

---

**E. Quaisser, H.-J. Sprengel**

**Geometrie in Ebene und im Raum**

1989 Deutscher Verlag der Wissenschaften  
MSB: Nr. 137  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## Vorbemerkungen

Die Aufnahme, die die Bändchen "Räumliche Geometrie" und "Bewegungen in der Ebene und im Raum" bei mathematisch interessierten Schülern und bei Fachleuten gefunden haben, war der Anlass, beide Titel gemeinsam in einem Buch wieder vorzulegen.

Wie die jeweiligen Vorworte ausweisen, sind diese beiden Teile getrennt entstanden. Doch zwischen ihnen bestehen viele Bezüge und Gemeinsamkeiten.

Zunächst einmal haben sich in beiden Bändchen die mehrjährigen Erfahrungen in der Förderung mathematisch interessierter Schüler und in der Lehrerausbildung niedergeschlagen. Dementsprechend wenden sie sich beide an diesbezügliche Leserkreise. Sie möchten nicht nur einen breiten Kreis mathematisch Interessierter ansprechen, sondern auch als Lehr- und Übungsmaterial für interessierte Schüler und mathematische Zirkel nützlich sein, und sie möchten als Handreichung die Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrern unterstützen.

Die verwendeten Mittel sind deshalb bewusst elementar. Im Vordergrund stehen grundlegende Sachverhalte und konstruktiv-deduktive Darstellungen.

Aufgaben und Problemstellungen nehmen einen breiten Raum ein und möchten den Leser zu eigenständiger Mitarbeit anregen. Wert wird auf den Bezug zu der uns umgebenden materiellen Welt gelegt, zu dem Ursprung der Idealisierungen, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Und man kann sich heute noch diesen Bezug zur Realität, etwa in der Art eines Experiments, durch gegenständliches Arbeiten herstellen.

Ein enger und im wesentlichen inhaltlicher Bezug zwischen den beiden Teilen ergibt sich aus dem nachdrücklichen Bemühen, der räumlichen Geometrie die gebührende Aufmerksamkeit zu verschaffen. Es geht um das Erfassen räumlicher Sachverhalte, um das Vertiefen und Erweitern derartiger Kenntnisse und um das Schulen des räumlichen Vor- und Darstellungsvermögens.

In beiden Teilen wird dazu ausdrücklich von vergleichenden Betrachtungen zwischen ebener und räumlicher Geometrie (Analogiebetrachtungen) Gebrauch gemacht und die Nützlichkeit eines derartigen methodologischen Herangehens sichtbar ausgewiesen. Da beide Bändchen davon durchdrungen sind, mag der nun gewählte gemeinsame Titel angebracht erscheinen.

Natürlich spielen rein technische Gründe eine Rolle, die die fast unveränderte Übernahme der Vorlagen bewirkte. Beide Vorworte behalten deshalb ihren Sinn. Da die äußere Gestalt beider Teile nahezu gleich ist, erschienen hier Veränderungen nicht zwingend. Im Interesse einer äußerlichen Ganzheit wurde ein gemeinsames Verzeichnis der Bezeichnungen und Symbole angefügt sowie ein Stichwortverzeichnis in Anbetracht des Gesamtumfanges neu aufgenommen.

Wir würden uns freuen, wenn der Gesamtband sich als ebenso nützlich erweist wie die beiden ursprünglichen Bändchen.

Potsdam, im Herbst 1988

E. Quaisser, H.-J. Sprengel

---

E. Quaisser, H.-J. Sprengel

Räumliche Geometrie

---

## Bevor es richtig losgeht,

Es kommt also nicht so sehr darauf an,  
dass ein Buch die richtigen Leser,  
als vielmehr darauf, dass die Leser  
die für sie richtigen Bücher finden.

A. Polgar

möchten wir unserem Leser einiges zum Anliegen unseres Büchleins sagen, denn schon die Vorstellungen und Erwartungen zum Thema "Räumliche Geometrie" sind recht unterschiedlich.

Aus Erfahrungen bei der fachlichen Ausbildung von Lehrern und bei der außerunterrichtlichen Tätigkeit in mathematischen Zirkeln wissen wir, dass Schwierigkeiten in der räumlichen Geometrie bereits zu einem erheblichen Teil ihre Ursache darin finden, dass grundlegende Begriffe und Beziehungen im Anschauungsraum - insbesondere Aussagen über Lage und Senkrechtsein zwischen Punkten, Geraden und Ebenen sowie grundlegende anordnungsgeometrische Sachverhalte - nicht ausreichend bekannt sind.

Dazu kommen Unsicherheiten beim Beweisen bezüglich der möglichen Voraussetzungen und bezüglich der Methoden. Hier möchte dieses Büchlein helfen.

Dem Leser wird eine Reihe von Basissätzen der räumlichen Geometrie vermittelt: Eingedenk der Tatsache, dass auch die Geometrie durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden ist, haben wir einige Erfahrungssätze, die einsichtig und einfach erscheinen, an den Anfang gestellt. Darauf wird das Weitere - insbesondere die Lösung der Aufgaben - aufgebaut, ohne zusätzlich Anleihen bei der Anschauung machen zu müssen.

Wir haben uns auf die Grundgebilde Punkte, Gerade, Ebene und Kugel beschränkt und die Ausführungen lieber durch zahlreiche Aufgaben statt durch neue Begriffe angereichert.

Ein weiteres Prinzip waren für uns vergleichende Betrachtungen zwischen der ebenen und der räumlichen Geometrie (Analogiebetrachtungen), die einerseits ebenfalls zur Motivierung verwendet werden, denen aber auch ein ganzes Kapitel gewidmet ist.

Im Sinne einer Exkursion wollen wir auf ganz bestimmten Wegen unsere Leser zu Kenntnissen und Erkenntnissen führen. Die Wege verlaufen möglichst geradlinig mit unterschiedlichem Steigungsgrad, die Wege kreuzen sich, bilden ein Netz; man muss sie nicht in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen. Nur mit dem ersten Kapitel möchte der Anfang gemacht werden. Viele Fortsetzungen und Ergänzungen sind möglich.

Bei unserem Leser setzen wir nur wenig voraus. Er sollte Kenntnisse von den einfachsten ebenflächig begrenzten Körpern besitzen, einen einfachen räumlichen Sachverhalt an seiner Darstellung mittels Parallelprojektion ablesen können, mit einfachen Symbolen der Mengenlehre umgehen können und nicht zuletzt bereit sein, aktiv (mit Papier, Bleistift und Zeichengeräten) mitzuarbeiten.

---

Es erschien uns wichtig, dass möglichst viele Aufgaben unter einem bestimmten Gesichtspunkt zusammengestellt wurden, so dass dieses Büchlein gerade auch als ein fundiertes Aufgabenmaterial - insbesondere für Arbeitsgemeinschaften und Klubs Junger Mathematiker - verwendet werden kann. Die verwendeten Aufgaben stammen nur zum geringeren Teil von den Autoren selbst.

Vielfach konnte die Urheberschaft nicht geklärt werden, so dass nur bei den Aufgaben aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und der Internationalen Mathematikolympiade ein Quellenhinweis erfolgt.

Wir hoffen, dass dieses Büchlein - insbesondere das erste Kapitel - auch eine nützliche Ergänzung zu Hochschullehrbüchern wie dem Band 6 "Geometrie I" aus der Reihe "Mathematik für Lehrer" ist.

In seine inhaltliche Gestaltung ist manches aus der Geometrieausbildung eingeflossen, wie sie an der Pädagogischen Hochschule in Potsdam unter der Leitung von Prof. Klotzek betrieben wird.

Für die freundlichen und vielfältigen Hinweise, die uns bei der Arbeit hilfreich waren, danken wir den Herren Prof. Dr. G. Geise und Prof. Dr. H. Bausch und Dr. P. Kobelt. Unser Dank gilt auch dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit sowie dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam, im Sommer 1980  
E. Quaisser, H.-J. Sprengel

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Lage zueinander . . . . .	5
1.2 Wir projizieren, schneiden und verbinden . . . . .	10
1.3 Halbebenen, Halbräume und ihre Nützlichkeit für anordnungsgeometrische Sachverhalte . . . . .	14
1.4 Vom Senkrechtsein . . . . .	18
1.5 Einfache Beziehungen zwischen Kreisen, Kugeln, Geraden und Ebenen .	23
<b>2 Räumliche Konstruktionen</b>	<b>26</b>
2.1 Was ist eine räumliche Konstruktion? . . . . .	26
2.2 Nochmals vom Senkrechtsein . . . . .	29
2.3 Weitere Beispiele . . . . .	31
<b>3 Analogiebetrachtungen</b>	<b>34</b>
3.1 Was wir unter einer Analogie verstehen wollen . . . . .	34
3.2 Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen . . . . .	37
3.3 Wir finden neue Probleme . . . . .	41
3.4 Doch Vorsicht ist geboten! . . . . .	43
<b>4 Volumina</b>	<b>45</b>
4.1 Was ist der Rauminhalt? . . . . .	45
4.2 Zerlegen und Ergänzen . . . . .	51
4.3 Extrema . . . . .	56
<b>5 Einige Lösungsanmerkungen</b>	<b>66</b>
<b>6 Literatur</b>	<b>69</b>

# 1 Grundlagen

Wir sollten uns mit großen Problemen beschäftigen,  
solange sie noch ganz klein sind.  
J. Rutkowska

## 1.1 Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Lage zueinander

Die Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade und Ebene sind durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden. Daher ist es auch oft leicht, geeignete Dinge aus unserer Umgebung zu finden, die wiederum der Veranschaulichung geometrischer Sachverhalte dienen.

So nutzen wir die Tischplatte zur Veranschaulichung einer Ebene, und die uns in einem Zimmer umgebenden "vier Wände" können uns zusammen mit Fußboden und Decke den Schnitt von mehreren Ebenen demonstrieren.

Daher erscheint uns auch ein Satz wie etwa "Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden" auf Grund unserer Anschauung, unserer Erfahrung als selbstverständlich.

Andererseits hat wohl jeder auch schon gemerkt, wie schnell uns unsere Erfahrung und Anschauung verlassen können, vielleicht schon, wenn eine Ebene einen Würfel schneidet (und wir uns die Schnittfigur vorstellen sollen).

Beginnen wir zunächst mit den "Selbstverständlichkeiten".

Als ersten Erfahrungssatz formulieren wir

(1.1) Zu zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es genau eine Gerade  $g$ , die diese Punkte enthält.

Diese Gerade wird Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$  genannt und mit  $g_{AB}$  bezeichnet. Sind  $g$  und  $h$  zwei Geraden, so kann nach der Menge der gemeinsamen Punkte folgende Fallunterscheidung getroffen werden:

- a)  $g$  und  $h$  haben alle Punkte gemeinsam ( $g = h$ ), d.h., sie sind identisch;
- b)  $g$  und  $h$  haben genau einen Punkt gemeinsam ( $g \cap h = \{P\}$ ), d.h., sie schneiden sich;
- c)  $g$  und  $h$  haben keinen Punkt gemeinsam ( $g \cap h = \emptyset$ ), und es gibt eine Ebene, in der sie beide enthalten sind;
- d)  $g$  und  $h$  haben keinen Punkt gemeinsam, und sie sind in keiner gemeinsamen Ebene enthalten; in diesem Fall nennt man  $g$  und  $h$  zueinander windschiefe Geraden.

Wegen (1.1) können aus logischen Gründen keine weiteren Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden auftreten.

An dieser Stelle schon wird unser Vorgehen deutlich. Wir haben zwar den Satz (1.1), ohne ihn zu beweisen, als "Erfahrungssatz" vorangestellt, die möglichen Lagebeziehungen dann aber ohne weitere Berufung auf die Anschauung streng logisch geschlussfolgert.

Eine Gerade  $g$  heißt parallel zu einer Geraden  $h$ ; (und man schreibt  $g \parallel h$ ) genau dann,

wenn Fall a) oder c) gilt.

Jetzt entnehmen wir wiederum der Anschauung

(1.2) Zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $P$  gibt es genau eine Gerade  $h$ , die zu  $g$  parallel ist und durch  $P$  geht (Parallelenaussage).

(1.3) Die Parallelität zwischen Geraden ist transitiv, d.h., aus  $g \parallel h$  und  $h \parallel f$  folgt  $g \parallel f$ .

Bereits aus der Definition ergibt sich, dass die Parallelität eine reflexive und symmetrische Beziehung ist, d.h., dass jede Gerade zu sich selbst parallel ist und dass  $h \parallel g$  aus  $g \parallel h$  folgt.<sup>1</sup>

Unter der Richtung einer Geraden  $g$  wird die Menge aller zu  $g$  parallelen Geraden verstanden.<sup>2</sup>

Wir wenden uns nun den Lagebeziehungen zwischen einer Geraden  $g$  und einer Ebene  $\varepsilon$  zu und treffen unsere Fallunterscheidung wiederum nach der Menge der gemeinsamen Punkte:

- a) alle Punkte von  $g$  liegen in  $\varepsilon$  ( $g \subset \varepsilon$ ), d.h.,  $g$  liegt in  $\varepsilon$ ;
- b)  $g$  hat mit  $\varepsilon$  genau einen Punkt gemeinsam ( $g \cap \varepsilon = \{P\}$ ), d.h.,  $g$  schneidet  $\varepsilon$ ;
- c)  $g$  und  $\varepsilon$  haben keinen gemeinsamen Punkt ( $g \cap \varepsilon = \emptyset$ ).

Weitere Fälle gibt es nicht. Das begründet der Erfahrungssatz

(1.4) Sind  $A$  und  $B$  verschiedene Punkte in einer Ebene  $\varepsilon$ , so liegt ihre Verbindungsgerade  $g_{AB}$  in  $\varepsilon$ .

Eine Gerade  $g$  heißt parallel zu einer Ebene  $\varepsilon$  (und man schreibt  $g \parallel \varepsilon$ ) genau dann, wenn Fall a) oder c) gilt.

Entsprechend unserer bisherigen Weise betrachten wir die Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$ :

- a)  $\varepsilon$  und  $\eta$  haben alle Punkte gemeinsam ( $\varepsilon = \eta$ ), d.h., sie sind identisch;
- b)  $\varepsilon$  und  $\eta$  haben genau eine Gerade gemeinsam ( $\varepsilon \cap \eta = g$ ), d.h., sie schneiden sich;
- c)  $\varepsilon$  und  $\eta$  haben keinen gemeinsamen Punkt ( $\varepsilon \cap \eta = \emptyset$ ).

Weitere Fälle können nicht auftreten. Wie oben begründen wir das mit dem folgenden Erfahrungssatz:

(1.5) Haben zwei verschiedene Ebenen einen Punkt gemeinsam, so ist ihr Durchschnitt (d.h. die Menge ihrer gemeinsamen Punkte) eine Gerade.

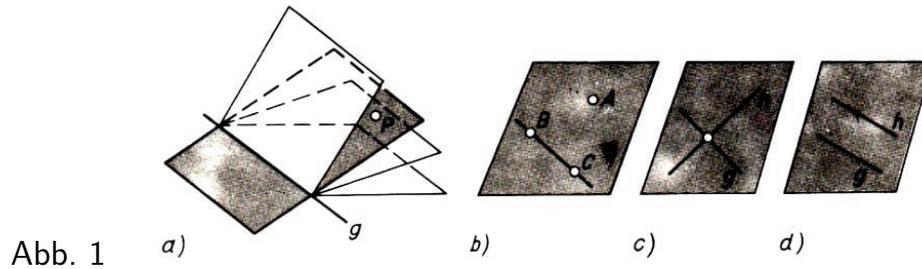
Eine Ebene  $\varepsilon$  heißt parallel zu  $\eta$ ; (kurz  $\varepsilon \parallel \eta$  genau dann, wenn Fall a) oder c) gilt. Diese Beziehung ist reflexiv und symmetrisch.

Ein weiterer Erfahrungssatz ist (man betrachte dazu Abb. 1a)

---

<sup>1</sup>Allgemein nennt man eine reflexive, symmetrische und transitive Relation eine Äquivalenzrelation.

<sup>2</sup>Die Richtungen sind gerade die Äquivalenzklassen bezüglich der Parallelitätsrelation.



(1.6) Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Geraden  $g$ , die nicht durch  $P$  geht, gibt es genau eine Ebene  $\eta$ , die  $P$  und  $g$  enthält.

Diese Ebene  $\eta$  wird die Verbindungsebene von  $P$  und  $g$  genannt und mit  $\varepsilon_{Pg}$  bezeichnet.

Entsprechend ist nun eine Verbindungsebene auch durch drei Punkte  $A, B, C$  bestimmt, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen (kurz: die nicht kollinear sind) oder durch zwei sich schneidende Geraden  $g, h$  oder durch zwei verschiedene parallele Geraden  $g, h$  (Abb. 1b-d); wir bezeichnen diese Ebene mit  $\varepsilon_{ABC}$  bzw. mit  $\varepsilon_{gh}$ .

Diese Aussage ist jetzt nicht nur ein akzeptabler Erfahrungssatz, sondern auch eine unmittelbare Konsequenz aus unseren bisherigen Aussagen. Denn beispielsweise gibt es bei der ersten Vorgabe nach (1.1) die Verbindungsgerade  $g_{BC}$  von  $B$  und  $C$ , die nach Voraussetzung nicht  $A$  enthalten kann, so dass nun wegen (1.6) eine Ebene  $\eta$  existiert, die neben  $A$  noch  $g_{BC}$  und damit erst recht auch die Punkte  $B, C$  enthält.

Eine weitere Ebene mit dieser Eigenschaft würde nach (1.4) auch die Gerade  $g_{BC}$  enthalten; dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage in (1.6).

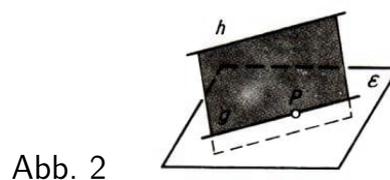
Von praktischer Bedeutung für den Nachweis von Parallelität zwischen Ebenen ist der folgende Satz:

(1.7) Satz. Sind  $g$  und  $h$  zwei sich schneidende Geraden, die beide zu einer Ebene  $\eta$  parallel sind, so ist ihre Verbindungsebene  $\varepsilon_{gh}$  parallel zu  $\eta$ .

Wir beweisen ihn mit Hilfe unserer bisherigen Aussagen indirekt. Angenommen, es wäre  $\varepsilon_{gh} \not\parallel \eta$ , dann würden sich diese beiden Ebenen in einer Geraden  $f$  schneiden. Die Gerade  $f$  ist zu wenigstens einer der Geraden  $g$  und  $h$  nicht parallel (sonst wäre  $g \parallel h$  nach (1.1)), etwa bezüglich  $g$ . Dann schneiden sich  $f$  und  $g$ , da beide in der Ebene  $\varepsilon_{gh}$  liegen; ihr Schnittpunkt sei  $P$ . Damit wäre

$$g \cap \eta = (g \cap \varepsilon_{gh}) \cap \eta = g \cap (\varepsilon_{gh} \cap \eta) = g \cap f = \{P\}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $g \parallel \eta$  ist.



Dieses mengentheoretische Arbeiten wie am Ende des Beweises ist natürlich frei von einer anschaulichen Denkweise. Es steht aber einer anschaulichen Betrachtungsweise

nicht entgegen. Denn auch wenn man die Beweisidee rein anschaulich gefunden hat, kann man und sollte man den Beweis derartig kurz, exakt und übersichtlich notieren.

Als Aufgabe beweise man in dieser Art die beiden folgenden Sätze:

(1.8) Satz. Schneidet eine Ebene  $\varepsilon$  zwei zueinander parallele Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ , so sind die Schnittgeraden zueinander parallel.

(1.9) Satz. Liegt die Gerade  $g$  in der Ebene  $\varepsilon$  und ist  $\varepsilon \parallel \eta$ , so ist  $g \parallel \eta$ .

Weitere einfache Beziehungen werden durch die folgenden drei Sätze ausgedrückt:

(1.10) Satz. Ist  $h$  zu einer Geraden  $g$  parallel und  $g \subset \varepsilon$ , so ist  $h \parallel \varepsilon$ .

(1.11) Satz. Ist  $h \parallel \varepsilon$ , so gibt es durch jeden Punkt  $P$  der Ebene  $\varepsilon$  genau eine Gerade  $g$ , die in  $\varepsilon$  liegt und zu  $h$  parallel ist (Abb. 2).

Satz (1.11) ist eine Umkehrung von (1.10).

(1.12) Satz. Zu jeder Ebene  $\varepsilon$  und zu jedem Punkt  $P$  des Raumes gibt es genau eine Ebene  $\eta$ , die durch  $P$  geht und parallel zu  $\varepsilon$  ist.

Wir stellen dem Leser frei, diese Aussage mit Hilfe der bisherigen zu beweisen oder sie als Erfahrungssätze zu akzeptieren. Insbesondere ergibt sich aus (1.12), dass die Parallelität von Ebenen transitiv ist (vgl. auch (1.3)).

Aus der ebenen Geometrie ist bekannt, dass sich drei Geraden paarweise schneiden können, ohne einen gemeinsamen Punkt zu besitzen. Darauf bezogen ist für den Raum der folgende Satz bemerkenswert:

(1.13) Satz. Schneiden sich drei Geraden  $f$ ,  $g$  und  $h$  paarweise und liegen sie in keiner gemeinsamen Ebene, so haben sie genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis (Abb. 3). Nach Voraussetzung bilden je zwei der Geraden  $f$ ,  $g$ ,  $h$  eine Verbindungsebene, und diese Ebenen schneiden sich wegen (1.5) paarweise längs dieser Geraden, da  $f$ ,  $g$ ,  $h$  nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es sei nun  $P$  der Schnittpunkt von  $f$  und  $g$ .

Dann ist  $P$  offenbar in den Verbindungsebenen  $\varepsilon_{hf}$  und  $\varepsilon_{gh}$  und damit in ihrem Durchschnitt, d.h. in der Schnittgeraden  $h = \varepsilon_{hf} \cap \varepsilon_{gh}$  enthalten.

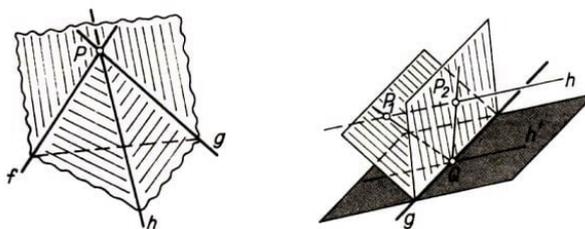


Abb. 3 und 4

Mehr als einen gemeinsamen Punkt können die Geraden jedoch nicht besitzen, sonst wäre (entgegen der Voraussetzung)  $f = g = h$  nach (1.1).

Man erkennt leicht, dass mit dem Satz (1.13) der folgende äquivalent ist:

(1.14) Satz. Drei Ebenen, die sich paarweise so schneiden, dass wenigstens zwei der

Schnittgeraden nicht parallel sind, haben genau einen Punkt gemeinsam.

Im folgenden betrachten wir zwei windschiefe Geraden  $g$  und  $h$  und leiten zwei Sätze ab, die auch für die Lösung von Aufgaben Bedeutung haben.

Ist  $P_1$  ein Punkt aus  $h$ , so gilt  $P_1 \notin g$ , und wegen (1.6) gibt es genau eine Ebene  $\eta_1$ , die durch  $g$  und  $P_1$  geht, nämlich ihre Verbindungsebene.

Für einen weiteren Punkt  $P_2$  auf  $h$  erhalten wir entsprechend eine Ebene  $\eta_2$ , (vgl. Abb. 4). Diese Ebene ist von  $\eta_1$  verschieden; andernfalls wäre  $P_2 \in \eta_1$ , und damit läge nach (1.4) auch die Gerade  $g_{P_1P_2} = h$  in  $\eta_1$ . Dies widerspricht der Voraussetzung, dass  $g$  und  $h$  in keiner Ebene gemeinsam liegen.

Auf diese Weise wird also jedem Punkt aus  $h$  genau eine Ebene durch  $g$  zugeordnet. Werden damit alle Ebenen durch  $g$  erfasst? Diese Frage ist äquivalent mit der Frage nach den zu  $h$  parallelen Ebenen durch  $g$ , denn jede Ebene  $\eta$  mit  $h \parallel \eta$  schneidet natürlich  $h$  in einem Punkt  $P$ .

Zur Klärung wählen wir auf  $g$  einen Punkt  $Q$  und betrachten anstelle der Punkte auf  $h$  die Geraden durch  $Q$  in der Verbindungsebene  $\varepsilon_{Qh}$ . Jede derartige Gerade ist von  $g$  verschieden, da  $g$  nicht in  $\varepsilon_{Qh}$  liegt, und sie bildet demnach zusammen mit  $g$  eine Verbindungsebene  $\eta$ .

Umgekehrt schneidet jede Ebene  $\eta$  durch  $g$  die Ebene  $\varepsilon_{Qh}$ , denn aus  $\eta \parallel \varepsilon_{Qh}$  würde  $\eta = \varepsilon_{Qh}$  wegen  $Q \in \eta, \varepsilon_{Qh}$  folgen, und damit würden  $g$  und  $h$  in einer Ebene liegen. Diese Zuordnung zwischen den Ebenen durch  $g$  und den Geraden in  $\varepsilon_{Qh}$  durch  $Q$  ist eineindeutig. (Warum?)

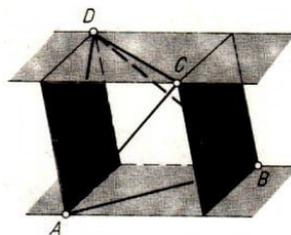


Abb. 5

Die Parallele  $h'$  zu  $h$  durch den Punkt  $Q$  liegt in der Ebene  $\varepsilon_{Qh}$ , da  $\varepsilon_{h'h} = \varepsilon_{Qh}$  ist. Die Ebene  $\varepsilon_{gh'}$  ist nun die einzige Ebene durch  $g$ , die  $h$  nicht schneidet, denn  $h'$  ist die einzige Gerade in  $\varepsilon_{Qh}$  durch den Punkt  $Q$ , die  $h$  nicht schneidet.

Unsere ausführliche Diskussion ergibt

(1.15) Satz. Sind  $g$  und  $h$  windschiefe Geraden, so gibt es durch  $g$  genau eine Ebene  $\eta$ , für die  $h \parallel \eta$  ist.

Dieses Ergebnis erhält man aus unseren bisherigen Aussagen auch kürzer. So ergibt sich etwa die Existenzaussage aus Satz (1.10). Uns lag jedoch daran, in einem Prozess von Schneiden und Verbinden, also von sehr elementaren geometrischen "Lage"-Operationen, Einsichten zu gewinnen.

Eine Folgerung aus Satz (1.15) ist

(1.16) Satz. Sind  $g$  und  $h$  windschiefe Geraden, so gibt es durch jeden Punkt  $P$  genau

eine Ebene  $\eta$ , zu der  $g$  und  $h$  parallel sind.

(1.17) Aufgabe. Ist  $ABCD$  ein Tetraeder, dann gibt es genau ein (und nur ein) Parallelepiped, in dem die Kanten des Tetraeders Flächendiagonalen sind.

Diese Aussage bedeutet anschaulich, dass ein Tetraeder in besonderer Weise durch ein Parallelepiped umschrieben werden kann. Wir führen jetzt den

Beweis. Durch je zwei Gegenkanten können, da sie windschief sind, nach Satz (1.15) zwei zueinander parallele Ebenen gelegt werden (vgl. Abb. 5). Jedes solche Paar paralleler Ebenen wird von einem der anderen beiden geschnitten; diese Schnittgeraden sind nach Satz (1.8) parallel zueinander. Auf diese Weise erzeugen die sechs Ebenen also tatsächlich ein Parallelepiped mit der gewünschten Eigenschaft. - Ein anderes kann es nicht geben, da es durch zwei Gegenkanten genau ein Paar zueinander parallelen Ebenen gibt.

Man löse nun selbständig folgende Aufgabe:

(1.18) Aufgabe. Ist  $ABCD$  ein Tetraeder, so gibt es eine Ebene, die von den Geraden  $g_{AB}$ ,  $g_{BC}$ ,  $g_{CD}$  und  $g_{DA}$  in Punkten  $E$ ,  $F$ ,  $G$  bzw.  $H$  so geschnitten wird, dass  $EFGH$  ein Parallelogramm ist. Man beschreibe alle Ebenen mit dieser Eigenschaft!

## 1.2 Wir projizieren, schneiden und verbinden

Jeder hat seine eigene Sicht,  
aber nicht jeder sieht etwas.  
B. Winawer

Die folgende räumliche Betrachtung führt uns zu einem Satz, der in der ebenen Geometrie eine tragende Rolle spielt. Wir gehen von einer Ebene  $\varepsilon$  mit einem darin liegenden Dreieck  $ABC$  aus und verbinden seine Ecken mit einem beliebig gewählten Punkt  $0 \notin \varepsilon$  (vgl. Abb. 6a). Diese Verbindungsgeraden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  schneiden wir mit einer beliebig gewählten Ebene  $\eta \neq \varepsilon$ , die nicht durch  $0$  geht, und erhalten drei Schnittpunkte  $A_1, B_1, C_1$ , die auch ein Dreieck bilden. (Sonst lägen  $A, B, C$  auf einer Geraden.)

Da  $A_1, B_1$  in der Ebene  $\varepsilon_{0AB}$  liegen, gilt dies auch für ihre Verbindungsgerade  $g_{A_1B_1}$  und deshalb schneiden sich  $g_{AB}$  und  $g_{A_1B_1}$  oder es ist  $g_{AB} \parallel g_{A_1B_1}$ .

Im ersten Fall müssen sich  $\eta$  und  $\varepsilon$  in einer Geraden  $s$  schneiden, auf der dann der Schnittpunkt von  $g_{AB}$  und  $g_{A_1B_1}$  liegt; im zweiten Fall ist  $g_{AB} \parallel s$  mit  $s = \varepsilon \cap \eta$ , oder die Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$  sind parallel zueinander.

Entsprechendes kann nun für die Geradenpaare  $g_{BC}$ ,  $g_{B_1C_1}$  und  $g_{CA}$ ,  $g_{C_1A_1}$  gesagt werden. Schneiden sich  $\varepsilon$  und  $\eta$ , so kann nur höchstens eines der drei betrachteten Geradenpaare zueinander parallel sein. Insgesamt erhalten wir:

(i) Zwei der Paare entsprechender Verbindungsgeraden (Seiten) der Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  - etwa  $g_{AB}$ ,  $g_{A_1B_1}$  und  $g_{BC}$ ,  $g_{B_1C_1}$  - schneiden sich in Punkten  $F$  und  $D$ , und das dritte Paar  $g_{CA}$ ,  $g_{C_1A_1}$  schneidet sich auf  $s = g_{FD}$  oder ist zu  $s$  parallel, oder die entsprechenden Verbindungsgeraden sind alle parallel zueinander.

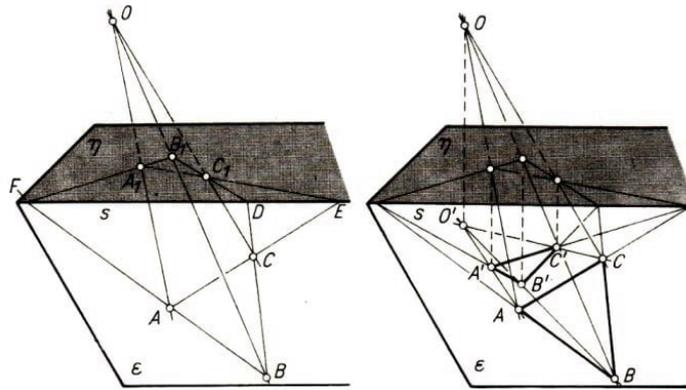


Abb. 6

Diese Eigenschaft geht nicht verloren, wenn wir durch eine Parallelprojektion auf die Ebene  $\varepsilon$  den Punkt  $O$  in  $O'$  und das Dreieck  $A_1B_1C_1$  in  $A'B'C'$  abbilden, bei der weder  $a$ ,  $b$  noch  $c$  Projektionsgeraden sind (vgl. Abb. 6b).

In Abb. 7a-d sind einige mögliche Resultate aufgezeigt, wobei wir den Leser mit Abb. 7d auch auf gewisse Spezialfälle aufmerksam machen möchten.

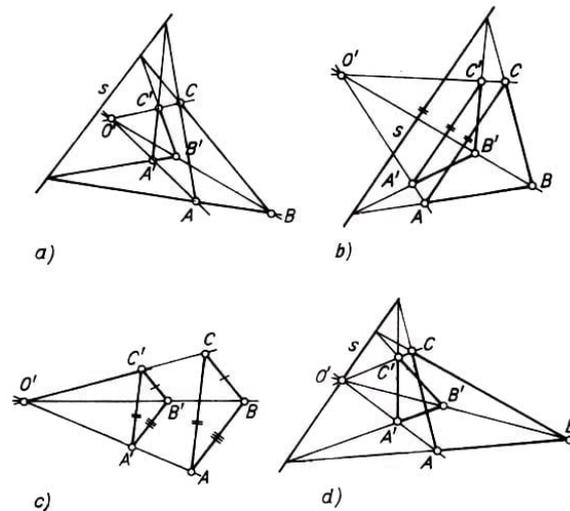


Abb. 7

Die räumlichen Betrachtungen führten uns zu dem folgenden Satz der ebenen Geometrie.

**Satz von Desargues<sup>3</sup>.** Liegen in einer Ebene zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  so, dass die Geraden  $g_{AA'}$ ,  $g_{BB'}$  und  $g_{CC'}$  voneinander verschieden sind und durch einen gemeinsamen Punkt  $O'$  gehen, dann gilt für die Paare  $g_{AB}$ ,  $g_{A'B'}$ ;  $g_{BC}$ ,  $g_{B'C'}$  und  $g_{CA}$ ,  $g_{C'A'}$  entsprechender Verbindungsgeraden (Seiten) der Dreiecke die Eigenschaft (i).

Dieser Satz spielt bei der Begründung der ebenen Geometrie eine fundamentale Rolle. Er ist zwar aus einfachen räumlichen Lagebeziehungen beweisbar, nicht aber aus Lagebeziehungen der ebenen Geometrie.

Mit unseren vorgestellten Betrachtungen ist bereits eine Beweismöglichkeit skizziert.

In der folgenden Aufgabengruppe sind ebenflächig begrenzte Körper in Kavalierperspektive vorgegeben. In diesen Abbildungen selbst sind konstruktiv die Schnittlinien

<sup>3</sup>Girard Desargues, 1593-1662, französischer Baumeister und Kriegsingenieur in Lyon, seit 1626 Geometer in Paris.

anzugeben, die durch den Schnitt mit einer vorgegebenen Ebene entstehen. Bezüglich der zugrunde liegenden Darstellungsart ist nur von Bedeutung, dass sie eine Parallelprojektion ist.

Wesentlich ist dann

(1.19) Satz. Bei einer Parallelprojektion (und damit speziell in der Kavaliersperspektive) sind die Bilder paralleler Geraden, die nicht in Projektionsrichtung liegen, selbst parallele Geraden. (Beweis als Übungsaufgabe.)

Und nun zur angekündigten Aufgabe, die eine Klausuraufgabe bei der XVII. OJM der DDR war:

(1.20) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 8a-c ist der Schnitt der Ebene  $\varepsilon_{PQR}$  mit den Seitenflächen des Quaders  $ABCDEFGH$  konstruktiv anzugeben. Dabei sei  $P$  stets ein Punkt der Seitenfläche  $EFGH$  und im ersten Fall (Abb. 8a)  $g_{QR} \parallel g_{BC}$ .<sup>4</sup>

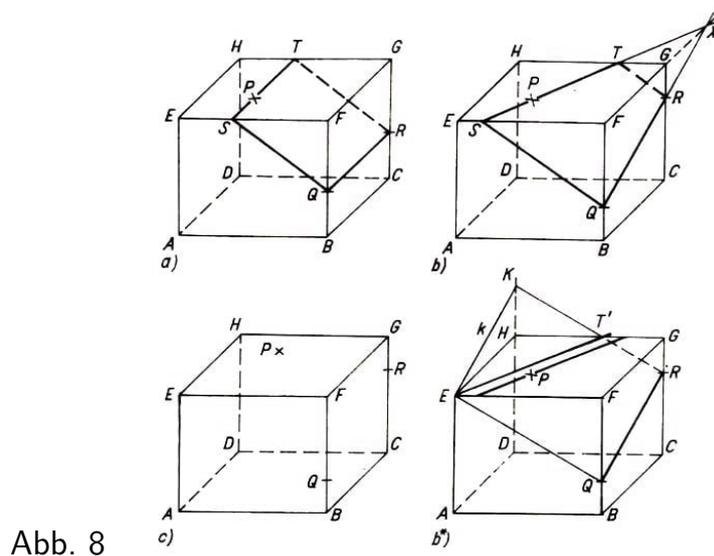


Abb. 8

Im ersten Fall ist die Parallele  $h$  zu  $g_{QR}$  durch  $P$  sowohl in  $\varepsilon_{PQR}$  als auch in der Ebene durch  $E, F, G, H$  enthalten, denn wegen  $h \parallel g_{PR}$ ,  $g_{QR} \parallel g_{BC}$  und  $g_{BC} \parallel g_{FG}$  ist auch  $h \parallel g_{FG}$ . Demnach ist  $h$  die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

Sie schneidet die Kanten  $EF$  und  $GH$  in Punkten  $S$  und  $T$ . (Dies scheint offensichtlich klar zu sein. Nach einer Begründung befragt, kommen wir jedoch in Verlegenheit.

Wir werden uns deshalb im nächsten Abschnitt mit einigen elementaren "anordnungsgeometrischen" Sachverhalten auseinandersetzen. In der Schule fallen solche Betrachtungen gewöhnlich ganz weg.) Die gesuchte Schnittkurve ist nun der geschlossene Streckenzug<sup>5</sup>  $QRTSQ$ . Auf Grund des Satzes (1.19) kann er in der Abbildung selbst durch Parallelziehen konstruktiv bestimmt werden.

Im zweiten Fall ist  $g_{QR}$  nicht parallel zu  $g_{FG}$ , und da beide Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen (nämlich in der Ebene durch  $B, C, G, F$ ), schneiden sie sich in

<sup>4</sup>Unsere Abb. 8a und 8b entsprechen nicht mehr denjenigen der Aufgabenstellung, da wir in sie bereits das Konstruktionsergebnis eingetragen haben.

<sup>5</sup>Unter einem Streckenzug  $ABCDE$  versteht man die Vereinigung der Strecken  $AB, BC, CD$  und  $DE$ .

einem Punkt  $X$  (Abb. 8b). Weil dieser Punkt in den Ebenen  $\varepsilon_{PQR}$  und  $\varepsilon_{EFG}$  liegt und diese voneinander verschieden sind, ist  $g_{PX}$  ihre Schnittgerade.

Man stellt anhand der Abbildung fest, dass auf Grund der Lage von  $Q$  und  $R$  der Punkt  $X$  auf der Verlängerung von  $FG$  über  $G$  hinaus liegt. Die Lage von  $P$  bewirkt, dass  $g_{PX}$  die Kante  $EF$  in einem Punkt  $S$  schneidet. Demnach schneidet  $g_{SX}$  auch die Kante  $GH$ ; der Schnittpunkt sei  $T$ . (Beim letzten Schluss wird wiederum ein Mangel an einer solchen Begründung wie oben spürbar.)

Die Strecken  $SQ$  und  $RT$  liegen in Seitenflächen des Quaders. Demnach ist schließlich  $QRTSQ$  die gesuchte Schnittkurve. Übrigens ist  $g_{SQ} \parallel g_{TR}$  (warum?) und damit  $SQRT$  ein Trapez.

Den dritten Fall überlassen wir nun dem Leser als Aufgabe.

Es gibt für Aufgabe (1.20) eine Fülle weiterer Lösungsmöglichkeiten. Für den zweiten Fall wollen wir eine aufgreifen, die (wie im ersten Fall) stärker von Parallelitäten Gebrauch macht.

Zunächst legen wir eine Ebene durch  $Q$ ,  $R$  und  $E$ . Diese schneidet nach Satz (1.8) die Ebene durch  $A$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $E$  in einer zu  $g_{PR}$  parallelen Geraden  $k$  (Abb. 8b\*). Die Geraden  $k$  und  $g_{DH}$  schneiden sich in einem Punkt  $K$ . (Sonst wäre  $k \parallel g_{DH}$  und damit  $g_{QR} \parallel g_{CG}$ )

Man stellt anhand der Abbildung fest, dass  $K$  auf der Verlängerung von  $DH$  über  $H$  hinaus liegt. Folglich schneidet  $g_{RK}$  die Kanten in einem Punkt  $T'$ . (Auch hier fehlt wieder eine anordnungsgeometrische Begründung!)

Die Gerade  $g_{ET'}$  ist nun die Schnittgerade der Ebene  $\varepsilon_{QRE}$  mit der durch die "Deckfläche" des Quaders bestimmten Ebene  $\varepsilon_{EFG}$ . Zur entsprechenden Schnittgeraden der vorgegebenen Ebene  $\varepsilon_{QRP}$  gelangt man jetzt, indem man die Parallele zu  $g_{ET'}$  durch  $P$  legt. Das Weitere läuft dann wie bei der ersten Lösung ab.

Halt! Bei sorgfältiger zeichnerischer Überprüfung (und dazu fordern wir den Leser nachdrücklich auf) stellen wir fest, dass das Ergebnis nicht mit der Geraden  $g_{ST}$  aus der ersten Lösung übereinstimmt.

(1.21) Aufgabe. Wo steckt der Fehler in unserer Überlegung?

Wer allzu leichtfertig unseren Darlegungen gefolgt ist, der möge sich spätestens hier vornehmen, scheinbar anschaulich klare Sachverhalte kritisch zu überdenken. Keinesfalls wollen wir unserem "reingefallenen" Leser den Mut nehmen; vielleicht ist es tröstlich zu wissen, dass unter anderen auch befähigten und erfolgreichen Schülern sowie tätigen Mathematikern ein derartiger Fehler unterlaufen ist.

An den folgenden beiden Aufgaben - einer einfachen und einer relativ anspruchsvollen - kann sich der Leser selbst prüfen, inwieweit er einfache räumliche Sachverhalte zur Lösung analoger Problemstellungen erfolgreich einsetzen kann.

(1.22) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 9 ist der Schnitt der Ebene  $\varepsilon_{PQR}$  mit den Seitenflächen des Tetraeders  $ABCD$  konstruktiv anzugeben.

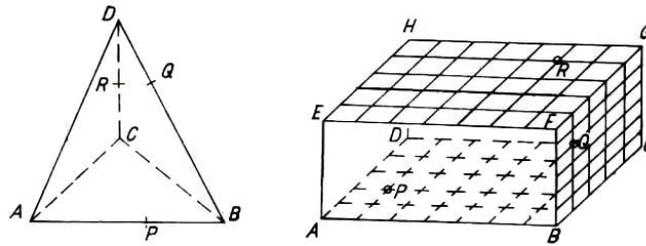


Abb. 9 und 10

(1.23) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 10 ist der Schnitt der Ebene  $\varepsilon_{PQR}$  mit den Seitenflächen des Quaders  $ABCDEFGH$  konstruktiv anzugeben. Dabei sind  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Punkte der Seitenflächen  $ABCD$ ,  $BCGF$  bzw.  $GFEH$ , und die Gitternetze auf diesen Seitenflächen dienen zur Festlegung der Punkte.

### 1.3 Halbebenen, Halbräume und ihre Nützlichkeit für anordnungsgeometrische Sachverhalte

Ordnung und Unordnung kann man lernen,  
es ist Gewohnheit.  
Jean Paul

Im letzten Abschnitt wurde wiederholt ein Mangel spürbar: Die Existenz von Schnittelementen (z.B. von Strecken) konnte nur rein anschaulich begründet werden. Wir wollen daher in diesem Kapitel einige anordnungsgeometrische Grundlagen bereitstellen und an einigen Beispielen zeigen, wie man damit eine Fülle weiterer anordnungsgeometrischer Sachverhalte dann streng logisch behandeln kann.

Dazu setzen wir die Begriffe Strecke und Strahl als bekannt voraus. Die Strecke mit den Endpunkten  $A$  und  $B$ , die wir mit  $\overline{AB}$  bezeichnen, besteht aus  $A$ ,  $B$  und allen Punkten von  $g_{AB}$ , die zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Das Innere dieser Strecke (d.h.  $AB \setminus \{A, B\}$ ) wird mit  $AB$  bezeichnet (Abb. 11 a).

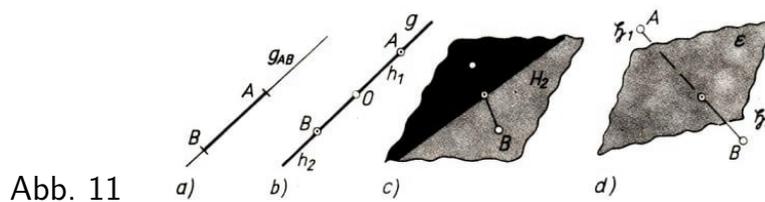


Abb. 11

Wählen wir auf einer beliebigen Geraden  $g$  einen Punkt  $O$ , so haben wir die Vorstellung, dass durch  $O$  die Menge der restlichen Punkte von  $g$  (d.h.  $g \setminus \{O\}$ ) in genau zwei Teilmengen  $h_1$  und  $h_2$  zerlegt wird (Abb. 11b), die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

Zwei verschiedene Punkte  $A$ ,  $B$  liegen in der gleichen Teilmenge, wenn  $O \notin \overline{AB}$  ist, und sie liegen in verschiedenen Teilmengen, wenn  $O \in \overline{AB}$  ist. Diese Teilmengen heißen recht treffend Halbgeraden mit dem Scheitel  $O$ . Fügen wir diesen Punkt Mengen noch jeweils  $O$  hinzu, dann liegen Strahlen vor. Eine Halbgerade ist durch ihren Scheitel  $O$  und einen Punkt  $A$ , den sie enthält, bestimmt; man bezeichnet sie mit  $OA^+$ .

Der Vorstellung entnehmen wir, dass analoge Sachverhalte in einer Ebene bezüglich

einer Geraden und im Raum bezüglich einer Ebene bestehen.

Ist  $g$  eine Gerade in einer Ebene  $\varepsilon$ , so wird  $\varepsilon \setminus g$  durch  $g$  in genau zwei Teilmengen  $H_1$  und  $H_2$  so zerlegt, dass  $A \in H_1$  und  $B \in H_2$ , genau dann gilt, wenn  $AB$  von  $g$  geschnitten wird. Die Mengen  $H_1$  und  $H_2$  heißen Halbebenen von  $\varepsilon$  bezüglich  $g$  (Abb. 11c).

Ist  $\varepsilon$  eine Ebene im Raum und  $\mathfrak{R}$  die Menge aller Raumpunkte, so wird  $\mathfrak{R} \setminus \varepsilon$  durch  $\varepsilon$  in genau zwei Teilmengen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$ , so zerlegt, dass  $A \in \mathfrak{H}_1$  und  $B \in \mathfrak{H}_2$  genau dann gilt, wenn  $AB$  von  $\varepsilon$  geschnitten wird. Die Mengen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  heißen Halbräume bezüglich  $\varepsilon$  (Abb. 11 d).

Konvexe Punktmenge sind dadurch ausgezeichnet, dass sie mit zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  auch  $AB$  enthalten. Aus der Definition der Halbebenen und Halbräume ergibt sich, dass sie konvex sind.

Wir wollen das Bereitgestellte gleich erproben.

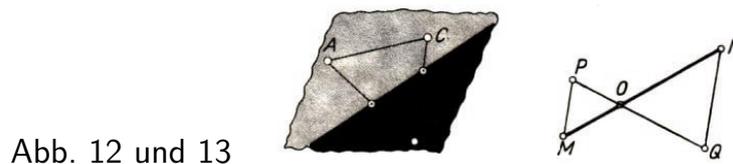
(1.24) Satz. Schneidet eine Gerade eine Seite (Strecke!) eines Dreiecks, liegt sie in der durch das Dreieck bestimmten Ebene und geht sie durch keine Ecke des Dreiecks, so schneidet sie genau eine der beiden anderen Dreiecksseiten.

Beweis. Die Gerade  $g$  schneide die Seite  $\overline{AB}$  des Dreiecks  $ABC$ . Wegen  $A, B, C \notin g$  liegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Halbebenen von  $\varepsilon_{ABC}$  bezüglich  $g$ , etwa  $A \in H_1$  und  $B \in H_2$ , und es muss entweder  $C \in H_1$  oder  $C \in H_2$  gelten (Abb. 12).

Im ersten Fall ist  $CA \cap g = \emptyset$  und  $BC \cap g = \emptyset$ , im zweiten  $BC \cap g = \emptyset$  und  $CA \cap g = \emptyset$ .

In entsprechender Weise und völlig frei von zusätzlichen Anleihen bei der Anschauung lassen sich nun die folgenden Aufgaben lösen:

(1.25) Aufgabe. Eine Ebene schneide zwei gegenüberliegende Kanten<sup>6</sup> eines Tetraeders, ohne durch eine Tetraederecke zu gehen. Welches Schnittverhalten besteht gegenüber den restlichen vier Kanten?



(1.26) Aufgabe. Eine Ebene schneidet zwei von einer Ecke ausgehende Kanten eines Tetraeders, ohne selbst durch eine Tetraederecke zu gehen. Welches Schnittverhalten besteht gegenüber den restlichen vier Kanten?

Der Leser wird uns nach der Lösung zustimmen, dass uns die Halbräume mit ihren einfachen charakteristischen Eigenschaften in einer kurzen, einfachen Weise zum Ergebnis führen.

Nun wollen wir aber im Eifer nicht den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen verges-

<sup>6</sup>Das heißt auf windschiefen Geraden liegende Kanten.

sen. Wir wenden uns wieder der Aufgabe (1.20) zu und betrachten zunächst die offene Frage im zweiten Fall (vgl. dazu Abb. 8b).

Es ist hier  $G \in FX$  und  $S \in EF$  sowie  $g_{EF} \parallel g_{HG}$  und  $g_{FG} \parallel g_{EH}$ ; zusätzlich sei  $U$  der Schnittpunkt der Geraden  $g_{SX}$  und  $g_{EH}$ .

Jetzt ist der folgende Hilfssatz nützlich.

(1.27) Satz. Ist  $O \in MN$  und sind  $P, Q \notin g_{MN}$  Punkte mit  $g_{MP} \parallel g_{NQ}$  und  $O \in g_{PQ}$ , dann gilt  $O \in PQ$  (Abb. 13).

Dieser Hilfssatz ergibt sich leicht durch einen indirekten Schluss aus dem Satz (1.24). Mit ihm erhält man nun schrittweise aus den obigen Voraussetzungen  $S \in XU$  (wegen  $S \in EF$ ),  $T \in XS$  (wegen  $G \in FX$ ), also  $T \in XU$  und damit  $T \in HG$ , was zu zeigen war.

Im ersten Fall (vgl. dazu Abb. 8a) ist davon auszugehen, dass  $P$  innerer Punkt des konvexen Vierecks  $EFGH$  ist. Was heißt das im Rahmen unserer bereitgestellten Begriffe?

Das heißt, der Punkt  $P$  liegt in allen Halbebenen von  $\varepsilon_{EFG}$  bezüglich der Geraden  $g_{EF}, g_{FG}, g_{GH}, g_{HE}$ , die jeweils die übrigen zwei Punkte des Vierecks  $EFGH$  enthalten. Bezüglich der Parallelen  $h$  zu  $g_{FG}$  durch  $P$ , die ganz in  $\varepsilon_{EFG}$  liegt, sind wegen  $E, F, H \notin h$  sowohl  $E, H$  als auch  $F, G$  Punkte ein und derselben Halbebene.

Lägen nun  $E$  und  $F$  auch in der gleichen Halbebene bezüglich  $h$ , so läge  $P$  nicht in der Halbebene bezüglich  $g_{EH}$ , in der  $F$  liegt, oder  $P$  nicht in der Halbebene bezüglich  $g_{FG}$ , in der  $E$  liegt. Dies widerspricht der Voraussetzung für  $P$ . Also liegen  $E, F$  sowie  $G, H$  in verschiedenen Halbebenen bezüglich  $h$ , was zu zeigen war.

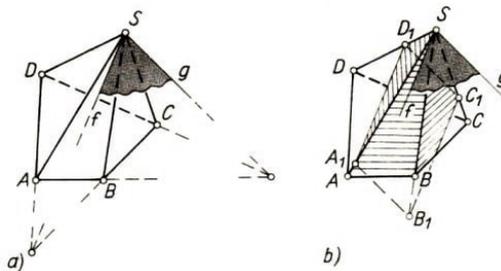


Abb. 14

(1.28) Aufgabe.<sup>7</sup> Es sei  $ABCD$  eine Pyramide mit einem konvexen Viereck  $ABCD$  als Grundfläche. Man beweise, dass es eine Ebene gibt, die die Kanten  $SA, SB, SC$  und  $SD$  in Punkten  $A', B', C'$  bzw.  $D'$  schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Bei der Lösung interessieren wir uns insbesondere dafür, wo die Konvexität der Grundfläche  $ABCD$  eingeht.

Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, muss wegen  $g_{A'D'} \parallel g_{B'C'}$  die Ebene  $\varepsilon_{A'B'C'}$  parallel zur Schnittgeraden  $f$  der Ebenen  $\varepsilon_{ADS}$  und  $\varepsilon_{BCS}$  sein. (Sonst wäre  $g_{A'D'} \not\parallel g_{B'C'}$ ) Entsprechendes gilt nun auch bezüglich der Schnittgeraden  $g$  der Ebenen  $\varepsilon_{ABS}$  und  $\varepsilon_{DCS}$ . Nach Voraussetzung sind  $f$  und  $g$  verschieden (Abb. 14a).

Da wir also eine Ebene  $\varepsilon$  suchen, die notwendig zu  $f$  und  $g$  parallel ist, betrachten wir

<sup>7</sup>Nach Aufgabe 171213 der OJM der DDR.

zunächst eine Ebene  $\eta_1$  mit  $\eta_1 \parallel \varepsilon_{fg}$  und  $S \notin \eta_1$ , die durch einen beliebig gewählten Punkt  $A_1 \in SA$  geht (Abb. 14b). Schneiden sich  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$  in einem Punkt  $E$ , dann liegt  $E$  auf  $g$ , und  $E$  ist kein Punkt von  $\overline{AB}$ , da  $ABCD$  konvex ist.

Folglich liegen die Punkte  $A$  und  $B$  in einer gemeinsamen Halbebene von  $\varepsilon_{ABS}$  bezüglich  $g$ . Entsprechendes gilt, wenn  $g_{AB} \parallel g_{CD}$  ist, da dann  $g_{AB} \parallel g$  gilt. Da der Schnittpunkt  $B$ , von  $\eta_1$  mit der Geraden  $g_{SB}$  gleichzeitig der Schnittpunkt der Parallelen zu  $g$  durch  $A_1$  mit der Geraden  $g_{SB}$  ist und  $A_1$  in  $SA^+$  liegt, muss nun  $B$ , sogar auf der Halbgeraden  $SB^+$  liegen.

Durch völlig analoge Betrachtungen ergibt sich weiter, dass  $\eta_1$  die Halbgeraden  $SC^+$  und  $SD^+$  in Punkten  $C_1$  und  $D_1$  schneidet. Und überdies ist  $g_{A_1B_1} \parallel g \parallel g_{C_1D_1}$  und  $g_{D_1A_1} \parallel f \parallel g_{B_1C_1}$  und damit  $A, B, C, D$ , ein Parallelogramm.

Die Punkte  $B_1, C_1$  und  $D_1$  brauchen nicht in  $SB, SC$  bzw.  $SD$  zu liegen (Abb. 14 b).

Ist  $B_1 \notin SB$ , so wählen wir einen Punkt  $B_2 \in SB$  und legen durch ihn die zu  $\eta_1$  parallele Ebene  $\eta_2$ . Wegen  $\eta_2 \parallel \varepsilon_{fg}$  liegt  $\eta_2$  zusammen mit den Punkten  $A, B, C, D$  in einem Halbraum bezüglich  $\varepsilon_{fg}$ , so dass auch  $\eta_2$  die Halbgeraden  $SA^+, SB^+, SC^+, SD^+$  schneidet; die Schnittpunkte seien  $a_2, B_2, C_2, D_2$ . Entscheidend ist aber, dass mit  $B_2 \in SB_1$  und  $g_{A_1B_1} \parallel g_{A_2B_2}$  auch  $A_2 \in SA_1$  (nach Satz (1.23)) und damit erst recht  $A_2 \in SA$  gilt. Außerdem ist nun offenbar auch  $A_2B_2C_2D_2$  ein Parallelogramm. Auf diese Weise erhalten wir spätestens nach zwei weiteren derartigen Schritten eine Ebene  $\varepsilon$  mit der gewünschten Eigenschaft.

Die Konvexität von  $ABCD$  ist tatsächlich auch notwendig. Denn gibt es eine Ebene  $\varepsilon$  entsprechend der Aufgabenstellung, so liegen, da  $A'B'C'D'$  konvex ist, die Punkte  $C', D'$  in einem gemeinsamen Halbraum bezüglich  $\varepsilon_{ABS}$ , und in diesem liegen wegen  $C' \in SC$  und  $D' \in SD$  auch die Punkte  $C$  und  $D$ . Dann sind  $C, D$  in einer gemeinsamen Halbebene von  $\varepsilon_{ABC}$  bezüglich  $g_{AB}$ . Entsprechend liegen die Punkte  $D, A$  in einer gemeinsamen Halbebene von  $\varepsilon_{ABC}$  bezüglich  $g_{BC}$ . Folglich ist  $ABCD$  ein konvexes Viereck.

(1.29) Aufgabe. In wie viele Teile wird der Raum von  $n$  Ebenen höchstem zerlegt?

(Anleitung: Man kläre zunächst, in wie viele Teile eine Ebene durch  $n$  in ihr liegende Geraden zerlegt wird, wenn je zwei von ihnen sich schneiden und keine drei einen gemeinsamen Punkt besitzen.)

(1.30) Aufgabe. Es sei  $ABCDEFGH$  ein Würfel. In wie viele Teile wird er durch die Ebenen  $\varepsilon_{BDE}, \varepsilon_{ACF}, \varepsilon_{BDG}, \varepsilon_{ACH}, \varepsilon_{BEG}, \varepsilon_{CFH}$  und  $\varepsilon_{DEG}$  zerlegt?

Am Schluss dieses Abschnitts möchten wir noch zwei Begriffe mit Hilfe von Halbebenen bzw. Halbräumen darstellen.

Sind  $p$  und  $q$  zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Scheitelpunkt  $O$ , so nennt man die Menge  $\{p, q\}$  einen Winkel und bezeichnet ihn mit  $\angle(p, q)$ .

Für den Winkel aus den Halbgeraden  $OA^+$  und  $OB^+$  verwenden wir die bekannte Bezeichnung  $\angle AOB$  (Abb. 15 a.).

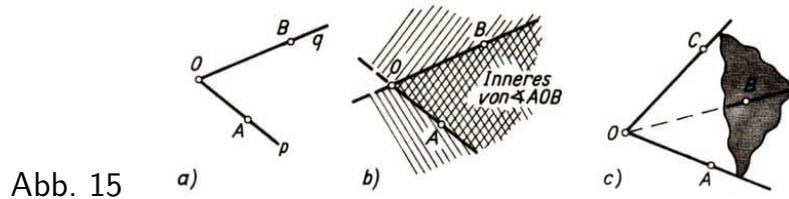


Abb. 15

Das Innere eines Winkels  $\angle AOB$ , bei dem  $A, O, B$  nicht auf einer Geraden liegen, lässt sich nun einfach durch Halbebenen erklären: Es ist der Durchschnitt der Halbebene bezüglich  $g_{OA}$ , die den Punkt  $B$  enthält, mit der Halbebene, die durch  $g_{OB}$  begrenzt wird und  $A$  enthält (Abb. 15 b). Entsprechendes erklären wir im Raum.

Es seien  $O, A, B, C$  vier Punkte, die in keiner gemeinsamen Ebene liegen, d.h., sie bilden die Ecken eines Tetraeders, und wir bezeichnen mit  $\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_B$  bzw.  $\mathfrak{H}_C$  den Halbraum bezüglich  $\varepsilon_{OBC}$ , der  $A$  enthält, den Halbraum bezüglich  $\varepsilon_{OCA}$ , der  $B$  enthält, bzw. den Halbraum bezüglich  $\varepsilon_{OAB}$  der  $C$  enthält.

Dann heißt die Punktmenge  $\mathfrak{H}_A \cap \mathfrak{H}_B \cap \mathfrak{H}_C$  das Innere des Raumwinkels (oder der räumlichen Ecke) mit der Spitze  $O$  und den Halbkanten  $OA^+, OB^+, OC^+$  (Abb. 15c).

## 1.4 Vom Senkrechtsein

Drei Dinge richtig begriffen zu haben bedeutet mehr,  
als von Dutzend Dingen oberflächlich gehört zu haben.  
H. Duncker

Aus der Geometrie in einer Ebene ist folgende Beziehung bekannt: Eine Gerade  $g$  ist senkrecht zu einer Geraden  $h$  - kurz  $g \perp h$ . Sie wird in verschiedener Weise erklärt, z.B. über rechte Winkel oder über Spiegelungseigenschaften. Wir setzen diese Relation hier als gegeben und bekannt voraus, ebenso die folgenden Eigenschaften.

(1.31) Ist  $g \perp h$ , dann sind  $g$  und  $h$  zwei sich schneidende Geraden, und es ist  $h \perp g$ . Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Geraden  $g$  in einer Ebene  $\varepsilon$  gibt es in  $\varepsilon$  genau eine Gerade  $h$  durch  $P$  mit  $g \perp h$ .

Wenn  $f, g, h$  in einer gemeinsamen Ebene liegen und  $f \perp g$  ist, dann gilt  $f \perp h$  genau dann, wenn  $h \parallel g$  ist.

Für senkrecht bzw. Senkrechte werden auch die Bezeichnungen orthogonal bzw. Orthogonale oder Lot<sup>8</sup> verwendet.

Entsprechend bezeichnete Beziehungen gibt es auch zwischen einer Geraden und einer Ebene sowie zwischen zwei Ebenen. Es entspricht unserer Erfahrung und Vorstellung, zu definieren:

Eine Gerade  $g$  heißt senkrecht zu einer Ebene  $\varepsilon$  - kurz  $g \perp \varepsilon$  - genau dann, wenn  $g$  die Ebene  $\varepsilon$  in einem Punkt  $P$  schneidet und zu jeder Geraden  $k$  senkrecht ist, die durch

<sup>8</sup>Es ist verbreitet, auch senkrechte Strecken als Lot zu bezeichnen. Wir werden nur in einigen Fällen ebenfalls davon Gebrauch machen.

$P$  geht und in  $\varepsilon$  liegt (Abb. 16). Wir möchten dazu auf Sachverhalte in der Realität hinweisen.

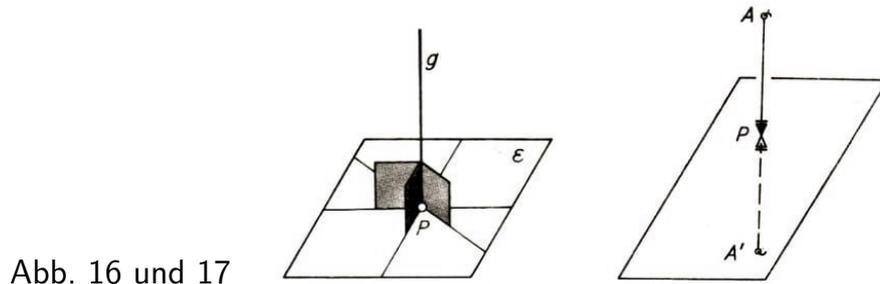


Abb. 16 und 17

Lässt man von einem Befestigungspunkt  $A$  ein Bleilot frei über einem waagerechten Ebenenstück, etwa über einer Wasserfläche, hängen (Abb. 17), so bestätigt eine Messung, dass jede Gerade  $h$  durch den Berührungspunkt  $P$  des Lotes mit der Ebene eine zum Lot senkrechte Gerade ist. (Das ist hier eine Konsequenz aus physikalischen Gesetzen über die Schwerkraft.)

Man kann anstelle dieser Überprüfung aber auch das Spiegelbild  $A'$  von  $A$  an der Wasserfläche beobachten und stellt fest, dass  $A, P, A'$  auf einer Geraden liegen (Abb. 17).

Jede Halbgerade mit dem Anfangspunkt  $P$ , die in der waagerechten Ebene liegt, bildet mit  $PA'^+$  einen Winkel, der bei der Spiegelung das Bild desjenigen Winkels ist, den diese Halbgerade mit  $PA^+$  bildet. Demnach sind diese Winkel gleichgroße Nebenwinkel und damit rechte Winkel. Die letzte Betrachtung lässt sich generell an jedem spiegelnden Ebenenstück anstellen.

