
A.I. Markuschewitsch

Rekursive Folgen

Übersetzung: Ursula Steudel
1968 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 25
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

1 Vorwort

Dieses Bändchen enthält die Ausarbeitung eines Vortrages, den der Verfasser vor Schülern der neunten und zehnten Klasse, Teilnehmern einer Moskauer mathematischen Olympiade, und später in etwas abgeänderter Form in einem Moskauer Lehrerbildungsinstitut gehalten hat.

Das Thema "Rekursive Folgen" ist dem Stoffgebiet des Schulunterrichtes (arithmetische und geometrische Folgen, Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen, Folge der Koeffizienten des Quotienten zweier nach wachsenden Potenzen geordneter Polynome usw.) verwandt.

Außerdem ist die vorliegende kleine mathematische Theorie¹ abgeschlossen, einfach und klar, wie alles, was von den großen Meistern der Analysis, die diese Theorie begründeten, geschaffen wurde.

Die Grundzüge der Theorie der rekursiven Folgen wurden in den zwanziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker Moivre (nach dem die Formel $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ benannt ist) und von einem der ersten Mitglieder der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg, dem Schweizer Mathematiker Daniel Bernoulli, ausgearbeitet und publiziert.

Von Leonhard Euler, dem größten Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts und Mitglied der Petersburger Akademie, wurde die Theorie weiterentwickelt. Er widmet den rekursiven Folgen (Reihen) das dreizehnte Kapitel seiner "Introductio in analysin infinitorum" (Einleitung in die Analysis des Unendlichen) (1748)².

Von späteren Arbeiten sind die Behandlung der Theorie der rekursiven Folgen in den Vorlesungen über Differenzenrechnung der bedeutenden russischen Mathematiker und Akademiemitglieder P. L. Tschebyscheff und A. A. Markoff³ besonders zu erwähnen.

¹Für den mit der Analysis vertrauten Leser weisen wir darauf hin, dass sie ein genaues Analogon der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist.

²Deutsche Übersetzung Berlin 1885.

³P. L. Tschebyscheff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vorlesungen der Jahre 1879-1880), M.-L. 1936, Seite 139-147; A. A. Markoff, Differenzenrechnung), 2. Auflage, Odessa, 1910, Seite 209-239.

2 Rekursive Folgen

1. Der Begriff der rekursiven Folge ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Begriffs der arithmetischen oder der geometrischen Folge.

Speziell gehören auch Folgen von Quadraten oder Kuben natürlicher Zahlen, die Ziffernfolgen bei der Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen (und überhaupt beliebige periodische Folgen), Folgen von Koeffizienten des Quotienten zweier Polynome, die nach wachsenden Potenzen von n geordnet sind, usw. dazu.

Daraus ersieht man, dass man im Mathematikunterricht der Oberschule sehr oft auf rekursive Folgen stößt.

Die Theorie der rekursiven Folgen bildet ein spezielles Kapitel einer mathematischen Disziplin, der sogenannten Differenzenrechnung. Wir legen diese Theorie hier so dar, dass beim Leser keinerlei Spezialkenntnisse vorausgesetzt werden (nur an einer Stelle beziehen wir uns ohne Beweis auf einen Satz der linearen Algebra).

2. Wir schreiben Folgen in der Form

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

oder kürzer $\{u_n\}$. Wenn es eine natürliche Zahl k und (reelle oder komplexe) Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k gibt mit der Eigenschaft, dass von einer beliebigen Stelle n ab für alle Glieder

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq k \geq 1) \quad (2)$$

gilt, so nennt man die Folge (1) eine rekursive Folge k -ter Ordnung und die Relation (2) Rekursionsgleichung (Rekursionsformel) k -ter Ordnung.

Somit ist eine rekursive Folge dadurch charakterisiert, dass sich jedes ihrer Glieder (von einem gewissen Gliede ab) gemäß Formel (2) durch ein und dieselbe Anzahl k ihm unmittelbar vorangehender Glieder ausdrücken lässt.

Die Bezeichnung "rekursiv" (oder auch "rekurrent", vom französischen *récurrente* - zurückkehrend zum Anfang) verwendet man gerade deshalb, weil man hier zur Errechnung nachfolgender Glieder auf vorangegangene zurückgreift. Wir führen einige Beispiele für rekursive Folgen an.

Beispiel 1. Die geometrische Folge.

Gegeben sei eine geometrische Folge

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots, u_n = aq^{n-1} \quad (3)$$

für welche die Gleichung (2) die Form

$$u_{n+1} = qu_n \quad (4)$$

hat. Hier ist $k = 1$ und $a_1 = q$. Also ist eine geometrische Folge eine rekursive Folge erster Ordnung.

Beispiel 2. Die arithmetische Folge.

Für die arithmetische Folge

$$u_1 = a, \quad u_2 = a + d, \quad u_3 = a + 2d, \quad \dots, \quad u_n = a + (n - 1)d, \quad \dots$$

ist

$$u_{n+1} = u_n + d$$

eine Beziehung, die nicht die Gestalt der Gleichung (2) hat.⁴ Wenn wir aber diese Beziehung für zwei benachbarte n -Werte betrachten:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{und} \quad u_{n+1} = u_n + d$$

erhalten wir daraus durch Subtraktion

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \text{oder} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (5)$$

eine Gleichung der Gestalt (2). Hier ist $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Daher ist eine arithmetische Folge eine rekursive Folge zweiter Ordnung.

Beispiel 3. Wir betrachten die klassische Kaninchenaufgabe von Fibonacci⁵. In dieser Aufgabe soll man die Anzahl der Paare geschlechtsreifer Kaninchen bestimmen, die aus einem Paar im Laufe eines Jahres hervorgehen, wenn man weiß, dass jedes solche Kaninchenpaar im Monat ein neues Paar wirft und die Neugeborenen im Laufe eines Monats die volle Reife erlangen.

Hierbei ist weniger das Resultat interessant, das man ganz leicht erhält, als die Folge, deren Glieder die Gesamtzahlen der fortpflanzungsfähigen Kaninchenpaare im Anfangsmoment (u_1), nach einem Monat (u_2), nach zwei Monaten (u_3) und allgemein nach n Monaten (u_{n+1}) sind. Offenbar ist $u_1 = 1$.

Nach einem Monat ist ein neugeborenes Paar dazugekommen, aber die Anzahl der geschlechtsreifen Paare ist nach wie vor $u_2 = 1$. Nach zwei Monaten ist das junge Kaninchenpaar reif, und die Gesamtzahl der fortpflanzungsfähigen Paare hat sich auf 2 erhöht: $u_3 = 2$. Es sei nun u_n die schon bekannte Menge der reifen Paare nach $n - 1$ Monaten und u_{n+1} die nach n Monaten. Weil zu dieser Zeit an reife Paare noch u_n Paare Zuwachs geben, ist nach $n + 1$ Monaten die Gesamtzahl der reifen Paare

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (6)$$

Daher ist

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3, \quad u_5 = u_4 + u_3 = 5, \quad u_6 = u_5 + u_4 = 8, \quad u_7 = u_6 + u_5 = 13, \quad \dots$$

Somit erhalten wir die Folge

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_6 = 8, \quad u_7 = 13, \dots \quad (7)$$

⁴Dafür ist charakteristisch, dass auf der rechten Seite nur Glieder der Folge mit konstanten Koeffizienten stehen.

⁵Fibonacci oder Leonardo von Pisa, ein italienischer Mathematiker des Mittelalters (um 1200), hinterließ das Buch "Der Abakus" (Liber abaci); es enthält eine umfassende Übersicht über die Algebra und Arithmetik, wie sie bei den Völkern Mittelasiens und der Levante bekannt und im Gebrauch war; der Stoff wurde von Leonardo überarbeitet und ergänzt.

in der jedes Glied gleich der Summe der beiden vorangehenden Glieder ist.

Diese Folge wird Fibonacci'sche Folge genannt, und ihre Glieder heißen Fibonacci'sche Zahlen⁶. Die Gleichung (6) zeigt, dass die Fibonacci'sche Folge eine rekursive Folge zweiter Ordnung ist.

Beispiel 4. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen,

$$u_1 = 1^2, \quad u_2 = 2^2, \quad u_3 = 3^2, \dots, u_n = n^2, \dots \quad (8)$$

Hier ist

$$u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \text{und daher} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad (9)$$

Vergrößert man n um 1, so erhält man

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3 \quad (10)$$

und demzufolge (wenn man (9) von (10) subtrahiert)

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2 \quad \text{oder} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \quad (11)$$

Vergrößert man in der Gleichung (11) n um 1, so ergibt sich

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2 \quad (12)$$

und hieraus (wenn man (11) von (12) subtrahiert)

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \quad \text{oder} \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \quad (13)$$

Wir erhalten eine Rekursionsgleichung dritter Ordnung. Also ist die Folge (8) eine rekursive Folge dritter Ordnung. Ähnlich kann man sich davon überzeugen, dass die Folge der Kuben der natürlichen Zahlen

$$1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots \quad (14)$$

eine rekursive Folge vierter Ordnung ist. Ihre Glieder genügen der Gleichung

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n \quad (15)$$

deren Beweis wir dem Leser überlassen.

Beispiel 5. Zu den rekursiven Folgen gehören auch alle periodischen Folgen. Wir wollen als Beispiel die Ziffernfolge bei der Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahl

$$\frac{761}{1332} = 0,57132132132\dots$$

betrachten. Hier ist

$$u_1 = 5, \quad u_2 = 7, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 2, \quad u_6 = 1, \quad u_7 = 3, \quad \dots \quad (16)$$

⁶Vgl. Heft I dieser Reihe, N.N. Worobjow, Die Fibonacci'schen Zahlen

Offenbar ist

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geq 3) \quad (17)$$

Um diese Gleichung in der Form (2) darzustellen, schreiben wir sie folgendermaßen:

$$u_{n+3} = 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n$$

Daraus ersieht man, dass dies eine rekursive Folge dritter Ordnung ist ($k = 3$, $a_1 = 0$; $a_2 = 0$, $a_3 = 1$). Somit ist die Folge (16) eine rekursive Folge dritter Ordnung.

Beispiel 6. Wir betrachten jetzt die Folge der Koeffizienten des Quotienten zweier Polynome, die nach wachsenden Potenzen von x geordnet sind. Es sei

$$P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_lx^l \quad \text{und} \quad Q(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_kx^k \quad (B_0 \neq 0)$$

Wir "dividieren" ⁷ $P(x)$ durch $Q(x)$; wenn $P(x)$ nicht ohne Rest durch $Q(x)$ teilbar ist, so kann man die Division unbegrenzt weiter fortsetzen. Im Quotienten erhalten wir nach und nach die Glieder

$$D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \dots + D_nx^n + \dots$$

Wir betrachten die Folge

$$u_1 = D_0, \quad u_2 = D_1, \quad \dots, \quad u_n = D_{n-1} \quad (18)$$

und zeigen, dass sie eine rekursive Folge k -ter Ordnung ist (dabei sei daran erinnert, dass k der Grad des Divisors ist).

