B_{2n} B_1, B_1 B_2, \dots, B_{2n-1} B_{2n}$ des Vielecks $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ sein muss.

Ist nämlich d dieser Abstand, so liegt $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ ganz in der d -Umgebung von $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ (Abb. 94a), und $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ liegt ganz in der d -Umgebung von $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ (Abb. 94b).

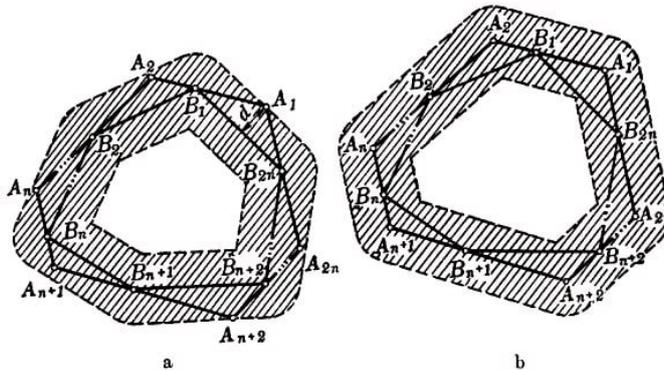


Abb. 94a, b

Wir setzen jetzt voraus, dass alle Winkel des Vielecks untereinander gleich sind, also gleich

$$\frac{(2n - 2) \cdot 180^\circ}{2n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$$

(die Summe der Winkel eines $2n$ -Ecks ist gleich $(2n - 2) \cdot 180^\circ$), und betrachten die Dreiecke $B_{2n}A_1B_1$, $B_1A_2B_2$, ..., $B_{2n-1}A_{2n}B_{2n}$. Die Basis jedes dieser Dreiecke ist kleiner als h (Aufgabe 80) und der Winkel in den Eckpunkten (des Vielecks) gleich $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$. Hieraus folgt, dass die Höhe eines jeden von ihnen kleiner ist als die Höhe eines Segments mit dem Umfangswinkel $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$ über einer Sehne der Länge h (Abb. 95).

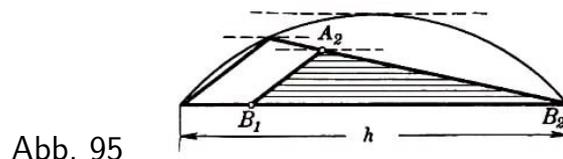


Abb. 95

Bei Vergrößerung von n wird jedoch die Höhe dieses Segments unendlich klein (wie man leicht berechnen kann, ist sie gleich $\frac{h}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ}{2n}$). Hieraus folgt, dass man bei Wahl einer hinreichend großen Anzahl von Seiten für das $2n$ -Eck $A_1A_2 \dots A_{2n}$ erreichen kann, dass der Abstand zwischen $A_1A_2 \dots A_{2n}$ und $B_1B_2 \dots B_{2n}$ und folglich der Abstand zwischen K_0 und K beliebig klein gemacht werden kann.

Aus dem bewiesenen Satz folgt unmittelbar, dass sich zu jeder Kurve K der konstanten Breite h stets eine Folge $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ von Kurven der konstanten Breite h , die aus Kreisbogen vom Radius h bestehen, finden lässt, so dass K der Limes dieser Folge ist.

Hierzu braucht nur gefordert zu werden, dass der Abstand zwischen K_1 und X kleiner als 1 sei, der Abstand zwischen K_2 und K kleiner als $\frac{1}{2}$, ..., der Abstand zwischen K_m und K kleiner als $\frac{1}{m}$, usw.

Dieser Satz (der sogenannte Approximationssatz⁵²) erweist sich beim Studium der Eigenschaften beliebiger Kurven konstanter Breite oft als recht nützlich.

Besonders die schwierigeren der früher in diesem Paragraphen gestellten Aufgaben (siehe Aufgaben 88 und 89) können mit Hilfe dieses Satzes gelöst werden (siehe Aufgaben 96 und 97).

96. Man folgere aus dem Approximationssatz einen neuen Beweis des Satzes von Barbier (siehe Aufgabe 88).

97**. Man folgere aus dem Approximationssatz einen neuen Beweis dafür, dass das Reuleaux-Dreieck von allen Figuren der konstanten Breite h die kleinste Fläche begrenzt (siehe Aufgabe 89).

Ein konvexer Körper im dreidimensionalen Raum, bei dem der Abstand zwischen je-

⁵²Vom lateinischen Wort *approximare* = annähern. Sätze ähnlicher Art, die es ermöglichen, komplizierte mathematische Objekte als Grenzwerte von Folgen einfacherer darzustellen, spielen in der modernen Mathematik eine äußerst wichtige Rolle.

dem Paar paralleler Stützebenen gleich h ist, heißt Körper konstanter Breite. Es gibt unendlich viele Körper konstanter Breite, die von der Kugel verschieden sind.

Jedoch sind die Beispiele solcher Körper komplizierter als die Beispiele ebener Kurven konstanter Breite, da es keine von der Kugel verschiedenen Körper konstanter Breite gibt, deren Oberfläche aus Kugelstücken besteht.

Das einfachste Beispiel eines von der Kugel verschiedenen Körpers konstanter Breite ist der Körper, der bei Rotation eines Reuleaux-Dreiecks um eine seiner Symmetrieachsen entsteht (Abb. 96).

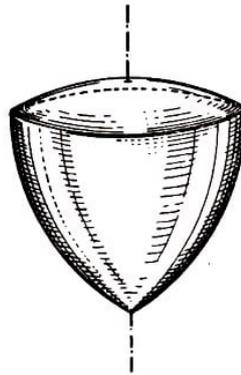


Abb. 96

Als Beispiele von Körpern konstanter Breite, die keine Rotationskörper sind, lassen sich die "Tetraeder konstanter Breite" anführen, Körper, die man als räumliche Analoga zum Reuleaux-Dreieck ansehen kann. Es gibt zwei verschiedene "Tetraeder konstanter Breite".

Sie lassen sich folgendermaßen konstruieren. Um jeden Eckpunkt eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge h wird eine Kugel vom Radius h beschrieben.

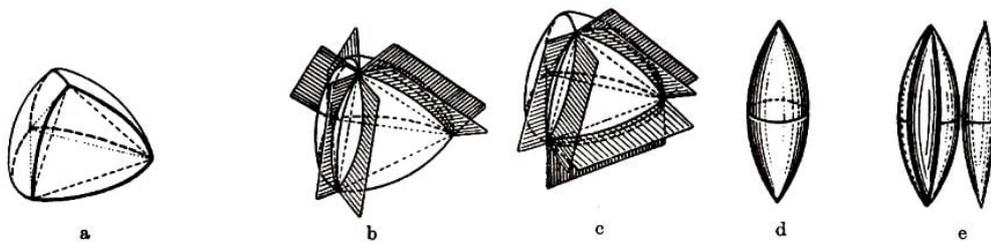


Abb. 97

Der Durchschnitt dieser vier Kugeln bildet einen Körper, der in Abb. 97a dargestellt ist. Nunmehr entfernt man die Teile der Oberfläche dieses Körpers, die innerhalb von Winkeln zwischen zwei Flächen gelegen sind; diese Teile sind vertikal zu drei Tetraederkanten, die in einer Ecke zusammentreffen (Abb. 97b), oder zu drei Tetraederkanten, die einer Tetraederfläche angrenzen (Abb. 97c).

Diese Teile der Oberfläche des Körpers werden durch drei Flächenstücke ersetzt, die bei Rotation des die erhaltene Oberfläche begrenzenden Kreisbogens entsteht, wenn dieser sich um die entsprechenden Kanten dreht, d.h. durch Oberflächenteile spindelförmiger Körper, die in Abb. 97d abgebildet sind; ein solches Oberflächenstück des Körpers ist in der Abb. 97e ausgeschnitten.

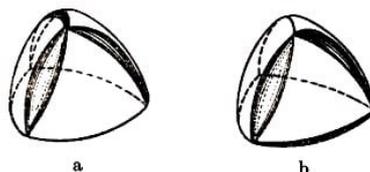


Abb. 98

Die auf diese Weise erhaltenen beiden verschiedenen Körper sind in Abb. 98a, b dargestellt. Man prüft leicht nach, dass beide die konstante Breite h besitzen.

Die beiden "Tetraeder konstanter Breite" besitzen gleichgroße Oberflächen und gleiche Volumen. Es ist anzunehmen, dass von allen Körpern mit konstanter Breite h die "Tetraeder konstanter Breite" das kleinste Volumen besitzen.

Körper der konstanten Breite können verschieden große Oberflächen haben; mit anderen Worten, im Raum gilt kein dem Satz von Barbier analoger Satz. Dafür besitzen die räumlichen Körper konstanter Breite eine andere bemerkenswerte Eigenschaft.

Als Projektion eines konvexen Körpers P des dreidimensionalen Raumes bezeichnet man die ebene Figur, die bei Parallelprojektion des Körpers P auf irgendeine Ebene entsteht (Abb. 99).

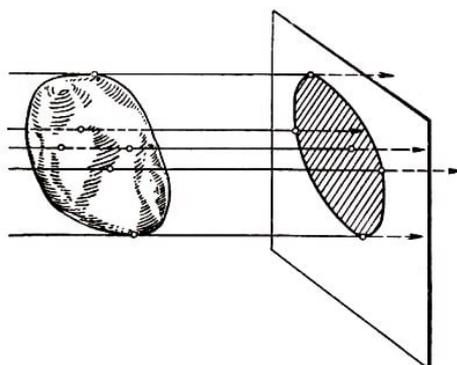


Abb. 99

Da alle Projektionen eines Körpers P der konstanten Breite h offenbar ebene Figuren der konstanten Breite h ergeben, folgt aus dem Satz von Barbier, dass alle Projektionen des Körpers P ein und denselben Umfang besitzen (Länge der die Projektionen begrenzenden Kurve), der gleich πh ist.

Ein konvexer Körper, dessen sämtliche Projektionen den gleichen Umfang besitzen, heißt Körper konstanten Umfangs. Damit sehen wir, dass alle Körper konstanter Breite auch Körper konstanten Umfangs sind. Auch die Umkehrung gilt: Jeder Körper konstanten Umfangs ist ein Körper konstanter Breite; der Beweis dieses Satzes ist jedoch recht kompliziert.⁵³

1.8 Kurven, die sich in einem gleichseitigen Dreieck drehen lassen (Δ -Kurven), und verwandte Kurven

Der vorliegende Paragraph ist seinem Inhalt nach mit dem vorhergehenden Paragraphen, der den Kurven konstanter Breite gewidmet war, eng verwandt. Deshalb sollte dieser

⁵³Siehe z. B. das schon zitierte Buch von T. Bonnesen und W. Fenchel, "Theorie der konvexen Körper".

Paragraph nicht vor § 7 gelesen werden.

Zur Lösung der ersten elf Aufgaben dieses Paragraphen (der Aufgaben 98-108) sowie der Aufgaben 113-115 genügt die Kenntnis des Inhalts von § 1.

Bei der Lösung der Aufgabe 109 wird der Satz aus Aufgabe 30b des § 3 wesentlich benutzt; wird vorliegender Paragraph vor § 3 gelesen, so muss man sich deshalb, bevor man sich mit der Aufgabe 109 befasst, die Aufgabe 30b genau ansehen (man braucht nur ihre Lösung in diesem Buche nachzulesen).

Die Aufgaben 110, 111 und 116 setzen Kenntnisse des Stoffes voraus, der den Inhalt des ersten Teils von § 4 bildet (die ersten elf Aufgaben).

Zum Verständnis der kleingedruckten Teile des vorliegenden Paragraphen (einschließlich Aufgabe 112) ist die Kenntnis des Inhalts des gesamten § 4 notwendig.

Die Kurven konstanter Breite (siehe § 7) können als konvexe Kurven definiert werden, die sich in einem Quadrat drehen lassen, wobei sie stets sämtliche Seiten des Quadrates berühren (siehe Abb. 84b).

Man stellt sich die Frage, welche Eigenschaften konvexe Kurven besitzen, die sich frei innerhalb eines anderen Vielecks drehen lassen. In diesem Paragraphen werden Kurven betrachtet, die frei im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gedreht werden können und dabei ständig alle Seiten des Dreiecks berühren (Abb. 100a) oder, was dasselbe ist, deren sämtliche umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke untereinander gleich sind (Abb. 100b).

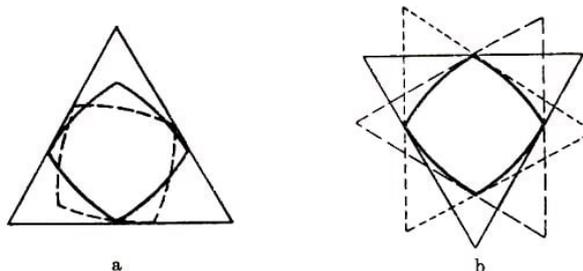


Abb. 100

Derartige Kurven bezeichnen wir als Δ -Kurven. Das einfachste Beispiel einer Δ -Kurve ist der Kreis. Weitere Beispiele von Δ -Kurven sind in den ersten Aufgaben des vorliegenden Paragraphen enthalten.

Die Höhe h jedes einer Δ -Kurve umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks heißt Höhe der Δ -Kurve. Die Eigenschaften der Δ -Kurven erweisen sich den Eigenschaften der Kurven konstanter Breiten sehr ähnlich, und viele Aufgaben dieses Paragraphen erinnern an Aufgaben des vorangegangenen.

Der Schluss dieses Paragraphen ist gewissen Verallgemeinerungen der Kurven konstanter Breite und der Δ -Kurven gewidmet. Eine Anzahl von Sätzen, die sich auf Kurven beziehen, welche Verallgemeinerungen der Kurven konstanter Breite und der Δ -Kurven sind, werden im Text dieses Paragraphen ohne Beweise angeführt. Dem Leser wird empfohlen zu versuchen, diese Sätze selbständig zu beweisen.

98.a) Ein Kreis, dessen Radius gleich der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist, möge

auf einer Seite dieses Dreiecks rollen. Man beweise, dass der von den Dreiecksseiten aus dem Kreis ausgeschnittene Bogen gleich 60° ist.

Man beweise ferner, dass die "Linse", die bei Spiegelung dieser Bogen an ihren zugehörigen Sehnen entsteht (Abb. 101), stets innerhalb des Dreiecks bleibt. Die Begrenzungskurve dieser Linse bezeichnen wir im folgenden als Δ -Zweieck. Das Δ -Zweieck ist eine Δ -Kurve.

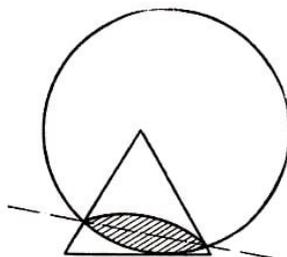


Abb. 101

Man berechne die Länge eines Δ -Zweiecks der Höhe h und den Inhalt der von ihm begrenzten Fläche. Ist die von einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{3}h$ begrenzte Fläche oder die von einem Δ -Zweieck der Höhe h begrenzte Fläche größer ?

b) Man beweise, dass sich die drei Senkrechten, die auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in den Berührungspunkten des Dreiecks mit dem einbeschriebenen Δ -Zweieck errichtet sind, in einem Punkte schneiden. Gesucht seien ferner der geometrische Ort, den dieser Schnittpunkt der Senkrechten beschreibt, wenn sich das Δ -Zweieck in dem gleichseitigen Dreieck dreht, und der geometrische Ort, den dieser Punkt beschreibt, wenn sich das gleichseitige Dreieck dreht und dabei stets dem unbewegten Δ -Zweieck umschrieben bleibt.

99.a) Um die vier Eckpunkte eines Quadrates der Seitenlänge h werden vier Kreise geschlagen, deren Radien gleich der Seitenlänge h sind. Man beweise, dass die Begrenzungskurve der Figur, welche beim Schnitt dieser vier Kreise entsteht (Abb. 102), eine Δ -Kurve der Höhe h ist.

Man berechne die Länge dieser Kurve und den Inhalt der von ihr begrenzten Fläche.

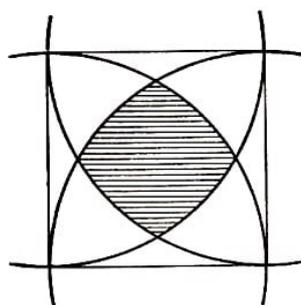


Abb. 102

b) Der in Aufgabe 99 a untersuchten Δ -Kurve werde ein gleichseitiges Dreieck umschrieben; in den Berührungspunkten der Seiten dieses Dreiecks mit der Kurve Abb. 102 errichte man die Senkrechten.

Man beweise, dass sich diese drei Senkrechten in einem Punkte schneiden. Gesucht seien ferner der geometrische Ort, den dieser Schnittpunkt der Senkrechten beschreibt, wenn sich die betrachtete Δ -Kurve im Innern des gleichseitigen Dreiecks dreht, und

der geometrische Ort, den dieser Punkt beschreibt, wenn sich das gleichseitige Dreieck dreht und dabei ständig der unbewegten Δ -Kurve umschrieben bleibt.

100. Es sei K eine Δ -Kurve und T ein dieser Kurve umschriebenes gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten die Kurve K in den Punkten A, B, C berühren.

Man beweise, dass die Seitenlänge jedes dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Dreiecks nicht größer ist als die Länge der Seiten des Dreiecks T .

101*. Man beweise, dass sich die drei Senkrechten, die auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks errichtet sind, das einer beliebigen Δ -Kurve K umschrieben ist, in einem Punkte schneiden, wenn die Senkrechten in den Berührungspunkten der Dreiecksseiten mit K errichtet sind.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der Sätze aus den Aufgaben 98 b und 99 b dar.

Der Satz aus Aufgabe 101 erlaubt eine einfache kinematische Deutung.

In der Mechanik wird bewiesen, dass die Senkrechten zu den Bahnkurven aller Punkte einer sich bewegenden Figur in jedem Zeitpunkt entweder zueinander parallel sind oder sich in einem Punkte, dem sogenannten momentanen Drehzentrum der Figur, treffen (Abb. 103).

Dreht sich eine Δ -Kurve im Innern eines gleichseitigen Dreiecks. und berührt sie dabei stets die Seiten, so berühren die Bahnkurven der Berührungspunkte der Kurve mit den Dreiecksseiten, wie leicht zu sehen ist, in jedem Augenblick die entsprechenden Dreiecksseiten. Folglich fallen die Senkrechten zu den Bahnkurven dieser Punkte mit den Senkrechten zu den Dreiecksseiten zusammen und der Punkt, von dem in Aufgabe 101 die Rede war, ist das momentane Drehzentrum der Δ -Kurve.

Die kinematischen Vorstellungen ermöglichen es auch, zu einer Reihe anderer Sätze, die sich auf Δ -Kurven und verwandte Kurven beziehen (insbesondere zum Satz von Barbier), einfache Beispiele für solche Kurven anzugeben. Die Vereinfachung, die bei der Benutzung dieser Sätze erreicht werden kann, tritt bei der Gegenüberstellung des hier Gesagten mit dem in der Lösung der Aufgabe 101 angeführten rein geometrischen Beweis klar hervor.

102. Man beweise, dass jede Stützgerade einer Δ -Kurve mit dieser Δ -Kurve nur einen Punkt gemeinsam haben kann.

103. Man beweise, dass der Durchmesser einer Δ -Kurve K der Höhe h nicht größer sein kann als h . Ist der Durchmesser gleich h , so ist K ein Δ -Zweieck.

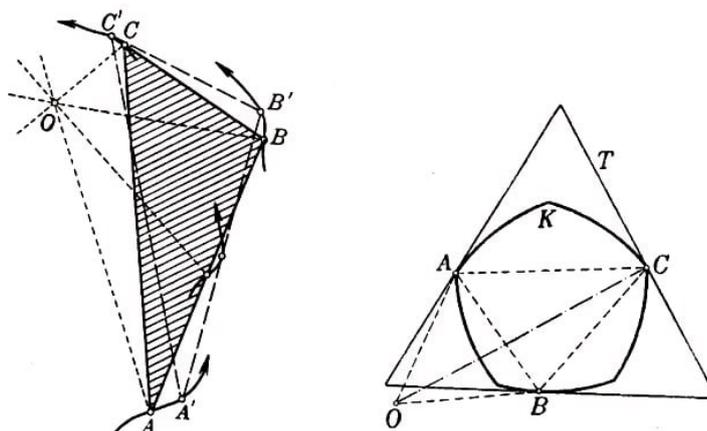


Abb. 103, 104

104. Man beweise, dass eine Δ -Kurve keine Ecke besitzen kann, deren zugehöriger Innenwinkel kleiner als 60° ist. Die einzige Δ -Kurve, die eine Ecke mit zugehörigem Innenwinkel von 60° besitzt, ist ein Δ -Zweieck.

105. Man beweise, dass der Kreis die einzige Δ -Kurve ist, die bei Drehung um einen gewissen Punkt O um 120° in sich übergeht.

106. Es seien A, B, C die Berührungspunkte einer Δ -Kurve K mit den Seiten eines der Kurve K umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks T , ferner sei O die Spitze des gleichseitigen Dreiecks ABO , das über der Seite AB außerhalb des Dreiecks ABC errichtet ist (Abb. 104).

Man beweise, dass die Länge der Strecke OC gleich der Höhe h der Δ -Kurve K ist.

107*. Man konstruiere eine Δ -Kurve der Höhe h , die aus fünf, sieben oder allgemein aus einer beliebigen nicht durch drei teilbaren Anzahl von Kreisbogen vom Radius h besteht. Man berechne die Länge der konstruierten Kurve.

Aus Kreisbogen des Radius h bestehende Δ -Kurven der Höhe h werden in den weiteren Ausführungen eine bedeutende Rolle spielen.

108*. Man betrachte $3 \cdot 2^n$ -Ecke mit gleichen Winkeln, die einer beliebigen Δ -Kurve der Höhe h und einem Kreis O vom Radius $\frac{1}{3}h$, umbeschrieben sind, und folgere den Satz von Barbier für Δ -Kurven:

Alle Δ -Kurven der Höhe h besitzen die gleiche Länge $\frac{2\pi h}{3}$.

109**. Man betrachte $3 \cdot 2^n$ -Ecke mit gleichen Winkeln, die einer beliebigen Δ -Kurve K der Höhe h , einem Kreis O mit dem Radius $\frac{1}{3}h$ und einem Δ -Zweieck D der Höhe h umbeschrieben sind, und beweise, dass von allen Δ -Kurven der Höhe h der Kreis die größte und das Δ -Zweieck die kleinste Fläche begrenzt.

Dass von allen Δ -Kurven gegebener Höhe h der Kreis die größte Fläche begrenzt, folgt auch aus dem isoperimetrischen Problem (siehe § 5, Aufgabe 62) mit Hilfe des Satzes von Barbier für Δ -Kurven (siehe Aufgabe 108).

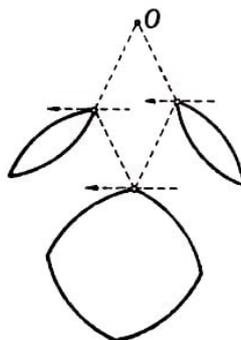


Abb. 105

Ebenso wie in der Theorie der Kurven konstanter Breite erweisen sich in Fragen, die sich auf Δ -Kurven beziehen, die Begriffe, denen § 4 gewidmet war, als recht nützlich. Aus den Sätzen der Aufgaben 43 und 44 des § 4 folgt unmittelbar, dass die Summe zweier Δ -Kurven wieder eine Δ -Kurve ist.

Dieser Satz ermöglicht es, neue Beispiele von Δ -Kurven zu konstruieren, indem man von irgendwelchen bekannten Beispielen für Δ -Kurven ausgeht.

So ist beispielsweise in Abb. 105 die Summe zweier gleicher Δ -Zweiecke dargestellt, die zueinander um 90° gedreht sind; in Abb. 106 wird die Summe eines Δ -Zweiecks und eines Kreises dargestellt, in Abb. 106 b die Summe der Kurve aus Aufgabe 99 und eines Kreises. Diese Kurven sind sämtlich ebenfalls Δ -Kurven.

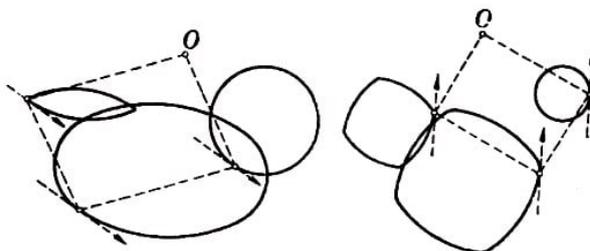


Abb. 106a, b

110. Man beweise, dass die Summe einer beliebigen Δ -Kurve K und der Kurven K' und K'' , die aus K durch Drehung um 120° bzw. 240° hervorgehen, ein Kreis ist. Hieraus folgere man einen neuen Beweis des Satzes von Barbier für Δ -Kurven (siehe Aufgabe 108).

111. (Umkehrung der Aufgabe 110.) Man beweise: Ist die Summe einer gewissen Kurve K und der aus K durch Drehung um 120° bzw. 240° erhaltenen Kurven K' und K'' ein Kreis, so ist K eine Δ -Kurve.

Aus den Aufgaben 110 und 111 folgt, dass die Δ -Kurven als Kurven definiert werden können, deren Summe mit den aus ihnen bei Drehung um 120° bzw. 240° entstehenden Kurven einen Kreis ergibt. Aus dieser Definition lassen sich leicht alle Eigenschaften der Δ -Kurven folgern.

Die Δ -Kurven kann man so ähnlich wie die Kurven konstanter Breite definieren. Wir bezeichnen als Höhe einer konvexen Kurve in einer gegebenen Richtung die Höhe eines der Kurve umschriebenen gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Seite diese Richtung hat (vgl. die Definition der Breite einer konvexen Kurve in einer gegebenen Richtung). In diesem Fall kann man Δ -Kurven als Kurven konstanter Höhe definieren.

Ferner bezeichnet man als die größte Höhe H (vgl. die Definition des Durchmessers einer konvexen Kurve) und als kleinste Höhe (oder einfach als Höhe) h (vgl. die Definition der Breite) die größte bzw. die kleinste der Höhen einer konvexen Kurve K . Dann gilt

$$h \leq H \leq 2h$$

Ist K ein gleichseitiges Dreieck, so gilt $H = 2h$. Ist K aber eine Δ -Kurve, so gilt $H = h$. Ferner kann man in Analogie zu den Aufgaben 94a, b und 95 a, b zeigen, dass von allen konvexen Kurven der größten Höhe 1 die Δ -Kurven die größte Länge $\frac{2\pi}{3}$ (und das gleichseitige Dreieck die kleinste Länge $\sqrt{3}$) haben.

Von allen konvexen Kurven der kleinsten Höhe 1 besitzen die Δ -Kurven die kleinste Länge $\frac{2\pi}{3}$ (und das gleichseitige Dreieck die größte Länge $4\sqrt{3}$). Von allen konvexen Kurven von gegebener größter Höhe H bzw. gegebener kleinster Höhe h weisen Kurven spezieller Art, die aus Bogen von Δ -Kurven und Strecken von Geraden bestehen, die größte Länge

$$2 \left[H \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{h}{H} \right) + \sqrt{H^2 - h^2} \right]$$

bzw. die kleinste Länge

$$2 \left[h \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{h}{H} \right) + \sqrt{H^2 - h^2} \right]$$

auf. Wir empfehlen dem Leser zu versuchen, diese Sätze selbständig zu beweisen.

Auch für Δ -Kurven lässt sich ein Approximationssatz beweisen, der dem Approximationssatz der Theorie der Kurven konstanter Breite ähnlich ist. Man kann nämlich zeigen, dass sich zu jeder beliebigen Δ -Kurve K der Höhe h eine Δ -Kurve K' , derselben Höhe h konstruieren lässt, die aus Kreisbögen des Radius h besteht und der Kurve K beliebig nahekommt. Der Beweis dieses Satzes ist dem Beweis des analogen Satzes für Kurven konstanter Breite ähnlich.

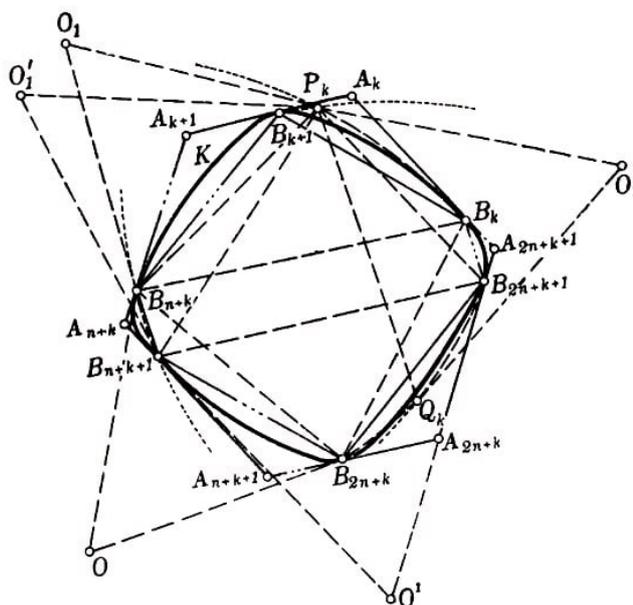


Abb. 107

1.8 Kurven, die sich in einem gleichseitigen Dreieck drehen lassen (Δ -Kurven), und verwandte Kurven

Wir betrachten ein $3n$ -Eck $A_1A_2\dots A_{3n}$, das der Kurve K umschrieben ist derart, dass die erste, $(n+1)$ -ste, $(2n+1)$ -ste Seite, die zweite, $(n+2)$ -te, $(2n+2)$ -te Seite, usw. [also die Seiten A_kA_{k+1} , $A_{n+k}A_{n+k+1}$, $A_{2n+k}A_{2n+k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), A_nA_{n+1} , $A_{2n}A_{2n+1}$, $A_{3n}A_{3n+1}$], miteinander Winkel von 60° bilden (beispielsweise ein umschriebenes $3n$ -Eck mit gleichen Winkeln).

Die Berührungspunkte der Seiten dieses $3n$ -Ecks mit der Kurve K bezeichnen wir mit B_1, B_2, \dots, B_{3n} . Wir zeigen, dass eine Δ -Kurve der Höhe h existiert, die aus Kreisbogen vom Radius h besteht, dem Vieleck $A_1A_2\dots A_{3n}$ einbeschrieben und dem Vieleck $B_1B_2\dots B_{3n}$ umschrieben ist.

Wir ersetzen mit Hilfe folgender Konstruktion gleichzeitig die Bogen B_kB_{k+1} , $B_{n+k}B_{n+k+1}$ und $B_{2n+k}B_{2n+k+1}$ der Kurve K durch neue Kurven, die aus Kreisbogen vom Radius r bestehen. Auf den Seiten $B_{n+k}B_{2n+k}$ und $B_{n+k+1}B_{2n+k+1}$ der Dreiecke $B_kB_{n+k}B_{2n+k}$ und $B_{k+1}B_{n+k+1}B_{2n+k+1}$ errichten wir außerhalb dieser Dreiecke die gleichseitigen Dreiecke

$B_{n+k}B_{2n+k}O$ und $B_{n+k+1}B_{2n+k+1}O'$ (Abb. 107).

Um die Punkte O und O' schlagen wir Kreisbogen vom Radius h . Den Schnittpunkt dieser Kreise, der auf derselben Seite der Geraden OO' durch die Mittelpunkte liegt wie die Punkte B_k und B_{k+1} bezeichnen wir mit P_k . Nunmehr konstruieren wir über den Seiten P_kB_{n+k} und P_kB_{n+k+1} der Dreiecke $P_kB_{n+k}B_{2n+k}$ und $P_kB_{n+k+1}B_{2n+k+1}$ außerhalb dieser Dreiecke die gleichseitigen Dreiecke $P_kB_{n+k}O_1$ und $P_kB_{n+k+1}O'_1$.

Da $\triangle O_1B_{n+k}B_{2n+k} = \triangle OP_kB_{n+k}$ und $\triangle O'_1B_{n+k+1}B_{2n+k+1} = \triangle O'P_kB_{n+k+1}$ ist, muss $O_1B_{2n+k} = OP_k = h$ und $O'_1B_{2n+k+1} = O'P_k = h$ sein.

Jetzt schlagen wir um die Punkte O_1 und O'_1 Kreise vom Radius h . Den Schnittpunkt dieser Kreise, der auf derselben Seite der Mittelpunktslinie $O_1O'_1$ liegt wie die Punkte B_{2n+k} und B_{2n+k+1} , bezeichnen wir mit Q_k . Schließlich errichten wir über der gemeinsamen Seite P_kQ_k der Dreiecke $P_kQ_kB_{n+k}$ und $P_kQ_kB_{n+k+1}$ außerhalb dieser Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck $P_kQ_kO_2$; $O_2B_{n+k} = O_1Q_k = h$, $O_2B_{n+k+1} = O'_1Q_k = h$ ($\triangle O_2B_{n+k}P_k = \triangle O_1Q_kP_k$ und $\triangle O_2B_{n+k+1}P_k = \triangle O'_1Q_kP_k$; folglich können wir die Punkte B_{n+k} und B_{n+k+1} durch Kreisbogen vom Radius h um den Punkt O_2 verbinden.

Nunmehr ersetzen wir den Bogen B_kB_{k+1} der Kurve K durch die Kreisbogen B_kP_k und P_kB_{k+1} , den Bogen $B_{2n+k}B_{2n+k+1}$ der Kurve K durch die Kreisbogen $B_{2n+k}Q_k$ und Q_kB_{2n+k+1} und den Bogen $B_{n+k}B_{n+k+1}$ durch einen Kreisbogen $B_{n+k}B_{n+k+1}$ um den Punkt O_2 .

Man sieht leicht, dass die bei dieser Ersetzung erhaltene neue Kurve K^* wieder eine Δ -Kurve sein muss.

Berührt ein der Kurve K^* umschriebenes regelmäßiges Dreieck irgendeinen der konstruierten Kreisbogen, so gehen die beiden anderen Seiten dieses Dreiecks, wie man leicht feststellt, durch Ecken der Kurve, und die Höhe des Dreiecks ist gleich h (man vergleiche die Lösung der Aufgabe 107).

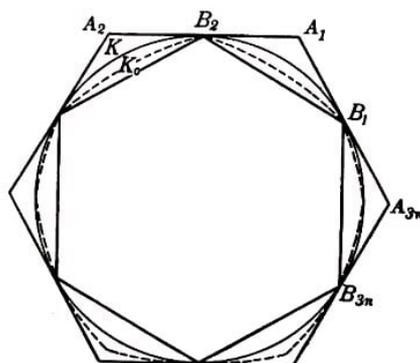


Abb. 108

Führen wir solch eine Ersetzung für jedes Bogentripel $B_k B_{k+1}, B_{n+k} B_{n+k+1}, B_{2n+k} B_{2n+k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) und $B_n B_{n+1}, B_{2n} B_{2n+1}, B_{2n} B_1$ der Kurve K durch, so erhalten wir eine Δ -Kurve K_0 der Höhe h , die nur aus Kreisbögen vom Radius h besteht, dem Vieleck $B_1 B_2 \dots B_{3n}$ umschrieben und dem Vieleck $A_1 A_2 \dots A_{3n}$ einbeschrieben ist (Abb. 108).

Der weitere Beweisgang unterscheidet sich nicht vom Beweis des Approximationssatzes für Kurven konstanter Breite. Der Satz selbst lautet folgendermaßen:

Zu jeder Δ -Kurve K der Höhe h lässt sich eine Folge $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ von Δ -Kurven der Höhe h finden, die aus Kreisbögen vom Radius h bestehen derart, dass K der Limes dieser Folge ist.

112. Man folgere aus dem Approximationssatz einen neuen Beweis des Satzes von Barbier für Δ -Kurven (siehe Aufgabe 108).

In Analogie zu den Δ -Kurven kann man auch konvexe Kurven, die sich frei innerhalb eines regelmäßigen n -Ecks drehen lassen und dabei stets die Seiten berühren, untersuchen (n ist hierbei eine beliebige feste ganze Zahl; für $n = 3$ erhalten wir die Δ -Kurven und für $n = 4$ die Kurven konstanter Breite).

Bezüglich dieser Kurven kann man eine Reihe von Sätzen beweisen, die den Sätzen analog sind, welche den Inhalt der Aufgaben des vorliegenden Paragraphen bilden.

So lässt sich beispielsweise zeigen, dass sich n Senkrechte, die auf den Seiten eines solch einer Kurve umschriebenen regelmäßigen n -Ecks in den Berührungspunkten der Seiten mit der Kurve K errichtet sind, in einem Punkte schneiden.⁵⁴

Durch Untersuchung einer Kurve K und einem Kreis O umschriebenen $n \cdot 2^k$ -Ecks mit gleichen Winkeln kann man beweisen, dass die Länge der Kurve K , die sich im Innern eines regelmäßigen n -Ecks drehen lässt, gleich der Länge des Kreises sein muss, der diesem n -Eck einbeschrieben ist.

Dieser letztgenannte Satz kann auch einfach mit Hilfe des Satzes über die Länge der Summe konvexer Kurven erhalten werden.

Völlig analog den Lösungen der Aufgaben 92 des § 7 und 110 des vorliegenden Paragraphen lässt sich nämlich folgendes beweisen:

⁵⁴Der schon skizzierte kinematische Beweis des Satzes aus Aufgabe 101 lässt sich ungeändert auf den allgemeineren Fall übertragen.

Ist eine Kurve K im Innern eines regelmäßigen n -Ecks derart frei drehbar, dass stets sämtliche Seiten berührt werden, so ist die Summe

$$K + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(n-1)}$$

ein Kreis; dabei wird die Kurve $K^{(1)}$ aus K durch Drehung um $\frac{360^\circ}{n}$ erhalten, die Kurve $K^{(2)}$ wird aus K durch Drehung um den Winkel $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$ erhalten, ..., $K^{(n-1)}$ schließlich entsteht aus K durch Drehung um den Winkel $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$.⁵⁵

Hieraus folgt unmittelbar, da die Länge der Summe irgendwelcher Kurven gleich der Summe ihrer Längen ist (siehe § 4), dass alle Kurven, die sich im Innern eines gewissen regelmäßigen n -Ecks frei drehen lassen, ein und dieselbe Länge besitzen (man vergleiche die Lösungen der Aufgaben 92 des § 7 und 110 des vorliegenden Paragraphen).

Es ist zu beachten, dass im Gegensatz zu den Sätzen, die den Inhalt der Aufgaben 93 des § 7 und 111 des vorliegenden Paragraphen bilden, aus der Tatsache, dass die Summe irgendeiner Kurve K und $n - 1$ Kurven, die aus K bei Drehung um $\frac{360^\circ}{n}$, $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$, ..., $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$ hervorgehen, noch nicht folgt, dass sich die Kurve K frei im Innern eines regelmäßigen n -Ecks drehen lässt.

Es gibt unendlich viele vom Kreis verschiedene Kurven, die sich frei im Innern eines regelmäßigen n -Ecks so drehen lassen, dass stets sämtliche Seiten des n -Ecks berührt werden.⁵⁶

Für $n > 4$ werden jedoch die einfachsten Beispiele solcher Kurven komplizierter als das Reuleaux-Dreieck oder das Δ -Zweieck.

Es ist auch unbekannt, welche von den Kurven, die sich im Innern eines gegebenen regelmäßigen n -Ecks mit $n > 4$ frei drehen lassen, die kleinste Fläche begrenzt.

Wir untersuchen jetzt eine weitere Verallgemeinerung der Kurven konstanter Breite und der *Delta*-Kurven.

Offenbar lässt sich jeder konvexen Kurve K stets ein Rechteck mit beliebig gegebenen Seitenrichtungen umbeschreiben. Die Kurven konstanter Breite können als Kurven definiert werden, deren sämtliche umbeschriebenen Rechtecke einander gleiche Quadrate sind (siehe Abb. 84a). Wir untersuchen jetzt konvexe Kurven, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle ihnen umbeschriebenen Rechtecke ein und denselben Umfang haben.⁵⁷

Natürlich besitzen alle Kurven konstanter Breite diese Eigenschaft. Es gibt jedoch auch

⁵⁵Zum Beweis braucht man folgenden leicht zu beweisenden Satz: Die einzige Kurve, die sich im Innern eines regelmäßigen n -Ecks frei drehen lässt und bei Drehung um einen gewissen Punkt um den Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ in sich übergeht, ist der Kreis.

⁵⁶Man kann beweisen, dass jeder Bogen einer konvexen Kurve, der gewisse hinreichend allgemeine Bedingungen erfüllt, zu einer konvexen Kurve dieser Art ergänzt werden kann, wenn der Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten nicht größer als $\frac{360^\circ}{n}$ ist.

⁵⁷Die nächstliegende Verallgemeinerung der Kurven konstanter Breite wären wohl solche Kurven, deren sämtlich umbeschriebenen Rechtecke einander gleich, jedoch keine Quadrate sind; mit anderen Worten, solche Kurven, die sich frei im Innern irgendwelcher Rechtecke drehen lassen und dabei stets sämtliche Seiten derselben berühren. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass derartige Kurven nicht existieren.

viele Kurven, die diese Eigenschaft haben, aber keine Kurven konstanter Breite sind. Die einfachsten Beispiele solcher Kurven werden in den nachfolgenden Aufgaben 113 und 114 gegeben. Es zeigt sich, dass für diese Kurven gewisse Eigenschaften der Kurven konstanter Breite gültig bleiben (siehe in erster Linie Aufgabe 115)⁵⁸.

113. Die Höhen eines gleichseitigen Dreiecks werden über die entsprechenden Ecken hinaus fortgesetzt; auf ihren Verlängerungen werden Strecken abgetragen, die den Seiten des Dreiecks gleich sind. Die Ecken des Dreiecks werden durch Kreisbogen um die erhaltenen Punkte verbunden (Abb. 109).

Man beweise, dass alle Rechtecke, die der aus den drei Kreisbogen gebildeten konvexen Kurve umschrieben sind, den gleichen Umfang besitzen. Man berechne die Länge dieser Kurve und den Inhalt der von ihr begrenzten Fläche, wenn der Umfang eines der Kurve umschriebenen Rechtecks gleich $4l$ ist.

114. Um zwei gegenüberliegende Ecken eines Quadrates werden zwei Kreise gezogen, deren Radien gleich der Seitenlänge des Quadrates sind.

Man beweise, dass die Umfänge aller Rechtecke, die dem konvexen Durchschnitt dieser beiden Kreise umschrieben sind (Abb. 110), einander gleich sind. Man berechne die Länge der Kurve, welche diese Figur begrenzt, und den Flächeninhalt der Figur, wenn der Umfang eines ihr umschriebenen Rechtecks gleich $4l$ ist.

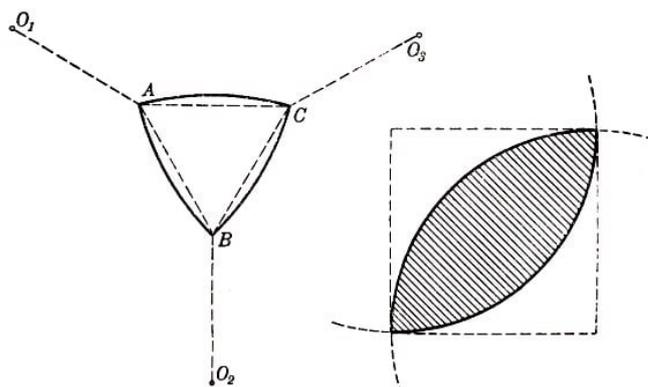


Abb. 109,110

115*. (Verallgemeinerter Barbierscher Satz.) Haben alle einer konvexen Kurve K umschriebenen Rechtecke ein und denselben Umfang $4l$, so ist die Länge der Kurve K gleich πl .

Aus den Aufgaben 43 und 44 des § 4 folgt:

Besitzen die Kurven K_1 und K_2 die Eigenschaft, dass alle ihnen umschriebenen Rechtecke jeweils einander gleich sind, so hat auch die Summe $K = K_1 + K_2$ diese Eigenschaft. Diese Bemerkung ermöglicht es, aus irgendwelchen Kurven, deren umschriebenen Rechtecke sämtlich gleiche Umfänge haben, neue Beispiele solcher Kurven zu konstruieren.

Lässt sich nämlich eine Kurve frei zwischen zwei parallelen Geraden drehen (welche die Seiten irgendeines Rechtecks sind) und berührt sie diese Geraden stets, so muss der Abstand zwischen jedem Paar paralleler Trägergeraden dieser Kurve gleich dem Abstand zwischen den betrachteten parallelen Geraden sein. Folglich ist die untersuchte Kurve eine Kurve konstanter Breite, und alle ihr umschriebenen Rechtecke sind Quadrate.

⁵⁸In Aufgabe 116 wird der Zusammenhang dieser Kurven mit den Kurven konstanter Breite dargestellt.

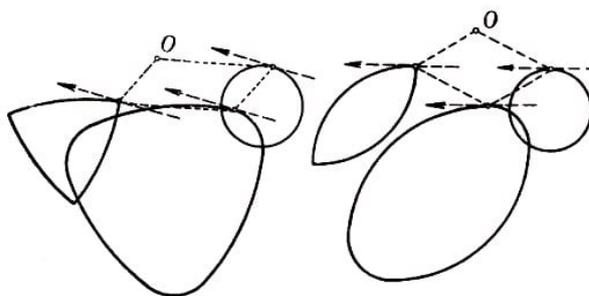


Abb. 111, 112

In Abb. 111 ist beispielsweise die Summe der Kurve aus Aufgabe 113 und eines Kreises dargestellt, in Abb. 112 die Summe der Kurve aus Aufgabe 114 mit einem Kreis.

116. Besitzen die Umfänge aller einer konvexen Kurve K umschriebenen Rechtecke ein und denselben Wert, so ist die Summe $K + K'$, wobei die Kurve K' aus K durch Drehung um 90° hervorgeht, eine Kurve konstanter Breite; ist umgekehrt $K + K'$ eine Kurve konstanter Breite (und K' aus K durch Drehung um 90° entstanden), so sind die Umfänge aller Rechtecke, die der konvexen Kurve K umschrieben sind, einander gleich.

Man folgere hieraus einen neuen Beweis des verallgemeinerten Barbierschen Satzes (siehe Aufgabe 115). Was erhält man als Summe $K + K'$, wenn K die Kurve aus Aufgabe 113 oder die Kurve aus Aufgabe 114 ist?

Kurven, deren umschriebene Rechtecke sämtlich gleichen Umfang besitzen, können also auch als diejenigen Kurven definiert werden, deren Summe mit der aus ihnen bei Drehung um 90° entstehenden Kurve eine Kurve konstanter Breite ergibt.

Unter Benutzung der schon gegebenen Definition für die Kurven konstanter Breite überzeugt man sich leicht, dass die betrachteten Kurven auch als konvexe Kurven definiert werden können, deren Summe mit den drei Kurven, die aus der ursprünglichen durch Drehung um 90° bzw. 180° bzw. 270° entstehen, einen Kreis ergibt.

So ergeben beispielsweise in Abb. 113 die Kurven K , K' , K'' und K''' , von denen jede folgende aus der vorhergehenden durch Drehung um 90° entsteht, als Summe einen Kreis. Diese Definition ist der Definition der Kurven konstanter Breite und der Definition der Δ -Kurven völlig analog.

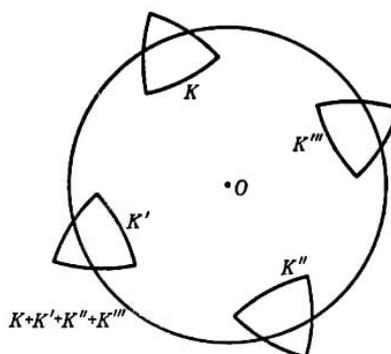


Abb. 113

Man kann folgendes beweisen: Jede Kurve K der konstanten Breite h kann als Summe einer gewissen Kurve K_1 , deren umschriebene Rechtecke sämtlich einen Umfang der

Länge $2h$ besitzen, und der Kurve K'_1 , die aus K durch Drehung um 90° hervorgeht, dargestellt werden.

Dieser Satz ist für Kurven der konstanten Breite h , die aus Kreisbogen vom Radius h bestehen, recht einfach zu beweisen.

Den allgemeinen Satz folgert man aus diesem Spezialfall mit Hilfe des Approximationsatzes (siehe § 7)⁵⁹.

Man untersucht auch Kurven K , die die Eigenschaft besitzen, dass die Umfänge aller der Kurve K umbeschriebenen gleichwinkligen n -Ecke (wobei n eine beliebige feste ganze Zahl ist) einander gleich sind.

Für $n = 4$ erhält man die in den Aufgaben 113-116 untersuchten Kurven, für $n = 3$ erhält man die Δ -Kurven, denen die Aufgaben 98-102 des vorliegenden Paragraphen gewidmet sind.

Spezialfälle solcher Kurven sind diejenigen Kurven, welche sich im Innern eines regelmäßigen n -Ecks drehen lassen und dabei stets sämtliche Seiten des n -Ecks berühren.

Es gibt unendlich viele konvexe Kurven mit dieser Eigenschaft, die von den Kurven verschieden sind, welche sich in einem regelmäßigen n -Eck drehen lassen. Es lassen sich leicht einfache Beispiele solcher Kurven konstruieren.

So kann man beispielsweise leicht berechnen, dass die Umfänge aller gleichwinkligen n -Ecke, die einer aus $n - 1$ gleichen Kreisbogen bestehenden Kurve umbeschrieben sind (welche jeweils einen den Winkeln eines regelmäßigen n -Ecks gleichen Winkel einschließen), die gleiche Länge besitzen (Abb. 114; für $n = 4$ geht die konstruierte Kurve in die Kurve aus Aufgabe 113 über, für $n = 3$ in das Δ -Zweieck, welches in Aufgabe 98 definiert wurde).

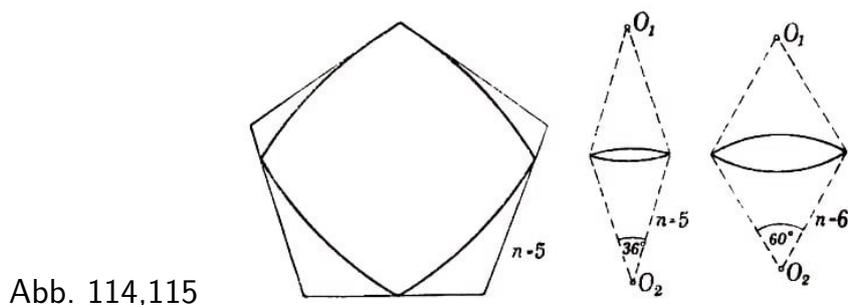


Abb. 114,115

Auch überzeugt man sich leicht von der Gleichheit der Umfänge aller gleichwinkligen n -Ecke, die einer aus zwei gleichen Kreisbogen bestehenden Kurve umbeschrieben sind, wenn die Bogen den Winkeln

$$\frac{[3 + (-1)^n] \cdot 180^\circ}{2n} = \begin{cases} \frac{180^\circ}{n} & \text{für ungerade } n \\ \frac{360^\circ}{n} & \text{für gerade } n \end{cases}$$

entsprechen (Abb. 115; für $n = 4$ fällt diese Kurve mit der Kurve aus Aufgabe 114 zusammen, für $n = 3$ mit dem Δ -Zweieck).

⁵⁹Dabei muss man auch den Satz 1 aus Anhang I benutzen.

Es ist anzunehmen, dass diese Kurve eine kleinere Fläche begrenzt als jede andere Kurve, welche die erwähnte Eigenschaft besitzt, dass alle ihr umbeschriebenen gleichwinkligen n -Ecke gleichen Umfang besitzen; es wäre interessant, diese Behauptung zu beweisen oder zu widerlegen.

Durch Betrachtung gleichwinkliger $n \cdot 2^k$ -Ecke, die einer Kurve K umbeschrieben sind, welche die Eigenschaft besitzt, dass alle gleichwinkligen der Kurve K umbeschriebenen n -Ecke den Umfang $n \cdot l$ haben, überzeugt man sich leicht, dass die Länge von K gleich der Länge der Peripherie des Kreises ist, der dem regelmäßigen n -Eck der Seitenlänge l einbeschrieben ist (man vergleiche die Lösung der Aufgabe 115).

Der letzte Satz lässt sich einfacher aus dem Satz über die Länge der Summe konvexer Kurven herleiten (siehe § 4), wenn man folgenden leicht zu beweisenden Satz benutzt:

Die Umfänge aller einer Kurve K umbeschriebenen gleichwinkligen Vielecke sind dann und nur dann gleich, wenn die Summe der Kurve K und der $n - 1$ Kurven, die aus K durch Drehung um jeweils $\frac{360^\circ}{n}$, $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$, ..., $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$ entstehen, ein Kreis ist (man vergleiche hierzu die Aufgaben 100, 111 und 116).

Eine andere Verallgemeinerung der Kurven konstanter Breite bilden die konvexen Kurven, deren sämtliche umbeschriebenen Rechtecke Quadrate sind (die nicht notwendig gleich sein müssen!).

Als einfachstes Beispiel einer solchen Kurve, die keine Kurve konstanter Breite ist, mag das Quadrat dienen. Es zeigt sich, dass alle einer Kurve K umbeschriebenen Rechtecke dann und nur dann Quadrate sind, wenn K die Summe zweier Kurven K_1 und K'_1 ist, wobei K'_1 aus der Kurve K , durch Drehung um 90° entsteht.⁶⁰

So ist beispielsweise das Quadrat die Summe zweier einander gleicher und zueinander senkrechter Strecken (siehe Aufgabe 37). Hat eine Kurve K_1 die Eigenschaft, dass alle der Kurve umbeschriebenen Rechtecke gleichen Umfang haben, so ist die Summe $K_1 + K'_1$ eine Kurve konstanter Breite (siehe Aufgabe 116).

Man untersucht auch Kurven, die sich im Innern eines unregelmäßigen n -Ecks drehen lassen und dabei stets seine sämtlichen Seiten berühren. Es gibt jedoch längst nicht zu allen n -Ecken solche Kurven.

Man kann zeigen, dass zu einem gegebenen Dreieck dann und nur dann vom Kreis verschiedene Kurven existieren, die sich im Innern des Dreiecks drehen lassen und dabei stets seine sämtlichen Seiten berühren, wenn alle Winkel des Dreiecks kommensurabel sind.⁶¹

⁶⁰Ist $K = K_1 + K'_1$ und K'_1 aus K_1 durch Drehung um 90° entstanden, so lässt sich leicht zeigen, dass jedes der Kurve K umbeschriebene Rechteck ein Quadrat sein muss. Die Umkehrung dieses Satzes erhält man auf einfache Weise in dem Fall, dass K ein Vieleck mit der erwähnten Eigenschaft ist. Der allgemeine Satz lässt sich aus diesem Spezialfall mit Hilfe des folgenden Approximationssatzes erschließen:

Zu jeder Kurve K , deren umbeschriebenen Rechtecke sämtlich Quadrate sind, lässt sich eine Folge von Vielecken $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ mit der Eigenschaft finden, dass K der Limes dieser Folge ist (im Sinne der in § 4 gegebenen Definition.)

⁶¹Siehe I. M. Kamenezki, "Die Lösung eines von Lusternik gestellten geometrischen Problems" in Uspechi mat. nauk II, 2, 1947, S. 199-202 (der Beweis ist nicht elementar).

Dieses Ergebnis ist auch für alle n -Ecke richtig, wenn n verschieden von 4 ist; denn sind die Winkel eines n -Ecks ($n \neq 4$), dem sich ein Kreis einbeschreiben lässt, kommensurabel, so existiert eine vom Kreis verschiedene Kurve, die im Innern dieses n -Ecks drehbar ist und dabei stets seine sämtlichen Seiten berührt; sind die Winkel eines n -Ecks inkommensurabel, so existiert eine solche Kurve nicht.⁶²

Für Vierecke gilt dieser Satz bereits nicht mehr; denn unabhängig davon, ob die Winkel eines Rhombus kommensurabel oder inkommensurabel sind, existieren vom Kreis verschiedene Kurven, die sich im Innern dieses Rhombus drehen lassen und stets seine sämtlichen Seiten berühren (diese Eigenschaft haben die Kurven der konstanten Breite, welche gleich der Höhe dieses Rhombus ist).

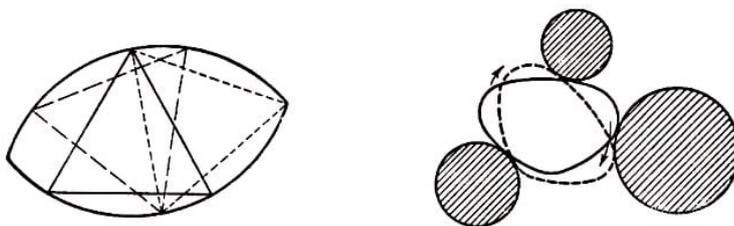


Abb. 116,117

Im gewissem Sinne "dual" zu den Δ -Kurven sind Kurven, in deren Innern sich ein regelmäßiges Dreieck so drehen lässt, dass stets die Ecken auf der Kurve entlanggleiten. Man zeigt leicht, dass beispielsweise die in Abb. 116 dargestellte Kurve, die aus zwei Kreisbogen mit einem Zentriwinkel von 120° besteht, diese Eigenschaft besitzt.

Man kann vermuten, dass diese Kurve und der Kreis die einzigen konvexen Kurven sind, in denen sich ein regelmäßiges Dreieck drehen lässt (nichtkonvexe Kurven dieser Art gibt es unendlich viele); es wäre interessant, diesen Satz zu beweisen oder zu widerlegen.

Bezüglich der Kurven, in deren Innern sich irgendein beliebiges Dreieck drehen lässt, sowie bezüglich der Kurven, innerhalb derer sich irgendein n -Eck mit $n > 3$ drehen lässt, ist anscheinend überhaupt nichts bekannt.

Eine Verallgemeinerung der Aufgaben über Kurven, die sich in einem Dreieck drehen lassen und dabei seine sämtlichen Seiten berühren, und der Aufgaben über Kurven, innerhalb deren sich ein Dreieck drehen lässt, ist ein Problem, das vor kurzem von L. A. Lusternik gestellt wurde.⁶³

⁶²Das angegebene Ergebnis erscheint auf den ersten Blick merkwürdig; der gleiche Sachverhalt liegt jedoch recht häufig bei ähnlichen Problemen vor. Als weiteres Beispiel führen wir folgende Aufgabe an, die einem Spezialfall einer allgemeinen Aufgabe von L. A. Lusternik verwandt ist, von welcher unten noch die Rede sein wird:

Gesucht sind alle konvexen Kurven, die von allen Punkten eines festen Kreises unter konstantem Winkel α zu sehen sind. Es zeigt sich, dass in dem Falle, dass der Winkel α inkommensurabel mit π ist, ein zum Kreis C konzentrischer Kreis die einzige derartige Kurve ist.

Ebenso verhält es sich, wenn $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ ist, wobei m und n teilerfremd und beide ungerade sind. Ist wenigstens eine der beiden Zahlen m oder n gerade, so gibt es unendlich viele Kurven, welche die betrachtete Eigenschaft besitzen und vom Kreis verschieden sind. Die größte Länge aller dieser Kurven hat der Kreis, die kleinste dagegen ein gewisses n -Eck, das aus elliptischen Bogen besteht (im Falle $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ artet dieses n -Eck in eine doppelt zu nehmende Strecke aus - den Durchmesser des Kreises C).

⁶³Uspechi mat. nauk. Bd. I, Heft 3-4, 1946.

Lusternik fragt nach den Bedingungen für die Existenz von konvexen Figuren, die vom Kreis verschieden sind, sich frei drehen lassen und dabei stets drei gegebene Kreise in der Ebene berühren (Abb. 117).

Dabei können irgendwelche dieser Kreise in Geraden ausarten ("Kreise mit unendlich großem Radius").

Werden an Stelle dreier Kreise drei Geraden betrachtet, so erhalten wir die Aufgabe über Kurven, die im Innern eines Dreiecks gedreht werden können. Werden an Stelle der drei Kreise drei Punkte betrachtet, so erhalten wir die Aufgabe über Kurven, in deren Innern sich ein Dreieck drehen lässt.

Die vollständige Lösung der Aufgabe von L. A. Lusternik (die praktische Bedeutung für die Messtechnik besitzt) ist wahrscheinlich äußerst schwierig.

1.9 Anhang I: Grenzwertsatz für Kurven

Wir beweisen folgenden wichtigen Satz, den man als "Grenzwertsatz für Kurven" bezeichnen kann.

Satz 1.

Sind unendlich viele konvexe Kurven gegeben, die ganz im Innern eines Kreises verlaufen, so lässt sich unter ihnen stets eine Folge von Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ auswählen, die einen Limes besitzt. Dabei kann der Limes dieser Teilfolge entweder eine konvexe Kurve oder eine Strecke oder ein Punkt sein.

Beweis. Wir bezeichnen die Menge aller betrachteten konvexen Kurven mit L und den Kreis, in dem sie gelegen sind, mit O ; dann unterteilen wir die Ebene in Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{8}$ und bezeichnen diejenigen Quadrate, welche mit der Kreisfläche O gemeinsame Punkte haben, mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_r, \dots$

Ferner bezeichnen wir mit $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ die Menge aller derjenigen Kurven, die mit jedem der Quadrate $Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho$ gemeinsame Punkte, jedoch keine Punkte mit den übrigen Quadraten gemeinsam haben.

Offenbar gehört jede der betrachteten Kurven einer gewissen Menge $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ an.

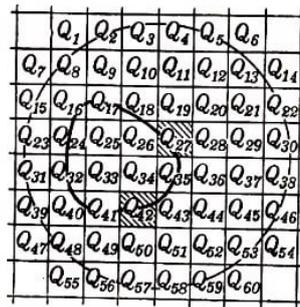


Abb. 118

In Abb. 118 beispielsweise hat die Kurve nur mit den Quadraten $Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}, Q_{24}, Q_{26}, Q_{27}, Q_{32}, Q_{35}, Q_{40}, Q_{41}, Q_{42}, Q_{43}$ Punkte gemeinsam. Ferner brauchen trivialerweise manche Mengen $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ überhaupt keine Kurven zu enthalten. Beispielsweise enthält die Menge $L(Q_{27}, Q_{42})$ sicher keine einzige Kurve, da eine konvexe Kurve nicht aus zwei einzelnen Stücken bestehen kann.

Die Anzahl der Mengen $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ ist nur endlich. Es existieren nämlich genau $\binom{r}{1}$ Mengen, die von Kurven gebildet werden, welche ganz in einem Quadrat liegen, genau $\binom{r}{2}$ Mengen, deren Kurven in zwei Quadraten gelegen sind, usw. Damit gibt es

$$\binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \dots + \binom{r}{r} = 2^r - 1$$

Mengen $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$, von denen jedoch viele gar keine Kurven enthalten. Hieraus folgt, dass in mindestens einer der Mengen $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ unendlich viele Kurven enthalten sein müssen. Enthielte nämlich jede Menge $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ nur endlich viele Kurven, so würden alle diese Mengen zusammen ebenfalls nur endlich

viele Kurven umfassen, während uns unendlich viele Kurven gegeben waren.

Daher muss eine gewisse Menge $L(Q_{\alpha_0}, Q_{\beta_0}, \dots, Q_{\rho_0})$ unendlich viele Kurven enthalten. Wir bezeichnen diese Menge mit L_1 . Sind K' und K'' zwei Kurven, die der Menge L_1 angehören, so ist der Abstand zwischen ihnen kleiner als $\frac{1}{4}$.

Ist nämlich A ein beliebiger Punkt der Kurve K' und Q_δ das Quadrat, in welchem dieser Punkt gelegen ist, so gibt es einen Punkt B auf der Kurve K'' , der ebenfalls in Q_δ liegt, da K' und K'' derselben Menge $L_1 = L(Q_{\alpha_0}, Q_{\beta_0}, \dots, Q_{\rho_0})$ angehören.

Auf der Kurve K'' gibt es also einen Punkt B , dessen Abstand von A nicht größer als $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$ (Diagonale des Quadrats der Seitenlänge $\frac{1}{8}$) ist. Alle Punkte der Kurve K' liegen daher in einer $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ -Umgebung der Kurve K'' . Die Kurve K'' hingegen liegt in einer $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ -Umgebung der Kurve K' ; der Abstand zwischen diesen Kurven ist daher nicht größer als $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, also erst recht kleiner als $\frac{1}{4}$.

Es sei K_1 eine beliebige Kurve der Menge L_1 und $K_1^* = K_1 + O_{\frac{1}{2}}$, die Summe dieser Kurve mit einem Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$, d.h. die äußere der Begrenzungskurven einer $\frac{1}{2}$ -Umgebung der Kurve K_1 .

Dann ist jede Kurve K' aus L_1 samt ihrer $\frac{1}{4}$ -Umgebung innerhalb von K_1^* gelegen (da jede Kurve K' aus L_1 ganz im Innern der Summe der Kurve K_1 und des Kreises vom Radius $\frac{1}{4}$ liegt).

Nunmehr unterteilen wir die Ebene in Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{16}$ und bezeichnen diejenigen von ihnen mit Q'_1, Q'_2, \dots , die mit der Kreisfläche O gemeinsame Punkte haben. Wie schon früher bilden wir die Mengen $L_1(Q'_\alpha, \dots, Q'_\rho)$ aller der Kurven aus L_1 , welche die Quadrate $Q'_\alpha, \dots, Q'_\rho$ schneiden und mit den übrigen Quadraten keine Punkte gemein haben. Von diesen Mengen wählen wir eine gewisse, unendlich viele Kurven enthaltende Menge aus und bezeichnen sie mit L_2 .

Ähnlich wie oben beweisen wir, dass der Abstand je zweier Kurven aus L_2 nicht größer ist als $\frac{1}{8}$ (da die Quadrate nur halb so groß genommen werden). Wählen wir irgendeine Kurve K_2 aus L_2 und bezeichnen die Summe $K_2 + O_{\frac{1}{4}}$ dieser Kurve und eines Kreises vom Radius $\frac{1}{4}$ mit K_2^* , so ergibt sich, dass alle Kurven aus L_2 samt ihrer $\frac{1}{8}$ -Umgebung innerhalb K_2^* gelegen sind. Dabei liegt die Kurve K_2 , weil K_2 eine Kurve der Menge L_1 (und die ganze Menge L_2 eine Teilmenge von L_1) ist, samt ihrer $\frac{1}{4}$ -Umgebung innerhalb K_1^* , d.h., K_2^* ist ganz in K_1^* enthalten.

Nunmehr unterteilen wir die Ebene in Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{32}$ und führen dieselbe Konstruktion noch einmal durch. Wir erhalten eine Menge L_3 , aus der wir irgendeine Kurve K_3 auswählen; die Summe dieser Kurve K_3 und eines Kreises vom Radius $\frac{1}{8}$ bezeichnen wir mit K_3^* . Dann liegt K_3^* innerhalb der Kurve K_2^* .

Indem wir diesen Prozess fortsetzen, konstruieren wir eine Folge $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ von Kurven aus L und eine Folge von Hilfskurven $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*, \dots$. Dabei umschließt K_1^* die Kurve K_2^* , diese umschließt K_3^* , usw.; der Abstand zwischen K_n und K_n^* ist gleich $\frac{1}{2^n}$, da K_n^* die Summe der Kurve K_n und eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2^n}$ ist.

Die von der Kurve K_n^* begrenzte konvexe Figur bezeichnen wir mit Φ_n^* . Wir beweisen,

dass mindestens ein Punkt existiert, der allen Figuren $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots, \Phi_n^*, \dots$ angehört. Wir legen an alle Figuren Φ_n^* zueinander parallele gleichgerichtete Stützgeraden l_n und bezeichnen die links von l_n gelegene Halbebene mit Π_n , d.h. die Halbebene, in der die Figur Φ_n^* liegt.

Der Durchschnitt aller Halbebenen $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \dots$ ist eine gewisse Halbebene π , die von einer zu allen Geraden $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ parallelen Geraden l begrenzt wird.

Es ist klar, dass die Gerade l jede der Figuren Φ_n^* schneidet, so dass Φ_1^* auf der Geraden l eine gewisse Strecke M_1 ausschneidet, Φ_2^* eine gewisse Strecke M_2 ausschneidet, usw. Dabei enthält M_1 die ganze Strecke M_2 , diese enthält M_3 , usw. Ein gemeinsamer Punkt aller dieser Strecken ist auch ein gemeinsamer Punkt aller Figuren $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots$.

Zum Beweis der Existenz eines gemeinsamen Punktes für alle Strecken M_n betrachten wir den Strahl N_1 , der links vom rechten Endpunkt der Strecke M_1 gelegen ist, den Strahl N_2 , der links vom rechten Endpunkt der Strecke M_2 gelegen ist, usw.

Jeder dieser Strahlen stellt eine konvexe Figur dar, dabei enthält N_1 den Strahl N_2 , dieser wiederum umfasst N_3 , usw. Der Durchschnitt aller dieser Strahlen ist eine konvexe Figur, die von einer Seite beschränkt, also ein Strahl ist.

Man sieht leicht, dass der Endpunkt C dieses Strahls allen Strecken M_1, M_2, \dots angehört. Folglich besitzen die Figuren $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots, \Phi_n^*, \dots$ einen gemeinsamen Punkt; man kann also vom Durchschnitt aller dieser Figuren sprechen; wir bezeichnen ihn mit Φ^* . Die Berandung K^* dieser Figur ist entweder eine konvexe Kurve (falls Φ^* eine zweidimensionale konvexe Figur ist) oder eine Strecke oder ein Punkt.

Man sieht unmittelbar, dass die Gerade l , die wir oben betrachteten, eine Stützgerade der Figur Φ^* ist. Wir sahen nämlich, dass auf dieser Geraden Punkte der Figur Φ^* liegen (z. B. der Punkt C). Da ferner jede Figur Φ_n^* links von der Geraden l_n , also in der Halbebene Π_n liegt, muss der Durchschnitt aller dieser Figuren in der Halbebene Π liegen, die der Durchschnitt der Halbebenen $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ ist.

Somit liegt Π links von der Geraden l , folglich ist l eine Stützgerade. Ist l' eine zu l parallele gleichgerichtete Gerade, die rechts von ihr gelegen ist, so folgt hieraus, dass von einem gewissen n ab alle Figuren Φ_n^* links von l' liegen müssen. Die Punkte der Geraden l' liegen nämlich nicht in der Halbebene Π ; die Gerade l' wird also nicht allen Halbebenen Π_n angehören, d. h., von einem gewissen Wert n ab liegen die Halbebenen Π_n , und mit ihnen auch die Figuren Φ_n^* links von der Geraden l' .

Wir wählen jetzt einen beliebigen Abstand ε . Es sei P ein der Kurve K^* umschriebenes Vieleck, dessen Außenwinkel so klein sind, dass der Abstand zwischen P und K^* kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.⁶⁴

Es sei ferner P' ein P umfassendes Vieleck, dessen Seiten parallel zu den Seiten von P sind; wir setzen dabei voraus, dass die Seiten von P' nur so wenig von den Seiten des Vielecks P entfernt sind, dass der Abstand zwischen P und P' ebenfalls kleiner

⁶⁴Der Abstand zwischen einer konvexen Kurve und einem ihr umschriebenen Vieleck ist kleiner als $d \cdot \tan \alpha$, wobei d der Durchmesser der Kurve und α der größte Außenwinkel des Vielecks ist. In Abb. 119 ist nämlich die Strecke A_1B_1 gleich $C_1A_1 \tan \alpha$, wobei $C_1A_1 < d$ ist, da C_1 und A_1 Punkte der konvexen Figur sind; außerdem ist $\alpha_1 < \alpha' \leq \alpha$.

als 3 ist⁶⁵, so dass also der Abstand zwischen K^* und P' kleiner als ε wird (siehe § 4, Aufgabe 51).

Wir bezeichnen die Seiten des Vielecks P' mit l'_1, l'_2, \dots, l'_k . Dann existiert ein n_1 derart, dass für $n > n_1$ alle Figuren Φ_n^* links von der Geraden l'_1 liegen; ferner existiert ein n_2 derart, dass für $n > n_2$ alle Figuren Φ_n^* links von der Geraden l'_2 gelegen sind, usw.

Auf diese Weise liegen für ein n , das größer als alle Zahlen n_1, n_2, \dots, n_k ist, die Figuren Φ_n^* links von allen Geraden l'_1, l'_2, \dots, l'_k , also innerhalb des Vielecks P' und damit erst recht in der ε -Umgebung der Kurve K^* . Folglich sind von einem gewissen n ab alle Kurven K_n^* von K^* um weniger als ε entfernt, d. h., die Folge der Kurven $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*, \dots$ hat als Limes die Kurve K^* .

Wir beweisen jetzt, dass K^* auch Limes der Folge der Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ ist.

Es sei n_ε eine Zahl derart, dass für $n > n_\varepsilon$ der Abstand zwischen K^* und K_n^* kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wir können auch n_ε so groß voraussetzen, dass für $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Hieraus folgt, dass der Abstand zwischen K_n^* und K_n für $n > n_\varepsilon$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.

Auf diese Weise wird der Abstand zwischen den Kurven K^* und K_n kleiner als ε , wenn n größer als n_ε ist, d. h., die Folge $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ hat als Limes die Kurve K^* (welche eine konvexe Figur, eine Strecke oder ein Punkt sein kann). Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. (Satz von Bolzano-Weierstrass)

Aus jeder unendlichen Punktmenge innerhalb eines Kreises lässt sich stets eine Folge von Punkten auswählen, die einen Grenzwert besitzt.

Der angegebene Satz ermöglicht in vielen Fällen, die Existenz einer konvexen Figur mit dieser oder jener Eigenschaft zu beweisen (allein mit Hilfe dieses Satzes lässt sich jedoch nichts über die Gestalt dieser Figuren aussagen). Wir betrachten einige Beispiele.

Aufgabe 1.

Man beweise, dass unter allen konvexen Kurven mit dem Umfang 1 eine Kurve größten Flächeninhalts existiert.

Lösung. Es sei F eine beliebige konvexe Figur vom Umfang 1, ihr Flächeninhalt sei

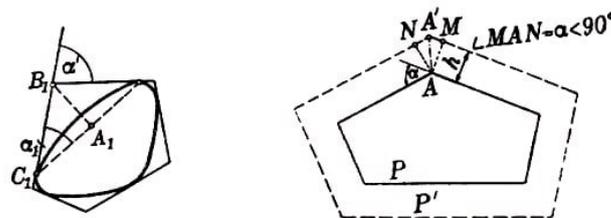


Abb. 119,120

⁶⁵Sind alle Außenwinkel des Vielecks P kleiner als 90° und haben die Seiten des Vielecks P' von den entsprechenden Seiten des Vielecks P den Abstand h , so ist der Abstand zwischen P und P' kleiner als $h\sqrt{2}$ (Abb. 120). Ist K^* eine Strecke oder ein Punkt, so kann man als P' ein hinreichend nahe an K^* gelegenes Rechteck nehmen.

gleich S . Wir wählen eine feste Gerade l und auf dieser einen Punkt O . Rechts vom Punkt O tragen wir eine Strecke OM ab, deren Länge (in bestimmten Längeneinheiten) gleich S ist.

Damit ordnen wir jeder konvexen Figur vom Umfang 1 einen gewissen Punkt M der Geraden l zu. Je größer der Flächeninhalt von F ist, desto weiter rechts ist der Punkt M auf der Geraden l gelegen. Die Punkte M aller konvexen Figuren vom Umfang 1 bilden eine gewisse Menge Φ auf der Geraden l .

Wir beweisen, dass diese Menge eine eindimensionale konvexe Figur ist. Ist nämlich M ein Punkt der Menge Φ , α die Länge der Strecke OM (d. h., existiert eine Figur F_α mit dem Umfang 1 und dem Flächeninhalt α) und ist N ein Punkt der Strecke OM derart, dass die Länge der Strecke ON gleich β mit $\beta < \alpha$ ist, so gehört auch der Punkt N zur Menge Φ (d.h., es existiert eine konvexe Figur mit dem Umfang 1 und dem Flächeninhalt β).

