Tamás Varga

Mathematische Logik für Anfänger
Prädikatenlogik

Übersetzung: Rainer Götz
1973 Volk und Wissen Berlin
MSB: Nr. 62
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Auf der Suche nach neuen Wegen

1.1 Magnet und Gosis

Vergleichen wir einmal die folgenden beiden Schlüsse:

1.	2.
Wenn die Platte aus Eisen ist, dann zieht ein Magnet die Platte an.	Was aus Eisen ist, das zieht ein. Magnet an.
Wenn ein Magnet die Platte nicht anzieht, so ist die Platte nicht Eisen.	Was ein Magnet nicht anzieht, ist aus nicht aus Eisen.

Wir erinnern den Leser an unsere Vereinbarung, nach der wir die Aussagen über dem langen waagerechten Strich - die Prämissen - voraussetzen und aus ihnen auf die darunter stehenden - die Konklusionen - schließen. (Ganz so, als würden wir an Stelle des waagerechten Striches ein "also" lesen.)
Beide Schlüsse empfinden wir als richtig. Wir würden sie selbst dann als richtig anerkennen, wenn in ihnen fremde, unbekannte Fachausdrücke vorkämen.

Wenn die Z-Strahlen pritogen sind, so verursachen die Z-Strahlen Gosis.	Was pritogen ist, verursacht Gosis.
Wenn die Z-Strahlen keine Gosis verursachen, so sind die Z-Strahlen nicht pritogen.	Was keine Gosis verursacht, ist nicht pritogen.

Darüber hinaus bemerken wir sogar eine gewisse Verwandtschaft zwischen den beiden Schlüssen. Der erste Schluss bezieht sich auf einen konkreten Fall (eine bestimmte Platte, die Z-Strahlen), der zweite drückt das gleiche allgemein aus.
Diese Verwandtschaft macht eine weitere Beziehung zwischen den beiden Schlussweisen verständlich: Von beiden gilt auch die Umkehrung.
Betrachten wir dazu die letzte Version der beiden Schlüsse:

Wenn die Z-Strahlen keine Gosis verursachen, so sind die Z-Strahlen nicht pritogen.	Was keine Gosis verursacht, ist nicht pritogen.
Wenn die Z-Strahlen pritogen sind, so verursachen sie Gosis.	Was pritogen ist, verursacht Gosis.

Hätten wir aus zuverlässiger Quelle erfahren, dass die über dem Strich stehenden Aussagen wahr sind, so könnten wir daraus schließen, dass auch die Aussagen unter dem Strich richtig sind.
(Wem diese Schlussweise auf den ersten Blick nicht überzeugend erscheint, dem kann etwa die folgende Überlegung weiterhelfen: "Verursacht wirklich alles, was pritogen ist, Gosis? Ja natürlich, denn wenn etwas keine Gosis verursachte, so wäre es - wie wir schon aus der Prämisse wissen - auch nicht pritogen.")

Bei einer solchen nahen Verwandtschaft war auch nicht zu erwarten, dass die Umkehrung der einen Schlussweise richtig und die der anderen falsch sein würde.

1.2 Die Grenzen unseres bisherigen Vorgehens

Trotzdem besteht aus unserer Sicht ein großer Unterschied zwischen den beiden Schlüssen: Den Schluss auf der rechten Seite, der den allgemeinen Fall erfasst, empfinden wir nur als richtig, die Richtigkeit des Schlusses auf der linken Seite können wir dagegen durch einen Beweis - oder, wenn man so will, eine Rechnung - genau nachprüfen.
Betrachten wir einmal den Schluss auf der linken Seite (in seiner ersten Version). Er hat - unter Benutzung der Symbole des Aussagenkalküls - die folgende Form:

$$\frac{E \to M}{\sim M \to \sim E}$$

Wir vergleichen in dieser Schlussfigur die Wahrheitswerte von Prämisse und Konklusion:

Variable		Negation der Variablen		Prämisse	Konklusion
E	M	$\sim E$	$\sim M$	$E \to M$	$\sim M \to \sim E$
W	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Wir sehen, dass die Wahrheitswerte der Prämisse mit denen der Konklusion in allen Fällen übereinstimmen. Jede der beiden Aussagen ist dann und nur dann wahr, wenn es die andere ist, und somit folgt die eine aus der anderen und umgekehrt.
(Wir erinnern den Leser daran, dass der mit dem Pfeil bezeichneten Operation, der Implikation, dann und nur dann der Wahrheitswert "falsch" zugeschrieben wird, wenn ihr erstes Glied wahr, ihr zweites jedoch falsch ist.
Wir sagen ferner, dass aus einer bestimmten Aussage eine andere folgt, wenn niemals der Fall eintritt, dass bei einem bestimmten Wert der Aussagenvariablen - hier E und M die betrachtete Aussage den Wahrheitswert "wahr" und die andere den Wert "falsch" annimmt.)

Versuchen wir, den zweiten Schluss ebenfalls zu Formalisieren, so müssen wir unseren bisherigen Vereinbarungen zufolge schreiben:

$$\frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{S} \quad \text{oder} \quad \frac{W}{M} \quad \text{usw.}$$

Es kommen nämlich weder in der Prämisse noch in der Konklusion logische Operationen vor, so dass wir keine von ihnen weiter auflösen können und gezwungen sind, beide mit je einem Buchstaben zu bezeichnen, und zwar, da beide voneinander verschiedene Aussagen darstellen, mit verschiedenen Buchstaben. Die derart geschriebene Schlussfigur ist jedoch nicht richtig, wie das schon oben benutzte formale Verfahren zeigt.

Variable		Prämisse	Konklusion
A	B	A	B
W	W	W	W
F	W	F	W
W	F	W	F
F	F	F	F

In der dritten Zeile der Tabelle hat die Prämisse den Wert W, die Konklusion aber den Wert F. Die Schlussfigur

$$\frac{A}{B}$$

ist daher nicht richtig, d. h., die Konklusion folgt nicht aus der Prämisse.

Unter dem Aspekt der Automatisierung ist es von Bedeutung, dass man durch ein solches mechanisches Vorgehen über die Richtigkeit jeder Schlussfigur, von der allereinfachsten bis zur kompliziertesten, entscheiden kann. In, dem gegebenen Fall können wir allerdings auf die Benutzung dieses formalen Verfahrens verzichten, obwohl, wie wir gezeigt haben, es auch hier seine Gültigkeit beibehält. Es ist nämlich auch ohne Anwendung dieses Verfahrens klar, dass diese Schlussweise nicht richtig sein kann.
Wäre sie es nämlich, so würde das bedeuten, dass aus jeder Aussage jede beliebige andere Aussage folgt, unabhängig davon, ob sie falsch oder wahr sind.

1.3 Eine neue Bezeichnung

Es liegen uns also zwei ziemlich ähnliche Schlüsse vor. Vermutlich sind sie beide richtig. Beweisen konnten wir dies mit unseren bisherigen Hilfsmitteln aber nur von dem ersten. Es wäre schön, wenn wir unsere Hilfsmittel vervollkommnen könnten, um auch die Richtigkeit des zweiten Schlusses beweisen zu können.

Der erste Schritt auf diesem Wege könnte darin bestehen, die zwischen beiden Schlüssen bestehende Verwandtschaft auch formelmäßig zum Ausdruck zu bringen. Wir haben die im zweiten Schluss auftretenden Aussagen bisher als unteilbares Ganzes behandelt und daher mit einem einzigen Buchstaben bezeichnet. Jetzt wollen wir tiefer in ihren Aufbau vordringen und ihre innere Struktur ergründen.

Zur Vorbereitung betrachten wir noch einmal den ersten Schluss. Die hierin vorkommenden Elementaraussagen - so nannten wir die mit unseren bisherigen Methoden nicht weiter zerlegbaren Aussagen - beziehen sich alle auf eine bestimmte Platte. Von dieser wird einerseits festgestellt, dass sie aus Eisen ist, andererseits, dass sie von einem Magneten angezogen wird. Wir wollen nun die Rolle der Platte auch in unseren Bezeichnungen zum Ausdruck kommen lassen:

"Die Platte ist aus Eisen" schreiben wir kürzer so: Ep
"Ein Magnet zieht die Platte an" schreiben wir so: Mp.
Dann können wir die Prämisse wie folgt schreiben:

$Ep \rightarrow Mp$

und die Konklusion so:

$\sim Mp \rightarrow \sim Ep$

Das Wesentliche dieser neuen Bezeichnungen besteht darin, dass wir in dieser symbolischen Schreibweise der Aussage das, was wir von einer Sache behaupten, von der Sache selbst, von der etwas behauptet wird, schon drucktechnisch unterscheiden.

Das, was wir von der Sache behaupten (dass etwas aus Eisen ist, von einem Magneten angezogen wird) bezeichnen wir mit großen Buchstaben. Die Sache, von der wir etwas behaupten (die Platte), bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben, die wir hinter die großen Buchstaben stellen.

Bei der Formalisierung des ersten Schlusses bietet die neue Bezeichnung keine Vorteile. Sie hat sogar den Nachteil, dass wir den überflüssigen Buchstaben p mit uns herumschleppen müssen. Sie bringt uns aber auf eine Idee, wie wir den zweiten Schluss weiter analysieren und genauer aufschreiben können. Wir werden sehen, wie das zu geschehen hat.

1.4 Wir zerlegen das bisher Unzerlegbare

Was aus Eisen ist, das zieht ein Magnet an.

Das gilt allerdings nicht nur für einen bestimmten Gegenstand, sondern für alle möglichen. Wir könnten daher auch sagen:

Alles, was aus Eisen ist, das zieht ein Magnet an.

Bei unseren obigen Überlegungen war uns bekannt, dass von einer bestimmten Platte die Rede war, und diese hatten wir mit p bezeichnet. Jetzt ist von keinem bestimmten Gegenstand mehr die Rede. Wir verwenden daher an Stelle des p einen der Buchstaben, mit denen man gewöhnlich Unbekannte oder Variable bezeichnet, z. B. x.
Auf diese Weise können wir unseren Satz so umformulieren, dass die Verwandtschaft zwischen ihm und der Prämisse des ersten Schlusses deutlich wird.

Für alle x gilt: Wenn x aus Eisen ist, so zieht ein Magnet x an.

Oder kürzer unter Benutzung der obigen Bezeichnungen:

Für alle x gilt: $Ex \to Mx$,

und dafür schreibt man gewöhnlich noch kürzer:

$$\forall x(Ex \to Mx)$$

Das Zeichen $\forall$ (ein umgekehrtes A) geht auf das englische Wort "all" oder das deutsche Wort "alle" zurück.
Der üblichen mathematischen Verfahrensweise würde folgende Schreibweise besser entsprechen:

$$\forall x[E(x) \to M(x)]$$

Hierbei drücken die inneren runden Klammern - im Gegensatz zu den äußeren eckigen - keine Zusammengehörigkeit aus (bei dem einen Buchstaben x ist ja nichts zusammenzufassen), sondern eine Funktionalbeziehung. "x ist aus Eisen" - ist das wahr? Das hängt davon ab, was wir an Stelle von x einsetzen.
Der Satz hat keinen bestimmten Wahrheitswert, er ist keine Aussage im eigentlichen Sinn, sondern eine "von einer Variablen abhängige Aussage", eine sogenannte Aussageform oder logische Funktion.[1]

Die Verwendung von Klammern zur Bezeichnung funktionaler Zusammenhänge ist nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Logik sehr verbreitet. Wir wollen jedoch mit Klammern sparsam umgehen (es werden ohnehin noch genug auftreten) und deshalb im allgemeinen an der Schreibweise $\forall Vx(Ex \to Mx)$ festhalten.[2]
In ähnlicher Weise können wir auch die Konklusion des Schlusses aufschreiben. Der gesamte Schluss hat dann die folgende Struktur:

[1] Was wir unter einer logischen Funktion verstehen, wird später noch erklärt.

[2] Mitunter müssen wir für die Bezeichnung logischer Funktionen aber doch Klammern benutzen. In Aussageformen benutzen wir an Stelle von x meistens ein Quadrat, z. B. $\square$ ist aus Eisen. An Stelle des Quadrates könnten wir auch Pünktchen setzen: ... ist aus Eisen.

$$\frac{\forall x(Ex \to Mx)}{\forall x(\sim Mx \to \sim Ex)}$$

In grober Übersetzung heißt das:

$$\frac{\text{Für alle } x \text{ gilt: Wenn } x\ E \text{ ist, so ist } x\ M.}{\text{Für alle } x \text{ gilt: Wenn } x \text{ nicht } M \text{ ist, so ist } x \text{ nicht } E.}$$

Wir würden gern ein mechanisches Verfahren besitzen, mit dessen Hilfe man über die Richtigkeit auch solcher Schlussfiguren entscheiden kann. Es müsste allerdings auch in anderen, komplizierteren Fällen anwendbar sein, wo ein Durchdenken sehr mühsam, wenn nicht gar unmöglich ist.
Nach einem solchen Verfahren streben wir auch weiterhin. Wir müssen jedoch vorweg bemerken, dass wir in diesem Buch nur eine Kostprobe davon geben können. Sollte jemand dabei auf den Geschmack kommen, so können wir ihn auf andere Bücher verweisen, an denen er seinen Appetit stillen kann. Ein Buch dieses Umfangs kann, wenn es nur geringe Vorkenntnisse voraussetzt, nicht allzu weit führen.

Die mathematische Logik hat sich jedoch im Laufe eines Jahrhunderts zu einer äußerst umfangreichen Wissenschaft entwickelt. Die Aussagenlogik, mit der sich der erste Band unseres Buches befasste, ist nur ein kurzes einführendes Kapitel dieser Wissenschaft.
Wir wollen zunächst einmal damit zufrieden sein, dass wir den ersten Schritt getan haben: Wir fanden eine Schreibweise für beide Schlüsse, die die Beziehungen zwischen ihnen deutlich werden lässt.

Was die eine in einem konkreten Fall (in Bezug auf eine Platte) ausdrückt:	das bringt die andere allgemein (in Bezug auf alle möglichen Gegenstände) zum Ausdruck:
$$\frac{Ep \to MP}{\sim Mp \to \sim EP}$$	$$\frac{\forall x(Ex \to Mx)}{\forall x(\sim Mx \to \sim Ex)}$$

Bisher konnten wir Aussagen nur so weit zerlegen, bis wir auf Elementaraussagen stießen: Aus diesen als unteilbar angesehenen Atomen wurden mit Hilfe der logischen Operationen die zusammengesetzten, "molekularen" Aussagen aufgebaut.
Die Illusion der Unzerlegbarkeit der Elementaraussagen ist nun zerstört. Wir haben begonnen, in die Feinstruktur der logischen Atome einzudringen.

Aufgaben

[3] 1. Wir betrachten die beiden folgenden Aussageformen:
(1) Wenn □ aus Eisen ist, so wird □ von einem Magneten angezogen;
(2) Wenn □ nicht von einem Magneten angezogen wird, so ist □ nicht aus Eisen.
Es ist der Wahrheitswert der Aussagen zu bestimmen, die wir aus diesen Aussageformen erhalten, wenn das Quadrat durch die folgenden Satzteile ersetzt wird[4]
a) Das Stück Weicheisen;
b) Das Stück Speck;
e) "Eisen" (Die Anführungsstriche sollen andeuten, dass es sich hier nicht um ein chemisches Element handelt, das wir auch mit Fe bezeichnen könnten, sondern um ein Wort der deutschen

[3]Wir möchten dem Leser davon abraten, die Aufgaben zu überspringen und das Buch einfach weiterzulesen. Die Aufgaben sind in diesem Band noch wichtiger als im ersten. Wenn es auch nicht gelingen sollte, alle Aufgaben zu lösen, so kann auch das erfolglose Bemühen von Nutzen sein. Am Schluss des Buches findet der Leser die Lösungen der Aufgaben.
[4]Unter Beachtung der Regeln der deutschen Sprache.

Sprache. Im Falle c) ist das Quadrat durch dieses aus fünf Buchstaben bestehende Wort zu ersetzen.)

2. Alle Menschen sind sterblich.
Welche der nachfolgenden Sätze können als gleichbedeutende Formulierung dieser Aussage angesehen werden?
a) x ist sterblich.
b) Wenn x ein Mensch ist, so ist x sterblich.
e) Jedes x ist sterblich.
d) Wie immer x beschaffen sein mag, es gilt: Wenn x ein Mensch ist, so ist x sterblich.
e) Für alle x gilt: x ist sterblich, wenn x ein Mensch ist.

Man schreibe die Behauptungen der Aufgaben 3 bis 11 und 13 unter Benutzung logischer Symbole und der angegebenen Bezeichnungen nieder:

3. Ich kam, ich sah, ich siegte.
Bezeichnungen[5]

$K\square = \square$ kam
$S\square = \square$ sah
$G\square = \square$ siegte
i $=$ ich

4. Alles ist in Bewegung - sagt man frei nach Heraklit. Im Original bedeutet der Ausspruch eher Alles fließt oder Alles verändert sich. Bleiben wir bei der letzten Formulierung.
$V\square = \square$ verändert sich.

5. Überall ist es schön, aber am schönsten ist es zu Hause.
$S\square =$ am Ort $\square$ ist es schön,
$T\square =$ am Ort $\square$ ist es am schönsten,
h $=$ zu Hause.

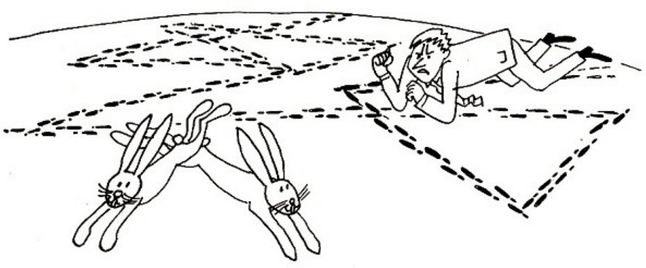
(Die Bezeichnungen führen hier allerdings zu einer etwas steifen sprachlichen Form der Aussage. Wir wollen uns darum nicht kümmern, ebenso lassen wir außer acht, dass "aber" eigentlich einen Gegensatz zum Ausdruck bringt.)

6. Die folgenden Behauptungen (die übrigens zum Teil falsch sind) beziehen sich auf ganze Zahlen. Für die Aussageform "□ ist gerade" führen wir die abkürzende Schreibweise "G □" ein. Die Aussageform "□ ist ungerade" ist dann natürlich die Negation von "□ ist gerade", wir können sie deshalb in der Form "$\sim$G □" niederschreiben.

a) 6 ist gerade;	b) 9 ist ungerade;
c) a ist gerade;	d) b ist ungerade;
e) Jede Zahl ist gerade;	f) Nicht jede Zahl ist gerade;
g) Jede Zahl ist ungerade;	h) Nicht jede Zahl ist ungerade;
i) Jede Zahl ist gerade oder ungerade;	j) Jede Zahl ist sowohl gerade als auch ungerade;

*k) Wenn m gerade ist, ist n ungerade;
*l) Wenn eine Zahl gerade ist, so ist die um 1 größere Zahl ungerade.

[5] "K $\square = \square$ kam" bedeutet, dass für die "□ kam" die abkürzende Schreibweise "K □" eingeführt wird. Analog sind die anderen Bezeichnungen zu verstehen.



7. Wer nach zwei Hasen läuft, fängt keinen.
L □ = □ läuft nach zwei Hasen,
F □ = □ fängt einen Hasen.
(Er fängt keinen Hasen bedeutet einfach Es gilt nicht: Er fängt einen Hasen.)

8. Es ist nicht alles Gold, was glänzt, aber wenn der Stempel auf dem Ring echt ist, so ist der Ring aus Gold.
G □ = □ ist aus Gold, L □ = □ glänzt, E □ = □ ist echt,
s = der Stempel, r = dieser Ring.

9. a) Es ist nicht immer Sonnenschein.
b) Ich muss immer lachen, wenn ich an Anita denke.
S □ = Zum Zeitpunkt □ ist Sonnenschein,
L □ = Zum Zeitpunkt □ muss ich lachen,
A □ = Zum Zeitpunkt □ denke ich an Anita.

10. a) Was mein ist, ist dein, und was dein ist, ist mein.
M □ = □ ist mein,
D □ = □ ist dein.

*b) Ich gebe dann Trinkgeld, wenn ich höflich bedient werde.
*c) Ich gebe nur dann Trinkgeld, wenn ich höflich bedient werde.
T □ = bei der Gelegenheit □ gebe ich Trinkgeld,
B □ = bei der Gelegenheit □ werde ich höflich bedient.
(Achtung: Mathematiker sind im Nachteil!)
d) Nur dann geschehen große Taten, wenn Helden leben, die sie zu vollbringen wagen. (Ady)
T □ = in der Situation □ geschehen große Taten,
H □ = in der Situation □ gibt es Helden, die große Taten zu vollbringen wagen.

*11. Nicht alle Mäntel sind teuer, die ich im Warenhaus gesehen habe, aber von denen, die nicht teuer sind, gefiel mir weder die Farbe, noch passte mir einer.
M □ = □ ist Mantel,
S □ = ich habe □ im Warenhaus gesehen,
T □ = □ ist teuer,
P □ = □ passte mir,
G □ = die Farbe von □ gefiel mir.

12. Mit welcher der nachstehenden Formeln können wir die logische Struktur des berühmten Ausspruches von Julius Caesar "Die Würfel sind gefallen"beschreiben?

a) Wf c) $\forall x Wx$ e) $\forall x(Wx \rightarrow Fx)$
b) Fw d) $\forall x Fx$ f) $\forall x(Fx \rightarrow Wx)$

Was bringen die übrigen Formeln zum Ausdruck?

13. (In dieser Aufgabe geben wir keine Anleitung für die Wahl der Bezeichnungen.)
a) Dieses Kaninchen ist ein Hauskaninchen.
b) Die Hauskaninchen sind Verwandte der Wildkaninchen.
e) In dieser Aufgabe geben wir keine Anleitung für die Wahl der Bezeichnungen.
d) Nicht in jeder Aufgabe geben wir eine Anleitung für die Wahl der Bezeichnungen.

2 Logische Funktionen einer Variablen. Mengen

2.1 Große Buchstaben und kleine Buchstaben

Bisher konnten wir Aussagen nur dann weiter in ihre Bestandteile zerlegen, wenn sie mit Hilfe von logischen Operationen aufgebaut waren. Aussagen, die wir auf diese Weise nicht mehr weiterzerlegen konnten, nannten wir Elementaraussagen und bezeichneten sie mit einem einzigen großen Buchstaben.
Mit Recht konnten wir auch Aussagen mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen. So können wir zum Beispiel die Aussage

Harras schläft, und Mauz ist auf den Baum geklettert

mit dem Buchstaben A bezeichnen. Wenn wir aber an ihre logische Zerlegung gehen, so gelangen wir zu einer - mit Mitteln der Aussagenlogik nicht weiter zerlegbaren - Aussage der Form $H \wedge M$.
(Wir haben hierbei nur der Bequemlichkeit halber die Anfangsbuchstaben von Harras und Mauz benutzt. Ebenso gut hätten wir auch zwei andere - natürlich verschiedene! - Buchstaben verwenden können.)

Wir analysieren den Satz jetzt genauer. Die Struktur des ersten Teils könnten wir so beschreiben: Sh (Harras schläft), die des zweiten Teils so: Km (Mauz ist auf den Baum geklettert), so dass wir insgesamt erhalten:

$$Sh \wedge Km$$

Der Leser wird es vielleicht seltsam finden, dass wir jetzt die Namen Harras und Mauz mit kleinen Buchstaben abgekürzt haben. Die Reihenfolge der Buchstaben entspricht auch nicht der Reihenfolge der Wörter im Satz.
Mit solchen Belanglosigkeiten wollen wir uns aber nicht aufhalten. Unsere Vereinbarung aus dem ersten Kapitel - die Vereinbarung, dass wir mit einem vorangestellten großen Buchstaben alles das bezeichnen, was über etwas ausgesagt wird, und mit einem nachgestellten kleinen Buchstaben das, von dem etwas ausgesagt wird - ist in der mathematischen Logik so verbreitet, dass es sich nicht lohnt, sie abzuändern.[6]

2.2 Subjekt und Prädikat

In unserem Beispiel standen die großen Buchstaben für Prädikate, die kleinen für Subjekte. Ist das immer so? Und wie steht es mit den anderen Satzteilen? Sehen wir uns noch einmal das Beispiel mit dem Magneten an:

Ep bedeutete "Die Platte ist aus Eisen". Hier ist "Die Platte" das Subjekt, "ist aus Eisen" das Prädikat. E ist das Zeichen für das Prädikat, p das für das Subjekt.
Mp bedeutete "Ein Magnet zieht die Platte an". Subjekt: Ein Magnet, Prädikat: zieht an, Objekt: die Platte. Hier geht schon alles durcheinander. M bezeichnet sowohl Subjekt als auch Prädikat (Ein Magnet zieht an), p das Objekt.

[6] Diese Vereinbarung hängt mit der üblichen und zwar damit, dass Mengen meist mit großen, ihre Elemente aber mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden (wir werden gleich noch sehen, was Mengen mit Aussagen zu tun haben), und andererseits damit, dass das Zeichen für das Argument einer Funktion gewöhnlich hinter das Funktionszeichen gestellt wird, wie z. B. bei $\sin x$. Die letztere Bezeichnung bedeutet: der Sinus von x.

Sagen wir allerdings Die Platte wird von einem Magneten angezogen, so ist wieder alles in Ordnung. Warum aber schien uns die Bezeichnung Mp von Anfang an natürlich? Wieso haben wir nicht zunächst an andere Bezeichnungen gedacht wie etwa Zm ($Z\square = \square$ zieht die Platte an, $m =$ ein Magnet)?

Deshalb, weil - unabhängig von der Formulierung - in beiden Fällen von einer bestimmten Platte und einer bestimmten Eigenschaft dieser Platte die Rede war (der Eigenschaft, aus Eisen zu sein, von einem Magneten angezogen zu werden).

2.3 Eigenschaft und Ding. Ausblick auf die Relationen

Die grammatische Satzanalyse kann also, wie wir gesehen haben, in die Irre führen.[7]
Versuchen wir es also anders: Die kleinen Buchstaben bedeuten irgendwelche Dinge, die großen irgendwelche Eigenschaften dieser Dinge. Sowohl Dinge als auch Eigenschaften muss man dabei in einem sehr allgemeinen Sinn verstehen. Dinge zum Beispiel können nicht nur Gegenstände sein, sondern unter anderem auch Menschen, Zahlen, Zeitpunkte und Ereignisse.

Den Begriff der Eigenschaft müssen wir, soweit es möglich ist, noch allgemeiner auffassen. Zu den Eigenschaften von Mauz gehört nicht nur, dass er launisch oder anschmiegsam ist, sondern auch, dass er ein Kater ist, dass er gestern Nachmittag auf einen Baum geklettert ist, ja selbst, dass er gestern Nachmittag von Harras gejagt worden ist.
Andererseits könnten wir zu den Eigenschaften von Harras hinzufügen, dass er gestern Nachmittag Mauz gejagt hat. Wir bezeichnen die zuletzt genannte "Eigenschaft" von Mauz mit Hm, die eben erwähnte Eigenschaft von Harras mit Mh.

Es ist klar, dass schon hier nicht so sehr von Eigenschaften von Mauz und Harras die Rede ist, sondern vielmehr von einer Beziehung zwischen beiden Tieren, einer Relation. Wir behaupten nicht getrennt etwas von Mauz oder Harras, sondern etwas von beiden gemeinsam, dass nämlich der eine (Harras) gestern Nachmittag den anderen gejagt hat.
Wir empfinden daher eine solche Bezeichnung als richtig, bei der sowohl Mauz als auch Harras als "Dinge" auftreten und mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden, während die zwischen ihnen bestehende Relation durch einen großen Buchstaben ausgedrückt wird, den wir vor die kleinen Buchstaben stellen, z.B. so: Jhm.

Durch die Reihenfolge der kleinen Buchstaben können wir zum Ausdruck bringen, wer die Rolle des Jägers spielte. Wenn etwa Mauz Harras gejagt hätte, so hätten wir schreiben können: Jmh.
Allgemein ersetzen wir die Aussageform "$\triangledown$ jagte $\bigcirc$ gestern Nachmittag" durch $J\triangledown\bigcirc$.
Ob diese Behauptung wahr ist oder nicht, hängt davon ab, was wir für das Viereck und den Kreis einsetzen. Der Wahrheitswert der Behauptung hängt von zwei Variablen ab (so seltsam es auch klingen mag, dass wir ein Viereck eine Variable nennen), ist also eine logische Funktion von zwei Variablen.

Bleiben wir aber einstweilen bei logischen Funktionen einer Veränderlichen. Auch in der Aussageform "$\square$ ist eine ganze Zahl" ist das Quadrat eine Variable. Man darf in diesem Zusammenhang natürlich nicht an eine abnehmende, zunehmende oder bald ab-, bald zunehmende physikalische Größe denken.
In der Mathematik und der mathematischen Logik verstehen wir nichts Derartiges unter einer Variablen.

[7] D.h., wenn wir so vorgehen, wie wir es in der Schule gelernt haben.

Viel besser träfe hier das Wort "Freistelle": Eine Variable oder Freistelle hält den Platz frei, an dem wir gegebenenfalls die Bezeichnung oder den Namen irgendeines Dinges eintragen können. Dies macht die Schreibweise "□ ist eine gerade Zahl" oder "G □" deutlich.

Wie sehen nun die Dinge aus, deren Bezeichnungen wir in der Aussageform "G □" gegebenenfalls für □ einsetzen können?
Sind es die geraden Zahlen? Nicht nur sie kommen in Frage, sondern alle ganzen Zahlen. Wir könnten auch schreiben G 3, nur wäre das eben nicht wahr. Für die Variable kann auch ein Zeichen eingesetzt werden, das die Behauptung falsch werden lässt, nur einen Sinn muss sie haben.
So hätten wir zum Beispiel nicht G$\frac{2}{7}$ schreiben können, da für gebrochene Zahlen die Eigenschaft gerade zu sein nicht definiert ist. Wenn g ein Glas Wasser bedeutet, so hätte Gg ebenfalls keinen Sinn bei der hier verwendeten Bedeutung von G.

2.4 Menge und Element

Im Fall der Aussageform G □ waren die für das Einsetzen in Frage kommenden Dinge die ganzen Zahlen. Sie bilden die Menge, die unseren Überlegungen zugrunde liegt. Mit einem ziemlich langen Wort können wir sie auch als Individuenbereich oder als die in Frage kommende Grundmenge bezeichnen.
Wir wissen nun also, was an Stelle von □ in Frage kommt. Es handelt sich aber um etwas ganz anderes, wenn man danach fragt, welche der erlaubten Einsetzungen für □ die betreffende Behauptung wahr werden lässt. Aus G □ wird nur dann eine wahre Aussage (bei der gegebenen Bedeutung von G), wenn für □ das Zeichen für eine gerade Zahl eingesetzt wird. Die Gesamtheit aller geraden Zahlen bildet die Erfüllungsmenge von G □.

Die Aussageform G □ selbst ist weder wahr noch falsch. Sie hat keinen Wahrheitswert, sondern nur eine Erfüllungsmenge.

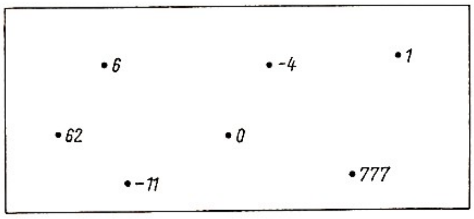


Abb. 1 Grundmenge die ganzen Zahlen

Stellen wir uns einmal vor, dass in dem Viereck auf Abbildung 1 alle ganzen Zahlen enthalten sind und sonst nichts. Dann schreiben wir neben das Viereck den Namen dieser Menge: die ganzen Zahlen.[8] In das Viereck selbst setzen wir andeutungsweise einige Punkte. Diese bedeuten je eine ganze Zahl. Neben sie schreiben wir ihre Benennungen, ganz so wie man auf einer Landkarte neben die gewisse Städte und Dörfer darstellenden Kreise und Punkte die Namen dieser Ortschaften schreibt.

Das Viereck schließt unsere jetzige Grundmenge ein, die im Fall der betrachteten Eigenschaft G (aber auch bei vielen anderen Eigenschaften) in Frage kommt. Die Aussageform "□ ist gerade" oder kürzer G □ sondert aus dieser Grundmenge die Menge der geraden Zahlen aus. Der Einfachheit halber werden wir auch diese Menge mit dem gleichen Buchstaben wie die entsprechende Eigenschaft, also wieder mit G bezeichnen (Abb. 2).

[8] Eine in der Mathematik übliche Schreibweise ist: $\{x|x$ ist eine ganze Zahl$\}$, was bedeutet: Die Menge aller mit x bezeichneten Dinge, für die gilt, dass x eine ganze Zahl ist.

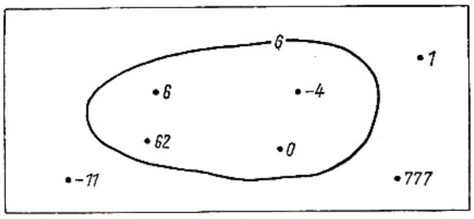


Abb. 2 Grundmenge die ganzen Zahlen

Welche Bedeutung besitzt nun derjenige Teil des Vierecks, der außerhalb der krummlinigen Umgrenzungslinie liegt? Er stellt natürlich die Menge der ungeraden Zahlen dar. (Die Grenzlinie lassen wir aus dem Spiel. Auf ihr kann nichts liegen, weder Punkte für gerade, noch Punkte für ungerade Zahlen.)

Auf diese Weise wählt jede Eigenschaft, jede Aussageform eine gewisse Menge aus der zugehörigen Grundmenge aus. Wir werden uns bemühen, die Grundmenge stets genau anzugeben, obwohl das nicht immer leicht sein wird. Die äußere Umrandung werden wir mitunter auch fortlassen. Die Angabe über die na findet der Leser dann jeweils neben der Abbildung.
Sehen wir uns noch einige Beispiele an (Abb. 3 und 4)! Abbildung 4 bestätigt uns, dass wir die Bezeichnung Hm wirklich zu Recht benutzt haben. Es gibt eine Menge H, deren Elemente die von Harras gestern Nachmittag gejagten Lebewesen sind und zu deren Elementen auf alle Fälle m gehört. Freilich können wir den Sachverhalt, wie schon erwähnt, mit demselben Recht auch mit Mh oder Jhm bezeichnen.

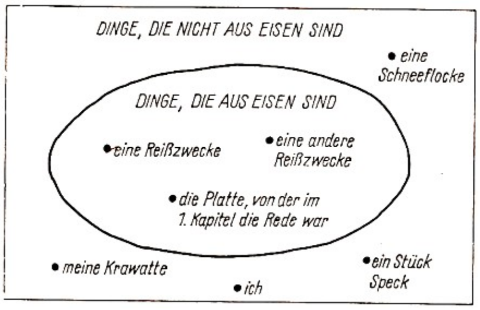


Abb. 3 Grundmenge: die konkreten Dinge

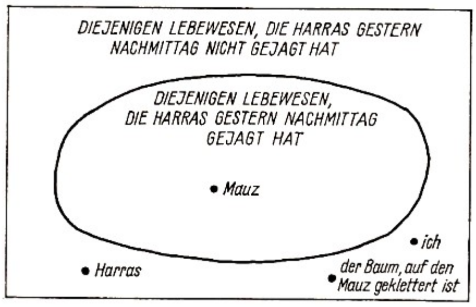


Abb. 4 Grundmenge: die Lebewesen

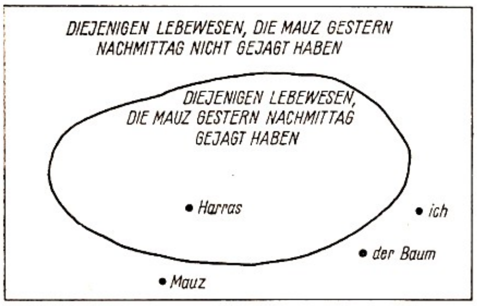


Abb. 5 Grundmenge: die Lebewesen

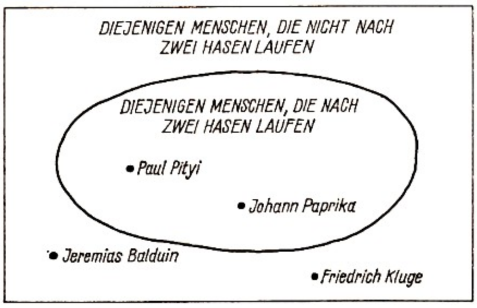


Abb. 6 Grundmenge: die Menschen

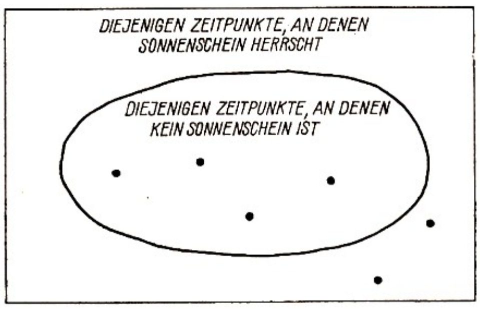


Abb. 7 Grundmenge: die Zeitpunkte

Für Mh können wir gleich eine Zeichnung anfertigen (Abb. 5). Die Formel Jhm können wir vorläufig noch nicht in zeichnerischer Form darstellen, aber auch sie kommt noch an die Reihe. Einige weitere Beispiele zeigen die Abbildungen 6 und 7.

Auch Gleichungen und Ungleichungen sind Aussageformen. Die Rolle der Grundmenge spielt hierbei jene Zahlenmenge, in der wir die Lösungen suchen. Die Erfüllungsmenge ist die Menge der Lösungen der Gleichung bzw. Ungleichung. Hier sind einige Beispiele dafür (Abb. 8 bis 15); wer sie zu schwierig findet, mag sie überspringen. Wir werden uns nicht mehr darauf beziehen.

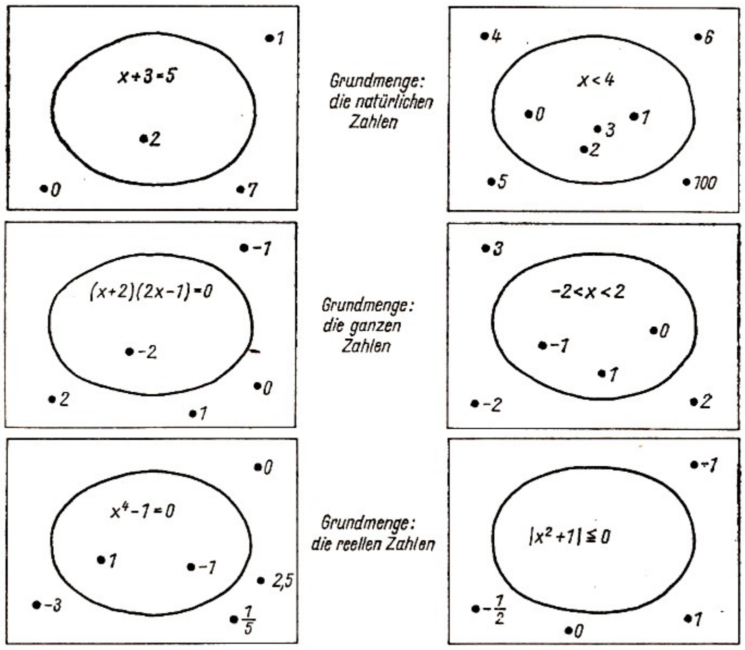


Abb. 8-13

(In der Abbildung 9 z. B. hätten wir entsprechend unseren obigen Bemerkungen in das krummlinig begrenzte Gebiet eigentlich schreiben müssen: "Diejenigen Werte von x, für die $x < 4$ ist", und in das Äußere des krummlinig begrenzten Gebiets: "Diejenigen Werte von x, für die x nicht kleiner ist als 4" usw.

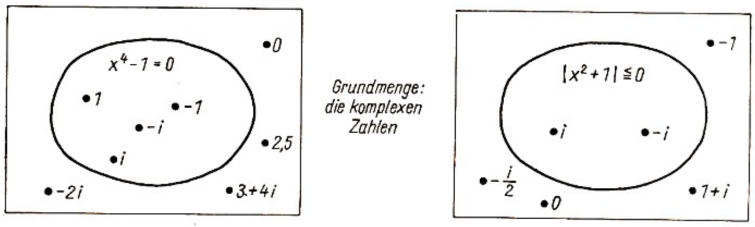


Abb. 14,15

Der Kürze halber haben wir in den Abbildungen 8 bis 15 stattdessen nur die Gleichungen bzw. Ungleichungen und einige Elemente der betreffenden Mengen angegeben.)

2.5 Zwei Mengen in einer Grundmenge

Wir betrachten jetzt gleichzeitig mehrere Eigenschaften in einer Grundmenge. Nehmen wir zum Beispiel als Grundmenge die Menge aller (sagen wir zu diesem Zeitpunkt lebenden) Tiere. Dann bestimmt die Aussageform □ ist ein Hund (kurz: $H\square$) die Teilmenge, die aus allen Hunden, und die Aussageform ist eine Katze ($K\square$) die Teilmenge, die aus allen Katzen besteht (Abb. 16).

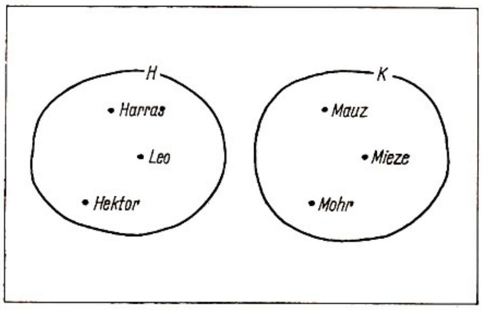


Abb. 16 Grundmenge: die Tiere

Zur ersten Menge gehören alle jene Tiere, für die die Aussageform $H\square$ erfüllt ist, zur zweiten alle jene Tiere, für die die Aussageform $K\square$ erfüllt ist. Beide Mengen haben wir durch verschiedene Bereiche dargestellt, da es kein Tier gibt, das sowohl ein Hund als auch eine Katze wäre.

Wir stellen nun die Menge der Hunde und die Menge der Haustiere dar (Abb. 17):

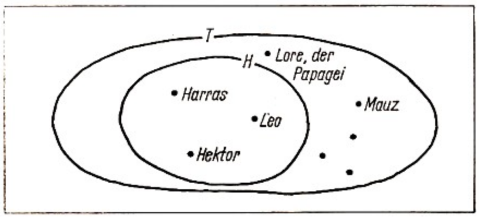


Abb. 17 Grundmenge: die Tiere

Da jeder Hund ein Haustier ist - ausgedrückt durch eine Formel: $\forall x(Hx \to Tx)$ -, enthält die Menge der Haustiere die Menge der Hunde als Teilmenge. Der Leser kann sich leicht überlegen, wohin die Menge der Katzen in der Zeichnung gehört, wenn er beachtet, dass die Aussage $\forall x(Kx \to Tx) \wedge \sim Kl$ wahr ist. (Hierbei bezeichne H die Menge der Hunde, K die Menge der Katzen, T die Menge der Haustiere und l den Papagei Lore.)

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Mengen der Haustiere und der Säugetiere darzustellen (Abb. 18). Harras, Mauz und ihre Artgenossen gehören beiden an. Lore gehört nur zur Menge der Haustiere. Bagira, der schwarze Panther, und Sir Kan, der Tiger, gehören nur zur Menge der Säugetiere, die wir mit G bezeichnen; Ka, die Riesenschlange, gehört keiner der beiden Mengen an.

Jetzt aber stellen wir neben der Menge aller Wirbeltiere die Menge aller Tiere dar, die ein Knochenskelett besitzen.

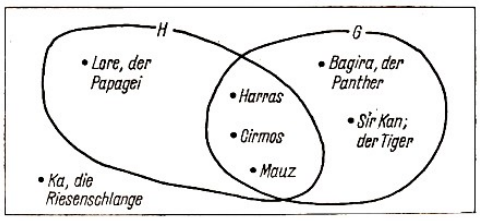


Abb. 18 Grundmenge: die Tiere

Wir bezeichnen mit $S\square$ die Aussageform $\square$ hat ein Skelett und mit $W\square$ die Aussageform $\square$ ist ein Wirbeltier. Wir wissen, dass jedes Wirbeltier - jedoch kein einziges anderes - ein Skelett besitzt. Dies können wir folgendermaßen veranschaulichen (Abb. 19):

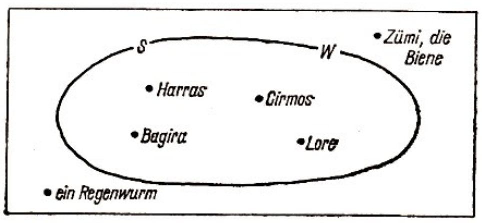


Abb. 19 Grundmenge: die Tiere

Wir wollen die Beziehung zwischen den Wirbeltieren und den Tieren mit Skelett durch eine Formel ausdrücken. Jedes Wirbeltier besitzt ein Knochenskelett und jedes Tier mit einem solchen ist ein Wirbeltier, d.h.

$$\forall x(Wx \to Sx) \land \forall x(Sx \to Wx)$$

Wir können es aber auch anders sagen. Zunächst ohne logische Symbole:
Für jedes x gilt: Wenn x ein Wirbeltier ist, so hat x ein Knochenskelett und umgekehrt, wenn x ein Knochenskelett hat, so ist x ein Wirbeltier. Nun dasselbe mit Hilfe logischer Symbole ausgedrückt:

$$\forall x[(Wx \to Sx) \land (Sx \to Wx)]$$

Wir wissen bereits, dass sich der Teil in der eckigen Klammer auch kürzer schreiben lässt. Somit erhalten wir:

$$\forall x(Wx \leftrightarrow Sx)$$

(Letzteres können wir z. B. wie folgt lesen: Die Wirbeltiere und nur diese besitzen ein Knochenskelett.)
Diese Formel bringt also zum Ausdruck, dass die beiden Mengen zusammenfallen. Natürlich ist sowohl die Aussage $\forall x(Wx \to Sx)$ als auch die Aussage $\forall x(Sx \to Wx)$ wahr. Sie können - beide für sich genommen - durch die folgenden Abbildungen dargestellt werden (Abb. 20 und 21).

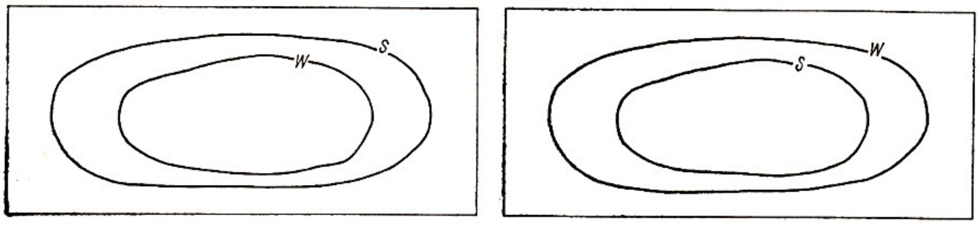


Abb. 20,21: Grundmenge: die Tiere

Die konjunktive Verknüpfung der beiden Formeln zu einer einzigen gestattet aber nach unserem bisherigen Kenntnisstand nur die in Abbildung 19 angegebene Darstellung.
Es gibt zwei Abbildungen, mit denen wir bisher noch keine Formeln verbunden haben. Bei der Darstellung der Mengen der Haustiere und der Säugetiere erwies es sich als wichtig, dass beide Mengen gemeinsame Elemente besitzen: Es gibt ein Tier (und nicht nur eins), das sowohl Haustier als auch Säugetier ist. In grober Formulierung:

Es gibt ein x, so dass x Haustier und x Säugetier ist.

Den zweiten Teil des Satzes können wir formalisieren: Es gibt ein x, so dass $(Tx \land Gx)$.

Wir bezeichnen mit $\exists x$ den Satzteil "Es gibt ein x, so dass" oder "Es gibt ein x, für das". Mit dieser Bezeichnung erhalten wir die folgende Formel:

$$\exists x(Tx \land Gx)$$

Das umgekehrte E geht vielleicht auf das englische "exists", d.h. "es existiert", oder den Anfangsbuchstaben eines verwandten Wortes zurück.
Wählt man für T und G Mengen, die "sich schneiden", wie die der Haustiere und der Säugetiere, so ist die in dieser Formel enthaltene Behauptung auf jeden Fall wahr. An Hand

unserer Zeichnungen überzeugen wir uns davon, dass bei der oben angegebenen Bedeutung der Symbole sowohl

$$\exists x(Hx \wedge Tx) \qquad \text{als auch} \qquad \exists x(Wx \wedge Sx)$$

wahr sind.
Die Aussage $\exists x(Hx \wedge Kx)$ ist dagegen nicht wahr. Vielmehr ist ihre Negation wahr:

$$\sim \exists x(Hx \wedge Kx)$$

Mit Worten haben wir das bereits formuliert (Es gibt kein Tier, das sowohl Hund als auch Katze ist). Mit unseren neuen Bezeichnungen konnten wir diese Aussage nun auch in eine Formel kleiden.

2.6 Quantoren. Wodurch wird aus einer Aussageform eine Aussage?

Die Zeichen $\forall$ und $\exists$ werden uns noch häufiger begegnen. Wir wollen ihnen daher einen Namen geben. Man nennt sie Quantoren[9], und zwar $\forall$ den Allquantor und $\exists$ den Existenzquantor[10]. Aus unseren Beispielen geht hervor, dass wir mit Hilfe von Quantoren aus Aussageformen Aussagen herstellen können.

Von den beiden Aussageformen $T\square \wedge G\square$ und $T\square \vee G\square$ können wir nicht sagen, sie hätten den Wahrheitswert W bzw. F. Wir können nur feststellen, dass sowohl die eine als auch die andere dieser Aussageformen für bestimmte Elemente einer gewissen Menge den Wahrheitswert W, in allen anderen Fällen den Wert F annehmen.
Die Aussagen $\exists x(Tx \wedge Gx)$ und $\exists x(Tx \vee Gx)$ besitzen dagegen einen ganz bestimmten Wahrheitswert, und zwar den Wert W. Ebenso haben die Aussagen $\forall x(Tx \wedge Gx)$ und $\forall x(Tx \vee Gx)$ einen bestimmten Wahrheitswert, und zwar in beiden Fällen den Wert F.

Aus Aussageformen können wir also mit Hilfe von Quantoren Aussagen erzeugen. Daher sagt man gewöhnlich, die Quantoren binden die Variablen. Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind, werden freie Variablen genannt. In unseren obigen Beispielen banden die Quantoren die mit dem Quadrat bezeichnete freie Variable.
Wir haben dies durch die Änderung der Bezeichnung noch betont. Viele Logik-Bücher machen zwischen freien und gebundenen Variablen in der Bezeichnung keinen Unterschied. Die Unterscheidung der Bezeichnungen bietet jedoch große Vorteile.

Aus Aussageformen kann man auch auf andere Weise Aussagen gewinnen. Ein Beispiel hierfür ist uns schon begegnet, als wir in einer vorgelegten Aussageform für eine Variable stets die Bezeichnung eines bestimmten Elements der Grundmenge eingesetzt haben.
So wird z. B. aus der Aussageform $\square$ ist ein Säugetier und $\square$ ist ein Haustier die Aussage Harras ist ein Säugetier und Harras ist ein Haustier. Als Formel geschrieben: Aus $G\square \wedge T\square$ wird $Gh \wedge Th$.

[9] Das Wort Quantor entstand durch Verkürzung aus Quantifikator. Die Worte für alle x und es gibt ein x, das verleihen nämlich den auf sie folgenden Aussageformen einen bestimmten quantitativen Charakter, d. h., sie sind in jedem Fall wahr oder es gibt mindestens einen Fall, in dem sie wahr sind.
[10] Man nennt den Allquantor auch Generalisator, den Existenzquantor auch Partikularisator.

2.7 Die zwischen zwei Mengen möglichen Beziehungen. Die leere Menge

In verschiedenen Beispielen sind uns Mengen begegnet, die einander schneiden, die zusammenfallen oder von denen die eine eine Teilmenge der anderen ist.
Wir wollen nun alle möglichen Beziehungen zwischen zwei Mengen zusammenstellen und nebeneinander betrachten.

Gegeben seien eine beliebige Grundmenge und hierin zwei beliebige Mengen A und B ... Nein, das kann man sich doch nicht richtig vorstellen. Wählen wir als Grundmenge lieber eine Schulklasse.
Es muss nicht unbedingt eine Schulklasse sein, wir haben sie nur eben als Beispiel gewählt.

Wir wollen alle möglichen Beziehungen zwischen den Mengen A und B zusammenstellen. Dazu konkretisieren wir diese Mengen nun; jedoch so, dass wir von ihnen nichts weiter als bekannt voraussetzen. Stellen wir uns etwa vor, dass es irgendwo einen Tunnel und eine Höhle gibt.
Mit $A\Box$ bezeichnen wir die Tatsache, dass ein Schüler $\Box$ dieser Klasse schon einmal in dem Tunnel gewesen ist, mit $B\Box$ hingegen die Tatsache, dass $\Box$ schon einmal in der Höhle war. Die Erfüllungsmengen dieser Aussageformen seien A bzw. B, und zwar sei A die Menge der Schüler, die schon einmal im Tunnel waren, und B die Menge der Schüler, die in der Höhle waren.
Welche Fälle sind nun möglich?

Auf Grund unserer bisherigen Beispiele können wir sofort die folgenden Fälle skizzieren; wir haben sie in den Abbildungen 22 bis 25 dargestellt.

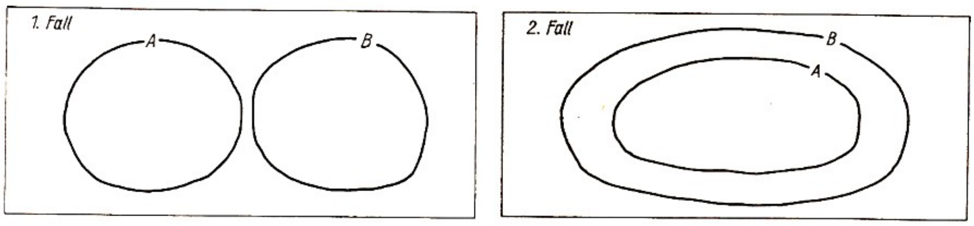


Abb. 22, 23

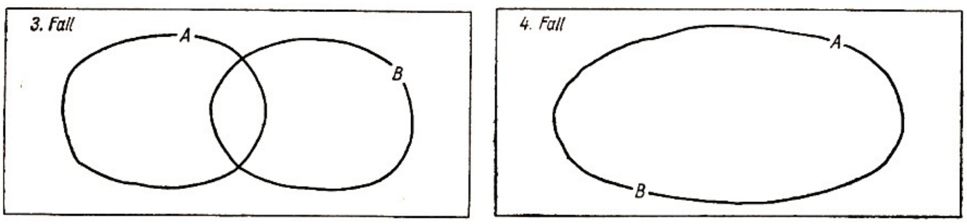


Abb. 24, 25

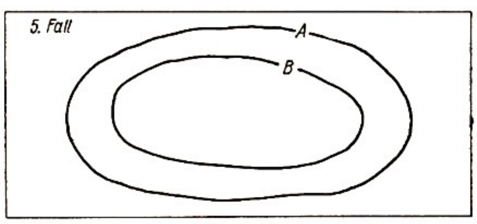


Abb. 26

Ist diese Zusammenstellung vollständig? Das kann man nicht sagen. Vielleicht sind schon so viele Schüler im Tunnel gewesen, dass sich unter ihnen alle diejenigen befinden, die auch schon in der Höhle waren.

Das ist durchaus nicht dasselbe wie das in Abbildung 23 Dargestellte, die Verhältnisse liegen vielmehr genau umgekehrt.
Wir nehmen daher in unsere Zusammenstellung noch einen fünften Fall auf (Abb. 26).
Wir wollen nun unter diesen fünf Fällen Ordnung schaffen. Vielleicht können uns dabei unsere Formeln helfen.

Fall 1: $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$. Diese Formel ist nur in dem in Abbildung 22 dargestellten Fall gültig.

Fall 2: $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$. Das gilt auch noch im Fall 4, in weiteren Fällen jedoch nicht. In den Fällen 4 und 5 haben wir die Formel $\forall x(Bx \rightarrow Ax)$.

Über den dritten Fall haben wir noch gar nichts gesagt. Zunächst können wir in diesem Fall jedoch feststellen: $\exists x(Ax \wedge Bx)$. Das gilt aber auch in den Fällen 2, 4 und 5 und ist nur in einem Falle falsch, dann nämlich, wenn gilt $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$, d.h. im ersten Fall.
Das leuchtet ein, denn $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ ist die Negation von $\exists x(Ax \wedge Bx)$. Die negierte Aussage besagt, dass es keinen Schüler gibt, der an beiden Orten war, während die unverneinte Aussage behauptet, dass solch ein Schüler existiert.
Beide Behauptungen können nicht gleichzeitig wahr sein, eine von beiden ist jedoch sicher wahr, im Fall 1 die negierte Aussage, in allen anderen Fällen die unverneinte. Neben $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ suchen wir nun auch noch die Darstellung der negierten Formeln, die den $\forall$-Quantor enthalten: $\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$ und $\sim \forall x(Bx \rightarrow Ax)$.

Die erste behauptet, kurz gesagt: Nicht jeder, der im Tunnel war, war in der Höhle. Das ist in den Fällen 1, 3 und 5 wahr, denn in den Fällen 2 und 4 gilt ja $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$.
$\sim \forall x(Bx \rightarrow Ax)$ ist dagegen in den Fällen 1, 2 und 3 erfüllt, d. h. genau dann, wenn $\forall x(Bx \rightarrow Ax)$ nicht gilt.

Fassen wir zusammen, wie diese drei Formelpaare die fünf betrachteten Fälle aufteilen:

$\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ 1|2345 $\exists x(Ax \wedge Bx)$
$\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 135|24 $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
$\sim \forall x(Bx \rightarrow Ax)$ 123|45 $\forall x(Bx \rightarrow Bx)$

Die folgende Abbildung gibt diese Einteilungsmöglichkeiten anschaulich wieder (Abb. 27).

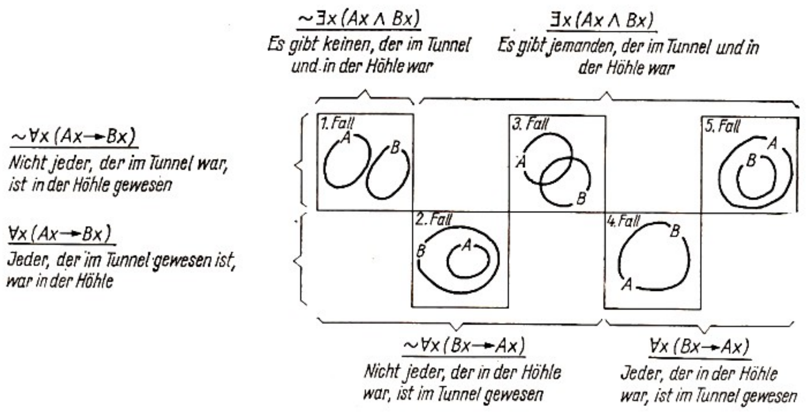


Abb. 27

Wir sind aber noch immer nicht zufrieden. Ist es denn sicher, dass überhaupt jemand aus der Klasse in dem Tunnel bzw. in der Höhle war? Vielleicht ist in keinem von beiden jemand gewesen. Bisher haben wir angenommen, dass weder A noch B leer sind. Nur diese Fälle haben wir klassifiziert. Dadurch haben wir aber unseren Gesichtskreis ungerechtfertigt eingeengt. Bisher ließen wir die auf den Abbildungen 28 bis 30 dargestellten drei Fälle außer acht.

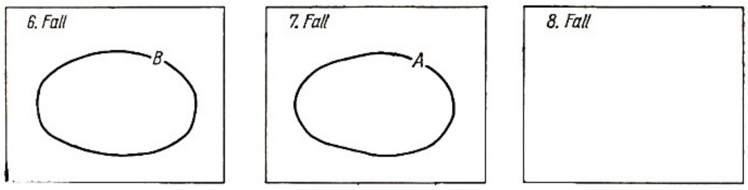


Abb. 28-30

Es gibt also insgesamt acht Fälle! Das ist eine beruhigende Zahl. Beruhigender als 5. Wir haben schon feststellen können, dass in der Logik Zahlen wie 4, 8, 16 und überhaupt die Potenzen von 2 eine große Rolle spielen. Die Anzahl der Zeilen der Wahrheitswerttabellen, der möglichen logischen Operationen und nun auch die der Beziehungen zweier Mengen zueinander sind derartige Zahlen.

Betrachten wir nun auch die drei neuen Fälle mit Hilfe unserer Formelsprache.
$\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ trifft in allen drei Fällen zu. Das ist besonders deshalb erfreulich, da dadurch eine zunächst aufgetretene Unregelmäßigkeit aufgehoben wird. Bisher teilten diese Formel und ihre Negation die betrachteten Fälle sehr ungleichmäßig in zwei Klassen ein (fünf Fälle kann man natürlich auch nicht gleichmäßig auf zwei Klassen verteilen), jetzt aber trifft jede dieser Formeln in vier Fällen zu. Wir schreiben diese Fälle neben die Formeln:

a) $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ 1 6 7 8 b) $\exists x(Ax \wedge Bx)$ 2 3 4 5

Es sollte uns nicht wundern, wenn auch das zweite Formelpaar solche Regelmäßigkeit verursachte. $\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$ bedeutet:
Nicht jeder, der im Tunnel war, war auch in der Höhle, oder mit anderen Worten:
Es gibt jemanden, der im Tunnel, nicht aber in der Höhle war. Das ist außer in den drei bisherigen Fällen (1., 3., 5.) nun in einem weiteren Fall wahr, und zwar im siebenten. Die Negation dieser Formel, also $\sim\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$, oder anders geschrieben: $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$, ist in den übrigen vier Fällen wahr:

c) $\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 1 3 5 7 d) $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 2 4 6 8

Es klingt vielleicht etwas ungewohnt, wenn wir in den Fällen 6 und 8 davon sprechen, dass jeder, der im Tunnel war, auch in der Höhle war; denn es ist ja überhaupt niemand im Tunnel gewesen. Das kommt uns aber nur deshalb ungewohnt vor, weil wir im täglichen Leben derartige Aussagen meistens dann machen, wenn wir wissen, dass wirklich Dinge mit den erwähnten Eigenschaften existieren.

Wir handeln jedoch auch im täglichen Leben nicht immer so. Wenn z. B. eine Verordnung besagt, dass jeder an Pocken Erkrankte sich in ärztliche Behandlung begeben muss, so ist diese Verordnung in jedem Dorf gültig, gleichgültig, ob in einem Dorf tatsächlich jemand an Pocken erkrankt ist oder nicht.
Wir können diese Problematik auch von einer anderen Seite her betrachten:

Aus der Aussagenlogik wissen wir, dass die Implikation wahr ist, wenn ihre Prämisse falsch ist. Nun ist aber die Prämisse innerhalb der Aussage $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ stets falsch, wenn A leer ist (weil die Tatsache, dass A leer ist, gerade bedeutet, dass es kein x gibt, für das Ax wahr wäre). Hieraus folgt auch, dass $Ax \rightarrow Bx$ im sechsten und achten Fall für alle x erfüllt ist, kurz gesagt, die Aussage $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ ist in diesen Fällen wahr.

Natürlich liefert auch das dritte Formelpaar ein ähnliches Ergebnis wie das zweite. Beide unterscheiden sich ja auch nur in der Bezeichnung. Wenn wir die Rollen von A und B vertauschen, so erhalten wir das dritte Formelpaar aus dem zweiten. Auch dieses Formelpaar zerlegt also die acht Fälle in zwei Klassen zu je vier Fällen:

e) $\sim \forall x(Bx \to Ax)$ 1 2 3 6, f) $\forall x(Bx \to Ax)$ 4 5 7 8

Eine Menge von acht Elementen auf drei verschiedene Arten zu unterteilen - das erinnert uns an einen dreidimensionalen Würfel, der acht Ecken besitzt, und dessen Eckenmenge man durch Symmetrieebenen in Mengen von je vier Ecken zerlegen kann. Versuchen wir also, die zusammengehörigen Fälle den Ecken ein und derselben Begrenzungsfläche eines Würfels zuzuordnen! Nach kurzem Probieren ist die Anordnung fertig (Abb. 31).

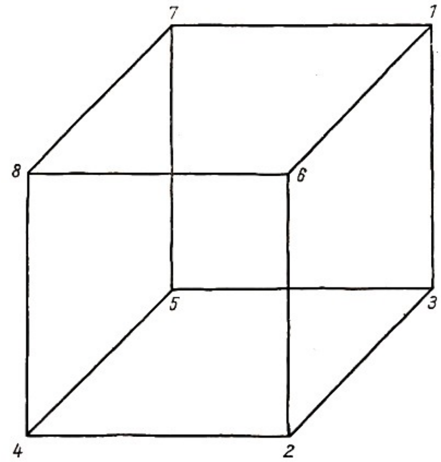


Abb. 31

Dasselbe anschaulicher mit den Abbildungen, die den jeweiligen Fällen entsprechen (Abb. 32):

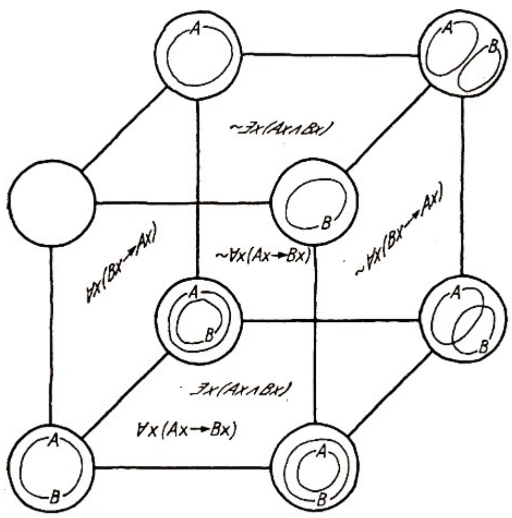


Abb. 32

Vergleichen wir nun die an den acht Ecken des Würfels abgebildeten Zerlegungen der Grundmenge miteinander. Unter ihnen gibt es eine, bei der die Grundmenge in vier Teile zerlegt ist, aber auch solche, bei denen die Grundmenge in drei oder zwei Teile zerlegt ist. Schließlich gibt es noch eine Abbildung, bei der die Grundmenge überhaupt nicht zerlegt ist.

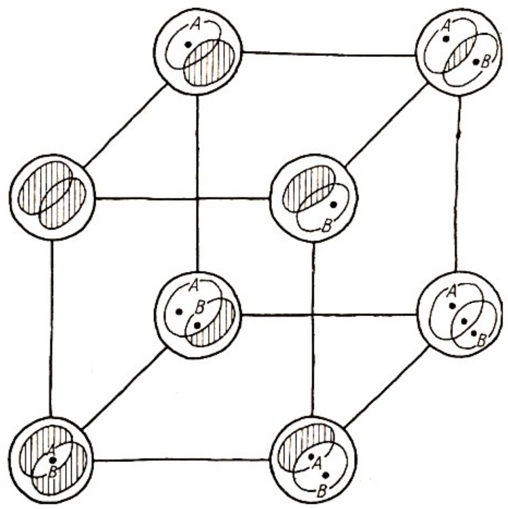


Abb. 33

Obwohl alle acht Abbildungen Spezialfälle darstellen, können wir doch die zuerst erwähnte Abbildung, die an der unteren hinteren rechten Ecke des Würfels angebracht ist, in einem gewissen Sinn als die allgemeinste bezeichnen. Sie ist in dem Sinn nämlich die allgemeinste, dass aus ihr alle anderen auf den übrigen Abbildungen dargestellten Fälle hervorgehen, wenn eines, zwei oder alle drei der von den Kurven umschlossenen Gebiete leer werden. Abbildung 33 veranschaulicht dies.
Die Schraffierung bedeutet hier, dass der entsprechende Gebietsteil leer ist.

Die Angabe eines Punktes - eines Elements der Teilmenge - bedeutet, dass dieser Gebietsteil nicht leer ist. Die Gebiete außerhalb der Kurven haben wir nicht bezeichnet - über sie wissen wir nichts. (Man vergleiche in diesem Zusammenhang Aufgabe 12!)

2.8 Eine Zeichnung an Stelle mehrerer Zeichnungen

Wir wollen. die bei den Abbildungen 32 und 33 benutzten Darstellungsarten vergleichen. Der Einfachheit halber formen wir die Zeichnungen dazu ein wenig um (Abb. 34):

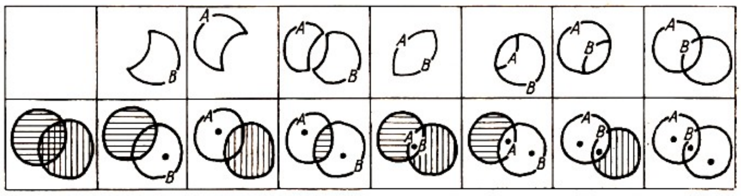


Abb. 34

Wodurch unterscheiden sich in Abbildung 34 die unteren Zeichnungen von den oberen?
Sie unterscheiden sich anscheinend nur dadurch, dass in den unteren Zeichnungen überflüssige Teile auftreten. Die in der unteren Reihe auftretenden schraffierten Teile sind nämlich leer und wurden in der oberen Reihe einfach fortgelassen.

Somit sind alle in der oberen Reihe auftretenden Mengenteile nicht leer (z. B. der gemeinsame Teil von A und B oder derjenige Teil von A, der nicht zu B gehört). Das haben wir in den unteren Zeichnungen dadurch ausgedrückt, dass wir einen Punkt in den nicht leeren Mengenteil setzten.
So sind die Zeichnungen der unteren Reihe zwar eindeutig, aber komplizierter geworden. Ob es sich aber lohnt, für diese Eindeutigkeit zusätzliche Komplikationen in Kauf zu nehmen?

Wir werden gleich sehen, dass es sich lohnt: Die zuletzt eingeführte Darstellungsweise ist nämlich nicht nur eindeutig, sondern auch von größerer Ausdruckskraft.
Die größere Ausdruckskraft zeigt sich daran, dass wir jetzt nicht nur darstellen können, dass ein Mengenteil leer ist (durch Schraffierung) oder nicht (durch Setzen eines Punktes), sondern auch zum Ausdruck bringen können, dass wir nicht wissen, ob ein Mengenteil leer ist oder nicht. In diesem Fall haben wir ihn weder schraffiert noch mit einem Punkt versehen.

Diese dritte "Bezeichnungsweise" haben wir in den Zeichnungen der unteren Reihe schon verwendet: die Mengen außerhalb der Kreise wurden nie mit einem Punkt versehen. Auf diese Weise konnten wir jeweils zwei Fälle zu einem Fall zusammenfassen; Abbildung 35 zeigt, wie diese Zusammenfassung gemeint ist:

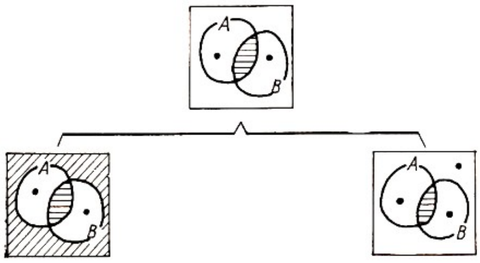


Abb. 35

In der oberen Zeichnung von Abbildung 35 blieb das Gebiet außerhalb der beiden Kreise unbezeichnet. Damit brachten wir zum Ausdruck, dass wir sowohl die Möglichkeit zulassen, dass der ihm entsprechende Mengenteil kein Element enthält (Schraffierung auf der linken unteren Zeichnung), als auch die Möglichkeit, dass er ein Element enthält (Punkt auf der rechten unteren Zeichnung).

Formulieren wir diesen Sachverhalt an Hand des Beispiels von der Höhle und dem Tunnel: Wir wissen mit Sicherheit, dass es jemanden in der Klasse gibt, der in dem Tunnel war, und dass es jemanden gibt, der in der Höhle war, und wir wissen auch, dass es niemanden gibt, der sowohl in der Höhle als auch im Tunnel war. Ob es aber jemanden gibt, der weder in der Höhle noch im Tunnel war, wissen wir nicht - mag sein, es gibt jemanden, auf den diese Behauptung zutrifft; es kann aber auch sein, dass es keinen solchen Schüler gibt.

Hier zeigt sich also die größere Ausdruckskraft: Wir konnten mit einer einzigen Zeichnung ausdrücken, was wir sonst nur mit zwei Zeichnungen hätten sagen können.
Wir wollen jetzt versuchen, auf die gleiche Weise mehrere Zeichnungen der unteren Reihe von Abbildung 34 zu einer einzigen zusammenzufassen, und zwar zunächst je zwei, danach von den so erhaltenen wieder je zwei, d. h. also je vier der ursprünglichen Zeichnungen (Abb. 36).

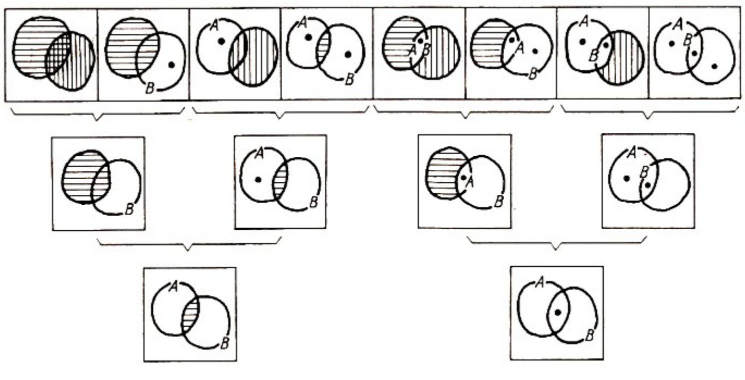


Abb. 36

Wenn wir die zuletzt erhaltenen Zeichnungen ebenfalls zusammenfassen würden, erhielten wir eine Zeichnung, die eine völlige Unsicherheit zum Ausdruck bringt: Wir wissen von keinem einzigen Mengenteil, ob er leer ist oder nicht. Die letzten beiden Zeichnungen von Abbildung 36 sind nicht von dieser Art:
Sie liefern in gedrängter Form eine wichtige Information. Die erste besagt, dass A und B kein gemeinsames Element besitzen, die zweite, dass sie ein solches besitzen. Sie drücken also genau dasselbe aus wie die Formeln $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ bzw. $\exists x(Ax \wedge Bx)$.

Bisher konnten wir solche Formeln nicht durch eine einzige Zeichnung anschaulich darstellen, sondern nur durch vier. Unsere neue graphische Darstellungsweise ermöglicht es also, jeweils vier Fälle zu einer einzigen Zeichnung zusammenzufassen, so dass wir unsere Formeln durch je eine Zeichnung wiedergeben können.

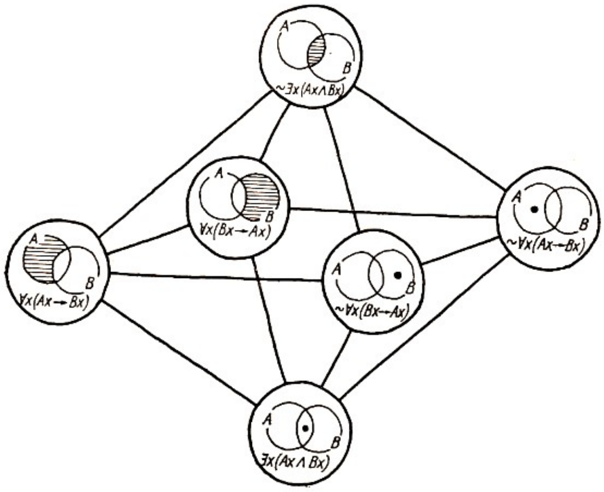


Abb. 37

Man sieht leicht, dass das nicht nur für die obigen beiden Formeln gilt, sondern auch für die anderen vier. Auf Abbildung 37 haben wir die sechs Formeln und die ihnen entsprechenden sechs Zeichnungen als Ecken eines Oktaeders dargestellt. Eine ähnliche Darstellungsweise kann man natürlich auch bei anderen Formeln verwenden.

Aufgaben

1. Wählen wir als Grundmenge die Menge der positiven ganzen Zahlen.
$G\square = \square$ ist gerade, $P\square = \square$ ist Primzahl.
Stellen Sie die entsprechenden Mengen dar und geben Sie Beispiele für einige ihrer Elemente an sowie Beispiele von Zahlen, die nicht diesen Mengen angehören!

2. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen?
a) $\forall x(Gx \land Px)$; b) $\forall x(Gx \lor Px)$; c) $\exists x(Gx \land Px)$; d) $\exists x(Gx \lor Px)$;
(Bezeichnungen wie in Aufgabe 1)

3. Ergänzen Sie die bei der Lösung der ersten Aufgabe angefertigte Skizze durch eine Abbildung der durch 6 teilbaren Zahlen ($S\square = \square$ ist durch 6 teilbar)!

4. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen (alle Bezeichnungen wie in den Aufgaben 1 bis 3)?

a)	$\forall x(Sx \to Gx)$	g)	$\exists x(Sx \to Gx)$
b)	$\forall x(Gx \to Sx)$	h)	$\exists x(Sx \land Gx)$
c)	$\forall x(Gx \to \sim Sx)$	i)	$\exists x(Sx \land \sim Gx)$
d)	$\forall x(\sim Gx \to \sim Sx)$	j)	$\exists x(Sx \land Px)$
e)	$\forall x(Px \to Sx)$	k)	$\exists x(Sx \land Px)$
f)	$\forall x(Px \to \sim Sx)$	l)	$\exists x(Sx \to Px)$

5. Grundmenge: Die Menschen
Formalisieren Sie die folgenden Sätze!

a) Es gibt keine Menschen mit Flügeln.
b) Alle Menschen sind flügellos.

In a) und b) wählen wir $F\square = \square$ hat Flügel. $\square$ ist flügellos werde durch die Verneinung von F $\square$ ausgedrückt.

c) Nicht jeder ist strebsam.
d) Es gibt Menschen, die nicht strebsam sind.