Dazu nehmen wir eine beliebige natürliche Zahl n an, die nur der Bedingung $n \geq l - k + 1$ genügt, und brechen die Division bei dem Gliede des Quotienten ab, das x^{n+k} enthält.

Dann erhalten wir im Rest ein Polynom $R(x)$, das x in höherer als $(n+k)$ -ter Potenz enthält. Wenn wir die Beziehung von Dividend, Divisor, Quotient und Rest zueinander betrachten, erhalten wir die Identität

$$A_0 + \dots + A_lx^l = (B_0 + \dots + B_kx^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k}x^{n+k}) + R(x)$$

Wir suchen die Koeffizienten von x^{n+k} auf der rechten und der linken Seite dieser Gleichung und setzen sie gleich. Wegen $n+k \leq l+1$ wird der Koeffizient von x^{n+k} auf der linken Seite gleich Null.

Daher muss auch auf der rechten Seite der Koeffizient von x^{n+k} gleich Null sein. Die Glieder mit x^{n+k} kommen aber nur im Produkt $(B_0 + \dots + B_kx^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k}x^{n+k})$ vor (der Rest $R(x)$ enthält, wie wir zeigten, x in höherer Potenz). Daher ist der gesuchte Koeffizient gleich

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \dots + D_nB_k \quad (19)$$

⁷Es handelt sich hier um ein von der sonst gebräuchlichen Division von Polynomen abweichendes Verfahren. Es erfolgt analog der mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten durchgeführten Division von Potenzreihen.

wie oben gezeigt, muss er gleich Null sein:

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \dots + D_nB_k = 0$$

Dann ist (wegen $B_0 \neq 0$)

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n \geq l - k + 1) \quad (20)$$

Das ist eine Rekursionsformel k -ter Ordnung, und daraus folgt gerade, dass die Folge (18) eine rekursive Folge k -ter Ordnung ist.

3. Von allen betrachteten Beispielen hat das Beispiel 6 den allgemeinsten Charakter. Wir zeigen nun, dass eine beliebige rekursive Folge k -ter Ordnung

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (21)$$

die einer Gleichung der Gestalt

$$u_{k+1} = a_1u_{n+k-1} + \dots + a_ku_n \quad (n \geq m \geq 1) \quad (22)$$

genügt, identisch ist mit der Folge der Koeffizienten des Quotienten, der bei der Division eines bestimmten Polynoms $P(x)$ durch das Polynom

$$Q(x) = 1 - a_1x - \dots - a_kx^k \quad (23)$$

entsteht.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die der Bedingung $n > k + m - 2$ genügt. Wir multiplizieren das Polynom $Q(x)$ mit $u_1 + u_2x + u_3x^2 + \dots + u_{n+1}x^n$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & (1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k)(u_1 + u_2x + \dots + u_{k+m-1}x^{k+m-2} + \dots + u_{n+1}x^n) \\ &= [u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \dots + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2} - \dots - a_ku_{m-1})x^{k+m-2}] \\ &+ [(u_{k+m} - a_1u_{k+m-1} - \dots - a_ku_mx^{k+m-1} + \dots + (u_{n+1} - a_1u_n - \dots - a_ku_{n-k+1})x^n] \\ &- [(a_1u_{n+1} + \dots + a_ku_{n-k+2})x^{n+1} + \dots + a_ku_{n+1}x^{n+k}] \end{aligned} \quad (24)$$

Hier steht in der ersten eckigen Klammer ein Polynom höchstens vom Grade $l = k + m - 2$, dessen Koeffizienten nicht von unserem gewählten n abhängen. Wir bezeichnen es mit $P(x)$:

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \dots + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2} - \dots - a_ku_{m-1})x^{k+m-2} \quad (25)$$

In der nächsten eckigen Klammer steht ein Polynom, dessen Koeffizienten infolge Gleichung (22) alle gleich Null sind. Schließlich ergibt sich in der letzten eckigen Klammer ein Polynom, dessen Koeffizienten von n abhängen; es enthält keine Glieder von niedrigerer als $(n + 1)$ -ter Potenz.

Bezeichnet man es mit $R_n(x)$, so ergibt sich die Identität (24) in der Form

$$P(x) = (1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k)(u_1 + u_2x + \dots + u_{n+1}x^n) + R_n(x) \quad (26)$$

Daraus ersieht man, dass $u_1 + u_2x + \dots + u_{n+1}x^n$ der Quotient und $R_n(x)$ der Rest aus der Division von $P(x)$ durch

$$Q(x) = 1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k$$

ist, d.h., $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$ ist tatsächlich die Folge der Koeffizienten des Quotienten, den man bei der Division von (25) durch (23) erhält.

Als Beispiel betrachten wir die Fibonaccische Folge

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad \dots$$

Da ihre Glieder der Gleichung

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 1)$$

genügen, ist in diesem Fall $m = 1$, $k = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $Q(x) = 1 - x - x^2$. Das Polynom $P(x)$ muss einen Grad haben, der nicht höher ist als $k + m - 2 = 1$. Nach (25) erhalten wir

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1$$

Also fallen die Fibonaccischen Zahlen mit der Folge der Koeffizienten des Quotienten aus der Division von 1 durch $1 - x - x^2$ zusammen.

4. Eines der Probleme, das man im Oberschulunterricht in Bezug auf arithmetische und geometrische Folgen und auch in Bezug auf die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen lösen muss, besteht darin, die Summe von n Gliedern jeder dieser Folgen zu ermitteln. Es sei allgemein

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \tag{27}$$

eine rekursive Folge k -ter Ordnung, deren Glieder der Gleichung

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \dots + a_ku_n \quad (n \geq m) \tag{28}$$

genügen.

Wir betrachten die neue Folge, die aus den Summen s_n der Zahlen (27) besteht:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots \tag{29}$$

Wir zeigen nun, dass diese Folge ebenfalls eine rekursive Folge ist, und zwar eine rekursive Folge $(k + 1)$ -ter Ordnung, deren Glieder der Gleichung

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_k s_n \tag{30}$$

genügen.

Zum Beweis bemerken wir, dass offenbar folgendes gilt:

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \quad \dots, \quad u_n = s_n - (u_1 + \dots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}, \dots \tag{31}$$

Setzt man $s_0 = 0$, so dass $u_1 = s_1 - s_0$ ist, und ersetzt man in der Gleichung (28) $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ durch ihre Ausdrücke in $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$, so erhält man

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + a_2(s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \dots + a_k(s_n - s_{n-1})$$

und hieraus

$$s_{n+k} = (1 + a_1)s_{n+k-1} + (a_2 - a_1)s_{n+k-2} + \dots + (a_k - a_{k-1})s_n - a_k s_{n-1} \quad (n \geq m)$$

oder, wenn man hier n durch $n + 1$ ersetzt,

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_k s_n \quad (n \geq m - 1)$$

Das ist eine Rekursionsformel $(k + 1)$ -ter Ordnung.

Betrachten wir einige Beispiele:

a) Die geometrische Folge.

Hier ist $u_n a q^{n-1}$ und $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$. Weil die Glieder $\{u_n\}$ einer Gleichung der Form $u_{n+1} = qu_n$ genügen, müssen die Glieder $\{s_n\}$ die Gleichung

$$s_{n+2} = (1 + q)s_{n+1} - qs_n \quad (32)$$

befriedigen.

b) Die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen. Hier ist $u_n = n^2$ und $s_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$. Da die Glieder $\{u_n\}$ der Gleichung

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

genügen, befriedigen die $\{an\}$ die Gleichung

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} + 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

c) Die Fibonaccischen Zahlen. Da sie der Gleichung

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

genügen, müssen ihre Summen s_n die Gleichung

$$s_{n+3} = 2s_{n+2} - s_n$$

befriedigen.

5. Bei den einfachsten rekursiven Folgen, z. B. bei einer arithmetischen oder geometrischen Folge, der Folge der Quadrate oder der Kuben der natürlichen Zahlen sowie den periodischen Folgen, können wir jedes Glied der Folge finden, ohne die vorhergehenden berechnen zu müssen.

Bei der Folge der Fibonaccischen Zahlen oder allgemein der Folge der Koeffizienten des Quotienten zweier Polynome sehen wir auf den ersten Blick diese Möglichkeit nicht.

Um etwa die dreizehnte Fibonaccische Zahl u_{13} zu berechnen, bestimmen wir vorher

nach und nach alle vorangehenden Glieder (wir benutzen dazu die Gleichung $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$):

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, u_9 = 34, \\ u_{10} = 55, u_{11} = 89, u_{12} = 144, u_{13} = 233$$

Wir wollen jetzt zu einer eingehenden Untersuchung der Struktur der Glieder einer rekursiven Folge übergehen. Im Ergebnis erhalten wir Formeln, die auch im allgemeinen Fall jedes Glied einer rekursiven Folge zu berechnen gestatten, ohne dass man die vorhergehenden Glieder zu bestimmen braucht.

Solche Formeln kann man als weitgehende Verallgemeinerungen der Formeln für das allgemeine Glied einer arithmetischen oder geometrischen Folge ansehen. Es sei

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (33)$$

eine Rekursionsformel k -ter Ordnung. Wenn sie für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ erfüllt ist, so erhalten wir, wenn wir $n = 1$ setzen,

$$u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1} + \dots + a_k u_1$$

Wenn also u_1, u_2, \dots, u_k bekannt sind, kann man u_{k+1} berechnen. Nun wollen wir in der Gleichung (33) $n = 2$ setzen. Wir finden dann

$$u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k + \dots + a_k u_2$$

Folglich ist uns jetzt auch die Größe u_{k+2} bekannt. Allgemein: Ist m eine beliebige natürliche Zahl und haben wir die Glieder

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{m+k-1}$$

der Folge schon berechnet, so finden wir, wenn wir in der Gleichung (33) $n = m$ setzen, daraus das folgende Glied u_{m+k} .

Daher lassen sich die Glieder einer rekursiven Folge k -ter Ordnung, die der Gleichung (33) genügen, mit Hilfe dieser Gleichung eindeutig bestimmen, wenn die ersten k Glieder der Folge, u_1, u_2, \dots, u_k bekannt sind.

Denken wir sie auf alle möglichen Weisen gewählt (diese Auswahl unterliegt keinerlei Beschränkungen), so können wir eine unendliche Menge verschiedenartiger Folgen erhalten, die der Gleichung (33) genügen. Sie unterscheiden sich schon in den ersten k Gliedern (wenigstens in einem davon) und ebenso in den späteren Gliedern. So genügen z.B. der Gleichung erster Ordnung

$$u_{n+1} = q u_n$$

alle möglichen geometrischen Folgen mit dem Quotienten q (sie unterscheiden sich voneinander durch das Anfangsglied u_1). Der Rekursionsgleichung zweiter Ordnung

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

(oder $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$) genügen alle möglichen arithmetischen Folgen, die sich wenigstens in einem der Glieder $u_1 = a$ und $u_2 = a + d$ voneinander unterscheiden; sie unterscheiden sich also entweder durch das Anfangsglied (a) oder durch die Differenz (d) oder in beidem gleichzeitig.