Damit wird auch folgender Erfahrungssatz einsichtig:

(1.32) Zu jeder Ebene  $\varepsilon$  gibt es durch jeden Punkt  $A$  genau eine Gerade  $g$ , die senkrecht zu  $\varepsilon$  ist (Existenz und Eindeutigkeit eines Ebenenlotes).

Für das Ebenenlot ist folgende Eigenschaft bemerkenswert und von praktischer Bedeutung:

(1.33) Satz. Ist  $P$  der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt  $A$  auf eine Ebene  $\varepsilon$  mit  $A \notin \varepsilon$ , dann ist für jeden Punkt  $Q \neq P$  der Ebene  $\varepsilon$  die Länge  $|AQ|$  stets größer als die Länge  $|AP|$ .

Beweis. Nach Voraussetzung ist  $APQ$  ein Dreieck und  $g_{AP} \perp g_{QP}$  (Abb. 18). Damit ist  $\angle APQ$  ein rechter Winkel, und nach bekannten Eigenschaften über rechtwinklige Dreiecke gilt  $|AQ| > |AP|$ .

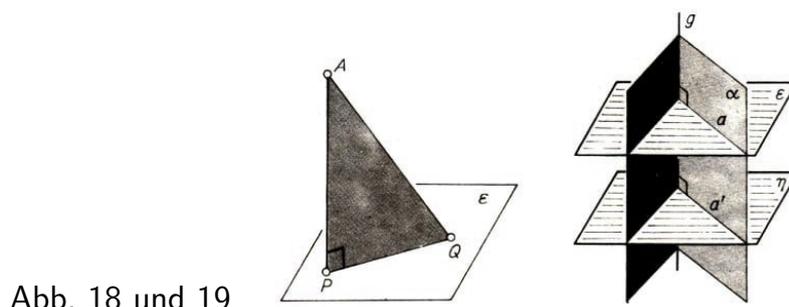


Abb. 18 und 19

(1.34) Aufgabe. Man beweise: Die Eigenschaft  $|AQ| > |AP|$  für alle Punkte  $Q \neq P$  aus  $\varepsilon$  ist auch hinreichend dafür, dass  $P$  der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $\varepsilon$  ist.

(1.36) Satz. Ist eine Gerade  $g$  senkrecht zu zwei Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$ , so gilt  $\varepsilon \parallel \eta$ .

Beweis. Wir legen durch  $g$  zwei verschiedene (Hilfs-)Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ . Diese schneiden die Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$  in Geraden  $a, a'$  und  $b, b'$  (Abb. 19), und es gilt  $a \neq b$  und  $a' \neq b'$  wegen  $\alpha \neq \beta$ . Damit ist  $\varepsilon = \varepsilon_{ab}$  und  $\eta = \varepsilon_{a'b'}$ .

Aus  $g \perp \varepsilon, \eta$  folgt nach Definition  $g \perp a, a'$  und  $g \perp b, b'$ . Da diese Geraden in der Ebene  $\alpha$  bzw.  $\beta$  liegen, ist nach (1.31)  $a \parallel a'$  und  $b \parallel b'$ . Auf Grund der Sätze (1.10) und (1.7) erhält man nun  $\varepsilon_{ab} \parallel \varepsilon_{a'b'}$ .

(1.36) Aufgabe. Man beweise folgende Umkehrung zu Satz (1.35): Ist  $g \perp \varepsilon$  und  $\varepsilon \parallel \eta$ , so ist auch  $g \perp \eta$ .

Eine Ebene  $\varepsilon$  heißt senkrecht zu einer Ebene  $\eta$  - kurz  $\varepsilon \perp \eta$  - genau dann, wenn es in der Ebene  $\varepsilon$  eine Gerade  $g$  gibt, die senkrecht zu  $\eta$  ist (Abb. 20a).

Aus  $\varepsilon \perp \eta$  folgt jetzt allein aus logischen Gründen leicht, dass sich  $\varepsilon$  und  $\eta$  schneiden. Wir erwarten natürlich auch noch  $\eta \perp \varepsilon$ , d. h. die Symmetrie dieser Relation. Sie ist unseren Vorstellungen nach eine Selbstverständlichkeit, ergibt sich aber nicht unmittelbar aus der Definition, da diese "unsymmetrisch" bezüglich  $\varepsilon$  und  $\eta$  formuliert ist.

Wir betonen, dass diese Eigenschaft aus den anderen hier genannten ableitbar ist. (Ein entsprechender Hinweis wird an späterer Stelle noch gegeben.)

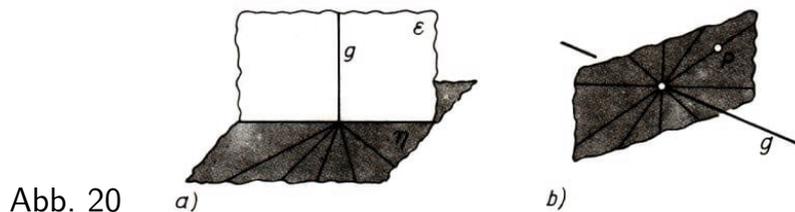


Abb. 20

Auf Grund der großen anschaulichen Einsichtigkeit wollen wir das als Erfahrungssatz voraussetzen:

(1.37) Ist  $\varepsilon \perp \eta$ , so ist auch  $\eta \perp \varepsilon$ .

Der Erfahrung entnehmen wir weiterhin

(1.38) Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Geraden  $g$  gibt es eine Ebene, die durch  $P$  geht und auf der die Gerade  $g$  senkrecht steht (Existenz einer Lotebene; Abb. 20b).

Die Einzigkeit der Lotebene folgt sofort aus dem Satz (1.35). Die Aussagen (1.32), (1.37) und (1.38) stehen offenbar in Analogie zu den Aussagen (1.31) der ebenen Geometrie.

Der folgende Satz ist von großer praktischer Bedeutung für den Nachweis der Orthogonalität einer Geraden zu einer Ebene.

(1.39) Satz. Schneiden sich zwei Geraden  $f, h$  in einem Punkt  $P$  und ist eine dritte Gerade  $g$  durch  $P$  senkrecht zu  $f$  und  $h$ , so ist  $g$  senkrecht zur Verbindungsebene von  $f$  und  $h$ .

Beweis. Nach (1.38) gibt es eine Ebene  $\eta$  durch  $P$  mit  $g \perp \eta$ . Wir legen durch  $f$  und  $g$  bzw.  $h$  und  $g$  die Verbindungsebene  $\varepsilon_{fg}$  bzw.  $\varepsilon_{hg}$  (Abb. 21 a). Diese schneiden die Ebene  $\eta$  in Geraden  $f'$  bzw.  $h'$ , auf denen  $P$  liegt. Wegen  $g \perp \eta$  ist  $g \perp f'$  und  $g \perp h'$ . Nun sind in der Ebene  $\varepsilon_{fg}$  die Geraden  $f$  und  $f'$  Lote durch  $P$  auf  $g$ . Nach (1.31) ist dann  $f' = f$ ; entsprechend ergibt sich  $h' = h$ . Damit ist  $\varepsilon_{fh} = \varepsilon_{f'h'} = \eta$  und schließlich  $g \perp \varepsilon_{fg}$ .

Jetzt kann man einen Beweis für (1.37) recht kurz führen.

(1.40) Aufgabe. Man beweise:

- a) Aus  $g \perp \varepsilon$  und  $g \parallel h$  folgt  $h \perp \varepsilon$ .
- b) Aus  $g \perp \varepsilon$  und  $h \perp \varepsilon$  folgt  $g \parallel h$ .

(1.41) Satz. Ist  $\beta$  eine Lotebene und  $g$  eine Lotgerade zu einer Ebene  $\alpha$  und  $g \cap \beta \neq \emptyset$ , so liegt  $g$  in der Ebene  $\beta$ .

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in  $\beta$  eine Gerade  $b$  mit  $b \perp \alpha$ . Außerdem ist  $g \perp \alpha$ , so dass nun  $g \parallel b$  (nach (1.40b)) und damit  $g \parallel \beta$  (nach Satz (1.10)) gilt. Da aber  $g$  wenigstens einen Punkt mit der Ebene  $\beta$  gemeinsam hat, muss  $g \subset \beta$  sein.

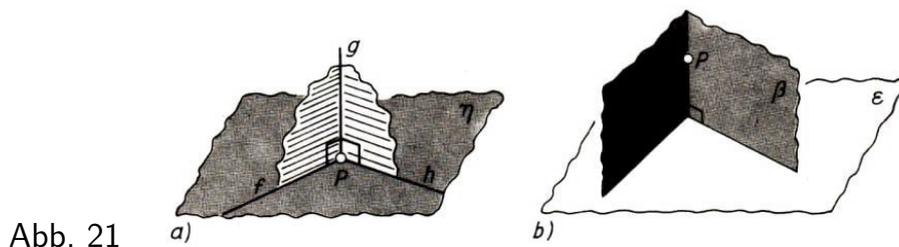


Abb. 21

(1.42) Satz. Schneiden sich zwei Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  in einer Geraden  $g$  und ist  $\varepsilon$  eine zu  $\alpha$  und  $\beta$  senkrechte Ebene, so ist auch die Gerade  $g$  senkrecht zu  $\varepsilon$  (Abb. 21 b).

Beweis. Es sei  $P$  irgendein Punkt auf  $g$  und  $h$  das Lot von  $P$  auf die Ebene  $\varepsilon$ . Der vorhergehende Satz hat zur Folge, dass  $h$  sowohl in  $\alpha$  als auch in  $\beta$  liegt und damit die Schnittgerade  $g$  sein muss.

(1.43) Satz. Zu jeder Gerade  $g$  und jeder Ebene  $\alpha$  gibt es eine Ebene  $\beta$  durch  $g$  mit  $\beta \perp \alpha$ . Die Ebene  $\beta$  (Lotebene durch eine Gerade auf eine Ebene) ist sogar eindeutig bestimmt, wenn  $g$  nicht senkrecht zu  $\alpha$  ist.

Beweis. Es sei  $A$  ein Punkt auf  $g$  und  $a$  das Lot von  $A$  auf die Ebene  $\alpha$ . - Ist  $g \perp \alpha$ , dann ist  $g = a$ , und damit besitzt jede Ebene durch  $g$  die geforderte Eigenschaft. - Andernfalls schneiden sich  $g$  und  $a$  (in  $A$ ), und die Ebene  $\varepsilon_{ga}$  erfüllt die Forderung (Abb. 22). Damit ist die Existenzbehauptung vollständig bewiesen.

Die Eindeutigkeit liegt aber auf der Hand, denn eine Ebene  $\beta$  mit  $g \subset \beta$  und  $\beta \perp \alpha$  muss nach Satz (1.41) auch  $a$  enthalten und damit die Ebene  $\varepsilon_{ga}$  sein.

Im folgenden greifen wir eine Lagebeziehung zwischen Geraden auf, die wir bereits eingehend in Abschnitt 1.1 betrachtet haben, hier jedoch unter einem neuen Aspekt. Es geht um den Abstand windschiefer Geraden. Was ist darunter zu verstehen?

Sind  $a$  und  $b$  windschiefe Geraden, so betrachten wir alle Abstände  $|AB|$ , die je zwei

Punkte  $A \in a$  und  $B \in b$  besitzen. Das Minimum dieser Abstände heißt der Abstand der windschiefen Geraden  $a$  und  $b$ .

Mit einer solchen Erklärung ist jedoch nicht gesichert, dass es das Minimum dieser Abstände überhaupt gibt. (Ist beispielsweise  $P$  ein Punkt der Geraden  $g_{AB}$ , der nicht in der Strecke  $AB$  liegt, so existiert kein Minimum für die Abstände des Punktes  $P$  von den inneren Punkten der Strecke.)

Falls das Minimum existiert, bliebe noch die Frage, von welchen Punktpaaren es gebildet wird.

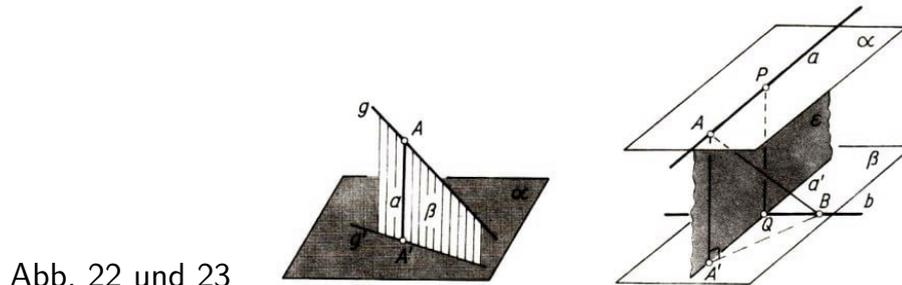


Abb. 22 und 23

Diese beiden Fragen wollen wir jetzt klären, indem wir kräftig von den in Abschnitt 1.1 erarbeiteten Einsichten Gebrauch machen.

Nach dem Satz (1.15) existieren (genau) zwei Ebenen  $\alpha$  durch  $a$  und  $\beta$  durch  $b$ , die zueinander parallel sind. Weiterhin gibt es nach Satz (1.43) durch  $a$  eine Ebene  $\varepsilon$ , die senkrecht zur Ebene  $\alpha$  ist und deshalb die Ebene  $\beta$  in einer Geraden  $a'$  schneidet (Abb. 23).

Wegen  $a' \parallel a$  (siehe Satz (1.8)) sind die Geraden  $a'$  und  $b$  nicht parallel zueinander; ihr Schnittpunkt sei  $Q$ , und das Lot zu  $\beta$  durch  $Q$  schneidet die Gerade  $a$  in einem Punkt  $P$ .

Sind nun  $A \in a$  und  $B \in b$  beliebige Punkte und ist  $A'$  der Schnittpunkt des Lotes zu  $\beta$  durch  $A$  mit der Geraden  $a'$ , so gilt  $|AB| > |AA'|$  nach Satz (1.33), falls  $A \neq P$  oder  $B \neq Q$  und außerdem  $|AA'| = |PQ|$  ist.

Damit erhielten wir

(1.44) Satz. Sind  $a$  und  $b$  windschiefe Geraden, so gibt es genau zwei Punkte  $P \in a$  und  $Q \in b$  derart, dass  $|PQ| \leq |AB|$  für alle  $A \in a$  und  $B \in b$  gilt. Überdies ist  $g_{PQ} \perp a$  und  $g_{PQ} \perp b$ .

Abschließend möchten wir noch auf eine Erweiterung der Orthogonalität zweier Geraden hinweisen, die für die Anwendung der Geometrie recht nützlich ist.

Wir nennen eine Gerade  $a$  im weiten Sinne orthogonal zu einer Gerade  $b$  und schreiben dafür  $a \vdash b$  genau dann, wenn es auf  $b$  einen Punkt  $B$  so gibt, dass die Parallele  $c$  zu  $a$  durch  $B$  senkrecht zu  $b$  ist (Abb. 24).

Offenbar ist nach (1.31) mit dieser Parallelen  $c$  auch die Parallele  $c'$  zu jedem anderen Punkt  $B' \in b$  senkrecht zu  $b$ , so dass die Definition von  $a \vdash b$  unabhängig von der Wahl eines Punktes aus  $b$  ist. Ferner ist diese Relation symmetrisch, d.h., aus  $a \vdash b$  folgt  $b \vdash a$ .

(1.45) Aufgabe. Man beweise die Symmetrie der Orthogonalitätsrelation.

Schließlich folgt aus  $a \perp b$  und  $a' \parallel a$  offensichtlich  $a' \perp b$  (Invarianz gegenüber Parallelität).

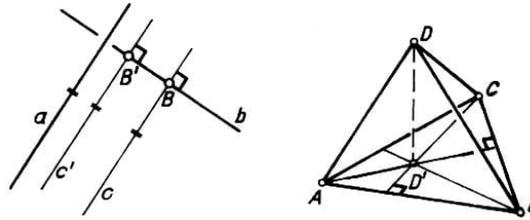


Abb. 24 und 25

Alein folgende Sicht aus der Vektorrechnung verdeutlicht die Natürlichkeit der Verallgemeinerung.

Sind  $a$  und  $b$  Richtungsvektoren der Geraden  $a$  und  $b$ , dann ist  $a \perp b$  gleichwertig damit, dass der Vektor  $a$  senkrecht zum Vektor  $b$  ist.

(Bezüglich der Vektorrechnung müssen wir den Leser auf entsprechende Literatur verweisen. Hier reichen bereits die entsprechenden Abschnitte in den Mathematiklehrbüchern der Klassen 11 und 12 aus.)

(1.46) Aufgabe. Sind zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraeders zueinander orthogonal im weiten Sinne, dann auch das dritte Paar.

(Lösungshinweise: Abb. 25 möchte zu einer Lösung anregen; eine weitere Anregung bietet Abb. 5. Den interessierten Leser möchten wir auf den Artikel von G. Omen in der Schülerzeitschrift "alpha", 8. Jg. 1974, S. 76-77, hinweisen.)

Durch Abb. 26 wird sichtbar, dass die in (1.46) behauptete Eigenschaft für  $\perp$  eine Analogie zum Höhensatz für die Geradenorthogonalität  $\perp$  in einer Ebene darstellt.

Ziel dieses Abschnittes war es, von der bekannten Orthogonalität zwischen Geraden ausgehend, zu weiteren Orthogonalitäten im Raum zu führen. Dabei wurde sichtbar, dass zusammen mit den Eigenschaften der Geradenorthogonalität in einer Ebene wenige zusätzliche Eigenschaften ausreichen, um recht zügig eine Fülle weiterer wesentlicher Eigenschaften für die betrachteten Orthogonalitäten abzuleiten, ohne Anleihen an räumlicher Vorstellung und Erfahrungssätzen aufnehmen zu müssen.

(Natürlich lässt sich die Ausgangsposition, deren Erweiterung hier im wesentlichen aus den Erfahrungssätzen (1.32 ; Existenz und Eindeutigkeit eines Ebenenlotes) und (1.36; Existenz einer Lotebene auf eine Gerade) besteht, erheblich abschwächen. Doch dies steht außerhalb der Zielstellung.)

## 1.5 Einfache Beziehungen zwischen Kreisen, Kugeln, Geraden und Ebenen

Im folgenden bezeichnen  $K(M, r)$  und  $K(M; A)$  den Kreis (die Kugel) mit dem Mittelpunkt  $M$ , der den Radius  $r$  besitzt bzw. der durch den Punkt  $A$  geht.

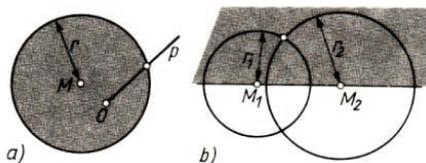


Abb. 26

Aus der ebenen Geometrie ist für Kreise bekannt:

- (1.47) a) Liegt der Scheitel  $O$  einer Halbgeraden  $p$  im Innern eines Kreises  $K(M, r)$ , d.h., ist  $|OM| < r$ , so hat  $p$  mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam (Abb. 26a).  
 b) Sind  $K(M_1, r_1)$  und  $K(M_2, r_2)$  zwei Kreise mit  $M_1 \neq M_2$ , für die die Längen  $r_1, r_2$  und  $|M_1M_2|$  die Dreiecksungleichung erfüllen<sup>9</sup>, so gibt es in jeder Halbebene bezüglich  $g_{M_1M_2}$  genau einen gemeinsamen Punkt der beiden Kreise (Abb. 26b).

In Analogie dazu wollen wir einige einfache Beziehungen von Kugeln zu Geraden, Ebenen und Kugeln bereitstellen.

- (1.48) Satz. Liegt der Scheitel  $O$  einer Halbgeraden  $p$  im Innern einer Kugel  $K(M, r)$ , so hat  $p$  mit der Kugel genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis. Es gibt eine Ebene  $\eta$ , die  $M$  und  $p$  enthält. Wegen  $|MO| < r$  schneidet in dieser Ebene der Kreis  $K(M, r)$  die Halbgerade  $p$  in einem Punkt  $A$  (nach (1.47a)). Mit  $|MA| = r$  ist  $A$  ein gemeinsamer Punkt von  $p$  und der Kugel  $K(M, r)$ . Gäbe es einen weiteren Punkt  $B$  mit dieser Eigenschaft, so würde er auch auf dem betrachteten Kreis in  $\eta$  liegen; dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage in (1.47-a).

- (1.49) Satz. Enthält eine Ebene  $\varepsilon$  einen inneren Punkt einer Kugel  $K(M, r)$ , so schneidet die Ebene  $\varepsilon$  die Kugel längs eines Kreises.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt  $B$  aus  $\varepsilon$ , für den  $|MB| < r$  ist. Der Fußpunkt des Lotes von  $M$  auf  $\varepsilon$  sei  $N$ ; für ihn gilt  $|MN| \leq |MB|$  (nach Satz (1.33)), so dass auch er ein innerer Punkt der Kugel ist (Abb. 27).

Es sei jetzt  $p$  eine Halbgerade aus  $\varepsilon$  mit dem Scheitel  $N$ ; sie schneidet die Kugel  $K(M, r)$  in (genau) einem Punkt  $A \neq N$ .

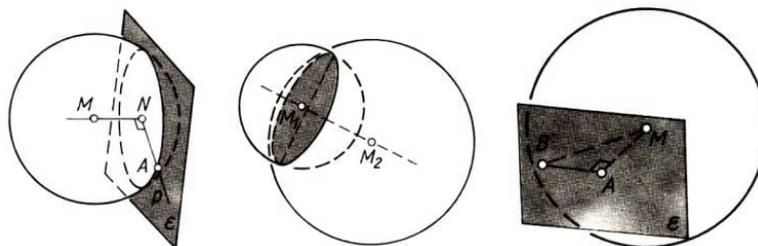


Abb. 27-29

Alle Punkte  $P$  des Kreises  $K(N; A)$  in  $\varepsilon$  liegen auch auf der Kugel, da für  $M \neq N$  die Dreiecke  $MNA$  und  $MNP$  kongruent sind. (Denn die Winkel  $\angle MNA$  und  $\angle MNP$  sind beide rechte Winkel.) Die Existenz weiterer gemeinsamer Punkte von  $\varepsilon$  und der Kugel  $K(M, r)$  würde sofort zu einem Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage im Satz (1.48) führen. Also ist  $K(M, r) \cap \varepsilon = K(M; A)$ .

<sup>9</sup>Das heißt  $r_1 < r_2 + |M_1M_2|$ ,  $r_2 < r_1 + |M_1M_2|$ ,  $|M_1M_2| < r_1 + r_2$ .

(1.50) Satz. Sind  $K_1(M_1, r_1)$  und  $K_2(M_2, r_2)$  zwei Kugeln mit  $M_1 \neq M_2$ , für die die Längen  $r_1, r_2$  und  $M_1, M_2$  die Dreiecksungleichung erfüllen, so ist  $K_1 \cap K_2$  ein Kreis, der auf einer zu  $g_{M_1 M_2}$  senkrechten Ebene und dessen Mittelpunkt auf  $g_{M_1 M_2}$  liegt (Abb. 28).

Beweis als Aufgabe.

(1.51) Satz. Durch jeden Punkt  $A$  einer Kugel  $K(M, r)$  gibt es genau eine Ebene  $\varepsilon$ , die mit der Kugel keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Überdies ist  $g_{MA} \perp \varepsilon$ .

Beweis (Abb. 29). Durch  $A$  gibt es eine Ebene  $\varepsilon$  mit  $g_{MA} \perp \varepsilon$  (siehe (1.38)). Für jeden Punkt  $B \neq A$  aus  $\varepsilon$  ist  $|MA| < |MB|$  nach Satz (1.33), so dass  $B$  nicht auf der Kugel liegen kann. Damit ist die Existenz bewiesen.

Zu jeder von  $\varepsilon$  verschiedenen Ebene  $\eta$  durch  $A$  ist  $g_{MA}$  nicht senkrecht. Der Fußpunkt  $N$  des Lotes von  $M$  auf  $\eta$  ist dann von  $A$  verschieden, und demnach gilt  $|MN| < |MA| = r$ , d.h.,  $\eta$  besitzt einen inneren Punkt der Kugel. Also ist  $\varepsilon$  die einzige Ebene durch  $A$  mit der gewünschten Eigenschaft.

Die in diesem Satz ausgezeichneten Ebenen heißen Tangentialebenen der Kugel.

(1.62) Aufgabe. Für drei Kugeln wird vorausgesetzt, dass sie einen Punkt  $P$  gemeinsam haben und durch  $P$  keine Gerade geht, die Tangente für alle drei Kugeln ist. Man zeige, dass diese Kugeln dann noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen.

## 2 Räumliche Konstruktionen

Es ist falsch zu glauben,  
dass nur der Dichter Phantasie braucht.  
Das ist ein dummes Vorurteil!  
Sogar in der Mathematik braucht man sie ...  
W.I. Lenin

### 2.1 Was ist eine räumliche Konstruktion?

Konstruktionen sind uns hinreichend aus der ebenen Geometrie bekannt. Genauer gesagt, handelt es sich dabei zumeist um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, und fast jeder unserer Leser wird wohl damit die Vorstellung einer Zeichnung verbinden, die, schrittweise aus vorgegebenen Punktmengen sich entwickelnd, schließlich die geforderte Punktmenge (ob nun Kreis, Dreieck oder eine andere geometrische Figur) darstellt. Eine Zeichnung kann aber nur in einer Zeichenebene ausgeführt werden, was ist dann aber eine räumliche Konstruktion?

Natürlich können wir räumliche Gebilde durch ebene Bilder veranschaulichen, wie wir das ja mittels der Parallelprojektion auch in unseren bisherigen Darlegungen getan haben. Aber eine solche Anfertigung von Bildern zur Veranschaulichung entspricht wohl nicht unserer Vorstellung von einer Konstruktion.

Und wenn in diesem Zusammenhang von einer Konstruktion die Rede ist wie in (1.20), handelt es sich doch um eine ebene Konstruktion, denn die vorgegebene Punktmenge ist die in einer Ebene, und die Konstruktionsschritte sind in der Ebene auszuführen (wenn auch zur Begründung natürlich die dem Bild zugrunde liegenden räumlichen Verhältnisse erhalten müssen). Aber wie sollte es auch anders sein?

Wir müssen uns an dieser Stelle überhaupt einmal über den Begriff Konstruktion verständigen.

Schlagen wir in einem Wörterbuch der lateinischen Sprache nach, so finden wir etwa: "constructio" - Bau oder "construo" - erbauen.

Das stimmt sehr gut mit unseren Vorstellungen einer geometrischen Konstruktion überein; nur welches sind die Baumaterialien und wo ist der Bauplatz?

Entscheidend für die genaue Beantwortung dieser Frage ist, dass die Begriffe der Geometrie durch Abstraktion entstanden sind und somit nur in unserem Bewusstsein existieren, streng genommen kann also der "Bauplatz" für geometrische Konstruktionen nur in unserem Kopf liegen!

Da geometrische Begriffe durch Abstraktionen aus der uns umgebenden Realität entstanden sind, ist es sehr leicht, auch umgekehrt in der Realität eine Veranschaulichung eines geometrischen Begriffes zu finden, für die Gerade etwa einen gespannten Faden ("linum" lat. Bindfaden aus Flachs) oder eine mit dem Lineal gezeichnete Linie, für den Punkt eine Einstichstelle im Papier ("pungere" lat. stechen).

Da nun bei einer Konstruktion in der Ebene der Zusammenhang zwischen der Zeich-

nung auf einem Blatt Papier und der eigentlichen abstrakten Konstruktion so direkt und "offensichtlich" ist, scheint es für das Verständnis des jeweiligen mathematischen Problems unerheblich, was man sich unter der Konstruktion vorstellt, einen abstrakten Vorgang oder einen Zeichenvorgang, nicht so für den Raum!

Und wenn von der Konstruktion mit Zirkel und Lineal die Rede ist, bezieht sich natürlich die Angabe dieser Zeichengeräte auf die Durchführung der Zeichnung. Für den abstrakten Vorgang der Konstruktion bedeutet es, dass nur bestimmte Punktmengen, nämlich Geraden und Kreise, in die Konstruktionsschritte einbezogen werden dürfen. Wir stellen entsprechend unserer Erfahrung zunächst einmal die Zeichenoperationen zusammen, die wir mit Zirkel und Lineal durchführen können:

(2.1) das Zeichnen einer Geraden (besser: eines Geradenstückes) mit dem Lineal durch zwei auf dem Zeichenblatt markierte Punkte,

(2.2) das Zeichnen eines Kreises mit dem Zirkel um den als Mittelpunkt markierten Punkt  $M$  mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der Länge einer gezeichneten Strecke  $AB$  ist.

Im folgenden bedeuten Linien Geraden oder Kreise.

(2.3) Zu zwei gezeichneten (nicht identischen) Linien werden die ihnen gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) markiert.

(2.4) Es werden beliebig gewählte Punkte in der Zeichenebene (speziell auf bereits gezeichneten Linien) markiert.

Durch Abstraktion erhalten wir aus diesen Zeichenoperationen die folgenden vier Konstruktionsschritte:

(2.1') Konstruktion einer Geraden durch zwei vorgegebene Punkte.

(2.2') Konstruktion eines Kreises um einen vorgegebenen Punkt  $M$  mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der einer vorgegebenen Strecke  $AB$  ist.

Im folgenden bedeuten Konstruktionslinien Geraden oder Kreise.

(2.3') Konstruktion der gemeinsamen Punkte zweier vorgegebener (nicht identischer) Konstruktionslinien.

(2.4') Festlegung eines Punktes in der Ebene (speziell auf Konstruktionslinien).<sup>10</sup>

Eine ebene Konstruktion ist dann eine endliche Folge von Konstruktionsschnitten der Art (2.1') bis (2.4').

Mit diesen Betrachtungen ist wohl auch deutlich geworden, dass die Auszeichnung von Gerade und Kreis in der Konstruktion historisch darauf zurückzuführen ist, dass Lineal und Zirkel eben die einfachsten Zeichengeräte sind. Aus der

---

<sup>10</sup>Wir machen darauf aufmerksam, dass wir im obigen Text (ab (2.1)) die Begriffe Punkt, Gerade, Kreis mit zweierlei Bedeutung verwendeten, in (2.1) bis (2.4) als Bezeichnung für die Ergebnisse der Zeichenoperationen auf einem Zeichenblatt, in (2.1') bis (2.4') als Bezeichnung für abstrakte geometrische Begriffe.

Beschränkung ergab sich unter anderem für die Mathematiker die interessante Frage, welche Figuren überhaupt (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar sind. Markant ist z.B. die Entdeckung des 18jährigen Gauß, dass das regelmäßige 17-Eck in diesem Sinne konstruierbar ist!<sup>11</sup>

Nachdem die Konstruktionen mit dem Zirkel allein von Georg Mohr<sup>12</sup> unbeachtet geblieben waren, bewies Lorenzo Mascheroni<sup>13</sup>, dass alle Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal möglich sind, auch mit dem Zirkel allein durchführbar sind. (Natürlich wird dabei eine Strecke als konstruiert angesehen, wenn ihre Endpunkte konstruiert sind.) Das Problem der Konstruierbarkeit führte auf viele interessante Fragen, deren Beantwortung z.T. auch Zusammenhänge zwischen typisch geometrischen und nicht geometrischen Problemkreisen der Mathematik aufdeckte.

Im Fall der räumlichen Geometrie können wir nun nicht von der Abstraktion von Zeichenoperationen ausgehen, denn eine Zeichnung im Raum ist uns eben nicht möglich. Dagegen bleibt uns wieder die Möglichkeit, wie bereits mehrfach erprobt, Erkenntnisse der Ebene auf den Raum "sinngemäß" (oder "in Analogie") zu übertragen. Wir bleiben im Abstrakten und legen in Analogie zu (2.1') bis (2.4') für den Raum die folgenden Konstruktionsschritte fest:

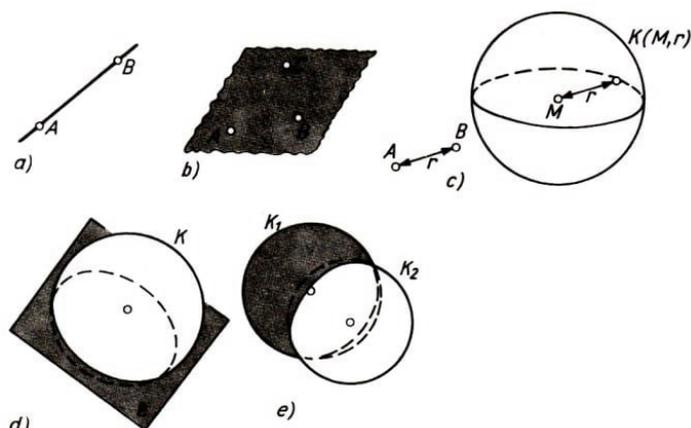


Abb. 30

(2.0) Konstruktion einer Geraden durch zwei vorgegebene und voneinander verschiedene Punkte (vgl. Abb. 30a)<sup>14</sup>.

(2.1'') Konstruktion einer Ebene durch drei vorgegebene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen (vgl. Abb. 30b).

(2.2'') Konstruktion einer Kugel um einen vorgegebenen Punkt  $M$  mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der einer vorgegebenen Strecke  $s$  ist (vgl. Abb. 30c).

Im folgenden bedeutet Fläche Ebene oder Kugel.

<sup>11</sup>Im Emblem der OJM der DDR finden wir das regelmäßige 17-Eck wieder.

<sup>12</sup>Dänischer Mathematiker, 1640-1698.

<sup>13</sup>Italienischer Mathematiker, 1750-1800.

<sup>14</sup>Diese und die folgenden Abbildungen veranschaulichen nur den Sachverhalt und sind nicht mit einer Realisierung der Konstruktion im Raum mit Hilfe von "Zeichengeräten für den Raum", die ja höchstens gedanklich möglich ist, zu verwechseln - was die Anfertigung von Modellen nicht ausschließt!

(2.3'') Konstruktion der gemeinsamen Punkte (Schnittlinien) zweier vorgegebener (nicht identischer) Flächen (vgl. Abb. 30d-e).

(2.4'') Festlegung eines beliebigen Punktes im Raum (speziell auf einer bereits konstruierten Linie oder Fläche).

(2.5) Konstruktionen nach (2.1') bis (2.4') in einer bereits konstruierten Ebene.

Unter einer räumlichen Konstruktion verstehen wir nun eine endliche Folge von Konstruktionsschritten der Art (2.0), (2.1'') bis (2.4'') und (2.5).

Den Nutzen räumlicher Konstruktionen sehen wir in der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens und im (konstruktiven) Existenznachweis gewisser geometrischer Objekte.

## 2.2 Nochmals vom Senkrechtsein

Aus Abschnitt 1.4 wissen wir, dass es zu jeder Ebene  $\varepsilon$  und jedem Punkt  $A \notin \varepsilon$  genau ein Lot von  $A$  auf  $\varepsilon$  gibt (Aussage (1.32)).

(2.6) Aufgabe. Gegeben seien im Raum eine Ebene  $\varepsilon$  und ein Punkt  $A \notin \varepsilon$ . Man konstruiere das Lot von  $A$  auf  $\varepsilon$ .

Da wir bereits wissen, dass das Lot eindeutig existiert, genügt zur Lösung der Aufgabe die Angabe einer Folge von Konstruktionsschritten und der Beweis, dass im Ergebnis dieser Folge eine Gerade konstruiert wurde, die die Eigenschaften des Lotes hat.

Konstruktion:

1. Wir legen nach (2.4'') einen Punkt  $E \in \varepsilon$  fest.
2. Wir konstruieren nach (2.2'') die Kugel  $K(A, r)$  um  $A$  mit  $r = |AE|$ .
3. Wir konstruieren nach (2.3'') die Menge  $\mathfrak{M}$  der gemeinsamen Punkte von  $\varepsilon$  und  $K(A, r)$ .

Gilt  $\mathfrak{M} = \{E\}$ , so ist die Konstruktion (bis auf die Verbindung von  $A$  und  $E$ ) abgeschlossen.

Enthält  $\mathfrak{M}$  außer  $E$  einen weiteren Punkt, so ist  $\mathfrak{M}$  nach Abschnitt 1.5 ein Kreis  $K_1$ . Wir setzen in diesem Fall die Konstruktion fort.

4. Wir konstruieren in  $\varepsilon$  nach (2.5) den Mittelpunkt  $N$  des Kreises  $K_1$  (vgl. Abb. 31).

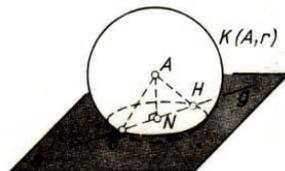


Abb. 31

5. Wir konstruieren nach (2.0) die Gerade durch  $A$  und  $N$ .

Behauptung. Der nach 1. bis 3. konstruierte Punkt  $E$  bzw. der nach 1. bis 4. konstruierte Punkt  $N$  ist der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $\varepsilon$ .

Beweis. Wäre im Fall  $\mathfrak{M} = \{E\}$  die Gerade  $g_{AE}$  nicht orthogonal zu  $\varepsilon$ , so ergäbe sich ein Widerspruch zu Satz (1.51).

Im Fall  $\mathfrak{M} = K_1$  legen wir in  $\varepsilon$  eine beliebige Gerade  $g$  durch  $N$ . Wegen (1.47) hat diese zwei Schnittpunkte  $G$  und  $H$  mit  $K_1$ . Es gilt  $|GN| = |NH|$ ,  $|AG| = |AH| = r$  und  $|AN| = |AN|$ . Damit sind die Dreiecke  $GNA$  und  $HNA$  kongruent, und folglich sind die beiden Winkel  $\angle ANG$  und  $\angle ANH$  rechte.

Mit  $g_{AN} \perp g$  für alle Geraden  $g \in \varepsilon$  durch  $N$  ist gezeigt, dass die konstruierte Gerade  $g_{AN}$  das Lot von  $A$  auf  $\varepsilon$  ist.

(2.7) Aufgabe. Gegeben seien im Raum zwei windschiefe Geraden  $a$  und  $b$ . Man konstruiere zwei Punkte  $A \in a$  und  $B \in b$  so, dass  $|AB|$  kleiner oder gleich der Länge einer jeden Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten von  $a$  und  $b$  ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit derartiger Punkte haben wir bereits in 1.4 (siehe Satz (1.44)) bewiesen. Hier wollen wir diese Punkte durch eine räumliche Konstruktion gewinnen (und in diesem Sinne einen konstruktiven Existenzbeweis erbringen).

Konstruktion:

1. Wir legen nach (2.4'') voneinander verschiedene Punkte  $A_1, A_2 \in a$  und  $B_1, B_2 \in b$  fest (vgl. Abb. 32).
2. Wir konstruieren nach (2.1'') die Ebene  $\varepsilon_{A_1A_2B_1}$ .
3. Wir konstruieren nach (2.5) in  $\varepsilon_{A_1A_2B_1}$  die zu  $a$  parallele Gerade  $c$  durch  $B_1$ .
4. Wir legen nach (2.4'') einen von  $B_1$  verschiedenen Punkt  $C$  auf  $c$  fest und konstruieren nach (2.1'') die Ebene  $\varepsilon_{B_1B_2C} = \varepsilon_{bc}$ .
5. Wir konstruieren wie in (2.6) den Fußpunkt  $A'_1$  des Lotes von  $A_1$  auf die Ebene  $\varepsilon_{bc}$ .
6. Wir konstruieren nach (2.3'') die Schnittgerade  $a'$  der beiden Ebenen  $\varepsilon_{bc}$  und  $\varepsilon_{A'_1A_2A_1}$ .
7. Wir konstruieren nach (2.5) den Schnittpunkt  $B$  der Geraden  $b$  und  $a'$ .
8. Wir konstruieren nach (2.5) in der Ebene  $\varepsilon_{aa'}$  den Schnittpunkt  $A$  von  $a$  mit der Parallelen zu  $g_{A'_1A_1}$  durch  $B$ .

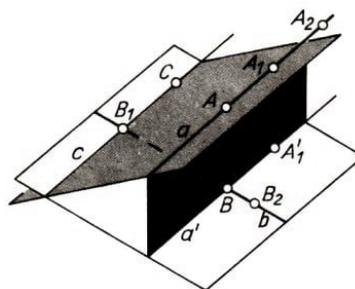


Abb. 32

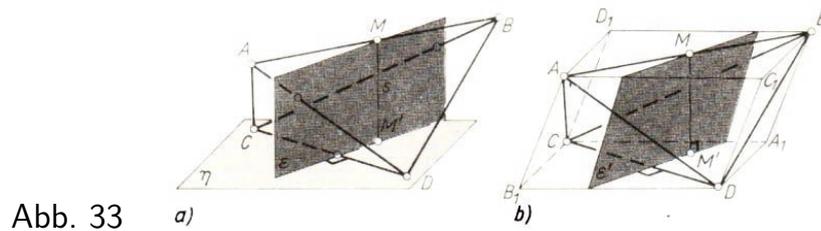
Beweis.

Man erkennt leicht, dass alle Konstruktionsschritte bis auf die Wahl von Punkten sogar eindeutig ausführbar sind. Auf Grund unserer Konstruktionsschritte 3., 5. und 8. gilt  $a \parallel c$ ,  $g_{A'_1A_1} \perp \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{ba'}$ ,  $g_{AB} \parallel g_{A_1A'_1}$  und folglich  $a \parallel a'$  (nach Satz (1.10) und (1.11)),  $g_{AB} \perp b, a'$  (nach (1.40a)), also auch  $g_{AB} \perp a$ . Damit ist nach Satz (1.44) bewiesen, dass unsere obige Konstruktion die gesuchten Punkte erzeugt.

## 2.3 Weitere Beispiele

(2.8) Aufgabe. Gegeben sei ein Tetraeder  $ABCD$ . Man konstruiere eine Ebene  $\varepsilon$ , die  $AB$  halbiert und senkrecht auf  $g_{CD}$  steht.

Da der Mittelpunkt  $M$  von  $AB$  eindeutig bestimmt ist, existiert nach (1.38) die zu konstruierende Ebene  $\varepsilon$  eindeutig. Die Konstruktion bereitet keine Schwierigkeiten. Wie in (2.7) konstruieren wir eine zu  $G_{AB}$  parallele Ebene  $\eta$ , die durch  $g_{cd}$  geht. Entsprechend (2.6) konstruieren wir das Lot von  $M$  auf  $\eta$ ; der Fußpunkt des Lotes sei  $M'$  (Abb. 33a). Durch  $M'$  konstruieren wir in  $\eta$  eine Senkrechte  $s$  zu  $g_{CD}$ . Die Ebene  $\varepsilon_{sM}$  ist dann wegen (1.40a) und (1.39) senkrecht zu  $g_{CD}$ , also die gesuchte Ebene.



Damit haben wir die Aufgabe gelöst, und wie es in der Absicht solcher Aufgaben liegt, uns eine Vorstellung von der Lage dieser Ebene im Raum verschafft. Sollten wir nun allerdings auf dieser Vorstellung aufbauend, z.B. beweisen, dass die sechs Ebenen dieser Art sich in genau einem Punkt schneiden, so würde sie wohl dazu kaum ausreichen. Weitاًus einsichtigere Vorstellungen erzeugt die folgende Konstruktion.

Wir greifen das Ergebnis der Aufgabe (1.17) auf und konstruieren (wie in (2.7)) zu jedem Paar windschiefer Tetraederkanten das Paar paralleler Ebenen. Die Schnitte dieser Ebenen ergeben die Kanten eines Parallelepipeds  $B_1DA_1CAC_1BD_1$  (vgl. Abb. 33b).  $g_{D_1C_1}$  halbiert  $AB$  in  $M$ .

Jetzt konstruieren wir eine Ebene  $\varepsilon'$ , die in  $M$  auf  $g_{C_1D_1}$  senkrecht steht. Wegen  $g_{CD} \parallel g_{D_1C_1}$  folgt aus (1.40a), dass  $\varepsilon'$  auch senkrecht zu  $g_{CD}$  ist, d.h.,  $\varepsilon'$  ist identisch mit der obigen Ebene  $\varepsilon$ .

Auf diese Art haben wir aber die zusätzliche Erkenntnis gewonnen, dass in  $\varepsilon$  alle diejenigen Punkte liegen, die von  $C_1$  und  $D_1$  gleichen Abstand haben. Konstruieren wir nun, ausgehend von  $A_1C_1$  und  $B_1C_1$  zwei weitere Ebenen dieser Art, so haben die drei so konstruierten Ebenen nach Satz (1.14) genau einen gemeinsamen Punkt  $P$ . Dieser hat dann von  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $D_1$  den gleichen Abstand.

Wir können also um  $P$  mit  $r = |A_1P|$  eine Kugel konstruieren (Umkugel des Tetraeders  $A_1B_1C_1D_1$ ). Die restlichen drei Ebenen, die durch die Mittelpunkte von  $A_1D_1$  bzw.  $A_1B_1$  bzw.  $B_1D_1$  gehen und auf diesen Strecken senkrecht stehen, müssen aber ebenfalls  $P$  enthalten. Damit schneiden sich alle Ebenen in  $P$ .

Dieses Beispiel zeigt wieder, dass nicht nur das Auffinden irgendeiner Lösung wichtig in, sondern gerade die Lösungsvarianten interessant sind.

(2.9) Aufgabe. Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ . Man konstruiere dazu ein Tetraeder, dessen vier Seitenflächen zum Dreieck  $ABC$  kongruent sind.

Wir analysieren zunächst, welche Bedingungen zur Lösung notwendig sind. Dazu sei

$ABCD$  ein Tetraeder, dessen Seitenflächen zum Dreieck  $ABC$  mit den Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$  und  $c = |AB|$  kongruent sind.

Dann gilt notwendig  $|AD| = a$ ,  $|BD| = b$  und  $|CD| = c$  (Abb. 34a), da sich aus den weiteren zunächst möglichen Annahmen  $|AD| = b$  oder  $|AD| = c$  ein Widerspruch ergibt.

Die Kugeln  $K(A, a)$  und  $K(B, b)$  schneiden sich, da  $a, b, c$  die Dreiecksungleichung erfüllen, in einem Kreis  $K_c$ , der in einer zu  $g_{AB}$  senkrechten Ebene  $\eta$  liegt und dessen Mittelpunkt auf  $g_{AB}$  liegt (vgl. Satz (1.50)).

Dieser Kreis  $K_c$  schneidet die Halbebene von  $\varepsilon_{ABC}$  bezüglich  $g_{AB}$ , in der  $C$  liegt, in einem Punkt  $C_1$  (vgl. Abb. 34b und c).

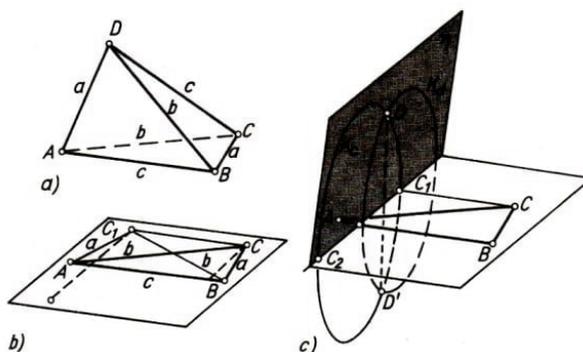


Abb. 34

Wegen  $|C_1, A| = a$  und  $|C_1, B| = b$  ist  $ABCC_1$  ein (gegebenenfalls überschlagenes) Trapez mit  $g_{AB} \parallel g_{CC_1}$ . Folglich ist  $C_1$  der Fußpunkt des Lotes von  $C$  auf die Ebene  $\eta$ , in der der Kreis  $K_c$  liegt. Da  $D$  nicht in der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  enthalten ist, gilt  $D \neq C_1$ . Nach Satz (1.49) schneidet dann die Kugel  $K(C, c)$  die Ebene  $\eta$  in einem Kreis  $K_d$ , dessen Mittelpunkt  $C_1$  ist. Der Punkt  $D$  ist gemeinsamer Punkt der Kreise  $K_c$  und  $K_d$ .

Demnach muss sich eine Lösung, falls sie existiert, durch folgende einfache Konstruktion ergeben:

1. Wir konstruieren den Schnittkreis  $K_c$  der Kugeln  $K(A, a)$  und  $K(B, b)$  und die Ebene  $\eta$ , die den Kreis  $K_c$  enthält.
2. Wir konstruieren den Schnittkreis  $K_d$  der Kugel  $K(C, c)$  mit der Ebene  $\eta$ .
3. Wir konstruieren einen Schnittpunkt  $D$  der Kreise  $K_c$  und  $K_d$  in der Ebene  $\eta$ .

Zum Beweis genügt zu bemerken, dass nach Konstruktion  $|DA| = a$ ,  $|DB| = b$  und  $|DC| = c$  ist und damit die Dreiecke  $BAD$ ,  $DCB$  und  $CDA$  zu dem Dreieck  $ABC$  kongruent sind.

Zur Vollständigkeit der Lösung bleibt schließlich zu klären, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung bestehen und wie viele (bis auf Kongruenz) verschiedene Lösungen möglich sind. Dieser Teil der Lösung einer Konstruktionsaufgabe wird in der Literatur häufig als Determination bezeichnet.

Aus den in der Analyse gegebenen notwendigen Bedingungen folgt  $|C_1C| < c$ . Dann müssen aber im gleichschenkligen Trapez  $ABCD$ , die Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle ABC$  spitze Winkel sein. Aus analogen Gründen trifft das auch für  $\angle BCA$  zu, so dass die Spitzwinkligkeit des Dreiecks  $ABC$  eine notwendige Bedingung für die Existenz einer

Lösung ist.

Sie ist auch hinreichend. Wir betrachten dazu unsere einzelnen Konstruktionsschritte und prüfen deren Realisierbarkeit.

Die Konstruktion von  $K$ , ist stets (und in eindeutiger Weise) möglich, da  $a, b, c$  die Seitenlängen eines Dreiecks sind. Die Existenz (und Eindeutigkeit) von  $K_d$  im zweiten Konstruktionsschritt ist dadurch gegeben, dass die Innenwinkel bei  $A$  und  $B$  des Dreiecks  $ABC$  spitz sind und damit  $|C_1C| < c$  ist.

Schließlich folgt aus der Spitzwinkligkeit von  $\angle BCA$ , dass  $C$  außerhalb des Kreises in  $\varepsilon_{ABC}$  mit dem Durchmesser  $AB$  ist und somit  $|CC_2| > |AB| = c$  gilt. Der Radius von  $K_d$  ist dann kleiner als  $|C_1C_2|$ , und deshalb schneiden sich (entsprechend dem dritten Konstruktionsschritt) die Kreise  $K_c$  und  $K_d$  in zwei (bezüglich  $g_{C_1C_2}$  symmetrisch liegenden) Punkten  $D$  und  $D'$ .

Damit ist gezeigt, dass die Spitzwinkligkeit des Dreiecks  $ABC$  für die Existenz einer Lösung auch hinreichend ist.

Da  $D$  und  $D'$  bei der Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  ineinander übergehen, gibt es bis auf Kongruenz genau eine Lösung.

(2.10) Aufgabe. Zu vorgegebener Länge  $a$  und Einheitslänge 1 konstruiere man ein Tetraeder, für das  $1, a, a$  die Längen der Kanten einer Seitenfläche und  $1, 1, a$  die Längen der diesen Kanten gegenüberliegenden Tetraederkanten sind.

(2.11) Aufgabe. Es sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck. Man konstruiere alle Punkte  $P$  des Raumes, die nicht in der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  liegen und für die  $g_{PA} \perp g_{PB}$ ,  $g_{PB} \perp g_{PC}$  und  $g_{PC} \perp g_{PA}$  ist.

(Ist die Spitzwinkligkeit des Dreiecks dazu notwendig?)

## 3 Analogiebetrachtungen

Man muss vom Alten lernen,  
Neues zu machen.  
B. Brecht

### 3.1 Was wir unter einer Analogie verstehen wollen

Analogie - das ist ein häufiges, in unterschiedlichen Zusammenhängen gebrauchtes Fremdwort. In der deutschen Sprache könnte man dafür etwa "Ähnlichkeit" setzen.

Mit "Ähnlichkeit" ist aber nicht der geometrische Begriff gemeint, sondern eine Übereinstimmung von zwei verschiedenen Aussagen oder Strukturen in gewissen wesentlichen Teilen. Was dabei die "gewissen wesentlichen Teile" sind, hängt allerdings stark vom Betrachter ab.

Wir haben bereits in den vorangegangenen Kapiteln auf "Ähnlichkeiten" zwischen Sachverhalten der ebenen und räumlichen Geometrie hingewiesen, insbesondere kann man sich von Begriffserklärungen der ebenen Geometrie anregen lassen, "ähnliche" für den Raum einzuführen, wie das in den Abschnitten 1.3 bis 1.5 und 2.1 geschehen ist. Außer diesen Möglichkeiten gilt es, eine Fülle anderer "Ähnlichkeiten" zu finden und vor allem auch nutzbar zu machen. Dass dabei der Begriff "analog" unscharf ist, d.h. gar nicht streng festliegt, welche Sachverhalte "analog" sind, ist kein Nachteil, sondern macht den eigentlichen Reiz der Anwendung aus. Wir beginnen mit einfachen Beispielen.

Es gibt Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen:

(3.1) In der Ebene gilt: Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, dann haben sie genau einen Punkt gemeinsam.

(3.1') Im Raum gilt: Wenn zwei Ebenen nicht parallel sind, dann haben sie genau eine Gerade gemeinsam (vgl. (1.5)).

Ersetzt man in (3.1) "Ebene" durch "Raum" und "Gerade" durch "Ebene" und "Punkt" durch "Gerade", so erhält man (3.1').

Die Aussagen (3.1) und (3.1') nennen wir zueinander analog, (Ebene, Raum), (Gerade, Ebene) und (Punkt, Gerade) Paare analoger Begriffe.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

(3.2) In der Ebene existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Nach obigem Ersetzungsprinzip würde sich folgende richtige Aussage ergeben:

Im Raum existieren drei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Es wäre aber auch sinnvoll, eine zu (3.2) analoge Aussage wie folgt zu bilden:

(3.2') Im Raum existieren vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Aus der Analogie von (3.2) und (3.2') würde sich (Dreieck, Tetraeder) als weiteres Paar analoger Begriffe anbieten.

Wählen wir noch eine Definition als Beispiel:

(3.3) Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt (dieser Ebene) den gleichen Abstand haben.

Ersetzt man in (3.3) "Ebene" durch "Raum" und "Punkt" durch "Gerade" (und natürlich "Kreis" durch ein neues Wort), so entsteht zwar wiederum eine Definition, von deren Nützlichkeit wir uns aber erst noch zu überzeugen hätten.

Ersetzt man in (3.3) dagegen nur "Ebene" durch "Raum" und "Kreis" durch "Kugel", so entsteht gerade eine uns bereits bekannte Definition; daher erscheint es uns sinnvoll, (Kreis, Kugel) als ein weiteres Paar analoger Begriffe anzusehen.

Damit ist auch an Beispielen gezeigt, dass der Analogiebegriff kein strenger Begriff ist, dass es z.B. keinen Formalismus gibt, der es ermöglicht, zu einer gegebenen Formulierung die analoge zu konstruieren.

Trotzdem kann die Analogiemethode von großem methodischem Wert sein. Wir können sie etwa benutzen, um zu einer Aufgabe der ebenen Geometrie eine analoge der räumlichen Geometrie aufzufinden bzw. umgekehrt uns beim Lösen einer schwierigen räumlichen Aufgabe die Problemstellung zunächst am analogen (einfacheren!) ebenen Problem deutlich zu machen, d.h., Lösungsmöglichkeiten aufzudecken.

Wir betrachten ein erstes Beispiel:

(3.4) Aufgabe. In einer Ebene sind drei Punkte  $A, B, C$  gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden (in dieser Ebene) gibt es, so dass die drei Punkte  $A, B, C$  jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Da es keinen Formalismus zur Erzeugung eines analogen räumlichen Sachverhaltes gibt, müssen wir selbst entscheiden, welche der formal möglichen analogen Formulierungen wir auswählen. Unter Beachtung von (3.2) und (3.2') wählen wir:

(3.4') Aufgabe. Im Raum sind vier Punkte  $A, B, C, D$  gegeben, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die vier Punkte  $A, B, C, D$  jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Es ist nun zu erwarten, dass sich die Analogie nicht nur auf die Aufgabenstellung, sondern auch auf die Lösung bezieht; sagen wir besser, dass es Lösungen gibt, die als zueinander analog zu betrachten sind.

Wir lösen jetzt die Aufgabe (3.4) und gehen dabei zunächst davon aus, dass es eine Gerade  $g$  mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Auf dieser kann keiner der Punkte  $A, B, C$  liegen, sonst müssten sie entgegen der Voraussetzung alle auf einer Geraden (nämlich auf  $g$ ) liegen. Wir können nun folgende vollständige Fallunterscheidung vornehmen:

Fall 1:  $A, B, C$  liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich  $g$ . Dann müssten  $A,$

$B$  und  $C$  auf einer zu  $g$  parallelen Geraden liegen; dies widerspricht der Voraussetzung.

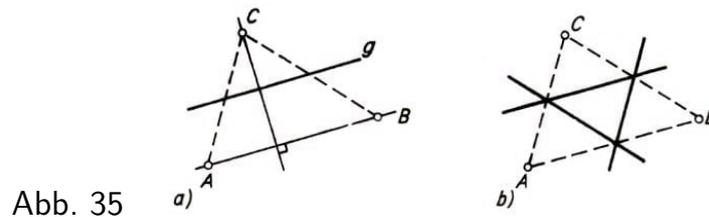


Abb. 35

Fall 2: Genau einer der drei Punkte wird durch  $g$  von den übrigen getrennt; o.B.d.A. treffe das für  $C$  zu. Auf Grund der Voraussetzung in (3.4) muss nun  $g$  parallel zu der Geraden  $g_{AB}$  sein und das Lot von  $C$  auf  $g_{AB}$  halbieren (Abb. 35a). Damit ist  $g$  eindeutig bestimmt.

Umgekehrt besitzt eine derartige Gerade offensichtlich die in (3.4) genannten Eigenschaften.

Da jeder der drei Punkte auf diese Weise durch eine Gerade von den beiden anderen separiert werden kann, gibt es genau drei Geraden mit der gewünschten Eigenschaft (Abb. 35b).

Wir lösen die Aufgabe (3.4'), indem wir die von uns zur Formulierung der Aufgabe verwendete Analogie berücksichtigen. Eine Ebene  $\varepsilon$  mit den gewünschten Eigenschaften kann auch hier durch keinen der vorgegebenen Punkte gehen.

Fall 1:  $A, B, C, D$  liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich  $\varepsilon$ . Dann liegen diese Punkte auf einer zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene; dies widerspricht jedoch der Voraussetzung von (3.4').

Fall 2: Genau einer der vier Punkte wird durch  $\varepsilon$  von den übrigen getrennt; o.B.d.A. treffe das für  $D$  zu. Dann muss  $\varepsilon$  parallel zu der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  sein und das Lot von  $D$  auf  $\varepsilon_{ABC}$  halbieren (vgl. Abb.36 a). Eine solche Ebene  $\varepsilon$  ist damit eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte separiert werden kann, gibt es bezüglich des zweiten Falles genau vier Ebenen der verlangten Art.

Man erkennt, dass wir bis zu dieser Stelle die Lösung von der zu (3.4) mit den entsprechenden Ersetzungen abgeschrieben haben. In vielen Büchern sparen sich die Autoren berechtigt solche Ausführungen und würden etwa schreiben, dass die Lösung analog zu der des ebenen Problems erfolgt.

Einen wesentlichen Unterschied zur Aufgabe (3.4) gibt es allerdings. Unsere Fallunterscheidung ist noch nicht vollständig!

Fall 3: In jedem Halbraum bezüglich  $\varepsilon$  liegen genau zwei der vier Punkte; O.B.d.A. mögen die Punkte  $A$  und  $B$  einem Halbraum gemeinsam angehören.

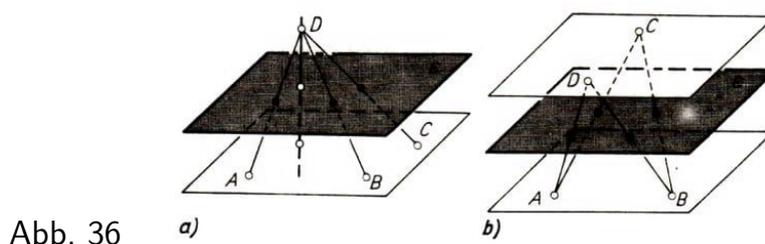


Abb. 36

Die Geraden  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$  sind zueinander windschief, da sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden (vgl. Abschnitt 1.1). Zu zwei windschiefen Geraden existiert nach Satz (1.16) genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$ . Zu diesen beiden Ebenen existiert genau eine parallele Ebene  $\varepsilon$ , die von beiden Ebenen (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat (vgl. Abb. 36b).

Da es genau drei Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Halbräume aufzuteilen, haben wir im dritten Fall genau drei Ebenen der gesuchten Art. (Diese sind offensichtlich auch voneinander verschieden.)

Die Antwort auf (3.4') lautet also: Es gibt sieben verschiedene Ebenen der gesuchten Art.

## 3.2 Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen

Der echte Schüler lernt aus dem Bekannten  
das Unbekannte entwickeln.  
J. W. v. Goethe

Wie schon erwähnt - und wohl mit Aufgabe (3.4) und (3.4') deutlich geworden ist -, kann man die Analogiemethode mitunter auch benutzen, um ein räumliches Problem zu lösen. Man formuliert ein analoges ebenes Problem, löst zunächst dieses, weil es vertrauter ist, und versucht danach die Lösungsschritte auf das ursprüngliche Problem zu übertragen. Wir betrachten die folgende Aufgabe als Beispiel:

(3.5) Aufgabe. Im Raum sind fünf Punkte gegeben, die weder in einer Ebene noch auf einer Kugel liegen. Wie viele verschiedene Ebenen oder Kugeln gibt es, so dass die fünf Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene oder Kugel haben?

Offensichtlich ist diese Aufgabe als Fortsetzung von Aufgabe (3.4') gedacht. Eine analoge Aufgabe in der Ebene zu formulieren fällt uns daher leicht:

(3.5') Aufgabe. In der Ebene sind vier Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden noch auf einem Kreis liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise gibt es, so dass die vier Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden oder einem solchen Kreis haben?

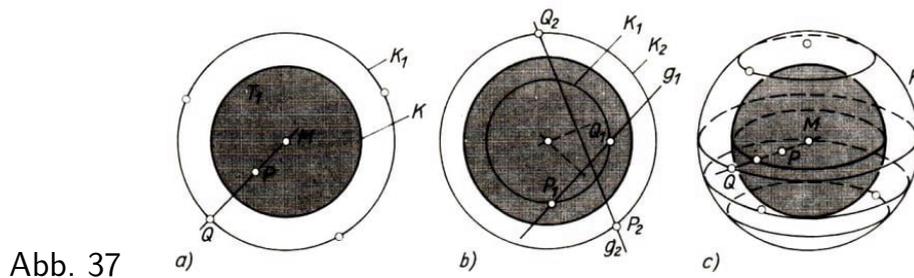
Zur Lösung von (3.5') bemerken wir zunächst, dass eine Gerade  $g$  oder ein Kreis  $K$  mit der angegebenen Eigenschaft die Ebene (ausschließlich der Geraden- bzw. Kreispunkte) vermöge der Halbebenen bzw. des Inneren und Äußeren des Kreises in zwei Teile  $T_1$  und  $T_2$  zerlegt.

Fall 1: Alle Punkte liegen in einer der Teilebenen. Dann müssen sie, da sie von der Geraden  $g$  oder dem Kreis  $K$  gleichen Abstand haben, auf einer (zu  $g$  parallelen) Geraden oder einem (zu  $K$  konzentrischen) Kreis liegen, ganz im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall 2: Genau einer der Punkte (etwa mit  $P$  bezeichnet) liege in  $T_1$ ; die anderen drei

Punkte liegen dann in  $T_2$ . Diese drei Punkte liegen sicher auf einer Geraden oder auf einem Kreis (dem Umkreis des Dreiecks; sein Mittelpunkt sei  $M$ ).

Bei der ersten Lage existiert genau eine Gerade der gesuchten Art (vgl. die Lösung zu (3.4)). Liegen die drei Punkte auf einem Kreis  $K_1$ , so existiert genau ein Kreis  $K$  der gesuchten Art. Dieser Kreis  $K$  muss zu  $K_1$  konzentrisch sein und  $PQ$  halbieren, wobei  $Q$  der Schnittpunkt von  $g_{mp}$  mit  $K_1$  ist (Abb. 37a). In diesem Fall gibt es also genau vier verschiedene Geraden oder Kreise. (Vgl. dazu die Lösung zu (3.4).)



Fall 3: Genau zwei der Punkte (etwa  $P_1, Q_1$ ) liegen in  $T_1$ ; die beiden anderen Punkte ( $P_2, Q_2$ ) dann in  $T_2$ . Wir betrachten die Verbindungsgeraden  $g_1, g_2$  von  $P_1, Q_1$  und  $P_2, Q_2$ .