In c) und d) sei $S\square = \square$ ist strebsam.

e) Jeder kann verunglücken.
f) Es gibt niemanden, der nicht verunglücken könnte.

In e) und f) sei $V\square = \square$ kann verunglücken.

g) Es gibt geschickte Menschen.
h) Nicht jeder ist ungeschickt.

In g) und h) sei $G\square = \square$ ist geschickt.
$\square$ ist ungeschickt werde durch die Verneinung von $G\square$ wiedergegeben.

6. Formalisieren Sie die Sätze aus Aufgabe 5, wobei Sie als Grundmenge die Menge aller Lebewesen wählen!
Wir benötigen dabei eine neue Bezeichnung: $M\square = \square$ ist ein Mensch.
Denken wir daran, dass "jeder" jetzt "jeder Mensch" und "es gibt jemanden, der" jetzt "es gibt einen Menschen, der" bedeutet. Fertigen Sie dazu Skizzen an!

7. Die Grundmenge in dieser Aufgabe sei die Menge der reellen Zahlen..
$R\square = \square$ ist rational. $\square$ ist irrational drücken wir durch die Negation von $R\square$ aus.

a) Es gibt rationale Zahlen.
b) Nicht jede Zahl ist irrational.
c) Es gibt irrationale Zahlen.
d) Nicht jede Zahl ist rational.
e) Wenn eine Zahl rational ist, so ist sie nicht irrational.
f) Es gibt keine Zahl, die, wenn sie rational ist, auch irrational ist.
g) Jede Zahl ist rational oder irrational.
h) Es gibt keine Zahl, für die nicht gilt, dass sie rational oder irrational ist. Welche Aussagen drücken dasselbe aus? Welche der Aussagen ist falsch? (Eine ist falsch, die übrigen sind wahr.)

8. Bin weder Nachkomm, noch glücklicher Ahn, mit keinem verwandt, mit keinem bekannt, gehöre keinem an, gehöre keinem an. (Ady)
N$\square$ = ich bin Nachkomme von $\square$,
A$\square$ = ich bin glücklicher Ahn von $\square$,
V$\square$ = ich bin mit $\square$ verwandt,
B$\square$ = ich bin mit $\square$ bekannt.

Grundmenge: Die Menschen
Geben Sie die logische Struktur dieser Strophe durch eine Formel wieder! (Diese Strophe wurde bereits im ersten Band in Elementaraussagen zerlegt.)

9. ... nichts auf der Welt ist gut noch schlecht;
das Denken macht es nur dazu. (Shakespeare)

Formalisieren Sie den ersten Teil des Satzes!
G$\square$ = $\square$ ist gut,

S$\square$ = $\square$ist schlecht.

Grundmenge: Alle Dinge auf der Welt
Wir können diesen Satz auf unterschiedliche Weise umformulieren und so zu immer neuen Formeln gelangen. Welche Folgen hätte es, wenn wir für die Aussageform $\square$ ist schlecht an Stelle der Bezeichnung $S\square$ einfach die Bezeichnung $\sim G\square$ verwendeten?

10.* Niemand erwirbt sich Freunde, der keine Feinde gehabt hat. (Tennyson)
$E\square = \square$ erwirbt sich Freunde,
$F\square = \square$ hat Feinde gehabt.
Grundmenge: die Menschen Überlegen Sie sich die Formel genau! Sie ist trügerisch!

11. Kein großer Erfolg wird ohne Begeisterung erreicht.
$G\square = \square$ ist groß,
$B\square = \square$ wird durch Begeisterung erreicht.
Grundmenge: die Erfolge
Formulieren Sie den Satz so um, dass er keine Negationen mehr enthält! Formalisieren Sie die Aussage in beiden Fällen!

12. Wir kehren zu dem Beispiel mit dem Tunnel und der Höhle zurück, genauer: zur Untersuchung der zwischen den entsprechenden Mengen bestehenden Beziehungen. Bisher haben wir nicht untersucht, ob außer den Elementen der beiden Mengen noch weitere Elemente in der Grundmenge enthalten sind. Auf diese Weise haben wir acht Fälle erhalten.
Wieviel Fälle erhalten wir, wenn wir die Beziehungen der beiden Mengen zur Grundmenge in die Betrachtung einbeziehen? Können stets alle Fälle eintreten, gleichgültig aus wieviel Elementen die Grundmenge besteht? .

13.* Die Formel $\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$ haben wir auf zwei verschiedene Arten gelesen:
"Nicht jeder, der im Tunnel war, war auch in der Höhle" und "Es gibt jemanden, der im Tunnel, aber nicht in der Höhle war". Formalisieren Sie den letzten Satz auch mit Hilfe des Existenzquantors!
Suchen Sie auch für die übrigen Formeln neben Abbildung 27 andere Formulierungen und - auf Grund dieser - andere Formeln (die natürlich denselben Sinn haben wie die Ausgangsformel)!
Bringen Sie die Formeln auf eine einheitliche Form! (Jetzt tritt in zwei Formeln der Existenzquantor, in vier Formeln der Allquantor auf.)

14. Jede der sechs Formeln ist in genau vier der acht Fälle wahr. Könnte man für alle acht Fälle je eine Formel angeben, die in genau diesem einen Fall wahr ist und in den anderen sieben nicht?

15.* Zwei einander schneidende geschlossene Kurven (etwa ein Rechteck, eine Kreisscheibe usw.), die in ein und derselben Ebene liegen, zerlegen diese Ebene in vier Teile. Wir konnten auf diese Weise alle möglichen Beziehungen zweier Mengen zueinander darstellen. Dabei brauchten wir nur das eine,oder das andere der entstehenden Flächenstücke als leer anzusehen.

Suchen Sie ähnliche Darstellungsverfahren für drei, vier, fünf, ..., n Mengen!
Hierbei müssen nicht unbedingt Kreise verwendet werden. Man kann auch kompliziertere, einander nicht schneidende geschlossene Kurven verwenden.
Je zwei dieser Kurven dürfen allerdings höchstens zwei Schnittpunkte miteinander haben! (sonst wäre das Innere des von beiden Kurven begrenzten Flächenstücks nicht zusammenhängend, so dass die Anzahl der Flächenstücke unnötig anwachsen würde).

Wenn wir dies berücksichtigen, müssen drei Kurven die Ebene in acht Teile zerlegen, da jede die von den anderen Kurven begrenzten Flächenstücke in je zwei Teile zerlegt. Vier solche Kurven zerlegen die Ebene in 16, fünf in 32, n in 2^n Teile.

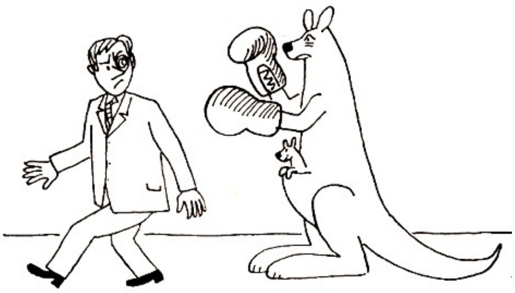
3 Schließen mit Hilfe von Zeichnungen

3.1 Carroll und die Känguruhs

Viele haben wahrscheinlich das reizend unvernünftige Kinderbuch "Alice im Wunderland" von Lewis Carroll[11] gelesen, die wenigsten jedoch dürften wissen, dass sein Verfasser ein Mathematiker[12] war, dessen fast hundert Jahre alten mathematischen und logischen Scherzaufgaben auch von modernen Autoren gern zitiert werden.

Wir wollen eine dieser Aufgaben zu neuem Leben erwecken.
Gegeben seien zehn Prämissen:

1. In diesem Haus sind außer Katzen keine Tiere.
2. Tiere, die gern den Mond anschauen, eignen sich als Lieblingstiere.
3. Tieren, die ich verabscheue, gehe ich aus dem Weg.
4. Es gibt kein fleischfressendes Tier, das nachts nicht heult.
5. Es gibt keine Katze, die keine Mäuse fängt.
6. Außer den Tieren in diesem Haus schließt kein Tier Freundschaft mit mir.
7. Känguruhs eignen sich nicht als Lieblingstiere.



8. Nur fleischfressende Tiere fangen Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die nicht Freundschaft mit mir schließen.
10. Tiere, die nachts heulen, schauen gern den Mond an.

Die Frage ist nun, ob man aus diesen Prämissen auf die folgende Aussage schließen kann:
Ich gehe Känguruhs aus dem Weg.

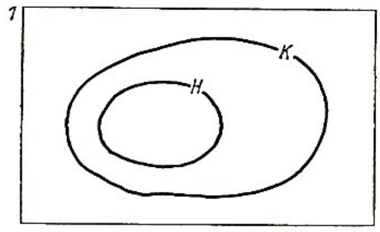
Der wichtigste Schritt bei der Beantwortung dieser Frage besteht darin, sich darüber klar zu werden, dass in der Aufgabe von nichts anderem als von Mengen die Rede ist. Jede Prämisse macht eine Aussage über zwei Mengen; die erste z. B. über die Menge der Tiere in diesem Haus und die Menge aller Katzen. Insgesamt sind es allerdings nicht zwanzig Mengen, weil in mehreren Prämissen dieselben Mengen vorkommen.
Wir stellen die in den Prämissen auftretenden Mengen zusammen und führen auch gleich Bezeichnungen für sie ein. Gleichzeitig geben wir an, in welcher Prämisse die betreffenden Mengen vorkommen:

H = die Tiere in diesem Haus 1,6
K = die Katzen 1,5
A = die Tiere, die gern den Mond anschauen 2,10

[11] Sein eigentlicher Name ist C. L. Dodgson. Er lebte in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts in England.
[12] Man erzählt, dass der damaligen englischen Königin Victoria das Buch Alice im Wunderland so gut gefallen habe, dass sie den Befehl gab, ihr sämtliche Werke Carrolls zu besorgen. Ihre Überraschung war groß, als man Ihr einen ganzen Berg mathematischer Abhandlungen vorlegte.

L = die Tiere, die sich als Lieblingstiere eignen 2,7
V = die Tiere, die ich verabscheue 3,9
W = die Tiere, denen ich aus dem Wege gehe 3, Konklusion
F = die fleischfressenden Tiere 4,8
N = die Tiere, die nachts heulen 4, 10
M = die Tiere, die Mäuse fangen 5,8
S = die Tiere, die mit mir Freundschaft schließen 6,9
G = Känguruhs 7, Konklusion

Zeichnen wir auf, was die Prämissen und die Konklusion über die Beziehungen zwischen diesen Mengen aussagen! Die Grundmenge ist immer dieselbe: die Tiere.
Von der ersten Prämisse können wir zum Beispiel folgende Zeichnung anfertigen (Abb. 38).

Abb. 38: 

Grundmenge: die Tiere

Gibt diese Zeichnung die Aussage der ersten Prämisse genau wieder? Das hängt ganz davon ab, wie wir die Zeichnung deuten.

Wir können sie zum Beispiel wie folgt verstehen:
1. Es gibt Tiere, die keine Katzen sind (siehe das Gebiet zwischen Rechteck und äußerer Kurve).
2. Es gibt Katzen, die nicht in diesem Haus sind (siehe das Gebiet zwischen beiden Kurven).
3. Es gibt in diesem Haus Tiere; dies sind alles Katzen (inneres Gebiet).

So natürlich diese Auffassung auch scheinen mag, sie entspricht nicht dem Inhalt der ersten Prämisse. Wenn wir auch aus der Erfahrung wissen, dass es auf der Welt noch andere Tiere außer Katzen gibt, so dürfen wir davon jedoch keinen Gebrauch machen, weil die erste Prämisse nichts darüber aussagt. Das Gebiet zwischen Rechteckrand und äußerer Kurve kann der ersten Prämisse zufolge sowohl leer als auch nicht leer sein.

Dasselbe können wir auch von dem Gebiet zwischen beiden Kurven behaupten.
Wenn uns unser gesunder Verstand auch sagt, dass nicht alle Katzen der Welt in diesem Haus sein können, dürfen wir dieses Wissen hier nicht benutzen.

Und die Menge der Tiere im Haus? Auch sie kann sowohl leer als auch nicht leer sein. Die erste Prämisse besagt lediglich, dass außer Katzen kein Tier in diesem Haus ist. Ob sich aber wirklich eine Katze im Haus befindet, ist eine offene Frage.[13]

Wir können noch mehr sagen: Auf Grund der ersten Prämisse kann nicht nur jede einzelne Menge auf der Abbildung leer sein, sondern es können auch alle drei Mengen gleichzeitig leer sein. Die erste Prämisse sagt nichts darüber aus, ob es auf der Welt überhaupt Tiere gibt.

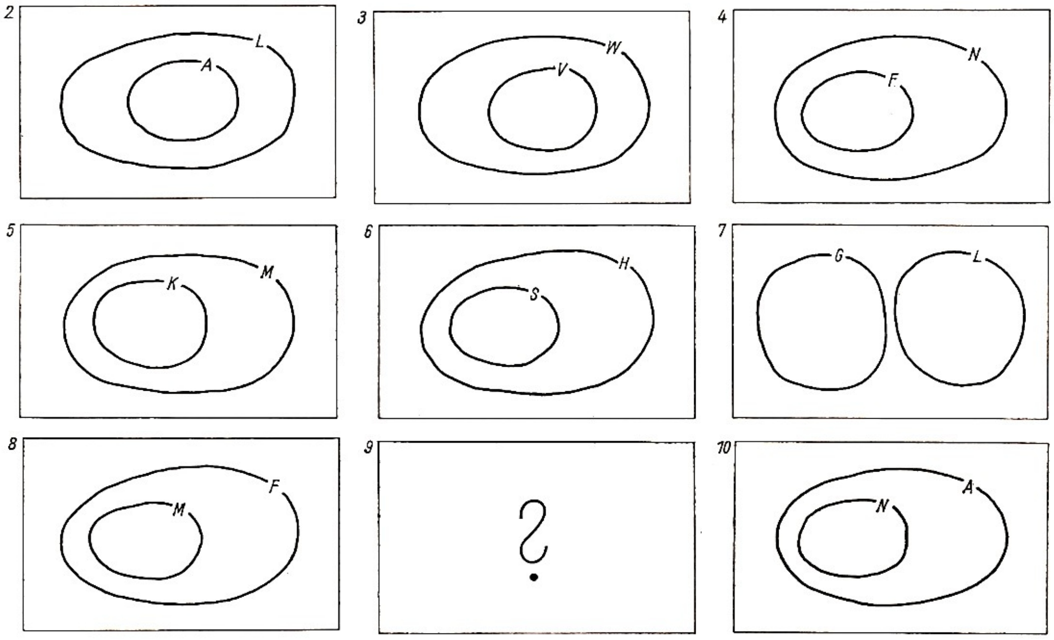
Ist die Zeichnung also schlecht? Sollten wir sie besser durch eine ganze Reihe von Abbildungen ersetzen, die alle möglichen Fälle erfasst?

[13] Diese Frage bleibt auch dann offen, wenn wir die erste Prämisse wie folgt umformulieren: Alle Tiere in diesem Haus sind Katzen. Die Beantwortung dieser Frage hängt also nicht davon ab, ob die Formulierung der 1. Prämisse verneinend (wie ursprünglich) oder zustimmend (wie bei der letzten Version) ist.

Das ist nicht nötig. Es genügt, wenn wir uns auch hier an dieselbe Vereinbarung halten wie im ersten Kapitel. Formulieren wir sie noch einmal:

Lassen wir einen Gebietsteil leer, so bedeutet dies, dass wir hierüber keine weiteren Kenntnisse besitzen, d. h., wir wissen nicht, ob dieser Gebietsteil leer ist oder nicht. Wissen wir von einem Gebiet, dass es leer ist, so geben wir dies durch Schraffierung an.
Wissen wir, dass ein Gebiet nicht leer ist, so versehen wir es mit einem Punkt.
Im vorliegenden Fall können die durch die drei Gebietsstücke auf der Abbildung dargestellten Mengen sowohl leer als auch nicht leer sein. Dementsprechend setzen wir in sie weder einen Punkt, noch schraffieren wir sie.

Unter Beachtung der obigen Abmachung können wir sagen, dass unsere Zeichnung gerade den Inhalt der ersten Prämisse wiedergibt. Halten wir uns an die Abmachung, so können wir die graphische Darstellung fortsetzen (Abb. 39 bis 48).



A.39-41:

A.42-44:

A.45-47:

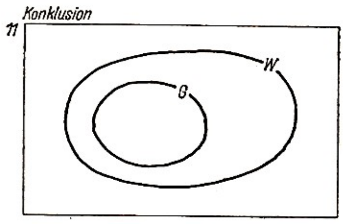


Abb.48:

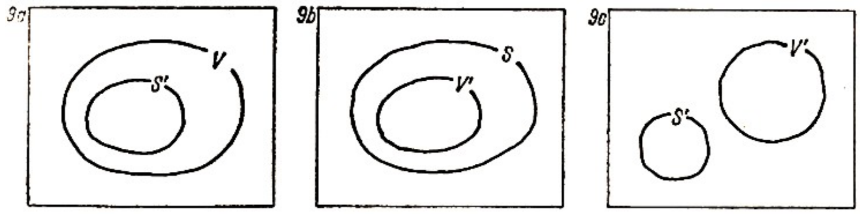
Nach einigen Überlegungen sind wir mit allen Zeichnungen zu Rande gekommen, eine Ausnahme bildet die zeichnerische Darstellung der neunten Prämisse. Die oben eingeführten Mengen scheinen hier nichts zu nützen. Versuchen wir, an Stelle von S bzw. V die folgenden Mengen in die Betrachtungen einzubeziehen:

$S' =$ alle Tiere, die nicht mit mir Freundschaft schließen

bzw.

$V' =$ alle Tiere, die ich nicht verabscheue

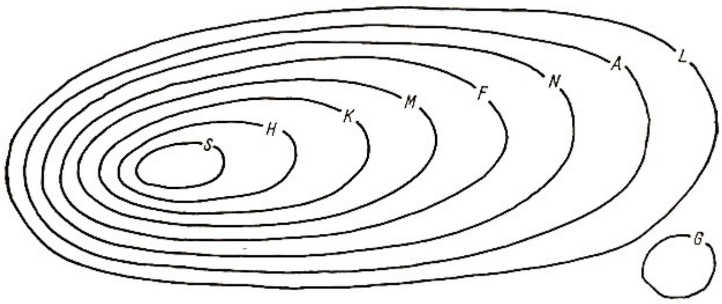
oder sogar alle beide (Abb. 49 bis 51).

Abb.49-51: 

Wir wollen nun alle Abbildungen zu einer einzigen zusammenfassen. Nach kurzem Probieren finden wir, dass wir die Mengen, bei S beginnend und bei L endend, in einer Reihe einander umfassender Mengen anordnen können:

S 6 H 1 K 5 M 8 F 4 N 10 A 2 L

(Die Zahlen geben an, aus welcher Prämisse die entsprechende Beziehung zwischen zwei Mengen folgt.)
So können wir den größten Teil unserer Kenntnisse in einer Zeichnung vereinigen (Abb. 52). Wir haben in dieser Zeichnung der siebenten Prämisse entsprechend auch die Menge der Känguruhs dargestellt.

Abb. 52: 

Es fehlen in der Zeichnung noch die neunte und die dritte Prämisse. Was die neunte Prämisse betrifft, so würden wir am liebsten 9 b (Abb. 50) benutzen, weil wir dann die Kurve V' in die bereits vorhandene Figur einzeichnen könnten (Abb. 52). Was wird dann aber mit der dritten Prämisse? Nehmen wir auch an Stelle von W eine andere Menge:

$W' =$ alle Tiere, denen ich nicht aus dem Wege gehe

Die dritte Prämisse können wir nun unter Benutzung von W' und V' folgendermaßen formulieren:

3' Wenn ich einem Tier nicht aus dem Wege gehe, so verabscheue ich es nicht.

(Würde ich es nämlich verabscheuen, so würde ich ihm nach Prämisse 3 aus dem Weg gehen. 3' ergibt sich aus 3 durch Kontraposition und ebenso folgt 3 aus 3'.)

Die nächste Zeichnung zeigt dies (Abb. 53). Jetzt können wir aus 3', 9b und Abb. 52 eine Abbildung herstellen, die sämtliche Aussagen der zehn Prämissen vereinigt (Abb. 54).

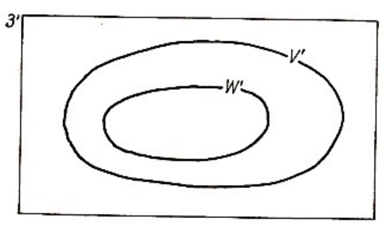
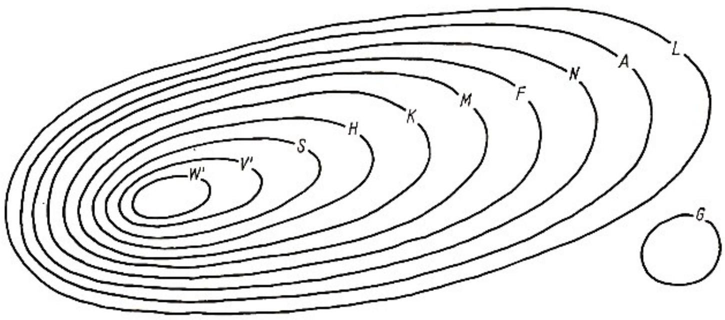
Abb. 53: 

Abb. 54:



Wir können aus der Zeichnung ablesen, dass die Menge der Känguruhs und die Menge der Tiere, denen ich nicht aus dem Wege gehe, keine gemeinsamen Elemente haben, d. h., wie die Konklusion es behauptet, gehe ich Känguruhs aus dem Weg.

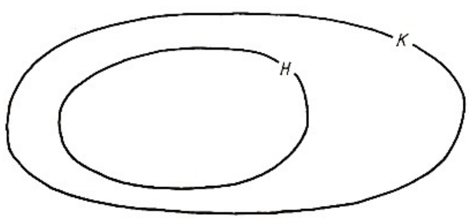
3.2 Zeichnungen. Formeln

Wir haben uns bisher an Zeichnungen orientiert und darauf verzichtet, besondere Formeln einzuführen (abgesehen von den Kurzbezeichnungen der Mengen durch einen Buchstaben).
Als wir die Kontraposition benutzten, genügte es ebenfalls, beide Aussagen inhaltlich zu durchdenken, so dass wir uns auch ohne Formalisierung davon überzeugen konnten, dass sie dasselbe bedeuten. In dem Zweikampf zwischen Zeichnung und Formel hat die Zeichnung einige Pluspunkte erworben. Das heißt aber nicht, dass sie gewonnen hat.

Dies kann man einstweilen um so weniger behaupten, als die Punktrichter - die Leser, die diesen Kampf mit Aufmerksamkeit verfolgen - wahrscheinlich voreingenommen sind, der eine in dieser, der andere in jener Richtung. Mancher wird lieber zeichnen, veranschaulichen, in Bildern denken, möglichst dicht an den konkreten Gegebenheiten bleiben, während ein anderer Formeln bevorzugt, mit ihrer Hilfe leichter denken und rechnen kann und die wesentlichen Elemente der uns umgebenden Welt lieber in Formeln statt in Bildern fasst, weil ihm letztere nicht verlässlich genug erscheinen.

Außer diesen psychologischen Faktoren spielen im Kampf zwischen Zeichnung und Formel auch technische Belange eine Rolle. So lässt sich z. B. eine Zeichnung wie die folgende (Abb. 55) schneller herstellen als die entsprechende Formel

$\forall x(Hx \to Kx)$ Abb. 55:



Die Formel beansprucht jedoch weniger Platz; man kann sie mit der Schreibmaschine oder den derzeitigen drucktechnischen Verfahren leichter herstellen als eine Zeichnung. (Ein so banal erscheinender technischer Aspekt spielt bei der Entwicklung einer Wissenschaft wahrscheinlich eine größere Rolle als viele glauben.)

3.3 Teilmengen

Ein und dieselbe Tatsache kann mitunter in vielfältiger Weise in Formeln gefasst werden. Soeben haben wir z.B. den auf der obigen Zeichnung (Abb. 55) dargestellten Zusammenhang in einer logischen Formel ausgedrückt. Einfacher tut dies die folgende mengentheoretische Formel:

$$H \subset K$$

Sie ist folgendermaßen zu lesen: H ist eine Teilmenge von K (oder kürzer: H ist ein Teil von K).[14]

Diese Formel bedeutet genau dasselbe wie die Formel $\forall x(Hx \to Kx)$ und ist - entsprechend unserer Vereinbarung - identisch mit der Aussage von Abbildung 55.

Wenn ein Ding, das wir uns an Stelle von x vorstellen, Element von H ist, so ist es auch Element von K. Sowohl die Zeichnung als auch die beiden Formeln lassen die Frage offen, ob es überhaupt ein Element von K gibt, das nicht in H liegt, ja mehr noch, ob diese Mengen überhaupt ein Element besitzen. (Wenn H ein Element enthält, so kann K selbstverständlich nicht leer sein.)

3.4 Elemente

Wir drückten die Tatsache, dass Mauz eine Katze ist, in logischen Zeichen so aus:

$$Km$$

Wir bezogen also die Eigenschaft "ist eine Katze", die durch den Buchstaben K symbolisiert wird, auf das Individuum namens Mauz (hier mit m bezeichnet). Mit anderen Worten: Wir reihen Mauz (m) als Element in die Menge aller Katzen (K) ein. Dass m ein Element der Menge K ist, drückt man mit den Symbolen der Mengenlehre wie folgt aus:

$$m \in K$$

Diese Formel drückt dasselbe aus wie Km.

[14] Wir müssen hier erwähnen, dass in vielen Büchern das Zeichen $\subset$ im Sinn einer "echten Inklusion" gebraucht wird, während das Zeichen $\subseteq$ den Sachverhalt ausdrückt, den wir mit $\subset$ bezeichnet haben. Die folgende Tabelle soll die verschiedenen Bezeichnungen übersichtlicher machen:

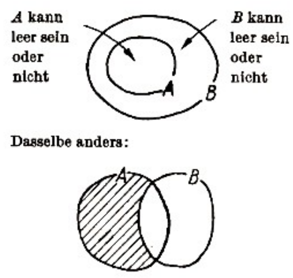
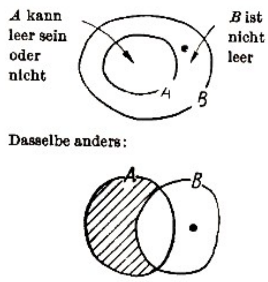
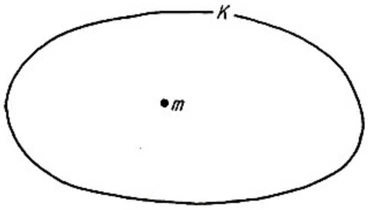
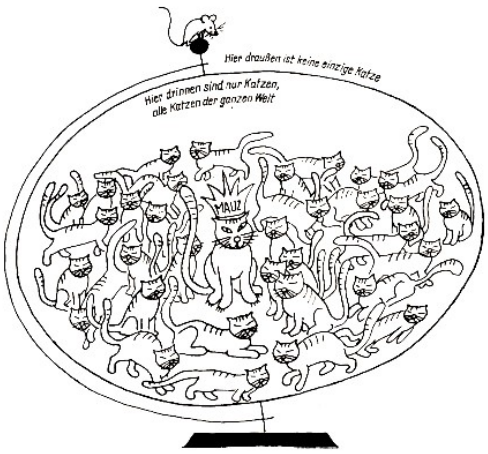
Graphisch		
Unsere Bezeichnung (und andere Bücher)	$A \subset B$ (Lies: A ist ein Teil von B)	$A \subset B \wedge B \not\subset A$ (Lies: A ist ein Teil von B, aber B ist kein Teil von A
in vielen Büchern	$A \subseteq B$ (Lies: A ist ein Teil von B)	$A \subset B$ (Lies: A ist ein echter Teil von B)
mit logischen Zeichen	$\forall x(Ax \to Bx)$	$\forall x(Ax \to Bx) \wedge \sim \forall x(Bx \to Ax)$
Beispiele:	Jeder Afrikaner ist braun. (Grundmenge: die Menschen)	Jeder Afrikaner ist braun, aber nicht jeder braune Mensch ist ein Afrikaner. (Grundmenge: die Menschen)

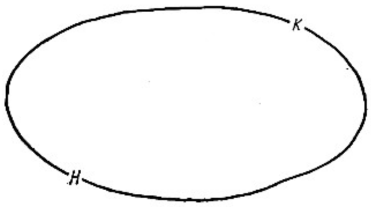
Abb. 56: 

Dass Mauz ein Element der Menge der Katzen ist, ist nur eine andere Formulierung der Tatsache, dass Mauz eine Katze ist. Beide Aussagen werden durch die schematische Zeichnung in Abbildung 56 wiedergegeben, hinter der sich etwa die folgende Vorstellung verbirgt (Abb. 57).

Abb. 57: 

3.5 Gleichheit von Mengen

Den seltsamen Fall, dass alle Katzen der Welt im Carrollschen Haus leben, stellt Abbildung 58 dar:

Abb. 58: 

H bedeutet hier die Menge der Tiere im Hause, K die Menge aller Katzen der Welt, und die Zeichnung bringt zum Ausdruck, dass beide Mengen zusammenfallen. Wir drücken das natürlich durch

$$H = K$$

aus. So natürlich diese Schreibweise auch ist, man muss doch darauf achten, dass man sie nicht als eine Gleichung zwischen Zahlen deutet.

Wir sind es gewöhnt, das Gleichheitszeichen zwischen Zahlen oder Ausdrücke, die Zahlwerte annehmen, zu setzen. Daher könnte man die obige Beziehung in folgendem Sinn missverstehen:

"In diesem Haus sind genau so viele Tiere wie Katzen auf der ganzen Welt".

Unsere Formel $H = K$ sagt aber viel mehr als das! Unabhängig davon, dass beide Mengen dieselbe Anzahl von Elementen besitzen, könnte zwischen ihnen doch die in Abbildung 59 oder die in Abbildung 60 dargestellte Beziehung bestehen.

Abb. 59-60:

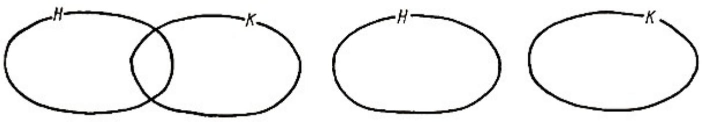
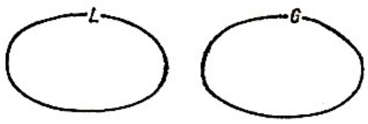


Abb. 61:



Wenn zwei Mengen zusammenfallen, so ist auch die Anzahl ihrer Elemente (wir sagen: ihre Mächtigkeit) gleich. Die umgekehrte Behauptung gilt jedoch im allgemeinen offenbar nicht: Die Gleichheit der Elementeanzahl zweier Mengen bedeutet noch nicht die Gleichheit dieser Mengen.

Die Gleichheit zweier Mengen bedeutet, dass sie aus denselben Elementen bestehen. Mit anderen Worten: keine dieser Mengen enthält ein Element, das nicht auch in der anderen Menge liegt. Wir könnten dafür auch sagen: Jede der beiden Mengen ist eine Teilmenge der anderen.

Das leuchtet ein, denn $H \subset K$ bedeutet ja: Jedes Element von H ist auch ein Element von K. Dagegen heißt $K \subset H$: Jedes Element von K liegt auch in H. Wenn nun aber beide Behauptungen wahr sind, so besitzen beide Mengen genau dieselben Elemente. Sind andererseits die Elemente beider Mengen dieselben, so ist jede Menge eine Teilmenge der anderen.
Daher bedeutet $H \subset K \wedge K \subset H$ dasselbe wie $H = K$.

3.6 Der Durchschnitt

Beim Beispiel mit den Känguruhs war die Rede davon, dass die Menge der Känguruhs kein gemeinsames Element mit der Menge aller Tiere hat, die sich als Lieblingstiere eignen (Abb. 61). Diese Tatsache können wir mit einer logischen Formel etwa wie folgt beschreiben:

$$\sim \exists x(Lx \wedge Gx)$$

Wir hätten sie aber auch mit einer mengentheoretischen Formel beschreiben können, z.B. folgendermaßen:

$$L \cap G = \Lambda$$

Die letzte Formel lesen wir so: Der Durchschnitt von L und G ist leer. Das Zeichen[15] Λ symbolisiert die leere Menge: Eine umgedrehte Tüte ist leer — es ist alles aus ihr herausgefallen.

[15] Λ (lies: groß Lambda) ist ein großer griechischer Buchstabe, Der zugehörige kleine Buchstabe ist λ. Andere Bezeichnungen für die leere Menge sind: $\varnothing$, $\emptyset$, $\{\ \}$, $\{\#\}$.

Wie jeder Durchschnitt von zwei Mengen ist auch der Durchschnitt von L und G eine Menge, nur eben eine leere. Das Λ ist das Zeichen für diese Menge. Natürlich ist der Durchschnitt zweier Mengen nicht immer leer. In Abbildung 62 ist der Durchschnitt der Mengen A und B dick umrandet. Die Zeichnung gibt keine Auskunft darüber, ob $A \cap B$ leer ist oder nicht.

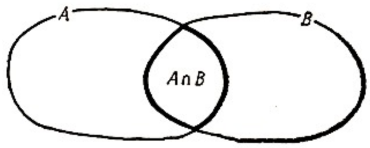


Abb. 62:

3.7 Die Vereinigung

Wir sind vorhin nicht weitergekommen, als wir den Zusammenhang zwischen den Mengen

$V =$ die Tiere, die ich verabscheue
$S =$ die Tiere, die mit mir Freundschaft schließen

darstellen wollten, der durch den folgenden Satz gegeben war:
Ich verabscheue Tiere, die nicht mit mir Freundschaft schließen.

Mit einer Formel lässt sich dieser Zusammenhang leicht wiedergeben:

$$\forall x(\sim Sx \rightarrow Vx) \qquad \text{oder auch} \qquad \forall x(Sx \vee Vx)$$

Die letzte Formel ist so zu verstehen: Jedes Element der Grundmenge ist ein Element von S oder ein Element von V (oder ein Element von beiden). Das heißt: S und V zusammen bilden die gesamte Grundmenge. Oft bezeichnet man die Grundmenge (auch Individuenbereich genannt) mit I. Wir schreiben also:

$$S \vee V = I$$

Hierbei bedeutet $S \vee V$ (lies: "S vereinigt mit V" oder "Vereinigung von S und V") diejenige Menge, die aus allen Elementen von S und V besteht. (Die gemeinsamen Elemente von S und V - sofern solche vorhanden sind - werden nur einmal gezählt.)
Die Formel besagt, dass die Vereinigung von S und V im vorliegenden Fall die gesamte Grundmenge ist. I ist das Zeichen für die Grundmenge, das allerdings von Fall zu Fall auch durch andere Zeichen ersetzt werden kann.

Die Vereinigungsmenge von A und B veranschaulichen wir wie in der Abbildung 63; sie erschöpft im allgemeinen Fall nicht die gesamte Grundmenge (Abb. 64). Der Fall $A \cup B = I$ kann allerdings auch eintreten (Abb. 65).

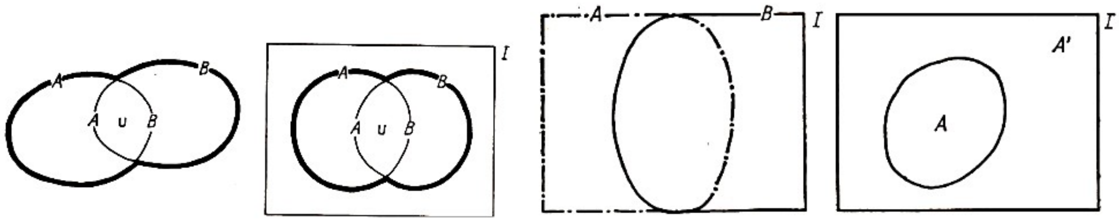


Abb. 63, 64, 65, 66

Auf diese Weise bilden die Tiere, die Carroll verabscheut, und jene, die mit ihm Freundschaft schließen, zusammen die Grundmenge aller Tiere.

3.8 Die Komplementärmenge

Als wir vorhin nicht weiterkamen, haben wir die Schwierigkeiten dadurch überwunden, dass wir an Stelle von S die Menge

$$S' = \text{diejenigen Tiere, die nicht mit mir Freundschaft schließen}$$

benutzt haben.
Diese Menge S' ist die Komplementärmenge von S bezüglich der Grundmenge aller Tiere. Mit der Einführung der Mengen S' und V' haben wir diesen mengentheoretischen Begriff vorweggenommen.

Die Komplementärmenge einer Menge bezüglich einer gewissen Grundmenge kennzeichnen wir meistens dadurch, dass wir rechts oben neben das Zeichen der Menge einen Strich setzen. Auf der Abbildung 66 werden eine Menge und ihr Komplement anschaulich dargestellt.
Wenn wir mit $A\square$ die Aussageform $\square$ ist ein Element von A bezeichnen, so besagt $\sim A\square$ offenbar, dass $\square$ kein Element von A, d.h. ein Element von A' ist. (Hierbei muss man sich vorstellen, dass die möglichen Werte von $\square$ gerade die Elemente der Grundmenge I sind.)

Die Tatsache, dass A und A' zusammen die gesamte Grundmenge ausmachen (d.h. $A \cup A' = I$), können wir in der Sprache der Logik dadurch ausdrücken, dass wir feststellen:
Die Aussageform $A\square \vee \sim A\square$ besitzt stets den Wahrheitswert W, welches Element der Grundmenge wir auch an Stelle von $\square$ einsetzen, d.h. die Aussage $\forall x(Ax \vee \sim Ax)$ ist wahr.

Andererseits besitzen A und A' keine gemeinsamen Elemente (d.h., dass ihr Durchschnitt leer ist): $A \cap A' = \Lambda$. Das können wir unter anderem auch dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir feststellen: $A\square$ und $\sim A\square$ sind nicht gleichzeitig wahr, d.h., es existiert kein x, für das sowohl die eine als auch die andere Aussage zutrifft.

Das bedeutet aber: die Aussage $\sim \exists x(Ax \wedge \sim Ax)$ ist wahr, und somit ist die Aussage $\exists x(Ax \wedge \sim= Ax)$ falsch.

3.9 Logische Symbole. Symbole der Mengenlehre

Falls wir einen Tatbestand sowohl mit logischen als auch mit mengentheoretischen Zeichen wiedergegeben haben, fiel die Einfachheit und Kürze der mengentheoretischen Bezeichnungen auf. Die mengentheoretischen Bezeichnungen und die Terminologie der Mengenlehre spielen in immer mehr Zweigen der Mathematik eine Rolle und dienen damit gleichzeitig der Vereinheitlichung der Mathematik.
Beide Gründe sprechen dafür, diese Bezeichnungsweise überall, wo es möglich ist, zu benutzen.

Wir werden es trotzdem nicht tun, sondern auch weiterhin die mitunter schwerfällig erscheinende logische Bezeichnungsweise benutzen. Wir tun das nicht aus Fachegoismus, sondern deshalb, weil die Bezeichnungen der Mengenlehre in der Logik den großen Nachteil besitzen, dass sie nicht auf Formeln mit mehreren Variablen übertragen werden können.
Außerdem gehen sie nicht so organisch aus der Aussagenlogik hervor wie die Beschreibung eines Sachverhalts mit Hilfe von Quantoren. Es brächte auch mehr Nach- als Vorteile mit sich, wollten wir bei Formeln mit einer Variablen eine wesentlich andere Bezeichnungsweise verwenden als in der Aussagenlogik und bei Formeln mit mehreren Variablen.
(Fragen, die mit logischen Funktionen mit mehreren Variablen zusammenhängen, haben wir nur leicht gestreift. Im sechsten und im siebenten Kapitel wird ausführlicher von ihnen die Rede sein.)

3.10 Fernsehen und Stubenhocker

Vorläufig wollen wir jedoch auf alle Formeln verzichten und versuchen, stattdessen zeichnerische Methoden zur Lösung unserer Aufgaben zu benutzen. Prüfen wir die Leistungsfähigkeit dieser Methode an folgender Aufgabe:

Es gibt einen Besitzer eines Fernsehapparats, der kein Stubenhocker ist.
Wer ins Strandbad geht und kein Stubenhocker ist, der besitzt keinen Fernsehapparat.

Folgt hieraus, dass nicht jeder Besitzer eines Fernsehapparats ins Strandbad geht? Die Prämissen führen uns auf drei Mengen. Dazu teilen wir die gesamte Menschheit in zwei Gruppen ein (Abb. 67): Solche, die ins Strandbad gehen, und solche, die dies nicht tun.

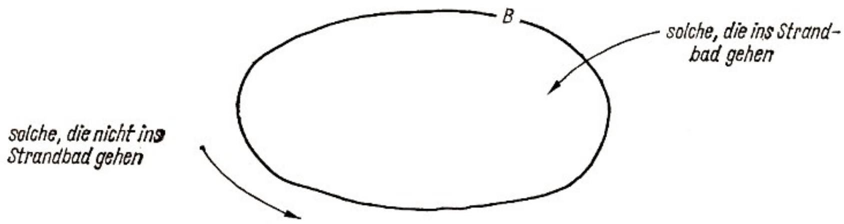


Abb. 67:

In beiden Gruppen kann es Stubenhocker und andere Menschen geben (Abb. 68).

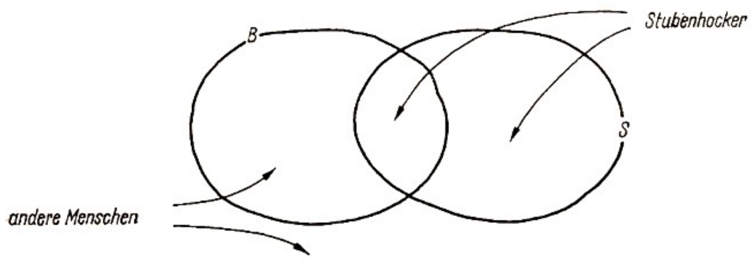


Abb. 68:

In allen vier Teilmengen kann es Menschen geben, die einen Fernsehapparat besitzen, und solche, die keinen haben (Abb. 69).

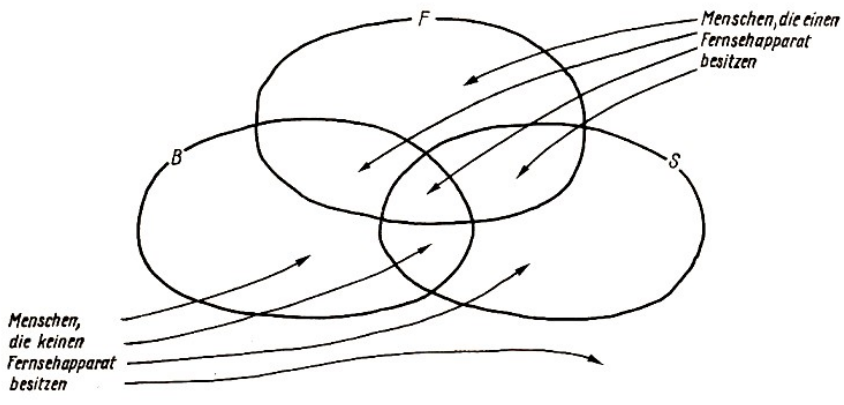


Abb. 69:

Auf diese Weise teilt eine Menge alle Grundmengen in zwei Teile, teilen zwei Mengen sie in vier, drei Mengen sie in acht, vier Mengen sie in sechzehn Teile (da die vierte Menge die vorhandenen acht Teilmengen in je zwei Teile zerlegt) usw.

Sehen wir uns nun an, was die Prämissen über diese Teilmengen aussagen. Eine Menge, die den Prämissen zufolge leer ist, werden wir schraffieren. Eine Menge, die ihnen zufolge nicht leer ist, versehen wir mit einem Punkt. Behaupten die Prämissen jedoch von zwei Mengen, dass die eine oder die andere leer ist, so setzen wir in beide Mengen einen Punkt und verbinden die Punkte durch eine dünne Linie.

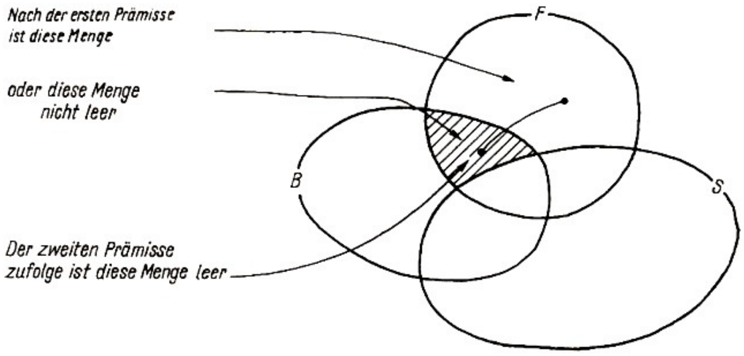


Abb. 70:

Diese Strecke bedeutet also ein "oder", d.h. eine Alternative (Abb. 70).
Daher ist in der Abbildung der obige Punkt zu beachten. Aus den Prämissen folgt also, dass es einen Besitzer eines Fernsehapparats gibt, der nicht ins Strandbad geht.

3.11 Löbau, Junggesellen, Leidenschaften

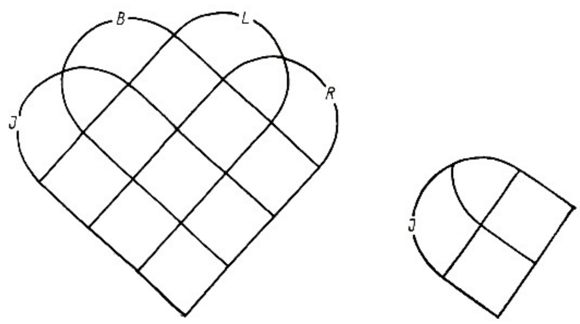
Angenommen, wir haben die folgende Information erhalten (für deren Glaubwürdigkeit wir uns allerdings nicht verbürgen können):

1. Jeder unverheiratete Nichtraucher ist Briefmarkensammler.
2. Jeder Briefmarkensammler aus Löbau ist ein Raucher, oder es gibt unter den Briefmarkensammlern, die Nichtraucher sind, keinen, der nicht in Löbau wohnt.
3. Seitdem er sich auf Drängen seiner Frau das Rauchen abgewöhnt hat, ist das Briefmarkensammeln die größte Leidenschaft von Peter Schulze (Einwohner von Leipzig).

Wir wollen nun entscheiden, ob (unter der Annahme, die Prämissen seien wahr) jeder Löbauer Junggeselle Raucher ist.
In unserer Aufgabe ist von vier Mengen die Rede: von der Menge der Junggesellen (J), der Menge der Briefmarkensammler (B), der Menge der Einwohner von Löbau (L) und der Menge der Raucher (R).
Außerdem müssen wir natürlich noch alle jene Mengen betrachten, die aus den erwähnten durch Anwendung mengentheoretischer Operationen, wie z. B. Bildung von Durchschnitt und Vereinigung oder Bildung der Komplementärmenge (bezüglich der Grundmenge aller Menschen), entstehen.

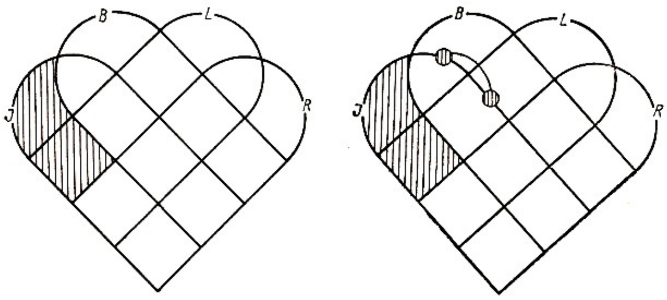
Um die Beziehungen zwischen diesen Mengen untersuchen zu können, zeichnen wir die vier Mengen zunächst "in möglichst allgemeiner Lage" auf (Abb. 71).
Unsere Zeichnung zerlegt die Ebene (die hier die Grundmenge aller Menschen darstellt) in 16 Teile. Zunächst geben wir von keinem Teil an, ob er leer ist oder nicht.

Abb. 71,72:



Der ersten Prämisse zufolge ist die Menge der unverheirateten Nichtraucher in der Menge der Briefmarkensammler enthalten (Abb. 72).

Abb. 73,74:

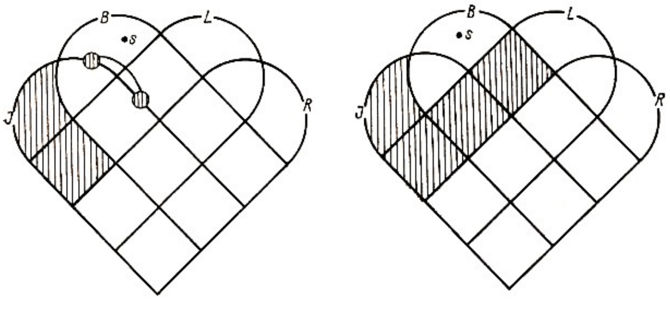


Durch Schraffierung geben wir an, dass der außerhalb von B (und außerhalb von R) liegende Teil von J leer ist (Abb. 73).
Auch die zweite Prämisse verlangt eine Schraffierung, jedoch nur eine "alternative". Wir schraffieren daher nur jeweils einen kleinen Kreis in den (aus je zwei Kästchen bestehenden) Gebietsstücken, von denen das eine oder das andere leer ist (Abb. 74).

Beide schraffierten Kreise verbinden wir - wie vorhin die beiden Punkte - durch eine dünne Linie. Diese Verbindungslinie bedeutet wieder das "oder":
Es ist wahr, dass der Durchschnitt von B und L in R enthalten ist, d. h., der außerhalb von R liegende Teil dieses Durchschnitts ist leer (siehe den unteren schraffierten Kreis), oder es ist wahr, dass derjenige Teil von B, der außerhalb von A liegt, ganz innerhalb von Z liegt (oberer Kreis).

Die dritte Prämisse schließlich weist Peter Schulze (s) seinen Platz in einer der sechzehn Teilmengen zu, und zwar in der Menge der verheirateten, Briefmarken. sammelnden, nicht in Löbau beheimateten Nichtraucher (Abb. 75).

Abb. 75,76:



Unsere letzte Information beseitigt auch die von der zweiten Prämisse herrührende Ungewissheit. Die Menge der nicht in Löbau wohnenden Briefmarken sammelnden Nichtraucher ist nicht

leer, so dass der zweiten Prämisse zufolge die Menge der Löbauer Briefmarken sammelnden Nichtraucher leer sein muss.
Der obere schraffierte Kreis entfällt, der untere aber dehnt jetzt seine Herrschaft auf jene zwei Kästchen völlig aus, in denen er zunächst nur Fuß gefasst hatte (Abb. 76).

Die Frage ist also - in der Sprache der Mengenlehre formuliert -, ob der Durchschnitt von L und J in R enthalten, d.h., ob der außerhalb von R liegende Teil dieses Durchschnitts leer ist. Die Schraffierung zeigt, dass die Frage zu bejahen ist. Wir haben damit festgestellt: Jeder Löbauer Junggeselle ist Raucher.

3.12 Basketballtraining

Versuchen wir die zeichnerische Methode auch bei der folgenden Aufgabe: Wenn alle Basketballspieler der Mannschaft, die am Training teilgenommen haben, größer als 1,90 m sind, so hat die Mannschaft einen Basketballspieler, der nicht am Training teilgenommen hat.

Jeder Spieler der Mannschaft hat am Training teilgenommen oder es gibt in der Mannschaft keinen Basketballspieler, der nicht größer als 1,90 m ist. Folgt hieraus, dass, wenn jeder Basketballspieler der Mannschaft, der größer als 1,90 m ist, am Training teilgenommen hat, ein Spieler zur Mannschaft gehört, der nicht größer als 1,90 m ist und am Training teilgenommen hat?

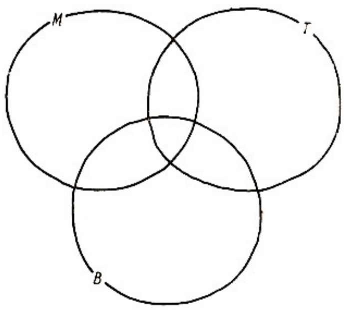


Abb. 77:

In der Grundmenge aller Menschen sind drei Mengen gegeben: die Basketballspieler der Mannschaft (B), alle Menschen, die größer als 1,90 m sind (M), und alle diejenigen, die am Training teilgenommen haben (T). Wir stellen die drei Mengen graphisch dar (Abb. 77). Die Prämissen zeichnen wir gesondert, so dass wir sie mit Erklärungen versehen können (Abb. 78).

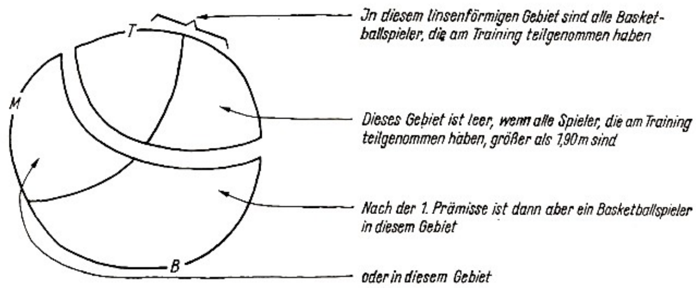
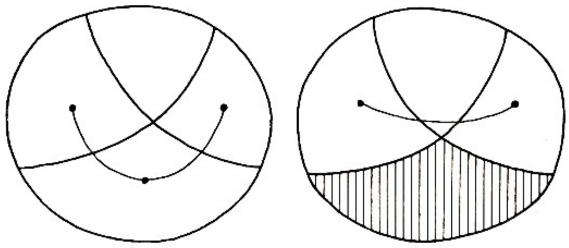


Abb. 78:

Auf Grund der ersten Prämisse können wir sagen: Der untere Teil des linsenförmigen Gebiets ist leer oder ein bestimmter Teil des halbmondförmigen Gebiets ist nicht leer; das heißt, es befindet sich ein Spieler in einem der drei jeweils mit einem Punkt bezeichneten Gebiete (Abb. 79).

Der zweiten Prämisse zufolge gibt es keinen Basketballspieler, der sich außerhalb von T befindet, oder es gibt keinen Spieler außerhalb von M. Daher ist eines der beiden halbmondförmigen

Flächenstücke von B leer. Auf alle Fälle aber ist der Durchschnitt dieser Teile von B leer (Abb. 80).

Abb. 79,80: 

Die Frage ist nun, ob es wahr ist, dass, wenn der Durchschnitt von B und M in T enthalten ist, d.h. wenn kein Element dieses Durchschnitts außerhalb von T liegt, B ein Element enthält, das in T, aber außerhalb von M liegt.
Das bedeutet in unserer Zeichnung (Abb. 80): Ist es wahr, dass, wenn der linke der beiden durch die Linie verbundenen Punkte nicht vorhanden ist, der rechte existiert? Das aber ist wahr, denn die Verbindungslinie bedeutet ja gerade, dass einer von ihnen vorhanden ist.

3.13 Mit oder ohne Zeichnung?

Unterhaltung in einer Fabrik:
Alfons: "Sieh dir diese Vergaser an, Erich! Unter ihnen gibt es einen, der sicher nicht von der Gütekontrolle abgenommen wird, sonst fresse ich einen Besen."

Erich: "In Ordnung. Wenn die Gütekontrolle alle abnimmt, frisst du einen Besen. Wenn sie nicht alle abnimmt, kriegst du von mir einen Hunderter. Abgemacht!

Alfons: "Ich stehe zu meinem Wort." (Gibt ihm die Hand.)

Wir wissen nicht, ob es zum Verzehren des Besens gekommen ist. Zwar wäre auch dies zu wissen ganz interessant, es gibt aber etwas, das vom Standpunkt der Logik aus noch interessanter ist.
Alfons sagte "es gibt einen", Erich sprach von "allen". Alfons hat trotzdem angenommen, dass Erich dasselbe meinte und daraufhin die Wette abgeschlossen.

Wird das kein Durcheinander geben, wenn entschieden werden soll, wer die Wette gewonnen hat? Erich wird an seiner Formulierung festhalten, Alfons aber ging die Wette ausdrücklich mit den Worten ein, er stehe zu seinem Wort. Zweifellos haben beide etwas Verschiedenes gesagt. Oder haben sie vielleicht nur mit verschiedenen Worten ein und dasselbe gesagt?
Gegeben sind zwei Aussagen:

(1) Es gibt einen Vergaser (in einer gewissen Menge von Vergasern), der so beschaffen ist, dass Alfons einen Besen frisst, wenn die Gütekontrolle ihn abnimmt.
(2) Wenn die Gütekontrolle alle Vergaser der gegebenen Menge abnimmt, frisst Alfons einen Besen.

Ob wir nun beide Aussagen als gleichbedeutend empfinden oder zwischen ihnen einen Unterschied spüren, wir dürfen uns in keinem Fall auf Gefühle und Ahnungen verlassen. (Sie haben schon zu oft getrogen.)
Wir wollen der Frage auf den Grund gehen und es zum Greifen klarmachen, dass beide Behauptungen dasselbe besagen. Wir wenden uns wieder unserer bewährten Methode zu und versuchen, die entsprechenden Mengen zu zeichnen. Wenn wir so zu übereinstimmenden Zeichnungen gelangen, drücken beide Behauptungen dasselbe aus, andernfalls nicht.

Unsere Grundmenge ist in diesem Fall die Menge aller konkreten Dinge, zu der Vergaser und von der Gütekontrolle abgenommene Gegenstände ebenso gehören wie etwa Menschen und Besen. Wenn wir es uns genau überlegen, so passt die Menge der Besen nicht recht in dieses System.
Wie sollen wir denn zeichnerisch darstellen, dass Alfons einen Besen frisst?
Eigentlich benötigen wir ja auch an Stelle der Menge der Besen die Menge aller Dinge, die einen Besen fressen, und zu der Alfons (unter gewissen Bedingungen) gehört. Die Menge der Menschen in ihrer Gesamtheit spielt keine Rolle. Versuchen wir es daher einmal mit den folgenden drei Mengen:

$V =$ die Menge jener Vergaser, die Alfons dem Erich gezeigt hat;
$G =$ die Menge aller Gegenstände, die die Gütekontrolle abnimmt;
$B =$ die Menge jener Dinge, die einen Besen fressen.

Wie gewohnt, gehen wir von einem allgemeinen Schema aus (Abb. 81).

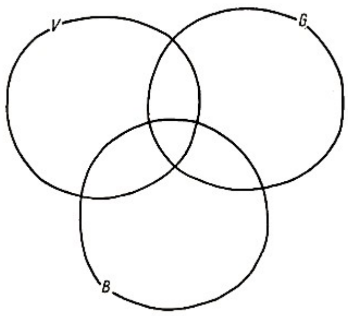


Abb. 81:

Gleich am Anfang stehen wir vor folgenden Problemen: Sollen wir auf der Zeichnung angeben, dass ein Vergaser keinen Besen frisst oder nicht, oder dass Dinge, die einen Besen fressen, nicht von der Gütekontrolle abgenommen werden?
In den Voraussetzungen steht hiervon kein Wort. Wir können das alles daher nicht in den Zeichnungen angeben, so sehr es sich auch von selbst versteht.
Sehen wir uns also die Aussagen selbst und ohne Retusche an. Nach einigem Oben. legen formulieren wir (2) wie folgt um:

(2) Die Gütekontrolle nimmt nicht jeden Vergaser ab, oder Alfons frisst einen Besen.

Und weiter:

(2') Es gibt einen Vergaser, den die Gütekontrolle nicht abnimmt, oder Alfons frisst einen Besen.

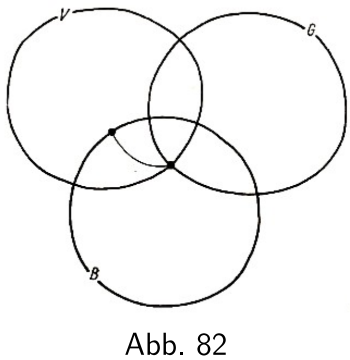


Abb. 82

Wir haben nun kein ganz reines Gewissen mehr, denn wir haben eine Umformung benutzt, von der wir zwar glauben, dass sie richtig ist, von der wir dies aber nicht bewiesen haben. Trotzdem wollen wir so fortfahren, vermerken aber, dass wir das Ergebnis, zu dem wir gelangen werden, als von der obigen Umformung abhängig ansehen. Wir stellen den Inhalt von (2') dar (Abb. 82).

(Der Einfachheit halber haben wir diejenigen Punkte, die zu irgendeinem von mehreren Feldern gehören können, auf die Begrenzungslinien dieser Felder bzw. die Schnittpunkte der Begrenzungslinien gesetzt.)

Wenn wir auch annehmen, dass wir damit zu einer Darstellung von (2) gelangt sind, so wissen wir immer noch nicht, was wir mit der Behauptung (1) anfangen sollen. Wird sie auch durch die obige Abbildung dargestellt? Dessen sind wir nicht so sicher. Wir sehen überhaupt nicht recht, wie man eine Darstellung von (1) herstellen könnte. Hier versagt das zeichnerische Vorgehen.

3.14 Lösung ohne Zeichnung

Vielleicht nützen uns jetzt Formeln mehr als Zeichnungen?
Sehen wir uns einmal an, ob der einzige Unterschied zwischen (1) und (2) wirklich darin besteht, dass es in (1) heißt "es gibt einen", während in (2) von "allen" die Rede ist.
Finden wir noch einen weiteren Unterschied? Ja natürlich! Das "wenn" kommt in (1) erst in der zweiten Hälfte vor, während (2) mit diesem Wort beginnt. Das sind die Schwierigkeiten der Umgangssprache, die sich auch in diesen Zufälligkeiten zeigen.

Wollen wir aber die Struktur beider Aussagen deutlich machen, so müssen wir sie von allen Zufälligkeiten der üblichen Ausdrucksweise befreien. Das eben heißt Formalisieren.
Wir wollen Bezeichnungen einführen. Es bieten sich die folgenden an:

$V\square = \square$ ist ein Vergaser (von denen, die Alfons dem Erich gezeigt hat),
$G\square =$ die Gütekontrolle nimmt $\square$ ab,
$F\square =$ Alfons frisst $\square$,
$b =$ der Besen.

So viele Bezeichnungen wären aber ein überflüssiger Luxus. Vom Aufessen ist doch nur in Bezug auf den Besen die Rede. Fb ist die einzige Aussage, die in diesem Zusammenhang auftreten kann. Diese aber können wir auch mit einem einzigen Buchstaben, etwa mit A, bezeichnen.
Für die Untersuchung unseres Schlusses ist die innere Struktur dieser Aussage gleichgültig. Dann aber genügt es, sich auf die Grundmenge jener Vergaser zu beschränken, die Alfons dem Erich gezeigt hat.

Wir haben schon bemerkt, dass es zweckmäßig ist, die Grundmenge so eng wie möglich zu wählen; dann werden die Formeln einfacher. Jetzt wird z. B. die Aussageform $V\square$ überflüssig.
In dieser eingeschränkten Grundmenge können wir (1) und (2) wie folgt formalisieren:

(1) $\exists x(Gx \to A)$ (2) $\forall x Gx \to A$

Bedeuten diese Formeln dasselbe? Vom logischen Standpunkt aus können wir die Frage auch so stellen: Nehmen beide gleichzeitig denselben Wahrheitswert an?
Wenn die erste Formel den Wert W besitzt, ist dann auch der Wert der zweiten gleich W, und wenn die erste den Wert F besitzt, ist dann auch der Wert der zweiten gleich F?

Wir können diese Frage beantworten, ohne uns um die Bedeutungen von A und $G\Box$ zu kümmern. Wir müssen nur dafür sorgen, dass die Grundmenge nicht leer ist.
(In unserem Fall heißt das, dass dort wirklich Vergaser lagen. Alfons und Erich haben sich das nicht nur eingebildet.) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: A hat den Wahrheitswert W. Die Aussageform $G\Box \to A$ hat dann immer den Wahrheitswert W, gleichgültig, welches Element der Grundmenge wir für $\Box$ einsetzen.
Der Wahrheitswert von $G\Box$ spielt dabei überhaupt keine Rolle. Auf alle Fälle existiert ein Element der Grundmenge, für das $G\Box \to A$ wahr ist, d.h. $\exists x(Gx \to A)$ hat den Wahrheitswert W. (2) hat in diesem Fall auch den Wahrheitswert W, weil eine Implikation mit wahrem Hinterglied unabhängig vom Wert des Vorderglieds stets wahr ist.

2. Fall: A hat den Wahrheitswert F. Dann ist der Wahrheitswert von $G\Box \to A$ in (1) gleich W oder F, je nachdem, ob $G\Box$ den Wert F oder W annimmt.

Unterfall 2a: Ist der Wahrheitswert von $G\Box$ immer W, gleichgültig, welches Element der Grundmenge wir für $\Box$ einsetzen, so ist der Wahrheitswert von $G\Box \to A$ immer F. Das heißt, es ist nicht wahr, dass ein Element existiert, das, für $\Box$ eingesetzt, die Implikation $G\Box \to A$ erfüllt.
Der Wahrheitswert von $\exists x(Gx \to A)$ ist dann F. Wie steht es nun mit (2)? Ihr Vorderglied nimmt den Wert W, ihr Hinterglied aber den Wert F an. Also ist auch der Wahrheitswert von $\forall x Gx \to A$ gleich F.

Unterfall 2b: Wird der Wahrheitswert von $G\Box$ bei Ersetzung von $\Box$ durch ein gewisses Element der Grundmenge gleich F, so hat für dieses Element $G\Box \to A$ den Wert W.
Dann gibt es also in der Grundmenge ein Element, für das $G\Box \to A$ wahr ist, d.h. $\exists x(Gx \to A)$ hat den Wahrheitswert W. Welchen Wert besitzt dann (2)? Das Vorderglied $\forall x Gx$ von (2) bleibt falsch, also besitzt auch $\forall x Gx \to A$ ebenso wie $\exists x(Gx \to A)$ den Wahrheitswert F.

Damit haben wir alle Fälle überprüft. Die Wahrheitswerte von (1) und (2) stimmen stets überein. Die Wette ist also eindeutig. Wir haben das mit exakten logischen Methoden nachgeprüft.

Es war nicht leicht, das alles zu durchdenken, obwohl die Formeln wirklich einfach sind. Wenn wir schon auf die Anschauung und die Vorteile der graphischen Darstellung verzichten müssen, so wollen wir uns doch wenigstens vor solchen ermüdenden Überlegungen sichern und mechanische Regeln ausarbeiten, mit deren Hilfe man auf fast algebraischem Wege Formeln ineinander umformen und auseinander herleiten kann.

Aufgaben

1. Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen den folgenden zwei Aussagen besteht!
(a) Wer dem Kollektiv X angehört, der hat über Y dieselbe Meinung wie Z.
(b) Wer über Y nicht dieselbe Meinung wie Z hat, gehört nicht dem Kollektiv X an.
Folgen diese Behauptungen auseinander?

2. Untersuchen Sie wie in Aufgabe 1, ob die folgenden Aussagen auseinander folgen!
(a) Solange man U sieht, ist alles in Ordnung.

(b) Wenn irgend etwas nicht in Ordnung ist, sieht man U nicht mehr.

3. Wir setzen voraus, dass $A \subset B$ ist. In welcher Beziehung stehen A' und B' zueinander?

4. a) Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen $A \cap B$ und A?
b) Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen in Aufgabe 4. a), wenn $A \subset B$ ist, und welche Beziehung besteht zwischen ihnen, wenn $B \subset A$ ist?

5. Bringen Sie die folgenden Bezeichnungen auf eine einfachere Form!
a) A''; b) $A \cup A'$; c) $A \cap A'$; d) $A \cup (A \cap B)$; e) $A \cap (A \cup B)$; f) $(A \cup B) \cap (A \cap A')$

6. Die Erfüllungsmenge der Aussageform $A\square$ möge mit A bezeichnet werden. Geben Sie die Erfüllungsmenge von
a) $\sim A\square$; b) $\sim A\square \to A\square$; c) $A\square \to (A\square \vee \sin A\square)$ an!

7. Bringen Sie auch die folgenden Bezeichnungen auf eine einfachere Form!
a) $(A' \cup B')$; b) $(A' \cap B')$; c) $(A \cup B)'$; d) $(A \cap B)'$

8. Betrachten wir nochmals die Aufgabe mit den Besitzern von Fernsehgeräten. Geben Sie die Prämissen und die Konklusion dieses Schlusses
a) durch eine mengentheoretische Formel,
b) durch eine logische Formel wieder!

9. Wir setzen die folgenden Behauptungen als wahr voraus:
a) Es gibt Halbstarke mit Beatles-Frisuren.
b) Jeder Halbstarke hat ein freches Benehmen.
Entscheiden und begründen Sie, ob hieraus die untenstehenden Behauptungen folgen:
c) Es gibt einen Halbstarken mit frechem Benehmen, der eine Beatles-Frisur trägt.
d) Jeder Halbstarke mit frechem Benehmen trägt eine Beatles-Frisur.

10. a) Entweder ist es wahr, was man von Schulze erzählt und seine Mitarbeiter sind alle in die Sache verwickelt, oder es gibt im Betrieb ein Klatschmaul.
b) Wenn es wahr ist, was man von Schulze erzählt, so hat er einen Mitarbeiter, den man verteidigt, wenn er in die Sache verwickelt ist.
Entscheiden Sie, ob hieraus folgt:
c) Wenn es im Betrieb kein Klatschmaul gibt, so gibt es jemanden, der in die Sache verwickelt ist und den man verteidigt.
(Die Lösung dieser Aufgabe wird mit den Methoden, die wir im folgenden entwickeln werden, viel einfacher sein. Der größte Wert der elementaren Lösung besteht darin, uns den Vorteil dieser Methoden vor Augen zu führen.)

11. Die Aufgabe mit den Junggesellen aus Löbau enthält in einer Prämisse eine überflüssige Angabe, d.h. eine solche, ohne die die Konklusion ebenfalls aus den Prämissen folgt. Welche Angabe ist das?

4 Schließen in formalen Schritten

4.1 Unser Programm

Jedes Kind, das schon einmal Schlitten gefahren ist, weiß, wie schön es ist, mit dem Schlitten bergab zu gleiten. Ihn wieder bergauf zu ziehen ist schon wesentlich unangenehmer. Aber wenn man Schlitten fahren will, muss man eben zuerst auf den Hügel steigen.
So ein langweiliger Aufstieg steht uns jetzt auch in diesem Buch bevor. Eine ganze Zeit lang werden wir nicht viel Neues zu sehen bekommen. Wir werden vielmehr unsere Hilfsmittel ordnen, sie umformen und bekannte Gedankengänge ganz genau überprüfen. Wir kehren zur Aussagenlogik zurück.
In ihr entwickeln wir ein gleichsam mechanisches Schlussverfahren, das wir nach entsprechenden Ergänzungen auch auf Formeln anwenden können, die Variable enthalten.

4.2 Wir ordnen unsere Hilfsmittel, zunächst die Identitäten

Am Schluss des ersten Bandes haben wir 37 Identitäten in der Reihenfolge ihres Auftretens zusammengestellt. Jetzt ordnen wir 24 von ihnen in Gruppen an. Zu diesen nehmen wir noch eine weitere hinzu, die im ersten Band zwar einen Namen - Exportation -, jedoch keine Nummer erhalten hat. Wir versehen sie mit der Nummer W 38. Die Nummerierung der übrigen wird beibehalten.

Die Benennung der Gruppen weist auf die in den Identitäten auftretenden Operationen hin. Wir haben auch die Namen einzelner Identitäten sowie die gemeinsamen Benennungen von je zwei Identitäten in Klammern angegeben.

Wir bemerken, dass mit Ausnahme der letzten beiden Gruppen auf der linken und der rechten Seite jeweils fast dieselben Identitäten stehen. Ersetzen wir das Zeichen $\wedge$ in der betreffenden Identität durch $\vee$, so erhalten wir aus der linken die rechte Seite und umgekehrt. Derartige aussagenlogische Ausdrücke hatten wir als zueinander dual bezeichnet.

Jede der beiden Identitäten der letzten Gruppe kann als Definition der Äquivalenz (Erklärung bzw. Zurückführung der Äquivalenz auf andere Operationen) angesehen werden. Die ersten beiden Identitäten der vorletzten Gruppe können als Definition der Implikation betrachtet werden. (Die eine führt die Implikation auf Negation und Konjunktion, die andere auf Negation und Alternative zurück.) Identitäten sind, wie wir wissen, Formeln, bei denen auf beiden Seiten des Zeichens $\equiv$ Aussagen stehen, deren Wahrheitswerte stets übereinstimmen (d. h. entweder besitzen beide den Wert W, oder beide haben den Wert F), gleichgültig, mit welchen Wahrheitswerten wir A, B usw. belegen (natürlich wird denselben Buchstaben stets derselbe Wahrheitswert zugeordnet).

So kann der Wahrheitswert von $A \vee B$ sowohl W als auch F sein, je nach den Wahrheitswerten von A und B. Genauso ist es mit dem Wert von $B \vee A$.
Aber entweder haben beide Aussagen den Wahrheitswert F (dann nämlich, wenn A und B den Wert F haben), oder beide haben den Wahrheitswert W (in den übrigen drei Fällen). Daher ist der Wahrheitswert von $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ stets W (denn es gilt $W \leftrightarrow W = W$ und $F \leftrightarrow F = W$), d.h., diese Aussage ist allgemeingültig. So können wir aus jeder Identität eine allgemeingültige Aussage gewinnen.

Andererseits können wir aus jeder Identität auch zwei richtige Schlussfiguren gewinnen. Aus W 38 erhalten wir z. B. die folgenden:

Negation	
W 1	
$\sim\sim A \equiv A$ (doppelte Verneinung)	
Konjunktion	Alternative
W 3	W 5
$A \wedge B \equiv B \wedge A$ (Kommutativität)	$A \vee B \equiv B \vee A$
W 4	W 6
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität)	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
W 5	W 1
$A \wedge A \equiv A$ (Idempotenz)	$A \vee A \equiv A$
W 27	W 28
$A \wedge F \equiv F$ (Identität mit Wahrheitswert)	$A \vee W \equiv W$
Konjunktion und Negation	Alternative und Negation
W 21	W 22
$A \wedge \sim A \equiv F$ (Widerspruch)	$A \vee \sim A \equiv W$ (ausgeschl. Dritte)
Konjunktion und Alternative	
W 8	W 9
$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (Distributivität)	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
W 36	W 37
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (Absorption)	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Konjunktion, Alternative und Negation	
W 12	W 13
$\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim -B$ (de Morgan)	$\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$
Konjunktion, Alternative, Negation und Implikation	
W 14	W 2
$A \to B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$ (Def.der Implikation)	$A \to B \equiv \sim A \vee B$
W 31	W32
$\to F \equiv \sim A$ (Identität mit Wahrheitswert)	$W \to A \equiv A$
W 38	W 7
$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \wedge \to C$ (Exportation)	$A \to \sim B \equiv \sim B \to \sim A$ (Kontraposition)
Konjunktion, Alternative, Negation, Implikation und Äquivalenz	
W 15	W 16
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$ (Def.d. Äquivalenz)	$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

$$\frac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C} \text{ und } \frac{(A \wedge B) \to C)}{A \to (B \to C)}$$

Wir können auch sagen: Jede Identität ist eine in beiden Richtungen richtige Schlussfigur. Aus der linken Seite folgt die rechte und umgekehrt.

Erinnern wir uns, dass wir eine Schlussfigur dann als richtig bezeichnet haben, wenn bei allen Belegungen der Buchstaben mit Wahrheitswerten, bei denen die Prämissen den Wert W annehmen, auch die Konklusion den Wert W annimmt.
Wir verlangen nicht, dass die Konklusion nur dann den Wert W besitzt, wenn die Prämissen den Wert W annehmen. Ist aber auch das der Fall und ist genau eine Prämisse vorhanden, so nennen wir die Schlussfigur umkehrbar.

4.3 Andere wichtige Schlussfiguren

Identitäten sind demnach umkehrbare richtige Schlussfiguren. Wir geben auch noch einige nicht umkehrbare richtige Schlussfiguren an. Den meisten ist der Leser bereits im ersten Band begegnet, manche haben auch schon einen Namen bekommen, jedoch noch keine Nummer.
Den Beweis der Richtigkeit von Schlussfiguren, die neu sind, überlassen wir dem Leser als nützliche Übung. Wir stellen solche Schlussfiguren nebeneinander, die auf Grund des kommutativen Gesetzes oder durch Umbenennung ineinander überführt werden können und daher nur Varianten ein und derselben Schlussfigur sind. (Darauf weisen auch ihr gemeinsamer Name sowie ihre gemeinsame - nur in a) und b) unterteilte - Nummer hin.)

K 1a $\dfrac{A \wedge B}{(A)}$ K 1b $\dfrac{A \wedge B}{(B)}$ (Weglassung oder Schluss aus einer Konjunktion)

K 2 $\dfrac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$

K 3a $\dfrac{A}{A \vee B}$ K 3b $\dfrac{B}{A \vee B}$ (Hinzufügung oder Schluss auf eine Alternative)

K 7 $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B}$ (Abtrennung, modus ponens)

K 5 $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ \sim B \end{array}}{\sim A}$ (Abtrennung, modus tollens)

K 6a $\dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim A \end{array}}{B}$ K 6b $\dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim B \end{array}}{A}$ (Disjunktiver Syllogismus, modus tollendo ponens)

K 7 $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$ (bedingter Syllogismus)

K 8 $\dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ A \to C \\ B \to D \end{array}}{C \vee D}$ (Fallunterscheidung)

Auch diese Schlussfiguren können wir durch Identitäten ausdrücken. Dass K 7 richtig ist, ist z. B. gleichbedeutend damit, dass

$$[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C) \equiv W$$

eine Identität ist, d. h., die Aussage

$$[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$$

ist allgemeingültig.