Zum Beweis betrachten wir zwei Punkte A und B der Figur F_α . Es sei Π_h ein Streifen, der von zwei zur Geraden AB parallelen und im Abstand h von AB gelegenen Geraden eingeschlossen wird (Abb. 121).

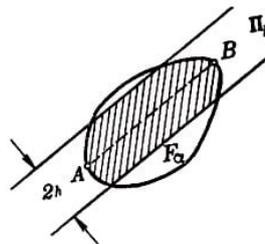


Abb. 121

Bei großem h ergibt der Durchschnitt der Figur F_α mit Π_h die ganze Figur F_α ; das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs ist also gleich α .

Für kleine h wird der Inhalt dieses Durchschnitts beliebig klein; der Umfang nähert sich der doppelten Länge der Sehne AB , das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs wird also beliebig klein.

Aus Stetigkeitsüberlegungen (§ 3) folgt, dass für ein gewisses h das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs des Durchschnitts von F_α mit Π_h gleich β wird.

Indem man den Durchschnitt ähnlich vergrößert, so dass sein Umfang gleich 1 wird, erhält man eine Figur F_β mit dem Flächeninhalt β . Hieraus folgt, dass der Punkt N der Menge Φ angehört.

Folglich ist die Menge Φ eine konvexe Figur. Da die Menge Φ außerdem auch beschränkt ist (es gibt keine Figur mit dem Umfang 1 und beliebig großem Flächeninhalt), ist Φ eine Strecke auf der Geraden l , deren linker Endpunkt der Punkt O und deren rechter Endpunkt ein gewisser Punkt M^* ist (siehe § 1).

Es sei α^* die Länge der Strecke OM^* ; dann existiert zu jedem positiven $\alpha < \alpha^*$ eine konvexe Figur mit dem Umfang 1 und dem Flächeninhalt α . Wir wählen konvexe Figuren F_n mit dem Umfang 1 derart, dass der Flächeninhalt von F_n gleich $\alpha^* - \frac{1}{n}$ ist, und legen alle diese Figuren in einen Kreis vom Radius 1.

Nach Satz 1 existiert dann eine Folge F_{n_1}, F_{n_2}, \dots der ausgewählten Figuren, die einen Grenzwert F^* besitzt.

Auf Grund des in § 4 Bewiesenen können wir schließen, dass der Umfang der Figur F^* gleich 1 und der Flächeninhalt gleich α^* ist; F^* ist also die konvexe Figur vom Umfang 1 mit größtem Flächeninhalt.

Der bewiesene Satz sagt nichts über die Gestalt dieser größten Figur aus. Er ergänzt jedoch die Überlegungen Steiners zu einer strengen Lösung des isoperimetrischen Problems (siehe § 5, Aufgaben 55a, 60 und 61).

Keine vom Kreis verschiedene Figur kann nämlich maximal sein. Da aber nach dem Bewiesenen eine größte Figur existiert, muss diese ein Kreis sein.

Aufgabe 2. Man beweise, dass der Satz von Helly auch für unendlich viele beschränkte konvexe Figuren gültig ist.

Lösung. Es seien $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ beschränkte konvexe Figuren, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen. Nach Aufgabe 14 des § 2 folgt hieraus, dass je n dieser Figuren einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es sei A_3 ein gemeinsamer Punkt der Figuren F_1, F_2 und F_3 ; ferner A_4 ein gemeinsamer Punkt der Figuren F_1, F_2, F_3 und F_4 ; ...; A_n ein gemeinsamer Punkt der Figuren F_1, F_2, \dots, F_n , usw.

Auf Grund des Satzes von Bolzano-Weierstrass (und zwar benutzen wir jetzt die Beschränktheit der Figuren $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$, da sonst die Menge der Punkte A_n nicht in einem Kreis untergebracht werden kann) lässt sich aus der Punktfolge $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eine Teilfolge $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$ auswählen, die einen Grenzwert A besitzt. Wir beweisen, dass der Punkt A allen Figuren $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ angehört.

Nehmen wir etwa an, dass A nicht zur Figur F_m gehöre, d.h. weder ein innerer noch ein Randpunkt von F_m ist. Dann lässt sich um den Punkt A ein Kreis K_r mit einem gewissen Radius r legen, der ganz außerhalb der Figur F_m bleibt.

Aus der Folge der Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ wählen wir eine hinreichend große Zahl n_t , so dass $n_t > m$ ist und der Punkt A_{n_t} von A eine kleinere Entfernung als r hat. Dann gehört der Punkt A_{n_t} allen Figuren $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots, F_{n_t}$ an und liegt innerhalb von K_r , im Gegensatz zur Annahme, dass F_m keine Punkte des Kreisinneren von K_r enthält. Der erhaltene Widerspruch beweist, dass der Punkt A allen Figuren $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ angehört.

Aufgabe 3. Man beweise, dass sich einer gegebenen beschränkten Figur F ein Kreis umschreiben lässt, dass also unter allen umfassenden Kreisen ein kleinster existiert.

Lösung. Es sei C ein Kreis, der F umschließt, und r sein Radius. Wir wählen eine feste Gerade l und auf ihr einen Punkt O . Rechts vom Punkt O tragen wir auf der Geraden l eine Strecke OM der Länge r ab.

Auf diese Weise entspricht jedem Kreis, der F umschließt, ein gewisser Punkt M der Geraden l . Die Punkte M , die den Kreisen entsprechen, welche F umschließen, bilden eine gewisse Menge Φ auf der Geraden l .

Gehört M zu Φ , so gehört auch jeder Punkt, der rechts von M liegt, der Menge Φ an. Enthält nämlich ein Kreis vom Radius r die Figur F , so umschließt erst recht jeder zum ersten konzentrischen Kreis, der einen größeren Radius besitzt, die Figur F . Hieraus folgt, dass Φ eine eindimensionale konvexe Figur ist, und zwar ein Strahl, der von einem gewissen Punkt M^* der Geraden l ausgeht; M^* ist der am weitesten links gelegene Punkt des Strahls Φ .

Es sei die Strecke OM^* gleich r^* . Zu jedem $r > r^*$ existiert ein Kreis vom Radius r , der F umfasst. Wir beweisen, dass ein Kreis vom Radius r^* existiert, der die Figur F umschließt.

Es sei C_n ein Kreis vom Radius $r^* + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) und umschließe F . Gemäß Satz 1 lässt sich aus der Folge von Kreisen $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ eine Teilfolge auswählen, welche einen Grenzwert besitzt.

Es sei C^* der Limes dieser Teilfolge; dann ist C^* ein Kreis (siehe Aufgabe 53 des § 4). Dabei ist selbstverständlich, dass die Figur F nicht die "Grenzkurve" C^* durchstößt, da F von jedem der Kreise $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ umschlossen wird. Der Radius des Kreises C^* ist offenbar gleich r^* . Diese Tatsache folgt leicht daraus, dass die Länge des Kreises C^* gleich dem Grenzwert der Kreise C_n ist.

Völlig analog löst man die

Aufgabe 4. Man beweise, dass sich einer gegebenen beschränkten konvexen Figur F ein Kreis einbeschreiben lässt, dass also unter allen von F umschlossenen Kreisen ein größter existiert.

Aufgabe 5. Es sei F eine beschränkte Figur. Man beweise, dass zwei Punkte A und B dieser Figur existieren derart, dass die Länge der Strecke AB von keinem Abstand zwischen beliebigen anderen Punkten der Figur übertroffen wird. (Für Randpunkte kann Gleichheit eintreten.)

Lösung. Wir wählen eine feste Gerade l und auf ihr einen Punkt O . Rechts von O tragen wir auf der Geraden l die Strecke OM ab, deren Länge gleich dem Abstand eines Punktepaars der Figur F ist. Alle derartigen Punkte M bilden eine gewisse Menge auf der Geraden, und zwar (ebenso wie in den Aufgaben 1 und 3) eine Strecke OD . Es sei d die Länge dieser Strecke.

Wir wählen Punkte A_n, B_n der Figur F , deren Abstand gleich $d - \frac{1}{n}$ ist. Aus der Punktfolge $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ wird eine konvergente Teilfolge $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$ ausgewählt. Die entsprechende Folge $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots, B_{n_k}, \dots$, die aus der Folge $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ ausgewählt wird, könnte divergent sein.

Wählt man jedoch aus dieser Folge eine konvergente Teilfolge $B_{m_1}, B_{m_2}, \dots, B_{m_k}, \dots$ aus und betrachtet die entsprechende Folge $A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k}, \dots$, so erhält man zwei konvergente Punktfolgen, die einen Grenzwert besitzen und jeweils aus den Folgen $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ und $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ ausgewählt sind.

Es seien A und B die Grenzwerte dieser letzten beiden Folgen. Man sieht leicht, dass der Abstand zwischen den Punkten A und B gleich d ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die beiden Punkte A und B der Figur F angehören. Wir beweisen das beispielsweise für A .

Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und A_m , ein Punkt der Folge $A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k}, \dots$ derart, dass der Abstand zwischen A und A_{m_t} kleiner als $\frac{1}{p}$ ist.

Der Punkt A_{m_t} gehört der Figur F an, folglich liegen beliebig nahe bei A Punkte der Figur F . Das bedeutet, dass der Punkt A ebenfalls zur Figur F (siehe Anhang II, Eigenschaft I) gehört.

Wir stellen zwei weitere Aufgaben, die ganz analog zu lösen sind:

Aufgabe 6. Es sei Φ eine beschränkte Figur. Man kann zwei parallele Stützgeraden an die Figur legen derart, dass der Abstand zwischen ihnen nicht größer ist als der Abstand zwischen irgendwelchen anderen parallelen Stützgeraden der Figur Φ (für Randpunkte kann Gleichheit eintreten).

Aufgabe 7 (zur Lösung der Aufgabe 23. Sind Φ_1 und Φ_2 zwei konvexe Figuren, von denen mindestens eine beschränkt ist, so existieren zwei Punkte A_1 aus Φ_1 und A_2 aus Φ_2 derart, dass die Länge der Strecke A_1A_2 höchstens gleich der Länge jeder anderen Strecke ist, welche einen Punkt der Figur Φ_1 mit einem Punkt der Figur Φ_2 verbindet (bei Randpunkten tritt Gleichheit ein).

Wir bemerken schließlich noch, dass aus Satz 1 oft die Existenz einer größten (oder kleinsten) Figur folgt, ohne dass man Schlüsse über die Eindeutigkeit dieser Figur ziehen kann. So ist beispielsweise der Umkreis einer Figur Φ stets eindeutig (siehe Aufgabe 67 des § 6), dagegen kann es mehrere Inkreise geben (siehe Abb. 68).

1.10 Anhang II: Über die Begriffe der konvexen und der nichtkonvexen Figur

In § 1 definierten wir die Bedingungen, unter denen eine ebene Figur konvex genannt wird. Doch was ist unter einer ebenen Figur zu verstehen ?

Die vorliegende Ergänzung ist der Klärung der Bedeutung gewidmet, welche die Autoren dem Wort "Figur" beilegen.

Nach allgemeinsten Gesichtspunkten könnte unter einer "Figur" eine beliebige in der Ebene gelegene Punktmenge verstanden werden. Eine Punktmenge vorgeben, heißt eine Regel angeben, die es ermöglicht, genau die Frage zu beantworten, ob ein beliebig gewählter Punkt der Menge angehört oder nicht.

Wenn wir alle Punkte, die im Innern eines gewissen Kreises liegen, zur Menge zählen, erhalten wir eine Kreisfläche (ohne Rand), zählen wir außerdem alle Punkte der Kreisperipherie noch zur Menge, so erhalten wir bereits eine andere Menge (Kreisfläche mit Rand).

Eine gegebene Menge in der Ebene ist konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren gesamte Verbindungsstrecke enthält. Die Kreisfläche mit Rand ist ebenso wie die Kreisfläche ohne Rand eine konvexe Menge. Nimmt man zur Kreisfläche nur einen Teil ihrer Randpunkte hinzu, so erhält man ebenfalls eine konvexe Menge.

Geometrisch werden alle diese Mengen durch eine einzige Figur dargestellt; für die Geometrie genügt es daher, eine von ihnen zu untersuchen, beispielsweise die Kreisfläche samt ihrer Begrenzung. Wollten wir beliebige konvexe Mengen untersuchen (die nicht unbedingt sämtliche Punkte ihrer Begrenzung zu enthalten brauchen), so würde die Formulierung einer ganzen Reihe von Sätzen bedeutend erschwert (beispielsweise brauchte eine "Stützgerade" dann keinen Berührungspunkt mit der Figur gemeinsam zu haben). Deshalb bezeichnen wir in diesem Buch nur solche Mengen als Figuren, die folgende Eigenschaften besitzen:

Eigenschaft I. Ist eine Menge M eine "Figur", so werden alle Punkte ihrer Begrenzung zur Menge M gerechnet.

Dabei werden die inneren Punkte einer Menge M und die bezüglich dieser Menge äußeren Punkte ebenso wie in § 1 definiert; alle übrigen Punkte (unabhängig davon, ob sie zu M gehören oder nicht) sind Punkte der Begrenzung von M .

Bei Untersuchungen konvexer Figuren wird in unserem Buch stets vorausgesetzt, dass sie die Eigenschaft I besitzen (siehe § 1). Bei Untersuchungen nichtkonvexer Figuren wird diese Eigenschaft ebenfalls als erfüllt vorausgesetzt, ebenso wie auch die folgende.

Eigenschaft II. Ist A ein Punkt der Begrenzung einer Figur F und K ein (beliebig kleiner) Kreis um den Punkt A , so liegen innerhalb K sowohl innere Punkte als auch äußere Punkte dieser Figur F .

Ein Kreis und ein außerhalb des Kreises gelegener Punkt A liefern ein Beispiel für eine Menge, welche die Eigenschaft I, nicht aber die Eigenschaft II besitzt: Der Punkt A ist ein Punkt der Begrenzung dieser Menge, jedoch liegen in seiner Umgebung keine inneren Punkte der betrachteten Menge.⁶⁶

Selbst in dem Falle, dass wir uns auf Mengen beschränken, welche die Eigenschaften I und II haben (und sogar auf diejenigen von ihnen, welche zusammenhängend sind, also aus einem Stück bestehen), ist unsere Definition der "Figur" zu weit gefasst (obwohl schon viele Sätze über nichtkonvexe Figuren richtig sind, etwa die Aufgaben 5 und 9 des § 1, da bei ihrem Beweis nur die Eigenschaften I und II benutzt werden).

Unter den Mengen, welche die Eigenschaften I und II besitzen, kommen z. B. Mengen vor, die so beschaffen sind, dass drei verschiedene Mengen dieselbe Begrenzung besitzen, dass also an diese gemeinsame Begrenzung die drei Mengen sozusagen "von drei Seiten" angrenzen.⁶⁷

Außerdem gibt es unter den Mengen, welche die Eigenschaften I und II haben, solche, wie etwa einen Ring (der zwischen zwei konzentrischen Kreisen gelegene Teil der Ebene), dessen Berandung aus zwei verschiedenen Kurven besteht. Diese Besonderheiten dürfen bei konvexen Figuren nicht auftreten.

Da uns nichtkonvexe Figuren nur unter dem Gesichtspunkt des Vergleichs mit konvexen Figuren interessieren, ist es sinnvoll, Mengen auszuschließen, die den oben beschriebenen ähnlich sind. Wir beschränken uns deshalb in unserem Buch auf Untersuchungen

⁶⁶Für Figuren mit Eigenschaft I, II ist Rand gleich Begrenzung.

⁶⁷Siehe P. S. Alexandroff, [Kombinatorische Topologie], Moskau-Leningrad, Gostechisdat, 1947, S. 68-69.

von Figuren, welche die Eigenschaft III besitzen.

Eigenschaft III. Die Begrenzung von F besteht aus einer einfachen Kurve (die geschlossen ist, wenn F beschränkt, und deren Enden sich ins Unendliche erstrecken können, wenn F eine nicht beschränkte Figur ist).

Im Rahmen dieses Buches können wir nicht genau darauf eingehen, was man unter einer einfachen Kurve versteht. Anschaulich lässt sich eine einfache Kurve als eine Linie darstellen, die sich bei stetiger Bewegung eines Bleistiftes ergibt und sich nicht überschneidet. Wir setzen in diesem Buch voraus, dass (soweit nichts Gegenteiliges gesagt wird) eine Figur eine Punktmenge ist, welche die Eigenschaften I-III besitzt. Man darf aber nicht denken, dass deshalb die Figur besonders einfach sei.

Unter den einfachen geschlossenen Kurven gibt es beispielsweise solche, denen man keine endliche Länge zuordnen kann ("nichtrektifizierbare" Kurven). Wie wir schon erwähnten kann dieser Fall für konvexe Kurven nicht eintreten.

Übrigens ist auch der anschaulich klare Begriff der konvexen Kurve gar nicht so einfach. Es gibt beispielsweise konvexe Kurven, die auf jedem Bogen (wie klein er auch sein und wo er auch auf der Kurve liegen mag) unendlich viele singuläre Punkte (Ecken) haben.

Für geschlossene einfache Kurven in der Ebene gilt der berühmte Satz von Jordan. Jede einfache geschlossene Kurve K zerlegt die Ebene in zwei Gebiete (ein inneres und ein äußeres).

Das bedeutet, dass die Punkte der Ebene, die nicht auf K gelegen sind, zwei Mengen G_i und G_a bilden, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1. Je zwei Punkte, die ein und demselben dieser beiden Gebiete angehören, können durch einen ganz in diesem Gebiet liegenden Streckenzug verbunden werden, der also K nicht schneidet;
2. Sind A und B zwei Punkte, die verschiedenen Gebieten angehören, so schneidet jeder Streckenzug, der diese Punkte verbindet, die Kurve K .

Dieser Satz rechtfertigt die Formulierungen, ein Punkt liege "im Innern" oder "im Äußeren" einer einfachen geschlossenen Kurve.

Der Jordansche Kurvensatz ermöglicht die Aussage, dass jede beschränkte Figur im Sinne unserer Definition (d. h. jede beschränkte Menge, die den Eigenschaften I-III genügt) eine im Innern und auf einer gewissen einfachen geschlossenen Kurve gelegene Punktmenge ist.

In Fällen, in denen von der Länge einer Kurve oder von dem Flächeninhalt der von ihr begrenzten Figur die Rede ist (§§ 5, 6) muss man sich natürlich auf solche einfachen geschlossenen Kurven beschränken, für die diese Begriffe einen Sinn haben. Der Beweis des Jordanschen Satzes ist im allgemeinen Fall recht schwierig, obwohl er auch hinreichend elementar geführt werden kann.⁶⁸ Für Vielecke ist der Beweis dieses Satzes verhältnismäßig einfach.⁶⁹

⁶⁸Siehe Kap. II des bereits zitierten Buches von P. S. Alexandroff

⁶⁹Siehe z. B. das in der Einleitung zitierte Buch von A. D. Alexandroff, "Konvexe Polyeder", S. 69-72.

2 Lösungen

1. Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei konvexe Figuren und Φ ihr Durchschnitt. Es seien A und B zwei beliebige, dem Durchschnitt Φ angehörende Punkte (Abb. 122). Nach Definition des Durchschnitts zweier Figuren gehören beide Punkte A und B sowohl der Figur Φ_1 als auch der Figur Φ_2 an.

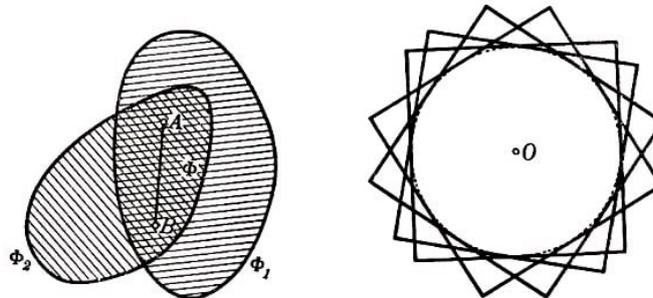


Abb. 122, 123

Da die Figur Φ_1 konvex ist, gehören alle Punkte der Strecke AB zu Φ_1 , und infolge der Konvexität von Φ_2 sind sie auch sämtlich in Φ_2 enthalten. Folglich gehört auch die Strecke AB ganz zum Durchschnitt Φ der Figuren Φ_1 und Φ_2 ; das besagt aber gerade, dass der Durchschnitt Φ konvex ist.

Ebenso beweist man, dass der Durchschnitt Φ mehrerer konvexer Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ konvex ist:

Sind A und B zwei beliebige Punkte von Φ , so gehören A und B gleichzeitig allen Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ an; da alle diese Figuren konvex sind, gehören alle Punkte der Strecke AB gleichzeitig allen Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ an, d.h., sie sind in ihrem Durchschnitt Φ enthalten.

Anmerkung. Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn unendlich viele Figuren Φ_1, Φ_2, \dots gegeben sind; der Beweis verläuft ebenso. In Abb. 123 sind beispielsweise einander gleiche Quadrate mit gemeinsamem Mittelpunkt dargestellt. Man sieht leicht, dass der Durchschnitt aller solcher Quadrate (es gibt unendlich viele dieser Quadrate) ein Kreis, also eine konvexe Figur ist.

2. Ein konvexes Vieleck Φ liegt ganz auf einer Seite jeder Geraden, die eine Verlängerung einer seiner Seiten ist. Gäbe es nämlich einen Punkt C , der zu Φ gehörte und nicht auf derjenigen Seite der Geraden AB gelegen wäre (A und B zwei benachbarte Ecken von Φ), auf der das Vieleck Φ an die Seite AB angrenzt (Abb. 124), so könnte beispielsweise die Strecke MC , die einen inneren Punkt M der Strecke AB mit dem Punkt C verbindet, nicht ganz in Φ enthalten sein. Das Vieleck Φ wäre also nicht konvex.

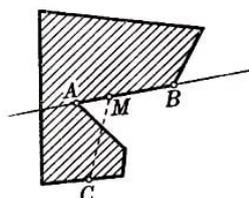
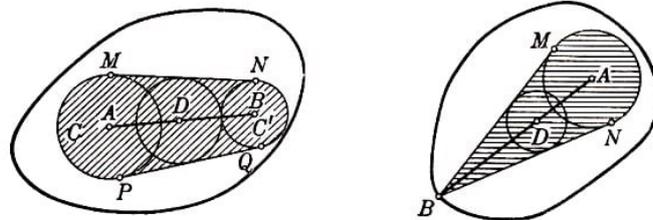


Abb. 124

Somit liegt das konvexe Vieleck Φ ganz in jeder der Halbebenen, deren Grenzen von Geraden gebildet werden, welche je eine der Vielecksseiten enthalten. Der Durchschnitt aller solcher Halbebenen ergibt gerade das Vieleck Φ .⁷⁰

3.a) Es seien A und B zwei innere Punkte der Figur Φ . Gemäß der Definition der inneren Punkte existieren zwei Kreise C und C' , deren Mittelpunkte jeweils die Punkte A bzw. B sind und deren sämtliche Punkte der Figur Φ angehören (Abb. 125a).

Abb. 125a, b

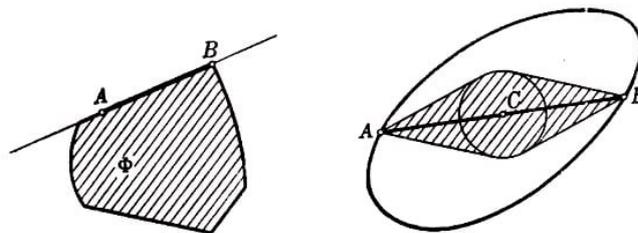


Es seien MN und PQ die gemeinsamen äußeren Tangenten der Kreise C und C' . Da Φ konvex ist, gehört die gesamte, in Abb. 125a schraffierte krummlinig begrenzte Figur $MPQN$ zu Φ . Folglich ist jeder Punkt D der Strecke AB Mittelpunkt eines gewissen Kreises, dessen sämtliche Punkte der Figur Φ angehören (dieser Kreis ist der Figur $MPQN$ einbeschrieben).

b) Der Beweis unterscheidet sich kaum von dem Beweis des Satzes a); nur wird der Kreis C' durch einen Punkt B und die Figur $MPQN$ durch die in Abb. 125b schraffierte Figur MBN ersetzt.

c) Es seien A und B zwei Randpunkte der konvexen Figur Φ . Die Strecke AB kann ganz aus Randpunkten bestehen (Abb. 126a); das wäre der erste Fall. Ist irgendein Punkt C der Strecke AB innerer Punkt von Φ , so müssen nach Aufgabe b) alle Punkte der Strecken CA und CB , mit Ausnahme von A und B , innere Punkte von Φ sein; das ist der zweite Fall (Abb. 124b).

Abb. 126a, b



4. Es sei Φ eine konvexe Figur, O ein innerer Punkt von Φ und l eine durch den Punkt O verlaufende Gerade. Da die Gerade l selbst eine konvexe Figur ist, muss ihr Durchschnitt mit der Figur Φ (gemäß Aufgabe 1) eine konvexe Figur sein, die auf der Geraden gelegen ist (eine eindimensionale konvexe Figur), also eine Strecke, ein Strahl oder die ganze Gerade.

Ist der Durchschnitt eine Strecke, so sind deren Endpunkte A und B Randpunkte der Figur Φ (Abb. 127); folglich enthält die Gerade l zwei Randpunkte von Φ . Ist dieser

⁷⁰Geht man von der angegebenen Definition einer konvexen Figur aus, so kann man zeigen, dass jede konvexe Figur der Durchschnitt endlich oder unendlich vieler Halbebenen ist.

Durchschnitt ein Strahl (Gerade l_1 in Abb. 127), so ist sein Anfangspunkt A' der einzige Randpunkt der Figur Φ , welcher auf der Geraden l gelegen ist.

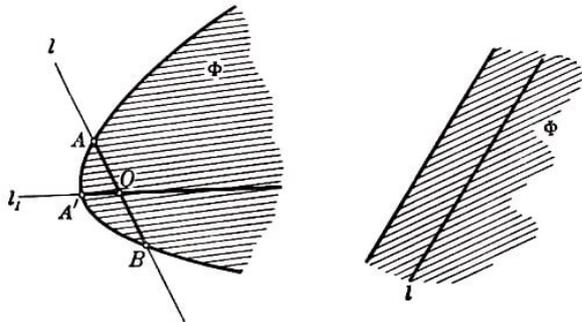


Abb. 127, 128

Ist schließlich die Gerade l ganz in der Figur enthalten (Abb. 128), so gibt es auf dieser Geraden keinen einzigen Randpunkt der Figur Φ .⁷¹

Ist die Figur Φ beschränkt, so ist auch ihr Durchschnitt mit der Geraden beschränkt und folglich eine Strecke. Somit enthält jede Gerade l , die durch einen inneren Punkt einer beschränkten konvexen Figur Φ führt, genau zwei Randpunkte dieser Figur.

5. Unsere Behauptung ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dass sich zu jeder beschränkten nichtkonvexen Figur Φ eine Gerade finden lässt, die den Rand der Figur in mehr als zwei Punkten schneidet. Wir beweisen jetzt diese Behauptung.

Es sei Φ eine beschränkte nichtkonvexe Figur. In diesem Falle lassen sich der Figur Φ angehörende Punkte A und B finden derart, dass ihre Verbindungsgerade nicht ganz der Figur Φ angehört. Wir bezeichnen einen nicht zu Φ gehörenden Punkt der Strecke AB mit C (Abb. 129a).

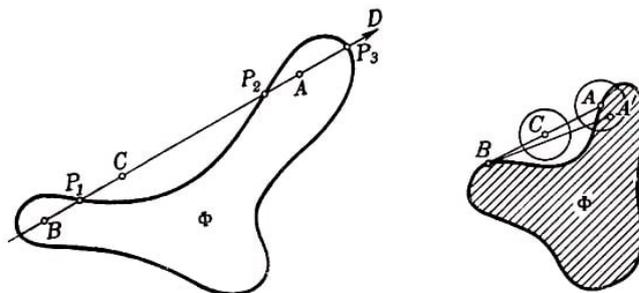


Abb. 129a, b

Wir können stets voraussetzen, dass der Punkt A ein innerer Punkt von Φ ist. Wäre nämlich A ein Randpunkt der Figur Φ und A' ein hinreichend nahe beim Punkt A gelegener innerer Punkt (siehe Definition des Randpunktes einer Figur), so würde auch die Strecke $A'B$ äußere Punkte der Figur Φ enthalten (Abb. 129b).

Es sei also A ein innerer Punkt. Auf der Strecke BC gibt es einen Randpunkt P_1 der Figur Φ (der eventuell mit B zusammenfällt), da der Punkt B zu Φ gehört, C jedoch außerhalb liegt. Auf der Strecke AC gibt es ebenfalls einen Randpunkt P_2 der Figur Φ (A liegt innerhalb von Φ und C außerhalb dieser Figur).

⁷¹Enthält eine konvexe Figur eine ganze Gerade, so ist sie, wie sich beweisen lässt, entweder ein Streifen (siehe Abb. 4b), eine Halbebene (siehe Abb. 4a) oder die ganze Ebene.

Verlängert man schließlich die Strecke AB über A hinaus, so erhält man einen Strahl AD , der von dem inneren Punkt A der Figur Φ ausgeht. Auf diesem Strahl gibt es ebenfalls einen Randpunkt P_3 der Figur Φ (da Φ beschränkt ist). Auf der durch den inneren Punkt A der Figur Φ verlaufenden Geraden liegen also mindestens drei Randpunkte P_1 , P_2 und P_3 , was zu beweisen war.

Folglich muss jede Figur Φ , die den Bedingungen der Aufgabe genügt, konvex sein.

Anmerkung. Wäre die Figur Φ unbeschränkt, so brauchte der Punkt P_3 nicht zu existieren, da die Verlängerung der Geraden AC über A hinaus ganz der Figur Φ angehören könnte. Ist Φ beispielsweise eine der in Abb. 130 dargestellten Figuren, so schneidet jede Gerade den Rand nicht öfter als in zwei Punkten, obwohl die Figur nichtkonvex ist.

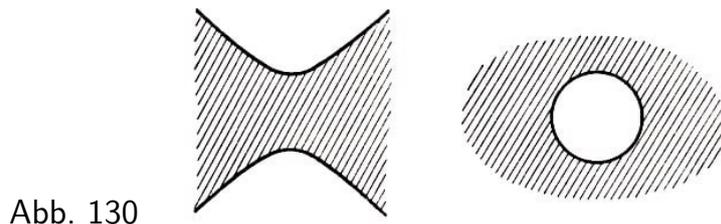


Abb. 130

6. Es seien l_1 und l_2 zwei parallele Stützgeraden der Figur Φ , deren Abstand einen maximalen Wert besitzt, und A_1 und A_2 zwei Randpunkte von Φ , die auf den Geraden l_1 bzw. l_2 gelegen sind. Wir behaupten, dass die Strecke A_1A_2 auf den beiden Geraden l_1 und l_2 senkrecht steht. Sonst müsste nämlich der Abstand zwischen den Geraden l_1 und l_2 kleiner sein als die Strecke A_1A_2 (Abb. 131) und erst recht kleiner als der Abstand zwischen zwei Stützgeraden l'_1 und l'_2 der Figur Φ , welche auf der Strecke A_1A_2 senkrecht stehen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

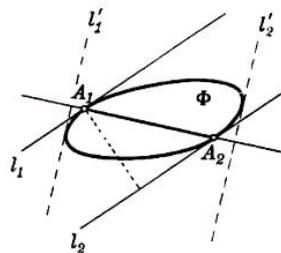


Abb. 131

Da A_1 bzw. A_2 beliebige Randpunkte der Figur Φ sind, welche den Geraden l_1 bzw. l_2 angehören, folgt aus der Orthogonalität der Strecke A_1A_2 zu den Geraden l_1 und l_2 , dass keine der Geraden l_1, l_2 mit der Figur Φ eine ganze Strecke gemeinsam haben kann (d.h., der in Abb. 132 dargestellte Fall ist unmöglich); mit anderen Worten, jede dieser Geraden enthält nur einen einzigen Randpunkt der Figur Φ .

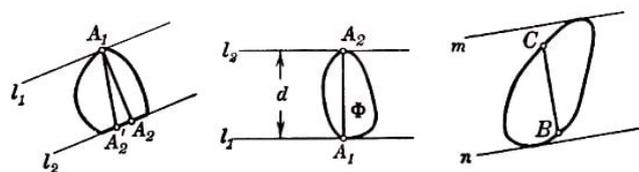


Abb. 132-134

7. Es sei Φ eine konvexe Figur; l_1 und l_2 seien zwei parallele Stützgeraden, deren Abstand den größtmöglichen Wert d habe; A_1 und A_2 seien gemeinsame Punkte der Figur Φ und der Geraden l_1 bzw. l_2 . Da die Strecke A_1A_2 senkrecht auf den Geraden l_1 und l_2 steht (siehe Aufgabe 6), ist die Länge der Strecke gleich d (Abb. 133). Wir müssen also nur noch beweisen, dass der Abstand je zweier beliebiger Punkte der Figur Φ den Wert d nicht übertrifft.

Sind nun B und C zwei Punkte der Figur Φ und m und n senkrecht auf der Strecke BC stehende Stützgeraden (Abb. 134), so übertrifft die Länge der Strecke BC den Abstand zwischen den Geraden m und n nicht, der seinerseits nicht größer als d ist. Folglich kann die Länge von BC nicht größer als d sein.

8. Wir legen zwei Stützgeraden l und m senkrecht zur Strecke AB an die konvexe Figur Φ . Die ganze Figur Φ ist in dem Streifen zwischen den Geraden l und m eingeschlossen; folglich lässt sich auch die Strecke AB der Länge d , die senkrecht auf den Geraden l und m steht, in dem Streifen unterbringen.

Da aber der Abstand zwischen den Geraden l und m nicht größer als d sein kann (Aufgabe 7), müssen die Geraden l und m durch die Endpunkte A und B der Strecke verlaufen.

9. Wir müssen zeigen, dass jede nichtkonvexe Figur Φ einen Randpunkt besitzt, durch den sich keine Stützgerade legen lässt. Indem man dieselbe Konstruktion durchführt wie bei der Lösung der Aufgabe 5 (siehe Abb. 129), überzeugt man sich leicht, dass ein derartiger Punkt existiert, etwa P_2 .

Die durch P_2 verlaufende Gerade AB ist nämlich keine Stützgerade, weil sie durch den inneren Punkt A geht. Jede andere Gerade, die durch den Punkt P_2 verläuft, ist deshalb keine Stützgerade, weil die Punkte A und B der Figur Φ auf verschiedenen Seiten von ihr liegen.

Anmerkung. Auch für unbeschränkte Figuren bleibt die Behauptung der Aufgabe richtig; wir gehen aber auf den Beweis nicht weiter ein.

10. Wir betrachten eine beliebige Seite AB eines Vielecks $ABC\dots P$, das der Kurve K einbeschrieben ist, welche die konvexe Figur Φ begrenzt.

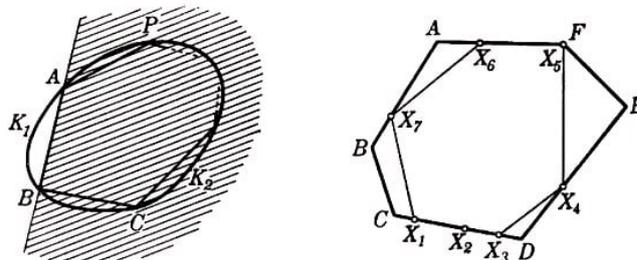


Abb. 135, 136

Die Punkte A und B teilen die Kurve K in zwei Bögen K_1 und K_2 (Abb. 135); gemäß Definition des einbeschriebenen Vielecks liegen alle übrigen Eckpunkte C, \dots, P auf einem dieser beiden Bögen, etwa auf dem Bogen K_2 . Die Strecke AB bildet mit dem Bogen K_2 eine konvexe Kurve K^* .

Diese ist der Rand einer der beiden konvexen Figuren, in welche Φ von der Geraden AB zerlegt wird. (Diese Figuren sind konvex, da sie die Durchschnitte der Figur Φ mit

den Halbebenen darstellen, in welche die Gerade AB die Ebene teilt.)

Die Gerade AB ist eine Stützgerade der konvexen Kurve K^* ; folglich liegen der Bogen K_2 und mit ihm alle Punkte C, \dots, P auf einer Seite von AB .

Daraus, dass sämtliche Eckpunkte des Vielecks $ABC\dots P$ auf einer Seite der Verlängerung jeder Seite liegen, folgt, dass dieses Vieleck konvex ist (siehe Lösung der Aufgabe 2).

Anmerkung. Gewisse Seiten des Vielecks $ABC\dots P$ können Verlängerungen voneinander sein. Beispielsweise sind in Abb. 136 in dem Siebeneck $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$, das dem konvexen Sechseck $ABCDEF$ einbeschrieben ist, die Seiten X_1X_2 und X_2X_3 Verlängerungen voneinander, so dass der Punkt X_2 praktisch kein Eckpunkt des einbeschriebenen Vielecks ist und die Figur $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$ in Wirklichkeit kein Siebeneck, sondern ein Sechseck ist.

Trotzdem werden wir in solchen Fällen sagen, dass solche Punkte wie X_2 ebenfalls Eckpunkte des einbeschriebenen Vielecks sind. Dadurch werden Formulierung und Lösung mancher Aufgaben vereinfacht.

11. Wir nehmen an, die von der Abb. 137 Kurve K begrenzte Figur Φ genüge den Bedingungen der Aufgabe, sei jedoch nicht konvex, und führen noch einmal die zur Lösung der Aufgabe 5 benutzte Konstruktion aus.

Wir ziehen die Gerade CD durch den Punkt C und einen beliebigen nicht auf der Geraden AB gelegenen inneren Punkt D der Figur Φ (Abb. 137) und betrachten alle Punkte Q der Geraden CD mit der Eigenschaft, dass die Strecke DQ ganz zu Φ gehört; diese Punkte bilden eine konvexe Figur, und zwar die Strecke Q_1Q_2 , die nicht von der Geraden AB geschnitten wird.

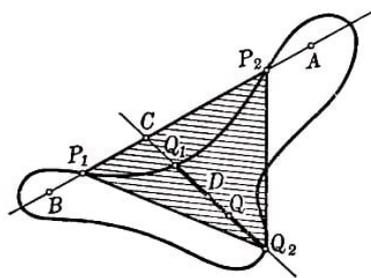


Abb. 137

Dann liegt aber der Punkt Q_1 , der von den beiden Punkten Q_1, Q_2 der Geraden AB den kleineren Abstand hat, innerhalb des Dreiecks, das von den Punkten P_1, P_2 und Q_2 gebildet wird. Folglich sind die Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 nicht Ecken eines konvexen Vierecks, im Widerspruch zur Voraussetzung.

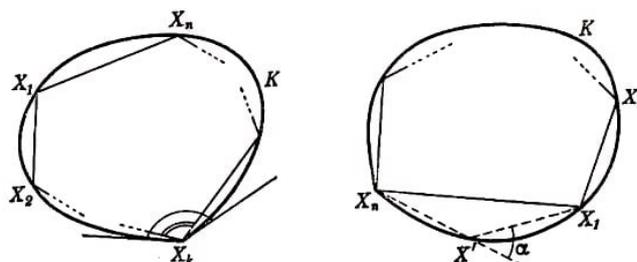


Abb. 138, 139

Anmerkung. Aus dieser Lösung folgt: Man braucht in den Voraussetzungen der Aufgabe nur zu fordern, dass je vier Punkte der Kurve K Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind; schon hieraus ergibt sich die Konvexität der Kurve K .

12. Es seien X_1, X_2, \dots, X_n sämtliche Ecken einer Kurve K in zyklischer Anordnung. Dann ist das Vieleck $X_1X_2\dots X_n$ der Kurve K einbeschrieben.

Dabei ist der Innenwinkel am Punkt X_k der Kurve K mindestens gleich dem Innenwinkel am Eckpunkt X_k des Vielecks $X_1X_2\dots X_n$ (Abb. 138).

Das bedeutet, der Außenwinkel am Punkt X_k der Kurve X ist höchstens gleich dem Außenwinkel am Eckpunkt X_k des Vielecks $X_1X_2\dots X_n$, folglich übertrifft die Summe aller Außenwinkel an den Eckpunkten der Kurve K die Summe der Außenwinkel des Vielecks $X_1X_2\dots X_n$ nicht; diese ist aber bekanntlich gleich 360° .⁷²

Ist die Kurve K von dem konvexen Vieleck $X_1X_2\dots X_n$ verschieden, so sei X' irgendein Kurvenpunkt, der nicht auf diesem Vieleck liege (Abb. 139); die Ecken der Kurve K seien so durchnummeriert, dass die Punkte X_1, X_2, \dots, X_n, X' in zyklischer Reihenfolge auftreten.

Wir untersuchen das einbeschriebene Vieleck $X_1X_2\dots X_nX'$. Wie schon oben können wir wieder schließen, dass die Summe der Außenwinkel an den Ecken der Kurve K nicht größer ist als die Summe der Außenwinkel an den Eckpunkten X_1, X_2, \dots, X_n des Vielecks $X_1X_2\dots X_nX'$. Diese ist jedoch gleich $360^\circ - \alpha$, wobei α der Außenwinkel am Punkt X' des Vielecks $X_1X_2\dots X_nX'$ ist. Ist die Kurve K kein konvexes Vieleck, so ist also die Summe der Außenwinkel an ihren Ecken kleiner als 360° .

13. Wir bezeichnen unsere konvexen Figuren mit Φ_0, Φ_1, Φ_2 und Φ_3 . Es sei A_0 ein gemeinsamer Punkt der Figuren Φ_0, Φ_2 und Φ_3 und A_1 ein gemeinsamer Punkt von Φ_0, Φ_2, Φ_3 , ferner A_2 ein gemeinsamer Punkt von Φ_0, Φ_1 und Φ_3 und schließlich A_3 ein gemeinsamer Punkt von Φ_0, Φ_1 und Φ_2 .

Da die Punkte A_0, A_1 und A_2 der Figur Φ_3 angehören, ist auch das ganze Dreieck $A_0A_1A_2$ in dieser Figur enthalten (siehe Abb. 6). Analog gehören das Dreieck $A_0A_1A_3$ zu Φ_2 , das Dreieck $A_0A_2A_3$ zu Φ_1 und schließlich das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu Φ_0 . Dabei können zwei Fälle auftreten.

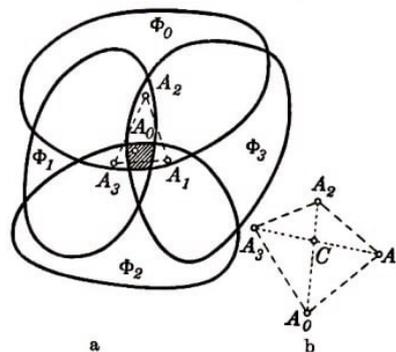


Abb. 140a, b

1. Einer der Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 liegt im Innern (oder auf einer Seite) des Dreiecks,

⁷²Die erste Aussage der Aufgabe bleibt auch in dem Falle gültig, dass die konvexe Figur unendlich viele Eckpunkte besitzt; der Beweis dieses Satzes erfordert jedoch Kenntnisse einiger einfacher Begriffe der Analysis.

das von den drei anderen gebildet wird. Es liege etwa der Punkt A_0 innerhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ (Abb. 140a).

Dann gehört A_0 allen vier Figuren $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ an. Diese Überlegung bleibt auch richtig, wenn das Dreieck $A_1A_2A_3$ in eine Strecke ausartet (wenn beispielsweise der Punkt A_2 auf der Seite A_1A_3 liegt).

2. Keiner der Punkte liegt in dem Dreieck, das von den drei übrigen gebildet wird, d. h., die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks (Abb. 140b). Dann gehört der Schnittpunkt C der Diagonalen dieses Vierecks allen vier betrachteten Dreiecken und damit allen vier Figuren $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ an.

14. Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion. Ist die Anzahl der Figuren gleich 4, so ist, wie wir bereits sahen (siehe Aufgabe 13), der Satz richtig.

Wir beweisen nun, dass er für $n + 1$ Figuren richtig ist, wenn er für n Figuren gilt, wobei $n > 4$ ist. Es seien $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ die gegebenen konvexen Figuren, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Wir bezeichnen den Durchschnitt der Figuren Φ_n und Φ_{n+1} mit $\overline{\Phi_n}$. Dann sind $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \overline{\Phi_n}$ wieder n konvexe Figuren (siehe § 1, Aufgabe 1), von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es existiert nämlich nach Voraussetzung ein gemeinsamer Punkt von je dreien dieser Figuren, von denen keine $\overline{\Phi_n}$ ist. Ein gemeinsamer Punkt der Figuren Φ_k, Φ_l und $\overline{\Phi_n}$, (d.h. ein gemeinsamer Punkt der Figuren Φ_k, Φ_l, Φ_n und Φ_{n+1}) existiert nach Aufgabe 13, da je drei der Figuren Φ_k, Φ_l, Φ_n und Φ_{n+1} einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es haben also je drei der Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \overline{\Phi_n}$ einen Punkt gemeinsam, und da die Anzahl dieser Figuren gleich n ist, existiert nach Induktionsannahme ein Punkt, der allen diesen Figuren und folglich auch jeder der Figuren $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ angehört.

15. Wir müssen beweisen, dass ein Punkt O Abb. 141 der Ebene existiert (der Mittelpunkt des gesuchten Kreises), der von allen gegebenen Punkten keinen größeren Abstand als 1 hat, oder mit anderen Worten, dass ein Punkt O der Ebene existiert, der allen Kreisen vom Radius 1 um die gegebenen Punkte angehört.

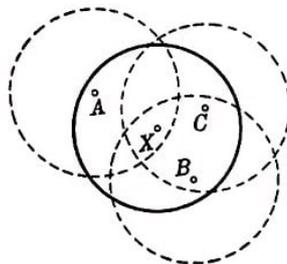


Abb. 141

Nach dem Satz von Helly genügt es zu beweisen, dass sich je drei der betrachteten Kreise schneiden. Auf Grund der Voraussetzung der Aufgabe lassen sich je drei Punkte A, B, C der betrachteten n Punkte von einem Kreis mit dem Radius 1 einschließen (Abb. 141); der Mittelpunkt X dieses Kreises ist gerade ein Punkt, der den drei Kreisen vom Radius 1 um die Punkte A, B, C angehört (da er von jedem der Punkte A, B, C höchstens den Abstand 1 hat).

Anmerkung. Der eben bewiesene Satz bleibt auch dann gültig, wenn unendlich viele Punkte gegeben sind; denn schneiden sich je drei von unendlich vielen Kreisen, so schneiden sich auch alle Kreise.

16. Es genügt zu beweisen, dass je drei der gegebenen Punkte in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden können; nach Aufgabe 15 folgt hieraus bereits, dass alle Punkte in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden können (in Aufgabe 15 wurde der Radius 1 genommen; dass hier der Radius gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sein soll, ist selbstverständlich nicht wesentlich).

Keine Seite eines Dreiecks ABC , das aus irgendwelchen drei der gegebenen Punkte gebildet wird, ist größer als 1. Ist dieses Dreieck stumpfwinklig oder rechtwinklig, so lässt es sich ganz von dem Kreis umschließen, der um die größte der Seiten als Durchmesser geschlagen wird; der Radius dieses Kreises ist nicht größer als $\frac{1}{2}$, also kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, so kann der Radius des diesem Dreieck umschriebenen Kreises ebenfalls nicht größer als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sein. Denn mindestens einer der Winkel dieses Dreiecks, etwa $\angle A$, ist nicht kleiner als 60° (die Summe aller drei Winkel ist gleich 180°).

Folglich ist die Seite BC als Sehne eines Bogens, der nicht kleiner als 120° , aber kleiner als 180° ist, nicht kleiner als $r\sqrt{3}$; wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist (die Sehne eines Bogens von 120° ist gleich $r\sqrt{3}$). Also gilt $BC \geq r \cdot \sqrt{3}$, und da $BC \leq 1$ ist, muss $r\sqrt{3} \leq 1$ sein, d.h.

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Anmerkung. Die Abschätzung des Satzes von Jung lässt sich nicht verschärfen: Drei Punkte, die an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1 liegen, können als Beispiel eines Punktsystems dienen, bei dem der Abstand zwischen je zwei Punkten nicht größer als 1 ist und das sich nicht in einen Kreis einschließen lässt, dessen Radius kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (des gleichseitige Dreieck der Seitenlänge 1 ist ein Beispiel einer Figur vom Durchmesser 1, die nicht in einen Kreis eingeschlossen werden kann, dessen Radius kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist).

17. Wir müssen beweisen, dass ein Kreis vom Radius $\frac{1}{3}$ existiert, der ganz in der vorgegebenen konvexen Figur Φ enthalten ist; mit anderen Worten, es ist zu beweisen, dass innerhalb der Figur Φ ein Punkt O existiert (der Mittelpunkt des gesuchten Kreises), der von allen Stützgeraden der Figur Φ um mindestens $\frac{1}{3}$ entfernt ist.

Existiert nämlich ein solcher Punkt, so wird der Kreis vom Radius $\frac{1}{3}$ um diesen Punkt ganz von der Figur Φ umschlossen; denn der Punkt O ist von jedem Randpunkt A der Figur Φ um nicht weniger als $\frac{1}{3}$ entfernt (der Punkt O hat von der durch A verlaufenden Stützgeraden mindestens den Abstand $\frac{1}{3}$, Abb. 142a).

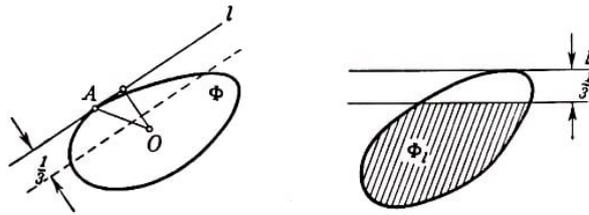


Abb. 142a,b

Alle von einer gewissen Stützgerade l der Figur Φ um nicht weniger als $\frac{1}{3}$ entfernten Punkte bilden eine beschränkte Figur Φ_l , die man erhält, wenn von der Figur Φ ein Streifen der Breite $\frac{1}{3}$ abgetrennt wird, welcher zwischen der Stützgeraden l und einer zu ihr im Abstand $\frac{1}{3}$ gelegenen parallelen Geraden liegt (Abb. 142b).

Nach dem Satz von Helly genügt es zu beweisen, dass sich je drei der Figuren Φ_l schneiden; hieraus folgt bereits, dass ein Punkt O existiert, der allen Figuren Φ_l angehört; diesen Punkt könnten wir als Mittelpunkt des gesuchten Kreises wählen.

Wir legen drei Stützgeraden l , m und n an die Figur Φ . Diese drei Stützgeraden bilden entweder ein Dreieck, das die Figur Φ völlig umschließt (Abb. 143a), oder sie bilden kein derartiges Dreieck (Abb. 143b). Wir bleiben vorerst beim ersten Fall; das von den Geraden l , m und n gebildete Dreieck bezeichnen wir mit T .

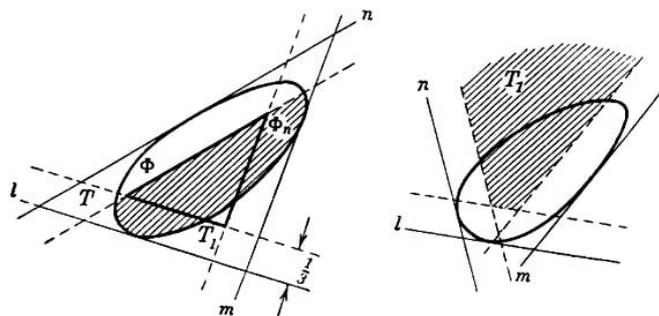


Abb. 143a,b

Da die Breite der Figur Φ gleich 1 ist, kann auch die Breite des Dreiecks T , das der Figur Φ umschrieben ist, nicht kleiner als 1 sein. Hieraus folgt, dass die Höhen des Dreiecks T nicht kleiner als 1 sind; folglich hat der Schnittpunkt der Mittellinien dieses Dreiecks (der von jeder Seite um $\frac{1}{3}$ der entsprechenden Höhe entfernt ist) von jeder der Geraden l , m und n mindestens den Abstand $\frac{1}{3}$.

Trennen wir von unserem Dreieck drei Streifen ab, die aus allen Punkten bestehen, welche von einer der Seiten um weniger als $\frac{1}{3}$ entfernt sind, so verbleibt innerhalb des Dreiecks T noch ein gewisses Dreieck T_1 (im Grenzfall kann T_1 , aus einem einzigen Punkt bestehen; der nachfolgende Beweis ändert sich dabei nicht).

Es bleibt zu beweisen, dass es Punkte der Figur Φ gibt, die von allen Seiten des Dreiecks T um mindestens $\frac{1}{3}$ entfernt sind, dass also die Figur Φ das Dreieck T_1 schneidet; dieser Durchschnitt gehört offenbar allen drei Figuren Φ_l , Φ_m und Φ_n an (siehe Abb. 143a; es ist nur die Figur Φ_n gekennzeichnet).

Wir nehmen an, dass die Figur Φ das Dreieck T_1 nicht schneidet (Abb. 144).

Dann trennen wir diese Figuren durch eine Gerade (siehe Aufgabe 23) und verschieben diese parallel zu sich selbst, bis sie das Dreieck T_1 trifft. Die auf diese Weise erhaltene Gerade r ist entweder einer der Seiten des Dreiecks T parallel oder sie bildet mit zwei

der drei Geraden l , m und n (etwa mit den Geraden l und m) ein Dreieck t , das die Figur Φ völlig umschließt.

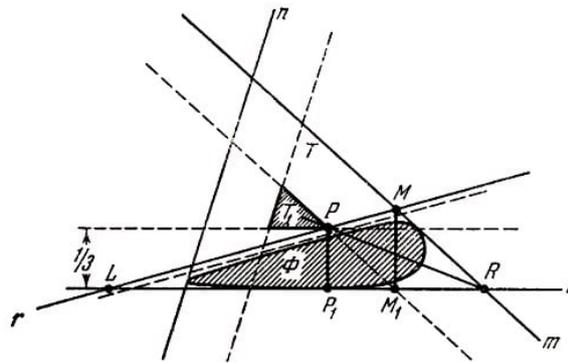


Abb. 144

Wäre r einer der Seiten des Dreiecks T parallel, so müsste die Figur Φ innerhalb eines Streifens der Breite $\frac{1}{3}$ gelegen sein, was nicht möglich ist.

Wenn wir beweisen, dass die Breite des Dreiecks t kleiner als 1 ist, so folgt hieraus, dass die Figur Φ der Breite 1 nicht von diesem Dreieck eingeschlossen werden kann, d.h., der zweite Fall kann ebenfalls nicht eintreten, und daher ist die Annahme, dass Φ das Dreieck T nicht schneidet, falsch.

Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks t mit L , M bzw. R und den auf der Seite LM gelegenen Eckpunkt des Dreiecks T_1 mit P . Da der Punkt P von den Geraden l und m denselben Abstand $\frac{1}{3}$ besitzt, ist die Gerade RP die Winkelhalbierende des Winkels LRM .

Es sei nun $LR \geq MR$ (die Überlegung im Fall $LR \leq MR$ verläuft analog); da $LP : MP = LR : MR$ ist, wird in diesem Fall $LP \geq MP$. Wir fällen von den Punkten M und P die Lote MM_1 und PP_1 auf die Gerade l . Da $PP_1 = \frac{1}{3}$ ist, gilt

$$MM_1 = PP_1 \cdot \frac{LM}{LP} = \frac{1}{3} \frac{LP + PM}{LP} \leq \frac{1}{3} \cdot 2 < 1$$

Wir sehen also, dass die Höhe MM_1 des Dreiecks t kleiner als 1 ist; damit ist der Beweis beendet.

Bilden die Geraden l , m und n kein der Figur Φ umschriebenes Dreieck, so ändert sich der Beweis fast nicht. Die Existenz von Punkten, welche von jeder der Geraden l , m und n um mindestens $\frac{1}{3}$ entfernt sind, ist in diesem Falle leichter zu beweisen als im vorigen; diese Punkte bilden in dem zu untersuchenden Fall eine unbeschränkte konvexe Figur T_1 (siehe Abb. 143b; wenn die Geraden l und m parallel sind, folgt die Existenz solcher Punkte daraus, dass der Abstand zwischen l und m nicht kleiner als 1, also sicher größer als $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ist). Der Rest des Beweises unterscheidet sich nicht von dem oben geführten.

Anmerkung. Die Abschätzung des Satzes von Blaschke lässt sich nicht weiter verschärfen. Ein gleichseitiges Dreieck der Höhe 1 ist ein Beispiel einer konvexen Figur der Breite 1, in der sich kein Kreis unterbringen lässt, dessen Radius größer als $\frac{1}{3}$ ist.

Andere Beweise des Satzes von Blaschke werden in den Lösungen der Aufgaben 19b und 35a gegeben.

18. a) Es seien A_1, A_2, \dots, A_n die gegebenen Punkte. Wir betrachten alle Halbebenen, in denen mehr als zwei Drittel der gegebenen n Punkte gelegen sind (einschließlich der Punkte auf den Begrenzungsgeraden der Halbebenen). Wir zeigen, dass je drei dieser Halbebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es seien P_1, P_2 und P_3 drei derartige Halbebenen; da in jeder der Halbebenen P_1 und P_2 mehr als $\frac{2}{3}n$ der gegebenen Punkte enthalten sind und die Anzahl der Punkte gleich n ist, muss es mehr als $\frac{1}{3}n$ der gegebenen Punkte geben, die den Halbebenen P_1 und P_2 gleichzeitig angehören.

Da ferner die Halbebene P_3 mehr als $\frac{2}{3}n$ der gegebenen Punkte enthält, muss mindestens einer der sowohl in P_1 als auch in P_2 gelegenen Punkte der Halbebene P_3 angehören, d.h., P_1, P_2 und P_3 enthalten mindestens einen gemeinsamen Punkt (dieser Punkt ist sogar einer der vorgegebenen Punkte).

Da jede Halbebene eine konvexe Figur ist, existiert nach dem Satz von Helly ein Punkt O , der allen betrachteten Halbebenen angehört.

Wir beweisen, dass O der gesuchte Punkt ist. Es sei l eine beliebige durch den Punkt O verlaufende Gerade (wir nehmen an, dass der Geraden l eine bestimmte Richtung gegeben sei); P sei irgendeine der Halbebenen, in welche die Ebene durch die Gerade l geteilt wird, etwa die links von l gelegene (Abb. 145).

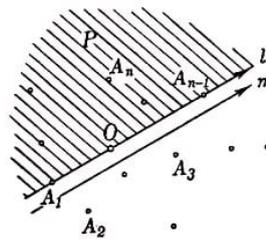


Abb. 145

Wir müssen beweisen, dass in der Halbebene P (einschließlich der Geraden l) nicht weniger als $\frac{n}{3}$ der gegebenen Punkte liegen. Sonst lägen nämlich rechts von der Geraden l mehr als $\frac{2}{3}n$ der gegebenen Punkte, ohne Berücksichtigung der Punkte, welche der Geraden l selbst angehören.

Wir ziehen rechts von l eine zu l parallele, hinreichend nahe an l gelegene Gerade m derart, dass zwischen den Geraden l und m keiner der gegebenen Punkte liegt. Dann sind rechts von m ebensoviel Punkte gelegen wie rechts von l , also mehr als $\frac{2}{3}n$; folglich muss die rechts von m gelegene Halbebene den Punkt O enthalten, was jedoch unmöglich ist, da O auf der Geraden l , also links von m liegt.

Der erhaltene Widerspruch beweist, dass die Halbebene P nicht weniger als $\frac{1}{3}n$ der gegebenen Punkte enthält.

Der aufmerksame Leser könnte eine Lücke in der Lösung dieser Aufgabe bemerkt haben. Die Halbebenen, auf die wir den Satz von Helly anwendeten, sind nämlich unbeschränkte konvexe Figuren, während wir im Text besonders hervorhoben, dass der Satz von Helly für unendlich viele unbeschränkte Figuren falsch sein kann.

Diese Lücke lässt sich jedoch leicht schließen.

Es sei C ein so großer Kreis, dass alle Punkte A_1, A_2, \dots, A_n in ihm liegen. Wir be-

trachten in obigen Überlegungen nicht die Halbebenen, in denen jeweils mehr als $\frac{2}{3}n$ der gegebenen Punkte liegen, sondern nur diejenigen Teile der Halbebenen, die in dem Kreis C enthalten sind. Dann erhalten wir beschränkte konvexe Figuren, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt besitzen; der geführte Beweis ist also tatsächlich korrekt.

b) und c) Diese Aufgaben werden analog der Aufgabe a) gelöst, nur an Stelle der Halbebenen, welche mehr als $\frac{2}{3}n$ der betrachteten Punkte enthalten, werden Halbebenen untersucht, welche Teile der Kurve K enthalten, deren Bogenlänge jeweils größer als $\frac{2}{3}l$ ist, bzw. Halbebenen, welche Teile der Figur Φ enthalten, deren Flächeninhalt jeweils größer als $\frac{2}{3}S$ ist.

Wir überlassen es dem Leser, den vollständigen Beweis dieser Sätze selbständig durchzuführen.

Anmerkung. Die Abschätzungen in den Aufgaben 18a bis 18c lassen sich nicht weiter verschärfen. Drei beliebige Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, sind ein Beispiel eines Punktsystems, zu dem sich kein Punkt O finden lässt derart, dass auf jeder Seite einer beliebigen durch den Punkt O verlaufenden Geraden sich mehr als $\frac{2}{3}n$ der Punkte befinden.

Drei sich nicht schneidende kleine Kreise (bzw. Kreisflächen) um die Eckpunkte irgendeines Dreiecks (Abb. 146) stellen ein Beispiel einer Kurve K (einer Figur Φ) dar, für die sich die Abschätzung in Aufgabe 18b (bzw. 18c) nicht verschärfen lässt.

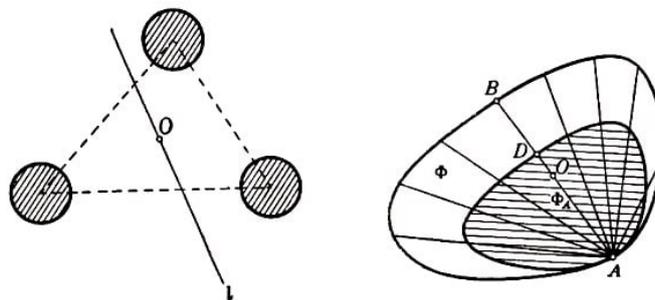


Abb. 146,147

19.a) Es sei Φ eine gegebene konvexe Figur und A ein beliebiger Randpunkt derselben (Abb. 147). Wir legen durch A alle möglichen Sehnen der Figur Φ und tragen auf jeder solchen Sehne AB die Strecke AD ab, deren Länge a der Länge $\frac{2}{3}$ von AB beträgt. Alle auf diese Weise erhaltenen Punkte D bilden den Rand einer gewissen Figur Φ_A , die der Figur Φ ähnlich ist und sich auch in Ähnlichkeitslage zu Φ befindet; das Ähnlichkeitszentrum liegt im Punkt A , das Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{2}{3}$.

Es sei jetzt O der Punkt, dessen Existenz bewiesen werden soll, und AB eine durch diesen Punkt verlaufende Sehne der Figur Φ . Danach Definition des Punktes O die Beziehung $AO \leq \frac{2}{3}AB$ gelten muss, gehört der Punkt O zur Figur Φ_A .

Die Behauptung, dass ein Punkt O der Figur Φ existiert derart, dass auf jeder durch O verlaufenden Sehne die Strecke AO nicht größer als $\frac{2}{3}AB$ ist, wie auch immer der Randpunkt A der Figur Φ gewählt sein mag, ist gleichwertig mit der Behauptung, dass ein Punkt O existiert, der allen Figuren Φ_A angehört, die der Figur Φ ähnlich sind,

deren Ähnlichkeitszentrum in einem gewissen Punkt A des Randes der Figur Φ liegt und deren Ähnlichkeitsverhältnis beträgt.

Da alle Figuren Φ_A konvex sind (offenbar sind alle einer konvexen Figur ähnlichen Figuren konvex), genügt es nach dem Satz von Helly, zu zeigen, dass je drei der betrachteten Figuren einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es seien Φ_A , Φ_B und Φ_C drei der Figur Φ ähnliche Figuren, deren Ähnlichkeitszentrum jeweils in den Randpunkten A , B und C gelegen und deren Ähnlichkeitskoeffizienten gleich λ sind (Abb. 148).

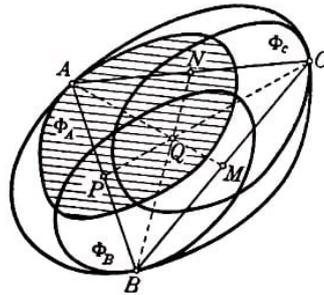


Abb. 148

Wir ziehen die drei Sehnen AB , BC und AC der Figur Φ . Ferner seien M , N und P die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC und Q der Schnittpunkt der Mittellinien AM , BN und CP dieses Dreiecks. Der Punkt M gehört der Figur Φ an (da M auf der Strecke BC liegt und die Figur Φ konvex ist).

Wegen der bekannten Eigenschaft der Mittellinien eines Dreiecks ist die Strecke AQ gleich $\frac{2}{3}AM$; folglich gehört der Punkt Q zur Figur Φ_A . Analog beweist man, dass Q auch den Figuren Φ_B und Φ_C angehört. Damit besitzen Φ_A , Φ_B und Φ_C einen gemeinsamen Punkt. Hieraus folgt die Behauptung der Aufgabe.

Anmerkung. Die Abschätzung in Aufgabe 19a lässt sich nicht weiter verschärfen; man beweist leicht, dass sich innerhalb eines Dreiecks kein Punkt O finden lässt derart, dass beide Strecken jeder durch O verlaufenden Sehne größer als $\frac{1}{3}$ der ganzen Sehne wären.

In der Tat, es sei O ein innerer Punkt des Dreiecks ABC , und A_1 , B_1 , C_1 seien die jeweiligen Schnittpunkte von AO , BO und CO mit den Seiten BC , AC und AB des Dreiecks (Abb. 149a).

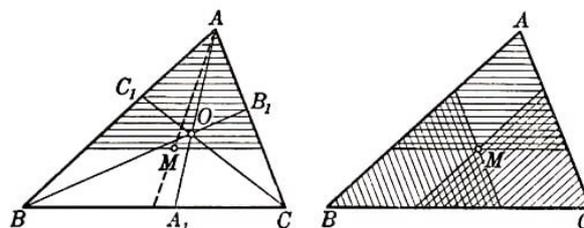


Abb. 149a,b

Ist $A_1 > \frac{1}{3}A_1A$, so liegt O innerhalb (nicht auf dem Rand!) des Dreiecks, das von ABC durch eine zu BC parallele und durch den Schnittpunkt M der Mittellinien verlaufende Gerade abgetrennt wird.

Ist $B_1O > \frac{1}{3}B_1B$, so liegt O genauso innerhalb des Dreiecks, das von ABC durch eine zu AC parallele und durch M verlaufende Gerade abgetrennt wird.

Ist $C_1O > \frac{1}{3}C_1C$, so liegt O innerhalb des Dreiecks, das von ABC durch eine zu AB parallele und durch M verlaufende Gerade abgetrennt wird.

Diese drei Dreiecke besitzen aber keine gemeinsamen inneren Punkte (Abb. 149b); folglich kann kein solcher Punkt O des Dreiecks ABC existieren.

b) Wir nehmen an, die Breite der konvexen Figur Φ sei gleich 1, und beweisen, dass der Punkt O , dessen Existenz in Aufgabe 19a behauptet wird, der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $\frac{1}{3}$ ist, welcher ganz von Φ eingeschlossen wird.

Dazu genügt es zu zeigen, dass der Punkt O von jedem Randpunkt A einen Abstand hat, der nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Wir ziehen durch einen Punkt A eine Stützgerade l der Figur Φ .

Es sei B der Berührungspunkt der Figur Φ mit der zu l parallelen Stützgeraden l_1 der Figur Φ (siehe § 1). Der Abstand zwischen l und l_1 , kann nicht kleiner als die Breite von Φ , also nicht kleiner als 1 sein. Es seien C und C_1 , die Schnittpunkte der Geraden BO mit dem Rand der Figur Φ bzw. mit der Geraden l (Abb. 150).

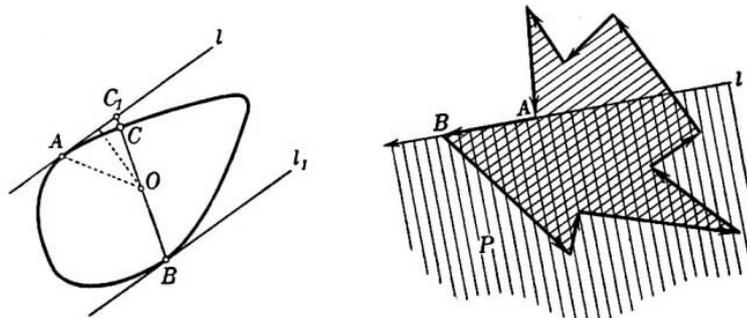


Abb. 150,151

Da $CO \geq \frac{1}{3}CB$ ist (gemäß Definition des Punktes O), gilt

$$C_1O = CO + CC_1 \geq \frac{1}{3}(CB + 3CC_1) \geq \frac{1}{3}C_1B$$

folglich ist der Abstand des Punktes O von der Geraden l nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ des Abstandes zwischen den Geraden l und l_1 , also nicht kleiner als $\frac{1}{3}$. Hieraus ergibt sich, dass auch der Abstand zwischen den Punkten O und A nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ sein kann.

20. Es sei K das gegebene Vieleck. Auf seiner Berandung sei irgendein Umlaufsinn ausgezeichnet, etwa "entgegen dem Uhrzeiger", d.h., bei Bewegung auf dem Rand in dieser Richtung liegen rechts in der Nähe jeder Seite äußere Punkte und links innere Punkte des Vielecks K (Abb. 151).

Es sei AB eine auf einer Geraden l gelegene Seite des Vielecks. Wir nehmen an, l habe die gleiche Richtung wie die Seite AB des Vielecks K , und bezeichnen die links von l gelegene Halbebene mit P . Wir nennen P die linke Halbebene des Vielecks K bezüglich der Seite AB .

Jetzt beweisen wir, dass ein Punkt O existiert, der den linken Halbebenen bezüglich aller Seiten des Vielecks K angehört. (Wie im folgenden gezeigt wird, genügt dieser Punkt den Bedingungen des Satzes.)

Nach dem Satz von Helly genügt es zu beweisen, dass je drei der linken Halbebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Es seien P_1, P_2, P_3 drei linke Halbebenen in Bezug auf drei beliebige Seiten des Vielecks K , und A_1, A_2, A_3 beliebige Punkte, welche auf den entsprechenden Geraden gelegen sind (Abb. 152). Nach der Voraussetzung des Satzes existiert ein Punkt M derart, dass die Strecken A_1M, A_2M und A_3M ganz im Innern des Vielecks K liegen.

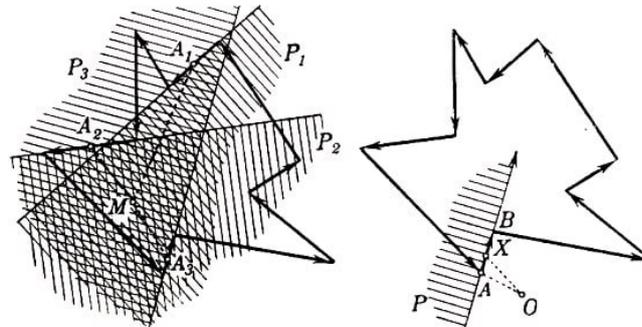


Abb. 152,153

Hieraus folgt, dass bei Bewegung auf den erwähnten drei Seiten der Punkt M auf derselben Seite liegt wie die inneren Punkte des Vielecks K , d. h. links. Somit liegt der Punkt M in allen drei linken Halbebenen P_1, P_2, P_3 .

Es sei jetzt O ein gemeinsamer Punkt aller linken Halbebenen des Vielecks K ; wir beweisen, dass O der gesuchte Punkt ist. Zunächst zeigen wir, dass O innerhalb X liegt.

Nehmen wir an, O liege außerhalb des Vielecks K , und X sei der dem Punkt O nächstgelegene Randpunkt des Vielecks K (oder einer der nächstgelegenen Randpunkte; Abb. 153). Dann liegt die Strecke OX ganz außerhalb K . Sollte der Punkt X ein Eckpunkt des Vielecks K sein (der mit A zusammenfällt), so ließe sich auf einer der beiden durch diesen Eckpunkt verlaufenden Seiten (in genügender Nähe von X) ein Punkt auswählen, der kein Eckpunkt des Vielecks ist derart, dass die ganze Verbindungsstrecke dieses Punktes mit O außerhalb des Dreiecks gelegen ist.

Liegt O außerhalb K , so lässt sich daher sicher ein Punkt X finden, der kein Eckpunkt ist, so dass die Strecke OX außerhalb K liegt. Ist nun aber AB die Seite, auf welcher der Punkt X liegt, so befindet sich O auf derselben Seite von AB wie die äußeren Punkte des Vielecks, also rechts, im Widerspruch dazu, dass O allen linken Halbebenen des Vielecks K und insbesondere der linken Halbebene P bezüglich der Seite AB angehören soll.

Der Punkt O liegt daher innerhalb K . Es bleibt zu beweisen, dass die ganze Strecke OC innerhalb K liegt, wenn C ein beliebiger Punkt des Vielecks K ist.

Nehmen wir das Gegenteil an und suchen wir einen Punkt M auf der Strecke OC , der außerhalb des Vielecks K liegt. P sei der am nächsten bei M gelegene Schnittpunkt der Strecke CM mit dem Rand des Vielecks K (Abb. 154a).

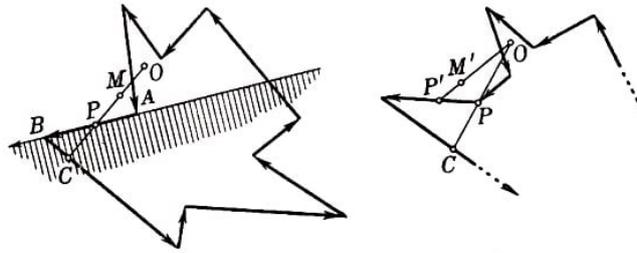


Abb. 154a,b

Ist P kein Eckpunkt des Vielecks K und AB die Seite, auf welcher der Punkt P liegt, so ist der Punkt O auf derselben Seite von AB gelegen wie M , d.h. auf derselben Seite, auf der die äußeren Punkte des Vielecks liegen, also auf der rechten. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass der Punkt O allen linken Halbebenen des Vielecks K angehört.

Ist P ein Eckpunkt von K , so lässt sich auf jeder der durch P verlaufenden Seiten ein (hinreichend nahe an P gelegener) Punkt P' finden, der kein Eckpunkt des Vielecks K ist, so dass es auf der Strecke OP' einen außerhalb des Vielecks K gelegenen Punkt M' gibt (Abb. 154b). Im weiteren wird die oben durchgeführte Überlegung wiederholt.

Die Verbindungsstrecke eines beliebigen Punktes C des Vielecks K mit dem Punkt O liegt damit ganz innerhalb K , was zu beweisen war.⁷³

Anmerkung. Der Satz von Krasnosielski gilt nicht nur für Vielecke, sondern auch für beliebige ebene Figuren. Der Beweis für den allgemeinen Fall unterscheidet sich im Grunde nicht von dem eben geführten.⁷⁴

21.a) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.

Nehmen wir an, wir hätten schon bewiesen, dass je k der Halbebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen; in diesem Falle zeigen wir, dass die $(k + 1)$ -te Halbebene Π den Durchschnitt Φ der ersten k Halbebenen schneidet, d.h. mit anderen Worten, auch die $k + 1$ Halbebenen haben einen gemeinsamen Punkt.

Die Figur Φ ist nach Aufgabe 1 des § 1 konvex; sie ist entweder ein (eventuell unbeschränktes) konvexes Vieleck, eine Strecke (bzw. ein Strahl oder eine ganze Gerade) oder ein Punkt. Wir behandeln alle diese Fälle gesondert.