Wir betrachten noch eine Gleichung zweiter Ordnung:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Ihr genügen außer der Fibonaccischen Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ die dadurch charakterisiert ist, dass hier $u_1 = u_2 = 1$ ist, unendlich viele andere Folgen, die man bei verschiedener Wahl der Werte u_1 und u_2 erhält.

So erhalten wir z.B. für $u_1 = -3$ und $u_2 = 1$ die Folge

$$-3, 1, -2, -1, -3, -4, -7, -11, -18, -29, \dots$$

Ist irgendeine Menge von Folgen vorgelegt, die sämtlich ein und derselben Gleichung (33) genügen,

$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \\ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \\ \dots \\ z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \end{array} \right\} \quad (34)$$

so sind die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n \\ y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \dots + a_k y_n \\ \dots \\ z_{n+k} = a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \dots + a_k z_n \end{array} \right\} \quad (35)$$

erfüllt. Wir wählen nun ebenso viele beliebige Zahlen A, B, \dots, C , wie in (34) Folgen vorkommen, multiplizieren die erste Gleichung von (35) mit A , die zweite mit B , ..., die letzte mit C und addieren. Dann erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} Ax_{n+k} + By_{n+k} + \dots Cz_{n+k} &= a_1(Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + \dots + Cz_{n+k-1}) \\ &+ a_2(Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + \dots + Cz_{n+k-2}) + \dots \\ &+ a_k(Ax_n + By_n + \dots + Cz_n) \end{aligned} \quad (36)$$

Daraus ergibt sich: Die Folge

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = Ax_1 + By_1 + \dots + Cz_1, \\ t_2 = Ax_2 + By_2 + \dots + Cz_2, \\ \dots \\ t_n = Ax_n + By_n + \dots + Cz_n, \\ \dots \end{array} \right\} \quad (37)$$

die man aus den Folgen (34) dadurch erhält, dass man alle Glieder der ersten mit A , der zweiten mit B , ..., der letzten mit C multipliziert und dann die Folgen gliedweise

addiert (die ersten Glieder zu den ersten, die zweiten zu den zweiten usw.), genügt der gegebenen Gleichung (33).

Da wir die Zahlen A, B, \dots, C willkürlich gewählt haben, können wir bei Änderung dieser Zahlen im allgemeinen verschiedene Werte t_1, t_2, t_3, \dots erhalten.

Es sei jetzt

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (38)$$

eine beliebige Folge, die der Gleichung (33) genügt. Es erhebt sich die Frage, ob man die Zahlen A, B, \dots, C so wählen kann, dass die ersten k Glieder der Folge (37) mit den ersten 10 Gliedern der Folge (38) übereinstimmen. Wenn das gelingt, so stimmen nach dem Gesagten auch alle Glieder der Folgen (37) und (38) überein, d.h., es gilt für jedes natürliche n

$$u_n = Ax_n + By_n + \dots + Cz_n \quad (39)$$

So ergibt sich für uns die Möglichkeit (vorläufig hypothetisch), jede Folge der unendlichen Menge von Folgen, die ein und derselben Rekursionsformel k -ter Ordnung genügen, durch einige davon, nämlich (34), nach Formel (39) darzustellen. Ob dies realisierbar ist, hängt davon ab, ob es möglich ist, die Zahlen A, B, \dots, C so zu wählen, dass sie den Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + \dots + Cz_1 = u_1 \\ Ax_2 + By_2 + \dots + Cz_2 = u_2 \\ \dots \\ Ax_n + By_n + \dots + Cz_n = u_n \end{array} \right\} \quad (40)$$

mit beliebig gegebenen rechten Seiten u_1, u_2, \dots, u_k genügen.

Da hier die Zahlen A, B, \dots, C unbekannt sind und die Anzahl der Gleichungen gleich der Ordnung k der Rekursionsgleichung ist, folgt hieraus, dass man auch die Anzahl der Unbekannten A, B, \dots, C (und diese stimmt mit der Anzahl der Folgen (34) überein) zweckmäßigerweise gleich 10 wählt.

Wir wissen, dass die Existenz von Lösungen eines Systems von k linearen algebraischen Gleichungen (40) mit k Unbekannten A, B, \dots, C davon abhängt, wie die Koeffizienten $x_1, y_1, \dots, z_1, \dots, x_k, y_k, \dots, z_k$ dieses Systems beschaffen sind, d.h. davon, wie die Anfangsglieder der Folge (34) lauten. Eine Lösung existiert bei beliebig vorgegebenen rechten Seiten u_1, \dots, u_k sicher, wenn wir z.B.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad \dots, \quad z_1 = 0 \\ x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad \dots, \quad z_2 = 0 \\ \dots \\ x_k = 0, \quad y_k = 0, \quad \dots, \quad z_k = 1 \end{array} \right\} \quad (41)$$

setzen. In der Tat hat in diesem Fall das System (40) die einfachste Form, die sofort die Lösung des Systems gibt:

$$\left. \begin{array}{l} A = u_1, \\ B = u_2, \\ \dots \\ C = u_k \end{array} \right\}$$

Schließlich kann man auch eine andere Auswahl der Zahlen

$$x_1, \dots, z_1, \dots, x_k, \dots, z_k$$

treffen, bei der das System (40) eine Lösung hat, wie die rechten Seiten der Gleichung auch aussehen. Nehmen wir z.B.

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad \dots, \quad z_1 = 1 \\ x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad \dots, \quad z_2 = 1 \\ x_k = 0, \quad y_k = 0, \quad \dots, \quad z_k = 1 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Dann hat das System die Form

$$\left. \begin{aligned} A + B + \dots + C = u_1, \\ B + \dots + C = u_2, \\ \dots \\ C = u_k \end{aligned} \right\}$$

und wir erhalten nacheinander

$$C = u_k, \quad \dots, \quad B = u_2 - u_3, \quad A = u_1 - u_2$$

Wir gehen zum allgemeinen Fall über und formulieren folgenden Satz:

Damit ein System von k linearen algebraischen Gleichungen (40) mit k Unbekannten bei beliebigen Werten u_1, u_2, \dots, u_k der rechten Seite genau eine Lösung A, B, \dots, C hat, ist notwendig und hinreichend, dass das zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 + By_1 + \dots + Cz_1 = 0 \\ Ax_2 + By_2 + \dots + Cz_2 = 0 \\ \dots \\ Ax_k + By_k + \dots + Cz_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (40')$$

nur die Null-Lösung hat⁸:

$$A = B = \dots = C = 0$$

⁸Dieser Satz ist deshalb so zweckmäßig, weil man zu seiner Anwendung nichts von Determinanten zu wissen braucht. Der kundige Leser sei daran erinnert, dass eine Lösung des Systems (40) bei beliebigen rechten Seiten dieser Gleichungen dann und nur dann existiert, wenn die Determinante des Systems,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Diese Bedingung ist auch notwendig und hinreichend dafür, dass die Lösung des Systems (40) bei beliebig vorgegebenen rechten Seiten (z.B. gleich Null) eindeutig ist.

So fällt für ein System von k linearen Gleichungen mit k Unbekannten die Bedingung für die Existenz einer Lösung bei beliebiger rechter Seite mit der Bedingung für die Eindeutigkeit zusammen, wenn auf der rechten Seite Nullen stehen. Dieser Sachverhalt kommt gerade in der Formulierung des Textes zum Ausdruck.

Der Leser prüft leicht nach, dass die Voraussetzung dieses Satzes für die Spezialfälle (41) und (42) erfüllt ist. Im folgenden werden wir auf Fälle stoßen, in denen sich dieser Satz als nützlich erweisen wird. Vorläufig werden wir uns einfach auf die Tatsache stützen (die unabhängig von obigem Satz aufgestellt wurde), dass immer Zahlen $x_1, \dots, z_1, \dots, x_k, \dots, z_k$ (die Anfangsglieder der Folge (34)) existieren mit der Eigenschaft, dass das Gleichungssystem (40) bei beliebigen u_1, u_2, \dots, u_k eine Lösung hat.

Wenn Zahlen dieser Art als Anfangsglieder der Folge (34) gewählt werden, so lässt sich nach dem Vorhergegangenen jede Folge, die der Rekursionsgleichung (33) genügt, gemäß Formel (39) ausdrücken, wobei sich die Zahlen A, B, \dots, C aus der Gleichung (40) bestimmen lassen.

Ein System von k Folgen (34), durch welche sich die Glieder jeder Folge, die der gegebenen Gleichung (33) genügt, durch die Formel (39) ausdrücken lassen (d.h. durch Multiplikation mit gewissen Zahlen A, B, \dots, C und Addition), heißt Basis⁹ der Rekursionsgleichung.

Aus diesen Ausführungen folgt, dass jede Gleichung eine Basis hat, die auf verschiedene Art gewählt werden kann. Beispielsweise bilden Systeme mit den Anfangsgliedern

$$\left. \begin{array}{l} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 1 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{(k)} \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} 1, 1, \dots, 1 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 1 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{(k)} \end{array} \right\}$$

eine Basis einer beliebigen Rekursionsgleichung k -ter Ordnung. Wir fassen das in Abschnitt 5 Gesagte zusammen:

Für jede Rekursionsgleichung k -ter Ordnung gibt es unendlich viele verschiedene Folgen, die sie erfüllen. Jede dieser Folgen kann aus k Folgen, die dieser Gleichung genügen und ihre Basis darstellen, durch Multiplikation jeder der k Folgen mit gewissen Zahlen A, B, \dots, C und gliedweise Addition konstruiert werden.

Somit genügt es zur vollständigen Lösung einer Rekursionsgleichung k -ter Ordnung, endlich viele, nämlich k ihr genügende Folgen zu finden, welche eine Basis dieser Gleichung bilden.

Wir erläutern das Gesagte an Beispielen.

Beispiel 1. Gegeben sei eine Rekursionsgleichung zweiter Ordnung:

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Ihre Basis muss aus zwei Folgen bestehen:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

Wir wählen sie folgendermaßen:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \quad \text{und} \quad y_1 = 0, y_2 = 1$$

⁹In der deutschen Literatur ist auch der Ausdruck "System von Fundamentalfolgen" gebräuchlich.

Da die Rekursionsgleichung - in der Form

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

geschrieben - zeigt, dass die Differenz benachbarter Glieder der Folge konstant ist, d.h. dass eine Folge, die der gegebenen Gleichung genügt, eine arithmetische Folge sein muss, erhalten wir für die Folge $\{x_n\}$ mit den Anfangsgliedern $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ eine arithmetische Folge mit der Differenz Null, d.h.