4.4 Umformungsregeln

Zur letzten Gruppe unserer Hilfsmittel gehören Umformungsregeln (Transformationsregeln), mit deren Hilfe man aus Identitäten andere Identitäten und aus richtigen Schlussfiguren andere richtige Schlussfiguren herstellen kann. Dem aufmerksamen Leser des ersten Bandes werden diese Regeln nicht fremd sein, trotzdem scheint es uns zweckmäßig, die Bekanntschaft mit ihnen etwas aufzufrischen (vgl. Band 1).

T1. Substitution:
Wir erhalten aus einer Identität eine weitere Identität, aus einer richtigen Schlussfigur eine weitere richtige Schlussfigur, wenn wir für eine logische Variable (A, B usw.) überall, wo sie vorkommt, ein und denselben Ausdruck einsetzen. Zum Beispiel erhalten wir durch Substitution aus

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

die folgende Identität

$$(C \to B) \vee B \equiv B \vee (C \to B)$$

und aus

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array} \quad \text{die Schlussfigur} \quad \begin{array}{c} A \to (A \vee D) \\ A \\ \hline A \vee D \end{array}$$

T2. Ersetzung:
Wir erhalten aus einer Identität eine weitere Identität, aus einer richtigen Schlussfigur eine weitere richtige Schlussfigur, wenn wir für einen beliebigen hierin auftretenden Ausdruck einen anderen zu ihm wertverlaufsgleichen Ausdruck einsetzen.
Durch Ersetzung gehen z. B. die beiden folgenden Identitäten

$$A \vee B \equiv B \vee A \qquad [A \wedge (A \vee B)] \vee B \equiv B \vee A$$

und die beiden Schlussfiguren

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim A \\ \hline B \end{array} \quad \text{die Schlussfigur} \quad \begin{array}{c} \sim A \to B \\ \sim A \\ \hline B \end{array}$$

auseinander hervor. Man beachte, dass wir z.B. bei der ersten Ersetzung nur auf der linken Seite an Stelle von A den Ausdruck $A \wedge (A \vee B)$ eingesetzt haben, rechts dagegen nicht.
Im Gegensatz zur Substitution brauchen wir bei Ersetzung für den betreffenden Ausdruck nicht an allen Stellen, an denen er vorkommt, einen wertverlaufsgleichen Ausdruck einzusetzen. (Dagegen brauchen wir bei der Substitution im Gegensatz zur Ersetzung an Stelle einer Variablen nicht einen wertverlaufsgleichen Ausdruck einzusetzen.)

Der ersten Ersetzung liegt die Identität $A \equiv A \wedge (A \vee B)$, der zweiten die Identität $A \vee B \equiv -A \to B$ zugrunde.

T3. Aufnahme einer Prämisse in die Konklusion bzw. Hinzufügung des Vorderglieds der Konklusion zu den Prämissen:
Wir erhalten aus einer richtigen Schlussfigur wieder eine richtige Schlussfigur, wenn wir eine beliebige Prämisse weglassen und dieselbe als vorderes Glied einer Implikation in die Konklusion aufnehmen oder wenn wir umgekehrt in dem Fall, wo die Konklusion eine Implikation ist, das

vordere Glied dieser Implikation weglassen und als weitere Prämisse zu den übrigen Prämissen hinzufügen.
Auf diese Weise gehen z. B. die folgenden Schlussfiguren auseinander hervor:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \sim B \end{array}}{\sim A} \qquad \frac{A \to B}{\sim B \to \sim A}$$

Wir weisen darauf hin, dass T 2 und T 3 umkehrbare Umformungen sind, T 1 dagegen im allgemeinen nicht. Mit anderen Worten:
Mit Hilfe von T 2 und T 3 können wir nur dann zu einer Identität bzw. richtigen Schlussfigur gelangen, wenn wir diese Regeln auf eine Identität bzw. auf eine richtige Schlussfigur anwenden.
Anders liegen die Dinge bei T 1. Uns ist z. B. bekannt, dass die Schlussfigur

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \end{array}}{A}$$

nicht richtig ist, d. h., $[(A \to B) \vee B] \to A \equiv W$ ist keine Identität. Durch die Substitution B/A entsteht hieraus aber trotzdem eine richtige Schlussfigur bzw. Identität, nämlich

$$\frac{\begin{array}{c} A \to A \\ A \end{array}}{A} \text{ bzw. } [(A \to A) \vee A] \to A4.$$

4.5 Lohnt es sich, mit weniger Hilfsmitteln zu arbeiten?

Der Leser hat sicher schon bemerkt, dass in diesem umfangreichen Apparat von Formeln und Regeln viele entbehrliche Elemente vorkommen. Wir haben vorhin ein Beispiel dafür gefunden, dass man mit Hilfe von T 3 zwei gegebene Schlussfiguren auseinander herleiten kann.

Die eine war der modus tollens (K 5), die zweite die Anwendung der Kontraposition (W 7) in einer Richtung. Wir hätten daher den modus tollens gar nicht in die Liste unserer Hilfsmittel aufzunehmen brauchen, denn mit Hilfe von W 7 und T 3 können wir dieselben Schlüsse durchführen, nur wären das dann zwei Schritte an Stelle des einen. Wir nehmen deshalb eine Erweiterung des Apparats unserer Hilfsmittel in Kauf, weil wir damit rationeller arbeiten können.

Unser Hauptgesichtspunkt ist also eine möglichst rationelle Erledigung der Arbeit, des Schließens.

Das ist aber nicht der einzig mögliche Gesichtspunkt. Würden wir tiefer in die mathematische Logik eindringen, als es uns in diesem Buch möglich ist, so würden uns die einzelnen Schlüsse selbst immer weniger interessieren, immer mehr hingegen die allgemeinen Probleme des logischen Schließens.
Dazu gehören z.B. Untersuchungen darüber, ob man aus einer gegebenen Menge von Aussagen mit Hilfe von gegebenen Schlussregeln jede allgemeingültige Aussage erhalten kann, ob man auf diese Weise nur zu allgemeingültigen Aussagen gelangt, ob man nicht zu zwei sich widersprechenden Formeln gelangen kann, und ob wir auch dann alle allgemeingültigen Aussagen erhalten, wenn wir aus der Menge unserer Ausgangsaussagen gewisse Aussagen weglassen.

Bei Untersuchungen dieser Art ist es zweckmäßig, mit möglichst wenig Operationen zu arbeiten, selbst wenn die Formeln dadurch länger werden. Darüber hinaus ist es zweckmäßig, mit wenigen Formeln und Regeln zu arbeiten, auch wenn die Ableitungen länger werden. Leser, die sich für derartige Fragen interessieren, finden in der angegebenen Literatur unter den Stichwörtern "Axiomensystem", "Vollständigkeit", "Widerspruchsfreiheit", "Unabhängigkeit[16]" hierüber Genaueres.

Wir konnten diese Fragen hier nur streifen und werden diesen prinzipiellen Fragen nicht weiter nachgehen. Wir wollen die Hilfsmittel der mathematischen Logik bei der Lösung von Aufgaben, bei konkreten Ableitungen benutzen. Hierfür aber erweist sich ein umfassenderer, zahlreiche überflüssige Elemente enthaltender Apparat von Formeln und Schlussregeln als geeigneter.

4.6 Ein alter Schluss in neuer Form

Unsere Hilfsmittel bieten einstweilen nicht viel Neues. Neuartig wird aber die Form sein, in der wir unsere Schlüsse niederschreiben werden. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst ein Beispiel, dem wir schon im ersten Band begegnet sind:

Wenn ich das Motorrad kaufe, dann muss ich all mein Geld ausgeben,
und dann kann ich kein neues Radio kaufen.
Wenn ich das alte Radio veräußere und das neue nicht nehme, dann kann ich zu Hause nicht die Übertragung vom Wettkampf hören.

Wenn ich das alte Radio veräußere und das Motorrad kaufe, dann kann ich zu Hause nicht die Übertragung vom Wettkampf hören.

Wir wollen beweisen, dass dieser Schluss richtig ist und dass alle derartigen Schlüsse richtig sind, das heißt, dass die folgende Schlussfigur richtig ist.

$$\begin{array}{c} M \to (P \wedge \sim V) \\ (E \wedge \sim V) \to \sim H \\ \hline (E \wedge M) \to \sim H \end{array}$$

Wir formen die Schlussfigur zunächst mit Hilfe von T 3 um:

$$\begin{array}{c} M \to (P \wedge \sim V) \\ (E \wedge \sim V) \to \sim H \\ E \wedge M \\ \hline \sim H \end{array}$$

Ist diese Schlussfigur richtig, so ist auch die Ausgangsfigur richtig und umgekehrt; denn T 3 ist eine umkehrbare Schlussregel. Unser Ziel ist es, durch Abtrennung aus der zweiten Prämisse $\sim H$ zu erhalten. Dazu benötigen wir das vordere Glied der zweiten Prämisse, also $\wedge simV$.

Wie können wir dieses gewinnen? Durch Kopplung von E und $\sim V$. E erhalten wir durch Weglassung aus $E \wedge M$. $\sim V$ ist in der ersten Prämisse enthalten. Wir versuchen, es hieraus durch Abtrennung zu isolieren.
Dazu brauchen wir M, dies erhalten wir durch Weglassung aus $E \wedge M$. Die Abtrennung führt zunächst auf $P \wedge \sim V$. Hieraus ergibt sich $\sim V$ durch Weglassung.

So ungefähr kann unsere gedankliche Überlegung aussehen. Nach der Überlegung gehen wir beim Niederschreiben der einzelnen Schritte ganz systematisch vor, indem wir, vom Gegebenen ausgehend, nach und nach zum Gesuchten fortschreiten:

[16] englisch: system of axioms, completeness, consistency, independence.

$\dfrac{E \wedge M}{E}$ Weglass. $\quad \dfrac{E \wedge M}{M}$ Weglass. $\quad \dfrac{\begin{array}{c} M \rightarrow (P \wedge \sim V) \\ M \end{array}}{P \wedge \sim V}$ Abtrennung $\quad \dfrac{P \wedge \sim V}{\sim V}$ Weglass. $\quad \dfrac{\begin{array}{c} E \\ \sim V \end{array}}{E \wedge \sim V}$ Kopplung $\quad \dfrac{\begin{array}{c} (E \wedge \sim V) \rightarrow \sim H \\ E \wedge \sim V \end{array}}{\sim H}$ Abtrennung

Unter jedem Schluss haben wir die ihm zugrunde liegende Schlussregel angegeben.
Daneben haben wir aber auch die Substitution verwendet; denn es werden zusammengesetzte Ausdrücke und andere Buchstaben dort eingesetzt, wo ursprünglich nur A, B und C vorkamen. Der Kürze halber haben wir darauf jedoch nicht besonders hingewiesen und werden es auch in Zukunft nicht tun.

Bei unseren ersten beiden Schlüssen sind wir von einer der ursprünglichen Prämissen ausgegangen. Später haben wir auch solche Prämissen benutzt, die nicht zu den ursprünglichen Prämissen gehören, sich jedoch als Konklusionen aus diesen ergeben haben.
Noch später haben wir außer den "Kindern" der ursprünglichen Prämissen auch deren "Enkel" benutzt usw. Diese Kette kann man über beliebig viele "Generationen" fortsetzen, aber natürlich nur in endlich vielen Schritten. Die Generationen können auch durcheinander geraten (dafür finden wir hier mehrere Beispiele).
Wir können dieselbe Formel auch mehrfach benutzen, sei sie nun eine Prämisse oder eine aus den Prämissen direkt oder indirekt folgende Konklusion (die dritte Prämisse z. B. haben wir zweimal verwendet). All dies ist gestattet, um unser Ziel zu erreichen.

Was ist eigentlich unser Ziel? Es soll nachgewiesen werden, dass der Wahrheitswert der Konklusion stets W ist, wenn die Prämissen den Wahrheitswert W haben. Wir wissen, dass die obigen Schlussfiguren sämtlich richtig sind (sie haben sich nämlich aus K1-K8 durch Substitution ergeben). Deshalb gilt:

Mit welchen Wahrheitswerten wir die Buchstaben auch belegen - dieselben Buchstaben natürlich mit denselben Wahrheitswerten, und zwar in sämtlichen Schritten der Schlusskette -, stets wird, sobald die ursprünglichen Prämissen den Wahrheitswert W annehmen, dieser die gesamte Schlusskette durchlaufen, so dass die Konklusionen sämtlicher Zwischenschritte und schließlich auch $\sim H$ selbst den Wahrheitswert W annehmen.

Solch eine kettenartige Aneinanderreihung von Schlüssen nennen wir Ableitung. Die obige Form der Notation ist ziemlich umständlich. Wir müssen dieselben Formeln mehrmals aufschreiben; bei der Kontrolle müssen wir immer wieder suchen, was wir woher gewonnen haben. Dabei genügt es, hinter die ursprünglichen Prämissen nur der Reihe nach untereinander die Konklusionen zu schreiben.
Wenn wir, bei den Prämissen beginnend, jeder Formel eine Nummer geben, können wir an Hand dieser Zahlen angeben, welche Formel wir bei einem Schluss benutzen.
(Wir setzen hinter die Zahlen keinen Punkt. Wir betrachten sie nicht als Ordnungszahlen, sondern nur als Kurzzeichen der Formeln.)

Nach dem Hinweis auf die benutzte Formel durch eine Zahl geben wir abgekürzt die benutzte Schlussregel an, d.h. die Regel, durch deren Anwendung wir eine Formel aus der durch die Zahl bezeichneten Formel gewinnen. Die obige Schlusskette können wir auf diese Weise in komprimierter Form niederschreiben:

1	$M \to (P \wedge \sim V)$		
2	$(E \wedge \sim V) \to \sim H$		
3	$E \wedge M$		
4	E	3	Weglassg.
5	M	3	Weglassg.
6	$P \wedge \sim V$	1,5	Abtrenng.
7	$\sim V$	6	Weglassg.
8	$E \wedge \sim V$	4,7	Kopplg.
9	$\sim H$	2,8	Abtrenng.

Trotzdem scheint uns auch diese Notation noch zu langwierig. Wir vereinbaren daher, Weglassungen nicht mehr als gesonderten Schritt anzugeben. Stellt eine Formel eine Konjunktion dar, so werden wir im Bedarfsfall jedes Glied dieser Konjunktion benutzen, ohne es in der Schlusskette gesondert aufzuführen.
Wir verweisen auf die benutzten Glieder der Konjunktion, indem wir hinter die Nummer der betreffenden Formel die Buchstaben a, b usw. stellen. 3 a bezeichnet z. B. das erste Konjunktionsglied in der Formel 3, 4b das zweite Konjunktionsglied in Formel 4:

1	$M \to (P \wedge \sim V)$		
2	$(E \wedge \sim V) \to \sim H$		
3	$E \wedge M$		
4	$P \wedge \sim V$	1,3b	Abtrenng.
5	$E \wedge \sim V$	3a, 4b	Kopplg.
6	$\sim H$	2,5	Abtrenng.

4.7 Der Hinweispfeil

Diese bisherige Ableitung beweist uns, dass aus den Formeln 1, 2 und 3 - unter anderem - Formel 6 folgt.
Das war aber nicht unser ursprüngliches Ziel. Wir wollten vielmehr zeigen, dass aus 1 und 2 $(E \wedge M) \to H$ folgt. Dazu müssen wir noch Umformungsregel T 3 benutzen und Prämisse 3 als vorderes Glied der Implikation vor $\sim H$ ziehen. Dazu führen wir die folgende Bezeichnung, den "Hinweispfeil" ein:

	1	$M \to (P \wedge \sim V)$		
	2	$(E \wedge \sim V) \to \sim H$		
↰	3	$E \wedge M$		
|	4	$P \wedge \sim V$	1,3b	Abtrenng.
|	5	$E \wedge \sim V$	3a, 4b	Kopplg.
↳	6	$\sim H$	2,5	Abtrenng.
	7	$(E \wedge M) \to \sim H$	3, 6 T 3	

Der Pfeil gibt einerseits an, dass $E \wedge M$ seinen bisherigen Platz verlässt und nicht länger Prämisse bleibt, und zum anderen, dass es vorderes Glied einer Implikation wird, deren hinteres Glied $\sim H$ ist. Die so gewonnene Formel, die auch schon aus 1 und 2 folgt, haben wir als siebente zu den übrigen hinzugefügt.
Wir haben eben erwähnt, dass 7 auch schon aus 1 und 2 folgt.

Zur Ableitung von 6 sind aber alle drei Prämissen notwendig. (1 und 3 indirekt über 5. Zur Ableitung von 5 waren 3 und 4 notwendig, und für 4 wird wiederum 1 notwendig.)
Braucht man zur Ableitung von 5 alle Prämissen? Man sieht leicht, dass diese Formel auch

aus 1 und 3 allein folgt, ohne dass 2 notwendig wäre.

Ebenso wenig braucht man 2 für die Ableitung von 4. Es ist mitunter sinnvoll, solche "Abhängigkeitsverhältnisse" in Form von Zahlen links neben den Formeln anzugeben, z. B. folgendermaßen:

	1	$M \to (P \wedge \sim V)$		
	2	$(E \wedge \sim V) \to \sim H$		
	3	$E \wedge M$		
1,3	4	$P \wedge \sim V$	1,3b	Abtrenng.
1,3	5	$E \wedge \sim V$	3a, 4b	Kopplg.
1,2,3	6	$\sim H$	2,5	Abtrenng.
1,2	7	$(E \wedge M) \to \sim H$	3, 6 T 3	

Auf diese Weise können wir aus der Ableitung unmittelbar ablesen, zu welchen Formeln man "am billigsten", d. h. unter Benutzung von möglichst wenig Voraussetzungen, gelangt. Mit anderen Worten: Wir können überblicken, welche Formel von welchen Prämissen abhängt. (Die Prämissen hängen natürlich nur von sich selbst ab, d. h., eine jede von ihnen folgt aus sich selbst. Da sich das von selbst versteht, werden wir es nicht besonders vermerken.)

Wir mussten vorhin ein wenig überlegen, um festzustellen, welche Formel von welcher Prämisse abhängt. Die Situation wird übersichtlicher, wenn wir die gesamte Ableitung skizzieren, und zwar in der Form, wie man Stammbäume zu zeichnen pflegt. Zuoberst stehen die Prämissen. Sie sind die "Vorfahren", von denen die anderen abstammen. Die abwärts führenden Linien bezeichnen die einzelnen Schlüsse. Die Zeichnung wird übersichtlicher, wenn wir die Prämissen in der Reihenfolge ihrer Verwendung angeben (Abb. 83).

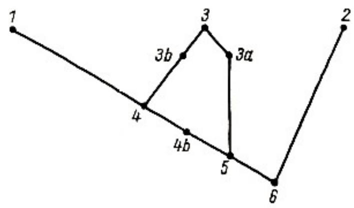


Abb. 83

Soweit ist alles in Ordnung. Auch ist klar, wo die Zahlen rechts und links der Formeln, die die Abhängigkeit der Formel von den vorhergehenden bzw. den Prä- ' missen angeben, in der Zeichnung zu finden sind. Mit Ausnahme der Prämissen führen von jedem Punkt eine oder mehrere Linien aufwärts.
Auf diesen nach oben vorwärtsschreitend, gelangen wir zu den benachbarten Punkten, deren Zahlen angeben, aus welchen vorangehenden Formeln die betrachtete Formel gewonnen wurde. Schreiten wir auf diesen Linien weiter nach oben vorwärts, so gelangen wir schließlich zu denjenigen Prämissen, von denen die betrachtete Formel abhängt.
So gelangen wir z. B. von 4 aus nur zu 1 und 3; von 5 aus ebenfalls; von 6 aus aber gelangen wir zu 1, 2 und 3,

Wie können wir die Zeichnung nun durch einen Formel 7 entsprechenden Punkt ergänzen? Dass 7 nicht von 3 abhängt und dass 3 trotzdem bei der Entstehung von 7 eine gewisse Rolle gespielt hat, kann man z.B. folgendermaßen veranschaulichen (Abb. 84):

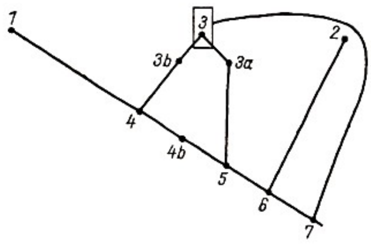


Abb. 84

Diese Zeichnungen helfen uns auch, ein mechanisches Verfahren zu entwickeln, das uns in die Lage versetzt, die links neben den Formeln stehenden "Abhängigkeitszahlen", die die Abhängigkeit einer Formel von den Prämissen angeben, aus den rechts neben den Formeln stehenden "Hinweiszahlen", die angeben, aus; welchen vorhergehenden Formeln eine bestimmte Formel folgt, auch dann zu berechnen, wenn uns keine Zeichnung zur Verfügung steht. Das Verfahren verläuft wie folgt:

Nehmen wir an, wir suchen die zu Formel 6 gehörenden "Abhängigkeitszahlen".
Wir suchen dann unter den zu Formel 6 gehörenden "Hinweiszahlen" diejenigen, die bereits den Prämissen entsprechen. Sofern solche existieren, schreiben wir sie links neben die Formel. (In unserem Beispiel die 2.) Die übrigen Hinweiszahlen untersuchen wir unter demselben Gesichtspunkt. (In unserem Beispiel die 5.)

Auf die Prämissen verweisende "Hinweiszahlen" schreiben wir dann wieder links vor die ursprüngliche Formel. (In unserem Beispiel die 3. Die kleinen Buchstaben lassen wir natürlich weg. Uns interessiert ja nur, von welcher Prämisse Formel 6 abhängt, und nicht von welchem Glied der Konjunktion.)
Unter Benutzung der restlichen Hinweiszahlen setzen wir das Verfahren so lange fort, wie es möglich ist, Ein und dieselbe Prämisse schreiben wir nicht mehrmals vor die Formel.

Bei Formel 7 gibt es allerdings eine kleine Schwierigkeit. Als Hinweiszahlen haben wir 3 und 6 neben sie geschrieben, denn aus diesen Formeln ging sie hervor. Von 3 hängt sie aber nicht ab. Sollen wir vielleicht lieber nur die 6 hinter Formel 7 schreiben und auf dieser Grundlage untersuchen, von welchen Prämissen sie abhängt?
Aber auch dann gelangen wir zu 3, denn 5 hängt hiervon ab! Man sieht, dass man bei Formel 7 auf 3 verweisen muss, doch hat dieser Hinweis hier gerade den entgegengesetzten Sinn, er bedeutet Aufheben der Abhängigkeit.
Wir drücken dies symbolisch dadurch aus, dass wir vor die 3 ein Minuszeichen setzen:

1,2 7 $(E \wedge M) \rightarrow\sim H$ -3,6 T 3 $ds_{19} = (18)(27)$

Bei dem oben beschriebenen mechanischen Verfahren gehen wir so vor, dass wir die mit einem Minuszeichen versehenen Prämissennummern auch dann nicht links vor die betrachtete Formel schreiben, wenn sie eigentlich dorthin gehörten.

4.8 Einander widersprechende Prämissen

Eine vierköpfige Bande von Rauschgiftschmugglern ist gefasst worden. Beim ersten Verhör erklärten die Verhafteten der Reihe nach:

1. Wenn Mulfus nichts von der Heroinlieferung gewusst hat, so haben Digger oder Tom auf alle Fälle davon gewusst.
2. Wenn Tom davon gewusst hat, so hat sich Susan Montag mit Digger getroffen.

3. Es stimmt nicht, dass, wenn Mulfus nichts von der neuen Lieferung gewusst hat Susan sich am Montag mit Digger getroffen hat.
4. Digger wusste nichts von der neuen Lieferung.

Der Detektiv der Interpol machte sich Notizen und stellte nach einigen Minuten Überlegens fest, dass mit den Aussagen etwas nicht in Ordnung, dass ein Widerspruch in ihnen enthalten ist. Woher wusste er das?

Anscheinend verstand er etwas von mathematischer Logik. Er notierte die Aussagen und versuchte - sie vorläufig als wahr ansehend -, aus ihnen Schlussfolgerungen zu ziehen. Da er hierin die nötige Übung besaß, brauchte er die Begründungen nicht mit aufzuschreiben. (Wir werden das später nachholen. Siehe Aufgabe 1.) Die Hinweiszahlen hat er aber sicherheitshalber neben den Formeln angegeben.

1	$\sim M \to (D \vee T)$	
2	$T \to S$	
3	$\sim (\sim M \to S)$	
4	$\sim D$	
5	$\sim (M \vee S)$	3
6	$\sim M \wedge \sim S$	5
7	$\sim T$	2, 6b
8	$M \vee (D \vee T)$	1
9	$(M \vee D) \vee T$	8
10	$M \vee D$	9, 7
11	M	10,4

Die letzte Formel aber widerspricht 6a. Wäre der Detektiv in Spiellaune gewesen, hätte er aus diesem Widerspruch noch alle möglichen Ungereimtheiten ableiten können. Zum Beispiel folgende:

12	$M \vee (2 \cdot 2 = 5)$	11
13	$2 \cdot 2 = 5$	12, 6a

In der Tat: Aus einander widersprechenden Formeln (d. h. aus solchen, von denen die eine die Negation der anderen ist) kann man in der angegebenen Weise alles ableiten.

Das bedeutet natürlich nicht, dass das, was wir abgeleitet haben, wahr ist. Es heißt lediglich, dass es - wie üblich - aus den Prämissen folgt. Es lohnt sich nicht, aus einander widersprechenden Formeln Schlüsse zu ziehen, weil man aus etwas Falschem auf alles schließen kann. Die Aufgabe des Detektivs ist es (nachdem er den Widerspruch festgestellt hat), die Aussagen mit den Tatsachen zu vergleichen. Wo es einen logischen Widerspruch gibt, dort widerspricht eine Aussage (unter Umständen auch mehrere) auch den Tatsachen.

4.9 Einführung weiterer Prämissen im Verlauf einer Ableitung. Indirekter Beweis

Bei unseren Ableitungen haben wir bisher die Prämissen und die aus ihnen folgenden Konklusionen konsequent voneinander unterschieden: Über dem Strich standen die Prämissen, darunter die Konklusionen. Diese Trennung erweist sich z.B. dann als unbequem, wenn wir durch zweimalige Anwendung von T 3 eine Implikation ableiten wollen:
Wir bringen das vordere Glied der Implikation zu den Prämissen hinauf, d.h, wir fügen es als weitere Prämisse hinzu, und leiten zunächst das hintere Glied der Implikation ab. Danach ziehen wir die nachträgliche Prämisse als vorderes Glied der Implikation nach unten. Der "Hinweispfeil" ersparte es uns, die ganze Ableitung mit weniger Prämissen nochmals aufschreiben zu müssen.
Wir können uns aber das nochmalige Abschreiben auch bei der ersten - umgekehrten - Anwendung von T 3 ersparen, wenn wir den Trennungsstrich zwischen Prämissen und Konklusionen weglassen und auch nicht darauf bestehen, dass alle vorgegebenen Prämissen am Anfang der Ableitung stehen.

Dabei schreiben wir aber ein P hinter die Prämissen. Auf diese Weise führen wir im Verlauf des Ableitens, sobald sich die Notwendigkeit dazu ergibt, neue Prämissen ein; auch solche, von denen wir erst im Laufe der Ableitung bemerken, dass "wir auch sie noch brauchen".
Wir fügen auch solche Prämissen hinzu, auf denen wir schließlich nicht aufbauen wollen; durch Anwendung des Hinweispfeils können wir uns später von ihnen befreien.

Darüber hinaus können wir auch solche Prämissen einführen, von deren Wahrheit wir nicht überzeugt sind, ja mehr noch, von deren Gegenteil wir geradezu überzeugt sind, wenn wir damit nur den Prozess des Ableitens voranbringen können. Dies geschieht z. B., wenn wir eine Behauptung auf indirektem Wege beweisen wollen.
Sehen wir uns ein Beispiel hierfür an. Gegeben seien drei Prämissen:

1	$\sim (A \wedge B)$	P
2	$\sim C \vee B$	P
3	C	P

Wir möchten aus diesen Prämissen $\sim A$ ableiten. Als vierte Prämisse führen wir die Negation hiervon, d.h. A, ein und schließen weiter:

	1	$\sim (A \wedge B)$	P	
	2	$\sim C \vee B$	P	
	3	C	P	
↰	4	A	P	
|	5	$\sim A \vee \sim B$	1	de Morgan
|	6	$\sim B$	5, 4	disj. Syll., doppelte Negation
↳	7	$\sim C$	2, 6	disj. Syll.
	8	$A \rightarrow \sim C$	-4, 7	T 3
	9	$\sim A$	8, 3	doppelte Negation, mod. toll.

Ist es uns gelungen, $\sim A$ abzuleiten?
Es könnte jemand sagen: "Nein, da stimmt etwas nicht! Aus 4 und 9 könnte man auf die Behauptung $2 \cdot 2 = 5$ oder eine beliebige andere schließen. Warum sollen wir 9 als eine gültige Konklusion ansehen?"

Man beachte aber, dass wir während des Schließens von 4 durch den Hinweispfeil zu 7 übergegangen sind, und damit erlosch die Gültigkeit von 4! Wir sehen auch, dass die zusätzliche Prämisse 4 im Verein mit den übrigen zu der Konklusion $\sim C$ geführt hat, was 3 widerspricht.

Da wir aber 3 als wahr vorausgesetzt haben, kann A nicht wahr sein.
Wenn wir es recht bedenken, hätten wir daher den Beweis schon bei Formel 7 abbrechen und nur noch als achte Formel $\sim A$ hinzufügen können.

Wir haben dies nur deshalb nicht getan, weil wir uns einmal ganz streng an das Verfahren halten und auf diese Weise $\sim A$ ableiten wollten. In der Praxis werden wir uns natürlich etwas größere Freiheiten gestatten und sofort, nachdem wir auf einen Widerspruch gestoßen sind, jene Formel als Konklusion aufschreiben, deren Negation wir versuchsweise zu den Prämissen hinzugenommen hatten.

4.10 Beweis von Identitäten durch Ableiten

Können wir demnach auf sämtliche Prämissen durch Anwendung des Hinweispfeils verzichten? Woraus folgt dann aber die so erhaltene Konklusion?
Sie folgt ohne jede Voraussetzung, d. h., sie ist allgemeingültig. Sehen wir uns ein Beispiel hierfür an. Jemand behauptet:

$(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)] \equiv W$

Wir versuchen, diese Behauptung folgendermaßen zu beweisen:
Ausgehend von den Prämissen $A \rightarrow B$ und $C \rightarrow A$, leiten wir aus ihnen die Konklusion $C \rightarrow B$ ab. Schließlich gewinnen wir durch Anwendung des Hinweispfeils zunächst das vordere Glied $C \rightarrow A$ der Implikation $(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ und danach das vordere Glied $A \rightarrow B$ der abzuleitenden Implikation

			$(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$		
↵	←	1	$A \rightarrow B)$	P	
|	↵	2	$C \rightarrow A$	P	
|	|	3	$C \rightarrow B$	2, 1	beding. Syll.
|	↳	4	$(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$	-2,3	T 3
↳	→	5	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$	-1, 4	T 3

Wir können auch indirekt beweisen, dass eine Formel allgemeingültig ist:
Dabei gehen wir von ihrer Negation als einziger Prämisse aus und leiten daraus einen Widerspruch ab. Bei richtigen Schlüssen ist die Konklusion stets wahr, wenn die Prämisse wahr ist. ("Stets" heißt in diesem Zusammenhang für jede Belegung der Buchstaben mit Wahrheitswerten.) Eine widersprüchliche Konklusion aber ist niemals wahr. Daher kann auch die Prämisse niemals wahr sein, und somit ist die Formel, die wir beweisen wollen, stets wahr.
Als Beispiel beweisen wir die Identität

	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \equiv W$		
1	$\sim [(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)]$	P	
2	$\sim (A \rightarrow B) \wedge \sim (B \rightarrow C)$	1	de Morgan
3	$(A \wedge \sim B) \wedge (B \wedge \sim C)$	2	doppelte Negation, Def. der Impl.
4	$\sim B$	3a	Weglassg.
5	B	3b	Weglassg.

Der Widerspruch tritt schon zutage. Aus ihm können wir auch formal unsere Identität ableiten (siehe Aufgabe 6).
Schließlich beweisen wir noch eine Identität (sie kommt auch in unserer Liste vor, und zwar unter der Nummer W 36), indem wir von jeder ihrer Seiten auf die andere schließen:

1	$A \wedge (A \vee B)$	P	
2	A	1	Weglassg.

und

1	A	P	
2	$A \vee B$	1	Hinzufüg.
3	$A \wedge (A \vee B)$	1,2	Kopplg.

Nach beiden Ableitungen ist

$$\frac{A \wedge (A \vee B)}{A}$$

eine richtige und sogar umkehrbare Schlussfigur, d. h.,

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$

ist eine Identität. (Bei unserem Beweis haben wir natürlich von unserem Recht, diese in unserer Liste enthaltene Identität zu benutzen, d.h. aus sich selbst abzuleiten, keinen Gebrauch gemacht.)

Was haben wir nun durch die Einführung dieser neuen Technik erreicht? Zunächst nur das eine: Wir besitzen nunmehr Mittel und Wege (und zwar in vielen Fällen geeignetere), um das, was wir bis jetzt auch schon gekonnt haben (aus Prämissen Konklusionen abzuleiten, die Richtigkeit von Schlüssen und Identitäten nachzuweisen), auf eine andere Art auszuführen.
Die Hauptvorteile der Ableitungstechnik werden sich aber erst zeigen, wenn wir unsere bisherigen Hilfsmittel auf Quantorschlüsse erweitern, d. h. auf Schlüsse, in denen Quantoren vorkommen. Bevor wir aber daran gehen, wird es gut sein, wenn wir durch die Lösung von Aufgaben einige Erfahrungen im Umgang mit quantorfreien Ableitungen erlangen.

Aufgaben

1. Bei der Aufgabe mit den Rauschgiftschmugglern gab der Detektiv nach den einzelnen Schritten jeweils nur die Hinweiszahlen, d.h. die Nummer der verwendeten Formeln an, nicht aber die Begründung der Schlüsse (Hinweis auf die Art der Schlüsse).
Holen Sie das nach!

2. Fertigen Sie eine Skizze an, die die Struktur des obigen Schlusses darstellt, und lesen Sie daraus ab, von welchen Prämissen die einzelnen Formeln abhängen!

3. Fertigen Sie eine Skizze für den Schluss auf Seite 57 an!

4. Schließen Sie aus den folgenden Prämissen auf die Werte der Variablen!

1	$M \to K$	2	$K \to S$	3	$M \vee A$
4	$A \to (Z \to S)$	5	$\sim S$		

Vergessen Sie nicht, die bei jedem Schluss benutzten Formeln und die Begründung für die Schlüsse anzugeben! Geben Sie vor den Nummern der Formeln die Nummern der Prämissen an, von denen die Formeln abhängen!

*5. Beweisen Sie die folgende Identität, indem Sie jede ihrer Seiten aus der anderen ableiten!
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

6. a) Führen Sie den auf Seite 58 angeführten Beweis der Identität
$(A \to B) \vee (B \to C) \equiv W$
zu Ende, indem Sie in zulässigen Schritten die linke Seite der Formel ableiten!
b) Geben Sie einen anderen Beweis dieser Identität an!

5 Quantor-Schlüsse

5.1 $\forall$-Elimination, $\exists$-Einführung ($-\forall$, $+\exists$)

Wir haben unsere Hilfsmittel nun systematisiert und einen Ableitungsformalismus geschaffen, jedoch nur im Rahmen der Aussagenlogik. In das Innere der mit großen Buchstaben bezeichneten Elementaraussagen sind wir dabei nicht eingedrungen.
Wir wissen schon einiges über die weitere Zerlegung von Elementaraussagen der Aussagenlogik. Aussagen wie "Jede Jahreszeit ist schön" oder "Es gibt einen Kosmonauten, der eine Frau ist" können wir bereits in ihre Bestandteile zerlegen und formelmäßig wiedergeben.

Für Formeln dieser Art besitzen wir allerdings noch kein schematisch-mechanisches Ableitungsverfahren. Wir wollen jetzt diejenigen formalen Regeln aufdecken, mit deren Hilfe wir auch auf diese Formeln ganz schematisch - ohne Zeichnungen und ohne besondere Überlegungen - schließen können; vor allem dann, wenn die aussagenlogischen Hilfsmittel versagen.[17]

Wir wollen als Beispiel die beiden oben genannten Aussagen formalisieren. Welche Formeln sich ergeben werden, hängt natürlich von der Wahl der Grundmenge ab. Die Aussage über die Jahreszeiten formalisieren wir in der Grundmenge der Jahreszeiten, also in der Menge:

{Frühling, Sommer, Herbst, Winter} oder kürzer {f, s, h, w}

Wir bezeichnen die Aussageform "Die Jahreszeit $\Box$ ist schön" mit $S\Box$. Für die Aussage "Jede Jahreszeit ist schön" erhalten wir dann die Formel

$$\forall x Sx$$

Jemand, der dies behauptet, wird auf die Frage, ob der Herbst schön sei, sicher mit Ja antworten. Es wäre unlogisch, wenn er mit Nein antworten würde. Diesen Schluss, der von der allgemeinen auf eine spezielle Aussage führt, schreiben wir wie folgt:

$\dfrac{\forall x Sx}{Sh}$ Grundmenge: $\{f, s, h, w\}$

Bei der Formalisierung des zweiten Beispielsatzes legen wir die Grundmenge aller Kosmonauten zugrunde:

{Gagarin, Titow, Glenn, ..., Tereschkowa, ...} oder kurz {g, t, l, ..., r, ...}

Die Behauptung "$\Box$ ist eine Frau" (genauer: eine Person weiblichen Geschlechts) kürzen wir mit $F\Box$ ab. Für Valentina Tereschkowa ist dies wahr, und wir können schreiben:

$$Fr$$

[17]Dass dies immer möglich ist, folgt aus einem tiefliegenden Satz über logische Funktionen - den sogenannten Gödelschen Vollständigkeitssatz -, auf dessen Beweis wir hier natürlich nicht eingehen können.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir behaupten, dass ein weiblicher Kosmonaut existiert, d. h., dass der Schluss

$$\frac{Fr}{\exists x Fx} \quad \text{Grundmenge: } \{g,t,l,...,r,...\}$$

richtig ist.
In ähnlicher Weise kann man in der Grundmenge der natürlichen Zahlen aus der Aussage "Jede Zahl ist durch 1 teilbar" (wir bezeichnen dies mit $\forall x Ex$) darauf schließen, dass 4 durch 1 teilbar ist, und daraus, dass 3 eine Primzahl ist ($P3$), darauf, dass Primzahlen existieren ($\exists x Px$). Das heißt, die folgenden Schlüsse sind richtig:

$$\frac{\forall x Ex}{E4} \quad \frac{P3}{\exists x Px} \quad \text{Grundmenge: } \{0,1,2,3,...\}$$

Natürlich können wir bei unseren Schlüssen nicht nur von der Zahl 3 ausgehen bzw. nicht nur auf die Zahl 4 schließen, sondern wir können von einer beliebigen Zahl ausgehen und auf eine beliebige Zahl schließen. Richtig sind also alle folgenden Schlüsse, deren Folge beliebig fortgesetzt werden könnte:

$$\frac{\forall x Ex}{E0} \quad \frac{\forall x Ex}{E1} \quad \frac{\forall x Ex}{E2}, \ldots$$

$$\frac{P0}{\exists x Px} \quad \frac{P1}{\exists x Px} \quad \frac{P2}{\exists x Px}, \ldots$$

Zusammenfassend könnten wir an Stelle dieser beiden unendlichen Folgen von Schlussfiguren die folgenden beiden Schlussfiguren schreiben:

$$\frac{\forall x Ex}{E\square} \quad \frac{P\square}{\exists x Px} \quad \text{Grundmenge: } \{0,1,2,3,...\}$$

Die Quadrate erinnern uns daran, dass aus diesen Schlussfiguren bei Substitution der Quadrate durch eine beliebige natürliche Zahl jedesmal eine richtige Schlussfigur entsteht.
E und P haben hierbei noch eine bestimmte Bedeutung, so wie vorhin S und F. Aus unseren Beispielen erkennen wir aber, dass die Richtigkeit derartiger Schlüsse nicht von der Bedeutung der Buchstaben abhängt. Wir nehmen daher ganz allgemein an:

Unabhängig davon, welche spezielle Aussageform durch $G\square$ bezeichnet und welches Element der betrachteten Grundmenge an Stelle des Quadrats eingesetzt wird, betrachten wir alle Schlüsse der folgenden Form als richtig:

$$\frac{\forall x Gx}{G\square} \quad \frac{G\square}{\exists x Gx}$$

Wir bezeichnen die erste Schlussweise als Elimination des Allquantors, die zweite als Einführung des Existenzquantors, oder kürzer als $\forall$-Elimination und $\exists$-Einführung.[18]
Noch kürzer bezeichnen wir diese Schlüsse mit $\forall$ und $+\exists$. Mit diesen Zeichen werden wir bei den Begründungen der Ableitungsschritte auf sie verweisen.

[18] Lies: "a-Elimination" bzw. "e-Einführung"

5.2 $\forall$ und $\wedge$, $\exists$ und $\vee$

Es lohnt sich, auf der Grundlage unserer Beispiele noch etwas über den Sinn dieser beiden Schlussregeln nachzudenken.
Da uns alle Jahreszeiten bekannt sind, können wir den Satz

Jede Jahreszeit ist schön

etwas umständlicher auch so formulieren:

Der Frühling ist schön, der Sommer ist schön, der Herbst ist schön, der Winter ist schön.

In der Grundmenge $\{f, s, h, w\}$ formalisiert, bedeutet
$\forall xSx$ also $Sf \wedge Ss \wedge Sh \wedge Sw$

Um hieraus z.B. auf die Behauptung Sh zu schließen, hätten wir keine neue Schlussregel einzuführen brauchen: denn auch mit Hilfe aussagenlogischer Schlussregeln können wir aus einer Konjunktion auf jedes ihrer Glieder schließen. Durch aufeinanderfolgende Weglassungen erreichen wir schließlich, dass nur noch Sh übrigbleibt.[19]

In ähnlicher Weise könnten wir, da uns die Namen der Kosmonauten bekannt sind, den Satz

Es gibt einen Kosmonauten, der eine Frau ist

etwas umständlicher so formulieren:

Gagarin ist eine Frau oder Titow ist eine Frau oder Glenn ist eine Frau oder ... oder Tereschkowa ist eine Frau oder...

Wir können die Namen aller Kosmonauten dem heutigen Kenntnisstand entsprechend aufführen. Die Pünktchen sind nicht unbedingt notwendig. Wir haben sie nur der Einfachheit halber gesetzt.
Kurz gesagt: In der Grundmenge $\{g,t,l,...,r,...\}$ bedeutet $\exists xFx$ das folgende: $Fg \vee Ft \vee Fl \vee ... \vee Fr \vee ....$
Um von Fr auf $\exists xFx$ zu schließen, hätten wir gleichfalls keine neue Schlussregel benötigt. Wir können wieder mit den Mitteln der Aussagenlogik schließen und. einfach die Schlussregel der Hinzufügung (K 3) mehrmals anwenden.

Sehen wir uns aber auch einige Beispiele mit natürlichen Zahlen an!
Gegeben sei die Grundmenge der natürlichen Zahlen $\{0,1,2,3,...\}$.

$\forall xEx$ bedeutet $E0 \wedge E1 \wedge E2 \wedge E3 \wedge ...$
$\exists xPx$ bedeutet $P0 \vee P1 \vee P2 \vee P3 \vee ...$

Hier spielen die Punkte schon eine ganz andere Rolle als im obigen Beispiel. Eben noch konnten wir die gesamte Reihe der Dinge mit der betreffenden Eigenschaft aufschreiben, hier aber ist das nicht möglich. Das ist deshalb von Bedeutung, weil wir bei unseren Schlüssen darauf bedacht sein müssen, nur endlich viele Schritte auszuführen.

(Mit Verfahren, bei denen unendlich viele Schritte auszuführen sind, würden wir nicht weit

[19] Um ganz genau zu sein: Wir benötigen auch noch das assoziative Gesetz. Eine mehrgliedrige Konjunktion kann man nämlich auf eine zweigliedrige zurückführen. $Sf \wedge Ss \wedge Sh \wedge Sw$ bedeutet z.B.$(((Sf \wedge Ss) \wedge Sh) \wedge Sw)$, und nach Weglassung von Sw muss man, um den Prozess der Weglassungen fortsetzen zu können, den verbleibenden Teil auf die Form $Sf \wedge (Ss \wedge Sh)$ bringen. Dasselbe gilt für die Alternative.

kommen, auch dann nicht, wenn uns für unsere Schlüsse elektronische Rechenmaschinen zur Verfügung stünden. Selbst wenn die Maschine einen Schritt in einer millionstel Sekunde ausführen könnte, würde sie doch niemals das Ende des Schlusses erreichen.)

In diesen Fällen kann man daher unsere Schlüsse nicht auf die der Aussagenlogik zurückführen. Durch endlich viele Anwendungen der Weglassungs- oder Hinzufügungsregel kommen wir nicht zum Ziel. Unsere neuen Schlussregeln eröffnen in unendlichen Grundmengen ganz neue Wege.

Auf alle Fälle ist es aber gut, die Beziehungen zwischen der $\forall$-Elimination und der Weglassungsregel einerseits und der $\exists$-Einführung und der Hinzufügungsregel andererseits nicht aus dem Blickfeld zu verlieren.
Die Analogie zwischen dem Allquantor und der Konjunktion sowie dem Existenzquantor und der Alternative ist im allgemeinen ein wertvoller Wegweiser.

5.3 Eine leere Grundmenge?

Gelten die Schlussregeln

$\frac{\forall x G x}{G\square}$ und $\frac{G\square}{\exists x G x}$ in jeder Grundmenge?

Wir haben schon gesehen, dass eine unendliche Grundmenge nicht stört. Solange es überhaupt ein Element gibt, das wir für das Quadrat einsetzen können, d.h. solange die Grundmenge nicht leer ist, gibt es kein Problem. Der Fall einer leeren Grundmenge allerdings macht uns Kopfzerbrechen. Können wir z. B. folgendermaßen schließen:

$$\frac{\forall x G x}{\exists x G x}$$

Wir würden auch diese Schlussweise, die sich aus der Hintereinanderausführung der beiden obigen Schlüsse ergibt, gern als richtig ansehen. Solange die Grundmenge nicht leer ist, führt sie zu selbstverständlichen Schlüssen:

$\dfrac{\text{Jede Jahreszeit ist schön.}}{\text{Es gibt eine Jahreszeit, die schön ist.}}$ Grundmenge: Frühling, Sommer, Herbst, Winter

$\dfrac{\text{Jede natürliche Zahl ist durch 1 teilbar.}}{\text{Es gibt eine durch 1 teilbare natürliche Zahl.}}$ Grundmenge: $\{0,1,2,3,...\}$

Nehmen wir aber einmal eine leere Grundmenge, z. B. die Menge aller Menschen, die größer als 10 m sind. In dieser Menge führt die obige Schlussregel zu Schlüssen, die wir schwerlich akzeptieren können:

$$\frac{\text{Jeder Mensch, der größer als 10 m ist, hat zwei Köpfe.}}{\text{Es gibt einen Menschen, der über 10 m groß ist und zwei Köpfe hat.}}$$

Dass die Konklusion falsch ist, wäre noch kein Unglück. Deswegen könnte der Schluss trotzdem richtig sein; dann nämlich, wenn die Prämisse auch falsch ist.
Die Prämisse ist aber richtig! (Wer damit nicht einverstanden ist, der mag sie widerlegen und ein Gegenbeispiel suchen, d.h. einen Menschen, der über 10 m groß ist und nicht zwei Köpfe hat. Wenn er einen gefunden hat, so kann er mit Recht behaupten: Nicht jeder über 10 m große Mensch hat zwei Köpfe. Seht euch diesen dort an: Er hat keine zwei Köpfe und ist doch über 10 m groß.)

Sollen wir jetzt also unseren Grundsatz aufgeben, nach dem die leeren Mengen keine Sonderstellung im Bereich aller Mengen einnehmen und wir ihnen dieselbe Beachtung schenken wie den anderen?
(Erinnern wir uns an das Beispiel mit der Höhle und dem Tunnel, wo wir den Spezialfall untersucht haben, dass niemand aus der Klasse in der Höhle oder im Tunnel oder in keinem von beiden gewesen ist.)

Wir werden unseren Grundsatz nicht aufgeben. Wir werden jetzt nur verlangen, dass die Grundmenge nicht leer sein soll. Wohlgemerkt: Wir verlangen nicht, dass ein Element existiert, für das $G\square$ erfüllt ist.
In unserem letzten Beispiel konnten wir deshalb nicht von $\forall xGx$ auf $\exists xGx$ schließen, da unsere Grundmenge aus der Menge aller Menschen, die über 10 m groß sind, bestand. $G\square$ bedeutete, dass $\square$ zwei Köpfe hat. $G\square$ möge diese Bedeutung beibehalten. Die Grundmenge sei aber nun die Menge aller Menschen. In diesem Fall ergibt sich aus dem obigen Schlussschema folgendes:

Jeder Mensch hat zwei Köpfe.
___
Es gibt einen Menschen, der zwei Köpfe hat.

Dieses Beispiel spricht schon nicht mehr gegen die Richtigkeit der obigen Schlussfigur, denn nicht nur seine Konklusion, sondern auch seine Prämisse ist falsch. Solange ein Mensch auf der Welt lebt, bleibt diese Schlussfigur richtig, und zwar unabhängig davon, ob es einen Menschen mit zwei Köpfen gibt oder nicht.
Mit der Beschränkung auf nichtleere Grundmengen können wir somit die Gültigkeit der Schlussfigur $\dfrac{\forall xGx}{\exists xGx}$ retten.

5.4 Anwendung auf zusammengesetzte Formeln

1. Jedes Kind ist neugierig.
2. Susi ist ein Kind.

Wir kennen die Konklusion im voraus. Versuchen wir aber einmal, sie mit unseren Regeln abzuleiten. Unsere Grundmenge sei die gesamte Menschheit.

1	$\forall x(Kx \to Nx)$	P
2	Ks	P

Die erste Prämisse, etwas ausführlicher geschrieben, besagt: Für alle x gilt: Wenn x ein Kind ist, so ist x neugierig.
Das gilt für alle x, d.h. für alle Elemente der Grundmenge. Zu diesen gehört aber auch Susi. Wir können daher für Susi gesondert schreiben:
Wenn Susi ein Kind ist, so ist Susi neugierig.

Oder als Formel: $Ks \to Ns$.

Beim Schluss von $\forall x(Kx \to Nx)$ auf $Ks \to Ns$ benutzten wir ebenfalls die Schlussregel

$$\frac{\forall x G x}{G\square}$$

mit dem Unterschied jedoch, dass an Stelle von Gx hier eine zusammengesetzte Aussageform auftrat. Auch früher konnten wir bereits in einer Formel die logische Variable G durch den Ausdruck $K \to N$ ersetzen.
Die Substitutionsregel T 1 berechtigte uns dazu. Jetzt erweitern wir den Gültigkeitsbereich der Regel T 1 derart, dass sie auch auf Aussageformen angewendet werden kann. Danach können wir die Ableitung reibungslos fortsetzen:

1	$\forall x(Kx \to Nx)$	2
2	Ks	P
3	$Ks \to Ns$	1 $-\forall$
4	Ns	3,2 Abtrenng.

Sehen wir uns auch ein Beispiel für die Einführung des Existenzquantors an. Wir werden in der Menge aller Menschen den folgenden Schluss formalisieren:

Valentina Tereschkowa ist ein Kosmonaut.
Valentina Tereschkowa ist eine Frau.
———
Es gibt einen Kosmonauten, der eine Frau ist.

Aus Kr und Fr erhalten wir durch Kopplung $Kr \wedge Fr$. Hierauf wenden wir die Regel der $\exists$-Einführung an:

1	Kr	P
2	Fr	P
3	$Kr \wedge Fr$	1,2 Kopplg.
4	$\exists x(Kx \wedge Fx)$	3 $+\exists$

5.5 Reguläre Substitutionen

Aus $\forall x(Kx \to Nx)$ kann man auf $Ks \to Ns$, aber auch auf $Ke \to Ne$ schließen (z.B.: Wenn Ellen ein Kind ist, so ist Ellen neugierig), jedoch nicht auf $Ks \to Ne$ (Wenn Susi ein Kind ist, so ist Ellen neugierig).
Genauso konnten wir aus $Kg \wedge Fr$ (Gagarin ist ein Kosmonaut und Valentina Tereschkowa ist eine Frau) nicht auf $\exists x(Kx \to Nx)$ (Es gibt einen Kosmonauten, der eine Frau ist.) schließen. Diese letzte Aussage ist zwar wahr, folgt aber nicht aus $Kg \wedge Fr$.

Bei der $\forall$-Elimination müssen wir also die Substitution in der gewohnten Weise vornehmen: Für ein und denselben Buchstaben ist ein und dasselbe Element des Grundbereichs einzusetzen. Eine solche Substitution nennen wir reguläre Substitution.

Bei der $\exists$-Einführung müssen wir die Formeln in umgekehrter Reihenfolge betrachten: Wir prüfen, ob die Formel, auf die wir schließen wollen $(\exists x(Kx \wedge Fx))$, so beschaffen ist, dass aus ihr - sofern der Existenzquantor $\exists x$ weggelassen wird - durch eine reguläre Substitution diejenige Formel hervorgeht, aus der wir schließen wollen $(Kr \wedge Fr)$.

Wir sind aus der Algebra gewöhnt, für ein und dieselbe Unbekannte nicht verschiedene konkrete Zahlen einzusetzen. Hier handelt es sich jedoch um allgemeinere Regeln, die die Substitutionsregeln der Algebra als Spezialfälle enthalten. Sehen wir uns zwei zu unseren letzten beiden Beispielen analoge algebraische Beispiele an!

Zum ersten: Für alle x ist wahr, dass $x < x + 1$, nicht jedoch, dass $5 < 2 + 1$ ist.
Zum zweiten: Es ist wahr, dass $9 = 8 + 1$ ist. Hieraus können wir aber nicht schließen, dass ein x existiert, für das $x = x + 1$ ist.

Uns ist aus der Algebra gleichfalls geläufig, dass man für verschiedene Unbekannte nicht nur verschiedene, sondern auch gleiche Werte einsetzen kann. Es ist stets wahr, dass $x + y < x + y + 1$ ist, und wir können hieraus mit Recht nicht nur auf Ungleichungen wie $7+10 < 7+10+1$ schließen, sondern auch auf solche Ungleichungen: $10 + 10 < 10 + 10 + 1$.

Mit dem "Es gibt ein ..." können wir in solchen Fällen auch in umgekehrter Richtung schließen: Daraus, dass $8 < 8 + 1$ ist, können wir mit Recht schließen, dass es ein x und ein y gibt, für die $y < x + 1$ ist.

Den Fall mehrerer Veränderlichen haben wir damit nur gestreift. In einem späteren Kapitel werden wir ausführlich darauf eingehen.

5.6 ∀-Einführung, ∃-Elimination (+∀, −∃)

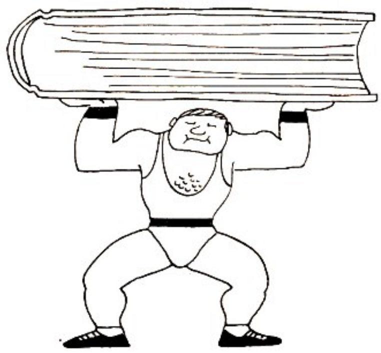
Wir wollen nun sehen, ob wir auch mit den folgenden Schlüssen schon den Kampf aufnehmen, d. h. ihre Konklusionen aus ihren Prämissen ableiten können.

(1)
Alle Beuteltiere sind Säugetiere.
Alle Säugetiere sind Warmblüter.
―――――――――――――――
Alle Beuteltiere sind Warmblüter.

Grundmenge: die Tiere

(2)
Es gibt ein Buch, das mehr als 2 Zentner wiegt.
Was mehr als 2 Zentner wiegt, kann ich nicht heben.
―――――――――――――――
Es gibt ein Buch, das ich nicht heben kann.

Grundmenge: alle konkreten Dinge



Formalisiert:

$$(1)\quad \frac{\forall x(Bx \to Sx) \quad \forall x(Sx \to Wx)}{\forall x(Bx \to Wx)} \qquad (2)\quad \frac{\exists x(Ux \land Zx) \quad \forall x(Zx \to \sim Hx)}{\exists x(Ux \land \sim Hx)}$$

In (1) bietet sich der erste Schritt sofort an: Nach einer ∀-Elimination entsteht eine Formel, auf die wir die Schlussregeln der Aussagenlogik anwenden können.

(1)	1	$\forall x(Bx \to Sx)$	P	
	2	$\forall x(Sx \to Wx)$	P	
	3	$B\square \to S\square$	1	$-\forall$
	4	$S\square \to W\square$	2	$-\forall$
	5	$B\square \to W\square$	3,4	bedingt. Syll.
	? 6	$\forall x(Bx \to Wx)$	5	$+\forall$?

Um den letzten Schritt tun zu können, benötigen wir eine Regel für die $\forall$-Einführung. Betrachten wir (2). Wir könnten bei der zweiten Prämisse beginnen, würden aber nicht weit kommen. Zur Konklusion benötigen wir Ux, das aber ist in der ersten Prämisse eingeschlossen. Um in der ersten Prämisse an $U\square$ heranzukommen, müssen wir eine weitere Nuss knacken und eine Regel für die Elimination von $\exists x$ einführen. Dann geht alles glatt:

(2)	1	$\exists x(U \wedge Zx)$	P	
	2	$\forall x(Zx \to\sim Hx)$	P	
	? 3	$U\square \wedge Z\square$	1	$-\exists$?
	4	$Z\square \to\sim H\square$	2	$-\forall$
	5	$\sim H\square$	4, 3 b	Abtrenng.
	6	$U\square\wedge \sim H\square$	3a, 5	Kopplg.
	7	$\exists x(Ux\wedge \sim Hx)$	6	$+\exists$

5.7 Gegenargumente

Unsere bisherigen Schlüsse mit Quantoren wirkten durch die Analogie zwischen $\forall$ und $\wedge$ einerseits und $\exists$ und $\vee$ andererseits überzeugend:

$$\frac{\forall x Gx}{G\square}\text{, da ja }\frac{Ga \wedge Gb \wedge ...}{Ga}, \frac{Ga \wedge Gb \wedge ...}{Gb}, ...$$

$$\frac{G\square}{\exists x Gx}\text{, da }\frac{Ga}{Ga \vee Gb \vee ...}, \frac{Gb}{Ga \vee Gb \vee ...}, ...$$

Dieselben Analogien sprechen allerdings nicht für die Richtigkeit der umgekehrten Schlüsse, sie sprechen vielmehr gegen sie. Den umgekehrten Schluss würden wir nicht einmal als richtig anerkennen, wenn in ihm nur eine zweigliedrige Konjunktion auftreten würde:

$$\frac{A}{A \wedge B}$$

Dies würde bedeuten, dass wir einen Schluss wie den folgenden für richtig erklären:

$$\frac{\text{Ich kaufe einen Lottoschein.}}{\text{Ich kaufe einen Lottoschein und gewinne 100 Millionen Mark.}}$$

Hinter dem Quantor $\forall$ verbirgt sich aber nicht nur eine zweigliedrige, sondern sogar eine "unendlich vielgliedrige Konjunktion". (Natürlich sagen wir das nur in Anführungszeichen, ebenso wie man einen Kreis höchstens in Anführungszeichen ein "reguläres Vieleck mit unendlich vielen Seiten" nennen kann. Ein Vieleck hat nur endlich viele Seiten, ebenso enthält eine Konjunktion nur endlich viele Glieder.)

Wollten wir die Regel

$$\frac{G\square}{\forall x Gx}$$

ohne Einschränkung akzeptieren, so müssten wir z. B. auch den folgenden Schluss als richtig anerkennen:

$$\frac{\text{0 ist das Doppelte von sich selbst.}}{\text{Jede Zahl ist das Doppelte von sich selbst.}}$$

Ganz zu schweigen von solchen Verallgemeinerungen, die sich nur auf endlich viele Fälle beziehen, wie etwa die folgende:

$$\frac{\text{Hillary hat den Mount Everest bestiegen.}}{\text{Jeder Mensch hat den Mount Everest bestiegen.}}$$

Ähnliche Argumente sprechen auch dagegen, die ∃-Elimination ohne Einschränkungen zu übernehmen. Daraus, dass jemand die grüne Vase zerbrochen hat, folgt auf logischem Wege nicht, dass Martha die grüne Vase zerbrochen hat.

Ja, aber wie bringen wir dann unsere erste Ableitung aus dem Beispiel mit den Beuteltieren zu Ende? Und wie beginnen wir die zweite in dem Beispiel von den über zwei Zentner schweren Büchern? Wenn wir die ∀-Einführung und die ∃-Elimination schon nicht ohne Einschränkungen als Schlussregeln akzeptieren können, so können wir vielleicht durch geeignete Einschränkungen erreichen, dass sie nicht zu falschen Konklusionen führen.

5.8 Aussageformen in der Ableitungskette

Vorher aber müssen wir noch auf einige andere Bedenken zu sprechen kommen.
In der Aussagenlogik sprachen wir immer dann von einer richtigen Schlusskette (Ableitung), wenn aus den Prämissen, eventuell auch schon aus einem Teil der Prämissen, alle übrigen Formeln folgten. Das bedeutete aber, dass der Wahrheitswert der Konklusionen stets W ist, sofern nur die Prämissen den Wert W haben.

Können wir auch unsere jetzigen Schlüsse in diesem Sinn verstehen? Dazu wäre notwendig, dass wir vom Wahrheitswert unserer jetzigen Prämissen und Konklusionen sprechen könnten. Eine Aussageform besitzt aber keinen Wahrheitswert. In der obigen Ableitung ist z.B. $B\square \to S\square$ eine Aussageform, die, ohne Abkürzungen geschrieben, so aussieht:

Wenn □ ein Beuteltier ist, so ist □ ein Säugetier.

Oder in der von Formularen her bekannten Form (mit einem Strich an Stelle des Quadrats):

Wenn ____ ein Beuteltier ist, so ist ____ ein Säugetier.

Diese Aussageform wird aber zu einer Aussage und besitzt einen Wahrheitswert, wenn wir an den leeren Stellen den Namen eines Tieres einsetzen, z. B.

Wenn der Papagei ein Beuteltier ist, so ist der Papagei ein Säugetier.

Genauso verhält es sich, wenn wir die ursprüngliche Formel quantifizieren, z. B. in der folgenden Weise:

Für alle x gilt: Wenn x ein Beuteltier ist, so ist x ein Säugetier.

Dies ist wieder eine Aussage, die einen bestimmten Wahrheitswert besitzt. In der Form, in der die Formel aber ursprünglich vor uns stand, d.h. als Aussageform, besitzt sie keinen Wahrheitswert.
Das hat uns bisher keine Sorgen bereitet. Bei unseren Ableitungen verwendeten wir nämlich die auftretenden Formeln stets in der Weise, dass wir die Freistelle (oder Variable) durch die Bezeichnung oder den Namen eines bestimmten Elements der Grundmenge ausfüllten (z. B. h, w), und ebenso bezogen sich unsere Schlüsse bei der $\exists$-Einführung auf ein bestimmtes Element der Grundmenge.

Jetzt aber haben wir das Quadrat beibehalten; in unserer Ableitung treten somit Aussageformen auf. Wenn wir die Ableitung von (1) auf Seite 67 inhaltlich durchdenken, erkennen wir, dass hier wirklich Vorsicht geboten war. Der Ableitung könnte nämlich der folgende Gedankengang zugrunde liegen:
Aus der ersten Prämisse

Für alle x ist wahr: Wenn x ein Beuteltier ist, so ist x ein Säugetier.

ergab sich durch $\forall$-Elimination die Aussageform

Wenn $\square$ ein Beuteltier ist, so ist $\square$ ein Säugetier.

Setzen wir an Stelle des Quadrats den Namen eines Tieres ein, so entsteht eine wahre Aussage, unabhängig davon, welches Tier wir auswählen. Ebenso ergibt sich auf Grund der zweiten Prämisse die Aussageform

Wenn $\square$ ein Säugetier ist, so ist $\square$ ein Warmblüter.

Auch hieraus entsteht eine wahre Aussage, wenn wir das Quadrat durch den Namen eines beliebigen Tieres ersetzen. Aus beidem folgt: Welchen Tiernamen wir auch an Stelle des Quadrats einsetzen, stets gilt:

Wenn $\square$ ein Beuteltier ist, so ist $\square$ ein Warmblüter.

Da das Tier, dessen Namen wir für $\square$ in der letzten Aussageform einsetzen, beliebig gewählt werden kann, können wir auch sagen:

Für alle x ist wahr: Wenn x ein Beuteltier ist, so ist x ein Warmblüter.

Die Voraussetzung dafür, dass der $+\forall$-Schluss anwendbar wird, wir also diese Verallgemeinerung vornehmen können, bestand gerade darin, dass wir bei unseren Ableitungen auch Aussageformen benutzen. Wenn wir unsere Betrachtungen allerdings auf konkrete Fälle einschränken (sei es auf den Papagei, sei es auf den Elefanten), so werden wir den letzten Schluss auf die Allaussage durch nichts akzeptabel machen können.
Wenn wir - wie wir eben sahen - bei unseren Ableitungen mitunter auch Aussageformen benötigen, so müssen wir klären, ob wir von der Richtigkeit von Schlüssen reden können, in denen solche Aussageformen auftreten, und wenn ja, in welchem Sinn dies zu verstehen ist.

5.9 Offene Formeln in der Ableitungskette

In der Ableitung (1), ebenso wie in allen Ableitungen, die uns in diesem Kapitel bisher begegnet sind, besaßen die großen Buchstaben eine bestimmte Bedeutung.
$B\square$ war zum Beispiel die Kurzbezeichnung dafür, dass $\square$ ein Beuteltier ist. Doch obwohl wir den großen Buchstaben stets eine bestimmte Bedeutung gegeben haben, erwarten wir doch, dass unsere Schlüsse auch rein formal richtig sind, d. h., dass man sie auch zur Ableitung von anderen Konklusionen derselben Form aus anderen Prämissen derselben Form verwenden kann.

Demnach ist $B\square \rightarrow S\square$ nicht nur die Kurzbezeichnung für eine spezielle Aussageform, sondern gleichzeitig eine völlig offene Formel, die für zahllose Aussageformen der obigen Form stehen kann.
Nachdem wir also alle inhaltlichen Deutungen verworfen haben, formulieren wir die obige Frage folgendermaßen: Können wir von der Richtigkeit solcher Schlussformen sprechen, in denen offene Formeln auftreten, und wenn ja, in welchem Sinn?

Was wir unter einer offenen Formel verstehen, liegt auf der Hand. Zum Beispiel ist $B\square \rightarrow S\square$ eine offene Formel, wenn die Bedeutungen von B und S nicht festgelegt werden. Eine offene Formel beschreibt die gemeinsame Struktur von vielen Aussageformen übereinstimmender Form.
Offene Formeln spielten auch bei jenen zwei Quantor-Schlüssen eine Rolle, die wir schon als richtig akzeptiert haben:

$$(-\forall)\ \frac{\forall x Gx}{G\square} \quad \text{und} \quad (+\exists)\ \frac{G\square}{\exists x Gx}$$

$G\square$ ist in beiden Fällen eine offene Formel, da wir G hierbei keine bestimmte Bedeutung zugeschrieben haben. $G\square$ ist die gemeinsame Form aller Aussageformen, die man erhält, wenn man G eine bestimmte Bedeutung zuschreibt. Auf derartige Fälle angewandt, lautet unsere obige Frage:

Können wir davon sprechen, dass Schlussfiguren, in denen offene Formeln vorkommen, an sich richtig sind (und nicht nur in gewissen speziellen Fällen), und wenn ja, in welchem Sinn?

In der Aussagenlogik haben wir eine Schlussfigur als richtig angesehen, wenn die aus der Konjunktion der Prämissen (als Vorderglied) und der Konklusion (als Hinterglied) gebildete Implikation allgemeingültig ist. In unserem Fall haben wir nur jeweils eine Prämisse, wir brauchen also keine Konjunktion der Prämissen zu bilden.
Dass unsere Schlussformen richtig sind, würde daher bedeuten, dass

(1) $\forall x Gx \rightarrow G\square$ und (2) $G\square \rightarrow \exists x Gx$

allgemeingültig sind.

5.10 Allgemeingültige offene Formeln

Natürlich müssen wir zunächst einmal sagen, was "allgemeingültig" hier überhaupt zu bedeuten hat. In der Aussagenlogik hing der Wahrheitswert einer Formel nur von den Wahrheitswerten der in ihr vorkommenden Variablen (großen Buchstaben) ab, und wir nannten sie dann allgemeingültig, wenn sie - kurz gesagt - immer den Wahrheitswert W besaß.
"Immer" bedeutet hier für jedes System von Wahrheitswerten der Variablen, z. B. dann, wenn A den Wahrheitswert F, B den Wert W und C den Wert W besitzt und genauso in allen

anderen Fällen.

In einer offenen Formel kommen neben großen Buchstaben, die jetzt logische Funktionen bezeichnen, auch freie und gebundene Variablen vor. Der Wahrheitswert einer offenen Formel hängt also einmal davon ab, welche Menge als Grundmenge vorgegeben ist und zum anderen davon, welche speziellen logischen Funktionen für die großen Buchstaben und welche speziellen Elemente der Grundmenge für die freien Variablen eingesetzt werden.

Auch jetzt werden wir eine solche Formel allgemeingültig nennen, wenn sie - kurz gesagt - immer den Wahrheitswert W hat. "Immer" bedeutet jetzt aber folgendes:

(a) für eine beliebige, nicht leere Grundmenge;

(b) welche logische Funktion wir auch für die großen Buchstaben einsetzen mögen, d. h., wie auch immer der Wahrheitswert der durch die großen Buchstaben bezeichneten logischen Funktion von den Elementen der Grundmenge abhängen mag (z.B. kann der Wahrheitswert der Funktion für das erste Element der Grundmenge W, für das zweite wieder W, für das dritte wieder F sein usw.);

(c) welches Element der Grundmenge wir auch für eine freie, d. h. nicht durch einen Quantor gebundene Variable einsetzen mögen.

In allen diesen Fällen muss die offene Formel den Wahrheitswert W annehmen, wenn wir sie als allgemeingültig bezeichnen sollen.

5.11 Anwendung auf zwei Quantor-Schlüsse

Sehen wir nun, ob diese sehr scharfen Forderungen von unseren Formeln (1) und (2) erfüllt werden.

(1) $\forall x Gx \to G\Box$

Die Grundmenge sei beliebig, nur nicht leer. Wenn $G\Box$ so beschaffen ist, dass es nicht für alle Elemente der Grundmenge den Wert W annimmt, dann hat das vordere Glied der Implikation den Wahrheitswert F (der Quantor besagt ja gerade, dass Gx für alle x wahr sein soll), und damit ist der Wahrheitswert der ganzen Formel W.
Wenn $G\Box$ aber für jedes Element der Grundmenge den Wert W annimmt, so ist auch der Wahrheitswert des hinteren Gliedes der Implikation W, und damit hat die Formel auch in diesem Fall den Wert W.

(2) $G\Box \to \exists x Gx$

Wenn $G\Box$ so beschaffen ist, dass es für wenigstens ein Element der Grundmenge den Wahrheitswert W annimmt, so hat auch das hintere Glied der Implikation den Wert W (denn der Quantor besagt ja gerade, dass ein x existiert, für das Gx erfüllt ist), und damit ist der Wert der Implikation W.
Wenn $G\Box$ aber für alle Elemente der Grundmenge den Wert F annimmt, dann ist auch der Wahrheitswert des vorderen Gliedes der Implikation F, welches Element der Grundmenge wir auch für das Quadrat einsetzen. Daher ist der Wahrheitswert der Formel W.

Von den drei Forderungen, die erfüllt sein müssen, damit wir eine Formel als allgemeingültig bezeichnen können, wollen wir die ersten beiden in Gedanken festhalten, aber nicht näher charakterisieren. Der Forderung (c) können wir aber bereits eine andere Form geben.

Dass eine offene Formel für jedes beliebige Element der Grundmenge wahr ist, lässt sich wie folgt charakterisieren:

Wenn die Formel mit Hilfe des Allquantors abgeschlossen wird, so besitzt die resultierende Formel stets den Wahrheitswert W. (Es genügt jetzt, an Stelle von (a) und (b) hinzuzufügen: Wie auch immer die Grundmenge beschaffen ist und was auch immer die großen Buchstaben "bezeichnen" mögen - genauer, welche Werte die durch sie bezeichneten logischen Funktionen auf der Grundmenge auch annehmen mögen.)

Wir wenden diese Erkenntnis auf (1) und (2) an. Da x in den Formeln schon vorkommt, benutzen wir bei der Einführung des neuen Quantors eine andere Variable, etwa y. Dass diese Formeln allgemeingültig sind, bedeutet also, dass

(1A) $\forall y(\forall x Gx \to Gy)$ und (2A) $\forall y(Gy \to \exists x Gx)$

den Wahrheitswert W besitzen, wie immer die Grundmenge beschaffen ist und welche Werte G auf der Grundmenge auch annehmen mag.
Die Richtigkeit der ∀-Elimination und der ∃-Einführung wird also dadurch gesichert, dass (1A) und (2A) allgemeingültig sind. (Letzteres ist natürlich gleichbedeutend damit, dass (1) und (2) allgemeingültig sind.)

5.12 Anwendung auf zwei andere Quantor-Schlüsse

Sehen wir uns nun an, was diese Umformung für die beiden anderen - angenommenen, aber zugleich mit einem Fragezeichen versehenen - Quantor-Schlüsse, d.h. für

$$\frac{\exists x Gx}{G\square} \quad \text{und} \quad \frac{G\square}{\forall x Gx}$$

ergibt. Diese Schlüsse drücken aus, dass die folgenden offenen Formeln allgemeingültig sind:

(3) $\forall\exists x Gx \to G\square$ bzw. (4) $G\square \to \forall x Gx$

Gleichbedeutend damit ist, dass beide Formeln den Wahrheitswert W besitzen,
(a) wie immer auch die Grundmenge beschaffen ist;
(b) wie immer G beschaffen ist (d.h. welche Wahrheitswerte es auch auf den Elementen der Grundmenge annimmt);
(c) welches Element der Grundmenge wir auch für das Quadrat einsetzen.

Probieren wir es aus! Die Grundmenge sei zur Abwechslung einmal für jeden Leser eine andere. Sie bestehe aus allen Buchstaben, die der Name des Lesers enthält.
Als Funktion G wählen wir die Eigenschaft der Buchstaben, in der alphabetischen Reihenfolge später als der Buchstabe L aufzutreten. Ist der Name eines Lesers etwa KLAUS SCHULZE, so ergibt sich als Grundmenge:

$$\{K,L,A,U,S,C,H,Z,E\}$$

und als Werte von G erhält man: F, F, F, W, W, F, F, W, F.
Heißt ein Leser aber ALIBABA, so besteht für diesen die Grundmenge nicht aus neun, sondern nur aus vier voneinander verschiedenen Buchstaben, und die logische Funktion G nimmt stets den Wert F an.
Grundmenge: $\{A, B, I, L\}$; Werte von G: F, F, F, F

Otto Runz würde dagegen finden, dass die logische Funktion G in der Menge der Buchstaben seines Namens stets den Wert W annimmt.

Jeder Name liefert eine nichtleere Grundmenge und auf dieser eine Funktion G. Sind diese gegeben, so hängen die Wahrheitswerte von (3) und (4) noch davon ab, welche Elemente wir für die Quadrate einsetzen.

Der Wert von (3) ist in Otto Runz' Fall stets W, da das hintere Glied der Implikation den Wert W hat.
Im Fall des Klaus Schulze hingegen ist das vordere Glied wahr, während das hintere ebenso wahr (z.B. wenn wir das S für das Quadrat einsetzen) wie falsch (z.B. wenn wir das A einsetzen) sein kann.
Der Wert von (4) ist immer W, jedenfalls dann, wenn Otto Runz und Ali Baba die Grundmenge und die Funktion G bestimmen. (Im Fall Otto Runz deshalb, weil das hintere Glied stets den Wert W hat, im Fall Ali Baba deshalb, weil das vordere Glied stets den Wert F hat.)
Mit Klaus Schulze dagegen steht es auch hier schlecht: Die Funktion G kann sowohl den Wert W als auch den Wert F annehmen, je nachdem, welchen Buchstaben wir für das Quadrat einsetzen.

Unsere Beispiele zeigen bereits, dass weder (3) noch (4) allgemeingültig sein können. Damit können wir auch sagen, dass keine der beiden Formeln

(3A) $\forall y(\exists xGx \rightarrow Gy)$ und (4A) $\forall y(Gy \rightarrow \forall xGx)$

allgemeingültig ist.
Damit ist das Schicksal der ∃-Elimination und der ∀-Einführung - so scheint es zumindest - besiegelt.

5.13 Welche Formeln sind trotzdem wahr?

Es gibt uns allerdings zu denken, dass wir selbst im Fall des Klaus Schulze von (3) und (4) noch folgendes behaupten können:
Das Quadrat kann durch solche Elemente der Grundmenge ersetzt werden, dass (3) und (4) wahr sind. Unsere Beispiele scheinen darauf hinzudeuten, dass, wenn schon nicht (3) und (4), so doch jedenfalls die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

(3E) $\exists y(\exists xGx \rightarrow Gy)$ und (4A) $\exists y(Gy \rightarrow \forall xGx)$

Wir wollen versuchen, dies zu zeigen.
Die Grundmenge in (3E) sei beliebig, jedoch nicht leer. Ist G so beschaffen, dass es für alle Elemente der Grundmenge den Wert F annimmt (man denke an den Fall Ali Baba), so besitzt auch $\exists xGx$ den Wert F. Der Wert der Implikation ist dann aber stets W, unabhängig von der Variablen y.
Auf alle Fälle existiert ein y mit den geforderten Eigenschaften (alle y besitzen ja diese Eigenschaft, wenn die Implikation den Wert W hat). (3E) ist daher in diesem Fall wahr.