Gilt  $g_1 \parallel g_2$ , so existiert genau eine Gerade, die zu  $g_1$  und  $g_2$  parallel ist und von  $g_1$  und  $g_2$  (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat. (Vgl. die Lösung zu (3.4').)

Sind aber  $g_1$  und  $g_2$  nicht parallel, so existieren genau zwei konzentrische Kreise  $K_1$  und  $K_2$  mit  $P_1, Q_1 \in K_1$  und  $P_2, Q_2 \in K_2$ . (Vgl. Abb. 37b; den Existenznachweis erbringt man leicht konstruktiv.)

Zu diesen zwei konzentrischen Kreisen gibt es genau einen dritten, der von  $K_1$  und  $K_2$  und damit von den vier Punkten gleichen Abstand hat. Wir erhalten also stets entweder genau eine Gerade oder genau einen Kreis der gewünschten Art. Da es genau drei Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Teilebenen zu verteilen, existieren im dritten Fall genau drei Geraden oder Kreise der gesuchten Art. (Vgl. die Lösung zu (3.4').)

Als Ergebnis der Aufgabe (3.5') erhalten wir demnach: Es gibt genau sieben verschiedene Geraden oder Kreise der gesuchten Art. Interessant ist, dass man allerdings nicht von vornherein angeben kann, wie viele davon Geraden und wie viele davon Kreise sind. Das hängt von der speziellen Lage der Punkte ab! (Der Leser betrachte dazu einmal verschiedene Fälle.)

Mit dieser Lösung haben wir praktisch auch die Lösung von (3.5). Der Leser kann sie "völlig analog" zu (3.5') selbst durchführen. (Man betrachte dazu auch die zu Abb. 37a analoge Abb. 37 c.) Im Unterschied zu den Aufgaben (3.4), (3.4') entsteht für das räumliche Problem sogar kein weiterer Fall!

Wir hoffen, dass nach diesen Demonstrationsbeispielen der Leser die folgenden Aufgaben bei einigen Hinweisen auch selbst lösen kann:

(3.6) Aufgabe. Gegeben seien ein regelmäßiges Tetraeder und ein Punkt  $P$  im Innern

des Tetraeders.  $u, v, x$  und  $y$  seien die Abstände des Punktes  $P$  von den vier Tetraederflächen, und  $h$  sei die Höhe des Tetraeders. Man beweise dass  $u + v + x + y = h$  gilt.

(3.7) Aufgabe. Welche Lage muss ein Quader zu einer gegebenen Ebene  $\varepsilon$  einnehmen, damit die Fläche seiner senkrechten Parallelprojektion auf  $\varepsilon$  möglichst groß ist?

Dass man bei der Lösung von (3.6) das Paar (Dreieck, Tetraeder) als Paar analoger Begriffe heranzieht, ist zu erwarten. Die analoge ebene Aufgabe (3.6') ist leicht formuliert und auch schnell bewiesen, wenn man das Dreieck mittels  $P$  in Teildreiecke zerlegt und die Formel für den Flächeninhalt benutzt.

Erinnern wir uns an (Gerade, Ebene) als Paar analoger Begriffe, so wäre als Vorbetrachtung in der Ebene zur Lösung von (3.7) zunächst die Projektion eines Rechtecks auf eine Gerade  $g$  zu betrachten. Dabei wird die Projektion offensichtlich am größten, wenn eine Diagonale des Rechtecks parallel zu  $g$  verläuft. Welche durch drei(!) Eckpunkte des Quaders bestimmte Ebene wird also wohl parallel zu  $\varepsilon$  liegen?

In den bisherigen Beispielen waren solche Lösungen für das ebene Problem ausgewählt, die leicht auf ein räumliches übertragen werden konnten. Das braucht natürlich nicht für jede Lösung der Fall zu sein.

Als Klausuraufgabe der VIII. IMO wurde unter anderem die folgende Aufgabe gestellt:

(3.8) Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt der einem regelmäßigen Tetraeder umschriebenen Kugel und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt des Raumes und den Eckpunkten des Tetraeders.

Dazu finden wir leicht:

(3.8') Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Eckpunkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt der Ebene und den Eckpunkten des Dreiecks.

Für (3.8') gibt es nun verschiedene schöne Beweise, wir führen zwei an.

1. Beweis. Das Dreieck sei  $ABC$ , und  $P$  sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Wir drehen das Dreieck  $APC$  um  $60^\circ$  um den Punkt  $A$  (vgl. Abb. 38a).

Diese Drehung führt  $P$  in  $P'$  und  $C$  in  $C'$  über. Dabei gilt  $|PC| = |P'C'|$ , und wegen der Gleichseitigkeit des Dreiecks  $APP'$  gilt auch  $|AP| = |PP'|$ . Damit ist die Summe der Abstände des Punktes  $P$  von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich der Länge des Streckenzuges  $BPP'C'$ .

Da  $C'$  unabhängig von der Lage von  $P$  fest ist, ist die Länge des Streckenzuges genau dann minimal, wenn  $P$  und  $P'$  auf der Strecke  $BC'$  liegen. Daraus folgt dann leicht die Behauptung.

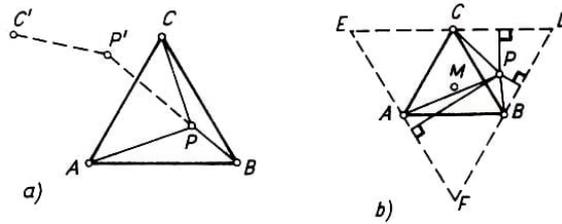


Abb. 38

2. Beweis. Durch die Eckpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  lege man Geraden, die zu der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite parallel verlaufen.

Es entsteht ein zweites gleichseitiges Dreieck  $DEF$  (vgl. Abb. 38b). Für den Mittelpunkt  $M$  des Umkreises des Dreiecks  $ABC$  sind  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  Lote auf die Seiten des Dreiecks  $DEF$ , und mit (3.6') gilt  $|MA| + |MB| + |MC| = h$ , wobei  $h$  die Höhe des gleichseitigen Dreiecks  $DEF$  ist.

Ist nun  $P$  ein von  $M$  verschiedener Punkt, so bleibt zwar die Summe seiner Abstände von den Seiten des Dreiecks  $DEF$  gleich  $h$ , aber die Entfernung von mindestens einem der Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$  wird größer als der Abstand von der Seite des Dreiecks  $DEF$ , auf der dieser Eckpunkt liegt. Damit wird für jeden von  $M$  verschiedenen Punkt die Abstands- summe größer als  $h$ .

So elegant beide Beweise sind, es dürfte schwerfallen, den ersten auf (3.8) zu übertragen. Die Übertragung des zweiten Beweises ist aber mit (3.6) nur noch eine Formsache. Dieses Beispiel zeigt auch, wie wichtig es sein kann, für ein Problem mehrere Lösungswege zu kennen.

Man löse die folgende Aufgabe der XIV. IMO:

(3.9) Aufgabe. Es seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen gegeben. Man zeige, dass ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches in jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Dass die Analogiemethode nützlich ist, um statt des räumlichen Problems zunächst eines im vertrauteren Milieu der Ebene zu untersuchen, haben wir mit unseren Beispielen wohl hinreichend belegt. Es wäre aber falsch, die Analogiemethode nur in dieser Richtung anzuwenden.

Man denke nur daran, dass der Satz von Desargues (vgl. Abschnitt 1.1) im Raum viel leichter zu beweisen ist als in der Ebene (wozu man sogar noch weitere Voraussetzungen braucht), oder man betrachte das folgende Beispiel:

(3.10) Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden (Abb. 39a).

Wir formulieren ein dazu analoges räumliches Problem, indem wir die Paare (Kreis, Kugel), (Punkt, Gerade) und (Gerade, Ebene) berücksichtigen.

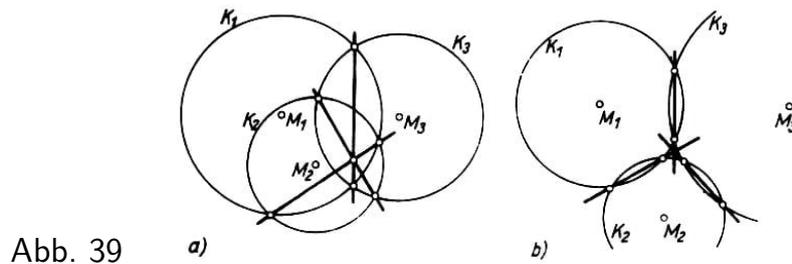


Abb. 39

(3.10') Aufgabe. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die Schnittkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Durch die Mittelpunkte der drei Kugeln  $K_1, K_2, K_3$  ist genau eine Ebene  $\varepsilon$  bestimmt. Die Kugeln besitzen einen gemeinsamen inneren Punkt.

Folglich schneiden sich  $K_1$  und  $K_2$  und dieser Schnittkreis schneidet  $K_3$  in genau zwei Punkten  $P$  und  $Q$ . Da  $P$  und  $Q$  zu jeder der drei Kugeln gehören, muss  $g_{PQ}$  in jeder Ebene, die jeweils durch einen Schnittkreis bestimmt ist, liegen. Die drei Ebenen schneiden sich also in  $g_{PQ}$ . Da die Gesamtkonfiguration symmetrisch bezüglich der Ebene  $\varepsilon$  ist, gilt  $g_{PQ} \perp \varepsilon$ .

Damit ist (3.10') gelöst, und (3.10)? Man schaue nur richtig hin, d.h. senkrecht auf die Ebene  $\varepsilon$ . Die senkrechte Projektion der räumlichen Anordnung von (3.10') auf die Ebene  $\varepsilon$  ergibt gerade die Behauptung aus (3.10). Ergänzend stellt sich noch die folgende Aufgabe.

(3.10\*) Aufgabe. Gelten die Behauptungen in (3.10') und (3.10) auch noch, wenn man anstelle eines gemeinsamen inneren Punktes von  $K_1, K_2, K_3$  schwächer nur fordert, dass sich  $K_1, K_2, K_3$  paarweise schneiden? (Vgl. dazu Abb. 39 b.).

Die bisherigen Beispiele dürfen natürlich nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Auffinden des geeigneten analogen Problems mitunter viel Mühe bereiten kann, dass das formal konstruierte analoge Problem gar nicht immer lösbar sein muss und dass schließlich, wenn eine Lösung für das analoge Problem gefunden ist, diese - wie mit Aufgabe (3.8) angedeutet - nicht unbedingt analog auf das ursprüngliche zu übertragen ist.

### 3.3 Wir finden neue Probleme

An jeder Sache etwas zu sehen suchen,  
was noch niemand gesehen und  
woran noch niemand gedacht hat.  
G. Chr. Lichtenberg

Sicherlich wird es noch sehr viel mehr zueinander analoge Probleme der ebenen und räumlichen Geometrie geben. Gehen wir auf die Suche!

Ausgangspunkt soll das Paar (Dreieck, Tetraeder) sein. Von der ebenen Geometrie kennen wir etwa die Satzgruppe über Ecktransversalen im Dreieck.

Wir wählen als Satz:

(3.11) Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2:1.

Ersetzen wir "Seite des Dreiecks" durch "Fläche des Tetraeders", so ergibt sich die Frage, was wohl "Flächenmitte" in Analogie zur "Seitenmitte" sein soll.

Betrachten wir den Mittelpunkt einer Seite als den Punkt, der die Seite in zwei gleich lange Strecken teilt, so wäre das analoge Objekt eine Gerade, die die Fläche in zwei gleich große Teile zerlegt. So wie die Seitenhalbierende von einem Eckpunkt ausgeht, müsste dann unsere "flächenhalbierende" Ebene von einer Kante ausgehen.

Zu jeder Tetraederfläche gibt es aber drei solche Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden. In Abb. 40 wählten wir als zu halbierende Fläche die Dreiecksfläche  $BCD$ . Die drei möglichen Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die durch  $A$  und  $S$  - den Schwerpunkt des Dreiecks  $BCD$  - geht. Wir nennen eine solche Gerade Schwerlinie. Jetzt zeichnet sich ein neues Problem ab:

(3.11') Aufgabe. Man beweise, dass sich die vier Schwerlinien eines Tetraeders in genau einem Punkt schneiden. Existiert in diesem Fall ein festes Teilungsverhältnis analog zum ebenen Problem?

Nicht so bekannt wie (3.11) ist der folgende Satz.

(3.12) Satz. Ist  $R$  der Umkreis- und  $r$  der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecke, so gilt  $R \geq 2r$ .

Sucht man nach einer eleganten Lösung von (3.12) und des analogen räumlichen Problem, so kann man bei den beiden vorangegangenen eine Anregung suchen!

(3.12') Aufgabe. Man formuliere und beweise das zum Satz (3.12) analoge räumliche Problem.

In der Natur unseres unscharfen Analogiebegriffes liegt es, dass man, ausgehend von einem ebenen Problem, verschiedene räumliche Analogien vermuten kann. Das zeigt das folgende Beispiel. Wir gehen von einem bekannten Satz der ebenen Geometrie aus.

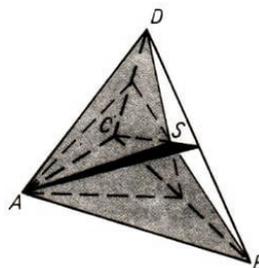


Abb. 40

(3.13) Satz. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Diagonalenlängen ist.

So wie in der Ebene ein Parallelogramm als Schnitt von zwei Paaren paralleler Geraden entsteht, entsteht im Raum als Schnitt von drei Paaren paralleler Ebenen ein Parallelepiped  $ABCDEFGH$ . Die Ecken je zweier Raumdiagonalen des Parallelepiped bilden

ein Parallelogramm, auf welches (3.13) anwendbar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |BH|^2 + |DF|^2 &= 2|DB|^2 + 2|BF|^2 \\ |AG|^2 + |CE|^2 &= 2|AC|^2 + 2|CG|^2 \end{aligned}$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2 = 2(|DB|^2 + |AC|^2) + 2|BF|^2 + 2|CG|^2$$

und die nochmalige Anwendung des Satzes (3.13) auf das Parallelogramm  $ABCD$

$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2 = 4|AB|^2 + 4|BC|^2 + 4|BF|^2$$

d.h., in jedem Parallelepiped ist die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonalenlängen.

Lässt man seiner Phantasie etwas mehr Lauf, so kann man ein Parallelogramm mit den eingezeichneten Diagonalen (allerdings auch jedes nichtspezielle Viereck einschließlich seiner Diagonalen) als Projektion eines Tetraeders auffassen und sich die Frage stellen, ob zwischen den Quadraten der Kantenlängen des Tetraeders auch eine allgemeingültige Beziehung besteht. Tatsächlich gilt

(3.13') Aufgabe. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate zweier windschiefer Kanten kleiner als die Summe der Quadrate aller anderen Tetraederkantenlängen.

Dass diese Analogie nicht an den Haaren herbeigezogen ist, lässt sich vielleicht damit belegen, dass (3.13) beim Beweis eine wesentliche Rolle spielen kann.

Ein Spezialfall von (3.13) ist der Satz des Pythagoras, aus dem sich entsprechende, aber auch neue analoge Sätze ableiten lassen.<sup>15</sup>

### 3.4 Doch Vorsicht ist geboten!

In zweifelhaften Fällen entscheide  
man sich für das Richtige.  
K. Kraus

Natürlich wollen wir mit unseren vielen Beispielen vom Nutzen der Analogiemethode überzeugen. Andererseits darf sie nicht überschätzt werden, und schon gar nicht wollen wir zu voreiligen Analogieschlüssen verleiten.

In jedem Dreieck schneiden sich die Höhen in genau einem Punkt, im Tetraeder dagegen muss das nicht der Fall sein. Die hier angebrachte Analogie wäre die durch (1.46) ausgedrückte! Und wem dieses Beispiel zu offensichtlich ist, den erinnern wir an Aufgabe (3.8) und (3.8').

Während sich für (3.8') die angegebenen Beweise auch auf beliebige spitzwinklige Dreiecke übertragen lassen, gilt das für (3.8), bezogen auf beliebige Tetraeder, nicht.

---

<sup>15</sup>Vgl. G. Polya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd. 1, Basel-Stuttgart 1966, S. 63ff.

Für das ebene Problem lässt sich dieser Minimalitätspunkt stets konstruieren, für ein beliebiges Tetraeder existiert zwar auch ein solcher Punkt, der sich aber im Sinne des Kapitels 2 im allgemeinen nicht konstruieren lässt.

Weiterer Überzeugungskraft wird es wohl nicht bedürfen, um zu zeigen, dass nicht jedes zu einem ebenen Problem vermutete räumliche Analogon wahr sein muss.

Kräftiger muss man vielleicht vor dem Fehlschluss warnen, dass Probleme, die in der Ebene nicht lösbar sind, im Raum "erst recht" unlösbar bleiben. Dazu ein Beispiel.

(3.14) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel mit der Kantenlänge  $n$  und eine beliebige Anzahl von Körpern  $K$ , die sich - wie in Abb. 41a dargestellt - aus vier Würfeln der Kantenlänge 1 zusammensetzen. Der Würfel soll mit Körpern  $K$  vollständig ausgefüllt werden. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  ist diese Aufgabe lösbar?

Da die Körper  $K$  aus vier kongruenten Würfeln zusammengesetzt sind, ist für ungerade  $n$  die Aufgabe nicht lösbar. Für gerade  $n$  gilt  $n \geq 4$  wegen der Form der Körper  $K$ .

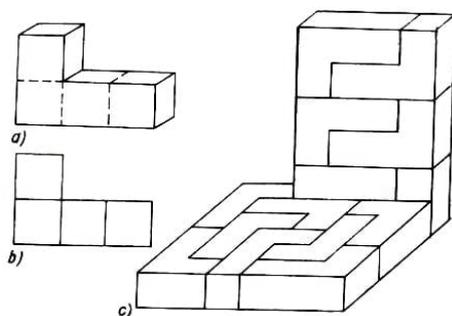


Abb. 41

Ist es nun möglich, ein  $n \times n$ -Felder-Schachbrett mit Figuren der Form, wie sie in Abb. 41b dargestellt werden, auszulegen, so ist offensichtlich auch das räumliche Problem gelöst. Dies gelingt leicht für ein  $4 \times 4$ -Felder-Schachbrett, und damit ist sowohl das ebene als auch das räumliche Problem für alle  $n = 4k$  ( $k$  ist eine natürliche Zahl) gelöst.

(3.15) Aufgabe. Für ein  $6 \times 6$ -Felder-Schachbrett ist das ebene Problem nicht lösbar.

Wie Abb. 41c zeigt, ist das räumliche analoge Problem sehr wohl lösbar. Damit ergibt sich dann leicht, dass (3.14) für alle geraden Zahlen  $n$  lösbar ist.

(3.16) Aufgabe. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines festen ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind. Man beweise: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind, und es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

## 4 Volumina

Palmström rechnet mit v. Korf zu Haus  
den Kubikinhalt der Alpen aus  
(denn er denkt die Alpen sich als einen  
Würfel aus Touristen, Kühen und Steinen)  
Chr. Morgenstern

### 4.1 Was ist der Rauminhalt?

Die Frage erscheint leicht, wenn nicht gar überflüssig. Täglich gehen wir mit materiellen Körpern um und sind es auch gewohnt, ihr Volumen zu berechnen oder abzuschätzen. Handelt es sich noch um "Hohlkörper", so lässt sich selbst bei komplizierten Formen das Volumen physikalisch durch das Ausfüllen mit einer Flüssigkeitsmenge und einem anschließenden Vergleich in einem genormten Gefäß ermitteln.

Ausgehend davon, scheint es uns einleuchtend, dass es sicherlich einen geeigneten Abstraktionsprozess gibt, auch den mathematischen Begriff Rauminhalt einer räumlichen Figur exakt zu erklären.

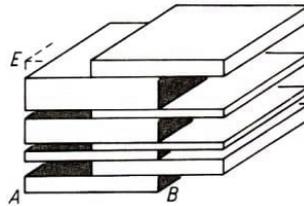


Abb. 42

Ähnlich dachten wohl auch die Mathematiker von Archimedes bis Gauß, ihnen ging es weniger darum, den Inhalt von Körpern zu definieren, als ihn zu berechnen. Die Fragestellung hat sich jedoch als eine grundlegende mathematische Problemstellung erwiesen, mit der sich, Generationen von Mathematikern beschäftigt haben.

Folgendes einfaches Beispiel einer räumlichen Figur, auf das wir später nochmals kurz eingehen, soll die Schwierigkeiten etwas verdeutlichen.

Wir gehen aus von einem Würfel  $W$  mit der Kantenlänge 1 cm; dieser hat einen Rauminhalt von  $1 \text{ cm}^3$ . Jetzt zerlegen wir diesen Würfel durch  $n$  Ebenen, die parallel zur Würfel­fläche  $ABCD$  liegen, in  $n + 1$  Teilkörper. Den zweiten, vierten und sechsten Teilkörper verschieben wir in der Richtung von  $\overrightarrow{AB}$  um 0,5 cm; wir erhalten dadurch etwa einen Körper  $W^*$ , wie er in Abb. 42 dargestellt ist.

Diesem Körper werden wir ohne Zögern wieder den Rauminhalt  $1 \text{ cm}^3$  zuordnen, selbst dann, wenn  $n$  eine sehr große Zahl ist.

Im nächsten Schritt wollen wir aber statt der Teilkörper ebene Schnittflächen verschieben. Wir können uns dazu auf der Kante  $AE$  von  $A$  ausgehend sowohl alle rationalen als auch alle irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als Höhenzahlen über der Grundfläche  $ABCD$  markiert denken. Genau die Ebenen, die  $AE$  in einem Punkt mit irrationaler Höhenzahl schneiden, verschieben wir wie oben; es entsteht eine Punktmenge  $W^{**}$ .

Kommt dieser wohlbestimmten räumlichen Punktmenge ein Rauminhalt zu? An einem solchen Beispiel wird sichtbar, dass zur Entscheidung dieser Frage eine exakte Definition notwendig ist. Es ist aber allein schon aus Platzgründen hier nicht möglich, eine eingehende Grundlegung des Begriffs Rauminhalt zu bieten.

(Den interessierten Leser verweisen wir unter anderem auf die "Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. V, Geometrie", Berlin 1971).

Hier können wir nur einige grundlegenden Eigenschaften des Rauminhalts hervorheben, die unser weiteres Arbeiten rechtfertigen, die aber auch zur Definition des Begriffs wesentlich sein können.

Überdies beschränken wir uns weitgehend im ganzen vierten Kapitel (wiederum aus Platzgründen) auf Polyeder, zunächst auf konvexe Polyeder.

Das Vorgehen lässt aber den Blick frei zur Einbeziehung weiterer räumlicher Figuren. Weiterhin setzen wir voraus, dass jeder ebenen einfachen  $n$ -Ecksfläche unter Zugrundelegung eines Einheitsquadrats eindeutig ein (Flächen-) Inhalt zugeordnet werden kann (etwa durch Zerlegung in Dreiecksflächen und die bekannte Dreiecksformel für den Inhalt).

Das Innere konvexer Polyeder ist identisch mit dem Durchschnitt endlich vieler Halbräume (vgl. Abschnitt 1.2), falls dieser Durchschnitt beschränkt ist und wenigstens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte enthält. In diesem Sinne ist das Tetraeder das einfachste konvexe Polyeder.

Wir beginnen damit, dass wir einem bestimmten Polyeder einen bestimmten Inhalt zuordnen. Im Zusammenhang mit den Forderungen nach Einheiten im Handel, in Physik und Technik wurde die Länge einer bestimmten Strecke als Längeneinheit festgelegt und Meter (m) genannt.

Entsprechend wird einem Würfel  $W_1$  mit der Kantenlänge 1 m der Rauminhalt  $1 \text{ m}^3$  zugeordnet. Dabei ist die Maßeinheit insbesondere für praktische Belange wesentlich, für rein mathematische Betrachtungen würde es auch ausreichen, mit den Maßzahlen zu arbeiten und dementsprechend einen Würfel als Einheitswürfel auszuzeichnen und ihm das Volumen ] zuzuordnen.

Davon machen wir auch im folgenden Gebrauch. Wir gehen also von der Eigenschaft aus, eine Einheit für den Rauminhalt festlegen zu können. Diese Eigenschaft des Rauminhalts heißt Normiertheit.

Weiterhin verlangen wir, wiederum mit dem Blick auf praktische Anwendungen, dass der Rauminhalt eines konvexen Polyeders, das aus endlich vielen konvexen Polyedern besteht, die paarweise keinen inneren Punkt gemeinsam haben, gleich der Summe der Rauminhalte dieser Teilkörper ist. Diese Eigenschaft des Rauminhalts wird Additivität genannt.

Im weiteren heißt ein Polyeder  $P$  in Polyeder  $P_1, \dots, P_n$  zerlegt oder aus  $P_1, \dots, P_n$  zusammengesetzt, wenn  $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$  (im Sinne der Vereinigung von Punkt Mengen) und  $P_1, \dots, P_n$  paarweise keine inneren Punkte gemeinsam besitzen.

Als weitere Selbstverständlichkeit erscheint die Eigenschaft, dass kongruente Polyeder den gleichen Rauminhalt besitzen (Invarianz gegenüber Bewegungen).

Hat nun z.B. ein Quader  $Q$  die Maßzahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  der Kantenlängen, wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  natürliche Zahlen (größer Null) sind, so lässt sich  $Q$  in  $a \cdot b \cdot c$  Würfeln zerlegen, die zum Einheitswürfel kongruent sind, und wir können nach den bisherigen Eigenschaften dem Quader den Rauminhalt  $abc$  zuordnen.

Wie erhalten wir aber dann z.B. für ein Tetraeder das Volumen, das sich ja offensichtlich nicht aus Würfeln  $W_1$  zusammensetzen lässt? Diese Problematik beginnt übrigens schon bei einem Quader, wenn eine der Zahlen  $a, b, c$  keine natürliche Zahl ist! Es gilt aber immer<sup>16</sup>

$$|a| \leq a < [a] + 1, \quad |b| \leq b < [b] + 1, \quad |c| \leq c < [c] + 1 \quad (4.1)$$

Daraus folgt zunächst einmal rein arithmetisch

$$V'_1 \leq V < V''_1 \quad \text{mit} \quad (4.2)$$

$$V'_1 = [a] \cdot [b] \cdot [c], \quad V = a \cdot b \cdot c, \quad V''_1 = ([a] + 1) \cdot ([b] + 1) \cdot ([c] + 1)$$

Geometrisch betrachtet, ist aber  $V'_1$  das Volumen eines Quaders  $Q'$ , der sich in Einheitswürfel zerlegen lässt und ganz in dem Quader  $Q$  enthalten ist, und  $V''_1$  das Volumen eines Quaders  $Q''$ , der sich in Einheitswürfel zerlegen lässt und den Quader  $Q$  enthält.

Von dem Rauminhalt erwarten wir nun weiterhin die Eigenschaft der Monotonie, d.h., der Inhalt eines Polyeders  $P_1$  ist größer als der Inhalt des Polyeders  $P_2$ , wenn  $P_2$  echt in  $P_1$  enthalten ist ( $P_1 \supset P_2$ ). Damit muss für das Volumen  $V_Q$  des Quaders  $Q$  (wobei die Existenz von  $V_Q$  nur anschaulich nicht in Frage steht)

$$V'_1 \leq V_Q < V''_1$$

gelten. Unterteilen wir jede Längeneinheit in zehn gleiche Teile, dann wird einerseits der Würfel  $W_1$  in 1000 Würfeln  $W_2$  zerlegt, die wegen der Additivität alle das Volumen  $10^{-3}$  haben. Andererseits existieren natürliche Zahlen  $n, p, r$  (kleiner als 10) derart, dass die Ungleichungen (4.1) wie folgt "verfeinert" werden können:

$$\begin{aligned} |a| \leq \frac{n}{10} \leq a < [a] + \frac{n+1}{10}, \quad |b| \leq \frac{p}{10} \leq b < [b] + \frac{p+1}{10} \\ |c| \leq \frac{r}{10} \leq c < [c] + \frac{r+1}{10} \end{aligned} \quad (4.1')$$

Durch entsprechende Produktbildung erhalten wir

$$V'_2 \leq V_Q < V''_2$$

wobei  $V'_2$  das Gesamtvolumen von Würfeln der Art  $W_1$  und  $W_2$  ist, die alle in  $Q$  enthalten sind, und  $V''_2$  das Volumen der Würfel, die in ihrer Gesamtheit  $Q$  umfassen. Damit gilt

$$V'_1 \leq V'_2 \leq V_Q < V''_2 \leq V''_1$$

<sup>16</sup> $[a]$  bedeutet dabei wie üblich die größte ganze Zahl, die  $a$  nicht übertrifft.

Aus der arithmetisch offensichtlichen Verfeinerung von (4.1) durch (4.1)' folgt, dass  $V_1' < V_2'$  oder  $V_2'' < V_1''$  gilt.  $V_Q$  wird also durch  $V_2'$  und  $V_2''$  genauer abgeschätzt. Das Verfahren solcher Verfeinerung kann nun fortgesetzt werden, dabei wird jede Kantenlänge  $a, b, c$  durch ein Intervall mit rationalen Intervallenden beliebig genau beschrieben und damit auch  $V_Q$ .

Die Verfeinerung kann man solange fortsetzen, bis die Differenz  $V_i'' - V_i'$  eine beliebig klein gewählte positive Zahl unterschreitet. Das kann mit den mathematischen Begriffen Folge und Grenzwert genauer dargelegt werden.

Die Verfeinerung von  $a, b$  und  $c$  ergibt eine Folge  $\{V_i'\}$  und eine Folge  $\{V_i''\}$  von positiven rationalen Zahlen, für die  $V_i'' - V_i'$  mit wachsendem  $i$  monoton gegen Null geht.

Der gemeinsame Grenzwert der Folgen  $\{V_i'\}$  und  $\{V_i''\}$  ist dann  $abc$ , und wegen  $V_i' \leq V_Q < V_i''$  muss dieser Grenzwert auch  $V_Q$  sein. (Aus unseren Überlegungen ergibt sich überdies auch die Existenz des Rauminhalts  $V_Q$  von  $Q$ , nämlich durch die Existenz des gemeinsamen Grenzwertes der Folgen  $\{V_i'\}$  und  $\{V_i''\}$ .)

Mit dem so gewonnenen Volumen für einen beliebigen Quader können wir zunächst jedem geraden dreiseitigen Prisma einen Rauminhalt zuordnen und damit schließlich jedem Tetraeder. Jedes Polyeder ist aber in Tetraeder zerlegbar, und damit ist wegen der Additivität jedem Polyeder ein Rauminhalt zugeordnet.

Für den ersten Schritt benutzen wir die Eigenschaft der Invarianz des Rauminhalts gegenüber Bewegungen.

Jedes gerade dreiseitige Prisma  $ABCA'B'C'$  kann - wie in Abb. 43a dargestellt - zu einem Quader  $ABDEA'B'D'E'$  ergänzt werden. Legt man dann durch  $g_{CC'}$  eine zu  $BD$  parallele Ebene, so entstehen zwei Paare kongruenter Körper, die wegen der Invarianz volumengleich sind. Das Prisma besitzt demnach das Volumen

$$V_P = \frac{1}{2}V_Q = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BD| \cdot |AA'|$$

und dies kann gelesen werden als .

$$V_P = G \cdot h \tag{4.3}$$

wobei  $G$  der Flächeninhalt der Grundfläche und  $h := |AA'|$  die Höhe des Prisma ist.

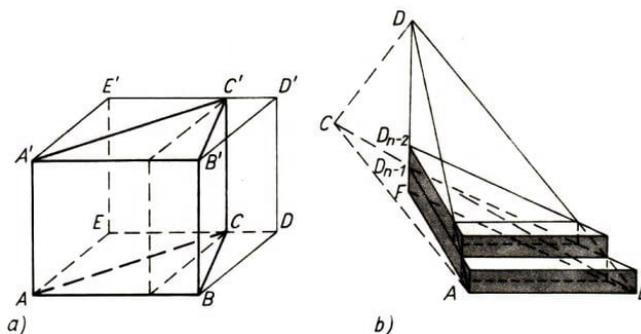


Abb. 43

Mit den Methoden der Infinitesimalrechnung, deren Verwendung wir bei der Herleitung des Quadvolumens genügend deutlich gemacht haben, kann das Volumen  $V_T$  eines Tetraeders ermittelt werden. Abb. 43b zeigt, wie dabei dreiseitige Prismen (mit der Volumenformel (4.3)) zugrunde gelegt werden können. Man erhält nach Rechnung

$$V_T = \frac{1}{3}G \cdot h \quad (4.4)$$

wobei  $G$  der Flächeninhalt einer Seitenfläche und  $h$  die zugehörige Höhe des Tetraeders ist.

Jede Pyramide  $A_1A_2\dots A_nS$  mit einem einfachen  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$  ( $n \geq 3$ ) als Grundfläche und der Spitze  $S$  lässt sich in Tetraeder mit der gemeinsamen Ecke  $S$  zerlegen, indem man die Grundfläche in Dreiecke zerlegt.

Da der Flächeninhalt  $G$  der Grundfläche gleich der Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ist und die Zerlegungstetraeder gleiche Höhe  $h$  besitzen, ergibt sich aus (4.4) auf Grund der Additivität für den Rauminhalt  $V$  der Pyramide die bekannte Volumenformel

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h \quad (4.5)$$

Man überlege bei der folgenden Aufgabe zunächst gut, welches eine günstige Wahl für die Grundfläche ist!

(4.6) Aufgabe. Gegeben seien ein Tetraeder  $ABCD$  mit dem Volumen  $V$  und ein zweites  $A'B'C'D$  mit dem Volumen  $V'$  so, dass  $A' \in AD$ ,  $B' \in BD$ ,  $C' \in CD$  ist. Man beweise, dass

$$\frac{V}{V'} = \frac{|AD|}{|A'D|} \cdot \frac{|BD|}{|B'D|} \cdot \frac{|CD|}{|C'D|}$$

ist.

Wir haben in unseren bisherigen Ausführungen versucht, sichtbar zu machen, wie gewissen Körpern ein Rauminhalt zugeordnet werden kann, und haben dabei bestimmte Eigenschaften des Rauminhalts zugrunde gelegt. Das lässt sich über die von uns bisher behandelten Körper - nämlich alle (konvexen) Polyeder - hinaus erweitern.

Dagegen ist der im Text zu Abb. 42 vorgestellten räumlichen Figur kein Rauminhalt zuzuordnen, da der Grenzwert der Rauminhalte der Polyeder, die in der Figur enthalten sind, den Wert  $\frac{1}{2}$ , aber der untere Grenzwert für die Polyeder, die die Figur umfassen, den Wert  $\frac{3}{2}$  besitzt.

Näher wollen wir hier nicht auf diese Grundlagenprobleme eingehen. Wir möchten aber noch an einem Beispiel zeigen, dass die oben verwendeten infinitesimalen Methoden auch zur Lösung von Aufgaben nützlich sind.

Der VII. IMO entnehmen wir folgende Aufgabe:

(4.7) Aufgabe. Gegeben sei ein Tetraeder  $ABCD$ . Die Kante  $AB$  habe die Länge  $a$ , die Kante  $CD$  die Länge  $b$ . Der Abstand der durch  $AB$  und  $CD$  bestimmten windschiefen Geraden sei  $d$ . Das Tetraeder werde durch eine zu den Gegenkanten  $AB$  und  $CD$  parallele Ebene  $\varepsilon$  in zwei Teile zerlegt.

#### 4.1 Was ist der Rauminhalt?

Man berechne das Verhältnis der Rauminhalte beider Teile, wenn das Verhältnis  $k$  des Abstandes der Geraden  $g_{AB}$  von der Ebene  $\varepsilon$  und des Abstandes der Geraden  $g_{CD}$  von der Ebene  $\varepsilon$  bekannt ist.

Die Existenz der Ebene  $\varepsilon$  ergibt sich aus Satz (1.16), der Abstand  $d$  ist uns aus Satz (1.44) und Aufgabe (2.7) geläufig. Jede Zahl  $k$  lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch eine rationale Zahl  $\frac{m_k}{n_k}$  annähern.

Nach dem Strahlensatz wird dann auch  $BC$  im Verhältnis  $m_k : n_k$  geteilt,  $s = m_k + n_k$  kann dann als eine Anzahl von gleichlangen Strecken betrachtet werden, in die  $BC$  unterteilt wird;  $s$  kann bei festem  $k$  beliebig groß gewählt werden, da  $\frac{m_k}{n_k}$  entsprechend erweitert werden kann.

Durch jeden dieser  $s - 1$  Teilungspunkte legen wir Ebenen  $\varepsilon'$  parallel zu  $s$ , die das Tetraeder wegen der Parallelität zu  $AB$  und  $CD$  in Parallelogrammen mit den Seitenlängen  $x$  und  $y$  schneiden (vgl. Abb. 44).

Teilt  $\varepsilon'$  die Strecke  $BC$  im Verhältnis  $m : n$ , so folgt aus dem Strahlensatz  $x = \frac{a \cdot n}{s} m$   $y = \frac{b \cdot m}{s} n$  mit  $x, y$  entsprechend Abb. 44.

Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms ist  $c \cdot xy$ , wobei  $c$  der Sinus eines Parallelogrammwinkels ist;  $c$  ist also für alle Ebenen  $\varepsilon'$  eine Konstante. Zu einem jedem Parallelogramm können wir nun ein vierseitiges Prisma mit der Höhe  $\frac{d}{s}$  betrachten, so dass die Gesamtheit dieser Prismen einmal dem Tetraeder einbeschrieben ist, zum anderen das Tetraeder enthält. Wir beschränken uns hier auf die dem Tetraeder einbeschriebenen Prismen. Für deren Volumen  $V'$  gilt

$$V' = \sum_{m=1}^s c \cdot x \cdot y \cdot \frac{d}{s}$$

Mit  $m + n = s$  und den obigen Ausdrücken für  $x$  und  $y$  folgt

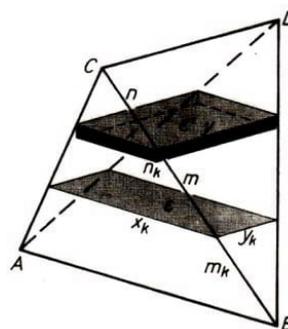


Abb. 44

$$V' = \sum_{m=1}^s cabd \frac{m(s-m)}{s^3} = \frac{cabd}{s^3} \sum_{m=1}^s (ms - m^2)$$

Für denjenigen unserer Teilkörper, der  $AB$  als Kante enthält, erhalten wir analog ein Volumen  $V'_k$ , nur ist der obere Summationsindex  $m_x = \frac{ks}{1+k}$ . Mit den Formeln

$$\sum_{m=1}^r m = \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^r m^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

erhalten wir

$$V' = \frac{cabd}{s^3} \left[ \frac{s^2(s+1)}{2} - \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \right] = \frac{cabd}{6} \left[ 1 - \frac{1}{s^2} \right]$$

und

$$V'_k = \frac{cabd}{s^3} \left[ \frac{1}{2} s \frac{sk}{1+k} \left( \frac{sk}{1+k} + 1 \right) - \frac{1}{6} \frac{sk}{1+k} \left( \frac{sk}{1+k} + 1 \right) \left( \frac{2sk}{1+k} + 1 \right) \right]$$

$$V'_k = \frac{cabd}{6} \cdot \frac{1}{(1+k)^3} \left[ 3k^2 + k^3 + \frac{3k + 3k^2}{s} - \frac{k + 2k^2 + k^3}{s^2} \right]$$

Da bei hinreichend großem  $s$  alle Brüche mit dem Nenner  $s$  bzw.  $s^3$  beliebig klein werden, ergeben sich mit obigen Betrachtungen die Volumina für das gesamte Tetraeder und einen der Teilkörper zu

$$V = \frac{cabd}{6} \quad \text{bzw.} \quad V = \frac{cabd}{6} \cdot \frac{k^3(3+k)}{1+k)^3}$$

Das gesuchte Verhältnis  $q$  ist dann<sup>17</sup>

$$V_k : (V - V_k) = \frac{k^2(3+k)}{(1+k)^3} : \left( 1 - \frac{k^2(3+k)}{(1+k)^3} \right)$$

$$q = k^2 \frac{3+k}{(1+k)^3}$$

(4.8) Aufgabe. Wählt man auf zwei windschiefen Geraden  $g$  und  $h$  zwei Strecken  $AB \subset g$  und  $CD \subset h$  vorgegebener Länge  $a$  und  $b$ , so hat das Tetraeder stets denselben Inhalt, unabhängig von der Lage der Strecken auf den Geraden.

## 4.2 Zerlegen und Ergänzen

man muss mehr sehen als sich sagen lassen  
G. Chr. Lichtenberg

Zerlegen und Ergänzen sind wichtige Methoden zur Bestimmung des Rauminhalts von Körpern. Wir beschränken uns hier - wie bereits gesagt - auf Polyeder.

Ziel ist es, die Aufgabenstellung möglichst auf eine Aufgabe über bekannte und einfache Körper zurückzuführen. Das Finden geeigneter Zerlegungen bzw. Ergänzungen ist gleichzeitig eine gute Schulung für das räumliche Vorstellungsvermögen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

<sup>17</sup>Der Lösungsweg zeigt, dass die Aufgabe selbstverständlich kürzer mittels der Integralrechnung gelöst werden kann.

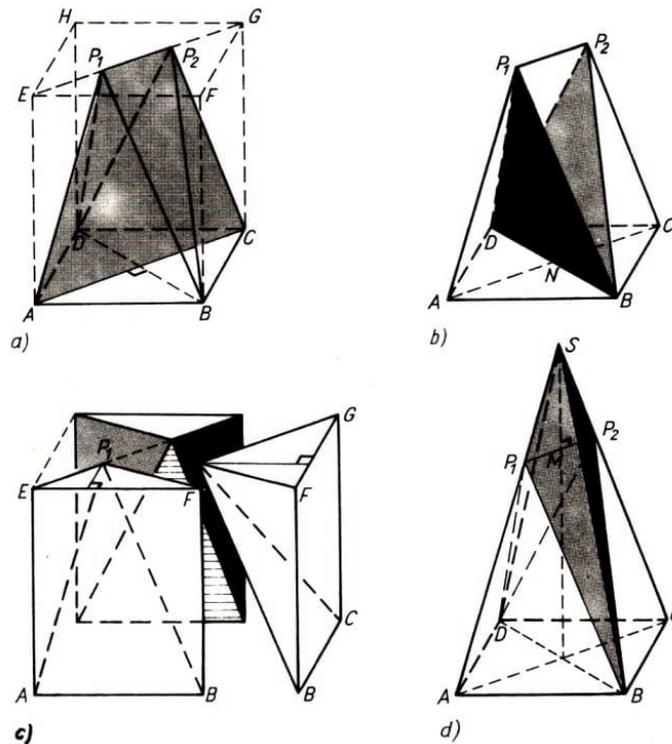


Abb. 45

(4.9) Aufgabe. Es sei  $ABCDEFGH$  ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche  $ABCD$  (Seitenlänge  $a$ ) und der Höhe  $h$ . Dabei sollen die Punkte  $E, F, G$  bzw.  $H$  senkrecht über den Punkten  $A, B, C$  bzw.  $D$  liegen.

Die Flächendiagonale  $EG$  sei durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  so geteilt, dass  $|EP_1| = |P_1P_2| = |P_2G|$  ist. Es ist das Volumen  $V_0$  des konvexen Polyeders  $ABCDP_1P_2$  zu berechnen. (Dieser Körper hat die Kanten  $P_1A, P_1B, P_1D, P_2B, P_2C, P_2D$  sowie  $AB, BC, CD, DA$  und  $P_1P_2$  Abb. 45a.)

Eine naheliegende und einfache Lösung ergibt sich, indem wir den Körper längs der Kanten  $AP_1$  und  $CP_2$  durch einen ebenen Schnitt zerlegen (Abb. 45a). Dies ist möglich, da die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf der zu  $AC$  parallelen Geraden  $g_{EG}$  liegen. Dabei zerfällt er in zwei kongruente und damit inhaltsgleiche Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche  $ACP_2P_1$ .

Diese Fläche ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseitenlängen  $a\sqrt{2}$  und  $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$  und der Höhe  $h$ ; sie besitzt demnach den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \left( a\sqrt{2} + \frac{1}{3}a\sqrt{2} \right) \cdot h = \frac{2}{3}\sqrt{2}ah$$

Die Höhen der Pyramiden betragen  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ , da  $BD$  senkrecht auf der Schnittebene durch  $A, C, G$  und  $E$  steht und durch  $AC$  halbiert wird. Also ist das gesuchte Volumen

$$V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3}\sqrt{2}ah \right) \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{4}{9}a^2h$$

Eine weitere einfache Zerlegung erhält man mittels ebener Schnitte durch  $B, D, P_1$  bzw.  $B, D, P_2$  (vgl. Abb. 45b).

Wegen  $P_1P_2 \parallel AC$  und  $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{2}{3}|AN|$  verhalten sich die Höhen der Pyramiden<sup>18</sup>  $BDP_1P_2$  und  $BDP_1A$  wie 2:3, und damit ist

$$V(BDP_1P_2) = \frac{2}{3}V(BDP_1A)$$

Ferner sind die Pyramiden  $BDP_1A$  und  $BDCP_2$  kongruent. Folglich gilt

$$V_0 = 2V(BDP_1A) + \frac{2}{3}V(BDP_1A) = \frac{8}{3}V(BDP_1A) = \frac{8}{3} \left( \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} h \right) = \frac{4}{9} a^2 h$$

Geht man von der Entstehung des Körpers aus, so liegt es nahe, zunächst den Rauminhalt jener Teile zu bestimmen, die vom ursprünglichen Quader abgetrennt wurden. Dazu könnte folgende Vorstellung bestehen, die Abb. 45c vermittelt.

Diese Teile sind leicht zu berechnen. Da sind zunächst die Pyramide  $ABFEP_1$  und die dazu kongruente Pyramide  $CDHGP_2$ ; ihre Grundflächen haben den Inhalt  $ah$ , und die entsprechenden Höhen sind gleich der Dreieckshöhe von  $P_1$  auf die Seite  $EF$  (des Dreiecks  $EF P_1$ ), also aus Ähnlichkeitsgründen gleich  $\frac{1}{3}|FG| = \frac{1}{3}a$ . Demnach ist das Volumen dieser Pyramiden

$$V_1 = \frac{1}{3}(ah) \frac{1}{3}a = \frac{1}{9} a^2 h$$

Ferner sind die Pyramide  $BCGFP_1$  und die dazu kongruente Pyramide  $DAEHP_2$  abzutrennen. Völlig analoge Überlegungen ergeben für sie den Rauminhalt

$$V_2 = \frac{1}{3}(ah) \frac{2}{3}a = \frac{2}{9} a^2 h$$

Insgesamt erhalten wir

$$V_0 = ah^2 - 2V_1 - 2V_2 = \frac{3}{9} a^2 h$$

Dies stimmt nicht mit den bisherigen Ergebnissen überein! Wo steckt der Fehler?

Natürlich, die zweite Abspaltung ist nicht richtig! Sie setzt voraus, dass  $CP_1$  und  $BP_2$  in einer gemeinsamen Ebene liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da wegen  $P_1P_2 \parallel AC$  die Ebene  $\varepsilon_{CP_1P_2}$  die Grundfläche  $ABCD$  längs  $AC$  schneidet.

Wir wollen nun den Fehler schnell beheben. Anstelle der Pyramide  $BCGFP_1$  sind einfach die Pyramiden  $P_1P_2FB$  und  $BCGFP_2$  zu nehmen. Der Inhalt des Dreiecks  $P_1P_2F$  ist wegen  $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|EG|$  gleich dem Drittel des Inhalte von  $EGF$ , also  $\frac{1}{6}a^2$ . Folglich ist

$$V(P_1P_2FB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} a^2 \cdot h = \frac{1}{18} a^2 h$$

Die Pyramide  $BCGFP_2$  ist kongruent zu  $ABFEP_1$ . Demnach ist nun

$$V_0 = a^2 h - 4V_1 - 2V(P_1P_2FB) = \frac{4}{9} a^2 h$$

<sup>18</sup>Hier und im folgenden geben bei der Bezeichnung der Pyramiden der letztgenannte Punkt die Spitze und die vorhergehenden Punkte die Ecken der zugehörigen Grundfläche an.

Zur Lösung der Aufgabe könnte auch versucht werden, den Körper durch Anfügen von einfachen Körpern zu einem einfachen Körper mit bekannter Volumenformel zu ergänzen.

Die Verlängerungen der Kanten  $AP_1$  und  $CP_2$  schneiden sich in einem Punkt  $S$ . Das Dreieck  $ACS$  ist gleichschenkelig. Aus dem Körper entsteht nun durch Anfügen der zueinander kongruenten Pyramiden  $P_1P_2SB$  und  $P_1P_2SD$  die Pyramide  $ABCDS$  (vgl. Abb. 45d).

Es sei  $M$  der Mittelpunkt von  $P_1P_2$ . Wegen  $P_1P_2 \parallel AC$  und  $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AC|$  ist  $|SM| : (|SM| + h) = 1 : 3$  und damit  $|SM| = \frac{1}{2}h$ . Dann ist

$$V(ABCDS) = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{3}{2}h = \frac{1}{2}a^2h$$

Zur Inhaltsbestimmung der Pyramide  $P_1P_2SB$  benutzen wir den Flächeninhalt  $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}a\right) \frac{1}{2}h = \frac{1}{12}ah$  der Grundfläche  $P_1P_2S$  und die Höhe  $\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$ , also ist

$$V(P_1P_2SB) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12}\sqrt{2}ah\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right) = \frac{1}{36}a^2h$$

Zusammen ergibt sich dann

$$V_0 = \frac{1}{2}a^2h - 2 \cdot \frac{1}{36}a^2h = \frac{4}{9}a^2h$$

Der Körper lässt sich durchaus noch in anderer geeigneter Weise zerlegen (z.B. so, dass ein Teil die Pyramide  $ABCDM$  ist) oder ergänzen (etwa zu einem Pyramidenstumpf oder zu einem dreiseitigen Prisma mit  $EG$  als Mantelkante), und wir empfehlen dem Leser, diesen Möglichkeiten nachzugehen bzw. neue zu suchen.

Zum Schluss dieser Aufgabe möchten wir auch auf Möglichkeiten hinweisen, Ergebnisse der Integralrechnung zu nutzen. So bietet sich hier die Simpson-Formel, speziell die Keplersche Fassformel an. (Eine leicht zugängliche Literatur ist dazu unter anderem die "Kleine Enzyklopädie Mathematik".)

(4.10)<sup>19</sup> Aufgabe. In einer Ebene  $\varepsilon$  sei  $ABCDEF$  ein regelmäßiges Sechseck. Auf einer Ebene  $\varepsilon'$ , die zu  $\varepsilon$  parallel ist, liege ein regelmäßiges Sechseck  $A'B'C'D'E'F'$  so, dass die Strecken  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$  und  $FF'$  auf  $\varepsilon$  senkrecht stehen.

Gegeben seien die Länge  $a$  von  $AC$  sowie der Abstand  $h$  zwischen den Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ . Man berechne hieraus das Volumen  $V$  des Polyeders, das genau die Strecken  $AC$ ,  $CE$ ,  $EA$ ,  $B'D'$ ,  $D'F'$ ,  $F'B'$ ,  $AB'$ ,  $AF'$ ,  $CB'$ ,  $CD'$ ,  $ED'$  und  $EF'$  als Seitenkanten hat (vgl. Abb. 46).

Wir lösen jetzt eine Aufgabe, in der es um das Verhältnis von Rauminhalten geht.

(4.11)<sup>20</sup> Aufgabe. Gegeben sei eine vierseitige Pyramide  $ABCDS$  mit quadratischer

<sup>19</sup>Nach Aufgabe 161046 der OJM der DDR.

<sup>20</sup>Nach Aufgabe 131033 der OJM der DDR.

Grundfläche. Alle acht Kanten dieses Körpers haben die Länge  $a$ . Die Mittelpunkte der Kanten  $BS$  und  $CS$  seien  $E$  bzw.  $F$ . Eine Ebene durch die Punkte  $A, E, F$  zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper (Abb. 47). Man berechne das Verhältnis der Volumina dieser Teilkörper.

Zunächst ist festzustellen, dass die Schnittebene  $\varepsilon_{AEF}$  durch den Eckpunkt  $D$  der Pyramide geht. Nach Festlegung der Punkte  $E$  und  $F$  ist nämlich  $g_{EF} \parallel g_{BC}$  und wegen  $g_{BC} \parallel g_{AD}$  dann auch  $g_{EF} \parallel g_{AD}$ . Nach Satz (1.10) ist dann  $AD$  in der Schnittebene  $\varepsilon_{AEF}$  enthalten.

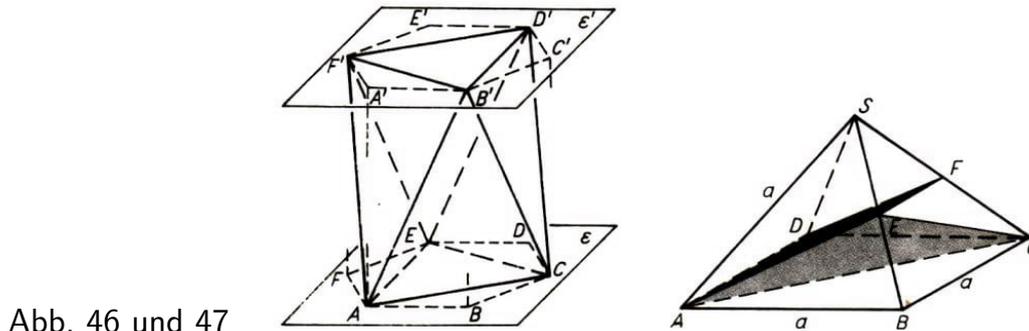


Abb. 46 und 47

Durch die Vorgabe der Kantenlängen ist man geneigt, die Aufgaben durch Berechnungen der Rauminhalte der Teilkörper zu lösen. Der Leser wird feststellen, dass dies relativ aufwendig ist. Da nur nach dem Verhältnis der Volumina gefragt ist, wollen wir eine Lösung über geeignete Vergleiche erzielen. Das gelingt recht kurz auf folgende Weise.

Wir zerlegen den Teilkörper  $ABCDEF$  durch einen Schnitt mit  $\varepsilon_{ACE}$  in die Pyramiden  $AEFDC$  und  $ABCE$  (vgl. Abb. 47). Es sei  $V_1 = V(AEFDS)$ ,  $V_2$  das Volumen des Teilkörpers  $ABCDEF$ ,  $V_{21} = V(AEFDC)$  und  $V_{22} = V(ABCE)$ . Dann ist  $V_{21} = V_1$ , da beide Pyramiden gleiche Grundflächen und wegen  $|CF| = |SF|$  gleichgroße Höhen besitzen.

Weiterhin ist  $V_{22} = \frac{1}{4}V(ABCDS)$ , da neben der Grundfläche auch die Höhe der Pyramide  $ABCE$  wegen  $|EB| = \frac{1}{2}|SB|$  halb so groß ist wie die der Pyramide  $ABCDS$ . Folglich ist

$$V_1 = \frac{1}{2}(V(ABCDS) - V_{22}) = \frac{3}{8}V(ABCDS)$$

und damit

$$V_1 : V_2 = \frac{3}{8} : \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 3 : 5$$

Wir empfehlen dem Leser, die folgende Aufgabe unter Beachtung von Aufgabe (1.25) und mit ähnlichen Zerlegungen oder Ergänzungen wie bisher selbständig zu lösen.

(4.12) Aufgabe. Jede durch die Mitte zweier Gegenkanten eines Tetraeders verlaufende Ebene zerlegt das Tetraeder in zwei inhaltsgleiche Teile.

(4.13) Aufgabe. Gegeben seien eine Pyramide  $A_1A_2A_3A_4$ , eine Ebene  $\varepsilon$  sowie eine Gerade  $g \not\parallel \varepsilon$ . Die zu  $\varepsilon$  parallele Ebene  $\varepsilon_i$  durch  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) schneidet  $g$  in einem Punkt  $B_i$ . Nun sei noch eine Zahl  $0 < k < 1$  vorgegeben.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Punkte  $C_1, C_2, C_3, C_4$  durch  $C_i \in A_i B_i$  mit  $|C_i B_i| = k|A_i B_i|$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Man bestimme das Verhältnis  $V(C_1 C_2 C_3 C_4)$  zu  $V(A_1 A_2 A_3 A_4)$  (vgl. Abb. 48).

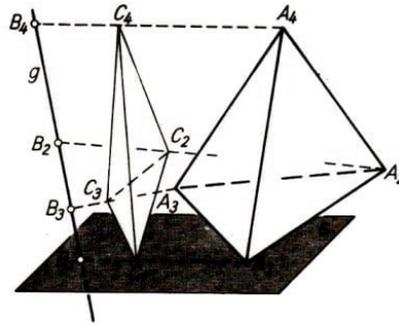


Abb. 48

Mit der Lösung dieser Aufgabe wollen wir gleichzeitig zeigen, wie nützlich es mitunter sein kann, zunächst mit einem Spezialfall zu beginnen.

Wir nehmen zunächst an, dass drei der Ebenen  $\varepsilon_i$  zusammenfallen; o.B.d.A. sei  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$  und damit  $B_1 = B_2 = B_3$ . Dann geht  $C_1 C_2 C_3$  aus  $A_1 A_2 A_3$  durch eine zentrale Stauchung mit dem Stauchungsfaktor  $k$  hervor, d.h., die Grundflächen der zu betrachtenden Pyramiden verhalten sich wie  $k^2 : 1$ .

Da  $\varepsilon_4 \parallel \varepsilon_1$  gilt, haben beide Pyramiden gleiche Höhe, und das gesuchte Volumenverhältnis ist ebenfalls  $k^2 : 1$ .

Gilt nun im zweiten Fall nur noch  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , so haben wir  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$  und  $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$  zu unterscheiden.

Im Fall  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$  ergibt sich mit der Aufgabe (4.8) wieder das Verhältnis  $k^2 : 1$ . Im Fall  $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$  schneidet  $\varepsilon_1$  die Strecke  $A_3 A_4$  (bzw. deren Verlängerung) in  $A_5$  und die vorgegebene Pyramide wird in zwei Pyramiden zerlegt (bzw. mittels einer zweiten zu einer dritten ergänzt). Die zu betrachtenden Volumina setzen sich additiv (bzw. subtraktiv) zusammen, und damit bleibt das nach dem ersten Fall für die Teilpyramiden gültige Verhältnis auch für den zweiten Fall gültig.

Sind nun im allgemeinen Fall keine zwei der Ebenen  $\varepsilon_i$  identisch, so benutze man eine davon als Schnittebene für  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Auf die durch den Schnitt entstandenen Teilpyramiden trifft dann jeweils Fall 2 zu. Damit ergibt sich auch im allgemeinen Fall das gesuchte Verhältnis  $k^2 : 1$ .

Zum Abschluss sei dem Leser empfohlen, die folgende Aufgabe mittels einer Ergänzung (unter Verwendung von (1.17)) zu lösen.

(4.14) Aufgabe. Man berechne das Volumen einer Tetraeders, dessen zueinander windschiefe Kanten jeweils gleich lang sind (mit den Längen  $a, b, c$ ).

### 4.3 Extrema

Was wäre zu wählen:  
Der Beste unter den Schlechten zu sein oder  
der Schlechteste unter den Besten? (F. Hebbel)

Der Beste, der Schlechteste, das Größte, das Kleinste sind Extrema. Selbstverständlich wollen wir uns hier nur mit Extremwerten beschäftigen, d.h. zahlenmäßig Erfassbares betrachten.

Extremwertaufgaben tauchen schon sehr früh in der Mathematik auf. Euklid beweist in den "Elementen":

(\*) Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang ist das Quadrat dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.

An dieser Aufgabe tritt schon das Typische hervor: Es wird nach dem größten (oder kleinsten) Wert gefragt, den eine Größe (bei (\*) Flächeninhalt eines Rechtecks) unter bestimmten Bedingungen (bei (\*) gegebener Umfang) annehmen kann.

Solche Aufgaben treten häufig in der Technik auf, wobei dort etwa der Aufwand minimiert wird, aber auch in der Natur finden wir optimale Lösungen, die denen einer Extremwertaufgabe entsprechen. So geben die Bienen den Waben eine solche Form, dass bei gegebenem Volumen der Waben so wenig Wachs wie möglich verbraucht wird und die einzelnen Waben ohne Zwischenräume aneinandergesetzt werden können.

Bei der Lösung von Extremwertaufgaben spielt gewöhnlich die Differentialrechnung eine große Rolle. Wir wollen aber auf diese Methode hier verzichten, vielmehr gerade demonstrieren, dass auch elementare Methoden sehr viel zu leisten vermögen. Entsprechend unserem Hauptanliegen des Kapitels 4 beschränken wir uns dabei auf "Volumenaufgaben".<sup>21</sup>

(4.15) Aufgabe. Gegeben seien drei Strecken mit gemeinsamem Endpunkt und die Summe  $l = a + b + c$  ihrer Längen. Welche Winkel müssen die Strecken miteinander bilden und in welchem Verhältnis müssen die Streckenlängen zueinander stehen, damit das von den drei Strecken aufgespannte Tetraeder maximales Volumen hat?

Die Lösung nehmen wir entsprechend der Fragestellung in zwei Schritten vor.  $a, b, c$  seien zunächst beliebig, aber fest gewählt. Dann können in (4.4) sowohl  $G$  als auch  $h$  unabhängig voneinander maximal gewählt werden.

Zwei Strecken vorgegebener Länge spannen genau dann ein Dreieck von maximalem Inhalt auf, wenn sie senkrecht aufeinander stehen, und  $h$  wird genau dann maximal, wenn es die Länge der dritten Strecke (O.B.d.A. sei diese  $c$ ) annimmt.

Folglich spannen drei Strecken vorgegebener Länge genau dann ein Tetraeder von maximalem Volumen auf, wenn sie paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Damit ist die Frage nach den von den Strecken eingeschlossenen Winkeln - unabhängig von deren Länge - beantwortet! Es bleibt noch festzustellen, ob durch die Veränderung der Streckenlängen bei konstanter Summe  $l$  das Volumen weiterhin vergrößert werden kann.

Dazu verwenden wir das Ergebnis der oben genannten Extremwertaufgabe (\*) von Euklid. Als Grundfläche der möglichen Tetraeder benutzen wir ein bereits als rechtwinklig erkanntes Dreieck; das hat aber den halben Flächeninhalt eines Rechtecks mit dem Umfang  $2(a + b)$ . Nach (\*) ist demnach der Flächeninhalt genau dann maximal, wenn

---

<sup>21</sup>Auch auf "anwendungssträchtige" Formulierungen haben wir bewusst verzichtet.

$a = b$  gilt. Da es aber gleichgültig ist, welche der Flächen des Tetraeders als Grundfläche betrachtet wird, hätte man auch  $a = c$  erhalten können.

Folglich müssen alle drei Strecken gleichlang gewählt werden. Drei Strecken mit den Längen  $\frac{1}{3}l$ , die paarweise aufeinander senkrecht stehen, lösen die gestellte Aufgabe.

(4.16) Aufgabe. Man formuliere zu der Extremwertaufgabe (\*) von Euklid eine analoge räumliche Aufgabe<sup>22</sup> und löse diese.

Bei den folgenden Aufgaben werden wir solche Beispiele betrachten, die häufig mittels Methoden der Differentialrechnung gelöst werden. Dazu muss zunächst die Größe, die extremal werden soll, in Abhängigkeit von einer für die Aufgabe charakteristischen Variablen dargestellt werden.

Die so konstruierte Funktion wird dann allerdings von uns hier mit elementaren Methoden auf Extremwerte untersucht.

(4.17) Aufgabe. Wir betrachten vierseitige Pyramiden, deren Kanten alle, bis auf eine Mantelkante, die Länge 1 haben. Die Länge dieser einen Mantelkante bestimme man nun so, dass das Volumen der Pyramide maximal wird.

Zur Lösung betrachten wir Abb. 49 und verwenden die dort eingetragenen Bezeichnungen. Es gelte  $|AS| = x$ , und alle anderen Kantenlängen seien 1. Es kommt zunächst darauf an, das Volumen  $V$  in Abhängigkeit von  $x$  auszudrücken. Da bis auf  $AS$  alle Kanten gleiche Länge haben, ergibt sich:

- (i)  $ABCD$  ist ein Rhombus,
- (ii) der Fußpunkt  $F$  des Lotes von  $S$  liegt auf  $\varepsilon_{ABC}$  auf  $AC$ ,
- (iii)  $\triangle DBS \cong \triangle DBC$ .