1. Es sei Φ ein konvexes Vieleck (Abb. 155a). Wir nehmen an, dass Π dieses Vieleck nicht schneidet. Dann sei A der der Halbebene Π nächstgelegene Eckpunkt des Vielecks Φ (oder einer dieser Eckpunkte, falls es mehrere geben sollte).

In diesem Falle sind die durch den Eckpunkt A gehenden Seiten des Vielecks Φ die Ränder zweier unserer Halbebenen Π' und Π'' . Aus Abb. 155a ist ersichtlich, dass die Halbebenen Π , Π' und Π'' im Gegensatz zur Voraussetzung keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Daher muss Π unbedingt Φ schneiden, was zu beweisen war.

⁷³Bei diesem Beweis benutzen wir den Satz von Helly für den Fall, dass die untersuchten konvexen Figuren (Halbebenen) unbeschränkt sind; diese Tatsache stört den Beweis jedoch nicht, da im Falle endlich vieler Figuren ihre Beschränktheit für die Gültigkeit des Satzes von Helly nicht wesentlich ist.

⁷⁴Da es unendlich viele "linke Halbebenen" gibt, darf der Satz von Helly (wegen der Unbeschränktheit der Halbebenen) nicht ohne weiteres angewendet werden. Daher greift man beim Beweis zu dem Verfahren, das wir schon bei der Lösung der Aufgabe 18 benutzt haben.

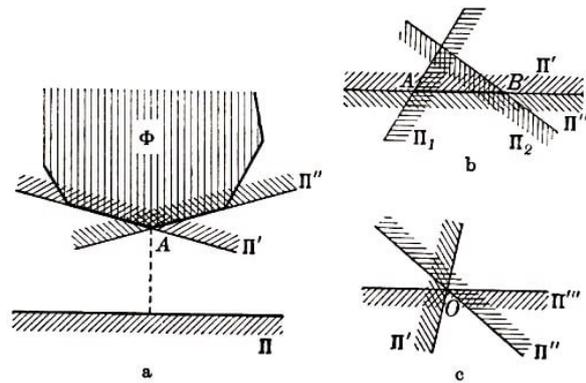


Abb. 155

2. Es sei Φ eine Strecke AB einer Geraden l (Abb. 155b). In diesem Falle gibt es unter den ersten k Halbebenen zwei Halbebenen Π' und Π'' , welche die Gerade l von zwei verschiedenen Seiten begrenzen. Außerdem gibt es unter ihnen eine Halbebene Π_1 , welche die Gerade l im Punkte A schneidet und den Punkt B enthält, sowie eine Halbebene Π_2 , die den Punkt A enthält und die Gerade l im Punkt B schneidet.

Da die Halbebenen Π' , Π'' und Π einen gemeinsamen Punkt besitzen, ergibt sich, dass Π die Gerade l schneidet. Würde jetzt die Halbebene Π mit der Geraden l einen Strahl gemeinsam haben, der außerhalb der Strecke AB hinter dem Punkt A läge, so dürften, wie man sich leicht überzeugt, entweder die drei Halbebenen Π , Π_1 und Π' oder die drei Halbebenen Π , Π_2 und Π'' keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Ebenso beweist man, dass Π von der Geraden l keinen außerhalb der Strecke AB hinter dem Punkt B gelegenen Strahl abschneiden kann. Folglich schneidet Π die Strecke AB , was zu beweisen war.

Analog wird der Beweis in den Fällen geführt, in denen Φ ein Strahl oder eine ganze Gerade ist.

3. Es sei Φ ein Punkt O . In diesem Falle gibt es unter den ersten k Halbebenen drei Halbebenen Π' , Π'' und Π''' , die sich im Punkt O schneiden und deren Lage in Abb. 155c dargestellt ist. Enthielte die Halbebene Π nicht den Punkt O , so könnten, wie man leicht zeigt, drei Halbebenen Π , Π' und Π'' oder Π , Π' und Π''' oder Π , Π'' und Π''' keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aus dem Bewiesenen folgt die Behauptung der Aufgabe mit Hilfe der üblichen Überlegungen "durch Induktion".

b) Gegeben seien n Vielecke $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, von denen je drei einen gemeinsamen Punkt haben. Nach dem Ergebnis der Aufgabe 2 des § 1 ist jedes dieser Vielecke der Durchschnitt einer gewissen Anzahl von Halbebenen. Wir behaupten, dass diese sämtlichen Halbebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Entsprechen nämlich drei Halbebenen Π , Π' und Π'' drei verschiedenen Vielecken, so enthält der Durchschnitt der drei Halbebenen Π , Π' und Π'' den Durchschnitt dieser drei Vielecke, welcher nach Voraussetzung existiert.

Wenn die Ebenen Π , Π' und Π'' zwei Vielecken entsprechen (zwei von ihnen zu den Halbebenen gehören, deren Durchschnitt ein Vieleck ergibt) oder wenn sie zu einem einzigen Vieleck gehören, so haben diese Halbebenen ebenfalls gemeinsame Punkte (im

ersten Fall enthält der Durchschnitt dieser Halbebenen den Durchschnitt von zweien der untersuchten Vielecke, im zweiten Fall ein ganzes Vieleck).

Mit Hilfe des Resultats der Aufgabe 21a folgt hieraus, dass alle unsere Halbebenen mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen, der natürlich allen Vielecken angehört. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen.

22. Wir bezeichnen die linken Endpunkte der gegebenen Strecken mit A_1, A_2, \dots, A_n , die rechten Endpunkte mit B_1, B_2, \dots, B_n . Da sich die Strecken A_1B_1 und A_2B_2 schneiden, ergibt sich, dass der linke Endpunkt A_1 der ersten Strecke nicht rechts vom Endpunkt B_2 der zweiten Strecke liegen kann, d. h., entweder liegt A_1 links von B_2 (Abb. 156a), oder A_1 fällt mit B_2 zusammen (im letzten Fall ist dieser Punkt der einzige gemeinsame Punkt der Strecken A_1B_1 und A_2B_2 ; Abb. 156b).

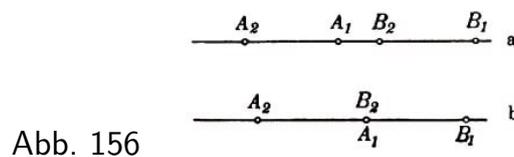


Abb. 156

Daher liegt jeder der linken Endpunkte A_1, A_2, \dots, A_n links von allen rechten Endpunkten B_1, B_2, \dots, B_n . Den am weitesten rechts gelegenen der linken Endpunkte der Strecken bezeichnen wir mit A_0 und den am weitesten links gelegenen der rechten Endpunkte mit B_0 .

Fällt A_0 mit B_0 zusammen, so ist $A_0 = B_0$ der einzige Punkt, der allen Strecken $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ angehört.

Ist der Punkt A_0 links von B_0 gelegen, so ist die ganze Strecke A_0B_0 in sämtlichen gegebenen Strecken enthalten.

23. Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei beschränkte konvexe Figuren, die keine gemeinsamen Punkte besitzen; A und B seien zwei ihrer Punkte, deren Abstand einen kleinsten Wert hat (Abb. 157).⁷⁵

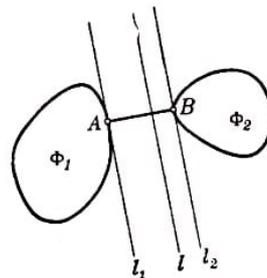


Abb. 157

Durch die Punkte A und B legen wir senkrecht zur Strecke AB zwei Geraden l_1 und l_2 und beweisen, dass diese Geraden jeweils Stützgeraden der Figuren Φ_1 bzw. Φ_2 sind.

Nehmen wir an, l_1 sei keine Stützgerade der Figur Φ_1 . Dann befindet sich auf derselben Seite von l_1 wie der Punkt B ein zur Figur Φ_1 gehörender Punkt P ; infolge der Konvexität von Φ_1 gehört dann auch die ganze Strecke AP der Figur Φ_1 an.

⁷⁵Siehe Anhang I, Aufgabe 7.

Auf der Strecke AP gibt es einen Punkt, dessen Abstand vom Punkte B kleiner als AB ist. Solch ein Punkt ist nämlich entweder der Fußpunkt Q des von B auf die Gerade AP gefällten Lotes, wenn dieser auf der Strecke AP liegt (Abb. 158a), oder der Punkt P selbst, wenn der Fußpunkt des Lotes auf der Verlängerung von AP hinter dem Punkt P liegt (Abb. 158b; da der Winkel PAB spitz ist, ergibt sich, dass der Fußpunkt des von B auf AP gefällten Lotes nicht hinter dem Punkt A auf der Verlängerung von AP liegen kann).

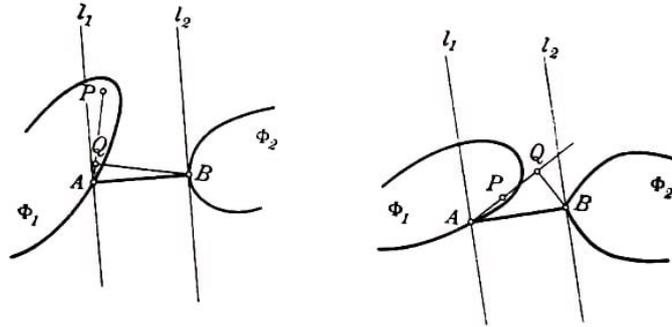


Abb. 158

Das steht jedoch im Widerspruch dazu, dass AB der kleinste Abstand zwischen Punkten der Figuren Φ_1 und Φ_2 sein sollte.

Analog beweist man die Behauptung für l_2 .

Somit sind l_1 bzw. l_2 Stützgeraden der Figuren Φ_1 bzw. Φ_2 , woraus unmittelbar folgt, dass jede Gerade l , die zu den Geraden l_1 und l_2 parallel ist und zwischen ihnen liegt, die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Anmerkung. Der Beweis bleibt auch dann richtig, wenn nur eine der Figuren Φ_1 und Φ_2 beschränkt ist. Sind jedoch Φ_1 und Φ_2 unbeschränkte konvexe Figuren, so gilt die Behauptung nicht mehr.

Zwischen Figuren, die sich ins Unendliche erstrecken, braucht es nämlich keine kürzeste Entfernung zu geben; denn während beliebige Nähe von Punkten bei beschränkten Figuren bedeutet, dass sie sich schneiden, kann es bei sich nicht schneidenden unbeschränkten Figuren Φ_1 und Φ_2 beliebig nahe beieinander gelegene Punkte geben (Abb. 159).

Man sieht leicht, dass sich die in Abb. 159 dargestellten konvexen Figuren nicht durch eine Gerade trennen lassen.

24. Wir bezeichnen die gegebenen Figuren mit $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ und die konvexe Figur, welche der Durchschnitt von Φ_1, Φ_2 und Φ_3 ist, mit Φ (siehe Aufgabe 1 des § 1). Wir haben zu beweisen, dass die Figuren Φ und Φ_4 einen gemeinsamen Punkt besitzen.

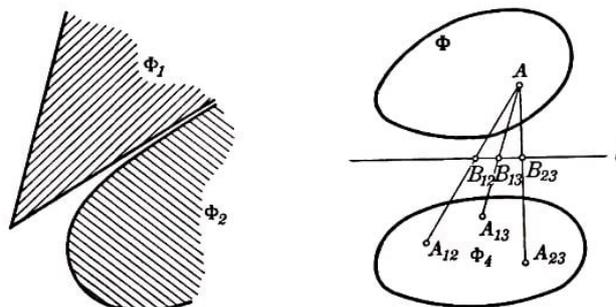


Abb. 159,160

Nehmen wir an, Φ und Φ_4 würden sich nicht schneiden. Dann gibt es eine Gerade l derart, dass die Figuren Φ und Φ_4 auf verschiedenen Seiten von ihr liegen (Aufgabe 23). Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, die Gerade l liege horizontal, Φ liege oberhalb und Φ_4 unterhalb von l (Abb. 160).

Da sich je drei unserer Figuren schneiden, existiert ein Punkt A_{12} , der den Figuren Φ_1 , Φ_2 und Φ_4 angehört, ein Punkt A_{13} , der den Figuren Φ_1 , Φ_3 und Φ_4 angehört, sowie ein Punkt A_{23} , der zu den Figuren Φ_2 , Φ_3 und Φ_4 gehört. Alle diese Punkte liegen unterhalb der Geraden l .

Es sei A ein beliebiger Punkt der Figur Φ . Da die Figuren Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 konvex sind, ist die Strecke $A_{12}A$ im Durchschnitt der Figuren Φ_1 und Φ_2 , die Strecke $A_{13}A$ im Durchschnitt der Figuren Φ_1 und Φ_3 und die Strecke $A_{23}A$ im Durchschnitt der Figuren Φ_2 und Φ_3 enthalten.

Insbesondere gehören die Punkte B_{12} , B_{13} und B_{23} (die Schnittpunkte dieser Strecken mit der Geraden l) den erwähnten Figuren an. Somit gibt es auf der Geraden l Punkte, die zu je zweien der drei Figuren Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 gehören.

Beim Schnitt der Geraden l mit den Figuren Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 ergeben sich daher drei Strecken, von denen je zwei einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Hieraus folgt (Aufgabe 22), dass ein gewisser Punkt O der Geraden l allen drei untersuchten Strecken angehört, d.h. in allen drei Figuren Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 enthalten ist. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass die Gerade l keinen Punkt mit dem Durchschnitt Φ der Figuren Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 gemeinsam hat. Die Figuren Φ und Φ_4 schneiden sich also, und der Beweis ist abgeschlossen.

25. Wir geben nur die Etappen des Beweises an, der dem Beweis des Satzes von Helly für die Ebene, wie er in den Lösungen der Aufgaben 22-24 dargelegt wurde, analog ist.

Zunächst beweisen wir, dass je zwei sich nicht schneidende beschränkte konvexe Körper durch eine Ebene getrennt werden können, und zeigen dann, dass fünf beschränkte konvexe Körper Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 und Φ_5 einen gemeinsamen Punkt haben, wenn je vier dieser Körper einen gemeinsamen Punkt besitzen. Den Beweis führen wir indirekt.

Wir nehmen an, der Körper Φ_5 schneide den Durchschnitt Φ der Körper Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ_4 nicht, und ziehen eine Ebene L , welche die Körper Φ und Φ_5 trennt. Es erweist sich, dass die vier ebenen beschränkten konvexen Figuren, die beim Schnitt der Körper Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ_4 mit der Ebene L entstehen, den Voraussetzungen des Satzes von Helly genügen.

Hieraus folgt, dass Φ mit der Ebene L einen gemeinsamen Punkt haben muss, also ein Widerspruch. Den letzten Schritt des Beweises führt man analog zur Lösung der Aufgabe 14, indem man durch Induktion von Aufgabe 13 zum allgemeinen Satz von Helly übergeht.

Anmerkung. Besitzen je vier von fünf gegebenen konvexen Körpern Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ_4 einen gemeinsamen Punkt, so kann man auch mit Hilfe von Überlegungen, die denen der Lösung von Aufgabe 13 analog sind, beweisen, dass alle fünf Körper einen gemeinsamen Punkt haben.

Dieser Beweisgang des Satzes von Helly für den Raum ist insofern zweckmäßiger als der oben skizzierte, als hierbei nicht die Beschränktheit der Figuren vorausgesetzt zu werden braucht.

Es erweist sich jedoch, dass diese Beweismethode für den Fall räumlicher Körper viel komplizierter ist als der Beweis des entsprechenden Satzes für ebene Figuren, während der oben skizzierte Beweis genau dem Beweis des Satzes von Helly für ebene Figuren nachgebildet ist und keine zusätzlichen Schwierigkeiten in sich birgt.

Definieren wir analog zur Lösung der Aufgabe 13 die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 und A_4 , wobei A_0 der gemeinsame Punkt der Körper $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ ist, usw., so haben wir nicht nur zwei Möglichkeiten für die Lage der fünf Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 und A_4 zu untersuchen, sondern bedeutend mehr. Auch hier gelingt es jedoch zu zeigen, dass in allen Fällen ein Punkt existiert, der allen fünf Körpern angehört.

Wir überlassen es dem Leser, den entsprechenden Beweis vollständig durchzuführen.

26. Wir geben hier nur die Formulierungen der Sätze an, die den Sätzen der Aufgaben 16-19a analog sind. Die Beweise dieser Sätze sind den Beweisen zu den Aufgaben 16-19a ähnlich, und wir überlassen es dem Leser, sie selbständig zu führen (wir weisen darauf hin, dass ein dem Satz von Blaschke analoger Satz für den räumlichen Fall nicht aus dem der Aufgabe 19a entsprechenden Satz gefolgert werden kann).

Analogon zum Satz von Jung.

Im dreidimensionalen Raum kann jeder Körper vom Durchmesser⁷⁶ 1 in einer Kugel vom Radius $\frac{\sqrt{6}}{4}$ eingeschlossen werden ($\frac{\sqrt{6}}{4}$ ist der Radius der einem regelmäßigen Tetraeder der Seitenlänge 1 umschriebenen Kugel).

Analogon zum Satz von Blaschke.

Innerhalb jedes im dreidimensionalen Raum gelegenen konvexen Körpers der Breite⁷⁷ 1 lässt sich eine Kugel vom Durchmesser $\frac{1}{\sqrt{3}}$ unterbringen.

Analogon zur Aufgabe 18.a)

Sind n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n im Raum gegeben, so existiert stets ein Punkt O derart, dass sich auf jeder Seite einer beliebigen durch den Punkt O gehenden Ebene mindestens $\frac{1}{4}$ der gegebenen Punkte befinden.

b), c) Ist im Raume eine beliebige Fläche C (ein beliebiger Körper P) gegeben, so existiert stets ein Punkt O derart, dass die Fläche derjenigen Teile von C (das Volumen derjenigen Teile von P), die sich auf den verschiedenen Seiten einer beliebigen durch O führenden Ebene L befinden, nicht weniger als $\frac{1}{4}$ der Fläche von C (des Volumens von P) ausmacht.

Analogon zur Aufgabe 19a.

Innerhalb jedes beschränkten konvexen Körpers P gibt es einen Punkt O derart, dass jede durch den Punkt O führende Sehne AB des Körpers P von dem Punkt O in zwei

⁷⁶Als Durchmesser eines Körpers bezeichnet man den größten Abstand zwischen zweien seiner Punkte.

⁷⁷Als Breite eines konvexen Körpers im Raum bezeichnet man den kleinsten Abstand zwischen Paaren paralleler Stützebenen.

Strecken AO und OB geteilt wird, deren Länge jeweils nicht kleiner als $\frac{1}{4}$ der Länge von AB ist.

Die Abschätzungen in diesen Sätzen lassen sich nicht verschärfen.

27. Wir wählen auf der Geraden l_0 eine Richtung aus und legen parallel zur gewählten Richtung von l_0 , eine Gerade l' derart, dass sich die ganze Figur Φ links von ihr befindet (Abb. 161). Nunmehr verschieben wir die Gerade l' parallel zu sich selbst nach links, bis sie eine Lage l'' einnimmt und die ganze Figur Φ rechts von l'' gelegen ist.

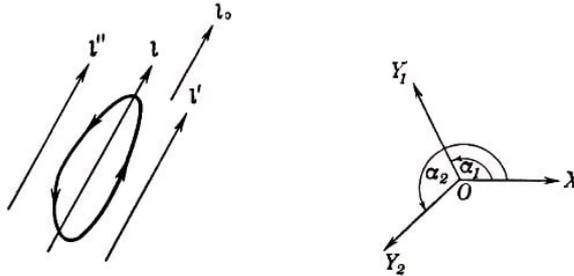


Abb. 161,162

Dabei ist der Inhalt des Teils der Figur Φ , der rechts von der verschobenen Geraden l liegt, eine stetige Funktion des Abstandes dieser Geraden von l' . Ist der Abstand Null (fällt l mit l' zusammen), so ist der Funktionswert gleich Null; fällt l mit l'' zusammen, so ist der Funktionswert gleich dem Flächeninhalt von Φ .

Folglich gibt es zwischen l' und l'' eine Gerade l , die zu l' und l'' parallel ist (d.h. parallel zu l_0 liegt), so dass sich rechts von l genau die Hälfte (des Flächeninhalts) der Figur Φ befindet, die Gerade l also den Flächeninhalt von Φ halbiert. Offenbar ist für eine konvexe Figur und allgemein für jede Figur, die aus einem Stück besteht, die ermittelte Gerade eindeutig.

28.a) Wir wählen in der Ebene eine Richtung OX aus, die als Anfangsstrahl für die Winkelmessung dienen soll. Jede Richtung OY legen wir durch den Winkel α fest, den sie mit der Richtung OX bildet (genauer durch den Winkel α , um welchen man die Richtung OX entgegen dem Uhrzeigersinn drehen muss, damit er mit der Richtung von OY zusammenfällt; hierbei kann α jeden Wert von 0 bis 360° annehmen; Abb. 162).

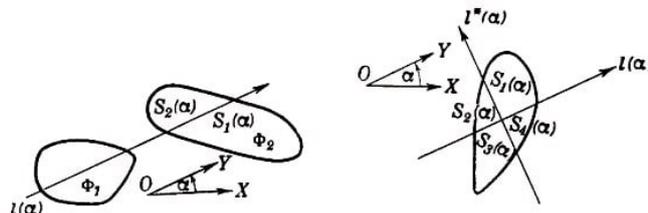


Abb. 163

Zu jedem Winkel α existiert eindeutig eine Gerade $l(\alpha)$, die den Flächeninhalt der Figur Φ_1 halbiert und der Richtung OY parallel ist, welche mit dem Anfangsstrahl OX den Winkel α bildet (Abb. 163a; siehe Lösung der Aufgabe 27).

Diese Gerade zerlege die Figur Φ_2 in zwei ungleiche Teile. Es sei etwa der Flächeninhalt $S_1(\alpha)$ des rechts von $l(\alpha)$ gelegenen Teils der Figur Φ_2 größer als der Flächeninhalt $S_2(\alpha)$ des links von $l(\alpha)$ gelegenen Teils der Figur Φ_2 , d.h.

$$S_1(\alpha) - S_2(\alpha) > 0$$

Wir ersetzen den Winkel α durch $\alpha + 180^\circ$; offenbar fällt die Gerade $l(\alpha + 180^\circ)$ mit $l(\alpha)$ zusammen und unterscheidet sich von ihr nur durch ihre Richtung. Hieraus folgt

$$S_1(\alpha + 180^\circ) = S_2(\alpha) \quad , \quad S_2(\alpha + 180^\circ) = S_1(\alpha)$$

$$S_1(\alpha + 180^\circ) - S_2(\alpha + 180^\circ) = S_2(\alpha) - S_1(\alpha) < 0$$

Beim Anwachsen von α bis auf $\alpha + 180^\circ$ wechselt daher die Differenz $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ das Vorzeichen. Da $S_1(\alpha)$ und $S_2(\alpha)$ offenbar stetige Funktionen des Winkels α sind und folglich auch $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist, muss zwischen α und $\alpha + 180^\circ$ ein Winkel α_0 existieren, für den

$$S_1(\alpha_0) - S_2(\alpha_0) = 0$$

gilt, für den die Gerade $l(\alpha_0)$ also gleichzeitig die Figur Φ_1 und die Figur Φ_2 halbiert.

b) Ebenso wie in der Lösung der Aufgabe 28a wählen wir eine Richtung OX als Anfangsstrahl für die Winkelmessung. Zu jeder Richtung OY , die durch den Winkel α bestimmt wird, den diese Richtung mit dem Anfangsstrahl OX bildet, gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade $l(\alpha)$, welche zu OY parallel ist und den Flächeninhalt der Figur Φ halbiert (siehe Aufgabe 27).

Ebenso gibt es eine zu OY senkrechte Gerade $l^*(\alpha)$, die ebenfalls die Figur Φ halbiert.

Wir bezeichnen die vier Teile, in welche die Figur Φ durch die Geraden $l(\alpha)$ und $l^*(\alpha)$ zerlegt wird (und deren Flächeninhalte Funktionen von α sind) mit $S_1(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, $S_3(\alpha)$ und $S_4(\alpha)$ (Abb. 163b).

Nach Konstruktion gilt

$$S_1(\alpha) + S_2(\alpha) = S_3(\alpha) + S_4(\alpha) \quad \text{und} \quad S_1(\alpha) + S_4(\alpha) = S_2(\alpha) + S_3(\alpha)$$

hieraus ergibt sich sofort

$$S_2(\alpha) = S_4(\alpha) \quad , \quad S_1(\alpha) = S_3(\alpha)$$

Damit die Flächeninhalte der vier Teile, in welche die Figur Φ von den Geraden $l(\alpha)$ und $l^*(\alpha)$ zerlegt wird, gleich groß sind, muss auch noch die Gleichung $S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$ erfüllt sein.

Nehmen wir an, für irgendeinen festen Winkel α (Abb. 163b) sei $S_1(\alpha) > S_2(\alpha)$, also $S_1(\alpha) - S_2(\alpha) > 0$ (der Beweis verlief im Falle $S_1(\alpha) - S_2(\alpha) < 0$ völlig analog). Ersetzt man den Winkel α durch $\alpha + 90^\circ$ (d.h. dreht man die Geraden $l(\alpha)$ und $l^*(\alpha)$ entgegen dem Uhrzeigersinn um 90°), so fällt $l(\alpha + 90^\circ)$ mit $l^*(\alpha)$ zusammen, und $l^*(\alpha + 90^\circ)$ unterscheidet sich von $l(\alpha)$ nur durch die Richtung.

Dabei fällt $S_1(\alpha + 90^\circ)$ mit $S_2(\alpha)$ und $S_2(\alpha + 90^\circ)$ mit $S_3(\alpha) = S_1(\alpha)$ zusammen; folglich gilt

$$S_1(\alpha + 90^\circ) - S_2(\alpha + 90^\circ) = S_2(\alpha) - S_1(\alpha) < 0$$

Da aber $S_1(\alpha)$ und $S_2(\alpha)$ offenbar stetige Funktionen des Winkels α sind, ist folglich auch ihre Differenz $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ eine stetige Funktion von α .

Zwischen α und $\alpha + 90^\circ$ muss also ein Wert α_0 existieren, so dass

$$S_1(\alpha_0) - S_2(\alpha_0) = 0, \quad \text{d.h.} \quad S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$$

Somit zerlegen die aufeinander senkrecht stehenden Geraden $l(\alpha_0)$ und $l^*(\alpha_0)$ die Figur Φ in vier gleichgroße Teile.

Anmerkung. Man sieht leicht, dass in den Voraussetzungen der Aufgaben 28a und 28b nicht gefordert zu werden braucht, dass die betrachteten Figuren konvex sind. Wir empfehlen dem Leser, selbständig festzustellen, wie die Beweise in diesem allgemeinen Falle ergänzt werden müssen.

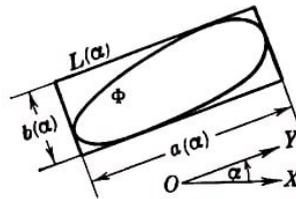


Abb. 164

29. Jeder konvexen Figur Φ lässt sich ein eindeutig bestimmtes Rechteck $L(\alpha)$ umschreiben, dessen eine Seite $a(\alpha)$ eine gegebene Richtung OY hat, die durch den Winkel α , den die Richtung OY mit einem festen Anfangsstrahl OX bildet, bestimmt wird (Abb. 164).

Wir bezeichnen die zu $a(\alpha)$ senkrechte Rechteckseite mit $b(\alpha)$ und nehmen an, dass $a(\alpha) \neq b(\alpha)$ ist, etwa

$$a(\alpha) > b(\alpha) \quad \text{d.h.} \quad a(\alpha) - b(\alpha) > 0$$

Ersetzt man den Winkel α durch $\alpha + 90^\circ$, so bleibt das umschriebene Rechteck unverändert. Seine Seite $a(\alpha + 90^\circ)$ fällt dann mit $b(\alpha)$ zusammen, und $b(\alpha + 90^\circ)$ fällt bis auf die Richtung mit $a(\alpha)$ zusammen. Dabei ist

$$a(\alpha + 90^\circ) - b(\alpha + 90^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) < 0$$

Da die Differenz $a(\alpha) - b(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist⁷⁸, muss zwischen α und $\alpha + 90^\circ$ ein Winkel α_0 existieren, für den

$$a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad a(\alpha_0) = b(\alpha_0)$$

gilt.

⁷⁸Wir gehen hier nicht näher auf den Beweis ein, dass die Differenz $a(\alpha) - b(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist, da das geometrisch trivial ist. Dem genauen Beweis liegt folgender Gedanke zugrunde.

Man untersuche ein der Figur Φ umschriebenes Rechteck, dessen eine Seite mit dem Anfangsstrahl OX den Winkel α einschließt. Dieses Rechteck bezeichnen wir mit $L(\alpha)$. Ist $\delta\alpha$ (die Änderung des Winkels α hinreichend klein, so liegen, wie man leicht beweist, die Punkte, in denen die konvexe Figur Φ die Seiten des der Figur Φ umschriebenen Rechtecks $L(\alpha + \Delta\alpha)$ berührt, nahe bei den Punkten, in denen die entsprechenden Seiten des Rechtecks $L(\alpha)$ die Figur Φ berühren (haben die Seiten des Rechtecks $L(\alpha)$ mit dem Rand der Figur Φ eine ganze Strecke gemeinsam, so liegt einer der Berührungspunkte - einer der Endpunkte der Strecke - in der Nähe des Berührungspunktes der entsprechenden Seiten von $L(\alpha + \Delta\alpha)$ mit der Figur Φ).

Somit ist das der Figur Φ umbeschriebene Rechteck $L(\alpha_0)$, dessen eine Seite mit dem Anfangsstrahl OX den Winkel α_0 bildet, ein Quadrat.

30. a) Jeder konvexen Kurve K lässt sich ein eindeutig bestimmtes gleichwinkliges Sechseck umbeschreiben (ein Sechseck, dessen sämtliche Winkel gleich 120° sind), dessen eine Seite eine gegebene Richtung OY hat, welche durch den Winkel α zwischen der Richtung OY und dem Anfangsstrahl OX bestimmt wird (Abb. 166).

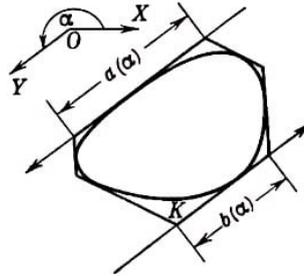


Abb. 166

Wir bezeichnen die Sechseckseite mit der Richtung OY durch $a(\alpha)$ und die ihr gegenüberliegende Seite mit $b(\alpha)$ und nehmen an, es sei $a(\alpha) \neq b(\alpha)$. Es sei etwa

$$a(\alpha) > b(\alpha) \quad \text{d.h.} \quad a(\alpha) - b(\alpha) > 0$$

Bei Ersetzung des Winkels α durch $\alpha + 180^\circ$ bleibt das umbeschriebene Sechseck unverändert. Dabei fallen die Seiten $a(\alpha + 180^\circ)$ mit $b(\alpha)$ und $b(\alpha + 180^\circ)$ mit $a(\alpha)$ zusammen. Somit ergibt sich

$$a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) < 0$$

Da die Differenz $a(\alpha) - b(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist⁷⁹, muss zwischen α und $\alpha + 180^\circ$ ein Winkel α_0 existieren, für den

$$a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad a(\alpha_0) = b(\alpha_0)$$

gilt.

Daher besitzt das Sechseck $L(\alpha_0)$ ein Paar gleicher gegenüberliegender Seiten.

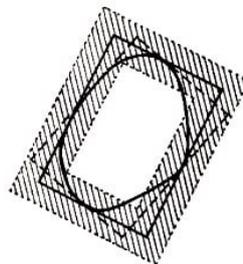


Abb. 165

Hieraus ergibt sich, dass sich die Lage des Rechtecks $L(\alpha + \Delta\alpha)$ für kleine $\Delta\alpha$ nur wenig von der des Rechtecks $L(\alpha)$ unterscheidet; das Rechteck $L(\alpha + \Delta\alpha)$ liegt innerhalb eines gewissen schmalen "Rahmens", der $L(\alpha)$ umschrieben ist (Abb. 165).

Hieraus ist leicht zu ersehen, dass die Längen von $a(\alpha)$ und $b(\alpha)$ und folglich auch ihre Differenz $a(\alpha) - b(\alpha)$ stetige Funktionen des Winkels α sind.

⁷⁹Die Stetigkeit der Funktion $a(\alpha) - b(\alpha)$ ist geometrisch trivial. Der genaue Beweis ist dem in der vorigen Fußnote skizzierten Beweis analog.

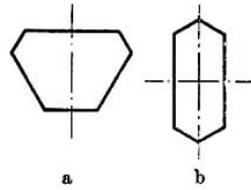


Abb. 167a, b

b) Besitzt ein Sechseck, dessen sämtliche Winkel einander gleich (und gleich 120°) sind, Symmetrieachsen, so muss eine dieser Achsen notwendig durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verlaufen (das Sechseck kann noch weitere Symmetrieachsen besitzen).

Man sieht nämlich leicht, dass eine Symmetrieachse eines Vielecks den Rand entweder in einem Eckpunkt schneidet (in diesem Falle ist sie Winkelhalbierende) oder in der Seitenmitte (in diesem Falle ist sie ein Lot auf diese Seite).

Hieraus folgt, dass bei einem gleichwinkligen Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils parallel sind, eine Symmetrieachse entweder durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten (Abb. 167a) oder durch gegenüberliegende Eckpunkte (Abb. 167b) verläuft; im letzten Fall teilt sie das Sechseck in zwei gleichschenklige Trapeze (deren Winkel an den Grundlinien gleich 60° sind), und das Sechseck besitzt auch eine Symmetrieachse, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verläuft.

Man muss also ein der konvexen Figur umbeschriebenes Sechseck suchen, das eine Symmetrieachse besitzt, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verläuft (und auf diesen Seiten senkrecht steht).

Der konvexen Figur Φ lässt sich ein eindeutig bestimmtes gleichwinkliges Sechseck umbeschreiben, dessen eine Seite eine gegebene Richtung OY hat, die mit dem festen Anfangsstrahl OX den Winkel α bildet. Dieses Sechseck bezeichnen wir mit $L(\alpha)$ und die aufeinanderfolgenden Seiten dieses Sechsecks, welche Stützgeraden der Figur Φ sind, mit l, m'', l', m, l'', m' (Abb. 168).

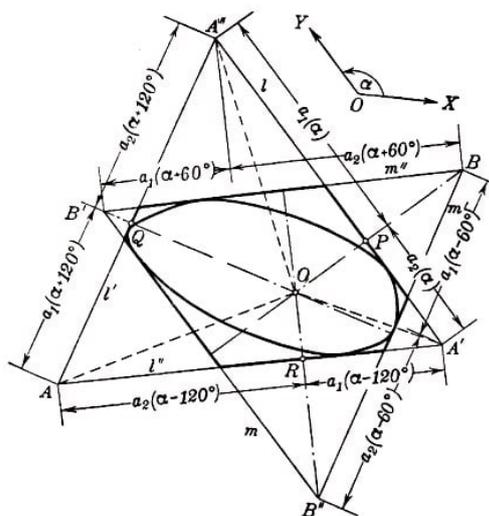


Abb. 168

Die Geraden l, l', l'' und m'', m, m' bilden zwei gleichseitige Dreiecke. Die Eckpunkte dieser Dreiecke bezeichnen wir mit A, A', A'' und B'', B, B' (der Eckpunkt A liegt der Seite l , der Eckpunkt B'' der Seite m'' gegenüber, usw.).

Besitzt das Sechseck $L(\alpha)$ eine durch den Mittelpunkt der Seite l führende und senkrecht auf ihr stehende Symmetrieachse, so verläuft diese Symmetrieachse (infolge der obigen Bemerkung über Symmetrieachsen) durch zwei Eckpunkte der betrachteten gleichseitigen Dreiecke, nämlich durch den Eckpunkt A des Dreiecks $AA'A''$ und den Eckpunkt B des Dreiecks $BB'B''$ (Abb. 169).

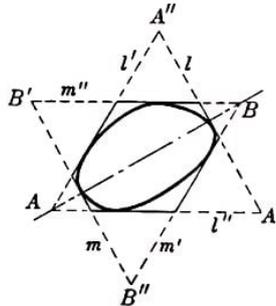


Abb. 169

Führt umgekehrt das vom Eckpunkt B auf die Seite l gefällte Lot durch den Eckpunkt A (wird also die Seite $A'A''$ des gleichseitigen Dreiecks $AA'A''$ von l halbiert), so besitzt das Sechseck $L(\alpha)$ eine Symmetrieachse.

Nehmen wir an, die letzte Behauptung wäre nicht richtig; d. h., das vom Punkt B auf die Gerade l gefällte Lot teile die Strecke $A'A''$ in zwei ungleiche Teile $a_1(\alpha)$ und $a_2(\alpha)$. Es sei etwa die an den Eckpunkt A'' angrenzende Strecke $a_1(\alpha)$ der Seite $A'A''$ größer als die zweite Strecke $a_2(\alpha)$ (siehe Abb. 168), Wir fällen von B' und B'' jeweils Lote auf die Seiten AA'' und AA' des Dreiecks $AA'A''$.

Die Abschnitte, in welche diese Seiten des Dreiecks $AA'A''$ durch die Senkrechten zerlegt werden, bezeichnen wir mit $a_1(\alpha + 120^\circ)$, $a_2(\alpha + 120^\circ)$ und $a_1(\alpha - 120^\circ)$, $a_2(\alpha - 120^\circ)$.

Offenbar gehen die Strecken $a_1(\alpha)$ und $a_2(\alpha)$ bei Ersetzung des Winkels α durch $\alpha + 120^\circ$ bzw. durch $\alpha - 120^\circ$ in $a_1(\alpha + 120^\circ)$ und $a_2(\alpha + 120^\circ)$ bzw. in $a_1(\alpha - 120^\circ)$ und $a_2(\alpha - 120^\circ)$ über. Die von B , B' und B'' gefällten Lote sind die Höhen des gleichseitigen Dreiecks $BB'B''$ und schneiden sich folglich in einem Punkt O ; hieraus ergibt sich⁸⁰

$$a_1(\alpha)^2 + a_1(\alpha + 120^\circ) + a_1(\alpha - 120^\circ)^2 = a_2(\alpha)^2 + a_2(\alpha + 120^\circ) + a_2(\alpha - 120^\circ)^2$$

Daher können bei $a_1(\alpha) > a_2(\alpha)$ unmöglich gleichzeitig

$$a_1(\alpha + 120^\circ) > a_2(\alpha + 120^\circ) \quad , \quad a_1(\alpha - 120^\circ) > a_2(\alpha - 120^\circ)$$

⁸⁰Aus Abb. 168 ist zu ersehen, dass

$$a_1(\alpha)^2 = A''O^2 - OP^2, \quad a_1(\alpha + 120^\circ)^2 = AO^2 - OQ^2, \quad a_1(\alpha - 120^\circ) = A'O^2 - OR^2$$

und

$$a_2(\alpha)^2 = A'O^2 - OP^2, \quad a_2(\alpha + 120^\circ)^2 = A''O^2 - OQ^2, \quad a_2(\alpha - 120^\circ) = AO^2 - OR^2$$

hieraus folgt unmittelbar die von uns benötigte Beziehung.

gelten. Nehmen wir beispielsweise an, dass

$$a_1(\alpha - 120^\circ) < a_2(\alpha - 120^\circ)$$

gilt. Die Funktion $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ ist eine stetige Funktion⁸¹ des Winkels α ; hieraus ergibt sich, dass zwischen $\alpha - 120^\circ$ und α ein Winkel α_0 existiert derart, dass

$$a_1(\alpha_0) - a_2(\alpha_0) = 0 \quad \text{d.h.} \quad a_1(\alpha_0) = a_2(\alpha_0)$$

Folglich besitzt das Sechseck $L(\alpha_0)$ eine durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verlaufende Symmetrieachse.

Anmerkung. Man kann sogar noch etwas mehr behaupten als die Existenz eines der konvexen Figur Φ umbeschriebenen Sechsecks, welches eine durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verlaufende Symmetrieachse besitzt. Und zwar können wir, wenn wir unseren Beweis etwas ändern, zeigen, dass es ein Sechseck ähnlicher Art gibt, dessen Symmetrieachse mit einer beliebig vorgegebenen Richtung einen Winkel bildet, der kleiner als 60° ist.

Wir fällen von den Eckpunkten A'' bzw. A' Lote auf die Seiten BB' bzw. BB'' des Dreiecks $BB'B''$. Die Abschnitte, in welche die Seiten BB' und BB'' durch diese Senkrechten zerlegt werden, bezeichnen wir mit $a_1(\alpha + 60^\circ)$, $a_2(\alpha + 60^\circ)$ bzw. $a_1(\alpha - 60^\circ)$, $a_2(\alpha - 60^\circ)$ (siehe Abb. 168); man sieht leicht, dass die Strecken $a_1(\alpha)$ und $a_2(\alpha)$ bei Ersetzung von α durch $\alpha + 60^\circ$ bzw. durch $\alpha - 60^\circ$ in $a_1(\alpha + 60^\circ)$ und $a_2(\alpha + 60^\circ)$ bzw. in $a_1(\alpha - 60^\circ)$ und $a_2(\alpha - 60^\circ)$ übergehen. Man beweist ohne Schwierigkeit

$$a_1(\alpha + 60^\circ) - a_2(\alpha + 60^\circ) = a_1(\alpha - 120^\circ) - a_2(\alpha - 120^\circ)$$

und

$$a_1(\alpha - 60^\circ) - a_2(\alpha - 60^\circ) = a_1(\alpha + 120^\circ) - a_2(\alpha + 120^\circ)$$

da (für die obere Zeile) diese beiden Differenzen gleich dem doppelten Abstand der durch die Punkte A'' und B'' senkrecht zur Geraden BB' (oder AA') gezogenen parallelen Geraden ist. Daher gelten für $a_1(\alpha) > a_2(\alpha)$ die Ungleichungen

$$a_1(\alpha + 60^\circ) < a_2(\alpha + 60^\circ) \quad \text{bzw.} \quad a_1(\alpha - 60^\circ) < a_2(\alpha - 60^\circ)$$

Hieraus ergibt sich infolge der Stetigkeit der Differenz $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ als Funktion von α , dass zwischen α und $\alpha + 60^\circ$ bzw. zwischen α und $\alpha - 60^\circ$, wobei der Winkel α eine gewisse beliebige feste Richtung bestimmt, ein Winkel α_0 existiert derart, dass das Sechseck $L(\alpha_0)$ eine Symmetrieachse und auf dieser Symmetrieachse senkrechte Seiten besitzt, welche mit dem Anfangsstrahl den Winkel α_0 bilden. Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Diese Anmerkung erweist sich für das Folgende als nützlich.

31. In der Lösung der Aufgabe 30a wurde bewiesen, dass sich jeder konvexen Figur ein gleichwinkliges Sechseck umbeschreiben lässt, welches ein Paar gleicher gegenüberliegender Seiten besitzt. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass jeder (nicht notwendig konvexen) beschränkten Figur Ψ ein solches Sechseck umbeschrieben werden kann. Jedes der konvexen Hülle der Figur Ψ umbeschriebene Sechseck ist nämlich auch der Figur Ψ umbeschrieben.

⁸¹Die Stetigkeit der Funktion $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ ist geometrisch trivial.

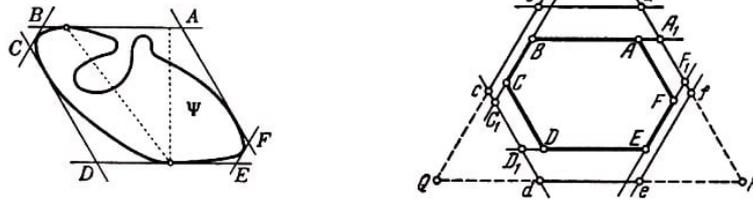


Abb. 170a, b

Gegeben sei uns eine ebene Figur Ψ vom Durchmesser 1. Wir beschreiben um diese Figur ein Sechseck $ABCDEF$ (Abb. 170a), dessen sämtliche Winkel gleich 120° und dessen gegenüberliegende Seiten AB und DE einander gleich sind.

Der Abstand zwischen jedem Paar gegenüberliegender Seiten ist nicht größer als 1. Wäre nämlich beispielsweise der Abstand zwischen den Stützgeraden AB und DE größer als 1, so wäre auch der Abstand zwischen den Berührungspunkten dieser Stützgeraden mit der Figur größer als 1, im Widerspruch dazu, dass der Durchmesser von Ψ gleich 1 sein soll.

Wir vergrößern jetzt das Sechseck $ABCDEF$, indem wir seine Seiten parallel verschieben, so dass der Abstand zwischen jedem Paar der parallelen Seiten genau gleich Eins wird (eventuell braucht dabei keine der Seiten des Sechsecks $ABCDEF$ verschoben zu werden).

Es sei $abcdef$ das neue Sechseck, welches so konstruiert ist, dass jeweils die gegenüberliegenden Seiten von den ihnen entsprechenden Seiten des Sechsecks $ABCDEF$ gleich weit entfernt sind (Abb. 170b).

Wir behaupten, dass die Seiten ab und de des Sechsecks $abcdef$ einander gleich sind. Verschiebt man nämlich die gegenüberliegenden Seiten AF und DC des Sechsecks $ABCDEF$ in gleichem Maße, so erhält man ein neues Sechseck $A_1BC_1D_1EF_1$, wobei $AA_1 = DD_1$ und folglich $A_1B = D_1E$ ist.

Ebenso werden die Seiten A_1B und D_1E des neuen Sechsecks um gleiche Abschnitte länger, wenn wir die Seiten BC_1 und EF_1 um ein gleiches Stück verschieben, und sie verkleinern sich im gleichen Verhältnis, wenn wir diese Seiten selbst in gleichem Maße verschieben (Abb. 170b).

Jetzt lässt sich bereits leicht zeigen, dass $abcdef$ das gesuchte regelmäßige Sechseck ist. Wir verlängern dazu die Strecken bc , de und fa , so dass sie das gleichseitige Dreieck PQR (Abb. 170b) bilden. Die Höhe dieses Dreiecks sei H .

Da nun die Abstände zwischen den gegenüberliegenden Seiten von $abcdef$ sämtlich gleich 1 sind, müssen die Höhen der gleichseitigen Dreiecke abP , cdQ und efR sämtlich gleich $H - 1$ sein. Folglich sind diese Dreiecke kongruent, und es gilt $ab = cd = ef$.

Ebenso lässt sich beweisen dass $bc = de = fa$ ist. Alle Seiten des Sechsecks $abcdef$ sind demnach einander gleich, d.h., dieses Sechseck ist regulär.

Ist der Abstand zwischen jedem Paar gegenüberliegender Seiten eines regulären Sechsecks gleich 1, so ist leicht nachzuprüfen, dass die Seiten dieses Sechsecks gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sind (ist die Entfernung vom Mittelpunkt eines regulären Sechsecks bis zu den

Seiten gleich $\frac{1}{2}$, so ist der Abstand der Eckpunkte vom Mittelpunkt als Radius des Umkreises gleich

$$\frac{1}{2} : \cos 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

folglich sind auch die Seiten gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$.)

32.a) Wir legen zwei zur Geraden l parallele Stützgeraden l'_0 und l''_0 an die Figur Φ und ziehen eine ebenfalls zu l parallele Gerade m_0 , die von l'_0 und l''_0 den gleichen Abstand hat. Nehmen wir an, die Längen der Berührungsstrecken der Geraden l'_0 und l''_0 mit der Kurve K seien gleich a'_0 bzw. a''_0 mit $a'_0 \leq A''_0$ (haben die Geraden l'_0 und l''_0 mit dem Rand von Φ nur einen Punkt gemeinsam, so ist $a'_0 = a''_0 = 0$); die Länge der von K aus m_0 ausgeschnittenen Sehne bezeichnen wir mit b_0 .

Ist $a'_0 \geq \frac{b_0}{2}$, so liegen drei den Voraussetzungen der Aufgabe genügende Sehnen auf den Geraden l'_0 , l''_0 und m_0 ; dabei sind diese Sehnen eindeutig bestimmt, wenn $a'_0 = a''_0 = \frac{b_0}{2}$ ist; andernfalls können sie auf verschiedene Weise ausgewählt werden (Abb. 171a, b).

Ist aber $a'_0 < \frac{b_0}{2}$, u: also $b_0 > 2a'_0$ oder $b_0 - 2a'_0 > 0$, so verschieben wir die Gerade l'_0 stetig parallel zu sich selbst in Richtung auf die Gerade l''_0 . Es sei l' die nach der Bewegung eingenommene Lage der Geraden l'_0 und l'' eine zu l' parallele Gerade, aus der die Kurve K eine Sehne der gleichen Länge a ausschneidet, wie aus der Geraden l' ; ist $a''_0 > a'_0$, so fällt die Gerade l'' möglicherweise mit l''_0 zusammen, obwohl l' von l'_0 verschieden ist (Abb. 171c).

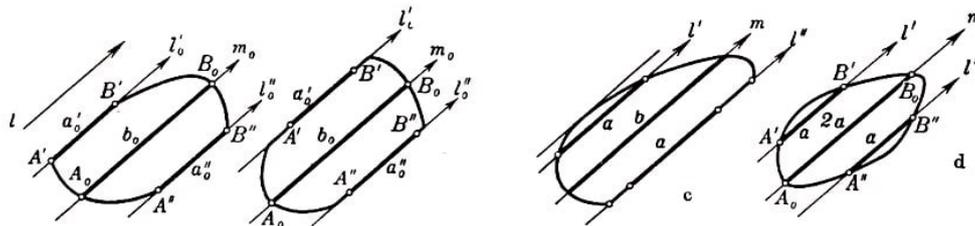


Abb. 171a, b, c, d

Die zu den Geraden l' und l'' parallele, in gleichem Abstand von diesen Geraden gelegene Gerade bezeichnen wir mit m ; die Länge der von der Kurve K aus der Geraden m ausgeschnittenen Sehne sei b .

Bei Verschiebung von l'_0 in Richtung auf l''_0 ändert sich die Differenz $b - 2a$ stetig. Ist dabei a_1 die längste zur Richtung l parallele Sehne der Kurve K , so wird mit a auch b gleich a_1 und die Differenz $b - 2a = a_1 - 2a_1$ wird kleiner als Null.

Aus der Stetigkeit der Differenz $b - 2a$, die wir als Funktion des Abstandes zwischen l'_0 und l''_0 ansehen können, ergibt sich, dass für eine gewisse Lage der Geraden l' die Gleichung $b = 2a$ gelten muss (Abb. 171d), was zu beweisen war.

Anmerkung. Das beschriebene Sehnen-triplet ist, wie man leicht beweist, in dem Sinne eindeutig, dass die Geraden, auf denen diese Sehnen liegen, eindeutig bestimmt sind. Es seien $A'B'$, $A''B''$, A_0B_0 und $A'_1B'_1$, $A''_1B''_1$ und $A_{01}B_{01}$, zwei verschiedene Sehnen-triplet mit derselben Richtung, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Wir

beweisen zunächst, dass die Sehnen A_0B_0 und $A_{01}B_{01}$ zusammenfallen.

Angenommen, es sei nicht so (Abb. 172); dann sei h der Abstand zwischen den parallelen Geraden A_0B_0 und $A_{01}B_{01}$. Wir setzen voraus, dass $A_0B_0 \geq A_{01}B_{01}$ ist (andernfalls vertauschen wir bei den nachfolgenden Überlegungen die Rollen dieser Sehnenripel). Wir nehmen ferner an, die Sehne A_0B_0 sei auf derselben Seite der Sehne $A_{01}B_{01}$, gelegen wie die Sehne $A'_1B'_1$ (der umgekehrte Fall ist analog). Dann liegt die Sehne $A'B'$ zwischen den Geraden A_0B_0 und $A'_1B'_1$ (oder auf der Geraden $A'_1B'_1$), da sonst $A'B' < A'_1B'_1$ wäre, im Widerspruch zur Ungleichung $A_0B_0 \geq A_{01}B_{01}$.

Somit ist der Abstand zwischen den parallelen Sehnen A_0B_0 und $A'B'$ um mindestens h kleiner als der Abstand zwischen $A_{01}B_{01}$ und $A'_1B'_1$. Hieraus ergibt sich leicht, dass der Abstand zwischen den Sehnen $A''B''$ und $A'_1B'_1$ nicht kleiner als $2h$ ist.

Wir untersuchen das Trapez $A_0B_0B'_1A'_1$. Die Schnittpunkte der Seiten dieses Trapezes mit $A''B''$ und $A_{01}B_{01}$ bezeichnen wir mit M, N und P, Q .

Nunmehr können wir aus der Untersuchung dieses Trapezes schließen, dass

$$MN - A'_1B'_1 \geq 2(A_0B_0 - PQ)$$

gilt, da der Abstand zwischen den Sehnen MN und $A'_1B'_1$ mindestens zweimal so groß ist wie der Abstand zwischen den Sehnen A_0B_0 und PQ . Andererseits ergibt sich

$$A_0B_0 - PQ > A_0B_0 - A_{01}B_{01} = 2A''B'' - 2A'_1B'_1 = 2(A''B'' - A'_1B'_1) > 2(MN - A'_1B'_1)$$

dies ist jedoch nach dem oben Bewiesenen größer als $4(A_0B_0 - PQ)$. Wir erhalten die sinnlose Ungleichung

$$A_0B_0 - PQ > 4(A_0B_0 - PQ)$$

Die Sehnen A_0B_0 und $A_{01}B_{01}$ fallen also zusammen. Hieraus ergibt sich ohne Schwierigkeit, dass die Sehnen $A'B'$ und $A'_1B'_1$ (und ebenso auch $A''B''$ und $A'_1B'_1$) auf einer Geraden gelegen sind.

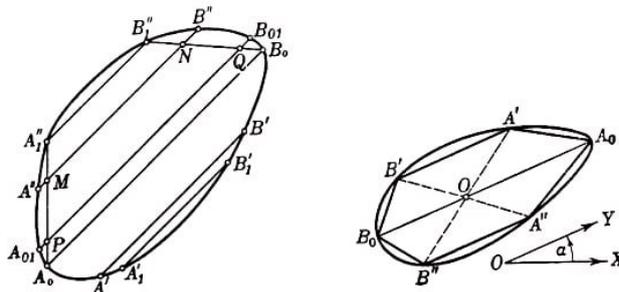


Abb. 172, 173

b) Es sei l eine Gerade, die durch den Winkel α bestimmt ist, den sie mit einem beliebigen festen Anfangsstrahl OX bildet; der Einfachheit halber wählen wir l so, dass die Kurve K keine zu l parallelen Strecken enthält.

Wir bezeichnen mit $A'B'$, $A''B''$ und A_0B_0 die zur Geraden l parallelen Sehnen der Kurve K , wobei A_0B_0 von $A'B'$ und $A''B''$ gleich weit entfernt und $A'B' = A''B'' = \frac{1}{2}A_0B_0$ ist (siehe Aufgabe 32a; insbesondere die Anmerkung am Ende der Lösung dieser Aufgabe).

Das Sechseck $A'B'B_0B''A''A_0$ bezeichnen wir mit $L(\alpha)$. Die Diagonalen $A'B''$ und $A''B'$ des Sechsecks $L(\alpha)$ schneiden sich offenbar im Punkt O der Diagonalen A_0B_0 und werden in diesem Punkt halbiert (Abb. 173).

Wir nehmen jetzt an, in unserem Sechseck sei $A_0O \neq OB_0$. Es sei etwa $A_0O > OB_0$ bzw. $A_0O - OB_0 > 0$.

Bei stetiger Vergrößerung des Winkels α ändert sich auch das Sechseck $L(\alpha)$ stetig. Wenn einem gewissen Winkel α kein eindeutig bestimmtes Sechseck $L(\alpha)$ entspricht, was in dem Falle möglich ist, dass die Kurve K Geradenabschnitte enthält, welche mit dem Anfangsstrahl den Winkel α bilden, dann gehen wir bei der Änderung des Sechsecks von den Sechsecken, die kleineren Winkeln als α entsprechen, zum Sechseck $L_2(\alpha)$ über, das in Abb. 174b dargestellt ist; nunmehr führen wir dieses Sechseck stetig in das Sechseck $L_1(\alpha)$ über, welches in Abb. 174a dargestellt ist, und gehen dann zu Winkeln über, die größer als α sind.

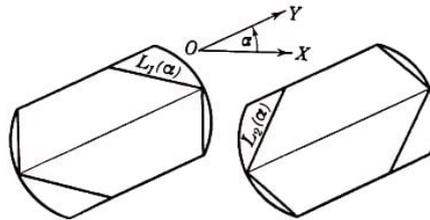


Abb. 174

Wenn wir auf diese Weise den Winkel α durch $\alpha + 180^\circ$ ersetzen, so erhalten wir wieder das Sechseck $L(\alpha)$. Dabei vertauschen jedoch die Strecken A_0O und OB_0 ihre Rollen, und die Ungleichung $A_0O - OB_0 > 0$ geht über in $B_0O - OA_0 < 0$, die Differenz wechselt also ihr Vorzeichen. Das bedeutet:

Es muss ein Sechseck $L(\alpha_0)$ geben, für welches

$$A_0O = OB_0 = A'B' = A''B'' \quad \text{und} \quad B'O = OA''; A'O = OB''$$

gilt. Hieraus ergibt sich, dass $A'B'OA_0$ ein Parallelogramm ist ($A'B'$ ist parallel und gleich A_0O), ebenso ist auch $OB_0B''A''$ ein Parallelogramm (da OB_0 parallel und gleich $A''B''$ ist). Daher ist

$$A_0A'' \parallel A''B' \parallel B''B_0$$

analog beweist man

$$B'B_0 \parallel A'B'' \parallel A_0A''$$

33. a) Wir beschreiben der konvexen Kurve K , welche die Figur Φ begrenzt, ein Sechseck $A'B'B_0B''A''A_0$ ein, das den Voraussetzungen der Aufgabe 32b genügt (Abb. 175).

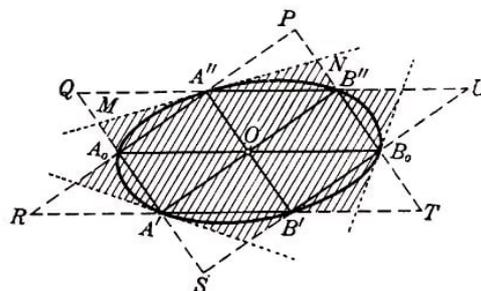


Abb. 175

Dieses Sechseck stellt eine von der Figur Φ umschlossene zentrosymmetrische Figur dar. Wir behaupten, dass der Flächeninhalt dieses Sechsecks nicht weniger als $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts der Figur Φ beträgt.

Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'O$ mit σ . Die Diagonalen $A'B''$, $B'A'$ und A_0B_0 zerlegen das Sechseck $A'B'B_0B''A''A_0$ in sechs kongruente Dreiecke; eines von ihnen ist das Dreieck $A'B'O$.

Der Flächeninhalt des Sechsecks ist dann gleich 6σ .

Verlängern wir die Seiten $A'B'$, B_0B'' , $A''A_0$ bzw. $B'B_0$, BA'' , A_0A' des Sechsecks $A'B'B_0B''A''A_0$ bis sie sich schneiden, so erhalten wir das in Abb. 175 dargestellte sternförmige Zwölfeck $PA''QA_0RA'SB'TB_0UB''$, das, wie leicht zu sehen ist, aus zwölf dem Dreieck $A'B'O$ kongruenten Dreiecken besteht. Der Flächeninhalt dieses Zwölfecks ist folglich gleich 12σ .

Da offenbar die Figur Φ im Innern dieses sternförmigen Zwölfecks liegt, können wir behaupten, dass der Flächeninhalt von Φ kleiner als 12σ ist.

Folglich kann der Flächeninhalt des Sechsecks $A'B'B_0B''A''A_0$, nicht kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts der Figur Φ sein. Diese Abschätzung lässt sich jedoch bedeutend verschärfen.

Wir legen durch die Eckpunkte A' , B_0 und A'' Stützgeraden an die Figur Φ ; diese trennen von dem betrachteten sternförmigen Zwölfeck ein kleineres sternförmiges Neuneck ab (in Abb. 175 schraffiert). Der Flächeninhalt dieses Neunecks beträgt, wie leicht zu ersehen ist, 9σ .

Es möge beispielsweise die durch den Punkt A'' verlaufende Stützgerade der Figur Φ von den Dreiecken $A_0A''Q$ und $A''B''P$, welche dem Zwölfeck angehören, die Dreiecke $A''MQ$ und $A''NP$ abtrennen (Abb. 175). Dabei ist

$$\triangle A_0A''Q = \triangle A''B''P = \triangle OA''B'' \quad \text{und folglich} \quad S_{\triangle A_0A''Q} + S_{\triangle A''B''P} = 2\sigma$$

Ferner ist $\triangle A''MQ = \triangle A''B''N$ (da $A''Q = A''B''$ und die anliegenden Winkel gleich sind). Analog ist $\triangle A''NP = \triangle A_0A''M$ und folglich

$$S_{\triangle A''MQ} + S_{\triangle A''NP} = \frac{1}{2}(S_{\triangle A_0A''Q} + S_{\triangle A''B''P}) = \sigma$$

Ebenso trennen auch die durch die Punkte B_0 und A' verlaufenden Stützgeraden der Figur Φ von dem Zwölfeck Dreieckspaare mit dem gemeinsamen Flächeninhalt σ ab. Der Flächeninhalt des Neunecks ist daher gleich $12\sigma - 3\sigma = 9\sigma$.

Die Figur Φ wird aber von diesem Neuneck umschlossen; der Flächeninhalt von Φ ist demzufolge nicht größer als 9σ , und der Flächeninhalt des Sechsecks $A'B'B_0B''A''A_0$, welcher gleich 6σ ist, kann nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts von Φ sein.

b) Es sei O der Mittelpunkt irgendeiner dem Dreieck ABC einbeschriebenen zentrosymmetrischen Figur Φ . Wir spiegeln Φ am Punkt O ; dabei geht die Figur Φ in sich über, während das Dreieck ABC in das Dreieck $A'B'C'$ übergeht, das zu ABC symmetrisch in Bezug auf den Punkt O liegt (Abb. 176).

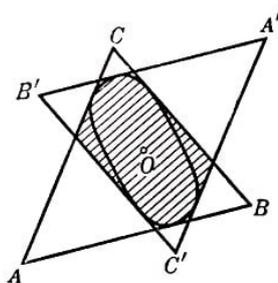


Abb. 176

Da die Figur Φ vom Dreieck ABC umschlossen wird, muss auch die aus Φ bei unserer Spiegelung an O erhaltene und mit Φ zusammenfallende Figur innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ gelegen sein. Auf diese Weise können wir schließen, dass Φ sowohl vom Dreieck ABC als auch vom Dreieck $A'B'C'$ umschlossen wird, d. h., Φ ist im Durchschnitt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ enthalten.

Dieser Durchschnitt ist aber selbst eine zentrosymmetrische konvexe Figur; denn bei Spiegelung am Punkt O geht das Dreieck ABC in das Dreieck $A'B'C'$, das Dreieck $A'B'C'$ in das Dreieck ABC und der Durchschnitt dieser Dreiecke in sich über.

Daraus ersehen wir, dass der Durchschnitt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die größte zentrosymmetrische Figur ist, die im Dreieck ABC liegt und den Punkt O als Mittelpunkt hat. Jede andere derartige Figur wird von diesem Durchschnitt umschlossen.

Um die größte zentrosymmetrische Figur zu finden, die von dem Dreieck ABC umschlossen wird, müssen wir im Innern des Dreiecks ABC einen Punkt O finden derart, dass der Flächeninhalt des Durchschnitts von ABC mit dem Dreieck $A'B'C'$, das sich aus dem Dreieck ABC durch Spiegelung an O ergibt, am größten ist.

In Abhängigkeit von der Lage des Punktes O ist dieser Durchschnitt ein Parallelogramm (Abb. 177a) oder ein Sechseck (Abb. 177b).

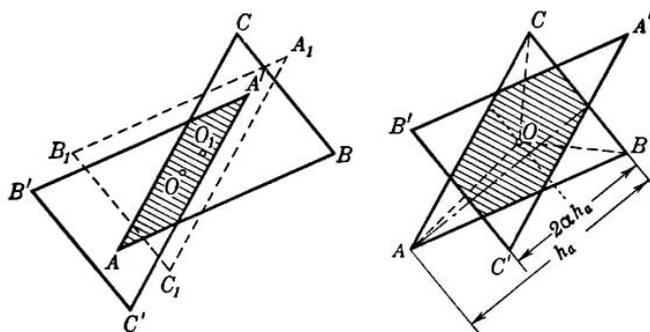


Abb. 177a, b

Es ist jedoch unmittelbar ersichtlich, dass dann, wenn der Durchschnitt ein Parallelogramm ist, die Lage des Punktes O stets so geändert werden kann, dass der Durchschnitt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ein Sechseck wird und sich sein Flächeninhalt vergrößert (Abb. 177a).

Folglich muss die größte einem gegebenen Dreieck ABC Abb. 176 eingeschriebene zentrosymmetrische Figur notwendigerweise ein Sechseck sein.

Ergibt der Durchschnitt ein Sechseck, so trennt das Dreieck $A'B'C'$ vom Dreieck ABC drei kleine Dreiecke ab, die dem Dreieck ABC ähnlich sind (die Seiten jedes dieser Dreiecke sind den Seiten des Dreiecks ABC parallel).

Wir bezeichnen die Seiten des Dreiecks ABC mit a , b und c , die zugehörigen Höhen dieses Dreiecks mit h_a , h_b und h_c und die Verhältnisse der Abstände des Punktes O von den Seiten des Dreiecks ABC zu den ihnen entsprechenden Höhen mit α , β und γ .

In diesen Bezeichnungen sind die Abstände des Punktes O von den Seiten des Dreiecks ABC jeweils gleich αh_a , βh_b und γh_c . Aus

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\triangle ABC}$$

und

$$a \cdot \alpha h_a + b \cdot \beta h_b + c \cdot \gamma h_c = 2S_{\triangle BCO} + 2S_{\triangle ACO} + 2S_{\triangle ABO} = 2S_{\triangle ABC}$$

ergibt sich

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Aus Abb. 177b ist leicht zu ersehen, dass das Ähnlichkeitsverhältnis des Dreiecks, das von dem Dreieck ABC durch die Seite $B'C'$ abgetrennt wird, zum ganzen Dreieck ABC gleich $\frac{h_a - 2\alpha h_a}{h_a} = 1 - 2\alpha$ ist (da der Abstand von O bis BC gleich αh_a ist, muss der Abstand zwischen BC und $B'C'$ gleich $2\alpha h_a$ sein); ebenso ist das Ähnlichkeitsverhältnis des von dem Dreieck ABC durch die Seite $A'C'$ abgetrennten Dreiecks zu dem ganzen Dreieck ABC gleich $1 - 2\beta$ und das Ähnlichkeitsverhältnis des vom Dreieck ABC durch die Seite $A'B'$ abgetrennten Dreiecks zum ganzen Dreieck ABC gleich $1 - 2\gamma$.

Daher ist die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke, die von dem Dreieck ABC durch die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ abgetrennt werden, gleich

$$\begin{aligned} & [(1 - 2\alpha)^2 + (1 - 2\beta)^2 + (1 - 2\gamma)^2] S_{\triangle ABC} \\ &= [3 - 4\alpha - 4\beta + 4\gamma + 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2] S_{\triangle ABC} \\ &= [4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 1] S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

(wir erinnern daran, dass $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ist). Dieses Produkt wird am kleinsten, wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ am kleinsten ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= \frac{1}{3} [(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2] \\ &= \frac{1}{3} [1 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2] \end{aligned}$$

hieraus folgt, dass die Summe $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ am kleinsten wird, wenn $\alpha - \beta = 0$, $\beta - \gamma = 0$ und $\alpha - \gamma = 0$ ist, also für

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$$

In diesem Falle (man sieht leicht, dass er eintritt, wenn der Punkt O mit dem Schnittpunkt der Mittellinien des Dreiecks ABC zusammenfällt) gilt

$$[4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 1] = \frac{1}{3}$$

Somit ist in dem betrachteten Falle die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke, welche von dem Dreieck ABC abgetrennt werden, gleich $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$, und der Flächeninhalt des Durchschnitts der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (der Flächeninhalt der größten zentrosymmetrischen Figur, die sich dem Dreieck ABC einbeschreiben lässt) ist gleich $\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$.

34.a) Wir legen ein beliebiges Paar paralleler Stützgeraden l und l' an die Figur Φ . Berührungspunkte dieser Geraden mit der Figur Φ seien A und B (sie brauchen nicht eindeutig bestimmt zu sein; Abb. 178).

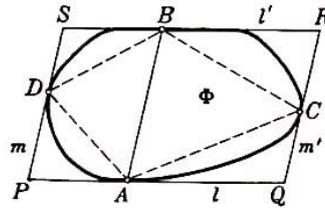


Abb. 178

Parallel zur Geraden AB legen wir die Stützgeraden m und m' an die Figur Φ , die diese in Punkten C bzw. D berühren (welche ebenfalls nicht eindeutig zu sein brauchen). Die vier Geraden l , l' , m und m' bilden ein Parallelogramm $PQRS$, das der Figur Φ umschrieben ist. Die Strecke AB zerlegt dieses Parallelogramm in zwei kleinere Parallelogramme.

Dabei ist offenbar der Flächeninhalt des einen dieser Parallelogramme doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und der Flächeninhalt des anderen gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABD . Somit ist der Inhalt des Parallelogramms $PQRS$ doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

Da die Figur Φ konvex ist, umfasst sie das ganze Viereck $ABCD$. Hieraus ergibt sich, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms $PQRS$ (das eine zentrosymmetrische, Φ umfassende konvexe Figur ist) nicht mehr als das Doppelte des Flächeninhalts der Figur Φ beträgt, was zu beweisen war.

b) Analog zur Lösung der Aufgabe 33b folgern wir, dass jede zentrosymmetrische Figur mit dem Symmetriezentrum in einem Punkt O , die ein Dreieck ABC umschließt, auch das Dreieck $A'B'C'$ enthält, welches sich aus ABC durch Spiegelung an O ergibt. Folglich muss eine konvexe zentrosymmetrische Figur, die das Dreieck ABC enthält, auch die konvexe Hülle des Dreieckspaares ABC und $A'B'C'$ umfassen.

Der Durchschnitt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist ein Parallelogramm oder ein zentrosymmetrisches Sechseck (siehe Abb. 177a und b). Im ersten Falle bildet die konvexe Hülle der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ein Parallelogramm $ABA'B'$ (Abb. 179a), dessen Flächeninhalt nicht kleiner sein kann als der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC . Es ist nämlich

$$S_{ABA'B'} = 4S_{\Delta AOB}$$

und $S_{\Delta AOB} \geq \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$; denn wäre die Höhe des Dreiecks AOB kleiner als die halbe Höhe des Dreiecks ABC , so läge der Punkt C' außerhalb des Dreiecks ABC (unter der Seite AB) und der Durchschnitt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ wäre kein Parallelogramm.

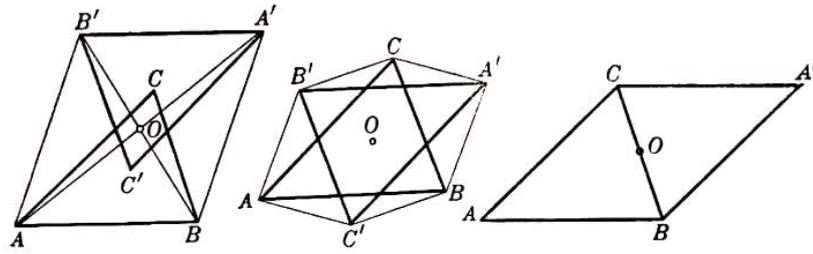


Abb. 179a, b, c

Im zweiten Fall ergibt die konvexe Hülle ein zentrosymmetrisches Sechseck $AC'BA'CB'$ (Abb. 179b), dessen Flächeninhalt genau doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} S_{AC'BA'CB'} &= S_{\triangle OAB'} + S_{\triangle OA'B} + S_{\triangle OCA'} + S_{\triangle OBC'} + S_{\triangle OB'C} \\ &= 2S_{\triangle OAB'} + 2S_{\triangle OCA'} + 2S_{\triangle OBC'} \end{aligned}$$

und

$$S_{\triangle OAB'} = S_{\triangle OAB}$$

da AO die Mittellinie des Dreiecks $AB'B$ ist. Analog gilt

$$S_{\triangle OCA'} = S_{\triangle OCA} \quad , \quad S_{\triangle OBC'} = S_{\triangle OBC}$$

und folglich

$$S_{AC'BA'CB'} = 2S_{\triangle OAB} + 2S_{\triangle OCA} + 2S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle ABC}$$

Anmerkung. Das einfachste Beispiel einer zentrosymmetrischen konvexen Figur, deren Flächeninhalt gleich $2S_{\triangle ABC}$ ist und die das Dreieck ABC umfasst, liefert das in Abb. 179c dargestellte Parallelogramm.

35.a) Es sei l irgendeine Stützgerade der Figur Φ und l' eine andere, zu l parallele Stützgerade; der Abstand d zwischen l und l' ist größer oder gleich 1 (da die Breite der Figur Φ gleich 1 ist).

Nehmen wir an, die Gerade l berühre den Rand der Figur Φ längs der Strecke CD und die Gerade l' längs der Strecke AB (D kann mit C und B mit A zusammenfallen). Der Rand der Figur Φ zerfällt in vier Teile: die Strecke AB , die Strecke CD und zwei Kurven DA und BC (Abb. 180a).

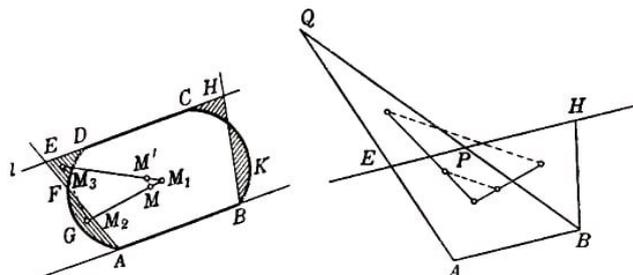


Abb. 180a, b

Wir setzen voraus, dass der Teil AD des Randes von Φ keine geradlinige Strecke ist, verbinden die Punkte A und D durch eine Gerade AD und drehen sie um den Punkt A .

Es sei E der variable Schnittpunkt der sich drehenden Geraden mit der Stützgeraden l , der auf der Geraden l in die Richtung links vom Punkt D rückt, und F der Schnittpunkt der sich drehenden Geraden mit der Kurve AD .

Bei Drehung der Geraden AE verringert sich der Flächeninhalt des Segmentes AGF von seinem größten Wert, der gleich dem Flächeninhalt des Segments AD der Figur Φ ist, bis Null.

Der Flächeninhalt des krummlinig begrenzten Dreiecks DEF dagegen wächst von Null an und wird schließlich größer als jeder Wert. Die Differenz $S_{AGF} - S_{DEF}$ dieser beiden Flächeninhalte ändert sich stetig. Für die Anfangslage der Strecke ist diese Differenz positiv (und dem Flächeninhalt des Segments AD gleich), später wird sie negativ. Hieraus folgt, dass es auf der Kurve AD einen Punkt F gibt, für den

$$S_{AGF} - S_{DEF} = 0$$

gilt, also der Flächeninhalt des Segments AGF gleich dem Flächeninhalt des krummlinig begrenzten Dreiecks DEF ist.

Wir ersetzen zunächst die Figur Φ durch die Figur $ABCEA$, deren Flächeninhalt gleich dem von Φ ist. Es sei M_1 der Schwerpunkt des Teils $ABCDA$ der Figur Φ (ohne das Segment AGF), der Punkt M_2 sei der Schwerpunkt des Segments AGF und der Punkt M_3 der Schwerpunkt des krummlinig begrenzten Dreiecks DEF .