Wenn aber G auch nur für ein einziges Element der Grundmenge den Wert W annimmt, so ist die Implikation für dieses Element y wahr. Es gibt also ein Element y, für das die Implikation erfüllt ist. (3E) ist daher auch in diesem Fall wahr. Damit sind alle Fälle erschöpft, und wir können feststellen: (3E) ist allgemeingültig.
Der Beweis von (4E) verläuft ähnlich (siehe Aufgabe 6).

Damit haben wir allerdings weniger bewiesen, als wir ursprünglich wollten. Wir haben jedoch von vornherein geahnt, dass wir die schärferen Behauptungen (3A) und (4A) nicht würden beweisen können. (Was uns das Bewiesene nützt, darauf werden wir noch zu sprechen kommen.)

Den Inhalt von (3E) und (4E) kann man als Schlussregel wie folgt wiedergeben:

$(-\exists)\quad \dfrac{\exists x Gx}{G\square}$ und $(+\forall)\quad \dfrac{G\square}{\forall x Gx}$

Durch die gestrichelte Linie weisen wir darauf hin, dass diese Schlussregeln weniger aussagen als die ihnen entsprechenden Regeln. Wir können nicht behaupten, dass wir bei beliebiger Grundmenge, beliebiger Funktion G und Ersetzung des Quadrats durch ein beliebiges Element der Grundmenge stets zu einem richtigen Schluss kommen. Wir können nur soviel sagen:

Sind eine Grundmenge und auf ihr eine Funktion G gegeben, so existiert ein Element der Grundmenge, das, für das Quadrat eingesetzt, zu einer richtigen Aussage führt (Vgl. (3A) und (4A)!).

5.14 Ein schwacher Quantor-Schluss

Wir nennen die $\forall$-Elimination und die $\exists$-Einführung starke Quantor-Schlüsse, die beiden anderen schwache Quantor-Schlüsse.

Die ersteren können - genau wie die bekannten Schlussregeln der Aussagenlogik - als Glieder einer Ableitungskette auftreten:
Wenn aus Formel X Formel Y und aus Formel Y Formel Z folgt - sei es durch Schlussregeln der Aussagenlogik, sei es durch starke Quantor-Schlüsse -, so folgt aus Formel X Formel Z.
Die Identitäten (1) und (2) sichern, dass sich die starken Quantor-Schlüsse in dieser Hinsicht genauso verhalten wie die aussagenlogischen Schlussregeln.

Bei den schwachen Quantor-Schlüssen fanden wir allerdings, dass in ähnlicher Weise zusammengesetzte Implikationen im allgemeinen nicht allgemeingültig sind. Trotzdem kann man beweisen, dass auch sie unter geeigneten Voraussetzungen als Glieder einer Schlusskette benutzt werden können. Dies bedeutet:
Wenn aus X (sei es auch nur in schwächerer Form) Y folgt, aus Y aber Z usw., so folgt unter gewissen Voraussetzungen aus X oder einem beliebigen Zwischenglied der Schlusskette in starker Form Z.

Wir haben schon zwei Beispiele hierfür gesehen.
Wir haben allerdings noch nicht geklärt, welchen Umständen wir es zu verdanken haben, dass in diesen Fällen die endgültige Formel aus den Prämissen folgt. Worin die Bedingungen bestehen, die dieses sichern, können wir an Hand von Beispielen untersuchen. Wir werden jedoch hierfür keine Beweise geben. Sollte sich der Leser hierfür interessieren, so kann er sich an Hand der im Literaturverzeichnis angegebenen Bücher eingehender mit diesen Fragen beschäftigen.

Einschränkung für die $\exists$-Elimination:
Es muss stets für jede bei Anwendung dieser Schlussregel hinzukommende freie Variable ein neues Zeichen (Quadrat oder ähnliches Zeichen) benutzt werden.

Was die beiden schwachen Quantor-Schlüsse betrifft, so ist es leicht, die verwundbare Stelle der $\exists$-Elimination zu finden. Sehen wir uns die folgende Ableitung an:

1	$\exists x Wx \wedge \exists x Gx$	P	
2	$W\square$	1a	$-\exists$
3	$G\square$	1b	$-\exists$
4	$W\square\exists \wedge G\square$	2,3	Kopplg.
5	$\exists x(Wx \wedge Gx)$	4	$+\exists$

Die Grundmenge sei etwa die Menge aller Häuser einer Stadt, $W\square$ bedeute, dass $\square$ ein Wolkenkratzer ist, $G\square$ aber, dass $\square$ ein Haus mit Garten ist. Aus der Tatsache, dass es in der Stadt einen Wolkenkratzer und ein Haus mit Garten gibt, folgt natürlich noch nicht, dass es in ihr einen Wolkenkratzer mit Garten gibt.
Die Ableitung ist also fehlerhaft.

Der Fehler steckt im dritten Schritt. Beim zweiten Schritt haben wir hinter das Funktionssymbol W ein Quadrat gesetzt. Auf Grund von 1 wussten wir, dass es ein Element x der Grundmenge gibt, für das Wx wahr wird.
Etwas Genaueres wussten wir allerdings über dieses Element nicht. Daher haben wir an Stelle der Bezeichnung dieses Elements nur das Quadrat hinter das W gesetzt.

Wenn wir nun aber hinter G dasselbe Zeichen schreiben, so bringen wir damit zum Ausdruck, dass Gx für dasselbe (nicht näher bekannte) Element der Grundmenge wahr wird.

Das ist der Grund dafür, dass wir schließlich zu einer falschen Konklusion gelangten. Um derartige Schwierigkeiten zu vermeiden, einigen wir uns darauf, bei der $\exists$-Elimination stets solche Zeichen (Quadrate oder ähnliche Zeichen) für die hinzukommenden freien Variablen zu benutzen, die im Laufe der vorangehenden Ableitung noch nicht aufgetreten sind.
Wir bemerken, dass bei der $\forall$-Elimination diese Einschränkung nicht notwendig war. Bei der Ableitung konnten wir z.B.in Formel (4) dasselbe Zeichen (Quadrat) benutzen wie in Formel (3).

1	$\exists x(Bx \wedge Zx)$	P	
2	$\forall x(Zx \rightarrow\sim Hx)$	P	
3	$B\square \wedge Z\square$	1	$-\exists$
4	$Z\square \rightarrow\sim H\square$	2	$-\forall$

Hier haben wir nämlich folgendermaßen geschlossen: Nach 2 gilt für alle Elemente x der Grundmenge $Zx \rightarrow\sim Hx$, insbesondere also für jenes Element, das wir mit $\square$ bezeichnet haben. Nun könnte jemand einwenden: Warum konnten wir in der obigen Ableitung nicht den dritten und vierten Schritt vertauschen?

1	$\exists x(Bx \wedge Zx)$	P	
2	$\forall x(Zx \rightarrow\sim Hx)$	P	
3	$Z\square \rightarrow\sim H\square$	2	$-\forall$
4	$B\square \wedge Z\square$	1	$-\exists$
...			

Hieraus hätten wir nun dieselben Formeln gewinnen können wie aus den Anfangsschritten der vorigen Ableitung. Wenn wir die vorige als richtig angesehen haben, so können wir auch gegen diese nichts einwenden.

Und doch haben wir soeben bei der $\exists$-Elimination ein Quadrat benutzt, aber dieses Zeichen ist bereits vorher in der Ableitung vorgekommen. Hätten wir statt dessen ein anderes Zeichen benutzen müssen, so hätten wir die Ableitung auch gar nicht so fortsetzen können, dass wir zu der gewünschten Formel $\exists x(Bx \wedge \sim Hx)$ gelangt wären.
Das ist wahr und hieraus folgt, dass man die oben gemachte Einschränkung beim Gebrauch der $\exists$-Elimination abschwächen könnte. Das ist jedoch nicht notwendig. Wir würden damit nicht viel erreichen, und unsere Ableitungen würden sich dem natürlichen Gedankengang nicht so gut anpassen wie bei der bestehenden Vereinbarung.

Aber bei der ersten Fassung der vorigen Ableitung entsprach die Reihenfolge des dritten und vierten Schrittes dem natürlichen Gedankengang. Auch bei der zweiten Fassung der Ableitung können wir den vierten Schritt nur durch den Hinweis begründen, dass er dem dritten hätte vorangehen können.
Es ist daher zweckmäßiger, an unserer bisherigen Vereinbarung festzuhalten und lieber die Ableitungsstrategie dieser Vereinbarung anzupassen, d.h. die $\exists$-Elimination möglichst bald auszuführen. Das können wir natürlich auch dann tun, wenn die Prämissen in anderer Reihenfolge gegeben sind. (Erinnern wir uns daran, dass die jetzigen Prämissen 1 und 2 ihre Plätze tauschen.)

5.15 Erste Einschränkung für die $\forall$-Einführung: Reguläre Substitutionen

Bei der $\forall$-Elimination hatten wir nur eine einzige Regel zu beachten:
Wenn wir von $\forall x Gx$ auf $G\Box$ schließen, müssen wir für x überall dasselbe Zeichen einsetzen.
Gx kann z. B. folgendes bedeuten:

$$Ax \to Bx, \qquad Ax \wedge B\Box, \qquad \sim((C\triangle \to Dx) \vee Ea) \wedge (Fx \leftrightarrow \forall y Gy)$$

Dann können wir, wenn wir für x in der weiteren Ableitung überall $\Box$ schreiben, z. B. wie folgt schließen:

$$\frac{\forall x(Ax \to Bx)}{A\Box \to B\Box}, \qquad \frac{\forall x(Ax \to B\Box)}{A\Box \wedge B\Box}, \qquad \frac{\forall x(\sim((C\triangle \to Dx) \vee Ea) \wedge (Fx \leftrightarrow \forall y Gy)]}{\sim((C\triangle \to D\Box) \vee Ea) \wedge (F\Box \leftrightarrow \forall y Gy)}$$

Wir hätten aber auch für x das Zeichen $\triangle$ einsetzen können:

$$\frac{\forall x(Ax \to Bx)}{A\triangle \to B\triangle}, \qquad \frac{\forall x(Ax \to B\Box)}{A\triangle \wedge B\Box}, \qquad \frac{\forall x(\sim((C\triangle \to Dx) \vee Ea) \wedge (Fx \leftrightarrow \forall y Gy)]}{\sim((C\triangle \to D\triangle) \vee Ea) \wedge (F\triangle \leftrightarrow \forall y Gy)}$$

genauso gut aber auch a oder ein beliebiges anderes Element der Grundmenge:

$$\frac{\forall x(Ax \to Bx)}{Aa \to Ba}, \qquad \frac{\forall x(Ax \to B\Box)}{Ab \wedge B\Box}, \qquad \frac{\forall x(\sim((C\triangle \to Dx) \vee Ea) \wedge (Fx \leftrightarrow \forall y Gy)]}{\sim((C\triangle \to Dc) \vee Ea) \wedge (Fc \leftrightarrow \forall y Gy)}$$

Das Wichtigste bei diesen Substitutionen besteht darin, dass nach der Weglassung des x an dessen Stelle überall stets dasselbe Zeichen (Quadrat oder ein anderes ähnliches Zeichen) oder - falls wir den Namen bzw. die Bezeichnung eines Elements der Grundmenge einsetzen - stets derselbe Name einzusetzen ist. Ob diese Zeichen schon in den Formeln vorkommen oder nicht, ist ganz egal.

Auch die ∃-Einführung entspricht den angeführten Regeln, wenn wir eine reguläre Substitution aus ihr ablesen können, falls wir die Formeln in umgekehrter Reihenfolge betrachten. Zum Beispiel entspricht die Substitution in den folgenden Fällen den vereinbarten Regeln:

$$\frac{A\square \to B\square}{\exists x(Ax \to Bx)}, \qquad \frac{A\square \wedge B\square}{\exists x(Ax \to B\square)}, \qquad \frac{\sim((C\triangle \to D\square) \vee Ea) \wedge (F\square \leftrightarrow \forall yGy)}{\exists x(\sim((C\triangle \to D\square) \vee Ex) \wedge (F\square \leftrightarrow \forall yGy)]}$$

Natürlich hätten wir hier genau wie in den vorigen Beispielen für x überall auch y, z, u usw. einsetzen können. Die ersten beiden Beispiele folgen hier absichtlich den ersten beiden Beispielen für die ∀-Elimination. Es wird nützlich sein, das zweite näher zu erläutern.
In der Grundmenge der Gerichte auf einer Speisekarte gibt das zweite Beispiel für die ∀-Elimination die gemeinsame Form aller folgenden konkreten Schlüsse wieder:

$$\frac{\text{Welche Speise ich auch wähle: Sie ist salzig, und der Schmorbraten ist außerdem fett.}}{\text{Der Schmorbraten ist salzig und außerdem fett.}}$$

$$\frac{\text{Welche Speise ich auch wähle: Sie ist salzig, und der Gulasch ist außerdem fett.}}{\text{Der Gulasch ist salzig und außerdem fett.}}$$

Das zweite Beispiel für die ∃-Einführung können wir in derselben Grundmenge und bei derartiger Deutung von A und B folgendermaßen illustrieren (es beschreibt wieder die gemeinsame Form mehrerer Schlüsse):

$$\frac{\text{Der Schmorbraten ist salzig und fett.}}{\text{Es gibt ein Gericht, für das gilt: Es ist salzig, und der Schmorbraten ist fett.}}$$

$$\frac{\text{Der Gulasch ist salzig und fett.}}{\text{Es gibt ein Gericht, für das gilt: Es ist salzig, und der Gulasch ist fett.}}$$

Wir schicken folgende Bemerkung voraus, damit wir sie stets vor Augen haben:
Bei der ∀-Einführung müssen wir noch mehr als sonst aufpassen. Betrachten wir etwa die folgende Ableitung:

1	$\forall x(Gx \vee \sim Gx)$	P	
2	$G\square \vee \sim G\square$	1	$-\forall$
?3	$\forall x(G\square \vee \sim Gx)$	2	$+\forall$
4	$\forall y[\forall x(Gy \vee \sim Gx)]$	3	$+\forall$

Bedeute etwa $G\square$ in der Menge der natürlichen Zahlen, dass $\square$ gerade, und $\sim G\square$, dass $\square$ ungerade ist. Unsere Prämisse besagt dann, dass jede (natürliche) Zahl gerade oder ungerade ist.
Hieraus ergäbe sich im Sinne der Ableitung folgende Behauptung:

Wie immer die Zahl y beschaffen ist, für alle x gilt: y ist gerade oder x ist ungerade.

Das ist natürlich falsch: Wenn $y = 1$ und $x = 2$ ist, so ist weder y gerade noch x ungerade.
Den Fehler haben wir hier an der Stelle begangen, als wir von 2 auf 3 geschlossen haben. Mit einer ∃-Einführung an Stelle der ∀-Einführung wäre der Schluss richtig gewesen. Die folgende Ableitung ist von Anfang bis Ende in Ordnung:

1	$\forall x(Gx \vee \sim Gx)$	P	
2	$G\square \vee \sim G\square$	1	$-\forall$
3	$\exists x(G\square \vee \sim Gx)$	2	$+\exists$
4	$\exists y[\exists x(Gy \vee \sim Gx)]$	3	$+\exists$

Ob wir die Ableitung nun inhaltlich oder unter dem formalen Gesichtspunkt der Anwendung erlaubter Schlussregeln betrachten, dieser Schluss ist in jeder Hinsicht in Ordnung. Überlegen wir uns aber trotzdem noch, was die letzte Formel besagt:

Es gibt ein y, für das gilt: Es gibt ein x, so dass y gerade oder x ungerade ist.
Natürlich gibt es ein solches y! 0 ist ein solches, ebenso 1, 2 und überhaupt jede natürliche Zahl; denn es ist dazu ja nur notwendig, dass eine ungerade Zahl existiert.

Wieso aber sind die beiden letzten Ableitungsschritte auch unter formalem Gesichtspunkt richtig? Deshalb, weil die Formeln, in umgekehrter Reihenfolge betrachtet, eine völlig reguläre Substitution ausdrücken. So entsteht z. B., wenn wir den Quantor $\exists y$ vor Formel 4 weglassen, die Formel

$$\exists x(Gy \vee \sim Gx) \text{ und hieraus die Formel } \exists x(G\square \vee \sim Gx)$$

dadurch, dass wir "überall, wo ein y vorkommt", ein $\square$ einsetzen. Genauso entsteht $G\square \vee \sim G\square$ dadurch aus $G\square \vee \sim Gx$ dass wir "überall, wo ein x vorkommt", ein $\square$ einsetzen.

Kehren wir nun zu der Variante unserer Ableitung zurück, in der die $\forall$-Einführung vorkam. Inhaltlich haben wir sie schon erledigt. Wir haben uns von ihrer Fehlerhaftigkeit überzeugt. Wir müssen aber noch eine formale Regel suchen, auf Grund derer wir sie als falsch entlarven können. Diese Regel lautet folgendermaßen:

Die Substitution muss den Regeln entsprechen, gleichgültig ob wir sie in der Hin-Richtung oder in der Rück-Richtung betrachten. Anderenfalls können wir die $\forall$-Einführung nicht zulassen. Wir fordern also, dass (rückwärts gesehen) für ein und denselben Buchstaben überall, wo er vorkommt, dasselbe Zeichen (Quadrat, Dreieck usw.) eingesetzt wird, und ebenso, dass (vorwärts gesehen) für ein und dasselbe Zeichen (Quadrat, Dreieck usw.) überall, wo es vorkommt, derselbe Buchstabe eingesetzt wird.
Das bedeutet natürlich, dass wir aus 2 durch $\forall$-Einführung nur wieder zu 1 zurückkommen können. Wir können höchstens noch an Stelle von x etwa y einsetzen. Damit aber erhalten wir nur eine Formel, die dasselbe besagt wie 1:

1	$\forall x(Gx \vee \sim Gx)$	P	
2	$G\square \vee \sim G\square$	1	$-\forall$
3	$\exists x(Gy \vee \sim Gy)$	2	$+\forall$

Wir sind im Kreis gegangen. Doch steht außer Frage, dass dieser Schluss richtig ist.
Noch ein Beispiel: Bei der inhaltlichen Prüfung der vorherigen Ableitung kommt uns der Gedanke, ob die $\forall$-Einführung, wenn schon nicht vorher, so doch wenigstens im letzten Schritt rechtmäßig gewesen wäre. Prüfen wir, ob unsere formale Regel dies gestattet:

...			
3	$\exists x(G\square \vee \sim Gx)$	2	$+\exists$
4	$\forall y[\exists x(Gy \vee \sim Gx)]$	3	$+\forall$

Ja, sie gestattet es: In welche Richtung wir auch blicken, entweder haben wir überall für $\square$ ein y eingesetzt oder für y ein $\square$. Die Substitution ist also regulär.
Wie können wir kurz sagen, was diese in beiden Richtungen regulären Substitutionen bedeuten?

An Stelle von $\square$ muss stets x und an Stelle von x stets $\square$ eingesetzt werden, d.h., wir schreiben an genau diejenigen Stellen ein x, wo ein $\square$ stand. (Natürlich könnten wir anstatt des x auch

ein anderes Zeichen oder einen anderen Buchstaben benutzen; nur dürfte dieser nicht bereits schon ein Element der Grundmenge bezeichnen.)
Das also ist die erste Einschränkung bei der ∀-Einführung: Die Substitution muss in beiden Richtungen regulär sein. Zwei weitere stehen noch aus.

Zweite Einschränkung für die ∀-Einführung:
Die Formel darf keine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) enthalten, die aus einer ∃-Elimination stammt. Ob auch an der folgenden Ableitung etwas auszusetzen ist?

1	$\exists x Gx$	P	
2	$G\Box$	1	$-\exists$
3	$\forall x Gx$	2	$+\forall$

Die Schritte entsprechen den Regeln, die Substitutionen sind in beiden Richtungen einwandfrei. Trotzdem können wir diese Ableitung nicht als richtig ansehen. Daraus, dass ein Ding mit der Eigenschaft G existiert, kann man vernünftigerweise nicht schließen, dass alle Dinge diese Eigenschaft besitzen.
Es gibt tollwütige Hunde, deshalb ist aber noch lange nicht jeder Hund tollwütig. Wenn ein Quadrat durch eine ∃-Elimination in eine Formel gelangt, so dürfen wir hierauf keine ∀-Einführung mehr anwenden; diese Lehre können wir schon ziehen.

Unsere zweite Einschränkung wird jedoch nicht nur hierin allein bestehen. Wir werden noch etwas mehr fordern. Betrachten wir z. B. folgende Ableitung:

1	$\forall x[\exists y(Gx \leftrightarrow\sim Gy)]$	P	
2	$\exists y(G\Box \leftrightarrow\sim Gy)$	1	$-\forall$
3	$G\Box \leftrightarrow\sim G\triangle$	2	$-\exists$
4	$\forall x(Gx \leftrightarrow\sim G\triangle)$	3	$+\forall$
5	$\exists y[\forall x(Gx \leftrightarrow\sim Gy)]$	4	$+\exists$

Nehmen wir als Grundmenge z. B. alle Schachfiguren, die während einer Partie im Spiel, d. h. auf dem Brett, sind.
G bedeute, dass eine Figur weiß ist. $Gx \leftrightarrow\sim Gy$ besagt in diesem Fall, dass x weiß ist, y jedoch nicht weiß ist, oder dass x nicht weiß, y jedoch weiß ist. (Erinnern wir uns an die Identität W 16.) Kurz gesagt: x und y sind von entgegengesetzter Farbe. Nach 1 gilt: Von welcher Farbe x auch ist, es existiert ein y, so dass x und y von entgegengesetzter Farbe sind. Das heißt, zu jeder Figur existiert eine andere Figur von entgegengesetzter Farbe.
Diese Aussage ist immer wahr. Denn wenn schon keine anderen Figuren mehr im Spiel sind, so doch jedenfalls die beiden Könige und dies, so lange die Partie dauert.

Nach 5 aber läge folgendes vor: Es gibt eine Figur y, so dass, wie x auch beschaffen sein mag, x und y von entgegengesetzter Farbe sind. Das aber ist niemals wahr, selbst dann nicht, wenn nur noch die beiden Könige auf dem Brett sind. (x braucht nämlich keine von y verschiedene Figur zu bedeuten. x kann dieselbe Figur bedeuten wie y.)

Die Ableitung ist also fehlerhaft; denn sie führt von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion. Die einzelnen Schritte aber sind, mit unseren bisherigen Maßstäben gemessen, einwandfrei. Selbst im kritischen vierten Schritt haben wir die bisher gezogenen Grenzen nicht überschritten. Die Substitution ist in beiden Richtungen regulär.
Ferner haben wir die ∀-Einführung auch nicht auf solche Formeln angewendet, die freie Variablen enthalten, welche durch eine ∃-Elimination in unsere Formel gelangt sind: Das □ wurde durch eine ∀-Elimination eingeführt.

Trotzdem müssen wir den vierten Schritt verurteilen. Allerdings nicht wegen des □, sondern wegen des △, das durch eine ∃-Elimination in die Formel gekommen ist. Wenn wir hierauf auch nicht die ∀-Einführung anwenden, so genügt doch schon die Tatsache, dass es in einer Formel vorkommt, auf die eine ∀-Einführung angewendet wird, um die gesamte Ableitung fehlerhaft zu machen. Man kann sich denken, warum das so ist.

Die Unsicherheit, die mit der Bedeutung von △ verbunden ist (es gibt ein solches, jedoch nicht jedes ist so beschaffen), überträgt sich durch $G\Box \leftrightarrow \sim G\triangle$ auch auf □.

Wenn △ nicht beliebig sein kann, so auch □ nicht, da beide Zeichen ja (um bei unserem Beispiel zu bleiben) Figuren von entgegengesetzter Farbe bedeuten. Das beweist natürlich noch nichts, es lässt aber ahnen, wozu die Bedingung dient, die wir jetzt einführen wollen:

Wir dürfen die ∀-Einführung nicht auf solche Formeln anwenden, in denen eine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) vorkommt, die aus einer ∃-Elimination stammt.

Dritte Einschränkung für die ∀-Einführung:
Die Formel darf von keiner Prämisse abhängen, die eine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) enthält.

Wir wollen aus $\forall x(Ax \to Bx)$ und $\forall x(\sim Ax \to Cx)$ die Formel $\forall x(\sim Bx \to Cx)$ ableiten.
Die Grundmenge sei etwa die Menge aller in einem Erholungsheim ankommenden Menschen.

$A\Box$ bedeute: □ fährt mit dem Auto am Eingang vor.
$B\Box$ bedeute: □ biegt am Eingang nach links ab.
$C\Box$ bedeute: □ setzt sein Gepäck am Eingang ab und wartet.

Unsere Prämissen lauten folgendermaßen: Wer mit dem Auto am Eingang vorfährt, biegt am Eingang nach links ab. Wer nicht mit dem Auto ankommt, setzt sein Gepäck am Eingang ab und wartet.
Die Ableitung könnte etwa wie folgt aussehen:

1	$\forall x(Ax \to Bx)$	P	
2	$\forall x(\sim Ax \to Cx)$	P	
3	$A\Box \to B\Box$	1	$-\forall$
4	$\sim A\Box \to C\Box$	2	$-\forall$
5	$\sim B\Box$	P	
6	$\sim A\Box$	3,5	mod. toll.
7	$\sim B\Box \to \sim A\Box$	-5,6	T 3
8	$\sim B\Box \to C\Box$	7,4	bed. Syll.
9	$\forall x(\sim Bx \to Cx)$	8	$+\forall$

In dieser Ableitung ist kein Fehler. Manchem könnte allerdings in den Sinn gekommen sein, dass man aus eben diesen Prämissen auch andere Konklusionen ableiten kann, und er wird die ∀-Einführung vielleicht an einer anderen Stelle angewendet haben. Und wenn er von der siebenten Formel ausgeht, so erhält er:

...			
7	$\sim B\Box \to \sim A\Box$	-5,6	T 3
8	$\forall x(\sim Bx \to \sim Ax)$	7	$+\forall$

Auf unser Beispiel angewendet: Wer am Eingang nicht nach links abbiegt, ist nicht mit dem Auto angekommen. Auch das ist noch in Ordnung. Wenn sich alle Gäste an die Regeln halten

(und das müssen wir ja annehmen, wenn wir aus den Prämissen schließen wollen), dann stimmt diese Aussage.
Wenden wir die $\forall$-Einführung jetzt auf die sechste Formel an:

6	$\sim A\square$	3,5	mod. toll.
7	$\forall x \sim Ax$	6	$+\forall$

Das würde bedeuten: Für jeden Gast gilt: Er kommt nicht mit dem Auto am Eingang an, d.h., keiner kommt mit dem Auto am Eingang an. Es ist möglich, dass es sich so verhält, auf keinen Fall aber folgt dies aus den Prämissen. In diesem Schluss muss ein Fehler stecken!

Versuchen wir, die $\forall$-Einführung auf Formel 5 anzuwenden:

5	$\sim B\square$	P	
6'	$\forall x \sim Bx$	5	$+\forall$

Dies besagt: Jeder Gast verhält sich so, dass er am Eingang nicht nach links abbiegt, d.h., niemand biegt am Eingang nach links ab. Auch das folgt nicht aus den Prämissen.
Wir kommen auch dann zu keiner richtigen Konklusion, wenn wir die zusätzlich aufgenommene Prämisse 5 mit Hilfe des Hinweispfeils an Zeile 6' verweisen und dann erst die $\forall$-Einführung anwenden:

7	$\sim B\square \rightarrow \forall x \sim Bx\square$	-5,6	T 3
8	$\forall y(\sim By \rightarrow \forall x \sim Bx)$	7	$+\forall$

Die letzten Schritte sind richtig und völlig einwandfrei. Trotzdem: Wir wissen, dass diese Konklusion nur dann erfüllt ist, wenn $\sim By$ entweder für alle y oder aber für keines wahr ist. Die erste und zweite Prämisse lassen jedoch den Fall zu, dass $\sim By$ für gewisse Elemente wahr, für andere aber falsch ist (z. B. wenn es einige Urlauber gibt, die nach links abbiegen, und andere, die dies nicht tun).

Wenn wir noch weiter zurückgehen und die $\forall$-Einführung auf 3 oder 4 anwenden, so erhalten wir wieder eine Konklusion, die aus den Prämissen folgt (genauer: die mit einer gewissen Prämisse identisch ist). Die kritische Zone ist also der mit dem Hinweispfeil versehene Teil der Ableitung:
Auf diese Formeln dürfen wir die $\forall$-Einführung nicht anwenden. Bei der ersten dieser beiden hierin vorkommenden Formeln besteht die Schwierigkeit (bzgl. der $\forall$-Einführung) darin, dass sie eine Prämisse ist. Die zweite ist zwar selbst keine Prämisse, hängt aber von dieser ab. Sowie diese Abhängigkeit erlischt oder solange sie noch nicht eingetreten ist, gibt es keine Schwierigkeiten bei der $\forall$-Einführung.

Daher können wir unsere dritte Einschränkung wie folgt formulieren:
Wenn eine Formel von einer Prämisse abhängt, in der eine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) vorkommt, können wir auf sie die $\forall$-Einführung nicht anwenden. (Natürlich auf die Prämisse selbst auch nicht, denn diese hängt ja von sich selbst ab.)

5.16 Die Quantor-Schlüsse - eine Zusammenfassung

Es wäre schön, wenn wir alles, was wir von den Quantor-Schlüssen wissen müssen, einmal nebeneinander sehen könnten:

Starke Quantor-Schlüsse

$\forall$-Elimination $-\forall$: $\dfrac{\forall xGx}{G\Box}$ oder $\dfrac{\forall xGx}{Ga}$

$\exists$-Einführung $+\exists$: $\dfrac{G\Box}{\exists xGx}$ oder $\dfrac{Ga}{\exists xGx}$

Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei, also nicht in Verbindung mit einem Quantor vorkommen.
$G\Box$ und Ga unterscheiden sich von Gx dadurch, dass in $G\Box$ bzw. in Ga überall dort das Zeichen $\Box$ bzw. der Buchstabe a steht, wo in Gx die Variable x vorkommt ($\Box$ ist ein Zeichen für ein beliebiges Element der Grundmenge, a die Bezeichnung für ein festes Element der Grundmenge).

Schwache Quantor-Schlüsse

$\forall$-Einführung $+\forall$: $\dfrac{G\Box}{\forall xGx}$ Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei vorkommen.

In $G\Box$ steht an genau den Stellen das Zeichen $\Box$, wo in Gx ein x steht. Nicht anwendbar auf Formeln, in denen eine aus einer $\exists$-Elimination stammende freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) vorkommt. Weder anwendbar auf Prämissen, die eine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) enthalten, noch auf Formeln, die von solchen Prämissen abhängen.

$\exists$-Elimination $-\exists$: $\dfrac{\exists xGx}{G\Box}$

Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei vorkommen.

Für jede hinzukommende freie Variable ist ein Zeichen (Quadrat, Dreieck oder ähnliches Zeichen) zu wählen, das in der Ableitungskette noch nicht vorgekommen ist.

5.17 Was nützen uns die Quantor-Schlüsse?

Wir haben die Quantor-Schlüsse und die ihnen auferlegten Beschränkungen an Hand von Beispielen eingeführt und auf den Aufbau einer strengen Theorie verzichtet.
Aber wenn wir auch keine Beweise geben, wollen wir den Leser doch nicht darüber im unklaren lassen, was man mit Hilfe der Quantor-Schlüsse erreichen kann. Was können wir also von den Quantor-Schlüssen erwarten, was nützen sie uns? Durch die obigen Beschränkungen haben wir falsche Schlüsse ausgeschaltet. In diesem Zusammenhang entstehen zwei Fragen:

1. Sind die Beschränkungen scharf genug, d.h., lassen sie nicht eventuell doch fehlerhafte Schlüsse zu, an die wir bisher nur noch nicht gedacht haben?

2. Sind die Beschränkungen nicht zu scharf, d. h., kann man trotz der Beschränkungen alles ableiten, was wir gern ableiten möchten? (Die letzte Frage werden wir später noch präzisieren.)

Die erste Frage können wir bejahen: Die Bedingungen sind scharf genug; sie lassen keine fehlerhaften Schlüsse zu. Alles, was wir mit den eben zusammengestellten Schlüssen und den Schlussregeln des vorigen Kapitels aus gegebenen Prämissen ableiten, folgt wirklich aus diesen Prämissen, und zwar in dem Sinn, dass die aus der Konjunktion der Prämissen als vorderem und der Konklusion als hinterem Glied gebildete Implikation allgemeingültig ist.

Allgemeingültig wiederum: Wie immer die logischen Funktionen beschaffen sind (d. h. welche Werte sie auch für die Elemente einer beliebig gewählten Grundmenge annehmen mögen), die erwähnte Implikation besitzt stets den Wahrheitswert W. Das bedeutet natürlich, dass die Konklusion stets den Wert W besitzt, sofern nur jede der Prämissen den Wert W hat. Das ist genau das, was wir erwarten, wenn wir mit ruhigem Gewissen von bestimmten Prämissen sagen wollen, dass aus ihnen eine gewisse Konklusion folgt.

Die zweite Frage können wir genauer so formulieren: Kann man mit Hilfe der angegebenen (durch die Quantor-Schlüsse ergänzten) Schlussregeln eine jede logische Formel ableiten, die aus einer gegebenen Menge von logischen Formeln folgt (letztere spielen die Rolle der Prämissen)?

Die Antwort auch auf diese Frage ist (bei einer gewissen exakten Bestimmung des Begriffs der logischen Formel) bejahend. Die Einschränkungen sind also nicht zu scharf: Was in dem oben erwähnten Sinn aus einer gegebenen Menge von Formeln folgt, das kann auch aus diesen abgeleitet werden.

5.18 Beispiele

1. Wir begleichen eine alte Schuld, wenn wir zeigen, dass die folgenden Sätze dasselbe bedeuten:
(a) Alle Wurzeln dieser Gleichung sind nicht negativ.
(b) Es gibt keine Wurzel dieser Gleichung, die negativ ist.
Ebenso die folgenden:
(c) Diese Bücher sind nicht interessant.
(d) Unter diesen Büchern ist keines, das interessant ist.
Jeder kann aus seiner persönlichen Erfahrung eine ganze Reihe ähnlicher Beispiele anführen. Alle diese Schlüsse entsprechen dem folgenden allgemeinen Schema:

(e) Für alle x gilt: x besitzt nicht die Eigenschaft G.
(f) Es gibt kein x, für das gilt: x besitzt die Eigenschaft G.
Oder kurz:
(g) $\forall x \sim x$
(h) $\sim \exists x G x$

Wir fühlen, dass beide Formeln dasselbe besagen: Wie immer die Grundmenge beschaffen sein und welche Werte die logische Funktion G für die Elemente dieser Menge auch annehmen mag, (g) und (h) besitzen stets dieselben Wahrheitswerte.
Mit anderen Worten: (g) und (h) sind wertverlaufsgleich.

Das aber ist gleichbedeutend damit, dass die eine Formel aus der anderen ableitbar ist und umgekehrt. Zunächst wollen wir (h) aus (g) ableiten. Der Ableitung liegt folgender Gedankengang zugrunde: Wir nehmen die Negation der Konklusion als zweite Prämisse hinzu. Hieraus schließen wir durch $\exists$-Elimination auf $G\square$.
Aus der ersten Prämisse aber folgt durch $\forall$-Elimination $\sim G\square$. Das widerspricht jedoch $G\square$ und damit auch den Prämissen, aus denen wir ableiten. Hier ist die Ableitung:

	1	$\forall x \sim Gx$	P	
↰	2	$\exists x Gx$	P	
↳	3	$G\Box$	2	$-\exists$ ($\Box$ ist noch nicht vorgekommen)
	4	$\exists x Gx \to G\Box$	-2,3	T 3
	5	$\sim G\Box$	1	$-\forall$
	6	$\sim \exists x Gx$	4,5	mod. toll.

Jetzt wollen wir $\forall x \sim Gx$ aus $\sim \exists x Gx$ ableiten. Auf die erste Formel können wir (wenn die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind) durch $\forall$-Einführung schließen, sobald wir nur zu $\sim G\Box$ gelangt sind. Hierzu aber gelangen wir auf indirektem Wege, indem wir von der Negation ausgehen:

	1	$\sim \exists x Gx$	P	
↰	2	$G\Box$	P	
↳	3	$\exists x Gx$	2	$+\exists$
	4	$G\Box \to \exists x Gx$	-2,3	T 3
	5	$\sim G\Box$	4,1	mod. toll.
	6	$\forall x \sim Gx$	5	$+\forall$

Prüfen wir, ob alle Bedingungen für die $\forall$-Einführung erfüllt sind!
Die Substitution ist in beiden Richtungen regulär (an Stelle von $\Box$ steht "überall" x, und an Stelle von x steht "überall" $\Box$. Das $\Box$ ist nicht durch $\exists$-Elimination in die Formel gekommen. Formel 5, auf die wir die $\forall$-Einführung anwenden, hängt von keiner Prämisse ab, die eine freie Variable enthält. (Von einer solchen hängen nur 2 und 3 ab.) Auf Grund beider Ableitungen können wir feststellen:

$$Q1 \qquad \forall x \sim Gx \equiv \sim \exists x Gx$$

Am Schluss des Buches sind unter den Bezeichnungen Q 1, Q 2, ... Identitäten angegeben, die Quantoren enthalten. Auf sie werden wir uns bei unseren Ableitungen beziehen.

2. Auch die folgenden Sätze bedeuten dasselbe:
(a) Jede Wurzel dieser Gleichung ist positiv oder 0.
(b) Es gibt keine Wurzel dieser Gleichung, die nicht positiv oder 0 ist.
Ebenso die folgenden:
(c) Diese Bücher sind langweilig.
(d) Es gibt unter diesen Büchern keines, das nicht langweilig ist.

Wenn wir es recht bedenken, so drücken diese Sätze (a) bis (d) dasselbe aus wie die Sätze (a) bis (d) des vorigen Punktes. (Vorausgesetzt, dass wir ein Buch genau dann als "langweilig" bezeichnen, wenn es "nicht interessant" ist.) Es ist daher kein Wunder, dass sie - genau wie jene - paarweise denselben Sinn besitzen.

Allgemeiner: Es ist kein Wunder, dass

$$\forall x Lx \text{ und } \sim \exists x \sim Lx$$

wertverlaufsgleich sind, denn sie unterscheiden sich sozusagen nur in den Bezeichnungen von

$$\forall x \sim Gx \text{ und } \sim \exists x Gx$$

Dass die letzten beiden Formeln wertverlaufsgleich sind, haben wir schon bewiesen.
(An Stelle von $\sim Gx$ setzen wir in der ersten Formel Lx ein. An Stelle der Negation $\sim\sim Gx$ von $\sim Gx$, d.h. an Stelle von Gx, müssen wir dann die Negation von Lx, also $\sim Lx$, in die

zweite Formel einsetzen. Auf diese Weise ergeben sich die oberen Formeln aus den unteren.)

Natürlich hätten wir an Stelle von L auch G schreiben können und auf diese Weise die folgende Identität erhalten:

$$\text{Q 2:} \quad \forall x Gx \equiv \sim \exists x \sim Gx$$

3. Betrachten wir jetzt die folgenden Sätze:
(a) Es gibt eine Uhr, die keine Feder hat.
(b) Nicht alle Uhren haben eine Feder.

Oder diese:
(c) Es kommt vor, dass die Zeitansage nicht die genaue Zeit angibt.
(d) Die Zeitansage gibt nicht immer die genaue Zeit an.

Mit vielen anderen Satzpaaren zusammen besitzen alle diese Sätze das folgende allgemeine Schema:

(e) Es gibt ein x, für das gilt: x besitzt nicht die Eigenschaft G.
(f) Nicht für alle x gilt, dass x die Eigenschaft G besitzt.
Kurz:
(g) $\exists x \sim Gx$
(h) $\sim \forall x Gx$

Wir bemerken, dass (h) die Negation der linken Seite der Identität Q 2 ist, (g) dagegen ist (wegen der Eigenschaften der doppelten Negation) gleich der Negation der rechten Seite von Q 2. Die beiden Seiten von Q 2 haben stets dieselben Wahrheitswerte; denn Q 2 ist eine Identität.
Entweder besitzen also beide Seiten den Wert W oder beide Seiten den Wert F. Negieren wir beide Seiten, so erhalten wir wieder Aussagen mit übereinstimmenden Wahrheitswerten. Daher ist auch

$$\text{Q 3: } \exists x \sim Gx \equiv \sim \forall Gx$$

eine Identität.

4. Wir brauchen nicht mehr viele Worte darüber zu verlieren, dass man aus Q 3, wenn man an Stelle von $\sim Gx$ die Aussageform Lx, an Stelle von Gx (d.h. $\sim\sim Gx$) die Aussageform $\sim Lx$ einsetzt und schließlich für den Buchstaben L wieder G schreibt, die folgende Identität erhält:

$$\text{Q 4: } \exists x Gx \equiv \sim \forall x \sim Gx$$

Wir hätten sie auch direkt ableiten können, das ist aber nicht nötig. Doch wollten wir lieber die Substitution, die wir bisher schon in der aus der Aussagenlogik bekannten Weise verwendet haben, auch auf logische Funktionen übertragen. Wir überlassen es dem Leser, Beispiele für Q 4 zu suchen. Sehen wir uns an, was Q 1, Q 2, Q 3 und Q 4 in einer zweielementigen Grundmenge besagen:

$$\begin{array}{lll} Q1: & \forall x \sim Gx \equiv\sim \exists x Gx, & \sim Ga \wedge \sim Gb \equiv\sim (Ga \vee Gb) \\ Q2: & \forall x Gx \equiv\sim \exists x \sim Gx, & Ga \wedge Gb \equiv\sim (\sim Ga \vee \sim Gb) \\ Q3: & \exists x \sim Gx \equiv\sim \forall Gx, & \sim Ga \vee \sim Gb \equiv\sim (Ga \wedge Gb) \\ Q4: & \exists x Gx \equiv\sim \forall x \sim Gx, & Ga \vee Gb \equiv\sim (\sim Ga \wedge \sim Gb) \end{array}$$

Wir erkennen: Aus Q 1 und Q 3 erhalten wir in diesem Spezialfall die beiden Identitäten von de Morgan (es ist natürlich ganz egal, ob wir eine Aussage statt mit A oder B mit Ga oder Gb bezeichnen). Aus Q 2 und Q 4 hingegen erhalten wir jene Varianten derselben Identitäten, mittels derer man die Konjunktion durch Alternative und Negation und die Alternative durch Konjunktion und Negation ausdrücken kann.
Q 1 und Q 3 (und mit ihnen auch Q 2 und Q 4) nennen wir verallgemeinerte de Morgansche Identitäten.

5. Wir haben, wenn auch in etwas komplizierter Weise, bewiesen, dass die folgenden Aussagen (bezüglich einer gewissen Grundmenge von Vergasern) dasselbe bedeuten:
(1) Es gibt einen Vergaser, für den gilt: Wenn die Gütekontrolle ihn abnimmt, frisst Alfons einen Besen.
(2) Wenn die Gütekontrolle alle Vergaser abnimmt, frisst Alfons einen Besen.
Allgemeiner: Wir haben bewiesen, dass

$$\exists x(Gx \to A) \equiv \forall x Gx \to A$$

bei einer beliebigen (nicht leeren) Grundmenge, einer beliebigen logischen Funktion $G\square$ und einer beliebigen Aussage A eine Identität ist.
Wir beweisen diese Identität jetzt noch einmal dadurch, dass wir jede Seite der Formel aus der jeweils anderen ableiten.

Zur Ableitung der rechten Seite aus der linken bietet sich die Schlussregel T 3 an: Außer der linken Seite benutzen wir das vordere Glied der Implikation auf der rechten Seite als Prämisse, leiten hieraus A ab und verweisen dann mit Hilfe des Hinweispfeils $\forall x Gx$ vor A:

1	$\exists x(Gx \to A)$	P	
2	$\forall x Gx$	P	
3	$G\square \to A$	1	$-\exists$
4	$G\square$	2	$-\forall$
5	A	3,4	Abtrenng.
6	$\forall x Gx \to A$	-2,5	T 3

In der anderen Richtung versuchen wir eine ähnliche Strategie anzuwenden: Wir verwenden $G\square$ als vorläufige Prämisse und versuchen, hieraus und aus der rechten Seite der Formel A abzuleiten. Danach können wir durch $\exists$-Einführung zu der Formel auf der linken Seite gelangen:

1	$\forall x Gx \to A$	P
2	$G\square$	P
...		

Nun aber kommen wir nicht weiter, denn die ∀-Einführung ist nicht anwendbar, da die zweite Prämisse von □ abhängt.
Jetzt aber können wir uns, im Besitz von Q 1 bis Q 4, schon freier bewegen. Wir können zum Beispiel folgendes tun: Wir leiten $\exists x(Gx \rightarrow A)$ aus $\forall x Gx \rightarrow A$ dadurch ab, dass wir die Negation der gesuchten Konklusion $\rightarrow \forall x \sim (Gx \rightarrow A)$ am besten in der Form $\forall x(Gx \wedge \sim A)$ zu einer zusätzlichen Prämisse machen und (unter Benutzung der Definition der Implikation und der doppelten Negation) hieraus einen Widerspruch herleiten:

1	$\forall x Gx \rightarrow A$	P	
2	$\forall x(Gx \wedge A)$	P	
3	$G\square \wedge \sim A$	2	$-\forall$
4	$\sim \forall x Gx$	1,3b	mod. toll.
5	$\forall x Gx$	3a	$+\forall$
6	$\forall x Gx \wedge \sim \forall x Gx$	4,5	Kopplg.
7	F	6	Widerspr.
8	$\forall x(Gx \wedge A) \rightarrow F$	-2,6	T 3
9	$\sim \forall x(Gx \wedge \sim A)$	8	W 31
10	$\exists x(Gx \wedge \sim A)$	9	Q 3
11	$\exists x(Gx \rightarrow A)$	10	Def. der Impl.

Prüfen wir, ob die ∀-Einführung in Ordnung ist. Die Substitution ist einwandfrei. Eine ∃-Elimination kommt in der Ableitung nicht vor, die zweite Gefahrenstelle ist damit vermieden. In den Prämissen tritt keine freie Variable auf, so dass auch die dritte Gefahrenstelle vermieden ist.

6. Wir betrachten ein Beispiel, in dem auch ein bestimmtes Element der Grundmenge vorkommt. Wir lösen durch Ableitung die aus dem dritten Kapitel bekannte Aufgabe von den "Löbauer Junggesellen".
Die vermutete Konklusion und die Prämissen sind mit leicht verständlichen Bezeichnungen unten angeführt. (Damit wir die Konklusion immer vor Augen haben, haben wir sie mit der Nummer 0 an den Anfang der Ableitung gestellt. Wir dürfen sie bei der Ableitung natürlich nicht benutzen.)

0	$\forall x[(Lx \wedge Jx) \rightarrow Rx]$	?
1	$\forall x[(\sim Rx \wedge Jx) \rightarrow Bx]$	P
2	$\forall x[(Lx \wedge Bx) \rightarrow Rx) \vee \exists x(\sim Rx \wedge Bx \wedge \sim Lx)$	P
3	$\sim Ls \wedge \sim Rs \wedge Bs$	P

Die Vorhaltungen der Ehefrau und die Leidenschaft, mit der Peter Schulze Briefmarken sammelt, haben wir nicht formalisiert. Wir haben in Formel 3 nur das aufgenommen, was bei der Ableitung vermutlich eine Rolle spielen wird.
Man sieht, dass man aus 3 durch ∃-Einführung die Negation des zweiten Gliedes der Alternative aus Formel 2 (und damit das erste Glied der Alternative) erhalten kann, denn in $\exists x(\sim Lx \exists \wedge \sim Rx \wedge Bx)$ unterscheidet sich der in Klammern stehende Teil nur durch die Reihenfolge der Glieder von dem in Klammern stehenden Teil der Formel $\sim \exists x(\sim Rx \wedge Bx \wedge \sim Lx)$:

4	$\exists x(\sim Lx \wedge \sim Rx \wedge Bx)$	3	$+\exists$
5	$\exists x(\sim Rx \wedge Bx \wedge \sim Jx)$	4	Ass., Komm.
6	$\forall x[(Lx \wedge Bx) \rightarrow Rx]$	2,5	disj. Syll., dopp. Negat.

Im weiteren werden wir durch ∀-Elimination in das Innere der Formeln eindringen, damit wir schließlich durch ∀-Einführung unser Ziel erreichen können. Die vorletzte Formel in unserer Ableitungskette muss demnach $(L\square \wedge J\square) \rightarrow R\square$ sein.

Das vordere Glied dieser Implikation können wir gefahrlos als zeitweilige Prämisse einführen. Die $\forall$-Einführung werden wir nämlich erst nach Anwendung der Schlussregel T 3 auf diese Prämisse anwenden, d.h. auf eine Formel, die nicht mehr von $(L\Box \wedge J\Box)$ abhängt.

↰	7	$L\Box \wedge J\Box$	P	
|	8	$(L\Box \wedge B\Box) \rightarrow R\Box$	6	$-\forall$
|	9	$(\sim R\Box \wedge J\Box) \rightarrow B\Box$	1	$-\forall$

Jetzt benötigen wir nur noch aussagenlogische Schlussweisen, um zu $R\Box$ zu gelangen. Es führen mehrere Wege zum Ziel, so etwa der folgende:

|	10	$L\Box \rightarrow (B\Box \rightarrow R\Box)$	8	Export.
|	11	$B\Box \rightarrow R\Box$	10,7a	Abtrenng.
|	12	$J\Box \rightarrow (\sim R\Box \rightarrow B\Box)$	9	Export., Komm.
|	13	$\sim R\Box \rightarrow B\Box$	12,7b	Abtrenng.
|	14	$\sim R\Box \rightarrow R\Box$	13,11	bed. Syll.
|	15	$R\Box \vee R\Box$	14	dopp. Negat., Def. der Impl.
↳	16	$R\Box$	15	Idemp.
	17	$(L\Box \wedge J\Box) \rightarrow R\Box$	-7,16	T 3
	18	$\forall x[(Lx \wedge Jx) \rightarrow Rx]$	17	$+\forall$

Diesmal hat sich die Ableitungsmethode nicht von ihrer vorteilhaftesten Seite gezeigt. Die Lösung mit Hilfe der Zeichnung war nicht nur anschaulicher, sondern auch schneller zu bewältigen und weniger kompliziert.

7. Sehen wir uns als letztes Beispiel an, wie sich unsere neuen Schlussregeln bei der Lösung der Aufgabe 10 aus Kapitel 3 ("Schulze - Aufgabe") bewähren. Wir stellen auch hier die Konklusion, die wir aus den Prämissen, d.h. aus 1 und 2, ableiten wollen, der Ableitung voran:

0	$\sim K \rightarrow \exists x(Sx \wedge Vx)$	
1	$[A \vee \forall x(Mx \rightarrow Sx)] \vee K$	P
2	$A \rightarrow \exists x[Mx \wedge (Sx \rightarrow Vx)]$	P

Bevor wir beginnen, halten wir einen kurzen Kriegsrat. Da die Konklusion die Form einer Implikation hat, wird es nützlich sein, deren vorderes Glied als zusätzliche Prämisse zu benutzen. Auf diese Weise erhalten wir durch Anwendung des disjunktiven Syllogismus sofort das erste Glied von 1, und dessen erstes Konjunktionsglied wird uns auch bei der Zerlegung von 2 von Nutzen sein:

↰	3	$\sim K$	P	
|	4	$A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)$	1,3	disj. Syll.
|	5	$\exists x[Mx \wedge (Sx \rightarrow Vx)]$	2,4a	Abtrenng.
|	6	$M\Box \wedge (S\Box \rightarrow V\Box)$	5	$-\exists$
|	7	$M\Box \rightarrow S\Box$	4b	$-\forall$
|	8	$S\Box$	7,6a	Abtrenng.
|	9	$V\Box$	6b,8	Abtrenng.
|	10	$S\Box \wedge V\Box$	8,9	Kopplg.
↳	11	$\exists x(Sx \wedge Vx)$	10	$+\exists$
	12	$\sim K \rightarrow \exists x(Sx \wedge Vx)$	-3,11	T 3

Hier hat sich die Ableitungsmethode wieder Pluspunkte erworben. Dieser Weg ist schöner und durchsichtiger.

Aufgaben

1. Alfons und Erich, die wir schon früher kennengelernt haben, unterhalten sich bei anderer Gelegenheit über die Gewinnchancen beim Toto:
Alfons: Alle deine Tipp-Scheine sind so, dass ich dir, wenn du mit einem von ihnen gewinnen solltest, auch noch die 100 Mark von damals erlasse.
Erich: Das wird eine schöne Zulage zu meinem Gewinn sein. Einigen wir uns also: Wenn ich auch nur mit einem der Scheine gewinne, erlässt du mir die 100 Mark.

Alfons und Erich haben ihre Aussagen wieder unterschiedlich formuliert: Diesmal benutzte Alfons eine Aussage mit dem Allquantor, Erich dagegen eine mit einem Existenzquantor, die angeblich dasselbe besagt.
Formalisieren Sie beide Aussagen, und beweisen Sie, dass sie tatsächlich dasselbe bedeuten!

2. Die untenstehenden Formeln drücken paarweise dasselbe aus (d.h., sie sind wertverlaufsgleich. Bei beliebiger, nicht leerer Grundmenge, beliebiger logischer Funktion Gx und beliebigem Wahrheitswert von A stimmen ihre Wahrheitswerte stets überein).
Suchen Sie die entsprechenden Paare heraus, und leiten Sie die zusammengehörenden Formeln auseinander ab! Bei der Formulierung der entsprechenden Vermutungen können Beispielsätze und Analogien aus der Aussagenlogik von Nutzen sein.

a) $\forall x(A \rightarrow Gx)$	b) $\forall x(A \vee Gx)$	c) $\forall x(A \wedge Gx)$	d) $A \rightarrow \forall xGx$
e) $A \vee \forall xGx$	f) $A \wedge \forall xGx$	g) $\exists x(A \rightarrow Gx)$	h) $\exists x(A \vee Gx)$
i) $\exists x(A \wedge Gx)$	j) $A \rightarrow \exists xGx$	k) $A \vee \exists xGx$	l) $A \wedge \exists xGx$

3. Unter den untenstehenden Formeln gibt es zwei Paare wertverlaufsgleicher Formeln.
Suchen Sie diese beiden Paare, und leiten Sie die zu diesen Paaren zugehörigen Formeln auseinander ab! Suchen Sie unter den übrigen acht Formeln solche Paare auf, bei denen die eine Formel aus der anderen folgt, nicht aber umgekehrt!

a) $\forall xGx \wedge \forall xHx$	b) $\forall xGx \vee \forall xHx$	c) $\forall xGx \rightarrow \forall xHx$
d) $\forall x(Gx \wedge Hx)$	e) $\forall x(Gx \vee Hx)$	f) $\forall x(Gx \rightarrow Hx)$
g) $\exists xGx \wedge \exists xHx$	h) $\exists xGx \vee \exists xHx$	i) $\exists xGx \rightarrow \exists xHx$
k) $\exists x(Gx \wedge Hx)$	l) $\exists x(Gx \vee Hx)$	m) $\exists x(Gx \rightarrow Hx)$

4. Benutzen Sie unsere neuen Methoden zur Lösung der Aufgabe über das Basketball-Training! (Hinweis: Beschränken Sie die Grundmenge auf die Menge aller Basketballspieler der Mannschaft! Das bedeutet keinen ungerechtfertigten Vorteil gegenüber der zeichnerischen Lösungsmethode. Auch dort hätten wir diese Einschränkung vornehmen können, sie hätte aber die Lösung nicht erleichtert. Jetzt aber werden unsere Formeln dadurch wesentlich einfacher. Es ist zweckmäßig, die angenommene Konklusion durch Kontraposition umzuformen und das neue Vorderglied als Prämisse zu benutzen.)

5. Suchen Sie auch unter den folgenden Formeln die zueinander wertverlaufsgleichen aus!

a) $\sim \forall xGx \wedge \sim \forall xHx$	b) $\sim \forall xGx \vee \sim \forall xHx$	c) $\sim \forall xGx \rightarrow \sim \forall xHx$
d) $\sim \forall x(Gx \wedge Hx)$	e) $\sim \forall x(Gx \vee Hx)$	f) $\sim \forall x(Gx \rightarrow Hx)$
g) $\sim \exists xGx \wedge \sim \exists xHx$	h) $\sim \exists xGx \vee \sim \exists xHx$	i) $\sim \exists xGx \rightarrow \sim \exists xHx$
j) $\sim \exists x(Gx \wedge Hx)$	k) $\sim \exists x(Gx \vee Hx)$	l) $\sim \exists x(Gx \rightarrow Hx)$

Suchen Sie Beispielsätze hierfür!

6. Beweisen Sie, dass $\exists y(Gy \rightarrow \forall xGx)$ allgemeingültig ist, d. h., dass die Formel stets den Wahrheitswert W besitzt, unabhängig von der Wahl der (nicht leeren) Grundmenge und unabhängig davon, welche Werte Gx für die Elemente der Grundmenge annimmt!

6 Logische Funktionen mit mehreren Variablen. Relationen

6.1 Verwicklungen bei einem alltäglichen Schluss

X: Denke daran, dass dir der Arzt geraten hat, weniger Kohlehydrate zu dir zu nehmen.
Y: Aber ich esse doch gar keine Kohlehydrate, sondern Zucker.
X: Weißt du denn nicht, dass Zucker ein Kohlehydrat ist?

Wenn X es auch nicht direkt ausgesprochen hat, so hat man doch wie folgt geschlossen:

$$\frac{\text{Zucker ist ein Kohlehydrat.}}{\text{Wer Zucker isst, isst ein Kohlehydrat.}}$$

Derartigen Schlüssen begegnen wir auf Schritt und Tritt. Wir empfinden sie als ebenso selbstverständlich wie die Luft, die uns umgibt, und daher achten wir auch nicht auf sie. Trotzdem wollen wir jetzt mit den Mitteln der Logik untersuchen, um was für einen Schluss es sich hier handelt und wie wir ihn mit unseren bisherigen Kenntnissen begründen können.

Weder in der Prämisse noch in der Konklusion kommt eine logische Operation vor. Mit aussagenlogischen Hilfsmitteln können wir die Richtigkeit dieses Schlusses nicht begründen, denn sowohl Prämisse als auch Konklusion sind vom aussagenlogischen Standpunkt aus unzerlegbare Aussagen:

$$\frac{A}{B}$$

Wir haben aber die Grenzen der Aussagenlogik schon überschritten und können die mit A und B bezeichneten Aussagen weiter zerlegen:

$$\frac{\text{Für alle } x \text{ gilt: Wenn } x \text{ Zucker ist, so ist } x \text{ ein Kohlehydrat.}}{\text{Für alle } y \text{ gilt: Wenn } y \text{ Zucker isst, so isst } y \text{ ein Kohlehydrat.}}$$

Wir bezeichnen mit $Z\square$, dass $\square$ Zucker, und mit $K\square$, dass $\square$ ein Kohlehydrat ist.
Diese Bezeichnungen können wir leider nur in der Prämisse, nicht aber in der Konklusion benutzen. In der Konklusion ist nämlich von ganz anderen Mengen die Rede; nicht von der Menge der Dinge, die Zucker sind, und auch nicht von der Menge der Kohlehydrate, sondern von den Mengen derjenigen, die Zucker bzw. Kohlehydrate essen. Für sie müssen wir neue Bezeichnungen einführen:

$$U\square = \square \quad \text{isst Zucker} \qquad , \qquad O\square = \square \quad \text{isst Kohlehydrate}$$

Unseren Schluss können wir demnach wie folgt formalisieren:

$$\frac{\forall x(Zx \to Kx)}{\forall y(Uy \to Oy)}$$

Wir möchten - wie immer - erreichen, dass wir ohne inhaltliche Überlegungen, allein an Hand formaler Merkmale erkennen können, ob ein Schluss einer bestimmten Art richtig ist. Dieses Ziel haben wir offensichtlich noch nicht erreicht, denn wären alle Schlüsse dieser Form richtig, so träfe das zum Beispiel auch auf den folgenden zu:

$$\frac{\text{Jedes Stück Zucker ist ein Kohlehydrat.}}{\text{Jede Unterhaltung ist oberflächlich.}}$$

Da die Buchstaben nicht unbedingt die oben angegebene Bedeutung zu haben brauchen, fiele auch der folgende Schluss unter dieses Schema:

$$\frac{\text{Alle Menschen sind sterblich.}}{\text{Alle Bücher sind interessant.}}$$

Diese Schlüsse sind aber offensichtlich falsch, denn ihre Prämissen sind wahr, ihre Konklusionen jedoch falsch. Ein einziges Gegenbeispiel genügt, um die Annahme, alle Schlüsse der obigen Form wären richtig, zu widerlegen. Es hätte keinen Zweck, wenn wir noch weitere Beispiele anführen würden, die die Richtigkeit der Annahme zu beweisen scheinen.

6.2 Logische Funktionen zweier Variablen

Wir befinden uns nun in derselben Lage wie am Anfang dieses Bandes: Wir können einen offensichtlich richtigen Schluss nicht in der Weise formalisieren, dass wir seine Richtigkeit sofort aus der Formel ablesen können. Unsere bisherigen Mittel reichen dazu nicht aus.
Damals brachte uns die weitere Zerlegung einen Schritt weiter. Auch diesmal können wir von ihr Erfolg erhoffen.

$Z\square$ und $K\square$ bedeuten, dass $\square$ Zucker und $\square$ ein Kohlehydrat ist. Wenn wir nun an die Formalisierung des Essens von Zucker und Kohlehydraten gehen, so dürfen wir nicht vergessen, dass es hierbei gerade um das Essen von Zucker und Kohlehydraten geht, sonst bestünde auch gar keine Verbindung zwischen Prämisse und Konklusion.
Trennen wir also beim Zuckeressen den Zucker und den Essprozess und beim Essen von Kohlehydraten die Kohlehydrate und den Essprozess. Das Essen bezieht sich stets auf zwei Dinge: auf das Ding, das etwas isst, und auf das, was gegessen wird. Möge Gert die essende Seite und ein Stück Zucker der passive Teilnehmer des Essvorganges sein. Dass Gert das Stück Zucker isst, können wir kurz folgendermaßen beschreiben:

$$Egz$$

Einer derartigen abkürzenden Schreibweise sind wir schon einmal begegnet. Wir haben den Satz

Harras hat gestern Nachmittag Mauz gejagt

kurz mit

$$Jhm$$

wiedergegeben.
In beiden Fällen ist von einer Beziehung, einer Relation zwischen zwei Elementen der Grundmenge die Rede. Nehmen wir zum Beispiel als Grundmenge die Menge aller konkreten Dinge. Dazu gehören sowohl Gert und das Stück Zucker, das er isst, als auch Harras und Mauz (Abb. 85).

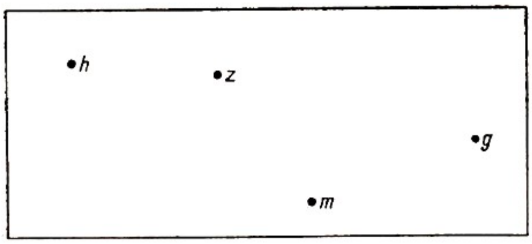


Abb. 85 Grundmenge: die konkreten Dinge

Wir wollen vereinbaren, dass wir die Relation des Essens in dieser Grundmenge dadurch kennzeichnen, dass wir die den Esser und das gegessene Ding bezeichnenden Punkte durch eine durchgehende Linie verbinden. Die Linie allein reicht natürlich noch nicht aus, denn sie verrät uns nicht, wer wen isst. Wir versehen die Linie daher mit einem Pfeil, der vom Esser weg und zum Gegessenen hin zeigt.

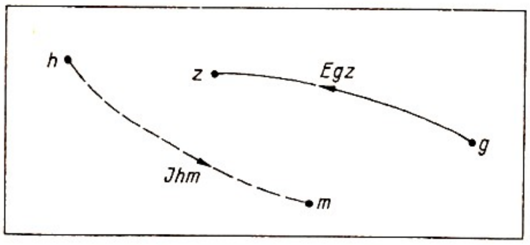


Abb. 86 Grundmenge: die konkreten Dinge

Die Relation des Jagens können wir in anderer Weise, etwa durch eine gestrichelte Linie zum Ausdruck bringen. Auch sie müssen wir mit einem Pfeil versehen, der angibt, wer wen jagt. Die obenstehende Zeichnung drückt aus, was wir symbolisch mit Egz bzw. Jhm beschrieben haben (Abb. 86).
Vergleichen wir nun die beiden Sätze:

1. Gert isst das Stück Zucker.
2. Gert isst Zucker.

Den ersten haben wir mit Egz beschrieben. Passt dieselbe abkürzende Schreibweise auch für den zweiten?
Natürlich nicht. Dieses das Stück Zucker bedeutete ein einziges Element der Grundmenge, jenes Stück nämlich, von dem gerade die Rede war. Sage ich aber Gert isst Zucker, so denke ich zunächst an eine Menge, zu der alles gehört, was nur an Zucker existiert, und ich stelle fest, dass Gert ein nicht näher bestimmtes Element dieser Menge isst.

Wir haben solche nicht näher bestimmten Dinge gewöhnlich mit einem Quadrat bezeichnet. Wir müssen zum Ausdruck bringen, dass dieses Ding Zucker ist und dass Gert dieses Ding isst:

$$Z\square \wedge Eg\square$$

Das aber ist eine Aussageform, die keinen Wahrheitswert besitzt. Der Satz Gert isst Zucker ist dagegen eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist. Wie erhalten wir also eine Aussage? Sollen wir vielleicht für das Quadrat einen Buchstaben einsetzen? Sehen wir es uns einmal an:

$$Za \wedge Ega$$

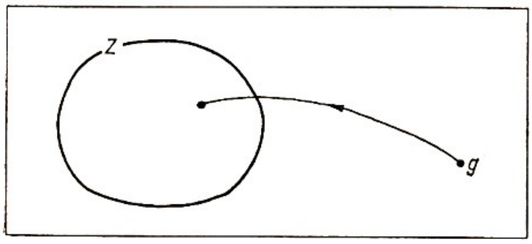
Das würde bedeuten, dass a ein gewisses genau bestimmtes Stück Zucker ist und Gert dieses isst. Aus unserem Satz wissen wir aber nichts Näheres darüber, welches Stück Gert isst, nur eben, dass er Zucker isst.

Wir haben noch zwei Möglichkeiten, aus der obigen Aussageform eine Aussage zu gewinnen:

$$\forall x(Zx \wedge Egx) \qquad \text{oder} \qquad \exists x(Zx \wedge Egx)$$

Das erste würde bedeuten: Alle Dinge sind Zucker, und Gert isst sie alle.
Das zweite hingegen: Es gibt ein Ding, das Zucker ist und das Gert isst.
Natürlich, diese letzte Formel drückt gerade das aus, was wir sagen wollen, nämlich dass Gert Zucker isst. In der Zeichnung sieht das so aus (Abb. 87):

Abb. 87



Grundmenge: die konkreten Dinge

Diese Formel scheint vielleicht für einen so einfachen Satz ziemlich kompliziert, sie trifft den Inhalt aber ganz genau und stellt daneben unter dem Gesichtspunkt unserer Schlüsse eine äußerst nützliche Formulierung dar. Sie enthält nämlich das Verbindungsglied zur Prämisse. Das dort auftretende Zx ist auch hier zu finden!
Jetzt bereitet es uns auch keine Schwierigkeiten mehr, die Aussage Gert isst ein Kohlehydrat zu formalisieren:

$$\exists x(Kx \wedge Egx)$$

und genauso ist es mit der Formulierung des Satzes "Wenn Gert Zucker isst, so isst Gert ein Kohlehydrat":

$$\exists x(Zx \wedge Egx) \rightarrow \exists x(Kx \wedge Egx)$$

Unsere Konklusion behauptete das aber nicht nur von Gert, sondern sie bezog sich auf jedermann. Wir fügen daher hinzu: Für alle y (die Grundmenge für y sei z. B. die Menge aller Menschen oder gar aller Lebewesen):

$$\forall x[\exists x(Zx \wedge Egx) \rightarrow \exists x(Kx \wedge Egx)]$$

(Es wäre gefährlich, an Stelle von y den Buchstaben x zu benutzen. Wir hätten dann Exx schreiben müssen, was bedeutet, dass x sich selbst aufisst!)
Nun endlich können wir also den simplen, alltäglichen Schluss

$$\frac{\text{Zucker ist ein Kohlehydrat.}}{\text{Wer Zucker isst, isst ein Kohlehydrat.}}$$

formalisieren, und zwar folgendermaßen:

$$\frac{\forall x(Zx \rightarrow Kx)}{\forall x[\exists x(Zx \wedge Egx) \rightarrow \exists x(Kx \wedge Egx)]}$$

Die Prämisse hat das gewohnte Aussehen. In der Konklusion aber bemerken wir etwas Neues: Außer den gewohnten logischen Funktionen einer Variablen (wie $Z\square$ und $K\square$) tritt in ihr auch eine logische Funktion von zwei Variablen auf, nämlich $E\triangle\square$. Wir haben alle Variablen durch Quantoren gebunden, und daher treten in den Formeln an Stelle des Quadrats und des Dreiecks Buchstaben auf: Zx, Kx, Eyx. In unserem Beispiel bedeutet Eyx: y isst x.

Ob dies in einem gegebenen Fall wahr ist oder nicht, hängt natürlich auch davon ab, was y und was x bedeutet. Daher nennen wir diese Funktion eine Funktion von zwei Variablen.
Wir bezeichnen Eyx deshalb als logische Funktion, weil sie die Werte W und F annehmen kann: Was immer wir für x und y einsetzen, stets gibt es zwei mögliche Fälle: y isst x oder y isst x nicht.

(Dass man dies in der Praxis nicht immer eindeutig entscheiden kann, ist eine andere Frage. Die mathematische Logik liefert ein Modell für die Untersuchung der in der Realität auftretenden Probleme, bei dem vorausgesetzt wird, dass die Antwort auf derartige Fragen eindeutig bestimmt ist. Ihr Anwendungsbereich wird aber dadurch eingeschränkt, dass ein solches Modell nicht genau mit den realen Verhältnissen übereinstimmt.)

Bewähren sich unsere Hilfsmittel auch jetzt?
Was die logischen Funktionen von zwei und mehr Variablen betrifft, so bleiben noch viele Fragen zu klären. Wir wollen aber zunächst bei unserem Beispiel bleiben. Dem Mutigen gehört die Welt! Versuchen wir also, aus der Formel

$$\forall x(Zx \to Kx)$$

die Formel

$$\forall x[\exists x(Zx \land Egx) \to \exists x(Kx \land Egx)]$$

abzuleiten. Natürlich wollen wir die Ableitung mit der $\forall$-Einführung beschließen. Wir erwarten also

$$\exists x(Zx \land E\triangle x) \to \exists x(Kx \land E\triangle x)$$

als vorletzte Formel.
Es wird zweckmäßig sein, das Vorderglied dieser Implikation zeitweilig als Prämisse zu benutzen und auf sie, nachdem es gelungen ist, aus ihr und den ursprünglichen Prämissen das Hinterglied abzuleiten, die Pfeiloperation (Schlussregel T 3) anzuwenden. Wir beginnen mit der Elimination der Quantoren bei der zeitweiligen Prämisse, da wir die $\exists$-Elimination gern so früh wie möglich ausführen:

0	$\forall y[\exists x(zx \land Eyx) \to \exists x(Kx \land Eyx)]$		
1	$\forall x(Zx \to Kx)$	P	
2	$\exists x(Zx \land E\triangle x)$	P	
3	$Z\square \land E\triangle\square$	2	$-\exists$

Wir haben für die hinzugekommene freie Variable ein anderes Zeichen benutzt als bisher; einerseits deshalb, weil wir uns an unsere alten Einschränkungen halten wollten, zum andern aber auch aus inhaltlichen Gründen: Wir denken an unseren Text und wollen nicht voraussetzen, dass $\triangle$ sich selber aufisst.
Natürlich haben wir diesen Fall dadurch auch nicht ausgeschlossen, dass wir verschiedene Zeichen (Dreieck und Quadrat) benutzt haben. Hätten wir aber ein und dasselbe Zeichen benutzt, so hätten wir nur diesen Fall erfasst.

Jetzt können wir auch in 1 den Quantor weglassen und mit aussagenlogischen Methoden zunächst $K\square \land E\square$ ableiten. Die Fortsetzung liegt auf der Hand:

4	$Z\square \to K\square$	1	$-\forall$
5	$K\square$	4,3a	Abtrenng.
6	$K\square \land E\triangle\square$	5,3b	Kopplg.
7	$\exists x(Kx \land E\triangle x)$	6	$+\exists$
8	$\exists x(Zx \land E\triangle x) \to \exists x(Kx \land E\triangle x)$	-2,7	T 3
9	$\forall y[\exists x(Zx \land Eyx) \to \exists x(Kx \land Eyx)]$	8	$+\forall$

Die alten Mittel haben sich also bewährt, die Ableitung ist gelungen. Und das ist kein Zufall. Man kann beweisen, dass dieselben Beschränkungen, die wir den Quantor-Schlüssen bei Funktionen einer Variablen auferlegt haben, auch im Fall von Funktionen mehrerer Variablen die Richtigkeit der Ableitung sichern. Darüber hinaus tritt auch bei Funktionen mehrerer Variablen die bereits bekannte Erscheinung auf, dass eine Formel, die aus einer anderen folgt (in dem schon mehrfach angegebenen Sinn: Wie immer die Grundmenge auch gewählt sein mag und welche logischen Funktionen wir auch betrachten ... usw.), aus dieser auch ableitbar ist.

Diese schöne Eigenschaft teilen wir hier, genau wie im Fall einer Variablen, ohne Beweis mit. Auf alle Fälle können wir uns darüber freuen, dass das, was wir bei den Funktionen mit einer Variablen gelernt haben, nicht umsonst war und auch auf Funktionen mit mehreren Variablen anwendbar ist.

Der eine oder andere Leser wird nun vielleicht fragen, ob es sich lohnt, wegen eines derart mageren Ergebnisses zu triumphieren. Was haben wir denn mit diesem großen Aufwand erreicht? Wir haben gezeigt, dass aus der Aussage Zucker ist ein Kohlehydrat folgt: Wer Zucker isst, isst ein Kohlehydrat.

Natürlich haben wir nicht nur die Richtigkeit dieses einen Schlusses bewiesen, sondern die Richtigkeit unendlich vieler gleichartiger Schlüsse. Auf Grund unseres Beweises wissen wir zum Beispiel auch, dass aus der Behauptung "Jedes Pferd ist ein Tier" folgt: "Jeder Pferdekopf ist ein Tierkopf".
De Morgan bemerkte in diesem Zusammenhang, dass die gesamte traditionelle Logik nicht ausreiche, um diese Schlüsse zu begründen.

Wir können also damit schon mehr als die gesamte traditionelle Logik. Kann aber nicht der kleine Fritz im Kindergarten auch ohne Ableitungen mehr als wir?
Nun, das zu sagen, wäre sicher übertrieben: Unsere ersten Aufgaben waren hier, wie schon früher, kinderleicht, wir werden aber noch auf Aufgaben treffen (und das ist auch bereits geschehen), die wir ohne die Hilfsmittel der mathematischen Logik schwerlich würden bewältigen können.

6.3 Hat auch eine spätere Stunde „Gold im Munde“?

Mit unseren bisherigen Kenntnissen ausgerüstet, beginnen wir nun ein etwas ungewöhnliches Unternehmen. Wir wollen zwei Sprichwörter kombinieren und sehen, was logisch aus ihnen folgt: "Morgenstunde hat Gold im Munde." - "Es ist nicht alles Gold, was glänzt."
Das erste Sprichwort wollen wir etwas abwandeln:

(a) Wer früh aufsteht, der findet Gold.
(b) Es ist nicht alles Gold, was glänzt.

Was folgt logisch aus (a) und (b)? Versuchen wir es zunächst mit einer zeichnerischen Lösung! In den Prämissen ist von vier Mengen die Rede:

- von der Menge der Frühaufsteher,
- von der Menge derjenigen, die Gold finden,
- von der Menge des Goldes (aller goldenen Gegenstände) und
- von der Menge aller glänzenden Gegenstände.

Wir bezeichnen sie der Reihe nach mit F, G_1, G, L und stellen die vier Mengen zunächst ohne alle Einschränkungen dar. Danach geben wir die durch die Prämissen gemachten Einschränkungen in der Zeichnung an (Abb. 88).

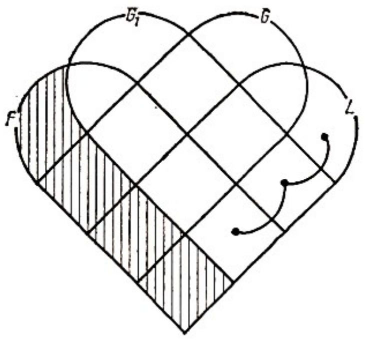


Abb. 88

Prämisse (a) zufolge sind alle Elemente der Menge der Frühaufsteher in der Menge derjenigen enthalten, die Gold finden, d.h. derjenige Teil von F, der außerhalb von G_1 liegt, ist leer.
Nach (b) sind in G nicht alle glänzenden Gegenstände enthalten, d.h., L besitzt wenigstens ein Element, das nicht zu G gehört.
Die Prämissen sagen nichts darüber aus, wo dieses Element liegt, sicher ist nur, dass es sich nicht in dem außerhalb von G_1, gelegenen Teil von F befindet. In die verbleibenden drei Felder von L haben wir je einen Punkt gesetzt und diese miteinander verbunden, um dadurch anzugeben, dass eines von ihnen nicht leer ist. Wir wissen nicht, welches das ist, unter Umständen sind es auch mehrere.