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots \quad (x_n = 1)$$

und für die Folge $\{y_n\}$ mit den Anfangswerten $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ eine arithmetische Folge mit der Differenz 1, d.h.

$$0, 1, 2, \dots, n - 1, \dots \quad (y_n = n - 1)$$

Nach Formel (39) kann ein Glied jeder rekursiven Folge, die der gegebenen Gleichung genügt, in der Form

$$u_n = Ax_n + By_n = A + B(n - 1)$$

dargestellt werden, wobei A und B aus den Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = A + B(1 - 1) \\ u_2 = A + B(2 - 1) \end{array} \right\} \quad \text{d.h.} \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = A \\ u_2 = A + B \end{array} \right\}$$

bestimmt werden können. Das ergibt

$$A = u_1 \quad , \quad B = u_2 - u_1$$

Hieraus folgt

$$u_n = u_1 + (n - 1)(u_2 - u_1)$$

Das ist gerade die allgemeine Formel für das Glied jeder Folge, die der Gleichung

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

genügt. Unter der Annahme $u_1 = a$, $u_2 - u_1 = d$ stellen wir sie in der Form

$$u_n = a + (n - 1)d$$

dar. Das ist die bekannte Formel für das allgemeine Glied einer arithmetischen Folge.

Beispiel 2. Wir betrachten eine andere Rekursionsgleichung zweiter Ordnung,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Setzen wir $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, so erhalten wir die schon erwähnte Fibonacci'sche Folge:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Als zweite Folge für die Basis nehmen wir eine Folge $\{y_n\}$, für die $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ ist. Wir haben dann

$$y_3 = y_2 + y_1 = 1, \quad y_4 = y_3 + y_2 = 2, \quad y_5 = y_4 + y_3 = 3, \dots$$

Hier ist $y_2 = x_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_3$, $y_5 = x_4$, ... und allgemein $y_n = x_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$). In der Tat, wenn wir diese Gleichungen für alle Werte $n \leq m + 1$ schon aufgestellt haben, so dass insbesondere $y_{m+1} = x_m$, $y_m = x_{m-1}$ ist, so erhalten wir für y_{m+2}

$$y_{m+2} = y_{m+1} + y_m = x_m + x_{m-1} = x_{m+1}$$

d.h., die zu beweisende Gleichung gilt auch für $n = m + 2$. Also ist

$$y_n = x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Daher finden wir nach dem Vorhergegangenen (Formel (39)) für jede Folge, die der Gleichung

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

genügt, die Beziehung

$$u_n = Ax_n + By_n$$

wobei A und B aus den Gleichungen

$$u_1 = Ax_1 + By_1 = A \quad , \quad u_2 = Ax_2 + By_2 = A + B$$

zu bestimmen sind. Dann ist

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1 \quad \text{und} \quad u_n = u_1x_n + (u_2 - u_1)y_n$$

Für $n \geq 2$ kann man y_n durch x_{n-1} ersetzen. Dann ist

$$u_n = u_1x_n + (u_2 - u_1)x_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

oder

$$u_n = u_1(x_n - x_{n-1}) + u_2x_{n-1}$$

für $n \geq 3$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{d.h.} \quad x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$$

und folglich

$$u_n = u_1x_{n-2} + u_2x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

Somit lassen sich die Glieder jeder Folge $\{u_n\}$, die der Gleichung

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

genügt, durch die Fibonacci'schen Zahlen mit Hilfe unserer eben gefundenen Formel ausdrücken. Insbesondere ist, wenn $u_1 = -3$, $u_2 = 1$ ist,

$$u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

6. Wir zeigen jetzt, dass man unter gewissen sehr allgemeinen Bedingungen eine Basis der Rekursionsgleichung (33),

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

finden kann, die aus k geometrischen Folgen mit verschiedenen Quotienten besteht. Zu diesem Zweck stellen wir fest, unter welchen Bedingungen eine geometrische Folge

$$x_1 = 1, \quad x_2 = q, \quad \dots, \quad x_n = q^{n-1}, \quad \dots \quad (q \neq 0)$$

der Gleichung (33) genügt. Beachten wir

$$x_{n+k} = q^{n+k-1}, \quad x_{n+k-1} = q^{n+k-2}, \quad \dots, \quad x_n = q^{n-1}$$

und setzen wir diese Größen in die Gleichung (33) ein (statt $u_{n+k}, u_{n+k-1}, \dots, u_n$), so erhalten wir

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \dots + a_n q^{n-1}$$

und daraus

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_k \tag{43}$$

Daher kann eine geometrische Folge nur dann einer Rekursionsgleichung k -ter Ordnung (33) genügen, wenn der Quotient q der Folge einer algebraischen Gleichung k -ten Grades (43) mit denselben Koeffizienten genügt, wie sie in Gleichung (33) auftreten.

Die Gleichung (43) heißt charakteristische Gleichung der Rekursionsgleichung (33). Ist $q = \alpha$ irgendeine beliebige (reelle oder komplexe) Wurzel der charakteristischen Gleichung, so erhalten wir, wenn wir

$$x_n = \alpha^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{44}$$

setzen, eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $x_1 = 1$ und dem Quotienten α , die der Gleichung (33) genügt. In der Tat, nach Voraussetzung ist α Wurzel der Gleichung (43), d.h.

$$\alpha^k = a_1 \alpha^{k-1} + a_2 \alpha^{k-2} + \dots + a_k$$

Multipliziert man beide Seiten mit α^{n-1} , wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, so erhält man

$$\alpha^{n+k-1} = a_1 \alpha^{n+k-2} + a_2 \alpha^{n+k-3} + \dots + a_k \alpha^{n-1}$$

d.h., die Folge (44) genügt der Gleichung (33). Daher entspricht jeder Wurzel $q = \alpha$ der charakteristischen Gleichung (43) eine geometrische Folge (44) mit dem Quotienten α , die der Rekursionsgleichung (33) genügt.

Um eine Basis ausschließlich mit Hilfe geometrischer Folgen mit verschiedenen Quotienten zu konstruieren, muss man diese in genügend großer Anzahl, nämlich k , zur Verfügung haben, und dazu braucht man k verschiedene Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

Nehmen wir an, dass alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind:

$$q_1 = \alpha, q_2 = \beta, \dots, q_k = \gamma$$

Dann erhalten wir k geometrische Folgen, die der Gleichung (33) genügen:

$$\left. \begin{array}{l} 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots \\ 1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}, \dots \\ \dots \\ 1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, \dots \end{array} \right\}$$

Wir zeigen, dass das System der Folgen (45) eine Basis der Gleichung (33) bildet, d.h., dass man für jede Folge $\{u_n\}$, die der Gleichung (33) genügt, Zahlen A, B, \dots, C finden kann derart, dass für jedes n

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \dots + C\gamma^{n-1} \quad (46)$$

gilt. Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} A + B + \dots + C = u_1 \\ A\alpha + B\beta + \dots + C\gamma = u_2 \\ \dots \\ A + \alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \dots + C\gamma^{k-1} = u_k \end{array} \right\} \quad (47)$$

das wir für $n = 1, 2, \dots, k$ aus (45) erhalten, bei beliebigen rechten Seiten dieser Gleichungen nach den Unbekannten A, B, \dots, C auflösbar ist; und dazu wiederum ist hinreichend, dass das zugehörige homogene System

$$\left. \begin{array}{l} A + B + \dots + C = 0 \\ A\alpha + B\beta + \dots + C\gamma = 0 \\ \dots \\ A + \alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \dots + C\gamma^{k-1} = 0 \end{array} \right\} \quad (48)$$

nur die Null-Lösung hat. Das ist aber auch tatsächlich der Fall.

Das folgt so: Nehmen wir einmal an, dass eine von der Null-Lösung verschiedene Lösung von (48) existiert, d.h. dass es Zahlen A, B, \dots, C gibt, von denen mindestens eine, etwa A , von Null verschieden ist, die dem System (48) genügen. Um hieraus einen Widerspruch abzuleiten, bilden wir zuerst ein Polynom $M(x)$ vom Grade $k - 1$, das für $x = \beta, \dots, x = \gamma$ gleich Null und für $x = \alpha$ gleich 1 wird. Da dieses Polynom $(k - 1)$ -ten Grades für $k - 1$ verschiedene Werte von x , nämlich β, \dots, γ verschwindet, muss es die Gestalt

$$M(x) = \mu(x - \beta)\dots(x - \gamma)$$

haben, wobei μ irgendeine konstante Zahl ist. Setzen wir $x = \alpha$, so müssen wir $M(\alpha) = 1$ erhalten. Daher muss

$$1 = \mu(\alpha - \beta)\dots(\alpha - \gamma) \quad \text{und} \quad \mu = \frac{1}{(\alpha - \beta)\dots(\alpha - \gamma)}$$

sein. Somit ist

$$M(x) = \frac{(x - \beta)\dots(x - \gamma)}{\alpha - \beta)\dots(\alpha - \gamma)}$$

Offenbar genügt dieses Polynom wirklich den gestellten Bedingungen. Multiplizieren wir aus und fassen zusammen, so erhalten wir es in der Form

$$M(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_{k-1}x^{k-1}$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen (48) mit m_0, m_1, \dots, m_{k-1} multiplizieren und addieren, so erhalten wir

$$A(m_0 + m_1\alpha + \dots + m_{k-1}\alpha^{k-1}) + B(m_0 + m_1\beta + \dots + m_{k-1}\beta^{k-1}) + \dots \\ + C(m_0 + m_1\gamma + \dots + m_{k-1}\gamma^{k-1}) = 0$$

oder

$$AM(\alpha) + BM(\beta) + \dots + CM(\gamma) = 0$$

Nun ist aber $M(\alpha) = 1, M(\beta) = \dots = M(\gamma) = 0$ und folglich $A = 0$, was der Annahme widerspricht.

Somit besitzt das System (48) nur die Null-Lösung, und daher hat das System (47) eine (eindeutige) Lösung für beliebige u_1, u_2, \dots, u_k . Und das wiederum bedeutet, dass das System (45) eine Basis für die Gleichung (33) ist. Wir fanden also, dass für jede Rekursionsgleichung

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \dots + a_ku_n$$

deren zugehörige charakteristische Gleichung

$$q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \dots + a_k$$

verschiedene Wurzeln $q = \alpha, q = \beta, \dots, q = \gamma$ hat, eine Basis existiert, die von k geometrischen Folgen mit den Quotienten $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ gebildet wird.

Mit anderen Worten, für die Glieder jeder Folge $\{u_n\}$, die der Gleichung (33) genügt, existieren k Zahlen A, B, \dots, C , die sich aus der Gleichung (47) ergeben, mit der Eigenschaft, dass

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \dots + C\gamma^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gilt.

Fassen wir das in Abschnitt 6 Gesagte zusammen:

Einer Rekursionsgleichung k -ter Ordnung entspricht eine algebraische Gleichung k -ten Grades mit denselben Koeffizienten; das ist ihre charakteristische Gleichung. Jede Wurzel der charakteristischen Gleichung ist Quotient einer geometrischen Folge, die der gegebenen Rekursionsgleichung genügt. Wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind, erhält man k verschiedene geometrische Folgen, die eine Basis der Rekursionsgleichung bilden.

Folglich kann man in diesem Fall die Glieder jeder Folge, die der Rekursionsgleichung genügt, durch gliedweise Addition von gewissen (und zwar von k) geometrischen Folgen erhalten.