Die Figur Φ besteht aus dem Teil $ABCDA$ und dem Segment AGF ; der Schwerpunkt M der Figur Φ befindet sich auf der Geraden M_1M_2 .

Die Figur $ABCEFA$ besteht aus dem Teil $ABCDA$ und dem krummlinig begrenzten Dreieck DEF ; der Schwerpunkt M' dieser Figur liegt auf der Geraden M_1M_3 . Dabei ist

$$\frac{M_1M'}{M'M_3} = \frac{M_1M}{MM_2}$$

folglich $MM' \parallel M_2M_3$.

Hieraus ergibt sich, dass der Schwerpunkt M' der Figur $ABCEFA$ nicht weiter von der Geraden l entfernt ist als der Schwerpunkt M der Figur Φ .

Ersetzt man ebenso, wie wir es oben getan haben, die Randkurve BC der Figur Φ durch eine geradlinige Strecke BH , so erhält man ein Trapez $ABHE$, dessen Flächeninhalt gleich dem der Figur Φ ist und dessen Schwerpunkt nicht weiter von der Geraden l als der Schwerpunkt der Figur Φ entfernt ist.

Hat die Strecke AB die Länge Null (fällt also B mit A zusammen), so verwandelt sich dieses Trapez in ein Dreieck.

Fällt A mit B zusammen, so ist der Schwerpunkt M' des Dreiecks EAH um $\frac{1}{3}$ der Höhe d des Dreiecks, also nicht weniger als $\frac{1}{3}$ von der Geraden l entfernt (die Mittellinie AR des Dreiecks AEH wird im Schwerpunkt M' im Verhältnis $\frac{RM'}{RA} = \frac{1}{3}$ geteilt).

Folglich ist auch der Abstand des Punktes M von l sicher nicht kleiner als $\frac{1}{3}$. Ist $EABH$ ein Trapez, so liegt der Schwerpunkt M' dieses Trapezes auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der Dreiecke AEH und ABH .

Der Schwerpunkt des ersten dieser Dreiecke ist von l um $\frac{1}{3}d$ entfernt, der Schwerpunkt des zweiten Dreiecks ist von l' ebenso weit entfernt, hat also von l den Abstand $\frac{2}{3}d$.

Folglich ist die Entfernung des Punktes M' von l größer als $\frac{1}{3}d \geq \frac{1}{3}$. Das besagt, dass auch der Abstand des Punktes M von l sicher größer als $\frac{1}{3}$ ist.

b) Wir untersuchen irgendeine konvexe Figur Φ mit dem Flächeninhalt S , deren Rand eine Strecke AB enthält (Abb. 180a), und beweisen, dass sich bei Ersetzung dieser Figur durch ein Dreieck ABQ gleichen Flächeninhalts mit der Grundlinie AB der Abstand des Schwerpunktes der Figur von der Geraden AB nur vergrößert.

Wir legen parallel zur Strecke AB eine Stützgerade l an die Figur Φ ; die Gerade l möge mit dem Rand der Figur Φ die Strecke CD gemeinsam haben (dabei kann der Punkt C mit D zusammenfallen).

Ebenso wie bei der Lösung der Aufgabe 35a ersetzen wir die Figur Φ durch ein Trapez $ABHE$ (Abb. 180a), dessen Schwerpunkt M' nicht näher an der Geraden AB gelegen ist als der Schwerpunkt M der Figur Φ .

Die Grundlinien des Trapezes bezeichnen wir mit $AB = a$ und $EH = b$ und tragen auf der Geraden AE vom Punkt A aus eine Strecke AQ ab, die gleich $AE \cdot \frac{a+b}{a}$ ist (Abb. 180b).

Dann verhält sich die Höhe des Dreiecks ABQ zur Höhe des Trapezes $ABHE$ wie $(a + b) : a$.

Hieraus ergibt sich, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks dem Flächeninhalt des Trapezes $ABHE$ gleich ist. Wir ersetzen jetzt das Trapez $ABHE$ durch das Dreieck ABQ , welches den gleichen Inhalt hat. Das Trapez $ABHE$ besteht aus dem Viereck $ABPE$ und dem Dreieck BHP . Sein Schwerpunkt liegt auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte dieser beiden Teile.

Das Dreieck ABQ besteht aus dem Viereck $ABPE$ und dem Dreieck PEQ .

Der Schwerpunkt des Dreiecks ABQ ist auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte dieser Teile gelegen. Hieraus lässt sich ohne Schwierigkeit folgern, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABQ von der Strecke AB einen größeren Abstand als der Schwerpunkt des Trapezes $ABHE$ hat.

Somit ist der Abstand des Schwerpunktes des Dreiecks ABQ von der Geraden AB nicht kleiner als der Abstand des Schwerpunktes der ursprünglichen Figur Φ von dieser Geraden. Der Abstand des Schwerpunktes des Dreiecks ABQ von der Strecke AB beträgt aber ein Drittel der Höhe. Die Höhe eines Dreiecks ABQ mit der Grundlinie l und dem Flächeninhalt S ist offensichtlich gleich $2S$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

36. Gegeben sei eine beliebige konvexe Figur Φ mit dem Schwerpunkt M . Durch den Punkt M legen wir alle möglichen Geraden und vergleichen die Verhältnisse zwischen den Flächeninhalten der Teile, in welche die Figur Φ durch diese Geraden zerlegt wird. Diese Verhältnisse liegen zwischen gewissen Grenzen.

Wir beweisen, dass man ein Dreieck T finden kann, für welches das Verhältnis der Teilflächen, in welche dieses von einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Geraden

zerlegt wird, kleiner ist als für die Figur Φ .
Dieser Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

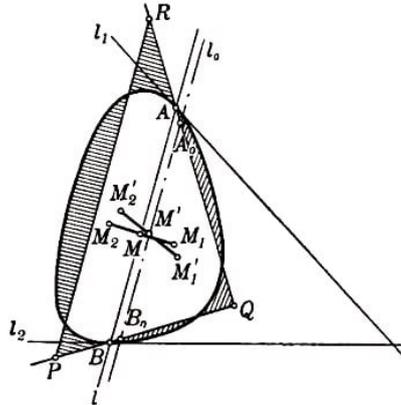


Abb. 181

Es sei eine durch den Schwerpunkt M der Figur Φ führende Gerade (Abb. 181). Die Gerade l zerlegt die Figur Φ in zwei Teile Φ_1 und Φ_2 , deren Flächeninhalte S_1 bzw. S_2 sein mögen.

Wir ersetzen zunächst den Teil Φ_1 der Figur Φ durch ein Dreieck ABQ mit gleichem Flächeninhalt wie Φ_1 (A und B sind die Schnittpunkte der Geraden l mit dem Rand von Φ).

Den Eckpunkt Q dieses Dreiecks wählen wir dabei so, dass er sich in demselben, von der Geraden l und den beiden durch A und B verlaufenden Stützgeraden l_1 und l_2 der Figur Φ begrenzten Gebiet befindet wie die Figur Φ_1 (sind A und B Eckpunkte, so sind l_1 und l_2 beliebige durch A bzw. B führende Stützgeraden).

Es ist klar, dass man den Punkt Q stets derart wählen kann (in Abb. 181 ist der Fall dargestellt, dass die Geraden l_1 und l_2 sich auf der Seite von l schneiden, auf welcher der Teil Φ_1 gelegen ist; im entgegengesetzten Fall ist die Möglichkeit solch einer Wahl von Q noch trivialer).

In diesem Falle erweist sich die Figur Φ_1 als ganz innerhalb des Winkels AQB gelegen (und zwar auf der anderen Seite der Strecke AB als das Dreieck ABQ); dieser Umstand ist für uns wesentlich.

Wir ersetzen jetzt den Teil Φ_2 der Figur Φ durch ein Trapez $BARP$ mit gleichem Flächeninhalt S_2 , dessen kleinere Grundlinie die Strecke AB ist und dessen Seitenlinien AR und BP auf den Geraden QA und QB gelegen sind (Abb. 181). Damit ersetzen wir die Figur Φ durch das Dreieck PQR mit dem gleichen Flächeninhalt.

Es sei M' der Schwerpunkt des Dreiecks PQR . Wir behaupten, dass der Punkt M' dem Dreieck ABQ angehört. M_1 sei der Schwerpunkt der Figur Φ_1 , M_2 der Schwerpunkt der Figur Φ_2 , M'_1 der Schwerpunkt des Dreiecks ABQ und M'_2 der Schwerpunkt des Trapezes $BARP$.

Der Punkt M liegt auf der Strecke M_1M_2 und teilt sie im Verhältnis $M_1M : MM_2 = S_2 : S_1$. Der Punkt M' liegt auf der Strecke $M'_1M'_2$ und teilt diese in dem gleichen Verhältnis.

Der Punkt M'_1 ist aber nicht näher an der Geraden AB gelegen als der Punkt M_1

(Aufgabe 35b); andererseits ist der Schwerpunkt M'_2 des Trapezes $BARP$ nicht weiter von der Geraden AB entfernt als der Schwerpunkt M_2 der Figur Φ_2 (offensichtlich besitzt das Trapez $BARP$ von allen Figuren mit dem Flächeninhalt S_2 , die innerhalb des Winkels AQB auf derselben Seite der Strecke AB liegen wie Φ_2 , den am nächsten an der Strecke AB gelegenen Schwerpunkt; dafür lässt sich leicht ein strenger Beweis angeben, indem man die einzelnen Teile untersucht, aus denen das Trapez $BARP$ und die Figur Φ_2 bestehen).

Hieraus ergibt sich, dass der Mittelpunkt M' des Dreiecks PQR auf derselben Seite der Strecke AB gelegen ist wie das Dreieck ABQ .

Durch den Schwerpunkt M' des Dreiecks PQR ziehen wir parallel zu l eine Gerade l_0 (also parallel zur Grundlinie RP); die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Seitenlinien QR und QP des Dreiecks bezeichnen wir mit A_0 und B_0 . Dabei gilt offenbar

$$S_{A_0B_0Q} \leq S_{ABQ} = S_1 \quad , \quad S_{B_0A_0RP} \leq S_{BARP} = S_2$$

und folglich

$$\frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}} \leq \frac{S_1}{S_2}$$

Dies ist gerade das Resultat, das wir erhalten wollten. Es besagt folgendes:

Das Verhältnis der Inhalte der Flächen, in welche eine konvexe Figur Φ von einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Geraden geteilt wird, ist am kleinsten, wenn Φ ein Dreieck ist und l parallel zur Grundlinie des Dreiecks Φ verläuft.

In diesem Falle ist aber das Flächenverhältnis $\frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}}$ offensichtlich gleich $\frac{4}{5}$, denn das Dreieck A_0QB_0 ist dem Dreieck RQB ähnlich, das Ähnlichkeitsverhältnis beträgt $\frac{2}{3}$ (die Mittellinie eines Dreiecks wird im Schwerpunkt im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ geteilt, vom Eckpunkt aus gerechnet). Folglich ist

$$S_{A_0B_0Q} = \frac{4}{9}S \quad , \quad S_{B_0A_0RP} = \frac{5}{9}S$$

(dabei ist S der Flächeninhalt von Φ). Hieraus ergibt sich

$$\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}} = \frac{4}{5}$$

was zu beweisen war.

Anmerkung. Ist die Figur Φ kein Dreieck, so ist, wie aus der Lösung der Aufgabe folgt, das Verhältnis der Flächen, in welche die Figur Φ von einer durch ihren Schwerpunkt laufenden Geraden geteilt wird, stets in engeren Grenzen als $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{4}$ eingeschlossen.

37. Es sei A_0 irgendein fester Punkt der Strecke A_1A_2 . Man sieht leicht, dass die Summen $A_0 + B$, wobei B alle Punkte der Strecke B_1B_2 durchläuft, eine Strecke bilden, die parallel und gleich B_1B_2 ist und deren Endpunkte $A_0 + B_1$ bzw. $A_0 + B_2$ sind. Da die Dreiecke⁸²

$$OB_1B_2 \quad \text{und} \quad A_0(A_0 + B_1)(A_0 + B_2)$$

⁸²Wir bezeichnen das Dreieck, dessen Eckpunkte A_0, A_0+B_1, A_0+B_2 sind, mit $A_0(A_0+B_1)(A_0+B_2)$.

(Abb. 182a) kongruent und zueinander parallel gelegen sind, folgt, dass die Figur $OBCA_0$, wobei B und C einander entsprechende Punkte der Strecken B_1B_2 und $(A_0 + B_1)(A_0 + B_2)$ sind, ein Parallelogramm ist ($OB = A_0C$ und $OB \parallel A_0C$); folglich gilt $C = A_0 + B$.

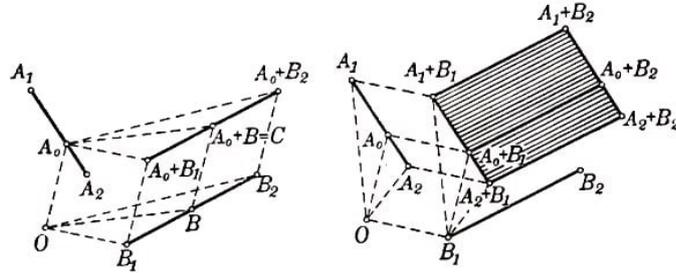


Abb. 182a, b

Ändern wir jetzt die Lage des Punktes A_0 auf der Strecke A_1A_2 , so erhalten wir eine Reihe paralleler und einander gleicher Strecken (Abb. 182b).

Die Punkte $A_0 + B_1$, die linken Endpunkte dieser Strecken, bilden eine Strecke vom Punkt $A_1 + B_1$ bis zum Punkt $A_2 + B_1$, die der Strecke A_1A_2 parallel und gleich ist. Auf diese Weise bildet die Menge aller möglichen Punkte $A + B$, wobei A zur Strecke A_1A_2 und B zur Strecke B_1B_2 gehört, ein Parallelogramm mit den Eckpunkten $A_1 + B_1$, $A_1 + B_2$, $A_2 + B_2$, $A_2 + B_1$ (Abb. 182b).

In dem Fall, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 einander parallel sind, artet das betrachtete Parallelogramm in eine Strecke aus, die parallel zu den Strecken A_1A_2 und B_1B_2 liegt und deren Länge gleich der Summe ihrer Längen ist (Abb. 183).

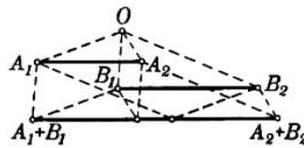


Abb. 183

38. Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei konvexe Figuren, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ihre Summe und C und D zwei Punkte der Figur Φ . Gemäß Definition der Summe zweier Figuren gibt es Punkte A_1 und A_2 der Figur Φ_1 (die eventuell zusammenfallen) und Punkte B_1 und B_2 der Figur Φ_2 (die ebenfalls zusammenfallen können), so dass $C = A_1 + B_1$ und $D = A_2 + B_2$ ist (Abb.184).

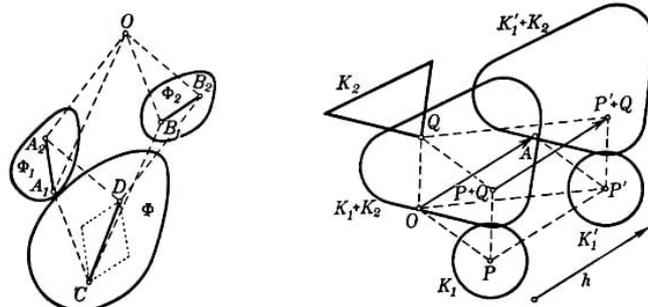


Abb. 184,185

Da die Figuren Φ_1 und Φ_2 konvex sind, gehört die Strecke A_1A_2 ganz zur Figur Φ_1 und die Strecke B_1B_2 ganz zur Figur Φ_2 . Das Parallelogramm (oder die Strecke), welches

die Summe der Strecken A_1A_2 und B_1B_2 ist (siehe Aufgabe 37), gehört also ganz zur Figur $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Insbesondere gehört die Verbindungsstrecke von $A_1 + B_1$ mit $A_2 + B_2$, also von C mit D (als Diagonale des Parallelogramms) der Figur Φ an. Mit je zwei Punkten C und D enthält die Figur Φ also auch ihre Verbindungsstrecke, d.h., die Figur Φ ist konvex.

39. Wir bezeichnen die von den Kurven K_1 und K_2 begrenzten Figuren mit Φ_1 und Φ_2 und die von den Kurven L_1 und L_2 begrenzten Figuren mit Ψ_1 und Ψ_2 :

Die Figur Φ_1 geht nicht über die Grenzen der Figur Ψ_1 hinaus, d.h., alle Punkte der Figur Φ_1 sind auch Punkte der Figur Ψ_1 . Ebenso sind auch alle Punkte der Figur Φ_2 Punkte der Figur Ψ_2 . Hieraus folgt jedoch, dass alle Punkte der Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ auch Punkte der Figur $\Psi_1 + \Psi_2$ sind. Die Kurve $K_1 + K_2$ geht also nicht über die Grenzen der Kurve $L_1 + L_2$ hinaus.

40. Es werde zunächst nur die Kurve K_1 parallel verschoben, während die Kurve K_2 und der Ursprung O unverändert bleiben. OA sei eine vom Anfangspunkt O aus abgetragene Strecke, die parallel und gleich der Strecke ist, um die jeder Punkt der Kurve K_1 bei Parallelverschiebung weitergerückt wird; K'_1 sei die Kurve, in die K_1 bei Parallelverschiebung übergeht, Φ_1 , Φ_2 und Φ'_1 seien die von den Kurven K_1 bzw. K_2 bzw. K'_1 begrenzten Figuren (Abb. 185).

Ferner sei P ein beliebiger Punkt der Figur Φ_1 , Q ein beliebiger Punkt der Figur Φ_2 und P' der Punkt, in den P bei der Parallelverschiebung übergeht. Dann gilt offenbar gemäß Definition der Addition von Punkten und infolge der Eigenschaften der Parallelverschiebung

$$P' = P + A \quad \text{und} \quad P' + Q = (P + A) + Q = (P + Q) + A$$

Die letzte Gleichung bedeutet aber gerade, dass die Figur $\Phi'_1 + \Phi_2$, aus der Figur $\Phi_1 + \Phi_2$, durch Parallelverschiebung hervorgeht. (Die Punkte der Figur $\Phi'_1 + \Phi_2$ werden aus den ihnen entsprechenden Punkten der Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ durch Verschiebung längs einer Strecke erhalten, die parallel und gleich OA ist.)

Ändert man nicht die Lage der Figur Φ_1 , sondern verschiebt die Figur Φ_2 parallel zu sich selbst, so beweist man ebenso, dass die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ eine Parallelverschiebung (in derselben Richtung und in demselben Maße wie die Figur Φ_2) erfährt.

Ferner ergibt sich aus der Definition der Addition von Figuren, dass bei Verschiebung des Ursprungs O die Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ genau die gleiche Parallelverschiebung erfährt, als wenn die Figuren Φ_1 und Φ_2 beide der gleichen Parallelverschiebung unterzogen werden.

Schließlich mögen die Figuren Φ_1 und Φ_2 einer gleichen Parallelverschiebung unterworfen sein, gleichzeitig möge der Anfangspunkt vom Punkt O in einen gewissen Punkt O' übergehen.

Wir verschieben zunächst die Figuren Φ_1 und Φ_2 und den Anfangspunkt O parallel längs der Strecke OO' .

Dabei erhalten die Figuren Φ_1 und Φ_2 eine neue Lage Φ'_1 und Φ'_2 , und $\Phi_1 + \Phi_2$ wird längs der Strecke OO' parallel verschoben.

Nunmehr verschieben wir die Figur Φ_1'' parallel zu sich selbst in die Lage Φ_1' und schließlich Φ_2'' in die Lage Φ_2' . Bei jeder dieser Parallelverschiebungen unterliegt auch die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ einer gewissen Parallelverschiebung.

Auf diese Weise geht die mit Hilfe der Addition von Punkten in Bezug auf den Anfangspunkt O gebildete Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ in die Summe $\Phi_1' + \Phi_2'$ über, die mit Hilfe der Addition von Punkten in Bezug auf den Punkt O' durch drei aufeinanderfolgende Parallelverschiebungen gebildet wird, welche durch eine einzige resultierende Parallelverschiebung ersetzt werden kann.

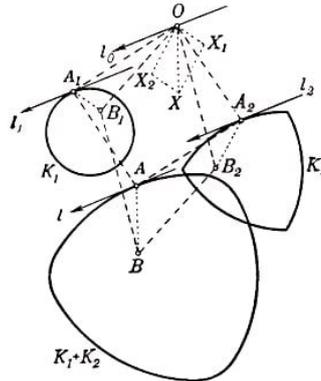


Abb. 186

41. Es seien A_1 und A_2 einander entsprechende Punkte der Kurven K_1 und K_2 , l_1 und l_2 zwei durch die Punkte A_1 und A_2 verlaufende, einander parallele und gleichgerichtete Stützgeraden der Kurven K_1 und K_2 ; Φ_1 und Φ_2 seien die von den Kurven K_1 und K_2 begrenzten Figuren (Abb. 186).

Dann gehört der Punkt $A = A_1 + A_2$ zur Figur $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Wir zeigen, dass dieser Punkt ein Randpunkt ist.

Dazu legen wir durch den Punkt $A_1 + A_2$ eine zu den Geraden l_1 und l_2 parallele und gleichgerichtete Gerade l und zeigen, dass jeder Punkt B der Figur $\Phi_1 + \Phi_2$ links von der Geraden l liegt, die Gerade l also eine Stützgerade der Figur $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ist.

Es sei B ein Punkt der Figur Φ ; B_1 und B_2 seien Punkte der Figur Φ_1 bzw. Φ_2 derart, dass $B = B_1 + B_2$ ist. Wir verbinden den Punkt A_1 mit dem Punkt B_1 , den Punkt A_2 mit dem Punkt B_2 , den Punkt A mit dem Punkt B und tragen vom Anfangspunkt O die Strecken OX_1 , OX_2 und OX ab, die jeweils den Strecken A_1B_1 , A_2B_2 und AB parallel und gleich sind. Gemäß Definition der Addition von Punkten gilt dann

$$B_1 = A_1 + X_1, \quad B_2 = A_2 + X_2, \quad B = A + X$$

Es ist aber

$$B = B_1 + B_2, \quad A = A_1 + A_2 \quad \text{hieraus folgt} \quad X = X_1 + X_2$$

Das Viereck OX_1XX_2 ist also ein Parallelogramm. Wir legen durch den Punkt O eine Gerade l_0 , die den Geraden l_1 , l_2 und l parallel ist und die gleiche Richtung hat wie diese.

Da eine konvexe Figur stets links von jeder Stützgeraden liegt, liegen auch die den Strecken A_1B_1 und A_2B_2 parallelen Strecken OX_1 und OX_2 links von der Geraden l_0

(Abb. 186). Folglich liegt das ganze Parallelogramm OX_1XX_2 links von l_0 , d.h., auch die Strecke OX ist links von l_0 gelegen. Da aber l zu l_0 und die Strecke AB zu OX parallel ist, folgt hieraus, dass B links von l liegt.

Somit liegt jeder Punkt der Figur Φ links von l_0 , d. h., l_0 ist eine Stützgerade der Figur Φ , womit bewiesen ist, dass die Summe zweier einander entsprechender Punkte der Kurven K_1 und K_2 ein Punkt der Kurve K ist (der ihnen entspricht). Um aber zu beweisen, dass K der geometrische Ort der Summen einander entsprechender Punkte der Kurven K_1 und K_2 ist, muss noch gezeigt werden, dass jeder Punkt der Kurve K die Summe von einander entsprechenden Punkten der Kurven K_1 und K_2 ist, da es möglich wäre, dass die Summe einander entsprechender Punkte nur einen Bogen der Kurve K , nicht aber die ganze Kurve K bildet.

Es sei also A ein beliebiger Punkt der Kurve K ; A_1 und A_2 seien Punkte der Figuren Φ_1 und Φ_2 , derart, dass $A_1 + A_2 = A$ ist. Wir zeigen, dass A_1 und A_2 einander entsprechende Randpunkte der Figuren Φ_1 und Φ_2 sind.

Es sei l eine durch den Punkt A verlaufende Stützgerade der Figur Φ (eine beliebige, wenn durch den Punkt A nicht nur eine Stützgerade der Figur Φ geht); l_1 und l_2 seien parallel zu l durch A_1 und A_2 führende Geraden.

Wir nehmen an, mindestens eine dieser Geraden, etwa l_1 , sei keine Stützgerade der zugehörigen Figur, d.h., rechts von l_1 gäbe es Punkte der Figur Φ_1 ; es möge B_1 solch ein Punkt sein (Abb. 187).

Dann ist der Punkt $B_1 + A_1 = B$ gemäß Definition der Summe von Figuren ein Punkt der Figur Φ . Die Strecke A_1B_1 ist aber gleich und parallel der Strecke AB , so dass also der Punkt B rechts von der Geraden l liegt - ebenso wie B_1 rechts von l_1 liegt. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, dass l eine Stützgerade der Figur Φ ist.

Damit ist bewiesen, dass l_1 und l_2 Stützgeraden der Figuren Φ_1 bzw. Φ_2 sein müssen. Somit sind A_1 und A_2 einander entsprechende Punkte der Kurven K_1 und K_2 , was zu beweisen war.

42. Offenbar entspricht jeder Seite eines Vielecks K ein einzelner Punkt des Kreises O_r (der Punkt, in welchem eine zur betrachteten Seite parallele Gerade den Kreis berührt). Jedem Eckpunkt von K entspricht ein ganzer Bogen des Kreises O_r , dessen Zentriwinkel gleich dem Außenwinkel des Vielecks in dem betreffenden Eckpunkt ist (Abb. 188a).

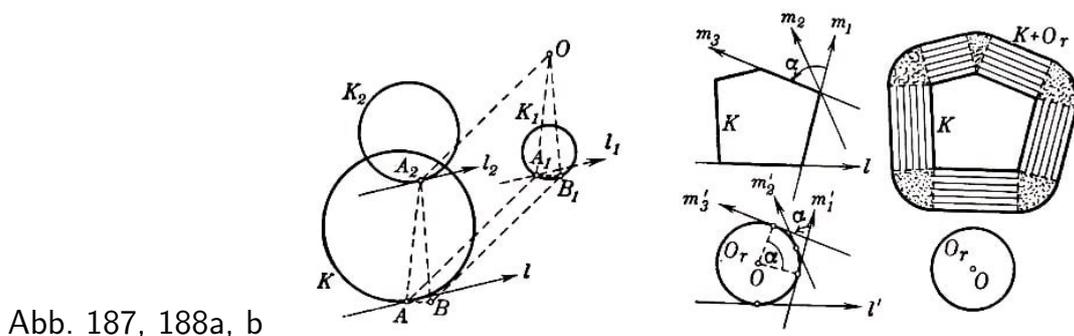


Abb. 187, 188a, b

Der Einfachheit halber wählen wir den Mittelpunkt des Kreises O_r als Anfangspunkt O ;

in diesem Falle besteht die Kurve $X+O_r$ aus Strecken, die parallel und gleich den Seiten des Vielecks sind und von den Seiten den Abstand r haben, sowie aus Kreisbogen vom Radius r um die Eckpunkte des Vielecks, welche gleich den Außenwinkeln des Vielecks sind (Abb. 188b).

Die Summe der Längen sämtlicher gerader Strecken ist gleich dem Umfang L des Vielecks K , die Summe der Längen aller Bogen ist gleich dem Umfang des Kreises vom Radius r , also gleich $2\pi r$ (da die Summe aller Außenwinkel eines Vielecks 360° oder 2π beträgt).

Somit ist die Länge der Kurve $K+O_r$ gleich $L+2\pi r$.

Die von der Kurve $K+O_r$ begrenzte Figur Φ besteht offensichtlich aus dem Vieleck K vom Flächeninhalt S , Rechtecken, deren Grundlinien die Seiten des Vielecks K sind und deren Höhe gleich r ist (die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke ist gleich Lr), sowie Kreissektoren vom Radius r (die Summe sämtlicher Sektoren beträgt πr^2 ; Abb. 188b).

Folglich ist der Inhalt der von der Kurve $K+O_r$ begrenzten Fläche gleich $S+Lr+\pi r^2$.

43. Es seien K_1 und K_2 zwei Vielecke, die keine paarweise parallelen und gleichgerichteten Seiten besitzen (Abb. 189a). Nach Aufgabe 41 ist die Summenkurve dieser Vielecke der geometrische Ort der Summen einander entsprechender Punkte.

Es sei l_1 eine Stützgerade des Vielecks K_1 , und zwar die Verlängerung AB einer seiner Seiten, l_2 sei eine zu l_1 parallele und gleichgerichtete Stützgerade des zweiten Vielecks. Da die Vielecke keine parallelen Seiten besitzen, hat die Gerade l_2 mit dem zweiten Vieleck nur einen einzigen Punkt C gemeinsam. Entsprechende Punkte der Vielecke sind dann der Punkt C und jeder Punkt der Strecke AB .

Die Summe der entsprechenden Punkte bildet in diesem Falle eine Strecke, die der Strecke AB parallel und gleichgerichtet ist (siehe Lösung der Aufgabe 37).

Addieren wir alle Punkte des n -Ecks K_1 zu den ihnen entsprechenden Punkten des m -Ecks K_2 (jeder Seite des ersten Vielecks entspricht ein eindeutig bestimmter Punkt des zweiten Vielecks, und zwar ein bestimmter Eckpunkt; den Seiten des zweiten Vielecks entsprechen die Eckpunkte des ersten Vielecks), so erhalten wir ein $(m+n)$ -Eck, dessen sämtliche Seiten gleich und parallel einer gewissen Seite des Vielecks K_1 bzw. einer gewissen Seite des Vielecks K_2 sind. Der Umfang dieses Vielecks ist offenbar gleich der Summe aus den Umfängen der Vielecke K_1 und K_2 .

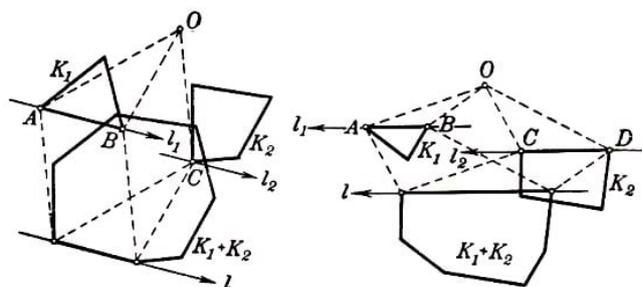


Abb. 189a, b

Nehmen wir jetzt an, die Vielecke K_1 und K_2 haben parallele und gleichgerichtete Seiten. Es sei etwa die Seite AB des Vielecks K_1 parallel der Seite CD des Vielecks

K_2 und habe mit ihr die gleiche Richtung (Abb. 189b).

Dann entspricht jeder Punkt der Strecke AB jedem Punkt der Strecke CD ; die Summe der entsprechenden Punkte bildet eine Strecke, die den Strecken AB und CD parallel und deren Länge gleich der Summe ihrer Längen ist (siehe Aufgabe 37). Die Summe der Vielecke K_1 und K_2 ist ein Vieleck mit weniger als $m + n$ Seiten. Offenbar ist jedoch der Umfang des Vielecks $K_1 + K_2$ auch in diesem Falle gleich der Summe aus den Umfängen der Vielecke K_1 und K_2 .

44. Es seien P_1Q_1 und P_2Q_2 parallele und gleichgerichtete Seiten der Vielecke L_1 und L_2 ; A_1 und A_2 seien ihre Berührungspunkte mit den Kurven K_1 und K_2 (Abb. 190). Gemäß der Definition der Addition konvexer Kurven, die in Aufgabe 41 gegeben wurde, verläuft die Seite PQ des Vielecks $L_1 + L_2$ parallel zu den Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 (siehe Aufgabe 43) durch den Punkt $A_1 + A_2$, d.h., PQ ist eine Stützgerade der Kurve $K_1 + K_2$.

Die Seiten des Vielecks $L_1 + L_2$ sind also Strecken von Stützgeraden der Kurve $K_1 + K_2$. Außerdem ist das Vieleck $L_1 + L_2$ als Summe zweier konvexer Vielecke konvex (Aufgabe 38) und enthält die Kurve $K_1 + K_2$ im Innern (siehe Aufgabe 39). Somit ist $L_1 + L_2$ ein der Kurve $K_1 + K_2$ umbeschriebenes Vieleck.

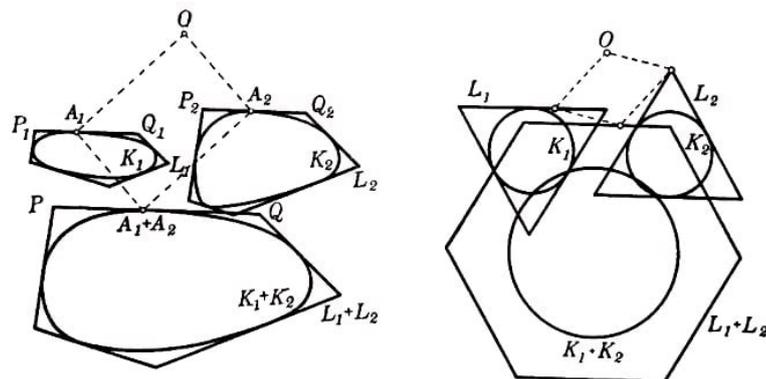


Abb. 190, 191

Wenn die umbeschriebenen Vielecke L_1 und L_2 keine Vielecke mit paarweise parallelen und gleichgerichteten Seiten sind, so gilt die Behauptung der Aufgabe nicht. Sind beispielsweise K_1 und K_2 gleiche Kreise und L_1 und L_2 ihnen umbeschriebene gleichseitige Dreiecke mit parallelen, aber nicht gleichgerichteten Seiten, so ist $K_1 + K_2$ ein Kreis, $L_1 + L_2$ jedoch ein Sechseck, das nicht dem Kreis $K_1 + K_2$ umbeschrieben ist (Abb. 191).

45. Aus der Definition der Addition konvexer Kurven, die in Aufgabe 41 gegeben wurde, folgt:

Enthält die Kurve $K_1 + K_2$ eine geradlinige Strecke AB , so ist diese Strecke der geometrische Ort aller möglichen Summen von Punkten A_1 und A_2 , wobei A_1 Punkte der Kurve K_1 sind, die den Punkten der Strecke AB der Kurve $K_1 + K_2$ entsprechen, während A_2 Punkte der Kurve K_2 sind, die den Punkten der Strecke AB entsprechen. Aus dieser Überlegung und aus der Definition einander entsprechender Punkte einer Kurve (8.33) folgt bereits die Behauptung der Aufgabe (siehe auch Aufgabe 37).

46. Es seien K_1 und K_2 zwei konvexe Kurven, A_1 und A_2 einander entsprechende

Punkte dieser Kurven und l_1 und l_2 durch A_1 bzw. A_2 verlaufende parallele Stützgeraden.

Wir nehmen an, dass beispielsweise A_2 keine Ecke der Kurve K_2 ist (Abb. 192), und beweisen, dass dann die zu l_1 und l_2 parallele Gerade l die einzige durch den Punkt $A = A_1 + A_2$ verlaufende Stützgerade der Figur $K_1 + K_2$ ist; der Punkt A ist also ein regulärer Punkt der Kurve $K_1 + K_2$.

Es sei l' eine beliebige durch den Punkt A führende, von der Geraden l verschiedene Gerade, l'_1 und l'_2 seien zwei zu l' parallele durch den Punkt A_1 bzw. A_2 gehende Geraden. Da A_2 ein regulärer Punkt der Kurve K_2 ist, kann l'_2 keine Stützgerade der Kurve K_2 sein; mit anderen Worten, rechts von l'_1 befindet sich ein Punkt B_2 der Kurve K_2 .

Wir ziehen eine der Strecke A_2B_2 gleiche und parallele Strecke AC . Das Viereck OA_1CB_2 ist ein Parallelogramm, d.h., der Punkt C ist die Summe der Punkte A_1 und B_2 und gehört daher zu der von der Kurve $K_1 + K_2$ begrenzten Figur. Die Dreiecke AA_1C und A_2OB_2 sind aber kongruent und zueinander parallel, daher liegt der Punkt C der von der Kurve $K_1 + K_2$ begrenzten Figur rechts von der Geraden l' ; folglich ist l' keine Stützgerade der Figur $K_1 + K_2$, was zu beweisen war.

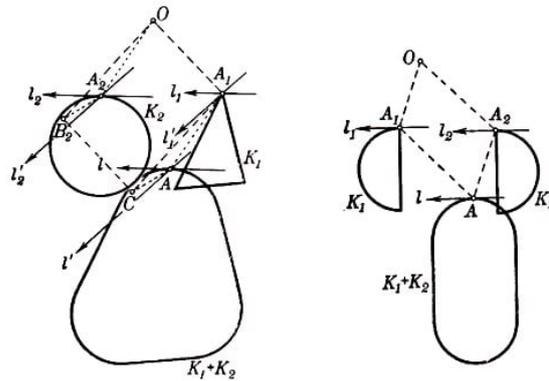


Abb. 192, 193

Daraus, dass die einander entsprechenden Punkte A_1 und A_2 der Kurven K_1 und K_2 Ecken sind, folgt jedoch noch nicht, dass der Punkt $A_1 + A_2$ eine Ecke der Kurve $K_1 + K_2$ sein muss. Beispielsweise sind in Abb. 193 zwei Halbkreise dargestellt, deren Ecken einander entsprechen; die Summe dieser beiden Halbkreise besitzt keine Eckpunkte.

47. Es sei K_1 eine konvexe Kurve, l_1 und l'_1 seien zwei parallele Stützgeraden der Kurve K_1 , die Berührungspunkte dieser Geraden mit der Kurve seien A_1 und A'_1 ; ebenso sei K_2 eine andere konvexe Kurve mit den zu den Geraden l_1 und l'_1 parallelen Stützgeraden l_2 und l'_2 , welche die Kurve K_2 in den Punkten A_2 und A'_2 berühren (Abb. 194).

Wir untersuchen die Summe $K = K_1 + K_2$ dieser beiden Kurven; die zu den Geraden l_1, l'_1, l_2, l'_2 parallelen Stützgeraden der Kurve $K_1 + K_2$ bezeichnen wir mit l und l' und deren Berührungspunkte mit der Kurve $K_1 + K_2$ mit A und A' , für die

$$A = A_1 + A_2 \quad , \quad A' = A'_1 + A'_2$$

(siehe Aufgabe 41). Wir ziehen eine der Strecke OA_2 gleiche und parallele Strecke AO und legen durch den Punkt M eine allen sechs Stützgeraden parallele Gerade l_0 .

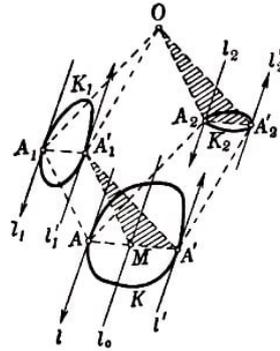


Abb. 194

Das Viereck $A_1'A_1AM$ ist ein Parallelogramm (da die Strecke AM gleich und parallel OA_2 ist, die der Strecke A_1A gleich und parallel ist); das bedeutet, die Strecke AM ist gleich und parallel der Strecke A_1A_1' .
 Hieraus folgt, dass der Abstand zwischen den Geraden l und l_0 gleich dem Abstand zwischen den Geraden l_1 und l_1' , also gleich der Breite h_1 der Kurve K_1 in senkrechter Richtung zu allen gezogenen Stützgeraden ist.

Analog ist die Strecke MA' gleich und parallel der Strecke A_2A_2' ; (da die Dreiecke $A_1'MA'$ und OA_2A_2' kongruent sind), daher ist der Abstand zwischen den Geraden l_0 und l' gleich dem Abstand zwischen den Geraden l_2 und l_2' , d.h. gleich der Breite h_2 der Kurve K_2 in der angegebenen Richtung.

Die Breite h der Kurve $K_1 + K_2$ in der von uns betrachteten Richtung ist gleich der Summe der Abstände zwischen den Geraden l und l_0 und zwischen den Geraden l_0 und l' ; sie ist also gleich $h_1 + h_2$.

48. Es sei K ein beliebiges Vieleck. Nehmen wir an, es habe zwei parallele Seiten AB und CD , und es sei etwa CD die größere dieser Seiten (Abb. 195).

Auf der Strecke CD tragen wir eine der Strecke AB gleiche Strecke CE ab und ziehen die Verbindungsstrecken CA und BE . Dann ist das Vieleck K in das Parallelogramm $ABEC$ und zwei an die Seiten AC und BE angrenzende Teile zerlegt.

Wir bilden aus den beiden letztgenannten Teilen ein neues Vieleck K_1 und bezeichnen eine der Strecke AB gleiche und parallele Strecke mit T_1 . Unter Benutzung der in Aufgabe 41 gegebenen Definition der Addition konvexer Kurven ist nunmehr leicht zu sehen, dass die Summe des Vielecks K_1 und der Strecke T_1 das Vieleck K ergibt (siehe auch Aufgabe 43).

Dabei ist K_1 ein Vieleck, dessen Seitenanzahl um Eins kleiner ist als die des Vielecks K (oder gar um Zwei, wenn die Strecken AB und CD gleich sind), während T_1 eine Strecke ist.

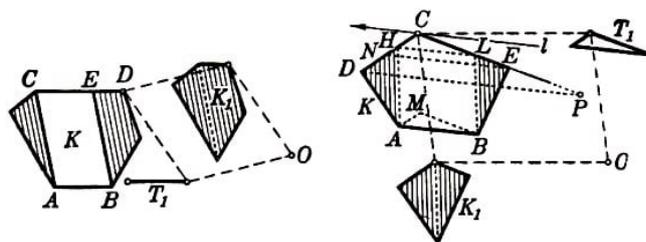


Abb. 195,196

Jetzt möge das Vieleck K keine parallelen Seiten besitzen. Wir wählen eine beliebige Seite AB des Vielecks K aus und ziehen parallel zu AB eine Stützgerade l . Den Berührungspunkt der Geraden l und des Vielecks K bezeichnen wir mit C und die am Eckpunkt C zusammenstoßenden Seiten von K mit CD und CE (Abb. 196).

Wir konstruieren Dreiecke ABM , CDP und CNE , deren Seiten jeweils den Geraden AB , CD und CE parallel sind. Es sei etwa das Dreieck ABM das kleinste von ihnen. Dann übertrifft die Strecke AM nicht die Seite CD und BM nicht die Seite CE . Auf CD und CE tragen wir die Strecken CH und CL ab, die jeweils den Seiten AM und BM gleich sind. Schließlich verbinden wir A mit H und B mit L . Die Dreiecke ABM und CHL sind dann kongruent, und das Viereck $ABLH$ ist ein Parallelogramm.

Damit haben wir das Vieleck K in das Dreieck CHL (das dem Dreieck ABM kongruent ist), das Parallelogramm $ABLH$ und die in Abb. 194 schraffierten Dreiecke ADH und BEL zerlegt. Die schraffierten Dreiecke fügen wir zu einem Vieleck K_1 zusammen und bezeichnen ein dem Dreieck CHL kongruentes Dreieck mit T_1 .

Man sieht leicht, dass die Summe der Vielecke K_1 und T_1 das Vieleck K ergibt. Dabei ist T_1 ein Dreieck, und K_1 besitzt weniger Seiten als K , und zwar mindestens eine weniger, da K_1 bereits keine zu AB parallelen Seiten besaß.

Wir überlassen es dem Leser, selbständig den Fall zu untersuchen, dass ABM nicht das kleinste der Dreiecke ABM , CDP und CNE ist (es empfiehlt sich, eine Zeichnung anzufertigen).

Wenn wir die beiden oben untersuchten Fälle gegenüberstellen, können wir folgern, dass jedes Vieleck K als Summe $K_1 + T_1$ dargestellt werden kann, wobei T_1 eine Strecke oder ein Dreieck ist, während K_1 weniger Seiten als das Vieleck K hat. Ist K_1 ein Dreieck oder eine Strecke, so ist unser Ziel erreicht.

Andernfalls führen wir dasselbe mit dem Vieleck K_1 durch, d.h., wir stellen K_1 als Summe $K_2 + T_2$ dar, wobei T_2 ein Dreieck oder eine Strecke ist und K_2 weniger Seiten hat als K_1 .

Wiederholen wir diese Operation endlich oft, so erreichen wir sicher unser Ziel, da die Anzahl der Vielecksseiten des ersten Summanden immer kleiner wird.

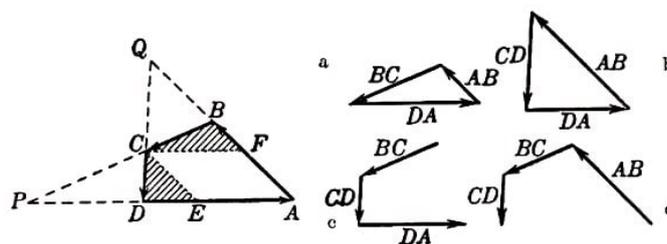


Abb. 197,198

49. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, jedoch kein Parallelogramm oder Trapez. Die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten bezeichnen wir mit P bzw. Q ; P sei der Schnittpunkt der Seite DA (über den Punkt D hinaus verlängert) mit der Seite BC (über den Punkt C hinaus verlängert; Abb. 197).

Man sieht leicht, dass sich ein Dreieck konstruieren lässt, dessen Seiten parallel und gleichgerichtet den Seiten DA , AB und BC oder DA , AB und CD sind (Abb. 198a

und b), dass sich aber kein Dreieck konstruieren lässt, dessen Seiten parallel zu den Seiten BC , CD und DA bzw. AB , BC und CD sind und die gleiche Richtung haben wie diese, da die Strecken, welche die Richtungen dieser Seiten haben, keine geschlossene Linie bilden (Abb. 198c und d).

Da die Seiten der beiden Dreiecke, deren Summe gleich dem Viereck $ABCD$ ist, den Seiten dieses Vierecks parallel sein und die gleiche Richtung haben müssen (siehe Aufgabe 43), kann $ABCD$ nur die Summe von Dreiecken der Art sein, die in Abb. 198a und b dargestellt sind.

Dabei ist leicht zu ersehen, dass die Summe von Dreiecken dieser Art genau dann dem Viereck $ABCD$ gleich ist, wenn das eine der Dreiecke eine Seite besitzt, die gleich BC ist, und das zweite eine Seite hat, die gleich CD ist. Allen diesen Bedingungen genügen nur die in Abb. 197 schraffierten Dreiecke BCF und CDE , deren Summe tatsächlich gleich dem Viereck $ABCD$ ist, wenn der Punkt C als Anfangspunkt genommen wird. Damit haben wir bewiesen, dass das Viereck $ABCD$ nur auf eine Weise als Summe zweier Dreiecke dargestellt werden kann.

Analog zeigt man, dass jedes Trapez nur auf eine Weise als Summe eines Dreiecks und einer Strecke dargestellt werden kann, während sich ein Parallelogramm als Summe zweier Strecken eindeutig darstellen lässt.

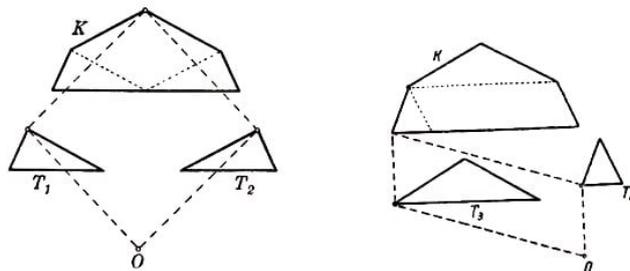


Abb. 199a, b

Für Fünfecke und Vielecke mit größerer Seitenanzahl ändert sich die Sachlage. In Abb. 199a und b sind zwei verschiedene Bildungsmöglichkeiten ein und desselben Fünfecks als Summe zweier Dreiecke dargestellt.

50. Es seien A und B zwei Punkte, die innerhalb der inneren Randkurve der r -Umgebung einer Kurve K liegen, d.h. innere Punkte der von der Kurve K begrenzten Figur, die nicht in der r -Umgebung der Kurve K liegen.

Um die Punkte A und B schlagen wir Kreise vom Radius r und legen an sie ihre gemeinsamen äußeren Tangenten (Abb. 200).

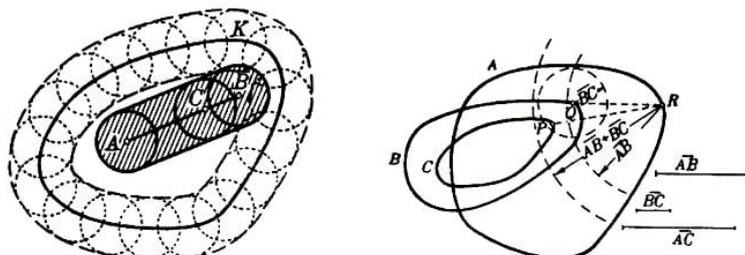


Abb. 200,201

Innerhalb der Kreise liegt kein Punkt der Kurve K ; gäbe es nämlich einen Punkt P der Kurve K , der beispielsweise innerhalb des Kreises vom Radius r um den Punkt A läge,

so wäre der Abstand AP kleiner als r , und der Punkt A wäre innerhalb des Kreises vom Radius r um den Punkt P , also auch innerhalb der r -Umgebung der Kurve K gelegen.

Unsere beiden Kreise liegen also ganz im Innern der konvexen Kurve; folglich liegt auch die Verbindungsstrecke je zweier Punkte aus diesen Kreisen ganz innerhalb der Kurve K .

Hieraus ergibt sich, dass die von den beiden betrachteten Kreisen und ihren Außentangenten begrenzte Figur ganz im Innern von K liegt (in Abb. 200 ist diese Figur schraffiert).

Ist jetzt C ein beliebiger Punkt der Strecke AB , so liegt der Kreis vom Radius r um den Punkt C innerhalb der schraffierten Figur, also völlig im Innern der Kurve K . Folglich kann der Punkt C nicht der r -Umgebung angehören, d.h., er liegt innerhalb der inneren Randkurve der r -Umgebung.

Sämtliche Verbindungsstrecken von je zwei innerhalb der betrachteten Kurve gelegenen Punkte liegen also ebenfalls innerhalb dieser Kurve, d. h., die Kurve ist konvex.

51. Es sei P ein beliebiger Punkt der Kurve C (Abb. 201). Da der Abstand der Kurve C von der Kurve B den Wert BC nicht überschreitet (wir erinnern daran, dass BC der größte der Abstände der Kurve C von der Kurve B und der Kurve B von der Kurve C ist), liegt der Punkt P in der BC -Umgebung der Kurve B , d.h., auf der Kurve B gibt es einen Punkt Q derart, dass der Kreis vom Radius BC um den Punkt Q den Punkt P enthält. Der Abstand PQ überschreitet daher nicht den Wert BC .

Analog gibt es auf der Kurve A einen Punkt R derart, dass der Abstand QR den Wert AB nicht übertrifft (Abb. 201). Aus der Untersuchung des Dreiecks PQR ergibt sich sofort

$$PR \leq PQ + QR \quad \text{also erst recht} \quad PR \leq AB + BC$$

Der Kreis vom Radius $AB + BC$ um den Punkt R enthält damit den Punkt P . Jeder Punkt P der Kurve C ist also in der $(AB + BC)$ -Umgebung der Kurve A enthalten, d.h., der Abstand der Kurve C von der Kurve A überschreitet nicht den Wert $AB + BC$.

Ebenso beweist man, dass der Abstand der Kurve A von der Kurve C den Wert $AB + BC$ nicht überschreitet. Hieraus folgt, dass der Abstand AC zwischen den Kurven A und C nicht größer als $AB + BC$ sein kann; das ist die erste der Ungleichungen, die wir zu beweisen haben.

Die übrigen beiden Ungleichungen werden analog bewiesen.

52. Es sei K_2 die längere der beiden gegebenen Kurven. Da der Abstand der Kurve K_2 von der Kurve K_1 kleiner als r ist, muss die Kurve K_2 ganz in der r -Umgebung der Kurve K_1 gelegen sein; K_2 überschreitet also nicht die Kurve $K_1 + O_r$, welche die r -Umgebung der Kurve K_1 von außen begrenzt.

Hieraus folgt, dass die Länge der Kurve K_2 nicht größer als die Länge der Kurve $K_1 + O_r$ sein kann. Also gilt (wenn L_1 die Länge der Kurve K_1 und L_2 die Länge der Kurve K_2 ist)

$$L_2 \leq L_1 + 2\pi r \quad , \quad L_2 - L_1 \leq 2\pi r$$

was zu beweisen war.

Ist beispielsweise der Inhalt S_2 der von der Kurve K_2 begrenzten Fläche größer als der Inhalt S_1 der von der Kurve K_1 begrenzten Fläche, so ist S_2 nicht größer als der Inhalt der von der Kurve $K_1 + O_r$ begrenzten Fläche, d.h.

$$S_2 \leq S_1 + L_1 r + \pi r^2 \quad \text{also}$$

$$S_2 - S_1 \leq L_1 r + \pi r^2 \leq L r + \pi r^2$$

wobei L die größere der Längen L_1 und L_2 ist.

53. Es sei K eine beliebige konvexe Kurve, aber kein Kreis (die von K begrenzte Fläche ist in Abb. 202 schraffiert). Wir beweisen die Existenz einer Größe r , die so beschaffen ist, dass jeder Kreis von der Kurve K einen größeren Abstand als r besitzt; damit ist dann bewiesen, dass die Kurve K nicht der Limes einer Folge von Kreisen sein kann. Wir legen durch drei beliebige, nicht auf einer Geraden liegende Punkte A , B und C der Kurve K einen Kreis. Da K kein Kreis ist, gibt es auf der Kurve K einen Punkt D , der nicht dem erwähnten Kreis angehört. Der Punkt D liege beispielsweise außerhalb des Kreises, der durch die Punkte ABC gezogen ist (der Beweis verliefte kaum anders, wenn der Punkt D innerhalb dieses Kreises gewählt wäre).

Nehmen wir an, A, B, C, D sei die zyklische Reihenfolge unserer vier Punkte auf der Kurve K . Da K konvex ist, muss das Viereck $ABCD$ ein konvexes Viereck sein (siehe § 1, Aufgabe 10).

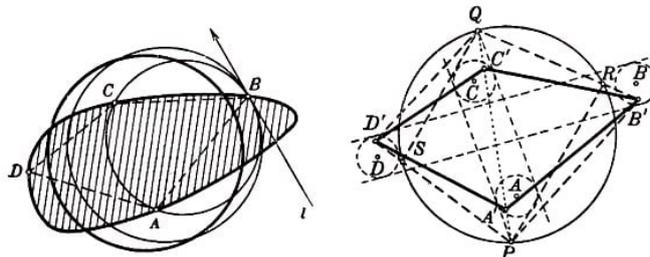


Abb. 202,203

Wir legen eine Tangente l im Punkt B an unseren Kreis, danach konstruieren wir einen Kreis mit größerem Radius, der ebenfalls von der Geraden l im Punkt B tangiert wird, aber so beschaffen ist, dass der Punkt D noch außerhalb dieses Kreises bleibt; die Punkte A und C liegen innerhalb dieses größeren Kreises (Abb. 202).

Nunmehr verschieben wir diesen Kreis senkrecht zur Geraden l um ein hinreichend kleines Stück, so dass der Punkt D noch immer außerhalb des Kreises bleibt, die Punkte A und C jedoch im Kreisinnern bleiben; der Punkt B befindet sich dann schon außerhalb des Kreises.

Damit haben wir einen Kreis gefunden derart, dass von vier Punkten A, B, C und D der Kurve K zwei Punkte - die Punkte A und C - innerhalb des Kreises liegen, während die beiden anderen Punkte, B und D , außen gelegen sind.

Wir schlagen jetzt um die Punkte A, B, C und D Kreise mit hinreichend kleinem (gleichem) Radius, die folgenden Bedingungen genügen:

1. sie sollen den gewählten Kreis nicht schneiden,

2. die Kreise um die Punkte A und C sollen die Außentangenten an die Kreise um die Punkte B und D nicht schneiden, und
3. die Kreise um die Punkte B und D sollen die Außentangenten an die Kreise um die Punkte A und C nicht schneiden (Abb. 203).

Wir behaupten, dass es keinen Kreis geben kann, der gleichzeitig alle vier kleinen Kreise schneidet, d. h. mit anderen Worten, es gibt keine vier Punkte A' , B' , C' , D' , die sich jeweils innerhalb der betrachteten vier Kreise befinden und die alle auf einem Kreis gelegen sind.

Wir untersuchen das Viereck $A'B'C'D'$. Infolge der Bedingungen 2 und 3, nach denen wir uns bei der Konstruktion unserer kleinen Kreise richteten, ist das Viereck konvex; seine Diagonalen schneiden sich in seinem Inneren. Wir behaupten, dass dieses Viereck keinem Kreis einbeschrieben sein kann.

Wir verlängern die Strecke $A'C'$ bis zum Schnitt mit dem großen Kreis in den Punkten P und Q ; ferner möge die Strecke $B'Q$ den großen Kreis im Punkt R und $D'P$ denselben Kreis im Punkt S schneiden. Die Winkel an den Eckpunkten B' und D' des Vierecks $A'B'C'D'$ sind kleiner als die Winkel $PB'Q$ und $PD'Q$; die Summe der Winkel $PB'Q$ und $PD'Q$ ist ihrerseits kleiner als die Summe der Winkel PRQ und PSQ , die gleich 180° ist (siehe Abb. 203).

Die Summe der gegenüberliegenden Winkel bei B' und D' des Vierecks $A'B'C'D'$ ist kleiner als 180° ; folglich kann dieses Viereck unmöglich einem Kreis einbeschrieben sein.

Wir haben also gezeigt, dass kein Kreis gleichzeitig die vier Kreise vom Radius r , die um die Punkte A , B , C und D geschlagen sind, schneiden kann; mit anderen Worten, die vier Punkte A , B , C , D können nicht in der r -Umgebung eines gewissen Kreises liegen. Das bedeutet aber, der Abstand der Kurve K (auf welcher die Punkte A , B , C und D liegen) von jedem Kreis ist größer als r , was zu beweisen war.

54. Es sei K eine beliebige konvexe Kurve, aber kein Dreieck. Wir beweisen die Existenz einer gewissen Größe r derart, dass jedes Dreieck von der Kurve K einen größeren Abstand hat als r . Damit ist dann bewiesen, dass die Kurve K nicht der Limes einer Folge von Dreiecken sein kann.

Ein Dreieck lässt sich durch die Eigenschaft charakterisieren, dass von je sieben auf seinen Seiten gelegenen Punkten mindestens drei auf einer Geraden liegen. Ist die Kurve K kein Dreieck, so gibt es auf ihr notwendigerweise sieben Punkte derart, dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.

Ist nämlich K ein konvexes Vieleck, so muss K wenigstens vier Strecken von verschiedenen Geraden enthalten; nehmen wir von jeder dieser Strecken nur zwei Punkte, so erhalten wir sogar acht Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Enthält K irgendein krummliniges Kurvenstück AB , so erfüllen beliebige sieben Punkte des Bogens AB unsere Bedingung, da nach Aufgabe 4 des § 1 keine Gerade eine konvexe Kurve in mehr als zwei Punkten schneidet.

Es seien jetzt A_1, A_2, \dots, A_7 sieben Punkte der Kurve K , von denen keine drei auf einer

Geraden liegen (Abb. 204). Wir zeigen die Existenz einer Zahl r mit der Eigenschaft, dass es kein Dreieck gibt, in dessen r -Umgebung alle sieben Punkte A_1, A_2, \dots, A_7 liegen.

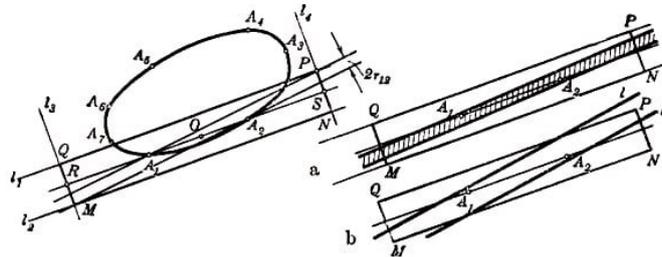


Abb. 204,205

Dazu wählen wir zwei der sieben Punkte aus, etwa A_1 und A_2 , und legen durch sie eine Gerade A_1A_2 ; auf dieser Geraden liegt nach Voraussetzung kein weiterer unserer sieben Punkte.

Parallel zur Geraden A_1A_2 ziehen wir zwei Geraden l_1 und l_2 , die von ihr den gleichen, hinreichend kleinen Abstand haben, so dass in dem zwischen den Geraden l_1 und l_2 gelegenen Streifen außer A_1 und A_2 kein weiterer unserer sieben Punkte enthalten ist. Ferner ziehen wir zwei zu l_1 und l_2 senkrechte Geraden l_3 und l_4 , die in gleichem, hinreichend großem Abstand vom Mittelpunkt O der Strecke A_1A_2 gelegen sind, so dass sich alle sieben Punkte A_1, \dots, A_7 zwischen den Geraden l_3 und l_4 befinden.

Die Geraden l_1, l_2, l_3 und l_4 bilden ein Rechteck, dessen Ecken wir mit den Buchstaben M, N, P und Q bezeichnen (der Punkt A_1 befindet sich näher an der Seite MQ dieses Vierecks, der Punkt A_2 näher an der Seite NP ; siehe Abb. 204).

Schließlich ziehen wir die Geraden A_1P und A_2M . Man sieht leicht, dass sie parallel sind. Aus der Kongruenz der Dreiecke A_1PS und A_2MR , wobei R und S die Schnittpunkte der Geraden A_1A_2 mit den Strecken MQ und NP sind, folgt nämlich, dass die Geraden A_1P und A_2M mit A_1A_2 gleiche Wechselwirkung bilden.

Den Abstand zwischen den parallelen Geraden A_1P und A_2M bezeichnen wir mit $2r_{12}$. Wir stellen fest, dass jeder Streifen zwischen zwei parallelen Geraden, dessen Breite nicht größer als $2r_{12}$ ist und in dessen Innern die Punkte A_1 und A_2 gelegen sind, keine weiteren unserer sieben Punkte enthält.

Das liegt daran, dass der zwischen den Geraden l_3 und l_4 eingeschlossene Teil dieses Streifens ganz innerhalb des Rechtecks $MNPQ$ gelegen ist (Abb. 205a), also außer A_1 und A_2 keine weiteren der sieben gegebenen Punkte enthalten kann; außerhalb des Streifens zwischen den Geraden l_3 und l_4 liegt sowieso keiner dieser sieben Punkte.

Enthält nämlich ein Streifen, dessen Breite nicht größer als $2r_{12}$ ist, die Punkte A_1 und A_2 , so ist der Neigungswinkel der Geraden l und l' , die diesen Streifen begrenzen, zur Geraden A_1A_2 nicht größer als der Winkel PA_1A_2 (Abb. 204), da der Sinus dieses Winkels (gleich dem Verhältnis der Breite des Streifens zu der Strecke, die durch den Streifen aus der Geraden A_1A_2 ausgeschnitten wird) kleiner als der Sinus des Winkels PA_1A_2 ist.

Nehmen wir jetzt an, eine der Geraden l und l' schneide die Seite MN oder PQ des Rechtecks $MNPQ$ (Abb. 205b); beispielsweise möge die Gerade l die Seite PQ

schneiden. Verschieben wir dann den Streifen parallel in Richtung A_1A_2 derart, dass die Gerade l' durch den Punkt A_2 verläuft, so ergibt sich, dass die Gerade l erst recht die Seite PQ schneidet.

Drehen wir nunmehr den verschobenen Streifen um den Punkt A_2 , so dass der Neigungswinkel seiner Begrenzungsgeraden zur Geraden A_1A_2 gleich dem Winkel PA_1A_2 wird (bei Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn!), so schneidet l nach wie vor die Strecke PQ zwischen den Punkten P und Q . Die Gerade l' fällt aber in der neuen Lage mit der Geraden A_2M zusammen (Abb. 204). Da der Abstand zwischen l und l' nicht größer als der Abstand zwischen A_2M und A_1P ist, kann l die Seite PQ nicht schneiden.

Wir führen eine derartige Konstruktion für je zwei unserer gewählten sieben Punkte durch (insgesamt erhalten wir 21 Punktepaare). Auf diese Weise erhalten wir 21 Streifen, deren Breite jeweils $2r_{12}, 2r_{13}, \dots, 2r_{67}$ beträgt.

Den kleinsten dieser Abstände bezeichnen wir mit $2r$. Dieser Abstand hat folgende Eigenschaft: Beträgt die Entfernung zwischen zwei parallelen Geraden $2r$, so können sich in dem dazwischen gelegenen Streifen nicht mehr als zwei der sieben gewählten Punkte befinden (liegen in diesem Streifen zwei Punkte, so kann sich dort kein dritter mehr befinden).

Nunmehr ist leicht zu ersehen, dass die r -Umgebung eines beliebigen Dreiecks T nicht die sieben Punkte A_1, \dots, A_7 enthalten kann. Die r -Umgebung des Dreiecks T ist nämlich in drei Streifen der Breite $2r$ enthalten, welche um die Seiten des Dreiecks gelegt sind (Abb. 206). In jedem dieser Streifen liegen nicht mehr als zwei der gegebenen sieben Punkte.

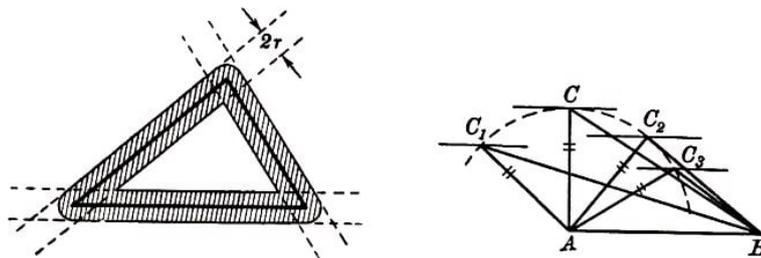


Abb. 206,207

Das bedeutet: In allen drei Streifen können nicht mehr als sechs dieser Punkte enthalten sein. Mit anderen Worten, es kann nicht die ganze Kurve K (der die Punkte A_1, A_2, \dots, A_7 angehören) in der r -Umgebung irgendeines Dreiecks T liegen, d.h., der Abstand eines beliebigen Dreiecks T' von der Kurve K ist größer als r , was zu beweisen war.

55.a) Die Behauptung ist trivial (Abb. 207).

b) Wir legen zwei Dreiecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, derart aufeinander, dass ihre Grundlinien sich decken, die Eckpunkte C und C' auf einer Seite der gemeinsamen Grundlinie AB gelegen sind und gleichzeitig

$$\angle CAB < \angle CBA \quad , \quad \angle C'AB < \angle C'BA$$

gilt (Abb. 208a).

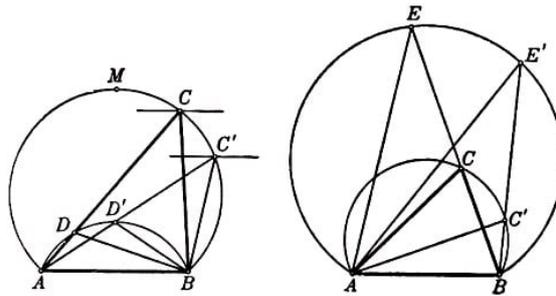


Abb. 208a, b

Dann liegen die Eckpunkte C und C' der Dreiecke auf einem Kreisbogen $BC'CA$, und der Peripheriewinkel ACB ist gleich dem Peripheriewinkel $AC'B$. Aus Abb. 208. ist sofort ersichtlich, dass der Eckpunkt C des Dreiecks ABC , für welches die Differenz der Basiswinkel kleiner ist als beim Dreieck ABC' , der Mitte des Bogens $BC'CA$ am nächsten gelegen ist.

Hieraus folgt, dass die Höhe des Dreiecks ABC größer als die Höhe des Dreiecks ABC' ist. Daher gilt $S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC'}$.

Es bleibt noch zu beweisen, dass

$$CA - CB < C'A - C'B \quad \text{und} \quad CA + CB > C'A + C'B$$

ist.

Wir tragen auf der Seite CA die Strecke $CD = CB$ und auf der Seite $C'A$ die Strecke $C'D' = C'B$ ab und verbinden D und D' mit B (Abb. 208a).

Da die Winkel ADB und $AD'B$ Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke BCD und $BC'D'$ sind, gilt

$$\angle ADB = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}, \quad \angle AD'B = 90^\circ + \frac{\angle AC'B}{2}$$

Da $\angle ADB = \angle AD'B$ ist, liegen D und D' auf einem Kreisbogen $BD'DA$. Ferner ist $\angle DBA < \angle D'BA < 180^\circ$, also

$$CA - CB = DA < D'A = C'A - C'B$$

Tragen wir auf den Verlängerungen der Seiten BC und BC' die Strecken $CE = CA$ und $C'E' = C'A$ ab (Abb. 208b), so erhalten wir analog

$$CA + CB = BE > BE' = C'A + C'B, \quad \text{da} \quad \angle AEB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{\angle AC'B}{2} = \angle AE'B$$

ist. Die zweite Behauptung der Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus dem Bewiesenen.

c) Ein Parallelogramm mit gegebenem spitzen Winkel α und gegebenem Umfang wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Daher genügt es für die Lösung der Aufgabe zu beweisen, dass von allen Dreiecken mit gegebenem Winkel α und gegebener Länge p der an den Winkel α angrenzenden Seiten das gleichschenklige Dreieck den größten Flächeninhalt besitzt.

Es sei also ABC ein ungleichseitiges Dreieck derart, dass $\angle BAC = \alpha$ und $AB + AC =$

p ist. Nehmen wir an, es sei beispielsweise $AB > AC$ (andernfalls verläuft der Beweis analog).

Wir konstruieren ein gleichschenkliges Dreieck $AB'C'$, für das $\angle B'AC' = \alpha$ und $AB' + AC' = p$ ist, und dessen Lage in Abb. 209 dargestellt ist.

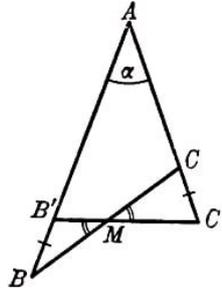


Abb. 209

Den Schnittpunkt der Seiten BC und $B'C'$ bezeichnen wir mit M .

Wir beweisen jetzt, dass

$$S_{\Delta CC'M} > S_{\Delta BB'M}$$

Die Dreiecke $CC'M$ und $BB'M$ haben nämlich gleiche Winkel am Eckpunkt M und gleiche Grundlinien CC' und BB' , denn

$$CC' - BB' = (AC' - AC) - (AB - AB') = (AB' + AC') - (AB + AC) = p - p = 0$$

Ferner ist von den vier Winkeln $BB'M$, $B'BM$, $CC'M$ und $C'CM$ der erste am größten und folglich der zweite am kleinsten (da die Summe der ersten beiden Winkel gleich der Summe der letzten beiden ist). Hieraus folgt, dass die Differenz der Basiswinkel des Dreiecks $BB'M$ größer ist als die Differenz der Basiswinkel des Dreiecks $CC'M$. Damit gilt $S_{\Delta CC'M} > S_{\Delta BB'M}$ (siehe Aufgabe 55b).

Somit ist $S_{\Delta AB'C'} > S_{\Delta ABC}$, was zu beweisen war.

Anmerkung. Die Aufgabe lässt sich auch sehr einfach algebraisch lösen. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten a und b und dem Winkel α ist gleich

$$ab \sin \alpha = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] \sin \alpha = \frac{1}{4}[p^2 - (a-b)^2] \sin \alpha$$

wobei $p = a + b$ der halbe Umfang des betrachteten Parallelogramms ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass bei gegebenem Umfang $2p$ und spitzem Winkel α der Flächeninhalt am größten ist, wenn $a - b = 0$, also $a = b$ ist, d. h., wenn das Parallelogramm ein Rhombus ist.

d) Wir legen zwei den Bedingungen der Aufgabe genügende Dreiecke so aufeinander, dass ihre Grundlinien zusammenfallen und die Eckpunkte C und C' auf einer Seite der gemeinsamen Grundlinie AB gelegen sind; es sei dabei

$$\Delta CAB < \Delta CBA \quad , \quad \Delta C'AB < \Delta C'BA$$

(Abb.210). Außerdem sei $\Delta CAB > \Delta C'AB$. Wäre dabei $\Delta CBA > \Delta C'BA$, so wäre das Dreieck ABC' in dem Dreieck ABC eingeschlossen, und sie könnten keinen gleichen Umfang besitzen.

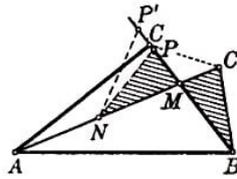


Abb. 210

Folglich liegen die Dreiecke so, wie es in Abb. 210 dargestellt ist; hieraus und aus den obigen Relationen für die Winkel folgt, dass die Differenz der Basiswinkel beim Dreieck $AC'B$ am größten ist.

Den Schnittpunkt der Seiten AC' und BC bezeichnen wir mit M . Wir tragen auf der Geraden MA die Strecke $MN = MB$ und auf der Geraden MC die Strecke $MP = MC'$ ab. Dann liegt der Punkt N zwischen A und M , da aus

$$\triangle MBA > \triangle CAB > \triangle MAB$$

folgt, dass $MA > MB$ ist. Andererseits liegt der Punkt P zwischen M und C ; denn fiel er mit irgendeinem Punkt P' auf der Verlängerung von MC zusammen, so ergäbe sich aus der Gleichheit der Umfänge der beiden Dreiecke, dass $AC + CB = AC' + C'B$ ist, d.h.

$$AC + P'M - CP' + MB = AN + NM + MC' + C'B$$

Hieraus ergäbe sich, da $P'M = MC'$ und $MB = MN$ ist,

$$AC = AN + NP' + P'C$$

was jedoch unmöglich ist.

Nehmen wir nunmehr von den Dreiecken ABC und ABC' die einander kongruenten Dreiecke NMP und MBC' (die in Abb. 208 schraffiert sind) fort, so stellen wir fest, dass das Dreieck ABC den größten Flächeninhalt besitzt.

Wir müssen noch beweisen, dass $CA - CB < CA' - CB'$. Dazu genügt es zu prüfen, dass $AC < AC'$ ist (und folglich $BC > BC'$).

Wäre $AC > AC'$, $BC < BC'$, so erhielten wir bei der Betrachtung der Dreiecke ACC' und BCC' zwei sich widersprechende Ungleichungen

$$\angle ACC' < \angle AC'C \quad , \quad \angle BCC' > \angle BC'C$$

Die Gleichung $AC = AC'$ kann nicht gelten, da die Dreiecke ABC und ABC' nach Voraussetzung inkongruent sind.

Wir bemerken noch, dass sich aus der Lösung auch folgende Formulierung der Aufgabe ergibt: Von zwei verschiedenen Dreiecken mit gemeinsamer Grundlinie und gleichem Umfang besitzt dasjenige den kleineren Flächeninhalt, zu dem der größte der vier Basiswinkel gehört.

Die zweite Behauptung der Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus dem Bewiesenen.

e) Damit bei gegebenen Grundlinien der Flächeninhalt eines Trapezes $ABCD$ am größten wird, ist es notwendig, dass seine Höhe ein Maximum ist.

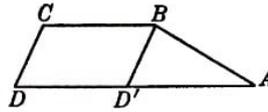


Abb. 211

Zieht man die Linie $BD' \parallel CD$ (Abb. 211), so ergibt sich: Der größten Höhe des Trapezes $ABCD$ entspricht der größte Flächeninhalt des Dreiecks ABD' mit gegebener Grundlinie (die gleich der Differenz der Grundlinien des Trapezes ist) und gegebenem Umfang (gleich dem Umfang des Trapezes abzüglich dem Doppelten der kleineren Grundlinie). Dann bleibt nur noch auf das Dreieck ABD' die Schlussweise aus Aufgabe 55d anzuwenden.

56. a) Es sei ABC ein ungleichseitiges Dreieck und AB seine größte Seite (bzw. eine der beiden größeren Seiten).

Das gleichschenklige Dreieck ABC' , das gleichen Umfang wie das Dreieck ABC und mit diesem die Grundlinie gemeinsam hat (Abb. 212a), besitzt nach Aufgabe 55d keinen kleineren Flächeninhalt als das Dreieck ABC .