Damit haben wir alles benutzt, was wir aus den Prämissen wissen können. Wir wissen natürlich, dass diejenigen, die Gold finden, selbst nicht aus Gold sind, wir dürfen dieses Wissen bei unserem Schluss aber nicht benutzen, da die Prämissen hierüber nichts aussagen.

So kommen wir jedoch nicht weiter, der Zeichnung können wir keine weiteren Informationen entnehmen.

Versuchen wir es daher mit Formeln:

1	$\forall x(Fx \to G_1x)$	P	
2	$\sim \forall x(Lx \to Gx)$	P	
3	$\exists x \sim (Lx \to Gx)$	2	Q 3
4	$\sim (L\Box \to G\Box)$	3	$-\exists$
5	$F\Box \to G_1\Box$	1	$-\forall$
6	$L\Box \wedge \sim G\Box$	4	Def. der Impl., dopp. Negat.
7	$\sim F\Box \vee G_1\Box$	5	Def. der Impl.
8	$L\Box \wedge (\sim F\Box \vee G_1\Box)$	6a,7	Kopplg.
9	$(L\Box \wedge \sim F\Box) \vee (L\Box \wedge G_1\Box)$	8	Distrib.
10	$\exists x[(Lx \wedge \sim Fx) \vee (Lx \wedge G_1x)]$	9	$+\exists$
11	$\exists x(Lx \wedge \sim Fx) \vee \exists x(Lx \wedge G_1x)$	10	Q 16

Das heißt: Es gibt ein glänzendes Ding, das kein Frühaufsteher ist, oder es gibt ein glänzendes Ding, das Gold findet.
Das hätten wir auch aus der Zeichnung ablesen können. Die Formeln und die Skizze liefern noch mehr andere derartige Aussagen, jedoch nichts, was wir als wesentliche Information bezeichnen könnten.

Warum kommen wir nicht weiter? Deshalb, weil beide Prämissen nichts gemeinsam haben, es fehlt das Verbindungsglied zwischen ihnen.
Etwas Gemeinsames gibt es aber doch: In beiden kommt das Wort "Gold" vor.

Nur eben in der ersten in einer anderen Weise als in der zweiten. In jener ist nicht vom Gold selbst die Rede, sondern von denen, die Gold finden. Könnten wir nicht vielleicht die zweite Prämisse so umformen, dass auch in ihr nicht das Gold selbst, sondern diejenigen vorkommen, die Gold finden?

Nach dem Muster

$$\frac{\text{Zucker ist ein Kohlehydrat.}}{\text{Wer Zucker isst, isst ein Kohlehydrat.}}$$

können wir hier folgendermaßen schließen:
(b) Es ist nicht alles Gold, was glänzt.
(c) Nicht jeder findet Gold, der etwas Glänzendes findet.

Die aus Prämisse (b) gewonnene Aussage (c) passt gut zu (a). In beiden kommt eine gemeinsame Menge vor (die Menge aller, die Gold finden), mit deren Hilfe wir weiterschließen können. Es ergibt sich Abbildung 89 (die Menge derer, die etwas Glänzendes finden, ist mit L_1 bezeichnet).

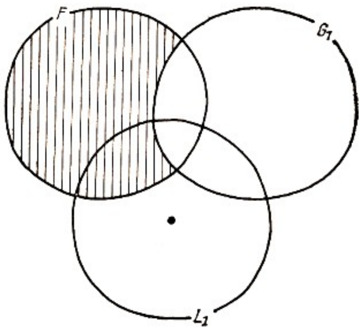


Abb. 89

Wegen der Schraffierung kann der Punkt nur noch in einem einzigen Feld liegen. Die Situation wurde dadurch eindeutig, dass das links über dem Punkt liegende Feld schraffiert ist. Infolge dieser Eindeutigkeit können wir der Zeichnung aber etwas Neues entnehmen: L_1 besitzt ein außerhalb F liegendes Element. Das bedeutet:

(d) Es gibt jemanden, der etwas Glänzendes findet und der kein Frühaufsteher ist.

Oder, in freierer sprichwortartiger Formulierung:
Auch ein Spätaufsteher kann etwas Glänzendes finden.

6.4 Rückzug

Wir haben eben auf zeichnerischem Wege von (a) und (c) auf (d) geschlossen. Den Schluss von (b) auf (c) haben wir aber nur auf eine Analogie gegründet. Wir wollen versuchen, ihn an Hand einer Skizze zu überprüfen.
Was heißt: Es ist nicht alles Gold, was glänzt? Nun, es heißt doch, dass ein Element der Menge der glänzenden Dinge außerhalb der Menge der goldenen Dinge liegt. Wir können das auch Abbildung 90 entnehmen.

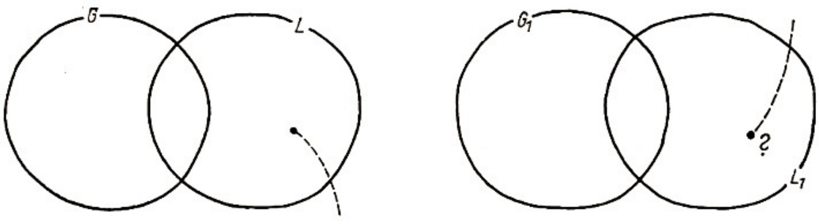


Abb. 90, 91

Was bedeutet aber, dass nicht jeder Gold findet, der etwas Glänzendes findet? Nun einfach, dass es ein Element in der Menge derer, die etwas Glänzendes finden, gibt, das nicht zur Menge derer gehört, die Gold finden (Abb. 91).

Wenn jemand das auf der obigen Zeichnung (Abb. 90) markierte Element findet, so können wir diese Tatsache durch den mit dem Fragezeichen versehenen Punkt (Abb. 91) darstellen. Was aber, wenn niemand das markierte Element findet?
Wo steht geschrieben, dass alles von jemandem gefunden werden muss? Wodurch wird - aus rein logischen Gründen - ausgeschlossen, dass es zwar glänzende Dinge gibt, die nicht aus Gold sind, dass diese aber von keinem gefunden werden, weil sie allen gleichgültig sind und alle sich nur für das Gold interessieren ? Durch nichts, absolut nichts.

Aus (b) folgt (c) in der Tat nicht, so plausibel diese Annahme auch scheinen mag. Und dies erhöht zugleich den Wert der Ableitung, die wir für den Schluss bei der Aufgabe mit den Kohlehydraten gegeben haben. Wenn sich ein derart natürlich erscheinender Schluss wie der von (b) auf (c) als falsch herausstellt, so ist es wirklich beruhigend, dass diese Gefahr im ersten Fall endgültig beseitigt und die Richtigkeit des ersten Schlusses logisch und exakt bewiesen ist.

6.5 Aussagen und logische Funktionen

Die Aufgaben von den Zuckeressern und den Goldfindern eröffnen uns ein neues, weites Gebiet - das Reich der logischen Funktionen mehrerer Variablen. Wir wollen uns einen Überblick darüber verschaffen, in welchem Zusammenhang diese zu den logischen Funktionen einer Variablen und den Aussagen stehen.
Sehen wir uns zunächst einige Beispiele an ($\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen):

(a)	2 ist kleiner als 3	Aussage
(b)	$\square$ ist kleiner als 3 ($\square \in \mathbb{N}$)	logische Funktion einer Variablen
(c)	$\square$ ist kleiner als $\triangle$ ($\square, \triangle \in \mathbb{N}$)	logische Funktion von zwei Variablen
(d)	$\diamond$ sagt, dass $\square$ kleiner ist $\triangle$. ($\diamond \in$ Menge aller Menschen, $\square, \triangle \in \mathbb{N}$)	als logische Funktion von drei Variablen
(e)	$\diamond$ sagt zu ∇, dass $\square$ kleiner ist als $\triangle$. ($\diamond, \nabla \in$ Menge aller Menschen; $\square, \triangle \in \mathbb{N}$)	logische Funktion von vier Variablen
(f)	$\diamond$ sagt zu ∇, dass $\square$ kleiner ist als das $\bigcirc$-fache von $\triangle$. ($\diamond, \nabla \in$ Menge aller Menschen; $\square, \triangle, \bigcirc \in \mathbb{N}$)	logische Funktion von fünf Variablen

Diese Aufzählung würde die Bezeichnung "logische Funktion von null Variablen" für Aussagen begründet erscheinen lassen. Wir werden diese Bezeichnung jedoch nicht einführen.

Worin bestehen die Gemeinsamkeiten zwischen Aussagen und logischen Funktionen und worin unterscheiden sich beide? Aussagen und logische Funktionen stimmen darin überein, dass sie wahr oder falsch sein, d.h. die Wahrheitswerte W oder F haben können. Der Wahrheitswert einer logischen Funktion hängt von den Werten der in ihr vorkommenden Variablen ab und ändert sich unter Umständen mit diesen, die Auswahl für die Funktionswerte wird dadurch aber nicht größer: Als Werte einer logischen Funktion kommen nur die Werte W und F in Frage.

Welche Werte aber können die Variablen annehmen?
Als Werte der Variablen kommen alle Elemente einer beliebigen, nicht leeren Menge in Frage. In unseren Beispielen waren die möglichen Werte von $\bigtriangledown$ und $\diamond$ Menschen, die der übrigen Variablen waren Zahlen. Wir hätten die Liste der Beispiele auch durch solche Variablen erweitern können, deren Werte Orte, Zeitpunkte usw. sind.
Wir sind auch schon logischen Funktionen begegnet, bei denen die Werte der Variablen Buchstaben, Speisen und Schachfiguren waren.

Bei logischen Funktionen mit mehreren Variablen können die Werte aller Variablen Elemente ein und derselben Menge sein (siehe Beispiel (c)), sie können aber auch Elemente verschiedener Grundmengen sein wie in den Fällen (d), (e) und (f). Es kann sogar sein, dass die Werte jeder Variablen einer anderen Grundmenge angehören. Welche Werte die logischen Variablen annehmen können, ist keine Frage der "reinen" mathematischen Logik, sondern eine Frage der Anwendungsbereiche der Logik.

Wieviel Werte eine Variable annehmen kann, d.h. wieviel Elemente die Grundmenge besitzt, in der sich die betreffende Variable "bewegt", ist eine Frage, die auch vom Standpunkt der "reinen" mathematischen Logik aus wichtig ist.
Wenn in den Beispielen (b) - (f) als Grundmengen für die Variablen nicht die Menge $\mathbb{N}$ bzw. die Menge aller Menschen, sondern die weniger Elemente umfassenden Mengen $\{1, 2, 3\}$ bzw. die Menge {Susi, Michael} gewählt werden, so erhalten wir andere, sich von (b) - (f) unterscheidende logische Funktionen, die wir mit (b_1) - (f_1) bezeichnen wollen.

6.6 Darstellung in Koordinaten

Versuchen wir, die zuletzt erwähnten Funktionen darzustellen. Die bekannte mathematische Darstellung von Funktionen liefert z. B. für (b_1) das folgende Bild (Abb. 92).

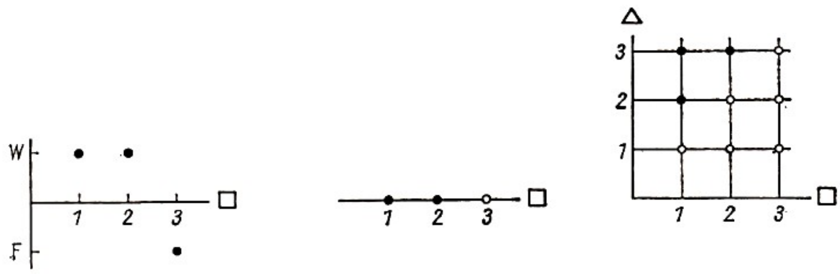


Abb. 92, 93, 94

Die zweite Achse könnten wir auch entbehren. Ob für einen bestimmten Wert der Variablen $\square$ die Funktion (b_1) den Wahrheitswert W oder F annimmt, stellen wir dann auf der Achse der Variablen durch schwarze bzw. weiße Punkte dar und nicht dadurch, dass wir über bzw. unter der entsprechenden Variablen den Wert W bzw. F angeben (Abb. 93).

In ähnlicher Weise können wir auch (c_1) leicht darstellen. Auf unserer Abbildung stellen wir auf der waagerechten Achse die $\square$-Werte und auf der senkrechten Achse die $\triangle$-Werte dar und errichten in den entsprechenden Punkten die Senkrechten auf den Achsen.
Wir wissen zum Beispiel, dass $2 < 3$ ist. Wir können das auf der Zeichnung dadurch veranschaulichen, dass wir die im Punkt 2 der $\square$-Achse und im Punkt 3 der $\triangle$-Achse errichteten Senkrechten bis zu ihrem Schnittpunkt verfolgen und diesen mit einem schwarzen, dem Wahrheitswert W entsprechenden Kreis versehen. Dem Wert F entsprechen auch hier weiße Kreise. So gelangen wir zu der Darstellung, wie sie Abbildung 94 zeigt.

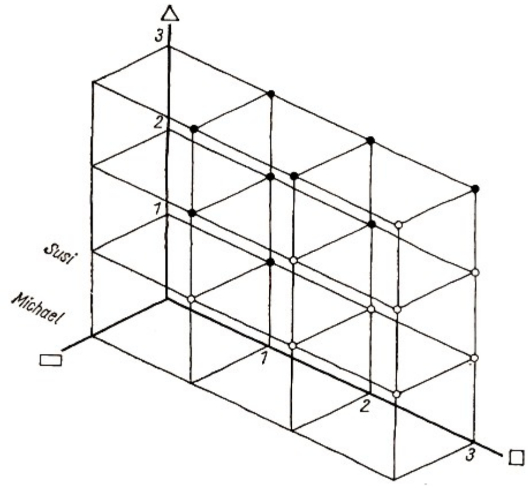


Abb. 95

Wir können sogar (d_1) darstellen, Sofern wir die Äußerungen von Susi und Michael kennen. Nehmen wir an, dass Susi sagt: 1 ist kleiner als 1, 2 und 3; 2 ist kleiner als 2 und 3; 3 ist kleiner als 3.
Michael dagegen behauptet, dass 1 nur kleiner als 2 und 3; 2 nur kleiner als 3; 3 aber kleiner als keine der anderen Zahlen ist (alles in der Grundmenge $\{1, 2, 3\}$).
Dann können wir die erwähnte logische Funktion dreier Variablen in der Weise darstellen, wie es Abbildung 95 zeigt.

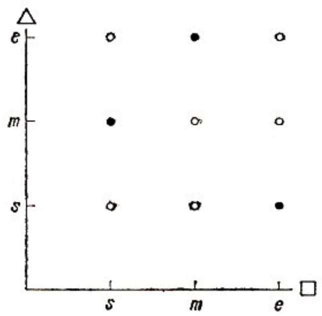
Mit Hilfe von Abbildung 94 können wir auch die logische Funktion

□ ist jünger als △, (□, △ ∈ {Susi, Michael, Eva})

darstellen, vorausgesetzt, dass nicht zwei der Kinder gleichaltrig sind. (Wir können sie auf der Achse vom Jüngsten an in der Reihenfolge zunehmenden Lebensalters anordnen.) Auf diese Weise können wir feststellen, dass dies dann dieselbe logische Funktion ist wie (c_1).
Die Funktion

□ hat im Tischtennis gegen △ verloren, (□, △ ∈ {Susi, Michael, Eva})

können wir jedoch nicht in jedem Fall mit derselben Zeichnung darstellen. Wenn zum Beispiel Susi gegen Michael, Michael gegen Eva und Eva gegen Susi verloren hat, so können wir dies gewiss nicht. In diesem Fall gelangen wir zu einer von (c_1) verschiedenen logischen Funktion. Ihre Darstellung kann zum Beispiel diejenige sein, die wir auf Abbildung 96 sehen.



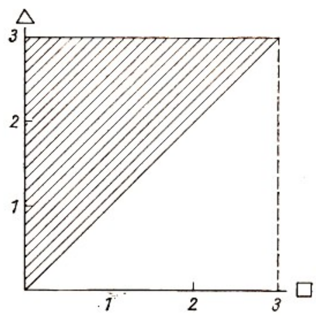


Abb. 96, 97

Hier bedeutet der schwarze Punkt, dass □ gegen △ verloren hat, während der weiße Punkt nicht bedeutet, dass □ gegen △ gesiegt hat, sondern lediglich, dass □ nicht gegen △ verloren hat. Susi zum Beispiel hat nicht gegen Susi verloren (da sie ja gar nicht gegen sie gespielt hat), aber das bedeutet auch nicht, dass Susi Susi besiegt hat. Durch einen weißen Punkt können wir auch angeben, dass zwei Partner noch nicht gegeneinander gespielt haben. Und wenn wir an Stelle des Tischtennisspiels Fußball oder Schach betrachtet hätten, wo es auch ein Unentschieden gibt, so hätten wir auch das Unentschieden auf diese Weise kennzeichnen können.

Kehren wir nun wieder zu der logischen Funktion (c) zurück ($\square$ ist kleiner als $\triangle$) und wählen wir die Grundmenge so, dass $\square$ und $\triangle$ beliebige positive Zahlen bedeuten können, die kleiner als 3 sind. Diese logische Funktion (c_2) führt auf die Darstellung in Abbildung 97.

Sie wird durch ein Quadrat der Seitenlänge 3 dargestellt und nimmt in dessen einer Hälfte (dem schraffierten, gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck ausschließlich der Hypotenuse) den Wahrheitswert W an. (Die Punkte, die auf dem Umfang liegen, werden weder zum Quadrat noch zum Dreieck hinzugerechnet.) Auch die folgenden Abbildungen 98 und 99 sind graphische Darstellungen von logischen Funktionen. Die Grundmengen sind dieselben wie eben.

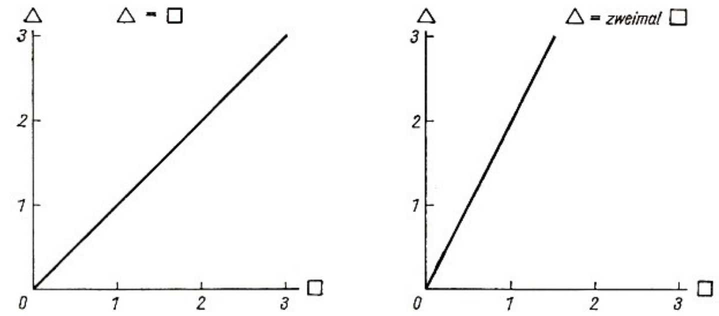


Abb. 98, 99

Hier bewegen wir uns schon auf bekanntem Gelände. Diese logischen Funktionen werden uns noch geläufiger, wenn wir sie folgendermaßen darstellen (Abb. 100 und Abb. 101).

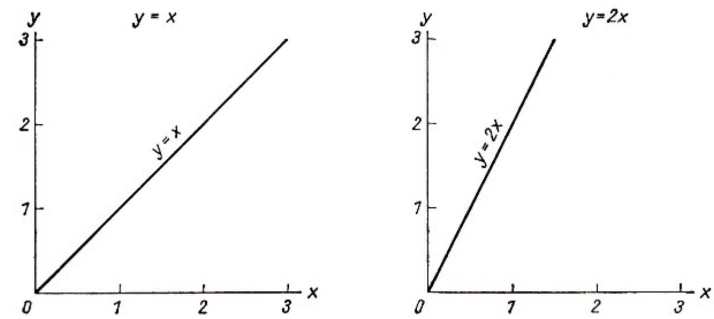


Abb. 100, 101

Logische Funktionen? Sind dies denn nicht Funktionen in dem gewohnten, aus der Mathematik bekannten Sinn?
Hierin liegt gar kein Widerspruch. Wenn ich nur

$$\triangle = 2 \cdot \square \qquad \text{oder} \qquad y = 2 \cdot x$$

schreibe und nicht dazu sage, was wovon abhängt, kann ich weder von einer mathematischen noch von einer logischen Funktion sprechen. Ich definiere mit dieser Formel dann eine Funktion im üblichen Sinn, wenn ich den Werten von x nur solche y-Werte zuordne, für die die obige Beziehung erfüllt ist, d.h. für die sich stets der Wahrheitswert W ergibt.
In diesem Fall habe ich den Wahrheitswert (und zwar W) fixiert und bin so zu einer mathematischen Funktion von einer Variablen gelangt.

Ich kann aber auch so vorgehen, dass ich den Wahrheitswert nicht fixiere und einfach untersuche, welche Wahrheitswerte ich erhalte, wenn ich x und y variieren lasse. In diesem Fall wird dieselbe Formel, die bei der vorigen Interpretation eine mathematische Funktion ergeben hat, eine logische Funktion definieren.

6.7 Zurück zur alten Darstellung!

Die Koordinatendarstellung logischer Funktionen bringt etwas mehr zum Ausdruck, als wir ursprünglich aussagen wollten. {Susi, Michael, Eva} und {Michael, Susi, Eva} bezeichnen ein und dieselbe Menge.

Allgemein: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten, unabhängig von deren Anordnung. Auf den Achsen aber werden die Elemente, ob wir das wollen oder nicht, in einer gewissen Reihenfolge angegeben, wir haben also eine bestimmte Anordnung vorausgesetzt.

(Bestand die Grundmenge aus Zahlen, so wählten wir die gewöhnliche Anordnung der Zahlen ihrer Größe nach, also ihre natürliche Anordnung; war die Grundmenge die Menge aller Menschen, so war die gewählte Reihenfolge etwas willkürlich.)

Zu dem aus der Schulmathematik und der Physik bekannten Funktionsbegriff gehört auch, dass die Werte der Variablen Zahlen sind, die im üblichen Sinn angeordnet werden. Wenn wir jedoch von logischen Funktionen sprechen, dann ist es besser, den Funktionsbegriff nicht durch diese zusätzliche Bedingung zu komplizieren und einzuengen.

Daher ist es, vor allem bei der Darstellung von logischen Funktionen einer oder zweier Variablen, besser, bei Kreisen und anderen ebenen Figuren zu bleiben und die Grundmengen der Variablen durch solche Figuren und nicht durch Koordinatenachsen zu bezeichnen. Logische Funktionen einer Variablen wählen aus jeder dieser Grundmengen jene Teilmengen aus, für die sie den Wahrheitswert W annehmen (Abb. 102).

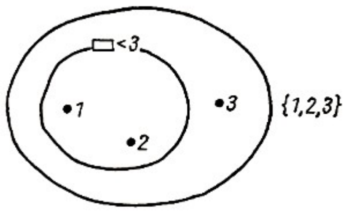


Abb. 102

Logische Funktionen von zwei Variablen stellen dagegen eine Beziehung zwischen jenen Elementen der Grundmengen her, für die sie den Wahrheitswert W annehmen (Abb. 103).

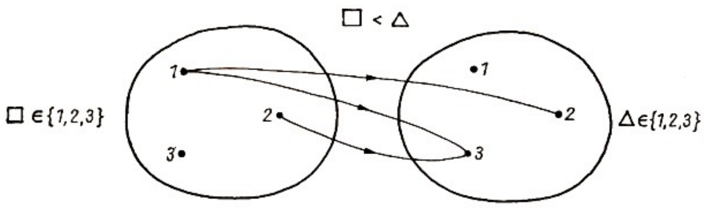


Abb. 103

Wenn die beiden Variablen in derselben Grundmenge variieren können, so brauchen . wir die Grundmenge nicht zweimal aufzuzeichnen, und wir erhalten eine einfachere Darstellung (Abb. 104).

Das Beispiel, bei dem Susi im Tischtennis gegen Michael, Michael gegen Eva und Eva gegen Susi verloren hat, können wir auf diese Art folgendermaßen darstellen (Abb. 105):

□ hat gegen △ verloren.

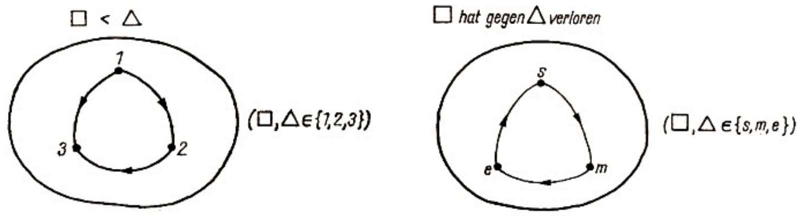


Abb. 104, 105

Die Zeichnung zeigt anschaulich, dass man einander "im Kreise" geschlagen hat: Jeder hat den einen besiegt und gegen den anderen der beiden verloren.
Sind die beiden Mengen voneinander verschieden, so ist eine derartige Vereinfachung natürlich nicht möglich. Stellen wir zum Beispiel einmal graphisch dar, wer von den drei Kindern Susi, Michael und Eva schon einmal in Budapest gewesen ist und wer in Prag (Abb. 106):
□ ist in △ gewesen.

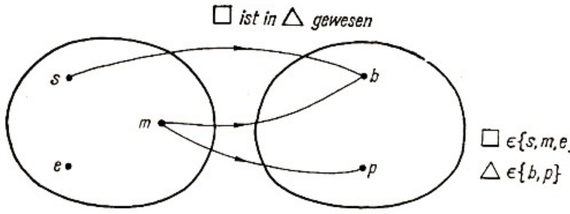


Abb. 106

Diese Darstellungsart wird bei logischen Funktionen von mehr als zwei Variablen gewöhnlich nicht verwendet; ihre Anwendung wäre in diesen Fällen auch sehr schwierig. Eine Linie hat zwei Endpunkte, die Verbindung von Punkten durch Linien ist eine spezifische Darstellungsform für logische Funktionen von zwei Variablen.

6.8 Definition logischer Funktionen durch Aufzählung

In einfacheren Fällen können wir eine logische Funktion einer Variablen dadurch definieren, dass wir alle jene Elemente der Grundmenge aufzählen, für die sie den Wahrheitswert W annimmt. Nehmen wir zum Beispiel jene logische Funktion einer Variablen, die wir aus der obigen Funktion von zwei Variablen erhalten, indem wir die Werte der Städte-Variablen auf den Wert "Budapest" einschränken:

□ ist in Budapest gewesen (□ $\in$ {Susi, Michael, Eva})

Dieser Satz verrät allerdings infolge fehlender Sachinformationen nicht, wie die logische Funktion beschaffen ist. Die obige Zeichnung dagegen tut es. In gleicher Weise aber auch die folgende Aufzählung: {Susi, Michael}.

Damit ist nichts Neues gesagt. Wir haben auch bisher schon gewusst, dass eine logische Funktion einer Variablen eine gewisse Teilmenge der Grundmenge auszeichnet, und zwar die Menge jener Elemente, für die sie den Wahrheitswert W annimmt.
(Sie kann auch die gesamte Grundmenge oder die leere Menge auszeichnen. Im ersten Fall handelt es sich um die logische Funktion "identisch wahr", im zweiten um die Funktion "identisch falsch".)

Kann man denn nicht auch (wieder nur in den einfacheren Fällen) logische Funktionen von zwei Variablen durch Aufzählung definieren? Man kann es, nur muss man diesmal nicht Elemente aufzählen, sondern die durch die Pfeile verbundenen Elementpaare:

$$\{(s,b),(m,b),(m,p)\}$$

Die Paare innerhalb der geschweiften Klammern haben wir in runden Klammern zusammengefasst. Die runden Klammern bringen zum Ausdruck, dass auch die Reihenfolge wesentlich ist: (s, b) bedeutet, dass Susi in Budapest war, während (b, s) bedeuten würde, dass Budapest in Susi war.
Derartige Missverständnisse können bei unserem Beispiel nicht auftreten; wenn aber die beiden Grundmengen zusammenfallen oder einige ihrer Elemente gleich sind, so könnten derartige Missverständnisse entstehen. Es ist zum Beispiel nicht gleichgültig, ob wir die logische Funktion

$\square$ ist kleiner als $\triangle$, ($\square, \triangle \in \{1, 2, 3\}$)

durch diese $\{(1, 2), (1,3), (2, 3)\}$
oder die folgende Aufzählung definieren: $\{(4, 2), (8, 1), (2, 3)\}$

Die letzte Menge charakterisiert nicht die logische Funktion, die wir eigentlich definieren wollten: Sie enthält die falsche Behauptung, dass 3 kleiner ist als 1, während sie die wahre Behauptung, dass 1 kleiner ist als 3, nicht enthält.
Hingegen ist es gleichgültig, ob wir die obige Funktion durch Angabe der Menge

$\{(4, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ oder der Menge $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

definieren. Die Reihenfolge innerhalb der geschweiften Klammern spielt keine Rolle. Wichtig ist nur, welche Elementpaare - geordnete Elementpaare! - bei der Aufzählung vorkommen. Welches Paar dabei an erster und welches an zweiter Stelle steht, ist ganz egal.

Abgesehen davon, dass hierbei statt von Elementen von geordneten Elementpaaren die Rede war, finden wir, dass eine logische Funktion von zwei Variablen dasselbe tut wie eine Funktion einer Variablen: Sie wählt aus der Grundmenge eine gewisse Teilmenge aus. Diese Menge besteht jetzt aus allen in Frage kommenden Elementpaaren. In der Aufgabe von den Reisenden beispielsweise aus den folgenden:

$\boxed{(s,b)}$	$\boxed{(m,b)}$	(e,b)
(s,p)	$\boxed{(m,p)}$	(e,p)

Mit Rahmen sind all jene Paare, die die logische Funktion von zwei Variablen ausgewählt hat.
Wir wollen in derselben Weise auch die logische Funktion aus dem letzten Beispiel durch die Angabe von Zahlenpaaren definieren:

$\boxed{(1,3)}$	$\boxed{(2,3)}$	(3,3)
$\boxed{(1,2)}$	(2,2)	(3,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)

Um leichter vergleichen zu können, haben wir hier die in Frage kommenden Elementpaare entsprechend ihrer Reihenfolge bei der Koordinatendarstellung angegeben. Wir sind jedoch nicht gezwungen, das zu tun!
Auf diese Weise können wir in einfacheren Fällen auch die Werte logischer Funktionen von drei, vier oder mehr Variablen durch Aufzählung angeben. In diesen Fällen müssen wir natürlich nicht geordnete Elementpaare, sondern geordnete Tripel, Quadrupel usw. aufzählen. Als Beispiel definieren wir die folgende logische Funktion von drei Variablen durch Aufzählung von Elementetripeln:

$\square$ plus $\triangle$ ist ∇;   ($\square \in \{1,2\}$, $\triangle \in \{2,3\}$, $\nabla \in \{3,4,5\}$)

oder in gewohnter Schreibweise:

$x + y = z; \qquad (x \in \{1,2\},\ y \in \{1,2,3\},\ z \in \{3,4,5\})$

Die Tripel von Elementen haben wir hierbei so angeordnet, dass x an der ersten, y an der zweiten und z an der dritten Stelle steht. Unsere logische Funktion können wir durch Aufzählung der folgenden Tripel definieren:

$$\{(1,2,3); (1,3,4); (2,2,4); (2,3,5)\}$$

Wir können auch hierbei so vorgehen, dass wir alle in Frage kommenden Tripel aufzählen und diejenigen von ihnen einrahmen, die von unserer logischen Funktion ausgewählt werden:

$$\begin{array}{cccccc} (1,3,3) & (2,3,3) & \boxed{(1,3,4)} & (2,3,4) & (1,3,5) & \boxed{(2,3,5)} \\ \boxed{(1,2,3)} & (2,2,3) & (1,2,4) & \boxed{(2,2,4)} & (1,2,5) & (2,2,5) \end{array}$$

6.9 Eigenschaften, Relationen

Wir müssen nun noch die Begriffe "Eigenschaft" und "Relation" in jenes Bild einfügen, das wir von logischen Funktionen einer oder mehrerer Variablen entworfen haben. Der erste steht mit den logischen Funktionen einer Variablen, der letzte mit logischen Funktionen mehrerer Variablen in Zusammenhang.
(Manchmal gebraucht man das Wort "Relation" in einem allgemeineren Sinn, indem man auch die Eigenschaften zu den Relationen zählt.)

Sei unsere Grundmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Wir definieren auf ihr eine einfache, wohl bekannte logische Funktion, diejenige nämlich, die auf der Menge $\{0, 1, 2\}$ den Wahrheitswert W und für alle übrigen Zahlen den Wert F annimmt. Diese logische Funktion können wir auch durch eine Eigenschaft charakterisieren, die gewisse natürliche Zahlen - nämlich die Zahlen 0, 1 und 2 - besitzen und die anderen nicht, etwa durch die Eigenschaft, kleiner als 3 zu sein.

Wir hätten diese Eigenschaft natürlich auch anders definieren können - etwa dadurch, dass die Zahlen nicht größer sein sollen als 2 -, die Eigenschaft wäre dabei genau dieselbe geblieben.

Betrachten wir nun auf derselben Grundmenge diejenige logische Funktion, die auf der Menge $\{5, 27, 60, 104\}$ den Wert W und für alle übrigen Zahlen den Wert F annimmt. Können wir auch in diesem Fall von einer gewissen gemeinsamen Eigenschaft reden, über die diese vier Zahlen verfügen und alle anderen nicht?
Zerbrechen wir uns nicht unnötig den Kopf, die Antwort ist einfacher, als man denkt: Natürlich besitzen sie eine gemeinsame Eigenschaft, die nämlich, Elemente der erwähnten Menge zu sein. Und keine andere Zahl außer ihnen verfügt über dieselbe Eigenschaft.

Wenn wir das Wort Eigenschaft in diesem allgemeinen Sinn verstehen, so entspricht jeder logischen Funktion einer Variablen eine Eigenschaft, die nämlich, dass die betreffende logische Funktion auf einer gewissen Menge den Wert W und überall sonst den Wert F annimmt.
Es ist nicht einmal nötig, diese Begriffe voneinander zu trennen. Wir können ebenso gut sagen, dass eine logische Funktion einer Variablen eine Eigenschaft ist. Es ist lediglich eine Frage des Sprachgebrauchs, der Stilistik, wann wir von einer logischen Funktion einer Variablen und wann wir von einer Eigenschaft sprechen wollen.

Ähnliches können wir auch von den logischen Funktionen mehrerer Variablen und den Relationen sagen. Wir haben vorhin auf ziemlich unübersichtliche Weise aus der Menge aller

Elementetripel eine Teilmenge ausgewählt. Wenn wir uns die Zahlen genauer ansehen, so erkennen wir, nach welchem Gesichtspunkt diese Auswahl erfolgte.
Man hätte auch herausfinden können, von welcher Relation die Rede ist, selbst wenn wir sie nicht angegeben hätten: Die Summe der beiden Zahlen ist gleich der dritten. Dies gilt für die eingerahmten Tripel, für die übrigen nicht.

Es braucht jedoch keine derartige Regelmäßigkeit vorhanden zu sein, um von einer Relation sprechen zu können. Wie immer wir bestimmte Tripel in der Menge aller geordneten Tripel auszeichnen, allein die Tatsache, dass wir sie ausgezeichnet haben, bringt eine Relation zwischen drei Zahlen zum Ausdruck, eine Relation, die genau in den angegebenen Fällen erfüllt ist und sonst nicht. Demnach entspricht jede logische Funktion mehrerer Variablen einer Relation, ja wir können sogar sagen, dass jede logische Funktion mehrerer Variablen eine Relation ist.

6.10 Einige zweistellige Relationen und ihre Eigenschaften

Im täglichen Leben, in der Mathematik ebenso wie in anderen Wissenschaften treten am häufigsten zweistellige (binäre) Relationen, d. h. solche mit zwei Variablen, auf. Sehen wir uns einige spezielle zweistellige Relationen an und untersuchen wir ihre Eigenschaften:

Sei $\{1, 2, 3, 4\}$ die Grundmenge beider Variablen. Wir wollen versuchen, aus den Zeichnungen abzulesen, welche Relationen sie darstellen (Abb. 107 bis 116).

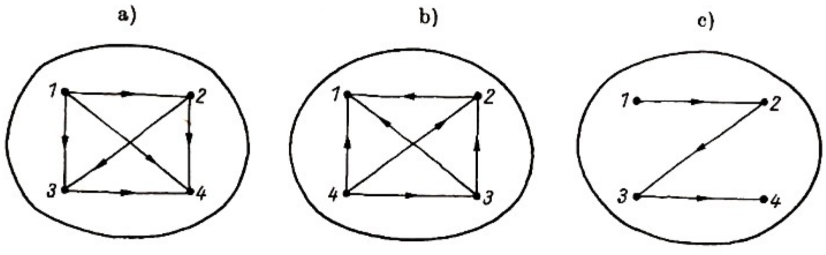


Abb. 107-109

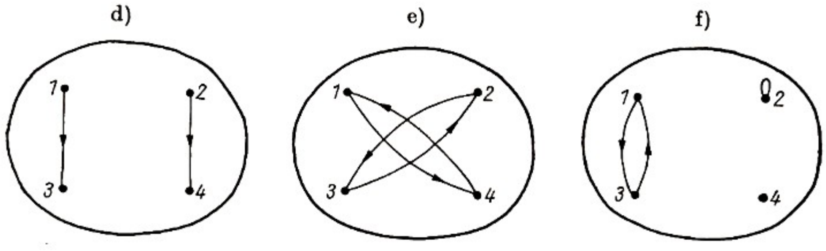


Abb. 110-112

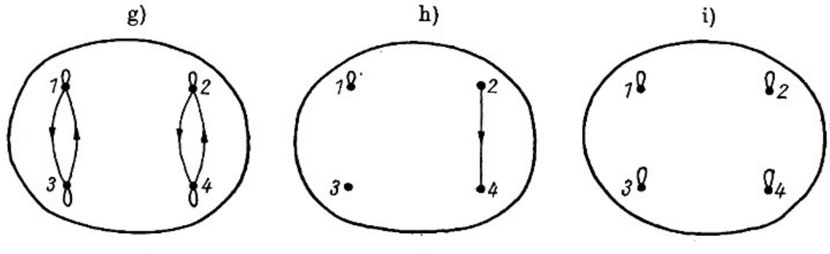


Abb. 113-115

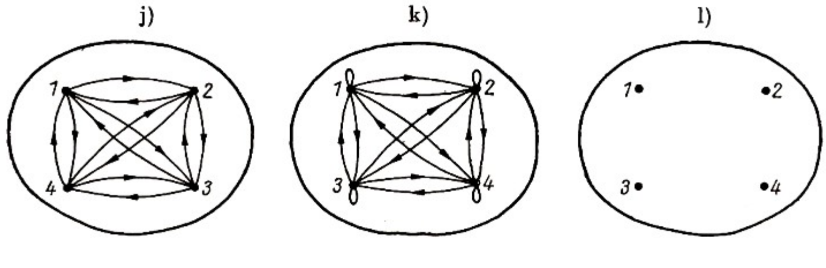


Abb. 116 a,b,c

Diese Untersuchung wäre abgeschlossen, wenn wir an Hand jeder Zeichnung diejenigen geordneten Paare aufzählen würden, für die die dargestellte Relation wahr ist. Es könnte vorkommen, dass wir in der Eile auch gar keine andere Antwort finden. Diese zwölf Abbildungen stellen jedoch Relationen dar, die man leicht durch Formeln oder Worte ausdrücken kann:

a) $\square < \triangle$, b) $\square > \triangle$, c) $\square + 1 = \triangle$, d) $\square + 2 = \triangle$

(Die letzten beiden könnten wir mit Worten so ausdrücken: $\square$ ist um eins kleiner als $\triangle$, $\square$ ist um zwei kleiner als $\triangle$.)

e) $\square + \triangle = 5$, f) $\square + \triangle = 4$, e) $\square + \triangle$ ist gerade

(Wir hätten auch sagen können : $\square$ und $\triangle$ sind entweder beide gerade oder beide ungerade, oder $\square$ und $\triangle$ sind kongruent modulo 2, oder als Formel $\square \cong \triangle$ (mod. 2))

h) $\square \cdot \square = \triangle$, i) $\square = \triangle$, j) $\square \neq \triangle$, k) $|\square - \triangle| < 4$, l) $|\square - \triangle| > 4$

k) bringt zum Ausdruck, dass der Unterschied zwischen den beiden Zahlen kleiner als 4 ist, l) besagt, dass er größer als 4 ist.

In der Grundmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist das erste stets richtig, das letztere nie. Daher führt in der Abbildung k) von jeder Zahl zu jeder anderen ein Pfeil, während in Abbildung l) von keiner Zahl ein Pfeil zu einer anderen führt. k) stellt eine "volle" Relation dar, l) dagegen ist eine "leere" Relation.

Sehen wir uns die Abbildungen einmal der Reihe nach an. In den Abbildungen f), g), h), i) und k) fallen die Schleifen ins Auge. Wir haben die Schleifen auch nicht mit einem Pfeil versehen, sie sind auch so eindeutig zu verstehen: Sie führen von einem bestimmten Element zu eben diesem zurück. Auf den Abbildungen g), i) und k) ist jedes Element mit einer Schleife versehen.

Die Schleifen auf Abbildung g) bedeuten, dass jede der Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ zu sich selbst addiert eine gerade Zahl ergibt: $1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4$ sind sämtlich gerade. In der Abbildung i) bedeuten die Schleifen, dass $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$ und $4 = 4$ ist, d. h., jede Zahl der Menge ist sich selbst gleich. Die erwähnten Abbildungen stellen solche Relationen dar, die sich auf jedes Element "zurückbeziehen".
"Sich zurückbeziehend" heißt lateinisch "reflexiv"; g) und i) sind reflexive Relationen. Wir hätten auch sagen können, dass diese Relationen für jedes Element reflexiv sind.

Auch auf den Abbildungen f) und h) gibt es Schleifen, jedoch nicht überall. Die hierauf dargestellten Relationen sind für gewisse Elemente reflexiv, für andere nicht. Derartige Relationen werden wir teilweise reflexiv nennen.

Die restlichen Abbildungen enthalten keine Schleifen. Das ist verständlich, denn unter den Zahlen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt es keine, die kleiner oder größer als sie selber wäre, deren Zweifaches ("die Summe aus sich selbst plus sich selbst") gleich 5 wäre oder die sich von sich selbst unterschiede. Derartige Relationen, die für kein einziges Element reflexiv sind, bezeichnen wir als irreflexive Relationen.

An manchen Stellen wird ein zusammengehöriges Punktepaar auch durch zwei Linien verbunden, wobei ein Pfeil in die eine, der andere in die entgegengesetzte Richtung weist. Wenn dies für alle Elementpaare (auch für solche "Paare", die aus gleichen Elementen bestehen) wahr ist, so nennen wir die Relation symmetrisch.
Wir sehen sofort, dass die Abbildungen e), f), g), j) und k) symmetrische Relationen darstellen, denn auf diesen Abbildungen existiert zu jedem Pfeil, der in die eine Richtung führt, ein anderer,

der in die entgegengesetzte Richtung weist. In der Abbildung j) bedeutet dies, dass, sofern eine Zahl nicht gleich einer anderen ist, diese andere auch nicht gleich der ersten ist.

Natürlich gilt auch folgendes: Wenn eine Zahl gleich einer anderen ist, so ist diese andere Zahl gleich der ersten. Warum gibt es dann aber auf Abbildung i) keine hin- und zurückweisenden Pfeile?
Allein der Einfachheit halber. Wir hätten die Schleifen nicht nur so , sondern auch so zeichnen können. Was von 1 nach 1 wahr ist, das ist "auch" (wenn wir die Zahlen vertauschen) von 1 nach 1 wahr. Auch Abbildung i) können wir also eine symmetrische Beziehung entnehmen.

Wir können sagen, dass e), f), g), i), j) und k) symmetrische Relationen sind, weil sie für jedes geordnete Paar von Elementen symmetrisch sind: für das Elementepaar (1, 1), für (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2) usw. - für jedes einzelne.
Das heißt nicht, dass alle diese Elementpaare durch Pfeile verbunden sind, die in diese und in jene Richtung weisen (das ist nur auf Abbildung k) der Fall), sondern es bedeutet folgendes: Falls ein Pfeil von 1 nach 1 führt, so führt auch ein Pfeil von 1 nach 1; falls ein Pfeil von 1 nach 2 führt, so führt auch ein Pfeil von 2 nach 1; falls ein Pfeil von 1 nach 3 führt, so führt auch ein Pfeil von 3 nach 1 usw.

Betrachten wir ein extremes Beispiel. Ist die Relation l) symmetrisch?
Ja, denn auch bei ihr gilt für jedes Elementpaar: Wenn beide Glieder durch einen Pfeil in einer Richtung verbunden sind, so sind sie auch durch einen Pfeil in der entgegengesetzten Richtung verbunden. Mit anderen Worten: Es gibt kein Elementpaar, für das dies nicht wahr wäre, da ja zwischen keinem einzigen Elementpaar ein Pfeil verläuft.
Wenn auf der Abbildung einer Relation zu keinem Pfeil ein in die entgegengesetzte Richtung weisender Pfeil existiert, so sagen wir, die Relation sei asymmetrisch.

Diese Bedingung ist natürlich bei der Relation l) erfüllt, auf deren Abbildung überhaupt kein Pfeil, insbesondere auch keiner mit den geforderten Eigenschaften, existiert. Die Relation l) ist demnach, so seltsam es klingen mag, sowohl symmetrisch als auch asymmetrisch. Asymmetrisch sind auch die Relationen a), b), c) und d), da in diesen Fällen zu keinem Pfeil ein in die entgegengesetzte Richtung weisender Pfeil existiert.

Ist eine Relation weder symmetrisch noch asymmetrisch - d. h., es gibt sowohl einen Pfeil, zu dem ein entgegengesetzter Pfeil existiert, als auch einen solchen, zu dem kein entgegengesetzter existiert -, so sagen wir, die Relation sei teilweise symmetrisch. Für derartige Relationen haben wir nur ein Beispiel gesehen, und zwar h). Hier steht die Schleife zugleich für einen Pfeil und dessen entgegengesetzten, zu dem Pfeil jedoch, der zu dem geordneten Paar (2, 4) gehört, existiert kein entgegengesetzter.

Wir haben bisher Eigenschaften von Elementen und geordneten Elementpaaren betrachtet. Sehen wir uns jetzt geordnete Tripel von Elementen an. Auf Abbildung a) können wir folgende Erscheinung beobachten: Wenn ein Pfeil von einem Punkt zu einem zweiten und von diesem ein weiterer Pfeil zu einem dritten Punkt führt, so existiert auch ein Pfeil, der vom ersten zum dritten Punkt führt.
Das heißt mit anderen Worten: Wenn eine Zahl aus der Menge $\{1,2,3,4\}$ kleiner ist als eine zweite und diese wiederum kleiner als eine dritte, so ist auch die erste Zahl kleiner als die dritte.
Die "Kleiner"-Relation überträgt sich also, sie "geht auf das aus der ersten und aus der dritten Zahl bestehende Paar über". Diese Eigenschaft der "Kleiner"-Relation bezeichnet man ebenfalls

mit einem lateinischen Wort; man sagt nämlich, dass sie transitiv ist.

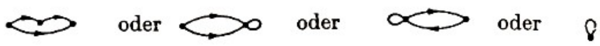
Transitiv deshalb, weil für jedes geordnete Tripel von Elementen folgendes gilt:
Wenn die Relation zwischen dem ersten und dem zweiten Element einerseits und dem zweiten und dem dritten Element andererseits besteht, so besteht sie auch zwischen dem ersten und dem dritten Element. Mit anderen Worten: Die Relation ist transitiv, wenn sie für jedes geordnete Tripel transitiv ist.

Ähnlich wie bei den vorigen Begriffen sprechen wir auch hier von intransitiven und teilweise transitiven Relationen. Eine Relation heißt intransitiv, wenn folgendes gilt: Wie immer wir ein geordnetes Tripel von Elementen auswählen mögen (unter den Elementen des Tripels können auch mehrmals die gleichen vorkommen), wir finden stets folgendes: Wenn ein Pfeil vom ersten zum zweiten und ein weiterer Pfeil vom zweiten zum dritten Element führt, so führt kein Pfeil vom ersten zum dritten Element.
(Wir können auch sagen: Es gibt kein Paar aufeinanderfolgender Pfeile, so dass ein weiterer Pfeil vom Ausgangspunkt des ersten Pfeils des Paares zum Endpunkt des zweiten Pfeils des Paares führte.)
Eine Relation heißt teilweise transitiv, wenn sie weder transitiv noch intransitiv ist.

Sehen wir uns unsere Abbildungen an: Welche Relation ist transitiv, welche teilweise transitiv und welche intransitiv?
Von Relation a) haben wir bereits festgestellt, dass sie transitiv ist. Relation b) ist es gleichfalls. Die "Größer"-Relation besitzt diese Eigenschaft ebenso wie die "Kleiner"-Relation. Auf Abbildung c) gibt es zu den Pfeilen (1, 2) und (2, 3) keinen Pfeil (1, 3). Aber auch zu den Pfeilen (2, 3) und (3,4) gibt es keinen Pfeil (2, 4).

Die Relation hatte zwei Möglichkeiten, transitiv oder zumindest teilweise transitiv zu werden. Beide wurden nicht genutzt. Sie ist intransitiv.

Auf Abbildung d) entdecken wir keine Spur von Transitivität, d. h. keine Figur der Art



Doch warten wir nur ab! Können wir denn ein Tripel angeben, bei dem vom ersten Element zum zweiten und vom zweiten zum dritten Pfeile führen, während vom ersten zum dritten kein Pfeil führt?
Nicht wahr, ein solches Tripel gibt es nicht. Die Relation ist also transitiv. Sie hat keine Möglichkeit der "Übertragung" ausgelassen, einfach deshalb nicht, weil sie keine Gelegenheit dazu hatte. Es existiert kein Paar aufeinanderfolgender Pfeile, bei dem nicht auch ein Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils des Paares zum Endpunkt des zweiten Pfeils des Paares führte.
Darüber hinaus ist diese Relation auch intransitiv, weil es kein Paar aufeinanderfolgender Pfeile gibt, bei dem ein weiterer Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils des Paares zum Endpunkt des zweiten Pfeils des Paares führt.

Können wir dies auch von e) sagen? Nein, hier liegen die Dinge anders. Hier gibt es aufeinanderfolgende Pfeile. (1, 4) und (4, 1) sind solche, ferner auch (3, 2) und (2, 3). Wir müssen sogar die aufeinanderfolgenden Pfeile (4, 1) und (1, 4) sowie (2, 3) und (3, 2) gesondert erwähnen.
In keinem der Fälle enthält die Abbildung einen Pfeil, der die Relation transitiv oder wenigstens teilweise transitiv machen würde: weder den Pfeil (1, 1) noch (2, 2), (4, 4) oder (3, 3). Die

Relation ist daher intransitiv.

Sie hatte vier Gelegenheiten zur Transitivität und hat keine davon genutzt.
Auch auf Abbildung f) bemerken wir ungenutzte Möglichkeiten: Bei 1 und 3 befinden sich keine Schleifen. Trotzdem können wir nicht sagen, die Relation sei intransitiv. Sehen wir uns nämlich das geordnete Tripel (2, 2, 2) an. Von seinem ersten Element führt ein Pfeil zum zweiten, vom zweiten zum dritten ebenfalls. Bis jetzt ist das nur eine Gelegenheit. Sehen wir nach, ob sie genutzt wird. Richtig, vom ersten Element zum dritten führt "auch" ein Pfeil. Damit ist die Relation also teilweise transitiv.

Wir können auch gleich eine allgemeine Feststellung treffen: Wo eine Schleife existiert, da ist die Relation nicht intransitiv. Natürlich auch nicht asymmetrisch, denn es gibt ja ein Beispiel für ein Paar von Pfeilen, die in die eine bzw. in die entgegengesetzte Richtung führen.

g) ist transitiv; das ist offensichtlich.
h) ebenfalls. Es gibt nur eine Gelegenheit, und die wird genutzt.
i) ist transitiv.
j) ist teilweise transitiv. (Es fehlen die Schleifen, daher ist sie nicht transitiv.)
k) ist transitiv.
l) ist sowohl transitiv als auch intransitiv.

Allen unseren Beispielen lag die Grundmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ zugrunde. Die Eigenschaften aber, die wir hier kennengelernt haben, sind nicht an diese Menge gebunden. Sie sind an überhaupt keine mathematischen Relationen gebunden. Die Beziehungen Mutter, Vorfahre, Bruder, Halbbruder, Ehegatte oder Freund von jemandem zu sein sind Relationen, die es lohnen, auch unter dem Aspekt der eben besprochenen Eigenschaften untersucht zu werden.

Aufgaben

1. Müllers haben vier Kinder. Auf unserer ersten Abbildung (Abb. 117) zeigt jedes von ihnen auf seine älteren Brüder. Auf unserer nächsten Zeichnung (Abb. 118) zeigt jedes Kind auf seine jüngeren Schwestern.

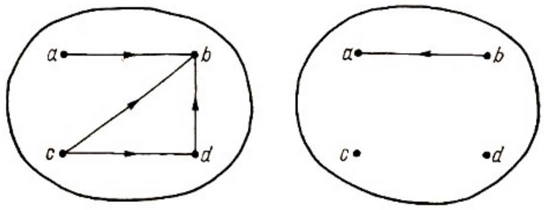


Abb. 117, 118

Stellen Sie die Fälle zeichnerisch dar, in denen jedes Kind
(1) auf seine jüngeren Brüder,
(2) auf seine älteren Schwestern zeigt!
Welche Eigenschaften besitzen diese Relationen?

2. Stellen Sie die folgenden auf der Grundmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ definierten Relationen dar!
a) $\square$ ist Teiler von $\triangle$,
b) $\square$ ist kein Teiler von $\triangle$,
e) $\square$ ist ein Vielfaches von $\triangle$,
d) $\square$ ist kein Vielfaches von $\triangle$,
e) $\square$ und $\triangle$ sind relativ prim (d. h., sie haben keinen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist),

f) $\square$ und $\triangle$ sind nicht relativ prim (d. h., sie haben einen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist),
g) $\square$ und $\triangle$ haben keinen gemeinsamen Teiler, der größer als 2 ist,
h) $\square$ und $\triangle$ haben einen gemeinsamen Teiler, der größer als 2 ist,
i) $\square$ und $\triangle$ haben keinen gemeinsamen Teiler, der größer als 4 ist,
j) $\square$ und $\triangle$ haben einen gemeinsamen Teiler, der größer als 4 ist.

3. Welche der obigen Relationen sind reflexiv, teilweise reflexiv oder irreflexiv?
Welche sind symmetrisch, teilweise symmetrisch oder asymmetrisch?
Welche Relationen sind transitiv, teilweise transitiv, intransitiv?
Es brauchen nicht unbedingt alle diese Eigenschaften vertreten zu sein!

*4. Wir nennen eine Relation schwach reflexiv, wenn sich (anschaulich formuliert) an beiden Enden eines jeden Pfeils eine Schleife befindet. An Punkten, von denen kein Pfeil ausgeht oder zu denen kein Pfeil führt, braucht sich also keine Schleife zu befinden, wenn die Relation den Bedingungen der schwachen Reflexivität genügt.[20]

Welche der Relationen der Aufgaben 2a) bis j) sind schwach reflexiv?
Welche Einteilung würde der Einteilung der Relationen in reflexive, teilweise reflexive und irreflexive entsprechen, wenn wir ihr den Begriff der schwachen Reflexivität zugrunde legten?

*5. Suchen Sie unter den symmetrischen und den transitiven Relationen solche, die diese Eigenschaften nur deshalb besitzen, weil es kein geordnetes Elementpaar (a,b) (bzw. - im Fall transitiver Relationen - keine geordneten Elementpaare (a, b) und (b, c)) gibt![21]

In Anlehnung an die Abbildungen formuliert: Es gibt auf der Abbildung keinen einzigen Pfeil bzw. kein einziges Paar aufeinanderfolgender Pfeile.[22]
Wenn uns Symmetrie und Transitivität nur in jenen Fällen interessieren, in denen sie nicht in derart "trivialer" Weise realisiert werden, können wir zwei neue Begriffe einführen, und zwar die Begriffe "streng symmetrisch" und "streng transitiv".
Versuchen Sie, sie zu formulieren! Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind streng symmetrisch, welche streng transitiv?

6. Stellen Sie folgende Relationen graphisch dar!
a) $\square \leq \triangle$ (auf der Grundmenge $\{1, 2, 3, 4\}$)
b) $\square \subset \triangle$ (auf der Grundmenge aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3\}$, d.h. auf der Menge folgender Mengen $\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1{,}2\}, \{1{,}3\}, \{2{,}3\}, \{1{,}2{,}3\}\}$.
Untersuchen Sie, welche Eigenschaften diese Relationen haben!

7. Welche Eigenschaften besitzt die Orthogonalitätsrelation
a) auf der Grundmenge aller Geraden der Ebene,
b) auf der Grundmenge aller Geraden des Raumes?

8. Welche Eigenschaften haben die folgenden Relationen auf der Grundmenge aller Menschen?

[20] Diese Eigenschaft ist nicht aus der Luft gegriffen. Viele bekannte Relationen sind schwach reflexiv, so z. B. die folgende: $\square$ und $\triangle$ besuchten dieselbe Schule, d. h., es gab eine Schule, die sowohl $\square$ als auch $\triangle$ besuchte. Als Grundmenge wählen wir z. B. alle Bewohner einer Stadt einschließlich der Neugeborenen. Diese Relation ist nicht reflexiv, da es Bewohner gibt, die keine Schule besuchten. Sie ist aber schwach reflexiv, da für diejenigen Bewohner $\square$ der Stadt, die eine Schule besuchten, gilt: $\square$ und $\square$ besuchten dieselbe Schule (z. B. Egon Schulze und Egon Schulze besuchten dieselbe Schule, falls Egon Schulze überhaupt eine Schule besuchte).
[21] Denken Sie daran, dass die Elemente eines Paares auch gleich sein können!
[22] Jede Schleife gilt hierbei als Pfeil und gleichzeitig als Paar aufeinanderfolgender Pfeile.

Und welche Eigenschaften besitzen sie auf der Grundmenge, die aus dem Leser und Hubert Haberich besteht?

(Wir wollen hierbei voraussetzen, dass der Leser mit Hubert Haberich weder verwandt noch ihm je begegnet ist, dass aber beide sich selbst schon einmal die Hand gegeben haben.)

a) □ ist Nachkomme von △,
b) □ ist Ehegatte von △,
c) □ ist Ehemann von △,
d) □ ist Mutter von △,
e) □ ist Bruder oder Schwester von △,
f) □ ist Halbbruder oder Halbschwester von △,
g) □ und △ haben denselben Vater und dieselbe Mutter,
h) □ und △ haben dieselbe Mutter,
i) □ hat △ schon einmal die Hand gegeben,
j) □ hat △ beim Tischtennis-Spielen besiegt.

9. Unter welchen Bedingungen kann eine Relation gleichzeitig
a) reflexiv und irreflexiv,
b) symmetrisch und asymmetrisch,
c) transitiv und intransitiv
sein? Geben Sie jeweils einige Beispiele an!

7 Formalisierung und Ableitung bei Funktionen mit mehreren Variablen

7.1 Übersetzungsübungen

Auf anschaulicher Stufe haben wir bereits erste Bekanntschaft mit Relationen, d.h. mit logischen Funktionen mehrerer Variablen, gemacht, wenngleich sich diese Bekanntschaft vorwiegend auf zweistellige Relationen beschränkte. Was aber die Formalisierung betrifft, so sind wir noch ziemlich weit zurück.
Wir erinnern uns noch gut, welche Schwierigkeiten es uns bereitete, einen so einfachen Satz wie Gert isst Zucker in die Sprache der Logik zu übersetzen. Wir wollen auch jetzt wieder beim ABC beginnen. Sehen wir uns zunächst einmal an, wie wir die folgenden Sätze formalisieren können:

(1) Jeder ist mit jedem verwandt.
(2) Jeder hat eine Mutter.
(3) Es gibt einen Menschen, der sich vor jedem fürchtet.
(4) Es gibt jemanden, der protegiert wird.

Natürlich könnte man jeden Satz auch mit einem einzigen großen Buchstaben formalisieren. Es kann der Fall eintreten, dass es nicht nötig ist, ihn weiter zu analysieren. Dann ist die folgende Formalisierung zweckmäßig:

(1a) V ($V =$ Jeder ist mit jedem verwandt),
(2a) M ($M =$ Jeder hat eine Mutter),
(3a) F ($F =$ Es gibt einen Menschen, der sich vor jedem fürchtet),
(4a) P ($P =$ Es gibt jemanden, der protegiert wird).

Wir hätten diese Sätze auch formalisieren können, indem wir einen einzigen Quantor vor eine logische Funktion einer Variablen setzen:

(1b) $\forall x V x$ ($V\Box = \Box$ ist mit jedem verwandt),
(2b) $\forall x M x$ ($M\Box = \Box$ hat eine Mutter),
(3b) $\exists x F x$ ($F\Box = \Box$ fürchtet sich vor jedem),
(4b) $\exists x P x$ ($P\Box = \Box$ wird protegiert).

Es wird nicht zu Verwechslungen führen, wenn wir zur Bezeichnung der logischen Funktionen dieselben großen Buchstaben benutzen, die wir soeben - in abweichendem Sinn - zur Kennzeichnung von Aussagen verwendet haben. Die logischen Funktionen sind durch die hinter ihnen stehenden freien Variablen (Quadrat, Dreieck oder ähnliche Zeichen), gebundenen Variablen (kleine Buchstaben, die dem Ende des Alphabets entnommen sind) oder Konstanten (kleine Buchstaben aus dem übrigen Teil des Alphabets) hinreichend von denjenigen großen Buchstaben unterschieden, die Aussagen bezeichnen.
Auf letztere folgt niemals direkt ein kleiner Buchstabe oder ein Quadrat, Dreieck bzw. ähnliches Zeichen. Mitunter lohnt es sich, auf dieser Stufe der Zerlegung haltzumachen.

Es kann aber auch vorkommen (erinnern wir uns an das Beispiel des Zuckeressens), dass wir bei unseren Schlüssen ohne weitere Zerlegung nicht weiterkommen. Sehen wir daher zu, wie wir die Analyse der Sätze weiter vorantreiben können. Dass $\Box$ mit $\triangle$ verwandt ist, können wir so darstellen:
$V\Box\triangle$; die Behauptung, dass $\Box$ mit jedem verwandt ist, notieren wir kurz mit $\forall y V\Box y$. Schließ-

lich können wir auch notieren, dass jeder mit jedem verwandt ist:

$$\forall y(\forall y V xy)$$

Es wird keine Missverständnisse verursachen, wenn wir in dieser Formel die Klammern weglassen: $\forall x \forall y V xy$. Werden (2b) bis (4b) in ähnlicher Weise zerlegt, so gelangen wir - wenn die Klammern wieder überall weggelassen werden - zu folgenden Formeln:

(1c) $\forall x \forall y V xy$ ($V\Box\triangle = \Box$ ist mit $\triangle$ verwandt),
(2c) $\forall x \exists y M xy$ ($M\Box\triangle = \Box$ ist Mutter von $\triangle$),
(3c) $\exists x \forall y F xy$ ($F\Box\triangle = \Box$ fürchte sich vor $\triangle$),
(4c) $\exists x \exists y P xy$ ($P\Box\triangle = \triangle$ protegiert $\triangle$).

Damit sind wir bis ins Innere der Sätze vorgedrungen; noch weiter können wir sie nicht mehr zerlegen.
Es wird auch hier keine Missverständnisse verursachen, wenn wir dieselben großen Buchstaben zur Bezeichnung von logischen Funktionen zweier Variablen benutzen, mit denen wir sonst auch Funktionen mit einer Variablen oder auch Aussagen bezeichnet haben.

Mitunter treten sogar in ein und derselben Formel die Aussage V, die logische Funktion einer Variablen $V\Box$ und die logische Funktion zweier Variablen $V\Box\triangle$ auf, manchmal auch in ganz anderem Sinn. Sie alle können auf keine Weise ineinander umgeformt werden, so dass die übereinstimmende Bezeichnungsweise zu keinen Missverständnissen führen kann.
Wie können wir die Formeln (1c) bis (4c) unabhängig von der Bedeutung der in ihnen vorkommenden logischen Funktionen deuten? Ergänzen wir in Gedanken wieder die Klammerzeichen und lesen wir:

(1c) Für alle x ist wahr: Für alle y ist wahr, dass $V xy$ gilt.
(2c) Für alle x ist wahr: Es gibt ein y, so dass $M xy$ gilt.
(3c) Es gibt ein x, für das wahr ist: Für alle y ist wahr, dass $F xy$ gilt.
(4c) Es gibt ein x, für das wahr ist: Es gibt ein y, für das $P xy$ gilt.

Diese Lesart wäre jedoch zu kompliziert. Die obigen Beispiele sowie frühere Beispiele zeigen, dass auch die folgende Formulierung den Sinn der Formeln gut wiedergibt:

(1c) Für alle x und alle y gilt $V xy$.
(2c) Zu jedem x existiert ein y, so dass $M xy$ gilt.
(3c) Es existiert ein x, so dass für alle y $F xy$ gilt.
(4c) Es gibt ein x und ein y, so dass $P xy$ gilt.

Diese Lesart der Formeln (1c) und (4c) lässt vermuten, dass $\forall x \forall y V xy$ äquivalent ist mit $\forall y \forall x V xy$ (d. h., ihre Wahrheitswerte stimmen überein), und $\exists x \exists y P xy$ äquivalent ist mit $\exists y \exists x P xy$.
Wir sind es nämlich gewöhnt, Wörter oder Sätze, die durch ein "und" verbunden sind, ohne Änderung des Sinns miteinander zu vertauschen, und wir empfinden es daher als natürlich, dass zwischen den Satzteilen "für alle x und alle y" sowie "für alle y und alle x" kein inhaltlicher Unterschied besteht. Auf diese Vermutung werden wir im Zusammenhang mit den Formeln (2e) und (3c) noch einmal zurückkommen.
Sehen wir uns nun weitere Beispielsätze an und zerlegen wir sie gleich so weit, wie es uns möglich ist:

(5) Niemand kann es allen recht machen.

In Rohübersetzung:

Es ist nicht wahr, dass ein x existiert, so dass, wer y auch sein mag, x es y recht machen kann.

Als Formel:

(5a) $\sim \exists x \forall y Rxy$

Hierbei bezieht sich das Negationszeichen natürlich auf den ganzen darauffolgenden Formelteil. Bei einer Klammersetzung wie z.B. $\sim (\exists x \forall y Rx)y$ würde das y beziehungslos am Ende der Formel stehen.
(5a) ist daher so zu verstehen:

$\sim [\exists x(\forall y Rxy)]$ oder noch genauer so: $\sim \{\exists x[\forall y(Rxy)]\}$

Durch das Weglassen der Klammerzeichen wird die Formel jedoch einfacher, ohne dass die Gefahr eines Missverständnisses entsteht. (In Bezug auf das Negationszeichen haben wir diese Vereinbarung zur Einsparung der Klammern auch früher schon benutzt, ohne dies besonders zu erwähnen.)

(6) Wenn nicht jeder einen Partner hat, so bleibt jemand übrig.

In Rohübersetzung:

Wenn es nicht wahr ist, dass zu jedem x ein y existiert, so dass y Partner von x ist, so existiert ein z, so dass z übrigbleibt.

Als Formel:

(6a) $\sim \forall x \exists y Pxy \to \exists z Lz$

(7) Es ist nicht wahr, dass, wenn jeder einen Partner hat, die Klasse auch in Dreierreihen marschieren kann.

Wir wollen das hintere Glied mit D bezeichnen. Die Formalisierung

$\sim \forall x \exists y Pxy \to D$

wäre jetzt allerdings falsch, denn wir wollen ja nicht nur das vordere Glied verneinen, sondern die ganze Implikation. In diesem Fall kann man also die Klammern hinter dem Negationszeichen und am Ende der Formel nicht weglassen:

(7a) $\sim (\forall x \exists y Pxy \to D)$.

(8) Derselbe Schuh passt nicht auf jeden Fuß.

Der Satz ist natürlich nicht so zu verstehen, dass nicht jeder Schuh auf jeden Fuß passte, sondern in dem Sinn, dass es keinen Schuh gibt, der auf jeden Fuß passt. Wir gehen von einer Rohübersetzung aus:

Es ist nicht wahr, dass es ein x gibt, so dass für jedes y gilt: Wenn x ein Schuh und y ein Fuß ist, so passt x auf y.

Hieraus erhalten wir die folgende Formel:

$\sim \exists x \forall y[(Sx \wedge Fy) \rightarrow Pxy]$; Grundmenge: alle konkreten Dinge

Diese formen wir nach Q1 um:

$\forall x \sim \forall y[(Sx \wedge Fy) \rightarrow Pxy]$

und dann weiter nach Q3:

$\forall x \exists y \sim [(Sx \wedge Fy) \rightarrow Pxy]$

Eine Implikation kann man dadurch verneinen, dass man das vordere Glied unverändert lässt, das hintere Glied aber verneint (vgl. die Definition der Implikation und die doppelte Verneinung):

$\forall x \exists y[(Sx \wedge Fy) \wedge \sim Pxy]$

Hieraus folgt nach Q 18:

$\forall x[\exists y(Sx \wedge Fy) \wedge \exists y \sim Pxy]$

dies aber lässt sich Q 13 zufolge auch so schreiben:

$\forall x \exists y(Sx \wedge Fy) \wedge \forall x \exists y \sim Pxy$

Das erste Glied der Konjunktion besagt: Was immer x sein mag, es gibt ein y, so dass x ein Schuh und y ein Fuß ist, was jedoch auch solche seltsamen Behauptungen enthält wie: Was immer x sein mag, x ist ein Schuh, d. h. jedes konkrete Ding auf der Welt ist ein Schuh.
Der Satz, den wir formalisiert haben, hat eine solche Feststellung allerdings nicht enthalten. Die letzte Formel folgt aber aus der ersten.
Wo haben wir einen Fehler gemacht?

Bei der Rohübersetzung. Das Wesen des Fehlers besteht darin, dass wir bei der Formalisierung einer Aussage der Art "Es gibt ein ..., so dass ..." an Stelle einer Konjunktion eine Implikation verwendet haben. Diesmal wurde der Fehler dadurch verschleiert, dass wir gleichzeitig auch eine Aussage der Form "Für alle ..." formalisiert haben; hierbei aber ist die Implikation am Platz. Wir können den Fehler vermeiden, indem wir die beiden Quantor-Formalisierungen voneinander trennen.

Wir werden also vorsichtig sein und von der folgenden Rohübersetzung ausgehen:

Es ist nicht wahr, dass es ein x gibt, so dass x ein Schuh ist und x auf jeden Fuß passt,

was wir halb formalisiert so schreiben können:

$\sim \exists x[Sx \wedge (x$ passt auf jeden Fuß$)]$

Jetzt formalisieren wir auch den Satz innerhalb der runden Klammern:

$\forall y(Fy \rightarrow Pxy)$

Dies müssen wir nur noch an seinem ursprünglichen Platz einfügen, dann ist die Formalisierung einwandfrei:

(8a) $\sim \exists x[Sx \wedge \forall y(Fy \rightarrow Pxy)]$ Grundmenge: alle konkreten Dinge

Wenn wir dies nach und nach umformen, kommen wir nicht wieder zu einem so seltsamen Ergebnis wie vorhin:

(8b)	$\forall x \sim [Sx \wedge \forall y(Fy \rightarrow Pxy)]$	Q1
(8c)	$\forall x[\sim Sx \vee \forall y(Fy \rightarrow Pxy)]$	de Morgan
(8d)	$\forall x[Sx \rightarrow \sim \forall y(Fy \rightarrow Pxy)]$	Def. d. Impl.
(8e)	$\forall x[Sx \rightarrow \exists y \sim (Fy \rightarrow Pxy)]$	Q3
(8f)	$\forall x[Sx \rightarrow \exists y(Fy \wedge \sim Pxy)]$	Def. d. Impl., doppelte Verneinung

Hieraus lesen wir ab: Für alle x ist wahr: Wenn x ein Schuh ist, so existiert ein y, so dass y ein Fuß ist und x nicht auf y passt.
Freier formuliert: Von welchem Schuh auch die Rede sein mag, stets gibt es einen Fuß, auf den dieser Schuh nicht passt. Das bringt genau dasselbe zum Ausdruck wie der ursprüngliche Satz: Derselbe Schuh passt nicht auf jeden Fuß.

Wir haben schon die Erfahrung gemacht, dass eine Einengung der Grundmenge zu einfacheren Formeln führen kann. Wie aber könnte jetzt eine engere Grundmenge aussehen?
Auch wenn wir die Grundmenge noch so sehr einengen, kommen wir zu keiner einfacheren Formel. Wir können allerdings für x und y verschiedene Grundmengen festlegen: Die Grundmenge für x sei die Menge aller Schuhe, die Grundmenge für y sei die Menge aller Füße. In diesem Fall benötigen wir weder die logische Funktion Sx noch Fx, so dass wir unseren Beispielsatz (8) durch die folgende einfache Formel wiedergeben können:

(8g) $\sim \exists x \forall y Pxy$, wobei x in der Menge aller Schuhe, y in der Menge aller Füße variiert.

(9) Wenn jemand Birgit küsst, so freut sich Birgit, wenn aber jemand Sigrid küsst, bekommt er von Sigrid eine Backpfeife.

Versuchen wir es so:
Wenn es ein x gibt, so dass x Birgit küsst, so freut sich Birgit, und wenn es ein x gibt, so dass x Sigrid küsst, dann bekommt x von Sigrid eine Backpfeife.
Formalisiert:

$(\exists x Kxb \rightarrow Fb) \wedge (\exists x Kxs \rightarrow Bxs)$

Das erste Konjunktionsglied ist in Ordnung. Im zweiten Konjunktionsglied bezieht sich der Quantor jedoch nicht mehr auf das x im Hinterglied der Implikation. Unter Beibehaltung der gewohnten Bezeichnungsweise hätten wir an Stelle des x hier auch ein Quadratzeichen benutzen müssen, damit sofort ins Auge fällt, dass unsere Formel keine Aussage wiedergibt (wie wir es wollten), sondern eine Aussageform.

Vielleicht können wir dann im zweiten Konjunktionsglied den Quantor vor das Klammerzeichen ziehen, damit er sich auch auf das hintere Glied der Implikation bezieht?

$(\exists xKxb \to Fb) \land \exists x(Kxs \to Bxs)$

Das ist wiederum nicht richtig: Das zweite Konjunktionsglied wird schon dann wahr, wenn auch nur ein einziger Mensch existiert, der Sigrid nicht küsst.
Dann gibt es nämlich einen solchen x-Wert, für den das vordere Glied der nachfolgenden Implikation falsch und die Implikation selbst damit wahr ist. Und wenn wir schreiben würden:

$(\exists xKxb \to Fb) \land \exists x(Kxs \land Bxs)$

Das bedeutet aber: Wenn jemand Birgit küsst, so freut sich Birgit, es gibt aber jemanden, der Sigrid küsst und dem Sigrid eine Backpfeife gibt. Auch das stimmt nicht mit unserer ursprünglichen Behauptung überein.
Diese brachte, was Sigrid angeht, einerseits mehr, andererseits weniger zum Ausdruck. Weniger insofern, als wir nicht behauptet haben, dass jemand die Kühnheit besessen hat, Sigrid zu küssen, mehr aber insofern, als nach unserer Behauptung (9) in dem Falle, dass mehrere Personen Sigrid küssen, alle diejenigen, die es tun, eine Backpfeife bekommen. Ach so - jetzt haben wir es!

Von allen ist die Rede, das heißt, dieses "wenn jemand" im zweiten Teil von Satz (9) darf nicht durch den Existenzquantor wiedergegeben werden (wie in der ersten Hälfte des Satzes), sondern durch den Allquantor. Die richtige Formalisierung sieht also so aus:

(9a) $(\exists xKxb \to Fb) \land \forall x(Kxs \to Bxs)$

(10) Jeder ist seines Glückes Schmied.

Bezeichnung:

$S\Box\triangle = \Box$ ist der Schmied des Glücks von $\triangle$.

Rohübersetzung von (10): Für alle x ist wahr: x ist der Schmied des Glücks von x.
Mit der obigen Bezeichnung können wir dafür schreiben:

(10a) $\forall xSxx$ Grundmenge: die Menschen

Wie wir sehen, braucht man nicht unbedingt zwei Quantoren vor eine logische Funktion von zwei Variablen zu setzen, um aus ihr eine Aussage zu erhalten. Es genügt auch ein Quantor, wenn die Stellen beider Variablen mit demselben Zeichen ausgefüllt sind.

(11) 3 ist ein Teiler von 51.

Dies können wir nicht durch T 351 formalisieren, da die Zahlen 3 und 51 dabei zu 351 zusammenrücken würden. Wohl aber können wir schreiben:

(11a) $T(3{,}51)$.

Klammern werden bei der Formalisierung auch dann oft benutzt, wenn die Elemente der Grundmenge keine Zahlen sind. Eine andere zweckmäßige Schreibweise ist diese:

(11b) $3T51$

Die meisten aus der Mathematik bekannten Relationszeichen benutzen wir in dieser Weise, nur handelt es sich bei diesen Relationszeichen meistens nicht um Buchstaben, sondern um besondere Symbole wie $=$, $>$, $<$, $\|$, $\perp$, $\sim$ - usw.

Auch für die Relation, die wir eben mit T bezeichnet haben, gibt es ein besonderes Symbol, und zwar einen senkrechten Strich |. So kann man zum Beispiel die Tatsache, dass 3 ein Teiler von 51 ist, so wiedergeben: $3 \mid 51$.
Wir können diese Relation allerdings auch durch das Relationszeichen "$=$" und das Operationszeichen "$\cdot$" ausdrücken. Dass 3 ein Teiler von 51 ist, bedeutet: Es gibt eine natürliche Zahl x, so dass $3 \cdot x = 51$ ist. Als Formel:

(11c) $\exists x(3 \cdot x = 51)$; $x \in \mathbb{N}$

(Mit $\mathbb{N}$ haben wir die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.) Wir hätten natürlich auch die Gleichheitsrelation mit einem Buchstaben bezeichnen und folgendes schreiben können:

(11d) $\exists x G(3 \cdot x, 51)$; $x \in \mathbb{N}$

(12) 61 ist eine Primzahl.