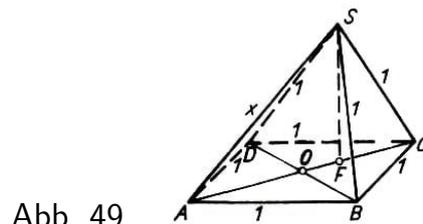


Abb. 49

Aus (i) und (iii) folgt  $|AO| = |OC| = |OS|$ , d.h.,  $S$  liegt auf dem Thaleskreis um  $O$  mit dem Radius  $r = |AO|$ . Folglich ist  $ASC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $S$ . Demnach gilt wegen (ii)

$$|AC| \cdot |SF| = x \cdot 1$$

und wir können die Höhe  $h = |SF|$  der Pyramide mittels  $x$  und  $r = |AO|$  ausdrücken:

$$h = \frac{x}{2r}$$

Außerdem ergibt sich aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks  $ASC$  die Beziehung

$$(2r)^2 = 1 + x^2 \tag{iv}$$

<sup>22</sup>Vgl. Abschnitt 3.3.

Für die Grundfläche  $G$  gilt wegen (i)

$$G = 2|AO| \cdot |OB| \quad \text{bzw.} \quad G = 2r \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

Das gesuchte Volumen  $V$  lässt sich also nach (4.5) in Abhängigkeit von  $x$  und  $r$  darstellen:

$$V = \frac{1}{3} 2r \sqrt{1 - r^2} \cdot \frac{x}{2r}$$

Da  $V$  genau dann maximal wird, wenn  $36V^2$  maximal ist, betrachten wir  $36V^2 = (4 - 4r^2)x^2$ . Mit (iv) folgt daraus  $36V^2 = (3 - x^2)x^2$ . Mit  $z = x^2$  erhalten wir

$$36V^2 = -z^2 + 3z \quad \text{bzw.} \quad 36V^2 = -\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad (\text{v})$$

Die Form (v) ist gerade so gewählt worden, dass es offensichtlich wird, dass der maximale Wert für  $z = \frac{3}{2}$ , d.h. für  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  angenommen wird.

Aus (v) ist auch ablesbar, dass das maximale Volumen den Wert  $\frac{1}{4}$  hat. Aus dem Lösungsweg ist ersichtlich, dass der Wert  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  auch tatsächlich angenommen werden kann. Damit ist die gesuchte Kantenlänge ermittelt.

Bei quadratischen Funktionen (wie in (v)) lassen sich die Extrema immer finden, indem man wie oben die quadratische Ergänzung sucht.<sup>23</sup> Naturgemäß führen aber Volumenaufgaben häufig auf Funktionen dritten Grades, wie das sehr bekannte folgende Problem.

(4.18) Aufgabe. Gegeben sei eine quadratische Blechplatte mit der Seitenlänge  $a$ . An den Ecken sollen gleichgroße Quadrate so ausgeschnitten werden, dass der durch Aufbiegen der "Ränder" aus diesem Netz entstehende quaderförmige (oben offene) Behälter maximales Volumen erhält.

Welche Seitenlänge  $x$  müssen die ausgeschnittenen Quadrate haben?

Zeichnet man das Netz des gesuchten Behälters, so liest man für das Volumen  $V$

$$V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x$$

ab. Demnach soll ein Produkt dreier Faktoren maximal werden. Ein solches Produkt tritt z.B. im Radikanden des geometrischen Mittels auf. Wir setzen folgenden Satz als bekannt voraus:

Sind  $u, v, w$  positive Zahlen, so gilt

$$\sqrt[3]{u \cdot v \cdot w} \leq \frac{u + v + w}{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für  $u = v = w$ . Ist nun in

$$u \cdot v \cdot w \leq \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3$$

<sup>23</sup>Vgl. dazu I.P. Natanson, Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben, MSB Nr. 15.

die rechte Seite eine Konstante, so stellt diese für die linke Seite eine obere Grenze dar und kann nur in dem Fall erreicht werden, in dem alle Faktoren gleich groß sind. In unserem Fall gilt

$$V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x \leq \left( \frac{2a - 3x}{3} \right)^3$$

und damit ist die rechte Seite leider keine Konstante; das lässt sich aber leicht erreichen! Es ist nämlich

$$4V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot (4x) \leq \left( \frac{2a}{3} \right)^3$$

Der maximale Wert für  $4V$  ist demnach  $\left( \frac{2a}{3} \right)^3$  und wird nur im Fall

$$a - 2x = a - 2x = 4x$$

angenommen, d.h. für  $x = \frac{a}{6}$ .

Da es möglich ist, Quadrate der Seitenlänge  $\frac{a}{6}$  auszuschneiden, ist damit die Aufgabe gelöst.

Bei den folgenden Aufgaben kann man auch die eben demonstrierte Methode verwenden, nur wird es schwieriger sein, sie zur Anwendung zu bringen.

(4.19) Aufgabe. Wir betrachten regelmäßige, gerade, sechsseitige Doppelpyramiden  $S_1A_1A_2A_3A_4A_5A_6S_2$  mit  $x = |A_iA_{i+1}|$  ( $i = 1, \dots, 6$  und  $A_7 = A_1$ ) und  $y = \frac{1}{2}|S_1S_2|$ . Man ermittle das Verhältnis  $\frac{y}{x}$  für den Fall, dass

- bei vorgegebener Oberfläche das Volumen maximal wird,
- bei vorgegebenem Volumen die Oberfläche minimal wird.

(4.20) Aufgabe. Man ermittle alle die Punkte im Inneren eines gegebenen Tetraeders, für die das Produkt ihrer Abstände von den Flächen maximal wird.

Andere, für räumliche Extremwertaufgaben charakteristische Problemstellungen sind solche, bei denen ein (oder mehrere) Körper in einem anderen unterzubringen sind. Bei solchen "Packungsproblemen" sind entweder möglichst viele Körper vorgegebener Art und Größe oder eine vorgegebene Anzahl von Körpern möglichst großen Volumens in einem vorgegebenen Körper zu verpacken. Wir wollen das an einem Beispiel demonstrieren.

(4.21) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel  $W$  mit der Kantenlänge 3 und eine beliebige Anzahl von Quadern  $Q$  mit den Kantenlängen 2, 2, 1. Man ermittle die größte Anzahl von Quadern  $Q$ , die man in den Würfel  $W$  packen kann.

Eine notwendige Bedingung ist sehr schnell gefunden; da das Würfelvolumen 27 und ein Quadervolumen 4 betragen, kann man höchstens sechs Quader  $Q$  in  $W$  verpacken. Dass fünf Quader  $Q$  in  $W$  zu verpacken sind, sieht man wohl leicht.

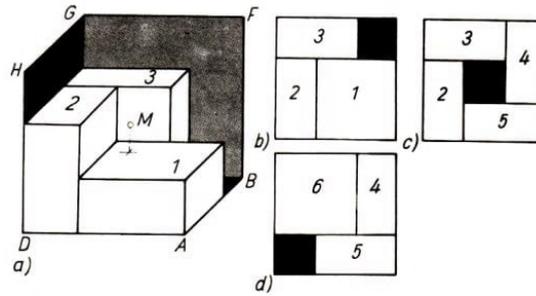


Abb. 50

Nun steht man vor der Frage, ob man versucht, zu beweisen, dass sechs Quader nicht verpackt werden können, oder zeigt, dass bei einer geschickten Packung tatsächlich sechs Quader in  $W$  Platz finden.

Da Unmöglichkeitbeweise bei diesem Aufgabentyp meistens sehr schwierig sind, sollte man zunächst einen Existenzbeweis versuchen. Den ersten Quader legt man in eine der Würfecken  $A$ , die nächsten beiden muss man nun so legen, dass möglichst wenig Platz "verloren geht". Dann kann man z.B. eine Packung erhalten, die wir in Abb. 50a veranschaulicht haben.

Mit Sicherheit ist der bei  $B$  liegende Teilwürfel mit dem Volumen 1 für die Packung nicht mehr zu nutzen, es ist aber andererseits mittels einer Spiegelung am Würfelmittelpunkt  $M$  zu sehen, dass spiegelbildlich zu  $M$  die restlichen drei Quader in  $W$  unterzubringen sind. Legt man durch den Würfel in den Höhen  $\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{2}$  und  $2\frac{1}{2}$  Schnitte, so erhält man Abb. 50b-d, wobei die Ziffern die jeweils durchschnittenen Quader bezeichnen und die Schraffierung die Leerräume angibt. Damit ist gezeigt, dass sechs Quader  $Q$  (und nicht mehr) in  $W$  verpackt werden können.

(4.22) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel  $W$  mit der Kantenlänge 5 und eine beliebige Anzahl von Quadern  $Q$  mit den Kantenlängen 3, 2, 1. Man ermittle die größte Anzahl von Quadern  $Q$ , die man in den Würfel  $W$  packen kann.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir das Volumenverhältnis zwischen einem Würfel und dem diesem Würfel einbeschriebenen Oktaeder. Dieses Beispiel erfordert neben einem guten räumlichen Vorstellungsvermögen auch einige Vorkenntnisse aus der analytischen Geometrie.

Gegeben sei ein Würfel  $ABCDEFGH$  mit der Kantenlänge 2. Wir betrachten regelmäßige Oktaeder derart, dass auf jeder Seitenfläche des Würfels (wenigstens) eine Ecke des Oktaeders liegt.

Dabei werden unter den Seitenflächen des Würfels die Quadrate einschließlich des Randes (also einschließlich der jeweiligen Kanten des Würfels) verstanden. Ein regelmäßiges Oktaeder ist einer der fünf platonischen Körper. Seine Oberfläche (sein Netz) besteht aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken; er besitzt sechs Ecken (Abb. 51a, b).

Wir gehen von der Existenz eines derartigen Oktaeders aus und bezeichnen seine Ecken mit  $R, S, T, U, V, W$  derart, dass sie - wie in Abb. 51c - auf den Seitenflächen des Würfels  $ABCDEFGH$  liegen. Der Mittelpunkt  $M$  des Oktaeders ist (wegen dessen Regelmäßigkeit) Mittelpunkt der Strecken  $RW, SU$  und  $VT$ . Folglich liegt er sowohl auf der Ebene, die Symmetrieebene zwischen den Seitenflächen  $ABCD$  und  $EFGH$

des Würfels ist, als auch auf den Symmetrieebenen von  $BCGF$ ,  $DAEH$  und  $CDHG$ ,  $ABFE$ .

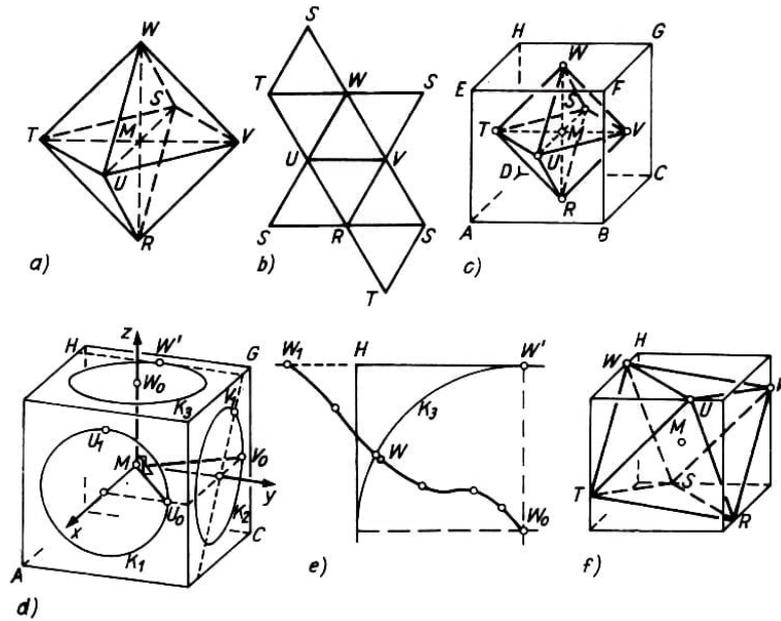


Abb. 51

Der Punkt  $M$  ist demnach der Schnittpunkt dieser Ebenen und damit gleichzeitig Mittelpunkt des Würfels.

Die Frage nach dem kleinsten Oktaeder und seinem Volumenverhältnis zum Würfel kann jetzt leicht beantwortet werden. Nach den letzten Überlegungen ist dafür notwendig, aber auch hinreichend, dass  $R$  ein Punkt der Seitenfläche  $ABCD$  ist, der den kürzesten Abstand zum Mittelpunkt  $M$  des Würfels besitzt, also dass  $R$  der Fußpunkt des Lotes von  $M$  auf  $\varepsilon_{ABC}$  und damit der Mittelpunkt der Seitenfläche  $ABCD$  ist. Die übrigen Seitenflächenmittelpunkte bilden zusammen mit  $R$  offensichtlich ein Oktaeder, und dieses ist das einzig mögliche dieser Größe.

Sein Volumen  $V_0$  kann man sich leicht dadurch bestimmen, dass man das Oktaeder bezüglich  $STUV$  in zwei kongruente gerade Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge  $\sqrt{2}$  und der Höhe 1 zerlegt. Es beträgt demnach  $V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$ . Das Verhältnis von Oktaedervolumen zu Würfelvolumen  $V_W$  ist dann

$$V_o : V_W = \frac{4}{3} : 8 = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

Jedes andere Oktaeder hat - falls es existiert - ein größeres Volumen und damit ein Verhältnis zu  $V_W$ , des größer als  $\frac{1}{6}$  ist.

Nun ergibt sich die naheliegende Frage, ob es zu jeder reellen Zahl  $t > \frac{1}{6}$  ein Oktaeder mit  $V_o : V_W = t$  gibt.

Natürlich kann dabei  $t$  nicht beliebig groß gewählt werden. Offenbar kann die Länge von  $MR$  höchstens gleich der von  $MA$ , also höchstens gleich  $\sqrt{3}$  sein. Angenommen, es existiert ein Oktaeder dieser Art, dann ist sein Volumen  $V_o = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ .

Also muss  $t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$  sein.

---

Erhard Quaisser

Bewegungen in der Ebene und im Raum

---

## Vorwort

Und nichts ist schlimmer,  
als ein Buch anzufangen  
und es dann nicht mehr  
zu Ende lesen zu können.  
K. Tucholsky

Eine Anregung zu diesem Bändchen erwuchs aus meiner mehrjährigen Tätigkeit in der an außerunterrichtlichen Arbeit mit Schülern und in der Ausbildung von Lehrerstudenten. Es wendet sich deshalb besonders an diesbezügliche Leserkreise.

Das Bändchen möchte als Lehr- und Übungsmaterial vor allem für Schüler in mathematischen Arbeitsgemeinschaften nützlich sein und als Handreichung das Studium der Lehrerstudenten sowie die Arbeit der Fachlehrer unterstützen. Darüber hinaus möchte es einen breiten Kreis von Lesern ansprechen, die sich für Mathematik interessieren.

Es wird deshalb auf einfache und elementar dargestellte Sachverhalte aus der ebenen und räumlichen Geometrie zurückgegriffen und hauptsächlich eine konstruktiv-synthetische Darstellung benutzt. Auf solche Mittel wie die der analytischen Geometrie wird bewusst so gut wie ganz verzichtet.

Bevor mit dem eigentlichen Thema begonnen wird, findet der Leser zunächst einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie nebst einigen Anmerkungen zu Abbildungen und Gruppen als Grundlage und zur Verständigung in einem vorbereitenden Abschnitt. Es genügt, diesen Abschnitt zunächst nur flüchtig zur Kenntnis zu nehmen; ungeläufige Begriffe und Bezeichnungen können nötigenfalls später (mit Hilfe des Verzeichnisses "Bezeichnungen und Symbole") nachgeschlagen werden.

Der Bewegungsbegriff erscheint als Idealisierung von Sachverhalten aus der objektiven Realität, aus der uns umgebenden materiellen Welt, die zu seiner Definition benutzten Eigenschaften entsprechen einfachen Erfahrungen. Die gegenständlichen Betrachtungen sollen nicht nur diesen Aspekt unterstreichen, sondern wir möchten mit ihnen dem Leser ein Hilfsmittel in die Hand geben, um Bewegungen und Bewegungseigenschaften zu erkennen, zu verstehen und um auch selbst etwas zu entdecken, selbst tätig zu werden.

Die Bewegungen sind hier eineindeutige Abbildungen der Ebene bzw. des Raumes auf sich, die neben gewissen anordnungsgeometrischen Eigenschaften vor allem den Abstand und damit weitere metrische Größen wie die Größe eines Winkels und Relationen wie das Senkrechtsein unverändert lassen.

Spezielle ebene Bewegungen wie Geradenspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Punktspiegelungen werden durch zusätzliche Forderungen ausgezeichnet, welche wiederum an Hand realer Sachverhalte motiviert sind.

Besonderer Wert wird auf Eigenschaften gelegt, die konstruktiv nutzbar sind. Außerdem wird frühzeitig jeweils Anschluss an solche Beschreibungen spezieller ebener Bewegungen hergestellt, wie sie vom Schulunterricht her als Begriffserklärung bekannt sind.

---

Der innere Aufbau der Teile I und II über die ebenen Bewegungen orientiert sich an der Möglichkeit, diese Bewegungen als Produkte von Geradenspiegelungen darzustellen. Rein theoretische Gesichtspunkte bleiben hier aber bewusst im Hintergrund.

Der Hauptteil der Darlegungen besteht vielmehr aus Aufgaben und Problemstellungen. Einige Lösungen werden vorgeführt, um den Leser mit den Möglichkeiten vertraut zu machen und um ihm Anregungen zu geben. Vor allem möchten wir zu aktiver Mitarbeit auffordern. In die Aufgaben sind Sachverhalte aus Natur, Technik und Kunst einbezogen.

Die Behandlung der Bewegungen im Raum unterliegt entsprechenden Gesichtspunkten. Hinzu kommt die Möglichkeit, das räumliche Vor- und Darstellungsvermögen zu schulen und Kenntnisse über elementare raumgeometrische Sachverhalte zu erweitern und zu vertiefen.

Dabei helfen vergleichende Betrachtungen zu den ebenen Sachverhalten in erheblichem Maße, räumliche Bewegungen zu erfassen, sie systematisch und übersichtlich zu untersuchen, weitere Aussagen zu finden und Aufgabenstellungen zu lösen. Analogiebetrachtungen werden als Mittel und Methode genutzt.

Ein kurzer abschließender Teil soll einige Einblicke zur Stellung und der Rolle der Bewegungen in der Geometrie vermitteln; dies sind überwiegend theoretische Aspekte.

Bewegungen in der Ebene - insbesondere Verschiebungen, Drehungen und Geradenspiegelungen - werden im Geometrieunterricht der Oberschulen behandelt. Doch die dabei gelegten Potenzen werden nicht genügend genutzt.

Man kehrt oft schnell zu den "guten alten" Kongruenzbetrachtungen zurück. Die Vorteile, die sich mit Hilfe der Bewegungen als Mittel und Methode bieten, bleiben vielfach verschenkt. -

Zur Allgemeinbildung eines Menschen gehören einige grundlegende Kenntnisse über räumliche Sachverhalte und das Vermögen, sich diese vorzustellen und sie darzustellen, räumliche Bewegungen mit eingeschlossen. Diese Forderung erwächst unmittelbar aus der Natur und dem Wesen des Menschen.

Das Bändchen möchte den Leser mit den ebenen und räumlichen Bewegungen vertraut machen. Der Kenner wird sicherlich manches vermissen, was noch zum Thema gesagt werden könnte. Der Umfang gebot, auf einiges nur aufmerksam zu machen und manches wegzulassen. So sind im Abschnitt 16 nur einige Seitenblicke auf die Kristallographie und die Kinematik möglich gewesen.

Wir möchten auf diese interessanten Themen aufmerksam machen und zu weitergehender Beschäftigung mit ihnen anregen. Einige Literaturhinweise findet der interessierte Leser am Schluss des Bändchens.

Bei den verwendeten Aufgaben konnte vielfach die Urheberschaft nicht geklärt werden, so dass nur bei den Aufgaben aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (und der Internationalen Mathematikolympiade) ein Quellenhinweis erfolgte.

Wir hoffen, dass das vorliegende Material, insbesondere die umfangreichen Aufgaben-

---

stellungen, vielfältig genutzt werden können. Zahlreiche Abbildungen möchten dem Leser dabei helfen.

In die inhaltliche Gestaltung des Bändchens sind eine Reihe von Erfahrungen aus der Geometrieausbildung eingegangen, die in der Pädagogischen Hochschule von Prof. Klotzek geleitet wird.

Herr Prof. Argunov (Pädagogisches Institut in Smolensk) ermöglichte und unterstützte den Entwurf erster größerer Teile des Manuskripts während meines Studienaufenthaltes, wofür ich ihm zu Dank verpflichtet bin.

Für die freundlichen und vielfältigen Hinweise danke ich den Herren Prof. Böhm und Prof. Geise. Mein Dank gilt außerdem dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit sowie dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam, im Frühjahr 1983

Erhard Quaisser

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>Einführung - Einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie sowie über Abbildungen und Gruppen</b>	<b>6</b>
<b>I. Ebene Bewegungen</b>	<b>13</b>
1 Was ist eine ebene Bewegung?	13
2 Spiegelungen an Geraden	17
3 Drehungen	20
4 Verschiebungen	27
5 Punktspiegelungen	30
6 Schubspiegelungen	35
<b>II. Produkte und Gruppen ebener Bewegungen</b>	<b>39</b>
7 Dreispiegelungssätze	39
8 Eine Übersicht über ebene Bewegungen; Produkte von Bewegungen	43
9 Gruppen und Untergruppen ebener Bewegungen	48
10 Erzeugte Bewegungsgruppen und Figuren	50
<b>III. Räumliche Bewegungen</b>	<b>59</b>
11 Spiegelungen an Ebenen	59
12 Räumliche Bewegungen und Ebenenspiegelungen	62
13 Drehungen um eine Gerade und Verschiebungen	65
14 Schub-, Dreh- und Punktspiegelungen	72
15 Schraubungen	79
16 Produkte und Gruppen räumlicher Bewegungen	80
<b>IV. Anhang</b>	<b>91</b>
17 Einiges zur Rolle und Stellung der Bewegungen in der Geometrie	91
18 Abbildungsgruppen als Ordnungsprinzip in der Geometrie	92
<b>V. Lösungsanmerkungen</b>	<b>94</b>
<b>Literatur</b>	<b>97</b>

## Einführung - Einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie sowie über Abbildungen und Gruppen

Bevor wir uns dem eigentlichen Gegenstand dieses Büchleins, den Bewegungen, zuwenden, scheint es angebracht, einige grundlegende Sachverhalte aus der ebenen und räumlichen Geometrie bereitzustellen und sich über diesbezügliche Bezeichnungen zu verständigen.

Die Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade und Ebene sind durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden. Im Vergleich zu anderen mathematischen Wissenschaften ist in der Geometrie der ursprüngliche Charakter als Erfahrungswissenschaft noch vielfach deutlich sichtbar. Es ist oft leicht, geeignete Dinge aus unserer Umgebung zu finden, die wiederum der Veranschaulichung geometrischer Sachverhalte dienen.

So können wir ein Blatt Papier oder die Tischplatte zur Veranschaulichung einer Ebene nutzen, und die uns in einem Zimmer umgebenden Wände können uns zusammen mit dem Fußboden und der Decke den Schnitt von Ebenen demonstrieren.

Wir bezeichnen Punkte mit  $A, B, \dots, P, \dots$ , Geraden mit  $a, b, \dots, g, \dots$  und Ebenen mit  $\varepsilon, \eta, \dots$  und fassen Geraden und Ebenen als Punktmenge auf.

Zu zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es genau eine Gerade  $g$ , die diese Punkte enthält ( $A, B \in g$ ); diese Gerade wird Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$  genannt und mit  $g_{AB}$  bezeichnet.

Es gibt folgende Lagebeziehungen zwischen Geraden  $g$  und  $h$  (und nur diese):

- a)  $g$  und  $h$  haben alle Punkte gemeinsam ( $g = h$ );
- b)  $g$  und  $h$  haben genau einen Punkt  $P$  gemeinsam ( $g \cap h = \{P\}$ ), d.h., sie schneiden sich;
- c)  $g$  und  $h$  haben keinen Punkt gemeinsam ( $g \cap h = \emptyset$ ), und es gibt eine Ebene, in der sie beide enthalten sind;
- d)  $g$  und  $h$  haben keinen Punkt gemeinsam, und sie sind in keiner gemeinsamen Ebene enthalten; in diesem Fall werden  $g$  und  $h$  zueinander windschiefe Geraden genannt.

Gilt der Fall a) oder c), so heißt die Gerade  $g$  parallel zu der Geraden  $h$ , und man schreibt  $g \parallel h$ . Die Parallelität zwischen Geraden ist eine Äquivalenzrelation, d.h., sie ist reflexiv (für alle Geraden  $a$  gilt  $a \parallel a$ ), symmetrisch (aus  $a \parallel b$  folgt  $b \parallel a$ ) und transitiv (aus  $a \parallel b$  und  $b \parallel c$  folgt  $a \parallel c$ ).

Unter der Richtung einer Geraden  $g$  wird die Menge aller zu  $g$  parallelen Geraden verstanden. (Die Richtungen sind demnach die Äquivalenzklassen bezüglich der Parallelitätsrelation.)

Zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $P$  gibt es genau eine zu  $g$  parallele Gerade, die  $P$  enthält.

Beschränkt man sich auf die Punkte und Geraden einer Ebene, so entfällt die Lagebe-

ziehung (1).

Eine Gerade  $g$  heißt parallel zu einer Ebene  $\varepsilon$  (und man setzt  $g \parallel \varepsilon$ ) genau dann, wenn  $g \subset \varepsilon$  oder  $g \cap \varepsilon = \emptyset$  ist.

Im Fall  $g \not\parallel \varepsilon$  haben die Gerade  $g$  und die Ebene  $\varepsilon$  genau einen Punkt gemeinsam; man nennt ihn den Schnittpunkt von  $g$  und  $\varepsilon$ .

Eine Ebene  $\varepsilon$  heißt parallel zu einer Ebene  $\eta$  (kurz  $\varepsilon \parallel \eta$ ) genau dann, wenn  $\varepsilon = \eta$  oder  $\varepsilon \cap \eta = \emptyset$  gilt. Diese Parallelität ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation. Zu jeder Ebene  $\varepsilon$  und jedem Punkt  $P$  gibt es genau eine zu  $\varepsilon$  parallele Ebene, die  $P$  enthält. Im Fall  $\varepsilon \not\parallel \eta$  ist „ $\varepsilon \cap \eta$  eine Gerade, die Schnittgerade von  $\varepsilon$  und  $\eta$ “.

u drei Punkten  $A, B, C$ , die nicht in ein und derselben Geraden enthalten sind, gibt es genau eine Ebene, die die Punkte  $A, B, C$  enthält; diese Ebene heißt Verbindungsebene von  $A, B, C$  und wird mit  $\varepsilon_{ABC}$  bezeichnet. Demnach gibt es auch die Verbindungsebene  $\varepsilon_{Pg}$  falls  $P \notin g$  ist, und die Verbindungsebene  $e_{gh}$ , falls  $g, h$  sich schneiden oder falls  $g \parallel h$  und  $g \neq h$  gilt.

Punkte heißen kollinear bzw. komplanar genau dann, wenn sie in einer gemeinsamen Geraden bzw. in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Weitere grundlegende Lage-Aussagen findet der Leser u.a. in der für einen breiten Leserkreis verfassten Literatur [18].

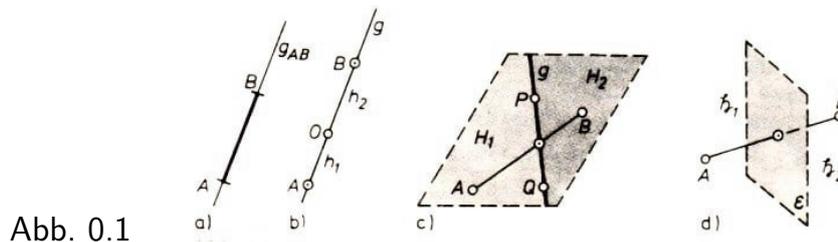


Abb. 0.1

Den Begriff Strecke setzen wir als bekannt voraus. Mit  $\overline{AB}$  bezeichnen wir die Strecke mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  ( $\neq A$ ); sie besteht aus  $A, B$  und allen Punkten, die zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Das Innere dieser Strecke (d.h.  $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$ ) wird mit  $AB$  bezeichnet (Abb. 0.1 a).

Wählt man auf einer Geraden  $g$  einen Punkt  $O$ , so wird durch  $O$  die Menge der restlichen Punkte von  $g$  (d.h.  $g \setminus \{O\}$ ) in genau zwei Teilmengen  $h_1$  und  $h_2$  zerlegt (Abb. 0.1b), die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

Zwei verschiedene Punkte  $A, B$  liegen in verschiedenen Teilmengen, wenn  $O \in AB$  ist, und sie liegen in der gleichen Teilmenge, wenn  $O \notin AB$  gilt. Diese Teilmengen heißen recht treffend Halbgeraden mit dem Scheitel  $O$ . Fügen wir diesen Punktmengen noch jeweils den Punkt  $O$  hinzu, dann liegen Strahlen vor.

Mit  $O(p)$  bezeichnen wir den Scheitel einer Halbgeraden  $p$ . Eine Halbgerade ist durch ihren Scheitel  $O$  und einen Punkt  $A$  bestimmt, den sie enthält; man bezeichnet sie mit  $OA^+$ . Für die zu  $OA^+$  entgegengesetzte Halbgerade wird  $OA^-$  geschrieben. (Es ist also  $OA^+ \cup OA^- = g_{OA} \setminus \{O\}$ .)

Analoge Sachverhalte bestehen in einer Ebene  $\varepsilon$  bezüglich einer Geraden  $g$  und im

Raum bezüglich einer Ebene  $\varepsilon$ :

Ist  $g \subset \varepsilon$ , so wird die Punktmenge  $\varepsilon \setminus g$  durch  $g$  in genau zwei Teilmengen  $H_1$  und  $H_2$  so zerlegt, dass  $A \in H_1$  und  $B \in H_2$ , genau dann gilt, wenn  $AB$  von der Geraden  $g$  geschnitten wird (Abb. 0.1 c).

Die Mengen  $H_1$  und  $H_2$  heißen Halbebenen von  $\varepsilon$  bezüglich  $g$ , und  $g$  heißt die Begrenzung von  $H_1, H_2$ . Mit  $PQA^+$  wird diejenige Halbebene der Ebene  $\varepsilon_{PQA}$  bezüglich  $g_{PQ}$  bezeichnet, die den Punkt  $A$  enthält;  $PQA^-$  bedeutet die ihr entgegengesetzte Halbebene. (Demnach ist  $PQA^+ \cup PQA^- = \varepsilon_{PQA} \setminus g_{PQ}$ )

Ist  $\varepsilon$  eine Ebene (im Raum) und  $\mathfrak{P}$  die Menge der Raumpunkte, so wird die Punktmenge  $\mathfrak{P} \setminus \varepsilon$  durch  $\varepsilon$  in genau zwei Teilmengen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  so zerlegt, dass  $A \in \mathfrak{H}_1$  und  $B \in \mathfrak{H}_2$ , genau dann gilt, wenn  $AB$  von  $\varepsilon$  geschnitten wird (Abb. 0.1d). Die Mengen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  heißen die Halbräume bezüglich  $\varepsilon$  und  $\varepsilon$  die Begrenzung von  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ .

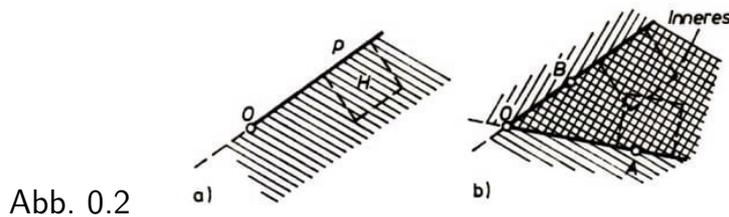


Abb. 0.2

Weniger bekannt, aber nicht weniger wichtig ist der Begriff der Fahne. Man versteht darunter die Vereinigung  $p \cup H$  einer Halbgeraden  $p$  und einer Halbebenen  $H$ , wenn  $p$  in der Begrenzung von  $H$  liegt (Abb. 0.2 a).

Sind  $p$  und  $q$  Halbgeraden mit gemeinsamem Scheitelpunkt, so nennt man die Menge  $\{p, q\}$  einen (elementaren) Winkel und bezeichnet ihn mit  $\sphericalangle p, q$ .

Die Halbgeraden  $p$  und  $q$  heißen die Schenkel von  $\sphericalangle p, q$ . Mit  $\sphericalangle AOB$  bezeichnet man den Winkel, der aus den Halbgeraden  $OA^+$  und  $OB^+$  besteht. Unter dem gerichteten Winkel  $\sphericalangle p, q$  wird das geordnete Paar  $(p, q)$  verstanden.

Das Innere des Winkels  $\sphericalangle AOB$ , bei dem  $OB^+ \neq OA^+, OA^-$  ist, lässt sich einfach durch die Halbebenen  $OAB^+$  und  $OBA^-$  charakterisieren: Es ist der Durchschnitt  $OAB^+ \cap OBA^-$  (Abb. 0.2 b).

In der Ebene unterscheidet man zwei Orientierungen. Die in Abb. 0.3 a vorliegenden Dreiecke  $ABC$  und  $PQR$  werden als gleichorientiert, dagegen die Dreiecke  $ABC$  und  $ACB$  als entgegengesetzt orientiert aufgefasst. Der Orientierungsbegriff lässt sich mit Hilfe von Fahnen erklären.

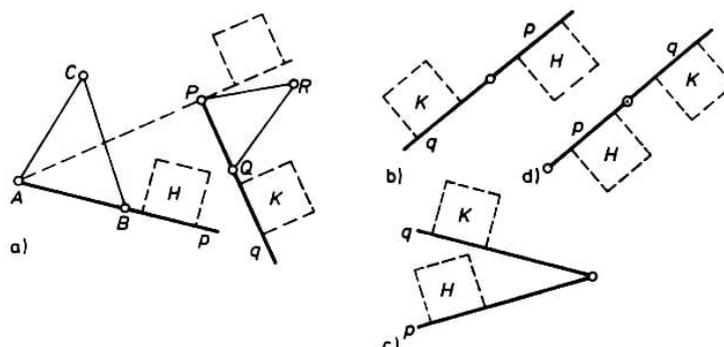


Abb. 0.3

Die Menge der Fahnen (in der Ebene) zerfällt in zwei Teilmengen von zueinander gleichorientierten Fahnen so, dass  $p \cup H$  und  $p \cup H^-$  entgegengesetzt orientiert sind und dass für die gleiche Orientierung der Fahnen  $p \cup H$  und  $q \cup K$  hinreichend ist, wenn  $(q = p^-$  und  $K = H^-)$  oder  $(O(p) = O(q)$  und  $q \neq p, p'$  und entweder  $p \subset K$  oder  $q \subset H)$  oder  $(q \subset p$  und  $K = H)$  gilt (siehe Abb. 0.3 b-d).

Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $PQR$  heißen nun gleichorientiert genau dann, wenn die Fahnen  $AB^+ \cup ABC^+$  und  $PQ^+ \cup PQR^+$  gleichorientiert sind.

In Abb. 0.3a ist nun  $AB^+ \cup ABC^+$  gleichorientiert mit  $AP^+ \cup APC^+$  (wegen  $AP^+ \subset ABC^+$  und  $AB^+ \not\subset APC^+$ ), diese Fahne ist gleichorientiert mit  $PA^- \cup PAR^-$  (wegen  $PA^- \subset PA^+$  und  $PAR^- = APC^*$ ), und diese ist schließlich gleichorientiert mit  $PQ^+ \cup PQR^+$  (wegen  $PQ^+ \not\subset PAR^-$  und  $PA^- \subset PQR^+$ ).

Auch im Raum unterscheidet man zwei Orientierungen. Als Grundlage können analog zu den Fahnen in der ebenen Geometrie solche geometrischen Figuren dienen, die jeweils aus einer Fahne und einem Halbraum bestehen, in dessen Begrenzung die Fahne liegt. Die Menge dieser Figuren zerfällt in zwei Teilmengen jeweils gleichorientierter Figuren.

Für die späteren Darlegungen genügt es hier, folgendes festzustellen: Ist  $\mathfrak{H}$  ein Halbraum und  $p \cup H$  eine Fahne, die in der Begrenzung von  $\mathfrak{H}$  liegt, so sind  $p \cup H \cup \mathfrak{H}$  und  $p \cup H \cup \mathfrak{H}^-$  entgegengesetzt orientiert (Abb. 0.4a), ebenso die Paare  $p \cup H \cup \mathfrak{H}$ ,  $p^- \cup H \cup \mathfrak{H}$  und  $p \cup H \cup \mathfrak{H}$ ,  $p \cup H^- \cup \mathfrak{H}$  (Abb.0.4b).

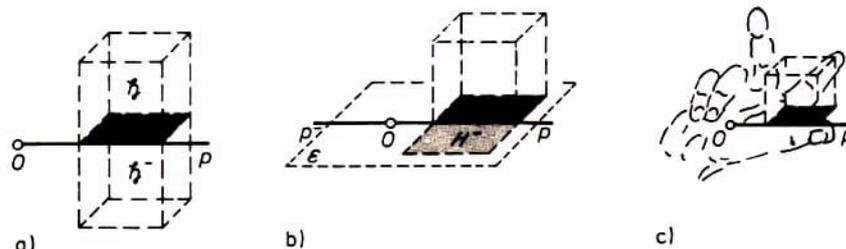
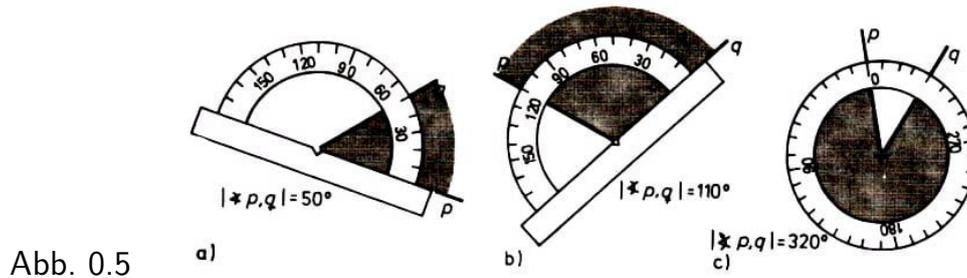


Abb. 0.4

Es gelingt vom Scheitel  $O$  der Halbgeraden  $p$  aus, den Daumen, den Zeigefinger und den Mittelfinger genau einer Hand so an die Figur  $p \cup H \cup \mathfrak{H}$  zu legen, dass der Daumen in  $p$ , der Zeigefinger in  $H$  und der Mittelfinger in  $\mathfrak{H}$  liegt (Abb. 0.40). Für  $p \cup H \cup \mathfrak{H}^-$  gelingt dies dann nur mit der anderen Hand.

Im folgenden bezeichnet  $|AB|$  die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  (bzw. deren Maßzahl bezüglich einer Längeneinheit). Zu je zwei Punkten  $A$  und  $B$  gibt es den Mittelpunkt  $M$  von  $A, B$  (kurz  $M_p(A, B)$ ). Er ist durch die Bedingungen  $|AM| = |MB|$  und  $M \in g_{AB}$  charakterisiert.

Die Größe eines Winkels  $\sphericalangle p, q$  (bzw. deren Maßzahl bezüglich einer Winkelgrößeneinheit) wird mit  $|\sphericalangle p, q|$  bezeichnet. Da es hier auf die Reihenfolge von  $p$  und  $q$  nicht ankommt, ergibt die Messung mit einem Winkelmesser auf der Grundlage der Einheit (Alt-) Grad Maßzahlen zwischen 0 und 180 (siehe Abb. 0.5a, b); insbesondere 0 für Winkel  $\sphericalangle p, p$ , 180 für gestreckte Winkel  $\sphericalangle p, p^-$ .

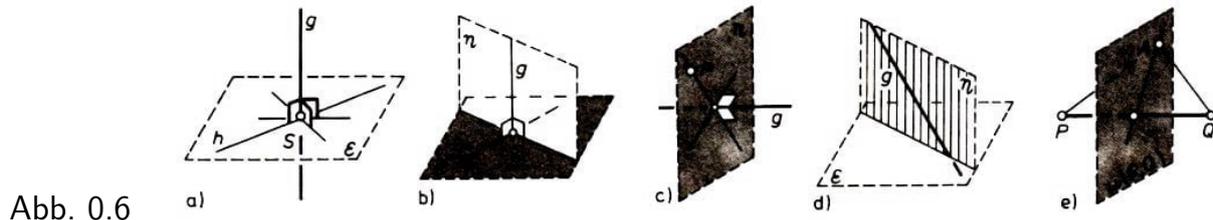


Bei der Messung gerichteter Winkel  $\angle p, q$  ist die Reihenfolge von  $p, q$  zu berücksichtigen; dies kann durch einen Maßzahlenbereich  $0 \leq \dots < 360$  bezüglich (Alt-) Grad bewerkstelligt werden (siehe Abb. 0.5c).

Bezüglich der Messung in Abb. 0.5c ergibt sich  $|\angle p, q| = 320^\circ$  und  $|\angle q, p| = 40^\circ$ . Dabei sind Winkelmesser mit einer gleichorientierten Skala zu verwenden.

(Das heißt: Werden zwei derartige Winkelmesser auf ein und dieselbe Ebene gelegt, so sind die Fahnen  $MO^+ \cup MOR^+$  und  $M'O' \cup M'O'R'^+$  gleichorientiert, wobei  $M, M'$  die Markierungspunkte für die Mittelpunkte (Scheitellage) und  $O, O'$  bzw.  $R, R'$  die Markierungspunkte für  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  auf den Skalen der Winkelmesser sind.)

Ist die Gerade  $g$  senkrecht zu der Geraden  $h$ , dann schreiben wir  $g \perp h$  und verstehen darunter im Raum Geraden, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und einen rechten Winkel einschließen. Für senkrecht bzw. Senkrechte werden auch die Bezeichnungen orthogonal bzw. Orthogonale oder Lot verwendet.



Eine Gerade  $g$  heißt senkrecht zu einer Ebene  $\varepsilon$  (kurz  $g \perp \varepsilon$ ) genau dann, wenn  $g$  die Ebene  $\varepsilon$  in einem Punkt  $S$  schneidet und zu jeder Gerade  $h$  senkrecht ist, die durch  $S$  geht und in  $\varepsilon$  liegt (Abb. 0.6a). Weiterhin heißt eine Ebene  $\eta$  senkrecht zu einer Ebene  $\varepsilon$  (kurz  $\eta \perp \varepsilon$ ) genau dann, wenn es in  $\eta$  eine Gerade  $g$  gibt, die zu  $\varepsilon$  senkrecht ist (Abb. 0.6b).

Es gelten folgende Lotaussagen:

- Liegen  $P$  und  $g$  in einer Ebene  $\varepsilon$ , so gibt es in  $\varepsilon$  genau eine Gerade  $h$  durch  $P$  mit  $g \perp h$ .
- Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Ebene  $\varepsilon$  gibt es genau eine Gerade  $g$  durch  $P$  mit  $g \perp \varepsilon$ .
- Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Gerade  $g$  gibt es genau eine Ebene  $\eta$  durch  $P$  mit  $g \perp \eta$  (Abb. 0.6c).
- Zu jeder Ebene  $\varepsilon$  und jeder Gerade  $g$ , die nicht senkrecht zu  $\varepsilon$  ist, gibt es genau eine Ebene  $\eta$ , die  $g$  enthält und für die  $\eta \perp \varepsilon$  ist (Abb. 0.6d).
- Ein Punkt  $Q$  der Ebene  $\varepsilon$  ist Fußpunkt des Lotes von einem Punkt  $P \notin \varepsilon$  auf  $\varepsilon$  genau dann, wenn  $|PR| > |PQ|$  für jeden Punkt  $R \neq Q$  der Ebene  $\varepsilon$  gilt.

Nach der Lotaussage c) gibt es zu je zwei Punkten  $P$  und  $Q \neq P$  genau eine Ebene  $\eta$  derart, dass  $g_{PQ} \perp \eta$  ist und der Mittelpunkt von  $(P, Q)$  auf  $\eta$  liegt. Diese Ebene heißt die Mittellotebene von  $P, Q$  und wird mit  $\mu(P, Q)$  bezeichnet. Man überlegt sich leicht, dass  $\mu(P, Q)$  alle und nur die Punkte  $A$  des Raumes enthält, für die  $|PA| = |QA|$  gilt (Abb. 0.6e).

Schließlich verständigen wir uns noch über einige wenige Begriffe und Eigenschaften im Zusammenhang mit Abbildungen und Gruppen.

Eine Abbildung  $\alpha$  aus einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  ordnet Elementen aus  $M$  (nicht notwendig allen) in eindeutiger Weise je ein Element in  $N$  zu.

Bezeichnet  $M \times N$  die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  von Elementen  $x \in M$  und  $y \in N$ , so ist also  $\alpha$  eine Teilmenge von  $M \times N$  mit der Eigenschaft, dass aus  $(x, y_1), (x, y_2) \in \alpha$  die Gleichheit von  $y_1$  und  $y_2$  folgt.

Es wird für uns später zweckmäßig sein, das Bild von  $x$  bei der Abbildung  $\alpha$  mit  $x^\alpha$  zu bezeichnen. Ist der Definitionsbereich von  $\alpha$  - kurz  $D(\alpha)$  - gleich der Menge  $M$  bzw. der Wertebereich von  $\alpha$  - kurz  $W(\alpha)$  - gleich der Menge  $N$ , so wird "von  $M$ " anstelle von "aus  $M$ " bzw. "auf  $N$ " anstelle von "in  $N$ " geschrieben.

Eine Abbildung  $\alpha$  heißt eineindeutig (oder eindeutig umkehrbar) genau dann, wenn aus der Gleichheit  $x_1^\alpha = x_2^\alpha$  der Bilder stets die Gleichheit  $x_1 = x_2$ , der Originale folgt.

Die Menge  $\alpha^{-1}$  aller geordneten Paare  $(y, x)$ , für die  $y = x^\alpha$  gilt, ist dann ebenfalls eine Abbildung; sie heißt die Umkehrabbildung von  $\alpha$ . Ist  $\alpha$  eine eineindeutige Abbildung von  $M$  auf  $N$ , so ist  $\alpha^{-1}$  eine eineindeutige Abbildung von  $N$  auf  $M$ . Eineindeutige Abbildungen von einer Menge  $M$  auf sich nennt man auch Transformationen von  $M$ .

Wenn  $\alpha$  eine Abbildung aus  $M$  in  $N$  und  $T$  eine Teilmenge des Definitionsbereichs  $D(\alpha)$  von  $\alpha$  ist, dann ist die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $T$ , d.h. die Menge der geordneten Paare  $(x, y) \in \alpha$  mit  $x \in T$  ebenfalls eine Abbildung aus  $M$  in  $N$  sie wird mit  $\alpha|_T$  bezeichnet. Die Eigenschaft der Eineindeutigkeit bleibt bei Einschränkung erhalten.

Es sei  $\alpha$  eine Abbildung aus  $M$  in  $N$  und  $\beta$  eine Abbildung aus  $N$  in  $P$ . Unter der Nacheinanderausführung (oder Produkt oder Verkettung)  $\alpha \circ \beta$  wollen wir hier entgegen der sonst üblichen Erklärung<sup>1</sup> die Menge derjenigen geordneten Paare  $(x, z)$  mit  $x \in D(\alpha)$  und  $z \in W(\beta)$  verstehen, für die es ein  $y \in N$  derart gibt, dass  $y = x^\alpha$  und  $z = y^\beta$  ist. Auf Grund unserer Erklärung ist  $x^{\alpha \circ \beta} = (x^\alpha)^\beta$ .

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  jeweils eineindeutig (und "von-auf"), dann ist  $\alpha \circ \beta$  ebenfalls eine eineindeutige Abbildung (von  $M$  auf  $P$ ), und es gilt  $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$ . Man beachte, dass dabei  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  (die Kommutativität) im allgemeinen nicht gilt.

Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  mit einer Operation  $\circ$  (d.h. mit einer Abbildung von  $G \times G$  in  $G$ ; für das Bild von  $(\alpha, \beta) \in G \times G$  schreibt man  $\alpha \circ \beta$ ), in der folgende Eigenschaften gelten:

---

<sup>1</sup>Siehe u.a. Asser: Grundbegriffe der Mathematik. Bd. 1 der Reihe "Mathematik für Lehrer", Berlin, 4. Aufl. 1980. Nach der dortigen Definition wäre für den obigen Sachverhalt  $\beta \circ \alpha$  zu setzen. Hier wird später unsere Erklärung von Vorteil sein.

G 1.  $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in G$  (assoziatives Gesetz).

G 2. Es gibt (genau) ein Element  $e \in G$  derart, dass  $\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$  für alle  $\alpha \in G$  gilt. (Man nennt  $e$  das Einselement der Gruppe.)

G 3. Zu jedem Element  $\alpha \in G$  gibt es (genau) ein Element  $\beta \in G$  derart, dass  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = e$  gilt. (Man nennt  $\beta$  das inverse Element von  $\alpha$  und bezeichnet es mit  $\alpha^{-1}$ .)

Eine Gruppe ist also eine Struktur  $(G, \circ)$ , bestehend aus einer Menge  $G$  und einer Operation  $\circ$  in  $G$ , die die Eigenschaften G 1 bis G 3 besitzt.

Mit den Eigenschaften G 2 und G 3 ist gleichwertig

G 4. Zu beliebigen Elementen  $\alpha, \beta \in G$  gibt es (eindeutig bestimmte) Elemente  $x, y \in G$  derart, dass  $\alpha \circ x = \beta$  und  $y \circ \alpha = \beta$  ist.

Die Gruppe heißt insbesondere kommutativ genau dann, wenn folgende Eigenschaft gilt:

G 5.  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  für alle  $\alpha, \beta \in G$ .

Für die Verkettung  $\circ$  von Abbildungen gilt stets die Assoziativität (Eigenschaft G 1).

Betrachten wir speziell die Menge  $G$  aller eineindeutigen Abbildungen von einer Menge  $M$  auf sich (d.h. aller Transformationen von  $M$ , so ist bezüglich der Verkettung  $\circ$  als Operation die identische Abbildung  $\iota$  der Menge  $M$  (d.h.  $\iota = \{(x, x) : x \in M\}$ ) diejenige Abbildung aus  $G$  mit der Eigenschaft G 2 (d.h.,  $\iota$  ist Einselement), und für die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1}$  einer Abbildung  $\alpha \in G$  gilt  $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \iota$  (d.h., zu jedem  $\alpha \in G$  existiert das inverse Element; Gruppenbedingung G 3).

Also gilt:

Die Transformationen von einer Menge  $M$  bilden eine Gruppe.

Eine Struktur  $(U, \circ')$  heißt Untergruppe einer Gruppe  $(G, \circ)$  genau dann, wenn  $U$  eine Teilmenge von  $G$ , die Operation  $\circ'$  die Einschränkung der Operation  $\circ$  auf  $U$  ist und wenn  $(U, \circ')$  selbst eine Gruppe darstellt.

Für jede Gruppe  $(G, \circ)$  sind offenbar  $(G, \circ)$  selbst und die nur aus dem Einselement  $e$  bestehende Gruppe Untergruppen, die sogenannten trivialen Untergruppen von  $(G, \circ)$ .

Für den Nachweis, dass eine Untergruppe vorliegt, ist folgendes Kriterium nützlich:

Eine Teilmenge  $U$  von  $G$  einer Gruppe  $(G, \circ)$  bildet (mit der auf  $U$  eingeschränkten Operation  $\circ$ ) eine (Unter-)Gruppe genau dann, wenn  $\alpha \circ \beta \in U$  und  $\alpha^{-1} \in U$  für alle Elemente  $\alpha, \beta \in U$  gilt.

## I. Ebene Bewegungen

### 1 Was ist eine ebene Bewegung?

Die Worte "bewegen" und "Bewegung" werden in unserer Sprache im Zusammenhang mit recht unterschiedlichen Sachverhalten verwendet:

So setzt sich eine Straßenbahn "in Bewegung", an einer jungen Dame gefallen die "anmutigen Bewegungen", nach längerem Stillsitzen im Unterricht möchten wir uns "Bewegung verschaffen", beim Angriff der heimischen Mannschaft auf das gegnerische Tor "kommt Bewegung" in die Zuschauer, wir beobachten eine "scheinbare Bewegung" der Sonne um die Erde, er muss "alle Hebel in Bewegung setzen"; außerdem kennen wir aus der Geschichte verschiedene "demokratische Bewegungen", wir sind "tief bewegt" von einem Ereignis, der Mann wollte "seine Bewegung nicht zeigen".

Handelt es sich um Gegenstände der uns umgebenden Umwelt, so ist damit gewöhnlich ihre Ortsveränderung gemeint. Andere Eigenschaften als die Ortslage, die etwa "während der Bewegung" (also im Laufe der Zeit) einer Veränderung unterworfen sein können, bleiben unberücksichtigt.

Der mathematische Begriff "Bewegung" entstand - wie viele grundlegende Begriffsbildungen der Geometrie - durch Idealisierung objektiver Sachverhalte, durch Abstraktion aus der objektiven Realität, und zwar mit Rücksicht auf die Anwendungsfähigkeit in verschiedenen Versionen.

So ist in der Kinematik ein Bewegungsbegriff grundlegend, der die Abhängigkeit des Ablaufs einer Bewegung von der Zeit berücksichtigt. Der Bewegungsbegriff der (klassischen) euklidischen Geometrie abstrahiert dagegen von der Dauer und der Art der Bewegung und berücksichtigt nur die Anfangs- und Endlage von Punkten; er ist eine Punktabbildung.

Mit den folgenden gegenständlichen Betrachtungen möchten wir dem Leser ein Hilfsmittel in die Hand geben, um Bewegungen und diesbezügliche Eigenschaften zu erkennen, zu verstehen und um damit auch selbständig tätig zu werden. Wir benötigen dazu nur ein Zeichenblatt und Transparentpapier (ohne Qualitätsansprüche).

Wir legen auf unsere Zeichenebene ein Blatt Transparentpapier. Beide denken wir uns unbegrenzt, also in der Idealisierung "Ebene". Jeden Punkt  $P$  der (Zeichen-) Ebene - im weiteren kurz  $\varepsilon$  - können wir auf dem Transparentpapier kopieren;  $P_t$  sei die Kopie von  $P$ .

Nun bewegen wir (mechanisch) das Transparentpapier; wir lassen dabei noch zu, dass man das Transparentpapier wendet. Danach wird wieder kopiert. Diesmal von dem Transparentpapier auf die Ebene  $\varepsilon$ . Aus  $P_t$  entsteht dabei ein Punkt  $P'$  auf  $\varepsilon$ .

Wir interessieren uns nur für die Anfangs- und Endlage der Punkte, die auf Grund einer einmaligen Manipulation mit dem Transparentpapier besteht. Wie diese Abbildung konkret ausgeführt wird, ob dabei zwischendurch das Transparentpapier beiseite gelegt wird oder zwischendurch einer anderen Beschäftigung nachgegangen wird, wird völlig ignoriert.

Wir beziehen auch den Fall mit ein, dass die ursprüngliche Lage des Transparentpapiers nicht verändert wurde. Der Punkt  $P'$  heißt das Bild von  $P$  (Abb. 1.1a-c).

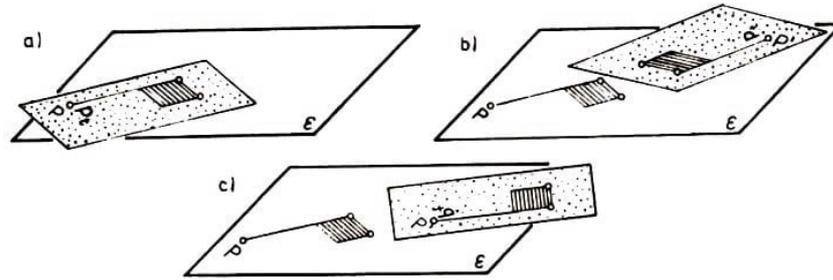


Abb. 1.1

Folgende Eigenschaften werden dabei ersichtlich:

B 1. Jedem Punkt  $P$  der Ebene  $\varepsilon$  wird genau ein Punkt  $P'$  der Ebene zugeordnet; umgekehrt ist jeder Punkt das Bild genau eines Punktes der Ebene, d.h., es besteht eine eindeutige Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich.

B 2. Das Bild einer Geraden ist eine Gerade (Geradentreue).

B 3. Das Bild einer Halbgeraden  $PQ^+$  ist die Halbgerade  $P'Q'^+$ ; das Bild einer Halbebene  $PQR^+$  ist die Halbebene  $P'Q'R'^+$  (Anordnungstreue).

B 4. Es ist stets  $|PQ| = |P'Q'|$  (Invarianz des Abstandes).

Einige weitere Eigenschaften können nun bereits als Folgerungen der bisher genannten bewiesen werden. So folgt aus B 3:

B 3'. Das Bild der Strecke  $PQ$  ist die Strecke  $P'Q'$ ; das Bild einer Fahne ist eine Fahne.

Beweis. Für  $P \neq Q$  ist  $PQ = PQ^+ \cap QP^+$  und damit

$$(PQ)' = (PQ^+)' \cap (QP^+)' = P'Q'^+ \cap Q'P'^+ = P'Q'$$

Die zweite Behauptung ergibt sich in entsprechender Weise:

$$(AB^+ \cup ABC^+)' = A'B'^+ \cup A'B'C'^+$$

Beim Bewegen des Transparentpapiers werden weitere Eigenschaften einsichtig; eine möchten wir noch vorstellen.

Wir wählen dazu zwei Fahnen  $p \cup H$  und  $g \cup K$  in  $\varepsilon$ . Dann gelingt es durch Bewegen des Transparentpapiers, die erste Fahne in die zweite überzuführen, d.h.,  $O(p)$  geht in  $O(q)$ ,  $p$  in  $q$  und  $H$  in  $K$  über.

Wir empfehlen, diese Schritte unter Zugrundelegung eines Dreiecks  $ABC$  praktisch auszuführen. Dabei sei  $p \cup H = AB^+ \cup ABC^+$  und  $g \cup K$  gleich der Fahne  $BC^+ \cup BCA^+$  bzw.  $AC^+ \cup ACB^+$  (Abb. 1.2). Im zweiten Fall gelingt das nur durch Wenden des Transparentpapiers.

Auf Grund dieser Erfahrungen mit dem Transparentpapier erklären wir einen abstrakten Bewegungsbegriff in der ebenen Geometrie.

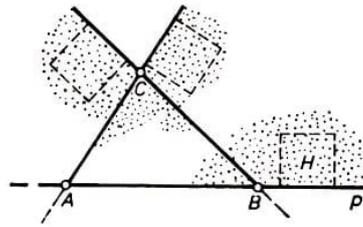


Abb. 1.2

Definition.  $\alpha$  ist eine Bewegung der Ebene  $\varepsilon$  genau dann, wenn  $\alpha$  eine eindeutige Abbildung von  $\varepsilon$  auf sich ist, bei der Geradentreue (B 2), Anordnungstreue (B 3) und Invarianz des Abstandes (B 4) besteht.

Andere Möglichkeiten der Definition ergeben sich aus späteren Erörterungen. Nach der obigen Definition ist die identische Abbildung  $\iota$  der Ebene eine Bewegung.

Im folgenden bezeichnet  $P^\alpha$  bzw.  $\mathfrak{F}^\alpha$  das Bild des Punktes  $P$  bzw. der beliebigen Punktmenge (Figur)  $\mathfrak{F}$  bei der Bewegung  $\alpha$ .

Wir halten zunächst fest, dass auf Grund der bisherigen Überlegungen für jede Bewegung die Eigenschaft B 3' gilt. Weiterhin kann der Leser anhand der Definition leicht folgende Eigenschaft zeigen:

B 5. Sind  $\alpha, \beta$  Bewegungen, dann sind die Nacheinanderausführung  $\alpha \circ \beta$  und die inverse Abbildung  $\alpha^{-1}$  ebenfalls Bewegungen.

(1.1) Aufgabe. Für jede Bewegung  $\alpha$  gilt

- a) Sind  $p, q$  Halbgeraden und  $p^\alpha = q$ , so ist  $(p^-)^\alpha = q^-$ .
- b) Sind  $H, K$  Halbebenen und  $H^\alpha = K$ , so ist  $(H^-)^\alpha = K^-$ .

Mit Hilfe des Dreieckskongruenzsatzes sss kann aus B 4 sofort folgende Eigenschaft gefolgert werden:

B 6. Bei einer Bewegung gehen Winkel in Winkel gleicher Größe über (Invarianz der Winkelgröße).

Unsere bisherigen Erfahrungen mit Hilfe des Transparentpapiers rechtfertigen, folgendes zunächst noch vorauszusetzen:

B 7. Zu je zwei Fahnen  $p \cup H$  und  $q \cup K$  gibt es eine Bewegung  $\alpha$  mit  $p^\alpha = q$  und  $H^\alpha = K$  (Beweglichkeit).

Einen Beweis von B 7, der auf der Grundlage elementarer Eigenschaften der ebenen Geometrie (siehe die Einführung) und bisheriger Bewegungseigenschaften erbracht werden kann, vertagen wir auf später, um den Anfang nicht mit theoretischen Erörterungen zu überlasten.

Dagegen wollen wir folgende Eindeutigkeitsaussage jetzt schon ableiten:

B 8. Haben Bewegungen  $\alpha, \beta$  bezüglich einer Fahne  $p \cup H$  das gleiche Bild, d.h.  $p^\alpha = p^\beta$  und  $H^\alpha = H^\beta$ , so gilt  $\alpha = \beta$ , d.h., für alle Punkte  $P$  ist  $P^\alpha = P^\beta$  (Starrheit).

Der folgende Beweis kann beim Lesen zunächst auch übergangen werden; diese Aussage erscheint auf Grund unserer bisherigen Erfahrungen recht einsichtig.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Fahne  $p \cup H$  mit  $p^\alpha = p^\beta$  und  $H^\alpha = H^\beta$ . Es sei  $O$  der Scheitelpunkt von  $p$  und  $f$  die Gerade, die  $p$  enthält. Wegen  $(p^\alpha)^{\beta^{-1}} = p$  und  $((p^-)^\alpha)^{\beta^{-1}} = p^-$  gilt  $(O^\alpha)^{\beta^{-1}} = O$  und weiter  $(F^\alpha)^{\beta^{-1}} = F$  für jeden Punkt  $F$  ( $\neq O$ ) auf  $f$ , da noch  $|O(F^\alpha)^{\beta^{-1}}| = |OF|$  und die Längenantragung von  $O$  aus auf  $p$  bzw.  $p^-$  eindeutig ist.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $P \neq f$  der Ebene und fällen das Lot  $h$  von  $P$  auf die Gerade  $f$ ; der Fußpunkt des Lotes sei  $Q$  (Abb. 1.3). Dann ist wegen

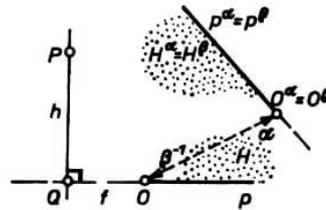


Abb. 1.3

$(Q^\alpha)^{\beta^{-1}} = Q$  und der Invarianz der rechten Winkel (Eigenschaft B 6) noch  $(h^\alpha)^{\beta^{-1}} = h$ . Das Bild  $(P^\alpha)^{\beta^{-1}}$  von  $P$  liegt also auf  $h$  und außerdem in  $H$  wegen  $(H^\alpha)^{\beta^{-1}} = H$ . Die Längeninvarianz erzwingt nun  $(P^\alpha)^{\beta^{-1}} = P$ . Also ist  $\alpha = \beta$ .

(1.2) Aufgabe. Es sei  $\sphericalangle p, q$  ein rechter Winkel und  $H$  die Halbebene, die an  $p$  liegt und  $q$  enthält; ferner sei  $K$  die Halbebene, die an  $q$  liegt und  $p$  enthält (Abb. 1.4).

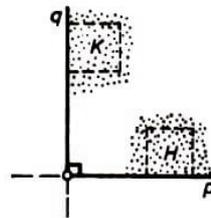


Abb. 1.4

Weiterhin sei  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$  die Bewegung, die die Fahne  $p \cup H$  in die Fahne  $p'' \cup H''$  bzw.  $q \cup K$  bzw.  $q \cup K^-$  überführt.

Welches Bild hat die Fahne  $q \cup K$  bei  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$ . Man gewinne mit Hilfe des Transparentpapiers jeweils eine Vermutung und beweise diese.

(1.3) Aufgabe. Man zeige unter den Voraussetzungen der Aufgabe (1.2) und den dortigen Ergebnissen, dass gilt

- a)  $\beta \circ \beta = \iota$  (identische Abbildung);
- b)  $\gamma \circ \gamma = \alpha$ ;
- c)  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ ;
- d)  $\beta \circ \gamma \neq \gamma \circ \beta$ .