7. Wir gehen jetzt zu Anwendungen unserer Resultate über. Beginnen wir mit der Fibonacciischen Folge. Hier lautet die Rekursionsformel:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

und folglich hat die charakteristische Gleichung (43) die Gestalt

$$q^2 = q + 1$$

Sie hat die zwei verschiedenen reellen Wurzeln

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Daher kann man das allgemeine Glied der Fibonacciischen Folge in folgender Gestalt schreiben:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

Um die unbekanntenen Koeffizienten A und B zu finden, setzen wir $n = 1$ und $n = 2$. Dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} u_1 = 1 &= A + B \\ u_2 = 1 &= A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A - B) \end{aligned} \right\}$$

Lösen wir dieses System, so finden wir

$$A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

oder

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (49)$$

Das ist gerade der allgemeine Ausdruck für die Fibonacciischen Zahlen. Auf den ersten Blick erscheint die gewonnene Formel kompliziert und wenig zur Berechnung geeignet. Jedoch kann man mit ihrer Hilfe eine Reihe interessanter Resultate erhalten.

Wir zeigen z.B., dass die Summe der Quadrate zweier benachbarter Fibonacciische Zahlen wieder eine Fibonacciische Zahl ist. In der Tat:

$$\begin{aligned} u_n^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 2(-1)^n \right] \\ u_{n+1}^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 + u_n^2 &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} \right] = u_{2n+1} \end{aligned}$$

Somit ist

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1} \quad (50)$$

Beispielsweise ist

$$u_{13} = u_7^2 + u_6^2 = 13^2 + 8^2 = 233$$

Das ist übrigens gerade die Lösung der Kaninchenaufgabe von Fibonacci. Wir überlassen es dem Leser, für die Fibonaccischen Zahlen eine allgemeinere Beziehung, nämlich

$$u_n u_m + u_{n+1} u_{m+1} = u_{n+m+1} \quad (51)$$

zu beweisen.

Als weitere Anwendung der Formel (49) beweisen wir den Satz:

Es seien a und b zwei natürliche Zahlen, wobei $a < b$. Dann ist die Anzahl der zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (kurz g.g.T.) von a und b notwendigen Divisionen beim Euklidischen Algorithmus höchstens fünfmal so groß wie die Anzahl der Ziffern der Zahl a im Dezimalsystem.

Wenden wir zur Bestimmung des g.g.T. der Zahlen b und a den Euklidischen Algorithmus an, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad b = ax' + y' \\ 2) \quad a = y'x'' + y'' \\ 3) \quad y' = y''x''' + y''' \\ \dots \\ k) \quad y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \\ k+1) \quad y^{(k-1)} = y^{(k)}x^{(k+1)} \end{array} \right\} \quad (52)$$

Hierbei genügen die aufeinanderfolgenden Reste den Ungleichungen

$$a > y' > y'' > y''' > \dots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geq 1$$

In der letzten der Gleichungen (52) wird der Rest gleich Null.

Folglich ist der letzte Rest $y^{(k)}$ gerade der g.g.T. der Zahlen a und b . Daher ist k die Anzahl der Operationen, die zur Berechnung des g.g.T. erforderlich sind. Unsere Aufgabe besteht also in einer Abschätzung der Zahl k .

Zu diesem Zweck vergleichen wir $y^{(k)}, y^{(k-1)}, \dots, y'$ mit den Fibonaccischen Zahlen u_1, u_2, u_3, \dots

Wir bemerken, dass $y^{(k)} \geq 1)u_2$, der vorhergehende Rest $y^{(k-1)}$ aber größer als $y^{(k)}$ und folglich $y^{(k-1)} \geq 2 = u_3$ ist. Daher erschließen wir aus der k -ten Gleichung die Beziehung

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geq y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geq u_3 + u_2 = u_4$$

Somit gilt

$$y^{(k)} \geq u_2, \quad y^{(k-1)} \geq u_3, \quad y^{(k-2)} \geq u_4$$

Wir nehmen nun an, wir hätten die Richtigkeit der Ungleichungen

$$y^{(k)} \geq u_2, \dots, y^{(m)} \geq u_{k-m+2}, \quad y^{(m-1)} \geq u_{k-m+3} \quad (m-1 \geq 2)$$

schon gezeigt. Dann erhalten wir aus der Gleichung

$$y^{(m-2)} = y^{(m-1)}x^{(m)} + y^{(m)}$$

die Beziehung

$$y^{(m-2)} \geq y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geq u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}$$

Daher kommen wir, wenn wir unsere Überlegungen fortsetzen, zu den Ungleichungen

$$y'' \geq u_k, \quad y' \geq u_{k+1}$$

und ferner von der Beziehung 2) zur

$$a = y'x'' + y'' \geq y' \cdot 1 + y'' \geq u_{k+1} + u_k = u_{k+2}$$

Nach Formel (49) hat aber u_{k+2} die Gestalt

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]$$

Daher ist

$$a \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right] > \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - 1 \right] \quad (53)$$

(da $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$ und folglich $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|^{k+2} < 1$ ist). Aus (53) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} &< a\sqrt{5} + 1 < \sqrt{5}(a+1) < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 (a+1) \\ \left(\sqrt{5} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \text{ da } \sqrt{5} < 3 \text{ ist.} \right) \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) < a + 1 \quad (54)$$

Wegen

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^5 \right] < \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 + 1 \right]$$

ist aber

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 > 5\sqrt{5} - 1 > 10$$

Folglich gilt die Beziehung

$$10^k < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a + 1)^5 \quad (55)$$

Hat die Zahl a im Dezimalsystem n Ziffern (mit anderen Worten, ist a eine n -stellige Zahl), so ist offenbar

$$10^{n-1} \leq a \leq 10^n$$

also $a + 1 \leq 10^n$. Folglich ist nach Ungleichung (55)

$$10^k < (a + 1)^5 \leq 10^{5n} \quad \text{oder} \quad k < 5n$$

Das ist gerade das gewünschte Resultat:

Die Anzahl k der aufeinanderfolgenden Divisionen im Euklidischen Algorithmus ist kleiner als das Fünffache der Stellenzahl der im Dezimalsystem geschriebenen kleineren der Zahlen b und a .

Aus diesem Beweis kann man ersehen, dass der ungünstigste Fall der Anwendung des Euklidischen Algorithmus (wenn also die Zahl der Operationen an die im Satz angegebene Schranke herankommt) dann auftritt, wenn b und a benachbarte Fibonacci Zahlen sind.

Wir wollen uns das an einem Beispiel klarmachen: Es sei $b = u_{20} = 6765$ und $a = u_{19} = 4181$. Hier ist a eine vierstellige Zahl, und folglich muss nach unserem Satz die Anzahl der Operationen im Euklidischen Algorithmus kleiner als $5 \cdot 4 = 20$ sein. Tatsächlich erhalten wir hier $k = 17$ Operationen:

1. $6765 = 4181 \cdot 1 + 2584$	2. $4181 = 2584 \cdot 1 + 1597$	3. $2584 = 1597 \cdot 1 + 987$
4. $1597 = 987 \cdot 1 + 610$	5. $987 = 610 \cdot 1 + 377$	6. $610 = 377 \cdot 1 + 233$
7. $377 = 233 \cdot 1 + 144$	8. $233 = 144 \cdot 1 + 89$	9. $144 = 89 \cdot 1 + 55$
10. $89 = 55 \cdot 1 + 34$	11. $55 = 34 \cdot 1 + 21$	12. $34 = 21 \cdot 1 + 13$
13. $21 = 13 \cdot 1 + 8$	14. $13 = 8 \cdot 1 + 5$	15. $8 = 5 \cdot 1 + 3$
16. $5 = 3 \cdot 1 + 2$	17. $3 = 2 \cdot 1 + 1$	18. $2 = 1 \cdot 2 + 0$

Als Reste ergeben sich nacheinander fallend geordnete Fibonacciische Zahlen. Alle Quotienten (außer dem letzten) sind gleich Eins; dadurch erklärt sich gerade die große Anzahl der Operationen.

Der größte gemeinsame Teiler ist gleich Eins [Gleichung (17)], was von vornherein für benachbarte Fibonacciische Zahlen zu erwarten war:

Aus $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ folgt nämlich, dass der g.g.T. der Zahlen u_{n+2} und u_{n+1} mit dem g.g.T. von $u_{n+1} + u_n$ übereinstimmt. Daher ist der g.g.T. für jedes Paar benachbarter Fibonacciisches Zahlen derselbe.

Um ihn zu finden, genügt es, das Paar $u_2 = u_1 = 1$ zu betrachten. Daraus folgt aber, dass er gleich Eins ist.

8. Als weiteres Beispiel betrachten wir die periodische Folge (16)

$$u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \dots$$

Hier lautet die Rekursionsgleichung

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geq 3)$$

Daher lautet die charakteristische Gleichung:

$$q^3 = 1$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daher muss man das allgemeine Glied der Folge (siehe Formel (46)) in der Form

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} = A + B \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + C \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

suchen. Wir können fordern, dass diese Formel für alle Werte von n , für die auch die Rekursionsgleichung gilt, erfüllt ist: $n = 3, 4, 5, \dots$

Wir erinnern an die Beziehungen

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right), \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

Nach dem Satz von Moivre ist also

$$\begin{aligned} u_n &= B \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + C \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \\ &= A + (-1)^{n-1} B \left[\cos \frac{\pi}{3}(n-1) - i \sin \frac{\pi}{3}(n-1) \right] + (-1)^{n-1} C \left[\cos \frac{\pi}{3}(n-1) + i \sin \frac{\pi}{3}(n-1) \right] \\ &= A + (B+C)(-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3}(n-1) + i(-B+C)(-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{3}(n-1) \end{aligned}$$

Wir setzen $B + C = A_1$ und $i(-B + C) = A_2$; dann lässt sich die Formel in folgender Gestalt schreiben:

$$u_n = A + A_1(-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3}(n-1) + A_2(-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{3}(n-1) \quad (n \geq 3)$$

Man muss nur noch die unbekanntenen Koeffizienten A , A_1 und A_2 bestimmen. Setzen wir $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, so erhalten wir drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$u_3 = 1 = A + A_1 \cos \frac{2\pi}{3} + A_2 \sin \frac{2\pi}{3} = A - \frac{1}{2}A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}A_2$$

$$u_4 = 3 = A - A_1 \cos \frac{3\pi}{3} - A_2 \sin \frac{3\pi}{3} = A + A_1$$

$$u_5 = 2 = A + A_1 \cos \frac{4\pi}{3} + A_2 \sin \frac{4\pi}{3} = A - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}A_2$$

Daraus ergibt sich

$$A = 2, \quad A_1 = 1 \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Somit ist

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1} \left[\cos(n-1) \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(n-1) \frac{\pi}{3} \right] = 2 + (-1)^n \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(n-2) \frac{\pi}{3} \quad (n \geq 3)$$

Wir sehen, dass sich das allgemeine Glied der Folge in diesem Beispiel durch trigonometrische Funktionen ausdrücken lässt, was der Periodizität der Folge völlig angemessen ist.

Führen wir schließlich noch ein Beispiel an, das sich unmittelbar auf die Division von Polynomen bezieht.