Dieser Satz besagt: 61 kann nur in der Weise in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen zerlegt werden, dass einer der Faktoren gleich 61 selbst und 61 verschieden von 1 ist. (Letzteres muss man hinzufügen, da auch 1 nur derart zerlegt werden kann, dass jeder Faktor gleich 1 ist. Trotzdem ist 1 keine Primzahl.)
In Rohübersetzung:

Für alle x und alle y ist wahr: Wenn $x \cdot y$ gleich 61 ist, so ist $x = 61$ oder $y = 61$. Außerdem ist 61 verschieden von 1.

Als Formel:

(12a) $\forall x \forall y[xy = 61 \rightarrow (x = 61 \vee y = 61)] \wedge \sim (61 = 1), \quad x,y \in \mathbb{N}$

(13) Es gibt eine gerade Primzahl.

In Rohübersetzung: Es gibt eine Zahl z, so dass 2 ein Teiler von z und 2 eine Primzahl ist.
Als Formel:

(13A) $\exists Z\{\exists u(2 \cdot u = z) \wedge \forall x \forall y[xy = z \rightarrow (x = z \vee y = z)] \wedge \sim (z = 1)\}, \quad u,x,y,z \in \mathbb{N}$

Jede Stenotypistin weiß, dass es einfacher ist, ein Stenogramm aufzunehmen als ein Stenogramm zu lesen. Bei der Niederschrift von Sätzen mit Hilfe von logischen Symbolen gilt meistens das gleiche. Mag ein Logiker im Lesen von Formeln auch noch so geübt sein, immer wird er den Sinn der Zeichenreihe

(13) Es gibt eine gerade Primzahl.

schneller erfassen als den der Zeichenreihe (13a). (Wenn er die deutsche Sprache beherrscht.) Die logischen Symbole sind allerdings international (wenn auch nicht ganz einheitlich). Ihr Hauptvorteil besteht aber nicht darin!

Möge doch einmal jemand versuchen, für Sätze einer beliebigen lebenden Sprache (als reine Zeichenreihe) in Analogie zu unseren Schlussregeln formale Kriterien anzugeben, die die Richtigkeit der in der lebenden Sprache niedergeschriebenen Schlüsse sichern! Sehen wir uns auf alle Fälle noch einige Beispiele für die Rückübersetzung, das heißt für das Lesen von Formeln der mathematischen Logik an.

(14) $\forall x \exists y(x < y) \wedge \sim \exists y \forall x(x < y), \quad x,y \in \mathbb{N}$

In Rohübersetzung:

Zu jeder Zahl x existiert eine Zahl y, so dass x kleiner als y ist, und es gibt keine Zahl y, so dass, wie immer x beschaffen sein mag, x kleiner ist als y.

Wenn wir eine bessere Übersetzung wünschen, so können wir statt x ist kleiner als y sagen y ist größer als x. Das Bindewort "und" ersetzen wir durch "aber", und natürlich lassen wir die Variablen x und y aus dem Text heraus. So erhalten wir als Endergebnis:

In der Menge der natürlichen Zahlen gibt es zu jeder Zahl eine größere, es gibt aber keine Zahl, die größer als alle anderen ist.

(15) $\forall t \exists x Btx \wedge \exists t \forall x Btx \wedge \sim \forall t \forall x Btx$
Grundmenge für t: Menge aller Zeitpunkte; Grundmenge für x: Menge aller Menschen

Dieser Satz stammt von Abraham Lincoln (ehemaliger amerikanischer Präsident, Kämpfer gegen die Sklaverei). Um ihn verstehen zu können, müssen wir natürlich die Bedeutung von B kennen:

$B\square\triangle =$ Man kann $\triangle$ zum Zeitpunkt $\square$ belügen.

Demzufolge ergibt sich die Rohübersetzung:

Zu jedem Zeitpunkt t gibt es einen Menschen x, so dass man x zum Zeitpunkt t belügen kann, und es gibt einen Zeitpunkt t, so dass man, wer immer x sein mag, x zum Zeitpunkt t belügen kann, es ist aber nicht wahr, dass man zu jedem Zeitpunkt t ein jedes, wie immer geartetes x belügen kann.
Freier, aber den Worten Lincolns getreuer: Man kann einige Menschen dauernd belügen, man kann alle Menschen eine Zeitlang belügen, aber man kann nicht alle Menschen dauernd belügen.

Sehen wir uns zum Abschluss noch einige Beispiele dafür an, wie man mit Hilfe logischer Formeln die Eigenschaften von Relationen beschreiben kann.

(16) Wir sagten, die Relation $R\square\triangle$ sei reflexiv, wenn sie zwischen jedem beliebigen Element der Grundmenge und diesem Element selbst besteht, d.h., wenn Rxx für alle x gilt: $\forall x Rxx$. Diese Formel gibt wieder, was wir anschaulich mit den Worten beschrieben haben, dass überall eine Schleife vorhanden ist.

(17) Bei der schwachen Reflexivität forderten wir nicht, dass auch bei den isolierten Punkten Schleifen vorhanden sind, sondern nur bei denjenigen Punkten, die Endpunkte eines Pfeiles sind. Mit anderen Worten:
Welche Elemente x und y auch bezeichnen mögen, wenn die Relation für das geordnete Paar (x, y) erfüllt ist, so muss sie auch für (x, x) und (y, y) gelten: $\forall x \forall y[Rxy \rightarrow (Rxx \wedge Ryy)]$

(18) Unter Symmetrie haben wir folgendes verstanden: Zu jedem Pfeil, der von einem Punkt zu einem anderen führt, existiert ein Pfeil in entgegengesetzter Richtung. Das heißt, für zwei beliebige (von einander verschiedene oder einander gleiche) Elemente der Grundmenge gilt: Wenn Rxy erfüllt ist, so ist auch Ryx erfüllt: $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$.

(19) Transitivität bedeutet - anschaulich gesprochen - folgendes: Wenn ein Pfeil von einem Punkt zu einem zweiten und ein weiterer Pfeil von diesem zu einem dritten führt, so existiert auch ein Pfeil, der vom ersten Punkt zum dritten führt. (Die genannten Punkte dürfen teilweise oder alle drei zusammenfallen.)
Wir fordern daher für drei beliebige Elemente x, y, z der Grundmenge: Wenn Rxy und Ryz erfüllt sind, so ist auch Rxz erfüllt: $\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow RxZ]$.

7.2 Ausblick auf den erweiterten Funktionenkalkül

Reflexivität, Symmetrie und ähnliches sind Eigenschaften von Relationen (d.h. von logischen Funktionen mehrerer Variablen). Es lohnt sich, einen Moment beim Wort "Eigenschaft" zu verweilen.

Unter einer Eigenschaft haben wir bisher eine logische Funktion einer Variablen verstanden, ebenso wie unter einer Relation eine logische Funktion von mehreren Variablen. Erinnern wir uns an einige logische Funktionen, z.B. "... ist blau", "□ frisst Heu", "△ ist eine gerade Zahl".

Wenn die Formeln (16) bis (19) in einem ähnlichen Sinne je eine Eigenschaft ausdrücken, so muss in ihnen etwas enthalten sein, was den Leerstellen (Pünktchen, Quadrat, Dreieck) in unseren letzten Beispielen entspricht. Von wessen Eigenschaften ist denn die Rede?
Von den Eigenschaften der Relationen. Es liegt auf der Hand, dass es das nicht näher bestimmte Relationszeichen R ist, das den Pünktchen, dem Quadrat und dem Dreieck in unseren Formeln entspricht.

Wenn wir für R ein bestimmtes Relationszeichen einsetzen (zum Beispiel den Buchstaben P, wobei xPy bedeutet, dass x zu y parallel ist) und auch die Grundmenge angeben, so wird die betreffende Formel entweder wahr oder falsch, je nachdem, ob die erwähnte Relation diese Eigenschaft besitzt oder nicht.
Solange wir aber für R kein bestimmtes Relationszeichen einsetzen, so lange stellen diese Formeln keine Aussagen dar und haben weder den Wahrheitswert W noch den Wert F; so lange sind es Aussageformen im Sinne von offenen Formeln und keine Aussagen, obwohl in ihnen anscheinend nur gebundene Variable (x, y, z) vorkommen.

Aber das ist eben nur der Schein. Wenn auch nicht durch die kleinen Buchstaben, so bleiben die Formeln doch durch die großen Buchstaben offen.
Durch Substitution kann man, wie schon erwähnt, aus ihnen Aussagen erhalten: z. B. durch Einsetzen von P für R.
Können wir nicht auch dadurch aus ihnen Aussagen erhalten, dass wir die in ihnen auftretenden Relationsvariablen (Großbuchstaben) durch Quantoren binden? Wir denken etwa an folgendes:

Es gibt eine reflexive Relation, d.h.
Es gibt eine Relation R, für die gilt: $\forall x Rxx$.

Das ist nun eine Aussage und keine offene Formel[23] mehr. Selbstverständlich hat sie den Wahrheitswert W. Bisher ist sie aber nur zur Hälfte formalisiert. Wir wollen sie vollständig formalisieren:

$\exists R \forall x Rxx$

Sollten wir nun auch unterschiedliche Symbole zur Unterscheidung der freien von den durch Quantoren gebundenen Relationszeichen einführen? Das werden wir nicht tun.
Wir wollen in das Gebiet der mathematischen Logik, in dem Quantoren auch auf die Symbole logischer Funktionen angewendet werden, nicht tiefer eindringen. Dieses Gebiet der mathematischen Logik heißt erweiterter Funktionenkalkül. Wir aber bleiben beim Funktionenkalkül im engeren Sinn (mit einer anderen Bezeichnung: Funktionenkalkül erster Stufe) und werden auch im folgenden stets diesen meinen, wenn wir kurz vom Funktionenkalkül sprechen.
In ihm treten Quantoren nur in Verbindung mit solchen Variablen auf, deren mögliche Werte

[23] In diesem Sinne bezeichnet man Aussagen im erweiterten Funktionenkalkül auch als abgeschlossene Formeln im Gegensatz zu den offenen Formeln.

die Elemente der Grundmenge sind.

Wenn wir die Grenzen des Funktionenkalküls erster Stufe nicht überschreiten, können wir den gesamten formalen Apparat, den wir für Ableitungen bei Funktionen einer Variablen entwickelt haben, auch weiterhin bei Funktionen von beliebig vielen Variablen verwenden. Im vorigen Kapitel haben wir schon als Kostprobe eine Ableitung durchgeführt, in der eine Funktion mit mehreren Variablen auftrat. Jetzt werden wir unsere Fähigkeiten im Ableiten an Hand einiger Aufgaben aus dem Bereich der logischen Funktionen mehrerer Variablen weiterentwickeln.

7.3 Ableitungsübungen

(1) Als erstes Beispiel beweisen wir durch formale Ableitung, dass der folgende Schluss (und mit ihm jeder Schluss der gleichen Art) richtig ist:

$$\frac{\text{Es gibt einen Menschen, der jedem schadet.}}{\text{Es gibt einen Menschen, der sich selbst schadet.}}$$

Überlegen wir zunächst einmal, ob dieser Schluss richtig ist.
In der Umgangssprache wird das Wort "jeder" oft in dem Sinn "jeder andere" benutzt. (Z. B. bedeutet "Jeder gibt jedem die Hand" gewöhnlich nicht, dass jemand sich selbst die Hand gibt.) So verstanden ist der Schluss nicht richtig.
Wenn wir dieses "jeder" aber ganz wörtlich nehmen, so ist dieser Schluss richtig.

Beginnen wir jetzt mit der Ableitung. Die Grundmenge sei die Menge aller Menschen. Wie üblich stellen wir die zu beweisende Formel der Ableitung voran und schreiben darunter die Prämisse:

0	$\exists x Sxx$		
1	$\exists x \forall y Sxy$	P	
2	$\forall y S\square y$	1	$-\exists$

Anders hätten wir auch gar nicht beginnen können. Wir fahren nun mit einer $\exists$-Elimination fort. Dabei haben wir das Recht, für y dasselbe Zeichen wie für x einzusetzen (was für alle Elemente wahr ist, das gilt auch für $\square$), und wir werden von diesem Recht auch Gebrauch machen, denn nur so können wir auf reguläre Weise zu 0 gelangen:

3	$S\square\square$	2	$-\forall$
4	$\exists x Sxx$	3	$+\exists$

(Aus $S\square\triangle$ hätten wir nicht auf $\exists x Sxx$ schließen können, weil in Sxx an Stelle des x, wo immer es auftritt, ein und dasselbe Zeichen (Quadrat oder Dreieck) eingesetzt werden muss.)

(2) Wir wollen nun unsere Vermutung, dass man gleiche Quantoren miteinander vertauschen kann, durch eine formale Ableitung bestätigen:

0	$\forall y \forall x Gxy$		
1	$\forall x \forall y Gxy$	P	
2	$\forall y G\square y$	1	$-\forall$
3	$G\square\triangle$	2	$-\forall$
4	$\forall x Gx\triangle$	3	$+\forall$

Das ist ein heikler Schritt; wir wollen uns überlegen, ob er berechtigt war:
Die Substitution ist einwandfrei: In $G\Box\triangle$ tritt $\Box$ nur an einer Stelle auf, ebenfalls x in $Gx\triangle$. Es wurde also bei der Substitution für $\Box$ "überall" ein x eingesetzt, und wenn wir diesen Schritt in umgekehrter Richtung betrachten, so sehen wir, dass auch für x "überall"? ein $\Box$ eingesetzt worden ist.
In 3 tritt keine freie Variable auf, die aus einer $\exists$-Elimination stammt, denn eine solche haben wir gar nicht ausgeführt. 3 hängt auch von keiner Prämisse ab, die eine freie Variable enthält, denn die gesamte Ableitung enthält keine Prämisse, in der ein solches Zeichen auftritt.

5 $\quad \forall y \forall x Gxy \quad$ 4 $\quad +\forall$

Auf Grund unserer obigen Überlegungen ist dieser Schritt einwandfrei. 5 stimmt mit 0 überein, die Ableitung ist damit gelungen.
An Stelle von 3 hätten wir auch schreiben können:

3' $\quad G\Box\Box \quad$ 2 $\quad -\forall$

Hieraus können wir aber nicht so weiterschließen:

?4' $\quad \forall x Gx\Box \quad$ 3' $\quad +\forall$?

weil dabei die Substitution in einer Richtung (und zwar abwärts) nicht den Regeln entspricht. Dagegen könnte man aus 3' so weiterschließen:

4' $\quad \forall x Gxx \quad$ 3' $\quad +\forall$

Kehren wir aber zur Endformel 5 zurück und vergleichen sie mit Ausgangsformel 1. In einer Richtung haben wir die Allquantoren vertauscht.
Mit einer ähnlichen Ableitung könnten wir aus $\forall y \forall x Gxy$ auf $\forall x \forall y Gxy$ schließen. Wir sind damit zu einer wichtigen neuen Identität gelangt:

$$Q19: \qquad \forall x \forall y Gxy \equiv \forall y \forall x Gxy$$

Sehen wir uns nun die Vertauschung der Existenzquantoren an:

0	$\exists y \exists x Gxy$		
1	$\exists x \exists y Gxy$	P	
2	$\exists y G\Box y$	2	$-\exists$
3	$G\Box\triangle$	3	$-\exists$

Hier hätten wir aber - abweichend von der vorigen Ableitung - kein Recht gehabt, für y ebenfalls ein Quadrat einzusetzen. Die Einschränkung, die wir in Verbindung mit der $\exists$-Elimination gemacht haben, verbietet dies gerade. Im weiteren brauchen wir auf keine Einschränkungen mehr zu achten:

4	$\exists x Gx\triangle$	3	$+\exists$
5	$\exists y \exists x Gxy$	4	$+\exists$

Analog wie oben bei den Allquantoren könnten wir auch hier von der Endformel ebensogut auf die Anfangsformel schließen. Damit erhalten wir die Identität

$$Q20: \exists x \exists y Gxy \equiv \exists y \exists x Gxy$$

Vertauschen wir jetzt verschiedene Quantoren:

0	$\forall\exists xGxy$		
1	$\exists x\forall yGxy$	P	
2	$\forall yG\square y$	2	$-\exists$
3	$G\square\triangle$	3	$-\forall$
4	$\exists xGx\triangle$	3	$+\exists$
5	$\forall y\exists xGxy$	4	$+\forall$

Damit haben wir auch die letzte Hürde genommen. Die Substitution ist in Ordnung, in 4 tritt keine aus einer $\exists$-Elimination stammende freie Variable mehr auf (wohl aber noch in 3), und die Ableitung enthält auch keine Prämisse, in der eine freie Variable vorkommt.

Es lohnt sich wieder, einmal nachzusehen, wohin wir gelangt wären, wenn wir - völlig zu Recht - an Stelle von 3 dies geschrieben hätten:

3' $G\square\square$ 2 $-\forall$

Durch eine $\exists$-Einführung hätten wir zum Beispiel hierzu gelangen können:

4' $\exists xGxx$ 3' $+\exists$

Ein Beispiel: Wenn es jemanden gibt, der sich vor jedem fürchtet, so gibt es jemanden, der sich vor sich selbst fürchtet.
Jetzt aber ist auch diese Fortsetzung einwandfrei:

4" $\exists xGx\square$ 3' $+\exists$

Die Substitution entspricht zwar nur in einer Richtung den Regeln, d.h. für x wurde überall dasselbe Zeichen (ein Quadrat) eingesetzt, das genügt auch jetzt.
(Lediglich bei der $\forall$-Einführung fordern wir, dass für ein und dieselbe freie Variable überall ein und dieselbe gebundene Variable eingesetzt wird. In den anderen Fällen genügt es, wenn für die gebundene Variable überall ein und dieselbe freie Variable eingesetzt wird.)
Wir sind jedoch nicht berechtigt, von 4" auf $\forall y\exists xGxy$ zu schließen, da in 4" ein Quadrat vorkommt, das aus einer $\exists$-Elimination stammt (siehe Formel 2). Wir haben bereits gesehen, dass aus $\exists x\forall yGxy$ die Formel $\forall y\exists xgxy$ folgt. Hieran ändert sich natürlich auch dann nichts, wenn wir die Ableitung ungeschickt durchführen und deshalb nicht zum Ziel kommen.

Ein Beispielsatz:

Daraus, dass es einen Schlüssel gibt, der jedes Schloss aufschließt, folgt, dass es zu jedem Schloss einen Schlüssel gibt, der dieses aufschließt.

Der umgekehrte Schluss ist natürlich nicht richtig. Es gibt also keine Identität der folgenden Art "$\forall x\exists yGxy \equiv \exists x\forall yGxy$". Gültig ist hingegen die folgende Identität (wir haben sie mit der vorigen Ableitung ja gerade bewiesen):

Q 21: $\exists x\forall yGxy \rightarrow \forall y\exists xGxy \equiv W$

Das können wir auch zum Ausdruck bringen, indem wir feststellen, dass das folgende Schlussschema richtig ist:

$$\frac{\exists x\forall yGxy}{\forall y\exists xGxy}$$

Es ist richtig, aber nicht umkehrbar, das heißt, wir können nicht in umgekehrter Richtung aus der Konklusion auf die Prämisse schließen.

Als nützliche Übung wollen wir die Umkehrung trotzdem abzuleiten versuchen, nur um zu sehen, an welcher Stelle wir nicht weiterkommen:

0	$\exists x \forall y Gxy$		
1	$\forall y \exists x Gxy$	P	
2	$\exists x Gx\triangle$	1	$-\forall$
3	$G\square\triangle$	2	$-\exists$

Um zu 0 zu gelangen, müssen wir eine $\forall$-Einführung ausführen. Diese aber können wir weder auf das $\square$ gesondert wie in

?4 $\forall x Gx\triangle$ 3 $+\forall$?

noch auf beide Zeichen gleichzeitig wie in

?4' $\forall x Gxx$ 3 $+\forall$?

anwenden.
Beide Fortsetzungen verbieten sich deshalb, weil in 3 eine freie Variable vorkommt, die aus einer Prämisse stammt.

(3) Jetzt beginnen wir mit einem ernsteren Unternehmen. Wir haben gesehen, dass symmetrische und transitive Relationen nicht unbedingt reflexiv sind. Ob aber wenigstens die schwache Reflexivität aus der Symmetrie und der Transitivität folgt?
Die erwartete Konklusion und die Prämissen ergeben sich aus den Formeln (17), (18) und (19) als

0	$\forall x \forall y[Rxy \to (Rxx \wedge Ryy)]$	
1	$\forall x \forall y(Rxy \to Ryx)$	P
2	$\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \to Rxz]$	P

Natürlich werden wir mit einer $\forall$-Elimination beginnen und den Beweis mit einer $\forall$-Einführung beschließen. In dem dazwischen liegenden Teil müssen wir aus Formeln der $R\square\triangle \to R\triangle\square$ und $(R\square\triangle \wedge R\triangle\nabla) \to R\square\nabla$ zu einer Formel der Gestalt $R\square\triangle \to R\square\square \wedge R\triangle\triangle)$ gelangen. (Es kann sein, dass an Stelle der Quadrat-und Dreieckzeichen andere ähnliche stehen werden.)

Es wird sich als nützlich erweisen, das vordere Glied der letzten Formel als zeitweilige Prämisse zu benutzen und aus ihm und den beiden vorangehenden Formeln die Formeln $R\square\square$ und $R\triangle\triangle$ abzuleiten.
Aus den letzten beiden Formeln erhalten wir durch Kopplung $R\square\square \wedge R\triangle\triangle$, woraus wir durch Anwendung der Pfeiloperation zu $R\square\triangle \to (R\square\square \wedge R\triangle\triangle)$ gelangen.

Die Ableitung können wir dadurch verkürzen, dass wir zu Beginn die $\forall$-Quantoren gleichzeitig eliminieren und nicht einzeln nacheinander. Da es sich hierbei um starke Quantorschlüsse handelt, können ohnehin keine Schwierigkeiten auftreten.
Auch die freien Variablen können nach Belieben gewählt werden. Wir setzen die Ableitung also wie folgt fort:

3	$R\square\triangle \to R\triangle\square$	1	$-\forall - \forall$
4	$R\square\triangle$	P	
5	$R\triangle\square$	3,4	Abtrenng.

Wir haben uns die Ableitung von $R\square\square$ und $R\triangle\triangle$ als Zwischenziel gestellt. Auf Grund von 4 und 5 wird dies mit Hilfe von 2 auch gelingen, wenn wir bei der $\forall$-Elimination solche freien Variablen benutzen, dass 4 und 5 in dem vorderen Glied der aus 2 gewonnenen Formel vorkommen:

│	6	$(R\Box\triangle \wedge R\triangle\Box) \to R\Box\Box$	2	$-\forall - \forall - \forall$
│	7	$R\Box\triangle \wedge R\triangle\Box$	4,5	Kopplg.
│	8	$R\Box\Box$	6,7	Abtrenng.

Die Ableitung von $R\triangle\triangle$ verläuft ähnlich:

│	9	$(R\triangle\Box \wedge R\Box\triangle) \to R\triangle\triangle$	2	$-\forall - \forall - \forall$
│	10	$R\triangle\Box \wedge R\Box\triangle$	7	Vertauschg.
│	11	$R\triangle\triangle$	9,10	Abtrenng.
↳	12	$R\Box\Box \wedge R\triangle\triangle$	8,11	Kopplg.
	13	$R\Box\triangle \to (R\Box\Box \wedge R\triangle\triangle)$	-4,12	T 3
	14	$\forall y[R\Box y \to (R\Box\Box \wedge Ryy)]$	13	$+\forall$
	15	$\forall x \forall y[Rxy \to (Rxx \wedge Ryy)]$	14	$+\forall$

Prüfen wir einmal: Die Substitutionen entsprechen in beiden Richtungen den Regeln, sowohl bei den Schritten von 13 nach 15 als auch umgekehrt.
Eine $\exists$-Elimination kommt nicht vor. Von einer Prämisse, die eine freie Variable enthält, hängen nur die Formeln 4 bis 12 ab, bei Formel 13 haben wir uns bereits von. dieser Abhängigkeit befreit. Wir haben richtig vermutet:
Aus der Symmetrie und der Transitivität folgt, wenn auch nicht die Reflexivität selbst, so doch wenigstens die schwache Reflexivität.

Diese Ableitung war nicht schwer. Trotzdem kann dem einen oder anderen Leser der Gedanke gekommen sein, dass der Beweis mit Hilfe einer Zeichnung noch einfacher ist. Der Gedankengang könnte dabei folgender sein: Wegen der Symmetrie existiert zu jedem Pfeil, welche Punkte er auch verbinden mag, ein Pfeil in entgegengesetzter Richtung (Abb. 119).

Abb. 119,120,121

Auf Grund dieser Eigenschaft sowie der Transitivität wollen wir die schwache Reflexivität beweisen, das heißt folgendes: Jeder Pfeil, wo immer er verlaufen mag, besitzt an seinem Anfangs- und an seinem Endpunkt eine Schlinge. Setzen wir voraus, dass wenigstens ein Pfeil existiert (Abb. 120). Infolge der Symmetrie existiert hierzu ein entgegengesetzt gerichteter Pfeil (Abb. 121). Wir wenden die Transitivität auf diese beiden Pfeile an und schließen auf die Existenz der einen Schlinge (Abb. 122).

Abb. 122,123,124

Dann schließen wir (indem wir die Pfeile bei der Anwendung der Transitivität in. umgekehrter Richtung betrachten) auf die Existenz der zweiten Schlinge (Abb. 123). Aus der Existenz eines Pfeils haben wir also unter Voraussetzung der Symmetrie und der Transitivität auf die Existenz von Schlingen am Anfangs- und Endpunkt des Pfeils geschlossen. (Abb. 124).

Unsere Überlegungen gelten natürlich nicht nur für die beiden ins Auge gefassten Punkte, sondern für zwei beliebige Punkte, denn die benutzten Eigenschaften gelten auch für diese in uneingeschränktem Maße. Das aber heißt, symmetrische und transitive Relationen sind schwach reflexiv.

Hat der Leser die Parallelität bemerkt? Bei unserem zweiten Beweis sind wir fast Schritt für Schritt dem Gedankengang des formalen Beweises gefolgt. Oder sind wir bei dem formalen Beweis vielleicht dem Gedankengang gefolgt, der uns zuerst in anschaulicher Weise klar geworden ist? Oder drücken beide Beweise ein und denselben Gedanken nur in verschiedenen Sprachen aus?
Es fällt schwer, dies zu entscheiden.

Eines aber ist sicher: Wenn die zeichnerische Lösung unserem Herzen auch näher steht, so wird ihre Bedeutung doch dadurch wesentlich eingeschränkt, dass sie im Grunde an Funktionen von einer oder zwei Variablen gebunden ist. Bei der Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten hilft uns oft die geometrische Anschauung. Auch bei drei Unbekannten kann sie sich als nützlich erweisen, und Analogieschlüsse können uns sogar im Fall mehrerer Unbekannter Anhaltspunkte liefern. Trotzdem sind wir dabei aber zunehmend auf unsere Formeln angewiesen und müssen uns ihre Sprache so gründlich wie möglich zu eigen machen. Genauso ist es auch in der Logik.

7.4 Eine Aufgabe mit drei Variablen

Sehen wir uns als letztes Beispiel eine Ableitung an, bei der uns Pfeile nicht mehr weiterhelfen und wir mit Formeln arbeiten müssen, die drei Variable enthalten. Jemand hat folgendermaßen geschlossen:

Es gibt einen Menschen, der jeden vor jemandem lobt,
vor einem gewissen jemand lobt er aber niemanden.

Es gibt niemanden, den jeder vor jedem lobt oder den niemand vor jemandem lobt.

Abb. 125

Prüfen wir durch Ableitung, ob er recht gehabt hat. $L\square\triangle\bigtriangledown$ möge bedeuten: $\square$ lobt $\triangle$ vor $\bigtriangledown$ (Grundmenge: die Menge aller Menschen)

$$0 \quad \sim \exists y(\forall x \forall z Lxyz \vee \sim \exists x \exists z Lxyz)$$
$$1 \quad \exists x(\forall y \exists z Lxyz \wedge \exists z \sim \exists y Lxyz \qquad \text{P}$$

Die Konklusion suchen wir in dieser Form:

$$0' \quad \forall y \sim (\forall x \forall z Lxyz \sim \exists x \exists z Lxyz) \quad \text{Q 1}$$

oder besser in folgender:

$$0'' \quad \forall y(\sim \forall x \forall z Lxyz \wedge \exists x \exists z Lxyz) \quad \text{de Morgan, doppelte Verneinung}$$

oder noch besser so:

$$0''' \quad \forall y \sim \forall x \forall z Lxyz \wedge \forall y \exists x \exists z Lxyz) \quad \text{Q 13}$$

am besten aber in folgender Form:

0"" $\forall y \forall x \forall z \sim Lxyz \wedge \forall y \exists x \exists z Lxyz)$ Q 3 (zweimal)

Zu dieser letzten Formel wollen wir durch Kopplung gelangen, ihre Konjunktionsglieder aber wollen wir durch je zweimalige ∃-Einführung und je einmalige ∀-Einführung herstellen. Ebenso wie der Abschluss, so liegt auch der Beginn der Ableitung auf der Hand:

2 $\forall y \forall z L\Box yz \wedge \exists z \forall y \sim L\Box yz)$ 1 $-\exists$, Q 1

(Das zweite Konjunktionsglied haben wir so umgeformt, dass es im weiteren Verlauf der Ableitung möglichst einfach verwendet werden kann.)

3	$\exists z L\Box\triangle z$	2a	$-\forall$
4	$L\Box\triangle\nabla$	3	$-\exists$
5	$\forall y \sim L\Box y\diamond$	2b	$-\exists$

(Bei jeder ∃-Elimination verwenden wir ein neues Zeichen für die hinzukommende freie Variable.)

6 $\sim L\Box\triangle\diamond$ 5 $-\forall$

Jetzt steuern wir auf das erste Konjunktionsglied von 0"" zu. Dabei können wir auch gleich zwei ∃-Einführungen auf einmal ausführen:

7	$\exists x \exists z \sim Lx\triangle z$	6	$+\exists + \exists$
8	$\forall y \exists x \exists z \sim Lxyz$	7	$+\forall$

Die ∀-Einführung ist einwandfrei. Die Substitution bietet keine Probleme. Das △ stammt aus einer ∀-Elimination, und in der Prämisse kommt keine freie Variable vor. Das zweite Konjunktionsglied von 0"" gewinnen wir aus 4. Von der ∀-Einführung können wir hier dasselbe feststellen:

9	$\exists x \exists z Lx\triangle z$	4	$+\exists + \exists$
10	$\forall y \exists x \exists z Lxyz$	9	$+\forall$
11	$\forall y \exists x \exists z \sim Lxyz \wedge \forall y \exists x \exists z Lxyz$	8,10	Kopplung

Die letzte Formel stimmt mit 0"" überein. Von ihr aus rückwärts schließend, erhalten wir durch äquivalente Umformungen die gesuchte Konklusion 0.

7.5 Versteckte Prämissen

Es kann uns immer noch passieren, dass wir selbst bei der Formalisierung ganz einfacher Schlüsse nicht weiterkommen. Oftmals, jedoch nicht immer, hilft es uns weiter, dass wir uns überlegen, was wir bei unseren Schlüssen noch voraussetzen müssen und nur deshalb nicht in die Prämissen aufgenommen haben, weil wir es als selbstverständlich ansehen - und dann werden diese selbstverständlichen Voraussetzungen oder Wahrheiten nachträglich den Prämissen hinzugefügt. Dafür folgendes Beispiel:

Gabi ist jünger als Bärbel.
Rudi ist älter als Bärbel.
———
Gabi ist Jünger als Rudi.

Formalisiert:

0	Jgr	
1	Jgb	P
2	Arb	P

Es wäre ein hoffnungsloses Unternehmen, 0 aus 1 und 2 ableiten zu wollen, allein schon deshalb, weil in 2 - dem Verbindungsglied zwischen 1 und 0 - eine andere logische Funktion vorkommt als in 1. Das ist allerdings nur eine Frage der Formulierung:
An Stelle von Arb hätten wir auch Jbr schreiben können, denn wir wissen ja, dass - welche Personen x und y auch bezeichnen mögen - x dann und nur dann älter als y ist, wenn y jünger als x ist:

$\forall x \forall y(Axy \leftrightarrow Jyx)$

Unsere Formel bringt die Beziehung zwischen den Relationen "□ ist älter als △" und "△ ist jünger als □“ zum Ausdruck. Diese Beziehung können wir auch so beschreiben:
Die beiden Relationen sind zueinander invers. Ob wir nun Formel 2 durch die äquivalente Formel Jbr ersetzen oder ob wir nach Formel 2 $\forall x \forall y(Axy \leftrightarrow Jyx)$ als dritte Prämisse hinzufügen, in jedem Fall haben wir eine große Schwierigkeit überwunden. Der erste Weg ist der einfachere. Der letzte unterscheidet sich aber nur dadurch von ihm, dass die Ableitung einige Schritte länger ausfällt.
Um noch etwas zu üben, wählen wir den letzten Weg:

0	Jgr		
1	Jgb	P	
2	Arb	P	
3	$\forall x \forall y(Axy \leftrightarrow Jyx)$	P	
4	$Arb \leftrightarrow Jbr$	3	$-\forall - \forall$
5	$(Arb \rightarrow Jbr) \wedge (Jbr \rightarrow arb)$	4	Def. d. Äquivalenz
6	Jbr	5a,2	Abtrenng.

Wir möchten gern von 1 und 6 auf 0 schließen, kommen jedoch nicht weiter. Eine Prämisse hält sich noch immer versteckt: die Relation $J□△$ ist nämlich transitiv.
Fügen wir sie der Ableitung noch hinzu:

$$7 \quad \forall x \forall y \forall z[(Jxy \wedge Jyz) \rightarrow Jxz] \quad \text{P}$$

Jetzt aber geht es glatt weiter bis zum Ziel:

8	$(Jgb \wedge Jbr) \rightarrow Jgr$	7	$-\forall - \forall - \forall$
9	$Jgb \wedge Jbr$	1,6	Kopplg.
10	Jgr	8,9	Abtrenng.

Aufgaben

1. Formalisieren Sie die folgenden Sätze!
a) Die Bücher, die jeder bewundert, sind dieselben, die niemand liest.
($W□△ =$ □ bewundert △, $L□△ =$ □ liest △.)

b) Kein Volk ist frei, das andere Völker unterdrückt (W.I. Lenin).
($U□△ =$ das Volk □ unterdrückt das Volk △, $F△ =$ das Volk △ ist frei.)

c) Kluge Menschen ändern manchmal ihre Meinung, dumme nie.
($K□ =$ □ ist ein kluger Mensch, $V□△ =$ □ seine Meinung zum Zeitpunkt △.

Das Wort "dumm" sehen wir hierbei als gleichbedeutend mit "nicht klug" an.)

d) Wer allen gefallen will, gefällt niemandem.
($W\Box\triangle = \Box$ will $\triangle$ gefallen, $G\Box\triangle = \Box$ gefällt $\triangle$.)

e) Wer einen Besitz hat, den besitzt der Besitz. ($B\Box\triangle = \Box$ besitzt $\triangle$.)

2. Beschreiben Sie die folgenden Eigenschaften der Relation R jeweils durch eine Formel! Die Relation ist:
a) irreflexiv (d. h. anschaulich: Es gibt nirgendwo eine Schleife.)
b) teilweise reflexiv (Es gibt Schleifen, jedoch nicht in jedem Punkt.)
c) asymmetrisch (Führt ein Pfeil von einem Punkt zu einem Punkt[24], so existiert kein Pfeil in der entgegengesetzten Richtung.)
d) teilweise symmetrisch (Es gibt einen Pfeil, zu dem ein Pfeil in der entgegengesetzten Richtung existiert. Es gibt aber auch einen Pfeil, zu dem ein solches Gegenstück nicht existiert.)
e) intransitiv (Führt ein Pfeil von einem Punkt zu einem Punkt und von diesem zu einem dritten Punkt, so führt kein Pfeil vom ersten zum dritten Punkt.)
f) teilweise transitiv (Es gibt zwei aufeinanderfolgende Pfeile, so dass vom Ausgangspunkt des ersten Pfeils ein Pfeil zum Endpunkt des zweiten führt, aber es gibt auch zwei aufeinanderfolgende Pfeile, wo das nicht der Fall ist.)
g) streng symmetrisch (Sie ist symmetrisch, und in ihr kommt tatsächlich ein Pfeil vor.)
h) streng transitiv (Sie ist transitiv, und es gibt zwei aufeinanderfolgende Pfeile.)
i) antisymmetrisch (Existiert zu einem Pfeil ein in die entgegengesetzte Richtung führender Pfeil, so ist dieser Pfeil eine Schleife.)

Bei der Formalisierung der "teilweisen" Eigenschaften können wir davon ausgehen, dass diese folgendes bedeuten: Von den beiden Extremen - z. B. Reflexivität und Irreflexivität - ist keines erfüllt.

3. Bevor Sie die folgenden Sätze formalisieren, geben Sie die Negation eines jeden an (d.h. einen Satz, der dann und nur dann wahr ist, wenn der ursprüngliche Satz nicht wahr ist.)!
a) Wenn es kalt ist, heizen wir.
b) Jede Tür hat eine Klinke.
e) Im Leben jedes Menschen gibt es einen Augenblick, in dem er gern etwas täte, was verboten ist.
d) Es gibt eine Zahl, die ein Vielfaches jeder beliebigen Zahl ist. (Dass $\Box$ ein Vielfaches von $\triangle$ ist, drücken wir durch die Multiplikation aus: Es gibt eine Zahl z, so dass das z-fache von $\triangle$ gleich $\Box$ ist. Grundmenge: die natürlichen Zahlen.)

4. Betrachten wir den folgenden Beweis:

1	$\forall x \exists y (x < y)$	P	
2	$\exists y (\Box < y)$	1	$-\forall$
3	$\Box < \triangle$	2	$-\exists$
4	$\exists x (x < x)$	3	$+\exists$

Davon ausgehend, dass zu jeder Zahl eine größere existiert (was zum Beispiel in der Menge der natürlichen Zahlen richtig ist), haben wir "bewiesen", dass es eine Zahl gibt, die größer als sie selber ist (was in keiner einzigen Menge von Zahlen wahr ist).

[24] Wir haben nicht geschrieben "zu einem anderen Punkt", da der Pfeil von einem Punkt aus auch zu demselben Punkt führen kann, Wir betrachten auch Schleifen als Pfeile, ja sogar als zwei oder drei Pfeile.

Wo steckt der Fehler?

5. Die Ableitung aus Aufgabe 4 setzen wir nach dem 3. Schritt wie folgt fort:

4'	$\forall x(x < \triangle)$	3	$+\forall$
5	$\exists y \forall x(x < y)$	4'	$+\exists$

Die letzte Formel ist wieder falsch. Sie besagt zum Beispiel, dass es in der Menge der natürlichen Zahlen eine Zahl gibt, so dass jede andere Zahl kleiner als diese ist, d.h., diese Zahl ist größer als alle anderen Zahlen. Wo haben wir bei der Ableitung einen Fehler gemacht?

6. Jemand behauptet, er habe die Richtigkeit des folgenden Schlusses indirekt durch Ableitung bewiesen:

$$\frac{\text{Es ist nicht alles Gold, was glänzt.}}{\text{Nicht jeder findet Gold, der etwas Glänzendes findet.}}$$

Wir teilen hier die Ableitung mit, die natürlich fehlerhaft ist. Es gibt mehrere Fehler darin. Welche sind das?

1	$\forall y[\exists x(Lx \wedge Ryx) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Ryx)]$	P	
2	$L\Box$	P	
3	$\exists x(Lx \wedge R\triangle x) \rightarrow \exists x(Gx \wedge R\triangle x)$	1	$-\forall$
4	$\exists x(Lx \wedge R\triangle x)$	P	
5	$\exists x(Gx \wedge R\triangle x)$	3,4	Abtrenng.
6	$G\Box \wedge R\triangle x$	5b	$-\exists$
7	$G\Box$	6	Weglassung
8	$L\Box \rightarrow G\Box$	-2,7	T 3
9	$\forall x(Lx \rightarrow Gx)$	8	$+\forall$

($L\Box = \Box$ ist ein glänzender Gegenstand, $G\Box = \Box$ ist ein goldener Gegenstand, $R\triangle\Box = \triangle$ findet $\Box$.)

8 Bilanz

Was haben wir erreicht?
Was bietet unser formales Ableitungsverfahren denjenigen, die es anwenden wollen?

Wir haben festgestellt: Mit Hilfe des aus der Aussagenlogik bekannten (und im 5. Kapitel zusammengefassten) Apparates sowie den Quantorschlüssen können wir aus gegebenen Formeln des Funktionenkalküls nur solche Formeln ableiten, die aus den gegebenen folgen, und zwar alle diese.
Wir haben die logischen Hilfsmittel zum größten Teil auf nichtmathematische, scheinbar spielerische Schlüsse angewendet, einesteils deshalb, weil wir keine tieferen mathematischen Kenntnisse beim Leser voraussetzen wollten, andererseits, weil wir zeigen wollten, dass die mathematische Logik nicht nur eine Logik der Mathematik ist.

Ihre Instrumente wurden an der Mathematik geschliffen und poliert, ihr Anwendungsbereich ist aber weit umfassender: Sie ist für alle Bereiche des Denkens gültig, sie ordnet unter einem bestimmten Gesichtspunkt die universellen Gesetze des Denkens. Dieses "für alle Bereiche" bezieht sich aber natürlich auch auf die Mathematik.
Mit Hilfe der Formeln des Funktionenkalküls kann man auch mathematische Behauptungen niederschreiben. Sie sind nicht nur zur Formulierung von Aussagen der Elementarmathematik geeignet, große Gebiete der höheren Mathematik, sogar fast alle vom Standpunkt der Anwendung aus wichtigen Gebiete finden in dem hier behandelten "engeren" Funktionenkalkül Platz.

Aus den mit Hilfe des Funktionenkalküls formulierten mathematischen Formeln ergibt sich auf die angegebene Weise mechanisch alles, was aus ihnen auf logischem Wege folgt.

Stellen wir uns einmal vor, wir würden eine sehr leistungsfähige elektronische Rechenmaschine - etwa eine, die in jeder Sekunde eine Million Operationen ausführen kann - für die Anwendung unserer mechanischen Schlussregeln programmieren. Diese Maschine würde nacheinander alle aus den Prämissen folgenden mathematischen Sätze ausdrucken.

Das erinnert etwas an die Maschine, die Gulliver in dem bekannten Buch von J. Swift in Lagado sieht und mit deren Hilfe die Gelehrten dieses Landes durch Variierung der Buchstaben des Alphabets jedes nur mögliche Gedicht, jeden Roman, jede wissenschaftliche Abhandlung, jedes nur mögliche literarische Werk herstellen können.
Wie aber soll man aus der Menge des gesamten möglichen Schrifttums das Wertvolle oder auch nur das Sinnvolle herausfinden?

Was die Rechenmaschine betrifft, so sind die mathematischen Konklusionen, die sie liefert, zwar alle sinnvoll, sie werden sich aber hinsichtlich ihres Wertes, ihrer Bedeutsamkeit wesentlich voneinander unterscheiden.

Ändern wir unsere Überlegungen etwas ab: Anstatt es der Maschine zu überlassen, aus gegebenen mathematischen Prämissen blindlings alle möglichen Konklusionen abzuleiten, gehen wir von Vermutungen aus, die wir intuitiv "mit unseren eigenen Mitteln" gewonnen haben und benutzen die Maschine dazu, zu entscheiden, ob unsere Vermutungen wirklich aus gewissen, unseren Überlegungen zugrunde liegenden Formeln folgen.
Es wäre eine Leistung von außergewöhnlicher Bedeutung, könnte man die Entscheidung über alle diese mathematischen Vermutungen einer Maschine überlassen, denn Tausende von Mathematikern wenden Millionen Arbeitsstunden für die Entscheidung der offenen Fragen der Mathematik auf.

Es ist eine bedauerliche Tatsache, dass dieser schöne Gedanke auch in dieser Form nicht zu verwirklichen ist. In der obigen - nennen wir sie einmal so - Lagado-Variante standen dem praktische Schwierigkeiten entgegen. Die Realisierung der zweiten Variante verhindern grundsätzliche Schwierigkeiten. Es ist richtig, dass unsere Maschine jede nur mögliche Konklusion aus den Prämissen früher oder später finden wird, sofern wir die Geduld haben, darauf zu warten (und, sofern die Maschine nicht den Dienst versagt).
Wird das Programm einigermaßen geschickt gewählt, dann können wir sogar erwarten, dass die Maschine nicht zu viele Nebenwege beschreitet und, wenn auch nicht geradewegs, so doch in absehbarer Zeit zum Beweis der Vermutung gelangt und anhält. So ist es, wenn die Vermutung wahr ist!

Was geschieht aber, wenn dies nicht der Fall ist? Dann läuft die Maschine trotz ihrer noch so großen Geschwindigkeit ergebnislos weiter, im Prinzip unendlich lange, in der Praxis so lange, wie sie nicht kaputtgeht. Unser Verfahren erfasst nämlich nur die eine Seite des Problems: Man kann - zumindest prinzipiell - jede Konklusion erhalten, die aus gegebenen Prämissen folgt.
Wenn die Vermutung aber falsch ist, wenn die erwartete Konklusion nicht aus den Prämissen folgt, so wird das bei unserem Verfahren nicht angezeigt. Aus der dauernden Erfolglosigkeit des Verfahrens können wir höchstens schließen, dass die Chancen für den Beweis der Vermutung sinken, die Möglichkeit hierfür bleibt aber noch immer bestehen - ein Irrlicht, das uns immer weiter lockt.

Wir geben aber noch nicht auf und wollen auf folgende listige Weise eine Entscheidung über unsere Vermutung erzwingen: Statt einer programmieren wir zwei Rechenmaschinen, die eine für den Beweis der Vermutung, die andere für den Beweis von deren Negation. Wir setzen beide Maschinen in Gang und warten.
Früher oder später - so meinen wir - wird das Stehenbleiben einer Maschine anzeigen, dass wir zu dem gewünschten Ergebnis gekommen sind: Entweder hat die erste die ursprüngliche Vermutung bewiesen oder die zweite deren Negation, das heißt, sie hat die Vermutung widerlegt.

Man könnte annehmen, dass es dieses Verfahren im Prinzip ermöglicht, jede (im engeren Funktionenkalkül formulierbare) mathematische Vermutung zu entscheiden, dass es höchstens an der mangelnden Qualität der Maschinen oder an unserer Geduld liegt, wenn wir in einem gegebenen Fall zu keiner Entscheidung kommen.

Es ist bestürzend zu erfahren, dass diese Annahme falsch ist. Man kann mit exakten mathematischen Methoden beweisen (genauso zweifelsfrei wie den Satz des Pythagoras), dass man - wie man die zur Begründung einer bestimmten mathematischen Theorie geeignet erscheinenden Formeln auch auswählen mag - stets ein Problem dieser Theorie finden kann, so dass weder das Problem selbst noch seine Negation aus den zugrunde liegenden Formeln folgen.[25]

Würden wir unseren beiden Maschinen ein solches Problem aufgeben, so würde keine von ihnen wieder anhalten, so lange jedenfalls, wie sie nicht entzweigeht. Es ist nicht ausgeschlossen, dass es gerade aus diesem Grunde bisher nicht möglich gewesen ist, zu entscheiden, ob es eine

[25] Das bedeutet nicht, dass dieses Problem "absolut unentscheidbar" ist. Legt man der Theorie mehr geeignete Formeln zugrunde, so kann es entscheidbar werden. In dem so geschaffenen erweiterten System kann man aber wieder eine andere Formel finden, die in dessen Rahmen nicht entscheidbar ist und so weiter. Das spiegelt sehr schön wider, dass wir die Erkenntnis der Welt niemals als abgeschlossen betrachten können. Der interessierte Leser kann, auch wenn er keine mathematischen Vorkenntnisse besitzt, im letzten Kapitel des Buches "Spiel mit dem Unendlichen" von Rosza Peter (Verlagsgesellschaft B. G. Teubner, Leipzig) gründlichere Auskunft über diese Fragen erhalten.

ungerade vollkommene Zahl gibt oder nicht; d. h., es könnte sein, dass es uns gerade in der erwähnten Weise ergeht, wenn wir zur Entscheidung dieses Problems als Ausgangsformeln den beiden Rechenmaschinen jene Formeln eingeben, auf die sich die Forscher, die dieses Problem untersuchten, bisher gestützt haben.

Es ist - irrtümlicherweise - zur Gewohnheit geworden, auch von "absolut unentscheidbaren" Problemen zu sprechen. Hierbei ist nicht von einem einzigen Problem die Rede, vielmehr sucht man ein einheitliches Entscheidungsverfahren für eine unendliche Folge von Problemen. Dass man für unendlich viele Probleme nicht immer ein gemeinsames mechanisches Entscheidungsverfahren finden kann, ist nicht verwunderlich. Darüber hinaus ist es interessant, dass man diese Tatsache für gewisse gegebene Folgen von Problemen auch mit mathematischer Präzision beweisen kann.

8.1 Das Aeiou-Wortproblem

Eine der einfachsten Problemfolgen[26], von denen diese seltsame Eigenschaft bekannt wurde, wollen wir dem Leser durch eine kleine Geschichte nahezubringen versuchen.

Es gibt ein Land Aeiou. Seine Bewohner, die Aeiou-en, sprechen eine Sprache, in der nur Vokale vorkommen, nämlich diese fünf:

a, e, i, o, u

Jeder Buchstabe ist gleichzeitig auch ein Wort, ebenso bilden je zwei Buchstaben ein Wort:

aa, ae, ai, ao, au, ..., uo, uu

sowie auch je drei Buchstaben:

aaa, aae, ..., uuo, uuu,

und so weiter. Sogar das Schweigen bezeichnen wir in dieser Sprache als ein Wort; es ist das "leere Wort" . Es gibt in der Aeiou-Sprache folgende interessante Regel:

Wenn ein a und ein i nebeneinander stehen, kann man sie vertauschen, ohne den Sinn des Wortes dadurch zu ändern. So bedeutet uai zum Beispiel dasselbe wie uia, $iaae$ dasselbe wie $aiae$ oder $aaie$. Diese Regel schreiben wir folgendermaßen auf:

$$ai :: ia$$

(Wir symbolisieren durch die Punkte, dass ai und ia durcheinander ersetzt werden. können.) Es gibt in dieser Sprache noch sechs weitere Regeln zur Umformung von Wörtern in beiden Richtungen:

$$ao :: oa, \quad ei :: ie, \quad eo :: oe, \quad aoai :: aeai, \quad uia :: au, \quad uoe :: eu$$

(Wie man sieht, gestatten die ersten vier Regeln nur die Vertauschung der Reihenfolge gewisser Buchstaben, die fünfte lässt auch den Austausch eines Buchstabens gegen einen anderen zu, bei Anwendung der letzten beiden Regeln ändert sich sogar die Länge der Wörter.)

Während der vieltausendjährigen Entwicklung der Aeiou-Sprache behielten diese sieben Regeln unverändert ihre Gültigkeit, obwohl die Sprache selbst sich im Rahmen der Regeln geändert

[26]Siehe American Mathematical Monthly, Februar 1965, Teil II (Sonderheft), S. 138.

hat. So benutzte man an Stelle des ursprünglichen Wortes $uoeia$ später in demselben Sinn $uoeai$; danach kamen die Wörter $euai$, $euia$ in Gebrauch, heute aber gebraucht man dafür allgemein eau.
Das Wort $uoeia$ ist inzwischen in Vergessenheit geraten, um ganz zu schweigen von seinen noch älteren Frühformen. Daher stoßen die Gelehrten von Aeiou beim Studium alter Werke oft auf unbekannte Wörter, und mitunter können sie diese erst nach langen Umformungen in eine ihnen verständliche Form bringen.

Aus dem Zusammenhang des Textes können sie zwar meistens erraten, dass dieses oder jenes alte Wort wahrscheinlich dasselbe bedeutet wie dieses oder jenes moderne Wort, manchmal vergehen aber Wochen, bevor sie dies mit völliger Sicherheit sagen können.

Es kommt auch vor, dass sie bei ihren Untersuchungen zu dem genau entgegengesetzten Resultat gelangen: Sie können zeigen, dass zwei Wörter nicht dieselbe Bedeutung haben können. (Das alte Wort $iaaa$ bedeutet zum Beispiel sicher nicht dasselbe wie $eeoi$, da die Regeln bei Wörtern, die nur die Buchstaben a und i enthalten, nur die Vertauschung der Reihenfolge von Buchstaben gestatten.)
Derartige Untersuchungen erfordern - vor allem, wenn es um sehr lange Wörter geht - viel Zeit, sie erfordern immer wieder neue Einfälle, und es kommt vor, dass Ideen und Geduld der Gelehrten von Aeiou sich erschöpfen und sie den Kampf aufgeben und die Frage, ob zwei Wörter dieselbe Bedeutung haben oder nicht, unentschieden lassen.

So ist es verständlich, dass die Gelehrten schon seit langem nach einem universellen Verfahren suchen, das keine besonderen Einfälle in jedem einzelnen Fall erfordert und mit dessen Hilfe man von zwei beliebigen Wörtern mechanisch entscheiden kann, ob diese auf Grund der angegebenen Regeln ineinander umgeformt werden können oder nicht. Diese Aufgabe ist mathematisch exakt formulierbar:

Zu den unendlich vielen Wortpaaren ist ein gemeinsames Entscheidungsverfahren gesucht, auf Grund dessen festgestellt werden kann, ob die Wörter eines Paares mit Hilfe der angegebenen Regeln ineinander umgeformt werden können oder nicht. Sie riefen daher die Mathematiker der ganzen Welt auf, ihnen zu helfen und für sie nach einem solchen mechanischen Verfahren zu suchen.

Mathematiker über Mathematiker versuchten das Problem zu lösen - jedoch erfolglos.
Schließlich zeigte einer von ihnen unter Benutzung eines der am tiefsten liegenden Ergebnisse der mathematischen Logik, dass man ein solches mechanisches Entscheidungsverfahren bisher deshalb nicht gefunden hatte, weil es ein solches nicht geben kann.

Die Gelehrten von Aeiou hatten den Mathematikern der Welt eine Aufgabe gestellt, die nachweislich ebenso unlösbar ist wie die Quadratur des Kreises.
Der märchenhafte Rahmen, in dem dieses Problem hier erläutert wurde, möge niemanden irreführen: Die Geschichte ist im Kern wahr. Alle heute bekannten und vorstellbaren mathematischen Methoden zusammen reichen nicht aus, um für das Aeiou-Wortproblem eine allgemeine Lösung zu geben. Dieses Problem ist nachweisbar nicht lösbar.

Anhang

9 Syllogismen mit heutigen Augen

9.1 Entschuldigung und Erklärung

Einer der hervorragendsten Vertreter der mathematischen Logik, Alfred Tarski, schrieb 1940 im Vorwort zur englischen Ausgabe seines Buches Einführung in die Logik:

"... von zwei kurzen Bemerkungen abgesehen, sagt mein Buch nichts über die traditionelle aristotelische Logik und enthält auch nichts, was aus dieser stammte. Ich glaube aber, dass der Raum, den ich der traditionellen Logik habe zukommen lassen, völlig der bescheidenen Rolle entspricht, die diese Logik in der modernen Wissenschaft spielt. Ich glaube, dass die meisten heutigen Logiker hierin mit mir übereinstimmen."

Was Tarski und mit ihm einige andere schon damals klar gesehen haben, ist im Lauf des inzwischen vergangenen Vierteljahrhunderts auch für breiteste Kreise offensichtlich geworden. Es hat sich gezeigt, dass die mathematische Logik nicht nur ein interessanter Zweig der Wissenschaften, sondern auch ein unentbehrliches Hilfsmittel der Kybernetik, Automatisierung, der modernen Technik und der Produktion geworden ist. Sie hätte dies nicht werden können, wenn sie sich nicht schon früher - gleichsam wie von einem zu engen Panzer - von den engen Fesseln, den unreinen Begriffen und ungeschickten Bezeichnungsweisen der traditionellen Logik befreit hätte.

Welchen Sinn hat es also, in einem modernen Buch über Logik, das nicht von der geschichtlichen Entwicklung der Logik, sondern der heute gültigen Logik handelt, über die Tarskischen Normen des Jahres 1940, über die erwähnten zwei kurzen Bemerkungen hinauszugehen und sich über Seiten hinweg mit Syllogismen zu befassen?

Es wird allein dadurch gerechtfertigt, dass die traditionelle Logik offenbar noch nicht zur Kenntnis genommen hat, dass ihre Zeit endgültig abgelaufen ist. Zur Zeit der Niederschrift dieser Zeilen (1965) erlernen in Ungarn weniger Menschen die mathematische Logik als die traditionelle aristotelische!
Das ist etwa so, als würde man in unseren Schulen das ptolemäische Weltbild dem kopernikanischen vorziehen oder als würde man den Chemieunterricht vorwiegend dazu benutzen, die Ideen der Alchimie zu verbreiten.

Aber selbst wenn von heute an jeder moderne Logik studieren würde, so würde immer noch Jahrzehnte lang etwas im Bewusstsein eines großen Teils der gebildeten Menschheit als gültige Wissenschaft leben, was dies einfach nicht ist. Man muss den Menschen daher - und das ist der Zweck dieses Kapitels - Gelegenheit geben, an Hand eines geeigneten Beispiels, am Beispiel der kategorischen Syllogismen, zu vergleichen, was die traditionelle Logik zu geben vermag und was wir heute über sie sagen können.

Niemand leugnet die geschichtliche Bedeutung der traditionellen Logik. Aristoteles und die Logiker des Mittelalters haben wichtige Probleme gestellt und gelöst. Ohne sie existierte die heutige Logik vielleicht gar nicht.
Schließlich schmälert es auch nicht die Verdienste des Ptolemäus, dass andere über ihn hinausgegangen sind.

Im 18. Jahrhundert war auch Immanuel Kant noch davon überzeugt, dass die aristotelische

Logik ewige Gesetze des menschlichen Denkens beschreibt. Im 19. Jahrhundert wusste de Morgan bereits, dass die traditionelle Logik nicht imstande ist, es mit einem Schluss wie dem folgenden aufzunehmen:

Jedes Pferd ist ein Tier, also ist jeder Pferdekopf ein Tierkopf.

Seitdem ist aber nunmehr der Mythos der klassischen Logik endgültig zusammengebrochen. Mit heutigen Augen gesehen ist zum Beispiel die gesamte "Theorie" der klassischen Syllogismen ein Bruchstück des Funktionenkalküls von Funktionen einer Variablen, ein Bruchstück, das kinderleicht wäre, wenn sich nicht aus dieser Unvollständigkeit, dieser Eigenschaft, Bruchstück zu sein, verschiedenartigste Komplikationen ergeben würden.

Andere Schlussweisen aber, die man als gleichartig neben die kategorischen Syllogismen zu stellen pflegte, sind Fragen, die nicht hierher, sondern in ein anderes Gebiet der Logik, den Aussagenkalkül, gehören. So ist zum Beispiel der disjunktive Syllogismus eine Schlussweise der Aussagenlogik, und in diesem Abschnitt haben wir ihn auch behandelt.
Sehen wir uns daher jetzt nur die kategorischen Syllogismen an.

9.2 Die kategorischen Syllogismen

Wir wollen die kategorischen Syllogismen im Lichte der Wissenschaft des 20. Jahrhunderts untersuchen. Unsere Leser kennen bereits die acht möglichen Beziehungen zwischen zwei Mengen. Sie wissen, dass die ersten drei der folgenden Formeln je vier der acht Fälle auswählen, die anderen drei definieren dagegen die übrigen vier Fälle:

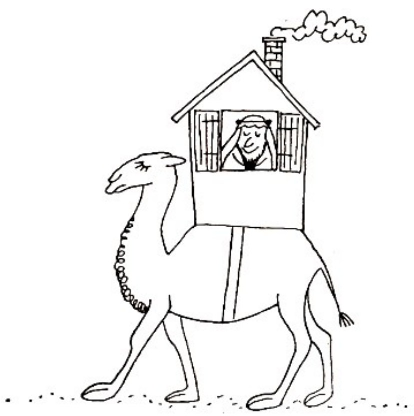
$$\begin{array}{llllll} (1) & \forall x(Ax \to Bx) & (2) & \forall x(Bx \to Ax) & (3) & \exists x(Ax \wedge Bx) \\ (4) & \sim \forall x(Ax \to Bx) & (5) & \sim \forall x(Bx \to Ax) & (6) & \sim \exists x(Ax \wedge Bx) \end{array}$$

Sie wissen ferner, dass diese Formeln die Struktur so einfacher Aussagen beschreiben wie etwa die der folgenden:

(1)	Jeder Araber ist ein Beduine.	(4)	Nicht jeder Araber ist ein Beduine.
(2)	Jeder Beduine ist ein Araber.	(5)	Nicht jeder Beduine ist ein Araber.
(3)	Es gibt einen Araber, der ein Beduine ist	(6)	Es gibt keinen Araber, der ein Beduine ist.

Die Leser sind sich auch darüber im klaren, dass (2) und (5) sich wesentlich von (1) bzw. (4) unterscheiden. Dagegen wäre es überflüssig, die folgenden Aussagen als gesonderte Fälle zu betrachten:

(3') Es gibt einen Beduinen, der ein Araber ist;
(6') Es gibt keinen Beduinen, der ein Araber ist;



da sie lediglich in anderer Form dieselben Zusammenhänge beschreiben wie (3) bzw. (6). Legen wir auch auf die Darstellungsform und nicht nur auf die dargestellten Zusammenhänge Wert, können wir zu den obigen Varianten noch weitere hinzufügen, so zum Beispiel zu (4) die folgende:

(4') Es gibt einen Araber, der kein Beduine ist.

Jeder kategorische Syllogismus ist ein richtiger Schluss, der zwei Prämissen[27] besitzt, die beide die Form (1) bis (6) haben. Letzteres gilt auch für seine Konklusion. Von den zwei in jeder der beiden Prämissen vorkommenden logischen Funktionen stimmt genau eine mit einer in der anderen Prämisse vorkommenden Funktion überein, die anderen beiden sind voneinander verschieden, und die Konklusion enthält diese anderen beiden Funktionen.

Natürlich sind nicht alle derartigen Schlüsse richtig, und die "Theorie" der kategorischen Syllogismen untersucht gerade, welche Schlüsse richtig und welche falsch sind. Sehen wir uns zwei Beispiele an:

Es gibt keinen Pförtner, der Millionär ist.	Jeder Polynesier ist ein Maori.
Es gibt einen Millionär, der Schachspieler ist.	Jeder Südseeinsulaner ist ein Maori.
Es gibt einen Schachspieler, der kein Pförtner ist.	Es gibt einen Südseeinsulaner, der ein Polynesier ist.

Man kann nicht erwarten, dass jeder sofort "im Kopf" entscheiden kann, ob ein derartiger Schluss richtig ist oder nicht, obwohl dies in einfacheren Fällen nicht gerade an Hexerei grenzt. Aber wenn auch nicht im Kopf, so kann man die Frage doch vielleicht schriftlich, d. h. mit einer Zeichnung, augenblicklich entscheiden (Abb. 125 und 126).

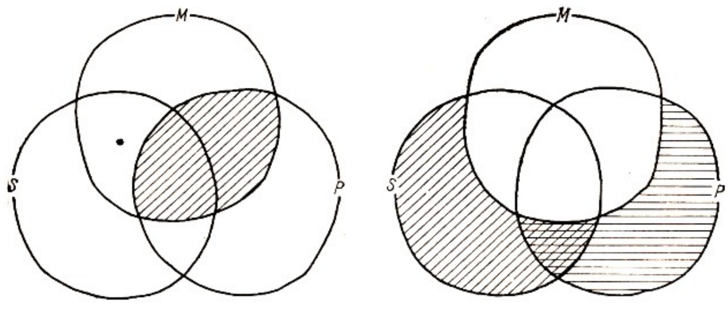


Abb. 125, 126

Abb. 125: Dieser Schluss ist richtig: S besitzt Elemente außerhalb von P. Die gemeinsamen Elemente von S und M liegen außerhalb von P.

Abb. 126: Dieser Schluss ist nicht richtig: Es ist nicht sicher, ob S und P ein gemeinsames Element besitzen.

Die Lösung eines solchen Problems erfordert nicht mehr Zeit und verlangt keine tiefer gehenden Überlegungen, als zwei zweistellige Zahlen zu multiplizieren, was Kinder im Alter von 9 Jahren lernen. Syllogismen aber wurden in der 12. Klasse höherer Schulen und sogar an Hochschulen und Universitäten gelehrt (es gibt Orte, wo dies auch heute noch geschieht). - Natürlich nicht in der hier dargestellten einfachen Form, sondern mit einer ganzen Fülle überflüssiger Komplikationen beladen.

[27] Genauer gesagt, es kommen in ihnen noch ein oder zwei unausgesprochene Prämissen vor. Davon wird noch die Rede sein.

9.3 An Stelle von sechs Fällen vier oder acht

Eine Ursache für diese Komplikationen besteht darin, dass man die sechs Fälle auf vier eingeschränkt. Und warum das? Weil Aristoteles es getan hat.
Wenn wir an Stelle der zwischen zwei Mengen möglichen Beziehungen die möglichen Typen der Beziehungen klassifizieren, so sind wir auch berechtigt, an Stelle der sechs Fälle von vier zu sprechen: (1) und (2) sind von demselben Typ, (4) und (5) ebenfalls. Es bleiben also diese vier Fälle:

(a) Jeder Araber ist ein Beduine.
(i) Es gibt einen Araber, der ein Beduine ist.
(o) Nicht jeder Araber ist ein Beduine.
(e) Es gibt keinen Araber, der ein Beduine ist.

(Die Buchstaben sind die Zeichen der traditionellen Logik zur Unterscheidung der vier Typen.)
Es ist nicht gleichgültig, ob von meinen Besitztümern alles, was ich an Büchern habe, wertvoll ist oder ob alles, was ich an Wertvollem habe, Bücher sind, außer Frage steht jedoch, dass die beiden kursiv gedruckten Aussagen vom gleichen Typ sind.

Wenn wir nun aber nicht nur die Aussagen selbst betrachten sondern beginnen, aus ihnen Ableitungen zu bilden, so genügt die Unterscheidung der Typen allein nicht mehr, so wird auch ihre Reihenfolge wesentlich. Sehen wir uns zum Beispiel einmal die folgenden beiden, zum Teil mit bedeutungslosen Wörtern gebildeten Schlüsse an:

$$
(1)\ \begin{array}{c} \text{Jeder Bag ist ein Cekes.} \\ \text{Jeder Atto ist ein Bag.} \\ \hline \text{Jeder Atto ist ein Bag.} \end{array}
\qquad
(2)\ \begin{array}{c} \text{Jeder Cekes ist ein Bag.} \\ \text{Jeder Atto ist ein Bag.} \\ \hline \text{Jeder Atto ist ein Cekes.} \end{array}
$$

Nicht wahr, man fühlt selbst bei diesen sinnlosen Wörtern, dass der erste Schluss richtig ist und der zweite nicht? Obwohl die Prämissen und Konklusionen Mengenbeziehungen vom gleichen Typ ausdrücken (zufällig sind alle sechs von demselben Typ), so drücken sie doch nicht dieselben Beziehungen aus: Die Teilmengenbeziehungen in den ersten Prämissen der Schlüsse (1) bzw. (2) stehen in umgekehrtem Verhältnis zueinander.

Das ist natürlich auch den Logikern des Altertums aufgefallen, sie haben sich aber nicht dadurch geholfen, dass sie die sechs Fälle zur Kenntnis genommen hätten, sondern sie haben statt dessen einen besonderen Begriff, den der Kategorie (Figur) eingeführt. Sie sagten, dass Schlüsse der Form (1) zur ersten Kategorie gehören (und richtig sind), während Schlüsse der Form (2) zur zweiten Kategorie gehören (und nicht richtig sind).
Sie unterschieden daneben noch zwei weitere Kategorien. Diese gehen aus den obigen dadurch hervor, dass wir in den jeweils zweiten Prämissen die Wörter "Atto" und "Bag" vertauschen. Prämissen und Konklusion können natürlich nicht nur vom Typ (a) sein wie in den vorigen

beiden Beispielen, sondern können auch vom Typ (i), (o) oder (e) sein. Nach Kategorien geordnet, gibt es also die folgenden Möglichkeiten:

I	II	III	IV
- Bag ist ein Cekes	- Cekes ist ein Bag	- Bag ist ein Cekes	- Cekes ist ein Bag
- Atto ist ein Bag	- Atto ist ein Bag	- Bag ist ein Atto	- Bag ist ein Atto
- Atto ist ein Cekes	- Atto ist ein Cekes	- Atto ist ein Cekes	- Atto ist ein Cekes

Dies ist so zu verstehen, dass wir beim Ausfüllen der Leerstellen überall zwischen den folgenden Möglichkeiten wählen können: "Jeder", "Es kommt vor, dass ein", "Nicht jeder", "Es kommt nicht vor, dass ein".
(Überlegen wir uns, dass wir auf diese Weise nacheinander Aussagen der Typen (a), (i), (o), (e) erhalten.)
Der schon erwähnte Syllogismus Pförtner - Millionär - Schachspieler zum Beispiel gehört zur vierten Kategorie, in ihm kommen der Reihe nach Aussagen der Typen (e), (i) und (o) vor.

Im Mittelalter hat man den Syllogismen seltsam klingende Namen gegeben. Der traditionelle Name des erwähnten Syllogismus lautet zum Beispiel Fresison. Der Name des Syllogismus (1) ist Barbara. Die Vokale der Namen bestimmen der Reihe nach die Typen der beiden Prämissen und der Konklusion, wenn man diejenige Prämisse als erste ansieht, die jenen "Terminus" enthält, der in der Konklusion an zweiter Stelle vorkommt (in unserem Beispiel das Wort "Cekes").
(Man kann diese Reihenfolge nicht gerade natürlich nennen, sie entspricht aber der Tradition, und deshalb haben wir sie beibehalten.)

Die Konsonanten der Namen weisen nicht auf die Kategorien, sondern auf kompliziertere Beziehungen zwischen den Syllogismen hin.
Die Logiker des Altertums versuchten an Hand des ziemlich zufälligen Begriffs der Kategorie wesentliche Erkenntnisse zu gewinnen und stellten fest: "Die Bedeutung der dritten Kategorie für die Erkenntnis offenbart sich darin, dass sie es ermöglicht, die Kenntnisse über einen bestimmten Gegenstand zu vergleichen".
Der Begriff der Kategorie aber ist alles andere als ein tief liegender, unter dem Gesichtspunkt der "Erkenntnis" bedeutsamer Begriff. Die Einführung der Kategorien hat lediglich das (nicht einmal vorteilhafte) Ergebnis, dass man, anstatt diejenigen Konklusionen zu untersuchen, die sich aus den sechs möglichen ersten und den sechs möglichen zweiten Prämissen (d.h. aus 36 Prämissenpaaren) ziehen lassen, die vier möglichen ersten und vier möglichen zweiten Prämissen in den vier Kategorien betrachten muss (damit wird aber die Überprüfung von viel mehr als 36 Fällen, nämlich die von 64 Fällen benötigt).

Das bedeutet im Grunde dasselbe, als wenn wir sowohl in der ersten als auch in der zweiten Prämisse an Stelle der sechs nicht weniger (nämlich vier), sondern mehr (nämlich acht) Fälle unterscheiden würden, indem wir die Fälle

$$\exists x(Ax \wedge Bx) \text{ und } \exists x(Bx \wedge Ax) \text{ sowie } \sim \exists x(Ax \wedge Bx) \text{ und } \sim \exists x(Bx \wedge Ax)$$

getrennt betrachten würden.

9.4 Schlüsse aus den 36 (oder 64) Prämissenpaaren

Wir wollen jetzt - unter Außerachtlassung jeglicher Theorie - die 36 möglichen Prämissenpaare graphisch darstellen und aus unseren Zeichnungen ablesen, auf welche richtigen Schlüsse sie

führen. Dabei wird es genügen, nur Konklusionen der Form $\forall x(Ax \to Cx)$, $\sim \forall x(Ax \to Cx)$, $\exists x(Ax \land Cx)$ und $\sim \exists x(Ax \land Cx)$ zu suchen.
Wir bemerken, dass die Richtigkeit eines Schlusses sich nicht ändert, wenn wir C für A und A für C schreiben. Das heißt z. B., der Schluss

$$\frac{\begin{array}{c}\sim \forall x(Cx \to Bx)\\ \exists x(Ax \land Bx)\end{array}}{\forall x(Cx \to Ax)}$$

ist richtig oder falsch, je nachdem, ob der aus ihm durch Vertauschung der Buchstaben hervorgehende Schluss

$$\frac{\begin{array}{c}\sim \forall x(Ax \to Bx)\\ \exists x(Cx \land Bx)\end{array}}{\forall x(Ax \to Cx)}$$

richtig ist oder nicht. Es ist nämlich völlig gleichgültig, welche Sache wir mit welchem Buchstaben bezeichnen. Wir können ferner die Prämissen vertauschen; auch dies ändert nichts daran, ob ein Schluss richtig oder falsch ist.
Wir können auf diese Weise erreichen, dass in der (entsprechend der traditionellen Reihenfolge, d.h. nicht in der natürlichen) ersten Prämisse B und C, in der zweiten A und B sowie an der ersten Stelle der Konklusion A und an der zweiten Stelle der Konklusion C vorkommen:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x(Cx \land Bx)\\ \sim \forall x(Ax \to Bx)\end{array}}{\forall x(Ax \to Cx)}$$

Wir bringen unsere Schlüsse, gleichgültig ob sie richtig oder falsch sind, auf diese einheitliche Form. Damit brauchen wir nicht unter 6 · 36 angenommenen Konklusionen der 36 Prämissenpaare, sondern nur unter 4 · 36 zu wählen (Abb. 127).

Der Abbildungsreihe der nächsten Seite entnehmen wir, welche Konklusionen der gegebenen Form aus den Prämissen der gegebenen Form gewonnen werden können. Von den 36 Prämissenpaaren besitzen nur 8 solche Konklusionen, die wir suchen, und zwar jedes nur eine. Nach Konklusionstypen angeordnet, sind dies:

eine der Form	$\forall x(Ax \to Cx)$	(a1),
zwei der Form	$\exists x(Ax \land Cx)$	(b3 und c1),
drei der Form	$\sim \forall x(Ax \to Cx)$	(b4, c6 und d2),
zwei der Form	$\sim \exists x(Ax \land Cx)$	(a6 und f2).

Wenn wir uns - der Tradition folgend - dazu bereitfinden, die Spalten c und f ebenso wie die Reihen zu verdoppeln, so werden die Syllogismen a6, b3, c1 und f2 je zweimal auftreten, allerdings jedesmal in einer anderen Form, so z. B. a6 sowohl in dieser

$$\frac{\begin{array}{c}\sim \exists x(Bx \land Cx)\\ \forall x(Ax \to Bx)\end{array}}{\sim \exists x(Ax \land Cx)}$$

als auch in der folgenden Gestalt:

$$\frac{\begin{array}{c}\sim \exists x(Cx \land Bx)\\ \forall x(Ax \to Bx)\end{array}}{\sim \exists x(Ax \land Cx)}$$

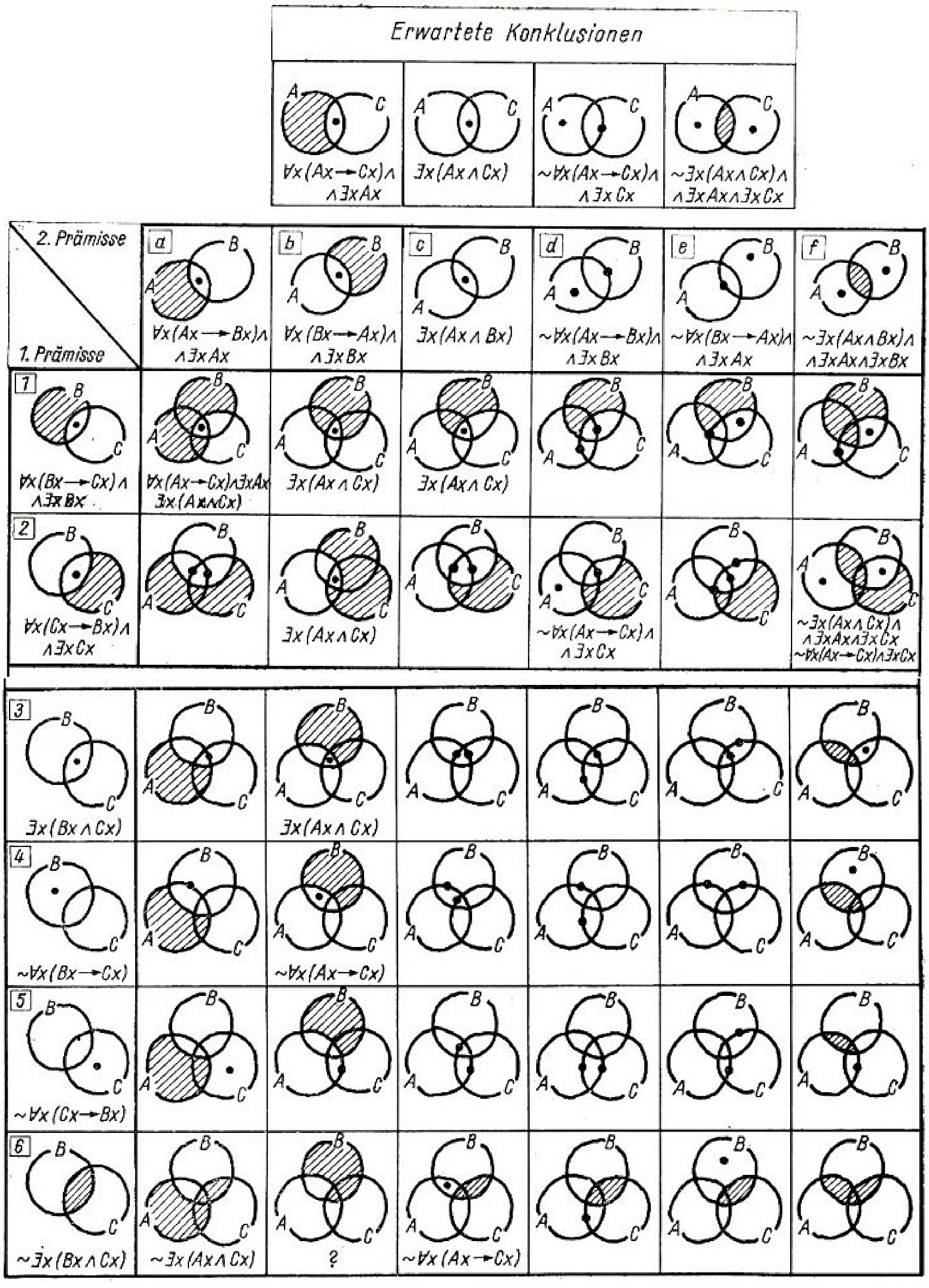


Abb. 127

Die Konklusion c6 dagegen tritt viermal auf (beide Prämissen werden verdoppelt).