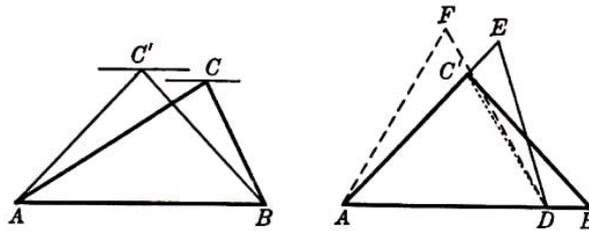


Abb. 212a, b

Wir konstruieren jetzt ein Dreieck ADE , dessen Seite AD gerade $\frac{1}{3}$ des Umfangs des Dreiecks ABC' beträgt, bei dem $\angle DAE = \angle BAC'$ gilt und dessen Umfang gleich dem Umfang des Dreiecks ABC' ist.

Wir legen das Dreieck ADE so, wie es in Abb. 212b dargestellt ist. Da AB die größte Seite des Dreiecks ABC' und AD gleich einem Drittel des Umfangs dieses Dreiecks ist, muss $AB > AD$ sein. Hieraus folgt, dass $AE > AC'$ ist (da sonst das Dreieck ADE in dem Dreieck ABC' eingeschlossen wäre und nicht den gleichen Umfang haben könnte).

AB ist die größte Seite des gleichschenkligen Dreiecks ABC' , daher gilt

$$AC' = BC' < \frac{AB + BC' + C'A}{3} = AD$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass $\angle AC'D > \angle ADC'$ ist, das heißt $\angle EC'D < \angle BDC'$. Da außerdem offenbar $\angle BDC' > \angle EDC'$ ist, können wir nach Aufgabe 55d schließen, dass von den beiden Dreiecken $C'DE$ und $BC'D$, die eine gemeinsame Grundlinie und gleichen Umfang haben, das zweite einen kleineren Flächeninhalt besitzt (siehe letzte Anmerkung in der Lösung der Aufgabe 55d). Somit gilt

$$S_{\triangle C'DE} > S_{\triangle BC'D} \quad , \quad S_{\triangle ADE} > S_{\triangle ABC'}$$

Nunmehr konstruieren wir über der Grundlinie AD ein gleichschenkliges Dreieck ADF , das den gleichen Umfang besitzt wie das Dreieck ADE (dieses Dreieck, das in Abb. 212b gestrichelt gezeichnet ist, muss offenbar gleichseitig sein); gemäß Aufgabe 55d

ergibt sich, dass $S_{\triangle ADF} > S_{\triangle ADE}$ ist (das Dreieck ADE fällt nicht mit dem gleichseitigen Dreieck ADF zusammen, da $\angle EAD = 60^\circ$ ist). Die Ungleichungen

$$S_{\triangle ABC} \leq S_{\triangle ABC'} < S_{\triangle ADE} < S_{\triangle ADF}$$

beweisen den Satz (wir müssen einmal in dieser Ungleichungskette \leq an Stelle von $<$ schreiben, da es nicht sicher ist, ob das Dreieck ABC nicht gleich dem Dreieck ABC' , d.h., ob ABC nicht schon gleichschenkelig ist).

b) Wir zerlegen das Viereck $ABCD$ durch seine Diagonale AC' in zwei Dreiecke. Ersetzen wir die Dreiecke ABC und ACD durch die gleichschenkligen Dreiecke $AB'C$ und ACD' mit den gleichen Grundlinien und den gleichen Umfängen, so erhalten wir ein Viereck $AB'CD'$, wobei nach Aufgabe 55d

$$S_{\triangle AB'CD'} \geq S_{\triangle ABCD}$$

gilt (Abb. 213a). Nunmehr ersetzen wir die gleichen Dreiecke $AB'D'$ und $B'CD'$ durch die gleichschenkligen Dreiecke $A'B'D'$ und $B'C'D'$ mit den gleichen Grundlinien und den gleichen Umfängen. Wir erhalten einen Rhombus $A'B'C'D'$, und es ist

$$S_{\triangle A'B'C'D'} \geq S_{\triangle AB'CD'}$$

(Abb. 213b). Schließlich hat der Rhombus $A'B'C'D'$ nach Aufgabe 55a keinen größeren Flächeninhalt als das Quadrat $A''B''C''D''$ mit denselben Seiten (Abb. 213c).

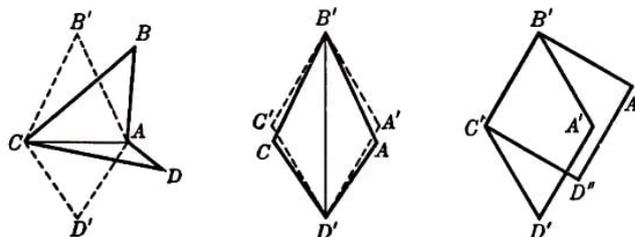


Abb. 213a, b, c

Ist das Viereck $ABCD$ kein Quadrat, so muss in der Ungleichungskette

$$S_{\triangle ABCD} \leq S_{\triangle AB'CD'} \leq S_{\triangle A'B'C'D'} \leq S_{\triangle A''B''C''D''}$$

mindestens an einer Stelle das Kleinerzeichen gelten.

57.a) Ist ein einem Kreis eingeschriebenes n -Eck nicht regelmäßig, so besitzt es eine Seite, die kleiner ist als die Seiten des entsprechenden regelmäßigen n -Ecks. Wir nehmen ferner an, dass unser einem Kreis eingeschriebenes unregelmäßiges n -Eck eine Seite besitzt, die größer ist als die Seiten des regelmäßigen n -Ecks (wäre dies nicht der Fall, so wäre das ganze n -Eck einem Kreisbogen eingeschrieben, der kleiner als der n -te Teil des Kreises ist; diesen Fall können wir aber sofort ausschließen, da dann das Vieleck ganz in dem regelmäßigen n -Eck untergebracht werden könnte und sicher kleineren Flächeninhalt hätte; Abb. 214).

Ohne Änderung des Flächeninhalts eines Vielecks, das einem Kreis eingeschrieben ist, können wir die Plätze seiner Seiten vertauschen, so dass eine Seite, die größer als

die Seiten des regelmäßigen n -Ecks ist, und eine Seite, die kleiner als die Seiten des regelmäßigen n -Ecks ist, nebeneinander liegen (vertauscht man die Plätze zweier benachbarter Seiten eines Vielecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, so ändert sich der Flächeninhalt des Vielecks offenbar nicht; Abb. 215; durch Wiederholung dieses Prozesses lässt sich erreichen, dass zwei beliebige Seiten nebeneinander liegen).

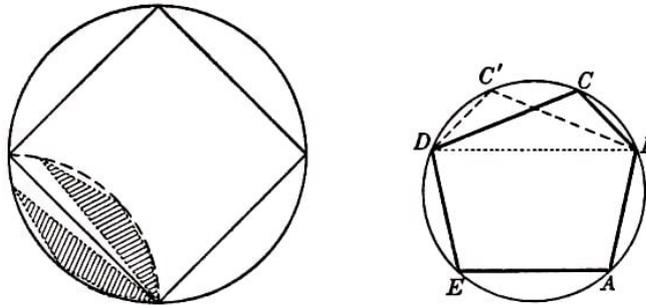


Abb. 214,215

Ändern wir jetzt ohne Vertauschung der übrigen Seiten die Längen dieser beiden Seiten derart, dass eine von ihnen gleich einer Seite des regelmäßigen n -Ecks wird und das Vieleck dabei dem Kreis einbeschrieben bleibt, so wird nach Aufgabe 55b der Flächeninhalt des n -Ecks größer.

Setzen wir diesen Prozess weiter fort, so erhalten wir schließlich ein regelmäßiges n -Eck. Bei diesem Prozess der Ersetzung des ursprünglichen n -Ecks kann der Flächeninhalt nur wachsen.

b) Der Beweis verläuft analog zur Lösung der Aufgabe 57a.

58. Erste Lösung. Wir unterwerfen das Viereck $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Koeffizienten $k = 2$. Dabei wird die Seite $A'B'$ des transformierten Vierecks $A'B'C'D'$ gleich der Seite CD des Vierecks $ABCD$. Jetzt fügen wir die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ mit den gleichen Seiten aneinander, wie das in Abb. 216a dargestellt ist.

Der Flächeninhalt der Gesamtfigur $ADC'D'CB$ ist offensichtlich gleich

$$S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'} = (1 + k^2)S_{ABCD}$$

Aus der Ähnlichkeit der Vierecke $A'B'C'D'$ und $ABCD$ folgt $\angle ADC' = \angle BCD$. Es ist nämlich

$$\angle BCD' = \angle C + \angle A \quad , \quad \angle ADC' = 4d - \angle D - \angle B = \angle C + \angle A$$

Die Produkte der Seiten der Dreiecke DAC' und CBD' , welche gleiche Winkel einschließen, sind ebenfalls gleich, denn $d \cdot kb = b \cdot kd$. Somit gilt

$$S_{\triangle CBD'} = S_{\triangle DAC'}$$

und folglich

$$S_{ABD'C'} = S_{ABCD'C'D} = (1 + k^2)S_{ABCD} = \frac{a^2 + c^2}{a^2} S_{ABCD}$$

Das Viereck $ABD'C'$ ist ein Trapez, denn die Parallelität der Seiten AB und $C'D'$ folgt aus der Gleichheit der Wechselwinkel, die sie mit der Sekante CD bilden (die Winkel

1 und 2 in Abb. 216a). Wir müssen feststellen, in welchem Fall der Flächeninhalt des Trapezes $ABD'C'$ mit den gegebenen Grundlinien $AB = a$ und $C'D' = kc = \frac{c^2}{a}$ am größten wird, d. h. wann dieses Trapez eine größte Höhe hat.

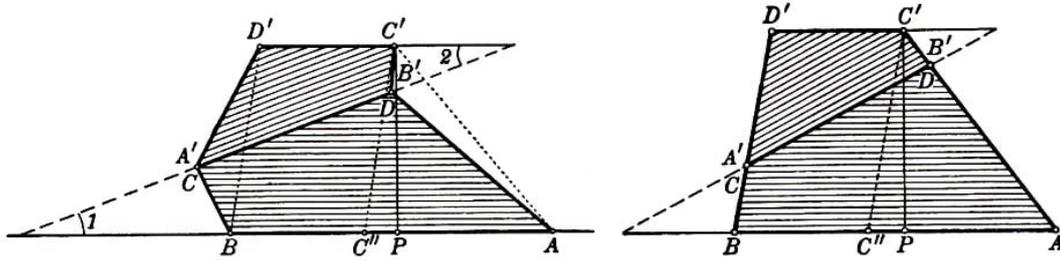


Abb. 216 a,b

Dazu ziehen wir $C'C'' \parallel D'B$ und untersuchen das Dreieck $AC'C''$, welches die gleiche Höhe wie das Trapez $ABD'C'$ und die Grundlinie

$$AC'' = a - kc = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

hat. Wir stellen fest, dass die Differenz der Quadrate der Seitenlinien dieses Dreiecks bei gegebenen Seiten des Vierecks $ABCD$ konstant ist. Nach dem Kosinussatz gilt nämlich

$$C'C''^2 = D'B^2 = b^2 + k^2d^2 - 2kdb \cos \angle BCD'$$

$$AC'^2 = d^2 + k^2b^2 - 2kdb \cos \angle ADC'$$

und da $\angle BCD' = \angle ADC'$ ist, gilt

$$C'C''^2 - AC'^2 = b^2 + k^2d^2 - (d^2 + k^2b^2) = (b^2 - d^2)(1 - k^2) = \frac{(b^2 - d^2)(a^2 - c^2)}{a^2}$$

Wir bezeichnen den Fußpunkt der Höhe des Dreiecks $AC'C''$ mit P . Dann gilt

$$AC'^2 = AP^2 + C'P^2 \quad , \quad C'C''^2 = C''P^2 + C'P^2$$

$$C'C''^2 - AC'^2 = C''P^2 - AP^2 = (C''P + AP)(C''P - AP)$$

Wir nehmen an, der Punkt P liege zwischen den Punkten A und C'' , dann ist

$$C''P + AP = AC'' = a - kc = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

und folglich⁸³

$$C''P - AP = \frac{b^2 - d^2}{a}$$

⁸³Hieraus ergibt sich, dass unsere Annahme, der Punkt P liege zwischen A und C'' , nur dann richtig ist, wenn $a^2 - c^2 \geq b^2 - d^2$. Ist aber $a^2 - c^2 < b^2 - d^2$, so liegt der Punkt C'' zwischen A und P ; die weiteren Überlegungen ändern sich in keiner Weise (im diesem Falle gilt $C'' + AP = \frac{b^2 - d^2}{a}$ und $C''P - AP = \frac{a^2 - c^2}{a}$)

also

$$AP = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2a}, \quad C''P = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2a}$$

womit die Lage des Punktes P eindeutig bestimmt ist.

Damit hängt der Fußpunkt der von C' auf die Seiten AB des Trapezes $ABD'C'$ gefällten Höhe nicht von den Winkeln des Vierecks $ABCD$ ab. Hieraus ergibt sich, dass die Höhe $C'P$ des Trapezes dann am größten ist, wenn die Winkel des Vierecks die Relation $\angle C + \angle A = 180^\circ$ erfüllen (in diesem Falle hat die Seite AC' des Dreiecks $AC'C''$ den größten Wert $d + kb = d + \frac{bc}{a}$; siehe Abb. 216b), d.h. wenn sich das Viereck $ABCD$ einem Kreis einbeschreiben lässt, was zu beweisen war.

Anmerkung. Die Voraussetzung der Aufgabe ist sinnvoll, da ein eindeutig bestimmtes Viereck existiert, das sich einem Kreis einbeschreiben lässt und dessen Seiten in bestimmter Reihenfolge vorgegebene Längen a, b, c und d haben. Man kann nämlich ohne weiteres so ein Viereck konstruieren, wenn man die oben dargelegten Überlegungen benutzt. Zunächst können wir ohne Schwierigkeit mit den beiden Seiten

$$AP = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2a} \quad \text{und} \quad AC' = d + \frac{bc}{a}$$

ein rechtwinkliges Dreieck APC' konstruieren (Abb. 216b). Tragen wir auf den Seiten AP und AC' dieses Dreiecks jeweils die Strecken $AB = a$ und $AD = d$ ab, so finden wir die Eckpunkte B und D des gesuchten Vierecks $ABCD$, worauf sich der letzte Eckpunkt C leicht konstruieren lässt, da $BC = b$ und $DC = c$ ist.

In der Voraussetzung der vorliegenden Aufgabe braucht nicht notwendig gefordert zu werden, dass die Reihenfolge der Seiten des Vierecks bestimmt sei (gemeint ist die Voraussetzung, von der wir in unserer Lösung ausgingen). Folgen nämlich in einem beliebigen Viereck $PQRS$ die Seiten etwa in der Reihenfolge $PQ = a, QR = b, RS = c, SP = d$ aufeinander, so ist sein Flächeninhalt kleiner als der Flächeninhalt des einem Kreis einbeschriebenen Vierecks $P'Q'R'S'$, in welchem die Seiten in der gleichen Reihenfolge auftreten ($P'Q' = a, Q'R' = b, R'S' = c, S'P' = d$).

Der Flächeninhalt des letzten Vierecks ist nun, wie aus Abb. 217 leicht zu ersehen ist, gleich dem Flächeninhalt des einem Kreis einbeschriebenen Vierecks $P'Q'R'S'$ mit den Seiten $P'Q' = a, Q'R' = b, R'S' = c, S'P' = d$, die in anderer Reihenfolge auftreten.⁸⁴

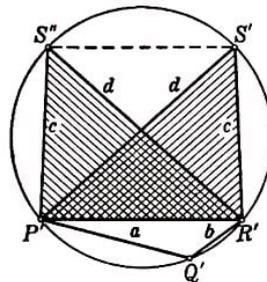


Abb. 217

⁸⁴Man kann beweisen, dass der Flächeninhalt eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d , das einem Kreis einbeschrieben ist, gleich $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ mit $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ist (verallgemeinerte Heronische Formel). Hieraus ist sofort ersichtlich, dass der Flächeninhalt nicht von der Reihenfolge der Seiten abhängt. Wir benötigen diese Formel nicht.

Zweite Lösung (vgl. mit der ersten Lösung der Aufgabe 59a).

Wir betrachten zwei Vierecke mit gleichen Seiten: das Viereck $ABCD$, welches einem Kreis S mit dem Radius R und dem Mittelpunkt O einbeschrieben ist, sowie das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ (Abb. 218a, b).

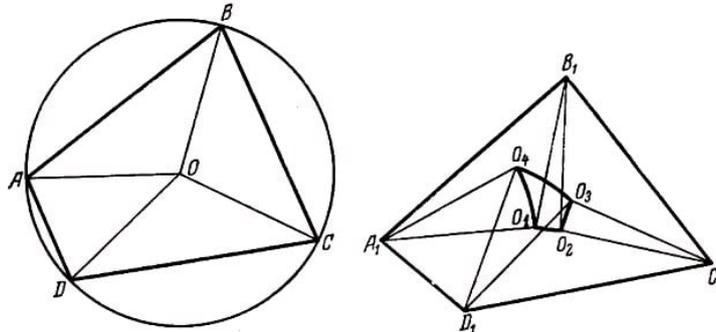


Abb. 218 a,b

Nun stellen wir uns vor, dass das Viereck $ABCD$ beweglich sei, und deformieren es durch Änderung der Winkel derart, dass es in das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ übergeht. Dabei verändern die den Seiten des Vierecks $ABCD$ anliegenden gleichschenkligen Dreiecke ABO , BCO , CDO und DAO ihre Lage und gehen schließlich in die Dreiecke $A_1B_1O_1$, $B_1C_1O_2$, $C_1D_1O_3$ und $D_1A_1O_4$ über (Abb. 218 b).

Jetzt vergleichen wir die Flächeninhalte von $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ miteinander. Es gilt

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABO} &= S_{\triangle A_1B_1O_1}, & S_{\triangle BCO} &= S_{\triangle B_1C_1O_2} \\ S_{\triangle CDO} &= S_{\triangle C_1D_1O_3}, & S_{\triangle DAO} &= S_{\triangle D_1A_1O_4} \end{aligned}$$

Wir verbinden die Punkte O_1 und O_2 , O_2 und O_3 , O_3 und O_4 , O_4 und O_1 miteinander durch Bogen eines Kreises vom Radius R und mit dem Zentrum in den Punkten B_1 , C_1 , D_1 bzw. A_1 . Wir zeigen jetzt, dass zwei der gegenüberliegenden Winkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ kleiner sind als die entsprechenden Winkel des Vierecks $ABCD$ und dass die beiden übrigen Winkel größer sind als die entsprechenden Winkel in $ABCD$.

Angenommen, es sei $\angle A_1 < \angle A$; in diesem Fall ergibt sich aus dem Vergleich der Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$ (wobei $AB = A_1B_1$ und $AD = A_1D_1$ ist), dass $B_1D_1 < BD$ ist.

Vergleichen wir nun die Dreiecke CBD und $C_1B_1D_1$ miteinander, so können wir schließen, dass $\angle C_1 < \angle C$ ist. Weiterhin können nicht alle Winkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ kleiner sein als die entsprechenden Winkel des Vierecks $ABCD$ (da die Summe aller Winkel im Viereck stets gleich 360° ist).

Setzen wir zum Beispiel $\angle B_1 < \angle B$ voraus, so folgt $A_1C_1 > AC$ (das ergibt sich aus dem Vergleich der Dreiecke BAC und $B_1A_1C_1$) und $\angle D_1 > \angle D$ (das folgt aus dem Vergleich der Dreiecke DAC und $D_1A_1C_1$).

Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \angle A_1 &= \angle O_1A_1B_1 + \angle O_4A_1D_1 - \angle O_1A_1O_4 = \angle OAB + \angle OAD - \angle O_1A_1O_4 = \angle A - \angle O_1A_1O_4 \\ \angle B_1 &= \angle B - \angle O_1B_1O_2 \\ \angle C_1 &= \angle C - \angle O_2C_1O_3 \\ \angle D_1 &= \angle D - \angle O_3D_1O_4 \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$(\angle A - \angle A_1) + (\angle C - \angle C_1) = (\angle B_1 - \angle B) + (\angle D_1 - \angle D)$$

(weil $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 360^\circ$ ist); also ist

$$\angle O_1A_1O_4 + \angle O_2C_1O_3 = \angle O_1B_1O_2 + \angle O_3D_1O_4$$

und folglich

$$S_{\text{Sekt. } A_1O_1O_4} + S_{\text{Sekt. } C_1O_2O_3} = S_{\text{Sekt. } B_1O_1O_2} + S_{\text{Sekt. } D_1O_3O_4}$$

Da nun die Differenz

$$S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} - (S_{\Delta A_1B_1O_1} + S_{\Delta B_1C_1O_2} + S_{\Delta C_1D_1O_3} + S_{\Delta D_1A_1O_4}) \\ + (S_{\text{Sekt. } A_1O_1O_4} + S_{\text{Sekt. } C_1O_2O_3} - S_{\text{Sekt. } B_1O_1O_2} - S_{\text{Sekt. } D_1O_3O_4})$$

wie aus Abb. 218 b ersichtlich ist, gleich dem Flächeninhalt des von den vier Kreisbögen begrenzten Vierecks $O_1O_2O_3O_4$ ist, genügt es für den Beweis der Ungleichung

$$S_{A_1B_1C_1D_1} > S_{ABCD}$$

(und das ist ja der Inhalt unserer Aufgabe) zu zeigen, dass der Flächeninhalt dieses Bogenvierecks $O_1O_2O_3O_4$ stets einen positiven Wert hat. Letztere Behauptung hat folgenden Sinn.

Es ist von vornherein nicht sicher, dass sich die Bögen O_1O_4 und O_2O_3 nicht schneiden, d. h., dass unser Bogenviereck nicht die in Abb. 219 gezeigte Form hat.

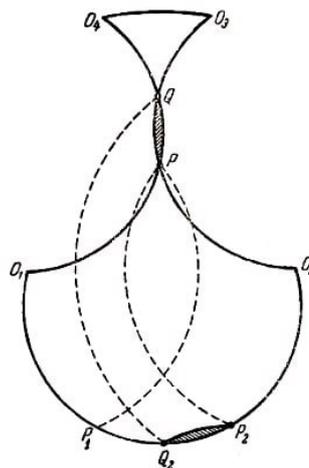


Abb. 219

In diesem Fall müsste das Zweieck PQ von der Gesamtfläche abgezogen werden, da es in die Sektoren $A_1O_1O_4$ und $C_1O_2O_3$ hineinragt. Wir müssen beweisen, dass der Flächeninhalt dieses Zweiecks die Summe der Flächeninhalte der Bogendreiecke O_1O_2P und O_3O_4Q nicht übersteigen kann.

Dies meinen wir, wenn wir vom positiven Wert des Flächeninhalts des Bogenvierecks $O_1O_2O_3O_4$, sprechen (hat nämlich das Viereck die in Abb. 219 gezeigte Form, so

müssen wir zur Bestimmung seines Flächeninhalts die Formel $S_{O_1O_2P} + S_{O_3O_4Q} - S_{PQ}$ anwenden).

Wir bemerken, dass alle Bögen O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_4 und O_4O_1 ein und denselben Radius R haben und folgende Beziehung gilt:

$$\widehat{O_1O_2} + \widehat{O_3O_4} = \widehat{O_1O_4} + \widehat{O_2O_3}$$

(da $\angle O_1B_1O_2 + \angle O_3D_1O_4 = \angle O_1A_1O_4 + \angle O_2C_1O_3$ ist). Somit gilt

$$(\widehat{O_1O_2} + \widehat{O_3O_4}) - (\widehat{O_1O_4} + \widehat{O_2O_3}) = (\widehat{O_1O_2} - \widehat{O_1P} - \widehat{O_2Q}) + (\widehat{O_3O_4} - \widehat{O_3P} - \widehat{O_4Q}) = 0$$

da mindestens einer der Ausdrücke $\widehat{O_1O_2} - \widehat{O_1P} - \widehat{O_2Q}$ und $\widehat{O_3O_4} - \widehat{O_3P} - \widehat{O_4Q}$ nicht negativ ist. Angenommen, dies gelte für den ersten Ausdruck.

Wir drehen den Bogen O_1P um O_1 in die Lage O_1P_1 und den Bogen O_2Q mit dem Zweieck PQ um O_2 in die Lage $O_2P_2Q_2$ (Abb. 219); dabei gilt

$$\widehat{O_1P_1} + \widehat{O_2Q_2} = \widehat{O_1P} + \widehat{O_2Q} \leq \widehat{O_1O_2}$$

Hieraus folgt, dass das Zweieck P_2Q_2 den Bogen O_1P und den Bogen O_2P nicht schneiden kann (denn es schneidet sowohl den "Kurvensektor" O_1P_1P als auch den "Kurvensektor" O_2P_2P nicht). Also gilt $S_{PQ} = S_{P_2Q_2} < S_{O_1O_2P}$ und weiter $S_{PQ} < S_{O_1O_2P} + S_{O_3O_4P}$.

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

59.a) Erste Lösung (vgl. mit der zweiten Lösung der Aufgabe 58). Wir betrachten das Viereck $ABCD$, welches einem Kreis ρ mit dem Radius r umschrieben ist, sowie ein weiteres Viereck $A_1B_1C_1D_1$, welches denselben Winkel und denselben Umfang hat wie das erste (Abb. 220 a, b).

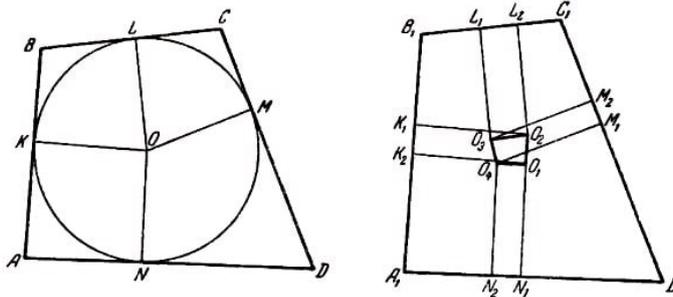


Abb. 220 a, b

Vom Zentrum O aus fallen wir die Lote OK , OL , OM und ON auf die Seiten des Vierecks $ABCD$ und betrachten nun die Vierecke $A_1N_1O_1K_2 = ANOK$, $B_1K_1O_2L_2 = BKOL$, $C_1L_1O_3M_2 = CLOM$ und $D_1M_1O_4N_2 = DMON$, deren Winkel bei A_1 , B_1 , C_1 und D_1 mit den Winkeln des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$, übereinstimmen.

Offensichtlich wird für $A_1B_1 > AB$ auch $C_1D_1 > CD$ (zum Beweis genügt es, die Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so aufeinanderzulegen, dass sich die Ecken A und A_1 , die Seiten A_1D_1 und AD sowie die Seiten A_1B_1 und AB decken); ebenso erhalten wir in diesem Fall $B_1C_1 < BC$ und $D_1A_1 < DA$.

Da nun die Umfänge der Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander gleich sind, folgt

$$AB + BC + CD + DA = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1$$

$$(A_1B_1 - AB) + (C_1D_1 - CD) = (BC - B_1C_1) + (DA - D_1A_1)$$

oder, mit anderen Worten,

$$(A_1B_1 - A_1K_2 - B_1K_1) + (C_1D_1 - C_1M_2 - D_1M_1) =$$

$$(B_1L_2 + C_1L_1 - B_1C_1) + (D_1N_2 + A_1N_1 - D_1A_1)$$

d.h.

$$K_1K_2 + M_1M_2 = L_2L_1 + N_2N_1$$

Dies besagt aber, dass

$$S_{K_1K_2O_1O_2} + S_{M_1M_2O_3O_4} = S_{L_2K_1O_3O_2} + S_{N_2N_1O_1O_4}$$

ist, da alle diese Vierecke Rechtecke mit derselben Höhe r sind. Nun folgt aus Abb. 220 b die Beziehung

$$S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} - (S_{A_1N_1O_1K_2} + S_{B_1K_1O_2L_2} + S_{C_1L_1O_3M_2} + S_{D_1M_1O_4N_2})$$

$$+ (S_{K_1K_2O_1O_2} - S_{L_2L_1O_3O_2} + S_{M_1M_2O_3O_4} - S_{N_2N_1O_1O_4}) = S_{O_1O_2O_3O_4}$$

woraus die Beziehung

$$S_{A_1B_1C_1D_1} > S_{ABCD}$$

folgt.

Zweite Lösung. Wir verzichten auf die Forderung, dass der Umfang des Vierecks gegeben sei, und suchen unter allen Vierecken mit gegebenen Winkeln dasjenige, für welches das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs am größten ist.

Es sei die Summe der Winkel an den Eckpunkten A und B des Vierecks kleiner als 180° (bei $\angle A + \angle B > 180^\circ$ wäre $\angle C + \angle D = 360^\circ - \angle A - \angle B < 180^\circ$), und wir brauchen nur die Winkel bei A und B durch die Winkel bei C und D zu ersetzen.⁸⁵ Wir konstruieren ein Dreieck ABT , bei dem zwei Winkel gleich den Winkeln an den Eckpunkten A und B des gesuchten Vierecks sind (Abb. 221); dieses Dreieck müssen wir mit der Geraden CD , deren Richtung gegeben ist, so schneiden, dass bei dem erhaltenen Viereck das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs möglichst groß wird.

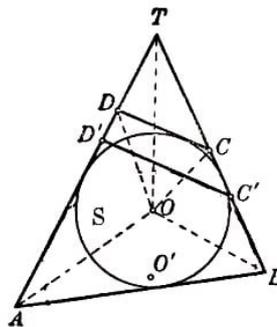


Abb. 221

⁸⁵Hierbei wird der Fall ausgeschlossen, dass die Summe je zweier benachbarter Winkel des Vierecks $ABCD$ gleich 180° , das Viereck also ein Parallelogramm ist. In diesem Falle stimmt die Behauptung der vorliegenden Aufgabe mit der Behauptung aus Aufgabe 55c überein.

Der dem Dreieck ATB einbeschriebene Kreis S habe den Radius R und das Zentrum O . Es sei $C'D'$ eine beliebige Gerade mit vorgegebener Richtung und CD eine Gerade derselben Richtung, welche S berührt (Abb. 221). Wir müssen die Gültigkeit der folgenden Ungleichung beweisen:

$$\frac{S_{ABCD}}{(AB + BC + CD + DA)^2} > \frac{S_{ABC'D'}}{(AB + BC' + C'D' + D'A)^2}$$

Der Umfang $AB + BT + TA$ des Dreiecks ATB sei gleich $2P$ und der Ausdruck $CT + TD - CD$ gleich $2p$. Weiter sei k der Ähnlichkeitskoeffizient der Dreiecke $TC'D'$ und TCD (dabei kann k größer oder kleiner als Eins sein). Dann gilt

$$C'T + TD' - C'D' = 2kp$$

und folglich

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &= (AB + BT + TA) - (CT + TD - CD) = 2(P - p) \\ AB + BC' + C'D' + D'A &= (AB + BT + TA) - (C'T + TD' - C'D') = 2(P - kp) \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABT} &= S_{\triangle AOT} + S_{\triangle BOT} + S_{\triangle BOA} = \frac{1}{2}R \cdot AT + \frac{1}{2}R \cdot BT + \frac{1}{2}R \cdot BA = PR \\ S_{\triangle CDT} &= S_{\triangle COT} + S_{\triangle DOT} + S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}R \cdot CT + \frac{1}{2}R \cdot DT + \frac{1}{2}R \cdot CD = pR \end{aligned}$$

d.h., weil $\triangle C'D'T$ und $\triangle CDT$ einander ähnlich sind,

$$S_{\triangle C'D'T} = k^2 pR$$

Also gilt

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABT} - S_{\triangle CDT} = (P - p) \cdot R \\ S_{ABC'D'} &= S_{\triangle ABT} - S_{\triangle C'D'T} = (P - k^2 p) \cdot R \end{aligned}$$

Somit nimmt die zu beweisende Ungleichung folgende Form an:

$$\frac{(P - p)R}{4(P - p)^2} > \frac{(P - k^2 p)R}{4(P - kp)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{P - p} > \frac{P - k^2 p}{(P - kp)^2}$$

Multipliziert man die letzte Ungleichung mit dem positiven Ausdruck $(P - p)(P - kp)^2$, so ergibt sich

$$(P - kp)^2 > (P - p)(P - k^2 p)$$

was sicher richtig ist, da

$$\begin{aligned} (P - kp)^2 - (P - p)(P - k^2 p) &= P^2 - 2kpP + k^2 p^2 - P^2 + k^2 pP + pP - k^2 p^2 \\ &= k^2 pP - 2kpP + pP = pP(1 - k)^2 > 0 \end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, dass in der letzten Ungleichung das Zeichen $>$ und nicht \geq steht, da p und P positiv sind, aber $k \neq 1$ ist ($k = 1$ würde bedeuten, dass die Dreiecke CTD und $C'TD'$ nicht nur ähnlich, sondern auch kongruent wären; dann fiel $C'D'$ mit CD zusammen).

b) Die Lösung verläuft analog zur zweiten Lösung der Aufgabe 59a. Der Einfachheit halber lösen wir zunächst die Aufgabe für den Fall eines Fünfecks.

Wir untersuchen zwei gleichwinklige Fünfecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$, von denen das erste einem Kreis umbeschrieben ist, während das zweite dem ersten nicht ähnlich ist (Abb. 222).

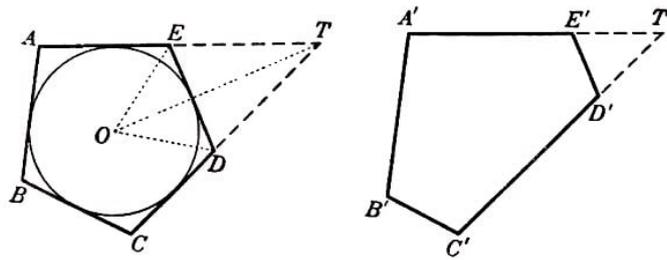


Abb. 222a,b

Um zu beweisen, dass beim Fünfeck $ABCDE$ das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs größer ist als beim Fünfeck $A'B'C'D'E'$, lassen wir die Seiten DE und $D'E'$ dieser Fünfecke (für die $\angle D + \angle E > 180^\circ$ ist) fort und verlängern die an DE bzw. $D'E'$ angrenzenden Seiten bis zu ihrem Schnitt.

Wir erhalten zwei Vierecke $ABCT$ und $A'B'C'T'$ mit jeweils gleichen Winkeln; das erste von ihnen ist einem Kreis umbeschrieben. Zur Vereinfachung des Beweises nehmen wir an, die Größe des Fünfecks $A'B'C'D'E'$ sei so gewählt, dass der Umfang des Vierecks $A'B'C'T'$ gleich dem Umfang $2P$ des Vierecks $ABCT$ sei (durch Ähnlichkeitstransformation des Fünfecks $A'B'C'D'E'$ im geeigneten Maßstab lässt sich stets erreichen, dass diese Bedingung erfüllt wird).

Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCT$ ist gleich RP , wobei R der Radius des Kreises ist, der diesem Viereck einbeschrieben ist. Den Flächeninhalt des Vierecks $A'B'C'T'$ bezeichnen wir mit αRP .

Da nach dem Resultat der vorigen Aufgabe das Viereck $A'B'C'T'$, das die gleichen Winkel und den gleichen Umfang wie das Viereck $ABCT$ hat, keinen größeren Flächeninhalt besitzen kann, muss $\alpha < 1$ sein. Dabei gilt $\alpha = 1$ nur dann, wenn auch das Viereck $A'B'C'T'$ einem Kreis umbeschrieben werden kann, d.h., wenn es gleich $ABCT$ ist.

Wir bezeichnen nun den Ausdruck $DT + TE - DE$ mit $2p$ und den Ausdruck $D'T' + T'E' - D'E'$ mit $2kp$; dabei ist k das Ähnlichkeitsverhältnis der Dreiecke $D'T'E'$ und DTE . Der Flächeninhalt des Dreiecks DTE ist gleich Rp (wobei R der Radius des Ankreises dieses Dreiecks ist); folglich muss der Flächeninhalt des Dreiecks $D'T'E'$, das dem Dreieck DTE im Verhältnis k ähnlich ist, gleich $k^2 Rp$ sein.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 S_{ABCDE} &= S_{ABCT} + S_{\triangle DET} \\
 AB + BC + CD + DE + EA &= (AB + BC + CT + TA) - (DT + TE - ED) \\
 S_{A'B'C'D'E'} &= S_{A'B'C'T'} + S_{\triangle D'E'T'} \\
 A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' &= (A'B' + B'C' + C'T' + T'A') - (D'T' + T'E' - E'D')
 \end{aligned}$$

daher nimmt die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{S_{ABCDE}}{(AB + BC + CD + DE + EA)^2} > \frac{S_{A'B'C'D'E'}}{(A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A')^2}$$

die Form

$$\begin{aligned}
 \frac{RP - Rp}{(2P - 2p)^2} > \frac{\alpha RP - k^2 Rp}{(2P - 2kp)^2} \quad \text{bzw.} \quad (*) \\
 \frac{1}{P - p} > \frac{\alpha P - k^2 p}{(P - kp)^2}, \quad (P - kp)^2 > (P - p)(\alpha P - k^2 p)
 \end{aligned}$$

an. Diese letzte Ungleichung gilt tatsächlich. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 (P - pk)^2 - (P - p)(\alpha P - k^2 p) &= (P - kp)^2 - (P - p)(P - k^2 p) + (1 - \alpha)(P - p)P \\
 &= Pp(1 - k)^2 + (1 - \alpha)(P - p)P > 0
 \end{aligned}$$

(siehe Lösung der Aufgabe 59a), da $1 - \alpha \geq 0$ und $P > p$ nach Definition dieser Größen ist. In der letzten Ungleichung steht das Zeichen $>$ und nicht \geq , da für $1 - \alpha = 0$, also $\alpha = 1$ das Viereck $A'B'C'T'$ gleich dem Viereck $ABCT$ wäre.

Damit das Fünfeck $A'B'C'D'E'$ vom Fünfeck $ABCDE$ verschieden ist, muss aber das Dreieck $D'E'T'$ von DET verschieden, d.h. $k \neq 1$ sein; ist nun aber $(1 - \alpha)(P - p)P = 0$, so ist sicher $Pp(1 - k)^2$ größer als Null.

Die Lösung der Aufgabe für n -Ecke lässt sich nun mit vollständiger Induktion durchführen. Sie unterscheidet sich in keiner Weise von der oben angegebenen, und alle Berechnungen haben genau die gleiche Form. Nur wird an Stelle von "Fünfeck" stets vom n -Eck gesprochen und an Stelle des "Vierecks" vom $(n - 1)$ -Eck, für welches nach Induktionsvoraussetzung der Satz als bereits bewiesen angenommen wird (womit also auch $\alpha < 1$ bewiesen ist).

Anmerkung. Wir weisen darauf hin, dass nicht nur (*), sondern sogar die stärkere Ungleichung

$$\frac{RP - Rp}{(2P - 2p)^2} \cdot \frac{RP}{P^2} > \frac{\alpha RP - k^2 Rp}{(2P - 2kp)^2} \cdot \frac{\alpha RP}{P^2} \quad (**)$$

gilt. Die Ungleichung (**) kann nämlich auf folgende Weise umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P - p} &> \frac{\alpha P - k^2 p}{\alpha(P - kp)^2} \\
 \alpha(P - kp)^2 - (P - p)(\alpha P - k^2 p) &> 0 \\
 -2\alpha k P p + \alpha k^2 p^2 + k^2 P p + \alpha P p - k^2 p^2 &> 0 \\
 \alpha P p(1 - k)^2 + k^2 p(1 - \alpha)(P - p) &> 0
 \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist offenbar richtig.

Die Ungleichung (**) besagt, dass beim Übergang vom Viereck zum Fünfeck (im allgemeinen Fall vom $(n-1)$ -Eck zum n -Eck) das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs für Vielecke, die einem Kreis umbeschrieben sind, stärker wächst, als für irgendwelche anderen Vielecke. Im folgenden werden wir diese Tatsache benutzen.

60. Zerlegt eine Sehne AB der Figur Φ den Umfang von Φ in zwei gleiche und den Flächeninhalt in zwei ungleiche Teile, so erhält man durch Spiegelung des größeren dieser Teile an der Sehne AB und Ersetzung des kleineren Teils durch das Spiegelbild eine Figur $\bar{\Phi}$ mit gleichem Umfang wie Φ , aber größerem Flächeninhalt (Abb. 223).

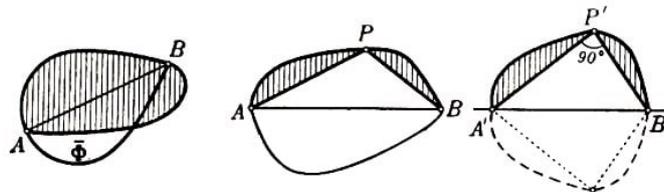


Abb. 223, 224

Die so erhaltene Figur $\bar{\Phi}$ braucht nicht konvex zu sein; in diesem Falle lässt sich ihr Flächeninhalt noch weiter vergrößern, ohne dass dabei der Umfang wächst.

61. Der Umfang von Φ werde durch eine Sehne AB halbiert. Zerlegt die Sehne AB den Flächeninhalt der Figur Φ in zwei ungleiche Teile, so gibt es eine Figur $\bar{\Phi}$ mit gleichem Umfang wie Φ , die einen größeren Flächeninhalt hat (siehe Aufgabe 60).

Halbiert nun die Sehne AB den Umfang und den Flächeninhalt der Figur Φ und ist die Figur Φ kein Kreis, so muss wenigstens einer der beiden Teile, in die AB die Figur Φ zerlegt, vom Halbkreis mit dem Durchmesser AB verschieden sein.

Hieraus folgt, dass es auf dem Rand der Figur Φ einen Punkt P gibt derart, dass $\angle APB$ kein rechter Winkel ist (Abb. 224a; andernfalls wäre der Rand von Φ ein Kreisbogen vom Durchmesser AB , und die Figur Φ wäre eine Kreisfläche).

Nunmehr ersetzen wir den Teil APB der Figur Φ durch eine neue Figur $A'P'B'$ (Abb. 224b), indem wir die von den Sehnen AP und PB abgetrennten Segmente unverändert lassen und das Dreieck APB durch ein rechtwinkliges Dreieck ersetzen, dessen Katheten die gleiche Länge wie die Seiten des Dreiecks APB haben ($AP = A'P'$, $PB = P'B'$); dabei gilt nach Aufgabe 55a die Relation $S_{\Delta A'P'B'} > S_{\Delta APB}$.

Spiegeln wir jetzt die erhaltene Figur $A'P'B'$ an der Sehne $A'B'$, so erhalten wir eine Figur $\bar{\Phi}$ mit gleichem Umfang wie Φ (der Umfang der beiden Figuren ist gleich der doppelten Länge der Kurve APB); $\bar{\Phi}$ hat jedoch einen größeren Flächeninhalt (der Flächeninhalt von $\bar{\Phi}$ ist gleich dem doppelten Flächeninhalt der Figur $A'P'B'$, der Flächeninhalt von Φ gleich dem doppelten Flächeninhalt der Figur APB).

Anmerkung. Die hier angestellte Überlegung stammt von dem Schweizer Geometer Steiner, der annahm, dass durch sie das isoperimetrische Problem vollständig gelöst werde. In Wirklichkeit jedoch liefert diese Überlegung noch keinen strengen Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises.

62. Es sei Φ eine beliebige konvexe Figur und K ein Kreis. Wir müssen beweisen, dass

das Verhältnis des Flächeninhalts des Kreises K zum Quadrat seines Umfangs größer ist als das Verhältnis des Flächeninhalts der Figur Φ zum Quadrat ihres Umfangs. Dabei sind der Flächeninhalt und der Umfang von Φ und K jeweils als Limites der Flächeninhalte bzw. der Umfänge von Vielecken definiert, die diesen konvexen Figuren umschrieben sind und eine Folge bilden, wobei sämtliche Außenwinkel gegen Null streben.

Wir untersuchen Vielecke, die der Figur Φ und dem Kreis K umschrieben sind und deren entsprechende Winkel gleich sind (beispielsweise Vielecke, die der Figur Φ bzw. der Kurve K umschrieben sind und parallele Seiten haben; Abb. 225).

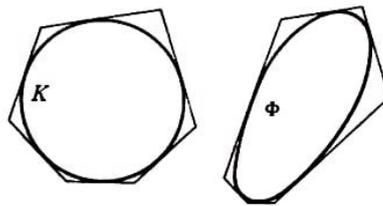


Abb. 225

Nach Aufgabe 59b ist das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs bei jedem dem Kreis K umschriebenen Vieleck nicht kleiner als bei einem entsprechenden, der Figur Φ umschriebenen Vieleck. Damit ergibt sich beim Grenzübergang

$$\frac{\text{Flächeninhalt von } K}{(\text{Umfang von } K)^2} \geq \frac{\text{Flächeninhalt von } \Phi}{(\text{Umfang von } \Phi)^2} \quad (*)$$

woraus bereits folgt, dass der Kreis keinen kleineren Inhalt als irgendeine andere konvexe Figur gleichen Umfangs hat.

Wir nehmen jetzt an, die Figur Φ sei kein Kreis; sie sei also von K verschieden. Dann sind offensichtlich nicht alle dem Kreis K umschriebenen Vielecke den entsprechenden, der Figur Φ umschriebenen Vielecken ähnlich.

Ist dabei M das erste der dem Kreis K umschriebenen Vielecke, das nicht dem entsprechenden, der Figur Φ umschriebenen Vieleck M ähnlich ist, so muss das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs beim Vieleck M größer (und nicht nur "nicht kleiner") sein als beim Vieleck M (siehe Lösung der Aufgaben 59a und b). Da im folgenden das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Umfangs bei den umschriebenen Vielecken des Kreises K jedesmal (beim Übergang vom umschriebenen n -Eck zum umschriebenen $(n + 1)$ -Eck) größer wird als bei den der Figur Φ umschriebenen Vielecken (siehe Anmerkung zum Schluss der Lösung der Aufgabe 59b), so können wir schließlich folgern:

$$\frac{\text{Flächeninhalt von } K}{(\text{Umfang von } K)^2} > \frac{\text{Flächeninhalt von } \Phi}{(\text{Umfang von } \Phi)^2} \quad (**)$$

Anmerkung. Ist bereits bewiesen, dass der Flächeninhalt des Kreises K vom Umfang 1 nicht kleiner als der Flächeninhalt jeder anderen Figur Φ gleichen Umfangs ist [das besagt gerade die Ungleichung (*)], so folgt unmittelbar aus dem Ergebnis der Aufgabe 61 (zu jeder vom Kreis verschiedenen Figur Φ lässt sich eine Figur $\bar{\Phi}$ gleichen Umfangs

mit größerem Flächeninhalt finden), dass der Inhalt von K (der nicht kleiner als der Inhalt von $\bar{\Phi}$ sein kann) größer als der Flächeninhalt von Φ ist [siehe Ungleichung (**)].

63. Wir untersuchen ein Vieleck M , das einem Kreis einbeschrieben ist, sowie irgendein anderes Vieleck N , dessen Seiten die gleiche Länge haben. Wir ergänzen N zu einer gewissen Figur Φ , indem wir an seine Seiten die durch die entsprechenden Seiten von M von dem umbeschriebenen Kreis K abgetrennten Kreissegmente anlegen (Abb. 226).

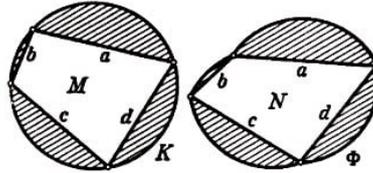


Abb. 226

Der Kreisinhalt von K ist gleich dem Flächeninhalt des Vielecks M plus Summe der Segmentinhalte, die in Abb. 226 schraffiert sind; der Flächeninhalt der Figur Φ ist gleich dem Flächeninhalt des Vielecks N plus Summe derselben Segmentinhalte.

Die Figur Φ Abb. 226 hat den gleichen Umfang wie der Kreis K , folglich ist ihr Flächeninhalt kleiner als der Kreisinhalt von K (siehe Aufgabe 62). Hieraus ergibt sich, dass der Flächeninhalt von N kleiner als der Flächeninhalt von M ist.

Anmerkung. In der Voraussetzung der vorliegenden Aufgabe braucht nicht unbedingt gefordert zu werden, dass eine Reihenfolge der Seiten in dem Vieleck definiert sei (gemeint ist die Annahme, von der wir bei unserer Lösung ausgingen). Der Beweis hierfür ist in keiner Beziehung von dem Beweis der analogen Behauptung verschieden, der in der Lösung der Aufgabe 58 geführt wurde (Abb. 217).

64. Zunächst stellen wir fest, dass von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Umfang $2p$ dasjenige einen größeren Inhalt hat, dessen Seitenanzahl größer ist. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen n -Ecks ist nämlich gleich dem Produkt seines halben Umfangs p mit dem Inkreisradius. Der Inkreisradius eines regelmäßigen n -Ecks konstanten Umfangs $2p$ ist jedoch gleich $\frac{p}{n} : \tan \frac{\pi}{n}$ und wächst bei Vergrößerung von n .

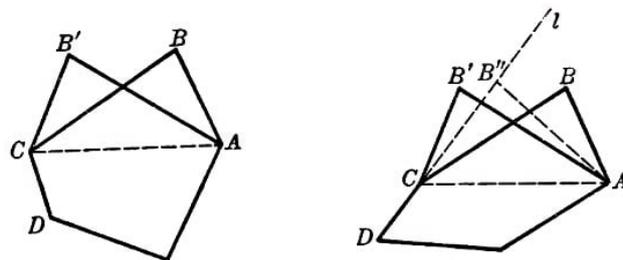


Abb. 227a, b

Zum Beweis stellen wir $\frac{p}{n} : \tan \frac{\pi}{n}$ in der Form $\frac{p}{n} \cdot \left(\frac{\pi}{n} : \tan \frac{\pi}{n} \right)$ dar und weisen darauf hin, dass α und $\tan \alpha$ jeweils gleich dem doppelten Flächeninhalt des zugehörigen Einheitskreissektors bzw. gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks sind, das von dem festen und dem bewegten Radius und der Tangente gebildet wird.

Dann ergibt sich geometrisch, dass $\frac{\tan \alpha}{\alpha}$ (das Verhältnis des Dreiecksinhalts zum Inhalt

des Sektors) mit α abnimmt (und mit α wächst)⁸⁶.

Hieraus folgt, dass $\frac{\pi}{n} : \tan \frac{\pi}{n}$ bei Vergrößerung von n wächst. Wir lösen die Aufgabe durch Induktion.

Angenommen, es sei bewiesen, dass der Flächeninhalt jedes konvexen n -Ecks vom Umfang $2p$ kleiner als der Flächeninhalt eines regelmäßigen n -Ecks gleichen Umfangs ist. Dann beweisen wir, dass dies auch für $(n+1)$ -Ecke gilt. Die Induktion ist berechtigt, da für $n = 3$ und $n = 4$ diese Behauptung richtig ist (siehe Aufgaben 56a und b).

Wir zeigen zunächst, dass der Flächeninhalt eines beliebigen $(n+1)$ -Ecks vom Umfang $2p$ nicht größer als der Flächeninhalt eines gewissen n -Ecks bzw. eines $(n+1)$ -Ecks gleichen Umfangs ist, dessen sämtliche Seiten einander gleich sind (und deren Länge demzufolge jeweils gleich $\frac{2p}{n+1}$ sein muss).

Es sei $ABCD\dots$ ein beliebiges $(n+1)$ -Eck mit dem Umfang $2p$; AB und BC seien zwei benachbarte Seiten des $(n+1)$ -Ecks. Wir ziehen die Diagonale AC und konstruieren ein Dreieck $AB'C$, das dem Dreieck ABC kongruent ist (Abb. 227a).

Das Vieleck $AB'CD\dots$, das sich bei der Ersetzung des Dreiecks ABC durch das Dreieck $AB'C$ ergibt, kann sich als nichtkonvex erweisen (Abb. 227b). Dann schneidet die Verlängerung einer an AB oder BC angrenzenden Seite das Dreieck $AB'C$. Dies möge beispielsweise für die Verlängerung l der Strecke CD der Fall sein.

Wir wählen auf der Geraden l einen Punkt B'' derart, dass $AB'' + B''C = AB + BC$ ist (die Existenz eines solchen Punktes ergibt sich aus Stetigkeitsüberlegungen, siehe § 3). Dann sind Umfang und Grundlinien der Dreiecke ABC und $AB''C$ gleich, wobei das letzte von ihnen eine kleinere Differenz der Basiswinkel hat; daher gilt (siehe Aufgabe 55d) $S_{\triangle AB''C} > S_{\triangle ABC}$.

Somit hat das n -Eck $AB''D\dots$ ebenfalls den Umfang $2p$, aber einen größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche Vieleck $ABCD\dots$.

Führen wir also die oben angegebene Konstruktion des Dreiecks $AB'C$ durch, so gehen wir entweder zu einem konvexen Vieleck $AB'CD\dots$ (Abb. 227c) mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt über, dessen Seiten AB und BC vertauscht sind, oder wir überzeugen uns davon, dass der Flächeninhalt des ursprünglichen Vielecks $ABCD\dots$ kleiner als der Flächeninhalt eines gewissen n -Ecks ist, das den gleichen Flächeninhalt wie das ursprüngliche $(n+1)$ -Eck hat.

Durch Anwendung dieses Verfahrens können wir (durch hinreichend häufige Vertauschung zweier benachbarter Seiten des Vielecks) entweder erreichen, dass die größte und die kleinste Seite benachbart sind, oder wir stellen fest, dass das zu untersuchende $(n+1)$ -Eck einen kleineren Inhalt hat als ein n -Eck gleichen Umfangs.

Wir untersuchen jetzt ein $(n+1)$ -Eck, bei dem die größte Seite (oder eine der größten Seiten) und die kleinste Seite (eine der kleinsten Seiten) nebeneinander gelegen sind. Es mögen dies die Seiten AB und BC sein (AB als kleinste und BC als größte Seite des

⁸⁶Siehe D. O. Schklarski u. a., [Ausgewählte Aufgaben und Sätze der Elementarmathematik], Bd.1 ("Bibliothek der Mathematischen Schulzirkel", Heft 1), M.-L., Gostechisdat, 1950, Aufgabe 102c, S. 25.

Vielecks). Offenbar sind $AB < \frac{2p}{n+1}$ und $BC > \frac{2p}{n+1}$; denn wäre nämlich beispielsweise die kleinste Seite AB größer als $\frac{2p}{n+1}$, so müsste der Umfang des Vieleckes größer als $(n+1) \cdot \frac{2p}{n+1} = 2p$ sein, was jedoch unmöglich ist.

Wir konstruieren ein Dreieck $AB'C$ mit der gleichen Grundlinie AC und gleichem Umfang (und folglich gleicher Summe der an die Grundlinie angrenzenden Seiten), bei dem eine dieser Seiten gleich $\frac{2p}{n+1}$ und $AB' \leq B'C$ ist (Abb. 228a).

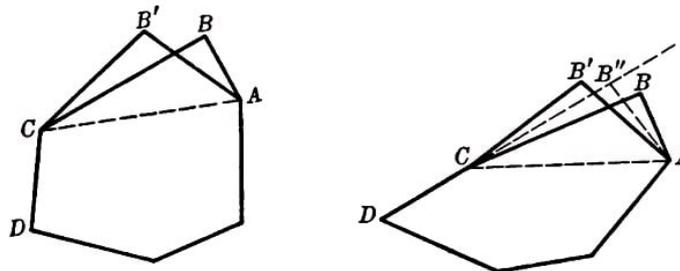


Abb. 228a, b

Dabei ist die Differenz der Seiten des Dreiecks $AB'C$ kleiner als die Differenz der Seiten des Dreiecks ABC , so dass $S_{\triangle AB'C} > S_{\triangle ABC}$ ist (siehe Aufgabe 55d), und das Vieleck $AB'CD\dots$ hat den gleichen Umfang, aber einen größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche Vieleck.

Sollte sich das Vieleck $AB'CD\dots$ als nichtkonvex erweisen, so verfahren wir ebenso wie oben und überzeugen uns davon, dass der Flächeninhalt des ursprünglichen Vielecks kleiner als der Flächeninhalt eines n -Ecks gleichen Umfangs ist (Abb. 228b).

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens können wir also entweder ein konvexes Vieleck $AB'C\dots$ konstruieren, dessen eine Seite gleich $\frac{2p}{n+1}$ ist (wobei es zwar den gleichen Umfang, aber einen größeren Flächeninhalt besitzt als das Vieleck $ABCD\dots$), oder ein konvexes n -Eck mit gleichem Umfang und größerem Flächeninhalt wie das Vieleck $ABCD$.

Besitzt das so erhaltene Vieleck immer noch Seiten, die nicht gleich $\frac{2p}{n+1}$ sind, so hat es notwendigerweise sowohl Seiten, die kleiner als $\frac{2p}{n+1}$, als auch Seiten, die größer als $\frac{2p}{n+1}$ sind, und wir können unter Anwendung des gleichen Verfahrens ein $(n+1)$ -Eck mit gleichem Umfang und größerem Flächeninhalt konstruieren, das zwei Seiten der Länge $\frac{2p}{n+1}$ hat, bzw. ein n -Eck vom Umfang $2p$ mit größerem Flächeninhalt.

Indem wir auf diese Weise fortfahren, können wir beweisen, dass der Flächeninhalt eines beliebigen $(n+1)$ -Ecks vom Umfang $2p$ nicht größer als der Flächeninhalt eines $(n+1)$ -Ecks ist, dessen sämtliche Seiten gleich $\frac{2p}{n+1}$ sind, bzw. nicht größer ist als der Flächeninhalt eines gewissen n -Ecks.

Der Inhalt eines konvexen $(n+1)$ -Ecks, dessen sämtliche Seiten gleich sind, ist nicht größer als der Flächeninhalt des regelmäßigen $(n+1)$ -Ecks gleichen Umfangs (siehe Aufgabe 63). Der Flächeninhalt eines n -Ecks vom Umfang $2p$ ist nach Induktionsvoraussetzung kleiner als der Flächeninhalt des regelmäßigen n -Ecks vom Umfang $2p$ und folglich auch kleiner als der Inhalt des regelmäßigen $(n+1)$ -Ecks gleichen Umfangs (siehe Bemerkung zum Beginn der Lösung der Aufgabe). Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

65.a) Wir untersuchen ein Segment S mit der Sehnenlänge a und der Bogenlänge l und irgendeine andere Figur Φ mit dem Umfang $a + l$, deren Rand eine geradlinige Strecke der Länge a enthält. Das Segment S ergänzen wir zu einem Kreis K .

Ein zweites Segment gleicher Art wie das, welches S zum Kreis K ergänzt, legen wir mit der Sehne an die geradlinige Strecke des Randes der Figur Φ , und zwar so, dass es auf der anderen Seite dieser Strecke gelegen ist wie Φ (Abb. 229a). Die so gebildete Figur Φ' hat den gleichen Umfang wie der Kreis K und folglich einen kleineren Flächeninhalt (Aufgabe 62).

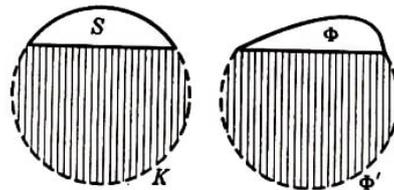


Abb. 229a, b

Indem wir von dem Flächeninhalt von K und dem von Φ die einander gleichen in Abb. 229 schraffierten Segmente abtrennen, überzeugen wir uns davon, dass der Flächeninhalt des Segmentes S größer als der Flächeninhalt der Figur Φ ist.

b) Wir betrachten einen Halbkreis S vom Radius $\frac{l}{\pi}$ und eine beliebige Figur Φ , die von einer geradlinigen Strecke und einem Bogen der Länge l begrenzt wird.

Wir spiegeln die Figuren Φ und S symmetrisch an der Geraden, auf der die geradlinigen Strecken ihrer Ränder liegen (Abb. 229b).

Dabei erhalten wir einen Kreis K (dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der von S ist) und eine Figur $\bar{\Phi}$ (deren Flächeninhalt doppelt so groß wie der Flächeninhalt von Φ ist). Der Umfang von $\bar{\Phi}$ ist gleich dem Umfang von K , folglich ist der Flächeninhalt von $\bar{\Phi}$ kleiner als der Kreisinhalt von K (siehe Aufgabe 62) und der Flächeninhalt von $\bar{\Phi}$ kleiner als der Flächeninhalt von S .

66. Die gesuchte Figur ist die konvexe Figur, welche von den Schenkeln des Winkels α und von einem Bogen eines Kreises begrenzt wird, der diesem Winkel einbeschrieben ist (Abb. 230). Die Lösung kann analog zur Lösung der Aufgabe 62 durchgeführt werden. Wir überlassen es dem Leser, die Aufgabe selbständig zu lösen.

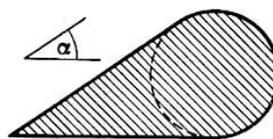


Abb. 230

67. Eine Figur Φ kann nicht zwei verschiedene Umkreise haben. Läge nämlich Φ innerhalb der beiden Kreise S und S' mit gleichem Radius R , so müsste Φ bereits in dem Zweieck enthalten sein, das in Abb. 231 schraffiert ist und den Durchschnitt der Kreise S und S' darstellt; folglich läge Φ auch in Abb. 230 dem diesem Zweieck umbeschriebenen Kreis (der in Abb. 231 gestrichelt ist).

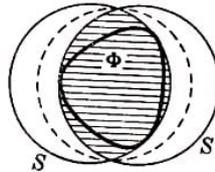


Abb. 231

Dieser letzte Kreis hat jedoch einen kleineren Radius als die Kreise S und S' , im Widerspruch dazu, dass die Kreise S und S' der Figur Φ umschrieben sein sollen. Umschließt ferner S die ebene Figur Φ , ohne einen Randpunkt von Φ zu enthalten, so gibt es einen Kreis mit kleinerem Radius, der ebenfalls Φ enthält. Um diesen Kreis zu erhalten, verkleinern wir nach und nach den Radius des Kreises S , ohne seinen Mittelpunkt zu verändern, bis der sich verkleinernde Kreis den Rand der Figur Φ in irgendeinem Punkt A trifft (Abb. 232a).

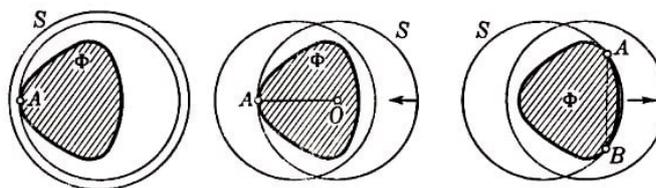


Abb. 232 a,b,c

Berührt der Kreis S , welcher die Figur Φ umfasst, die Figur Φ in nur einem einzigen Randpunkt A , so gibt es ebenfalls einen Kreis S mit kleinerem Radius, der Φ umfasst. Um das zu beweisen, verschieben wir den Kreis S etwas in Richtung des Radius OA (wobei O der Mittelpunkt des Kreises S Abb. 231 ist), so dass sich der Punkt A innerhalb des Kreises befindet (Abb. 232b).

Dabei erhalten wir einen Kreis, der denselben Radius wie S hat, die Figur Φ umfasst und keinen Randpunkt von Φ berührt. Nach dem oben Gezeigten lässt sich der Radius dieses Kreises so verkleinern, dass der Kreis noch immer die Figur Φ umschließt.

Berührt schließlich der Kreis S , der die Figur Φ umfasst, die Figur Φ in zwei Randpunkten A und B , die nicht diametral gegenüberliegende Punkte von S sind, und enthält der größere der beiden durch A und B bestimmten Kreisbogen von S , keine weiteren Punkte von Φ , so gibt es einen Kreis, dessen Radius kleiner als der Radius von S ist und die Figur ebenfalls umfasst.

Zum Beweis verschieben wir den Kreis S etwas in senkrechter Richtung zur Sehne AB , so dass sich die Punkte A und B innerhalb des Kreises befinden (Abb. 232c). Dabei erhalten wir wiederum einen Kreis mit gleichem Radius wie S , der Φ enthält, jedoch durch keine Randpunkte von Φ verläuft. Der Radius dieses Kreises lässt sich so verkleinern, dass Φ noch immer in diesem Kreis bleibt.

Der kleinste aller Kreise, die Φ enthalten, muss daher notwendigerweise entweder durch zwei Punkte verlaufen, die diametral gegenüberliegen (Abb. 233a), oder er verläuft durch drei Punkte von Φ derart, dass keiner der Kreisbogen zwischen je zwei dieser drei Punkte größer als ein Halbkreis ist (d. h., die drei Punkte bilden ein spitzwinkliges Dreieck; Abb. 233b).

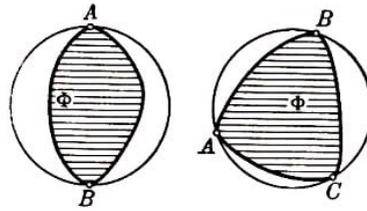


Abb. 233 a,b

Hieraus ergibt sich sofort, dass der Radius R des Umkreises S der Figur Φ vom Durchmesser 1 in den Grenzen liegt, die in der Aufgabenstellung angegeben sind. Zunächst ist nämlich der größte Abstand zwischen Punkten der Figur Φ gleich $2R$, da die Figur Φ in dem Kreis S vom Radius R eingeschlossen ist.

Da nun der Durchmesser von Φ gleich 1 ist, ergibt sich unmittelbar, dass $2R \geq 1$, also $R \geq \frac{1}{2}$ sein muss. Damit bleibt nur noch zu beweisen, dass $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

Verläuft der umbeschriebene Kreis durch zwei diametral gegenüberliegende Punkte von Φ , so kann der Radius R des Kreises nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein, da der Abstand zwischen diesen Punkten nicht größer als 1 ist; R ist in diesem Falle gleich $\frac{1}{2}$, also kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Verläuft der der Figur Φ umbeschriebene Kreis S durch drei Punkte von Φ , die ein spitzwinkliges Dreieck ABC bilden, so ist wenigstens einer der Winkel α dieses spitzwinkligen Dreiecks nicht kleiner als 60° (die Summe der drei Winkel des Dreiecks ist gleich 180°).

Der Sinus dieses Winkels ist dann nicht kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und da die Seite a , welche diesem Winkel gegenüberliegt, nicht größer als 1 ist, kann der Durchmesser $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$ des Umkreises S von ABC nicht größer als $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sein.

Anmerkung. Beide Grenzen für den Wert des Umkreisradius, die wir in dieser Aufgabe erhielten, werden erreicht, wie einerseits das Beispiel eines Rechtecks, andererseits das Beispiel eines gleichseitigen Dreiecks zeigt.

68. Die Lösung ist der von Aufgabe 67 sehr ähnlich. Enthält ein ganz in einer konvexen Figur Φ eingeschlossener Kreis S keine Randpunkte von Φ , so gibt es zunächst einen ebenfalls in Φ gelegenen Kreis S' , dessen Radius größer als der von S ist. Um diesen Kreis zu finden, vergrößern wir nach und nach den Radius von S , ohne den Mittelpunkt zu verändern, bis der wachsende Kreis den Rand von Φ in irgendeinem Punkt A trifft (Abb. 234a).

Enthält ein Kreis S , der ganz in einer konvexen Figur Φ liegt, einen einzigen Randpunkt A der Figur Φ , so gibt es auch einen der Figur Φ einbeschriebenen Kreis, dessen Radius größer als der Radius von S ist.

Um das zu beweisen, verschieben wir den Kreis S etwas in Richtung des Radius OA (wobei O der Mittelpunkt des Kreises S ist), so dass sich der Punkt A außerhalb des Kreises befindet (Abb. 234b).

Dabei erhalten wir einen in Φ liegenden Kreis, der den gleichen Radius wie S und mit dem Rand von Φ keinen Punkt gemeinsam hat; nach dem oben Gezeigten lässt sich der Radius dieses Kreises noch derart vergrößern, dass dieser dabei stets innerhalb von Φ bleibt.

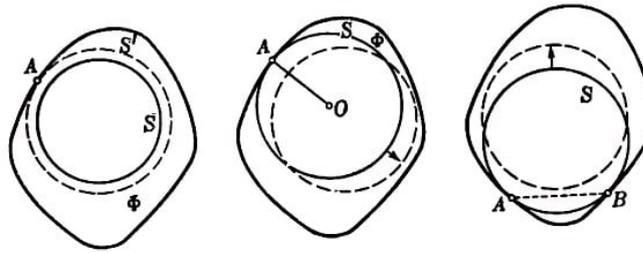


Abb. 234 a,b,c

Enthält schließlich ein Kreis S im Innern der Figur Φ zwei Randpunkte A und B von Φ derart, dass derjenige Bogen AB , der größer als 180° ist, keinen weiteren Randpunkt von Φ enthält, so gibt es einen ganz in Φ liegenden Kreis mit größerem Radius als der von S .

Wir verschieben den Kreis S derart in senkrechter Richtung zur Sehne AB , dass sich die Punkte A und B außerhalb des Kreises befinden (Abb. 234c). Dabei erhalten wir einen Kreis mit gleichem Radius wie der von S , der von Φ umschlossen wird und mit dem Rand von Φ keinen gemeinsamen Punkt hat. Den Radius dieses Kreises können wir derart vergrößern, dass dabei der Kreis stets innerhalb von Φ bleibt.

Der größte aller in Φ enthaltenen Kreise muss daher entweder zwei diametrale Randpunkte von Φ (Abb. 235a) oder drei Randpunkte von Φ enthalten derart, dass keiner der Kreisbogen zwischen je zwei dieser drei Punkte größer als ein Halbkreis ist, d. h., die drei Punkte bilden ein spitzwinkliges Dreieck (Abb. 235b).

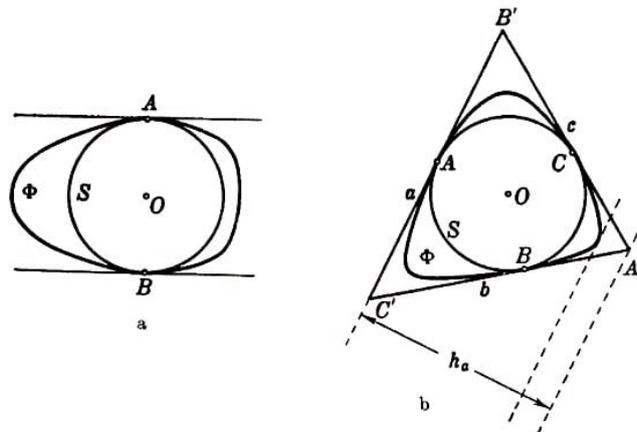


Abb. 235 a,b

Hieraus lässt sich leicht folgern, dass der Radius r eines einbeschriebenen Kreises einer konvexen Figur Φ der Breite 1 in den Grenzen eingeschlossen ist, die in der Aufgabenstellung angegeben sind. Da der Kreis S innerhalb von Φ und folglich innerhalb jedes Streifens liegt, der von einem Paar paralleler Stützgeraden der Figur gebildet wird, kann zunächst der Durchmesser von S nicht größer als 1 und folglich der Radius r des Kreises S nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein. Somit braucht nur noch bewiesen zu werden, dass r nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ sein kann.

Berührt ein Kreis S , der einer konvexen Figur Φ einbeschrieben ist, den Rand dieser Figur im Punkt A , so muss die durch den Punkt A verlaufende Stützgerade der Figur Φ gleichzeitig auch eine Stützgerade des Kreises S sein.

Da sich aber durch einen Randpunkt eines Kreises nur eine einzige Stützgerade legen lässt, folgt hieraus, dass die Figur Φ im Punkt A nur eine einzige mit der Tangente an

den Kreis S zusammenfallende Stützgerade haben kann (d.h., der Punkt A kann kein Eckpunkt der Figur Φ sein).

Hieraus ergibt sich zunächst: Enthält ein in Φ eingeschriebener Kreis S zwei diametrale Randpunkte A und B der Figur Φ , so ist der Radius von S gleich dem halben Abstand zwischen den parallelen Stützgeraden der Figur Φ , die durch die Punkte A bzw. B verlaufen; der Radius kann also nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ und muss in diesem Fall folglich gleich $\frac{1}{2}$ sein (Abb. 235a).

Enthält ein Kreis S , welcher der Figur Φ eingeschrieben ist, drei Randpunkte A , B und C der Figur Φ , die ein spitzwinkliges Dreieck bilden, so müssen die durch die Punkte A , B und C verlaufenden Stützgeraden der Figur Φ ein gewisses Dreieck $A'B'C'$ bilden, das gleichzeitig der Figur Φ und dem Kreis S umschrieben ist (Abb. 235b).

Wir bezeichnen die Seiten dieses Dreiecks mit a , b und c (mit a die größte Seite) und die zugehörigen Höhen mit h_a , h_b und h_c . Der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ ist einerseits gleich $\frac{a+b+c}{2} \cdot r$, andererseits gleich $\frac{a}{2}h_a$. Da $a \geq b$, $a \geq c$ ist, folgt aus der Gleichung

$$\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot h_a$$

dass

$$h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \cdot r \leq 3r \quad \text{also} \quad r \geq \frac{1}{3}h_a$$

ist. Die Höhe h_a des Dreiecks $A'B'C'$, das der Figur Φ umschrieben ist, kann aber nicht kleiner als die Breite von Φ sein (Abb. 235b); hieraus folgt, dass $r \geq \frac{1}{3}$ ist, was zu beweisen war.

Enthält ein der konvexen Figur Φ eingeschriebener Kreis S drei Randpunkte von Φ , die ein spitzwinkliges Dreieck bilden, so existiert ein Dreieck $A'B'C'$, das gleichzeitig der Figur Φ und dem Kreis S umschrieben ist.

Hieraus folgt, dass in diesem Falle der eingeschriebene Kreis S eindeutig ist. Jeder andere in Φ enthaltene Kreis muss auch in dem Dreieck $A'B'C'$ enthalten und folglich kleiner als der dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschriebene Kreis S sein. Berührt jedoch der eingeschriebene Kreis den Rand von Φ in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten, so braucht er nicht eindeutig zu sein (siehe Abb. 68).

Anmerkung. Die beiden Grenzen für den Wert des Radius eines eingeschriebenen Kreises einer konvexen Figur Φ der Breite 1 werden erreicht, wie das Beispiel eines Rechtecks einerseits und eines gleichseitigen Dreiecks andererseits zeigt. Aus der Lösung der Aufgabe ist leicht zu ersehen, dass das gleichseitige Dreieck die einzige konvexe Figur ist, bei welcher der Radius des eingeschriebenen Kreises $\frac{1}{3}$ der Breite beträgt.

69. Es sei Φ eine konvexe Figur, O ihr Mittelpunkt und λ der Zentralitätskoeffizient. Jede durch den Punkt O verlaufende Sehne AB der Figur Φ wird in diesem Punkt in einem Verhältnis $\frac{AO}{OB}$, das nicht kleiner als λ ist, geteilt.

Mit anderen Worten, es ist $OA \geq \lambda \cdot OB$. Trägt man auf der Strecke OA die Strecke $OA' = \lambda \cdot OB$ ab, so gehört folglich auch der Punkt A' der Figur Φ an (Abb. 236).

Die Menge aller solcher Punkte A' , die auf sämtlichen Sehnen AB der Figur Φ abge-

tragen sind, bildet den Rand einer gewissen Figur Φ' , die der Figur Φ im Verhältnis λ mit dem Ähnlichkeitszentrum im Punkt O ähnlich ist. Die Figur Φ' wird von der Figur Φ umschlossen und muss ihren Rand berühren, da es durch den Punkt O verlaufende Sehnen der Figur Φ gibt, die im Punkt O in einem Verhältnis an geteilt werden, das genau gleich λ ist.