(Hinweis: Auch hier ist eine Überprüfung mittels Transparentpapier angebracht. Zum Beweis steht B 8 zur Verfügung!)

Das Ergebnis (1) der Aufgabe (1.3) macht deutlich, dass die Reihenfolge bei der Nacheinanderausführung von Bewegungen im allgemeinen nicht vertauschbar ist.

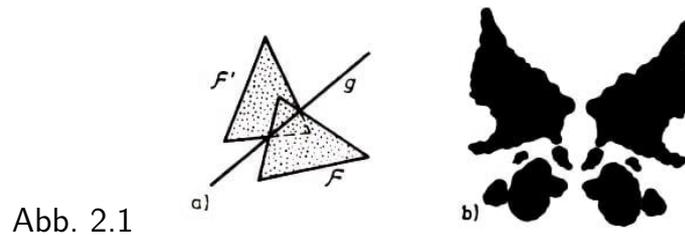
(1.4) Aufgabe. Man zeige: Haben Bewegungen  $\alpha, \beta$  bezüglich der Ecken  $A, B, C$  einen Dreiecks die gleichen Bilder, so gilt  $\alpha = \beta$ .

Diese Aussage ist eine Verschärfung von B 8; die Behauptung  $\alpha = \beta$  wird in (1.4)

aus schwächeren Voraussetzungen gefolgt. Zum Beweis steht B 8 zur Verfügung. Es genügt also,  $(AB^+)^{\alpha} = (AB^+)^{\beta}$  und  $(ABC^+)^{\alpha} = (ABC^+)^{\beta}$  zu zeigen. Wir wenden uns nun speziellen Bewegungen zu.

## 2 Spiegelungen an Geraden

Wir markieren in der Ebene  $\varepsilon$  eine Gerade  $g$ , kopieren  $g$  auf das Transparentpapier (dazu genügt es, zwei verschiedene Punkte von  $g$  zu kopieren!) und bewegen das Transparentpapier auf folgende Weise: Es wird gewendet und wieder so auf  $\varepsilon$  gelegt, dass alle Punkte von  $g$  festbleiben.



Dabei werden die Halbebenen bezüglich  $g$  vertauscht. Gibt man sich in  $\varepsilon$  irgendeine Figur  $\mathfrak{F}$  vor, so ergeben  $\mathfrak{F}$  und ihr Bild  $\mathfrak{F}'$  zusammen eine symmetrische Figur bezüglich  $g$  (Abb. 2.1 a). Den gleichen Effekt erzielen Kinder, wenn sie ein Blatt Papier mit Farbklecken versehen und es anschließend falten (Abb. 2.1 b); und sie nutzen es beim Herstellen von Scherenschnitten mit Symmetrieachsen.

Wir erklären

Definition.  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Geraden  $g$  genau dann, wenn  $\sigma$  eine nicht identische Bewegung ist und  $P^{\sigma} = P$  für alle Punkte  $P \in g$  gilt.

Die Bezeichnung "Spiegelung" scheint zunächst ungerechtfertigt. Die russische Bezeichnung "symmetrisch bezüglich  $g$ " trifft das bisher Vorgestellte besser. Durch die nachfolgend noch aufgeführten Eigenschaften wird sich eine Rechtfertigung der Benennung ergeben.

(2.1) Aufgabe. Ist die Bewegung  $\beta$  in der Aufgabe (1.2) eine Geradenspiegelung? (Man prüfe das zunächst mittels Transparentpapier.)

Ist  $\sigma$  eine Spiegelung an  $g$  und ist  $H$  eine Halbebene bezüglich  $g$ , so gilt offenbar  $p^{\sigma} = p$  für jede Halbgerade  $p$  aus  $g$  und außerdem  $H^{\sigma} = H^{-}$  (und damit  $(H^{-})^{\sigma} = H$ ). Würde letzteres nämlich nicht gelten, so wäre  $H^{\sigma} = H$  und damit  $\sigma$  die identische Abbildung (Bewegung) nach B 8.

Nun ist leicht einsichtig, dass es an der Geraden  $g$  nicht mehr als eine Spiegelung geben kann; denn mit  $p^{\alpha} = p = p^{\sigma}$  und  $H^{\alpha} = H^{-} = H^{\sigma}$  ist  $\alpha = \sigma$  (nach B 8). Die Existenz einer Spiegelung an  $g$  ist hier zunächst durch B 7 gesichert. Damit haben wir

(2.2) Satz. An jeder Geraden  $g$  gibt es genau eine Spiegelung.

Wir bezeichnen sie im folgenden kurz mit  $\sigma_g$ . Für das Bild eines Punktes  $P$  bzw. einer

Punktmenge  $\mathfrak{F}$  bei der Spiegelung  $\sigma_g$  schreiben wir statt  $P^{\sigma_g}$  bzw.  $\mathfrak{F}^{\sigma_g}$  kürzer  $P^g$  bzw.  $\mathfrak{F}^g$ .

Unsere Überlegung ergibt mit  $(p \cup H)^\sigma = p \cup H^-$  außerdem

(2.3) Satz. Jede Geradenspiegelung  $\sigma$  vertauscht die beiden Orientierungen der Ebene.

Das Lot von einem beliebig gewählten Punkt  $P \in g$  auf die Gerade  $g$  geht bei der Spiegelung  $\sigma$  an  $g$  wegen der Invarianz der Winkelgrößen in sich über. Ist  $Q$  der Fußpunkt dieses Lotes, so muss nun das Bild  $P^\sigma$  von  $P$  - da die Halbebenen bezüglich  $g$  vertauscht werden - in der Halbgeraden  $QP^-$  liegen.

Außerdem gilt  $|PQ| = |QP^\sigma|$ . Damit haben wir eine einfache konstruktive Darstellung von  $P^\sigma$  (Abb. 2.2):

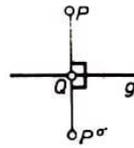


Abb. 2.2

(2.4) Satz. Ist  $\sigma$  die Spiegelung an  $g$ , dann ist  $g$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PP^\sigma}$  für alle Punkte  $P \in g$ .

(2.5) Folgerung. Für jede Geradenspiegelung  $\sigma$  gilt  $\sigma \circ \sigma = \iota$ .

(2.6) Aufgabe. Wenn bei einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig (OJM 31046).<sup>2</sup>

Eine Figur  $\mathfrak{F}$  heißt axialsymmetrisch genau dann, wenn es eine Gerade  $g$  derart gibt, dass  $\mathfrak{F}^g = \mathfrak{F}$  ist.

Wir kehren nochmals zu einer Betrachtung an unserer Zeichenebene  $\varepsilon$  zurück und stellen dazu längs der Geraden  $g$  senkrecht zu  $\varepsilon$  einen Spiegel  $\eta$  auf (Abb. 2.3).

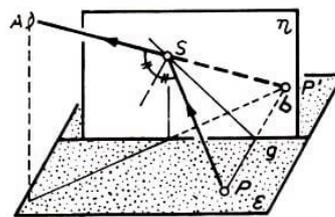


Abb. 2.3

Wir betrachten im Spiegel einen Punkt  $P \in g$  der Ebene  $\varepsilon$ . Nach den optischen Gesetzen liegt der vom Auge  $A$  wahrgenommene Punkt  $P'$  bezüglich des Originals  $P$  so, dass  $g_{PP'}$  senkrecht zur Spiegelebene  $\eta$  ist und  $\eta$  durch den Mittelpunkt von  $\overline{PP'}$  geht.

Wegen  $\eta \perp \varepsilon$  liegt  $P'$  in  $\varepsilon$ , und  $g$  ist die Mittelsenkrechte von  $\overline{PP'}$ . Im Zusammenhang mit dem Satz (2.4) haben wir damit eine Rechtfertigung für die Bezeichnung "Spiegelung".

<sup>2</sup>Die Abkürzung OJM steht hier und im folgenden für "Olympiaden Junger Mathematiker der DDR". Die anschließende Zahlenangabe bedeutet: 3. OJM, Startklasse 10, 4. Stufe (d.h. DDR-Stufe), 6. Aufgabe.

(2.7) Aufgabe. Es seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte, die auf einer Seite einer Geraden  $g$  liegen. Man konstruiere diejenigen Punkte  $C \in g$ , für die die Abstandssumme  $|AC| + |CB|$  minimal ist.

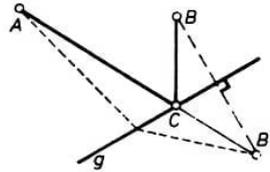


Abb. 2.4

Lösung (Abb. 2.4). Es sei  $C \in g$  eine Lösung. Bei der Spiegelung an  $g$  geht  $B$  in einen Punkt  $B'$  über. Da  $|CB| = |CB'|$  ist und  $|AC| + |CB|$  minimal ist, müssen  $A, C$  und  $B'$  auf einer Geraden liegen (Dreiecksungleichung!). Also ist für einen Lösungspunkt  $C$  notwendig, dass  $C$  der Schnitt von  $g_{AB'}$  und  $g$  ist. Dieser Schnittpunkt ist andererseits tatsächlich eine Lösung.

In ähnlicher Weise lässt sich die folgende Aufgabenstellung lösen.

(2.8) Aufgabe. Gegeben sind ein Winkel  $\sphericalangle p, q$  (mit  $q \neq p, p^-$ ) und Punkte  $A, B$  im Innern des Winkels. Man konstruiere Punkte  $P \in p$  und  $Q \in q$  so, dass  $|AP| + |PQ| + |QB|$  minimal ist. (Man prüfe sorgfältig, ob die Aufgabe immer lösbar ist.)

(2.9) Aufgabe. Es seien  $g$  und  $h$  zwei verschiedene parallele Geraden und  $A, B$  zwei Punkte, die im Streifen zwischen  $g$  und  $h$  liegen. Man konstruiere den Weg eines Lichtstrahls von  $A$  nach  $B$ , der je zweimal an  $g$  und  $h$  reflektiert wird.

(2.10) Aufgabe. Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $h$  sowie ein Kreis  $k$ . Man konstruiere ein Quadrat  $ABCD$  derart, dass  $A \in g$ ;  $B, D \in h$  und  $C \in k$  gilt.

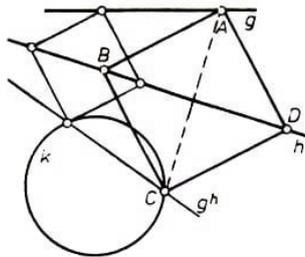


Abb. 2.5

Lösung (Abb. 2.5). Es sei  $ABCD$  eine Lösung. Dann geht bei der Spiegelung an der Geraden  $h$  der Punkt  $A$  in  $C$  über. Demnach ist  $C$  ein gemeinsamer Punkt von  $g^h$  (dem Bild von  $g$  bei  $\sigma_h$ ) und dem Kreis  $k$ . -

Die Aufgabe besitzt zwei, eine bzw. keine Lösung, wenn die Gerade  $g^h$  den Kreis schneidet bzw. berührt bzw. meidet und wenn außerdem der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  (falls er existiert) nicht in  $k$  enthalten ist. -

Für den Sonderfall, dass sich  $g$  und  $h$  auf  $k$  schneiden, ist die Lösung nun auch klar.

Auf diese Weise lässt sich eine ganze Klasse von Aufgaben lösen, wenn die gewünschte Konfiguration - wie hier ein Quadrat - Axialsymmetrie bezüglich vorgegebener Geraden aufweist. In der Aufgabe (2.10) könnte  $g$  etwa durch einen Kreis oder  $k$  durch ein  $n$ -Eck ausgetauscht werden.

Zur Begründung der Existenz einer Spiegelung an  $g$  hatten wir von der Eigenschaft B 7 Gebrauch gemacht. Diese Bewegungseigenschaft kann aber später selbst bewiesen werden, wobei entscheidend die Existenz von Geradenspiegelungen eingeht. Wir haben deshalb die Existenzaussage im Satz (2.2) ohne B 7 zu begründen. Wir begnügen uns dazu mit kurzen Ausführungen:

In der Ebene  $\varepsilon$  sei eine Abbildung  $\alpha$  konstruktiv wie folgt erklärt: Es sei  $P^\alpha = P$  für alle Punkte  $P \in g$ , und es sei für  $P \notin g$  derjenige Punkt das Bild  $P^\alpha$ , für den  $g$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PP^\alpha}$  ist. (Eine solche Festlegung ist durch den Satz (2.4) motiviert.)

Für diese Abbildung gilt offensichtlich B 1. Die Geradentreue (B 2) ergibt sich im wesentlichen mit Hilfe der Strahlensätze (Abb. 2.6).

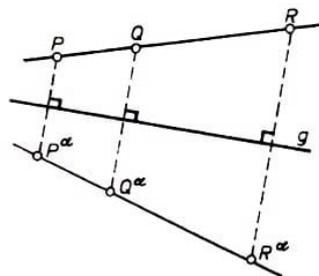


Abb. 2.6

Anhand von Abb. 2.6 wird auch deutlich, dass die Eigenschaft "Q liegt zwischen P und R" invariant bleibt.

(Wir können  $P^\alpha$ ,  $Q^\alpha$  und  $R^\alpha$  als Bilder von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  bei einer Parallelprojektion deuten.) Damit kann im einzelnen B 3 begründet werden. Schließlich folgt  $|PQ| = |P^\alpha Q^\alpha|$  aus der Eigenschaft, dass  $PQQ^\alpha P^\alpha$  ein gleichschenkliges Trapez (ein Giebel) ist, wenn von speziellen Lagen abgesehen wird.

### 3 Drehungen

Wir wählen in der Zeichenebene  $\varepsilon$  einen Punkt  $P$  und heften mit einer Stecknadel das Transparentpapier an dieser Stelle an  $\varepsilon$ . Die Bewegungsmöglichkeiten des Transparentpapiers sind damit eingeschränkt; wir können es nur um die Stecknadel drehen, um eine Abbildung von  $\varepsilon$  auf  $\varepsilon$  zu stiften.

Wir erklären nun:

Definition.  $\rho$  ist eine Drehung (oder Rotation) um den Punkt  $P$  genau dann, wenn  $\rho$  eine Bewegung ist und wenn entweder  $\rho = \iota$  (identische Bewegung) oder  $P$  der einzige Fixpunkt von  $\rho$  ist.

Mit  $\rho$  ist offenbar auch die Umkehrabbildung  $\rho^{-1}$  eine Drehung um  $P$ .

(3.1) Aufgabe. Sind die Bewegungen  $\alpha$  und  $\gamma$  in der Aufgabe (1.2) Drehungen? (Man prüfe dies zunächst mittels Transparentpapier.)

Bei einer Drehung  $\rho$  um  $P$  liegt das Bild  $Q^\rho$  eines Punktes  $Q \neq P$  auf dem Kreis um  $P$  durch  $Q$ , denn es gilt  $|PQ^\rho| = |PQ|$ . Das Drehzentrum  $P$  liegt demnach auf der

Mittelsenkrechten von  $\overline{QQ^\rho}$ , falls  $Q^\rho \neq Q$  ist.

(3.2) Aufgabe. Eine rechteckige Platte  $ABCD$  soll drehbar so gelagert werden, dass - ausgehend von  $ABCD$  - die in der Abb. 3.1 vorgegebene Lage  $A'B'C'D'$  eingenommen werden kann. Wo muss das Drehzentrum liegen?

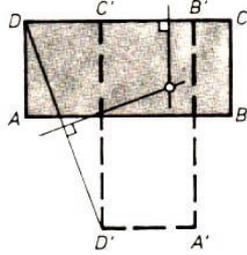


Abb. 3.1

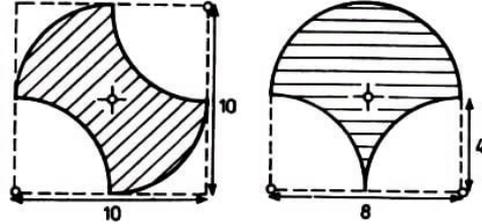


Abb. 3.2,3.3

Lösung. Das Drehzentrum muss auf den Mittelsenkrechten von  $\overline{CC'}$  und  $\overline{DD'}$  liegen und kann damit konstruktiv bestimmt werden (Abb. 3.1). |

(3.3) Sofort-Aufgabe.<sup>3</sup> Man bestimme die Maßzahl des Inhalte der schraffierten Fläche a) in Abb. 3.2; b) in Abb. 3.3.

(3.4) Aufgabe. Gegeben seien Geraden  $g$  und  $h$  durch einen Punkt  $P$  und eine Fahne  $p \cup H$  mit  $O(p) = P$  und  $p \subset g$ , wobei  $g = h$  nicht ausgeschlossen ist. Durch die Nacheinanderausführung  $\sigma_g \circ \sigma_h$  entsteht aus der Fahne  $p \cup H$  eine Fahne  $q \cup K$  (Abb. 3.4a). Man untersuche, ob durch eine Drehung oder eine Geradenspiegelung die Fahne  $p \cup H$  in  $q \cup K$  überführt werden kann. Die gleiche Frage ist bezüglich  $p \cup H$  und  $q \cup K^-$  zu klären.

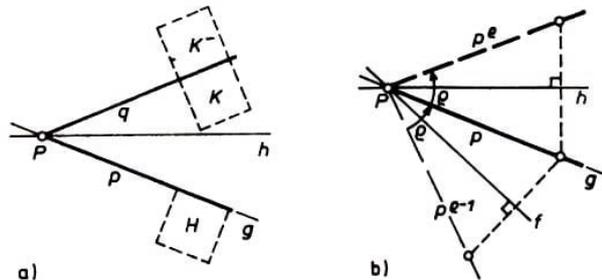


Abb. 3.4 a)

Lösung (Abb. 3.4a). Für den Fall  $g = h$  ist  $\sigma_g \circ \sigma_h = \iota$ , und damit entsteht  $qu \cup K$  aus  $p \cup H$  durch die Drehung  $\iota$  und  $q \cup K^-$  aus  $p \cup H$  durch die Spiegelung  $\sigma_h$ .

Es sei jetzt  $g \neq h$ . Angenommen,  $\sigma_g \circ \sigma_h$  hat einen weiteren Fixpunkt  $F$  ( $\neq P$ ). Aus  $(F^g)^h = F$  folgte dann  $F^g = F^h$  nach der Folgerung (2.5). Da dieser gemeinsame Punkt von  $F$  verschieden ist (wegen  $F \notin g \cap h$ ), müssten nach dem Satz (2.4) die Geraden  $g$  und  $h$  als Mittelsenkrechten von  $\overline{FF^g}$  und  $\overline{FF^h}$  gleich sein; das widerspricht  $g \neq h$ .

Also ist  $\sigma_g \circ \sigma_h$  eine Drehung um  $P$ . - Wegen  $K = H^{gh} = (H^-)^h$  gilt  $H^h = K^-$  (nach Aufgabe (1.1b)). Außerdem ist  $p^h = q$ . Nach der Starrheitsaussage B 8 ist demnach die Spiegelung an  $h$  diejenige Bewegung, die  $p \cup H$  in  $q \cup K$  überführt.

<sup>3</sup>Mit der Bezeichnung "Sofort-Aufgabe" möchten wir deutlich machen, dass die Lösung anhand der Vorlage sofort ohne weitere (schriftliche) Ausarbeitungen gefunden werden kann.

Diese Überlegungen haben uns zu verschiedenen bemerkenswerten Einsichten geführt:

(3.5) Satz. Sind  $g$  und  $h$  Geraden durch einen Punkt  $P$ , so ist  $\sigma_g \circ \sigma_h$  eine Drehung um  $P$ .

(3.6) Satz. a) Zu je zwei Fahnen  $p \cup H$  und  $q \cup K$  mit gemeinsamen Scheitel  $P$  gibt es entweder eine Drehung  $\rho$  um  $P$  mit  $(p \cup H)^\rho = q \cup K$ , oder  $q \cup K$  ist das Bild von  $p \cup H$  bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle p, q$ .

b) Zu Halbgeraden  $p, q$  mit gemeinsamen Scheitel  $P$  gibt es eine und nur eine Drehung  $\rho$  um  $P$ , die  $p$  in  $q$  abbildet.

Die Aussage b) ist eine Folgerung aus a); dabei ergibt sich die Eindeutigkeitsaussage nach B 8.

Die Frage in der Aufgabe (3.1) lässt sich jetzt einfach mit "Ja" beantworten. So ist  $\gamma$  eine Drehung, wenn (und nur wenn)  $\beta$  eine Geradenspiegelung ist; und letzteres gilt nach der Lösung der Aufgabe 2.1.

Außerdem möchten wir hervorheben, dass die Existenz der Drehungen im Satz (3.6) ohne die Voraussetzung von B 7 (Beweglichkeit) nachgewiesen ist, da sie mit Geradenspiegelungen dargestellt worden sind.

Wir betrachten jetzt eine beliebige Drehung  $\rho$  um  $P$ ; ferner sei  $g$  eine beliebige Gerade durch  $P$  und  $p$  eine Halbgerade auf  $g$  mit dem Scheitel  $P$ .

Es gilt  $O(p^\rho) = P$ . Ist  $h$  die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle p, p^\rho$ , so gilt  $(p^g)^h = p^h = P^\rho$  (Abb. 3.4b) und somit  $\sigma_g \circ \sigma_h = \rho$  nach den Sätzen (3.5) und (3.6 b)). Entsprechend erhält man  $\sigma_f \circ \sigma_g = \rho$  für die Winkelhalbierende  $f$  von  $\sphericalangle p, p^{\rho^{-1}}$  (Abb. 3.4b). Damit haben wir folgende Umkehrung des Satzes (3.5):

(3.7) Darstellungssatz. Ist  $\rho$  eine Drehung um  $P$  und  $g$  eine Gerade durch  $P$ , so gibt es (eindeutig bestimmte) Geraden  $h$  und  $f$  durch  $P$  derart, dass die Nacheinanderausführung  $\sigma_g \circ \sigma_h$  der Spiegelungen an den Geraden  $g$  und  $h$  gleich der Drehung  $\rho$  ist und ebenso  $\sigma_f \circ \sigma_g = \rho$  gilt.

Zusammen mit dem Satz (2.3) gilt dann

(3.8) Satz. Bei jeder Drehung bleibt die Orientierung erhalten.

Wir wenden uns wieder einigen Aufgaben zu.

(3.9) Aufgabe. Es sei  $k$  ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  und der Radiuslänge  $r$ , und  $P$  sei ein innerer Punkt des Kreises (d.h.  $|MP| < r$ ). Man konstruiere alle Sehnen  $\overline{AB}$ , die eine gegebene Länge  $s$  ( $s < 2r$ ) besitzen und  $P$  enthalten.

(3.10) Aufgabe. Es sei  $ABCD$  ein Rhombus, und es seien  $\rho_1, \rho_2$  und  $\rho_3$  die Drehungen um  $A$  mit  $D^{\rho_1} = B$  bzw. um  $B$  mit  $A^{\rho_2} = C$  bzw. um  $C$  mit  $B^{\rho_3} = D$ .

a) Was für eine Bewegung ist  $\rho_1 \circ \rho_2$ ?

b) Man bestimme alle Punkte  $P$  der Ebene, die bezüglich  $\rho_1$  und  $\rho_3$  das gleiche Bild besitzen.

Wir empfehlen, diese Aufgabe nicht zu übergeben!

(3.11) Aufgabe. Für zwei nicht parallele Geraden  $a$  und  $b$  gilt  $a \perp b$  genau dann, wenn  $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$  ist.

Lösung. Es sei  $S$  der Schnittpunkt von  $a, b$ . Wir wählen auf  $a$  eine Halbgerade  $p$  mit dem Scheitel  $S$ . Die Produkte  $\sigma_a \circ \sigma_b$  und  $\sigma_b \circ \sigma_a$  sind nach dem Satz (3.5) Drehungen um  $S$ . Gilt  $a \perp b$ , so ist  $(p^a)^b = p^b = p^-$  (Satz (2.4)) und  $(p^b)^a = (p^-)^a = p^-$ , d.h.,  $p$  wird bei beiden Drehungen auf die gleiche Halbgerade  $p^-$  abgebildet. Nach dem Satz (3.6 b) sind dann diese Drehungen gleich.

Umgekehrt setzen wir nun die Gleichheit der Drehungen voraus und betrachten einen Punkt  $P$  aus  $a \setminus b$ . (Es ist  $a \setminus b \neq \emptyset$  wegen  $a \nparallel b$ ):

Dann gilt  $P^b \neq P$  (wegen  $P \notin b$ ) und  $P^b = P^{ab} = (P^b)^a$  auf Grund der Voraussetzung. Nach der letzten Aussage muss  $P^b \in a$  und damit  $a$  die Verbindungsgerade von  $P$  und  $P^b$  sein. Überdies ist  $b$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PP^b}$ . Folglich gilt  $a \perp b$ .

Das Ergebnis der Aufgabe zeigt insbesondere, dass es bei der Nacheinanderausführung zweier Geradenspiegelungen - bis auf eine spezielle Lage der Geraden zueinander - stets auf die Reihenfolge ankommt.

Wir haben dargelegt, dass sich die Drehungen um einen Punkt  $P$  durch Produkte von zwei Spiegelungen an Geraden durch  $P$  darstellen lassen und dass Produkte dieser Art stets Drehungen um  $P$  sind. Diese Darstellung kann - wie die bisherigen Darlegungen zeigen - in konstruktiver und einfacher Weise ausgeführt werden.

Eine Drehung  $\rho$  ist außerdem nach dem Satz (3.6 b) durch das Drehzentrum  $P$  und durch ein geordnetes Paar  $(p, q)$  von Halbgeraden mit dem Scheitel  $P$  (d.h. durch einen gerichteten Winkel  $\angle p, q$ ) bestimmt, für das  $q = p^\rho$  ist.

Für eine Konstruktion der Bilder bei der Drehung ist nützlich, die Beziehung zwischen  $\angle p, q$  und einem weiteren gerichteten Winkel  $\angle p', q'$  zu kennen, der die gleiche Drehung  $\rho$  durch  $q' = p'^\rho$  bestimmt.

Wir zeigen zunächst

(3.12) Satz. Sind  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Drehungen um  $P$ , dann ist auch  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um  $P$ , und es gilt  $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$ .

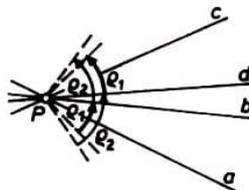


Abb. 3.5

Beweis (Abb. 3.5). Wir können hier mit Vorteil die Darstellung der Drehungen mit Hilfe der Geradenspiegelungen ausnutzen. Zu einer beliebig gewählten Geraden  $a$  durch  $P$  gibt es eine Gerade  $b$  durch  $P$  mit  $\rho_1 = \sigma_a \circ \sigma_b$  und außerdem eine Gerade  $c$  durch  $P$  mit  $\rho_2 = \sigma_b \circ \sigma_c$ . Nun ist

$$\rho_1 \circ \rho_2 = (\sigma_a \circ \sigma_b) \circ (\sigma_b \circ \sigma_c) = \sigma_a \circ \sigma_c$$

und damit nach Satz (3.5) eine Drehung um  $P$ .

Die restliche Behauptung  $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$  beweisen wir durch "Rechnen" mit Spiegelungen. Es gibt eine Gerade  $d$  durch  $P$  mit  $\rho_2 = \sigma_a \circ \sigma_d$ . Nun ist  $\sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_d$  und damit

$$\sigma_a \circ (\sigma_b \circ \sigma_c) \circ \sigma_c = \sigma_a \circ (\sigma_a \circ \sigma_d) \circ \sigma_c$$

und weiter  $(\rho_1 =) \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$ . Folglich gilt

$$\rho_2 \circ \rho_1 = (\sigma_a \circ \sigma_d) \circ (\sigma_d \circ \sigma_c) = \sigma_a \circ \sigma_c = \rho_1 \circ \rho_2$$

Nun lässt sich einfach zeigen, dass  $q$  durch dieselbe Drehung  $\alpha$  in  $q'$  übergeführt wird, die  $p$  auf  $p'$  abbildet. Nach dem eben bewiesenen Satz ist nämlich  $\rho \circ \alpha = \alpha \circ \rho$  und damit  $q' = (p')^\rho = (p^\alpha)^\rho = (p^\rho)^\alpha = q^\alpha$  (Abb. 3.6).

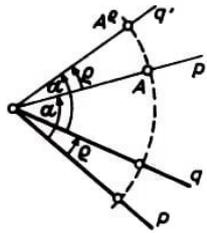


Abb. 3.6

Damit ist  $\angle p', q'$  das Bild von  $\angle p, q$  bei einer Drehung um den Scheitel des Winkels; nach B 6 und Satz (3.8) gilt dann wie erwartet  $|\angle p, q| = |\angle p', q'|$ .

Diese Größe gerichteter Winkel heißt Drehmaß. Die Drehung um  $P$  mit dem Drehmaß  $\vec{\alpha}$  bezeichnen wir mit  $\rho(P, \vec{\alpha})$ .

Der obige Sachverhalt zwischen  $\angle p, q$  und  $\angle p', q'$  ist die Grundlage für die in der Schule übliche Konstruktion des Bildes eines Punktes  $A$  bei einer Drehung  $\rho$  (Abb. 3.6), die durch das Zentrum  $P$  und einen gerichteten Winkel  $\angle p, q$  mit  $q = P^rho$  gegeben ist.

(3.13) Aufgabe. Gegeben sind drei verschiedene zueinander parallele Geraden  $a, b, c$  und ein Punkt  $A \in a$ . Man konstruiere alle gleichseitigen Dreiecke  $ABC$  mit  $B \in b$  und  $C \in c$ .

Lösung. Es sei  $ABC$  eine Lösung. Dann geht bei der Drehung  $\rho$  um  $A$  mit  $B\rho = C$  die Gerade  $b$  in eine Gerade  $b'$  über, die  $c$  in dem Punkt  $C$  schneidet (Abb. 3.7a).

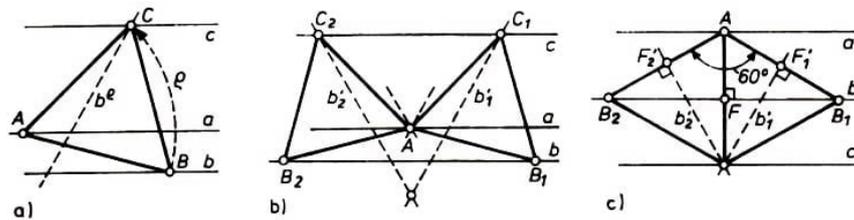


Abb. 3.7

Der gerichtete Winkel  $\angle BAC$  hat dabei die Größe  $60^\circ$  oder  $300^\circ$ . - Aus diesen für eine Lösung notwendigen Bedingungen ist sofort eine Konstruktion ersichtlich:

Wir drehen  $b$  um  $A$  mit  $60^\circ$  und mit  $300^\circ$ . Die Bilder  $b'_1$  und  $b'_2$  schneiden  $c$  in Punkten  $C_1$  und  $C_2$  (Abb. 3.7b). -

Jedes dieser Resultate ergibt offenbar eine Lösung. Die beiden Schnittpunkte  $C_1$  und

$C_2$  fallen genau dann zusammen, wenn der Schnittpunkt von  $b'_1$  und  $b'_2$  auf  $c$  liegt; und dies ist genau dann der Fall, wenn  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  liegt und - wie eine einfache Rechnung zeigt (siehe dazu Abb. 3.7 c) -  $d(b, c) = d(b, a)$  für die Abstände zwischen den parallelen Geraden  $a, b, c$  gilt.

In diesem Fall sind aber zwei geeignete Punkte  $B_1, B_2$  auf  $b$  möglich; damit liegen auch hier genau zwei Lösungen vor.

Auf diese Weise ist wieder eine ganze Klasse von Aufgaben lösbar. So können anstelle der drei parallelen Geraden in der Aufgabe (3.13) drei sich in einem Punkt schneidende Geraden oder drei konzentrische Kreise gewählt werden. Wir stellen noch folgende Aufgaben:

(3.14) Aufgabe. Zu einem beliebig vorgegebenen Dreieck  $ABC$  und vorgegebenem Punkt  $P \in BC$  sind Punkte  $Q \in CA$  und  $R \in AB$  derart zu konstruieren, dass  $PQR$  ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Frage der Lösbarkeit sollte besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

(Mit der Lösung dieser Aufgabe durch Drehungen ist dann auch eine einfache bewegungsgeometrische Behandlung von OJM 61043 gegeben.<sup>4</sup>)

(3.15) Aufgabe. In einer Ebene  $\varepsilon$  seien ein Quadrat  $ABCD$  und ein in seinem Innern gelegener Punkt  $P$  gegeben. Ein Punkt  $Q$  durchlaufe das Quadrat (den Streckenzug  $ABCD$ ). Man beschreibe die Menge aller derjenigen Punkte  $R$  von  $\varepsilon$ , für die das Dreieck  $PQR$  gleichseitig ist. (OJM 61241.)

(3.16) Aufgabe. Gegeben seien zwei beliebige Geraden  $a$  und  $c$  und ein Punkt  $B \notin a, c$ . Man konstruiere alle Quadrate  $ABCD$  mit  $A \in a$  und  $C \in c$ .

Wir wenden uns nun einigen Beweisaufgaben zu.

(3.17) Aufgabe. Über den Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  eines Dreiecks seien Quadrate  $ABDE$  und  $BCFG$  konstruiert. Man beweise, dass das Lot  $h_B$  von  $B$  auf  $g_{CA}$  die Strecke  $\overline{DG}$  halbiert!

Lösung. Es sei  $\rho$  die Drehung um  $B$  mit  $D^\rho = A$ . Dann ist  $G = C^\rho$  und  $B$  der Mittelpunkt von  $\overline{CG^\rho}$ . Ferner gilt  $g_{AC} \perp h_B^\rho$  (Abb. 3.8). Folglich halbiert  $h_B^\rho$  mit  $\overline{CG^\rho}$  auch die Strecke  $\overline{AG^\rho} = \overline{D^\rho G^\rho}$ . Damit gilt die Behauptung.

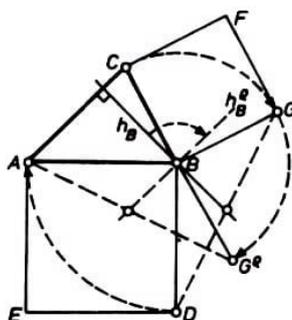


Abb. 3.8

<sup>4</sup>Vgl. dazu Engel/Pirl: Aufgaben mit Lösungen aus OJM der DDR, Bd. II (Berlin 1975), S. 70/71. (Dort wird ein anderer Lösungsweg beschrieben.)

(3.18) Aufgabe. Über den Seiten eines Parallelogramms werden nach außen die Quadrate konstruiert. Man beweise, dass deren Mittelpunkte die Ecken eines Quadrats sind. (Gilt dies auch, wenn die Quadrate nach innen gelegt werden?)

(3.19) Aufgabe. Es sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Man bestimme alle Punkte  $P$ , für die  $|CP| = |AP| + |BP|$  gilt. (OJM 171224.)

Lösung. Es sei  $a$  die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks. Offenbar gilt für jeden Punkt  $P$  der Ebene  $|PA| + a = |PA| + |AC| \geq CP$  bzw.  $|PB| + a \geq |CP|$ . Demnach kann  $P$  nur den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn  $|AP| \leq a$  und  $|BP| \leq a$  gilt. Somit liegen die gesuchten Punkte im Durchschnitt der Kreisflächen mit dem Radius  $a$  und den Mittelpunkten  $A$  und  $B$ . Nach der Dreiecksungleichung scheiden aus dieser Punktmenge alle diejenigen Punkte aus, die mit  $C$  auf der gleichen Seite von  $g_{AB}$  liegen (Abb. 3.9).

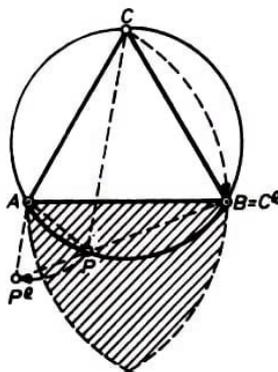


Abb. 3.9

3. Drehungen 37 Nun sei  $P$  ein Punkt des verbleibenden Flächenstücks, für den  $|CP| = |AP| + |BP|$  ist. Für  $P = A$  oder  $P = B$  gilt offenbar diese Bedingung.

Es sei jetzt  $P \neq A, B$ . Durch die Drehung  $\rho$  um  $A$  mit  $C = B$  entsteht das gleichseitige Dreieck  $APP^\rho$  (Abb. 3.9), und es gilt

$$|PP^\rho| + |PB| = |AP| + |BP| = |CP| = |BP^\rho|$$

also ist  $P \in \overline{BP^\rho}$ . Die Größe des Winkels  $\sphericalangle APB$  beträgt somit  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ; folglich liegt  $P$  auf dem Umbogen des Dreiecks  $ABC$  zwischen  $A$  und  $B$ .

Umgekehrt sind aber auch alle Punkte dieses Kreisbogens (einschließlich  $A$  und  $B$ ) Lösungen der Aufgabe.

(3.20) Aufgabe. Es sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Man bestimme alle Punkte  $P$ , für die  $|CP|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$  gilt.

Bemerkung. Durch die Drehung  $\rho$  um  $A$  mit  $C^\rho = B$  hat man die Längen  $|AP|$ ,  $|BP|$  und  $|CP|$  wieder als Längen der Seiten eines Dreiecks.

Eine einfachere Lösung ergibt sich hier mit Koordinaten, d.h. mit Mitteln der analytischen Geometrie. Wir wählen dazu ein kartesisches Koordinatensystem so, dass  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  und  $C(0, \sqrt{3})$  ist. Für  $P(x, y)$  gilt dann

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 = |PC|^2 &\Leftrightarrow ((x+1)^2 + y^2) + ((x-1)^2 + y^2) = x^2 + (y-\sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4 \end{aligned}$$

Und die letzte Gleichung ist eine Gleichung der Punkte des Kreises um  $D(0, -\sqrt{3})$  durch  $A$  (Abb. 3.10).

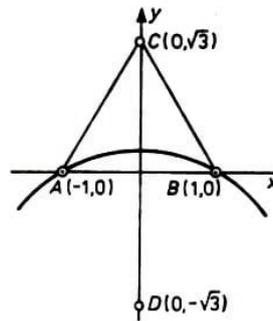


Abb. 3.10

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass bewegungsgeometrische Mittel und Methoden in der Elementargeometrie nun keinesfalls stets zu bevorzugen sind.

(3.21) Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat  $ABCD$ . Auf seinen Seiten werden nach innen die gleichseitigen Dreiecke  $ABK$ ,  $BCL$ ,  $CDM$  und  $DAN$  errichtet. Man beweise, dass die Mittelpunkte der vier Strecken  $\overline{KL}$ ,  $\overline{LM}$ ,  $\overline{MN}$  und  $\overline{NK}$  zusammen mit den Mittelpunkten der acht Strecken  $\overline{AK}$ ,  $\overline{BK}$ ,  $\overline{BL}$ ,  $\overline{CL}$ ,  $\overline{CM}$ ,  $\overline{DM}$ ,  $\overline{DN}$  und  $\overline{AN}$  die Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks sind. (IMO 191.)<sup>5</sup>

## 4 Verschiebungen

Wir zeichnen auf unserer Zeichenebene  $\varepsilon$  eine Gerade  $g$  aus, legen das Transparentpapier auf die Zeichenebene und erhalten durch Kopieren von  $g$  auf dem Transparentpapier die Gerade  $g_t$ .

Das Transparentpapier verschieben wir nun so, dass  $g$ , längs  $g$  gleitet (Abb. 4.1). Wir sehen dabei, dass jede in der Richtung von  $g$  liegende Gerade  $h$  ebenfalls auf sich abgebildet wird und dass jede Gerade  $f$ , die nicht parallel zu  $g$  ist, in eine zu  $f$  echt parallele Gerade  $f' \neq f$  (d.h.  $f \cap f' = \emptyset$ ) übergeht.

Bis auf die echte Parallelität von  $f$  und  $f'$  bestehen alle diese Eigenschaften auch, wenn wir das Transparentpapier nicht bewegen, also die identische Abbildung  $\iota$  von  $\varepsilon$  betrachten. Es ist zweckmäßig, diesen Fall in den Begriff der Verschiebung mit einzu beziehen.

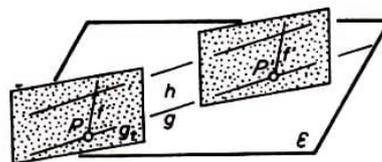


Abb. 4.1

**Definition.**  $\tau$  ist eine Verschiebung (oder Translation) genau dann, wenn  $\tau$  eine Bewegung und  $\tau = \iota$  ist oder es andernfalls eine Richtung<sup>6</sup>  $R(g)$  so gibt, dass  $h^\tau = h$  für

<sup>5</sup>Die Abkürzung IMO bedeutet "Internationale Mathematikolympiade"; die anschließenden Zahlen geben den Jahrgang (19.) und die Aufgabennummer (1.) an.

<sup>6</sup>Wir erinnern daran, dass die Richtung  $R(g)$  der Geraden  $g$  die Menge der zu  $g$  parallelen Geraden (hier jetzt nur aus der Ebene  $\varepsilon$ ) ist.

alle Geraden  $h \in R(g)$  und  $f^\tau \cap f = \emptyset$  für alle Geraden  $f \notin R(g)$  gilt.

Anhand der Definition ist leicht ersichtlich, dass mit  $\tau$  auch die Umkehrabbildung  $\tau^{-1}$  eine Verschiebung ist.

Es sei  $\tau$  eine nicht identische Verschiebung. Dann kann  $\tau$  auf Grund der Definition keinen Fixpunkt besitzen. Nun seien weiter  $P$  und  $Q$  zwei Punkte so, dass  $Q$  nicht auf  $g_{PP^\tau}$  liegt. Nach der Definition der Verschiebung liegt  $Q^\tau$  auf der Parallelen zu  $g_{PP^\tau}$  durch  $Q$  und auf der Parallelen zu  $g - PQ$  durch  $P^\tau$ , d.h.,  $QPP^\tau Q^\tau$  ist ein Parallelogramm (Abb. 4.2).

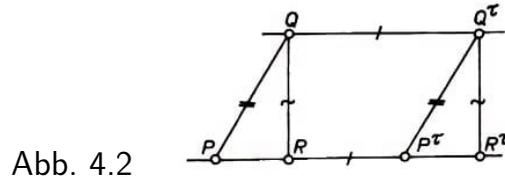


Abb. 4.2

Das Bild von  $Q$  lässt sich demnach allein mit den Punkten  $P$  und  $P^\tau$  durch eine einfache Parallelogrammkonstruktion darstellen.

Mit Hilfe von  $Q$  kann nun auf die gleiche Weise das Bild jedes Punktes  $R$  auf der Geraden  $g_{PP^\tau}$  bestimmt werden (Abb. 4.2).

Demnach gibt es zu Punkten  $A, B$  nicht mehr als eine Verschiebung  $\tau$  mit  $A^\tau = B$ . Die Existenz einer solchen Verschiebung ist dabei aber noch offen.

Wir betrachten dazu das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b$  von Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden  $a, b$ . Für  $a = b$  ist  $\sigma_a \circ \sigma_b$  die identische Abbildung  $\iota$ , also eine Verschiebung. Es sei jetzt  $a \cap b = \emptyset$ . Für eine Gerade  $g$ , die zu  $a$  und damit auch zu  $b$  orthogonal ist, gilt  $(g^a)^b = g^b = g$ . Liegt eine Gerade  $f$  nicht in dieser Richtung  $R(g)$ , dann gilt  $(f^a)^b \cap f = \emptyset$ .

Sonst hätten nämlich  $(f^a)^b$  und  $f$  einen gemeinsamen Punkt  $F$ , und es wäre  $(F^a)^b = F$  und damit  $a = b$ . (Vgl. Lösung der Aufgabe 3.10 b.) Somit ist nach Definition das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b$ , im Fall  $a \cap b = \emptyset$  eine nicht identische Verschiebung. Wir haben also

(4.1) Satz. Sind  $a, b$  zueinander parallele Geraden, dann ist  $\sigma_a \circ \sigma_b$  eine Verschiebung.

Damit ist nach dem Abschnitt 2 auch die Existenz von Verschiebungen - unabhängig von B 7 - gesichert. Wir können leicht noch mehr zeigen.

Sind  $A, B$  zwei verschiedene Punkte, so legen wir durch  $A$  die Orthogonale  $a$  zur Verbindungsgeraden  $g_{AB}$ ; ferner sei  $b$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{AB}$  (Abb. 4.3).

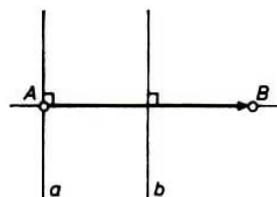


Abb. 4.3

Nach Satz 4.1 ist  $\sigma_a \circ \sigma_b$  eine Verschiebung  $\tau$ ; und für sie gilt  $A^\tau = (A^a)^b = A^b = B$ . Beziehen wir nun noch die obigen Betrachtungen zur Eindeutigkeit einer Verschiebung

und den Sonderfall  $A = B$  mit ein, so ergibt sich

(4.2) Satz. Zu Punkten  $A, B$  gibt es eine und nur eine Verschiebung  $\tau$  mit  $A^\tau = B$ .

Diese Verschiebung wird kurz mit  $\overrightarrow{AB}$  oder  $v(A, B)$  bezeichnet.

(4.3) Aufgabe. Man zeige:

a)  $(\overrightarrow{AB})^{-1} = \overrightarrow{BA}$ .

b) Ist  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  und liegen  $A, B, C$  auf keiner gemeinsamen Geraden, so gilt  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

(4.4) Aufgabe. Es seien zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  sowie eine Gerade  $h$  gegeben. Man konstruiere zwei Punkte  $A \in k_1$  und  $B \in k_2$ , derart, dass  $g_{AB} \parallel h$  und  $|AB|$  einer vorgegebenen Länge  $l$  gleich ist.

(4.5) Aufgabe. Man konstruiere ein konvexen Trapez  $ABCD$  aus den Seitenlängen  $a, b, c, d$ , für das  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  parallele Seiten sind.

Nach einigem Probieren mit üblichen Dreiecks- oder Viereckskonstruktionen, die nur auf den vorgegebenen Längen aufbauen, ist ersichtlich, dass man so zu keiner Lösung der Aufgabe (4.5) kommt. Ein Viereck mit festen Seitenlängen ist eben noch beweglich (Abb. 4.4a). Um so überraschender erscheint die folgende einfache Lösung mit einer Verschiebung.

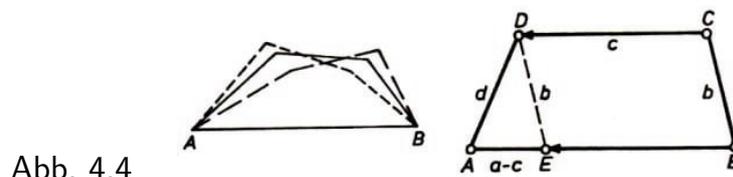


Abb. 4.4

Lösung (Abb. 4.4b). Es sei  $ABCD$  eine Lösung; o.B.d.A. kann noch  $a \geq c$  vorausgesetzt werden. Bei der Verschiebung  $\overrightarrow{CD}$  geht dann  $B$  in einen Punkt  $E$  über, der auf der Strecke  $AB$  liegt. Ist  $a > c$ , so bilden  $A, E, D$  ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a - c, b$  und  $d$ , d.h.,  $a - c, b$  und  $d$  erfüllen die Dreiecksungleichungen. Im Fall  $a = c$  ist  $b = d$ . Dies sind nun notwendige Bedingungen für die Existenz einer Lösung.

Eine Konstruktion ist jetzt leicht anzugeben. - Ist  $a > 0$  und erfüllen  $a - c, b, d$  die Dreiecksungleichungen, dann gibt es bis auf Kongruenz genau eine Lösung. Gilt  $a = c$  und  $b = d$ , dann gibt es beliebig viele nicht kongruente Lösungen, nämlich alle Parallelogramme mit diesen Seitenlängen.

(4.6) Aufgabe. Man unterst die Lösbarkeit, wenn in der Aufgabenstellung (4.5) die Forderung nach Konvexität nicht erhoben wird.

(4.7) Aufgabe. An welcher Stelle eines breiten Flusses ist senkrecht zu seinen Ufern eine Brücke zu bauen, damit zwei Orte  $A$  und  $B$ , die auf verschiedenen Seiten des Flusses liegen, auf dem kürzesten Wege verbunden werden.

(4.8) Aufgabe. Unter Verwendung des Satzes (4.1) löse man nochmals die Aufgabe (2.3).

Ausgehend von den Darlegungen, die anhand der Abb. 4.3 geführt wurden, wäre noch zu klären, welche Geraden  $g, h$  ebenfalls von der Art sind, dass  $\sigma_g \circ \sigma_h$  die Verschiebung  $\overrightarrow{AB}$  darstellt. Dazu müssen notwendigerweise  $g, h$  parallel zueinander sein. (Sonst wäre  $\sigma_g \circ \sigma_h$  nach Satz (3.5) eine (nicht identische) Drehung.) Weiterhin müssen  $A, B$  auf einem gemeinsamen Lot zu  $g$  liegen.

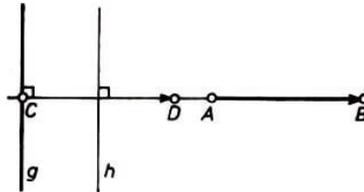


Abb. 4.5

Letzteres sei nun gegeben. Es sei  $C$  der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von  $A, B$  auf  $g$  und  $D$  das Bild von  $C$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{AB}$  (Abb. 4.5). Es ist  $D = C$  genau dann, wenn  $B = A$  gilt. Für diesen Sonderfall leistet  $h = g$  das Gewünschte.

Ansonsten wählen wir als Gerade  $h$  - entsprechend Abb. 4.3 - die Mittelsenkrechte von  $\overline{CD}$  (Abb. 4.5). Nach Satz (4.2) ist  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$  und damit  $\sigma_g \circ \sigma_h = \overrightarrow{AB}$ . Entsprechend gibt es (genau) eine Gerade  $f \parallel g$  mit  $\sigma_f \circ \sigma_g = \overrightarrow{AB}$ . Wir haben somit eine zum Darstellungssatz (3.7) analoge Aussage

(4.9) Darstellungssatz. Ist  $\overrightarrow{AB}$  eine Verschiebung und  $g$  eine Gerade, so dass  $A, B$  auf einem gemeinsamen Lot bezüglich  $g$  liegen, dann gibt es (genau) eine Gerade  $h \parallel g$  derart, dass  $\sigma_g \circ \sigma_h = \overrightarrow{AB}$  gilt.

Zusammen mit dem Satz (2.3) ergibt sich daraus

(4.10) Satz. Bei Verschiebungen bleibt die Orientierung unverändert.

## 5 Punktspiegelungen

Wir wenden uns hier speziellen Drehungen zu. Um den Scheitel  $S$  einer Halbgeraden  $p$  gibt es genau eine Drehung  $\rho$ , die  $p$  in  $p^-$  überführt (Satz (3.6 b)). Bei dieser Drehung geht dann auch jede andere Halbgerade  $q$  mit dem Scheitel  $S$  in ihre entgegengesetzte Halbgerade über. Den Nachweis dafür überlassen wir dem Leser als Aufgabe (5.1.)

Definition.  $\sigma$  heißt eine Spiegelung an dem Punkt  $S$  (oder eine Halbdrehung an  $S$ ) genau dann, wenn  $\sigma$  eine Drehung um  $S$  ist und  $p^\sigma = p^-$  für alle Halbgeraden  $p$  mit dem Scheitel  $S$  gilt.

Auf Grund des Satzes (3.6b)) und der Aussage in der Aufgabe (5.1) gibt es an jedem Punkt  $S$  eine und nur eine Spiegelung; wir bezeichnen sie kurz mit  $\sigma_S$ ; statt  $\mathfrak{F}^{\sigma_S}$  schreiben wir später auch kurz  $\mathfrak{F}^S$ .

Eine Rechtfertigung für die Bezeichnung "Spiegelung" lässt sich leicht geben. Ist  $P$  irgendein von  $S$  verschiedener Punkt, so liegt sein Bild  $P^\sigma$  nach der Definition auf  $SP^-$ ; außerdem gilt  $|SP^\sigma| = |SP|$ .

Demnach ist  $S$  der Mittelpunkt von  $\overline{PP^\sigma}$ . Die damit gegebene einfache konstruktive Darstellung des Bildpunktes  $P^\sigma$  (Abb. 5.1) gleicht weitgehend der bei der Spiegelung an einer Geraden (siehe Abb. 2.2).

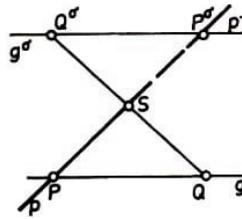


Abb. 5.1

Eine Figur  $\mathfrak{F}$  heißt zentralsymmetrisch (oder punktsymmetrisch) genau dann, wenn es einen Punkt  $S$  derart gibt, dass  $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{F}$  ist.

Analog zu Folgerung (2.5) bei den Spiegelungen an Geraden gilt offenbar auch hier

(5.2) Satz. Für jede Spiegelung  $\sigma$  an einem Punkt ist  $\sigma \circ \sigma = \iota$ .

Mit Hilfe des Strahlensatzes ist die folgende Aussage leicht einsichtig (Abb. 5.1).

(5.3) Satz. Bei der Spiegelung an einem Punkt  $S$  gilt  $g^S \parallel g$  für jede Gerade  $g$ ; insbesondere ist  $g^S \cap g = \emptyset$  für jede Gerade  $g \not\ni S$ .

(5.4) Sofort-Aufgabe. Man bestimme die Maßzahl des Inhalts der schraffierten Fläche a) in der Abb. 5.2; b) in der Abb. 5.3.

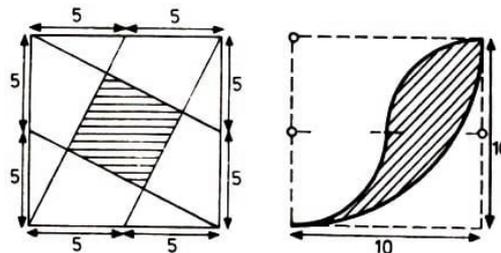


Abb. 5.2,5.3

(5.5) Sofort-Aufgabe. Ein Quadrat  $ABCD$  mit 18 cm Seitenlänge ist in 9 mal 9 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abb. 5.4 es zeigt. Der Streifenzug ist grau hervorgehoben. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang dieses Streifenzuges. (Nach OJM 21511.)

(5.6) Aufgabe. Gegeben sei ein Winkel  $\sphericalangle p, q$  und ein Punkt  $A$  in seinem Inneren. Man konstruiere Punkte  $P \in p$  und  $Q \in q$  derart, dass  $A$  Mittelpunkt von  $\overline{PQ}$  ist. (OJM 18733.)

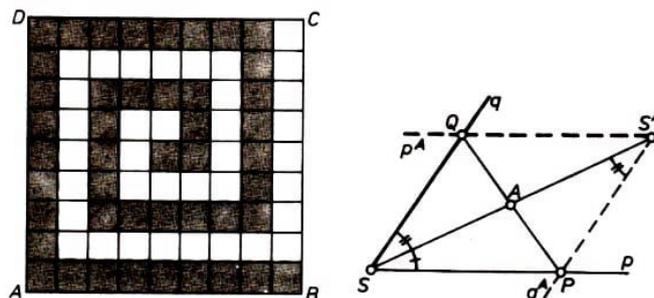


Abb. 5.4,5.5

Lösung (Abb. 5.5). Es seien  $P, Q$  zwei Punkte der gewünschten Art. Dann werden bei der Spiegelung an  $A$  die Punkte  $P$  und  $Q$  vertauscht. Also muss notwendigerweise  $P$  der Schnittpunkt von  $p$  und dem Bild  $q^A$  von  $q$  bei der Spiegelung an  $A$  sein. -

Die Halbgeraden  $p$  und  $q^A$  schneiden sich nun tatsächlich stets. Denn  $p$  und  $q$  liegen, da  $A$  ein innerer Punkt des Winkels  $\sphericalangle p, q$  mit dem Scheitel  $S$  ist, auf verschiedenen Seiten von  $g_{AS}$ . Folglich liegt  $q^A$  mit  $p$  auf einer Seite.

Außerdem ist die Summe der Größen der Winkel  $\sphericalangle p, SA^+$  und  $\sphericalangle q^A, S^+A^+$  gleich der Größe von  $\sphericalangle p, q$  (siehe Abb. 5.5) und damit kleiner als  $180^\circ$ . - Demnach besitzt die Aufgabe stets genau eine Lösung.

Auf diese Weise lassen sich durch Punktspiegelung eine Reihe von Aufgaben lösen, bei denen die gewünschte Konfiguration - wie hier  $\{P, Q\}$  - bei der Spiegelung an einem gegebenen Punkt in sich übergeht, also bezüglich eines vorgegebenen Punktes zentral-symmetrisch ist.

(5.7) Aufgabe. Man konstruiere zu vorgegebenem Dreieck  $AP_1P_2$  kongruente Kreise  $k_1$  und  $k_2$  derart, dass  $k_1$  und  $k_2$  sich in  $A$  berühren und  $P_1 \in k_1$  sowie  $P_2 \in k_2$  gilt.

(5.8) Aufgabe. Gegeben seien zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , die sich in zwei Punkten  $P$  und  $Q$  schneiden. Man konstruiere alle Geraden  $g$  durch  $P$ , aus denen die beiden Kreise gleichlange Sehnen ausschneiden.

(5.9) Aufgabe. In einem Sehnenviereck werden von den Seitenmitten die Lote auf die jeweils gegenüberliegende Seite gefällt. Man beweise, dass diese Lote einen gemeinsamen Punkt besitzen.

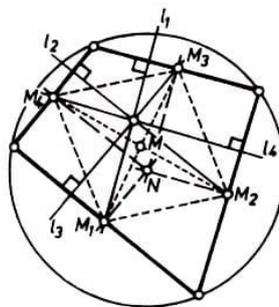


Abb. 5.6

Lösung (Abb. 5.6). Es seien  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  die Mitten aufeinanderfolgender Seiten des Sehnenvierecks und  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4$  die zugehörigen Lote. Bekanntlich ist  $M_1M_2M_3M_4$  ein Parallelogramm. Beim Spiegeln an dem Mittelpunkt  $M$  dieses Parallelogramms gehen nun  $l_1, \dots, l_4$  in die Mittelsenkrechten der Seiten des vorgegebenen Sehnenvierecks über (Satz (5.3)). Diese Mittelsenkrechten schneiden sich aber in einem Punkt  $N$ , dem Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks. Folglich gehen  $l_1, \dots, l_4$  durch das Bild von  $N$  bei der Spiegelung an  $M$ .

Häufig wird mit dem Sehnenviereck die Vorstellung von einem konvexen Viereck verbunden - völlig zu Unrecht. Spielt die Konvexität bei der gerade behandelten Aufgabe eine Rolle? Die letzten Zweifel verschwinden, wenn man sich ein nicht konvexes Sehnenviereck einmal vergibt und die Beweisgedanken daran konstruktiv nachvollzieht. Wir möchten das nachdrücklich empfehlen.

(5.10) Aufgabe. Es sei ein Viereck  $P_1P_2P_3P_4$  und ein Punkt  $A$  gegeben, der von den Mitten  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  der Seiten  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}$  bzw.  $\overline{P_4P_1}$  verschieden ist. Man beweise, dass die Parallelen zu  $g_{AM_{i+2}}$  durch  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4; 5 \equiv 1, 6 \equiv 2$ ) genau einen Punkt gemeinsam haben (Abb. 5.7).

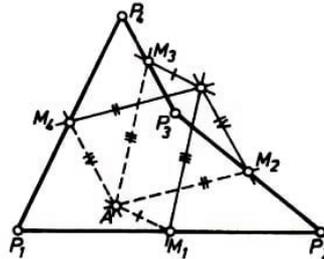


Abb. 5.7

Während bei den Geradenspiegelungen für die Vertauschbarkeit (Kommutativität) in einem Zweierprodukt  $\sigma_a \circ \sigma_b$  hinreichend und notwendig ist, dass  $a = b$  oder  $a \perp b$  gilt, tritt diese Eigenschaft bei Punktspiegelungen nur bei Gleichheit der Punkte auf.

(5.11) Aufgabe. Man zeige, dass  $A = B$  für  $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$  hinreichend und notwendig ist.

Lösung. Offensichtlich ist  $A = B$  eine hinreichende Bedingung. - Umgekehrt folgt aus  $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$  zunächst  $A^B = (A^A)^B = (A^B)^A$  und daraus  $A^B = A$  und weiter  $B = A$ .

Da sich jede Drehung als Produkt  $\sigma_g \circ \sigma_h$  von zwei Geradenspiegelungen darstellen lässt (Satz (3.7)), ist für die Punktspiegelung eine spezielle Form dieser Darstellung zu erwarten. Nach Satz (5.2) muss  $(\sigma_g \circ \sigma_h) \circ (\sigma_g \circ \sigma_h) = \iota$  und damit  $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \sigma_g$  sein. Das ist für nicht parallele Geraden  $g, h$  aber gleichwertig mit  $g \perp h$ . (Siehe Aufgabe (3.11).)

Zusammenfassend haben wir

(5.12) Satz. a) Ist  $g \perp h$ , dann ist  $\sigma_g \circ \sigma_h$  die Spiegelung an dem Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ .

b) Gilt  $A \in g$  und  $\sigma_A = \sigma_g \circ \sigma_h$ , dann ist  $h$  die Senkrechte von  $A$  auf  $g$ .

Diese Aussage lässt sich verschärfen: Aus  $\sigma_A = \sigma_g \circ \sigma_h$  allein folgt bereits  $A \in g$ . (Beweis als Aufgabe!)

(5.13) Aufgabe. Aus  $A \in g$  folgt  $\sigma_A \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_A$ .

(5.14) Aufgabe. Gegeben ist ein konvexes Trapez  $ABCD$  (mit  $g_{AB} \parallel g_{CD}$ ) und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle vier Seiten berührt. Sein Mittelpunkt sei  $M$ . Man zeige, dass die Winkel  $\sphericalangle DMA$  und  $\sphericalangle BMC$  rechte Winkel sind.

(5.15) Aufgabe. Über den Seiten eines konvexen Vierecks  $ABCD$  seien zu seinem Inneren hin die rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke  $APB, BQC, CRD$  und  $DSA$  konstruiert. (Die Scheitel der rechten Winkel sind  $P, Q, R$  und  $S$ .) Man zeige, dass aus  $P = R$  die Gleichheit  $Q = S$  folgt.

Im Anschluss an den Satz (5.11) können wir noch leicht eine Beziehung zu den Verschie-

bungen herstellen. Alle Verschiebungen sind nämlich durch Produkte  $\sigma_g \circ \sigma_h$  darstellbar, für die  $g$  und  $h$  zu einer gemeinsamen Geraden orthogonal sind (Satz (4.9)), und alle Produkte dieser Art sind Verschiebungen (Satz (4.1)).

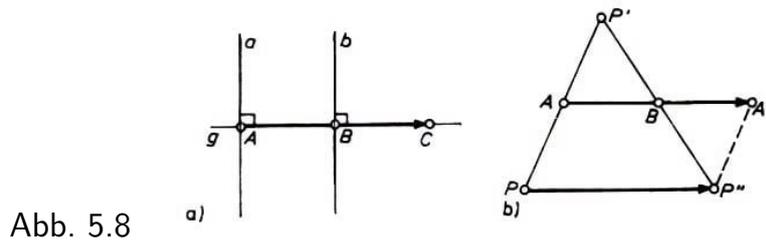


Abb. 5.8

Sind  $A$  und  $B$  beliebige Punkte, wobei  $A = B$  nicht ausgeschlossen ist, so können wir  $A$  und  $B$  durch eine Gerade  $g$  verbinden und dazu die Senkrechten  $a$  und  $b$  durch  $A$  bzw.  $B$  legen (Abb. 5.8a).

Nach dem Satz 5.12a gilt

$$\sigma_A \circ \sigma_B = (\sigma_a \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_b) = \sigma_a \circ \sigma_b$$

Da die Geraden  $a$  und  $b$  parallel zueinander sind, ist  $\sigma_a \circ \sigma_b$  eine Verschiebung (Satz (4.1)), nämlich die Verschiebung  $\overrightarrow{AC}$ , wobei  $C = A^B$  ist.

Man kann zu diesem Ergebnis auch allein auf Grund der Eigenschaften der Punktspiegelungen und einfacher bekannter Kenntnisse aus der Schulgeometrie gelangen. Man entwickle anhand der Abb. 5.8b eine Begründung.

Umgekehrt sei jetzt eine Verschiebung  $\tau$  und ein beliebiger Punkt  $A$  gegeben. Ferner sei  $B$  der Mittelpunkt von  $\overline{AA^\tau}$ , falls  $\tau \neq \iota$  ist; im Fall  $\tau = \iota$  sei  $B = A$ . Dann ist  $\sigma_A \circ \sigma_B$  die Verschiebung  $\overrightarrow{AA^\tau}$ , also  $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$ .