Damit erhöht sich die Anzahl der richtigen Syllogismenarten von 8 auf 15. Die 8 richtigen Syllogismen wurden aus $4 \cdot (6 \cdot 6) = 144$ Fällen, die 15 aus $4 \cdot (8 \cdot 8) = 256$ Fällen ausgewählt. Hierbei bedeuten 4 die Anzahl der möglichen Konklusionen, 6 und 8 die Anzahlen der möglichen Prämissen.

9.5 Die Existenzannahme

Der Zählung der traditionellen Logik zufolge haben wir 15 Prämissenpaare gefunden, aus denen man Konklusionen der entsprechenden Form gewinnen kann. In der traditionellen Logik gibt es aber nicht 15, sondern 19 solcher Prämissenpaare. Die Bücher der traditionellen Logik sprechen sowohl im Fall b 1 als auch im Fall b 2 und dem doppelt gezählten Fall b 6 von einer Konklusion.

In den ersten beiden Fällen von einer des Typs "Es gibt ein ..., das ...", im letzten Fall von einer des Typs "Es gibt ein ..., das nicht ...".
In unserer Abbildungsreihe haben wir diese Fälle mit einem Fragezeichen versehen. Bei unserer Bezeichnungsweise werden diese Fälle von den Formeln $\exists x(Ax \wedge Cx)$ bzw. $\sim \forall x(Ax \rightarrow Cx)$ beschrieben. Wie kommt man aber darauf, dass diese Konklusionen aus den gegebenen Prämissenpaaren folgen?
Die Erklärung hierfür ist folgende:

Die traditionelle Logik vermeidet die leeren Mengen, und daher werden Behauptungen der Art "Jeder Atto ist ein Bag" nicht wie in Abbildung 128, sondern so wie in Abbildung 129 dargestellt.

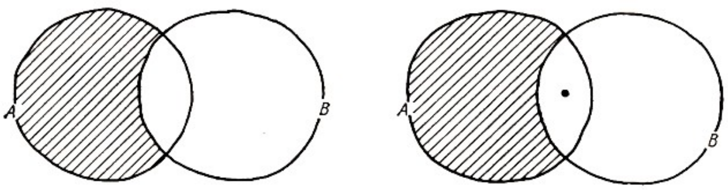


Abb. 128,129

Das heißt: Man lässt die Frage, ob es in der Grundmenge überhaupt einen Atto gibt, nicht offen, sondern nimmt von vornherein an, dass ein solcher existiert (der dann natürlich nur ein Bag sein kann, folglich gibt es auch einen Bag). Ebenso versteht man eine Behauptung der Form "Es gibt keinen Atto, der ein Bag ist" nicht so wie in Abbildung 130, sondern so wie in Abbildung 131. Das heißt:

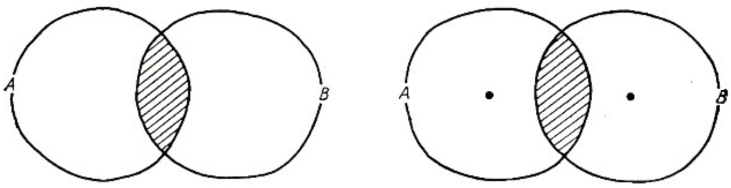


Abb. 130,131

Man setzt wieder von vornherein voraus, dass es in der Grundmenge sowohl einen Atto als auch einen Bag gibt. Im Fall der Behauptung Es gibt einen Atto, der ein Bag ist braucht man diese Annahme nicht extra zu machen - hier wissen wir es ohnehin. Bei der Behauptung "Nicht jeder Atto ist ein Bag", d. h., "Es gibt einen Atto, der kein Bag" ist, muss man lediglich die Existenz eines Bag voraussetzen, wenn man erreichen will, dass keine der Mengen leer ist.

In den Büchern über traditionelle Logik wird im allgemeinen nicht klar gesagt, ob dies tatsächlich vorausgesetzt wird oder nicht. Es ist auch nicht immer klar, ob in all diesen Fällen vorausgesetzt wird, dass die Grundmenge Elemente enthält, die weder Atto noch Bag sind.
Man kann diese Frage wohl auch nicht gut klären, da über die oben erwähnten Voraussetzungen gewöhnlich kein einziges Wort verloren wird. Auch die Frage nach der Grundmenge wird nicht gestellt. Was kein Atto ist, kann irgendetwas "sonstiges" sein. Es bleibt auch ungeklärt, ob dieses "Sonstige" nur konkret oder auch abstrakt sein kann, wobei man im letzteren Fall

wiederum solche heiklen Fragen wie die nach der Stufe der Abstraktion stellen könnte ...

Man kann sagen, dass es bei unseren alltäglichen Schlüssen tatsächlich sowohl Attos und Bags wie auch Nicht-Attos und Nicht-Bags gibt. Wovon wir zusprechen pflegen, wovon zu sprechen sich überhaupt lohnt, dessen Existenz ist gesichert. Diese Feststellung allerdings steckt die Grenzen dessen, von dem zu reden sich lohnt, zu eng ab. Jeder Körper, auf den keine Kraft einwirkt, befindet sich im Zustand der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, heißt es in der Physik. Solchen Körper gibt es aber nicht.

Jedenfalls nicht in der Welt der konkreten Dinge, wohl aber in der Welt der abstrakten Dinge, auf jener Ebene, auf der wir auch von Kreisen, Geraden oder Würfeln reden, lauter Dinge, die es in der Wirklichkeit nicht gibt. Lohnt es sich aber, von Dingen zu reden, die selbst auf dieser Ebene nicht existieren?
Häufig lohnt es sich wirklich. In der Mathematik zum Beispiel gibt es Sätze über die ungeraden vollkommenen Zahlen[28], über alle ungeraden vollkommenen Zahlen (so ist zum Beispiel bewiesen, dass jede ungerade vollkommene Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt), obwohl niemand weiß, ob solche Zahlen - selbstverständlich als abstrakte Dinge - überhaupt existieren.

Es kann sein, dass es keine einzige davon gibt. Das ändert aber nichts an der Gültigkeit der Sätze, ja nicht einmal daran, dass man diese Sätze - möglicherweise bei der Untersuchung anderer Probleme - benutzen kann. Sollen wir denn Schlüsse über Dinge, deren Existenz wir nicht garantieren können, verbieten?
Dadurch würden wir die Mathematik verstümmeln.

Aber nicht nur in der Mathematik und in anderen Wissenschaften bindet uns die Existenzannahme die Hände, sondern auch bei unseren Behauptungen und Schlüssen des täglichen Lebens. Kann man denn aus der Tatsache, dass auf einer Gesellschaft kein norwegisch sprechende Mann anwesend ist, der auf Hawaii war, darauf schließen, dass auf der Gesellschaft ein norwegisch sprechender Mann anwesend ist, der nicht auf Hawaii war? Natürlich nicht.

Die Existenzannahme aber - die wir auf unserer letzten Zeichnung durch die zusätzlich eingezeichneten Punkte gekennzeichnet haben - würde dies nach sich ziehen, ebenso wie die Folgerung, dass auf der Gesellschaft ein Mann ist, der auf Hawaii war, aber nicht norwegisch sprechen kann.
Wir sehen, dass die Existenzannahme nichts anderes ist als die Verwechslung der Begriffe "die meisten" und "alle", eine ungerechtfertigte Verallgemeinerung der allergewöhnlichsten und alltäglichen Fälle. Suchen wir dennoch eine Entschuldigung dafür, so können wir allenfalls das anführen:

Die Herren sind wir, das Wort ist nur der Knecht. Wir haben das Recht, den Wörtern den Sinn zu geben, den wir wollen. Wir haben auch das Recht, einem Satz der Art Jeder Atto ist ein Bag die Bedeutung Es gibt einen Atto und einem Satz der Art Es gibt keinen Atto, der ein Bag ist die Bedeutung Es gibt einen Bag zuzuschreiben.

Dieser Standpunkt lässt sich, wenn er klar und offen formuliert wird, verteidigen. Man kann ihn nur unter dem Gesichtspunkt der Zweckmäßigkeit missbilligen. Ein Sprachgebrauch, der zu einem Schluss wie dem oben erwähnten (Norwegen - Hawaii) führt, ist nicht sehr zweckmäßig. Nicht sehr zweckmäßig wäre auch ein Sprachgebrauch, bei dem aus der Tatsache, dass alle

[28] Wir nennen jene natürlichen Zahlen vollkommen, bei denen die Summe der Teiler (die Zahl selbst nicht mitgerechnet) gleich der betreffenden Zahl selbst ist, z.B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Bisher sind nur gerade vollkommene Zahlen bekannt.

Menschen sterblich sind, nicht folgt, dass ein 127jähriger Mensch sterblich ist (das würde davon abhängen, ob in diesem Augenblick irgendwo ein 127 Jahre alter Mensch lebt).

Wir sollen aber genug Verständnis aufbringen. Wir sollen die Logik des Altertums und des Mittelalters nicht dafür zur Rechenschaft ziehen, dass sie die zweckmäßige Definition nicht gefunden hat und ihren Standpunkt nicht genügend klarstellen konnte. Erinnern wir uns daran, wie schwer es der Menschheit gefallen ist, den Begriff der negativen Zahlen, ja selbst die Null zu verstehen. Warum hätte ihr der Kampf mit dem unausgesprochenen Begriff der leeren Menge leichter fallen sollen?
Versuchen wir, uns in den antiken und mittelalterlichen Sprachgebrauch hineinzufinden (der, nicht erfunden, auch noch in der Gegenwart umherspukt), und sehen wir uns an, welche Folgen sich hieraus ergeben, was dann die richtigen Syllogismen sind. Die Syllogismen selbst sind auch altertümlich, nähern wir uns ihnen also stilgerecht.

Dem (d.h.dem altertümlichen Sprachgebrauch) entsprechend müssen wir unsere Abbildungsfolge revidieren, denn es treten sowohl in den Prämissen als auch in den erwarteten Konklusionen Änderungen ein.
Um eine gewisse Konsequenz zu erreichen, ohne zu viele Komplikationen nach sich ziehende Bedingungen einzuführen, werden wir voraussetzen, dass keine der beiden Mengen in den Prämissen oder Konklusionen leer ist (es handelt sich um die Mengen, die wir durch "Atto", "Bag" und "Cekes" bezeichnet haben).

Wir schließen aber nicht aus, dass eventuell ihre Komplemente oder Durchschnitte oder der Durchschnitt des Komplements der einen dieser Mengen mit der anderen Menge doch leer ist. Folgende Fälle dürfen vorkommen, insofern A und B nicht leer sind (Abb. 132). Diese Voraussetzung führt somit zu Abbildung 133.

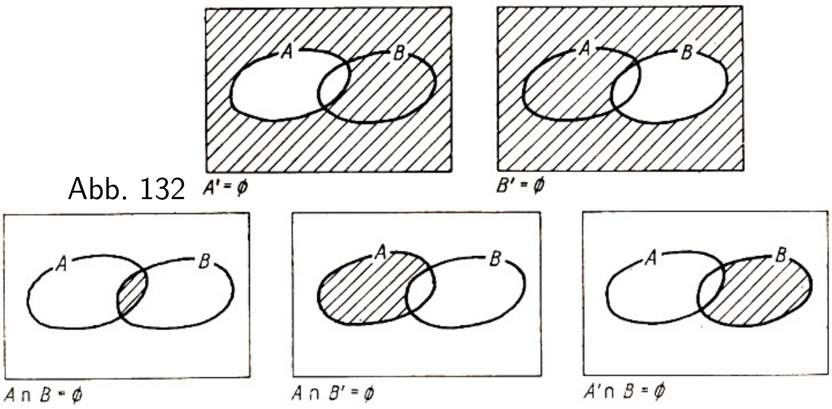


Abb. 132

Formelmäßig können wir sie durch unsere Voraussetzung dadurch erfassen, dass wir Konklusionen der folgenden Typen suchen:

$$\forall x(Ax \rightarrow Cx) \wedge \exists x Ax \qquad , \qquad \sim \forall x(Ax \rightarrow Cx) \wedge \exists x Cx$$

$$\exists x(Ax \wedge Cx) \qquad , \qquad \sim \exists x(Ax \wedge Cx) \wedge \exists x Ax \wedge \exists x Cx$$

und zwar ausgehend von Prämissen ähnlichen Typs, wobei an Stelle von A und C in der ersten Prämisse die Buchstaben B und C oder C und B und in der zweiten Prämisse die Buchstaben A und B oder B und A auftreten.
Hinsichtlich der Prämissen können wir sagen, dass die ursprünglichen Prämissen bestehen bleiben, dass jedoch zu ihnen noch gewisse Prämissen hinzugefügt werden wie etwa die folgenden:

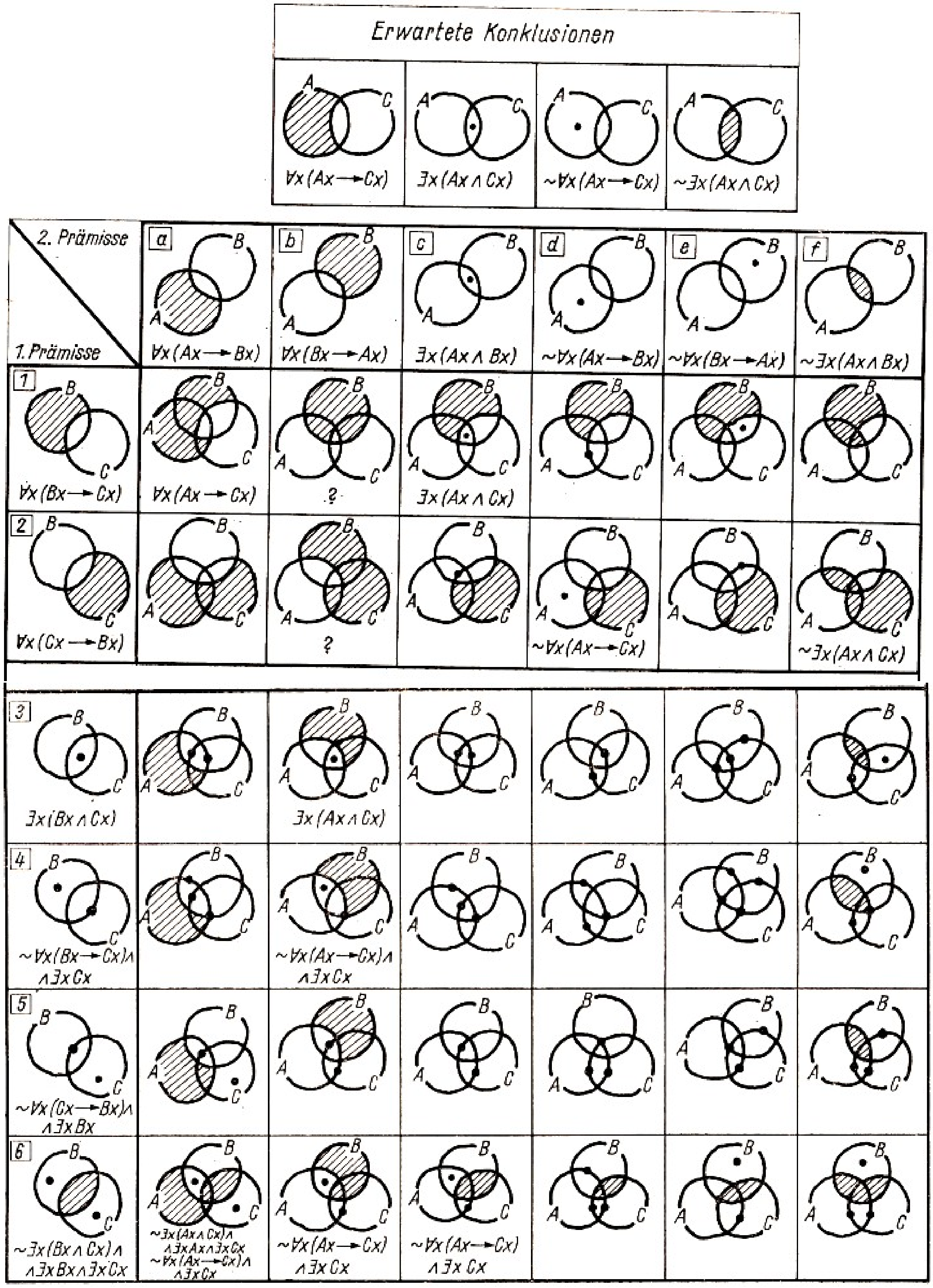


Abb. 133

$$
\begin{array}{c@{\qquad\qquad}c}
\forall x(Bx \to Cx) & \sim \exists x(Bx \wedge Cx) \\
\forall x(Bx \to Ax) & \forall x(Bx \to Ax) \\
 & \exists x Bx \\
\exists x Bx & \exists x Cx \\
\hline
\exists x(Ax \wedge Cx) & \sim \forall x(Ax \to Cx) \wedge \exists x Cx
\end{array}
$$

Wir können der Abbildung 133 entnehmen, dass man unter den gemachten Voraussetzungen in den Fällen a1, a6, b1, b2, b3, b4, b6, c1, c6, d2, f2 zu Konklusionen der gewünschten Art gelangt. Dies entspräche 11 Prämissenpaaren, da aber die Spalten c und f sowie die Reihen 3 und 6 doppelt gezählt werden (das heißt, dass man z. B. aus dem Fall b 3 zwei und aus dem Fall c 6 vier Syllogismen ablesen kann), erhalten wir - so gerechnet - wirklich aus 19 Prämissenpaaren Konklusionen.

Jedoch nicht 19 Konklusionen selbst, sondern 24. Der Grund hierfür ist - kurz gesagt - dieser: Ist die Existenzannahme in Kraft, so folgt aus einer Konklusion des Typs "Jedes..." sofort, dass "Ein ... existiert ..., das...", während aus einer Konklusion des Typs "Es existiert kein..., das..." folgt, dass "Ein... existiert, das nicht... ".
(Das folgt deshalb, weil wir den Wörtern gerade einen solchen Sinn gegeben haben, daß es daraus folgt.)

	a	b	c		d	e	f	
1	$\forall$ $(\exists)$	$\exists$	$\exists$	$\exists$				
2		$\exists$			$\sim\forall$		$\sim\exists$ $(\sim\forall)$	$\sim\exists$ $(\sim\forall)$
3		$\exists$						
		$\exists$						
4		$\sim\forall$						
5								
6	$\sim\exists$ $(\sim\forall)$	$\sim\forall$	$\sim\forall$	$\sim\forall$				
	$\sim\exists$ $(\sim\forall)$	$\sim\forall$	$\sim\forall$	$\sim\forall$				

	SaM	MaS	SiM	Mis	SoM	MoS	SeM	MeS
MaP	SaP (SiP)	SiP	SiP	SiP				
PaM		SiP			SoP		SeP (SoP)	SeP (SoP)
MiP		SiP						
PiM		SiP						
MoP		SoP						
PoM								
MeP	SeP (SoP)	SoP	SoP	SoP				
PeM	SeP (SoP)	SoP	SoP	SoP				

Abb. 134, 135

Abbildung 134 gibt einen Überblick über die erwähnten 19 + 5 Konklusionen. Mit den Bezeichnungen der traditionellen Logik (Abb. 135)

9.6 Über die „Theorie“ der kategorischen Syllogismen

In den vergangenen Jahrtausenden war es eine beachtliche, sogar bewundernswerte Leistung, solche Mosaiksteine der Gesetze des Denkens zu entdecken, wie es die kategorischen Syllogismen sind. Die um sie errichtete "Theorie" aber scheint dem heutigen Betrachter übertrieben. Die Klassifizierung der syllogistischen Schlüsse nach ihrer Richtigkeit ist eine Aufgabe von demselben Schwierigkeitsgrad wie diejenigen Aufgaben, von denen die Schüler, die sich am Wettbewerb im Lösen von Aufgaben der Mathematischen Blätter für die Oberschule (ungarisch: Közepiskolai Matematikai Lapok, abgekürzt KML) beteiligen, monatlich mehrere lösen.

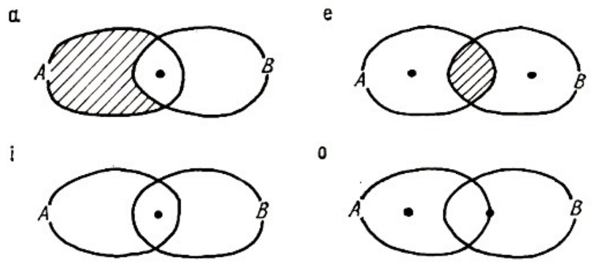
Man braucht dabei gar nicht einmal an die interessantesten und schwierigsten Aufgaben der KML zu denken. Stellen wir uns also vor, dass man eine mittelmäßig schwierige Aufgabe der KML durch die Arbeit von Generationen zu einer Theorie ausweiten würde, wobei man eine tiefere Erklärung dafür suchte, warum gewisse komplizierte Bedingungen gerade in denjenigen 24 von 256 möglichen Fällen erfüllt sind, in denen sie nun einmal erfüllt sind.

Etwa genauso viel Wert hat für den modernen Betrachter all das, was unter den Namen Axiome, Sätze oder Regeln der Syllogismen bekannt ist. Sehen wir uns einige Teile dieser Theorie an. Die traditionelle Logik unterteilt die vier verschiedenen, in den Syllogismen auftretenden Aussagetypen u. a. in folgender Weise[29] (Abb. 136):

[29]Nebenbei bemerkt beruht diese Art der Einteilung der Aussagen in behauptende und verneinende auf Äu-

behauptende verneinende

Abb. 136 allgemeine

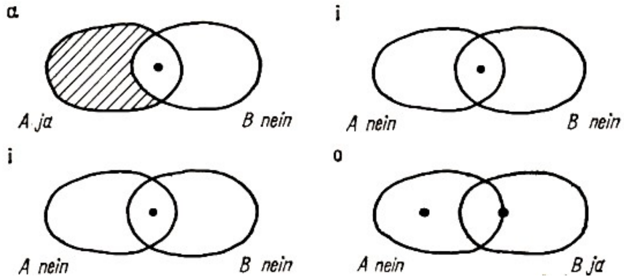


teilweise

Ein anderer Begriff bezieht sich nicht auf die Aussagen selbst, sondern auf A und B. Man sagt, dass A und B in den vier Aussagetypen entsprechend den folgenden Zeichnungen "distribuiert[30]" sind oder nicht (Abb. 137):

behauptende verneinende

Abb. 137 allgemeine



teilweise

Wäre dies die Definition, so wäre der Begriff "distribuiert" eindeutig und klar. Er wird jedoch gewöhnlich nicht in dieser Weise eingeführt, sondern mit Hilfe von Erklärungen, die man schwerlich eindeutig und klar nennen kann.
So sagt man beispielsweise, dass ein Terminus (d.h. eine logische Funktion einer Variablen) dann in einer Aussage distribuiert ist, wenn sich die Aussage auf alle Dinge im Bereich des Terminus "bezieht". Was hierbei unter "sich beziehen" zu verstehen ist, wird nicht genau gesagt. (Wir werden sehen, dass diese Verschwommenheit auch notwendig ist.)

Trotzdem lässt sich herausfinden, was es bedeuten soll: Was der zweite Terminus aussagt, ist entweder für alle zu dem fraglichen Terminus gehörenden Dinge falsch oder wahr. Sehen wir uns der Reihe nach folgende Fälle an:

1. Jeder Atto ist ein Bag.
Hier ist das Wort "Atto" distribuiert, da für jeden Atto gilt, dass er ein Bag ist. (Gerade dies drückt der Satz aus.) "Bag" ist dagegen nicht distribuiert, da nicht sicher ist, ob jeder Bag ein Atto ist und ebenso ungewiss ist, ob jeder Bag kein Atto ist.

2. Es gibt keinen Atto, der ein Bag ist.
Auch hier ist "Atto" distribuiert, denn für jeden Atto gilt, dass er kein Bag ist. Aber auch "Bag" ist distribuiert, da für jeden Bag wahr ist, dass er kein Atto ist.

3. Es gibt einen Atto, der ein Bag ist.

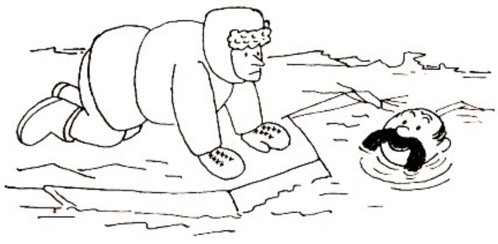
ßerlichkeiten. Sehen wir uns die Zeichnungen an: Dort, wo wir die Schraffierung sehen, verneinen wir die Existenz irgendeines Elements, dort, wo wir den Punkt sehen, behaupten wir sie. Beide als "teilweise" bezeichneten Aussagearten behaupten die Existenz bestimmter Elemente, ebenso derjenige Aussagetyp, den man nennt gewöhnlich verneinend nennt (deswegen nämlich, weil er die Existenz eines Elements von B behauptet.) Unter den als "allgemein" bezeichneten Aussagen hingegen bringen die angeblich behauptenden auch eine Verneinung zum Ausdruck (obwohl sie wegen der Existenzannahme daneben auch behaupten).

[30]Wir behalten die lateinische Bezeichnung bei, weil ihre übliche Übersetzung "verteilt" den Begriff schlecht wiedergibt. Vielleicht wäre "aufgelöst" treffender.

"Atto" ist nicht distribuiert, da wir weder wissen, dass jeder Atto ein Bag ist, noch sicher sein können, dass kein Atto ein Bag ist. Aus demselben Grund ist auch "Bag" nicht distribuiert.

4. Nicht jeder Atto ist ein Bag oder anders: Es gibt einen Atto, der kein Bag ist.
Hier ist sicher nicht wahr, dass jeder Atto ein Bag ist. Ohne zusätzliche Voraussetzungen ist aber auch nicht wahr, dass jeder Atto kein Bag ist. "Atto" ist daher nicht distribuiert.

Bisher stimmte alles überein. Sehen wir uns in Fall 4 nun auch das Wort "Bag" an. Ist es sicher, dass jeder Bag ein Atto ist? Nein. Ist es sicher, dass jeder Bag kein Atto ist? Auch das nicht. Also ist "Bag" nicht distribuiert.



In den Büchern über traditionelle Logik kann man trotzdem lesen, dass es distribuiert sei. Wie ist das zu erklären?
Sie reden in Wirklichkeit von etwas anderem. Sie sagen zum Beispiel: Um zu entscheiden, ob es einen Atto gibt, der kein Bag ist, muss man alle Bags betrachten. Oder aber sie sagen: Wenn wir auch nicht von jedem Bag wissen, ob er ein Atto ist, und wenn wir auch genauso wenig wissen, ob er kein Atto ist, so wissen wir doch wenigstens eines über jeden Bag: Er gehört nicht zu jenen Attos, die keine Bags sind.

So wissen wir zum Beispiel von einem bärtigen Mann, dass er nicht zu jenen Polarforschern gehört, die keinen Bart tragen. (Das wissen wir also wirklich!) Wenn wir uns nicht von den Wörtern verwirren lassen wollen, wird es am besten sein, die aus den fünf Zeichnungen bestehende (die Fälle mit der leeren Menge nicht enthaltende) Abbildungsreihe auf Seite 19 zu betrachten. (Wir erinnern daran, dass diese Zeichnungen so zu verstehen sind, dass kein Gebietsteil leer sein soll.)

Die vier Fälle - allgemein behauptend, teilweise behauptende, alle verneinend, teilweise verneinend - ergeben sich dadurch, dass wir die 5 Abbildungen auf Seite 147 auf zwei verschiedene Arten in zwei Gruppen von Abbildungen aufteilen (Abb. 138):

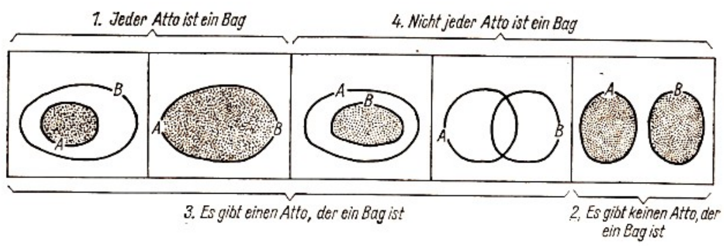


Abb. 138

Auf diesen Abbildungen wird angezeigt, dass ein Terminus distribuiert ist, wenn das ihm entsprechende Gebiet nicht zerteilt ist: Es wird an keiner Stelle von dem Kreis des anderen Terminus geschnitten. Wir haben diese Gebiete durch Punktierung hervorgehoben.
In zwei der drei Unterfälle der Aussage "Nicht jeder Atto ist ein Bag" ist "Bag"distribuiert. Das nützt jedoch nichts, wenn es für den mittleren Fall nicht zutrifft.

Warum soll man trotzdem so tun, als sei es wahr? Und was nützt es überhaupt, den Begriff "distribuiert" einzuführen ?

Es nützt insofern, als wir auf diese Weise (d. h.durch die Unterscheidung von behauptenden, verneinenden, allgemeinen und teilweisen Aussagen) Regeln formulieren können, die aus den 256 möglichen Fällen[31] die 24 richtigen auswählen.
Und aus diesem Grund muss man irgendwie erreichen, dass auch in dem Fall "Es gibt einen Atto, der kein Bag" ist der Terminus "Bag" distribuiert ist. Andernfalls nämlich stünde es schlimm um die Regeln. Sehen wir uns diese Regeln also an!

Von ihnen sind längere und kürzere Listen im Umlauf. In mehreren Büchern der traditionellen Logik kann man beispielsweise lesen, dass die folgenden Regeln zusammen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefern, dass ein kategorischer Syllogismus richtig (oder gültig) ist:[32]

1. Der Mittelterminus (d. h. die in beiden Prämissen vorkommende logische Funktion) ist in mindestens einer Prämisse distribuiert. - Damit fallen von den 256 Fällen jene weg, in denen B in keiner Prämisse distribuiert ist.

2. In der Konklusion ist kein Terminus distribuiert, der in den Prämissen nicht distribuiert ist. - Dadurch scheiden jene Fälle aus, in denen ein Terminus wohl in der Konklusion, nicht aber in der entsprechenden Prämisse distribuiert ist.

3. Mindestens eine Prämisse ist eine behauptende Aussage. - Damit fallen jene Fälle weg, in denen beide Prämissen verneinende Aussagen sind.

4. Ist eine Prämisse eine verneinende Aussage, so ist es auch die Konklusion. - Damit scheiden die Fälle aus, in denen eine Prämisse eine verneinende und die Konklusion eine behauptende Aussage ist.

Was heißt es, diese Bedingungen sind - einzeln genommen - notwendig für die Richtigkeit eines Syllogismus? Es heißt dies: Wenn auch nur eine einzige von ihnen in einem der 256 Fälle nicht erfüllt ist, so kann dieser Fall keinen richtigen Syllogismus repräsentieren. Mit anderen Worten: Ist der Syllogismus richtig, so muss jede der Bedingungen erfüllt sein, er darf keine der vier Verbotsbestimmungen übertreten.

Nun, das ist in Ordnung. Von den 24 Fällen verstößt keiner gegen eines der vier Verbote. Was heißt es, diese vier Bedingungen sind - zusammengenommen - hinreichend für die Richtigkeit eines kategorischen Syllogismus?
Es heißt folgendes: Sind in einem der 256 Fälle alle vier Bedingungen erfüllt, so liefert dieser Fall einen richtigen, gültigen Syllogismus. Mit anderen Worten: Wenn wir von den 256 Fällen alle jene streichen, die gegen die eine oder die andere Verbotsbestimmung verstoßen, dann dürfen schließlich nur noch 24 Fälle, die richtigen Syllogismen, übrigbleiben. Es bleiben aber nicht 24, sondern 25 übrig.
Der folgende Syllogismus

[31] Wenn wir immer von 256 Fällen sprechen, so dürfen wir nicht vergessen, dass es nur 144 voneinander verschiedene Fälle sind, die restlichen 112 unterscheiden sich nur in den Bezeichnungen von ihnen. Man könnte sogar noch viel mehr sich in der Bezeichnung voneinander unterscheidende Fälle herstellen. Wir haben uns aber dem von der Syllogistik willkürlich geschaffenen Rahmen angepasst. Letzten Endes ist dieser ganze Problemkreis willkürlich abgesteckt.

[32] Als fünfte (oder besser erste) Regel nimmt man zu den obigen noch die dazu, dass in dem Syllogismus nur drei Termini (logische Funktionen) vorkommen dürfen. Das bedeutet allerdings keine Einschränkung für die 256 Fälle: Wird diese Voraussetzung nicht gemacht, so sind es mehr als 256 Fälle.

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Cx \to Bx) \wedge \exists x Cx \\ \forall x(Bx \to Ax) \wedge \exists x Bx\end{array}}{\sim \forall x(Ax \to Cx) \wedge \exists x Cx}$$

bleibt nach dem Durchsieben aller Fälle übrig, er verletzt keine der vier Regeln. Trotzdem ist er falsch.

Was sollen wir tun? Wir müssen wegen dieses einen Falles noch eine Regel suchen, die ihn ausscheidet, die anderen 24 jedoch nicht berührt. Diese Regel findet sich auch in vielen Logikbüchern:

5. Sind beide Prämissen behauptende Aussagen, so ist es auch die Konklusion. Im obigen Fall sind beide Prämissen behauptende Aussagen, die Konklusion jedoch nicht.

Vom Standpunkt der Logik aus bieten diese Regeln wenig Interessantes: Es besteht kein überzeugender, plausibler Zusammenhang zwischen ihnen und der Richtigkeit der Schlüsse. Auch in mathematischer Hinsicht besagen sie nicht viel: Wir sind gewohnt, in der Mathematik mit Hilfe einiger Regeln auch unendlich viele Fälle "erledigen" zu können; hier ist der Aufwand, gemessen an der Zahl der Fälle, ziemlich groß.

Als geistige Gymnastik war das Auffinden dieser Regeln für die, von denen sie ursprünglich stammen, zweifellos interessant. Seitdem aber die traditionelle Logik erstarrt ist, sind sie nicht einmal in dieser Hinsicht mehr nützlich. Allein das fertige System wird von Generation an Generation weitergegeben, und mehr als einmal pflanzen sich auch die Fehler und Missverständnisse von Buch zu Buch fort.

Aufgaben

... sind überflüssig. Selbst wenn der Leser nur die ersten drei Kapitel des Buches kennt, weiß er schon mehr, als über die Syllogismen zu wissen sich eigentlich lohnt. Es lohnt sich nicht, über das, was er in diesem Anhang gelesen hat, hinaus noch mehr Zeit für sie aufzuwenden.

10 Seltsame Sätze

Die Verneinung einer Behauptung zu verneinen bedeutet, die ursprüngliche Behauptung zu bekräftigen.
Wenn es nicht wahr ist, dass A nicht wahr ist, so ist A wahr.
Und wenn es nicht wahr ist, dass B wahr ist? Dann ist B nicht wahr.
Und wenn es wahr ist, dass C nicht wahr ist? Dann ist C nicht wahr.
Und wenn es wahr ist, dass D wahr ist? Dann ist D natürlich wahr.
Soweit ist alles in Ordnung, nicht wahr?

Versuch wir nun festzustellen, welcher der folgenden beiden Sätze wahr ist und welcher falsch (es ist auch denkbar, dass alle beide entweder wahr oder falsch sind):

Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.

Auf den folgenden Seiten beschreiben wir den Lösungsgang: Wir empfehlen dem Leser jedoch, nicht gleich weiterzulesen.
Er möge das Problem selbst durchdenken und aus eigener Kraft entscheiden, welche in den obigen Sätzen ausgesprochene Behauptung wahr ist und welche nicht.

Wenn der Leser zu einer Überzeugung gekommen ist, oder auch nur zu einer Vermutung, wird es zweckmäßig sein, sie aufzuschreiben, um sie kontrollieren zu können; sonst kann er leicht durcheinanderkommen. Er möge also mit einem Bleistift fein neben einen Satz schreiben, ob er ihn für wahr hält oder falsch. Danach möge er auf Grund dessen, was er notiert hat, weiter überlegen.
Was müsste man neben den anderen Satz schreiben? Oder müsste man gar seine Meinung korrigieren? Wenn ja, welche Folgen hat diese Korrektur? Besteht zwischen beiden Feststellungen Übereinstimmung, sind beide in Ordnung?

Natürlich darf der Leser nur seine eigenen Feststellungen revidieren, wenn er einen Fehler in ihnen findet. Die eingerahmten Sätze darf er selbstverständlich nicht ändern.
Haben Sie nun alles durchdacht? Haben Sie es notiert? Haben Sie alles überprüft? Möchten Sie Ihren Gedankengang nun mit einem anderen vergleichen? Dann mögen Sie weiterlesen.

Wir gehen von der Annahme aus, der einfach umrahmte Satz sei wahr und schreiben neben ihn ein W. Wollen wir sehen, was daraus folgt:

W	Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.

Was bedeutet, dass dieser einfach umrahmte Satz wahr ist? Es bedeutet, dass dieser doppelt umrahmte Satz wahr ist. Wir schreiben unsere Feststellung neben den zweiten Satz:

W	Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.	W

Was bedeutet, dass dieser doppelt umrahmte Satz wahr ist? Es bedeutet, dass dieser einfach umrahmte Satz nicht wahr ist.

Unsere Ausgangsannahme war also falsch, denn sie führte zu einem Widerspruch.
Nun, das macht nichts, jetzt wissen wir wenigstens mit Sicherheit, dass der einfach umrahmte Satz nicht wahr sein kann. Dann muss er also falsch sein, oder nicht? Wir schreiben es daneben und prüfen nach:

F	Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.	

Was heißt, dass dieser einfach umrahmte Satz falsch ist? Es heißt, dass dieser doppelt umrahmte Satz nicht wahr ist.

F	Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.	F

Was heißt, dass dieser Satz falsch ist? Es heißt, dass der einfach umrahmte Satz wahr ist, d.h., die in ihm ausgesprochene Behauptung ist wahr.

Das ist schlimm: Wir sind wieder auf einen Widerspruch zu unserer Ausgangsannahme gestoßen. Wir haben auch diesmal mit der einfachen Umrahmung begonnen und angenommen, dass ihr Inhalt falsch ist. Hiervon ausgehend, sind wir zu der Feststellung gelangt, dass ihr Inhalt wahr ist.

Vorhin, als wir angenommen haben, dass der einfach umrahmte Satz wahr ist, ist es uns genauso ergangen. Vorhin hatten wir es aber nur mit dem Wahrheitswert W versucht, und wir konnten nicht sicher sein, dass wir schon den richtigen Wert getroffen hatten.
Nachdem wir es mit dem Wert W erfolglos versucht hatten, wollten wir sicher gehen und haben es mit dem Wert F probiert. Dass wir auch dabei auf einen Widerspruch gestoßen sind, bedeutet nicht nur, dass unsere Ausgangsannahme falsch gewesen ist, sondern daß wir eine grundsätzlich andere Richtung einschlagen müssen. Es gibt aber keine anderen Richtungen mehr, wir können nicht weiterkommen!

Wir müssen uns damit abfinden, dass wir den beiden Sätzen keinen Wahrheitswert zuschreiben können. Sie klingen wie sinnvolle Sätze, wir wissen genau, worauf sie sich beziehen, und trotzdem können wir nicht sagen, dass sie Aussagen darstellen.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden beiden Sätze!

Der doppelt umrahmte Satz ist nicht wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist nicht wahr.

Können wir hierbei eindeutig entscheiden, welcher Wahrheitswert welcher Satz zugeordnet werden muss? Wenn zwei Menschen zueinander sagen "Du lügst", welcher von ihnen sagt dann die Wahrheit?

2. Analysieren Sie die folgenden beiden Sätze in derselben Weise!

Der doppelt umrahmte Satz ist wahr.	Der einfach umrahmte Satz ist wahr.

Wenn zwei Menschen zueinander sagen "Du sagst die Wahrheit", welcher von ihnen sagt dann die Wahrheit?

3. Bestimmen Sie den Wahrheitswert des folgenden Satzes!

$\boxed{\text{Was dieser Satz behauptet, ist nicht wahr.}}$

Sagt jemand die Wahrheit, der sagt: "Ich lüge jetzt"? Oder lügt er?

4. Können Sie den Wahrheitswert des folgenden Satzes feststellen?

Was dieser Satz behauptet, ist wahr.

Kann dieser Satz wahr sein? Kann er nicht wahr sein?
Sagt jemand die Wahrheit, der sagt "Ich sage die Wahrheit"? Oder lügt er?

5. Ein Kreter sagte einmal: "Alle Kreter lügen immer."
Ist es möglich, dass dieser Kreter damit die Wahrheit gesagt hat? Ist es möglich, dass er gelogen hat? Ist es sicher, dass er die Wahrheit gesagt hat? Ist es sicher, dass er gelogen hat? Ist es auf Grund dieses Satzes möglich, dass alle Kreter immer die Wahrheit sagen? Oder aber, dass alle Kreter immer lügen?
Was können wir auf Grund dieses Satzes mit Sicherheit über Wahrheit oder Unwahrheit der Äußerungen der Kreter behaupten? Gibt es einen unter ihnen, der immer die Wahrheit sagt? Gibt es einen unter ihnen, der immer lügt?

11 Lösungen der Aufgaben

1. Kapitel

1. (1) und (2) werden sowohl bei der Substitution a) als auch bei b) und e) wahr. ans Beispiel ist folgendes wahr:
Wenn das Stück Speck aus Eisen ist, so wird es vom Magneten angezogen.
Da nämlich ein Stück Speck nie aus Eisen ist, ist das vordere Glied der Implikation falsch, derartige Implikationen sind aber immer wahr. Das Wort "Eisen" ist im allgemeinen nicht aus Eisen, es kann aber (z.B. auf Firmenschildern) auch aus Eisen sein. Wenn es nicht aus Eisen ist, so wird Aussage (1) deshalb wahr, weil ihr vorderes Glied falsch ist. Ist es aber aus Eisen, so wird Aussage (1) deshalb wahr, weil dann auch ihr hinteres Glied wahr ist. Bei (2) ist es gerade umgekehrt.

2. d) und e) sind mit der ursprünglichen Aussage gleichbedeutend, a) und b) nicht, da sie keine Aussagen sind. Die Aussage c) ist im Gegensatz zur ursprünglichen Aussage falsch, also ebenfalls nicht gleichbedeutend mit dieser.

3. $Ki \wedge Si \wedge Gi$ (Wir haben die Teilaussagen konjunktiv miteinander verbunden.)

4. $\forall x Vx$

5. $\forall x Sx \wedge Th$ (Klammern sind nicht nötig, weil sich das $\forall x$ nur auf Sx bezieht, nicht aber auf die übrigen Teile der Formel.) Wir hätten, ohne den Sinn des Satzes. zu ändern, auch folgende Formulierung zugrunde legen können: Für alle x ist wahr:
Am Ort x ist es schön, aber am schönsten ist es zu Hause, also $\forall x(Sx \wedge Th)$. Die ursprüngliche Formulierung des Satzes wird jedoch durch die erste Formel besser wiedergegeben.

6. a) $G6$; b) $\sim G9$; c) Ga; d) $\sim Gb$; e) $\forall x Gx$; f) $\sim \forall x Gx$; g) $\forall x \sim Gx$; h) $\sim \forall x \sim Gx$;
i) $\forall x(Gx \vee \sim Gx)$; j) $\forall x(Gx \wedge \sim Gx)$; k) $Gm \rightarrow \sim Gm$; l) $\forall x[Gx \rightarrow \sim G(x+1)]$

(In den beiden letzten Fällen mussten wir uns bei der Formalisierung den Sinn der Sätze gründlich überlegen. Im vorletzten Fall war von gewissen, nicht näher bestimmten Zahlen m und n die Rede, im letzten dagegen trotz der Formulierung - die von "einer Zahl" spricht - von allen Zahlen.)

7. $\forall x(Lx \rightarrow \rightarrow \sim Fx)$

8. $\sim \forall x(Lx \rightarrow Gx) \wedge (Es \rightarrow Gr)$

9. a) $\sim \forall x Sx$; b) $\forall x(Ax \rightarrow Lx)$.

10. a) Wenn wir den Satz in der folgenden "halbfertigen"Weise formulieren:
Für alle x gilt: Wenn x mein ist, so ist x dein; und ferner gilt für alle x: Wenn x dein ist, so ist x mein; so erhalten wir die Formel:
$\forall x(Mx \rightarrow Dx) \wedge \forall x(Dx \rightarrow Mx)$
Auch die folgende Formulierung bedeutet dasselbe:
Für alle x gilt: Wenn x mein ist, so ist x dein, und wenn x dein ist, so ist x mein.
Hieraus ergibt sich folgende Formel:
$\forall x[(Mx \rightarrow Dx) \wedge (Dx \rightarrow Mx)]$
Unter Benutzung des Äquivalenzzeichens können wir den Teil innerhalb der eckigen Klammern kürzer schreiben:
$\forall x(Mx \leftrightarrow Dx)$

*b) und *c) Bei der Formalisierung dieser beiden Sätze sind Mathematiker wirklich im Nachteil! Beide Sätze bedeuten in der Umgangssprache nämlich: "...dann gebe ich, sonst nicht ...". Der Unterschied ist rein stilistischer Art. Die zweite Formulierung hebt das "... sonst nicht ..." stärker hervor.
Die Lösung heißt daher in beiden Fällen: $\forall x(Tx \to Bx)$.
Entsprechend dem mathematischen Sprachgebrauch müsste man diese Formel aber folgendermaßen rückübersetzen:
Ich gebe dann und nur dann Trinkgeld, wenn ich höflich bedient werde,
was allerdings für Ohren, die nicht an die mathematische Ausdrucksweise gewöhnt sind, umständlich klingen würde.

d) Dies hingegen ist ein dichterisches Beispiel für den Gebrauch der Wendung "nur dann" im mathematischen Sinn. Der Dichter wollte wohl kaum sagen, dass stets große Taten geschehen, wenn es Helden gibt, die sie zu vollbringen wagen. Mit ziemlicher Sicherheit hat er hier das "nur" an Stelle des unpoetischen "höchstens" gebraucht:
"Höchstens dann geschehen große Taten ...", das heißt, wenn es keine Helden gibt, die etwas zu vollbringen wagen, dann werden auch keine großen Taten geschehen:
$\forall x(\sim Hx \to \sim Tx)$
Dafür können wir natürlich auch schreiben:
$\forall x(Tx \to Hx)$
Wir entnehmen dieser Formel: Bei jeder Gelegenheit, bei der große Dinge geboren wurden, gab es Tapfere, die etwas zu vollbringen wagten. Ady hat es schöner gesagt, die logische Bedeutung aber ist dieselbe.

*11. Eine andere Formulierung der gegebenen Aussage lautet: Nicht für jedes x gilt: Wenn x ein Mantel ist und ich x im Warenhaus gesehen habe, dann ist x teuer und für alle x gilt: Wenn x ein Mantel ist und ich x im Warenhaus gesehen habe und x nicht teuer ist, dann gefiel mir die Farbe von x nicht und x passte mir nicht.
Als Formel:
$\sim \forall x[(Mx \wedge Sx) \to Tx] \wedge \forall x[(Mx \wedge Sx \wedge \sim Tx) \to (\sim Gx \wedge \sim Px)]$
Auf der Grundlage dieser Formulierungen der Ausgangsaussage wären wir zu anderen Formeln gekommen. Wenn die Formel des Lesers sich also von der obigen unterscheidet, so kann sie trotzdem richtig sein.

12. Wenn wir die Wörter "Würfel" und "sind gefallen" durch w bzw. F abkürzen, so gibt Fw die logische Struktur des Satzes wieder. Aber auch Wf kann dies leisten, sofern wir - unzweckmäßigerweise - die Bezeichnungen vertauschen. Bleiben wir bei der ersten Bezeichnungsweise, so können wir die anderen Formeln beispielsweise so lesen:
a) Das gefallene Ding ist ein Würfel.
c) Alles ist ein Würfel. (D. h. Was immer x sein mag, dieses x ist ein Würfel. Wir bemerken, dass Klammern hier unnötig sind, da sich das $\forall x$ nur auf Wx als Ganzes beziehen kann.)
d) Alles ist gefallen.
e) Alles, was Würfel ist, ist gefallen. Kurz: Alle Würfel sind gefallen. (Caesar nimmt dagegen - symbolisch - auf einen bestimmten Würfel Bezug und nicht auf alle!)
d) Alles, was gefallen ist, ist ein Würfel.

13. (Die Lösung hängt hier, abgesehen von der individuellen Wahl der Buchstaben, auch vom Lösenden ab. Die folgenden Formeln können daher nur als Beispiele gelten.)
a) Hk ($H\square = \square$ ist ein Hauskaninchen; $k =$ dieses Kaninchen.)
b) $\forall x(Hx \to Wx)$. ($H\square$ wie oben; $W\square = \square$ ist ein Verwandter des Wildkaninchens.)

c) $\sim La$. ($L\square$ = Wir geben in Aufgabe $\square$ eine Anleitung für die Wahl der Bezeichnungen; a = diese Aufgabe.)
d) $\sim \forall x Lx$ oder $\sim \forall x(Ax \rightarrow Lx)$. ($L\square$ wie oben, in der letzten Formel wählten wir: $A\square = \square$ ist eine Aufgabe.) Bei der ersten Formel setzten wir grundsätzlich voraus, dass x nur eine Aufgabe bezeichnen kann, bei der zweiten Formel ist diese Einschränkung nicht notwendig, d.h., x kann irgendein Ding bezeichnen.)

2. Kapitel

1. Abb. 139

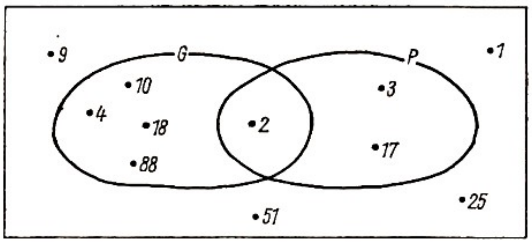


Abb. 139 Grundmenge: die positiven ganzen Zahlen

(Beide Mengen haben ein einziges gemeinsames Element, nämlich die natürliche Zahl 2. Sie ist eine Primzahl, denn sie besitzt zwei Teiler - die Eins und sich selbst. Jede andere gerade Zahl kann nicht Primzahl sein, da sie außer durch 1 und sich selbst auch noch durch 2 teilbar ist. Die 1 ist keine Primzahl, da sie nur sich selbst als Teiler besitzt; Primzahlen müssen jedoch zwei Teiler haben.)

2. a) F; b) F; c) W; d) W (Letzteres gilt gerade deshalb, weil 2 eine Primzahl ist.)

3. Abb. 140

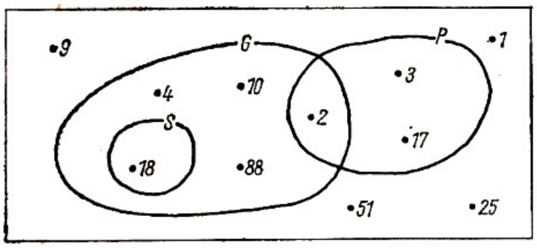


Abb. 140 Grundmenge: die positiven ganzen Zahlen

4. a) W; b) F; c) F; d) W; e) F; f) W; g) W; h) W; i) F; j) W; k) F; l) W
Das letzte Resultat mag seltsam erscheinen, ist aber wahr: Es gibt eine Zahl, die - falls sie durch 6 teilbar ist - eine Primzahl ist. Aber wenn sie durch 6 teilbar ist, so kann sie doch gar keine Primzahl sein! Wie mag diese seltsame Zahl nur aussehen?
Es gibt viele von ihnen, z.B. $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$,.... Sehen wir einmal nach:
$S1 \rightarrow P1$ ist wahr, da das vordere Glied falsch ist, $S2 \rightarrow P2$ ebenfalls usw.
Denken wir daran, dass wir die Implikation durch die Alternative ausdrücken können:

Wenn x durch 6 teilbar ist, so ist x eine Primzahl bedeutet: x ist nicht durch 6 teilbar oder eine Primzahl. Dies aber ist für jede nicht durch 6 teilbare Zahl wahr, ob Primzahl oder nicht. Unter den durch 6 teilbaren Zahlen gibt es keine, für die die obige Behauptung wahr ist. Sie wäre jedoch für alle durch 6 teilbaren Primzahlen wahr, wenn es solche gäbe.

Wir können aber noch mehr behaupten. $\exists x(Sx \rightarrow Px)$ ist nicht nur in dieser Grundmenge

und bei der angegebenen Bedeutung von S und P wahr, sondern bei beliebiger Grundmenge und beliebiger Bedeutung von S und P, vorausgesetzt, dass wenigstens ein Ding a existiert, für das Px wahr ist.
(Für dieses Element nämlich ist $Sa \to Pa$ wegen der Wahrheit des hinteren Gliedes wahr.) Diese Aussage ist sogar dann wahr, wenn ein solches Element nicht existiert, vorausgesetzt, dass Sx nicht für alle Elemente wahr, sondern für wenigstens ein Element b nicht wahr ist. (In diesem Fall folgt die Wahrheit der Aussage daraus, dass $Sb \to Pb$ wegen der Falschheit des vorderen Gliedes wahr ist.) Die Aussage $\exists x(Sz \to Px)$ ist nur dann falsch, wenn x für alle Elemente der Grundmenge, Px dagegen für kein einziges dieser Elemente wahr ist.

Aussagen der Art Es gibt ein S, das ein P ist können wir also nicht in dieser Weise formalisieren:

$\exists x(Sx \to Px)$

sondern nur durch Formeln der folgenden Art, die an Stelle der Implikation eine Konjunktion enthalten, wie wir schon an vielen Beispielen gesehen haben:

$\exists x(Sx \land Px)$

Aussagen der Art "Jedes S ist ein P dagegen werden in der folgenden Weise formalisiert, wie wir gleichfalls schon an vielen Beispielen gesehen haben:

$\forall x(Sx \to Px)$

Es ist nützlich, sich zu merken, dass sich die Formalisierungen dieser wichtigen Aussagetypen nicht nur hinsichtlich der Quantoren, sondern auch hinsichtlich der logischen Operationen unterscheiden.

5. a) $\sim \exists xFx$; b) $\forall x \sim Fx$; c) $\sim \forall xSx$; d) $\exists x \sim Sx$; e) $\forall xVx$; f) $\sim \exists x \sim Vx$; g) $\exists xGx$; h) $\sim \forall x \sim Gx$
(Wir bemerken, dass a) und b), e) und d), e) und f) sowie g) und h) dasselbe bedeuten; die zugehörigen Zeichnungen stimmen überein.)

6 a) $-\exists x(Mx \land Fx)$; b) $\forall x(Mx \to\sim Fx)$; c) $\sim \forall x(Mx \to Sx)$; d) $\exists x(Mx\land \sim Sx)$

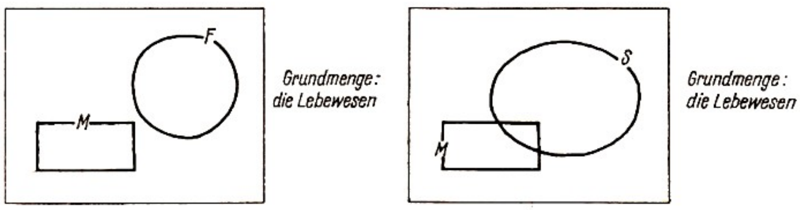


Abb. 141,142

e) $\forall x(Mx \to Vx)$; f) $\sim \exists x(Mx\land \sim Vx)$; g) $\exists x(Mx \land Gx)$; h) $\sim \forall x(Mx \to\sim Gx)$

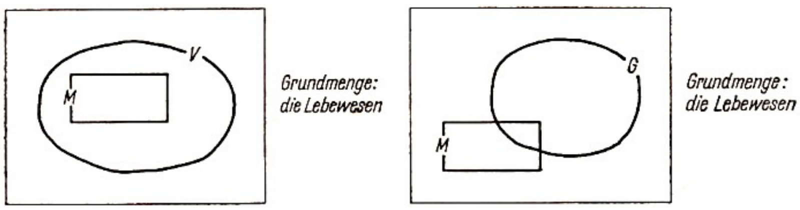


Abb. 143,144

(Die Zeichnungen geben den Inhalt der jeweils darüberstehenden Formelpaare nur annähernd wieder, vgl. die Aufgaben 12 bis 14.)

7. a) $\exists xRx$; b) $\sim \forall x \sim Rx$; c) $\exists x \sim Rx$; d) $\sim \forall xRx$;

e) $\forall x(Rx \to \sim\sim Rx)$ oder, was dasselbe bedeutet, $\forall x(Rx \to Rx)$
f) $\sim \exists x(Rx \to \sim Rx)$; g)
$forallx(Rx \vee \sim Rx)$; h) $\sim \exists x \sim (Rx \vee \sim Rx)$
a) und b) drücken dasselbe aus, ebenso c) und d) sowie g) und h). f) ist nicht wahr, weil es folgendes ausdrückt:
$\sim \exists x(\sim Rx \vee \sim Rx)$ oder einfacher: $\sim \exists x \sim Rx$. In Worten: Es gibt keine irrationale Zahl.

8. Sehen wir der Einfachheit halber von der Wiederholung der beiden letzten Zeilen ab, so erhalten wir:

$-\exists xNx \wedge \sim \exists xAx \wedge \sim \exists xVx \wedge \sim \exists xBx$

oder kürzer: $\sim \exists x(Nx \vee Ax \vee Vx \vee Bx)$

9. $\sim \exists x(Gx \vee Sx)$ (Es gibt kein Ding auf der Welt, das gut oder schlecht ist.)
oder: $\sim \exists xGx \wedge \sim \exists xSx$ (Es gibt nichts auf der Welt, was gut ist, und es gibt nichts auf der Welt, was schlecht ist.)
oder: $\forall x \sim Gx \wedge \forall x \sim Sx$ (Alles auf der Welt ist nicht gut und alles auf der Welt ist nicht schlecht.)
Würden wir folgende Bezeichnungen wählen:
$G\Box = \Box$ ist gut, $\sim G\Box = \Box$ ist schlecht,
so würden wir zu folgendem Ergebnis gelangen:

Nichts auf der Welt ist gut und nichts auf der Welt ist nicht gut, das heißt: Es gibt nichts auf der Welt - die Grundmenge ist leer.

*10. Wir versuchen von folgender Rohübersetzung auszugehen:
Es gibt kein x, für das gilt: Wenn x keine Feinde gehabt hat, so hat x sich Freunde erworben.
Als Formel: $\sim \exists x(\sim Fx \to Ex)$.
Dafür können wir auch schreiben: $\sim \exists x(Fx \vee Ex)$.

Dies bedeutet wiederum:
Es gibt kein x, für das gilt: x hat Feinde gehabt, oder x hat sich Freunde erworben.
Das heißt: Es gibt niemanden, der Feinde gehabt oder sich Freunde erworben hätte. Das stimmt offenbar nicht mit dem Sinn des Ausgangssatzes überein. Es wird besser sein, etwas von der ursprünglichen Formulierung des Satzes abzugehen, um auf diese Weise den Sinn besser wiedergeben zu können:
Es gibt kein x, so dass x keine Feinde gehabt und sich trotzdem Freunde erworben hat.

Hieraus erhält man die Formel: $\sim \exists x(\sim Fx \wedge Ex)$
Hier ist keine Spur von einer Implikation zu sehen. Die Implikation wird aber sofort auftreten, wenn wir die letzte Rohübersetzung umformulieren. Wenn es kein x gibt, für das die zweite Hälfte der Aussage wahr ist, so ist für alle x deren Gegenteil wahr, und so erhalten wir zunächst:

Was immer x sein mag, es ist nicht wahr, dass x keine Feinde gehabt und x sich (trotzdem) Freunde erworben hat.
In einer Formel: $\forall x \sim (\sim Fx \wedge Ex)$
Wir wissen aber, dass die Formel $\sim (\sim F\Box \wedge E\Box)$ dasselbe bedeutet wie die Implikation $E\Box \to F\Box$ (letztere können wir nämlich dadurch verneinen, dass wir behaupten: $E\Box$ ist wahr, $F\Box$ aber nicht). Unsere Formel nimmt daher die Gestalt $\forall x(Ex \to Fx)$ an.

Wenn sich jemand Freunde erwirbt, so hat er (mit Sicherheit) Feinde gehabt.
Oder anders: $\forall x(\sim Fx \to \sim Ex)$

Wenn jemand keine Feinde gehabt hat, so erwirbt er sich keine Freunde. Beide Formulierungen entsprechen dem Sinn des Ausgangssatzes.

11. In ursprünglicher Form:

$\sim \exists x(Gx \wedge \sim Bx)$

Umformuliert: (Jeder große Erfolg wird durch Begeisterung erreicht.)

$\forall x(Gx \rightarrow Bx)$

12. Halten wir uns bei der Darstellung auch jetzt an ein konkretes Beispiel (an das von den Schülern, die in dem Tunnel oder in der Höhle waren), ohne dadurch jedoch die Allgemeinheit Überlegungen einzuschränken. In allen acht Fällen können wir fragen: Gibt es in der Klasse neben den Schülern, die im Tunnel oder in der Höhle waren, noch weitere Schüler?
Je nachdem, ob diese Antwort bejahend oder verneinend ausfällt, erhalten wir zu jedem Fall zwei Unterfälle, insgesamt 16.

Darin ist auch schon der Fall enthalten, dass niemand in der Höhle und niemand im Tunnel gewesen ist und "außer diesen Schülern" (d. h. denjenigen, die in der Höhle oder im Tunnel waren) keine weiteren in der Klasse sind, d. h. also der Fall, dass es gar keinen Schüler in der Klasse gibt, dass die Grundmenge leer ist.

Wenn wir diesen Fall ausschließen, verbleiben noch 15 Möglichkeiten. Das bedeutet aber nicht, dass bei beliebig vorgegebener, nicht leerer Grundmenge alle diese 15 Fälle eintreten können. In einer Klasse von zwei Schülern wird zum Beispiel von den ursprünglich acht Fällen einer wegfallen (welcher?) und von den 15 Fällen sogar noch mehr (wie viele?)

13. (1) $\sim \forall x(Ax \rightarrow Bx)$
Diese Formel wird so gelesen: Nicht jeder, der im Tunnel gewesen ist, ist in der Höhle gewesen.
In anderer Formulierung: Es gibt jemanden, der im Tunnel gewesen ist und der nicht in der Höhle gewesen ist.
Hieraus ergibt sich die andere Formel: (2) $\exists x(Ax \wedge \sim Bx)$

Genauso sind auch die anderen Umformulierungen zu verstehen:
(3) $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ Jeder, der im Tunnel gewesen ist, ist in der Höhle gewesen.
(4) $\sim \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$ Es gibt niemanden, der im Tunnel und nicht in der Höhle gewesen ist.
(5) $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$ Es gibt niemanden, der im Tunnel und in der Höhle gewesen ist.
(6) $\forall x(Ax \rightarrow \sim Bx)$ Jeder, der im Tunnel gewesen ist, ist nicht in der Höhle gewesen.
(7) $\exists x(Ax \wedge Bx)$ Es gibt jemanden, der im Tunnel und in der Höhle gewesen ist.
(8) $\sim \forall x(Ax \rightarrow \sim Bx)$ Nicht jeder, der im Tunnel gewesen ist, ist nicht in der Höhle gewesen.

Ersetzen wir in den Formeln jeweils A durch B und B durch A sowie in den Sätzen jeweils "Tunnel" durch "Höhle" und "Höhle" durch "Tunnel", so erhalten wir acht weitere Formeln bzw. Sätze. Es ist überflüssig, auch sie noch aufzuschreiben. Wir bezeichnen sie der Reihe nach mit (1)*, (2)*, ..., (8)*. (5)* bis (8)* drücken dasselbe aus wie die entsprechenden Formeln bzw. Sätze ohne Stern, d. h., die Bedeutung von (5), (6), (5)*, (6)* stimmt überein, ebenso die von (7), (8), (7)* und (8)*. Die übrigen acht Formeln und Sätze bedeuten nur paarweise dasselbe:

(1)	(1)*	(3)	(3)*	(5)	(7)
(2)	(2)*	(4)	(4)*	(6)	(8)
				(5)*	(7)*
				(6)*	(8)*

Aus jeder Spalte wollen wir nach irgendeiner Regel je eine Formel auswählen, z. B. nur Formeln mit dem $\exists$-Quantor. Behalten wir die alphabetische Reihenfolge von A und B bei bzw. stellen wir sie durch Vertauschung wieder her, so erhalten wir:

(2) $\exists x(Ax \wedge \sim Bx)$, (2)* $\exists x(\sim Ax \wedge Bx)$,
(4) $\sim \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$, (4)*$\sim \exists x(\sim Ax \wedge Bx)$.
(5) $\sim \exists x(Ax \wedge Bx)$, (7) $\exists x(Ax \wedge Bx)$.
(Die sich in diesem Zusammenhang noch anbietende Formel $\exists x(\sim Ax \wedge \sim Bx)$ und ihre Verneinung würde man offenbar zu einer Aufteilung der 8 Fälle in die 16 Fälle benötigen, von der in der vorigen Aufgabe die Rede war.)

14. Wir wollen noch einmal Abbildung 33 betrachten! Zu jeder Ecke des Würfels wollen wir eine Formel finden, die dieser, aber auch nur dieser Ecke entspricht. Die rechte, obere, vordere Ecke können wir au Beispiel durch die drei Angaben (rechts, oben, vorn) eindeutig bestimmen. Genauso eindeutig können wir den ihr entsprechenden Fall durch drei Formeln bestimmen, die sämtlich erfüllt sein müssen. Also wird dieser Fall durch die Konjunktion ausgedrückt:

$\sim \forall x(Bx \to Ax) \wedge \exists x(Ax \wedge Bx) \wedge \forall x(Ax \to Bx)$

Ebenso können wir die Formeln erhalten, die die übrigen Fälle charakterisieren. (Es ist eine andere Frage, ob es hierfür auch einfachere Formeln gibt. Diese Frage wollen wir jedoch in diesem Zusammenhang außer acht lassen.)

15. Für drei Mengen ist die Darstellung mit Hilfe von drei Kreisen die beste (Abb. 145).

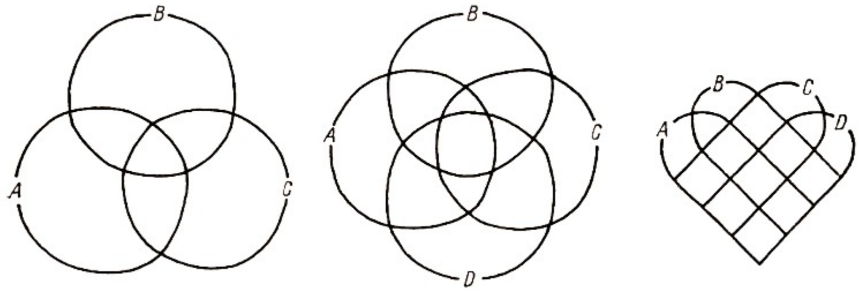


Abb. 145,146,147

Im Fall von vier Mengen führt die Darstellung mit Kreisen nicht zum Ziel. So bleibt z. B. der folgende (natürlich erscheinende) Versuch (Abb. 146) ergebnislos, weil zwei der erwarteten 16 Gebietsteile fehlen. (Es gibt keinen Punkt der Ebene, der wohl in A und C, jedoch weder in B noch D enthalten ist und umgekehrt.)
Ein Beispiel für eine Darstellung, die keine Möglichkeit auslässt, gibt Abbildung 147. (Die Darstellung geht von einem in $4 \cdot 4$ Teile zerlegten Quadrat aus. Die Halbkreise sind nur der besseren Übersichtlichkeit wegen hinzugefügt.)

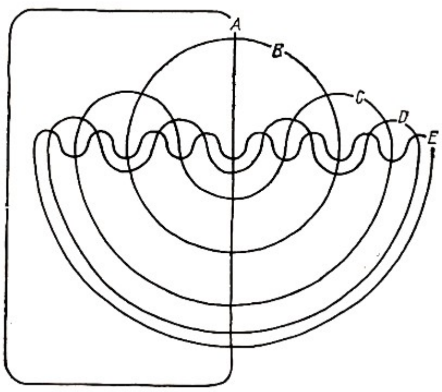


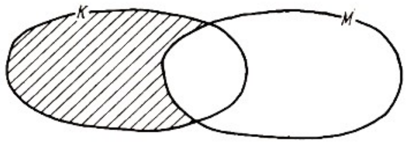
Abb. 148

Sehen wir uns zum Abschluss noch eine Darstellung für fünf Mengen an (Abb. 148). Das ist keine so schöne symmetrische Figur wie die vorigen. Dafür kann man ihr aber das allgemeine Prinzip entnehmen, nach dem man die Darstellung auf den Fall beliebig vieler Mengen ausdehnen kann.
An Stelle der am meisten gewellten Linie hätte man auch eine geradlinige Strecke verwenden können, wenn sich die Darstellung auf den Fall von fünf Mengen beschränkt. Die Wellenlinie ist nur bei der Fortsetzung der Darstellung für den Fall von noch mehr Mengen notwendig.

3. Kapitel

1. Beide Behauptungen kann man mit Hilfe der folgenden beiden Mengen ausdrücken:
die Menge der Menschen, die dem Kollektiv von X angehören (K),
die Menge der Menschen, die über Y dieselbe Meinung wie Z besitzen (M).
Grundmenge: die Menschheit (die Menge aller heute lebenden Menschen). (a) zufolge ist K $<$ M, d.h.,der außerhalb von M gelegene Teil von K ist leer (Abb. 149).

Abb. 149



(b) zufolge hat die Komplementärmenge von M kein Element mit K gemeinsam. Wir müssen daher denjenigen Teil des Rechtecks schraffieren, der außerhalb des Kreises M, aber innerhalb des Kreises K liegt. Genau das haben wir aber auf der Abbildung 149 getan. Wir könnten also von (b) dieselbe Zeichnung anfertigen wie von (a): beide Behauptungen bedeuten dasselbe, und somit folgt jede dieser Behauptungen aus der anderen.

Das mag vielleicht einige Leser überraschen. Behauptung (b) kann man nämlich leicht auch den folgenden Sinn unterlegen: Wer über Y nicht derselben Meinung ist wie Z, der kann nicht in das Kollektiv von X aufgenommen werden oder er wurde, wenn er dem Kollektiv bereits angehörte, aus ihm entfernt.

Mit Behauptung (a) stimmt eher die Vorstellung überein, dass von einer Meinung die Rede ist, die man sich gemeinsam gebildet hat. (Auch so etwas kommt vor.)
Wenn wir sagen, dass jede der betrachteten Behauptungen aus der and folgt, so berücksichtigen wir dabei keine zusätzlichen Voraussetzungen oder versteckten hintergründigen Zusammenhänge. Im Gegenteil: Wir beziehen uns auf nichts anderes als das, was expressis verbis (ausgesprochen, ausdrücklich) in den Behauptungen steht.

2. Abwechslungshalber stellen wir die Mengen diesmal nicht durch ebene Figuren, sondern durch geradlinige Abschnitte dar (Abb. 150).

Abb. 150

Man sieht, dass (a) und (b) - ebenso wie in der vorangehenden Aufgabe - dieselbe Bedeutung haben. (Wenn wir allerdings wieder zusätzliche Zusammenhänge, unausgesprochene Voraussetzungen berücksichtigen, so kommen wir auch hier zu einem anderen Ergebnis.)

Die Zeichnung - und in gewissem Grade auch der Text - suggerieren uns übrigens, dass in der gegebenen Grundmenge jeder Zeitpunkt, zu dem man U sieht, jedem Zeitpunkt vorausgeht, zu dem man U nicht sieht, und dass ähnlich jeder Zeitpunkt, zu dem alles in Ordnung ist, jedem Zeitpunkt vorausgeht, zu dem nicht alles in Ordnung ist. Diese Einschränkungen sind jedoch unnötig.

3. $B' \subset A'$. Die beiden vorherigen Aufgaben haben gerade diesen Sachverhalt an Hand zweier konkreter Fälle klargemacht; jedoch nicht nur dies, sondern auch folgendes:
Wenn $B' \subset A'$ ist, so folgt hieraus $A \subset B$. Also sind die Beziehungen $A \subset B$ und $B' \subset A'$ äquivalent, d.h.

$$A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$$

ist für beliebige Mengen A und B wahr.

4. a) Abbildung 151 entnehmen wir, dass $A \cap B \subset A$ ist.

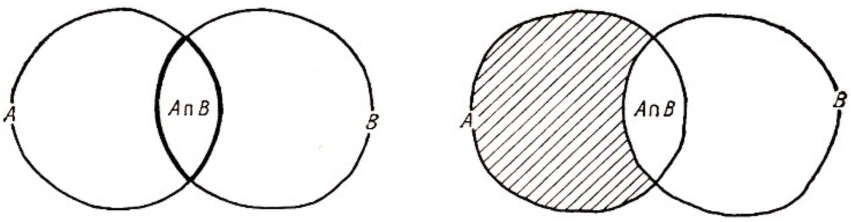


Abb. 151, 152

Auf der rechten Seite dieser Relation hätten wir natürlich an Stelle von A auch B schreiben können. $A \cap B$ wurde nicht in Klammern gesetzt, ebenso wie wir bei der Lösung der vorangehenden Aufgabe die Formeln auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichens nicht in Klammern gesetzt haben. In beiden Fällen sind die entstehenden Formeln ohne dies eindeutig.
Bedenken wir, dass sowohl das Zeichen $\cap$ als auch das Zeichen $\subset$ nur in Verbindung mit Mengen auftreten. Ersteres stellt aus zwei Mengen wieder eine Menge her, letzteres liefert eine Behauptung über zwei Mengen. Das Äquivalenzzeichen $\leftrightarrow$> spielt wieder eine andere Rolle: Es stellt, wie wir wissen, aus zwei Behauptungen eine neue Behauptung her.

b) Wenn $A \subset B$ ist, so erhalten wir die Abbildung 152. Wir können ihr entnehmen, dass die Implikation $A \subset B \to A \cap B = A$ wahr ist.
Auch hier sind keine Klammern notwendig. Die Formel können wir folgendermaßen lesen: "Wenn A in B enthalten ist, so ist der Durchschnitt von A und B gleich A".
Die Zeichen spielen folgende Rollen: $=$ liefert eine Behauptung über zwei Mengen, $\cap$ stellt aus zwei Mengen eine Menge her, $\to$ stellt aus zwei Behauptungen eine Behauptung her, $\subset$ liefert eine Behauptung über zwei Mengen.

Die obige Formel ist daher auch ohne Klammerzeichen eindeutig verständlich, d. h., sie besitzt die gleiche Bedeutung, als hätten wir in ihr Klammern gesetzt:

$$(A \subset B) \to [(A \cap B) = A]$$

Wenn $B \subset A$ ist, so können wir über den Zusammenhang (die Relation) zwischen $A \cap B$ und A nicht mehr aussagen, als wir ohnehin schon auf Grund von 4.a) wissen: $B \subset A \to A \cap B = A$.

5. a) A; b) I; c) Λ; d) A; e) A; f) $A \cup B$

6. a) A'; b) A; c) die Grundmenge von A□

7. a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A' \cap B'$; d) $A' \cup B'$

8.

	a) Mengentheoretische Formel	b) Logische Formel
1. Prämisse	$F \cap S' \neq \Lambda$	$\exists x(Fx \wedge \sim Sx)$
2. Prämisse	$(B \cap S') \cap F = \Lambda$	$\forall x[(Bx \wedge \sim Sx) \to \sim Fx]$
Konklusion	$F \cap B' \neq \Lambda$	$\sim \forall x(Fx \to Bx)$

(Diese Formeln können nur als Beispiele gelten. Man kann die in den Prämissen und der Konklusion auftretenden Behauptungen auch auf viele andere Arten schreiben. Natürlich können auch die sprachlichen Formulierungen unterschiedlich sein.)

9. In dieser Aufgabe ist von drei Mengen die Rede. Wir stellen sie zunächst, ohne die Voraussetzungen zu berücksichtigen, mit Hilfe von Kreisen dar (Abb. 153).
Jetzt ergänzen wir die Abbildung entsprechend den Voraussetzungen:
b) zufolge ist derjenige Teil des Kreises H, der außerhalb von F liegt, leer;
a) zufolge ist der gemeinsame Teil von B und H nicht leer.