Es seien uns jetzt zwei Polynome $P(x) = 3 + x^2 - x^5$ und $Q(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$ gegeben. Die Aufgabe besteht darin, die Struktur der Koeffizienten des Quotienten zu bestimmen, den man bei der Division von $P(x)$ durch $Q(x)$ erhält. Die Folge der Koeffizienten des Quotienten

$$u_1 = D_0, u_2 = D_1, \dots, u_n = D_{n-1}, \dots$$

ist, wie wir in Abschnitt 2 sahen, eine rekursive Folge, deren Glieder der Gleichung (20) genügen:

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n \geq l - k + 1)$$

Hier ist k der Grad von $Q(x)$, B_0, B_1, \dots, B_k sind die Koeffizienten von $Q(x)$ und l der Grad von $P(x)$. Wegen $k = 3$, $B_0 = 2$, $B_1 = -1$, $B_2 = -2$, $B_3 = 1$, $l = 5$ ist also

$$D_{n+3} = \frac{1}{2}D_{n+2} + \frac{2}{2}D_{n+1} - \frac{1}{2}D_n \quad (n \geq 5 - 3 + 1 = 3)$$

d.h.

$$D_{n+3} = \frac{1}{2}D_{n+2} + D_{n+1} - \frac{1}{2}D_n \quad (n \geq 3)$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$q^3 = \frac{1}{2}q^2 + q - \frac{1}{2}$$

oder

$$q^3 - q - \frac{1}{2}(q^2 - 1) = (q - \frac{1}{2})(q - 1)(q + 1) = 0$$

Ihre Wurzeln sind also

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$$

und für D_n erhalten wir die Formel

$$D_n = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \cdot 1^n + C(-1)^n \quad (n \geq 3)$$

Nehmen wir $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$, so erhalten wir die Gleichungen

$$D_3 = \frac{1}{8}A + B - C$$

$$D_4 = \frac{1}{16}A + B - C$$

$$D_5 = \frac{1}{32}A + B - C$$

Hier sind nicht nur die Koeffizienten A , B und C unbekannt, sondern auch die Zahlen D_3 , D_4 , D_5 . Um diese zu bestimmen, führen wir die Division $P(x)$ durch $Q(x)$ tatsächlich durch, damit wir im Quotienten die Glieder bis zur fünften Potenz einschließlich erhalten:

$$3 + x^2 - x^5 : 2 - x - 2x^2 + x^3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{16}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \quad +x^2 \quad -x^5 \\
 3 \quad -\frac{3}{2}x \quad -3x^2 \quad +\frac{3}{2}x^3 \\
 \hline
 \frac{3}{2}x \quad +4x^2 \quad -\frac{3}{2}x^3 \quad -x^5 \\
 \frac{3}{2}x \quad -\frac{3}{4}x^2 \quad -\frac{3}{2}x^3 \quad +\frac{3}{4}x^4 \\
 \hline
 4\frac{3}{4}x^2 \quad -\frac{3}{4}x^4 \quad -x^5 \\
 4\frac{3}{4}x^2 \quad -2\frac{3}{8}x^3 \quad -4\frac{3}{4}x^4 \quad +2\frac{3}{8}x^5 \\
 \hline
 2\frac{3}{8}x^3 \quad +4x^4 \quad -3\frac{3}{8}x^5 \\
 2\frac{3}{8}x^3 \quad -1\frac{3}{16}x^4 \quad -2\frac{3}{8}x^5 \quad +1\frac{3}{16}x^6 \\
 \hline
 5\frac{3}{16}x^4 \quad -x^5 \quad -1\frac{3}{16}x^6 \\
 5\frac{3}{16}x^4 \quad -2\frac{19}{32}x^5 \quad -5\frac{3}{16}x^6 \quad +2\frac{19}{32}x^7 \\
 \hline
 1\frac{19}{32}x^5 \quad +4x^6 \quad -2\frac{19}{32}x^7
 \end{array}$$

Hieraus folgt

$$D_0 = \frac{3}{2}, \quad D_1 = \frac{3}{4}, \quad D_2 = 2\frac{3}{8}, \quad D_3 = 1\frac{3}{16}, \quad D_4 = 2\frac{19}{32}, \quad D_5 = \frac{51}{64}$$

Daher lautet das oben erhaltene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}A + B - C &= 1\frac{3}{16} \\ \frac{1}{16}A + B + C &= 2\frac{19}{32} \\ \frac{1}{32}A + B - C &= \frac{51}{64} \end{aligned}$$

Daraus finden wir

$$A = 4\frac{1}{6}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{5}{6}$$

Somit ist

$$D_n = 4\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(-1)^n \quad (n \geq 3)$$

Unsere Aufgabe ist gelöst! Aus der eben gefundenen Formel erhalten wir

$$D_6 = 2\frac{51}{128}, \quad D_7 = \frac{179}{256}, \quad D_8 = 2\frac{179}{512}, \dots$$

9. In allen oben untersuchten Beispielen hat die charakteristische Gleichung nur einfache Wurzeln. Betrachten wir jedoch einmal als Beispiel die Folge der Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen. Für diese Folge lautet die Rekursionsgleichung

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

Daher hat die charakteristische Gleichung die Gestalt

$$q^4 = 4q^3 + 6q^2 + 4q - 1 \quad \text{oder} \quad q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 4q + 1 = (q - 1)^4 = 0$$

Sie besitzt nur die vierfache Wurzel $q = 1$; daher erhalten wir hier auch nur eine geometrische Folge mit dem Quotienten Eins, deren Glieder der gegebenen Rekursionsgleichung genügen.

In ähnlichen Fällen muss man andere rekursive Fundamentalfolgen suchen, die zusammen mit der angegebenen geometrischen Folge eine Basis der entsprechenden Gleichung bilden können. Für unser Beispiel sind solche Folgen:

$$\begin{aligned} &0, 1, 2, 3, \dots, n - 1, \dots; \\ &0, 1, 4, 9, \dots, (n - 1)^2, \dots; \\ &0, 1, 8, 27, \dots, (n - 1)^3, \dots \end{aligned}$$

(wie der Leser leicht selbst nachprüft). Wir wollen nicht den allgemeinsten Fall untersuchen - was eine sehr umfangreiche Arbeit wäre - sondern uns auf folgendes typische Beispiel beschränken.

Es sei die Rekursionsgleichung

$$u_{n+k} = \binom{k}{k-1} \alpha u_{n+k-1} - \binom{k}{k-2} \alpha^2 u_{n+k-2} + \dots + (-1)^k \binom{k}{0} \alpha^k u_n \quad (57)$$

gegeben, wobei $\binom{k}{k-1}, \binom{k}{k-2}, \dots, \binom{k}{0}$ die Binomialkoeffizienten k -ter Ordnung sind. Die entsprechende charakteristische Gleichung

$$q^k = \binom{k}{k-1} \alpha q^{k-1} - \binom{k}{k-2} \alpha^2 q^{k-2} + \dots + (-1)^k \binom{k}{0} \alpha^k$$

kann in der Gestalt

$$(q - \alpha)^k = 0$$

geschrieben werden. Sie hat die k -fache Wurzel $q = \alpha$; offenbar ist

$$(\alpha - \alpha)^k = \alpha^k - \binom{k}{k-1} \alpha^k + \binom{k}{k-2} \alpha^k - \dots + (-1)^k \binom{k}{0} \alpha^k = 0 \quad (58)$$

Wir betrachten einmal die Identität

$$(\alpha - \alpha)^{k-m} = \alpha^{k-m} - \binom{k-m}{k-m-1} \alpha^{k-m} + \binom{k-m}{k-m-2} \alpha^{k-m} - \dots + (-1)^{k-m} \binom{k-m}{0} \alpha^{k-m} = 0$$

wobei $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$, oder

$$\begin{aligned} (1 - 1)^{k-m} &= \binom{k-m}{k-m} - \binom{k-m}{k-m-1} + \binom{k-m}{k-m-2} - \dots + (-1)^\mu \binom{k-m}{k-m-\mu} \\ &+ \dots + (-1)^{k-m} \binom{k-m}{0} = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Die Gleichung (59) hat für $m = 0$ die Form

$$\binom{k}{k} - \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-2} - \dots + (-1)^\mu \binom{k}{k-\mu} + \dots + (-1)^k \binom{k}{0} = 0 \quad (59')$$

Wir bemerken, dass

$$\binom{k}{k-\mu} = \frac{k(k-1)\dots(\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-\mu)} = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\dots(k-\mu)} \binom{k-m}{k-m-\mu}$$

($m = 1, 2, \dots, k-1$; $0 \leq \mu \leq k-m$) oder

$$k(k-1)\dots(k-m+1) \binom{k-m}{k-m-\mu} = (k-m-\mu+1)\dots(k-\mu) \binom{k}{k-\mu}$$

ist. Multiplizieren wir jede der Gleichungen (59) ($m = 1, 2, \dots, k - 1$) mit dem entsprechenden Faktor $k(k - 1)\dots(k - m + 1)$ und benutzen (60), so können wir statt (59) schreiben:

$$(k - m + 1)\dots k \binom{k}{k} - (k - m)\dots(k - 1) \binom{k}{k - 1} + \dots \\ + (-1)^\mu (k - m - \mu + 1)\dots(k - \mu) \binom{k}{k - \mu} + \dots + (-1)^{k-m} \cdot 1 \cdot 2 \dots m \binom{k}{m} = 0 \quad (59'')$$

($m = 1, 2, \dots, k - 1$)

Wir zeigen nun, dass für $m = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$k^m \binom{k}{k} - (k - 1)^m \binom{k}{k - 1} + \dots + (-1)^\mu (k - \mu)^m \binom{k}{k - \mu} + \dots + (-1)^k \cdot 0^m \binom{k}{0} = 0 \quad (61)$$

Tatsächlich stimmt die Gleichung für $m = 0$ mit (59') überein¹⁰; dafür ist sie also richtig.

Nun wenden wir vollständige Induktion an. Wir nehmen an, wir hätten die Gleichung (61) für $m = 0, 1, \dots, j$ ($j \leq k - 2$) schon bewiesen, und zeigen dann, dass die Gleichung für $m = j + 1$ ebenfalls richtig ist. Zu diesem Zweck führen wir ein Polynom ($j + 1$)-ten Grades ein:

$$f(x) = (x - j)(x - j + 1)\dots(x - 1)x = x^{j+1} - \beta_j x^j - \dots - \beta_1 x \quad (62)$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (61) für $m = 1, 2, \dots, j$ mit den Zahlen β_1, β_2, \dots und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 k \binom{k}{k} - \beta_1 (k - 1) \binom{k}{k - 1} + \dots + \beta_1 (-1)^\mu (k - \mu) \binom{k}{k - \mu} + \dots + \beta_1 (-1)^k \cdot 0 \cdot \binom{k}{0} = 0 \\ \dots \\ \beta_j k^j \binom{k}{k} - \beta_j (k - 1)^j \binom{k}{k - 1} + \dots + \beta_j (-1)^\mu (k - \mu)^j \binom{k}{k - \mu} + \dots + \beta_j (-1)^k \cdot 0 \cdot \binom{k}{0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Notieren wir noch die Gleichung (59'') für $m = j + 1$:

$$f(k) \binom{k}{k} - f(k - 1) \binom{k}{k - 1} + \dots + (-1)^\mu f(k - \mu) \binom{k}{k - \mu} + \dots + (-1)^k f(0) \binom{k}{0} = 0 \quad (64)$$

Wir benutzen hier die Beziehungen

$$(k - j)\dots k = f(k) \quad , \quad (k - j - 1)\dots(k - 1) = f(k - 1), \dots \quad (k - j - \mu)\dots(k - \mu) = f(k - \mu), \dots$$

¹⁰Hierbei ist, wie üblich, $0^0 = 1$ zu setzen; diese Festsetzung ist aus "Permanenzgründen" getroffen.