Der Punkt  $B$  ist durch diese Gleichung eindeutig bestimmt, denn aus  $\sigma_A \circ \sigma_{B'} = \sigma_A \circ \sigma_B$  folgt (wegen Satz (5.2))  $\sigma_{B'} = \sigma_B$  und daraus  $B' = B$ .

Zusammenfassend haben wir

(5.16) Satz.  $\sigma_A \circ \sigma_B$  ist die Verschiebung  $\overrightarrow{AA^B}$ .

(5.17) Darstellungssatz. Ist  $\tau$  eine Verschiebung und  $A$  irgendein Punkt, so gibt es genau einen Punkt  $B$  derart, dass  $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$  gilt.

Diese Sätze stehen in Analogie zu den Sätzen (3.5) und (3.7) über die Darstellung der Drehungen mit Hilfe der Geradenspiegelungen. Damit wird der analoge Charakter von Geraden- und Punktspiegelungen weiter unterstrichen. In den späteren "Dreispiegelungssätzen" kommt dieser Gesichtspunkt erneut zum Ausdruck.

(5.18) Aufgabe. Man zeige die Gleichheit  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA^B}$ .

Lösung. Im Fall  $A = B$  ist die Behauptung klar. - Es sei nun  $A \neq B$  und  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ . Dann gilt  $\sigma_A \circ \sigma_M = \overrightarrow{AB}$  wegen  $A^M = B$  (Satz (5.16)) und außerdem  $\sigma_M \circ \sigma_B = \overrightarrow{AB}$  wegen  $(A^M)^B = B^B = B$ . Folglich ist

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = (\sigma_A \circ \sigma_M) \circ (\sigma_M \circ \sigma_B) = \sigma_A \circ \sigma_B = \overrightarrow{AA^B}$$

(5.19) Aufgabe. Man beweise, dass die Aussagen  $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C \circ \sigma_D$  und  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  äquivalent sind.

Aus dieser Äquivalenz folgt: Wenn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , so  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ . (In Aufgabe (4.3b)) war dazu noch eine einschränkende Voraussetzung verwendet werden.)

(5.20) Aufgabe. Gegeben sei ein Kreis  $k$  um  $M$  mit der Radiuslänge  $r$  und eine Strecke  $\overline{AB}$  mit  $|AB| < 2r$ . Man gebe die Verschiebungen an, bei denen  $\overline{AB}$  in eine Sehne des Kreises übergeht.

## 6 Schubspiegelungen

Nach den bisherigen Ergebnissen könnte man den Eindruck gewinnen, dass mit den aufgestellten speziellen Bewegungen: Geradenspiegelung, Drehung (insbesondere Punktspiegelung) und Verschiebung alle Bewegungen der Ebene erfasst sind.

Und man könnte darin noch bestärkt werden, wenn man in einem Schulbuch sinngemäß liest (zurecht, wie sich noch zeigen wird): Bewegungen (in der Ebene) sind die Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen sowie alle endlichen Nacheinanderausführungen dieser Abbildungen.

Rückblickend muss man in der Tat feststellen, dass die bisherigen Betrachtungen bereits recht umfassend sind.

Eine Bewegung  $\alpha$  ist ja bereits durch ein zugeordnetes Paar von Fahnen  $p \cup H$  und  $q \cup K$  bestimmt (B 8, Starrheit). Gibt es ein solches Paar, bei dem die Scheitelpunkte der Fahnen zusammenfallen (und damit dieser Punkt fix ist), dann ist nach Satz (3.6 a)) die Bewegung  $\alpha$  entweder eine Geradenspiegelung oder eine Drehung um diesen Punkt.

Damit bleiben zunächst nur noch solche Bewegungen unberücksichtigt, die keinen Fixpunkt besitzen. Derartige Bewegungen haben wir aber auch schon betrachtet; die nicht identischen Verschiebungen sind Bewegungen dieser Art. Sowohl die Definition der Verschiebungen als auch die bisherigen Darlegungen über sie lassen aber hoffen, dass es noch andere fixpunktfreie Bewegungen gibt.

Wir experimentieren einfach einmal, um erste Anhaltspunkte bezüglich dieser Existenzfrage zu finden. Wir betrachten gewisse Fahnen  $p \cup H$  und  $q \cup K$  und fragen, ob sie sich durch eine der bisherigen speziellen Bewegungen ineinander überführen lassen. Dabei sind natürlich Fahnen mit gemeinsamem Scheitelpunkt nicht von Interesse.

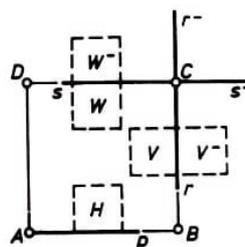


Abb. 6.1

(6.1) Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat  $ABCD$ . Mit  $p \cup H$  bezeichnen wir die Fahne

$AB^+ \cup ABC^+$ . Ferner seien  $r$  und  $s$  die Halbgeraden  $CB^+$  bzw.  $CD^+$ , und  $V$  und  $W$  seien die Halbebenen  $CBD^+$  bzw.  $CDB^+$  (Abb. 6.1).

In Tabelle 1 ist jeweils - falls möglich - eine der bisherigen speziellen Bewegungen einzutragen, die die Fahne  $p \cup H$  in die vorgegebene Fahne  $q \cup K$  überführt.

Tabelle 1

$q \cup K$	$r \cup V$	$r \cup V^-$	$r^- \cup V$	$r^- \cup V^-$	$s \cup W$	$s \cup W^-$	$s^- \cup W$	$s^- \cup W^-$
Bewegung $\alpha$ mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$								

Lösung. Wir werden nicht in den einzelnen acht Fällen nach einer möglichen bekannten Bewegung fragen, sondern bisher behandelte Bewegungen einfach nach ihrer Eignung hin durchmustern. Allein schon durch die Forderung, dass  $A$  auf  $C$  abgebildet werden muss, sind die Möglichkeiten stark eingeschränkt.

So kann als Geradenspiegelung nur noch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von  $\overline{AC}$ , also an der Geraden  $f = g_{BD}$  in Frage kommen. Wegen  $B^f = B$  ist  $p^f = CB^+ = r$ ; außerdem gilt  $D^f = D$  und damit  $H^f = CBD^+ = V$  (Abb. 6.2a). Damit entsteht  $r \cup V$  aus  $p \cup H$  durch die Spiegelung an  $f$ .

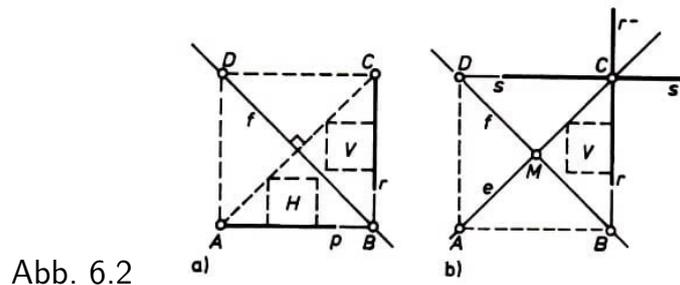


Abb. 6.2

Wir sehen uns nun nach geeigneten Drehungen um. Diese müssen  $A$  auf  $C$  abbilden. Bei ihrer möglichen Darstellung als Produkt von zwei Geradenspiegelungen (Satz (3.7)) kann als erste Gerade die Mittelsenkrechte von  $\overline{AC}$ , also die Gerade  $f$  genommen werden.

Die zweite Gerade muss durch  $C$  gehen und  $f$  schneiden. Außerdem muss bei der Spiegelung an ihr die Halbgerade  $p^f = r$  in eine der Halbgeraden  $r$ ,  $r^-$ ,  $s$  oder  $s^-$  übergehen.

Die zweite Gerade kann dann nur  $b = g_{CB}$  oder  $c = g_{CD}$  oder die Winkelhalbierende  $e$  von  $\sphericalangle r, s$  sein (Abb. 6.2b). (Die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle r, s^-$  ist parallel zu  $f$ !)

Wegen  $(r \cup V)^b = r \cup V^-$ ,  $(r \cup V)^c = r^- \cup V$  und  $(r \cup V)^e = s \cup W$  führen nun in der Tat die Drehungen  $\sigma_f \circ \sigma_b$  (Drehung um  $B$ ),  $\sigma_f \circ \sigma_c$  (Drehung um  $D$ ) und  $\sigma_f \circ \sigma_e$  die Fahne  $p \cup H$  in eine der vorgegebenen über. Insbesondere ist  $\sigma_f \circ \sigma_e$  wegen  $f \perp e$  die Spiegelung an dem Schnittpunkt  $M$  von  $f$  und  $e$  (Satz (5.11a)), an dem Mittelpunkt des Quadrats.

Schließlich wären noch Verschiebungen zu betrachten; hier kann nur die Verschiebung  $\tau = \overrightarrow{AC}$  in Frage kommen. Wegen  $\overrightarrow{AC} = \sigma_M \circ \sigma_C$  ist  $(p \cup H)^\tau = (s \cup W)^C = s^- \cup W^-$ ;  $\tau$  ist also tatsächlich geeignet. Als Ergebnis haben wir Tabelle 2.

Unsere Überlegungen schließen aus, dass die drei Lücken mit den bisher behandelten speziellen Bewegungen ausgefüllt werden können!

Tabelle 2

$q \cup K$	$r \cup V$	$r \cup V^-$	$r^- \cup V$	$r^- \cup V^-$
Bewegung $\alpha$ mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$	Spiegelung an $f$	Drehung um $B$	Drehung um $D$	-
$q \cup K$	$s \cup W$	$s \cup W^-$	$s^- \cup W$	$s^- \cup W^-$
Bewegung $\alpha$ mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$	Spiegelung an $M$	-	-	Verschiebung $\vec{AC}$

Demnach gibt es weitere spezielle Bewegungen, wenn noch Beweglichkeit (B 7) vorausgesetzt wird. Es ist naheliegend zu fragen, ob sich die Lücken im Ergebnis der Aufgabe (6.1) wenigstens durch Produkte von Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen schließen lassen.

(6.2) Aufgabe. Lässt sich in Bezug auf die Aufgabe (6.1) die Fahne  $p \cup H$  in die Fahne  $r^- \cup V^-$  durch ein Produkt aus Grundspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen überführen? Man gebe gegebenenfalls Beispiele an.

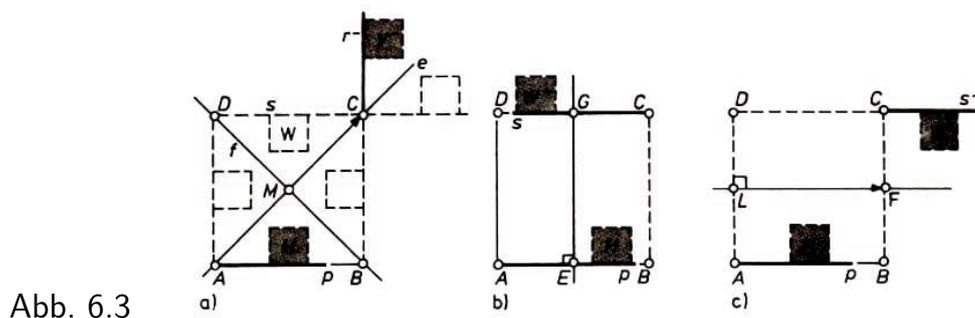
Lösung. Auf Grund der Überlegungen zur Aufgabe (6.1) erkennt man leicht mehrere Möglichkeiten, so folgende (Abb. 6.3 a):

$$p \cup H \xrightarrow{\vec{AC}} s^- \cup W^- \xrightarrow{\sigma_e} r^- \cup V^-$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_M} s \cup W \xrightarrow{\sigma_{f'}} r^- \cup V^-, \quad \text{wobei } f' \text{ die Winkelhalbierende von } \sphericalangle s, r^- \text{ ist}$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_f} r \cup V \xrightarrow{\sigma_C} r^- \cup V^-$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_e} AD^+ \cup ADB^+ \xrightarrow{\vec{AC}} r^- \cup V^-$$



Und damit sind noch nicht alle Möglichkeiten aufgezählt. Eine vollständige Aufzählung ist ohnehin nicht möglich, da die Aufeinanderfolge von Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen, die  $p \cup H$  auf  $r^- \cup V^-$  abbildet, beliebig lang gemacht werden kann.

Wir wenden uns nun der ersten angeführten Möglichkeit zu; sie ist die Verkettung der Verschiebung  $\vec{AC}$  mit anschließender Spiegelung an der Verbindungsgerade  $e$  von  $A$  und  $C$ .

Können die restlichen beiden Lücken in analoger Weise ausgefüllt werden?

Im Hinblick auf  $s \cup W^-$  kann man offenbar nicht mehr mit  $\overrightarrow{AC}$  beginnen. Das muss auch nicht sein. Man gelangt über die Verschiebung  $\overrightarrow{AD}$  und anschließender Spiegelung an der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  zum Ziel. Diese Lösung hat aber einen "Schönheitsfehler":

Die Spiegelung erfolgt nicht an der Verbindungsgeraden von  $A$  und  $D$ . Das kann verbessert werden. Sind  $E$  und  $G$  die Mittelpunkte von  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{CD}$ , so gilt  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG}$ , da  $G$  das Bild von  $E$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{AD}$  ist.

Somit wird durch die Verkettung  $\overrightarrow{EG} \circ \sigma_{g_{EG}}$  aus  $p \cup H$  die Fahne  $s \cup W^-$  (Abb. 6.3b).

Auch die Abbildung von  $p \cup H$  auf  $s^- \cup W$  gelingt auf diese Weise, nämlich durch  $\overrightarrow{LF} \circ \sigma_{g_{LF}}$ , wobei  $L$  und  $F$  die Mittelpunkte von  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  sind (Abb. 6.3c).

Als weitere spezielle Bewegung erklären wir nun

**Definition.**  $\alpha$  ist eine Schubspiegelung längs der Geraden  $g$  (oder Schubspiegelung mit der Achse  $g$ ) genau dann, wenn  $\alpha$  sich als Produkt  $\tau \circ \sigma_g$  einer Verschiebung  $\tau$  mit  $g^\tau = g$  und der Spiegelung an der Geraden  $g$  darstellen lässt.

In dieser Definition lassen wir zu, dass  $\tau$  die identische Verschiebung  $\iota$  ist. In diesem Fall gilt  $g^\tau = g$  für jede Gerade  $g$ . Die Geradenspiegelungen sind damit spezielle Schubspiegelungen.

(6.3) Aufgabe. Zu vorgegebener Gerade  $g$  und vorgegebenen Punkten  $A$  und  $B$ , die auf einer Seite von  $g$  liegen, konstruiere man Punkte  $P, Q \in g$  derart, dass  $\overline{PQ}$  vorgegebene Länge  $a$  besitzt und der Streckenzug  $APQB$  minimale Länge hat.

Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten bei der Lösung der Aufgabe (6.2) lassen eine Reihe von Eigenschaften für die Schubspiegelungen erwarten; so gilt dort: a)  $\overrightarrow{AC} \circ \sigma_e = \sigma_e \circ \overrightarrow{AC}$ , und b)  $\overrightarrow{AC} \circ \sigma_e$  lässt sich als Verkettung von Punkt- und Geradenspiegelung ( $\sigma_M \circ \sigma_{f'}$  bzw.  $\sigma_f \circ \sigma_C$ ) darstellen.

(6.4) Satz. Zu jeder Schubspiegelung  $\tau \circ \sigma_g$  und zu jedem Punkt  $P \in g$  gibt es (genau) eine Gerade  $h \perp g$  derart, dass das Produkt  $\sigma_P \circ \sigma_h$  gleich der vorgegebenen Schubspiegelung ist.

**Beweis.** Es sei  $f$  die Senkrechte zu  $g$  durch  $P$ . Wegen  $g^\tau = g$  gibt es nach Satz (4.9) eine Gerade  $h \perp g$  so, dass  $\tau = \sigma_f \circ \sigma_h$  ist. Dann gilt

$$\tau \circ \sigma_g = (\sigma_f \circ \sigma_h) \circ \sigma_g = \sigma_f \circ \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_P \circ \sigma_h$$

mit Hilfe der Sätze (3.11) und (5.11).

Umgekehrt gilt:

(6.5) Satz. Für jeden Punkt  $P$  und jede Gerade  $h$  ist sowohl  $\sigma_P \circ \sigma_h$  als auch  $\sigma_h \circ \sigma_P$  eine Schubspiegelung.

**Beweis als Aufgabe!**

(6.6) Aufgabe. Ist  $\tau \circ \sigma_g$  eine Schubspiegelung, so gilt  $\tau \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \tau$ .

## II. Produkte und Gruppen ebener Bewegungen

### 7 Dreispiegelungssätze

Wir beginnen mit einer speziellen geometrischen Fragestellung.

(7.1) Aufgabe. Es seien  $P_1, \dots, P_6$  sechs verschiedene Punkte auf einem Kreis und es gelte  $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_4P_5}$  und  $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{P_5P_6}$ . Welche Beziehung gilt dann zwischen  $\overline{P_3P_4}$  und  $\overline{P_6P_1}$ ? Man beweise die Vermutung.

In dieser Aufgabe ist ein Sechseck gegeben, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und bei dem zwei Paare von zueinander parallelen Gegenseiten bestehen. Anhand einer ordentlichen Zeichnung ersehen wir, dass dann wohl auch das dritte Paar von Gegenseiten Parallelität besitzt.

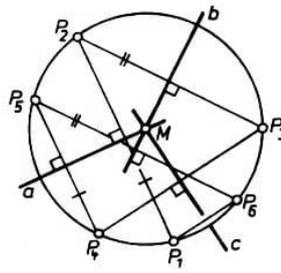


Abb. 7.1

Sind zwei Strecken parallel zueinander, dann gilt dies auch für ihre Mittelsenkrechten (und umgekehrt). Für zwei parallele Kreissehnen müssen nun ihre Mittelsenkrechten zusammenfallen, da sie noch durch den Mittelpunkt  $M$  des Kreises verlaufen. Auf Grund der Voraussetzung haben also  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_4P_5}$  eine gemeinsame Mittelsenkrechte  $a$  und  $\overline{P_2P_3}, \overline{P_5P_6}$  eine gemeinsame Mittelsenkrechte  $b$  (Abb. 7.1). Offenbar wäre nun unsere Behauptung bewiesen, wenn die Mittelsenkrechte  $c$  von  $\overline{P_3P_4}$  auch die von  $\overline{P_6P_1}$  ist.

Denkt man an einen Beweis mit Bewegungen, so liegen bei Mittelsenkrechten die Geradenspiegelungen nahe. Die Behauptung ist mit  $P_6^c = P_1$  äquivalent. Der Punkt  $P_1$  geht beim Spiegelungsprodukt  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b$  in den Punkt  $P_6$  über. Die Behauptung  $P_6^c = P_1$  ist dann äquivalent mit der Aussage, dass  $P_1$  Fixpunkt bei  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b$  ist.

Von Interesse ist nun, welche Bewegung  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  für drei Geraden darstellt, wenn diese einen gemeinsamen Punkt  $M$  besitzen. Die Antwort ist mit Hilfe der Sätze im Abschnitt 3 leicht zu finden.

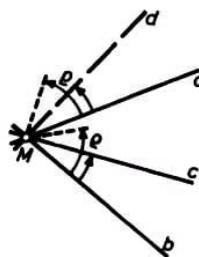


Abb. 7.2

Das Produkt  $\sigma_b \circ \sigma_c$  ist nämlich eine Drehung  $\rho$  um  $M$  (Satz (3.5)), und zu dieser und der Geraden  $a$  durch  $M$  gibt es (genau) eine Gerade  $d$  durch  $M$ , so dass  $\rho = \sigma_a \circ \sigma_d$  gilt (Satz 3.7; siehe dazu Abb. 7.2).

Ein entsprechendes Ergebnis ist bereits in Abb. 3.5 dargestellt.). Aus  $\sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_d$  folgt schließlich  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$ . Wir haben damit folgende Aussage bewiesen:

(7.2) Erster Dreispiegelungssatz. Sind  $a, b, c$  Geraden mit einem gemeinsamen Punkt  $M$ , so ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  eine Spiegelung an einer Geraden  $d$  durch  $M$ .

Dabei wollen wir bewusst bemerken, dass diese Gerade  $d$  aus den vorgegebenen Geraden durch eine einfache Konstruktion angegeben werden kann.

Abschließende Lösung der Aufgabe (7.1). Nach dem Dreispiegelungssatz ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  eine Geradenspiegelung. Also ist  $(\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c) \circ (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c)$  die identische Bewegung und damit insbesondere  $P_1$  Fixpunkt.

(7.3) Aufgabe. Zu einem vorgegebenen Dreieck  $ABC$  konstruiere man alle Punkte  $D$  der Seite  $\overline{CA}$  mit folgender Eigenschaft:

Das Antragen von  $|AD|$  an  $AB^+$  (von  $A$  aus) ergibt einen Punkt  $E \in AB$ ; das Antragen von  $|BE|$  an  $BC^+$  (von  $B$  aus) ergibt einen Punkt  $F \in BC$ ; und das Antragen von  $|CF|$  an  $CA^+$  (von  $C$  aus) ergibt wieder den Ausgangspunkt  $D$ .

Naheliegend ist die Frage, bei welcher anderen Lage der Geraden  $a, b, c$  ebenfalls  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ , eine Geradenspiegelung ist. Ein Vergleich der Sätze (4.1) und (4.9) mit den Sätzen (3.5) und (3.7) zeigt die Möglichkeit, die Beweisüberlegungen für den ersten Dreispiegelungssatz völlig analog mit Verschiebungen nachzuvollziehen (Abb. 7.3).

Sie ergeben den

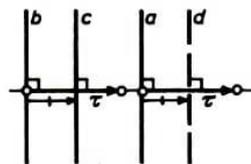


Abb. 7.3

(7.4) Zweiten Dreispiegelungssatz. Sind  $a, b, c$  zueinander parallele Geraden, so ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  eine Spiegelung an einer zu ihnen parallelen Geraden  $d$ .

Beweis als Aufgabe!

Bei allen anderen Lagen von  $a, b, c$  kann es keinen Dreispiegelungssatz geben. Das Produkt  $\sigma_b \circ \sigma_c$  ist nämlich eine Drehung oder eine Verschiebung. Und gilt  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$ , dann müsste  $\sigma_a \circ \sigma_d$  die gleiche Drehung bzw. Verschiebung sein.

Welche Bewegung ist nun aber das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  bei beliebiger Lage von  $a, b$  und  $c$ ? Es sind nur noch zwei Lagen zu diskutieren:

- a)  $a, b$  schneiden sich in einem Punkt  $P$  und  $P$  liegt nicht auf  $c$ ;
- b)  $a \parallel b$  und  $c \not\parallel a$ .

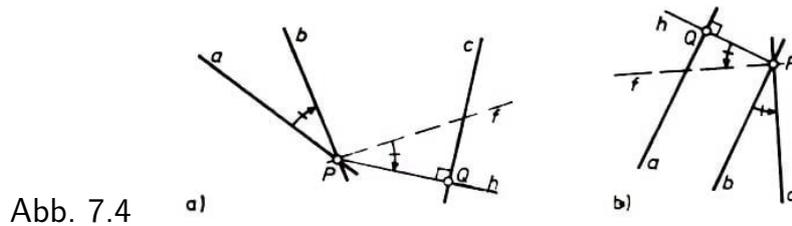


Abb. 7.4

Wir betrachten den ersten Fall (Abb. 7.4a). Hier sei  $h$  das Lot von  $P$  auf  $c$  und  $Q$  der Fußpunkt dieses Lotes. Nach dem ersten Dreispiegelungssatz ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h$  eine Spiegelung an einer Geraden  $f$  durch  $P$ . Wegen  $f \neq h$  liegt  $Q$  nicht auf  $f$ . Damit haben wir

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h) \circ (\sigma_h \circ \sigma_c) = \sigma_f \circ \sigma_Q$$

und das ist wegen  $Q \notin f$  eine echte Schubspiegelung (Satz (6.5)).

Der Fall b) lässt sich völlig analog zu einem Produkt  $\sigma_Q \circ \sigma_f$ , umformen (Abb. 7.4b); und auch hier liegt wegen  $Q \notin f$  eine echte Schubspiegelung vor (Satz (6.5)).

Zusammenfassend ergibt sich

(7.5) Satz. Jedes Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  ist eine Schubspiegelung.

Dieser Sachverhalt ist eine wesentliche Ergänzung der Darlegungen in Abschnitt 6.

(7.6) Aufgabe. Zu vorgegebenen Punkten  $E, F, G$ , die nicht auf einer Geraden liegen, ist ein Dreieck  $ABC$  derart zu konstruieren, dass  $E, F$  und  $G$  die Mittelpunkte von  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  und  $\overline{AB}$  sind.

Die Mittelpunktsbedingung legt nahe, sich um eine Lösung mit Hilfe von Punktspiegelungen zu bemühen. - Es sei  $ABC$  eine Lösung. Dann wird der Punkt  $B$  bei dem Spiegelungsprodukt  $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$  auf sich ab abgebildet (Abb. 7.5a).

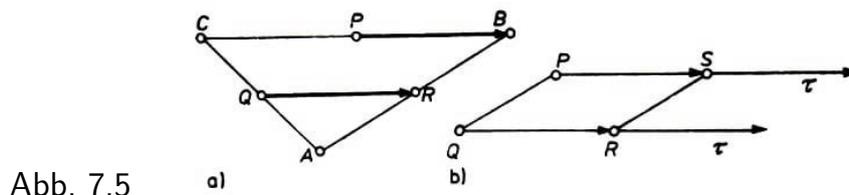


Abb. 7.5

Von Interesse ist nun, was  $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$  für eine Bewegung ist.

Wir erinnern an die Analogien, die wir zwischen Geraden- und Punktspiegelungen schon bemerkt haben. So entsprechen die Sätze (5.16) und (5.17) über Punktspiegelungen und Verschiebungen den Sätzen (3.5) und (3.7) über Geradenspiegelungen und Drehungen. Damit können wir die Beweisüberlegungen, die zum ersten Dreispiegelungssatz führten, auf die vorliegende Problemstellung übertragen (Abb. 7.5 b):  $\sigma_Q \circ \sigma_R$  ist eine Verschiebung  $\tau$  (Satz (5.16)).

Zu dieser und dem Punkt  $P$  gibt es (genau) einen Punkt  $S$  mit  $\sigma_P \circ \sigma_S = \tau$  (Satz (5.17)). Aus  $\sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_P \circ \sigma_S$  folgt schließlich  $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_S$ . Dabei sind für  $P, Q, R$  keine einschränkende Bedingungen erforderlich!

(7.7) Dreispiegelungssatz für Punkte.  $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$  ist stets eine Punktspiegelung  $\sigma_S$ .

Der Punkt  $S$  lässt sich einfach aus  $P, Q, R$  konstruieren. Wegen der Beziehung  $\sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_P \circ \sigma_S$  ist nämlich  $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ . (Aufgabe (5.19)) und damit  $S$  das Bild von  $P$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{QR}$ .

Abschließende Lösung der Aufgabe (7.6). Unsere bisherigen Überlegungen ergeben: Ist  $ABC$  eine Lösung, dann muss  $B$  das Bild von  $P$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{QR}$  sein. Wählen wir umgekehrt dieses Bild als Ecke  $B$  und dann weiter  $C := B^P$  und  $A := C^Q$ , dann erfüllt das Dreieck  $ABC$  wegen  $A^R = ((B^P)^Q)^R = B^P = B$  auch die Eigenschaft, dass  $R$  Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  ist. - Die Aufgabe besitzt also stets genau eine Lösung.

Es ist bemerkenswert, dass auch in entarteten Lagen eine entsprechende Aufgabenstellung sinnvoll ist und dass sie stets genau eine Lösung besitzt.

(7.8) Aufgabe. Zu einem vorgegebenen Viereck  $PQRS$  ist ein Viereck  $ABCD$  derart zu konstruieren, dass  $P, Q, R$  und  $S$  die Mitten der Seiten  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  bzw.  $\overline{DA}$  sind. (Wir empfehlen, diese Aufgabe nicht zu übergehen!)

(7.9) Aufgabe. Es seien in der Ebene fünf Punkte  $F, G, H, I, K$  gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks  $ABCDE$ , für das  $F, G, H, I, K$  in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$  des Fünfecks sind.

Man untersuche, ob ein solches Fünfeck  $ABCDE$  durch die gegebenen Punkte  $F, G, H, I, K$  eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck  $ABCDE$  konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken zusammenfallen oder Seiten teilweise oder in der Verlängerung voneinander liegen. (OJM 141235)<sup>7</sup>.

(7.10) Aufgabe. Wenn eine Figur  $\mathfrak{F}$  zwei verschiedene Symmetriezentren hat, dann besitzt sie beliebig viele. Man beweise diese Aussage und gebe eine Figur dieser Art an.

Lösung. Es seien  $S_1$  und  $S_2$  zwei Symmetriezentren von  $\mathfrak{F}$  und  $S_{i+1}$  das Bild von  $S_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) bei der Verschiebung  $\overrightarrow{S_1 S_2}$ . Zweierlei ist für die Menge der Punkte  $S_i$  zu zeigen: Jeder der Punkte  $S_i, i \geq 3$ , ist ebenfalls Symmetriezentrum von  $\mathfrak{F}$ , und er ist von den Punkten  $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$  verschieden.

Da die Punkte  $S_i$  induktiv definiert sind, werden diese Behauptungen durch vollständige Induktion<sup>8</sup> bewiesen. Für  $S_2$  gelten die Behauptungen nach Voraussetzung. -

Zum Schluss "von  $n$  auf  $n + 1$ " setzen wir voraus, dass sie für alle Punkte  $S_n$ , mit  $n \geq 2$  erfüllt sind.

Wegen  $\overrightarrow{S_n S_{n+1}} = \overrightarrow{S_1 S_2}$  ist  $\sigma_{S_n} \circ \sigma_{S_{n+1}} = \sigma_{S_1} \circ \sigma_{S_2}$  (nach (5.19)) und damit  $\sigma_{S_{n+1}} = \sigma_{S_1} \circ \sigma_{S_2} \circ \sigma_{S_n}$ . Folglich gilt  $\mathfrak{F}^{S_{n+1}} = \mathfrak{F}$ , d.h., auch  $S_{n+1}$  ist Symmetriezentrum von  $\mathfrak{F}$ .

<sup>7</sup>Siehe dazu auch den Beitrag des Verfassers in alpha 10 (1976), Heft 3, S. 52 bis 53.

<sup>8</sup>Zum Selbststudium dieser mathematischen Beweismethode sei das leicht verständliche Büchlein von I. S. Sominski: Die Methode der vollständigen Induktion (MSB Nr. 8, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin) empfohlen.

Wäre  $S_{n+1}$  mit einem Punkt  $S_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , gleich, so würde sich wegen  $\overrightarrow{S_n S_{n+1}} = \overrightarrow{S_1 S_2} = \overrightarrow{S_{i-1} S_i}$  zunächst  $\overrightarrow{S_n S_{i+1}} = \overrightarrow{S_i S_i}$  (nach (5.19)) und weiter  $S_n = S_{i-1}$  im Widerspruch zur Voraussetzung für  $S_n$  ergeben.

Im Fall  $S_{n+1} = S_1$  ergäbe sich  $S_n = S_2^{S_1}$  und damit  $S_n \in S_1 S_2^-$ . Es gilt aber  $S_i \in S_1 S_2^+$ ,  $i \geq 2$ , was man leicht durch vollständige Induktion bestätigt.

Ein einfaches Beispiel für eine Figur mit (wenigstens) zwei Symmetriezentren ist ein Streifen (Abb. 7.6 a).

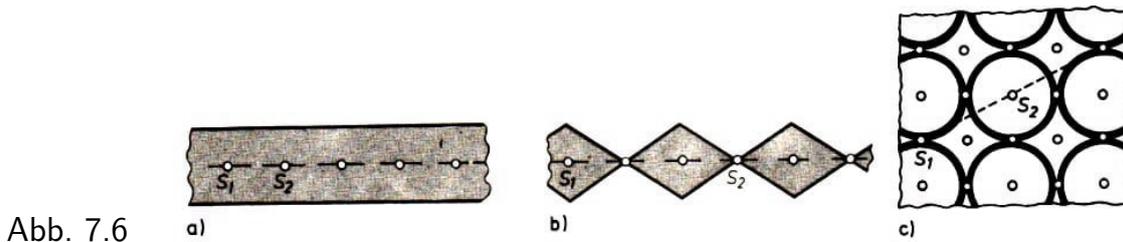
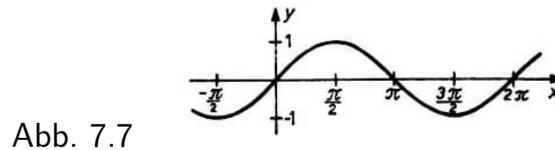


Abb. 7.6 b zeigt, dass nicht wie beim Streifen mit  $S_1, S_2$  alle Punkte der Geraden  $g_{S_1 S_2}$  Symmetriezentren sein müssen; die Symmetriezentren müssen auch nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (Abb. 7.6 c).

(7.11) Aufgabe. Hat ein Vieleck mehr als zwei Symmetrieachsen, so schneiden sich diese in einem Punkt.



(7.12) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen und alle Symmetriezentren des Graphen der Sinusfunktion  $f(x) = \sin x$  (der "Sinuskurve"; Abb. 7.7).

Das Ergebnis in (7.12) vermittelt eine bemerkenswerte Einsicht: Die Aussage in (7.11) ist nicht für alle Figuren mit mehr als zwei Symmetrieachsen gültig. Und Symmetriezentren müssen nicht - wie in Abb. 7.6a bis c - auf Symmetrieachsen liegen.

## 8 Eine Übersicht über ebene Bewegungen; Produkte von Bewegungen

In den bisherigen Darlegungen wurden zwei wesentliche Fragen angesprochen aber nicht vollständig beantwortet:

Erstens ist noch offen, ob es neben den Geradenspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Schubspiegelungen noch weitere ebene Bewegungen gibt. Zweitens wollten wir die Beweglichkeitsaussage B 7 beweisen. Der folgende Satz und sein Beweis werden darauf umgehend eine Antwort geben.

(8.1) Darstellungssatz für ebene Bewegungen. Jede Bewegung kann als Produkt von höchstem drei Geradenspiegelungen dargestellt werden.

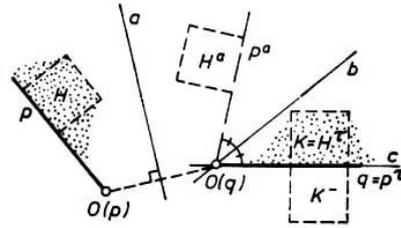


Abb. 8.1

Beweis. Es sei  $\tau$  irgendeine Bewegung und  $p \cup H$  eine beliebige Fahne; weiterhin sei  $q = p^\tau$  und  $K = H^\tau$  (Abb. 8.1). - Es gibt eine Gerade  $a$ , an der der Scheitel  $O(p)$  gespiegelt in den Scheitel  $O(q)$  übergeht; falls  $O(p) \neq O(q)$  ist, leistet das gerade die Mittelsenkrechte bezüglich dieser Punkte.

Die Fahnen  $q \cup K (= (p \cup H)^\tau)$ , und  $(p \cup H)^a$  haben einen gemeinsamen Scheitel. Im weiteren können wir deshalb den Überlegungen folgen, die zum Satz (3.6a) führten. (Vgl. dazu Abb. 3.4a.)

Danach spiegeln wir nun an der Winkelhalbierenden  $b$  von  $\sphericalangle p^a, q$ . Wegen  $(p^a)^b = q$  muss  $(H^a)^b = K$  oder  $(H^a)^b = K^-$  sein.

Im ersten Fall folgt  $\tau = \sigma_a \circ \sigma_b$  auf Grund der (bereits bewiesenen) Starrheit B 8.

Im zweiten Fall ergibt die Spiegelung an derjenigen Geraden  $c$ , die  $q$  enthält, zunächst  $((p^a)^b)^c = q^c = q = p^\tau$  und  $((H^a)^b)^c = (K^-)^c = K = H^\tau$ ; damit ist  $\tau = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  ebenfalls nach B 8.

Wir haben eine Fahne  $p \cup H$  durch höchstens drei Geradenspiegelungen in eine Fahne  $q \cup K$  überführen können; die dafür geeigneten Geraden konnten wir durch eine Konstruktion angeben. Da es - wie wir am Ende von Abschnitt 2 erkannten - an jeder Geraden eine Spiegelung gibt, ist damit die Existenz einer Bewegung  $\tau$  mit  $p^\tau = q$  und  $H^\tau = K$  nachgewiesen, d.h., die Beweglichkeitsaussage B 7 ist bewiesen.

Weiterhin gibt der Satz (8.1) eine vollständige Übersicht über alle Bewegungen in der Ebene. Nach ihm sind nur die Zweier- und Dreierprodukte von Geradenspiegelungen zu betrachten. Und das geschah bereits ausgiebig in den Abschnitten 3 bis 7. Die Zweierprodukte sind Drehungen (speziell auch Punktspiegelungen) oder Verschiebungen (nach den Sätzen (3.5) und (4.1)); die Dreierprodukte sind Schubspiegelungen (Satz (7.5)), in speziellen Fällen Geradenspiegelungen (Dreispiegelungssätze (7.2) und (7.4)). Mit den bisher behandelten speziellen Bewegungen sind demnach alle Bewegungen erfasst.

Die Erklärung der Bewegung, die in den Schulbüchern zu finden ist, besteht zu Recht, wonach eine Bewegung eine Geradenspiegelung, Drehung, Verschiebung oder eine endliche Nacheinanderausführung dieser Abbildungen ist. Man könnte diese Erklärung sogar auf die Spiegelungen an Geraden und auf endliche Produkte mit diesen reduzieren.

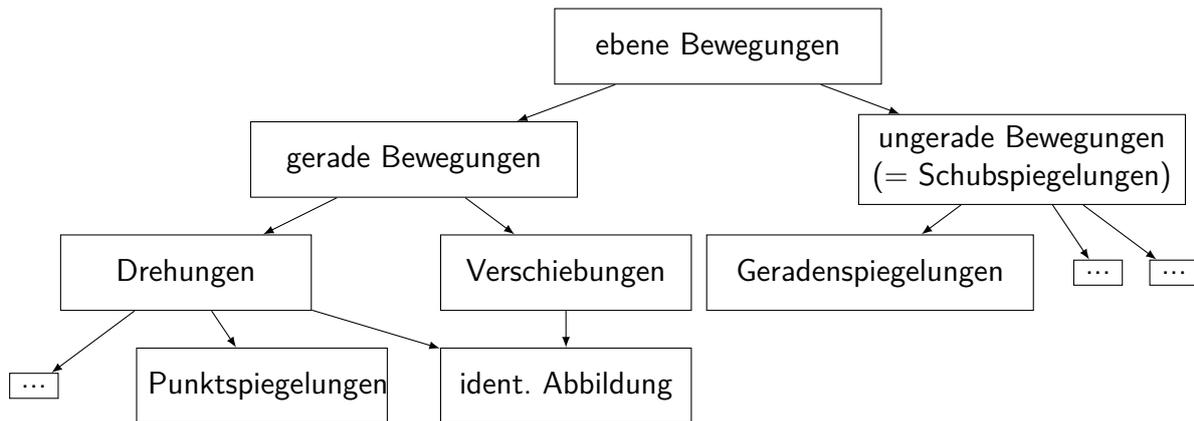
Eine ebene Bewegung heißt gerade, wenn sie sich durch die Verkettung einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen darstellen lässt. Die Orientierung der Ebene bleibt bei einer solchen Bewegung invariant. Deshalb kann sie niemals gleich einem Produkt einer ungeraden Anzahl von Geradenspiegelungen - also ungerade - sein.

Aus einer mehr den Anwendungen zugewandten Sicht unterscheidet man zwischen eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen, je nachdem, ob die Orientierung erhalten

bleibt oder nicht. So interessieren in der Physik vielfach nur die eigentlichen Bewegungen. (Bei ihrer Veranschaulichung mit dem Transparentpapier kommt man ohne Wenden aus.) Die Begriffe "gerade" und "eigentlich" bzw. "ungerade" und "uneigentlich" sind hier offenbar äquivalent.

Nach dem Satz (8.1) ist jede gerade (bzw. ungerade) Bewegung einer Verkettung von zwei (bzw. drei) Geradenspiegelungen gleich.

Unsere bisherigen Einsichten erlauben folgende Übersicht über die ebenen Bewegungen:



Für jede Geraden- und Punktspiegelung  $\sigma$  gilt  $\sigma \neq \iota$  und  $\sigma \circ \sigma = \iota$  (Folgerung (2.5), Satz (5.2)). Dementsprechend nennt man eine Bewegung mit diesen Eigenschaften<sup>9</sup> eine Spiegelung.

(8.2) Aufgabe. Man zeige, dass es außer den Geraden- und Punktspiegelungen keine weiteren Spiegelungen (in der Ebene) gibt.

Aus dem Darstellungssatz (8.1) ergibt sich (zusammen mit dem Satz (6.4)) noch die bemerkenswerte

(8.3) Folgerung. Jede ebene Bewegung ist gleich einer Verkettung von zwei Spiegelungen.

(8.4) Aufgabe. Wie viele Bewegungen der Ebene gibt es, die eine Strecke  $\overline{AB}$  auf sich abbilden?

Lösung. Als mögliche Lösungen sieht man sofort die Spiegelung an dem Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  und die identische Abbildung  $\iota$ . Aber sind das bereits alle Lösungen?

Da  $(\overline{AB})^\tau = \overline{A^\tau B^\tau}$  (Eigenschaft B 3') für jede Bewegung  $\tau$  gilt, sind diejenigen Bewegungen zu suchen, die  $\{A, B\}$  auf sich abbilden. Dazu sei  $B$  eine Halbebene mit der Begrenzung  $g_{AB}$ . Nun sind offenbar die vier Bewegungen, die die Fahne  $AB^+ \cup H$  in die Fahne  $AB^+ \cup H^+$  oder  $AB^+ \cup H^-$  oder  $BA^+ \cup H$  oder  $BA^+ \cup H^-$  überführen, alle Lösungen. (Existenz und Eindeutigkeit gewährleisten B 7 und B 8.)

Das sind neben der identischen Abbildung  $\iota$  die Spiegelung an  $g_{AB}$ , die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  und die Spiegelung an dem Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ .

<sup>9</sup>Eine eineindeutige Abbildung  $\alpha$  von einer Menge auf sich mit  $\alpha \neq \iota$  und  $\alpha \circ \alpha = \iota$  wird gewöhnlich involutorisch genannt.

(8.5) Aufgabe. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecke  $ABC$  werden gleichseitige Dreiecke errichtet. Es ist zu zeigen, dass die Mittelpunkte<sup>10</sup> dieser Dreiecke selbst ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Es seien  $D, E$  und  $F$  die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke über den Seiten  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  und  $\overline{AB}$ . Um diese Punkte gibt es Drehungen  $\rho_D, \rho_E$  und  $\rho_F$ , die durch  $B^{\rho_D} = C$ ,  $C^{\rho_E} = A$  und  $A^{\rho_F} = B$  bestimmt sind.

Bei geeigneter Orientierung ist  $\rho_D = \rho(D, 120^\circ)$ ,  $\rho_E = \rho(E, 120^\circ)$  und  $\rho_F = \rho(F, 120^\circ)$ . Für weitere Schlussfolgerungen scheint es nützlich, zunächst Näheres über die Verkettung zweier Drehungen bereitzustellen.

Es sei  $\rho_1$  die Drehung um  $P$  mit dem Drehmaß  $\vec{\alpha}$  und  $\rho_2$  die Drehung um  $Q$  mit dem Drehmaß  $\vec{\beta}$ . Wir legen durch  $P$  und  $Q$  eine Gerade  $g$  - im Fall  $P = Q$  steht uns dazu jede Gerade durch  $P$  zur Wahl - und bestimmen dazu die Geraden  $e$  durch  $P$  und  $f$  durch  $Q$  derart, dass  $\rho_1 = \sigma_e \circ \sigma_g$  und  $\rho_2 = \sigma_g \circ \sigma_f$  gilt (Satz (3.7); Abb. 3.4b).

Die Verkettung  $\rho_1 \circ \rho_2$  ergibt dann  $\sigma_e \circ \sigma_f$ .

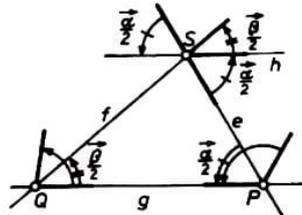


Abb. 8.2

Sind  $e$  und  $f$  nicht parallele Geraden, so ist  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um ihren Schnittpunkt  $S$ . Zur Bestimmung des Drehmaßes legen wir durch  $S$  die Parallele  $h$  zu  $g$  (Abb. 8.2). Da bei den Verschiebungen  $\tau_1 = \overline{PS}$  und  $\tau_2 = \overline{QS}$  offenbar  $g^{\tau_1} = h = g^{\tau_2}$  sowie  $e^{\tau_1} = e$ ,  $f^{\tau_2} = f$  gilt und Verschiebungen orientierungserhaltend sind, hat  $\sigma_e \circ \sigma_h$  das Drehmaß  $\vec{\alpha}$  und  $\sigma_h \circ \sigma_f$  das Drehmaß  $\vec{\beta}$ . Folglich besitzt  $\sigma_e \circ \sigma_f$  das Drehmaß  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ . Diese Summe ist auf Grund der vereinbarten Messung von Größen gerichteter Winkel bis auf Vielfache von  $360^\circ$  zu bilden.

Die Parallelität von  $e$  und  $f$  ist äquivalent mit der Gleichung  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 0^\circ \pmod{360^\circ}$ <sup>11</sup>. Mit  $e \parallel f$  ist  $\sigma_e \circ \sigma_f$  eine Verschiebung. Dabei ist  $e = f$  nicht ausgeschlossen. Zusammenfassend gilt

(8.6) Satz. Das Produkt  $\rho(P, \vec{\alpha}) \circ \rho(Q, \vec{\beta})$  zweier Drehungen ist entweder eine nicht identische Drehung mit dem Drehmaß  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \pmod{360^\circ}$ , falls diese Summe ungleich  $0^\circ \pmod{360^\circ}$  ist, oder eine Verschiebung, falls  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 0^\circ \pmod{360^\circ}$  gilt.

Bevor wir uns wieder der Lösung der Aufgabe (8.5) zuwenden, möchte der Leser noch folgenden Sachverhalt begründen.

<sup>10</sup>In einem gleichseitigen Dreieck (und allgemein in jedem einfachen regelmäßigen  $n$ -Eck) fallen Schwerpunkt und Mittelpunkt des Umkreises zusammen. Wir nennen ihn dann Mittelpunkt der Figur. Er ist nämlich das Zentrum einer hier bestehenden Drehsymmetrie (Abschnitt 10).

<sup>11</sup>Als Abkürzung für "bis auf ein Vielfaches von  $360^\circ$ ".

(8.7) Aufgabe. Haben Drehungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  um  $P$  und  $Q$  mit gleichem Drehmaß für einen Punkt  $A$  ein und dasselbe Bild, dann ist  $\rho_1 = \rho_2$ .

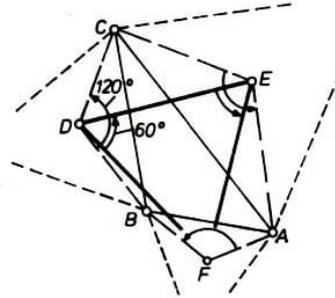


Abb. 8.3

Abschließende Lösung der Aufgabe (8.5). Das Produkt  $\sigma_D \circ \sigma_E$  ist nach dem Satz 8.6 eine Drehung  $\rho(G, 240^\circ)$  um einen Punkt  $G$ , und dieser bildet mit  $D$  und  $E$  ein gleichseitiges Dreieck (wegen  $|\sphericalangle GDE| = |\sphericalangle DEG| = 60^\circ$ ; Abb. 8.3).

Die Drehungen  $\rho(G, 240^\circ)$  und  $g_{F^{-1}}$  haben gleiches Drehmaß und bilden beide  $B$  auf  $A$  ab. Nach (8.7) folgt daraus  $F = G$ .

(8.8) Aufgabe. Es sei  $ABCDEF$  ein konvexes Sechseck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und dessen Längen der Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  und  $\overline{EF}$  gleich der Radiuslänge des Kreises sind. Man beweise, dass dann die Mittelpunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  der übrigen Seiten  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$  und  $\overline{FA}$  ein gleichseitiges Dreieck bilden.

(8.9) Aufgabe. Über den Seiten eines konvexen Vierecks  $ABCD$  seien die rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke  $APB$ ,  $BQC$ ,  $CRD$  und  $DSA$  errichtet. (Die Scheitel der rechten Winkel sind  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $S$ .) Die Strecken  $\overline{PR}$  und  $\overline{QS}$  sind dann gleichlang und senkrecht zueinander.

Als Spezialfall ergibt sich die Aussage in der Aufgabe (3.18).

Unter Einbeziehung von Entartungen gilt die Behauptung auch, wenn die Dreiecke zum Inneren des Vierecks hin errichtet werden. Hier ist die Aussage in der Aufgabe (5.15) ein Spezialfall.

Man beweise diese Behauptungen.

Unter den noch nicht im einzelnen erörterten Nacheinanderausführungen von zwei speziellen Bewegungen ist die von zwei Verschiebungen von wesentlicher Bedeutung.

(8.10) Satz. Die Verkettung zweier Verschiebungen ist stets eine Verschiebung; es gilt  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Beweis. Wir können offenbar von einem Produkt der Art  $\overline{AB} \circ \overline{BC}$  ausgehen. Nach dem Satz (5.17) ist dieses Produkt gleich einem Produkt von vier Punktspiegelungen; und dieses lässt sich nach dem Dreispiegelungssatz (7.7) auf ein Produkt von zwei Punktspiegelungen reduzieren. Folglich ist  $\overline{AB} \circ \overline{BC}$  eine Verschiebung (Satz (5.16)). Sie bildet  $A$  offensichtlich auf  $C$  ab.

(8.11) Aufgabe. Ist  $\alpha = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ , so ergibt  $\alpha \circ \alpha$  stets eine Verschiebung.

Die nächste Aufgabe bietet Gelegenheit, sich mit weiteren Verkettungen von zwei speziellen Bewegungen zu beschäftigen und sich eine diesbezügliche Übersicht zu verschaffen.

(8.12) Aufgabe. Man bestimme die speziellen Bewegungen, die bei den durch Tabelle 3 vorgegebenen Verkettungen (in der Reihenfolge "Zeile"  $\circ$  "Spalte") jeweils entstehen. (Dabei sind Fallunterscheidungen nicht ausgeschlossen!) Die mit "x" gekennzeichneten Teile sind bereits ausreichend behandelt.

(8.13) Aufgabe. Es sei  $ABCDEF$  ein regelmäßiges Sechseck. Wie viele Bewegungen der Ebene gibt es, die die Strecke  $\overline{AB}$  auf die Strecke  $\overline{CD}$  abbilden? (Man nutze die Ergebnisse aus (8.4).)

Tabelle 3

	Spiegelung an $b$	Drehung um $Q$	Spiegelung an $S$	Verschiebung $\overrightarrow{CD}$
Spiegelung an $a$	1) x	2)	3) x	4)
Drehung um $P$	5)	6) x	7)	8)
Spiegelung an $R$	9) x	10)	11) x	12)
Verschiebung $\overrightarrow{AB}$	13)	14)	15)	16) x

## 9 Gruppen und Untergruppen ebener Bewegungen

Wir betrachten zunächst die Menge  $\mathfrak{B}$  aller Bewegungen der Ebene  $\varepsilon$ .

Die Nacheinanderausführung  $\circ$  ist nach der Eigenschaft B 5 Abschnitt 1) eine Operation in  $\mathfrak{B}$ . Dabei erweist sich die identische Abbildung  $\iota$  von  $\varepsilon$  als Einselement; und mit  $\alpha$  ist auch die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1}$  in  $\mathfrak{B}$  enthalten (siehe B 5), d.h., jedes Element von  $\mathfrak{B}$  besitzt sein Inverses.

Schließlich ist die Nacheinanderausführung assoziativ. (Das gilt ja bereits für Abbildungen.) Damit sind alle Eigenschaften für eine Gruppe (vgl. die Einführung) erfüllt.

(9.1) Satz. Die Bewegungen der Ebene bilden mit der Verkettung  $\circ$  als Operation eine Gruppe, die Bewegungsgruppe  $(\mathfrak{B}, \circ)$  der Ebene.

Die Gruppe  $(\mathfrak{B}, \circ)$  ist nicht kommutativ, denn z.B. gilt im allgemeinen nicht  $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$ . (Siehe Aufgabe (3.11).)

(9.2) Aufgabe. Bilden die Bewegungen (der Ebene), die eine Strecke  $\overline{AB}$  auf sich abbilden (Aufgabe (8.4)), eine Gruppe? (Abb. 9.1)

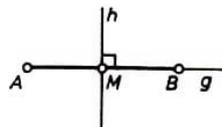


Abb. 9.1

Lösung. Die Menge besteht aus der identischen Abbildung  $\iota$  (der Ebene) der Spiegelung  $\sigma_g$  an  $g = g_{AB}$ , der Spiegelung  $\sigma_h$  an der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  sowie aus der Spiegelung  $\sigma_M$  an dem Mittelpunkt  $M$  von  $\overline{AB}$  (Lösung der Aufgabe (8.4)).

Es sei  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}} = \{\iota, \sigma_g, \sigma_h, \sigma_M\}$ . Wir bilden nun bezüglich  $\circ$  sämtliche 16 Zweierprodukte und stellen sie in Tabelle 4 zusammen.

Tabelle 4

$\circ$	$\iota$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma_M$
$\iota$	$\iota$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma_M$
$\sigma_g$	$\sigma_g$	$\iota$	$\sigma_M$	$\sigma_h$
$\sigma_h$	$\sigma_h$	$\sigma_M$	$\iota$	$\sigma_g$
$\sigma_M$	$\sigma_M$	$\sigma_h$	$\sigma_g$	$\iota$

Tabelle 5

$\circ$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_4$	$\alpha_3$
$\alpha_3$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\alpha_4$	$\alpha_4$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_1$

Man erkennt sofort, dass die Verkettung  $\circ$  eine Operation in  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  ist, dass  $\iota$  Einselement ist und dass jedes Element sein Inverses besitzt. Die Assoziativität (Gruppeneigenschaft G 1) steht für Bewegungen stets zur Verfügung. Die Struktur  $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$  ist also eine Gruppe.

In der Tabelle 4 ist auffällig, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element aus  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  genau einmal auftritt. Das ist kein Zufall, sondern eine Eigenschaft, die jede Gruppe (mit endlich vielen Elementen) in einer solchen tabellarischen Darstellung (Cayleysche Gruppentafel<sup>12</sup>) zeigt. Sie besagt nämlich, dass sowohl die Gleichung  $\alpha \circ x = \beta$  als auch die Gleichung  $y \circ \alpha = \beta$  (genau) eine Lösung  $x$  bzw.  $y$  besitzt, d.h., dass die Gruppeneigenschaft G 4 gilt.

Überdies geht die Tafel beim Spiegeln an der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) in sich über. Das bedeutet, dass  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  gilt (Eigenschaft G 5); die Gruppe ist demnach kommutativ.

Eine Gruppe von vier Elementen  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ , deren Gruppentafel der Struktur nach wie die der Gruppentafel von  $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$  ist - siehe Tabelle 5 - heißt Kleinsche Vierergruppe.<sup>13</sup>

Zweite Lösung für (9.2). Da  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{B}$  ist, genügt es nachzuweisen, dass  $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$  eine Untergruppe von  $(\mathfrak{B}, \circ)$  ist. Und dafür reicht aus, dass mit  $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  auch  $\alpha \circ \beta$  und  $\alpha^{-1}$  in  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  liegen. Dies erkennt man leicht (auch ohne Tafel).

Das Untergruppenkriterium können wir günstig auch zum Beweis des Satzes 9.1 einsetzen. Die Bewegungen sind eine Teilmenge der Transformationen der Ebene; und diese bilden mit der Verkettung  $\circ$  eine Gruppe (Einführung). Es genügt nun zu zeigen, dass mit  $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$  auch  $\alpha \circ \beta, \alpha^{-1} \in \mathfrak{B}$  gilt; und dies gewährleistet gerade die Eigenschaft B 5 (Abschnitt 1).

(9.3) Aufgabe. Bilden die Bewegungen (der Ebene), die die Seite  $\overline{AB}$  eines regelmäßigen Sechsecks  $ABCDEF$  auf die Seite  $\overline{CD}$  abbilden (Aufgabe (8.13)) eine Gruppe?

Wir mustern anhand der "Übersicht über die ebenen Bewegungen" spezielle Bewegungen nach (Unter-) Gruppeneigenschaften durch.

(9.4) Aufgabe. Man untersuche die folgenden Mengen von Bewegungen danach, ob sie eine Gruppe bilden:

- a) alle geraden Bewegungen;
- b) alle ungeraden Bewegungen;
- c) alle Drehungen;
- d) alle Verschiebungen;
- e) alle Punktspiegelungen
- f) alle Geradenspiegelungen.

---

<sup>12</sup>benannt nach Arthur Cayley (1821-1895), englischer Mathematiker (Professor in Cambridge).

<sup>13</sup>Felix Klein (1849-1925), deutscher Mathematiker (Professor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen); in seinem berühmten "Erlanger Programm" (1872) systematisierte er die Geometrie mit Hilfe der Gruppentheorie.

Lösungsbeispiele.

a) Ja. Sind  $\alpha, \beta$  gerade Bewegungen, dann ist offenbar  $\alpha \circ \beta$  gerade und auch  $\alpha^{-1}$  gerade, denn aus  $a = \sigma_a \circ \sigma_b$  folgt  $\alpha^{-1} = \sigma_b \circ \sigma_a$ .

b) Nein, denn das Produkt zweier ungerader Bewegungen ist natürlich gerade.

c) Ja. Das Produkt zweier Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung (Satz 8.10). Die Umkehrabbildung einer Verschiebung  $\overrightarrow{AB}$  ist die Verschiebung  $\overrightarrow{BA}$  (wegen  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \iota$ ). Überdies gilt mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes (7.7) (für Punkte)

$$\begin{aligned} \tau_1 \circ \tau_2 &= (\sigma_a \circ \sigma_b) \circ (\sigma_c \circ \sigma_d) = (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c) \circ \sigma_d = (\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a) \circ \sigma_d \\ &= \sigma_c \circ (\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_d) = \sigma_c \circ (\sigma_d \circ \sigma_a \circ \sigma_b) = \tau_2 \circ \tau_1 \end{aligned}$$

Die Verschiebungen bilden also eine kommutative Gruppe.

## 10 Erzeugte Bewegungsgruppen und Figuren

Aus Teilmengen von Bewegungen können durch endliche Produkte ihrer Elemente Untergruppen der Bewegungsgruppe entstehen. So bildet die Menge aller Geradenspiegelungen, die selbst keine Untergruppe von  $(\mathfrak{B}, \circ)$  ist, durch endlich lange Verkettungen die Bewegungsgruppe  $(\mathfrak{B}, \circ)$ . Dabei reichen schon - wie der Satz (8.1) zeigt - Produkte von höchstens drei Geradenspiegelungen aus.

Auf entsprechende Weise wird die Gruppe  $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$  von  $\{\sigma_g, \sigma_h\}$  aber auch von  $\{\sigma_g, \sigma_M\}$  erzeugt.

Welche Bedingungen sind nun an eine Teilmenge  $T$  von Bewegungen zu stellen, damit sie auf solche Weise eine Untergruppe erzeugt?

Wir klären diese Frage gleich allgemein bezüglich irgendeiner Gruppe. Dabei ist der Begriff "Erzeugung" noch präzise zu erfassen. (Eine Einschränkung der Darlegungen auf die Bewegungsgruppe würde hinsichtlich der folgenden Überlegungen keine Vereinfachungen erbringen. Wir empfehlen dennoch dem Leser, der in gruppentheoretischen Fragen unerfahren ist, an die konkrete Bewegungsgruppe zu denken.)

Es sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $T \neq \emptyset$  eine Teilmenge von  $G$ . Mit  $\langle T \rangle$  bezeichnen wir die Menge, die aus allen Produkten  $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$ ,  $n \geq 1$ , besteht, bei denen die Elemente  $\alpha_i$ , oder ihre Inversen  $\alpha_i^{-1}$  aus  $T$  sind.<sup>14</sup>

(10.1) Satz.  $(\langle T \rangle, \circ)$  ist stets eine Untergruppe von  $(G, \circ)$ .

Beweis. Sind  $\alpha = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$  und  $\beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_m$  aus  $\langle T \rangle$ , so ist offensichtlich

$$\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n \circ \beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_m$$

aus  $\langle T \rangle$ . Weiterhin liegt auch  $\alpha^{-1} = (\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \circ \dots \circ \alpha_1^{-1}$  in  $\langle T \rangle$ ; denn ist  $\alpha_i$  oder  $\alpha_i^{-1}$  aus  $T$ , so ist natürlich auch  $\alpha_i^{-1}$  oder  $(\alpha_i^{-1})^{-1} = \alpha_i$  aus  $T$ .

<sup>14</sup>Da wir in einer Gruppe arbeiten, existiert natürlich zu jedem Element  $\alpha$  aus  $T$  das dazu inverse  $\alpha^{-1}$ ; dieses muss aber nicht in  $T$  liegen (!).

Ist  $(U, \circ)$  eine Untergruppe von  $(G, \circ)$ , die  $T$  enthält, so ist auf Grund der Gruppeneigenschaften von  $U$  jedes Element von  $\langle T \rangle$  in  $U$  enthalten. Demnach bildet  $\langle T \rangle$  die kleinste Untergruppe in  $(G, \circ)$ , die  $T$  enthält.

$(\langle T \rangle, \circ)$  - oder auch kurz  $\langle T \rangle$  - heißt die von  $T$  erzeugte Untergruppe und  $T$  ein Erzeugendensystem dieser Untergruppe. Sie kann auch ein weiteres Erzeugendensystem besitzen, wie das Beispiel  $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$  zeigt.

Zur eingangs gestellten Frage ist nun zu sagen, dass jede Teilmenge  $T \neq \emptyset$  aus  $\mathfrak{B}$  genommen werden kann.

(10.2) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die von  $\{\sigma_a, \sigma_b\}$  erzeugte Untergruppe, wenn  $a$  und  $b$  verschiedene und zueinander parallele Geraden sind.

Lösung. Da  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$  mit ihren Inversen  $\sigma_a^{-1}$  bzw.  $\sigma_b^{-1}$  übereinstimmen, haben wir nur Produkte endlicher Länge zu betrachten, die mit  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$  gebildet sind. Stehen innerhalb eines solchen Produkts zwei gleiche Faktoren nebeneinander, so verkürzt sich das gesamte Produkt wegen  $\sigma_a \circ \sigma_a = \iota$  und  $\sigma_b \circ \sigma_b = \iota$ .

Die geraden Produkte (d.h. mit einer geraden Anzahl von Faktoren) haben dann bis auf  $\sigma_a \circ \sigma_a = \iota$  und  $\sigma_b \circ \sigma_b = \iota$  die Form  $(\sigma_a \circ \sigma_b)^n$  oder  $(\sigma_b \circ \sigma_a)^n$ ,  $n \geq 1$ .

Dabei soll hier und später  $\alpha^n$  einfach die Abkürzung für das Produkt  $\alpha \circ \dots \circ \alpha$  sein, in dem  $\alpha$   $n$ -mal auftritt.<sup>15</sup> Wir erweitern diese Festlegung auf ganzzahlige "Exponenten" durch  $\alpha^0 := \iota$  und  $\alpha^{-n} := (\alpha^{-1})^n$  für  $n \geq 1$ .

Da  $a, b$  echt parallel sind, ist  $\sigma_a \circ \sigma_b$  eine nicht identische Verschiebung  $\tau$ ; ferner ist

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_b^{-1} \circ \sigma_a^{-1} = (\sigma_a \circ \sigma_b)^{-1} = \tau^{-1}$$

Mit  $\tau$  ist auch  $\tau^n$  eine Verschiebung für jede ganze Zahl  $n$ .

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt  $A_0 \in a$  und setzen  $A_n$  für das Bild von  $A_0$  bei der Verschiebung  $\tau^n$ . (Damit ist  $\tau^n = \overrightarrow{A_0 A_n}$ . In diese Darstellung ordnet sich  $\tau^0 = \overrightarrow{A_0 A_0}$  wegen  $\tau^0 = \iota$  mit ein.)