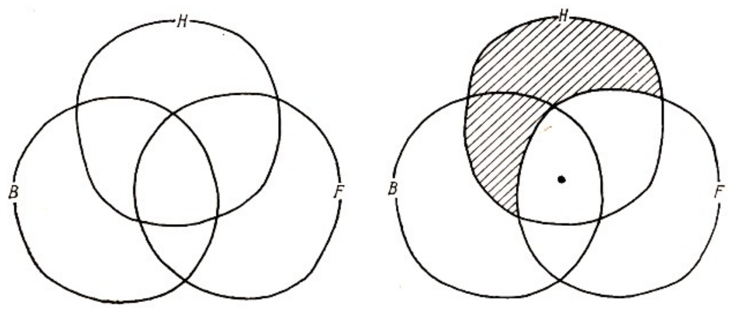


Abb. 153, 154

Nach der obigen Annahme kann nur derjenige Teil von B ein Element enthalten, der innerhalb von F liegt. Das aber bedeutet gerade, dass der gemeinsame Teil von F, H und B nicht leer ist (Abb. 154), d. h., es gibt einen frechen Halbstarken, der eine Beatles-Frisur trägt. Also folgt e) aus a) und b).

d) würde bedeuten, dass der gemeinsame Teil von F und H ganz in B liegt.
Diesen Schluss könnten wir dann ziehen, wenn nach der zeichnerischen Darstellung der Voraussetzungen die rechte obere dreieckige Figur schraffiert wäre. Da sie es nicht ist, folgt d) nicht aus a) und b). Auf Grund von a) und b) können wir also nicht behaupten, dass jeder freche Halbstarke eine Beatles-Frisur hat (ebensowenig können wir auch das Gegenteil behaupten).

Wir können die Aufgabe auch ohne Zeichnung lösen. Sei zum Beispiel X ein Halbstarker mit Beatles-Frisur. Auf Grund von a) gibt es einen solchen. Nach b) besitzt er ein freches Benehmen. Also ist X ein frecher Halbstarker mit einer Beatles- Frisur, d. h., e) ist wahr.
Da nach b) alle Halbstarken frech sind, können wir d) wie folgt formulieren: Jeder Halbstarke trägt eine Beatles-Frisur. Hierauf aber weist nichts in a) und b) hin. d) folgt daher nicht aus a) und b).

10. Mit naheliegenden Bezeichnungen werden die beiden Prämissen und die Konklusion durch folgende Formeln beschrieben: (A = Was man von Schulze erzählt, ist wahr)

(1) $[A \wedge \forall x(Mx \to Sx)] \vee K$,
(2) $A \to \exists x[Mx \wedge (Sx \to Vx)]$
(3) $\sim K \to \exists x(Sx \wedge Vx)$

(1) haben wir so formalisiert, dass wir das "oder" als nicht ausschließendes "oder" verstanden haben. (Wir haben angenommen, dass es auch dann im Betrieb ein Klatschmaul geben kann, wenn wahr ist, was man über Schulze erzählt.) Hätten wir das "oder" im ausschließenden

Sinn verstanden, so hätten wir an Stelle von (1) folgendes schreiben müssen (wobei wir das ausschließende "oder" gleich durch die Äquivalenz ausdrücken, siehe Band I):

(4) $[A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)] \leftrightarrow \sim K$

was wir auch als Konjunktion zweier Implikationen schreiben können:

(5) $\{[A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)] \rightarrow \sim K\} \wedge \{\sim K \rightarrow [A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)]\}$

Die Konjunktionsglieder von (5) können wir auch getrennt als Prämissen verwenden:

(5a) $[A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)] \rightarrow \sim K$,
(5b) $\sim K \rightarrow [A \wedge \forall x(Mx \rightarrow Sx)]$

Man sieht, dass (5b) dasselbe bedeutet wie (1). Wir müssen dort nur die Reihenfolge der Glieder der Alternative vertauschen und die Alternative durch Verneinung ihres vorderen Gliedes in eine Implikation umformen (siehe Band I).
Wenn eine Konklusion K aus den Prämissen P und Q folgt, so folgt sie auch aus den Prämissen P, Qund R. Nimmt nämlich K stets dann den Wahrheitswert W an, wenn P und Q gleichzeitig den Wert W besitzen, so nimmt K auch dann jedesmal den Wert W an, wenn P, Q und R gleichzeitig den Wert W haben.
(Drei Aussageformen P, Q, R nehmen entweder genau dann gleichzeitig den Wahrheitswert W an, wenn es zwei von ihnen tun, oder aber nur in einem Teil der Fälle, in denen zwei von ihnen den Wert W annehmen; sonst aber in keinem anderen Fall.)

Wenn wir also einsehen, dass aus (1) und (2) Formel (3) folgt, so werden wir auch einsehen, dass (3) auch aus (4) und (2) folgt. Wir erfassen auf diese Weise zusammen mit dem Fall des nicht ausschließenden "oder" automatisch auch den Fall des ausschließenden "oder".
Wenn sich aber herausstellen sollte, dass (3) nicht aus (1) und (2) folgt, so wäre trotzdem vorstellbar, dass (3) aus (4) und (2) folgt. Ebenso wie bei der Aufgabe mit den Vergasern führen wir auch jetzt Fallunterscheidungen durch. Wir überprüfen in allen Fällen, in denen die beiden Prämissen den Wert W annehmen, ob dann auch die Konklusion (3) den Wahrheitswert W besitzt.

1. Fall: Der Wahrheitswert von K sei W. Dann besitzt die Konklusion stets den Wert W, da das vordere Glied der Implikation (3) falsch ist.

2. Fall: Der Wahrheitswert von K sei F. Dann hat, sofern der Wert von (1) W ist, das erste Alternativglied in (1) den Wert W, d.h., wir können behaupten, dass sowohl A als auch $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ den Wert W besitzen. Da A den Wert W hat, besitzt auch das hintere Glied von (2) den Wert W, sofern (2) selbst den Wahrheitswert W annimmt.
Das bedeutet, dass in der Grundmenge ein Element existiert, für das Mx erfüllt ist und für das - falls sogar Sx erfüllt ist - auch Vx erfüllt ist.

$\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ besagt aber folgendes: Wenn Mx für ein Element der Grundmenge erfüllt ist, so ist es auch Sx. Wir haben schon gesehen, dass ein Element existiert, für das Mx erfüllt ist. Für dieses Element ist also auch Sx wahr und somit nach obigem auch Vx. Es gibt also ein Element der Grundmenge, für das Mx und Vx gleichermaßen den Wert W annehmen. Damit ist auch das hintere Glied der Implikation (3) wahr.

Das heißt, (3) ist auch in denjenigen Fällen immer wahr, in denen K den Wahrheitswert F besitzt, vorausgesetzt, dass beide Prämissen den Wahrheitswert W haben. Demnach folgt (3) aus (1) und (2). Damit folgt im Sinne des oben Gesagten (3) auch aus (4) und (2).

Gleichgültig, ob wir a) im Sinne des ausschließenden "oder" verstehen oder nicht, stets folgt also aus a) und b) Formel c).

11. In Prämisse 3 ist der Hinweis "auf Drängen seiner Frau" überflüssig.

4. Kapitel

1. Die fehlenden Begründungen sind - unter dem Strich beginnend - der Reihe nach folgende: Doppelte Verneinung und Def. d. Impl.; de Morgan; mod. toll.; doppelte Verneinung und Def. d. Impl.; Assoz.; disj. Syll.; disj. Syll. (Abb. 155).

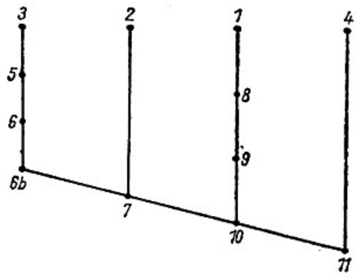


Abb. 155

2. Die Formeln (von 5 an) hängen von folgenden Prämissen ab:
$5:3$; $6:3$; $6b:7$; $7:2{,}3$; $8:1$, $9:1$, $10:1{,}2{,}3$, $11:1{,}2{,}3{,}4$.

3. Abbildung 156

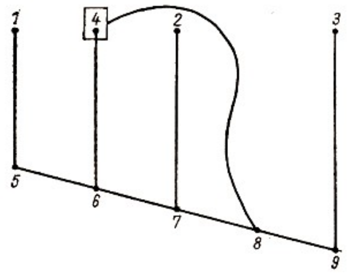


Abb. 156

4.

	1	$M \to K$	P	
	2	$K \to S$	P	
	3	$M \vee A$	P	
	4	$A \to (Z \to S)$	P	
	5	$\sim S$	P	
2,5	6	$\sim K$	2,5	mod. toll.
1,2,5	7	$\sim M$	1,6	mod. toll.
1,2,3,5	8	A	3,7	disj. Syll.
1,2,3,4,5	9	$Z \to S$	4,8	mod. pon.
1,2,3,4,5	10	$\sim Z$	9,5	mod. toll.

Nach 5, 6, 7,1 0 besitzen also S, K, M, Z den Wahrheitswert F, und A besitzt nach 8 den Wahrheitswert W.

5. 1 $A \vee (A \wedge B)$ P
Wir wollen zu A gelangen. Wir nehmen die Verneinung von A als weitere Prämisse hinzu und versuchen, daraus einen Widerspruch abzuleiten:

↱	2	$\sim A$	P	
|	3	$A \wedge B$	1,2	disj. Syll.
↳	4	$A \wedge \sim A$	3a,2	Kopplg.

Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt, und A ist bewiesen. Die formale Ableitung könnte etwa wie folgt fortgesetzt werden:

5	$\sim A \rightarrow (A \wedge \sim A)$	-2,4	T 3
6	$\sim A \rightarrow F$	5	Widerspruch
7	A	6	doppelte Verneinung

Rückwärts:

1	A	P	
2	$A \vee (A \wedge B)$	1	Hinzufg.

6. a) Die Ableitung könnte folgendermaßen weitergeführt werden:

↳	6	$B \wedge \sim B$	5,4	Kopplg.
	7	$\sim [(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)] \rightarrow (B \wedge \sim B)$	-1,6	T 3
	8	$\sim [(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)] \rightarrow F$	7	Widerspruch
	9	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$	8	doppelte Verneinung, W 31

b) Wir erhalten einen einfacheren Beweis, wenn wir von der Formel ausgehen, die wir als allgemeingültig nachweisen wollen, und sie durch äquivalente Umformungen auf eine Gestalt bringen, aus der man sofort ablesen kann, dass sie allgemeingültig ist. Da äquivalente Umformungen nur die Gestalt der Formeln, nicht jedoch ihre Wahrheitswerte ändern, können wir auf diesem Wege beweisen, dass auch die ursprüngliche Formel allgemeingültig ist:

$$
\begin{aligned}
(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) &\equiv (\sim A \vee \vee B) \vee (\sim B \vee C) && \text{(Def. der Impl.)} \\
&\equiv [\sim A \vee (B \vee \sim B)] \vee C && \text{(Assoz.)} \\
&\equiv [\sim A \vee W] \vee C && \text{(ausgeschl. Dritte)} \\
&\equiv W \vee C && \text{(W 28)} \\
&\equiv W && \text{(Komm., W 28)}
\end{aligned}
$$

5. Kapitel

1. Die beiden Behauptungen können wir wie folgt formalisieren:

(a) $\forall x(Gx \rightarrow E)$; (b) $\exists x Gx \rightarrow E$

Wir versuchen zunächst, aus (a) Formel (b) abzuleiten. Natürlich nehmen wir auf Grund von T 3 die Formel $\exists x Gx$ als zeitweilige Prämisse auf. Wir beginnen mit einer $\exists$-Elimination, danach kommt die $\forall$-Elimination an die Reihe. Der weitere Lösungsgang liegt auf der Hand:

	1	$\forall x(Gx \rightarrow E)$	P	
↱	2	$\exists x Gx$	P	
|	3	$G\square$	2	$-\exists$
|	4	$G\square \rightarrow E$	1	$-\forall$
↳	5	E	4,3	Abtrenng.
	6	$\exists x Gx \rightarrow E$	-2,5	T 3

In der umgekehrten Richtung wählen wir $G\square$ als zeitweilige Prämisse. Auf Grund von (b) kommen wir zu E, und aus $G\square \rightarrow E$ erhalten wir durch $\forall$-Einführung (a):

	1	$\exists x Gx \to E$	P	
↱	2	$G\square$	P	
|	3	$\exists x Gx$	2	$+\exists$
↳	4	E	1,3	Abtrenng.
	5	$G\square \to E$	-2,4	T 3
	6	$\forall x(Gx \to E)$	5	$+\forall$

Wir waren berechtigt, auf $G\square \to E$ die $\forall$-Einführung anzuwenden, obwohl ein Quadratzeichen in einer Prämisse auftritt, da Formel (5) nicht mehr von dieser Prämisse, sondern nur noch von 2, 3 und 4 abhängt. Wir haben schon bewiesen, dass

$\exists x(Gx \to A) \equiv \forall x Gx \to A$

eine Identität ist. Wir wollen dieses und das vorige Ergebnis (mit abgeänderten Bezeichnungen) in die Liste unserer Identitäten aufnehmen:

Q 5: $\forall x(Gx \to A) \equiv \exists x Gx \to A$
Q 6: $\exists x(Gx \to A) \equiv \forall x Gx \to A$

2. Ein Beispielsatz für a): Wie viele wir auch sind, wenn kein Fahrzeug kommt, brechen wir zu Fuß auf. Diesen Satz können wir in folgender Weise umformen, ohne seinen Sinn zu ändern: Wenn kein Fahrzeug kommt, so brechen wir, wie viele wir auch sind, zu Fuß auf.
Die Struktur dieses Satzes gibt aber nicht mehr a), sondern d) wieder. In einer zweielementigen Grundmenge wird aus a) und d):

a*) $(A \to Ga) \wedge (A \to Gb)$
d*) $A \to (Ga \wedge Gb)$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Formeln wertverlaufsgleich sind. Wir brauchen beispielsweise die Implikation nur durch Negation und Alternative auszudrücken und die Distributivität zu benutzen.
Die folgende Ableitung gilt für eine beliebige (endliche oder unendliche) nicht leere Grundmenge und für beliebiges G:

	1	$\forall x(A \to Gx)$	P	
↱	2	A	P	
|	3	$A \to G\square$	1	$-\forall$
|	4	$G\square$	3,2	Abtrenng.
↳	5	$\forall x Gx$	4	$+\forall$
	6	$A \to \forall x Gx$	-2,5	T 3

(Die $\forall$-Einführung ist berechtigt: Bei der Substitution gibt es keine Probleme, das $\square$ ist durch keine $\exists$-Elimination in die Formel gekommen, $G\square$ hängt von keiner Prämisse ab, die ein Quadratzeichen enthält, da in den Prämissen solche Zeichen überhaupt nicht auftreten.)

	1	$A \to \forall x Gx$	P	
↱	2	A	P	
|	3	$\forall x Gx$	1,2	Abtrenng.
↳	4	$G\square$	3	$-\forall$
	5	$A \to G\square$	-2,4	T 3
	6	$\forall x(A \to Gx)$	4	$+\forall$

(Überlegen Sie, warum die $\forall$-Einführung auch hier berechtigt war!)

Damit erhalten wir die folgende Identität:

Q 7: $\forall x(A \to Gx) \equiv A \to \forall xGx$

Es lohnt sich nicht, auf b) gesondert einzugehen, denn wenn wir in a) an Stelle von A jetzt $\sim A$ schreiben, so erhalten wir b) (Def. d. Impl. und dopp. Verneing.) Auf dieselbe Weise erhalten wir e) aus d). Hieraus folgt, dass b) und e) wertverlaufsgleich sind.
Man kann sie auch auseinander ableiten, etwa - der obigen Ableitung folgend - dadurch, dass man am Anfang der Ableitung die Alternative in eine Implikation umformt und diese am Schluss wieder in eine Alternative zurückverwandelt. Damit ergibt sich also die folgende Identität:

Q 8: $\forall x(Ax \lor Gx) \equiv A \lor \forall xGx$

Ein Beispielsatz für e):
Auf welche Zahl du auch setzen magst, das Glück ist launisch, und es ist zweifelhaft, dass sie gezogen wird.

Wir können dafür auch sagen:
Das Glück ist launisch; auf welche Zahl du auch setzen magst, es ist zweifelhaft, dass sie gezogen wird.

Auf den letzten Satz trifft Formel f) zu. In einer zweielementigen Grundmenge gehen c) und f) über in

c*) $(A \land Ga) \land (A \land Gb)$; f*) $A \land (Ga \land Gb)$

Es liegt auf der Hand, dass diese beiden Formeln wertverlaufsgleich sind. (Man braucht nur die Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz zu benutzen, um sie ineinander umzuformen.)
Allgemein:

1	$\forall x(A \land Gx)$	P	
2	$A \land G\square$	1	$-\forall$
3	$\forall xGx$	2b	$+\forall$
4	$A \land \forall xGx$	2a,3	Kopplg.

Und rückwärts:

1	$A \land \forall xGx$	P	
2	$G\square$	1b	$-\forall$
3	$A \land G\square$	1a,2	Kopplg.
4	$\forall x(A \land G\square)$	3	$+\forall$

Wir wollen die damit gewonnene Identität festhalten:

Q 9 $\forall x(A \land Gx) \equiv A \land \forall xGx$

Ein Beispielsatz für g):
Es gibt einen Mann, der, falls der FC "Union" das Fußballspiel gewinnt, vor Freude auf einen Baum klettert.

Dasselbe drückt auch dieser Satz aus:
Wenn der FC "Union" das Fußballspiel gewinnt, so gibt es einen Mann, der vor Freude auf einen Baum klettert.
Dieser Satz aber besitzt die Struktur von Formel j).

In einer zweielementigen Grundmenge reduzieren sich g) bzw. j) auf

g*) $(A \to Ga) \vee (A \to Gb)$, d.h. $(\sim A \vee Ga) \vee (\sim \vee Gb)$,
j*) $A \to (Ga \vee Gb)$, d.h. $\sim A \vee (Ga \vee Gb)$.

Aus den letzten Formeln ist ersichtlich, dass beide wertverlaufsgleich sind (Def. d. Impl.). Allgemein erhalten wir j) aus g) durch folgende Ableitung:

1	$\exists x(A \to Gx)$	P	
2	$A \to Gx$	1	$-\exists$
3	A	P	
4	$G\square$	2,3	Abtrenng.
5	$\exists x Gx$	4	$+\exists$
6	$A \to \exists x Gx$	-3,5	T 3

und g) aus j):

1	$A \to \exists x Gx$	P	
2	A	P	
3	$\exists x Gx$	1,2	Abtrenng.
4	$G\square$	3	$-\exists$
5	$A \to G\square$	-2,4	T 3
6	$\exists x(A \to Gx)$	5	$+\exists$

Damit haben wir eine weitere Identität erhalten:

Q 10: $\exists x(A \to Gx) \equiv A \to \exists x Gx$

Ebenso wie b) und e), so verdienen auch h) und k) keine besondere Aufmerksamkeit. Sie lassen sich auf die vorangegangenen Formeln zurückführen und liefern: eine neue Identität:

Q 11: $\exists x(A \vee Gx) \equiv A \vee \exists x Gx$

Damit bleiben noch i) und l) übrig. Auch sie sind wertverlaufsgleich, wie die folgenden Beispielsätze vermuten lassen:
Es kommt vor, dass ich - obwohl ich ein vorsichtiger Mann bin - bei der Straßenbahn auf dem Trittbrett mitfahre. Obwohl ich ein vorsichtiger Mann bin, kommt es vor, dass ich bei der Straßenbahn auf dem Trittbrett mitfahre.

(In diesen Beispielen wird die Grundmenge von der Menge aller Zeitpunkte gebildet. Die einräumende Bedeutungsnuance des "obwohl" können wir nicht genau wiedergeben, wir vereinfachen das "obwohl" daher zu einer Konjunktion.)
Wir übergehen hier die Ableitung beider Formeln auseinander, sie enthält keine neuen Gedanken. Wir wollen auch dieses Ergebnis als Identität notieren:

Q 12: $\exists x(A \wedge Gx) \equiv A \wedge \exists x Gx$

8. Auch hierbei können wir von Beispielsätzen ausgehen:
a) Alle waren in Frankfurt und alle waren in Görlitz.
b) Alle waren in Frankfurt oder alle waren in Görlitz (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass eventuell alle in beiden Städten waren).
c) Wenn alle in Frankfurt waren, so waren alle in Görlitz.
d) Alle waren in Frankfurt und Görlitz.
e) Alle waren in Frankfurt oder Görlitz (möglicherweise auch in beiden Städten).
f) Für alle ist wahr, dass sie, wenn sie in Frankfurt waren, auch in Görlitz waren.
g) Es gibt jemanden, der in Frankfurt war, und es gibt jemanden, der in Görlitz war.

h) Es gibt jemanden, der in Frankfurt war, oder es gibt jemanden, der in Görlitz war (eventuell war jemand auch in beiden Städten).
i) Wenn es jemanden gibt, der in Frankfurt war, dann gibt es auch jemanden, der in. Görlitz war.
k) Es gibt jemanden, der in Frankfurt und Görlitz war.
1) Es gibt jemanden, der in Frankfurt oder Görlitz war (eventuell war er auch in beiden Städten).
m) Es gibt jemanden, der, falls er in Frankfurt war, auch in Görlitz war.

Auf Grund der Beispiele haben wir sofort vermutet, dass a) und d) wertverlaufsgleich sind. Hier ist die Ableitung von d) aus a):

1	$\forall x Fx \land \forall x Gx$	P	
2	$F\square$	1a	$-\forall$
3	$G\square$	1b	$-\forall$
4	$F\square \land G\square$	2,3	Kopplg.
5	$\forall x(Fx \land Gx)$	4	$+\forall$

Und dies ist die Ableitung von a) aus d):

1	$\forall x(Fx \land Gx)$	P	
2	$F\square \land G\square$	1	$-\forall$
3	$\forall x Fx$	2a	$+\forall$
4	$\forall x Gx$	2b	$+\forall$
5	$\forall x Fx \land \forall x Gx$	3,4	Kopplg.

In beiden Fällen ist die $\forall$-Einführung einwandfrei. Damit erhalten wir die folgende (formal an die Distributivität erinnernde) Identität:

Q 13: $\forall x(Fx \land Gx) \equiv \forall x Fx \land \forall x Gx$

Auch zwischen b) und e) können wir eine Beziehung vermuten. Versuchen wir, e) aus b) abzuleiten:

	1	$\forall x Fx \lor \forall x Gx$	P	
⬐	2	$\forall x Fx$	P	
↳	3	$F\square$	2	$-\forall$
	4	$\forall x Fx \to F\square$	-2,3	T 3
⬐	5	$\forall x Gx$	P	
↳	6	$G\square$	5	$-\forall$
	7	$\forall x Gx \to G\square$	-5,6	T 3
	8	$F\square \lor G\square$	1,4,7	Fallunterscheidg.
	9	$\forall x(Fx \lor Gx)$	8	$+\forall$

Sehen wir uns nun die umgekehrte Richtung an:

	1	$\forall x(Fx \lor Gx)$	P	
	2	$F\square \lor G\square$	1	$-\forall$
⬐	3	$F\square$	P	
↳	4	$\forall x Fx$	3	$+\forall$
	5	$F\square \to \forall x Fx$	-3,4	T 3
⬐	6	$G\square$	P	
↳	7	$\forall x Gx$	6	$+\forall$
	8	$G\square \to \forall x Gx$	-6,7	T 3
	9	$\forall x Fx \lor \forall x Gx$	2,5,8	Fallunterscheidg.

Diese Ableitung ist beinahe eine Kopie der vorigen - nur eben nicht richtig. In beiden ∀-Einführungen steckt derselbe Fehler: Sie wurden auf Formeln angewendet, die von einer Prämisse abhängen, die ein Quadratzeichen enthält (ja selbst eine solche Prämisse ist).

Es ist daher kein Wunder, dass die Ableitung falsch. ist: b) folgt nicht aus e). Denken wir daran, dass unsere Grundmenge aus zwei Elementen besteht, Peter und Paul, und dass von diesen beiden Peter in Frankfurt gewesen ist, jedoch nicht in Görlitz, während Paul umgekehrt nicht in Frankfurt, wohl aber in Görlitz war. Dann ist e) wahr: Jeder war in Frankfurt oder Görlitz. Peter nämlich war in Frankfurt und Paul in Görlitz.
b) ist jedoch nicht wahr: Beide Glieder der Alternative sind falsch, weder ist wahr, dass beide in Frankfurt waren (Paul war nicht dort), noch ist wahr, dass beide in Görlitz waren (Peter war nicht dort).

Können wir jetzt also keine Identität notieren? Die beiden Formeln sind zwar nicht wertverlaufsgleich, dafür gilt aber folgende Identität:

Q 14: $(\forall xFx \vee \forall xGx) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx) \equiv W$

Auch zwischen e) und f) haben wir eine ähnliche Beziehung vermutet, denn die Implikation ist "beinahe eine Alternative", sie weicht nur in einer Negation von ihr ab (vgl. die Formeln b) und e) sowie a) und d) der vorhergehenden Aufgabe).

Hier aber liegen die Dinge anders als dort. Schreiben wir in f) $\sim Fx$ an Stelle von Fx, so können wir die Implikation in eine Alternative umformen (Def. d. Impl. und doppelte Verneing.), wenn wir aber mit e) dasselbe tun, so erhalten wir daraus $\forall x \sim Fx \rightarrow \forall xGx$, und hieraus können wir dadurch eine Alternative gewinnen, dass wir den anderen Quantor einführen (Def. d. Impl., doppelte Verneing. und Q 1):

$\sim \exists xFx \rightarrow \forall xGx$ oder $\exists xFx \vee \forall xGx$

Diese Abweichung hat zur Folge, dass f) nicht aus c) folgt. Das vorige Beispiel zeigt dies sofort:

	Peter	Paul
War in Frankfurt	W	F
War in Görlitz	F	W

In diesem Fall hat $\forall xFx$ den Wert F, daher besitzt $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$ den Wert W.
$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ besitzt dagegen den Wert F, da ein Element der Grundmenge existiert (Peter), das zwar in Frankfurt, nicht aber in Görlitz war. Diesmal können wir aber in umgekehrter Richtung schließen: Aus f) folgt e). Hier ist die Ableitung:

	1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	P	
	2	$F\Box \rightarrow G\Box$	1	$-\forall$
↰	3	$\forall xFx$	P	
|	4	$F\Box$	3	$-\forall$
|	5	$G\Box$	2,4	Abtrenng.
↳	6	$\forall xGx$	5	$+\forall$
	7	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	-3,6	T 3

Die ∀-Einführung ist korrekt: Die Substitutionen sind in Ordnung, eine ∃-Elimination tritt in der Ableitung nicht auf, die Prämissen enthalten keine freien Variablen. Damit erhalten wir die folgende Identität:

Q 15: $\forall x(Fx \to Gx) \to (\forall xFx \to \forall xGx) \equiv W$

Von den übrigen sechs Beispielsätzen scheinen am ehesten h) und l) denselben Sinn zu besitzen, und in der Tat sind sie auseinander ableitbar, zum Beispiel so:

1	$\exists xFx \vee \exists xGx$	P	
2	$\sim (\sim \exists xFx \wedge \sim \exists xGx)$	1	de Morgan, dopp. Verneinung
3	$\sim (\forall x \sim Fx \wedge \forall x \sim Gx)$	2	Q 1
4	$\sim \forall x(\sim Fx \wedge \sim Gx)$	3	Q 13
5	$\exists x \sim (\sim Fx \wedge \sim Gx)$	4	Q 3
6	$\exists x(Fx \vee Gx)$	5	de Morgan, dopp. Verneinung

Bei jedem Schritt haben wir an Stelle der einen Seite der bei der Umformung benutzten Identitäten deren andere Seite eingesetzt. (Mit anderen Worten: Wir haben äquivalente Umformungen ausgeführt.) Alle diese Schritte sind umkehrbar. Damit folgt auch h) aus l). Es wäre überflüssig, die Ableitung noch einmal aufzuschreiben.
Wir erhalten damit wieder eine Identität, die an die Distributivität erinnert:

Q 16: $\exists x(Fx \vee Gx) \equiv \exists xFx \vee \exists xGx$

Auch zwischen i) und m) kann man eine Beziehung vermuten. Wir wollen m) aus i) ableiten. Dazu formen wir die Implikation in eine Alternative um und gehen ähnlich vor wie bei der Ableitung von e) aus b):

	1	$\exists xFx \to \exists xGx$	P	
	2	$\sim \exists xFx \vee \exists xGx$	1	Def. d. Impl.
	3	$\forall x \sim Fx \vee \exists xGx$	2	Q 1
↰	4	$\exists xGx$	P	
↳	5	$G\square$	4	$-\exists$
	6	$\exists xGx \to G\square$	-4,5	T 3
↰	7	$\forall x \sim Fx$	P	
↳	8	$\sim F\square$	7	$-\forall$
	9	$\forall x \sim Fx \to \sim F\square$	-7,8	T 3
	10	$\sim F\square \vee G\square$	3,9,6	Fallunterscheidung
	11	$F\square \to G\square$	10	Def. d. Impl.
	12	$\exists x(Fx \to Gx)$	11	$+\exists$

Wenn wir j) aus m) ableiten wollen, stoßen wir auf ähnliche Schwierigkeiten wie bei dem Versuch, b) aus e) abzuleiten. Das ist kein Wunder:
Auch diesmal ist es unmöglich, i) aus m) abzuleiten, weil i) nicht aus m) folgt. Selbst in einer zwei elementigen Grundmenge kann man leicht Gegenbeispiele hierfür finden. In diesem Fall gehen beide Formeln über in

i*) $(Fa \vee Fb) \to (Ga \vee Gb)$, m*) $(Fa \to Ga) \vee (Fb \to Gb)$

Es lohnt sich nicht, ihre Wertetabelle aufzustellen. Es ist einfacher, sich zu überlegen, wann welche der Formeln den Wert F annehmen kann. Die erste tut es dann, wenn ihr vorderes Glied wahr und ihr hinteres Glied falsch ist. Letzteres ist dann erfüllt, wenn $Ga = Gb = F$ ist; ersteres dann, wenn $Fa = Fb = W$ oder $Fa = F$, $Fb = W$ oder $Fa = W$, $Fb = F$ ist. (i*) nimmt also in drei Fällen den Wert F an:

Fa	Fb	Ga	Gb
W	W	F	F
F	W	F	F
W	F	F	F

m*) besitzt dann den Wert F, wenn ihre beiden Glieder den Wert F haben. Das tritt in genau einem Fall ein, dann nämlich, wenn $Fa = W$, $Ga = F$, $Fb = W$, $Gb = F$ ist. Dieser Fall gehört zu den vorigen, es ist gerade der erste der obigen Fälle.
Das heißt: Wenn i*) den Wert W besitzt, so hat auch m*) den Wert W, was - auf den Fall einer zweielementigen Grundmenge spezialisiert - unser obiges Ergebnis bestätigt, demzufolge m) aus i) folgt. Wir sehen aber auch, dass m*) auch in solchen Fällen den Wert W hat, in denen i*) den Wert F besitzt, nämlich in den letzten beiden der obigen drei Fälle.

Das ist nicht nur ein Beweis dafür, dass i*) nicht aus m*) folgt, sondern auch dafür, dass i) nicht aus m) folgt. Wir hätten nämlich nur dann sagen können, dass i) aus m) folgt, wenn bei beliebiger Grundmenge und beliebiger Werteverteilung der logischen Funktionen i) stets dann den Wert W annehmen würde, wenn m) es tut.
Wir haben aber gesehen, dass das in einer zweielementigen Grundmenge nicht erfüllt ist, wenn Gx für beide Elemente den Wert F und Fx für ein Element den Wert F und für das andere Element den Wert W annimmt.
Wir können damit die folgende Identität notieren:

Q 17: $\exists xFx \to \exists xGx) \to \exists x(Fx \to Gx) \equiv W$

Nun stehen noch g) und k) aus. Hier zeigen Beispielsätze eindeutig die zwischen ihnen bestehende Beziehung.
Wenn es jemanden gibt, der in Frankfurt und Görlitz war, so gibt es natürlich auch jemanden, der in Frankfurt war, und es gibt jemanden, der in Görlitz war. Umgekehrt folgt aber aus der Tatsache, dass jemand in Frankfurt und jemand in Görlitz war, nicht, dass es jemanden gibt, der in Frankfurt und Görlitz war.

Allgemein gilt: Daraus, dass ein Element der Grundmenge existiert, für das sowohl Fx wie Gx erfüllt sind (sagen wir für das Element a), folgt, dass es ein Element gibt, für das Fx erfüllt ist, und ein Element, für das Gx erfüllt ist (in beiden Fällen a).
In umgekehrter Richtung können wir aber nicht ebenso schließen, denn es ist möglich, dass Fx nur für ein Element a und Gx nur für ein von a verschiedenes Element b erfüllt ist. Wir haben damit eingesehen, dass g) und k) nicht äquivalent sind, dafür erhalten wir aber die folgende Identität:

Q 18: $\exists x(Fx \wedge Gx) \to (\exists xFx \wedge \exists xGx) \equiv W$

Wir hätten diese Identität auch mit ähnlichen formalen Mitteln beweisen können wie die vorhergehenden.

Wir können unter den Formeln a) bis m) auch andere Paare finden, bei denen eine Formel aus der anderen folgt. Es ist beispielsweise auf Grund aussagenlogischer Gesetze klar, dass aus jeder Formel der Struktur $A \wedge B$ jede Formel der Struktur $A \vee B$ folgt, sofern A und B in beiden Formeln dieselbe Bedeutung haben; so folgt etwa h) aus g) (aber nicht umgekehrt).

4. Wir müssen entscheiden, ob 0 aus 1 und 2 folgt:

0	$\forall x(Mx \to Tx) \to \exists x(\sim Mx \wedge Tx)$	
1	$\forall x(Tx \to Mx) \to \exists x \sim Mx$	P
2	$\forall x Tx \vee \sim \exists x \sim Mx$	P

($Mx = x$ ist größer als 1,90 m, $Tx = x$ nahm am Training teil.)

Formel 0 ist der folgenden äquivalent:

0' $\sim \exists x(Tx \wedge \sim Mx) \to \sim \forall x(Mx \to Tx)$ Kontrap., Vertauschg.

und - weiter umgeformt - auch der folgenden:

0" $\forall x(Tx \to Mx) \to \exists x(Mx \wedge \sim Tx)$ Q 1, Def. d. Impl., Q 4

Es ist vorteilhafter, die Konklusion in dieser Form abzuleiten. Wenn wir nämlich auf Grund von T 3 das vordere Glied von 0 zur Prämisse machen, so erhalten wir aus 1 durch Abtrennung eine einfache Formel:

⌐	3	$\forall x(Tx \to Mx)$	P	
|	4	$\exists x \sim Tx$	1,3	Abtrenng.

Wir wissen, dass es gut ist, die $\exists$-Elimination so früh wie möglich auszuführen:

| 5 $\sim T\square$ 4 $-\exists$

Formel 2 wird handlicher, wenn wir beide Alternativglieder mit Hilfe von Q 2 umformen:

| 6 $\sim \exists x \sim Tx \vee \forall x Mx$ 2 Q 2

So erhalten wir nämlich aus 4 die Formel $\forall x Mx$:

| 7 $\forall x Mx$ 6,4 dopp. Verneinung, disj. Syll.

Es ist ratsam, sich auch vom Allquantor zu befreien:

| 8 $M\square$ 7 $-\forall$

Wir wollen $\exists x(Mx \wedge \sim Tx)$ ableiten. Dazu brauchen wir zunächst $M\square \wedge \sim T\square$. Dies liegt aber schon in greifbarer Nähe:

|	9	$M\square \wedge T\square$	8,5	Kopplg.
↳	10	$\exists x(Mx \wedge \sim Tx)$	9	$+\exists$
	11	$\forall x(Tx \to Mx) \to \exists x(Mx \wedge \sim Tx)$	-3,10	T 3

Hieraus erhalten wir durch triviale Umformungen 0' und 0.

5. Die Negationszeichen ändern Zusammenhänge. b) und d) sind wertverlaufsgleich, ebenso g) und k), andere Paare jedoch nicht. Beim Beweis benutzt man die Identitäten Q 1 bis Q 4 bzw. die entsprechenden aussagenlogischen Identitäten, darüber hinaus die de Morganschen Formeln und die Ergebnisse von Aufgabe 8.

Beispielsätze:
b) Nicht jede Behauptung ist wahr, oder nicht jede Behauptung ist klar formuliert.
d) Nicht für jede Behauptung gilt, dass sie wahr und auch klar formuliert ist.
g) Es gibt keinen Menschen, der auf dem Mars war, und es gibt keinen Menschen, der auf der Venus war.
k) Es gibt keinen Menschen, der auf dem Mars oder der Venus war.

6. Wir wollen einsehen, dass bei beliebiger nicht leerer Grundmenge und beliebiger Bedeutung der logischen Funktion $G\square$ ein Element a der Grundmenge existiert, das, für $\square$ eingesetzt, $G\square \to \forall x Gx$ den Wahrheitswert W verleiht.
Ist der Wahrheitswert der logischen Funktion $G\square$ auch nur für ein einziges Element der Grundmenge der Wert F, so setzen wir dieses für $\square$ ein. Der Wahrheitswert der Implikation wird dann W, da der des vorderen Gliedes F ist.

Nimmt $G\square$ aber nirgends den Wert F an, besitzt es also für alle Elemente den Wert W, so hat auch $\forall x Gx$ den Wahrheitswert W, und damit besitzt, was immer wir für $\square$ einsetzen, die Implikation den Wahrheitswert W (da ja ihr hinteres Glied den Wert W besitzt).
In jedem Fall können wir also ein entsprechendes Element finden. Daher ist $\exists y(Gy \to \forall x Gx)$ allgemeingültig.

6. Kapitel

1. (1) Abb. 157 (2) Abb. 158

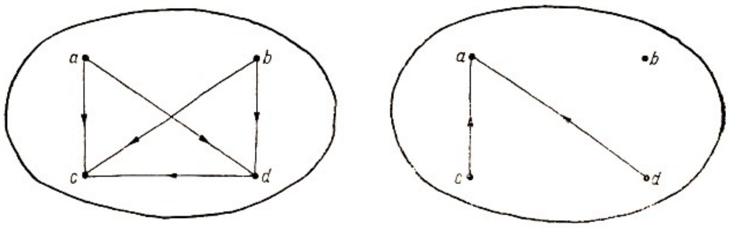


Abb. 157, 158

(Aus der ersten Abbildung (Abb. 117) geht hervor, dass b ein Junge ist; er ist außerdem der älteste, denn er ist von allen der ältere Bruder. Aus derselben Zeichnung folgt auch, dass d ein Junge und älter als c ist, denn er ist ein älterer Bruder von c.
Ferner folgt, dass a ein Mädchen ist, da d, der selbst ein Junge ist, nicht ihr älterer Bruder ist und sie selbst nicht der ältere Bruder von d ist. Altersmäßig steht sie zwischen b und d, da b ihr älterer Bruder ist, d jedoch nicht.

Aus der Zeichnung geht nicht hervor, ob c ein Junge oder ein Mädchen ist. Die zweite Zeichnung enthält unter anderem überflüssige Informationen, sie entscheidet aber, dass c ein Junge ist, da er keine jüngere Schwester von b ist. Auf Grund dieser Kenntnisse können die obigen Zeichnungen mechanisch angefertigt werden.)
Beide Relationen sind irreflexiv, asymmetrisch und transitiv.

2. a) Abb. 159 b) Abb. 160 c) Abb. 161 d) Abb. 162 e) Abb. 163 f) Abb. 164 g) Abb. 165 h) Abb. 166 i) Abb. 167 j) Abb. 168

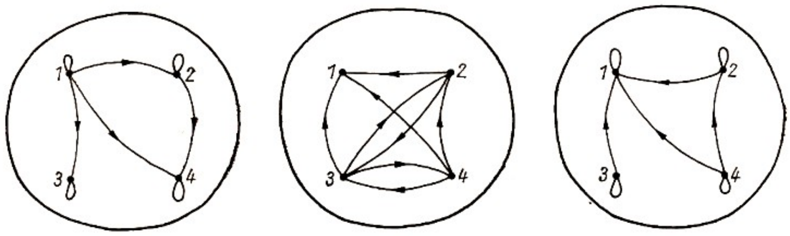


Abb. 159, 160, 161

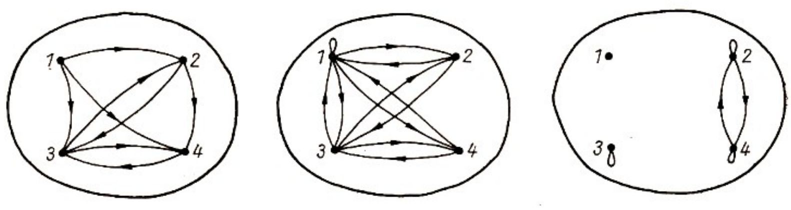


Abb. 162, 163, 164

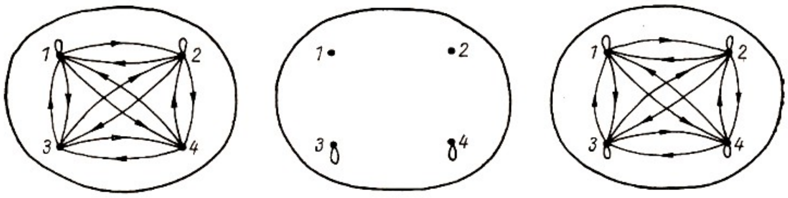


Abb. 165, 166, 167

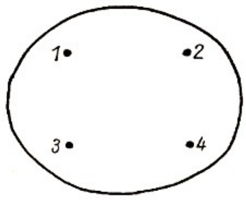


Abb. 168

3. Reflexiv: a, c, i; teilweise reflexiv: e, f, g, h; irreflexiv: b, d, j
Symmetrisch: e, f, g, h, i, j; teilweise symmetrisch: a, b, c, d; asymmetrisch: -
Transitiv: a, c, f, h, i, j; teilweise transitiv: b, d, e, g; intransitiv: -

*4, Schwach reflexiv sind alle reflexiven Relationen - in unserem Beispiel a), e) und i) - daneben auch f), h), j). Teilweise schwach reflexiv (oder schwach teilweise reflexiv) nennen wir Relationen, bei denen ein Pfeil existiert, der an beiden Enden eine Schleife besitzt, während gleichzeitig ein Pfeil existiert, der nicht an beiden Enden eine Schleife hat. Eine solche Relation ist g).

Den der Irreflexivität entsprechenden Begriff können wir demnach auf verschiedene Weise definieren. Wenn wir verlangen, dass kein Pfeil existieren soll, der an beiden Enden eine Schleife besitzt, so gehören auch schwach reflexive Relationen - in unserem Beispiel h) und j) - zu den derart definierten Relationen.

Die bisherige Einteilung dagegen hatte zu keinen Überschneidungen geführt. Wir kommen auch dann nicht weiter, wenn wir im dritten Fall verlangen, dass es keinen Pfeil geben soll, der auch nur an einem Ende eine Schleife hat, denn wegen Relation j) kommt es auch dann zu einer Überschneidung. Wir können aber so verfahren, dass wir einfach diejenigen zweistelligen Relationen in die dritte Kategorie einreihen, die weder zu den schwach reflexiven, noch zu den teilweise schwach reflexiven Relationen gehören. In unserer Aufgabe sind dies die Relationen b), d) und e).

*5. Streng symmetrisch sind alle jene Relationen, die symmetrisch sind und wenigstens für ein geordnetes Paar (a, b) von Elementen der Grundmenge erfüllt sind.
Das heißt anschaulich: Zu jedem Pfeil gibt es einen Pfeil, der in die entgegengesetzte Richtung führt, und es gibt auch wirklich einen Pfeil auf der Zeichnung.
Solche Relationen sind e), f), g), h) und i), nicht jedoch j). (Relation h) ist es deshalb, weil zum Beispiel von 3 nach 3 "und zurück" ein Pfeil führt, obwohl wir beide Pfeile der Einfachheit wegen als eine einzige Schleife gezeichnet haben, und weil es außerdem keinen Pfeil gibt, zu dem nicht ein entgegengesetzter Pfeil existiert.)

Streng transitiv sind jene Relationen, die transitiv und für wenigstens ein Elementpaar (a,b) und ein sich an dieses anschließendes Paar (b, c) erfüllt sind. Anschaulich heißt das:
Zu zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Pfeilen existiert ein dritter, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten Pfeils führt, und es gibt auf der Zeichnung wirklich zwei aufeinanderfolgende Pfeile. Solche Relationen sind a), e), f), h) und i), nicht aber j). (Relation h) ist es deshalb, weil beispielsweise ein Pfeil von 4 nach 4 und von hier "weiter" nach 4 führt, und weil es kein Paar aufeinanderfolgender Pfeile gibt, zu dem kein entsprechender dritter Pfeil

existiert, wie zum Beispiel der zuletzt erwähnte, der von 4 nach 4 führt.)

6. Abbildung 169 und Abbildung 170

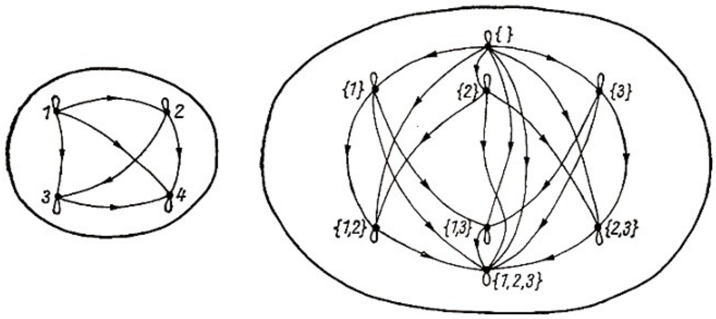


Abb. 169, 170

Beide Relationen sind reflexiv, teilweise symmetrisch und transitiv. Die teilweise Symmetrie wird hierbei nur durch Schleifen gesichert. Solche Relationen nennt man gewöhnlich antisymmetrisch. (Wir hätten die Antisymmetrie einer Relation auch folgendermaßen definieren können: Immer wenn die Relation für ein geordnetes Paar (a, b) und gleichzeitig für das Paar (b, a) erfüllt ist, sind a und b gleich.)

7. a) Irreflexiv, symmetrisch, intransitiv;
b) irreflexiv, symmetrisch, teilweise transitiv

(Es gibt keine Gerade, die auf sich selbst senkrecht steht. Wenn eine Gerade a auf einer Geraden b senkrecht steht, so steht auch die Gerade b senkrecht auf der Geraden a. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die Geraden der Ebene nicht von denen des Raums. Wenn in der Ebene eine Gerade a auf der Geraden b, b aber auf der Geraden c senkrecht steht, so kann a nicht senkrecht auf c stehen; beide Geraden sind vielmehr parallel zueinander oder fallen zusammen.

Im Raum kann es aber vorkommen, dass $a \perp b$, $b \perp c$ und $a \perp$ c ist - wir brauchen nur an die Geraden zu denken, die durch die von derselben Ecke eines Würfels ausgehenden Kanten verlaufen - es kann aber auch der Fall eintreten, dass $a \perp b$, $b \perp c$ ist und a trotzdem nicht senkrecht auf c steht - wir brauchen nur an drei Geraden zu denken, die durch drei Kanten verlaufen, die ein und derselben Seitenfläche des Würfels angehören, und für die $a \perp b$, $b \perp c$, aber $a \parallel c$ ist. Die Geraden der Ebene sind natürlich auch Geraden des Raums.)

8. An erster Stelle stehen jeweils die Lösungen für die Menge aller Menschen, dahinter die Lösungen für die Menge, die aus dem Leser und Hubert Haberich besteht (R, R' bzw. $\tilde{R}$ stehen für reflexiv, irreflexiv bzw. teilweise reflexiv; ähnlich sind die Bezeichnungen S, S', $\tilde{S}$ und T, T', $\tilde{T}$ zu verstehen):

a) $R'S'T$; $R'ST$;
b) $R'ST'$: $R'ST$;
c) $R'S'T$; $R'ST$;
d) $R'S'T'$; $R'ST$;
e) $R'S\tilde{T}$; $R'ST$;
f) $R'S\tilde{T}$; $R'ST$;
g) RST; RST;
h) RST; RST;
i) $\tilde{R}\tilde{S}\tilde{T}$; RST;
j) $R'\tilde{S}\tilde{T}$; $R'ST$.

9. a) Auf einer nichtleeren Grundmenge kann keine Relation gleichzeitig reflexiv und irreflexiv sein. Auf einer leeren Grundmenge wollen wir aber den Begriff der Relation gar nicht definieren.

b) Symmetrisch und gleichzeitig asymmetrisch sind alle Relationen (und nur diese), deren "Pfeildiagramm" überhaupt keinen Pfeil enthält, also die "leeren" Relationen.
(Eine leere Relation auf einer nichtleeren Grundmenge ist - im Gegensatz zu einer "Relation auf einer leeren Grundmenge" - ein wichtiger und praktisch vorkommender Spezialfall!)

c) Beispiele für Relationen, die sowohl transitiv als auch intransitiv sind, zeigen uns die Darstellungen in der Abbildung 171.

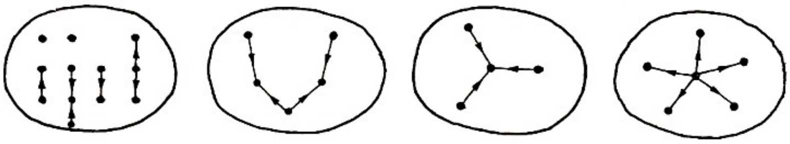


Abb. 171

Allgemein sind genau diejenigen Relationen gleichzeitig transitiv und intransitiv, deren Pfeildiagramme kein Paar von aufeinanderfolgenden gleichgerichteten Pfeilen enthalten.

7. Kapitel

1. a) Sei die Grundmenge von $\Box$ die Menge aller Menschen und die Grundmenge von $\triangle$ die Menge aller Bücher. Es ergibt sich als Rohübersetzung:
Für alle y gilt: Jedes x bewundert y dann und nur dann, wenn es kein x gibt, das y liest.
Als Formel: $\forall y(\forall xWxy \leftrightarrow \sim \exists xLxy)$

Wenn wir von einer umfassenderen Grundmenge ausgehen, die sowohl die Menge der Menschen als auch die der Bücher enthält, so können wir zum Beispiel zu der folgenden Formel gelangen:

$\forall y[By \rightarrow (\forall x(Mx \rightarrow Wxy) \leftrightarrow \sim \exists x(Mx \wedge Lxy))]$

Hierbei bedeutet $M\Box = \Box$ ist ein Mensch, $B\triangle = \triangle$ ist ein Buch.

b) $\sim \exists x \exists y(Uxy \wedge Fx)$ oder, was dasselbe bedeutet, $\forall x \forall y(Uxy \rightarrow \sim Fx)$
(Grundmenge: Menge aller Völker)

c) Sei die Grundmenge von $\Box$ die Menge aller Menschen und die Grundmenge von $\triangle$ die Menge aller Zeitpunkte. Wir gehen von folgender Rohübersetzung aus:
Wer x auch sein mag, wenn x klug ist, so gibt es einen Zeitpunkt y, so dass x zum Zeitpunkt y seine Meinung ändert, und wer x auch sein mag, wenn x nicht klug ist, so ändert, welcher Zeitpunkt y auch sein mag, x seine Meinung zum Zeitpunkt y nicht.[33]

Wir erhalten daher folgende Formel:

$\forall x(Kx \rightarrow \exists yVxy) \wedge \forall x(\sim Kx \rightarrow \forall y \sim Vxy)$.

Richtige Formalisierungen stellen auch die folgenden Formeln dar:

$\forall x(Kx \rightarrow \exists yVxy) \wedge \forall y(\sim Kx \rightarrow \sim \exists yVxy)$
$\forall x[(Kx \rightarrow \exists yVxy) \wedge (\sim Kx \rightarrow \sim \exists yVxy)]$
$\forall x(Kx \leftrightarrow \exists yVxy)$
$\forall x(\exists yVxy \leftrightarrow Kx)$

[33] Diese Übersetzung sagt etwas mehr aus als das Sprichwort. Dieses behauptet nämlich nur, dass ein kluger Mensch seine Meinung ändern kann (und nicht, dass er sie auf jeden Fall ändert).

Wir wollen die letzte Formel zurückübersetzen:
Wer x auch sein mag, dann und nur dann existiert ein Zeitpunkt, zu dem x seine Meinung ändert, wenn x klug ist.
Genau dasselbe drückte auch der ursprüngliche Satz aus. In der deutschen Sprache war der ursprüngliche Satz einfacher und natürlicher, als Formel aber war er in der letzten Gestalt einfacher wiederzugeben.

d) Grundmenge: die Menschen
Rohübersetzung: Für alle x ist wahr: Wenn, wer y auch sein mag, x y gefallen will, so gibt es kein y, so dass x y gefällt.
(Den zweiten Teil des Satzes hätten wir auch wie folgt formulieren können: ... dann gefällt, wer y auch sein mag, x y nicht.)
Als Formel:

$\forall x(\forall y Wxy \rightarrow \sim \exists y Gxy)$

oder der anderen Formulierung der zweiten Hälfte des Satzes entsprechend:

$\forall x(\forall y Wxy \rightarrow \forall y \sim Gxy)$

e) Sei die Grundmenge der ersten Variablen die Menge M der Menschen und die Grundmenge der zweiten Variablen die Menge E der Besitztümer. Wir erhalten dann folgende Formel:

$\forall x \forall y(Bxy \rightarrow Byx)$

Wenn die Grundmenge eine Menge ist, die sowohl die Menge der Menschen als auch die der Besitztümer enthält, so erhalten wir folgende Formel:

$\forall x \forall y[(Mx \wedge Ey) \rightarrow (Bxy \rightarrow Byx)]$

2. a) Erinnern wir uns an die formale Beschreibung der Reflexivität einer Relation: $\forall x Rxx$.
Wir nennen eine Relation irreflexiv, wenn, welches Element x auch sein mag, Rxx nicht zutrifft:

$\forall x \sim Rxx$ oder, nach Q 1 umgeformt, $\sim \exists x Rxx$.

b) Eine Relation ist teilweise reflexiv, wenn sie weder reflexiv noch irreflexiv ist:

$\sim \forall x Rxx \wedge \exists x Rxx$

Das können wir nach Q 3 auch so schreiben:

$\exists x \sim Rxx \wedge \exists x Rxx$

Lesen wir, was diese Formel besagt: Es gibt ein x, für das Rxx nicht erfüllt ist, es gibt aber auch ein x, für das Rxx erfüllt ist.

c) Die Symmetrie haben wir so formalisiert:

$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$

Wir nennen eine Relation asymmetrisch, wenn, was immer x und y auch sein mögen, gilt: Wenn Rxy erfüllt ist, so ist Ryx nicht erfüllt.

$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \sim Ryx)$

d) Wir nennen eine Relation teilweise symmetrisch, wenn sie weder symmetrisch noch asymmetrisch ist, d. h., wenn die Konjunktion der Negationen der obigen beiden Formeln wahr ist. Als Formel:

$\sim \forall x \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \sim \forall x \forall y(Rxy \to \sim Ryx)$

Wir formen dies auf Grund von Q 3 um:

$\exists x \sim \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \exists x \sim \forall y(Rxy \to \sim Ryx)$

Nochmalige Anwendung von Q 3 liefert:

$\exists x \exists y \sim (Rxy \to Ryx) \wedge \exists x \exists y(Rxy \wedge \sim Ryx)$

und durch Benutzung der Definition der Implikation und der Regel für die doppelte Verneinung folgt:

$\exists x \exists y(Rxy \to \sim Ryx) \wedge \exists x \exists y(Rxy \wedge Ryx)$

Wir lesen diese Formel: Es gibt Elemente x und y, für die Rxy, nicht aber Ryx erfüllt ist, es gibt aber auch Elemente x und y, für die Rxy und Ryx gleichzeitig erfüllt sind.

e) Wir gehen wieder von der Formel der Transitivität aus:

$\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \to Rxz]$

Wir nennen eine Relation intransitiv, wenn für beliebige Elemente x, y, z gilt: Wenn Rxy und Ryz erfüllt sind, so ist es Rxz nicht:

$\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryx) \to \sin Rxz]$

f) Eine Relation ist teilweise transitiv, wenn sie weder transitiv noch intransitiv ist:

$\sim \forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \to Rxz] \wedge \sim \forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \to \sim Rxz]$

Dies können wir auf Grund von Q 4 und der Definition der Implikation auf die folgende Form bringen:

$\exists x \exists y \exists z(Rxy \wedge Ryz \wedge \sim Rxz) \wedge \exists x \exists y \exists z(Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)$

Sprachlich formuliert: Es gibt Elemente x, y, z, so dass Rxy und Ryz, nicht aber Rxz erfüllt sind; es gibt aber auch Elemente x, y, z, für die mit Rxy und Ryz auch Rxz erfüllt ist.

g) Die strenge Symmetrie können wir so definieren: Über die Symmetrie der Relation hinaus gilt: Es gibt ein geordnetes Paar (x, y) von Elementen, für das Rxy erfüllt ist. Als Formel:

$\forall x \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \exists x \exists y Rxy$

h) Im Fall der strengen Transitivität müssen über die Transitivität hinaus Rxy und Ryz für ein gewisses geordnetes Elementtripel (x, y, z) erfüllt sein:

$\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \to Rxz] \wedge \exists x \exists y \exists z(Rxy \wedge Ryz)$

i) Zum Abschluss können wir die Antisymmetrie folgendermaßen formulieren: Wenn Rxy und Ryx erfüllt sind, so ist $x = y$ für beliebige x und y:

$\forall x \forall y[(Rxy \wedge Ryz) \to (x = y)]$

(Nur bei dieser letzten Eigenschaft tritt neben der beliebigen Relation $R\Box\triangle$ auch eine feste, gegebene Relation - die Gleichheit - auf.)

3. a) Der folgende Satz ist natürlich nicht die Verneinung des angegebenen Satzes:
Wenn es kalt ist, heizen wir nicht, sondern: Es kommt vor, dass es kalt ist und wir trotzdem nicht heizen. Der ursprüngliche Satz und seine Verneinung ergeben die Formeln:

$\forall x(Kx \rightarrow Hx), \qquad \exists x(Kx \wedge \sim Hx)$

Hierbei bedeuten $K\triangle =$ zum Zeitpunkt $\triangle$ ist es kalt, $H\triangle =$ zum Zeitpunkt $\triangle$ heizen wir.

b) Die Verneinung des Satzes: Es gibt eine Tür, die keine Klinke hat. Wir können dafür auch sagen (das ist die "triviale Lösung"): Nicht jede Tür hat eine Klinke.
Der folgende Satz drückt die Verneinung von a) nicht aus: Keine Tür hat eine Klinke. (Wir wissen, dass $A \vee \sim A = W$ ist, der Ausgangssatz und der letzte Satz aber können gleichzeitig falsch sein, und in der Grundmenge aller Türen der Welt sind beide tatsächlich falsch.
Dann aber ist auch die Alternative beider Sätze falsch. Daher kann der eine Satz nicht die Verneinung des anderen sein.)

Führen wir die Bezeichnungen $R\Box\triangle = \Box$ hat $\triangle$ (wobei die Grundmenge von $\Box$ die Menge aller Türen und die Grundmenge von $\triangle$ die Menge aller Klinken ist), so können wir die ursprüngliche Behauptung folgendermaßen formalisieren: $\forall x \exists y Rxy$.
Für die Verneinung dieses Satzes erhalten wir drei Varianten:

$\sim \forall x \exists y Rxy; \quad \exists x \sim \exists y Rxy; \quad \exists x \forall y \sim Rxy$

Wenn wir für beide Veränderliche dieselbe Grundmenge (die die Menge der Türen und die Menge der Klinken umfasst) zugrunde legen, ändern sich unsere Formeln in dieser Weise:

$\forall x[Tx \rightarrow \exists y(Ky \wedge Rxy)]$

bzw. (wenn man die erste, triviale Lösung weglässt):

$\exists x[Tx \wedge \sim \exists y(Ky \wedge Rxy)], \quad \exists x[Tx \wedge \forall y(\sim Ky \vee \sim Rxy)]$

c) Die Verneinung des Satzes: Es gibt einen Menschen, in dessen Leben es keinen Augenblick gibt, in dem er gern etwas Verbotenes tun möchte.
Das können wir auch so formulieren: Es gibt einen Menschen, der in seinem Leben in jedem Augenblick nichts Verbotenes tun möchte. Den zweiten Teil des Satzes können wir sogar noch weiter umformen: ... nur solches tun möchte, was nicht verboten ist. Wir drücken den Ausgangssatz durch eine Formel aus:

$\forall x \exists y \exists z(Txyz \wedge \sim Vz)$

Hierbei bedeuten $T\Box\triangle\bigtriangledown = \Box$ möchte zum Zeitpunkt $\triangle$ gern $\bigtriangledown$ tun, $V\bigtriangledown =$ es ist nicht verboten, $\bigtriangledown$ zu tun.
Die Grundmenge für $\Box$ sei die Menge aller Menschen, die für $\triangle$ die Menge aller Zeitpunkte im Leben der Menschen und die Grundmenge für $\bigtriangledown$ die Menge aller Handlungen der Menschen.
Mit denselben Bezeichnungen ergibt sich die formale Verneinung des Satzes als

$\sim \forall x \exists y \exists z(Txyz \wedge \sim Vz)$

und durch einfache Umformungen können wir die oben angegebenen Varianten der Verneinung erhalten:

$$\begin{array}{ll} \exists x \sim \exists y \exists z(Txyz \wedge \sim Vz) & \text{Q 3} \\ \exists x \forall y \sim \exists z(Txyz \wedge \sim Vz) & \text{Q 1} \\ \exists x \forall y \forall z(Txyz \wedge Vz) & \text{Q 1, Def. d. Impl.} \end{array}$$

d) Die Verneinung des Satzes: Es gibt keine Zahl, die ein Vielfaches jeder beliebigen Zahl ist. Oder anders: Zu jeder beliebigen Zahl gibt es eine Zahl, deren Vielfaches die erste Zahl nicht ist. Zunächst formalisieren wir den ursprünglich Satz. Dabei benutzen wir die Bezeichnung $V\Box\triangle = \Box$ ist ein Vielfaches von $\triangle$:

$\exists x \forall y Vxy$

Und als Verneinung ergibt sich

$\sim \exists x \forall y Vxy$ oder $\forall x \exists y \sim Vxy$

$V\Box\triangle$ kann folgendermaßen durch die Multiplikation ausgedrückt werden:

$\exists z(\triangle \cdot z = \Box)$

Unter Benutzung dieser Bezeichnungsweise können wir unsere Formeln z. B. so weiterzerlegen:

$\exists x \forall y \exists z(y \cdot z = x), \qquad \sim \exists x \forall y \exists z(y \cdot z = x), \qquad \forall x \exists y \forall z \sim (y \cdot z = x)$

(Die erste Formel beschreibt den ursprünglichen Satz, die anderen beiden seine Verneinung. Man beachte die Beziehung zwischen den beiden letzten Formeln: Das Negationszeichen ist von ganz außen nach ganz innen gekommen, dazwischen wurde jeder Quantor durch den anderen ersetzt.)

4. Im letzten Schritt entspricht die Substitution nicht den Regeln. Es ist zwar wahr, dass die Substitution nur bei der $\forall$-Einführung in beiden Richtungen regulär sein muss und in allen anderen drei Fällen nur in einer Richtung, es ist aber nicht gleichgültig, in welcher Richtung sie dies ist:
Für die gebundene Variable muss überall dasselbe neue Zeichen eingesetzt werden. Das heißt, dass man bei der $\exists$-Einführung die Formeln "von unten nach oben" betrachten muss. So gesehen ist aber für x einmal ein $\Box$ und an einer anderen Stelle ein $\triangle$ eingesetzt worden. Die Substitution ist daher nicht regulär.

5. Die $\forall$-Einführung ist fehlerhaft. Die Substitution entspricht zwar den Regeln, in Formel 3 aber, auf die wir die $\forall$-Einführung angewendet haben, ist ein Zeichen enthalten (und zwar das $\triangle$), das durch eine $\exists$-Elimination in diese Formel gekommen ist.

6. Unser Freund hat bei der $\exists$-Elimination in Formel 6 ein Zeichen benutzt, das schon einmal in der Ableitung aufgetreten ist. Im vorletzten Schritt hat er die $\forall$-Einführung auf eine Formel angewendet, die von einer Prämisse abhängt, die eine freie Variable enthält, nämlich von 4.
Schließlich würde die Ableitung - selbst wenn sie nicht diese Fehler enthielte - nicht beweisen, dass 9 aus 1 folgt, sondern nur, dass 9 aus 1 und 4 folgt, denn auf Prämisse 4 wird nicht die Pfeiloperation angewendet.

Anhang

1. Wenn der erste Satz wahr ist, ist der zweite nicht wahr. Wenn der erste nicht wahr. ist, ist der zweite wahr. Welcher dieser beiden Fälle eintritt, können wir nicht entscheiden. Es gibt also keine eindeutige Lösung.
Wenn zwei Menschen zueinander sagen: "Du lügst", so folgt daraus nur, dass der eine lügt und der andere die Wahrheit sagt, nicht aber, wer von beiden lügt und wer die Wahrheit sagt.

2. Wenn wir annehmen, dass irgendeine der Behauptungen wahr ist, so bedeutet dies, dass auch die andere wahr ist. Wenn wir annehmen, dass irgendeine der Behauptungen falsch ist,

so bedeutet dies, dass auch die andere falsch ist.

Es ist daher in gleicher Weise möglich, dass beide Behauptungen wahr oder dass beide Behauptungen falsch sind. Keine dieser Annahmen führt auf einen Widerspruch. Wenn zwei Menschen voneinander behaupten, dass der andere die Wahrheit sagt, so folgt daraus nur, dass entweder beide die Wahrheit sagen oder beide lügen, nicht aber, ob sie lügen oder die Wahrheit sagen.

3. Nehmen wir an, die Behauptung des Satzes sei wahr. Dann ist die Behauptung des Satzes nicht wahr. Das aber heißt: Es ist nicht wahr, dass das, was dieser Satz behauptet, nicht wahr ist. Also ist die Behauptung des Satzes dann wahr.
Wenn sie wahr ist, so ist sie nicht wahr, wenn sie nicht wahr ist, so ist sie wahr, wenn sie aber wahr ist, so ist sie nicht wahr .... usw. ohne Ende.

Die Behauptung des Satzes kann daher weder wahr noch falsch sein. Wenn jemand sagt, dass er jetzt in diesem Augenblick lügt, so lügt er weder damit, noch sagt er damit die Wahrheit. Seine Behauptung hat keinen Wahrheitswert.

4. Nehmen wir an, die Behauptung des Satzes sei wahr. Das bedeutet, die Behauptung des Satzes ist wahr. Hierin liegt kein Widerspruch. Versuchen wir es aber auch mit der gegenteiligen Annahme, die Behauptung des Satzes sei nicht wahr.
Das bedeutet: Es ist nicht wahr, dass das, was der Satz behauptet, wahr ist. Das heißt, was der Satz behauptet, ist nicht wahr. Auch hier liegt kein Widerspruch vor. Die Behauptung des Satzes kann also gleichermaßen wahr wie falsch sein.

Wer sagt, dass er (jetzt in diesem Augenblick) die Wahrheit sagt, kann damit sowohl die Wahrheit sagen als auch lügen. Seine Behauptung hat also keinen eindeutigen Wahrheitswert.

5. Nehmen wir an, der Kreter hat mit seinen Worten "Alle Kreter lügen" immer die Wahrheit gesagt. Aus dieser Behauptung folgt, dass auch er soeben gelogen hat, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Nehmen wir nun an, dass er bei seinen Worten gelogen hat. Dann ist dies wahr: Nicht alle Kreter lügen immer.
Deswegen kann er in diesem Augenblick aber doch gelogen haben. Hier liegt also kein Widerspruch vor. Da wir aber schon gesehen haben, dass er nicht die Wahrheit gesagt haben kann, hat er mit Sicherheit gelogen.

Demnach ist es unmöglich, dass alle Kreter immer die Wahrheit sagen (denn dieser Kreter zum Beispiel hat soeben, gelogen). Es ist aber genausowenig wahr, dass alle Kreter immer lügen (denn das hat dieser Kreter gerade behauptet, und es hat sich herausgestellt, dass er dabei gelogen hat). Darüber, ob die Kreter die Wahrheit sagen oder nicht, können wir nur soviel feststellen: Es gibt einen Fall, in dem ein Kreter lügt. Ob es einen Kreter gibt, der immer die Wahrheit sagt, und ob es einen Kreter gibt, der immer lügt, können wir auf Grund dieses einen Satzes nicht entscheiden.

Oft begegnet man der Ansicht, dass ein Kreter, der behauptet: Alle Kreter lügen immer, damit weder die Wahrheit sagen noch lügen kann. Dieses Missverständnis rührt daher, dass die Verneinung des zitierten Satzes so verstanden wird: Alle Kreter sagen immer die Wahrheit, d. h., Es gibt keinen Kreter, der jemals lügt.

Formalisiert (unter Benutzung der Bezeichnung $L\square\triangle = \square$ lügt zum Zeitpunkt $\triangle$) ergibt sich:

$\sim \forall x \forall y Lxy \equiv \forall x \forall y \sim Lxy$

oder anders

$\sim \forall x \forall y Lxy \equiv \sim \exists x \exists y Lxy$

Hingegen ist aber

$$\begin{aligned} \sim \forall x \forall y Lxy &\equiv \exists x \sim \forall y Lxy && \text{(Q 3)} \\ &\equiv \exists x \exists y \sim Lxy && \text{(3)} \end{aligned}$$

Sprachlich formuliert bedeutet dies: Die Verneinung des Satzes "Alle Kreter lügen immer" lässt sich beispielsweise so aussprechen: Es gibt einen Kreter, und es gibt einen Zeitpunkt, so dass dieser Kreter zu diesem Zeitpunkt nicht lügt
oder kürzer:
Es gibt einen Kreter, bei dem es vorkommt, dass er die Wahrheit sagt.

Allgemein gilt:
Daraus, dass eine Relation nicht zwischen allen Elementen der Grundmenge besteht, kann man nicht schließen, dass es keine zwei Elemente der Grundmenge gibt, zwischen denen sie besteht.

12 Logische Schlussfiguren und Schlussregeln

Erklärung: Der Leser findet in dieser Zusammenstellung auch die logischen Identitäten, die bekanntlich nichts anderes als umkehrbare Schlussfiguren sind.

1. Schlussfiguren ohne Quantoren

a) Umkehrbare Figuren (Identitäten)

Negation
$\sim\sim A \equiv A$
(doppelte Verneinung)

Konjunktion		Alternative
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	Kommutativität	$A \vee B \equiv B \vee A$
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
$A \wedge A \equiv A$	Idempotenz	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge F \equiv F$	Identität m.Wahrheitswert	$A \vee W \equiv W$

Konjunktion und Negation
$A \wedge \sim A \equiv F$
(Widerspruch)

Alternative und Negation
$A \vee \sim A \equiv W$
(ausgeschlossenes Drittes)

Konjunktion und Alternative

$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	Distributivität	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	Absorption	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Konjunktion, Alternative und Negation

$\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ de Morgan $\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$

Konjunktion, Alternative, Negation und Implikation

$A \to B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$	Def. Implikation	$A \to B \equiv \sim A \vee B$
$A \to F \equiv A$	Identität m.Wahrheitswert	$W \to A \equiv A$
$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$		$A \to B \equiv \sim B \to \sim A$
(Exportation)		(Kontraposition)

Konjunktion, Alternative, Negation, Implikation und Äquivalenz

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$ Def. Äquivalenz $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

b) Nichtumkehrbare Figuren

Konjunktion

Weglassung $\dfrac{A \wedge B}{A}, \dfrac{A \wedge B}{B}$; Kopplung $\dfrac{B}{A \wedge B}$

Alternative

Hinzufügung $\dfrac{A}{A \vee B}, \dfrac{B}{A \vee B}$

Implikation

Abtrennung, modus pollens $\dfrac{\begin{array}{c}A \to B\\ A\end{array}}{B}$, bedingter Syllogismus $\dfrac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to C\end{array}}{A \to C}$

Alternative und Negation

disjunktiver Syllogismus, modus tollendo pollens $\dfrac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \sim A\end{array}}{B}$, $\dfrac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \sim B\end{array}}{A}$

Implikation und Negation

modus tollens $\dfrac{\begin{array}{c}A \to B\\ \sim B\end{array}}{\sim A}$

Alternative und Implikation

Fallunterscheidung $\dfrac{\begin{array}{c}A \vee B\\ A \to C\\ B \to D\end{array}}{C \vee D}$

2. Umformungsregeln

a) Umkehrbare Umformungsregeln

Von den Prämissen zur Konklusion oder zurück: Eine Prämisse darf als Vorderglied einer Implikation zur Konklusion hinzugefügt werden. Ist die Konklusion eine Implikation, so darf ihr Vorderglied weggelassen und als weitere Prämisse zu den übrigen Prämissen hinzugefügt werden. Dabei entstehen aus richtigen Schlussfiguren wieder richtige Schlussfiguren.

Ersetzung: Schlussfiguren bleiben richtig, wenn man in ihnen auftretende Ausdrücke durch wertverlaufsgleiche Ausdrücke ersetzt.

b) Nicht umkehrbare Umformungsregeln

Substitution: Schlussfiguren bleiben richtig, wenn man in ihnen vorkommende logische Variable an allen Stellen, an denen sie auftreten, durch Ausdrücke ersetzt, und zwar dieselbe Variable stets durch denselben Ausdruck.

3. Schlussfiguren mit Quantoren

a) Umkehrbare Schlussfiguren (Identitäten)

Negation

Q 3: $\sim \forall x Gx \equiv \exists x \sim Gx$ | Q 1: $\sim \exists x Gx \equiv \forall x \sim Gx$

Q 4: $\sim \forall x \sim Gx \equiv \exists x Gx$ | Q 2: $\sim \exists x \sim Gx \equiv \forall x Gx$

Konjunktion, Alternative

Q 13: $\forall x(Gx \wedge Hx) \equiv \forall x Gx \wedge \forall x Hx$ | Q 16: $\exists x(Gx \vee Hx) \equiv \exists x Gx \vee \exists x Hx$

Q 9: $\forall x(A \wedge Gx) \equiv A \wedge \forall x Gx$ | Q 11: $\exists x(A \vee Gx) \equiv A \vee \exists x Gx$

Q 8: $\forall x(A \vee Gx) \equiv A \vee \forall x Gx$ | Q 12: $\exists x(A \wedge Gx) \equiv A \wedge \exists x Gx$

Implikation

Q 7: $\forall x(A \to Gx) \equiv A \to \forall x Gx$ | Q 10: $\exists x(A \to Gx) \equiv A \to \exists x Gx$

Q 5: $\forall x(Gx \to A) \equiv \exists x Gx \to A$ | Q 6: $\exists x(Gx \to A) \equiv \forall x Gx \to A$

Quantorenvertauschung

Q 19: $\forall x \forall y Gxy \equiv \forall y \forall x Gxy$ | Q 20: $\exists x \exists y Gxy \equiv \exists y \exists x Gxy$

b) Nicht umkehrbare Schlussfiguren

Alternative, Konjunktion

Q 14: $\dfrac{\forall xGx \land \forall xHx}{\forall x(Gx \lor Hx)}$; Q 18: $\dfrac{\exists x(Gx \land Hx)}{\exists xGx \land \exists xHx}$

Implikation

Q 15: $\dfrac{\forall x(Gx \to Hx)}{\forall xGx \to \forall xHx}$; Q 17: $\dfrac{\exists xGx \to \exists xHx}{\exists x(Gx \to Hx)}$

Quatorenvertauschung

Q 21: $\dfrac{\exists x\forall yGxy}{\forall y\exists xGxy}$

c) Elimination und Einführung von Quantoren

Starke Quantor-Schlüsse

$\forall$-Elimination $-\forall$: $\dfrac{\forall xGx}{G\square}$ oder $\dfrac{\forall xGx}{Ga}$

$\exists$-Einführung $+\exists$: $\dfrac{G\square}{\exists xGx}$ oder $\dfrac{Ga}{\exists xGx}$

Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei, also nicht in Verbindung mit einem Quantor vorkommen.
$G\square$ und Ga unterscheiden sich von Gx dadurch, dass in $G\square$ bzw. in Ga überall dort das Zeichen $\square$ bzw. der Buchstabe a steht, wo in Gx die Variable x vorkommt ($\square$ ist ein Zeichen für ein beliebiges Element der Grundmenge, a die Bezeichnung für ein festes Element der Grundmenge).

Schwache Quantor-Schlüsse

$\forall$-Einführung $+\forall$: $\dfrac{G\square}{\forall xGx}$ Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei vorkommen.

In $G\square$ steht an genau den Stellen das Zeichen $\square$, wo in Gx ein x steht. Nicht anwendbar auf Formeln, in denen eine aus einer $\exists$-Elimination stammende freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) vorkommt. Weder anwendbar auf Prämissen, die eine freie Variable (Quadrat, Dreieck usw.) enthalten, noch auf Formeln, die von solchen Prämissen abhängen.

$\exists$-Elimination $-\exists$: $\dfrac{\exists xGx}{G\square}$

Die Variable x ist zwar in $\forall xGx$ und in $\exists xGx$ durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden, in Gx darf sie aber nur frei vorkommen.

Für jede hinzukommende freie Variable ist ein Zeichen (Quadrat, Dreieck oder ähnliches Zeichen) zu wählen, das in der Ableitungskette noch nicht vorgekommen ist.

Literaturverzeichnis

Genannt werden hier nur, einige Bücher, die mit geringen Vorkenntnissen gelesen werden können:

1. Exner, R. M., and Rosskopf, M. F.: Logic in Elementary Mathematics, New York, 1959.

2. Suppes, P., and Hill, Sh.: Mathematical Logic for the Schools, Stanford, 1962.

3. Suppes, P.: Introduction to Logic, Princeton, 1957.

4. Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik, Göttingen, 1966.

5. Segeth, W.: Elementare Logik, Berlin, 1972.

6. Peter, R.: Das Spiel mit dem Unendlichen (speziell Teil III), Leipzig, 1966.