Addieren wir (63) und (64) gliedweise, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & [\beta_1 k + \dots + \beta_j k^j + f(k)] \binom{k}{k} - [\beta_1(k-1) + \dots + \beta_j(k-1)^j + f(k-1)] \binom{k}{k-1} + \dots \\ & + (-1)^\mu [\beta_1(k-\mu) + \dots + \beta_j(k-\mu)^j + f(k-\mu)] \binom{k}{k-\mu} + \dots \\ & + (-1)^k [\beta_1 \cdot 0 + \dots + \beta_j \cdot 0^j + f(0)] \binom{k}{0} = 0 \end{aligned}$$

Nach (62) ist aber

$$\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_j x^j + f(x) = x^{j+1}$$

Daher nimmt das erhaltene Resultat folgende Gestalt an:

$$k^{j+1} \binom{k}{k} - (k-1)^{j+1} \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu (k-\mu)^{j+1} \binom{k}{k-\mu} + \dots + (-1)^k \cdot 0^{j+1} \binom{k}{0} = 0$$

Das ist gerade die Gleichung (61) für $m = j + 1$. Damit ist der Beweis erbracht, dass die Beziehung (61) gilt.

Betrachten wir schließlich noch ein beliebiges Polynom höchstens $(k-1)$ -ten Grades:

$$P(x) = A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \dots + A_0 \quad (65)$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (61) für $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$ mit A_0, A_1, \dots bzw. a_{k-1} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & A_0 \binom{k}{k} - A_0 \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu A_0 \binom{k}{k-\mu} + \dots + (-1)^k A_0 \binom{k}{0} = 0 \\ & A_1 k \binom{k}{k} - A_1(k-1) \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu A_1(k-\mu) \binom{k}{k-\mu} + \dots + (-1)^k A_1 \cdot 0 \cdot \binom{k}{0} = 0 \\ & \dots \\ & A_{k-1} k^{k-1} \binom{k}{k} - A_{k-1}(k-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu A_{k-1}(k-\mu)^{k-1} \binom{k}{k-\mu} + \dots \\ & \quad + (-1)^k A_{k-1} \cdot 0^{k-1} \cdot \binom{k}{0} = 0 \end{aligned}$$

Durch Addition folgt

$$\begin{aligned} & (A_0 + A_1 k + \dots + A_{k-1} k^{k-1}) \binom{k}{k} - [A_0 + A_1(k-1) + \dots + A_{k-1}(k-1)^{k-1}] \binom{k}{k-1} + \dots \\ & + (-1)^\mu [A_0 + A_1(k-\mu) + \dots + A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}] \binom{k}{k-\mu} + \dots \\ & + (-1)^k [A_0 + A_1 \cdot 0 + \dots + A_{k-1} 0^{k-1}] \binom{k}{0} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$P(k) \binom{k}{k} - P(k-1) \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^k P(0) \binom{k}{0} = 0 \quad (66)$$

Folglich genügt jedes Polynom $P(x)$ höchstens $(k-1)$ -ten Grades der Beziehung (66). Setzen wir insbesondere $P(x) = (x+n-1)^m$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist und m eine ganze Zahl $0 \leq m \leq k-1$, so geht Gleichung (66) über in

$$(k+n-1)^m \binom{k}{k} - (k+n-2)^m \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^k (n-1)^m \binom{k}{0} = 0$$

oder, wenn wir mit α^{k+n-1} multiplizieren und $\binom{k}{k}$ durch 1 ersetzen,

$$(k+n-1)^m \alpha^{k+n-1} = \binom{k}{k-1} \alpha (k+n-2)^m \alpha^{k+n-2} - \binom{k}{k-2} \alpha^2 (k+n-3)^m \alpha^{k+n-3} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{0} \alpha^k (n-1)^m \alpha^{n-1} \quad (67)$$

Vergleichen wir (67) mit (57), so können wir daraus schließen:
Jede der k Folgen

$$\left. \begin{array}{l} 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots, \quad (m=0) \\ 0, \alpha, 2\alpha^2, \dots, (n-1)\alpha^{n-1}, \dots, \quad (m=1) \\ 0, \alpha, 2^2\alpha^2, \dots, (n-1)^2\alpha^{n-1}, \dots, \quad (m=2) \\ \dots \\ 0, \alpha, 2^{k-1}\alpha^2, \dots, (n-1)^{k-1}\alpha^{n-1}, \dots, \quad (m=k-1) \end{array} \right\} \quad (68)$$

genügt der Rekursionsgleichung (57).

Wenn wir feststellen können, dass sie eine Basis bilden, so folgt daraus, dass das allgemeine Glied jeder Folge, die der Gleichung (57) genügt, die Gestalt

$$u_n = [B_0 + B_1(n-1) + \dots + B_{k-1}(n-1)^{k-1}] \alpha^{n-1} = Q(n-1) \alpha^{n-1} \quad (69)$$

hat, wobei $Q(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_{k-1}x^{k-1}$ ein Polynom höchstens $(k-1)$ -ten Grades mit beliebigen Koeffizienten ist.

Es genügt zu zeigen, dass das System von k linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 \cdot 0 + \dots + B_{k-1} \cdot 0^{k-1} &= u_1, \\ B_0 + B_1 \cdot 1 + \dots + B_{k-1} \cdot 1^{k-1} &= u_2, \\ &\dots \\ B_0 + B_1(k-1) + \dots + B_{k-1}(k-1)^{k-1} &= u_k \end{aligned}$$

bei beliebigen u_1, \dots, u_k (nach den Unbekannten B_0, B_1, \dots, B_{k-1} auflösbar ist, d.h., dass das System

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, \\ B_0 + B_1 + \dots + B_{k-1} &= 0, \\ B_0 + (k-1)B_1 + \dots + (k-1)^{k-1}B_{k-1} &= 0 \end{aligned}$$

nur die Null-Lösung hat. Die Gleichungen dieses Systems besagen aber

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(k-1) = 0$$

d.h., dass die Gleichung

$$B_0 + B_1x + \dots + B_{k-1}x^{k-1} = 0$$

die höchstens den Grad $k-1$ hat, mindestens die k verschiedenen Wurzeln $0, 1, 2, \dots, k-1$ besitzt. Daraus folgt

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{k-1} = 0$$

womit gerade der Beweis dafür erbracht ist, dass die Folge (68) eine Basis der rekursiven Folgen bildet, die der Gleichung (57) genügen. Für jede rekursive Folge, die der allgemeinen Gleichung

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \dots + a_ku_n \quad (a_k \neq 0) \quad (70)$$

genügt, kann die charakteristische Gleichung

$$q^k = a_1q^{k-1} + \dots + a_k \quad (71)$$

irgendeine a -fache Wurzel α , eine b -fache Wurzel β , ..., eine c -fache Wurzel γ haben, insgesamt $a + b + \dots + c = k$ Wurzeln.

Für diesen allgemeinsten Fall kann man beweisen, dass eine Basis aus folgenden k Folgen besteht:

$$\begin{aligned} &1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots \\ &\dots \\ &0, \alpha, 2^{a-1}\alpha^2, \dots, (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1}, \dots; \\ &1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}, \dots \\ &\dots \\ &0, \beta, 2^{b-1}\beta^2, \dots, (n-1)^{b-1}\beta^{n-1}, \dots; \\ &\dots \\ &1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, \dots \\ &\dots \\ &0, \gamma, 2^{c-1}\gamma^2, \dots, (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1}, \dots \end{aligned}$$

Daher ist

$$u_n = Q(n-1)\alpha^{n-1} + R(n-1)\beta^{n-1} + \dots + S(n-1)\gamma^{n-1} \quad (72)$$

wobei $Q(x), R(x), \dots, S(x)$ irgendwelche feste Polynome sind, deren Grad nicht höher ist als $a-1, b-1, \dots$ bzw. $c-1$.

Somit gilt folgender Sachverhalt:

Das allgemeine Glied u_n jeder rekursiven Folge ist Summe von Produkten von Polynomen in $n - 1$ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, in n) mit den allgemeinen Gliedern geometrischer Folgen, deren Quotienten gleich den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (71) sind.

Sind alle Wurzeln dieser Gleichung einfach, so sind diese Polynome Konstanten, und das allgemeine Glied der rekursiven Folge ist Summe von Gliedern geometrischer Folgen.

Man kann sogar die Richtigkeit der Umkehrung beweisen. Es gilt nämlich: Jede Folge $\{u_n\}$, deren allgemeines Glied sich durch Formel (72) ausdrücken lässt, ist rekursiv¹¹. Die zugehörige charakteristische Gleichung (71) ergibt sich aus ihren Wurzeln $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ und deren Vielfachheit a, b, \dots, c (welche den um Eins vermehrten Grad der Polynome Q, R, \dots, S darstellt). Daraus findet man auch leicht die Rekursionsgleichung (70).

Wir betrachten als Beispiel die Folge

$$u_n = (n - 1)^2 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

Vergleichen wir sie mit (72), so können wir schließen, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\alpha = 2, \beta = 3$ sind, wobei die Vielfachheit von α gleich $2 + 1 = 3$ ist, Daher muss die charakteristische Gleichung die Gestalt

$$(q - 2)^3(q - 3) = q^4 - 9q^3 + 30q^2 - 44q + 24 = 0$$

haben, und die Rekursionsgleichung lässt sich in folgender Gestalt schreiben:

$$u_{n+4} = 9u_{n+3} - 30u_{n+2} + 44u_{n+1} - 24u_n$$

Wir überlassen den Nachweis der Tatsache, dass die gegebene Folge dieser Gleichung genügt, dem Leser.