Die Punkte  $\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$  liegen auf der Senkrechten zu  $a$  und  $b$  durch  $A_0$  (Satz (4.9)), und sie sind voneinander verschieden, was man genau so wie bei der Lösung der Aufgabe (7.2) zeigen kann. Demnach sind auch die Verschiebungen  $\overrightarrow{A_0 A_n}$  ( $n$  ganzzahlig) alle voneinander verschieden.

Die ungeraden Produkte sind neben  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$  die Produkte der Form  $\sigma_a \circ (\sigma_b \circ \sigma_a)^n = \sigma_a \circ \tau^{(-n)}$  und  $\sigma_b \circ (\sigma_a \circ \sigma_b)^n = \sigma_b \circ \tau^n$ ,  $n \geq 1$ .

Nach dem zweiten Dreispiegelungssatz (7.4) sind es Geradenspiegelungen. Wir bezeichnen diese Geraden mit  $a_{-n}$  bzw.  $a_{n+1}$ , so dass  $\sigma_a \circ \tau^{(-n)} = \sigma_{-n}$  und  $\sigma_b \circ \tau^n = \sigma_{a_{n+1}}$  für  $n \geq 1$  gilt. In diese Bezeichnung fügt sich die Festlegung  $a_0 := a$  und  $a_1 := b$  gut ein; tatsächlich ist  $\sigma_a = \sigma_a \circ \tau^0 = \sigma_{a_0}$  und  $\sigma_b = \sigma_b \circ \tau^0 = \sigma_{a_1}$ .

Die Lage dieser Geraden lässt sich mit Hilfe der Punkte  $A_n$  ( $n$  ganzzahlig) einfach beschreiben:

Wegen  $(A_0^a) \tau^{(-n)} = A_0^{\tau^{(-n)}} = A_n$  und  $(A_0^b) \tau^n = ((A_0^a)^b) \tau^n = A_{n+1}$  für  $n \geq 0$  ist  $a_i$  die

<sup>15</sup>Präzise lässt sich  $\alpha^n$  induktiv erklären:  $\alpha^1 := \alpha$ ;  $\alpha^{k+1} := \alpha^k \circ \alpha$ .

Mittelsenkrechte von  $\overline{A_0A_i}$  für jede ganze Zahl  $i \neq 0$  (Abb. 10.1).

Die Spiegelungen  $\sigma_{a_i}$  sind ebenfalls alle voneinander verschieden. Wären nämlich die Mittelsenkrechten von  $\overline{A_0A_i}$  und  $\overline{A_0A_j}$  ( $i, j \neq 0$ , ganzzahlig) gleich, so wäre  $A_i = A_j$ .

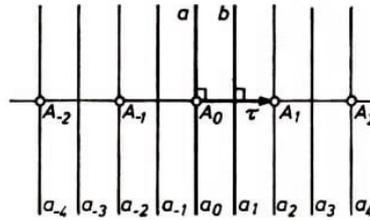


Abb. 10.1

Folglich besteht  $\langle\langle\sigma_a, \sigma_b\rangle\rangle$  aus den Verschiebungen  $\overrightarrow{A_0A_n}$  und den Geradenspiegelungen  $\sigma_{a_n}$ ,  $n$  ganzzahlig.

Die Aufgabe (10.2) steht mit folgendem physikalischen Sachverhalt in enger Beziehung. Wir stellen zwei ebene Spiegelflächen  $\alpha$  und  $\beta$  parallel zueinander auf, die spiegelnden Seiten einander zugewandt (Abb. 10.2).

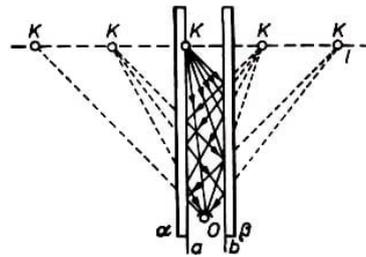


Abb. 10.2

In der Spiegelfläche  $\alpha$  sei eine Lichtquelle  $K$  eingebaut (etwa eine in das Material eingelassene Glühbirne; näherungsweise auch eine Kerze, die möglichst dicht an die Spiegelfläche gestellt wird). Zwischen den Spiegelflächen stehe ein Betrachter so, dass sein Auge  $O$  nicht von der Senkrechten  $l$  auf die Spiegelfläche  $\alpha$  durch den Punkt  $K$  getroffen wird.

(Die in Abb. 10.2 gewählte Mittellage von  $O$  ist nur für eine übersichtliche Darstellung von Lichtstrahlen günstig, für die weiteren Darlegungen und Ergebnisse aber ohne Bedeutung.)

Welche von  $K$  ausgehenden Lichtstrahlen treffen nun das Auge  $O$ , was sieht das Auge?

Zunächst gibt es eine direkte geradlinige Verbindung von  $K$  nach  $O$ . Weitere Lichtstrahlen können nur nach Reflexion an den Spiegelebenen  $\alpha$  und  $\beta$  zu  $O$  gelangen.

Der Lichtstrahl, der nach einmaliger Reflexion an  $\beta$  das Auge  $O$  trifft, vermittelt auf Grund optischer Gesetze von  $K$  eine solche scheinbare Lage  $K_1$  (virtuelles Bild), dass die Strecke  $\overline{KK_1}$  von der Ebene  $\beta$  halbiert wird und  $g_{KK_1} \perp \beta$  (und damit  $K_1 \in l$ ) ist.

Außerdem verläuft dieser Lichtstrahl in der Ebene, die durch die Gerade  $l$  und den Punkt  $O$  geht. (Siehe dazu nochmals Abb. 2.3.) Die Schnittgeraden dieser Ebene mit den Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  seien  $a$  und  $b$ . Bezüglich dieser Hilfsebene ist also  $K_1$  das Bild von  $K$  bei der Spiegelung ab.

Nun ist leicht zu erkennen, dass das Auge  $O$  im Spiegel  $\beta$  diejenigen (Leucht-)Punkte

$K_1, K_2, \dots$  und im Spiegel  $\alpha$  diejenigen (Leucht-)Punkte  $K_{-1}, K_{-2}, \dots$  sieht, wie sie sich aus  $K$  mit Hilfe von  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$  entsprechend der Lösung von (10.2) (Abb. 10.1) ergeben.

Dieser visuelle Eindruck entspricht dem beim Betrachten einer Lampenreihe an einer geradlinigen Straße (beliebiger Länge), wenn die Lampen in gleichen Abständen angebracht sind.

(10.3) Aufgabe. Welche Untergruppe erzeugt die Menge der Punktspiegelungen?

(10.4) Aufgabe. Es sei  $AA_1B$  ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $A_1$ . Aus welchen Bewegungen besteht die erzeugte Untergruppe  $\langle \alpha \rangle$ , wenn  $\alpha$  die (echte) Schubspiegelung  $\overrightarrow{AA_1} \circ \sigma_{g_{AA_1}}$  ist? Man zeichne die Bilder der Dreiecksfläche  $AA_1B$  bei diesen Bewegungen.

(10.5) Aufgabe. Es sei  $SAB$  ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $A$  und  $\rho$  die Drehung um  $S$ , die  $SA^+$  in  $SB^+$  überführt. Man bestimme die Bewegungen, aus denen  $\langle \rho \rangle$  besteht und zeichne die Bilder der Dreiecksfläche  $SAB$  bei diesen Bewegungen. Man stelle eine Strukturtafel von  $\langle \rho \rangle$  auf.

Lösung. Bei geeigneter Vorgabe der Orientierung der Ebene ist die gegebene Drehung  $\rho = \rho(S, 45^\circ)$ . Folglich sind  $\rho^0, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^7$  voneinander verschieden, aber  $\rho^8 = \rho(S, 8 \cdot 45^\circ)$  ist die identische Drehung  $\iota = \rho^0$  um  $S$ .

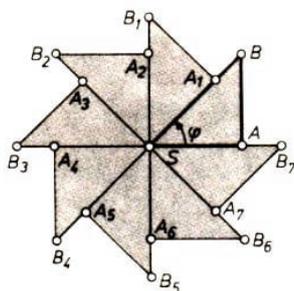


Abb. 10.3

Tabelle 6

$\circ$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$
$\iota$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$
$\rho^3$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$
$\rho^4$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$
$\rho^5$	$\rho^5$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$
$\rho^6$	$\rho^6$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$
$\rho^7$	$\rho^7$	$\iota$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\rho^6$

Für ganze Zahlen  $i$  und  $j$  mit  $i < j$  ist nun  $\rho^i = \rho^j$  genau dann, wenn  $j - i$  ein Vielfaches der Zahl 8 ist. Tatsächlich folgt aus  $j = t \cdot 8 + i$  sofort

$$\rho^j = \rho^{t \cdot 8} \circ \rho^i = (\rho^8)^t \circ \rho^i = \iota \circ \rho^i = \rho^i$$

Umgekehrt benutzen wir, dass sich  $j - i$  in der Form  $t \cdot 8 + r$  mit natürlichen Zahlen  $t$  und  $0 \leq r < 8$  darstellen lässt. Dann folgt aus  $\rho^i = \rho^j$  zunächst  $\rho^{(j-i)} = \iota$  und daraus weiter  $\iota = \rho^{(j-i)} = \rho^{t \cdot 8} \cdot \rho^r = \iota \circ \rho^r$ , also  $\rho^r = \iota$  und damit  $r = 0$ .

Die (Unter-)Gruppe  $\langle \rho \rangle$  besteht demnach aus den Elementen  $\rho^0 = \iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^7$  und nur aus diesen. Sie ist kommutativ nach dem Satz 3.12.

Die Bilder der Dreiecksfläche  $SAB$  bezüglich dieser Bewegungen lassen sich leicht angeben (Abb. 10.3), ebenso die Strukturtafel für (9) (Tabelle 6).

(10.6) Aufgabe. Man gebe für jedes  $\alpha \in \langle \rho \rangle$  (in der Aufgabe (10.5)) die Untergruppe

$\langle \alpha \rangle$  an. Sind damit alle Untergruppen von  $\langle \rho \rangle$  beschrieben?

Die Gruppe  $\langle \rho \rangle$ , sämtliche Untergruppen von ihr sowie die Untergruppe  $\langle \tau \rangle = \{\tau^i, i \text{ ganzzahlig}\}$  in der Aufgabe (10.2) und die Gruppe  $\langle \alpha \rangle$  der Aufgabe (10.4) sind Beispiele für sogenannte zyklische Gruppen.

Eine Gruppe  $G$  heißt zyklisch, wenn sie von einem einzigen Element  $\alpha$  erzeugt werden kann:  $G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^i, i \text{ ganzzahlig}\}$ .

Sind alle  $\alpha^i$  voneinander verschieden - wie in der Gruppe  $\langle \alpha \rangle$  der Aufgabe (10.4) oder in der Untergruppe  $\langle \tau \rangle$  der Aufgabe (10.2) - so heißt  $G$  unendliche zyklische Gruppe (oder freie zyklische Gruppe). Anderenfalls gibt es eine kleinste natürliche Zahl  $n > 0$ ; für die  $\alpha^n$  gleich dem Einselement  $e$  der Gruppe  $G$  ist.  $G$  heißt dann eine endliche zyklische Gruppe; sie besteht aus  $n$  verschiedenen Elementen. Die Ordnung der Gruppe (d.h., die Anzahl ihrer verschiedenen Elemente) ist deshalb  $n$ .

Ist  $G = \langle \alpha \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ , dann erhält man durch  $\langle \alpha^m \rangle$  genau alle Untergruppen  $U \neq \langle e \rangle$  von  $G$ , wenn man für  $m > 0$  alle von  $n$  verschiedenen Teiler von  $m$  wählt. Der Quotient  $\frac{n}{m}$  gibt dann jeweils die Ordnung von  $\langle \alpha^m \rangle$  an. (Die Überlegungen zur Lösung der Aufgabe (10.6) sind eine geeignete Vorlage für einen Beweis dieser Behauptungen.) Anhand der Gruppe  $\langle \rho \rangle$  kann man sich diese Zusammenhänge leicht veranschaulichen.

In einer unendlichen zyklischen Gruppe ist jede Untergruppe, die von der trivialen Untergruppe  $\langle e \rangle$  verschieden ist, ebenfalls von unendlicher Ordnung. So ist in der Aufgabe (10.4)  $\langle \alpha^2 \rangle$  eine echte Untergruppe von  $\langle \alpha \rangle$ .

Die Gruppe  $\langle \rho \rangle$  (aus der Aufgabe (10.5)) und die Figur in der Abb. 10.3, die damit in enger Beziehung steht, führt uns zu einem weiteren Begriff, der sogenannten Drehsymmetrie.

Eine Figur  $\mathfrak{F}$  heißt  $m$ -fach drehsymmetrisch ( $m \geq 1$ ) bezüglich  $M$  genau dann, wenn es eine Drehung  $\rho$  um  $M$  derart gibt, dass  $\langle \rho \rangle$  die Ordnung  $m$  hat und  $\mathfrak{F}$  gegenüber  $\rho$  invariant ist. Dabei wird  $M$  der Mittelpunkt dieser Drehsymmetrie genannt.

Ist  $n$  die größte natürliche Zahl, bei der die Figur  $\mathfrak{F}$   $n$ -fach drehsymmetrisch bezüglich  $M$  ist, so heißt  $n$  der Grad der Drehsymmetrie von  $\mathfrak{F}$  bezüglich  $M$ . Der Grad  $n = 1$  ist nicht ausgeschlossen, aber im allgemeinen uninteressant, da dann  $\rho = \iota$  ist.

Die Figur in Abb. 10.3 ist achtfach drehsymmetrisch bezüglich  $S$ .

Ist  $\mathfrak{F}$   $n$ -fach drehsymmetrisch und  $1 \leq t \leq n$ , dann ist - wie leicht zu zeigen -  $\mathfrak{F}$  genau dann auch  $t$ -fach drehsymmetrisch (mit dem gleichen Mittelpunkt), wenn  $t$  ein Teiler von  $n$  ist. Folglich ist jede  $n$ -fach drehsymmetrische Figur mit geradzahligem  $n$  insbesondere zweifach drehsymmetrisch, d.h. zentralsymmetrisch.

Der Grad der Drehsymmetrie eines regelmäßigen  $n$ -Ecks ( $n \geq 3$ ) ist offensichtlich gleich  $n$ .

(10.7) Aufgabe. Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn es zum Schnittpunkt seiner Diagonalen vierfach drehsymmetrisch ist.

In der Natur, der Technik und in der Kunst finden wir vielfältige Beispiele für drehsymmetrische Figuren.

Viele Blüten und Blumen zeigen in der Draufsicht (Grundriss) eine Drehsymmetrie vom Grade 3 oder höher. Man benutzt sogenannte Blütendiagramme - das sind schematische Grundrisse der Blüten - als wichtiges Hilfsmittel für die systematische Gliederung von Samenpflanzen. Abb. 10.4 zeigt das Blütendiagramm der Tulpe; es besitzt eine Drehsymmetrie vom Grade 3.



Abb. 10.4

Welchem Grad der Drehsymmetrie zeigen die Blütenblätter der Kirsche (im Grundriss) oder der ebene Schnitt durch einen Apfel (senkrecht zur Achse Stengel-Blüte)?

In der Technik bieten sich insbesondere bei rotierenden Teilen viele Beispiele an. Welchen Grad der Drehsymmetrie besitzt das vordere Rad eines Fahrrades im Seitenriss?<sup>16</sup> Stimmt dieser Grad mit dem des Hinterrades überein?

Zur Kontrolle des Gleichlaufs und der richtigen Drehzahl des Plattenspieler Tellers dienen einfache Stroboskopscheiben, die auf den Plattenteller aufgelegt werden und bei Rotation unter Wechselstromlicht (Frequenz 50 Hz) betrachtet werden. Der scheinbare Stillstand des Kreisringes zeigt die richtige Umlaufgeschwindigkeit des Plattentellers an.



Abb. 10.5

Abb. 10.5 zeigt in einem Ausschnitt die Struktur des Kreisringes. Welche Ordnung muss die Drehsymmetrie des Kreisringes haben, damit die heute übliche Umlaufgeschwindigkeit von  $33\frac{1}{3}$  U min<sup>-1</sup> kontrolliert werden kann?

Künstlerische wie technische Meisterleistungen sind die (Fenster-)Rosetten gotischer Architektur. (Wir erinnern an solche bekannten Bauwerke wie das Strasburger Münster, den Dom zu Meißen und das Rathaus in Stralsund.) Abb. 10.6 zeigt eine Rosette; ihr Seitenriss besitzt eine Drehsymmetrie vom Grade 8.

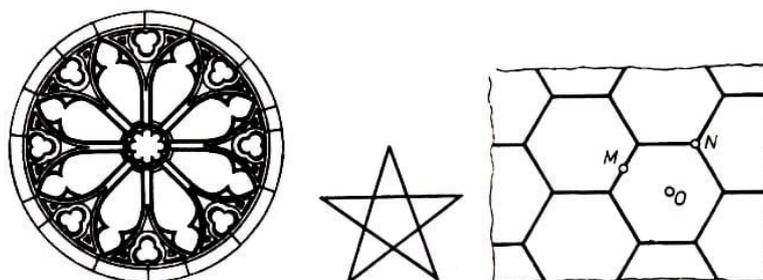


Abb. 10.6,7,8

<sup>16</sup>Dieser Grad ist nicht gleich der Speichenzahl!

Das Pentagramm (Abb. 10.7), das Ordenszeichen der Pythagoreer ist drehsymmetrisch vom Grade 5. (Im Mittelalter kam dieser Figur als Drudenfuß mystische Bedeutung zu; die Seiten des Pentagramms teilen sich nach dem Goldenen Schnitt.)

Die Ebene kann bekanntlich mit regelmäßigen Sechsecken gleicher Größe einfach überdeckt werden (Abb. 10.8), die Fotografie einer Honigwabe zeigt eine gleiche Struktur. Bezüglich der Punkte  $M$ ,  $N$  und  $O$  (Abb. 10.8) hat diese Parkettierung eine Drehsymmetrie vom Grade 2 bzw. 3 bzw. 6. Dieses Beispiel macht deutlich, dass der Grad der Drehsymmetrie vom gewählten Bezugspunkt abhängt.

Man entwerfe eine Parkettierung der Ebene, die Drehsymmetrien von vier verschiedenen Graden ( $\neq 1$ ) aufweist!

(10.8) Aufgabe. Man beantworte die gestellten Fragen.

(10.9) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die von  $\{\sigma_a, \sigma_b\}$  erzeugte Untergruppe, wenn  $a$  und  $b$  zwei sich schneidende Geraden sind?

Lösung. Formal können wir vieles sofort aus der Lösung von 10.2 übernehmen. Das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b$  ist hier jedoch eine Drehung  $\rho$  um den Schnittpunkt  $S$  von  $a$  und  $b$ . Sie besitzt ein Drehmaß  $t \cdot 360^\circ$  mit  $0 < t < 1$ .

Formal besteht demnach  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  aus den Drehungen  $\rho^i$  und den Geradenspiegelungen  $\sigma_{a_i}$  ( $i$  ganzzahlig) mit  $\sigma_{a_i} = \sigma_a \circ \rho^i$  für  $i \leq 0$  und  $\sigma_{a_i} = \sigma_b \circ \rho^{i-1}$ , für  $i > 0$ ; wobei hier der erste Dreispiegelungssatz (7.2) eingeht.

Wir wählen wieder einen beliebigen Punkt  $A_0 \in a$ , selbstverständlich verschieden von  $S$  und setzen  $A_i := A_0^{\rho^i}$  entsprechend (9.2).

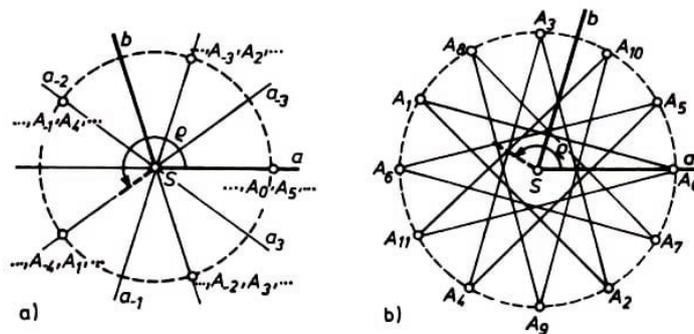


Abb. 10.9

Nun bleibt noch der Nachweis der Verschiedenheit der Gruppenelemente.

Ist die aus den Drehungen  $\rho^i$  bestehende zyklische Untergruppe endlich und ist  $m$  ihre Ordnung, so gilt  $m \cdot (t \cdot 360^\circ) = 0^\circ \pmod{360^\circ}$  wegen  $\rho^m = \iota$ , d.h.,  $m \cdot t$  ist eine natürliche Zahl  $r$  mit  $0 < r < m$ . (In den Abb. 10.9a, b ist  $r = 3$  bzw.  $r = 5$ .) Aus der Endlichkeit von  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  folgt also, dass  $t (= \frac{r}{m})$  rational ist.

Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Endlichkeit. Es sei  $0 < t < 1$  eine rationale Zahl. Dann kann man sie in eindeutiger Weise als Quotient  $\frac{r}{m}$  positiver teilerfremder ganzer Zahlen darstellen, und folglich ist  $\langle \rho \rangle$  von der Ordnung  $m$ , und die Gruppe  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  besteht aus  $m$  Drehungen und  $m$  Geradenspiegelungen.

Für irrationales  $0 < t < 1$ , z.B. für  $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , ist die von  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  erzeugte Menge der

Drehungen unendlich und damit auch die Menge der erzeugten Geradenspiegelungen. Dennoch wird auf diese Weise nicht jede Drehung um  $S$  erfasst!

So z.B. nicht die Drehung  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 360^\circ$ , wenn  $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  ist. Denn man überzeugt sich durch Quadrieren leicht davon, dass  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$  keine rationale Zahl  $\frac{m}{r}$  ist.

(10.10) Aufgabe. Man gebe für  $t = \frac{1}{5}$  eine optische Interpretation wie sie zur Aufgabe (10.2) vorgenommen wurde.

(10.11) Aufgabe. Für welche rationale Zahlen  $0 < t < 1$  ist  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  eine Kleinsche Vierergruppe?

(10.12) Aufgabe. Ist  $0 < t < 1$  irrational, so liegt die Menge der Punkte  $A_i$  dicht auf dem Kreis um  $S$  durch  $A_0$ , d.h., sind  $A_i, A_k$  zwei verschiedene Punkte aus  $\{(A_i, i \text{ ganzzahlig})\}$ , so liegt in jedem der beiden Kreisbögen, die von  $A_j, A_k$  begrenzt werden, mindestens ein weiterer Punkt aus  $\{A_i\}$ .

Man nennt entsprechend den erzeugten Gruppen in (10.2) und (10.9) eine Gruppe eine Diedergruppe der Ordnung  $n$  (kurz  $D_n$ ), wenn sie von zwei Elementen  $\alpha, \beta$  ( $\neq \alpha$ ) erzeugt wird, für die  $\langle \alpha \rangle$  und  $\langle \beta \rangle$  die Ordnung 2 und  $\langle \alpha \circ \beta \rangle$  die Ordnung  $n \geq 2$  haben, wobei man durch  $n = \infty$  zum Ausdruck bringt, dass die unendliche Ordnung mit einbezogen ist.

Eine dazu äquivalente Definition ist folgende:

Das Erzeugendensystem besteht aus zwei Elementen  $\sigma$  und  $\rho$  ( $\neq \sigma$ ), für die  $\langle \sigma \rangle$  die Ordnung 2 und  $\langle \rho \rangle$  die Ordnung  $n \geq 2$  ( $\infty$  nicht ausgeschlossen) haben und  $\sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma = \rho^{-1}$  gilt. - In den Beispielen (10.2) und (10.9) ist in der Tat die Gruppe  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  die gleiche wie  $\langle \sigma_a, \tau \rangle$  bzw.  $\langle \sigma_a, \rho \rangle$ .

Unter der Deckabbildung einer (ebenen) Figur  $\mathfrak{F}$  versteht man eine Bewegung  $\alpha$  der Ebene mit  $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{F}$ . Die Deckabbildungen von  $\mathfrak{F}$  bilden offenbar eine Gruppe, die sogenannte Symmetriegruppe von  $\mathfrak{F}$ . Insbesondere interessieren Deckabbildungen regelmäßiger  $n$ -Ecke ( $n \geq 2$ , endlich).<sup>17</sup>

Ist die Gruppe  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  von endlicher Ordnung  $n \geq 2$ , dann bilden die Punkte  $A_0, \dots, A_{n-1}$  ein regelmäßiges  $n$ -Eck. (Die Abb. 10.9a, b zeigen, dass diese  $n$ -Ecke nicht einfach sein müssen.) Alle Bewegungen aus  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  sind Deckabbildungen dieses  $n$ -Ecks. Umgekehrt kann man zeigen:

(10.13) Aufgabe. Die Bewegungen aus  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  sind alle Deckabbildungen für das regelmäßige  $n$ -Eck  $A_0A_1\dots A_{n-1}$ .

Das bedeutet, dass eine endliche Diedergruppe  $D_n$  und die Gruppe der Deckabbildungen eines regelmäßigen  $n$ -Ecks ( $n \geq 2$ ) ihrer Struktur nach das Gleiche sind. (In einigen Lehrbüchern wird die Diedergruppe  $D_n$  gerade als Gruppe der Deckabbildungen eines regelmäßigen  $n$ -Ecks eingeführt. Auf den geometrischen Ursprung der Bezeichnung weist das Wort "Dieder" hin.)

(10.14) Aufgabe. Man bezeichne die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit  $A, B$  und

<sup>17</sup>Der Fall  $n = 2$  bedeutet eine Strecke  $m$ .

$C$  und stelle den Permutationen der Menge  $\mathfrak{E} = \{A, B, C\}$ , d.h. den eindeutigen Abbildungen von  $\mathfrak{E}$  auf sich, die Bewegungen aus  $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$  gegenüber, wobei  $a$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{BC}$  und  $b$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{CA}$  sein soll.

(10.15) Aufgabe. Man beschreibe die Symmetriegruppe einer "Honigwaben"-Parkettierung der Ebene (Abb. 10.8), indem man ein Erzeugendensystem für diese Gruppe angibt.

Man kann zeigen, dass die endlichen Diedergruppen  $D_n$  ( $n \geq 2$ ) und die endlichen zyklischen Gruppen (einschließlich der aus der identischen Bewegung  $\iota$  bestehenden Gruppe) ihrer Struktur nach gerade alle endlichen Gruppen sind, die von den Bewegungen in der Ebene gebildet werden können.

Besonders reizvoll ist die Beschäftigung mit Streifenmustern (Abb. 7.6 b und Abb. 7.7 zeigen sehr einfache Formen) und ebenen Ornamenten (wie etwa die einfachen Formen in den Abb. 7.6 und 10.8) sowie mit ihren Symmetriegruppen (wie in der Aufgabe (10.15)).

Diesbezügliche Vorlagen aus Natur, Technik und Kunst und eingehende Erörterungen findet der interessierte Leser u.a. in [12, 19, 21, 7] und [10].

### III. Räumliche Bewegungen

Unsere Kenntnisse und Erfahrungen über die Bewegungen in der ebenen Geometrie können wir vielfältig für die räumlichen Bewegungen nutzen.

Das ermöglichen vor allem Analogien zwischen geometrischen Sachverhalten in der Ebene und solchen im Raum.<sup>18</sup> Dies ist allein schon deshalb von großem Wert, da uns im Raum leider nichts zur Verfügung steht, das dem Transparentpapier und seiner Möglichkeit zur Realisierung ebener Bewegungen entspricht.

Bevor wir den Bewegungsbegriff im Raum erklären, beginnen wir mit einer einfachen Abbildung, die später die gleiche grundlegende Rolle spielen wird wie die Geradenspiegelung für die Bewegungen in der Ebene.

## 11 Spiegelungen an Ebenen

Wir gehen von den bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten bei der Reflexion an einer ebenen spiegelnden Fläche aus. Sie wurden bereits in den Abschnitten 2 und 10 aufgegriffen:

Beim Betrachten des Punktes  $P$  im Spiegel  $\eta$  erscheint für das Auge  $A$  der Punkt  $P$  in derjenigen Lage  $P'$ , dass  $g_{PP'} \perp \eta$  ist und  $\eta$  durch den Mittelpunkt von  $\overline{PP'}$  geht (Abb. 2.3).

Dementsprechend erklären wir folgende geometrische Abbildung, wobei  $\mathfrak{R}$  die Menge aller Punkte des Raumes bedeutet:

Definition.  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon$  genau dann, wenn  $\sigma$  eine Abbildung von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{R}$  ist, bei der jeder Punkt  $P \in \varepsilon$  Fixpunkt ist und bei der jedem Punkt  $P \notin \varepsilon$  derjenige Punkt  $P'$  ( $\neq P$ ) zugeordnet wird, der auf dem Lot von  $P$  auf  $\varepsilon$  liegt und für den der Mittelpunkt von  $PP'$  auf  $\varepsilon$  liegt.

Anhand dieser konstruktiven Festlegung der Bildpunkte ist ohne weiteres folgender Satz ersichtlich:

(11.1) Satz. An jeder Ebene  $\varepsilon$  gibt es genau eine Spiegelung.

Wir bezeichnen diese Spiegelung im folgenden mit  $\sigma_\varepsilon$ . Für das Bild eines Punktes  $P$  bzw. einer Figur  $\mathfrak{F}$  bei  $\sigma_\varepsilon$  schreiben wir kurz  $P'$  bzw.  $\mathfrak{F}^\varepsilon$ . Ist  $P \notin \varepsilon$  und  $Q \neq P$ , dann ist  $Q = P^\varepsilon$  offenbar äquivalent damit, dass  $\varepsilon$  die Mittellotebene von  $P, Q$  ist ( $\varepsilon = \mu(P, Q)$ ).

Eine Ebene  $\varepsilon$  heißt Symmetrieebene einer Figur  $\mathfrak{F}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{F}^\varepsilon = \mathfrak{F}$  gilt.

Aus der Definition folgt außerdem sofort

(11.2) Satz. Ist  $\sigma$  die Spiegelung an einer Ebene, so gilt  $\sigma \circ \sigma = \iota$ . (Dabei ist  $\iota$  die identische Abbildung von  $\mathfrak{R}$ .)

<sup>18</sup>Dazu möchten wir auf das Büchlein "Räumliche Geometrie" [17] verweisen.

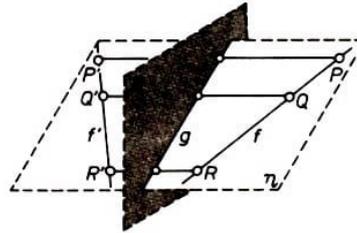


Abb. 11.1

Wir fragen nach weiteren Eigenschaften und orientieren uns dabei bewusst an Eigenschaften der Bewegungen in der Ebene.

Zunächst ist die Spiegelung  $\sigma$  an einer Ebene  $\varepsilon$  offenbar eine eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{P}$  (der Menge der Punkte des Raumes) auf sich, also eine Transformation von  $\mathfrak{P}$ . Ist dabei  $\eta$  eine zu  $\varepsilon$  senkrechte Ebene, dann gilt  $P^\varepsilon \in \eta$  für alle  $P \in \eta$  (auf Grund der obigen Definition) und damit  $\eta^\varepsilon = \eta$ . Die Punkte der Schnittgeraden  $g$  der Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$  bleiben fest.

Beschränken wir die Abbildung  $\sigma_\varepsilon$  auf die Punkte der Ebene  $\eta$  (also  $\sigma_\varepsilon|_\eta$ ), so erhalten wir in  $\eta$  die Spiegelung an der Geraden  $g$  (Abb. 11.1). Nun können wir die Eigenschaften aus dem Abschnitt 2 (Geradenspiegelungen) nutzen, und zwar für alle Figuren, die in einer zu  $\varepsilon$  senkrechten Ebene liegen.

Bei der Spiegelung  $\sigma_\varepsilon$  gehen demnach Geraden in Geraden über (Geradentreue), die Eigenschaft " $Q$  liegt zwischen  $P$  und  $R$ " bleibt invariant, und es gilt  $|PQ| = |P'Q'|$  (Invarianz des Abstandes). Damit kann man weiter begründen, dass Ebenen in Ebenen und Halbräume in Halbräume übergehen.

Bei der Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon$  werden die beiden Halbräume bezüglich  $\varepsilon$  vertauscht. Folglich vertauscht sie die beiden Orientierungen des Raumes.

Auf Grund unserer bisherigen Darlegungen ist die folgende Aussage zum Teil schon direkt bewiesen:

(11.3) Aufgabe. a) Es ist  $g \perp \varepsilon$  genau dann, wenn  $g \not\subset \varepsilon$  und  $g^\varepsilon = g$  gilt.

b) Für  $\eta \perp \varepsilon$  ist notwendig und hinreichend, dass  $\eta \neq \varepsilon$  und  $\eta^\varepsilon = \eta$ ; gilt.

(11.4) Aufgabe. Welche Symmetrieebenen besitzt ein regelmäßiges Tetraeder  $ABCD$ ?

Lösung. Es sei  $\varepsilon$  eine Symmetrieebene. Da nicht alle vier Punkte  $A, B, C, D$  auf  $\varepsilon$  liegen können, gibt es wenigstens einen von ihnen, etwa  $A$ , der nicht auf  $\varepsilon$  liegt. Sein Bild  $A'$  muss dann einer der anderen Punkte sein, etwa  $B$ .

Folglich ist  $\varepsilon$  die Mittellotebene  $\mu(A, B)$ . - Umgekehrt ist  $\mu(A, B)$  tatsächlich eine Symmetrieebene, da wegen  $|C'A| = |CB|$  und  $|DA| = |DB|$  die Punkte  $C$  und  $D$  auf  $\mu(A, B)$  liegen.

Folglich sind die sechs Mittellotebenen  $\mu(A, B), \mu(B, C), \mu(C, A), \mu(A, D), \mu(B, D)$  und  $\mu(C, D)$  genau die Symmetrieebenen des regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$ .

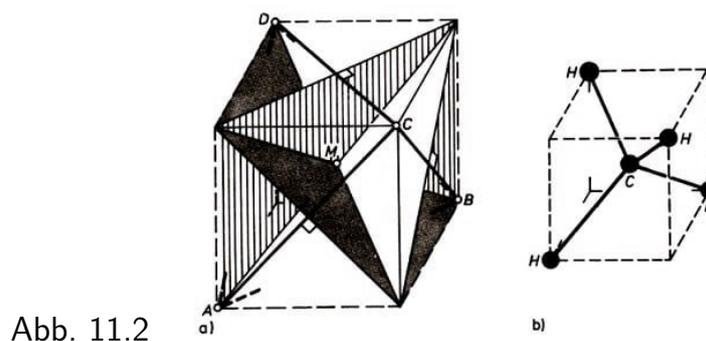


Abb. 11.2

Diese Ebenen lassen sich in einem Schrägbild des regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$  leicht zeichnen, wenn man die Eigenschaft ausnutzt, dass sich das Tetraeder durch (genau) einen Würfel umschreiben lässt, bei dem die Tetraederkanten Diagonalen von Seitenflächen sind.<sup>19</sup> Abb. 11.2a zeigt einen Schrägriss, in dem der besseren Übersicht wegen nur die Symmetrieebenen  $\mu(A, C)$ ,  $\mu(B, C)$  und  $\mu(C, D)$  eingezeichnet worden sind.

Symmetriebetrachtungen spielen in der Chemie, insbesondere in der Kristallographie eine große Rolle. Ein regelmäßiges Tetraeder bilden u.a. die Kerngerüste der Moleküle von ( $CH_4$ , Abb. 11.2 b), Tetrafluorsilan ( $SiF_4$ ), Tetrachlormethan ( $CCl_4$ ). Moleküle anderer chemischer Verbindungen wie Schwefelhexafluorid ( $SF_6$ ) und Chromhexacarbonyl ( $Cr(CO)_6$ ) besitzen ein Kerngerüst, das ein regelmäßiges Oktaeder bildet.

(11.5) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieebenen eines regelmäßigen Oktaeders.

Analog zur Aufgabe (2.7) lässt sich lösen:

(11.6) Aufgabe. Gegeben seien eine Ebene  $\varepsilon$  und zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Raum, die auf einer Seite von  $\varepsilon$  liegen. Man bestimme alle Punkte  $C \in \varepsilon$ , für die die Abstandssumme  $|AC| + |CB|$  minimal ist (nach OJM 181232).

(11.7) Aufgabe. Es sei  $ABCD$  ein regelmäßiges Tetraeder und  $P$  ein im Innern der Kante  $\overline{AD}$  beliebig gewählter Punkt. Man bestimme unter allen Punkten  $Q$  im Innern des Dreiecks  $ABC$  und  $R$  im Innern des Dreiecks  $DBC$  diejenigen  $\{Q, R\}$ , für die die Abstandssumme  $|PQ| + |QR| + |RP|$  minimal ist.

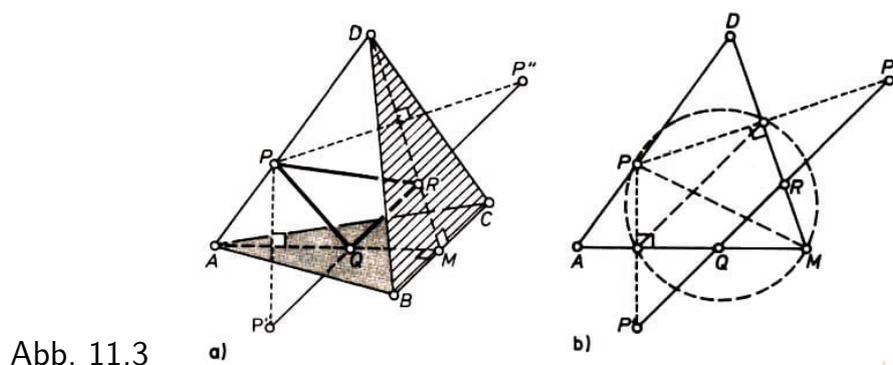


Abb. 11.3

Lösung. Auf Grund ähnlicher Aufgabenstellungen in der ebenen Geometrie (wie Aufgabe (2.8)) ist es naheliegend,  $P$  an den Ebenen  $\varepsilon_{ABC}$  und  $\varepsilon_{DBC}$  zu spiegeln. Dabei

<sup>19</sup>Siehe dazu u.a. [17], S. 14.

erhält man Punkte  $P'$  bzw.  $P''$  (Abb. 11.3a). Ist  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{BC}$ , so ist wegen  $A, D \in \mu(B, C)$  die Ebene  $\varepsilon_{ADM}$  sowohl senkrecht zu der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  als auch zu  $\varepsilon_{DBC}$ . Demnach sind  $P'$  und  $P''$  die Bilder von  $P$  bei den ebenen Spiegelungen in  $\varepsilon_{ADM}$  an den Geraden  $g_{AM}$  und  $g_{DM}$  (Abb. 11.3b). Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die Strecke  $\overline{P'PP'}$  die Strecken  $\overline{AM}$  und  $\overline{DM}$  jeweils in einem inneren Punkt  $Q$  und  $R$  schneidet und dass auf Grund der Dreiecksungleichung  $\{Q, R\}$  die Lösung der Aufgabe ist.

(11.8) Aufgabe. Zu vorgegebener Geraden  $f$ , Ebene  $\alpha$  und Kugel(-Fläche)  $k$  bestimme man alle regelmäßigen Oktaeder  $ABCDEF$  (mit den gegenüberliegenden Ecken  $A - C$ ,  $B - D$  und  $E - F$ ), für die  $A, B, C, D$  in  $\alpha$ ,  $E$  auf  $f$  und  $F$  auf  $k$  liegen.

Als Beispiel wähle man in einem Würfel  $PQRSTUVW$  die Gerade  $f = g_{TR}$  (Raumdiagonale), die Ebene  $\alpha = \varepsilon_{UVW}$  und  $k$  als Umkugel des Würfels. Die Konstruktion einer Lösung ist hier nicht zuletzt auch eine nützliche Übung für das räumliche Vorstellen und Darstellen!

Die Aufgabe (11.8) lässt sich mit Hilfe einer Ebenenspiegelung lösen. Entsprechend gelingt das bei einer ganzen Reihe von Aufgaben, wenn die gewünschte Konfiguration - wie hier das Oktaeder - Symmetrie bezüglich einer Ebene aufweist.

(11.9) Aufgabe. Man zeige:

- Zu zwei verschiedenen Halbgeraden  $p, q$  mit gemeinsamem Scheitel  $O$  gibt es genau eine Ebene  $\varepsilon$  mit  $p^\varepsilon = q$ .
- Zu zwei verschiedenen Halbebenen  $H, K$  mit gemeinsamer Randgeraden  $g$  gibt es genau eine Ebene  $\varepsilon$  mit  $H^\varepsilon = K$ .

Diese Aussagen spielen später eine Rolle, und man sollte ihren Beweis deshalb nicht übergehen.

## 12 Räumliche Bewegungen und Ebenenspiegelungen

Zunächst ist zu klären, was unter einer Bewegung des Raumes verstanden wird. Wir treffen die Festlegung in Analogie zu der der ebenen Bewegungen (vgl. Abschnitt 1). Dabei haben wir durch die Eigenschaften der Spiegelung an einer Ebene eine gewisse Rechtfertigung für die Forderungen.

Definition.  $\tau$  ist eine Bewegung des Raumes  $\mathfrak{R}$  genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

B1:  $\tau$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{R}$  auf sich.

B2: Das Bild einer Geraden ist eine Gerade; das Bild einer Ebene ist eine Ebene (Geraden- und Ebenentreue).

B3: Das Bild der Halbgeraden  $PQ^+$ , der Halbebene  $PQR^+$  bzw. des Halbraumes  $PQRS^+$  ist die Halbgerade  $P^\tau Q^{\tau+}$  bzw. die Halbebene  $P^\tau Q^\tau R^{\tau+}$  bzw. der Halbraum  $P^\tau Q^\tau R^\tau S^{\tau+}$  (Anordnungstreue).

B4: Es ist stets  $|PQ| = |P^\tau Q^\tau|$  (Invarianz des Abstandes).

Die Spiegelung an einer Ebene ist auf Grund ihrer Eigenschaften offenbar eine räumliche Bewegung.

Weiterhin sind leicht einsichtig

B5: Sind  $\tau, \varphi$  Bewegungen des Raumes, so auch  $\tau \circ \varphi$  und  $\tau^{-1}$ .

B6: Bei einer Bewegung des Raumes gehen Winkel in Winkel gleicher Größe über.

(12.1) Satz. Ist  $\tau$  eine Bewegung des Raumes und  $\varepsilon$  eine Ebene, die bezüglich  $\tau$  auf sich abgebildet wird, so ist die Einschränkung von  $\tau$  auf  $\varepsilon$  eine ebene Bewegung der Ebene  $\varepsilon$ .

Von Interesse sind eine Übersicht über alle räumliche Bewegungen und Zusammenhänge zwischen ihnen. Ein erster Schritt dazu ist die folgende Aussage:

B8: Gibt es für Bewegungen  $\tau$  und  $\varphi$  nicht komplanare Punkte<sup>20</sup>  $P, Q, R, S$  so, dass  $P^\tau = P^\varphi$ ,  $(PQ^+)^\tau = (PQ^+)^\varphi$ ,  $(PQR^+)^\tau = (PQR^+)^\varphi$  und  $(PQRS^+)^\tau = (PQRS^+)^\varphi$  gilt, dann ist  $\tau = \varphi$ , d.h., für alle Punkte des Raumes gilt  $P^\tau = P^\varphi$  (Starrheit).

Beweis. Wir treffen folgende Bezeichnungen:  $\varepsilon = \varepsilon_{PQR}$ ,  $\mathfrak{H} = PQRS^+$ .

Die Ebene  $\varepsilon$  geht bei der Bewegung  $\tau \circ \varphi^{-1}$  in sich über. Nach dem Satz (12.1) ist die Einschränkung von  $\tau \circ \varphi^{-1}$  auf  $\varepsilon$  eine ebene Bewegung der Ebene  $\varepsilon$ . Dabei geht außerdem nach der Voraussetzung  $P$  in  $P$ ,  $PQ^+$  in  $PQ^+$  und die Halbebene  $PQR^+$  in sich über. Nach der Starrheit B 8 für ebene Bewegungen ist dann jeder Punkt der Ebene  $\varepsilon$  Fixpunkt bezüglich  $\tau \circ \varphi^{-1}$ .

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $X \notin \varepsilon$  des Raumes, fällen das Lot  $h$  von  $X$  auf  $\varepsilon$  und erhalten den Fußpunkt  $Y$  (Abb. 12.1).

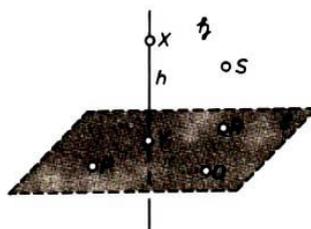


Abb. 12.1

Wegen  $(Y^\tau)^\varphi^{-1} = Y$  und B 6 (Invarianz der Winkelgröße) ist  $(h^\tau)^\varphi^{-1} = h$ . Das Bild  $(X^\tau)^\varphi^{-1}$  von  $X$  liegt also auf  $h$  und außerdem in  $\mathfrak{H}$  (wegen  $(\mathfrak{H}^\tau)^\varphi^{-1} = \mathfrak{H}$ ). Auf Grund der Längeninvarianz B 1 und der Eindeutigkeit der Längenanzugung auf einer Halbgeraden muss  $(X^\tau)^\varphi^{-1} = X$  sein. Damit gilt  $\tau = \varphi$ .

(12.2) Aufgabe. Sind  $\tau$  und  $\varphi$  Bewegungen, die bezüglich der Ecken eines Tetraeders  $ABCD$  die gleichen Bildpunkte besitzen, so gilt  $\tau = \varphi$ . (Dies ist eine zu (1.4) analoge Aussage.)

<sup>20</sup>Dies sind - wie bereits in der Einführung erklärt - Punkte, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

(12.3) Aufgabe. Wie viele verschiedene Bewegungen gibt es höchstens, die ein vorgegebene regelmäßiges Tetraeder  $ABCD$  auf sich abbilden?

Lösung. Bei jeder dieser Deckabbildung wird die Menge  $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$  der Ecken auf sich abgebildet. Nach der Aussage (12.2) sind die Bewegungen bereits gleich, wenn sie bezüglich der Bilder von  $A, B, C$  und  $D$  übereinstimmen. Also gibt es höchstens so viele Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders, wie es Transformationen von  $\mathfrak{E}$  gibt. Und die Zahl dieser eineindeutigen Abbildungen von  $\mathfrak{E}$  auf sich ist (bekanntlich)  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . Damit ist noch nicht gesagt, dass es auch zu jeder Transformation  $\alpha$  von  $\mathfrak{E}$  eine passende Bewegung  $\tau$  (d.h. mit  $\alpha = \tau|_{\mathfrak{E}}$ ) existiert. Sechs geeignete Bewegungen kennen wir bereits (Aufgabe (11.4)). Bei späteren Erörterungen (Abschnitt 16) zeigen wir, dass es auch tatsächlich 24 verschiedene Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders gibt.

Von grundlegender theoretischer wie praktischer Bedeutung ist nun

(12.4) Satz. Zu vorgegebenen nicht komplanaren Punkten  $P, Q, R, S$  und  $P', Q', R', S'$  gibt es stets ein Produkt  $\tau$  von höchstem vier Ebenenspiegelungen derart, dass  $P\tau = P', (PQ^+)\tau = P'Q'^+, (PQR^+)\tau = P'Q'R'^+$  und  $(PQRS^+)\tau = P'Q'R'S'^+$  ist.

Beweis. Wir bezeichnen der Einfachheit halber  $p = PQ^+, H = PQR^+, \mathfrak{H} = PQRS^+, p' = P'Q'^+, H' = P'Q'R'^+$  und  $\mathfrak{H}' = P'Q'R'S'^+$ . Den Beweis können wir nun so wie beim Satz 8.1 anlegen.

Es gibt eine Ebene  $\alpha$  mit  $P^\alpha = P'$  (Abb. 12.2); für  $P \neq P'$  leistet das die Mittellotebene  $\mu(P, P')$ . Die Halbgeraden  $p^\alpha$  und  $p'$  haben dann den gemeinsamen Scheitel  $P'$ .

Nun gibt es eine Ebene  $\beta$  so, dass  $(p^\alpha)^\beta = p'$  ist (Aufgabe (11.9a)). Die Halbebenen  $(H^\alpha)^\beta$  und  $H'$  haben die Gerade  $g_{P'Q'}$  als gemeinsame Randgerade. Dann gibt es eine Ebene  $\gamma$  mit  $((H^\alpha)^\beta)^\gamma = H'$  (Aufgabe (11.9b)). Da jetzt  $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma$  und  $\mathfrak{H}'$  Halbräume bezüglich ein und derselben Ebene - nämlich  $\varepsilon_{P'Q'R'}$  - sind, ist entweder  $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma = \mathfrak{H}'$  oder  $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma = \mathfrak{H}'^-$ . Im zweiten Fall fügen wir noch die Spiegelung an der Ebene  $\delta = \varepsilon_{P'Q'R'}$  hinzu und erhalten  $((((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma)^\delta = \mathfrak{H}'$ .

Da jede Ebenenspiegelung eine Bewegung ist, folgt mit B 5 aus Satz (12.4)

B7: Zu je zwei Tetraedern  $PQRS$  und  $P'Q'R'S'$  gibt es eine Bewegung  $\tau$  mit  $P^\tau = P', (PQ^+)\tau = P'Q'^+, (PQR^+)\tau = P'Q'R'^+$  und  $(PQRS^+)\tau = P'Q'R'S'^+$  (Beweglichkeit).

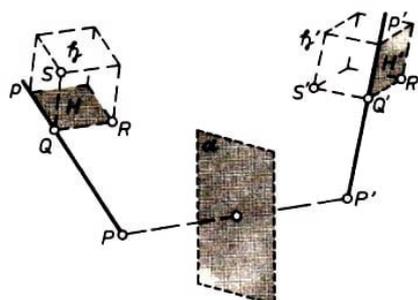


Abb. 12.2

Wenn eine Bewegung  $\tau$  einen Fixpunkt besitzt, dann kann von nicht komplanaren Punkten  $P, Q, R, S$  mit  $P^\tau = P$  ausgegangen werden, und es gelingt bereits durch eine Verkettung von drei Ebenenspiegelungen  $P$  in  $P^\tau$ ,  $PQ^+$  in  $P^\tau Q^{\tau+}$ ,  $PQR^+$  in  $P^\tau Q^\tau R^{\tau+}$  und  $PQRS^+$  in  $P^\tau Q^\tau R^\tau S^{\tau+}$  zu überführen.

Auf Grund der Starrheit B 8 folgt aus dem Satz (12.4) der

(12.5) Darstellungssatz für räumliche Bewegungen. Jede räumliche Bewegung  $\tau$  lässt sich als Produkt von höchstem vier Ebenenspiegelungen darstellen. Besitzt  $\tau$  einen Fixpunkt, dann reichen dazu bereits drei Ebenenspiegelungen aus.

Bei der Darstellung von Bewegungen im Raum spielen also die Spiegelungen an Ebenen die gleiche Rolle wie die Spiegelungen an Geraden bei der Darstellung von Bewegungen in der Ebene.

(12.6) Aufgabe. Es seien  $p = OP^+$ ,  $q = OQ^+$  und  $r = OR^+$  drei Halbgeraden, die paarweise einen rechten Winkel bilden; ferner seien  $H = OPQ^+$ ,  $\mathfrak{H} = OPQR^+$ ,  $K = OQR^+$  und  $\mathfrak{K} = OQRP^+$ . Welche Bilder haben  $q, K$  und  $\mathfrak{K}$  bei der Bewegung  $\tau$ , die durch  $O^\tau = O, p^\tau = p^-, H^\tau = H$  und  $\mathfrak{H}^\tau = \mathfrak{H}^-$  bestimmt ist?

Es ist im Vergleich zu den ebenen Bewegungen wünschenswert, die Spiegelungen an den Ebenen im Rahmen des Bewegungsbegriffs im Raum zu charakterisieren.

(12.7) Satz. Eine Bewegung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon$  genau dann, wenn  $P^\sigma = P$  für alle Punkte  $P \in \varepsilon$  gilt und wenn  $\sigma$  die Halbräume bezüglich  $\varepsilon$  vertauscht.

Beweis als Aufgabe.

Der Darstellungssatz (12.5) bietet eine geeignete Grundlage für eine systematische Übersicht über die Bewegungen im Raum. Dies und mögliche Analogien zur ebenen Geometrie werden im folgenden genutzt.

Wir beginnen mit den Produkten  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  von zwei Ebenenspiegelungen. Zwei Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  haben eine Gerade gemeinsam oder sie sind parallel zueinander. Das ist kein ausschließendes "oder"; genau für  $\alpha = \beta$  liegen beide Lagebeziehungen vor.

## 13 Drehungen um eine Gerade und Verschiebungen

Wir studieren zunächst den Fall, dass  $\alpha$  und  $\beta$  eine Gerade  $g$  gemeinsam haben.

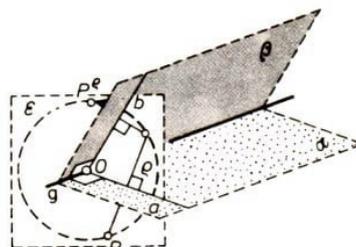


Abb. 13.1

Jede zu  $g$  senkrechte Ebene  $\varepsilon$  ist sowohl senkrecht zu  $\alpha$  als auch zu  $\beta$ . Sie schneidet  $\alpha$  und  $\beta$  in Geraden  $a$  und  $b$ , die durch den Schnittpunkt  $O$  von  $g$  und  $\varepsilon$  gehen (Abb.

13.1).

Wegen  $\alpha \perp \varepsilon$  und  $\beta \perp \varepsilon$  gilt  $\varepsilon^\alpha = \varepsilon$ ,  $\varepsilon^\beta = \varepsilon$ , und die Einschränkung von  $\sigma_\alpha$  auf  $\varepsilon$  ist die ebene Spiegelung  $\sigma'_a$  in der Ebene  $\varepsilon$  an der Geraden  $a$ ; entsprechend ist  $\sigma_\beta|_\varepsilon$  die ebene Spiegelung  $\sigma'_b$  in  $\varepsilon$  an der Geraden  $b$ .

Die Einschränkung von  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  auf  $\varepsilon$  ist nun  $\sigma'_a \circ \sigma'_b$ , und dies ist in  $\varepsilon$  eine Drehung um  $O$  (nach dem Satz (3.6)).

Wir erklären deshalb

**Definition.**  $\rho$  ist eine Drehung um die Gerade  $g$  genau dann, wenn es Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  durch  $g$  so gibt, dass  $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  gilt.

(13.1) **Folgerung.** Jede Drehung um eine Gerade lässt die Orientierung des Raumes unverändert.

Bei einer Drehung  $\rho$  um  $g$  liegt offenbar das Bild  $P^\rho$  eines Punktes  $P \notin g$  auf der durch  $P$  und senkrecht zu  $g$  verlaufenden Ebene  $\varepsilon$  und dort auf dem Kreis um  $O$  durch  $P$ , wobei  $O$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $\varepsilon$  ist.

(13.2) **Aufgabe.** An welchen Punkten der Seitenwände der Garage ist das Garagentor  $ABCD$  drehbar zu lagern, damit es durch Drehung (um eine gedachte Achse) die Lage  $A'B'C'D'$  einnehmen kann? (Vgl. Abb. 13.2.)

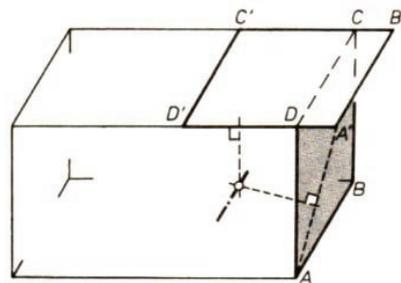


Abb. 13.2

(13.3) **Aufgabe.** Auf einer Kugel befinden sich zwei gleichgroße Kreise  $k$  und  $k'$ . Kann durch eine Drehung um eine Gerade der Kreis  $k$  auf  $k'$  abgebildet werden?

In Analogie zu dem Satz (3.6b) für ebene Drehungen gilt

(13.4) **Satz.** Zu Halbebenen  $H$  und  $K$  mit gemeinsamer Randgeraden  $g$  gibt es eine und nur eine Drehung um  $g$ , bei der  $K$  das Bild von  $H$  ist.

**Beweis.** Es sei  $\alpha$  die Ebene, die  $H$  enthält. Außerdem gibt es eine Ebene  $\beta$  durch  $g$  mit  $H^\beta = K$  (Aufgabe (11.9b)). Die Drehung  $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ , bildet  $H$  auf  $K$  ab.

Gäbe es eine weitere Drehung  $\rho'$  um  $g$  mit  $H^{\rho'} = K$ , so würden in einer zu  $g$  senkrechten Ebene  $\varepsilon$  die Halbgeraden  $p = H \cap \varepsilon$  und  $q = K \cap \varepsilon$  ebenfalls durch zwei verschiedene ebene Drehungen ineinander überführt werden. Das widerspricht dem Satz (3.6 b)).

Zum Darstellungssatz (3.7) ebener Drehungen gibt es folgende Analogie:

(13.5) **Satz.** Ist  $\rho$  eine Drehung um  $g$  und  $\gamma$  eine Ebene durch  $g$ , so gibt es genau eine Ebene  $\delta$  durch  $g$  mit  $\rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ .

**Beweis.** Wir wählen auf  $\gamma$  eine Halbebene  $H$  mit  $g$  als Randgerade.  $H^\rho$  besitzt dann

ebenfalls die Randgerade  $g$ . Nun existiert eine Ebene  $\delta$  durch  $g$  mit  $H^\delta = H^\rho$  (Aufgabe (11.9b)). Aus  $(H^\gamma)^\delta = H^\rho$  folgt  $\rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$  nach dem Satz (13.4).

Die Eindeutigkeit von  $\delta$  ist leicht einsichtig:  $\sigma_\gamma \circ \sigma_\delta = \rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_{\delta'}$  hat  $\sigma_\delta = \sigma_{\delta'}$  und damit  $\delta = \delta'$  zur Folge.

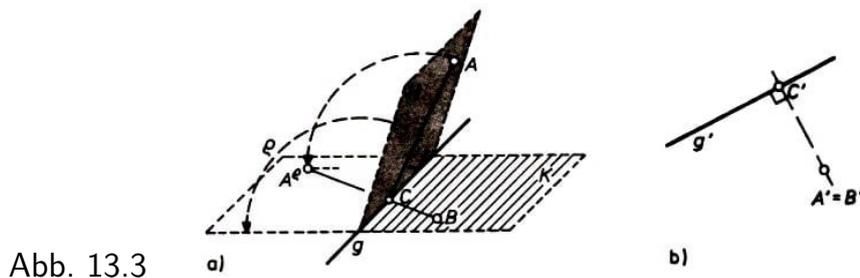
Dieser Satz (13.5) ist entsprechend den Sachverhalten in der ebenen Geometrie - die Grundlage für einen Dreispiegelungssatz

(13.6) Erster Dreispiegelungssatz. Sind  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  Ebenen durch eine Gerade  $g$ , dann existiert eine Ebene  $\delta$  durch  $g$  derart, dass  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta$  ist.

Beweis als Aufgabe.

(13.7) Aufgabe. Zu einer Geraden  $g$  und zwei Punkten  $A$  und  $B$ , die zusammen mit  $g$  in keiner gemeinsamen Ebene liegen, bestimme man alle Punkte  $C \in g$ , für die die Abstandssumme  $|AC| + |CB|$  minimal ist!

Lösung. Zu den Halbebenen  $H$  und  $K$  mit der Randgeraden  $g$ , die  $A$  bzw.  $B$  enthalten, gibt es eine Drehung  $\rho$  um  $g$  derart, dass  $H^\rho = K^-$  ist (Abb. 13.3a). Für jeden Punkt  $C \in g$  ist  $|AC| = |A^\rho C|$ . Also ist  $|AC| + |CB|$  minimal genau dann, wenn dies für  $|A^\rho C| + |CB|$  zutrifft.



Die Aufgabe ist damit auf eine Frage in der ebenen Geometrie zurückgeführt, und diese haben wir bereits mit der Aufgabe (2.7) gelöst. Danach ist der Schnittpunkt  $C'$  von  $g'$  mit der Verbindungsgeraden von  $A'$  und  $B'$  und nur dieser die Lösung.

Im Rahmen eines mathematischen Zirkels bot ein Schüler folgende Lösung: Wir wählen eine Ebene  $\varepsilon$  senkrecht zu  $g_{AB}$  und projizieren im Sinne der orthogonalen Eintafelprojektion die Vorgabe (also  $g, A$  und  $B$ ) auf die Ebene  $\varepsilon$ . (Das Bild  $g'$  von  $g$  ist eine Gerade. Andernfalls wäre  $g'$  ein Punkt, und dann lägen  $g$  und  $g_{AB}$  in einer gemeinsamen Ebene.)

In der (Bild-) Ebene  $\varepsilon$  wird das Lot von  $A'$  ( $= B'$ ) auf  $g'$  gefällt und der Fußpunkt  $C'$  bestimmt (Abb. 13.3b). Sein Original  $C$  ist die Lösung.

Ein Teil der Zirkelteilnehmer stimmte dieser einfachen und plausibel erscheinenden Antwort sofort zu. Sie ist aber falsch!

(13.8) Aufgabe. Man suche den Fehler.

(13.9) Aufgabe. Es seien zwei windschiefe Geraden  $f$  und  $g$  und eine Länge  $a$  vorgegeben. Man bestimme alle gleichseitigen Dreiecke  $ABC$  mit der Seitenlänge  $a$ , für die  $A, B$  auf  $f$  und  $C$  auf  $g$  liegen.

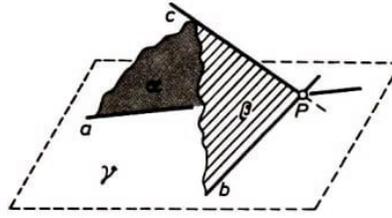


Abb. 13.4

Wir betrachten jetzt Geraden  $a, b$  mit einem gemeinsamen Punkt  $P$  und Drehungen  $\rho_1$  um  $a$  und  $\rho_2$  um  $b$ . Die Geraden  $a$  und  $b$  liegen in einer gemeinsamen Ebene  $\gamma$ . Nach dem Satz (13.5) existieren dazu Ebenen  $\alpha$  durch  $a$  und  $\beta$  durch  $b$  derart, dass  $\rho_1 = \sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$  und  $\rho_2 = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta$  ist (Abb. 13.4).

Nun gilt  $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ . Da  $\alpha$  und  $\beta$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzen, nämlich  $P$ , gibt es eine Gerade  $c$  durch  $P$ , die in den Ebenen  $\alpha, \beta$  enthalten ist. (Für  $a \neq b$  ist  $c$  die Schnittgerade  $\alpha \cap \beta$ .) Folglich ist  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um  $c$ .

Damit haben wir eine Eigenschaft erhalten, die bereits L. Euler<sup>21</sup> 1776 bemerkte:

(13.10) Satz. Sind  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Drehungen um  $a$  bzw.  $b$  und geben  $a, b$  durch einen Punkt  $P$ , so ist  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um eine Gerade  $c$  durch  $P$ .

(13.11) Aufgabe. Es sei  $ABCDEFGH$  ein Würfel, und es seien  $\rho_1$  die Drehung um  $g_{AB}$  mit  $E^{\rho_1} = D$  und  $\rho_2$  die Drehung um  $g_{BC}$  mit  $F^{\rho_2} = A$ . Man bestimme alle Punkte  $P$  des Raumes, die bezüglich  $\rho_1$  und  $\rho_2$  das gleiche Bild besitzen.

Der Satz (13.10) spielt u. a. im Zusammenhang mit technischen Problemen wie z.B. der räumlichen Getriebelehre eine Rolle. Wir kommen darauf später zurück.

(13.12) Aufgabe. Man zeige, dass für zwei nicht parallele Ebenen  $\alpha, \beta$  gilt:

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

Lösung. Nach Voraussetzung schneiden sich  $\alpha$  und  $\beta$  längs einer Geraden  $g$ . Die weiteren Überlegungen können wir an Hand der Abb. 13.1 führen, wobei  $\varepsilon$  irgendeine zu  $g$  senkrechte Ebene ist.

Mit  $\alpha \perp \beta$  ist  $a \perp b$  äquivalent. Letzteres ist hinreichend und notwendig dafür, dass  $\sigma'_\alpha \circ \sigma'_\beta = \sigma'_\beta \circ \sigma'_\alpha$  gilt (Aufgabe (3.11)), wobei  $\sigma'_\alpha \circ \sigma'_\beta$  die Einschränkung von  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  auf  $\varepsilon$  ist. Daraus folgt  $(P^\alpha)^\beta = (P^\beta)^\alpha$  für alle Punkte  $P$  des Raumes und umgekehrt.