Es sei nunmehr A_1mA_2 , ein beliebiger Bogen der konvexen Randkurve der Figur Φ , der keine Punkte der Figur Φ' enthält. Wir behaupten, dass sich die durch die Punkte A_1 und A_2 verlaufenden Stützgeraden der Figur Φ (diese Stützgeraden brauchen nicht eindeutig zu sein) in einem Punkt schneiden, der auf der gleichen Seite der Sehne A_1A_2 liegt wie der Bogen A_1mA_2 (falls sie nicht parallel sind).

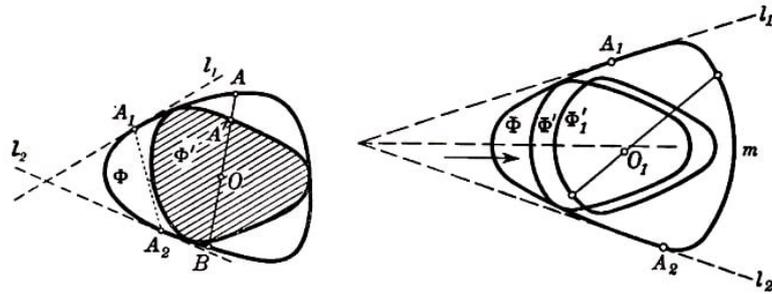


Abb. 236,237

Wir nehmen an, dies sei nicht so; folglich tritt der in Abb. 237 dargestellte Fall ein. Dann können wir die Figur Φ' parallel zur Winkelhalbierenden zwischen den Geraden l_1 und l_2 um ein hinreichend kleines Stück verschieben, so dass die erhaltene Figur Φ'_1 ganz innerhalb von Φ liegt und mit Φ keinen Randpunkt gemeinsam hat. Wir bezeichnen das Ähnlichkeitszentrum der Figuren Φ und Φ'_1 mit O_1 (man sieht leicht, dass die Figuren Φ und Φ'_1 sich sogar in Ähnlichkeitslage befinden).⁸⁷

Da das Ähnlichkeitsverhältnis von Φ und Φ'_1 gleich λ ist und die Figur Φ'_1 ganz innerhalb von Φ liegt (d.h. den Rand von Φ nicht berührt), müssen folglich alle durch den Punkt O verlaufenden Sehnen der Figur Φ im Punkt O in einem Verhältnis größer als λ geteilt werden. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass der Punkt O der Mittelpunkt von Φ ist.

Wir bezeichnen den Rand der Figur Φ mit K und den Rand von Φ' mit K' . Berührt ein gewisser Bogen der Kurve K nicht die Kurve K' , so schneiden sich, wie man sieht, die Stützgeraden der Kurve K durch die Endpunkte dieser Bogen notwendigerweise auf derselben Seite der zum Bogen gehörenden Sehne, auf der auch der Bogen selbst liegt. Dies kann jedoch nur in folgenden Fällen eintreten:

1. wenn der Rand der Figur Φ drei zu Φ' gehörende Punkte A_1 , A_2 und A_3 enthält derart, dass die Stützgeraden l_1 , l_2 , l_3 durch diese Punkte ein der Figur Φ umbeschriebenes Dreieck bilden, und
2. wenn der Rand von Φ zwei Punkte A und B enthält derart, dass die durch diese

⁸⁷Man beweist leicht, dass sich zwei ähnliche Figuren in Ähnlichkeitslage befinden (ein Ähnlichkeitszentrum besitzen), wenn entsprechende Strecken dieser Figuren parallel sind. Hieraus folgt auch, dass sich die Figuren Φ und Φ'_1 in Ähnlichkeitslage befinden.

Punkte verlaufenden Stützgeraden l_1 und l_2 der Figur Φ parallel sind. Wie man leicht beweist, kann der letzte Fall nur dann eintreten, wenn der Zentralitätskoeffizient von Φ gleich 1 ist, d. h., wenn diese Figur zentrosymmetrisch ist (und Φ' mit Φ zusammenfällt). Wir überlassen es dem Leser, diesen nicht sehr schwierigen Beweis selbständig durchzuführen.

Untersuchen wir nunmehr den ersten Fall. Es seien A_1, A_2 und A_3 drei Berührungspunkte des Randes von Φ mit dem Rand von Φ' , d.h., A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 seien drei durch den Punkt O verlaufende Sehnen der Figur Φ derart, dass

$$\frac{A_1O}{OB_1} = \frac{A_2O}{OB_2} = \frac{A_3O}{OB_3} = \lambda$$

ist. Daraus, dass die Stützgeraden l_1, l_2 und l_3 durch die Punkte A_1, A_2 und A_3 ein der Figur Φ umbeschriebenes Dreieck bilden, lässt sich leicht folgern, dass der Punkt O innerhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ liegt.

Nehmen wir etwa an, dies sei nicht so. Läge der Punkt O auf der Seite A_1A_2 des Dreiecks $A_1A_2A_3$, so wäre offenbar $\frac{A_1O}{OA_2} = \frac{A_2O}{OA_1} = \lambda$; folglich wäre $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = 1$ und die Figur Φ zentrosymmetrisch.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt O liege außerhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$, also innerhalb eines der drei Dreiecke, das wir aus dem Dreieck mit den Seiten l_1, l_2 und l_3 nach Herausnahme des Dreiecks $A_1A_2A_3$ erhalten. Der Punkt O möge beispielsweise in demjenigen dieser drei Dreiecke liegen (wir bezeichnen es mit T), das an die Seite A_1A_2 angrenzt (das Dreieck T ist in Abb. 238a schraffiert).

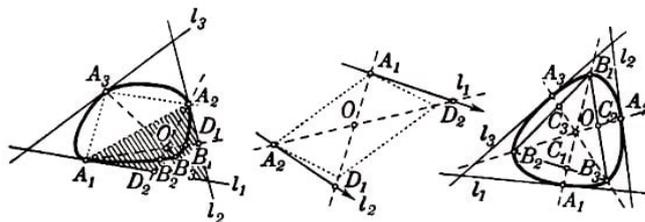


Abb. 238a, b, 239

Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden A_1O und l_2 mit D_1 , den der Geraden A_2O mit l_1 mit D_2 . Dann gilt

$$A_1O : OB_1 \geq A_1O : OD_1 \quad \text{und} \quad A_2O : OB_2 \geq A_2O : OD_2$$

Mindestens eines der Verhältnisse $A_1O : OD_1$ und $A_2O : OD_2$, ist größer als 1 (andernfalls wäre innerhalb des Dreiecks T ein Parallelogramm mit der Seite A_1A_2 und dem Mittelpunkt O möglich, und die Geraden l_1 und l_2 könnten sich nicht auf der Seite von A_1A_2 schneiden, auf welcher der Bogen A_1A_2 liegt; siehe Abb. 238b).

Es sei also etwa $A_1O : OD_1 > 1$. Dann wäre $\lambda = A_1O : OB_1 \geq A_1O : OD_1 > 1$, was jedoch nicht sein kann, weil bei $\lambda > 1$ die Figur Φ' nicht ganz in Φ eingeschlossen wäre.

Also liegt O in dem Dreieck $A_1A_2A_3$. Hieraus folgt, dass die Punkte $A_1, B_3, A_2, B_1, A_3, B_2$ in zyklischer Reihenfolge auf dem Rand der Figur Φ gelegen sind; der Punkt O

liegt daher auch innerhalb des Dreiecks $B_1B_2B_3$ (Abb. 239). Hieraus lässt sich bereits folgern, dass $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ist.

Dazu bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden A_1B_1 , A_2B_2 und A_3B_3 mit den Seiten des Dreiecks $B_1B_2B_3$ mit C_1 , C_2 und C_3 . Dann gilt

$$\frac{B_1O}{OC_1} \geq \frac{B_1O}{OA_1} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{B_2O}{OC_2} \geq \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{B_3O}{OC_3} \geq \frac{1}{\lambda}$$

daraus folgt

$$\frac{B_1C_1}{OC_1} = \frac{B_1O + OC_1}{OC_1} \geq 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda}, \quad \frac{OC_1}{B_1C_1} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

und ebenso

$$\frac{OC_2}{B_2C_2} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad \frac{OC_3}{B_1C_3} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{OC_1}{B_1C_1} + \frac{OC_2}{B_2C_2} + \frac{OC_3}{B_3C_3} &= \frac{S_{\triangle OB_2B_3}}{S_{\triangle B_1B_2B_3}} + \frac{S_{\triangle OB_3B_1}}{S_{\triangle B_2B_3B_1}} + \frac{S_{\triangle OB_1B_2}}{S_{\triangle B_3B_1B_2}} \\ &= \frac{S_{\triangle OB_2B_3} + S_{\triangle OB_3B_1} + S_{\triangle OB_1B_2}}{S_{\triangle B_1B_2B_3}} = 1 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$3 \cdot \frac{\lambda}{1 + \lambda} \geq 1, \quad 3\lambda \geq 1 + \lambda, \quad 2\lambda \geq 1$$

und schließlich

$$\lambda \geq \frac{1}{2}$$

Anmerkung. Aus der Lösung der Aufgabe ist leicht zu ersehen, dass der Zentralitätskoeffizient λ der Figur Φ dann und nur dann gleich $\frac{1}{2}$ ist, wenn Φ ein Dreieck ist.

70. Zunächst weisen wir darauf hin, dass nach dem Ergebnis der Aufgabe 68 der Radius r eines Kreises S , welcher einer Figur Φ der Breite 1 eingeschrieben ist, nicht größer als $\frac{1}{2}$ und nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ sein kann. Ist dabei $r = \frac{1}{2}$, so ist der Flächeninhalt der Figur Φ sicher nicht kleiner als $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} = 0,78\dots$, also größer als der Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\dots$ des gleichseitigen Dreiecks der Höhe 1.

Ist $r = \frac{1}{3}$, so ist Φ ein gleichseitiges Dreieck der Höhe 1.

Es sei jetzt der Radius des der Figur Φ eingeschriebenen Kreises S gleich r (mit $\frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}$); dann gibt es ein Dreieck T , das der Figur Φ und dem Kreis S gleichzeitig umschrieben ist (siehe Lösung der Aufgabe 68, Abb. 235b).

Wir legen noch drei Stützgeraden an die Figur Φ , die jeweils den Seiten des Dreiecks T parallel sind; die Berührungspunkte dieser Stützgeraden mit dem Rand der Figur Φ (beliebige Berührungspunkte, wenn diese Geraden mit dem Rand von Φ ganze Strecken gemeinsam haben) bezeichnen wir mit A' , B' und C' (Abb. 240).

Den Mittelpunkt des Kreises S bezeichnen wir mit O . Da der Abstand zwischen einem Paar paralleler Stützgeraden der Figur Φ nicht kleiner als 1 sein kann und der Punkt O von jeder Seite des Dreiecks die Entfernung r hat, ist der Abstand der Punkte A' , B' und C' vom Punkt O nicht kleiner als $1 - r$. Auf den Strecken QA' , OB' und OC' legen wir die Punkte A , B und C fest, die von O den Abstand $1 - r$ haben.

Legen wir durch die Punkte A , B und C die Tangenten an den Kreis S , so erhalten wir eine Figur Φ_r , die aus einem Kreis vom Radius r und einander gleichen Teilen besteht, welche von dem Kreis und zwei Kreistangenten begrenzt werden (Abb. 240); diese Figur liegt innerhalb unserer Figur Φ .

Ist $r = \frac{1}{3}$, so ist $\Phi_{\frac{1}{3}}$ ein gleichseitiges Dreieck der Höhe 1.

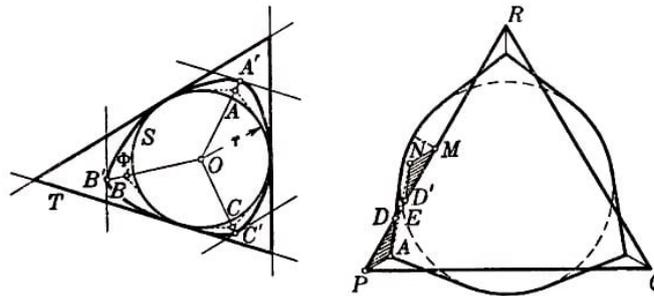


Abb. 240,241

Wir brauchen nur zu beweisen, dass von allen Figuren Φ_r mit verschiedenen Werten r ($\frac{1}{3} \leq r < \frac{1}{2}$) das gleichseitige Dreieck $\Phi_{\frac{1}{3}}$ den kleinsten Inhalt hat.

In Abb. 241 ist ein gleichseitiges Dreieck PQR und eine Figur Φ_r ($\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}$) dargestellt. Man sieht leicht, dass der gesamte Flächeninhalt der über den Rand der Figur Φ_r hinausgehenden Teile des gleichseitigen Dreiecks kleiner ist als der Flächeninhalt der Teile von Φ_r , die außerhalb des Dreiecks $\Phi_{\frac{1}{3}}$ liegen.

Die außerhalb der Figur Φ_r gelegenen Teile des Dreiecks bestehen aus sechs derartigen Dreiecken wie das in Abb. 241 schraffierte Dreieck APD . Es sei M der Mittelpunkt der Seite PR des Dreiecks PQR .

Vom Punkt M ausziehen wir eine zu PA parallele und gleichlange Strecke MN . Der Punkt N befindet sich innerhalb des Kreises, der einen Teil der Figur Φ_r darstellt, da die kleinste Entfernung vom Punkt M bis zu dem Kreis (der Abstand senkrecht zu PR) gleich PA ist (dies folgt auch daraus, dass der größte Abstand des Punktes A vom Kreis, ebenso wie die Höhe des Dreiecks, gleich 1 ist).

Wir verbinden N mit A ; es möge NA die Seite PQ im Punkt E schneiden. Das Dreieck MNE ist dem Dreieck EAP kongruent, das Dreieck DAP stellt aber nur einen Teil von EAP dar. Somit können wir das Dreieck DAP im Innern von MNE , d.h. im Innern von Φ_r , unterbringen (die neue Lage des Dreiecks DAP ist in Abb. 241 ebenfalls schraffiert).

Bringen wir auf diese Weise alle sechs derartigen Dreiecke wie DAP in das Innere von Φ_r , so können wir uns davon überzeugen, dass das gleichseitige Dreieck $\Phi_{\frac{1}{3}}$ einen kleineren Flächeninhalt besitzt als Φ_r . Damit ist der Beweis beendet.

71. Die Dreiecke ABA_1 , A_1BA_2 , A_2BA_3 , ..., $A_{n-1}BC$ mögen auf irgendeine Weise längs der Geraden AC verschoben sein. Um den Inhalt der Fläche zu bestimmen, die

von diesen sämtlichen Dreiecken in der neuen Lage eingenommen wird, ziehen wir parallel zur gemeinsamen Grundlinie AC aller Dreiecke durch jeden Schnittpunkt der Seitenlinien je zweier Dreiecke Geraden.

Dadurch zerlegen wir die Menge aller Dreiecke in eine Reihe kleinerer Dreiecke und Trapeze. Sowohl der Dreiecksinhalt als auch der Inhalt eines Trapezes ist aber gleich dem Produkt aus der Mittellinie und der Höhe; hieraus folgt, dass der gesamte Flächeninhalt aller Dreiecke und Trapeze, die in einem Streifen zwischen zwei benachbarten der von uns gezogenen Geraden eingeschlossen sind, gleich dem Produkt aus Streifenbreite und der Summe der Längen aller Strecken ist, welche von den Dreiecken aus der Mittellinie des Streifens ausgeschnitten werden (d. h. aus der Geraden, die zu AC parallel und von der Begrenzungsgeraden des Streifens gleich weit entfernt ist; siehe Abb. 242).

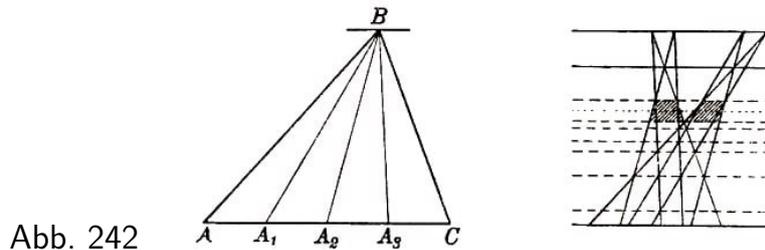


Abb. 242

Können wir also erreichen, dass die Gesamtlänge der von den Dreiecken $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$ aus jeder der zu AC parallelen Geraden ausgeschnittenen Strecken kleiner als $\frac{\sigma}{h}$ wird, wobei h die Höhe des Dreiecks ABC ist, so ist sicher der Gesamtflächeninhalt aller Dreiecke kleiner als σ .

In diesem Falle ist nämlich der Flächeninhalt der zwischen der i -ten und $(i+1)$ -ten von uns gezogenen parallelen Geraden eingeschlossenen Dreiecksteile kleiner als $\frac{\sigma}{h} \cdot h_i$, wobei h_i der Abstand zwischen der i -ten und der $(i+1)$ -ten Geraden ist; der Gesamtinhalt aller Dreiecke ist dann kleiner als

$$\frac{\sigma}{h}(h_1 + h_2 + \dots) = \frac{\sigma}{h}h = \sigma$$

Wir nehmen jetzt an, es sei $n = 2^m$, wobei m eine hinreichend große ganze Zahl ist, und verschieben nacheinander die Dreiecke $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$ längs der Geraden AC auf folgende Weise.

Die Höhe des Dreiecks ABC zerlegen wir in $m+2$ gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte parallel zu AC die Geraden $l_0, l_1, l_2, \dots, l_m$ (l_0 ist die dem Eckpunkt B nächstgelegene Gerade, l_1 die ihr folgende, usw.; Abb. 243a).

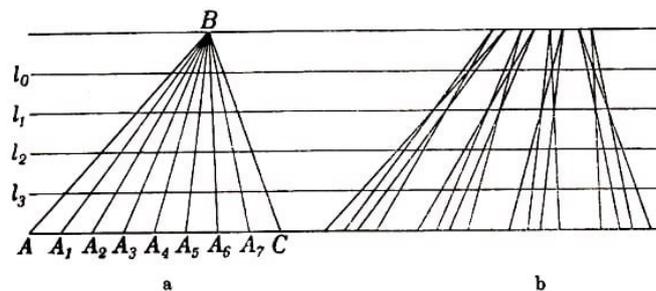


Abb. 243a,b

Jede dieser Geraden schneidet sämtliche Dreiecke $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$ in gleichlangen Strecken (da diese Dreiecke alle gleiche Grundlinien haben). Wir fassen unsere 2^m Dreiecke zu 2^{m-1} Paaren zusammen: ABA_1 und A_1BA_2, A_2BA_3 und $A_3BA_4,$

..., $A_{2^{m-2}}BA_{2^{m-1}}$ und $A_{2^{m-1}}BC$, und verschieben die Dreiecke so, dass sich verschiedene Paare nicht gegenseitig überdecken, sich in jedem Paar aber beide Dreiecke derart überschneiden, dass bei ihnen die Strecken zusammenfallen, in denen diese Dreiecke von der Geraden l_1 geschnitten werden (Abb. 243b).

Dabei schneidet jede zu AC parallele und näher als l_1 an der Grundlinie AC gelegene Gerade jedes verschobene Dreieckspaar in zwei Strecken, die einen gemeinsamen Teil haben, dessen Länge gleich der Länge des Schnittes irgendeines der Dreiecke mit l_1 ist (wir bemerken, dass die beiden Dreiecke eines Paares ein Paar paralleler Seitenlinien haben, und zwar die Seiten, welche sich bei einem Längsschnitt des Dreiecks ABC ergeben).

Hieraus ist ersichtlich, dass die Gerade l_1 die verschobenen Dreiecke in Strecken schneidet, deren Summe gleich der halben Länge der Strecke ist, in welcher l_1 das Dreieck ABC schneidet, d. h. gleich

$$\frac{1}{2} \frac{2}{m+2} a = \frac{a}{m+2}$$

wobei a die Länge der Grundlinie AC des Dreiecks ABC ist. Aus jeder Geraden, die parallel zu AC und näher an AC als l_1 gelegen ist, schneiden die in der angegebenen Weise verschobenen Dreiecke Strecken heraus, deren Gesamtlänge kleiner ist als die Länge des Schnittes dieser Geraden mit dem ersten Dreieck, d.h. kleiner als $\frac{a}{m+2}$.

Wir gruppieren jetzt die erhaltenen 2^{m-1} Dreieckspare zu Paaren, indem wir das erste mit dem zweiten Paar zusammenfassen, das dritte mit dem vierten, ..., das $(2^{m-1}-1)$ -te mit dem 2^{m-1} -ten.

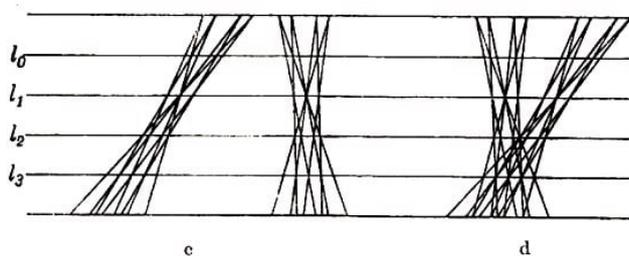


Abb. 243c,d

In jedem Paar von Dreiecken verschieben wir die einzelnen Dreieckspare so, dass sie sich in den Strecken überdecken, die aus diesen Paaren von der Geraden l_2 ausgeschnitten werden (Abb. 243c).

Man sieht leicht, dass jedes Paar verschobener Dreiecke aus dieser Geraden eine Strecke gleicher Länge ausschneidet; denn bevor die Dreieckspare verschoben wurden, stimmten die ursprünglichen Längen dieser Strecken überein (und zwar waren sie gleich $2 \cdot \frac{3}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$).

Nach der ersten Verschiebung verkleinerte sich diese Länge um ein und denselben Wert (nämlich um $2 \cdot \frac{a}{m+2} \cdot \frac{1}{2^m}$).

Die Gerade l_2 schnitt die $2^m - 1$ Dreieckspare in Strecken, deren Gesamtlänge gleich

$$\frac{3}{m+a} a - \frac{a}{m+2} = \frac{2}{m+2} a$$

ist; die verschobenen Paare schneidet sie in Strecken, deren Gesamtlänge gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{m+a}a = \frac{a}{m+2}$ ist. Jede Gerade, die zu AC parallel und näher als l_2 an AC gelegen ist, wird also jedes Quadrupel von Dreiecken, das sich nach Verschiebung zweier Paare ergibt, in einer Strecke schneiden, deren Gesamtlänge um $\frac{a}{m+2}$ kleiner ist als die Gesamtlänge der Strecken, in welchen diese Gerade die ersten 2^{m-1} Dreieckspaare schnitt (dabei sei bemerkt, dass je zwei benachbarte Paare von verschobenen Dreiecken ebenfalls Paare paralleler Seiten haben, welche beim Schnitt durch das Dreieck ABC entstehen).

Somit überzeugen wir uns davon, dass unsere 2^m Dreiecke nach der zweiten Verschiebung aus jeder zu AC parallelen und näher als l_2 an AC gelegenen Geraden Strecken ausschneiden, deren Gesamtlänge um

$$\frac{a}{m+2} + \frac{a}{m+2} = \frac{2a}{m+2}$$

kleiner ist als die Schnittlänge dieser Geraden mit dem ursprünglichen Dreieck ABC .

Nun fassen wir die erhaltenen 2^{m-2} Quadrupel von Dreiecken zu 2^{m-3} Paaren zusammen und verschieben die beiden Quadrupel jedes Paares so, dass sie sich in der Strecke schneiden, die aus diesen Quadrupeln von der Geraden l_3 ausgeschnitten wird (Abb. 243d).

Wie oben können wir uns davon überzeugen, dass jedes Quadrupel aus l_3 eine Strecke von ein und derselben Länge ausschneidet. Vor der Verschiebung hatten die 2^{m-2} Quadrupel aus l_3 Strecken von der Gesamtlänge

$$\frac{4}{m+2}a - \frac{2}{m+2}a = \frac{2}{m+2}a$$

ausgeschnitten; nach der Verschiebung schneiden sie aus l_3 eine Strecke von der Länge $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{m+2}a = \frac{a}{m+2}$ aus. Jede Gerade, die parallel zu AC und näher an AC gelegen ist als l_3 , schneidet die verschobenen Quadrupel in Strecken, deren Gesamtlänge um $\frac{2}{m+2}$ kleiner ist als die Gesamtlänge der Strecken, in welchen dieselbe Gerade die nicht verschobenen Quadrupel von Dreiecken geschnitten hatte.

Somit schneiden die Dreiecke nach der dritten Verschiebung aus jeder Geraden, die parallel ist zu AC und näher an AC liegt als l_3 Strecken heraus, deren Gesamtlänge um

$$\frac{2a}{m+2} + \frac{a}{m+2} = \frac{3a}{m+2}$$

kleiner ist als die Schnittlänge dieser Geraden mit dem Dreieck ABC .

Nunmehr fassen wir die auf diese Weise erhaltenen 2^{m-3} Oktupel von Dreiecken zu 2^{m-4} Paaren von Oktupeln zusammen und verschieben jedes Paar von Oktupeln so, dass sie sich in der Strecke schneiden, die von diesen Oktupeln aus der Geraden l_4 , ausgeschnitten wird.

Wir führen diesen Prozess weiter fort; beim letzten Schritt verschieben wir zwei Mengen von 2^{m-1} Dreiecken so, dass sie sich in der Strecke schneiden, die von diesen beiden Mengen aus der Geraden l_m ausgeschnitten wird.

Wir schätzen nun die Gesamtlänge aller Strecken ab, die von den auf angegebene Weise verschobenen Dreiecken aus irgendeiner zu AC parallelen Geraden l ausgeschnitten werden. Verläuft diese Gerade in größerer Nähe zu den Eckpunkten der Dreiecke als l_1 , so kann die Länge aller aus ihr von den Dreiecken ausgeschnittenen Strecken nicht größer als die Länge der Strecke sein, die von dem ursprünglichen Dreieck ABC aus dieser Geraden ausgeschnitten wird, die ihrerseits kleiner als $\frac{2a}{m+2}$ ist (Länge der von dem Dreieck ABC aus l_1 ausgeschnittenen Strecke).

Liegt l zwischen l_1 und l_2 , so verringert sich die Gesamtlänge der nach der ersten von uns durchgeführten Verschiebung aus l_1 ausgeschnittenen Strecken um $\frac{a}{m+2}$ und da sie bis zur Verschiebung kleiner als $\frac{3a}{m+2}$ war ($\frac{3a}{m+2}$ ist die Länge der Strecke, welche das Dreieck ABC aus der Geraden l_2 ausschneidet), wird sie nach Verschiebung kleiner als

$$\frac{3a}{m+2} - \frac{a}{m+2} = \frac{2a}{m+2}$$

bei den weiteren Verschiebungen kann die Länge der Summe aller Strecken, welche die Dreiecke aus der Geraden l ausschneiden, auf keinen Fall wachsen. Liegt l zwischen l_2 und l_3 , so verringert sich nach den ersten beiden Verschiebungen die Länge der Summe aller von unseren Dreiecken aus l_2 ausgeschnittenen Strecken um $\frac{2a}{m+2}$. Sie ist folglich nicht größer als

$$\frac{4a}{m+2} - \frac{2a}{m+2} = \frac{2a}{m+2}$$

(dabei ist $\frac{4a}{m+2}$ die Länge der von dem Dreieck ABC aus der Geraden l_3 ausgeschnittenen Strecke); im folgenden wird diese Länge auch nicht größer.

Auf diese Weise zeigen wir, dass die Länge der Strecke, welche von den verschobenen Dreiecken aus jeder zu AC parallelen Geraden l ausgeschnitten wird, nicht größer als $\frac{2a}{m+2}$ ist.⁸⁸

Hieraus ergibt sich nun, dass der Gesamtflächeninhalt, der von allen 2^m Dreiecken nach den ausgeführten Verschiebungen eingenommen wird, nicht größer als

$$\frac{2a}{m+2} \cdot h = \frac{4S}{m+2}$$

wird⁸⁹, wobei S der Inhalt des Dreiecks ABC ist.

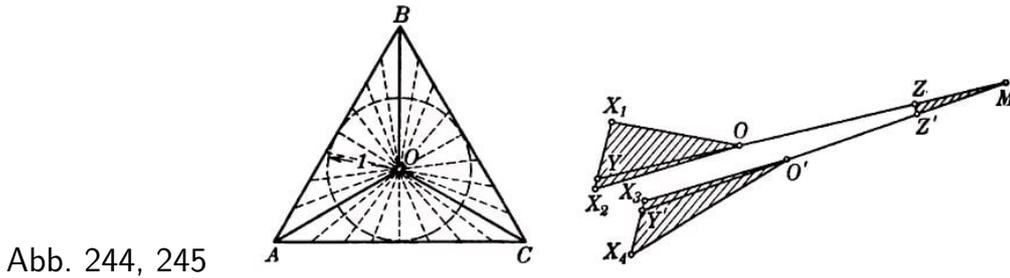
Folglich kann dieser Flächeninhalt kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl σ gemacht werden (dazu braucht man nur die Zahl m hinreichend groß zu wählen), was zu beweisen war.

72. Unter Benutzung der Aufgabe 71 lässt sich nunmehr leicht eine Figur konstruieren, deren Flächeninhalt kleiner als eine beliebig kleine Zahl σ ist und in deren Innerem sich eine Strecke der Länge 1 um 360° drehen lässt.

⁸⁸Der strenge Beweis dieses Satzes ist leicht mittels vollständiger Induktion zu führen.

⁸⁹Es lässt sich beweisen, dass der von allen auf angegebene Weise verschobenen Dreiecken $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$ eingenommene Flächeninhalt gleich $\frac{S}{m+2}$ ist. Wir benötigen diesen Satz jedoch nicht.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, dessen Inkreisradius gleich 1 ist. Wir verbinden den Mittelpunkt O des Inkreises mit den Eckpunkten des Dreiecks und untersuchen die Dreiecke AOB , BOC und COA (Abb. 244).



Gemäß Aufgabe 71 kann man jedes dieser Dreiecke mit Hilfe von Geraden, welche durch den Punkt O verlaufen, zerlegen und dann die erhaltenen Teile so verschieben, dass der gesamte Flächeninhalt, den die verschobenen Dreiecke einnehmen, beliebig klein wird.

Wir führen diese Konstruktion so durch, dass die von allen Dreiecken (die sich bei der Zerlegung der drei Dreiecke AOB , BOC und COA ergeben) eingenommene Fläche nicht größer als $\frac{\sigma}{2}$ ist.

Im Innern jedes der Dreiecke AOB , BOC und COA lässt sich eine Strecke der Länge 1 um einen Winkel drehen, der gleich AOB bzw. BOC bzw. COA ist, da sich im Innern dieses Dreiecks ein Sektor des Inkreises (mit dem Radius 1) befindet, dessen Mittelpunkt gerade in einem Eckpunkt liegt.

Es seien jetzt X_1OX_2 und $X_3O'X_4$ zwei Dreiecke aus unserer Zerlegung des Dreiecks ABC , die bis zu ihrer Verschiebung benachbart waren, d.h. eine gemeinsame Seite besaßen (zur Veranschaulichung sind diese Dreiecke in Abb. 245 so dargestellt, dass sie sich nicht überschneiden, was in Wirklichkeit eigentlich nicht zutrifft).

Dabei sind die Seiten OX_2 und $O'X_3$, die bei einem Schnitt durch das Dreieck ABC entstanden sind, einander parallel. In unseren Dreiecken ziehen wir die Geraden OY und $O'Y'$, die mit den Seiten OX_2 bzw. $O'X_3$ kleine Winkel bilden, und verlängern diese Geraden bis zu ihrem Schnitt im Punkt M . Am Punkt M konstruieren wir einen Sektor MZZ' vom Radius 1 mit dem Zentriwinkel OMO' (Abb. 245; in dieser Abbildung schneidet der Sektor die Dreiecke X_1OX_2 und $X_3O'X_4$ nicht, was in Wirklichkeit nicht sein kann).

Wir können eine Strecke der Länge 1 aus einer mit der Geraden OX_1 zusammenfallenden Lage in eine mit OY zusammenfallende Lage drehen, dann auf der Geraden YM in die Lage ZM verschieben, in die Lage $Z'M$ drehen, auf der Geraden MY' so verschieben, dass sie im Innern des Dreiecks $X_3O'X_4$ liegt, und sie dann in die Lage $O'X_4$ drehen.

Führen wir jetzt die beschriebene Konstruktion für jedes Paar benachbarter Dreiecke aus unserer Zerlegung des Dreiecks ABC durch, so können wir in der beschriebenen Weise eine Strecke der Länge 1 innerhalb der Figur um 360° drehen, die von allen Dreiecken, in welche das Dreieck ABC durch Geraden der Form OM und MO' zerlegt wird, und von Sektoren der Form ZMZ' gebildet wird (Abb. 245).

Der Flächeninhalt jedes Sektors, der zu unserer Figur hinzugefügt wird, lässt sich beliebig klein machen (da man den Zentriwinkel des Sektors beliebig klein machen kann). Die Geraden, die wir auch zur Figur mitrechnen können, haben den Flächeninhalt Null (man kann diese Geraden durch Streifen beliebig kleiner Breite ersetzen).

Fügen wir zu der Figur, die aus den Dreiecken besteht, in welche das Dreieck ABC zerlegt wurde (deren Flächeninhalt, wie aus Aufgabe 71 bekannt ist, kleiner als $\frac{\sigma}{2}$ gemacht werden kann, wie klein auch die vorgegebene Zahl σ sei), die Geraden und Sektoren (bzw. Streifen und Sektoren) hinzu, deren Gesamtflächeninhalt ebenfalls kleiner als $\frac{\sigma}{2}$ gemacht werden kann, so erhalten wir eine Figur, deren Flächeninhalt kleiner als σ ist und in deren Innerem eine Strecke der Länge 1 um 360° gedreht werden kann, was zu beweisen war.

73. Es sei Φ eine konvexe Figur mit dem Durchmesser D und der Breite Δ . Wir beweisen, dass der Flächeninhalt von Φ nicht kleiner sein kann als der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie D und der Höhe Δ , d.h. nicht kleiner als $\frac{1}{2}D\Delta$.

Es seien A und B zwei Randpunkte der Figur Φ , deren Abstand maximal (gleich D) sei. Wir legen durch die Punkte A und B senkrecht zur Strecke AB (siehe Aufgaben 6-7 des § 1) zwei Stützgeraden l_1 und l_2 der Figur Φ ; senkrecht zu l_1 und l_2 (parallel zu AB ; Abb. 246a) legen wir zwei weitere Stützgeraden m_1 und m_2 an die Figur Φ . Gemäß der Definition der Breite einer konvexen Figur kann der Abstand zwischen den Geraden m_1 und m_2 nicht kleiner als Δ sein; folglich ist der Flächeninhalt des von den Geraden l_1, m_1, l_2 und m_2 gebildeten Rechtecks $PQRS$ nicht kleiner als $D\Delta$.

Es sei C der Berührungspunkt der Geraden m_1 (der Seite PS des Rechtecks $PQRS$) mit der Figur Φ und E der Berührungspunkt der Geraden m_2 mit der Figur Φ . Da die Figur Φ konvex ist, muss sie das Viereck $BCAE$ ganz enthalten. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist aber gleich dem halben Flächeninhalt des Rechtecks $ABSP$, der Flächeninhalt des Dreiecks ABE gleich der Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks $AQRB$.

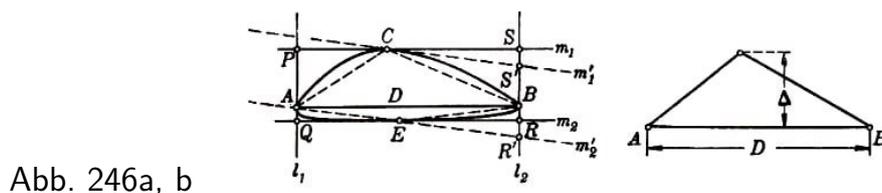


Abb. 246a, b

Somit ist der Flächeninhalt von $BCAE$ gleich der Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks $PQRS$ und kann folglich nicht kleiner als $\frac{1}{2}D\Delta$ sein; also kann auch der Flächeninhalt von Φ nicht kleiner als $\frac{1}{2}D\Delta$ sein.

Aus der angegebenen Lösung ist leicht zu ersehen, dass der Flächeninhalt nur dann gleich $\frac{1}{2}D\Delta$ sein kann, wenn Φ ein Dreieck ist.

Zunächst muss eine Figur Φ mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}D\Delta$ mit dem Viereck $BCAE$ zusammenfallen (Abb. 246a), wobei die Diagonale AB gleich dem Durchmesser D des Vierecks $BCAE$ und der Abstand zwischen den Geraden m_1 und m_2 gleich der Breite Δ sein muss. Dies kann jedoch nur dann eintreten, wenn die Strecke AB mit einer der Seiten PS oder QR des Rechtecks $PQRS$ zusammenfällt.

Andernfalls könnte man nämlich durch die Punkte C und E stets Stützgeraden m'_1 und m'_2 des Vierecks $BCAE$ ziehen, deren Abstand kleiner als der Abstand zwischen m_1 und m_2 wäre (Abb. 246a; ist $CS \geq ER$, so muss $SS' \geq RR'$, $S'R' \leq SR$ und folglich der Abstand zwischen m'_1 und m'_2 erst recht kleiner als SR sein).

Der Flächeninhalt einer konvexen Figur kann also nur dann gleich $\frac{1}{2}\Delta A$ sein, wenn Φ ein Dreieck mit der Grundlinie D und der Höhe Δ ist (Abb. 246b).

74.a) Wir brauchen nur zu beweisen, dass ein gleichschenkliges Dreieck T mit dem Umfang L , dessen Durchmesser D gleich seiner Seitenlinie ist⁹⁰, einen kleineren Flächeninhalt als jedes andere konvexe Vieleck mit gleichem Umfang L und gleichem Durchmesser D hat.

Da sich nämlich zu jeder konvexen Figur Φ mit dem Durchmesser D und dem Umfang L stets ein Vieleck finden lässt, dessen Durchmesser dem Durchmesser der Figur Φ , dessen Umfang dem Umfang von Φ und dessen Flächeninhalt dem Flächeninhalt von Φ beliebig nahekkommt⁹¹, beweisen wir damit auch, dass keine konvexe Figur mit dem Durchmesser D und dem Umfang L einen kleineren Flächeninhalt haben kann als das Dreieck T .⁹²

Es sei also M ein konvexes Vieleck mit dem Durchmesser D und dem Umfang L . Wir zeigen, dass der Flächeninhalt dieses Vielecks größer als der Flächeninhalt des Dreiecks T ist. Dazu bezeichnen wir zwei Punkte des Vielecks M , deren Abstand gleich D ist, mit A und B (man sieht leicht, dass die Punkte A und B Eckpunkte des Vielecks M sein müssen); $AX_1X_2\dots X_kB$ und $AY_1Y_2\dots Y_lB$ seien die beiden Vielecke, in die M von der Strecke AB zerlegt wird (Abb. 247a).

Da D der Durchmesser des Vielecks M ist, kann keine der Strecken $BX_1, BX_2, \dots, BX_k, BY_1, BY_2, \dots, BY_l$ größer als D sein.

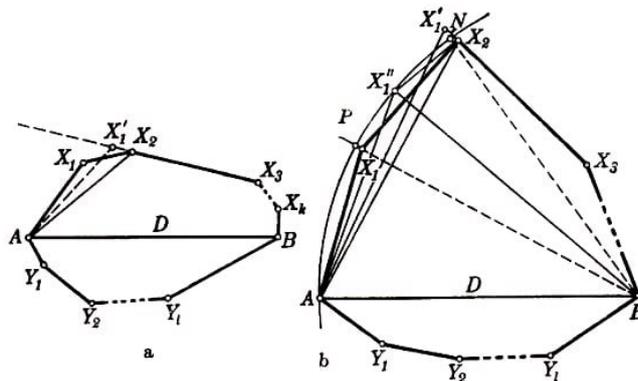


Abb. 247a, b

Nehmen wir an, die Diagonale BX_1 des Vielecks $AX_1X_2\dots X_kB$ sei kleiner als D (wäre sie gleich D , so würden wir die Strecke AB durch die Strecke BX_1 ersetzen und im

⁹⁰Die Seitenlinie D des Dreiecks T soll also nicht kleiner sein als seine Grundlinie (man sieht leicht, dass der Durchmesser D jedes Dreiecks gleich seiner größten Seite ist).

⁹¹Diese Eigenschaft hat beispielsweise ein der Figur Φ einbeschriebenes Vieleck, dessen sämtliche Seiten hinreichend klein sind, oder ein umbeschriebenes Vieleck der Figur Φ , dessen sämtliche Außenwinkel hinreichend klein sind.

⁹²Man kann ferner beweisen, dass jede konvexe Figur Φ mit dem Durchmesser D und dem Umfang L einen größeren (und nicht nur keinen kleineren) Flächeninhalt hat als das Dreieck T . Auf den Beweis gehen wir hier aber nicht näher ein.

weiteren das Vieleck $X_1X_2\dots X_kB$ anstatt $AX_1X_2\dots X_kB$ untersuchen).

Wir betrachten das Dreieck AX_1X_2 . Es sei etwa $AX_1 \geq X_1X_2$, d.h. $\angle X_1X_2A \geq \angle X_1AX_2$ (die weitere Konstruktion würde sich kaum ändern, wenn $\angle X_1X_2A < \angle X_1AX_2$ wäre; in diesem Falle würden wir danach trachten, die Seite AX_1 zur Verlängerung der Seite Y_1A zu machen).

Wir konstruieren ein Dreieck AX'_1X_2 derart, dass sein Umfang gleich dem Umfang des Dreiecks AX_1X_2 und seine Seite $X_2X'_1$ die Verlängerung der Seite X_3X_2 wird (Abb. 247a); nach Aufgabe 55d des § 5 hat das Dreieck AX_1X_2 einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck AX'_1X_2 .

Ist der Abstand des Punktes X'_1 vom Punkt B nicht größer als D , so ersetzen wir das Dreieck X_2X_1A durch das Dreieck $X_2X'_1A$ und untersuchen im weiteren an Stelle des Vielecks $AX_1X_2\dots X_kB$ das Vieleck $AX'_1X_3\dots X_kB$, das eine kleinere Seitenanzahl und einen kleineren Flächeninhalt hat.

Komplizierter ist der Fall, dass die Entfernung vom Punkt B bis X'_1 größer als D ist. Dann können wir nicht das Dreieck AX_1X_2 durch das Dreieck AX'_1X_2 ersetzen, da das bei dieser Ersetzung sich ergebende Vieleck $AX'_1X_3\dots X_kB$ einen Durchmesser hätte, der größer als D wäre.

Deshalb schlagen wir um den Punkt B einen Kreis mit dem Radius D ; es seien P und N die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Geraden BX_1 und BX'_1 (Abb. 247b). Da $BX_1 < D$, jedoch $BX'_1 > D$ ist, liegt der Punkt X_1 auf der Strecke BP und der Punkt X'_1 auf der Verlängerung der Strecke BN .

Hieraus folgt, dass AMX_2 einen größeren Umfang hat als das Dreieck AX_1X_2 , während das Dreieck ANX_2 einen kleineren Umfang besitzt als AX_1X_2 (wir erinnern daran, dass der Umfang der Dreiecke AX_1X_2 und AX'_1X_2 gleich ist). Aus Stetigkeitsüberlegungen (siehe § 3) ergibt sich, dass es auf dem Bogen PN des Kreises zwischen den Punkten P und N einen Punkt X''_1 geben muss, für den

$$AX''_1 + X''_1X_2 = AX_1 + X_1X_2$$

gilt. Wir ersetzen jetzt das Dreieck AX_1X_2 durch das Dreieck AX''_1X_2 . Die Strecke BX''_1 ist gleich D . Im weiteren untersuchen wir an Stelle der Strecke AB die Strecke X''_1B und an Stelle des Vielecks $AX_1X_2\dots X_kB$ das Vieleck $X''_1X_2X_3\dots X_kB$, das eine kleinere Seitenanzahl hat.

Verfahren wir nun mit dem Vieleck $AX'_1X_3\dots X_kB$ bzw. mit dem Vieleck $X''_1X_2\dots X_kB$ ebenso wie vorher mit $AX_1X_2\dots X_kB$, so ersetzen wir schließlich dieses Vieleck durch $AX''_1X''_2\dots X''_{k_1}B$ ($k_1 \leq k$) mit gleichem Umfang und kleinerem Inhalt, für welches

$$BA = BX''_1 = BX''_2 = \dots = BX''_{k_1}$$

gilt. Ebenso kann man das Vieleck $AY_1Y_2\dots Y_lB$ durch ein Vieleck $AY''_1Y''_2\dots Y''_{l_1}B$ ($l_1 \leq l$) mit gleichem Umfang und kleinerem Inhalt ersetzen derart, dass

$$BA = BY''_1 = BY''_2 = \dots = BY''_{l_1}$$

ist. Damit erhalten wir endgültig ein Vieleck

$$AX_1''X_2''\dots X_{k_1}''BY_{l_1}''\dots Y_2''Y_1''$$

dessen Umfang gleich dem Umfang L des Vielecks M und dessen Flächeninhalt kleiner als der Flächeninhalt von M ist. Dieses Vieleck bezeichnen wir mit M_1 .

Nunmehr brauchen wir nur noch den Flächeninhalt des Vielecks M_1 mit dem des Dreiecks T zu vergleichen (Abb. 248). M_1 zerfällt in eine Anzahl gleichschenkliger Dreiecke

$$BY_{l_1}Y_{l_1-1}, BY_{l_1-1}Y_{l_1-2}, \dots, BY_1A, BAX_1, BX_1X_2, \dots, BX_{k_1-1}X_{k_1}$$

deren Schenkel gleich D sind. Die Summe der Grundlinien aller dieser Dreiecke ist infolge der Gleichheit des Umfangs von M_1 und T gleich der Grundlinie von T ; hieraus folgt, dass jedes dieser Dreiecke keine kleinere Höhe als das Dreieck T besitzt (man sieht leicht, dass von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gleichen Schenkeln dasjenige eine kleinere Höhe hat, dessen Basis größer ist).

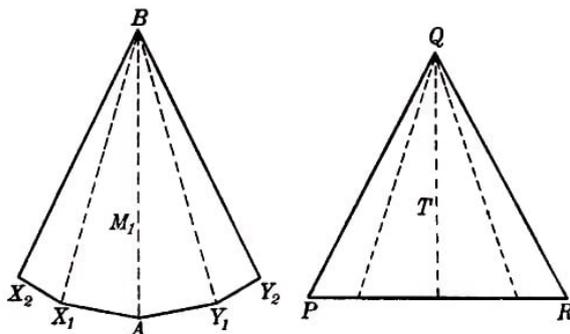


Abb. 248a, b

Wir zerlegen das Dreieck T mit Hilfe von Geraden, welche durch den Eckpunkt verlaufen, in welchem die gleichen Seiten zusammentreffen, in eine Anzahl von Dreiecken, deren Grundlinien jeweils den Grundlinien der entsprechenden Dreiecke gleich sind und deren Anzahl gleich der Anzahl derjenigen ist, in die das Vieleck M_1 zerlegt wird (Abb. 248).

Der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke ist nicht größer als der Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks, das einen Teil von M_1 darstellt. Auf diese Weise können wir schließen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks T nicht größer als der Flächeninhalt von M_1 ist. Hieraus ergibt sich, dass der Flächeninhalt von T nicht größer als der Flächeninhalt von M sein kann, was zu beweisen war.

b) Die Formulierung der Aufgabe b hängt eng zusammen mit der Formulierung der Aufgabe a. Man kann diese Aufgabe ebenso lösen wie die Aufgabe a; allerdings werden in diesem Fall die entsprechenden Überlegungen bedeutend schwieriger als die oben durchgeführten (denn ein Vieleck ohne Vergrößerung seiner Breite zu transformieren ist schwieriger als eine Transformation ohne Vergrößerung seines Durchmessers). Deshalb gehen wir hier einen anderen Weg.

Analog zur Lösung der Aufgabe a werden wir beweisen, dass das gleichschenklige Dreieck T , dessen Breite Δ gleich der auf einen Schenkel gefällten Höhe ist⁹³, einen kleineren

⁹³Das heißt, dass der Schenkel des Dreiecks nicht kleiner ist als die Basis (man sieht leicht, dass die Breite des Dreiecks gleich der auf die größte Seite gefällten Höhe ist).

Flächeninhalt hat als jedes andere Vieleck M von derselben Breite Δ und demselben Umfang L (übrigens ist es hier für den Beweis nicht wesentlich, dass M ein Vieleck ist).

Hieraus folgt schon, dass es keine konvexe Figur Φ von der Breite Δ und dem Umfang L gibt, deren Flächeninhalt kleiner ist als der des Dreiecks T .⁹⁴

Wir bezeichnen den dem Vieleck M einbeschriebenen Kreis mit ρ , den dem Dreieck T einbeschriebenen Kreis mit $\bar{\rho}$ und die Radien dieser Kreise entsprechend mit r und \bar{r} . Der Hauptteil der Untersuchungen umfasst den Beweis der Ungleichung

$$r \geq \bar{r}$$

Hieraus können wir schließen, dass $S \geq \bar{S}$ ist, wobei S bzw. \bar{S} die Flächeninhalte der Figuren M bzw. T sind.

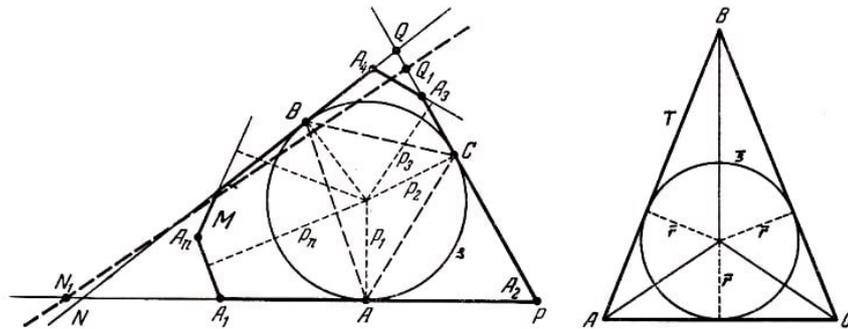


Abb. 249a, b

Aus Abb. 249 a,b, ergibt sich nämlich

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(\bar{r} \cdot AB + \bar{r} \cdot BC + \bar{r} \cdot CA) = \frac{1}{2}\bar{r} \cdot L$$

und

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(p_1 \cdot A_1A_2 + p_2 \cdot A_2A_3 + \dots + p_n \cdot A_nA_1) \\ &\geq \frac{1}{2}(r \cdot A_1A_2 + r \cdot A_2A_3 + \dots + r \cdot A_nA_1) = \frac{1}{2}r \cdot L \end{aligned}$$

Dem Ergebnis der Aufgabe 68 entsprechend kann der Kreis ρ die Seiten von M in zwei auf ρ diametral gegenüberliegenden Punkten oder in drei die Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks darstellenden Punkten A , B und C schneiden. Im ersten Fall (siehe z.B. Abb. 68) ist offenbar $\Delta = 2r$ und, da andererseits $2\bar{r} < \Delta$ ist, folglich $\bar{r} < r$. Wir haben also nur den zweiten Fall zu betrachten.

Wir verlängern die Seiten des Vielecks M , die den Kreis ρ in den Punkten A , B und C berühren (Abb. 249 a). Sie bilden das Dreieck NPQ mit dem Umfang $L_1 \geq L$, dessen sämtliche Höhen nicht kleiner sind als die Breite Δ des Vielecks M . Es sei $\angle N \leq \angle P \leq \angle Q$ vorausgesetzt.

⁹⁴Man kann sogar beweisen, dass jede konvexe Figur Φ von der Breite Δ und dem Umfang L einen größeren (und nicht nur einen nicht kleineren) Flächeninhalt hat als das Dreieck T .

Wir wählen auf der Seite PQ einen Punkt Q_1 , dessen Abstand von NP gleich Δ sei; weiter sei N_1 auf der Fortsetzung von PN hinter dem Punkt N so gewählt, dass der Umfang des Dreiecks N_1PQ_1 , ebenfalls gleich L_1 wird (die Existenz eines solchen Punktes folgt zum Beispiel sofort auf Grund der Stetigkeit).

Den Radius des dem Dreieck N_1PQ_1 einbeschriebenen Kreises bezeichnen wir mit r_1 . Wir müssen dann beweisen, dass $r_1 \leq r$ ist.

Aus Abb. 249 a folgt die Beziehung $\angle N_1 \leq \angle N \leq \angle P \leq \angle Q \leq \angle Q_1$. Deshalb wird $\angle N + \angle Q = \angle N_1 + \angle Q_1 (= 180^\circ - \angle P)$ und

$$\angle Q - \angle N \leq \angle Q_1 - \angle N_1$$

Die Radien der den Dreiecken NPQ und N_1PQ_1 umbeschriebenen Kreise bezeichnen wir mit R und R_1 . Die Seiten des Dreiecks NPQ sind gleich $2R \sin N$, $2R \sin P$ und $2R \sin Q$. Daraus ergibt sich

$$2R \sin N + 2R \sin P + 2R \sin Q = L_1$$

und

$$2R = \frac{L_1}{\sin N + \sin P + \sin Q} = \frac{L_1}{\sin P + 2 \sin \frac{Q+N}{2} \cos \frac{Q-N}{2}}$$

Analog erhalten wir

$$2R_1 = \frac{L_1}{\sin N_1 + \sin P_1 + \sin Q_1} = \frac{L_1}{\sin P + 2 \sin \frac{Q_1+N_1}{2} \cos \frac{Q_1-N_1}{2}}$$

und daraus

$$2R \leq 2R_1, \quad NQ = 2R \sin P \leq 2R_1 \sin P = N_1Q_1$$

Weiter können wir aus Abb. 250 a ersehen:

$$PA = \frac{1}{2}(PA + PC) = \frac{1}{2}(L_1 - 2NB - 2QB) = \frac{1}{2}(L_1 - 2NQ)$$

$$r = PA \cdot \tan \frac{P}{2} = \frac{1}{2}(L_1 - 2NQ) \tan \frac{P}{2}$$

und analog

$$r_1 = \frac{1}{2}(L_1 - 2N_1Q_1) \tan \frac{P}{2}$$

Hieraus folgt nun (denn es gilt $N_1Q_1 \geq NQ$)

$$r_1 \leq r$$

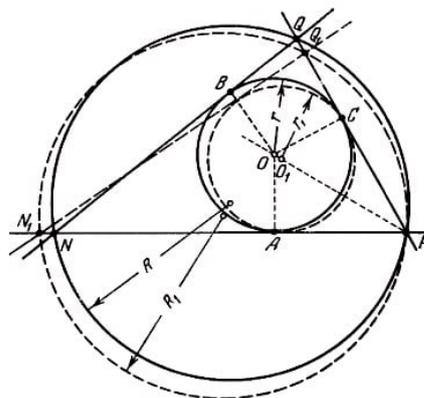
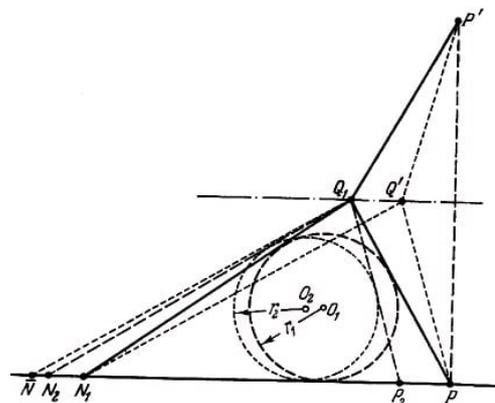


Abb. 250a, b



Wir wählen jetzt auf der Seite PN_1 , irgendeinen Punkt P_2 . Auf Grund der Stetigkeit (§ 3) folgt, dass es auf der Fortsetzung von PN_1 hinter dem Punkt N_1 einen solchen Punkt N_2 gibt, dass der Umfang des Dreiecks $N_2P_2Q_1$ wie früher gleich L_1 wird (offenbar gibt es nur einen einzigen derartigen Punkt).

Weiter ergibt sich auf Grund der Stetigkeit, dass man den Punkt P_2 so wählen kann, dass die Beziehung $\angle N_2P_2Q_1 = \angle N_2Q_1P_2$ gilt, d.h., dass $N_2P_2Q_1$ ein gleichschenkliges Dreieck wird. Der Radius des dem Dreieck $N_2P_2Q_1$ einbeschriebenen Kreises sei r_2 . Wir behaupten nun, dass $r_2 \leq r_1$, ist (Abb. 250 b).

Zunächst beweisen wir, dass $N_2P_2 < N_1P$ ist. Es sei $\overline{NP_2} = N_1P$. Wir verschieben das Dreieck $\overline{NP_2}Q_1$ so, dass die Seite $\overline{NP_2}$ mit der Seite N_1P zusammenfällt. Dabei geht der Punkt Q_1 über in einen gewissen Punkt Q' . Der Punkt P' liege symmetrisch zum Punkt P bezüglich der Geraden Q_1Q' . In diesem Fall ist offenbar

$$\overline{NQ_1} + Q_1P_2 = N_1Q' + Q'P = N_1Q' + Q'P' \geq N_1Q_1 + Q_1P' = N_1Q_1 + Q_1P$$

und weiter

$$N_2Q_1 + Q_1P_2 + P_2N_2 = N_1Q_1 + Q_1P + PN_1 \leq \overline{NQ_1} + Q_1P_2 + \overline{NP_2}$$

folglich liegt der Punkt N_2 auf der Strecke $N_1\overline{N}$, und es ist

$$N_2P_2 < \overline{NP_2} = N_1P$$

Da von den beiden Dreiecken N_1PQ_1 und $N_2P_2Q_1$ mit der gleichen Höhe das zweite eine kleinere Basis hat, ist auch sein Flächeninhalt kleiner als der des ersten Dreiecks. Hieraus folgt aber

$$r_2 = \frac{2S_{\Delta N_2P_2Q_1}}{L_1} \leq \frac{2S_{\Delta N_1PQ_1}}{L_1} = r_1$$

Jetzt vergleichen wir die gleichschenkligen Dreiecke $N_2P_2Q_1$ und T miteinander. Beide haben sie zwei Höhen, die jeweils gleich Δ sind. Die dritten Höhen bezeichnen wir mit h bzw. \bar{h} .

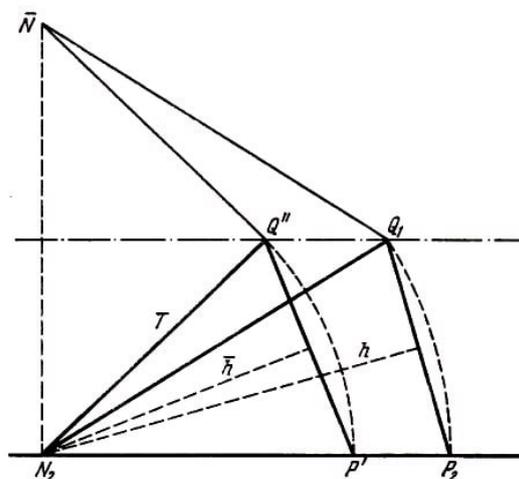


Abb. 251

Aus Abb. 251 (in der der Punkt \bar{N} symmetrisch zu N_2 bezüglich der Geraden Q_1Q'' liegt) folgt, dass der Umfang desjenigen der beiden gleichschenkligen Dreiecke mit den beiden Höhen Δ größer ist, dessen Schenkel größer sind. Nach Abb. 251 gilt

$$N_2P_2 + P_2Q_1 + Q_1N_2 = N_2P_2 + P_2Q_1 + Q_1\bar{N} > N_2P' + P'Q'' + Q''\bar{N} = N_2P' + P'Q'' + Q''N_2$$

Wegen $L_1 \geq L$ ist ein Schenkel des Dreiecks T nicht größer als ein Schenkel von $N_2P_2Q_1$, und die Basis von T ist nicht kleiner als die Basis von $N_2P_2Q_1$. Da aber im Dreieck die Seiten umgekehrt proportional den Höhen sind (es ist beispielsweise $S_{\Delta N_2P_2Q_1} = \frac{1}{2}\Delta \cdot N_2P_2 = \frac{1}{2}h \cdot P_2Q_1$ und $\frac{N_2P_2}{P_2Q_1} = \frac{h}{\Delta}$), folgt $h \geq \bar{h}$.

Wir wenden nun die Formel

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

an. Dabei ist r der Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, und h_1, h_2, h_3 sind seine Höhen.⁹⁵ Aus dieser Formel folgt

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{2}{\Delta} + \frac{1}{h} \geq \frac{2}{\Delta} + \frac{1}{h} = \frac{1}{r_2}$$

also $\bar{r} \leq r_2$. Somit gilt

$$\bar{r} \leq r_2 \leq r_1 \leq r$$

und unsere Untersuchung ist abgeschlossen.

Es sei noch bemerkt, dass man aus der Lösung der Aufgabe 74b leicht erkennen kann, dass $\bar{S} = S$ nur dann gilt, wenn das Vieleck M mit dem Dreieck T zusammenfällt.

75. a) Nach dem Ergebnis der Aufgabe 40 des § 4 können wir annehmen, dass der in der Aufgabenstellung auftretende Punkt O der Anfangspunkt ist. Bei Drehung um 180° um den Punkt O geht die Kurve K in K' , die Kurve K' in die Kurve K und die Summe $K + K'$ in sich über. Das bedeutet aber, dass der Punkt O das Symmetriezentrum der Kurve $K + K'$ ist; folglich besitzt auch die der Kurve $K + K'$ ähnliche Kurve K^* ein Symmetriezentrum O .

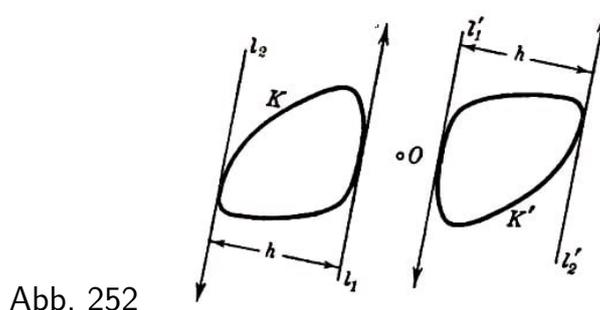


Abb. 252

⁹⁵Es seien a, b, c die Seiten des betrachteten Dreiecks und S sein Flächeninhalt. Dann gilt

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

b) Aus der Definition der Breite einer Kurve bezüglich einer gegebenen Richtung (siehe § 4, Abb. 59) folgt, dass die Breite von K' in irgendeiner Richtung gleich der Breite von K in der gleichen Richtung ist (Abb. 252). Hieraus ergibt sich, dass die Breite der Kurve $K + K'$ in jeder Richtung doppelt so groß wie die Breite der Kurve K bzw. K' in gleicher Richtung ist (siehe Aufgabe 47 des § 4).

Das besagt aber folgendes: Die Kurve K^* hat in jeder Richtung dieselbe Breite wie die Kurven K und K' . Folglich stimmen sowohl der Durchmesser als auch die Breite der Kurve K^* (siehe Aufgabe 7 des § 1) mit dem Durchmesser bzw. der Breite der Kurve K überein.

c) Da die Länge der Summe konvexer Kurven gleich der Summe ihrer Längen ist (siehe § 4), die Kurven K und K' aber einander gleich sind (die eine ergibt sich aus der anderen durch Drehung um 180° um den Punkt O), also die gleiche Länge haben, ist die Länge der Kurve $K + K'$ gleich der doppelten Länge von K . Hieraus ergibt sich, dass die Länge der Kurve K^* gleich der Länge von K (bzw. K') ist.

d) Wir beschreiben um die Kurven K und K^* Rechtecke L_1 und L_1^* mit jeweils parallelen Seiten. Da die Kurven K und K^* bezüglich jeder Richtung die gleiche Breite besitzen (siehe Lösung der Aufgabe 75b), sind diese Rechtecke kongruent (und haben folglich den gleichen Flächeninhalt).

Senkrecht zu den Winkelhalbierenden der Rechtecke L_1 und L_1^* legen wir Stützgeraden an die Kurven K und K^* . Zusammen mit den bereits gezogenen Stützgeraden bilden diese den Kurven K und K^* umbeschriebene gleichwinklige Achtecke L_2 und L_2^* (Abb. 253).

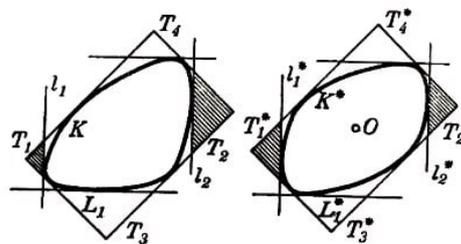


Abb. 253

Wir beweisen, dass das Achteck L_2 keinen größeren Flächeninhalt als das Achteck L_2^* haben kann. Jedes Paar der soeben gezogenen parallelen Stützgeraden trennt von den Rechtecken L_1 und L_1^* ein Dreieckspaar ab. Insgesamt erhalten wir acht ähnliche gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke.

Dabei ist die Summe der Höhen der beiden Dreiecke T_1 und T_2 , welche von dem Rechteck L_1 durch das Paar paralleler Stützgeraden l_1 und l_2 abgetrennt werden, gleich der Summe der Höhen der entsprechenden Dreiecke T_1^* und T_2^* , welche von dem Rechteck L_1^* durch die zu l_1 und l_2 parallelen Stützgeraden l_1^* und l_2^* abgetrennt werden.

Der Abstand zwischen den zu l_1 , l_2 , l_1^* und l_2^* parallelen durch die Eckpunkte der Rechtecke L_1 und L_1^* verlaufenden Geraden ist jeweils derselbe, da die Rechtecke L_1 und L_1^* einander gleich sind und der Abstand zwischen l_1 und l_2 gleich dem Abstand zwischen l_1^* und l_2^* sein muss, denn die Kurven K und K^* haben in allen Richtungen die gleiche Breite.

Da die Kurve K^* ein Symmetriezentrum besitzt, ist das Dreieck T_1^* gleich T_2^* (T_1^* liegt symmetrisch zu T_2^* in Bezug auf das Symmetriezentrum O der Kurve K^*).

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke sind proportional den Quadraten ihrer Höhen. Die Höhen der Dreiecke T_1^* und T_2^* sind einander gleich. Hieraus folgt, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke T_1 und T_2 nicht kleiner sein kann als die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke T_1^* und T_2^* .⁹⁶

Ebenso beweist man, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke T_3 und T_4 , die von dem Rechteck L_1 durch das zweite Paar paralleler Stützgeraden abgetrennt werden, nicht kleiner sein kann als die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke T_3^* und T_4^* , welche von dem Rechteck L_1^* durch Stützgeraden gleicher Richtung abgetrennt werden.

Hieraus folgt aber, dass der Flächeninhalt des der Kurve K umbeschriebenen gleichwinkligen Achtecks L_2 (die Differenz des Flächeninhalts von L_1 und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke T_1, T_2, T_3 und T_4 nicht größer sein kann als der Flächeninhalt des Achtecks L^* mit parallelen Seiten, das der Kurve K^* umbeschrieben ist.

Wir legen jetzt senkrecht zu den Winkelhalbierenden der Achtecke L_2 und L_2^* vier Paare paralleler Stützgeraden an die Kurven K und K^* . Diese Geraden trennen jeweils von den Achtecken L_2 und L_2^* vier Paare gleichschenkliger Dreiecke ab (diese Geraden bilden zusammen mit den Seiten der Achtecke der Kurven K und K^* umbeschriebene gleichwinklige Sechzehnecke L_3 und L_3^*).

Der Gesamtinhalt jedes Dreieckspaares T_k und T_{k+1} , das von dem Achteck L_2 durch ein Paar paralleler Stützgeraden abgetrennt wird, kann nicht kleiner sein als der gesamte Flächeninhalt des entsprechenden Dreieckspaares T_k^* und T_{k+1}^* , das von dem Achteck L_2^* abgetrennt ist (Abb. 254).

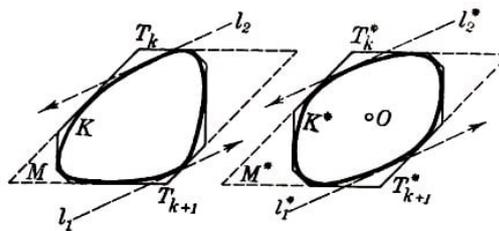


Abb. 254

Der Beweis dieser Behauptung unterscheidet sich in keiner Weise von dem oben gegebenen; nur müssen wir jetzt an Stelle der Rechtecke L_1 und L_1^* die Parallelogramme M und M^* untersuchen, die von Seitenpaaren der Achtecke gebildet werden, welche in den Eckpunkten der Dreiecke T_k und T_{k+1} bzw. T_k^* und T_{k+1}^* zusammentreffen; diese Parallelogramme sind den Kurven K bzw. K^* umbeschrieben (Abb. 254).

Die Parallelogramme M und M^* sind einander gleich, da die beiden Höhen des einen

⁹⁶Ist eine Summe $h_1 + h_2$ konstant, so hat die Summe der Quadrate $h_1^2 + h_2^2$ dann den kleinsten Wert, wenn $h_1 = h_2$ ist. Diese Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Formel

$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2}[(h_1 + h_2)^2 + (h_1 - h_2)^2]$$

Parallelogramms den entsprechenden Höhen des anderen Parallelogramms gleich sind (denn die Kurven K und K^* haben in allen Richtungen die gleiche Breite). Da der Gesamtinhalt aller Dreiecke, die vom Achteck L_2 abgetrennt sind, nicht kleiner als der Flächeninhalt aller Dreiecke ist, die vom Achteck L_2^* abgetrennt sind, kann der Flächeninhalt des Sechzehneckes L_3 nicht größer als der Flächeninhalt des Sechzehneckes L_3^* sein.

Ebenso beweist man, dass der Flächeninhalt eines gleichwinkligen 2^n -Ecks L_{n-1} , das der Kurve K umbeschrieben ist, nicht größer als der Flächeninhalt des der Kurve K^* umbeschriebenen 2^n -Ecks L_{n-1}^+ mit parallelen Seiten ist.

Diesen Beweis führt man leicht mit Hilfe vollständiger Induktion, und zwar setzen wir voraus, dass der Flächeninhalt eines gleichwinkligen 2^{n-1} -Ecks L_{n-2} , das der Kurve K umbeschrieben ist, nicht größer als der Flächeninhalt des der Kurve K^* umbeschriebenen 2^{n-1} -Ecks L_{n-2}^* mit parallelen Seiten ist.

Weiter zeigt man leicht, dass die Summe der Flächeninhalte aller von dem 2^{n-1} -Eck L_{n-2} durch 2^{n-1} Stützgeraden der Kurve K , die den Winkelhalbierenden von L_{n-2} parallel sind, abgetrennten Dreiecke nicht kleiner ist als die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke, die von dem 2^{n-1} -Eck L_{n-2}^* durch Stützgeraden von K^* abgetrennt werden, die den an die Kurve K gelegten Stützgeraden parallel sind.

Hieraus folgt, dass der Flächeninhalt von L_{n-1} nicht größer als der Flächeninhalt von L_{n-1}^* ist.

Führen wir einen Grenzübergang durch, so können wir schließen, dass der Flächeninhalt von K nicht größer als der von K^* sein kann.⁹⁷

76. a) Zunächst können wir nach Aufgabe 75 jede konvexe Kurve K durch eine zentrosymmetrische konvexe Kurve K^* gleichen Durchmessers ersetzen, die keine kleinere Fläche begrenzt. Folglich brauchen wir nur eine zentrosymmetrische Kurve vom Durchmesser 1 zu suchen, die eine Figur mit maximalem Flächeninhalt umschließt.

Der Abstand eines Punktes M einer zentrosymmetrischen konvexen Figur mit dem Durchmesser 1 vom Symmetriezentrum O kann den Wert $\frac{1}{2}$ nicht überschreiten; andernfalls wäre der Abstand zwischen dem Punkt M und dem bei Spiegelung von M an O erhaltenen Punkt M' größer als 1 (Abb. 255).

Somit lässt sich jede zentrosymmetrische konvexe Kurve vom Durchmesser 1 von einem Kreis mit dem Durchmesser 1 umschließen (Abb. 255) und kann daher keine größere Fläche begrenzen als die Kreislinie.

Anmerkung. Aus dem eben bewiesenen Satz lässt sich leicht folgern, dass die Kreislinie von allen (nicht notwendig konvexen) ebenen Figuren mit dem Durchmesser 1 die größte Fläche umschließt. Zu jeder nichtkonvexen Figur kann man nämlich eine konvexe Figur gleichen Durchmessers finden, die einen größeren Flächeninhalt besitzt (siehe Abb. 40a und diesbezüglichen Text, ferner Aufgabe 7 des § 1).

⁹⁷Eine aufmerksame Untersuchung des geführten Beweises gestattet sogar den Schluss, dass der Flächeninhalt von K kleiner (und nicht nur nicht größer) als der Flächeninhalt von K^* ist, wenn K und K^* verschieden sind (d.h. wenn K kein Symmetriezentrum besitzt).

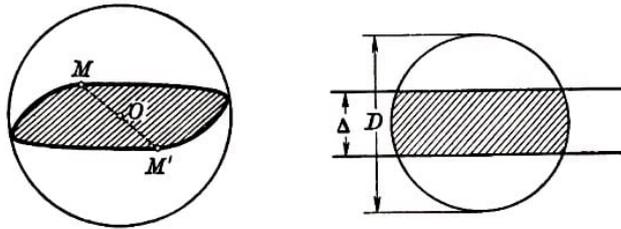


Abb. 255,256

b) Ebenso wie bei der Lösung der Aufgabe a können wir uns auf die Untersuchung zentrosymmetrischer konvexer Kurven beschränken. Je zwei parallele Stützgeraden einer zentrosymmetrischen konvexen Kurve liegen symmetrisch in Bezug auf das Symmetriezentrum O . Ist die Breite einer solchen Kurve gleich Δ , so besitzt die Kurve ein Paar paralleler Stützgeraden, deren Abstand vom Symmetriezentrum O jeweils $\frac{\Delta}{2}$ beträgt. Folglich befindet sich die Kurve ganz in einem Streifen der Breite Δ , der von zwei parallelen Geraden begrenzt wird, welche gleich weit vom Symmetriezentrum O entfernt sind. Andererseits liegt eine zentrosymmetrische Kurve vom Durchmesser D ganz innerhalb eines Kreises mit dem Durchmesser D , dessen Mittelpunkt das Symmetriezentrum der Kurve ist (siehe Lösung der Aufgabe a).

Der Durchschnitt des Streifens der Breite Δ und des Kreises mit dem Durchmesser D (Abb. 256) ist eine konvexe zentrosymmetrische Figur mit der Breite Δ , dem Durchmesser D und maximalem Flächeninhalt; jede andere derartige Figur muss ganz zu diesem Durchschnitt gehören.

Anmerkung. Aus dem Satz b lässt sich leicht der Satz a der vorliegenden Aufgabe folgern, denn Satz b ist eine Verallgemeinerung des Satzes a.

77.a) Auf Grund der Aufgabe 75 brauchen wir nur eine zentrosymmetrische Kurve mit dem Durchmesser D und der Länge L zu suchen, die eine Figur mit maximalem Flächeninhalt begrenzt.

Es sei K die gesuchte Kurve; ferner seien A und B zwei Kurvenpunkte, deren Abstand den größten Wert D erreicht. Da die Kurve K zentrosymmetrisch ist, muss die Strecke AB durch das Symmetriezentrum O verlaufen und von ihm halbiert werden (liefe die Sehne AB der Kurve K nicht durch O , so wäre die zu AB bezüglich O symmetrische Strecke $A'B'$ eine von AB verschiedene Sehne von K , und eine der Diagonalen AA' bzw. BB' des Parallelogramms $ABA'B'$ wäre länger als AB ; Abb. 257).

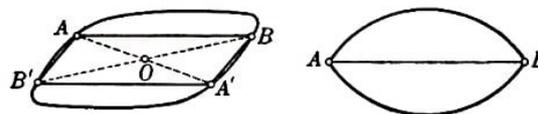


Abb. 257,258

Wir untersuchen den Teil der Kurve K , der auf einer Seite der Sehne AB gelegen ist; damit wird unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, eine konvexe Kurve zu ermitteln, die aus der Strecke AB und einer Kurve der Länge $\frac{L}{2}$ besteht und eine Figur mit größtem Flächeninhalt begrenzt.