10. Wir illustrieren die Ergebnisse des vorigen Abschnittes durch Beispiele. In Abschnitt 2 haben wir gesehen, dass die Glieder einer arithmetischen Folge einer Gleichung der Gestalt

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

die Quadrate der natürlichen Zahlen der Gleichung

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

und die Kuben der natürlichen Zahlen der Gleichung

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n$$

genügen. Offenbar können alle diese Gleichungen als Spezialfälle der Gleichung

$$u_{n+k} = \binom{k}{k-1} u_{n+k-1} - \binom{k}{k-2} u_{n+k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{0} u_n \quad (57')$$

¹¹Ein Beweis des direkten Satzes und seiner Umkehrung, den wir uns hier ersparen, findet sich z.B. im vierten Kapitel des Bändchens des Verfassers "Division mit Rest in Arithmetik und Algebra", Verlag der Akademie der Päd. Wissenschaften der RSFSR, M.L. 1949; dort wird die Theorie der rekursiven Folgen nach einer anderen Methode als in diesem Bändchen entwickelt.

angesehen werden, die wir in Abschnitt 9 betrachteten (hier ist $\alpha = 1$). Das allgemeine Glied jeder Folge, die dieser Gleichung genügt, muss [nach Formel (69)] die Gestalt

$$u_n = B_0 + B_1(n-1) + \dots + B_{k-1}(n-1)^{k-1} \quad (69')$$

haben. Um die Koeffizienten B_0, B_1, \dots, B_{k-1} zu finden, genügt es, das folgende System von k linearen algebraischen Gleichungen mit k Unbekannten zu lösen:

$$\left. \begin{array}{l} B_0 = u_1, \\ B_0 + B_1 + \dots + B_{k-1} = u_2, \\ \dots \\ B_0 + B_1(k-1) + \dots + B_{k-1}(k-1)^{k-1} = u_k \end{array} \right\} \quad (73)$$

Für eine arithmetische Folge ist $k = 2$, und die Formel (69') bekommt die Gestalt

$$u_n = B_0 + B_1(n-1)$$

Das System (73) wird

$$B_0 = u_1 \quad , \quad B_0 + B_1 = u_2$$

Daraus ersieht man sofort, dass $B_0 = u_1$ das erste Glied und $B_1 = u_2 - u_1 = d$ die Differenz der Folge ist. Somit gilt

$$u_n = u_1 + d(n-1)$$

Wir haben damit die wohlbekanntete Formel erhalten. Wir können uns für die Folgen der Quadrate oder Kuben der natürlichen Zahlen die entsprechenden Überlegungen ersparen, weil wir von vornherein wissen, dass $u_n = n^2$ bzw. $u_n = n^3$ ist.

Es ist jedoch von gewissem Interesse, die Beziehungen (69') und (73) zur Ableitung von Formeln für die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge und auch für die Summe der Quadrate oder Kuben der natürlichen Zahlen zu verwenden.

In Abschnitt 4 haben wir gezeigt, dass die Summen $\{s_n\}$ der Glieder einer Folge ($s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots$) eine Gleichung der Gestalt

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_k s_n$$

befriedigen, wenn die Glieder dieser Folge $\{u_n\}$ einer Gleichung der Gestalt

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

genügen. Für die Gleichung (57') ist klar, dass

$$a_1 = \binom{k}{1}, \quad a_2 = -\binom{k}{2}, \quad \dots, \quad a_k = (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

gilt. Daher ist

$$\begin{aligned}
 1 + a_1 &= 1 + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{1}, \\
 a_2 - a_1 &= - \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = - \binom{k+1}{2}, \\
 a_3 - a_2 &= \binom{k}{3} + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3}, \\
 a_k - a_{k-1} &= (-1)^{k-1} \left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right) = (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k}, \\
 &\dots \\
 -a_k &= (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k \binom{k+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

und die Gleichung für $\{s_n\}$ kann in der Form

$$s_{n+k+1} = \binom{k+1}{1} s_{n+k} - \binom{k+1}{2} s_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} s_n$$

oder

$$s_{n+k+1} - \binom{k+1}{1} s_{n+k} + \binom{k+1}{2} s_{n+k-1} - \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} s_n = 0$$

dargestellt werden.

Wenn also eine Folge $\{u_n\}$ einer Gleichung (57') k -ter Ordnung genügt, so genügt die Folge der Summen $\{s_n\}$ dieser Glieder einer Gleichung derselben Gestalt, aber $(k+1)$ -ter Ordnung.

Speziell ist für eine arithmetische Folge $k = 2$, für die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen $k = 3$ und für die Folge der Kuben $k = 4$; demnach ist für die Folgen der entsprechenden Summen in den obigen Gleichungen (57'), (69'), (73) k jeweils um Eins größer zu nehmen, also gleich 3, 4 und 5.

a) Die Summe der Glieder der arithmetischen Folge.

Auf Grund unserer Bemerkungen lässt sich s_n durch Formel (69') für $k = 3$ ausdrücken (dabei ist u_n durch s_n zu setzen). Also ist

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2$$

Die Koeffizienten B_0, B_1, B_2 lassen sich aus dem System (73) bestimmen (wobei wieder u_n durch s_n zu ersetzen und $k = 3$ ist):

$$\begin{aligned}
 B_0 &= s_1 = u_1, \\
 B_0 + B_1 + B_2 &= s_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d, \\
 B_0 + 2 \cdot B_1 + 2^2 B_2 &= s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3d
 \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$B_0 = u_1, \quad B_1 = u_1 + \frac{1}{2}d, \quad B_2 = \frac{1}{2}d$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2}d\right)(n-1) + \frac{1}{2}d(n-1)^2 = nu_1 + \frac{1}{2}d(n-1)n \\ &= \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[u_1 + u_2 + (n-1)d]}{2} = \frac{n(u_1 + u_2)}{2} \end{aligned}$$

b) Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

Nehmen wir in den Formeln (69') und (73) $k = 4$ und ersetzen u_n durch s_n , so erhalten wir

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2 + B_3(n-1)^3 \quad \text{und}$$

$$B_0 = s_1 = 1,$$

$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = s_2 = 1 + 2^2 = 5,$$

$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = s_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

$$B_0 + 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = s_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Aus diesem System finden wir

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2\frac{1}{6}, \quad B_2 = 1\frac{1}{2}, \quad B_3 = \frac{1}{3}$$

Daher ist

$$s_n = 1 + \frac{13}{6}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n-1)^3 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

womit wir wieder die bekannte Formel erhalten haben.

c) Die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen. Hierfür finden wir

$$s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Die Ableitung überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. Zum Schluss betrachten wir noch das Beispiel der Folge

$$\alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \dots, n\alpha^n, \dots \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

Hier ist

$$u_n = n\alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Man sieht sofort, dass

$$u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n$$

gilt. Es ist nämlich

$$2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n = 2\alpha(n+1)\alpha^{n+1} - \alpha^2 n\alpha^n = (n+2)\alpha^{n+2} = u_{n+2}$$

Wegen $k = 2$, $a_1 = 2\alpha$ und $a_2 = -\alpha^2$ muss die Folge der Summen $\{s_n\}$ ($s_1 = \alpha$, $s_2 = \alpha + 2\alpha^2$, $s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3$, ...) der Gleichung

$$s_{n+3} = (a_1 + 1)s_{n+2} + (a_2 - a_1)s_{n+1} - a_2 s_n = (2\alpha - 1)s_{n+2} - (\alpha^2 + 2\alpha)s_{n+1} + \alpha^2 s_n$$

genügen [siehe (30)]. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$q^3 = (2\alpha + 1)q^2 - (\alpha^2 + 2\alpha)q + \alpha^2$$

Man sieht leicht, dass sie für $q = \alpha$ erfüllt ist. Wir dividieren das Polynom $q^3 - (2\alpha + 1)q^2 + (\alpha^2 + 2\alpha)q - \alpha^2$ durch $q - \alpha$ und erhalten als Quotienten

$$q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha$$

Die restlichen beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung genügen also der Gleichung

$$q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha = 0$$

Deren Wurzeln sind α und 1. Somit hat die charakteristische Gleichung die Doppelwurzel α und die einfache Wurzel $\beta = 1$.

Daher erhalten wir für s_n

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]\alpha^{n-1} + C_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

[siehe Formel (69), worin u_n durch s_n zu ersetzen ist, ferner $\alpha = \alpha$, $Q(x) = B_0 + B_1x$ ein Polynom ersten Grades, $\beta = 1$ und $R(x) = C_0$ eine Konstante ist].

Die Koeffizienten B_0 , B_1 und C_0 finden wir aus dem System der Gleichungen für $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} B_0 + C_0 &= s_1 = \alpha \\ (B_0 + B_1)\alpha + C_0 &= s_2 = \alpha + 2\alpha^2 \\ (B_0 + 2B_1)\alpha^2 + C_0 &= s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$B_0 = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}, \quad B_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}, \quad B_2 = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}$$

Daher ist

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]\alpha^{n-1} + C_0 = \frac{n\alpha^{n+2} - (n+1)\alpha^{n+1} + \alpha}{(\alpha - 1)^2} = \frac{u_n\alpha^2 - (u_{n+1} - u_1)}{(\alpha - 1)^2}$$

3 Schlussbemerkungen

Dieses Büchlein sollte dem Leser eine Vorstellung von der Mannigfaltigkeit der rekursiven Folgen und ihrer Rolle in der Mathematik vermitteln.

Außerdem wurde gezeigt, dass die rekursiven Folgen leicht aus den einfachsten unter ihnen - der geometrischen Folge und der Folge der Potenzen der natürlichen Zahlen (insbesondere aus, der Folge der natürlichen Zahlen selbst, die eine arithmetische Folge bilden) - gefunden und mit Hilfe dieser einfachsten Folgen ausgedrückt werden können.

Jedoch stößt man schon in der Elementarmathematik vielfach auf Folgen, die nicht rekursiv sind. Eine solche ist z.B. die der Primzahlen,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

die eine der wichtigsten Folgen der Mathematik ist. Mit dieser Folge, mit ihren tiefliegenden und komplizierten Eigenschaften, beschäftigt man sich in der Zahlentheorie.

Nicht rekursiv sind auch Folgen von Funktionswerten vieler elementarer Funktionen, z.B.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

(die Folge der Funktionswerte von $y = \frac{1}{x}$ für $x = 1, 2, 3, \dots$) oder

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots$$

$$\log 1, \log 2, \log 3, \log 4, \dots, \log n, \dots$$

(Folgen der Werte von \sqrt{x} und $\log x$ für $x = 1, 2, 3, \dots$) usw. Mit der Untersuchung dieser und ähnlicher Folgen¹² (außerdem auch mit rekursiven Folgen) beschäftigt man sich in einer oben schon erwähnten mathematischen Disziplin, der Differenzenrechnung.

Schließlich spielen die konvergenten Folgen, d.h. Folgen, die einen endlichen Grenzwert besitzen, in der Elementarmathematik und besonders in den Vorlesungen über Analysis, die an Hochschulen gehalten werden, eine überaus wichtige Rolle.

Ihre Untersuchung ist vornehmlich Aufgabe der Theorie der Grenzwerte und betrifft die Grundlagen der Analysis. Die Eigenschaften der einzelnen Glieder der Folgen spielen dabei eine mehr als nebensächliche Rolle: Wichtig ist nur die Tatsache der Existenz eines Grenzwertes und sein Wert.

Wir glaubten diese Bemerkungen machen zu müssen, um dem Leser zu zeigen, dass unsere Ausführungen über rekursive Folgen sowohl in Bezug auf ihren Gegenstand als auch in Bezug auf die dabei herausgearbeiteten Gesetzmäßigkeiten nur ein ganz spezielles und bescheidenes Kapitel aus der Lehre von den Folgen darstellen.

¹²Es handelt sich um Folgen von Werten sogenannter analytischer Funktionen, deren einfachste Vertreter die elementaren Funktionen sind.