Nach Aufgabe 65a des § 5 ist eine solche Kurve ein Kreissegment; dementsprechend hat die gesuchte Kurve K die in Abb. 258 dargestellte Form.

b) Ebenso wie bei der Lösung der Aufgabe a können wir uns auf die Untersuchung

zentrosymmetrischer konvexer Kurven beschränken. Eine zentrosymmetrische konvexe Kurve der Breite Δ besitzt zwei Stützgeraden l_1 und l_2 , die vom Symmetriezentrum um $\frac{\Delta}{2}$ entfernt sind. A und B seien zum Mittelpunkt O symmetrisch gelegene Berührungspunkte der Stützgeraden l_1 und l_2 mit der Kurve K .

Wir betrachten den Teil der Kurve K , der auf einer Seite der Sehne AB gelegen ist; damit wird unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, eine konvexe Kurve der $\frac{L}{2} + d$ zu finden, die aus der Strecke AB der Länge d , Strecken der parallelen Geraden l_1 und l_2 , welche durch A und B verlaufen, sowie aus einer Kurve besteht und eine Figur mit größtem Flächeninhalt begrenzt.

Diese Aufgabe kann völlig analog zur Grundaufgabe 62 des § 5 (bzw. zur Aufgabe 66) gelöst werden; es ergibt sich eine Kurve, die aus der Strecke AB , Strecken der Geraden l_1 und l_2 sowie einem von den Geraden l_1 und l_2 tangierten Halbkreis vom Durchmesser Δ besteht. Dementsprechend hat die gesuchte Kurve die in Abb. 259 dargestellte Form.

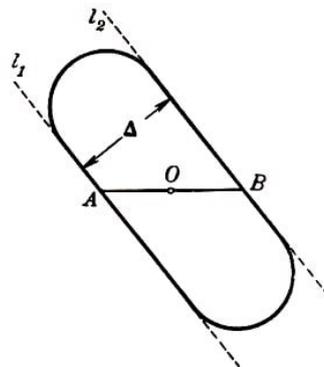


Abb. 259

78. Ist die Breite eines Reuleaux-Dreiecks (Abb. 260) gleich h , so hat jeder der drei Bogen die Länge $\frac{2\pi h}{6}$ und die Länge der ganzen Kurve ist gleich πh .

Der Flächeninhalt eines Reuleaux-Dreiecks ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt der drei Kreissektoren mit dem Radius h und einem Zentriwinkel von 60° und dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC , er ist also gleich

$$\frac{h^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) \approx 0,7048h^2$$

Ein Kreis der Breite h hat ebenfalls die Länge πh , aber den größeren Flächeninhalt

$$\frac{\pi h^2}{4} \approx 0,7854h^2$$

Jeder Bogen, der die Eckpunkte des Dreiecks verbindet, entspricht einem Winkel von 60° . Daher beträgt der Winkel zwischen der Tangente AM und der Sehne AB genau 30° (Abb. 260). Hieraus folgt, dass der Winkel MAN am Eckpunkt A des Reuleaux-Dreiecks 120° beträgt.

79. Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck, dessen größte Diagonale gleich h sei. Um jeden Eckpunkt des Fünfecks schlagen wir mit dem Radius A einen Kreisbogen, der die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet (Abb. 261).

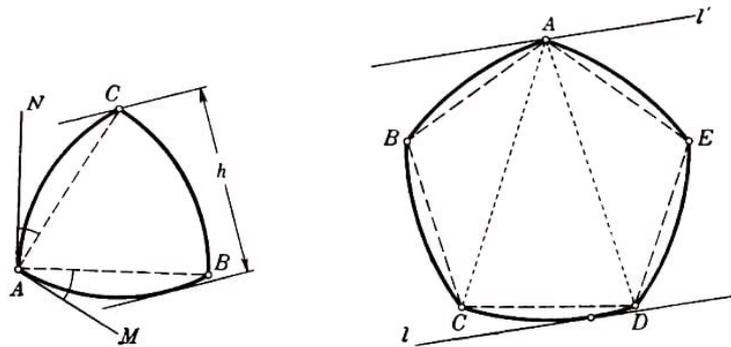


Abb. 260,261

Die so erhaltene konvexe Kurve ist eine Kurve konstanter Breite, da von je zwei parallelen Stützgeraden eine durch einen Eckpunkt verläuft, während die andere den gegenüberliegenden Bogen tangiert; der Abstand zwischen ihnen ist daher gleich h . Der Winkel CAD ist gleich 36° , daher hat jeder der fünf Bogen der Kurve die Länge $\frac{2\pi h}{10}$; die Länge der gesamten Kurve ist dann gleich πh .

Dieselbe Konstruktion lässt sich für jedes regelmäßige Vieleck mit ungerader Seitenanzahl durchführen. (Das Vieleck muss deshalb eine ungerade Seitenanzahl haben, weil es zu jedem Eckpunkt zwei gegenüberliegende Eckpunkte geben muss, die durch einen Kreisbogen mit dem Radius h verbunden werden.)

Gehen wir von einem regelmäßigen $(2n-1)$ -Eck aus, so besteht die erhaltene Kurve aus $2n-1$ gleichen Kreisbogen mit dem Radius h ; der Zentriwinkel jedes Bogens beträgt $\frac{2\pi}{2(2n-1)}$ und die Gesamtlänge der Kurve ist gleich

$$(2n-1) \cdot \frac{2\pi h}{2(2n-1)} = \pi h$$

Wir bemerken, dass für unsere Konstruktion nicht gefordert zu werden braucht, dass das Ausgangsvieleck mit ungerader Seitenanzahl regelmäßig ist.

Es müssen nur alle Diagonalen des Vielecks, die irgendeinen Eckpunkt mit einem der beiden gegenüberliegenden Eckpunkte verbinden (die Anzahl dieser Diagonalen ist gleich der Anzahl der Eckpunkte des Vielecks), die gleiche Länge h besitzen, während die übrigen Diagonalen und sämtliche Seiten des Vielecks kürzer als h sein müssen.

Man überzeugt sich leicht davon, dass zahlreiche Vielecke diese Eigenschaft haben, ohne regelmäßig zu sein. Wir schlagen um jeden Eckpunkt eines solchen Vielecks einen Kreisbogen mit dem Radius h , der die beiden gegenüberliegenden Ecken verbindet (Abb. 262).

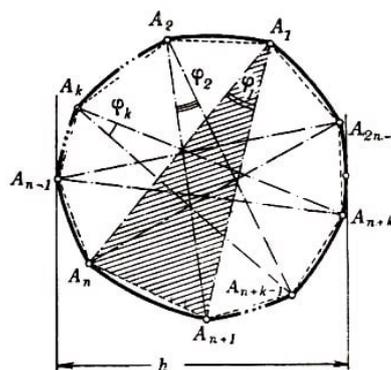


Abb. 262

Die so erhaltene konvexe Kurve ist eine Kurve konstanter Breite. Von jedem Paar paralleler Stützgeraden verläuft eine durch einen Eckpunkt des Vielecks, während die andere den Kreisbogen tangiert, der die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet; daher ist der Abstand zwischen ihnen gleich h .

Wir beweisen, dass die Länge der erhaltenen Kurve ebenfalls gleich πh ist. Dazu bezeichnen wir den Winkel $A_{n+k-1}A_kA_{n+k}$ mit φ_k (dabei sind A_{n+k-1} und A_{n+k} die Eckpunkte, die dem Eckpunkt A_k gegenüberliegen; Abb. 262).

Dann entspricht dem Verbindungsbogen der Punkte A_{n+k-1} und A_{n+k} der Zentriwinkel φ_k . Die zu untersuchende Kurve besteht damit aus $2n - 1$ Kreisbogen mit dem Radius h , die zusammen einen Bogen bilden, dem der Winkel $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}$ entspricht. Wenn wir beweisen können, dass

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} = 180^\circ$$

ist, so folgt daraus, dass die Länge unserer Kurve gleich der Länge eines Halbkreises mit dem Radius h , d.h. gleich πh ist.

Wir betrachten die Dreiecke, deren Eckpunkte irgendein Eckpunkt A_k und die ihm gegenüberliegenden Eckpunkte A_{n+k-1} und A_{n+k} sind (so ein Dreieck ist für $k = 1$ in Abb. 262 schraffiert). Die Anzahl dieser Dreiecke ist gleich $2n - 1$, folglich ist die Summe der Winkel dieser Dreiecke gleich $(2n - 1) \cdot 180^\circ$. Mit anderen Worten, die Summe der Winkel aller dieser Dreiecke ergibt die Summe aller Winkel des Vielecks $A_1A_2\dots A_{2n-1}$, wobei die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n-1}$ in dieser Summe dreimal vorkommen (so geht beispielsweise der Winkel φ_1 in die Winkelsumme der Dreiecke $A_1A_nA_{n+1}$, $A_{n+1}A_1A_2$ und $A_nA_1A_{2n-1}$ ein).

Somit ist die Summe der Winkel aller angegebenen Dreiecke gleich der Summe aus den Winkeln eines $(2n - 1)$ -Ecks und dem Doppelten der Summe $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1}$. Also ist

$$(2n - 1) \cdot 180^\circ = [(2n - 1) - 2] \cdot 180^\circ + 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1})$$

d.h.

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1} = 180^\circ$$

80. Wäre die Länge einer Sehne AB einer Kurve K der konstanten Breite h größer als h , so wäre der Abstand zwischen den auf AB senkrecht stehenden Stützgeraden erst recht größer als h , was der Definition einer Kurve konstanter Breite widerspricht.

81. Siehe § 1, Aufgabe 6.

82. Nach Aufgabe 80 können wir das Ergebnis der Aufgabe 8 des § 1 anwenden.

83. Es mögen sich die Durchmesser AD und BC im Äußern der Kurve schneiden oder parallel sein (Abb. 263). Dann sind sie die Seiten eines einbeschriebenen Vierecks $ABCD$. Da die Winkelsumme eines Vierecks 360° beträgt, ist wenigstens einer der Winkel A, B, C und D nicht kleiner als 90° .

Es sei beispielsweise der Winkel D nicht kleiner als 90° . Dann ist die Strecke AC größer als h , da AD gleich h und $AC > AD$ ist (denn $\angle ADC > \angle ACD$). Das widerspricht jedoch der Behauptung aus Aufgabe 80.

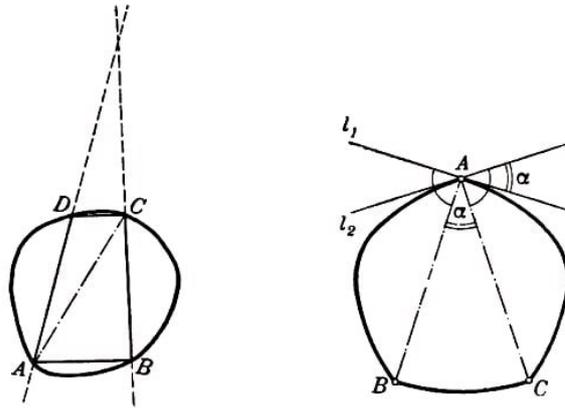


Abb. 263,264

Schneiden sich zwei Durchmesser AB und AC auf einer Kurve konstanter Breite in einem Punkt A (Abb. 264), so sind die auf den Strecken AB bzw. AC senkrecht stehenden und durch den Punkt A verlaufenden Geraden Stützgeraden der Kurve. Folglich führen durch den Punkt A zwei Stützgeraden, der Punkt A ist also eine Ecke.

Ist der Winkel BAC gleich α , so muss auch der Winkel zwischen den Geraden l_1 und l_2 gleich α sein. Der Außenwinkel am Punkt A ist daher nicht kleiner als α (und folglich der Innenwinkel im Punkt A nicht größer als $180^\circ - \alpha$).

84. Es sei K eine Kurve konstanter Breite und O ihr Symmetriezentrum. Man sieht leicht, dass alle Durchmesser der Kurve K durch den Punkt O verlaufen.

Ginge nämlich ein Durchmesser AB der Kurve K nicht durch den Punkt O , so wäre die zu AB bezüglich O symmetrisch gelegene Strecke $A'B'$ (Abb. 265) infolge der Symmetrie der Kurve K ebenfalls ein Durchmesser von K . Dann wären aber die Durchmesser AB und $A'B'$ parallel, im Widerspruch zur Aufgabe 83.

Also führen alle Durchmesser der Kurve K durch den Punkt O . Wegen der Symmetrie der Kurve K muss ferner jeder Durchmesser im Punkt O halbiert werden. Somit ist K ein Kreis mit dem Radius $\frac{h}{2}$ und dem Mittelpunkt O .

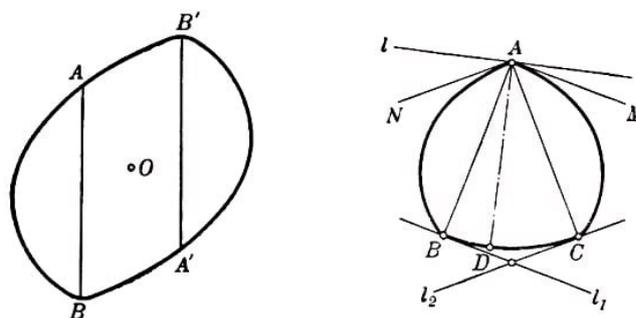


Abb. 265,266

85. Es sei A eine Ecke einer Kurve der konstanten Breite h , AM und AN die Halbtangenten der Kurve K in diesem Punkt (Abb. 266). Senkrecht zu den Strahlen AM bzw. AN ziehen wir die Strecken AB bzw. AC der Länge h .

Schließlich schlagen wir einen Kreisbogen BC mit dem Radius h um den Punkt A und beweisen, dass alle Punkte des Bogens BC der betrachteten Kurve konstanter Breite angehören.

Es sei D ein beliebiger Punkt des Bogens BC . Wir ziehen die Strecke AD ; dann sei

l die durch den Punkt A verlaufende, senkrecht auf der Strecke AD stehende Gerade. Die Gerade l ist eine Stützgerade der betrachteten Kurve, da die beiden Strahlen AM und AN auf einer Seite von ihr liegen. Da aber die Gerade l eine Stützgerade und A ihr Berührungspunkt mit der Kurve ist, muss die Strecke AD der Länge h ein Durchmesser der Kurve sein (Aufgabe 81); der Punkt D liegt daher auf der Kurve.

Also gehören alle Punkte des Bogens BC zur betrachteten Kurve. Ist der Außenwinkel am Eckpunkt A gleich α , so entspricht dem Bogen BC ein Zentriwinkel α .

Umgekehrt sei irgendein Bogen BC einer Kurve der konstanten Breite h ein Kreisbogen mit dem Radius h (Abb. 266) und A der Mittelpunkt dieses Bogens. Wir legen die Tangenten l_1 und l_2 in den Punkten B und C an den Bogen BC .

Dann sind die Geraden l_1 und l_2 Stützgeraden der Kurve konstanter Breite, die Punkte B und C sind ihre Berührungspunkte mit der Kurve, während die Strecken AB und AC senkrecht auf den Geraden l_1 bzw. l_2 stehen und die Länge h haben, d.h., AB und BC sind Durchmesser der Kurve. Folglich ist A eine Ecke der Kurve (siehe Aufgabe 83).

86. Es sei A eine Ecke einer Kurve der konstanten Breite h . Wäre der Winkel am Eckpunkt A kleiner als 120° , so wäre der Außenwinkel am Punkt A größer als 60° . Dann enthielte aber die Kurve der konstanten Breite h einen Kreisbogen mit dem Radius h , dem ein Winkel von mehr als 60° entspricht (siehe Lösung der Aufgabe 85). Folglich wäre die Länge der Verbindungssehne der Endpunkte dieses Bogens größer als h , was nach dem Ergebnis der Aufgabe 80 nicht möglich ist. Daher kann der Innenwinkel an der Ecke A nicht kleiner als 120° sein.

Jetzt sei der Innenwinkel am Punkt A einer Kurve der konstanten Breite h gleich 120° . Dann enthält die Kurve einen Kreisbogen vom Radius h mit dem Zentriwinkel BAC von 60° (Abb. 267). Folglich ist ABC ein gleichseitiges Dreieck. Da die Länge der Strecke BC gleich h ist, muss diese Strecke auch ein Durchmesser sein. Die durch die Punkte B und C verlaufenden, senkrecht auf der Strecke BC stehenden Geraden l_1 und l_2 sind Stützgeraden, da der Abstand zwischen ihnen h beträgt.

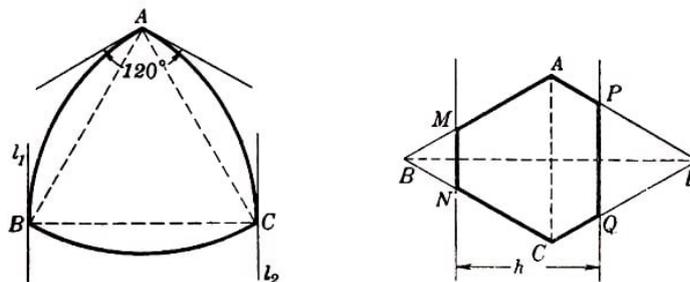


Abb. 267,268

Da sich die Durchmesser AB und BC im Punkt B schneiden, ist der Punkt B eine Ecke. Das bedeutet, der Kreisbogen mit dem Radius h um den Punkt B , der die Punkte A und C verbindet, gehört ganz zur Kurve. Ebenso gehört der Kreisbogen mit dem Radius h , der die Punkte A und B verbindet, zur Kurve. Die angegebenen drei Kreisbogen bilden aber zusammen ein Reuleaux-Dreieck.

87.a) Wir bezeichnen den Umfang des Rhombus $ABCD$ mit p , die Länge seiner Diagonale BD mit a und die von den Eckpunkten B bzw. D gefällten Höhen der Dreiecke

BMN bzw. DPQ mit h_1 bzw. h_2 . Dann ist der Umfang des Sechsecks $AMNCQP$ (Abb. 268) gleich

$$p - (BM + BN - MN) - (DP + DQ - PQ)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MNB und PQD folgern wir

$$\frac{BM + BN - MN}{h_1} = \frac{DP + DQ - PQ}{h_2}$$

Diesen Quotienten bezeichnen wir mit k . Dann ist der Umfang des Sechsecks $AMNCQP$ gleich

$$p - kh_1 - kh_2 = p - k(a - h)$$

da offenbar $h_1 + h_2 = a - h$ ist. Der Ausdruck $p - k(a - h)$ hängt aber nicht von der Lage der Geraden MN und PQ ab.

b) Der Flächeninhalt des Sechsecks $AMNCQP$ unterscheidet sich vom Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$ um die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BMN und DPQ . Die Flächeninhalte dieser Dreiecke sind den Quadraten der Höhen h_1 bzw. h_2 proportional.

Folglich ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke proportional $h_1^2 + h_2^2$, und wir brauchen nur noch zu ermitteln, für welche Lage der Geraden MN und PQ die Größe $h_1^2 + h_2^2$ den größten Wert erreicht und für welche den kleinsten. Die Summe

$$h_1 + h_2 = a - h$$

hängt jedoch nicht von der Lage der Geraden MN und PQ ab. Wegen

$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2}[(h_1 + h_2)^2 + (h_1 - h_2)^2] = \frac{1}{2}[(a - h)^2 + (h_1 - h_2)^2]$$

hat die Summe $h_1^2 + h_2^2$ den kleinsten Wert für

$$h_1 - h_2 = 0 \quad , \quad h_1 = h_2$$

,(das entspricht der Lage der Geraden MN und PQ in gleichem Abstand $\frac{h}{2}$ vom Mittelpunkt des Rhombus) und den größten Wert für

$$|h_1 - h_2| = a - h \quad \text{d.h.} \quad h_1 \text{ oder } h_2 = 0$$

(in diesem Fall läuft eine der Geraden MN oder PQ durch einen Eckpunkt des Rhombus).

Anmerkung. Die Gerade MN kann nur dann durch den Eckpunkt B des Rhombus führen, wenn dabei die Gerade PQ rechts von der Diagonalen AC bleibt (Abb. 268), d. h., wenn der Abstand h zwischen den Geraden MN und PQ nicht kleiner als die Hälfte der Diagonalen BD ist.

Dieser Fall wird uns nämlich bei der Lösung der Aufgabe 89 begegnen. Für $h < \frac{a}{2}$ wird die Differenz $|h_1 - h_2|$ am größten (und folglich der Flächeninhalt des Sechsecks am

kleinsten), wenn eine der Geraden MN und PQ mit der Diagonalen AC zusammenfällt.

88. Es sei O ein Kreis vom Durchmesser h und K eine beliebige Kurve der konstanten Breite h . Wir beweisen, dass die Umfänge der gleichwinkligen 2^n -Ecke, welche den Kurven O und K umschrieben sind, einander gleich sind. Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt.

Zunächst ist klar, dass zwei Quadrate, die der Kurve K bzw. dem Kreis O umschrieben sind, denselben Umfang haben; diese Quadrate sind sogar gleich.

Nehmen wir an, wir hätten bewiesen, dass die Umfänge der 2^n -Ecke, die der Kurve K bzw. dem Kreis O umschrieben sind, gleiche Länge besitzen. Wir untersuchen zwei in einem Eckpunkt zusammentreffende Seiten der 2^n -Ecke, etwa BE und BF , und die beiden ihnen gegenüberliegenden Seiten DL und DH (Abb. 269); die Verlängerungen dieser Seiten bilden ein Parallelogramm $ABCD$ mit gleichen Höhen, d. h. einen Rhombus.

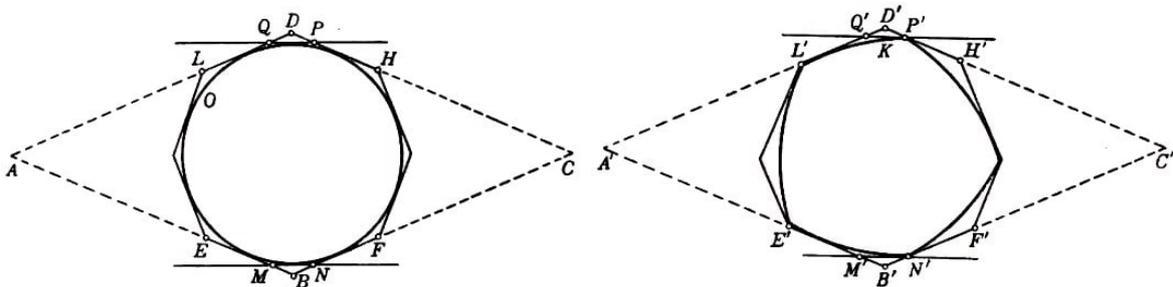


Abb. 269

Diese Konstruktion führen wir für beide Kurven O und K durch. Die beiden dabei entstehenden Rhomben $ABCD$ (dem Kreis O umschrieben) und $A'B'C'D'$ (der Kurve K umschrieben) sind gleich, denn sie besitzen gleiche Winkel und gleiche Höhen. Ferner legen wir senkrecht zur Diagonale BD des Rhombus Stützgeraden MN und PQ an den Kreis O und senkrecht zu $B'D'$ Stützgeraden $M'N'$ und $P'Q'$ an die Kurve K .

Der Abstand zwischen diesen Stützgeraden ist gleich h .

Nach Aufgabe 87a kann man behaupten, dass die Sechsecke $AMNCPQ$ und $A'M'N'C'P'Q'$ gleichen Umfang besitzen. Hieraus folgt nun, dass die den Kurven O und K umschriebenen Vielecke, welche aus den 2^n -Ecken bei Ersetzung der Seiten BE, BF, DL und DH durch die Seiten EM, MN, NF, LQ, QP, PH entstehen, gleichen Umfang haben.

Wir führen diese Konstruktion für je zwei in einem Eckpunkt zusammentreffende Seiten BE und BF durch, konstruieren den Kurven K und O umschriebene 2^{n+1} -Ecke mit gleichen Winkeln und beweisen, dass ihre Umfänge gleich sind.

Also haben die angegebenen 2^n -Ecke ($n = 2, 3, 4, \dots$), die den Kurven O und K umschrieben sind, gleiche Umfänge; folglich sind auch die Limites dieser Umfänge für $n \rightarrow \infty$ gleich, d.h., die Längen der Kurven K und O sind gleich. Die Länge des Kreises O ist bekanntlich $\pi \cdot h$, also ist auch die Länge von K gleich $\pi \cdot h$.

89. Wir stellen zunächst fest, dass sich jeder Kurve K der konstanten Breite h ein

regelmäßiges Sechseck umschreiben lässt. Gemäß Aufgabe 30a des § 3 können wir nämlich um jede Kurve konstanter Breite ein gleichwinkliges Sechseck beschreiben, das ein Paar gleicher gegenüberliegender Seiten besitzt (Abb. 270).

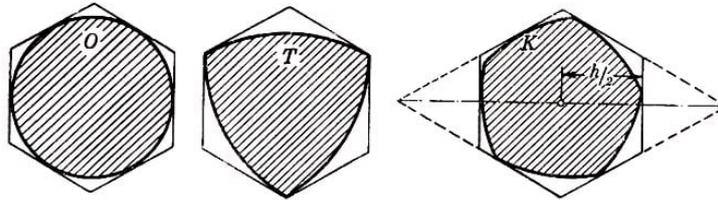


Abb. 270 a,b,c

Die Verlängerungen der übrigen vier Seiten dieses Sechsecks bilden ein Parallelogramm mit einem Winkel von 120° , dessen beide Höhen die gleiche Länge h besitzen, d.h. einen Rhombus der Höhe h . Die beiden gleichen Seiten des Sechsecks stehen senkrecht auf der größeren Diagonale des Rhombus und schneiden diese Diagonale in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt des Rhombus (dies folgt aus der Gleichheit der Seiten), und zwar in den Abständen $\frac{h}{2}$ vom Mittelpunkt.

Wie hieraus leicht zu ersehen ist, muss das zu untersuchende Sechseck ein regelmäßiges Sechseck mit dem Inkreisradius $\frac{h}{2}$ sein.

Wir beschreiben jetzt je ein regelmäßiges Sechseck um einen Kreis O mit dem Durchmesser h , um ein Reuleaux-Dreieck T der Breite h und um irgendeine Kurve K der konstanten Breite h (Abb. 270).

Dabei bemerken wir, dass drei Ecken des dem Reuleaux-Dreieck T umschriebenen regelmäßigen Sechsecks mit den Eckpunkten der Kurve T zusammenfallen (Abb. 270b).

Nun verdoppeln wir analog zur Lösung der Aufgabe 88 die Seitenanzahl der Vielecke, die den Kurven T , O und K umschrieben sind, d.h., wir gehen von umschriebenen Sechsecken zu umschriebenen Zwölfecken über, dann zu umschriebenen 24-Ecken, usw.

Wir untersuchen die sich ergebenden gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Ecke, die den Kurven O , T und K umschrieben sind, und beweisen, dass für jedes n der Flächeninhalt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks, welches dem Kreis O umschrieben ist, nicht kleiner (und der Flächeninhalt des der Kurve T umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecks nicht größer) als der Flächeninhalt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks sein kann, das der Kurve K umschrieben ist.

Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt.

Wir nehmen also an, für $3 \cdot 2^n$ -Ecke sei dieser Satz bereits bewiesen, und zeigen, dass er dann auch für $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecke gilt. Für $n = 1$ ist nämlich unsere Behauptung richtig, da die Sechsecke, die den Kurven O , T und K umschrieben sind, alle einander gleich (und zwar regelmäßige Sechsecke mit dem Inkreisradius $\frac{h}{2}$) sind.

Der Flächeninhalt des $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecks ergibt sich aus dem Flächeninhalt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks durch Subtraktion der Flächeninhalte der Dreieckspaare, die von dem $3 \cdot 2^n$ -Eck durch Paare paralleler Stützgeraden der Kurve abgetrennt werden (Abb. 271).

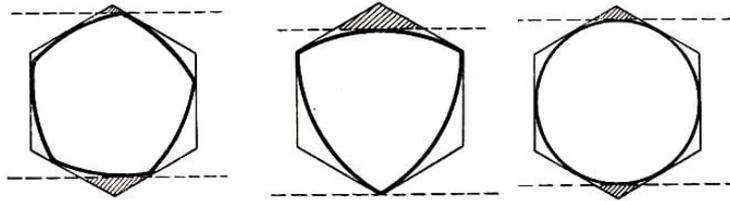


Abb. 271 a,b,c

Beim Kreis O ist das $3 \cdot 2^n$ -Eck jedoch regelmäßig, und wir ziehen jedesmal Sekanten, welche in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks verlaufen (da der Kreis zentrosymmetrisch ist).

Wir zeigen, dass beim Reuleaux-Dreieck T eine der Sekanten stets durch einen Eckpunkt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks geht. Eine von zwei parallelen Stützgeraden eines Reuleaux-Dreiecks muss nämlich durch einen Eckpunkt verlaufen (Abb. 82b).

Da sämtliche Eckpunkte des Reuleaux-Dreiecks Ecken des umbeschriebenen Sechsecks sind, führt bei der Konstruktion des umbeschriebenen gleichwinkligen Zwölfecks von jedem der drei Paare paralleler Stützgeraden eine der Geraden durch eine Ecke des Sechsecks. Das dem Reuleaux-Dreieck T umbeschriebene gleichwinklige Zwölfeck ist, wie sich hieraus ergibt, in Wirklichkeit nur ein Neuneck, d.h., drei seiner Seiten haben die Länge Null (siehe Definition des umbeschriebenen Vielecks, § 1), wobei alle drei Eckpunkte des Reuleaux-Dreiecks Eckpunkte des Neunecks sind (Abb. 272).

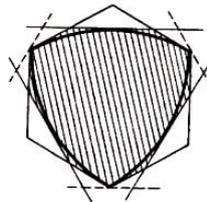


Abb. 272

Analog sind auch bei jedem dem Reuleaux-Dreieck T umbeschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Eck alle drei Eckpunkte des Reuleaux-Dreiecks Ecken des $3 \cdot 2^n$ -Ecks (in Wirklichkeit hat jedes dieser $3 \cdot 2^n$ -Ecke weniger als $3 \cdot 2^n$ -Seiten). Hieraus folgt, dass von je zwei parallelen Stützgeraden, die wir bei der Konstruktion des umbeschriebenen $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecks an das Reuleaux-Dreieck legen, stets eine durch einen Eckpunkt des $3 \cdot 2^n$ -Ecks verläuft.

Wir untersuchen jetzt die Rhomben, die von zwei benachbarten Seiten l_1 und l_2 der den Kurven O , T und K umbeschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecke und von den zu l_1 bzw. l_2 parallelen Seiten l_3 und l_4 gebildet werden. Alle diese Rhomben haben die gleiche Höhe h und gleiche Winkel (die den Winkeln der regelmäßigen $3 \cdot 2^n$ -Ecke gleich sind, also $\frac{180^\circ(3 \cdot 2^n - 2)}{3 \cdot 2^n}$ betragen) d.h., sie sind, kongruent.

Nach dem Ergebnis der Aufgabe 87b ist für den Kreis die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, die durch ein Paar paralleler Seiten des umbeschriebenen $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecks von dem betrachteten Rhombus abgetrennt werden, nicht größer und für das Reuleaux-Dreieck nicht kleiner als für die Kurve K (beim Kreis liegen diese Geraden symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt des Rhombus, während beim Reuleaux-Dreieck eine von ihnen durch einen Eckpunkt des Rhombus verläuft).

Also ist der Flächeninhalt des dem Kreis O umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecks nicht kleiner als der Flächeninhalt des der Kurve K umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecks, während der Flächeninhalt des dem Reuleaux-Dreieck T umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecks nicht größer als der Flächeninhalt des der Kurve K umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecks ist. Durch Grenzübergang ergibt sich, dass der Kreis O keine kleinere Fläche begrenzt als K , während das Reuleaux-Dreieck T keine größere Fläche berandet als K .

Wir können sogar behaupten, dass eine vom Kreis verschiedene Kurve K eine kleinere (und nicht nur keine größere) Fläche umschließt als O und dass K eine größere Fläche begrenzt als T , wenn K kein Reuleaux-Dreieck ist. Da wir nämlich jedesmal beim Anlegen von Paaren paralleler Stützgeraden an O bzw. K von dem der Kurve K umschriebenen Vieleck ein Dreieckspaar abschneiden, dessen Flächeninhalt nicht kleiner als der Flächeninhalt des Dreieckspaares ist, das von dem umschriebenen Vieleck des Kreises O abgetrennt wird, können die beim Grenzübergang erhaltenen Flächeninhalte nur dann gleich sein, wenn wir jedesmal in beiden Fällen Dreieckspaare gleichen Flächeninhalts abtrennen.

Das ist jedoch nur dann möglich, wenn jedes bei der Konstruktion eines $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecks gezogene Paar paralleler Stützgeraden der Kurve K in Bezug auf den Mittelpunkt des von benachbarten Seiten des $3 \cdot 2^n$ -Ecks gebildeten Rhombus symmetrisch liegt.

Tritt dieser Fall nun ein, so sind alle der Kurve K umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecke zentrosymmetrisch (mit dem Symmetriezentrum im Mittelpunkt des der Kurve K umschriebenen regelmäßigen Sechsecks). Hieraus lässt sich ohne Schwierigkeit folgern, dass die Kurve K selbst ein Symmetriezentrum besitzen muss, also ein Kreis ist (siehe Aufgabe 84)⁹⁸.

Noch einfacher beweist man folgendes: Ist die Kurve K vom Reuleaux-Dreieck T verschieden, so begrenzt sie eine größere Fläche als T . Die Kurve K umschließt nur dann eine Fläche mit gleich großem Inhalt wie T , wenn bei unserer Konstruktion jedesmal die Paare paralleler Stützgeraden der Kurven K und T von den ihnen umschriebenen Vielecken Dreieckspaare gleichen Flächeninhalts abtrennen.

Jedoch braucht schon das erste bei der Konstruktion gezogene Paar paralleler Stützgeraden der Kurve K von dem der Kurve K umschriebenen Sechseck keine gleichgroße Fläche abzutrennen wie das Paar paralleler Stützgeraden des Reuleaux-Dreiecks T von dem der Kurve T umschriebenen regelmäßigen Sechseck.

Dies würde nämlich nur dann eintreten, wenn eine der beiden parallelen Stützgeraden der Kurve K durch einen Eckpunkt des der Kurve K umschriebenen regelmäßigen Sechsecks verlief. Das ist jedoch nur in dem Fall möglich, dass der entsprechende Eckpunkt des Sechsecks der Kurve K angehört. Dies tritt wiederum nur dann ein, wenn K einen Winkel von 120° besitzt, d.h., wenn K ein Reuleaux-Dreieck ist (siehe Aufgabe 86).

Somit gilt, wenn K eine beliebige Kurve der konstanten Breite h und S ihr Flächeninhalt

⁹⁸Dass eine vom Kreis O verschiedene Kurve konstanter Breite eine kleinere Fläche begrenzt als der Kreis O mit gleicher Breite, folgt auch aus den Aufgaben 61 und 62 des § 5 unter Benutzung des Satzes von Barbier (Aufgabe 88)

ist,

$$0,7048h^2 \approx \frac{1}{2}h^2(\pi - \sqrt{3}) \leq S \leq \frac{1}{4}\pi h^2 \approx 0,7854h^2$$

Die Flächeninhalte der Kurven konstanter Breite sind also in ziemlich engen Grenzen eingeschlossen.

90. Es sei K eine beliebige Kurve der konstanten Breite h und ein Kreis vom Radius r , der nicht über die Kurve K hinausgeht; es sei ferner O' ein Kreis mit dem Radius $h - r$, der konzentrisch zum Kreis O gelegen ist (Abb. 273).

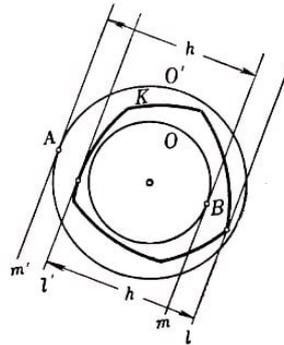


Abb. 273

Wir beweisen, dass der Kreis O' die Kurve K umschließt, dass also jeder Punkt des Kreises O' außerhalb der Kurve K liegt.

Es sei A ein beliebiger Punkt des Kreises O' , m' die Tangente an den Kreis O' in diesem Punkt, m die zu m' parallele, im Abstand h von ihr gelegene Tangente an den Kreis O .

Den Berührungspunkt von m mit dem Kreis O bezeichnen wir mit B . Ferner seien l und l' die zu m und m' parallelen Stützgeraden der Kurve K ; der Abstand zwischen l und l' ist gleich h , also gleich dem Abstand zwischen m und m' .

Es möge l auf der gleichen Seite der Geraden l' liegen, wie m bezüglich m' (Abb. 273). Da der Punkt B im Innern der Kurve K liegt (oder der Kurve K angehört), verläuft die Gerade m zwischen l und l' . Hieraus folgt, dass die Gerade m' außerhalb des von den Geraden l und l' gebildeten Streifens, d. h. außerhalb der Kurve K liegt.

Folglich befindet sich auch der Punkt A außerhalb der Kurve K , was zu beweisen war.

Ist O' ein Kreis mit dem Radius R , der die Kurve K umschließt, und O ein zu O' konzentrisch gelegener Kreis mit dem Radius $h - R$, so beweist man analog, dass O nicht über die Kurve K hinausgeht.

Es sei jetzt O_u ein Umkreis und O_i ein Inkreis der Kurve K . Ihre Radien bezeichnen wir mit R bzw. r . Der Radius R kann nicht größer als $h - r$ sein, da der zu O_i konzentrisch gelegene Kreis vom Radius $h - r$ die Kurve K umschließt und der Umkreis von allen K umfassenden Kreisen den kleinsten Radius besitzt.

O_u kann aber auch keinen Radius haben, der kleiner ist als $h - r$, da sonst ein zu O_u konzentrischer Kreis vom Radius $h - R$ innerhalb K gelegen wäre und einen Radius hätte, der größer als r ist.

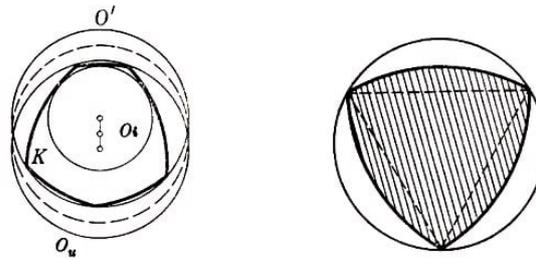


Abb. 274,275

Nehmen wir nunmehr an, die Kreise O_u und O_i lägen nicht konzentrisch. Dann würde der zu O_i konzentrische Kreis O' mit dem Radius R die Kurve K umschließen, und wir hätten folglich zwei Kreise O_u und O' mit gleichem Radius R , die K umschlossen (Abb. 274).

Dann ließe sich aber ein Kreis konstruieren, dessen Radius kleiner als R wäre und der Kim Innern enthielte. Der Mittelpunkt dieses Kreises läge in der Mitte der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von O_i und O' , und der Kreis verlief durch die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Dies widerspricht jedoch der Definition des Umkreises.

91. Man sieht leicht, dass der Radius eines Umkreises des Reuleaux-Dreiecks der Breite h gleich $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ sein muss (Abb. 275).

Alle Kurven der konstanten Breite h haben den Durchmesser k (vgl. Aufgaben 80 und 81), und nach dem Satz von Jung (Aufgabe 16 des § 2 und Aufgabe 67 des § 6) kann der Radius eines Kreises, der einer Kurve vom Durchmesser h umbeschrieben ist, nicht größer als $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ sein.

Ist eine Kurve K der konstanten Breite h vom Reuleaux-Dreieck verschieden, so ist, wie man ohne Schwierigkeit sieht, der Radius des Umkreises der Kurve K kleiner als $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ (und nicht nur nicht größer als $\frac{h\sqrt{3}}{3}$).

Der Radius des Umkreises einer ebenen Figur vom Durchmesser k kann nämlich nur dann den größten Wert $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ erreichen, wenn der umbeschriebene Kreis drei Punkte der Figur enthält, die ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge h bilden (siehe Aufgabe 67 des § 6). Enthält aber eine Kurve K der konstanten Breite h drei Punkte, welche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge h bilden, so sind die Seiten dieses gleichseitigen Dreiecks Durchmesser von K , und die Kurve K ist offenbar ein Reuleaux-Dreieck.

Der zweite Teil der Aufgabe ist völlig trivial, denn beim Kreis fällt der Umkreis mit ihm selbst zusammen, d.h., er hat den gleichen Durchmesser, und der Durchmesser des Umkreises einer Kurve K kann nicht kleiner als der Durchmesser von K sein. Ist eine Kurve K der konstanten Breite h vom Kreis verschieden, so ist offenbar der Durchmesser des Umkreises von K größer als h .

Damit sehen wir, dass für alle Kurven der konstanten Breite h der Radius R eines Umkreises und der Radius r eines Inkreises in folgenden recht engen Grenzen liegt:

$$0,5h \leq \frac{h}{2} \leq R \leq \frac{h\sqrt{3}}{3} \approx 0,58h \quad , \quad 0,42h \approx \frac{h(3 - \sqrt{3})}{3} \leq r \leq \frac{h}{2} = 0,5h$$

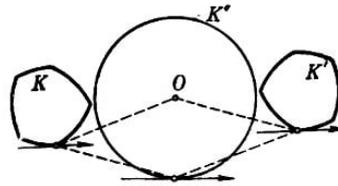


Abb. 276

92. Es sei K eine beliebige Kurve der konstanten Breite h und K' die aus der Kurve K bei Drehung um 180° um den Ursprung O entstandene Kurve (die zu K symmetrisch in Bezug auf den Ursprung O liegt); $K^* = K + K'$ sei ihre Summe (Abb. 276).

Aus Aufgabe 47 des § 4 folgt unmittelbar, dass K^* eine Kurve der konstanten Breite $2h$ sein muss; außerdem ist $K^* = K + K'$ eine zentrosymmetrische Kurve mit dem Symmetriezentrum O , d.h., K^* geht bei Spiegelung an O oder, mit anderen Worten, bei Drehung um 180° um den Punkt O in sich selbst über. Bei einer derartigen Drehung geht nämlich K in K' , K' in K und folglich ihre Summe in sich über. Gemäß Aufgabe 84 muss die Kurve K^* ein Kreis mit dem Radius h sein.

Der Umfang des Kreises K^* ist gleich $2\pi h$. Andererseits ist die Länge von K^* gleich der Summe der Längen von K und K' (siehe § 4). Da die Kurven K und K' gleich sind (die eine entsteht aus der anderen durch Drehung um 180°), sind auch ihre Längen gleich.

Somit ist die doppelte Länge der Kurve K gleich $2\pi h$, d.h., die Länge der Kurve K beträgt πh (Satz von Barbier).

93. Es sei K eine konvexe Kurve mit der Eigenschaft, dass die Summe $K^* = K + K'$ der Kurve K und der aus K durch Spiegelung an irgendeinem Punkt O (durch Drehung um 180° um den Punkt O) erhaltenen Kurve K' ein Kreis mit dem Radius h ist.

Ist die Breite der Kurve K in irgendeiner Richtung gleich l , so muss auch die Breite der Kurve K' in dieser Richtung gleich l sein (Abb. 277).

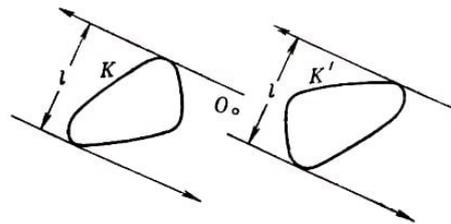


Abb. 277

Gemäß Aufgabe 47 des § 4 muss die Breite der Kurve $K^* = K + K'$ in dieser Richtung gleich $2l$ sein. Da aber K ein Kreis mit dem Radius h ist, beträgt seine Breite in jeder Richtung $2h$, es ist also $2l = 2h$ und folglich $l = h$. Wir sehen also, dass die Breite der Kurve K in jeder Richtung den gleichen Wert h hat.

94.a) Es sei K eine beliebige konvexe Kurve vom Durchmesser 1, K' die aus K bei Spiegelung in Bezug auf irgendeinen Punkt erhaltene Kurve und $K^* = K + K'$. Offenbar ist K^* eine zentrosymmetrische konvexe Kurve, deren Durchmesser gleich 2 und deren Länge doppelt so groß wie die Länge der Kurve K ist (siehe § 6, Aufgaben 75a, b und c; wir weisen darauf hin, dass die von uns in Aufgabe 75 mit K^* bezeichnete Kurve der Kurve K^* der vorliegenden Aufgabe im Verhältnis $\frac{1}{2}$ ähnlich ist).

Der Abstand eines Punktes der Kurve K^* vom Symmetriezentrum O dieser Kurve kann

nicht größer als 1 sein, da andernfalls der Durchmesser von K^* größer als 2 wäre. Folglich wird die Kurve K^* von einem Kreis mit dem Radius 1 umschlossen. Die Länge von K^* (und folglich auch die Länge von K , die gleich der halben Länge von K^* ist) wird am größten, wenn K^* ein Kreis mit dem Radius 1 ist; die Kurve K muss dann eine Kurve der konstanten Breite 1 sein (siehe Aufgabe 93).

b) Es sei K eine beliebige konvexe Kurve mit dem Durchmesser D und der Breite Δ und K' die aus K bei Spiegelung in Bezug auf irgendeinen Punkt entstandene Kurve. Dann ist die Kurve $K^* = K + K'$ eine zentrosymmetrische konvexe Kurve mit dem Durchmesser $2D$ und der Breite 2Δ ; die Länge von K^* ist doppelt so groß wie die Länge von K (siehe Aufgabe 75a, b und e aus § 6).

Die Breite von K^* ist gleich 2Δ , also lässt sich K^* in einen Streifen einschließen, der von zwei parallelen Geraden gebildet wird, deren Abstand gleich 2Δ ist. Da die Kurve K^* zentrosymmetrisch ist, sind diese beiden Geraden, deren Abstand einen kleinsten Wert hat, Stützgeraden der Kurve K^* und gleich weit entfernt vom Symmetriezentrum O der Kurve K^* .

Da andererseits der Durchmesser von K^* gleich $2D$ ist, wird die Kurve K^* von einem Kreis mit dem Radius D um das Symmetriezentrum O umschlossen (siehe Lösung der Aufgabe 94a). Hieraus folgt, dass die Kurve K^* innerhalb der in Abb. 278 fettgedruckten Kurve gelegen ist; folglich hat K^* (also auch K) die größte Länge, wenn K^* mit dieser fettgedruckten Kurve zusammenfällt.

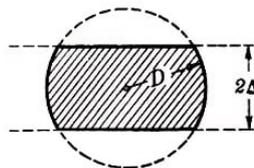


Abb. 278

Für die in der Aufgabenstellung beschriebene Kurve K fällt aber die Kurve $\overline{K} + \overline{K}'$ genau mit der in Abb. 278 fettgedruckten Kurve zusammen. Die Summe $K + K'$ ist nämlich ein Kreis mit dem Radius D . Die aus den Punkten A, B, P und Q der Kurve K bei Drehung von \overline{K} um 180° um den Punkt O erhaltenen Punkte A', B', P' und Q' der Kurve \overline{K}' entsprechen (im Sinne der Aufgabe 41 aus § 4) den Punkten B, A, Q und P der Kurve \overline{K} .

Die Summen entsprechender Punkte der Bogen AQ und $B'P'$ bilden somit einen Kreisbogen vom Radius D ; dasselbe gilt für die Bogen $A'Q'$ und BP . Hieraus folgt unsere Behauptung.

Ergibt die Summe der Kurven K und K' die in Abb. 278 dargestellte Kurve, so muss K , wie man leicht sieht, mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Kurve zusammenfallen (siehe Aufgabe 45 des § 4 und Aufgabe 93).

95.a) Es sei K eine beliebige konvexe Kurve der Breite 1 und K' die aus K durch Spiegelung in Bezug auf irgendeinen Punkt entstandene Kurve. Dann ist $K^* = K' + K$ eine zentrosymmetrische Kurve der Breite 2, deren Länge das Doppelte der Länge der Kurve K beträgt (siehe Aufgaben 75a, b und c aus § 6).

Da die Breite von K^* gleich 2 ist, muss die Kurve K^* ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um das Symmetriezentrum O dieser Kurve liegen. Befände sich nämlich irgendein Punkt A der Kurve K^* innerhalb dieses Kreises, so wäre der Abstand zwischen der durch den Punkt A verlaufenden Stützgeraden der Kurve K^* und der aus dieser durch Spiegelung in Bezug auf den Mittelpunkt O erhaltenen Stützgeraden kleiner als 2.

Somit sehen wir, dass die Kurve K^* die kleinste Länge hat, wenn sie mit dem Kreis vom Radius 1 zusammenfällt. Dann muss aber die Kurve K eine Kurve der konstanten Breite 1 sein (siehe Aufgabe 93).

b) Es sei K eine beliebige konvexe Kurve der Breite Δ mit dem Durchmesser D und K' die aus K bei Spiegelung an irgendeinem Punkt O entstandene Kurve; $K^* = K + K'$ ist dann eine zentrosymmetrische Kurve der Breite 2Δ mit dem Durchmesser $2D$, deren Länge doppelt so groß wie die Länge von K ist (siehe Aufgaben 75a, b und c aus § 6). Wir bezeichnen zwei Punkte der Kurve K^* , deren Abstand gleich $2D$ ist, mit A und B . Man sieht leicht, dass A und B in Bezug auf den Mittelpunkt O der Kurve K^* symmetrisch sein müssen (andernfalls wäre eine der beiden Sehnen AA' und BB' , wobei A' und B' zu A bzw. B symmetrisch in Bezug auf das Symmetriezentrum O gelegene Punkte sind, größer als $2D$; Abb. 279).

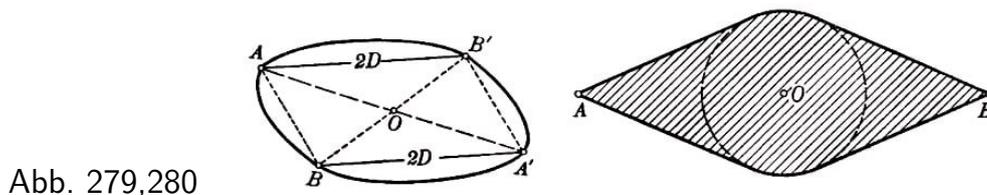


Abb. 279,280

Da die Kurve K^* andererseits die Breite 2Δ hat, liegt sie ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius Δ um den Punkt O (siehe Lösung der Aufgabe 95a).

Hieraus ergibt sich, dass die Kurve K^* (und folglich auch K) die kleinste mögliche Länge besitzt, wenn K^* aus zwei Bogen eines Kreises vom Radius Δ um den Punkt O und den vier Abschnitten der Tangenten besteht, die von den Punkten A und B aus an diesen Kreis gelegt sind (Abb. 280).

Hieraus folgt nach Aufgabe 93 und Aufgabe 45 des § 4, dass die Kurve K die in Abb. 90 (Seite 62) dargestellte Form hat.

96. Wir beweisen zunächst, dass die Länge einer Kurve K_0 , welche nur aus Kreisbogen vom Radius h besteht, πh beträgt, wobei h die konstante Breite von K_0 ist (die Konstruktion einer solchen einer beliebig vorgegebenen Kurve der konstanten Breite h benachbarten Kurve wurde im Text beschrieben).

Wir betrachten irgendeinen Kreisbogen AB der Kurve K_0 einzeln. Dazu ziehen wir durch die Punkte A und B Durchmesser der Kurve. Schneiden sich diese Durchmesser in einem auf der Kurve gelegenen Punkt C , so ist C der Mittelpunkt des Bogens AB (Abb. 281a), und die Länge des Bogens AB ist das Produkt aus dem Winkel α zwischen diesen Durchmessern und der Breite der Kurve K_0 .

Schneiden sich die Durchmesser AC und BD der Kurve K_0 im Innern der Kurve, so muss diese Kurve nach Konstruktion von K_0 Kreisbogen CP und DP um die Punkte

A bzw. B enthalten, wobei P der Schnittpunkt dieser Bogen und der Mittelpunkt des Bogens AB ist (Abb. 281b).

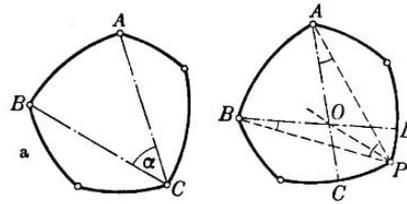


Abb. 281a, b

Dabei ist die Summe der Längen der Bogen AB , CP und PD gleich dem Produkt aus dem Winkel zwischen den Durchmessern AC und BD und der Breite h der Kurve K_0 . Der Bogen AB ist nämlich gleich $h \cdot \angle APB$, der Bogen CP gleich $h \cdot \angle CAP$, der Bogen PD gleich $h \cdot \angle PBD$ und die Summe der Winkel APB , CAP und PBD , wie man erkennt, gleich dem Winkel zwischen AC und BD . (Ist O der Schnittpunkt von AC und BD , so sind die Summen $\angle APO + \angle PAC$ und $\angle BPO + \angle PBD$ jeweils gleich einem der beiden Teile, in welche die Gerade PO den Winkel AOB zerlegt.)

Addieren wir die Längen aller Teile der Kurve K_0 , die von Durchmessern eingeschlossen werden, welche durch benachbarte Ecken der Kurve verlaufen, so können wir uns leicht davon überzeugen, dass die gesamte Länge der Kurve K_0 gleich πh ist.

Nunmehr sei uns eine beliebige Kurve K der konstanten Breite h gegeben. Wir bilden eine Folge von Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ der konstanten Breite h , welche nur aus Kreisbogen vom Radius h bestehen, so dass die Kurve K der Grenzwert dieser Folge ist.

Die Länge jeder der Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ ist nach dem oben Bewiesenen gleich πh . Folglich muss die Länge von K , welche gleich dem Grenzwert der Längen von $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ ist (siehe § 4, ebenfalls gleich πh sein.

97. Wir betrachten zunächst Kurven der konstanten Breite h , die nur aus Kreisbogen vom Radius h bestehen. K_0 sei eine derartige Kurve, BD und AC seien zwei ihrer Durchmesser, die durch zwei benachbarte Ecken A und B der Kurve K_0 verlaufen. Der Teil der Kurve K_0 , der von den sich innerhalb der Kurve schneidenden Durchmessern BD und AC eingeschlossen wird, besteht aus dem Bogen CP um den Punkt A , dem Bogen DP um den Punkt B und dem Bogen AB um den Punkt P (Abb. 282).

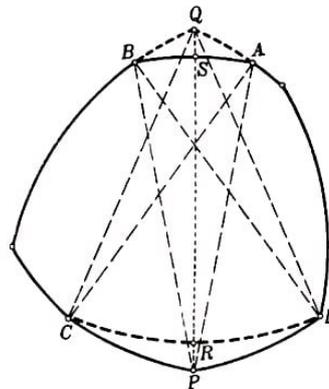


Abb. 282

Die Bogen AB , CP und PD der Kurve K_0 können durch die Bogen AQ um den Punkt C , QB um den Punkt D und CD um den Punkt Q ersetzt werden; dabei geht die Kurve K_0 in eine neue Kurve K'_0 über, welche ebenfalls die konstante Breite h besitzt (Abb. 282).

Wir beweisen: Ist die Sehne CD größer als die Sehne AB , so ist die von der Kurve K'_0 umrandete Fläche kleiner als die von der Kurve K_0 begrenzte. Dazu müssen wir zeigen, dass der Flächeninhalt S_{CPD} des krummlinig begrenzten Dreiecks CPD größer als der Flächeninhalt S_{ABQ} des krummlinigen Dreiecks ABQ ist.

Wir ziehen die Strecken CA , CQ , DB , DQ , AP und BP , deren Längen jeweils gleich h sind, und verbinden auch die Punkte P und Q . Wir setzen voraus, dass $CD > AB$ sei; hieraus folgt $\widehat{CD} > \widehat{AB}$, da diese Bogen den gleichen Radius h besitzen. Die Schnittpunkte der Strecke PQ mit den Bogen CD und AB bezeichnen wir mit R bzw. S . Dann ist $RP = SQ$ (denn $PS = RQ$, da diese Strecken die Radien der Bogen AB bzw. CD sind).

Der Flächeninhalt des krummlinig begrenzten Dreiecks CPD setzt sich aus den Flächeninhalten S_{CPR} und S_{PDR} der krummlinig begrenzten Dreiecke CPR und PDR zusammen; ebenso ist $S_{ABQ} = S_{ASQ} + S_{BSQ}$.

Wenn $CR \geq SA$ und $DR \geq SB$ ist (wobei die Gleichheitszeichen nicht gleichzeitig auftreten können), so muss $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$, $S_{PDR} \geq S_{BSQ}$ und folglich $S_{CPD} > S_{AQB}$ sein.

Ist nämlich beispielsweise $CR \geq SA$, so können wir uns davon überzeugen, dass der Punkt A zwischen den Punkten C und R liegt, indem wir das krummlinig begrenzte Dreieck SQA so auf das krummlinig begrenzte Dreieck CPR legen, dass PR mit QS und der Bogen SA mit dem Bogen RC zusammenfällt (Abb. 283); dann ist das krummlinig begrenzte Dreieck SAQ ganz im Dreieck RCP enthalten (alle Abb. 283 Kreisbogen haben den gleichen Radius) und daher $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$.

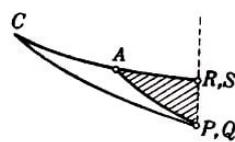


Abb. 283

Also gilt bei $CR \geq SA$ und $DR \geq SB$ die Beziehung $S_{CPD} > S_{ABQ}$.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass einer der beiden Bogen DR und CR größer und der andere kleiner als der Bogen SB bzw. SA ist. Es sei etwa $CR > SA$ und $DR < SB$. Wegen $\widehat{CD} > \widehat{AB}$ ist dann $\widehat{CR} - \widehat{SA} > \widehat{SB} - \widehat{DR}$.

Wir müssen noch beweisen, dass aus der letzten Ungleichung die analoge Ungleichung

$$S_{CPR} - S_{SAQ} > S_{SBQ} - S_{PDR}$$

für die Flächeninhalte folgt, woraus sich sofort

$$S_{CPR} + S_{PDR} > S_{SAQ} + S_{SBQ} \quad \text{ergibt, d.h.} \quad S_{CPD} > S_{AQB}$$

Die noch zu beweisende Behauptung lässt sich auch folgendermaßen formulieren.

Es sei PQ eine Strecke, die größer als h ist; R und S seien Punkte dieser Strecke, für die $RQ = PS = h$ (also $PR = SQ$) ist; RM und SN seien Kreisbogen mit dem Radius h um die Punkte Q bzw. P (Abb. 284).

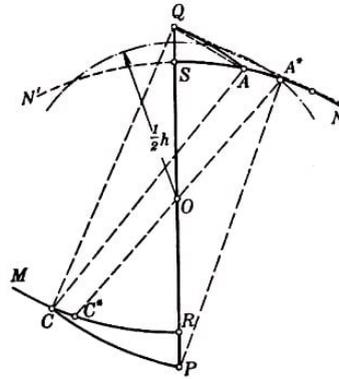


Abb. 284

Schließlich seien A und C Punkte dieser Bogen derart, dass $AC = h$ ist; \widehat{AQ} und \widehat{CP} seien Kreisbogen vom Radius h , welche A und Q bzw. C und P verbinden (als Mittelpunkte dieser Bogen dienen offenbar jeweils die Punkte C bzw. A).

Dann wächst bei Vergrößerung der Differenz zwischen den Bogen CR und AS (mit $CR > AS$) auch die Differenz der Flächeninhalte der krummlinig begrenzten Dreiecke CPR und AQS .

Zunächst stellen wir fest, dass $AS = CR$ nur bei einer bestimmten Lage des Punktes A gilt. Unter dieser Bedingung ist nämlich $RASC$ ein Parallelogramm, und AC geht durch den Mittelpunkt O der Strecke RS . Es ist also $OA = OC = \frac{1}{2}h$.

Es gibt jedoch nur einen Punkt A auf dem Bogen SN , dessen Abstand von O gleich $\frac{1}{2}h$ ist (insgesamt gibt es zwei derartige Punkte auf dem Kreis, einer liegt jedoch auf dem zu SN symmetrisch in Bezug auf die Gerade RS gelegenen Bogen SN').

Wir bezeichnen diesen Punkt mit A^* und den ihm entsprechenden Punkt des Bogens RM mit C^* . Fällt A mit A^* zusammen, so fällt C mit C^* zusammen, und die Differenz $CR - AS$ verschwindet. Bewegt sich nun A von A^* nach S , so verschiebt sich C von C^* nach M , der Bogen AC wird dann kleiner, während der Bogen CR größer wird; infolgedessen wächst die anfangs verschwindende Differenz $\widehat{CR} - \widehat{AS}$ stetig.

Zum Beweis dieser Behauptung verbinden wir die Punkte P und A^* . Im Dreieck PA^*Q gilt dann $OA^* = \frac{1}{2}h$ und $PQ > h$; die Mittellinie OA^* ist also kleiner als die Hälfte der entsprechenden Seite PQ . Hieraus folgt, dass der Winkel PA^*Q stumpf ist, so dass also A^* der erste Schnittpunkt der Geraden QA^* mit dem Bogen SN ist. Somit wird bei Verschiebung des Punktes A von A^* nach S der Winkel PQA immer kleiner.

Der Punkt C ist dann Eckpunkt des gleichschenkligen Dreiecks QAC mit der Grundlinie QA und Schenkeln der Länge h . Bei Verschiebung des Punktes A von A^* nach S wird aber die Strecke QA kleiner, der Basiswinkel CQA wächst also. Da hierbei der Winkel PQA kleiner wird, muss offenbar der Winkel CQP wachsen und der Punkt C sich von C^* nach M bewegen.

Somit ist die Vergrößerung der Differenz $\widehat{CR} - \widehat{AS}$ gleichbedeutend mit der Verkleine-

rung des Bogens AS , d.h. mit der Verschiebung des Punktes A von A^* nach S . Dabei wächst offenbar die Differenz $S_{CPR} - S_{ASQ}$, weil das krummlinig begrenzte Dreieck CPR wächst (da C sich von R entfernt), das Dreieck SAQ dagegen kleiner wird (A nähert sich S). Damit ist die von uns benötigte Beziehung bewiesen.

Wir zeigen jetzt, dass jede Kurve K der konstanten Breite h , die nur aus Kreisbogen vom Radius h besteht, wobei die Anzahl dieser Bogen größer als 3 ist, eine größere Fläche als ein Reuleaux-Dreieck der Breite h begrenzt. Dazu werden wir unter Benutzung des soeben bewiesenen Satzes die Kurve K derart verändern, dass sie stets eine Kurve der konstanten Breite h bleibt und die von ihr umrandete Fläche dabei immer kleiner wird. Die Anzahl der Bogen, aus denen die Kurve besteht, wird hierbei immer kleiner, und wir erhalten schließlich ein Reuleaux-Dreieck.

Es sei AB der kleinste der Bogen, aus denen die Kurve K besteht (oder einer der kleinsten). Die Endpunkte A und B dieses Bogens sind Ecken der Kurve K und folglich Mittelpunkte gewisser Bogen der Kurve (siehe Lösung der Aufgabe 85). Der Schnittpunkt P der Bogen CP und PD mit den Mittelpunkten A und B ist der Mittelpunkt des Bogens AB (Abb. 285); C und D sind Eckpunkte der Kurve K .

Da die Gesamtanzahl der Bogen, aus denen die Kurve besteht, nach Voraussetzung nicht kleiner als vier ist, kann nicht gleichzeitig der Punkt C mit B und der Punkt D mit A zusammenfallen. Die Kurve K enthält somit außer den Bogen AB , CP und PD noch mindestens einen Bogen um den Punkt C bzw. D .

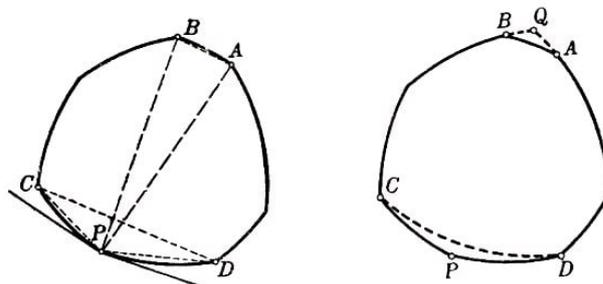


Abb. 285,286

Wir behaupten, dass $AB < CD$ ist. Der Bogen CP ist nämlich kleiner als 60° (wäre der Bogen CP nicht kleiner als 60° , so wäre die Sehne CP nicht kleiner als die Breite h der Kurve, folglich müsste diese Sehne gleich h sein, und die Kurve wäre ein Reuleaux-Dreieck; siehe Lösung der Aufgabe 86); die Tangente an den Bogen PC im Punkt P bildet also mit der Sehne PC einen Winkel von weniger als 30° , und der Winkel APC zwischen dem Radius AP und der Sehne PC ist größer als $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; ebenso ist der Winkel BPD größer als 60° . Da aber der Winkel APB (als Zentriwinkel des Bogens AB) kleiner als 60° ist, gilt

$$\angle CPD = \angle APC + \angle BPD - \angle APB > 60^\circ + 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

Hieraus folgt, dass die Sehne CD größer als mindestens eine der Sehnen CP und PD ist (im Dreieck CPD kann der Winkel CPD nicht der kleinste sein). Gemäß unserer Wahl des Bogens AB kann aber die Sehne AB nicht größer als die Sehnen CP und PD sein. Somit können wir schließen, dass die Sehne AB kleiner als die Sehne CD ist.

Nunmehr ersetzen wir die Bogen AB , CP und PD der Kurve K durch die Bogen

AQ um den Punkt C , QB um den Punkt D und CD um den Punkt Q (Abb. 286). Nach dem oben Bewiesenen wird die von der Kurve K begrenzte Fläche bei dieser Ersetzung kleiner. Die Gesamtanzahl der Bogen, aus denen die Kurve K besteht, wird aber ebenfalls kleiner, denn die beiden Bogen CP und PD werden durch einen einzigen Bogen CD ersetzt, während der Bogen AB durch die Bogen AQ und QB ersetzt wird, von denen mindestens einer die Verlängerung des angrenzenden Bogens ist (da der Bogen AQ den Mittelpunkt C und der Bogen QB den Mittelpunkt D hat und die Kurve K schon vorher einen Bogen um C bzw. einen Bogen um D enthielt).

Setzen wir diesen Prozess weiter fort, so erhalten wir schließlich eine Kurve konstanter Breite, die nur aus drei Kreisbogen besteht; solch eine Kurve kann, wie man leicht sieht, nur ein Reuleaux-Dreieck sein. Dabei muss nämlich mindestens einer der Bogen größer oder gleich 60° sein; dieser Bogen entspricht einer Ecke der Kurve, deren zugehöriger Winkel kleiner oder gleich 120° ist; siehe weiter Aufgabe 86.

Aus dem Bewiesenen lässt sich bereits ganz leicht folgern, dass keine Kurve K der konstanten Breite h eine kleinere Fläche umranden kann als das Reuleaux-Dreieck. Dazu untersuchen wir eine Folge von Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ der konstanten Breite h , welche nur aus Kreisbogen vom Radius h bestehen; diese Folge möge die Kurve K zum Limes haben.

Nach dem oben Bewiesenen begrenzen alle Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ größere Flächen als das Reuleaux-Dreieck der Breite h . Folglich kann die von K umrandete Fläche als Grenzwert der von den Kurven $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ begrenzten Flächen (siehe § 4) nicht kleiner als der Inhalt der vom Reuleaux-Dreieck begrenzten Fläche sein.

Wir überlassen es dem Leser, durch Vervollständigung dieser Überlegungen zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Reuleaux-Dreiecks kleiner (und nicht nur nicht größer) als der Flächeninhalt jeder anderen Kurve gleicher konstanter Breite ist.

98.a) Es sei ABC ein gegebenes gleichseitiges Dreieck und $AB'C'$ das zu ABC in Bezug auf den Punkt A symmetrische Dreieck. Die Seite BC des Dreiecks tangiere einen Kreis; O sei sein Mittelpunkt bei einer gewissen Lage und K der Berührungspunkt der Seite BC mit dem Kreis. Die Seiten AC und AB schneiden aus dem Kreis einen Bogen MKN aus (Abb.287).

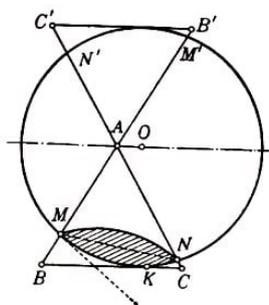


Abb. 287

Die Gerade OA ist die Symmetrieachse der Figur; folglich schneiden die Seiten AB' und AC' aus dem Kreis einen Bogen $M'N'$ aus, der dem Bogen MKN gleich ist. Der Winkel bei A , der gleich 60° ist, lässt sich durch die halbe Summe der Bogen MN und $M'N'$ messen; folglich ist jeder dieser Bogen gleich 60° .

Der Winkel zwischen der Sehne MN und der Tangente an den Kreis im Punkt M oder N ist dann gleich 30° . Um zu beweisen, dass das in der Abbildung schraffierte Zweieck stets innerhalb des Dreiecks ABC bleibt, müssen wir also zeigen, dass die Winkel AMN und ANM stets nicht kleiner als 30° sind.

Bei Bewegung des Kreises ändern sich diese Winkel aber von 30° bis 90° . Das Δ -Zweieck ist, wie hieraus folgt, eine Δ -Kurve.

Die Länge des Δ -Zweiecks ist gleich einem Drittel des Umfangs des Kreises mit dem Radius h , d.h. $\frac{2\pi h}{3}$. Der Inhalt der von der Kurve begrenzten Fläche ist gleich dem doppelten Flächeninhalt eines Kreissegments mit dem Radius h und einem Bogen von 60° , er ist also gleich

$$h^2 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 0,18h^2$$

Der Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks der Höhe h (ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{3}h$ hat ebenfalls den Umfang $\frac{2\pi h}{3}$, sein Flächeninhalt ist aber gleich $h^2 \frac{\pi}{9} \approx 0,34h^2$, also größer als der Flächeninhalt des Δ -Zweiecks.

b) Es sei P der Schnittpunkt der Senkrechten, die in den Punkten M und N auf den Seiten des Dreiecks errichtet sind (Abb. 288).

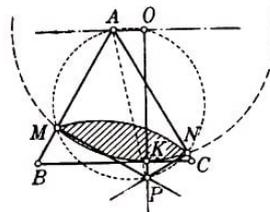


Abb. 288

Das Viereck $AMPN$ lässt sich offenbar einem Kreis einbeschreiben. Auf diesem Kreis liegt auch der Mittelpunkt O des Bogens MKN des Δ -Zweiecks, welches von der Seite BC tangiert wird, da $\angle MON = \angle MAN = 60^\circ$ ist.

Die Strecke AP ist ein Durchmesser dieses Kreises, da die Winkel AMP und ANP gleich 90° sind. Also ist der Winkel AOP gleich 90° , d.h., die Strecke OP steht senkrecht auf AO und daher auch auf der Grundlinie BC des Dreiecks. Die Gerade OP geht aber durch den Berührungspunkt K des Δ -Zweiecks mit der Seite BC , folglich schneiden sich die Senkrechten MN , NP und KP auf den Seiten des Dreiecks ABC in einem Punkt.

Wir ermitteln jetzt den geometrischen Ort der Punkte P . Die Größe des Durchmessers AP des Kreises $MPNOA$ hängt nicht von der Lage des Δ -Zweiecks in dem gleichseitigen Dreieck ab. Die Sehne MN konstanter Länge (die Sehne des Zweiecks) spannt in diesem Kreis einen Bogen von 120° auf.

Es ist leicht zu sehen, dass der Durchmesser dieses Kreises gleich einer Seite des Dreiecks ABC ist. Verläuft nämlich OP durch den Punkt C , so fällt P mit C und AP mit AC zusammen. Damit ist AP gleich AC oder, mit anderen Worten, der Abstand des Punktes P von dem Eckpunkt des Dreiecks ABC , der auf der anderen Seite der Strecke MN gelegen ist, muss stets gleich der Seite des Dreiecks sein.

Der geometrische Ort, den der Punkt P beschreibt, wenn das Δ -Zweieck sich in dem gleichseitigen Dreieck dreht, ist in Abb. 289a dargestellt.⁹⁹

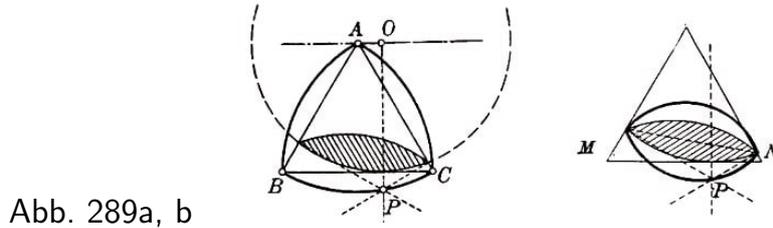


Abb. 289a, b

Offenbar ist $\angle MPN = 180^\circ - \angle MAN = 120^\circ$ (Abb. 288). Hieraus folgt, dass der geometrische Ort, den der Punkt P beschreibt, wenn sich das gleichseitige Dreieck dreht und dabei stets dem festen Δ -Zweieck umschrieben bleibt, die in Abb. 289b dargestellte Form hat.

99.a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat und $MNPQ$ die in der Aufgabenstellung beschriebene Kurve (Abb. 290). Das Dreieck CDM ist nach Konstruktion gleichseitig, folglich gilt $\angle MDC = 60^\circ$, $\angle MDA = 30^\circ$. Das Dreieck AMD ist gleichschenkelig, daher gilt

$$\angle DAM = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ, \quad \angle BAM = 15^\circ$$

ebenso ist $\angle DAQ = 15^\circ$, und es ergibt sich

$$\angle MAQ = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke ADM und ABQ folgt $AM = AQ$. Das Dreieck AMQ ist also, wie wir sehen, gleichseitig. Die Dreiecke BNM , CPN und DQP sind ebenfalls gleichseitig.

Es sei RST jetzt ein gleichseitiges Dreieck, bei dem zwei der Seiten durch die Punkte M und Q verlaufen, während die dritte den Bogen PN im Punkt H tangiert. Dann sind die Winkel MAQ und MRQ jeweils gleich 60° , folglich liegen die Punkte A , R , M und Q auf einem Kreis. Dann gilt

$$\angle ARM = 180^\circ - \angle AQM = 120^\circ$$

daher ist die Strecke AR parallel der Seite ST des Dreiecks (da $\angle ARS + \angle RST = 180^\circ$ ist). Hieraus folgt, dass die Höhe RH' des Dreiecks RST gleich der Strecke AH , also gleich der Seite des ursprünglichen Quadrats ist.

Das Dreieck RST enthält dann die Kurve $MNPQ$. Jedem der Bogen MN , NP , PQ und QM entsprechen nämlich 30° ($\angle MDA = \angle NDC = \angle MDN = 30^\circ$); folglich bilden beispielsweise die Tangenten in den Punkten N und P an den Bogen NP mit der Sehne NP Winkel von 15° .

Jeder der Winkel NMS und PQT liegt zwischen 15° und 45° ($\angle NMS = 15^\circ$, wenn H mit P zusammenfällt und die Höhe des Dreiecks RST die Richtung von AP hat; $\angle NMS = 45^\circ$, wenn H mit N zusammenfällt).

⁹⁹Man erkennt leicht, dass dieser geometrische Ort ein Reuleaux-Dreieck ist (siehe § 7).

Die Bogen MN und PQ (und auch NP) sind also im Dreieck RST gelegen. Der Bogen MQ liegt ebenfalls in diesem Dreieck, da die Winkel MQR und QMP zwischen 45° und 75° liegen (es ist $\angle MQR = 45^\circ$, wenn H mit P zusammenfällt; $\angle MQR = 75^\circ$, wenn H mit N zusammenfällt).

Schließlich stellen wir fest, dass wir bei der Untersuchung gleichseitiger Dreiecke, bei denen zwei Seiten durch benachbarte Eckpunkte der Kurve $MNPQ$ verlaufen, während die dritte den gegenüberliegenden Bogen tangiert, gleichseitige Dreiecke mit beliebiger Seitenrichtung erhalten, die der Kurve $MNPQ$ umschrieben sind, und zwar alle umschriebenen gleichseitigen Dreiecke. Die Höhe jedes dieser Dreiecke ist gleich der Seite des Quadrats, d.h. gleich h .

Also ist $MNPQ$ eine Δ -Kurve. Sie besteht aus vier Kreisbögen mit dem Radius h , denen jeweils 30° entsprechen; ihre Länge ist gleich einem Drittel des Umfangs eines Kreises mit dem Radius h , d.h. gleich $\frac{2\pi h}{3}$ (und folglich gleich dem Umfang des Kreises oder des Δ -Zweiecks der Höhe h).

Ihr Flächeninhalt ist, wie man leicht berechnet, gleich $\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right) \cdot h^2 \approx 0,31h^2$.

Das ist ein Wert zwischen dem Inhalt des Kreises und dem Inhalt des Δ -Zweiecks derselben Höhe h (siehe Aufgabe 98a).

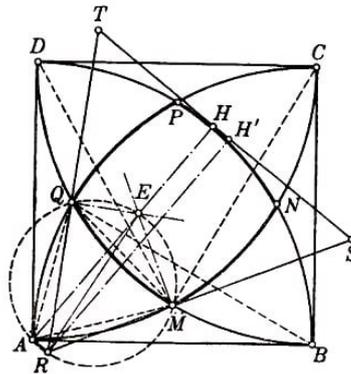


Abb. 290

b) Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Strecke AH und des durch die Punkte A , R , M und Q verlaufenden Kreises mit E (Abb. 290). Dann ist ER ein Durchmesser des Kreises, da $\angle EAR$ ein rechter Winkel ist ($EA \perp ST$ und $AR \perp ST$). Hieraus folgt, dass die Winkel EMR und EQR rechte Winkel sind, d.h., die in den Punkten M , Q und H auf den Seiten des Dreiecks RST errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Punkt E .

Wir bestimmen jetzt den geometrischen Ort aller Punkte E . Der Durchmesser RE des Kreises $MRAQE$ hängt nicht von der Lage der Kurve im Dreieck ab: Die Sehne MQ konstanter Länge spannt in diesem Kreis einen Bogen von 120° auf. Es lässt sich beweisen, dass die Länge der Strecke RE gleich $2\sqrt{2} - \sqrt{3}h$ ist, wobei h die Seitenlänge des Quadrats bzw. die Höhe des Dreiecks RST ist. Der geometrische Ort, den der Punkt E bei Drehung der betrachteten Δ -Kurve innerhalb des gleichseitigen Dreiecks beschreibt, ist in Abb. 291a dargestellt.

Offenbar ist $\angle MEQ = 180^\circ - \angle MRQ = 120^\circ$. Hieraus folgt, dass der geometrische Ort, den der Punkt E beschreibt, wenn sich das gleichseitige Dreieck dreht und dabei

stets der Δ -Kurve $MNPQ$ umschrieben bleibt, die in Abb. 291b dargestellte Form hat.

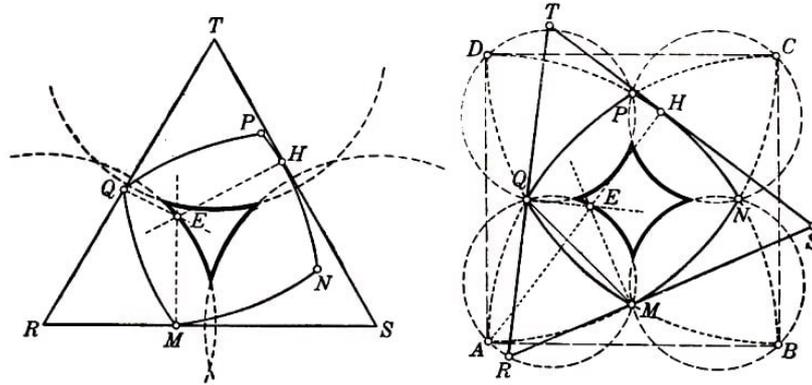


Abb. 291a, b

100. Es sei K eine beliebige Δ -Kurve, T ein ihr umschriebenes gleichseitiges Dreieck, und A, B und C seien die Berührungspunkte der Seiten des Dreiecks T mit der Kurve K (Abb. 292). Es sei ferner T_1 ein beliebiges gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten durch die Punkte A, B und C verlaufen.

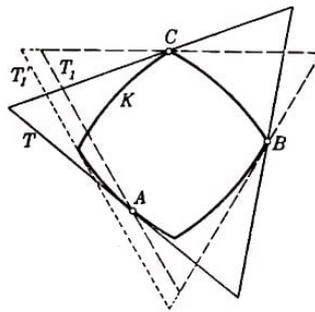


Abb. 292

Wir müssen beweisen, dass die Höhe des Dreiecks T_1 nicht größer als die Höhe des Dreiecks T ist.

Es sei also T'_1 ein der Kurve K umschriebenes Dreieck, dessen Seiten den Seiten des Dreiecks T_1 parallel und gleichgerichtet sind. Das Dreieck T'_1 umfasst das Dreieck T_1 (da die Punkte A, B und C der Kurve angehören und folglich innerhalb des Dreiecks T'_1 bzw. auf seinem Rand liegen).

Die Höhe des Dreiecks T_1 übertrifft daher nicht die Höhe des Dreiecks T'_1 , die Höhe von T'_1 ist aber nach Definition der Δ -Kurve gleich der Höhe des Dreiecks T .

101. Wir beginnen mit der Lösung der Hilfsaufgabe, einem gegebenen Dreieck ABC ein möglichst großes gleichseitiges Dreieck beschreiben.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nicht schwierig. Wir schlagen zunächst außerhalb des Dreiecks um die Seiten des Dreiecks ABC Bogen von 60° (Abb. 293). Um irgendein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, das dem Dreieck ABC umschrieben ist, brauchen wir jetzt nur irgendeine Strecke $Q'R'$ durch den Punkt A zu ziehen, dessen Endpunkte auf den Bogen liegen, welche über den Seiten AC und AB konstruiert sind; die Geraden $Q'C$ und $R'B$ schneiden sich im Punkte P' des dritten Bogens und bilden ein gleichseitiges Dreieck $P'Q'R'$, das dem Dreieck ABC umschrieben ist.

Um das größte aller dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Dreiecke zu

konstruieren, brauchen wir nur die größte gemeinsame Sehne der über den Strecken AC und AB konstruierten Kreisbogen zu finden, die durch den Schnittpunkt A der beiden Kreisbogen verläuft. $Q'R'$ sei eine solche durch den Punkt A führende gemeinsame Sehne dieser beiden Bogen (Abb. 293).

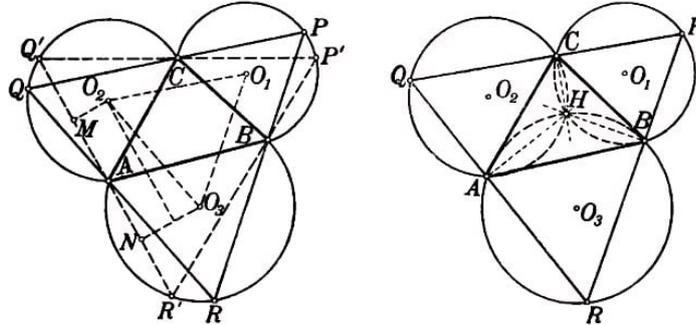


Abb. 293, 294

Von den Mittelpunkten O_2 und O_3 der beiden betrachteten Kreise fällen wir die Lote O_2M und O_3N auf die Gerade $Q'R'$. Dabei ist $MA = \frac{1}{2}Q'A$ und $AN = \frac{1}{2}AR'$, folglich $MN = \frac{1}{2}Q'R'$.

Aus der Untersuchung des rechtwinkligen Trapezes O_2O_3NM lässt sich aber leicht folgern, dass $MN \leq O_2O_3$ ist, wobei der Fall $MN = O_2O_3$ nur dann eintreten kann, wenn $Q'R' \parallel O_2O_3$ ist. Somit wird das Dreieck PQR am größten für $QR \parallel O_2O_3$; in diesem Falle gilt $QR = 2O_2O_3$.

Analog zeigt man, dass $PR \parallel O_1O_3$ und $PQ \parallel O_1O_2$ sein muss, wenn das Dreieck PQR das größte dem Dreieck ABC umbeschriebene gleichseitige Dreieck sein soll; O_1 ist dabei der Mittelpunkt des über der Strecke BC konstruierten Kreises.

Wir zeigen nunmehr, dass sich die in den Punkten A , B und C auf den entsprechenden Seiten des Dreiecks PQR errichteten Senkrechten in einem Punkt schneiden, wenn PQR das größte gleichseitige dem Dreieck ABC umbeschriebene Dreieck ist.

Aus unserer Konstruktion folgt nämlich, dass diese Senkrechten nichts anderes sind als die gemeinsamen Sehnen der beim Beweis untersuchten Kreise um die Punkte O_1 , O_2 und O_3 . Man sieht leicht, dass sich diese drei Kreise in einem Punkt schneiden. Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt der beiden über den Strecken AB und BC konstruierten Kreise mit H . Liegt H innerhalb des Dreiecks ABC , so ist $\angle AHB = \angle BHC = 120^\circ$, also

$$\angle AHC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$$

Folglich liegt H auch auf dem dritten Kreis (Abb. 294). Analog beweist man, dass H auch dann auf dem dritten Kreis liegt, wenn dieser Punkt außerhalb des Dreiecks liegt. In diesem Falle sind von den drei Winkeln AHB , BHC und CHA zwei gleich 60° und der dritte gleich 120° .

Offenbar ist H auch der Schnittpunkt der drei gemeinsamen Sehnen der betrachteten Kreise, d.h. der Schnittpunkt der in den Punkten A , B und C auf den entsprechenden Seiten des Dreiecks PQR errichteten Senkrechten.

Aus der letzten Bemerkung ergibt sich unmittelbar das geforderte Ergebnis, da nach

Aufgabe 100 das einer Δ -Kurve K umbeschriebene gleichseitige Dreieck, welches die Kurve in den Punkten A , B und C berührt, gerade das größte gleichseitige dem Dreieck ABC umbeschriebene Dreieck ist.

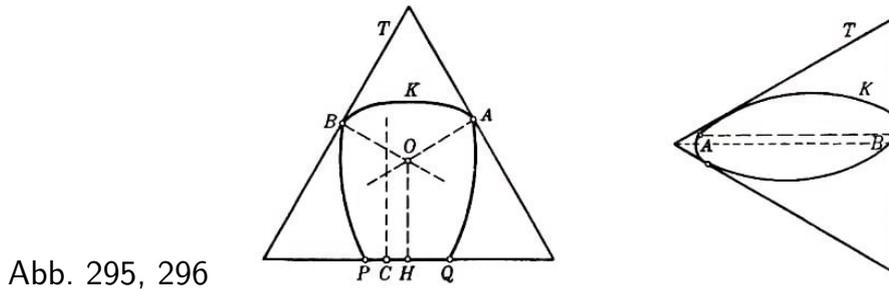


Abb. 295, 296

102. Irgendein Bogen PQ einer Δ -Kurve K möge eine geradlinige Strecke sein, T sei ein der Kurve K umbeschriebenes gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite mit der Kurve K die Strecke PQ gemeinsam haben möge (Abb. 295).

Die beiden anderen Seiten des Dreiecks T mögen die Kurve in gewissen Punkten A und B berühren; O sei der Schnittpunkt der in den Punkten A und B auf den Dreiecksseiten errichteten Senkrechten. Von dem Punkt O aus fallen wir das Lot OH auf die dritte Seite des Dreiecks. C sei ein von H verschiedener Punkt der Strecke PQ .

Dann schneiden sich - im Widerspruch zur Aufgabe 101 - drei auf den Dreiecksseiten in den Berührungspunkten dieser Seiten mit der Δ -Kurve errichtete Senkrechten nicht in einem Punkt.

103. Es seien A und B zwei Punkte einer Δ -Kurve K , T sei ein der Kurve K umbeschriebenes gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe der Strecke AB parallel sei (Abb. 296). Offenbar übersteigt AB nicht die Höhe des Dreiecks T , also nicht die Höhe h der Δ -Kurve.

Nunmehr sei der Abstand zwischen den Punkten A und B gleich h (Abb. 297a). Dann muss der Punkt A mit einem Eckpunkt des Dreiecks T zusammenfallen, woraus folgt, dass der Winkel am Punkt A nicht größer als 60° sein kann (genauer, der Winkel jeder Halbtangente im Punkt A mit der Geraden AB kann nicht größer als 30° sein). Hieraus lässt sich leicht folgern, dass bei Verschiebung der Kurve K innerhalb des Dreiecks T der Punkt A stets auf den Seiten des Dreiecks gleiten muss (Abb. 297 b); das gleiche gilt für den Punkt B .

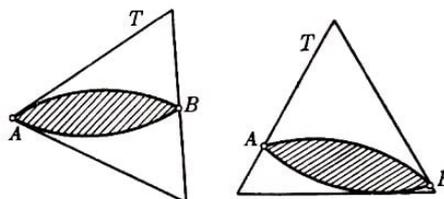


Abb. 297a, b

Die Punkte A und B gleiten also auf den Seiten von T , während die dritte Seite von T einen Bogen AB der Kurve K tangiert (gleiten die Punkte A und B auf den Seiten RQ und RS des Dreiecks T , so bleibt der Bogen der Kurve K , welcher auf der gleichen Seite von der Strecke AB liegt wie der Eckpunkt B des Dreiecks T , innerhalb von T (Abb. 298), da die Halbtangenten in den Punkten A und B mit der Sehne AB keine

größeren Winkel als 30° bilden).

Wir zeichnen ein Δ -Zweieck D , dessen Eckpunkte mit den Punkten A und B zusammenfallen. Läge irgendein Punkt C der Kurve K außerhalb D , so ließe sich um K ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen Höhe größer als die Strecke AB wäre (Abb. 298a; wir bemerken, dass die Höhe eines der Δ -Kurve D umschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich AB sein muss).

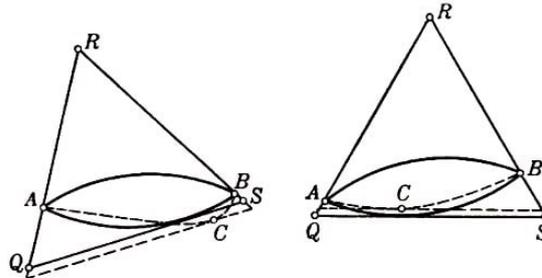


Abb. 298a, b

Befände sich irgendein Punkt C der Kurve K innerhalb von D , so ließe sich um die Kurve K ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen Höhe kleiner als AB wäre (Abb. 298 b). Sowohl der eine als auch der andere Fall widerspricht der Definition der Δ -Kurve. Folglich muss die Δ -Kurve K mit D zusammenfallen.

104. Ist der Winkel am Punkt A einer Δ -Kurve K nicht größer als 60° , so gibt es ein der Kurve K umschriebenes gleichseitiges Dreieck T , dessen eine Ecke mit A zusammenfällt (Abb. 297a). Ist B der Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks T mit der Δ -Kurve K , so kann der Abstand AB nicht kleiner als die Höhe h des Dreiecks T sein.

Nach dem Ergebnis der Aufgabe 103 können wir schließen, dass AB gleich h und K ein Δ -Zweieck ist.

105. Zum Beweis dieser Behauptung benötigen wir folgenden Satz.

Es sei T ein gleichseitiges Dreieck, h seine Höhe, O ein beliebiger innerer Punkt, und h_1, h_2 und h_3 seien die Längen der Lote, die vom Punkt O auf die Dreiecksseiten gefällt sind; dann ist die Summe $h_1 + h_2 + h_3$ gleich der Höhe des Dreiecks T .

Um dies zu zeigen, verbinden wir den Punkt O mit den Eckpunkten des Dreiecks T (Abb. 299). Das Dreieck T wird dabei in drei Dreiecke T_1, T_2 und T_3 zerlegt, deren Flächeninhalte jeweils $\frac{1}{2}ah_1, \frac{1}{2}ah_2$ und $\frac{1}{2}ah_3$ betragen, wobei a die Seitenlänge des Dreiecks T ist.

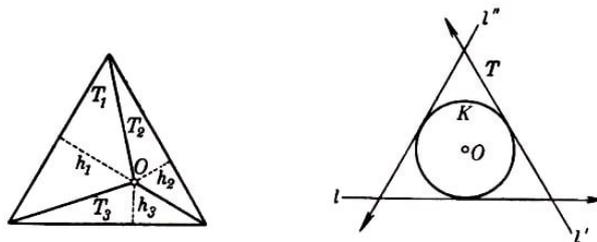


Abb. 299,300

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}ah \quad \text{also} \quad h_1 + h_2 + h_3 = h$$

Nunmehr sei K eine beliebige Δ -Kurve der Höhe h , die bei Drehung um irgendeinen inneren Punkt um 120° in sich übergeht (offenbar kann keine konvexe Kurve bei Drehung um 120° um einen äußeren Punkt in sich übergehen); l sei eine beliebige Stützgerade der Kurve K .

Wir beschreiben um die Kurve K ein gleichseitiges Dreieck T , dessen eine Seite die Gerade l ist (Abb. 300). Bei Drehung um 120° um O geht die Kurve K in sich über; das der Kurve K umbeschriebene gleichseitige Dreieck geht dabei in ein der Kurve K umbeschriebenes gleichseitiges Dreieck über, dessen Seiten die gleiche Richtung haben wie die Seiten von T (bei Drehung um 120° ändern sich die Richtungen der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks nicht), d.h., T geht in sich über.

Die von l verschiedenen beiden Seiten des Dreiecks T bezeichnen wir mit l' und l'' . Bei Drehung um O um 120° geht l in l' und l' in l'' über. Wir zeigten oben, dass die Summe der Abstände des Punktes O von den Geraden l, l' und l'' gleich der Höhe h des Dreiecks T ist.

Da die Geraden l, l' und l'' bei der Drehung um O ineinander übergehen, müssen sie von O gleich weit entfernt sein, d. h., der Abstand jeder dieser Geraden von O ist gleich $\frac{1}{3}h$.

Es ist aber l eine beliebige Stützgerade der Kurve K . Daher haben alle Stützgeraden der Kurve K vom Punkt O die gleiche Entfernung $\frac{1}{3}h$. Hieraus lässt sich schon leicht ersehen, dass K ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{3}h$ um den Punkt O sein muss.

Läge nämlich irgendein Punkt A der Kurve K innerhalb dieses Kreises, so wäre der Abstand des Punktes O von der durch den Punkt A verlaufenden Stützgeraden der Kurve K kleiner als $\frac{1}{3}h$ (Abb. 301a).

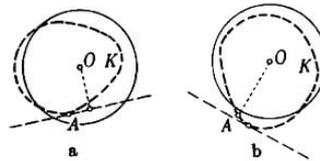


Abb. 301a, b

Läge andererseits irgendein Punkt A der Kurve K außerhalb dieses Kreises, so wäre der Abstand der auf der Strecke OA senkrecht stehenden Stützgeraden der Kurve K vom Punkt O größer als $\frac{1}{3}h$ (Abb. 301b).

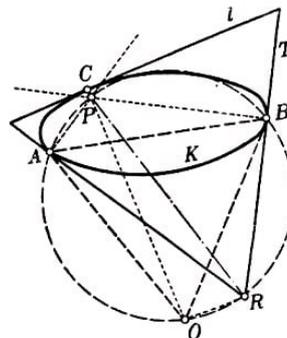


Abb. 302

106. Praktisch haben wir diesen Satz bereits bei den Lösungen der Aufgaben 98 und 99 benutzt. Es sei O ein Punkt, der mit A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet (und auf

derselben Seite von der Geraden AB liegt wie der Eckpunkt R des Dreiecks T ; R ist der Schnittpunkt der durch A und B verlaufenden Seiten); P sei der Schnittpunkt der Senkrechten, die in den Punkten A , B und C auf den Seiten des Dreiecks T errichtet sind (Abb. 302; siehe Aufgabe 101).

Dann sind die Winkel AOB und ARB gleich 60° und der Winkel APB gleich 120° ; die Punkte A , O , R , B und P liegen daher auf einem Kreis (hieraus folgt, dass der Winkel ORB gleich 120° und somit die Gerade OR der durch den Punkt C verlaufenden Seite l des Dreiecks T parallel ist).

Die Gerade RP ist dann ein Durchmesser des betrachteten Kreises, folglich gilt $OP \perp OR$ und $OP \perp l$. Hieraus ergibt sich, dass der Punkt C auf der Verlängerung von OP liegt. Wir sehen also, dass OP der durch den Eckpunkt R führenden Höhe des Dreiecks T parallel und die Länge von OC gleich der Länge h der Höhe des Dreiecks T ist.

107. Es sei L ein regelmäßiges n -Eck (n sei nicht durch 3 teilbar), PQ eine seiner Seiten und T ein L umbeschriebenes regelmäßiges Dreieck, dessen eine Seite die Strecke PQ enthält. Die beiden anderen Seiten des Dreiecks T mögen das Vieleck L in den Punkten A und B berühren (Abb. 303).

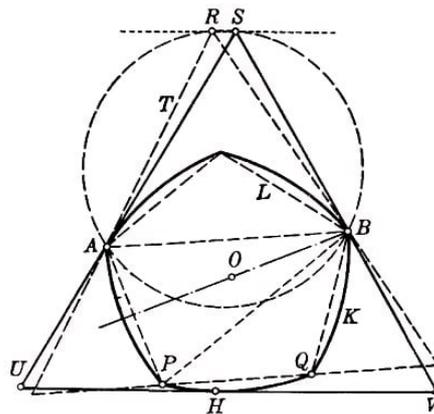


Abb. 303

Den Eckpunkt des Dreiecks TT (den Schnittpunkt der durch A und B führenden Seiten) bezeichnen wir mit R ; dann sei $RP = RQ = h$. Um den Punkt R schlagen wir einen Kreisbogen mit dem Radius h , der die Punkte P und Q verbindet.

Durch derartige Bogen verbinden wir je zwei benachbarte Eckpunkte des Vielecks L . Wir behaupten, dass die aus den so konstruierten n Kreisbogen bestehende konvexe Kurve K eine Δ -Kurve der Höhe h ist.

Beweis. Es sei SUV ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten SU und SV durch die Punkte A und B verlaufen, während die dritte Seite UV den Bogen PQ in einem Punkt H berührt (Abb. 303).

Offenbar liegen die vier Punkte A , B , S und R auf einem Kreis (da $\angle ARB = \angle ASB = 60^\circ$); folglich ist $\angle RSB = \angle RSA + \angle ASB = 120^\circ$; die Geraden RS und UV sind daher parallel ($\angle RSV + \angle SVU = 180^\circ$).

Hieraus folgt, dass die Höhe des Dreiecks SUV gleich der Strecke RH , also gleich h ist, was zu beweisen war.

Das Dreieck SUV enthält dann die Kurve K . Zum Beweis zeigen wir, dass das Dreieck

ABP stets gleichschenkelig sein muss. Ist nämlich $n = 3m + 1$, so liegen zwischen A und B genau m Seiten des regelmäßigen n -Ecks L , ebenso zwischen A und P sowie zwischen B und Q ; ist $n = 3m + 2$, so liegen zwischen A und B sowie zwischen B und P je $m + 1$ Seiten des n -Ecks L , während sich zwischen A und P genau m Seiten befinden. (Wir weisen darauf hin, dass hier die Voraussetzung benutzt wird, dass n nicht durch 3 teilbar ist, denn wäre $n = 3m$, so wäre das Dreieck ABP nicht gleichschenkelig!)

Fällt H mit P (oder mit Q) zusammen, so tangiert das Dreieck SUV nicht nur den Bogen PQ , sondern auch einen Kurvenbogen mit dem Endpunkt A bzw. B . So ist in Abb.303 beispielsweise $n = 5 = 3 \cdot 1 + 2$; wenn nun H mit P zusammenfällt, so liegt das Dreieck SUV symmetrisch in Bezug auf die Gerade AB , und die Seite SU berührt in dieser Lage einen durch den Punkt A führenden Bogen der Kurve K .

Hieraus lässt sich schließen, dass bei beliebiger Lage des Punktes H auf dem Bogen PQ die Bogen der Kurve K , welche die Punkte A und B als Endpunkte haben und die auf der gleichen Seite der Geraden AB gelegen sind wie der Eckpunkt S des Dreiecks SUV , innerhalb des Dreiecks SUV bleiben.

Dass auch die beiden anderen Bogen der Kurve K , die A und B als Endpunkte haben, stets im Innern des Dreiecks SUV bleiben, ist noch leichter zu erkennen. Somit befindet sich bei beliebiger Lage des Punktes H auf dem Bogen PQ die ganze Kurve K im Innern des Dreiecks SUV .

Untersuchen wir alle Dreiecke, von denen zwei Seiten durch Eckpunkte der Kurve K verlaufen, während die dritte einen der Kurvenbogen berührt, so erhalten wir alle der Kurve K umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke. Da die Höhe jedes solchen Dreiecks gleich h ist, muss K eine Δ -Kurve sein.

Für $n = 4$ erhalten wir die in Aufgabe 99 beschriebene Kurve. Man stellt fest, dass diese Konstruktion im Falle $n = 2$ zum Δ -Zweieck führt (statt von einem regelmäßigen n -Eck L muss man in diesem Falle von einer Strecke ausgehen).

Es lässt sich zeigen, dass es keine Δ -Kurve gibt, die aus $n = 3m$ Kreisbogen vom Radius h besteht, welche über den Seiten eines regelmäßigen n -Ecks konstruiert sind. Wir überlassen es dem Leser, diesen Beweis selbständig durchzuführen.

Wir bemerken noch, dass es bei unserer Konstruktion nicht notwendig war zu fordern, dass das Vieleck L regelmäßig ist. Das n -Eck L (wobei n nicht durch 3 teilbar ist) braucht nur folgende Eigenschaft zu besitzen.

Es sei T ein L umbeschriebenes regelmäßiges Dreieck, dessen eine Seite die Seite PQ des Vielecks enthält, während die beiden anderen die Eckpunkte A und B des Vielecks L enthalten. Die Spitze des gleichseitigen Dreiecks, das über der Strecke AB auf der anderen Seite der Geraden AB wie die Punkte P und Q errichtet ist, bezeichnen wir mit R (Abb. 304).

Damit die oben beschriebene Konstruktion möglich ist, müssen für jede Seite PQ des Vielecks L die Strecken RP und RQ einander gleich sein. Ferner darf die Gesamtlänge dieser Strecken (wir bezeichnen sie mit h) nicht von der Wahl der Seite PQ des Vielecks

L abhängen.

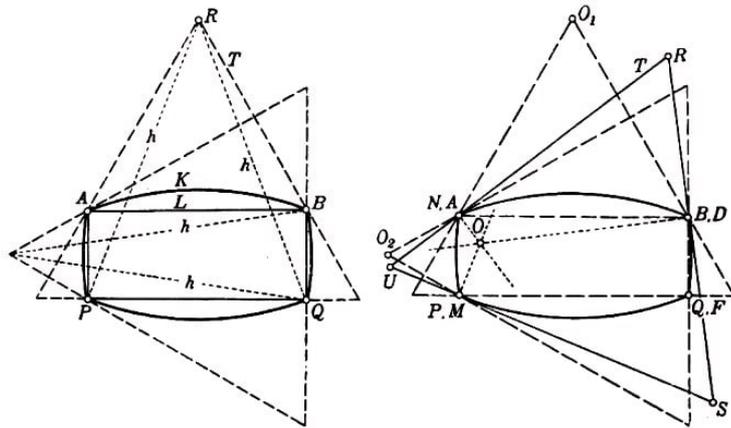


Abb. 304, 305

Es ist leicht zu erkennen, dass dieser Bedingung auch Vielecke genügen, die nicht regelmäßig sind. Wir verbinden je zwei benachbarte Eckpunkte des Vielecks L durch einen Kreisbogen vom Radius h und behaupten, dass die dabei erhaltene Kurve eine Δ -Kurve der Höhe h ist.

Der Beweis dieses Satzes ähnelt dem oben geführten Beweis für den Fall, dass das Vieleck L regelmäßig ist. Der erste Teil des Beweises stützt sich sowieso nicht auf die Regelmäßigkeit des Vielecks L und wird in unserem allgemeineren Fall genauso geführt wie oben.

Zum Beweis, dass die Kurve K stets von dem gleichseitigen Dreieck T umschlossen wird, von dem zwei Seiten durch die Eckpunkte A und B der Kurve K verlaufen, während die dritte Seite einen Kreisbogen PQ in einem gewissen Punkt O berührt, benutzen wir die Gleichheit zweier Seiten des Dreiecks ABP (bzw. ABQ), die jedoch nicht eintritt, wenn das Vieleck L unregelmäßig ist. Diesen Teil des Beweises müssen wir daher noch einmal führen; wir legen ihn kurz dar.

Zunächst sieht man leicht, dass sich die drei Senkrechten, die in den Punkten A , B und P auf den Seiten des gleichseitigen Dreiecks T errichtet sind, von dem zwei Seiten durch A und B verlaufen und die dritte den Kreisbogen PQ in P berührt, in einem Punkt O schneiden (für den Beweis dieses Satzes ist die Unregelmäßigkeit des Vielecks L ohne Bedeutung; wichtig ist nur, dass die Punkte A , O_1 , R , B (Abb. 305) und der Schnittpunkt O der in den Punkten A und B auf den entsprechenden Seiten von T errichteten Senkrechten auf einem Kreis liegen).

AD und BF seien zwei Seiten des Vielecks L derart, dass die Punkte F , B , D , A , Q und P (D kann mit B , Q mit F zusammenfallen) auf dem Vieleck L in zyklischer Reihenfolge auftreten (Abb. 305). Wir wählen von den beiden Winkeln RAD und SBF den kleineren aus, dies sei etwa der Winkel SBF .

Das gleichseitige Dreieck T_1 , dessen eine Seite die Strecke BF enthält, während die beiden anderen durch A bzw. P verlaufen, ist dann, wie man sofort sieht, dem Vieleck L umbeschrieben.

Wir untersuchen das gleichseitige Dreieck T' , von dem zwei Seiten durch die Punkte A und P führen, während die dritte den Bogen BF (vom Radius h) im Punkt B tangiert.

Da die Gerade BO durch den Punkt O_2 verläuft (Abb. 305), fällt das Dreieck T' mit T zusammen. Falls der Berührungspunkt H der Seite des Dreiecks T mit dem Bogen PQ mit dem Punkt P zusammenfällt, so berührt das Dreieck T nicht nur den Bogen PQ , sondern auch den Bogen BF .

Hieraus folgt, dass bei beliebiger Lage des Punktes H auf dem Bogen PQ der Bogen BF innerhalb des Dreiecks T gelegen ist. Analog können wir aus der Lage des Dreiecks T beim Zusammenfallen von H und Q schließen, dass sich die Bogen MA und NB der Kurve K (die Eckpunkte B, N, A, M, P und Q des Vielecks L treten in zyklischer Reihenfolge auf) bei beliebiger Lage des Punktes H auf dem Bogen PQ innerhalb des Dreiecks T befinden.

Somit umschließt das Dreieck T bei beliebiger Lage des Punktes H auf dem Bogen PQ der Kurve K die ganze Kurve K . Die Untersuchung aller gleichseitigen Dreiecke, von denen zwei Seiten durch Eckpunkte der Kurve K verlaufen und die dritte einen der Bogen dieser Kurve berührt, liefert aber alle der Kurve K umschriebenen gleichseitigen Dreiecke. Da alle diese Dreiecke die Höhe h besitzen, muss K eine Δ -Kurve sein.

Zur Berechnung der Länge dieser Kurve stellen wir fest:

Entspricht dem Bogen PQ der Zentriwinkel α , so dreht sich das Dreieck T bei Verschiebung des Punktes H von Q nach P um den Winkel α . Bei Drehung des gleichseitigen umschriebenen Dreiecks um 120° nimmt dieses aber die ursprüngliche Lage ein, nur seine Eckpunkte wechseln die Plätze; der Punkt A , in welchem eine der Dreiecksseiten einen Bogen der Kurve K berührt, durchläuft bei dieser Drehung die ganze Kurve K . Die Summe der Zentriwinkel aller Kreisbogen vom Radius h , aus denen die Kurve K besteht, beträgt also 120° , folglich ist die Länge der Kurve K gleich $\frac{2\pi h}{3}$.

108. Es sei K eine beliebige Δ -Kurve der Höhe h und O der Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe h . Wir beweisen, dass die den Kurven O und K umschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Ecke gleiche Umfänge haben.

Der Beweis wird induktiv geführt.

Die gleichseitigen Dreiecke (d.h. $3 \cdot 2^n$ -Ecke mit gleichen Winkeln), die der Kurve K und dem Kreis O umschrieben sind, haben nicht nur den gleichen Umfang, sondern sind überhaupt kongruent. Wir nehmen jetzt an, die umschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Ecke von O und K hätten gleiche Umfänge.

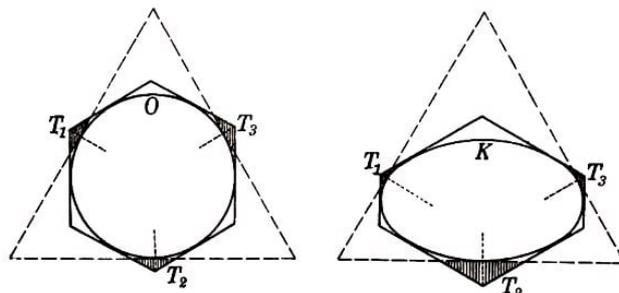


Abb. 306a, b

Wir beweisen, dass dann auch die den Kurven K und O umschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecke gleiche Umfänge haben.

Um die Kurven K und O beschreiben wir gleichseitige Dreiecke T , deren eine Seite jeweils senkrecht auf einer der Winkelhalbierenden der $3 \cdot 2^n$ -Ecke steht (Abb. 306). Diese Dreiecke trennen von jedem $3 \cdot 2^n$ -Eck drei ähnliche Dreiecke T_1, T_2 und T_3 ab.

Wir beweisen, dass die Summe der Höhen der Dreiecke T_1, T_2 und T_3 für beide Kurven K und O gleich ist.

Zum Beweis verlängern wir diejenigen Seiten des $3 \cdot 2^n$ -Ecks, die das Dreieck T schneiden, und erhalten zwei umbeschriebene gleichseitige Dreiecke T' und T'' , welche das Dreieck T schneiden (Abb. 307a).

Die Schnittpunkte der Seiten der Dreiecke T' und T'' , welche die Eckpunkte der Dreiecke T_1, T_2 und T_3 sind, bezeichnen wir mit A, B und C . Wir zeichnen ein Dreieck T^* , dessen Seiten denen des Dreiecks T parallel sind und durch die Punkte A, B und C verlaufen.

Nach Konstruktion des Dreiecks T sind die Seiten von T^* Halbierende der spitzen Winkel, die von den Seiten der Dreiecke T' und T'' in den Punkten A, B und C gebildet werden (Abb. 307).

Schließlich errichten wir in den Punkten A, B und C auf den Seiten des Dreiecks T^* Senkrechte (Halbierende der von den Seiten von T' und T'' gebildeten stumpfen Winkel). Man sieht leicht, dass sich diese Senkrechten in einem Punkt M schneiden.

Wir setzen also voraus, dass sich die in den Punkten A und B auf den Seiten des Dreiecks T^* errichteten Lote im Punkt M schneiden. Dann ist AM der geometrische Ort aller Punkte, die von den durch den Punkt A verlaufenden Seiten der Dreiecke T' und T'' gleich weit entfernt sind; BM ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den durch den Punkt B führenden Seiten der Dreiecke T' und T'' gleich weit entfernt sind.

Da die der Δ -Kurve K (bzw. O) umbeschriebenen Dreiecke T' und T'' kongruent sind, ist die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes, der sowohl für T' als auch für T'' innerer Punkt ist, von den drei Seiten von T' gleich der Summe der Abstände desselben Punktes von den drei Seiten von T'' (siehe Hilfssatz zum Beginn der Lösung von Aufgabe 105).

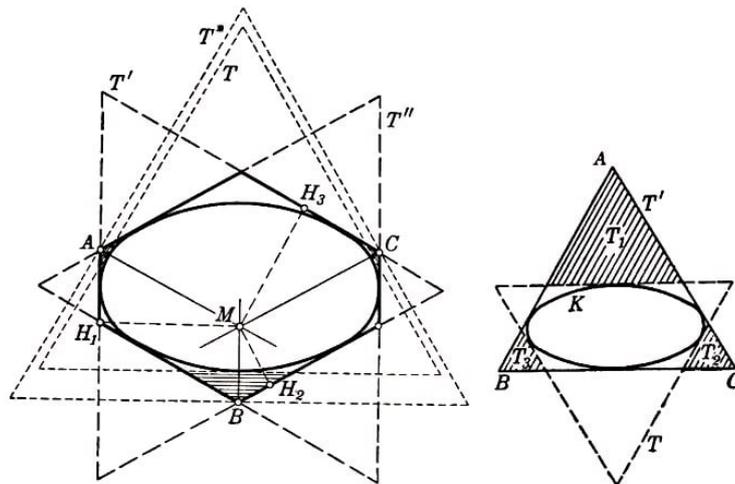


Abb. 307a, b

Hieraus können wir folgern, dass der Punkt M (der Schnittpunkt der Geraden AM und BM) auch von den durch den Punkt C verlaufenden Seiten der Dreiecke T' und T''

gleichweit entfernt ist; MC ist also ein Lot auf die durch den Punkt C führende Seite des Dreiecks T^* .

Die Summe $AM + BM + CM$ ist einerseits gleich der Höhe des Dreiecks T^* , andererseits gleich der Höhe h des Dreiecks T plus Summe der Höhen der Dreiecke T_1 , T_2 und T_3 . Die Höhe des Dreiecks T^* ist aber für die beiden Kurven K und O gleich.

Sind nämlich MH_1 , MH_2 und MH_3 Lote, die vom Punkt M auf die Seiten des Dreiecks T' gefällt sind ($MH_1 + MH_2 + MH_3$ ist die Höhe h des Dreiecks T), so gilt

$$MH_1 = MA \cdot \cos \angle AMH_1, \quad MH_2 = MB \cdot \cos \angle BMH_2, \quad MH_3 = MC \cdot \cos \angle CMH_3$$

Nun ist aber

$$\angle AMH_1 = \angle BMH_2 = \angle CMH_3$$

da jeder von ihnen gleich der Hälfte des Winkels zwischen den entsprechenden Seiten der Dreiecke T' und T'' ist; dieser Winkel (wir bezeichnen ihn mit 2α) ist für die Kurven K und U gleich. Somit ergibt sich

$$MA + MB + MC = \frac{h}{\cos \alpha}$$

Hieraus folgt, dass auch die Summe der Höhen der Dreiecke T_1 , T_2 und T_3 für die Δ -Kurve K und für den Kreis O gleich ist; und zwar gleich

$$\frac{h}{\cos \alpha} - h = h \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

Diese Überlegung ändert sich etwas, wenn $n = 0$ ist (Übergang vom unbeschriebenen Dreieck zum unbeschriebenen Sechseck). In diesem Fall haben wir kein Dreieckspaar T' und T'' , sondern nur ein Dreieck T' , dessen Eckpunkte A , B und C sind (Abb. 307b). Jedoch auch in diesem Falle ist die Summe der Höhen der Dreiecke T_1 , T_2 und T_3 für die Kurven K und O gleich. Den Beweis dieser Behauptung (der sich von dem oben geführten kaum unterscheidet) überlassen wir dem Leser.

Aus dem Bewiesenen folgt: Sind die Umfänge der den Kurven K und O unbeschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecke gleich, so sind auch die Umfänge der Vielecke gleich, welche aus diesen $3 \cdot 2^n$ -Ecken durch Abtrennung der Dreiecke T_1 , T_2 und T_3 entstehen (vgl. Lösung der Aufgabe 88 des § 7).

Wird nun an jedem Eckpunkt des gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Ecks ein Dreieck abgetrennt, so erhalten wir ein $3 \cdot 2^{n+1}$ -Eck. Auf diese Weise zeigt sich, dass aus der Gleichheit der Umfänge der unbeschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^n$ -Ecke der Kurven K und O auch die Gleichheit der Umfänge der unbeschriebenen gleichwinkligen $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecke folgt, womit der Induktionsschluss beendet ist.

Hieraus lässt sich mit Hilfe eines Grenzübergangs folgern, dass die Kurven K und O die gleiche Länge $\frac{2\pi h}{3}$ besitzen (vgl. Lösung der Aufgabe 88).

109. Es sei K eine beliebige Δ -Kurve, D ein Δ -Zweieck und O ein Kreis; die Höhen aller drei Kurven seien gleich h . Um den Kreis O beschreiben wir ein gleichwinkliges

Sechseck (dieses ist notwendigerweise regelmäßig; Abb. 308a). Um D beschreiben wir einen Rhombus mit Winkeln von 60° bzw. 120° , dessen Eckpunkte an den spitzen Winkeln sich in den Eckpunkten von D befinden (Abb. 308b).

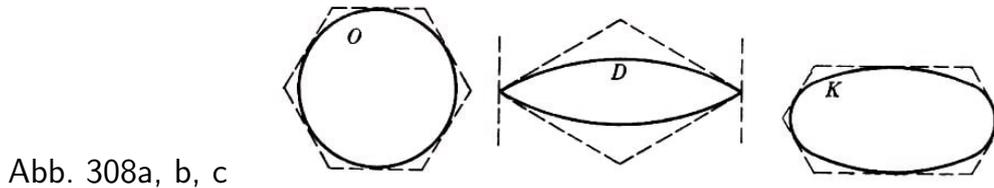


Abb. 308a, b, c

Den Rhombus um D betrachten wir als gleichwinkliges Sechseck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten die Länge Null haben. Wir behaupten, dass sich um die Kurve K stets ein gleichwinkliges Sechseck beschreiben lässt, dessen Flächeninhalt nicht größer als der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks um O und nicht kleiner als der Flächeninhalt des Rhombus um D ist (Abb. 308c).

Der Beweis dieser Behauptung stellt den schwierigsten Teil der Lösung unserer Aufgabe dar. Wir bringen ihn zum Schluss und benutzen die Behauptung einstweilen ohne Beweis.

Um O beschreiben wir ein regelmäßiges Sechseck, um D einen Rhombus und um K ein gleichwinkliges Sechseck, dessen Flächeninhalt zwischen dem des regelmäßigen Sechsecks und dem des Rhombus liegt. Wir verdoppeln nach und nach die Seitenanzahl der den Kurven K , D und O umschriebenen gleichwinkligen Vielecke, wobei wir mit den umschriebenen Sechsecken beginnen und ähnlich verfahren wie bei der Lösung von Aufgabe 108.

Dazu trennen wir jedesmal von den umschriebenen Vielecken der Kurven K , D und O drei einander ähnliche Dreiecke ab, bei denen die Summe der Höhen für alle drei Kurven gleich ist (siehe Lösung der vorhergehenden Aufgabe).

Die Summe der Flächeninhalte dieser drei abgetrennten Dreiecke ist proportional der Quadratsumme ihrer Höhen. Ist aber $h_1 + h_2 + h_3$ konstant, so hat $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ den kleinsten Wert für $h_1 = h_2 = h_3$ und den größten Wert für $h_1 = h_2 = 0$.¹⁰⁰ Man erkennt leicht, dass der erste Fall eintritt, wenn die Δ -Kurve ein Kreis O ist (dies folgt aus der Eigenschaft des Kreises, bei Drehung um den Mittelpunkt um 120° in sich selbst überzugehen; bei dieser Drehung geht T_1 in T_2 und T_2 in T_3 über).

Der zweite Fall tritt ein, wenn die Δ -Kurve ein Δ -Zweieck ist (weil jedes einem Δ -Zweieck umschriebene gleichseitige Dreieck durch die beiden Eckpunkte verläuft, welche für $n = 1$ auch Eckpunkte der umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecke des Δ -Zweiecks sind, d.h., zwei der abgetrennten Dreiecke arten in Punkte aus).

Von dem umschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Eck des Kreises trennen wir also jedesmal nicht mehr

¹⁰⁰Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Formel

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \frac{1}{3}[(h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 - h_2)^2 + (h_1 - h_3)^2 + (h_2 - h_3)^2]$$

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = (h_1 + h_2 + h_3)^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3$$

ab als von den umbeschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecken der Kurven K und D ; von dem umbeschriebenen Rhombus der Kurve D trennen wir jedesmal nicht weniger ab als von den umbeschriebenen $3 \cdot 2^n$ -Ecken von K und O .

Hieraus folgt, dass für jeden Wert n das umbeschriebene $3 \cdot 2^n$ -Eck der Kurve K keinen größeren Flächeninhalt hat als das umbeschriebene $3 \cdot 2^n$ -Eck der Kurve D .

Beim Grenzübergang ergibt sich, dass der Inhalt der von der Kurve K begrenzten Fläche nicht größer als der Kreisinhalt von O und nicht kleiner als der Inhalt der von D begrenzten Fläche sein kann.

Bei Präzisierung dieser Überlegung lässt sich sogar leicht beweisen, dass der Kreisinhalt von O größer als der Inhalt der von der Δ -Kurve K begrenzten Fläche sein muss (sofern nur K kein Kreis ist) und dass der Inhalt der von dem Δ -Zweieck D umrandeten Fläche kleiner als der Inhalt der von der Δ -Kurve K begrenzten Fläche sein muss (sofern nur K kein Δ -Zweieck ist).

Dieser Beweis ist den abschließenden Überlegungen in der Lösung der Aufgabe 89 des § 7 sehr ähnlich; dabei sind die Aufgaben 105 und 104 des vorliegenden Paragraphen zu benutzen. Wir überlassen es dem Leser, den vollständigen Beweis zu führen.

Nunmehr bleibt uns noch zu zeigen, dass sich tatsächlich jeder Δ -Kurve K ein gleichwinkliges Sechseck umschreiben lässt, dessen Flächeninhalt zwischen dem des umbeschriebenen gleichwinkligen Sechsecks des Kreises O und dem des Rhombus mit Winkeln von 60° und 120° liegt, welcher dem Δ -Zweieck D umbeschrieben ist (dabei nehmen wir an, dass die drei Δ -Kurven D , O und K die gleiche Höhe h besitzen).

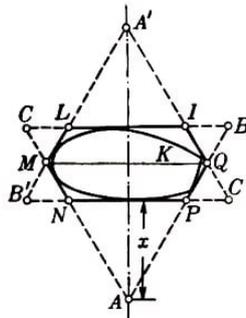


Abb. 309

Wir beschreiben um K ein gleichwinkliges Sechseck $ILMNPQ$ mit einer durch die Mittelpunkte der sich gegenüberliegenden Seiten IL und NP verlaufenden Symmetrieachse (Abb. 309; die Existenz eines solchen umbeschriebenen Sechsecks wurde in Aufgabe 30b des § 3 bewiesen).

Wir bestimmen den Flächeninhalt dieses Sechsecks. Verlängern wir seine Seiten bis zu ihrem Schnitt, so erhalten wir zwei der Δ -Kurve K umbeschriebene regelmäßige Dreiecke ABC und $A'B'C'$, deren Höhen beide gleich h sind. Die Symmetrieachse des Sechsecks steht senkrecht auf den Grundlinien BC und $B'C'$ der Dreiecke und führt durch ihre Eckpunkte A und A' . Den Abstand des Eckpunktes A von der Seite NP bezeichnen wir mit x , wobei $0 \leq x \leq h$.

Ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich S , so ist der Flächeninhalt des Dreiecks ANP gleich $\frac{x^2}{h^2}S$ und der Inhalt des Dreiecks AMQ gleich $\frac{(h+x)^2}{4h^2}S$ (die Entfernung

von A bis A' ist gleich $h + x$ und die Entfernung von A bis MQ gleich $\frac{h+x}{2}$; der Flächeninhalt des Trapezes $MNPQ$ ist dann gleich

$$\left[\frac{(h+x)^2}{4h^2} - \frac{x^2}{h^2} \right] S = \frac{h^2 + 2hx - 3x^2}{4h^2} S$$

Der Inhalt des Sechsecks $ILMNPQ$ ist folglich gleich $\frac{h^2+2hx-3x^2}{4h^2} S$. Stellen wir diesen Ausdruck in der Form

$$\frac{h^2 + 2hx - 3x^2}{4h^2} S = \frac{\frac{4}{3}h^2 - \left(\frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x\right)^2}{2h^2} S$$

dar, so können wir uns davon überzeugen, dass der Flächeninhalt am größten wird, wenn $\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x$ oder $x = \frac{h}{3}$ ist. In diesem Fall ist jedoch das Sechseck $ILMNPQ$ regelmäßig.

Somit können wir folgern, dass kein gleichwinkliges Sechseck, welches einer konvexen Kurve K umbeschrieben ist und eine durch die Mittelpunkte paralleler Seiten führende Symmetrieachse besitzt, einen größeren Flächeninhalt als das dem Kreis O umschriebene regelmäßige Sechseck hat.¹⁰¹

Da ferner dem der Kurve D umbeschriebenen Rhombus (Abb. 308b) der Wert $x = 0$ entspricht, ist der Flächeninhalt des Sechsecks $ILMNPQ$ nicht kleiner als der Flächeninhalt dieses Rhombus, wenn

$$\left| \frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x \right| \leq \left| \frac{h}{\sqrt{3}} \right| \quad \text{d.h.} \quad \frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x \geq -\frac{h}{\sqrt{3}}, \quad x \leq \frac{2}{3}h$$

und er ist kleiner, falls $x > \frac{2}{3}h$ ist.

Im Falle $x \leq \frac{2}{3}h$ erfüllt das betrachtete Sechseck bereits unsere Forderung, denn sein Flächeninhalt ist nicht größer als der des umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks des Kreises O und nicht kleiner als der des umbeschriebenen Rhombus der Kurve D .

Damit bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, dass sich der Kurve K ein symmetrisches gleichwinkliges Sechseck umschreiben lässt, für welches $x > \frac{2}{3}h$ ist. Wir beweisen, dass sich dann um K noch ein anderes symmetrisches gleichwinkliges Sechseck beschreiben lässt, dem ein Wert x entspricht, der kleiner als $\frac{2}{3}h$ ist.

Es sei also $ILMNPQ$ ein Sechseck, für welches $x > \frac{2}{3}h$ ist (Abb. 310); die Berührungspunkte der Seiten IL , LM , MN , NP , PQ und QI dieses Sechsecks mit der Kurve K bezeichnen wir jeweils mit I' , L' , M' , N' , P' und Q' . Nunmehr untersuchen wir ein K umschriebenes symmetrisches Sechseck, dessen Symmetrieachse mit der Geraden MQ einen Winkel von nicht mehr als 60° bildet (die Existenz eines solchen Sechsecks folgt aus der Anmerkung zur Lösung der Aufgabe 30b des § 3).

¹⁰¹Man zeigt leicht, dass kein der Kurve K umschriebenes gleichwinkliges Sechseck (auch wenn es keine Symmetrieachse besitzt) einen größeren Flächeninhalt hat als ein dem Kreis O umschriebenes regelmäßiges Sechseck.

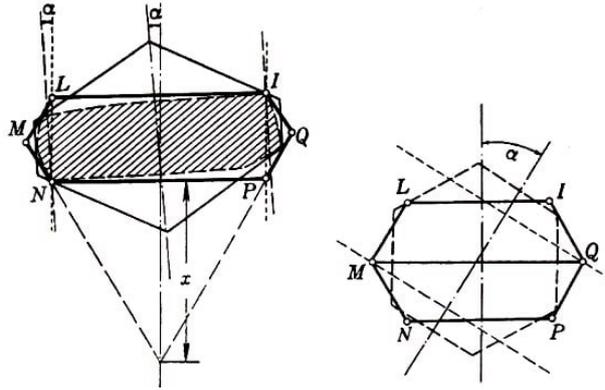


Abb. 310a, b

Wir behaupten, dass der Abstand zwischen den Seiten dieses Sechsecks, die senkrecht auf der Symmetrieachse stehen, größer als $\frac{h}{3}$ ist; das bedeutet aber, diesem Sechseck entspricht ein Wert $x < \frac{2h}{3}$; der Flächeninhalt des untersuchten Sechsecks ist also nicht kleiner als der Flächeninhalt des D umschriebenen Rhombus.

Nehmen wir an, die Achse des zu untersuchenden Sechsecks bilde mit der Geraden MQ einen Winkel $\alpha < 30^\circ$; dann bilden die auf der Achse senkrecht stehenden Seiten des Sechsecks mit der Achse von $ILMNPQ$ denselben Winkel $\alpha < 30^\circ$ und berühren die Bogen $L'M'$ und $P'Q'$ der Kurve K (Abb. 310a). Der Abstand zwischen diesen Seiten verringert sich nur, wenn wir sie derart verschieben, dass sie durch die Eckpunkte I und N (oder durch die Eckpunkte L und P) verlaufen.

Der Abstand zwischen parallelen, durch die Punkte I und N führenden und innerhalb der Winkel PIQ bzw. LNM gelegenen Geraden (dieser Bedingung genügen nämlich die den betrachteten Seiten des Sechsecks parallelen Geraden) ist dann am kleinsten, wenn diese Geraden mit den Geraden LN und PI zusammenfallen. In diesem Grenzfall ist der Abstand zwischen diesen Geraden gleich IL , d.h. größer als $\frac{2}{3}h$ (da für das Sechseck $ILMNPQ$ die Ungleichung $x > \frac{2}{3}h$ gilt).

Jetzt nehmen wir an, die Achse des zu untersuchenden Sechsecks bilde mit der Geraden MQ einen Winkel α derart, dass $60^\circ > \alpha > 30^\circ$ ist. Die auf der Achse senkrecht stehenden Seiten dieses Sechsecks bilden mit der Achse von $ILMNPQ$ denselben Winkel α und berühren folglich die Bogen $I'L'$ bzw. $N'P'$ (oder $Q'I'$ und $M'N'$) der Kurve K (Abb. 310b).

Daher verringert sich der Abstand zwischen diesen Seiten nur, wenn wir sie derart parallel verschieben, dass sie durch Q bzw. M verlaufen. Dabei ist, wie man leicht sieht, der Abstand zwischen den verschobenen Geraden dann am kleinsten, wenn diese mit der Achse des Sechsecks $ILMNPQ$ einen Winkel von 60° bilden. In diesem Grenzfall ist der Abstand zwischen den Geraden gleich MQ , d.h. größer als $\frac{1}{3}h$ da $MQ > \frac{2}{3}h$ ist (dies folgt daraus, dass beim Sechseck $ILMNPQ$ die Ungleichung $x > \frac{2}{3}h$ gilt).

Damit haben wir die zu Beginn der Lösung formulierte Behauptung vollständig bewiesen.

110. Es sei K eine beliebige Δ -Kurve, K' und K'' seien die aus K bei Drehung um einen gewissen Punkt O um 120° bzw. 240° entstandenen Kurven, und T sei irgendein der Kurve K umschriebenes gleichseitiges Dreieck.

Bei Drehung um den Punkt O um 120° bzw. 240° geht das Dreieck T in ein Dreieck

T' bzw. T'' über, das der Kurve K' bzw. K'' umschrieben ist (Abb. 311); die Höhen dieser beiden (aus dem Dreieck T durch Umdrehung erhaltenen) Dreiecke sind ebenfalls gleich h , und die Seiten sind den Seiten des Dreiecks T parallel.

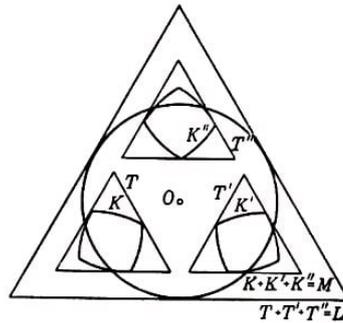


Abb. 311

Die Summe $T + T' + T''$ ergibt ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $3h$, dessen Seiten die gleiche Richtung haben wie die Seiten des Dreiecks T (siehe § 4, Aufgabe 43). Nach Aufgabe 44 des § 4 ist das Dreieck $L = T + T' + T''$ der Kurve $M = K + K' + K''$ umschrieben.

Damit hat jedes der Kurve M umschriebene gleichseitige Dreieck die gleiche Höhe $3h$, d.h., M ist eine Δ -Kurve der Höhe $3h$. Die Kurve M geht aber bei Drehung um den Punkt O um 120° in sich über (bei einer solchen Drehung geht K in K' , K' in K'' und K'' in K über, während $M = K + K' + K''$ unverändert bleibt).

Folglich ist M ein Kreis mit dem Radius h (siehe Aufgabe 105).

Da der Umfang des Kreises M (gleich $2\pi h$) gleich der Summe der Längen der Kurven K , K' und K'' ist (siehe § 4), also das Dreifache der Länge von K betragen muss, ist die Länge von K gleich $\frac{2\pi h}{3}$ (Satz von Barbier für Δ -Kurven).

111. Es sei K eine konvexe Kurve derart, dass die Summe $M = K + K' + K''$, wobei K' und K'' aus der Kurve K durch Drehung um einen gewissen Punkt O um 120° bzw. 240° entstanden sind, ein Kreis mit dem Radius h ist. L sei ein der Kurve M umschriebenes gleichseitiges Dreieck, T , T' und T'' seien, gleichseitige Dreiecke, die den Kurven K , K' und K'' umschrieben sind (Abb. 311) und deren Seiten dieselbe Orientierung wie die Seiten von L besitzen.

Die Dreiecke T' und T'' ergeben sich aus dem Dreieck T bei Drehung um den Punkt O um 120° bzw. 240° , es ist also $L = T + T' + T''$ (siehe Aufgabe 44 des § 4).

Die Höhe des einem Kreis vom Radius h umschriebenen Dreiecks L ist gleich $3h$; die Höhe des Dreiecks T , welches der Kurve K umschrieben ist, muss ein Drittel der Höhe des Dreiecks L betragen, d.h., sie ist gleich h . Hieraus folgt, dass K eine Δ -Kurve der Höhe h ist.

112. Dass alle aus Kreisbogen vom Radius h bestehenden Δ -Kurven der Höhe h die gleiche Länge $\frac{2\pi h}{3}$ besitzen, wurde praktisch schon zum Schluss der Lösung der Aufgabe 107 bewiesen. Da die Länge einer beliebigen Δ -Kurve K der Höhe h gleich dem Grenzwert der Längen von Δ -Kurven der Höhe h ist, welche aus Kreisbogen vom Radius h bestehen und deren Limes gerade diese Kurve ergibt (siehe § 4), hat jede Δ -Kurve der Höhe h die Länge $\frac{2\pi h}{3}$.

113. Es sei ABC ein gegebenes Dreieck, P , Q und R seien die Mittelpunkte der in der Aufgabenstellung angegebenen Bogen, und K sei die von diesen Bogen gebildete Kurve (Abb. 312).

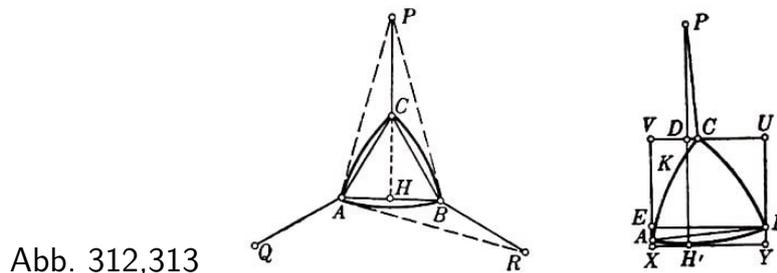


Abb. 312,313

Wir bestimmen die Winkel dieser Kurve in den Ecken A , B und C . Dazu ziehen wir die Höhe CH des Dreiecks ABC und die Strecken AP und BP (P ist der Mittelpunkt des Bogens AB). Dann ist der Winkel APC gleich der Hälfte des Winkels ACH (das Dreieck ACP ist gleichschenkelig), d.h. $\angle APC = 15^\circ$, daher sind $\angle PAC = 15^\circ$ und $\angle APB = 30^\circ$.

Hieraus folgt, dass AP eine Tangente an den Bogen AC ist (der Winkel zwischen der Tangente an den Bogen AC im Punkt A und der Sehne AC ist gleich 15°). Der Winkel zwischen den Tangenten AP und AR an die Bogen AC und AB im Punkt A ist gleich 90° .

Folglich liegen alle drei Ecken auf dem Rand jedes der Kurve K umschriebenen Rechtecks, denn drei Seiten des umschriebenen Rechtecks führen durch die Punkte A , B und C , während die vierte einen der Kreisbogen berührt.

Es sei jetzt $UVXY$ ein der Kurve K umschriebenes Rechteck, dessen Seite XY den Bogen AB der Kurve K im Punkt H' berührt (Abb. 313). Wir ziehen die Strecke $H'P$ (P ist der Mittelpunkt des Bogens AB), welche die Seite UV des Rechtecks im Punkt D schneidet. Schließlich ziehen wir parallel zu den Seiten XY und UV des Rechtecks die Strecke BE .

Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke ABE und CPD kongruent (gleiche Hypotenuse und gleicher spitzer Winkel), daher ist $DP = BE = XY$. Hieraus folgt

$$PH' = PD + DH' = XY + YU$$

dieser Ausdruck ergibt den halben Umfang des Rechtecks $UVXY$. Der Umfang jedes der Kurve K umschriebenen Rechtecks ist also gleich der doppelten Strecke PA .

Ist der Umfang des umschriebenen Rechtecks gleich $4l$, so sind die Radien der Bogen, aus denen die Kurve K besteht, gleich $2l$ und die den Bogen entsprechenden Zentriwinkel gleich 30° (siehe oben). Hieraus folgt, dass die Länge der Kurve K gleich einem Viertel des Kreises mit dem Radius $2l$, d.h. gleich πl ist.

Um die von der Kurve K begrenzte Fläche zu berechnen, bezeichnen wir die Seite des Dreiecks ABC mit a . Dann ist (Abb. 312)

$$PH = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \quad PA = \sqrt{PH^2 + AH^2} = a\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2l$$

$MNPQ$ sei ein der Kurve K umbeschriebenes Rechteck, dessen eine Seite senkrecht auf der Halbierenden eines der Winkel des Achtecks steht (Abb. 315).

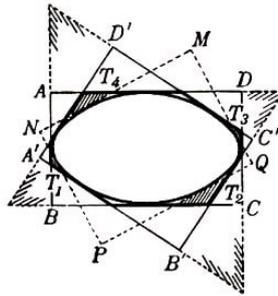


Abb. 315

Das Rechteck $MNPQ$ trennt von dem Achteck vier ähnliche Dreiecke T_1, T_2, T_3 und T_4 ab (in der Abbildung schraffiert). Wir beweisen, dass die Summe der Höhen dieser Dreiecke nur von der Größe l und von dem Winkel abhängt, den die entsprechenden Seiten der Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ bilden.

Zum Beweis untersuchen wir das von den Geraden $A'B', AB, C'D'$ und CD und das von den Geraden $B'C', BC, A'D'$ und AD gebildete Parallelogramm.

Wie sich aus Abb. 315 ersehen lässt, ist jede Seite eines Paares benachbarter Seiten des einen Rechtecks eine Höhe des einen Parallelogramms, daher ist die Summe der vier Höhen beider Parallelogramme gleich $4l$. Die Seiten des ersten Parallelogramms werden von den Geraden MN und PQ geschnitten, die Seiten des zweiten von den Geraden NP und MQ (Abb. 315).

Die Summe der Abstände zwischen den Geraden MN und PQ sowie zwischen MQ und NP (der halbe Umfang des Rechtecks $MNPQ$) ist gleich $2l$.

Wir untersuchen jetzt das Parallelogramm $XYZT$ und seine die Geraden MQ und NP schneidenden Seiten. Nach Konstruktion liegen diese Geraden parallel zu den Halbierenden zweier gegenüberliegender Winkel des Parallelogramms (Abb. 316).

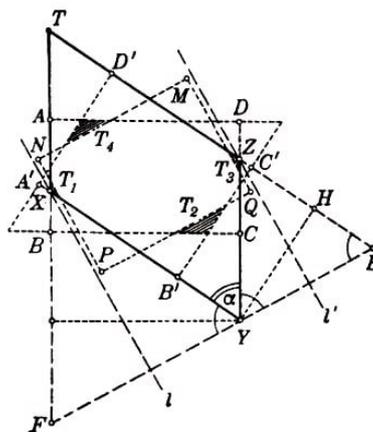


Abb. 316

Durch die Eckpunkte X und Z des Parallelogramms $XYZT$, die den davon abgetrennten Dreiecken T_1 und T_3 angehören, legen wir parallel zu PN und MQ die Geraden l und l' . Die Summe der Höhen von T_1 und T_3 ist offenbar gleich der Differenz aus dem Abstand zwischen den Geraden l und l' und dem Abstand zwischen den Geraden PN und MQ .

Von dem Eckpunkt Y fällen wir die Lote auf die Geraden l und l' und verlängern diese bis zu ihren Schnitten in den Punkten E und F mit den Verlängerungen der Seiten TZ und TX des Parallelogramms $XYZT$. Die Summe der auf den Seitenlinien der beiden ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke YZE und YXF errichteten Höhen ist gleich der Summe der Höhen des Parallelogramms $XYZT$.

Durch diese Summe lässt sich leicht die Summe der Grundlinien YE und FY der Dreiecke, d. h. der doppelte Abstand zwischen den Geraden l und l' ausdrücken. Dazu bezeichnen wir den bekannten Winkel am Eckpunkt Y der beiden betrachteten gleichschenkligen Dreiecke YZE und YXF mit α (dieser Winkel ist gleich dem Winkel XYZ des Parallelogramms $XYZT$, d.h. gleich dem Winkel zwischen den Seiten $A'B'$ und DC der Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$).

Dann ist der Winkel zwischen der Grundlinie YE des Dreiecks YZE und der auf der Seite ZE errichteten Höhe YH gleich $\frac{\alpha}{2}$ (er ist als Winkel zwischen paarweise senkrechten Seiten gleich dem Winkel zwischen der auf der Grundlinie YE errichteten Höhe und der Seitenlinie); folglich ist $YE = \frac{YH}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. Der Abstand zwischen l und l' ist daher gleich dem Quotienten aus der Summe der Höhen des Parallelogramms $XYZT$ und $2 \cos \frac{\alpha}{2}$.

Somit ist die Summe der Höhen der Dreiecke T_1 und T_3 gleich

$$\frac{H_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} - h_1$$

wobei H_1 die Summe der Höhen des Parallelogramms $XYZT$ und h_1 der Abstand zwischen den Geraden MQ und PN ist. Führen wir dieselbe Konstruktion mit dem Parallelogramm durch, welches aus den Seitenlinien der Dreiecke T_2 und T_4 gebildet wird, und berücksichtigen wir, dass die Summe der Höhen dieses Parallelogramms und der Höhen des Parallelogramms $XYZT$ gleich $4l$, die Summe der Abstände zwischen den Geraden MN und PQ sowie zwischen den Geraden PN und MQ gleich $2l$ ist, so ergibt sich schließlich, dass die Summe der Höhen der vier Dreiecke T_1, T_2, T_3 und T_4 gleich

$$2l \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) = \frac{2l (1 - \cos \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

ist.

Es sei nunmehr O ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2}l$. Die Umfänge aller ihm umschriebenen Quadrate seien gleich $4l$. Um K und O beschreiben wir Rechtecke; die Umfänge dieser Rechtecke sind gleich. Ferner untersuchen wir neue umschriebene Rechtecke von O und K , deren Seiten senkrecht auf den Winkelhalbierenden der ursprünglichen Rechtecke stehen.

Die Summe der Höhen der Dreiecke, welche von dem ursprünglichen Rechteck abgetrennt werden, ist für beide Kurven O und K gleich, und die erhaltenen umschriebenen Achtecke haben gleiche Umfänge. (Wir überlassen es dem Leser, die entsprechenden Überlegungen selbständig durchzuführen, die etwas einfacher als die oben dargelegten sind.) Die Umfänge von gleichwinkligen, den Kurven O und K umschriebenen 2^n -Ecken sind allgemein gleich.

Man beweist die induktiv.

Man nimmt an, die Umfänge von gleichwinkligen 2^{n-1} -Ecken, welches den Kurven K und O umschrieben sind, seien gleich, und zeigt, dass dann auch die Umfänge der gleichwinkligen 2^n -Ecke, welche den Kurven O und K umschrieben sind, einander gleich sein müssen (vgl. Lösung der Aufgabe 88 des § 7).

Nunmehr lässt sich mit Hilfe eines Grenzübergangs leicht folgern, dass K und O die gleiche Länge haben, und zwar πl .

116. Eine Kurve K , möge die Eigenschaft besitzen, dass die Umfänge aller ihr umschriebenen Rechtecke gleich $4l$ sind. K'_1 sei die aus K_1 bei Drehung um 90° um einen gewissen Punkt O entstandene Kurve; ferner sei $K = K_1 + K'_1$, und L sei irgendein der Kurve K umschriebenes Rechteck (Abb. 317).

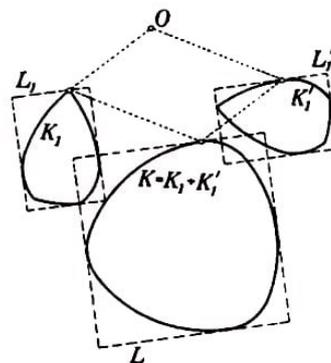


Abb. 317

Wir untersuchen die den Kurven K_1 und K'_1 umschriebenen Rechtecke L_1 und L'_1 , deren Seiten denen von L parallel sind.

Das Rechteck L'_1 ergibt sich offenbar aus dem Rechteck L_1 durch Drehung um 90° um den Punkt O ; der Umfang des Rechtecks L_1 ist infolge der Eigenschaft der Kurve K_1 gleich $4l$. Aus der Definition der Addition von Vielecken (siehe Aufgabe 43 des § 4) folgt leicht, dass die Summe $L_1 + L'_1$ ein Quadrat der Seitenlänge $2l$ ergibt.

Nach Aufgabe 44 des § 4 ist jedoch das Rechteck L gleich der Summe $L_1 + L'_1$. Somit sehen wir, dass jedes der Kurve K umschriebene Rechteck L ein Quadrat der Seitenlänge $2l$ sein muss; hieraus folgt, dass K eine Kurve der konstanten Breite $2l$ ist.

Es sei umgekehrt die Summe $K = K_1 + K'_1$, wobei K'_1 sich aus K_1 durch Drehung um irgendeinen Punkt O um 90° ergibt, eine Kurve mit konstanter Breite $2l$, und es sei L_1 ein beliebiges der Kurve K_1 umschriebenes Rechteck.

Bei Drehung um O um 90° geht das Rechteck L_1 in ein der Kurve K'_1 umschriebenes Rechteck L'_1 über.

Dabei haben die Seiten der Rechtecke L_1 und L'_1 offenbar die gleiche Orientierung.

Hieraus folgt nach Aufgabe 44 des § 4, dass die Summe $L = L_1 + L'_1$ ein der Kurve K umschriebenes Rechteck sein muss. Da K eine Kurve konstanter Breite ist, muss L also ein Quadrat der Seitenlänge $2l$ sein. Der Umfang des Quadrats L ist aber gleich der Summe der Umfänge der Rechtecke L_1 und L'_1 (siehe Aufgabe 43 des § 4); da nun die Rechtecke L_1 und L'_1 einander gleich sind (L'_1 ist aus L_1 durch Drehung um 90°

um den Punkt O entstanden), ist der Umfang des Quadrats L gleich dem doppelten Umfang des Rechtecks L_1 .

Hieraus folgt, dass alle der Kurve K_1 umbeschriebenen Rechtecke L_1 den gleichen Umfang $\frac{4 \cdot 2l}{2} = 4l$ besitzen.

Aus diesem Ergebnis und aus dem Satz von Barbier für Kurven konstanter Breite (siehe Aufgabe 88 des § 7; siehe auch Beweis des Satzes von Barbier, der den Inhalt der Aufgabe 92 des § 7 darstellt) folgt unmittelbar der verallgemeinerte Barbiersche Satz.

Einander kongruente Kurven K_1 und K'_1 , deren Summe eine Kurve K konstanter Breite ist, haben nämlich die gleiche Länge. Da aber nach dem Satz von Barbier die Länge der Kurve K gleich $2\pi l$ und die Summe der Längen der Kurven K_1 und K'_1 gleich der Länge der Kurve K ist (siehe § 4), muss die doppelte Länge der Kurve K_1 gleich $2\pi l$ und folglich die Länge der Kurve K_1 gleich πl sein.

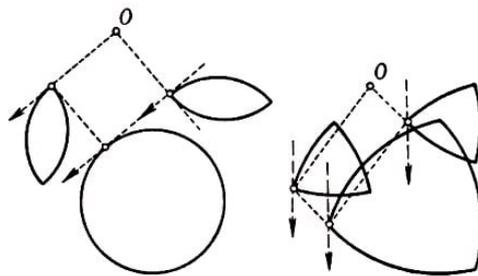


Abb. 318a, b

Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass $K_1 + K'_1$ ein Kreis sein muss, wenn K_1 die Kurve aus Aufgabe 114 ist (Abb. 318a); ist K_1 dagegen die Kurve aus Aufgabe 113, so ergibt $K_1 + K'_1$ ein Reuleaux-Dreieck (Abb. 318b).

3 Literaturverzeichnis

- ALEXANDROFF, P. S.: Kombinatorische Topologie). Gostechisdat, Moskau-Leningrad 1947.
- ALEXANDROW, A. D.: Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Deutsche Übersetzung, Akademie-Verlag, Berlin 1955.
- ALEXANDROW, A. D.: Konvexe Polyeder). Gostechisdat, Moskau-Leningrad 1950.
- BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel. W. de Gruyter, Berlin 1956.
- BONNESEN, T., und W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, Berlin 1934.
- DELAUNAY, B. N., und O.K. SHITOMIRSKI: Aufgabensammlung zur Geometrie. Moskau-Leningrad 1950.
- DUKOR, I. G.: Zum Satz von Helly über die Menge konvexer Körper mit gemeinsamen Punkten). Uspechi mat. nauk, Heft X, 1944.
- PHILIPPOW, A. F.: Ein elementarer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes). Uspechi mat. nauk, Heft V, 5, 1950.
- HELLY, E.: Über die Menge konvexer Körper mit gemeinsamen Punkten. Jber. d. Deutsch. Math.-Vereinig., Bd. 32, 1923.
- KAMENEZKI, I. M.: Die Lösung eines von Lusternik gestellten geometrischen Problems). Uspechi mat. nauk, Heft II, 2, 1947.
- KRYSHANOWSKI, D. A.: Isoperimetrie. Moskau- Leningrad 1938.
- LUSTERNIK, L. A.: Konvexe Körper. Moskau- Leningrad 1941.
- RADEMACHER, H., and I. J. SCHOENBERG: Helly's theorems on convex domains and Tschebyscheff's approximation problem. Canadian Journ. of Math., Bd. 2, 1950.
- RADEMACHER, H., und O. TOEPLITZ: Von Zahlen und Figuren. 2. Aufl. Springer, Berlin 1933.
- RADON, J.: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. Math. Ann., Bd. 83, 1921.
- SCHKLARSKI, D. O. u.a.: Ausgewählte Aufgaben und Sätze der Elementarmathematik, Bd. 1. Gostechisdat, Moskau-Leningrad 1950.
- SCHNIRELMANN, L. H.: Über gleichmäßige Approximation. Iswestija, Math Serie Bd. 2, 1938.
- SCHNIRELMANN, L. H.: Über einige geometrische Eigenschaften geschlossener Kurven. Uspechi mat. nauk, Heft X, 1944.
- SHALANDER, M.: On certain minimum problems in the theory of convex curves. Trans. Amer. Soc. 78, N 1, 1952.
- WOLPERT, E. J.: Ein elementarer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes). Uspechi mat. nauk, Heft V, 5, 1950.