Für eine Drehung  $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  um  $g$  gilt demnach  $\rho \circ \rho = \iota$  und  $\rho \neq \iota$  genau dann, wenn  $\alpha \perp \beta$  ist. Die Eigenschaften  $\rho \circ \rho = \iota$  und  $\rho \neq \iota$  sind kennzeichnend für eine Spiegelung. Wir erklären deshalb:

Definition.  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Geraden  $g$  genau dann, wenn  $\sigma$  eine nicht identische Drehung um  $g$  mit  $\sigma \circ \sigma = \iota$  ist.

Auf Grund der Aussage in (13.12) und des Satzes (13.5) existiert an jeder Geraden  $g$  genau eine Spiegelung; wir bezeichnen sie mit  $\sigma_g$  und schreiben statt  $\mathfrak{F}^{\sigma_g}$  wieder kurz

<sup>21</sup>Leonhard Euler (1707-1783), einer der bedeutendsten Mathematiker des 18. Jh. (Professor in Berlin und St. Petersburg).

$\mathfrak{F}^g$ .

Ferner ist aus den bisherigen Darlegungen auch eine einfache konstruktive Darstellung der Bildpunkte ersichtlich: Für  $P \in g$  ist  $P' = P$ , und für  $P \notin g$  ist das Bild derjenige Punkt  $P'$ , der auf dem Lot von  $P$  auf  $g$  liegt und für den  $g$  durch den Mittelpunkt von  $PP'$  geht.

Im Gegensatz zu den ebenen Geradenspiegelungen bleibt hier die Orientierung erhalten (Folgerung (13.1)).

(13.13) Aufgabe. Es seien  $a$  und  $b$  zwei sich schneidende Geraden. Kann das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b$  der Geradenspiegelungen selbst wieder eine Geradenspiegelung sein? Gegebenenfalls ist dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben.

Lösung. Wir folgen einfach dem Beweis des Satzes (13.10) unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Spiegelungen an  $a$  und  $b$  sind.

Wegen  $\alpha, \beta \perp \gamma$  ist  $c \perp \gamma$ . Und  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  ist genau dann eine Spiegelung an  $c$ , wenn  $\alpha \perp \beta$ , d.h., wenn  $a \perp b$  gilt.

(13.14) Aufgabe. Man zeige, dass  $a \perp b$  äquivalent zu  $a \neq b$  und  $a^b = a$  ist.

Eine Gerade  $g$  heißt eine Symmetrieachse der Figur  $\mathfrak{F}$  genau dann, wenn bei der Spiegelung  $\sigma_g$ , die Figur  $\mathfrak{F}$  auf sich abgebildet wird.

(13.15) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen eines regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$ ! (Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe (11.4) können genutzt werden.)

(13.16) Aufgabe. Welche Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges Oktaeder?

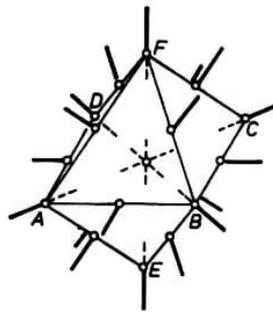


Abb. 13.5

Lösung (Abb. 13.5). Eine Symmetrieachse kann höchstens zwei Ecken des regelmäßigen Oktaeders enthalten, und diese können nicht durch eine Kante verbunden sein. (Wäre etwa  $g_{AB}$  Symmetrieachse, dann müsste z.B. auf  $g_{BC}$  eine weitere Ecke des Oktaeders, das Bild von  $C$  bezüglich  $\sigma_{g_{AB}}$  liegen.) Dann bleiben als Möglichkeiten nur die drei Geraden  $g_{AC}$ ,  $g_{BD}$  und  $g_{EF}$  und diese sind tatsächlich Symmetrieachsen des Oktaeders.

Jede weitere Symmetrieachse  $g$  kann dann nicht durch eine Ecke des Körpers gehen, denn die Eckenzahl ist gerade. Die Menge der Ecken zerfällt bezüglich  $g$  in vier Paare so, dass  $g$  in den Mittellotebenen dieser Punktepaare liegt.

Wegen  $\mu(A, B) = \mu(C, D)$ ,  $\mu(B, C) = \mu(D, A)$ ,  $\mu(A, E) = \mu(C, F)$ ,  $\mu(B, E) = \mu(D, F)$ ,  $\mu(C, E) = \mu(A, F)$  und  $\mu(D, E) = \mu(B, F)$  kommen als weitere Symme-

trieachsen also nur noch die Schnittgeraden

$$\begin{aligned} &\mu(A, B) \cap \mu(E, F), \quad \mu(B, C) \cap \mu(E, F), \quad \mu(A, E) \cap \mu(B, D), \\ &\mu(C, E) \cap \mu(B, D), \quad \mu(B, E) \cap \mu(A, C), \quad \mu(D, E) \cap \mu(A, C) \end{aligned}$$

in Frage. Und diese sechs Geraden sind in der Tat Symmetrieachsen. Also besitzt das Oktaeder neun Symmetrieachsen.

(13.17) Aufgabe. Man untersuche ein Molekül des 1,3-Dichlorallens ( $HCIC = C = CHCl$ ) nach Symmetrieebenen und -achsen. Abb. 13.6 zeigt einen Schrägriss des Kerngerüsts eines solchen Moleküls.

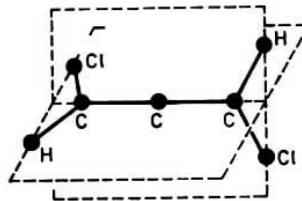


Abb. 13.6

An diesem Beispiel wird ersichtlich, dass aus der Existenz einer Symmetrieachse nicht die Existenz einer Symmetrieebene folgt.

Mit der Untersuchung der Produkte  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ , bei denen  $\alpha$  und  $\beta$  zueinander parallele Ebenen sind, wird das Studium der Zweierprodukte von Ebenenspiegelungen abgeschlossen. Auch hier können wir mit einer zu  $\alpha$  und  $\beta$  senkrechten Ebene  $\varepsilon$  arbeiten und damit Kenntnisse über die ebenen Bewegungen nutzen.

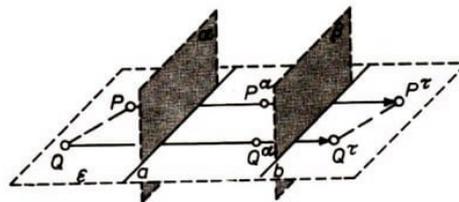


Abb. 13.7

Sind  $P$  und  $Q$  irgendzwei Punkte des Raumes, dann gibt es eine Ebene durch  $P$  und  $Q$ , die senkrecht zu  $\alpha$  ist. (Die Ebene  $\varepsilon$  ist eindeutig bestimmt, falls  $P \neq Q$  und  $g_{PQ} \not\perp \alpha$  gilt.) Mit  $\alpha \parallel \beta$  ist dann auch  $\varepsilon \perp \beta$ . Die Einschränkung von  $\sigma_\alpha$  und  $\sigma_\beta$  auf  $\varepsilon$  ist wieder die ebene Spiegelung  $\sigma'_\alpha$  an der Schnittgeraden  $a = \varepsilon \cap \alpha$  bzw.  $\sigma'_\beta$  an der Schnittgeraden  $b = \varepsilon \cap \beta$ . Wegen  $\alpha \parallel \beta$  gilt  $a \parallel b$  (Abb. 13.7).

Folglich ist die Einschränkung von  $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  auf  $\varepsilon$ , d.h. das Produkt  $\sigma'_a \circ \sigma'_b$ , eine Verschiebung in  $\varepsilon$  (Satz (4.1)). (Nach den Darlegungen in Abschnitt 4 lässt sich das Bild  $Q'$  von  $Q$  bereits allein mit Hilfe von  $P$  und  $P'$  durch eine Parallelkonstruktion in der Ebene  $\varepsilon$  bestimmen.)

Damit ist folgende Erklärung gerechtfertigt.

Definition.  $\tau$  ist eine Verschiebung (des Raumes) genau dann, wenn es zueinander parallele Ebenen  $\alpha, \beta$  so gibt, dass  $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  ist.

Wegen  $\tau^{-1} = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$  ist mit  $\tau$  auch die Umkehrabbildung eine Verschiebung.

Unsere Ausführungen zeigen bereits, dass es zu  $A$  und  $B$  nicht mehr als eine Verschiebung gibt, die  $A$  auf  $B$  abbildet. Die Existenz einer solchen Verschiebung ist leicht nachzuweisen: Es gibt nämlich stets eine Ebene  $\beta$  mit  $A^\beta = B$ . (Im Fall  $A \neq B$  leistet das die Ebene  $\mu(A, B)$ .) Dazu nehmen wir noch die zu  $\beta$  parallele Ebene  $\alpha$  durch  $A$  (Abb. 13.8). Für die Verschiebung  $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  gilt in der Tat  $A^\tau = B$ .

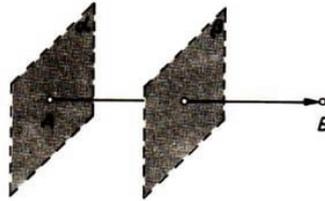


Abb. 13.8

Damit haben wir wie in der ebenen Geometrie

(13.18) Satz. Zu Punkten  $A, B$  gibt es eine und nur eine Verschiebung  $\tau$  mit  $A^\tau = B$ .

Wir bezeichnen sie (entsprechend der ebenen Geometrie) mit  $\overline{AB}$ .

(13.19) Aufgabe. Lassen sich Verschiebungen angeben, die sich wie Spiegelungen verhalten?

Am Rande von bewegungstheoretischen Gesichtspunkten lässt sich lösen:

(13.20) Aufgabe. Es sei ein konvexes Polyeder  $P_1$  mit genau neun Eckpunkten  $A_1, A_2, \dots, A_9$  gegeben.  $P_i$  sei das Polyeder, das man aus  $P_1$  durch die Verschiebung  $\overrightarrow{A_1 A_i}$ ,  $i = 2, \dots, 9$ , erhält. Man beweise, dass wenigstens zwei der Polyeder  $P_1, P_2, \dots, P_9$  mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben. (IMO 132.)

Es lässt sich ein weiterer Dreispiegelungssatz beweisen.

(13.21) Zweiter Dreispiegelungssatz. Sind  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  zueinander parallele Ebenen, dann existiert eine Ebene  $\delta \parallel \alpha$  derart, dass  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta$ .

Beweis als Aufgabe.

Anhand der bisherigen Darstellungen erkennt man leicht: Jedes Produkt  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  - also jede Drehung um eine Gerade oder jede Verschiebung - kann durch ein Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b$  von zwei Geradenspiegelungen dargestellt werden. Dabei können sogar bezüglich der Lage einer der Geraden  $a$  und  $b$  zusätzliche Forderungen berücksichtigt werden.

(13.22) Aufgabe. Zu jedem Produkt  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  und zu jeder Geraden  $g$  gibt es Geraden  $a$  und  $b$  derart, dass  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_a \circ \sigma_b$  und  $b$  eine Senkrechte zu  $g$  ist.

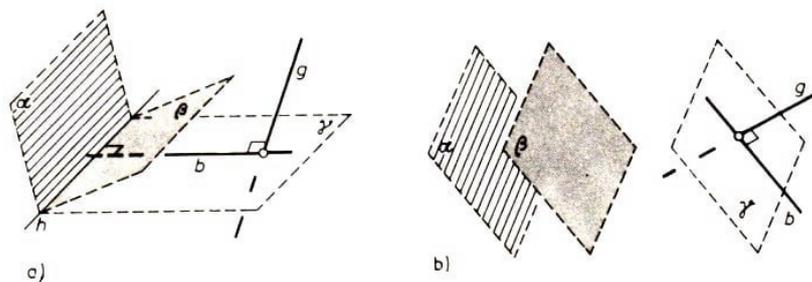


Abb. 13.9

Lösung. Die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  haben eine Gerade  $h$  gemeinsam oder sie sind parallel zueinander. Im ersten Fall existiert eine Gerade  $b$ , die zu  $g$  und  $h$  senkrecht ist. (Falls  $g$  und  $h$  windschief ist, leistet dies genau eine Gerade  $b$ !)

Im zweiten Fall gibt es eine Gerade  $b$  senkrecht zu  $g$  und parallel zu der Ebene  $\alpha$ .

Nun können wir in beiden Fällen durch  $b$  eine Ebene  $\gamma$  legen, die mit  $\alpha$  und  $\beta$  im Büschel liegt, d.h., die (im ersten Fall) die Gerade  $h$  enthält bzw. die (im zweiten Fall) zu  $\alpha$  parallel ist (Abb. 13.9a und b).

Nach dem ersten bzw. zweiten Dreispiegelungssatz gibt es eine Ebene  $\delta$  (dieses Büschels) derart, dass  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\delta \circ \sigma_\gamma$  gilt. Die zu  $\gamma$  senkrechte Ebene  $\varepsilon$  durch  $b$  ist auch senkrecht zu  $\delta$ ; und es sei  $a$  die Schnittgerade von  $\varepsilon$  und  $\delta$ . Nun gilt

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\delta \circ \sigma_\gamma = (\sigma_\delta \circ \sigma_\varepsilon) \circ (\sigma_\varepsilon \circ \sigma_\gamma) = \sigma_a \circ \sigma_b$$

## 14 Schub-, Dreh- und Punktspiegelungen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die Produkte von zwei Ebenenspiegelungen vollständig behandelt haben, wenden wir uns den Verkettungen  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  von drei Ebenenspiegelungen zu.

Es wäre naheliegend, einfach nach den möglichen Lagebeziehungen zwischen den drei Ebenen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  das jeweilige Dreierprodukt zu untersuchen. Das führt sicherlich zu umfangreichen Fallunterscheidungen.

Wir erinnern uns der Ergebnisse bei der Untersuchung der Produkte  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  dreier ebener Geradenspiegelungen. Es kann stets als Produkt  $\sigma_g \circ \sigma_Q$  einer Geraden- und einer Punktspiegelung dargestellt werden. (Siehe dazu Abb. 7.4.) Damit sind nur noch zwei Fälle zu diskutieren: entweder  $Q \in f$  oder  $Q \notin f$ .

Im ersten Fall liegt eine Geradenspiegelung vor. Er umfasst gerade die Sachverhalte, die bei den Dreispiegelungssätzen (7.2) und (7.4) bestehen. Im zweiten Fall liegt eine echte Schubspiegelung vor; der Verschiebungsanteil ist ungleich der identischen Bewegung  $\iota$ . Lässt sich im Raum analog ein Produkt von drei Ebenenspiegelungen als Produkt von zwei Spiegelungen, etwa einer Geraden- und einer Ebenenspiegelung darstellen?

Das würde sicherlich zu einer Vereinfachung in Hinblick auf eine vollständige Übersicht führen. Überdies ist auch hier die Möglichkeit zu prüfen, Eigenschaften ebener Bewegungen auszunutzen, was wir bereits vorteilhaft in Abschnitt 13 praktizieren konnten. Dazu war erforderlich, dass bezüglich der betrachteten Ebene  $\varepsilon$  die räumliche Bewegung auf  $\varepsilon$  eine ebene Bewegung induziert.

Wir wollen den ebenen Sachverhalt bei der Verkettung dreier Geradenspiegelungen hier nochmals kurz darlegen, um ohne Mühe Analogien zu erkennen. (Das ist auch deshalb angebracht, weil wir bei seiner bisherigen Behandlung von anderen Gesichtspunkten ausgegangen sind.)

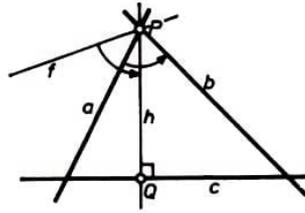


Abb. 14.1

Gegeben sei in der Ebene das Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  von (ebenen) Geradenspiegelungen. Haben  $a$  und  $b$  einen Punkt  $P$  gemeinsam, so fallen wir das Lot  $h$  von  $P$  auf die Gerade  $c$ ; der Fußpunkt sei  $Q$ . Nun gibt es eine Gerade  $f$  durch  $P$  mit  $\sigma_f = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h$  (Dreispiegelungssatz (7.2)). Und damit ist

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_f \circ (\sigma_h \circ \sigma_c) = \sigma_f \circ \sigma_Q$$

(Abb. 14.1). Ist  $a \parallel b$  und  $c \not\parallel a$ , dann wird durch

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_c \circ (\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_c)$$

dieser Fall auf den ersten zurückgeführt, denn  $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  ist stets eine Geradenspiegelung. Nun bleibt noch  $a \parallel b$  und  $a \parallel c$ . Dann ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  eine Spiegelung  $\sigma_d$  (Dreispiegelungssatz (7.4)) und diese kann durch  $\sigma_f \circ \sigma_Q$  ersetzt werden, wenn  $Q$  irgendein Punkt auf  $d$  und  $f$  das Lot von  $Q$  auf  $d$  ist.

Wir versuchen nun, in analoger Weise bezüglich der Verkettung  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  von drei Ebenenspiegelungen vorzugehen. Zuerst betrachten wir den Fall, dass die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  eine Gerade  $l$  gemeinsam haben.

Durch  $l$  kann eine Ebene  $\chi$  gelegt werden, die senkrecht zu der Ebene  $\gamma$  ist. (Gilt  $l \not\perp \gamma$ , dann ist  $\chi$  eindeutig bestimmt.) Es sei  $g = \chi \cap \gamma$ .

Nach dem ersten Dreispiegelungssatz (13.6) existiert eine Ebene  $\kappa$  durch  $l$  so, dass  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\kappa$  ist (Abb. 14.2).

Folglich gilt

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\kappa) \circ (\sigma_\kappa \circ \sigma_\gamma) = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$$

und damit ist tatsächlich ein entsprechendes Ergebnis für die Ebenenspiegelungen erreicht worden. -

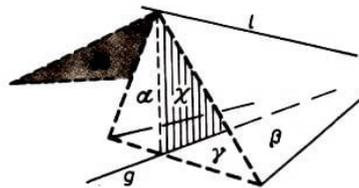


Abb. 14.2

Weitere Fälle sind noch zu betrachten. Gilt  $\alpha \parallel \beta$  und  $\gamma \not\parallel \alpha$ , dann kann dieser Fall durch

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma \circ (\sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma)$$

auf den ersten zurückgeführt werden.

Wenn schließlich  $\alpha \parallel \beta$  und  $\gamma \parallel \alpha$  gilt, dann ist  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  eine Ebenenspiegelung  $\sigma_\delta$  (zweiter Dreispiegelungssatz (13.21)), und diese ist gleich dem Produkt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ , wenn  $g$  irgendeine Gerade in der Ebene  $\delta$  und  $\kappa$  die Lotebene durch  $g$  auf  $\delta$  ist.

Damit ist konstruktiv gezeigt:

(14.1) Satz. Jedes Produkt von drei Ebenenspiegelungen lässt sich als Produkt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  einer Ebenen- und einer Geradenspiegelung darstellen.

(14.2) Aufgabe. In einem Würfel  $ABCDEFGH$  seien  $\alpha = \varepsilon_{ABC}$ ,  $\beta = \varepsilon_{CDH}$ ,  $\gamma = \varepsilon_{ADH}$ ,  $\delta = \varepsilon_{EFG}$  und  $\eta = \varepsilon_{BCH}$ .

Man stelle die Produkte  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ ,  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\delta$ ,  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\eta$  sowie  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\eta \circ \sigma_\delta$  im Sinne des Satzes (14.1) dar.

(14.3) Aufgabe. Jedes Produkt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  kann in der Form  $\sigma_h \circ \sigma_\lambda$ ; mit  $h \subset \kappa$  und  $g \subset \lambda$  dargestellt werden und umgekehrt.

Wir haben nun in unseren weiteren Untersuchungen der Bewegung  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  nur nach den Lagebeziehungen zwischen der Geraden  $g$  und der Ebene  $\kappa$  zu unterscheiden. Es ist entweder  $g \subset \kappa$  oder  $g \cap \kappa = \emptyset$  oder  $g \parallel \kappa$ .

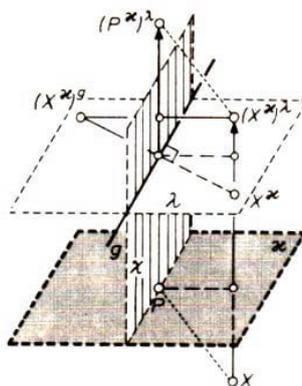


Abb. 14.3

Die ersten beiden Fälle betrachten wir weitgehend gemeinsam. Hier ist  $g \parallel \kappa$ . Dann gibt es eine zu  $\kappa$  senkrechte Ebene  $\chi$  durch  $g$  und eine zu  $\chi$  senkrechte Ebene  $\lambda$  durch  $g$  (Abb. 14.3).

Nun gilt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g = \sigma_\kappa \circ \sigma_\lambda \circ \sigma_\chi$ . Wegen  $\kappa \parallel \lambda$  und  $(\chi^\kappa)^\lambda = \chi$  ist  $\sigma_\kappa \circ \sigma_\lambda$  eine Verschiebung, bei der jeder Punkt von  $\chi$  wieder in einen Punkt dieser Ebene übergeht, eine Verschiebung längs der Ebene  $\chi$ . Das Produkt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  ist also eine Verschiebung längs der Ebene  $\chi$  mit anschließender Spiegelung an  $\chi$ .

In Analogie zu der ebenen Schubspiegelung (siehe Abschnitt 6) erklären wir:

Definition.  $\varphi$  heißt eine Schubspiegelung (des Raumes) längs der Ebene  $\chi$  genau dann, wenn  $\varphi$  sich als Produkt  $\tau \circ \sigma_\chi$  einer Verschiebung  $\tau$  längs  $\chi$  und der Spiegelung an der Ebene  $\chi$  darstellen lässt.

Zum Abschluss der ersten beiden Fälle können wir sagen: Ist  $g \subset \chi$ , dann ist  $\lambda = \kappa$  und damit  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  die Spiegelung an der Ebene  $\chi$ . Gilt  $g \cap \kappa = \emptyset$ , dann ist  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ , eine echte Schubspiegelung längs der Ebene  $\chi$ .

(14.4) Aufgabe. Es sei  $\varphi$  eine Schubspiegelung (des Raumes) längs der Ebene  $\chi$ . Für welche Ebenen  $\varepsilon$  ergibt die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $\varepsilon$  eine ebene Schubspiegelung?

(14.5) Aufgabe. Ist  $\varphi$  eine Schubspiegelung längs der Ebene  $\chi$ , dann gibt es eine Ebene

$\kappa \perp \chi$  und eine Gerade  $g$  mit  $g \subset \kappa$  und  $g \parallel \kappa$  derart, dass dann  $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$  gilt. Man beweise diese Aussage. Sind  $g$  und  $\kappa$  durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt?

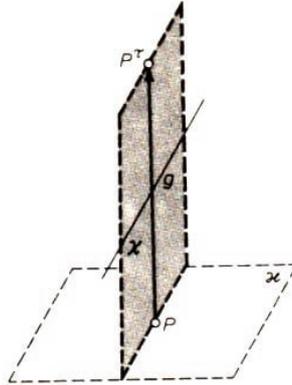


Abb. 14.4

Lösung. In der Aufgabe geht es um eine Umkehrung des gerade behandelten Sachverhalts, nach dem  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  für  $g \parallel \kappa$  eine Schubspiegelung ist. - Nach Voraussetzung ist  $\varphi = \tau \circ \sigma_\chi$ .

Für den Spezialfall, dass  $\tau = \iota$  gilt, ist die Lösung offensichtlich.

Wir setzen nun  $\tau \neq \iota$  voraus und wählen einen beliebigen Punkt  $P \in \chi$ . Dann ist  $P'$  ( $= P$ ) auch ein Punkt der Ebene  $\chi$ . In  $\chi$  sei  $g$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PP'}$ . Ferner sei  $\kappa$  die Ebene durch  $P$  mit  $\kappa \perp \chi$  und  $g \parallel \kappa$  (Abb. 14.4). Mit Hilfe der Abb. 14.3 ist ohne Mühe einsichtig, dass  $(X^\kappa)^g = (X^\tau)^\chi$  für alle Punkte  $X$  und damit  $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$  gilt. - Wir sehen, dass  $g$  und  $\kappa$  durch die Schubspiegelung  $\varphi$  nicht eindeutig bestimmt sind.

Zum Abschluss der Diskussion von  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  bleibt der Fall  $g \not\parallel \kappa$ .

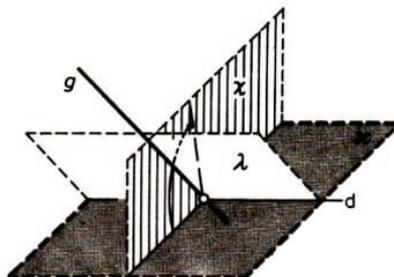


Abb. 14.5

Wir wählen wieder eine zu  $\kappa$  senkrechte Ebene  $\chi$  durch  $g$  und die zu  $\chi$  senkrechte Ebene  $\lambda$  durch  $g$  und erhalten  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g = (\sigma_\kappa \circ \sigma_\lambda) \circ \sigma_\chi$ . Wegen  $g \not\parallel \kappa$  sind  $\kappa$  und  $\lambda$  zwei sich schneidende Ebenen. Da  $\kappa, \lambda \perp \chi$  gilt, ist die Schnittgerade  $d$  von  $\kappa$  und  $\lambda$  eine zu  $\chi$  senkrechte Gerade (Abb. 14.5). Folglich haben wir hier  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  als Produkt einer (nichtidentischen) Drehung um  $d$  mit der Spiegelung an der Ebene  $\chi$  erhalten, wobei  $d \perp \chi$  gilt.

Derartige Bewegungen des Raumes erhalten eine eigene Bezeichnung.

Definition.  $\varphi$  heißt eine Drehspiegelung (des Raumes) genau dann, wenn  $\varphi$  das Produkt  $\rho \circ \sigma_\chi$  einer Drehung  $\rho$  um eine Gerade  $d$  und der Spiegelung an einer Ebene  $\chi$  mit  $d \perp \chi$  ist.

Diese Definition lässt zu, dass der Drehanteil gleich der identischen Abbildung ist. Damit sind Ebenenspiegelungen spezielle Drehspiegelungen.

(14.6) Aufgabe. Ist  $\varphi$  eine Drehspiegelung mit  $d$  als Achse der Drehung und  $\chi$  als Spiegelungsebene, dann gibt es eine Ebene  $\kappa$  mit  $\kappa \perp \chi$  und  $d \subset \kappa$  sowie eine Gerade  $g$  mit  $g \subset \kappa$  und  $g \perp d$  derart, dass  $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$  gilt. Man beweise die Aussage. Sind  $g$  und  $\kappa$  durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt?

Die Ebenenspiegelungen und nur diese sind sowohl Schubspiegelungen als auch Drehspiegelungen. Schließen wir nämlich diese speziellen Bewegungen aus den Betrachtungen aus, dann besitzt eine Schubspiegelung keinen und eine Drehspiegelung genau einen Fixpunkt.

Unsere bisherigen Untersuchungen der Dreierprodukte von Ebenenspiegelungen ergeben

(14.7) Satz. Jedes Produkt von drei Ebenenspiegelungen ist eine Schubspiegelung oder eine Drehspiegelung. Dabei gilt sogar "entweder - oder", wenn das Produkt keine Ebenenspiegelung ist.

Wir stellen schließlich auch für die Produkte von drei Ebenenspiegelungen die Frage, welche von ihnen Spiegelungen sind. Dabei können wir von der Darstellung  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  ausgehen.

(14.8) Aufgabe. Das Produkt  $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$  ist eine Spiegelung (d.h. mit  $\varphi \neq \iota$  und  $\varphi \circ \varphi = \iota$ ) genau dann, wenn  $g \subset \kappa$  oder  $g \perp \kappa$  gilt.

Der Fall  $g \subset \kappa$  ist uns bereits bekannt:  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  ist die Spiegelung an der zu  $\kappa$  senkrechten Ebene  $\chi$  durch  $g$ .

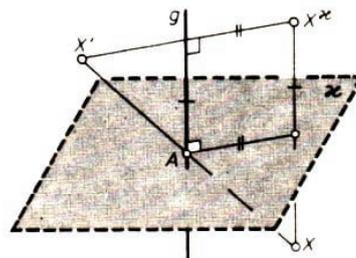


Abb. 14.6

Im Fall  $g \perp \kappa$  liegt eine spezielle Drehspiegelung vor; wegen  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_\kappa$  ist hier der Drehanteil eine Geradenspiegelung. Ferner ergibt sich (vgl. dazu Abb. 14.6):

Das Bild eines Raumpunktes  $X \neq A$  ist derjenige Punkt  $X'$ , für den  $A$  der Mittelpunkt von  $\overline{XX'}$  ist. Für  $X = A$  ist  $X' = A$ . Dies ist in der ebenen Geometrie eine charakteristische Eigenschaft für die Spiegelung an dem Punkt  $A$ .

Wir erklären deshalb

Definition.  $\sigma$  heißt eine Spiegelung (des Raumes) an dem Punkt  $A$  genau dann, wenn  $\sigma$  eine spezielle Drehspiegelung  $\sigma_g \circ \sigma_\kappa$  mit  $A \in g, \kappa$  ist.

Da  $X^\sigma = X$  für  $X = A$  und  $A$  der Mittelpunkt von  $\overline{XX^\sigma}$  für alle  $X \neq A$  ist, gibt es an jedem Punkt  $A$  nicht mehr als eine, also genau eine Spiegelung. Wir bezeichnen sie

mit  $\sigma_A$ ; und  $\mathfrak{F}^A$  sei wieder das Bild der Figur  $\mathfrak{F}$  bei der Spiegelung an  $A$ .

Bemerkenswert ist, dass bei jeder Punktspiegelung (des Raumes) die Orientierung vertauscht wird.

Die Spiegelung an dem Punkt  $A$  ist identisch mit jedem Produkt  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  bei dem  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  drei paarweise orthogonale und  $A$  enthaltende Ebenen sind, denn jede Geradenspiegelung  $\sigma_g$  ist identisch mit den Produkten  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$ , bei denen  $\alpha$  und  $\beta$  zueinander senkrechte Ebenen durch  $g$  sind.

(14.9) Aufgabe. Für jede Ebene  $\varepsilon$  gilt  $\varepsilon^A \parallel \varepsilon$  und insbesondere  $\varepsilon^A \cap \varepsilon = \emptyset$ , falls der Punkt  $A$ , am dem gespiegelt wird, nicht in  $\varepsilon$  liegt. Entsprechendes gilt für Geraden.

(14.10) Aufgabe. In einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder wird durch den Mittelpunkt jeder Kante die Ebene gelegt, die senkrecht zur gegenüberliegenden Kante verläuft. Man zeige, dass diese sechs Ebenen sich in einem Punkt schneiden.

Ein sogenannter "Dreiseitspiegel" besteht im wesentlichen aus drei spiegelnden ebenen Flächen, die paarweise senkrecht zueinander sind und im Innern der von ihnen gebildeten räumlichen Ecke zugewandt sind. Ein Dreiseitspiegel besitzt die besondere Eigenschaft, dass ein Lichtstrahl (z.B. von einer Lampe eines Fahrzeuges), der auf ihn auftrifft, stets parallel zu sich reflektiert wird. Man findet den Dreiseitspiegel im Rückstrahler ("Katzenauge") bei Fahrrädern, Kraftfahrzeugen und Verkehrszeichen. Aus Metall gefertigt, spielt er auch eine große Rolle in der Radartechnik.

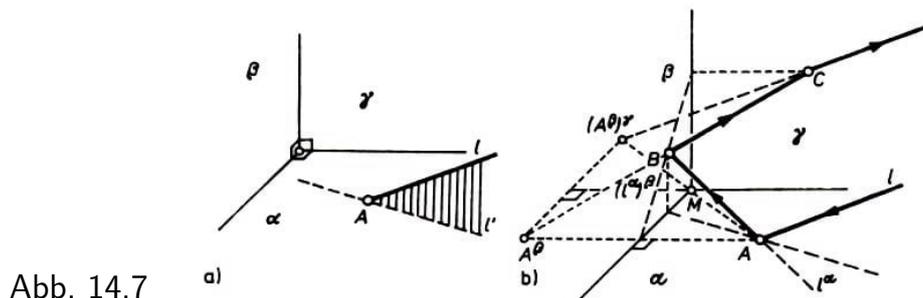


Abb. 14.7 a)

(14.11) Aufgabe. Man beweise die Reflexionseigenschaft des Dreiseitspiegels.

In Abb. 14.7 a, die ein Schrägriss eines Dreiseitspiegels und eines einfallenden Lichtstrahls samt der Einfallsebene  $\varepsilon_{ll'}$  bezüglich der Spiegelebene  $\alpha$  ist, konstruiere man den weiteren Verlauf des Lichtstrahls.

Lösung (Abb. 14.7 b). Aus praktischer Sicht können wir voraussetzen, dass der einfallende Lichtstrahl innerhalb der räumlichen Ecke liegt, die von den spiegelnden ebenen Flächen begrenzt wird, und dass er o.B.d.A. nicht parallel zu einer dieser Flächen ist und bei der Reflexion auf keine der Schnittgeraden zwischen den Spiegelebenen trifft. Nach der Reflexion an der ersten Spiegelebene  $\alpha$  verläuft der Weg des Lichtes längs des Bildes  $l^\alpha$  derjenigen Geraden  $l$  weiter, die den einfallenden Lichtstrahl enthält. Die Einfallsebene  $\varepsilon_{ll'}$  des Lichtstrahls bezüglich der Spiegelebene  $\alpha$ , in der auch  $l^\alpha$  liegt, schneidet eine weitere Spiegelebene  $\beta$ , und diese Schnittgerade schneidet  $l^\alpha$  in demjenigen Punkt  $B$ , in dem das Licht auf  $\beta$  auftrifft.

Bezüglich  $\beta$  ist  $\varepsilon_{AB\beta}$  die Einfallsebene und  $(l^\alpha)^\beta = g_{BA^\beta}$  die Gerade, längs der das

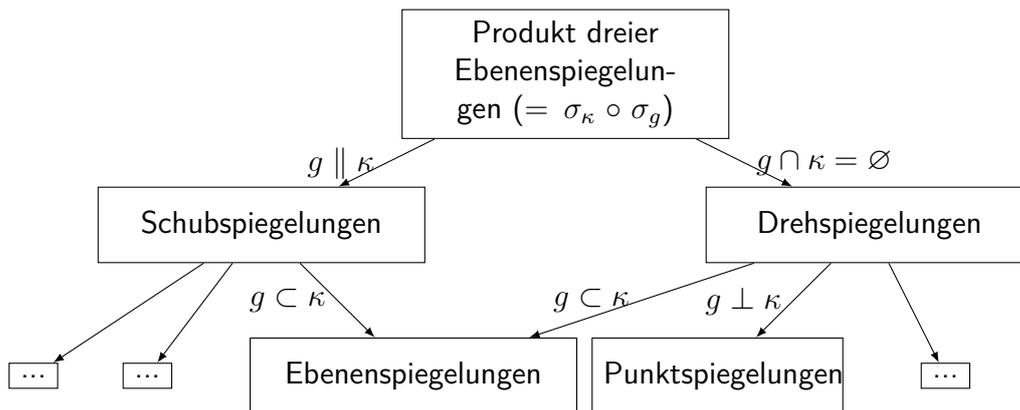
Licht nach der Reflexion an  $\beta$  weiter verläuft.

Der Punkt  $C$ , in dem das Licht auf die dritte Spiegelungsebene  $\gamma$  auftrifft, ist entsprechend der Schnittpunkt von  $\varepsilon_{ABA^\beta} \cap \gamma$  mit der Geraden  $(l^\alpha)^\beta$ . Der weitere Weg des Lichtes (nach der Reflexion an  $\gamma$ ) verläuft längs der Geraden  $((l^\alpha)^\beta)^\gamma$ .

Nun ist aber  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  gleich der Spiegelung an dem gemeinsamen Punkt  $M$  der Spiegelebenen. Und damit gilt in der Tat  $((l^\alpha)^\beta)^\gamma \parallel l$  (Aufgabe (14.9)).

Die eingangs genannten Bedingungen für den einfallenden Lichtstrahl sichern, dass tatsächlich der Lichtstrahl nacheinander die drei spiegelnden Ebenenteile trifft, was man an Hand der Abb. 14.7b nach jeder Reflexion an den vorliegenden anordnungsgeometrischen Bedingungen ohne Mühe erkennt. Dabei wird jedoch benutzt, dass der Dreiseitspiegel beliebig groß ist. - Die Einschränkung auf eine endliche Ausdehnung bedeutet jedoch nur, sich auf Strahlen zu beschränken, die hinreichend nahe an  $M$  auf den ersten Spiegel auftreffen, und davon kann in der Praxis i.a. ohnehin ausgegangen werden.

Unsere Einsicht in die Struktur der Produkte von drei Ebenenspiegelungen ermöglicht folgende Übersicht:



In der ebenen Geometrie kennen wir grundlegende Beziehungen zwischen den Punktspiegelungen und den Verschiebungen (Satz (5.16) und (5.17)).

Diese gelten wörtlich auch für den Raum:

(14.12) Satz.  $\sigma_A \circ \sigma_B$  ist stets eine Verschiebung.

(14.13) Satz. Ist  $\tau$  eine Verschiebung und  $A$  irgendein Punkt, so gibt es genau einen Punkt  $B$  derart, dass  $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$  gilt.

Ein Beweis des Satzes (14.12) kann analog zu dem des Satzes (5.16) geführt werden. (Entsprechendes gilt bezüglich (14.13).)

Es gibt eine Gerade  $g$ , die  $A$  und  $B$  enthält. (Für  $A \neq B$  ist das  $g_{AB}$ ) Durch  $A$  und  $B$  legen wir die zu  $g$  senkrechten Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ . Wegen  $\alpha \parallel \beta$  und

$$\sigma_A \circ \sigma_B = (\sigma_b \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_\alpha) = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$$

ist  $\sigma_A \circ \sigma_B$  nach Definition eine Verschiebung.

Den Beweis des Satzes (14.13) überlassen wir dem Leser als Aufgabe.

## 15 Schraubungen

Wenn wir jetzt noch die Produkte von vier Ebenenspiegelungen untersuchen, so haben wir insgesamt auf Grund des Darstellungssatzes (12.5) alle räumlichen Bewegungen erfasst.

Gegeben sei also ein Produkt  $\varphi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$  von Ebenenspiegelungen. Es ist hier erst recht angebracht, nach einer vereinfachten Darstellung wie im Abschnitt 14 zu suchen, etwa nach einer mit zwei Spiegelungen.

Das Teilprodukt  $\sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$  lässt sich durch ein Produkt  $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$  aus einer Ebenen- und Geradenspiegelung ersetzen (Satz (14.1)). Weiterhin gibt es nach dem Ergebnis der Aufgabe (13.22) Geraden  $a$  und  $b$  derart, dass  $b \perp g$  und  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\kappa = \sigma_a \circ \sigma_b$  gilt. Nun ist  $\varphi = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_g$ . Wegen  $b \perp g$  ist  $\sigma_b \circ \sigma_g$  eine Spiegelung an einer Geraden  $c$  (Aufgabe (13.13)). Damit ist schließlich die Bewegung  $\varphi$  gleich dem Produkt  $\sigma_a \circ \sigma_c$ . Wir haben damit konstruktiv gezeigt:

(15.1) Satz. Jedes Produkt  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$  von vier Ebenenspiegelungen kann als Produkt von zwei Geradenspiegelungen dargestellt werden.

Eine vollständige Übersicht über die Viererprodukte von Ebenenspiegelungen kann nun leicht anhand der möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden gegeben werden. Es sei  $\varphi = \sigma_a \circ \sigma_b$ .

Fall 1.  $a = b$ . Dann ist  $\varphi$  die identische Bewegung  $\iota$ .

Fall 2.  $a \parallel b$  und  $a \neq b$ . Dann ist  $\varphi$  eine von  $\iota$  verschiedene Verschiebung.

Fall 3.  $a$  und  $b$  schneiden sich in einem Punkt  $P$ . Dann ist  $\varphi$  eine von  $\iota$  verschiedene Drehung um diejenige Gerade  $g$ , die senkrecht zu  $a, b$  ist und durch  $P$  geht.

Fall 4.  $a$  und  $b$  sind windschief (d.h., sie liegen in keiner gemeinsamen Ebene).

Nur dieser Fall ist noch eingehend zu betrachten. Bekanntlich gibt es genau eine Gerade  $g$ , die senkrecht zu  $a$  und  $b$  ist. Nun seien  $\alpha', \beta'$  die Verbindungsebenen  $\varepsilon_{ag}$  und  $\varepsilon_{bg}$  und  $\gamma', \delta'$  die zu  $g$  senkrechten Ebenen durch  $a$  bzw.  $b$  (Abb. 15.1). Dann gilt

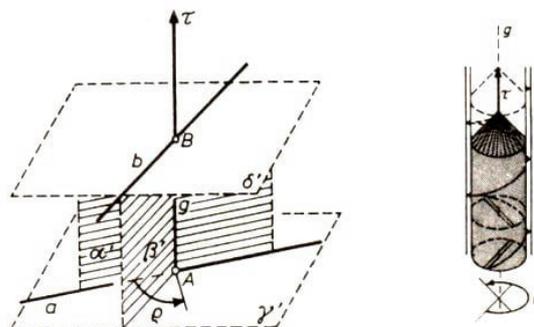


Abb. 15.1,15.2

$$\sigma_a \circ \sigma_b = (\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\gamma'}) \circ (\sigma_{\beta'} \circ \sigma_{\delta'}) = (\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}) \circ (\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\delta'})$$

wobei die Vertauschung  $\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\beta'} = \sigma_{\beta'} \circ \sigma_{\gamma'}$  wegen  $\gamma' \perp \beta'$  möglich ist (Aufgabe 13.12). Das Teilprodukt  $\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}$  ist eine Drehung um  $g$ , und  $\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\delta'}$  ist eine Verschiebung

längs  $g$ .

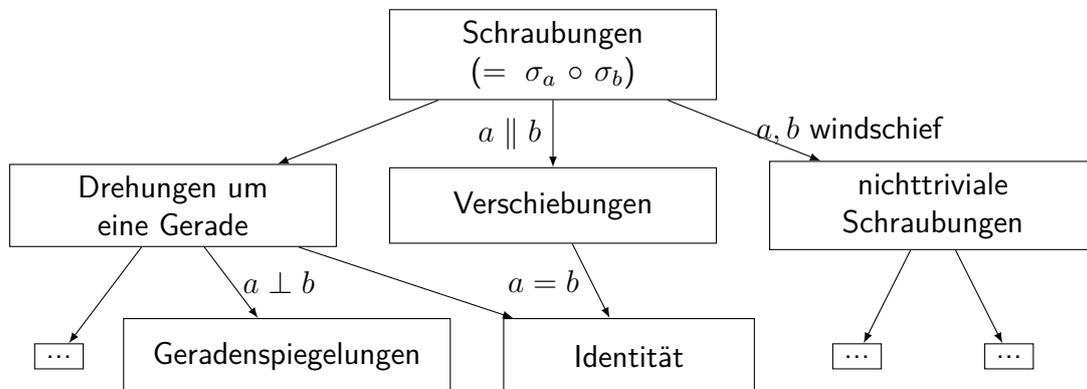
Eine Zusammensetzung aus derartigen Bewegungen liegt mechanisch z.B. beim Gebrauch einer Schraube vor (Abb. 15.2). Man erklärt deshalb

Definition.  $\varphi$  heißt eine Schraubung längs der Geraden  $g$  (oder Schraubung mit der Achse  $g$ ) genau dann, wenn  $\varphi$  sich als Produkt  $\rho \circ \tau$  einer Drehung  $\rho$  um  $g$  und einer Verschiebung  $\tau$  längs  $g$  darstellen lässt.

Diese Erklärung lässt zu, dass  $\rho$  oder  $\tau$  gleich der identischen Bewegung  $\iota$  sind. Ein Viererprodukt von Ebenenspiegelungen ist also stets eine Schraubung.

(15.2) Aufgabe. Gibt es neben den Geradenspiegelungen noch andere Schraubungen  $\sigma_a \circ \sigma_b$ , die Spiegelungen sind?

Unsere Untersuchungen über Produkte von vier Ebenenspiegelungen ermöglichen folgende Übersicht:

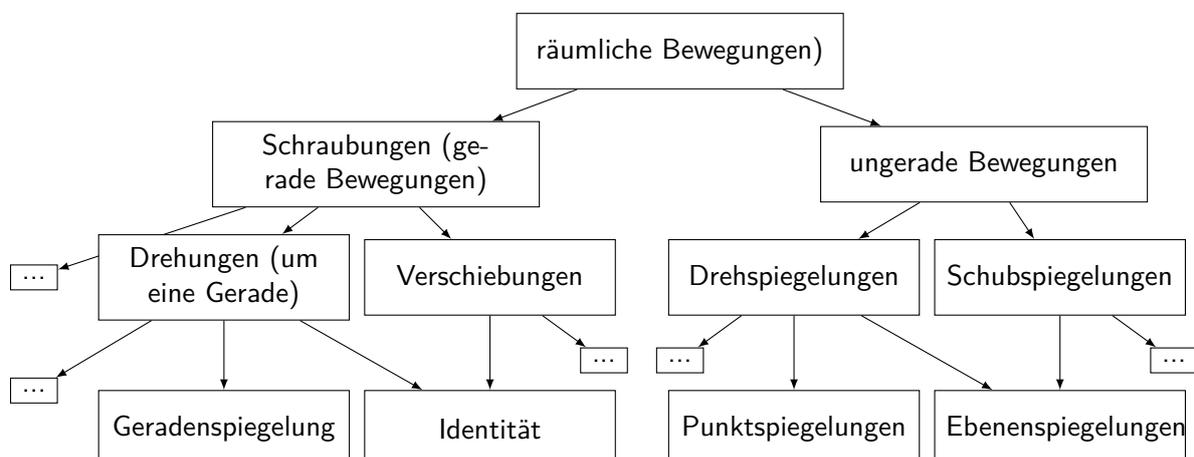


(15.3) Aufgabe. Ist  $\rho \circ \tau$  eine Schraubung mit der Achse  $g$ , dann gilt  $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$ .

Lösung. Nach Voraussetzung gibt es Ebenen  $\alpha, \beta$  durch  $g$  und  $\gamma, \delta$  senkrecht zu  $g$  derart, dass  $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  und  $\tau = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$  ist. Wegen  $\alpha, \beta \perp \gamma, \delta$  ist die Reihenfolge in den Produkten  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$ ,  $\sigma_\alpha \circ \sigma_\delta$ ,  $\sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$  und  $\sigma_\beta \circ \sigma_\delta$  vertauschbar. Folglich gilt

$$\rho \circ \tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \tau \circ \rho$$

## 16 Produkte und Gruppen räumlicher Bewegungen



Vermöge des Darstellungssatzes (12.5) und den Übersichten in den Abschnitten 14 und 15 ergibt sich obige Übersicht über die räumlichen Bewegungen.

(16.1) Aufgabe. Auf einer schalenförmigen Unterlage liegt ein Fußball oder ein anderer als Kugel angenommener Körper (Abb. 16.1). Kann er neu so auf die Schale gelegt werden, dass kein Punkt seiner Oberfläche mit seiner ursprünglichen Lage übereinstimmt?

Lösung. Der Lageveränderung des Fußballs entspricht eine räumliche Bewegung  $\varphi$ , bei der es einen Fixpunkt gibt, nämlich den Mittelpunkt des als Kugel angesehenen Körpers. Außerdem bleibt die Orientierung erhalten, d.h.,  $\varphi$  ist eine gerade Bewegung.



Abb. 16.1

Dann kann  $\varphi$  nur noch eine Drehung um eine Gerade sein. Demnach gibt es bei jeder Lageveränderung wenigstens zwei (diametral gelegene) Punkte der Kugeloberfläche (als Schnittpunkte der Drehachse mit der Kugeloberfläche), die fest bleiben. Die Frage ist also mit "Nein" zu beantworten.

Die Überlegung verdeutlicht, dass es keine räumliche Bewegung gibt, die man als "Drehung um einen Punkt" ansehen könnte, nämlich eine gerade Bewegung mit genau einem Fixpunkt.

In der Kinematik<sup>22</sup> untersucht man die räumliche und zeitliche Änderung der Lage von Figuren, z.B. von beweglichen Teilen an Geräten und Maschinen. (Die Kinematik benutzt demnach einen anderen Bewegungsbegriff.)

Naturgemäß sind die Bewegungen, die im Zusammenhang mit technischen Sachverhalten stehen, i.a. orientierungserhaltend, d.h. gerade. Im Vordergrund stehen also Drehungen, Verschiebungen und allgemein Schraubungen.

In der Getriebelehre interessieren insbesondere Zusammensetzungen von Drehungen oder Schraubungen. Diese "Zusammensetzung" (im Sinne der Getriebelehre) entspricht einer mehrfachen Nacheinanderausführung von Bewegungen. Wir gehen darauf noch ein. Zunächst wenden wir uns der Nacheinanderausführung zweier Drehungen zu.

(16.2) Aufgabe. Man bestimme das Produkt  $\rho_1 \circ \rho_2$  zweier Drehungen  $\rho_1$  um die Gerade  $a$  und  $\rho_2$  um die Gerade  $b$ , wenn

a)  $a = b$ ; b)  $a$  und  $b$  sich schneiden; c)  $a \parallel b$ ; d)  $a$  und  $b$  windschief sind.

Lösung. Im Abschnitt 15 liegen bereits spezielle Ergebnisse vor, nämlich eine vollständige Untersuchung des Produkts  $\sigma_a \circ \sigma_b$  der Spiegelungen an  $a$  und  $b$ . Überdies ist der allgemeine Charakter der Verkettung  $\rho_1 \circ \rho_2$  auch klar; sie ist eine Schraubung, da sie

<sup>22</sup>Unter "Kinematik" wird z.T. in technisch orientierter Literatur das Gebiet der "Maschinengetriebelehre" verstanden.

mit  $\rho_1$  und  $\rho_2$  auch selbst eine gerade Bewegung ist.

Zu a) und b). Haben die Gerade  $a$  und  $b$  einen Punkt  $P$  gemeinsam, dann ist  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um eine Gerade  $c$  durch  $P$  (Satz (13.10)).

Zu c). Gilt  $a \parallel b$ , dann ergeben völlig gleiche Darstellungen mit Hilfe von Ebenenspiegelungen, die zum Satz (13.10) führten (Abb. 13.4), dass  $\rho_1 \circ \rho_2$  eine Drehung um eine zu  $a, b$  parallele Gerade  $c$  ist, falls die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  sich längs  $c$  schneiden (Abb. 16.2) oder eine Verschiebung ist, falls  $\alpha \parallel \beta$  ist.

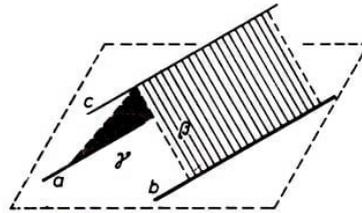


Abb. 16.2

Zu d). Dazu sei  $g$  die zu  $a$  und  $b$  senkrechte Gerade und  $A, B$  die Schnittpunkte von  $g$  mit  $a$  bzw.  $b$ .

Nun gibt es (genau) eine Gerade  $e$  durch  $A$  mit  $\rho_1 = \sigma_e \circ \sigma_g$  (und  $e$  liegt mit  $g$  in einer zu  $a$  senkrechten Ebene sowie (genau) eine Gerade  $f$  durch  $B$  mit  $\rho_2 = \sigma_g \circ \sigma_f$  (und  $f$  liegt mit  $g$  in einer zu  $b$  senkrechten Ebene). Anhand von Abb. 16.3 ist dies leicht einsichtig.

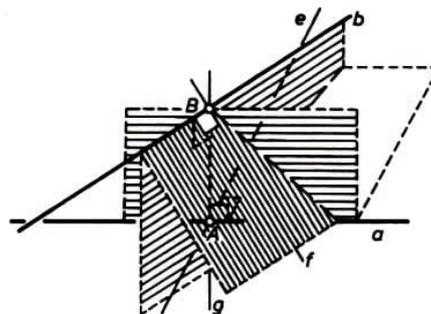


Abb. 16.3

(Augenfällig ist dabei eine Analogie zu einem Sachverhalt in der ebenen Geometrie, zu der Untersuchung des Produkts  $\rho_1 \circ \rho_2$  zweier Drehungen um verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$ ; siehe dazu Abb. 8.2.) Wir erhalten  $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_e \circ \sigma_f$ . Ein solches Produkt ist bereits im Abschnitt 15 eingehend untersucht und dargestellt worden. (Siehe dazu Abb. 15.1.)

Die Darstellungsweise im Fall d) ist übrigens für alle anderen Fälle auch möglich, denn es gibt stets eine Gerade  $g$ , die zu den Geraden  $a$  und  $b$  senkrecht ist.

(16.3) Aufgabe. Es sei  $(O; X, Y, Z)$  ein kartesisches Koordinatensystem (d.h.  $O$  der Ursprung und  $X, Y, Z$  die Einheitspunkte auf der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse) und  $(O; X', Y', Z')$  ein dazu gleichorientiertes.

Dann können (nach Euler)  $X$  in  $X'$ ,  $Y$  in  $Y'$  und  $Z$  in  $Z'$  übergeführt werden, indem man nacheinander Drehungen  $\rho_1$  um  $g_{OX}$ ,  $\rho_2$  um  $(g_{OY})^{\rho_1}$  und  $\rho_3$  um  $(g_{OZ})^{\rho_1 \circ \rho_2}$  ausführt.

Die dabei (in gleicher Orientierung) bestimmten Drehmaße, die Eulerschen Winkel, sind für die Darstellung einer Drehung von Bedeutung.

Die Nacheinanderausführung zweier Drehungen (bzw. Schraubungen) ist abbildungsmäßig nicht gleich der "Zusammensetzung" zweier Drehungen (bzw. Schraubungen), wie sie in der Getriebetechnik vorliegt. Im Fall der Drehungen bedeutet die Zusammensetzung folgendes:

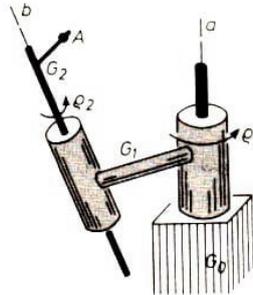


Abb. 16.4

Gegenüber dem Gestell  $G_0$  dreht sich (um eine Achse  $a$ ) ein Glied  $G_1$  und ferner gleichzeitig ein Glied  $G_2$  (um die Achse  $b$ ) gegenüber  $G_1$  (Abb. 16.4). Von Bedeutung ist die relative Bewegung der Punkte  $A$  des Gliedes  $G_2$  gegenüber dem Gestell  $G_0$ .

Bei der Drehung  $\rho_2$  um  $b$  geht  $A$  in  $A' = A^{\rho_2}$  über. Dieses Paar  $(A, A')$  zugeordneter Punkte bezüglich der Abbildung  $\rho_2$  ist nun der Drehung  $\rho_1$  um  $a$  zu unterwerfen, und man erhält das Paar  $(A^{\rho_1}, A'^{\rho_1})$ , wobei  $A'^{\rho_1} = (A^{\rho_2})^{\rho_1}$  ist.

Welche Beziehung besteht nun zwischen den Punkten dieses Paares?

Wegen  $\rho_1 \circ (\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1) = \rho_2 \circ \rho_1$  geht  $A^{\rho_1}$  bei der Abbildung  $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$  in den Punkt  $A'^{\rho_1}$  über. Außerdem ist  $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$  nach B 5 eine Bewegung. Bei diesen Überlegungen wird nur benutzt, dass  $\rho_1, \rho_2$  Bewegungen sind.

Es kann also ganz allgemein das Produkt  $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$  als das "Bild der Bewegung  $\tau$ " bei der Bewegung  $\varphi$  aufgefasst werden; es ist wieder eine Bewegung. (Abb. 16.5 verdeutlicht schematisch die Zusammenhänge.) Im Rahmen einer Gruppe - und die Bewegungen des Raumes bilden eine Gruppe - sagt man auch:  $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$  ist das Element, das aus  $\tau$  durch Transformation mit  $\varphi$  entsteht.

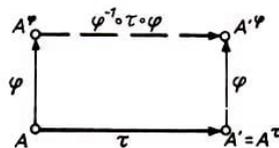


Abb. 16.5

Bevor wir zu unserer eigentlichen Aufgabenstellung zurückkehren, lösen wir

(16.4) Aufgabe. Ist  $\sigma$  eine Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon$  und  $\varphi$  eine Bewegung, dann ist  $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$  die Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon^\varphi$ , an dem Bild der Ebene  $\varepsilon$  bei der Bewegung  $\varphi$ .

Lösung. Zunächst ist  $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$  eine Bewegung. Nach der Charakterisierung der Ebenenspiegelungen, die im Satz (12.7) gegeben wird, bleibt zu zeigen, dass  $P^{\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi} =$

$P$  für jeden Punkt  $P \in \varepsilon^\varphi$  gilt und dass  $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$  die Halbräume bezüglich der Ebene  $\varepsilon^\varphi$  vertauscht.

In der Tat gilt folgende Äquivalenz:

$$P \in \varepsilon^\varphi \Leftrightarrow P^{\varphi^{-1}} \in \varepsilon \Leftrightarrow (P^{\varphi^{-1}})^\sigma = P^{\varphi^{-1}} \Leftrightarrow ((P^{\varphi^{-1}})^\sigma)^\varphi = P$$

Ein Halbraum  $\mathfrak{H}$  mit der Begrenzung  $\varepsilon^\varphi$  kann nun bei der Bewegung  $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$  nur noch in sich selbst oder in  $\mathfrak{H}^-$  übergehen. Da diese Bewegung aber ungerade ist, gilt letzteres.

Unsere Frage nach der Art von  $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$  wird im wesentlichen mit folgender Aufgabe beantwortet.

(16.5) Aufgabe. Ist  $\rho$  eine Drehung um  $b$  und  $\varphi$  eine Bewegung, dann ist  $\varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi$  eine Drehung um das Bild von der Geraden  $b$  bei der Bewegung  $\varphi$ .

Zur Lösung ist nicht nur das Ergebnis aus (16.4), sondern auch die diesbezügliche Beweisanlage nützlich.

Die Zusammensetzung der Drehungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  ist also eine Drehung um das Bild der Geraden  $b$  bei der Drehung  $\rho_1$ . Schneiden sich die Drehachsen  $a$  und  $b$ , so geht auch die Drehachse  $b^{\rho_1}$  durch diesen Schnittpunkt.

Mit unserem Bewegungsbegriff lassen sich nur einige Aspekte erfassen, die in der Kinematik und in der Getriebelehre von Bedeutung sind. Die Kinematik bezieht zeitliche Veränderungen der Lage von Figuren mit ein. Man nutzt dafür vielfach die Methoden der Differentialgeometrie.

Mit diesem Seitenblick auf die Kinematik - nähere Ausführungen müssen hier unterbleiben - möchten wir auf diese bedeutende Disziplin aufmerksam machen und zur Beschäftigung mit ihr anregen. (Siehe diesbezügliche Literaturhinweise im Literaturverzeichnis.)

(16.6) Aufgabe. a) Man bestimme  $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$  für die Drehungen aus der Aufgabe (13.11).

b) Man zeige durch Transformation:  $A \in \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_a \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_a$ .

Im Rahmen der geraden Bewegungen sind die Betrachtungen über Produkte von Drehungen natürlich durch einige über Produkte von Verschiebungen zu ergänzen. Wir beginnen mit

(16.7) Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen. Sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  irgendwelche Punkte (des Raumes), dann ist  $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$  eine Spiegelung an einem Punkt  $D$ .

Ein Beweis kann mit Hilfe der Sätze (14.12) und (14.13) so wie in der ebenen Geometrie geführt werden. Dabei ergibt sich, dass der Punkt  $D$  das Bild von  $A$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{BC}$  ist und damit zusammen mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  in einer gemeinsamen Ebene liegt. Der obige Satz führt uns weiter zu dem

(16.8) Satz. Das Produkt zweier Verschiebungen ist eine Verschiebung; insbesondere gilt  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Beweis als Aufgabe.

(16.9) Aufgabe. Gibt es zu einer vorgegebenen Kugel mit der Durchmesserlänge  $d$  und einem Dreieck  $ABC$ , dessen Seitenlängen kleiner als  $d$  sind, eine Verschiebung  $\tau$  so, dass die Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  auf der Kugel liegen?

Gegebenenfalls bestimme man alle derartigen Verschiebungen.

Es ergäbe sich im Zusammenhang mit Verkettungen von speziellen räumlichen Bewegungen noch eine Reihe von Aufgabenstellungen, wenn man allein entsprechenden Untersuchungen in der ebenen Geometrie folgt.

Es bleibt in einigen Fällen auch die Frage, ob mit den bereits gewonnenen Ergebnissen ein gewisser Abschluss erzielt worden ist. So haben wir z.B. für die Ebenen- und Punktspiegelungen Dreispiegelungssätze (Satz (13.6) und (13.21) bzw. Satz (16.7)) angegeben. Gibt es eine derartige Aussage auch für Geradenspiegelungen?

(16.10) Aufgabe. Unter welchen Bedingungen für die Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ist  $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  wieder eine Geradenspiegelung?

Auf einem auffallenden Unterschied zu den Ebenen- und Punktspiegelungen möchten wir dabei noch aufmerksam machen: Es kann bereits ein Produkt von zwei Geradenspiegelungen wieder eine Geradenspiegelung sein (Aufgabe (13.13)).

Mehr möchten wir (aus Platzgründen) nicht direkt zum engeren Thema Verkettungen von speziellen räumlichen Bewegungen ausführen. Für den Leser bleibt hier noch viel Raum zu eigenschöpferischer Tätigkeit.

Getreu der Überschrift dieses Abschnittes wenden wir uns noch einigen Gruppen von Bewegungen zu.

Da bietet sich zunächst das doch recht reichhaltige Spektrum an speziellen räumlichen Bewegungen aus der Übersicht an.

(16.11) Aufgabe. Welche Arten von räumlichen Bewegungen, die in der Übersicht dieses Abschnittes ausgewiesen sind, bilden eine Gruppe? Welche dieser Gruppen sind kommutativ?

Lösung. Zunächst bilden alle Bewegungen des Raumes eine Gruppe, und zwar aus gleichen Gründen wie in der ebenen Geometrie.

Alle ungeraden Bewegungen fallen sofort außer Betracht, denn je zwei von ihnen ergeben als Produkt eine gerade Bewegung.

Die geraden Bewegungen (die Schraubungen) bilden eine (Unter-)Gruppe, die aber nicht kommutativ ist, wie allein schon die Aussage in der Aufgabe (13.12) zeigt.

Die Drehungen ergeben keine Gruppe; das zeigt uns das Ergebnis der Aufgabe (16.2); auch nicht speziell die Geradenspiegelungen.

Dagegen bilden die Verschiebungen sogar eine kommutative (Unter-)Gruppe, denn mit  $\tau_1$  und  $\tau_2$  sind auch  $\tau_1 \circ \tau_2$  (Satz (16.8)) und  $\tau_1^{-1}$  Verschiebungen, und den Nachweis der Kommutativität können wir auf Grund des Satzes (14.13) wie in der ebenen Geometrie mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes für Punktspiegelungen führen.

Damit ist die obige Übersicht ausgeschöpft. Doch es bleibt eine unerschöpfliche Fülle an Mengen von Bewegungen, die eine Gruppe ergeben. Vielfache Anregungen bietet hier wieder die ebene Geometrie. Wir können auch hier nur einige Beispiele herausgreifen und zu weiteren (eigenen) Betrachtungen ermuntern.

Eine Deckabbildung  $\varphi$  einer Figur  $\mathfrak{F}$  sei wie an früherer Stelle in der ebenen Geometrie (Abschnitt 10) erklärt:  $\varphi$  ist eine Bewegung des Raumes mit  $\mathfrak{F}^\varphi = \mathfrak{F}$ . Dazu lassen wir hier ebenfalls ungerade Bewegungen zu.

Offenbar bilden auch im Raum die Deckabbildungen einer vorgegebenen Figur eine Gruppe, eine Untergruppe der Bewegungsgruppe. Diese Symmetriegruppe der Figur kann recht arm sein, sie kann nur aus einem Element - der identischen Bewegung - bestehen. Besonders interessante Deckabbildungsgruppen mit endlich vielen Elementen besitzen die fünf regelmäßigen Polyeder: regelmäßiges Tetraeder, Würfel, regelmäßiges Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

(16.12) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$ ?

Lösung. Wir können bereits auf Vorleistungen zurückgreifen. Nach der Lösung der Aufgabe (12.3) wissen wir, dass jede Deckabbildung des Tetraeders eine Permutation der Menge  $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$  der Ecken (d.h. eine eineindeutige Abbildung von  $\mathfrak{E}$  auf sich) bewirkt und dass es zu jeder Permutation von  $\mathfrak{E}$  höchstens eine passende Deckabbildung des Tetraeders gibt. Demnach gibt es höchstens 24 Deckabbildungen.

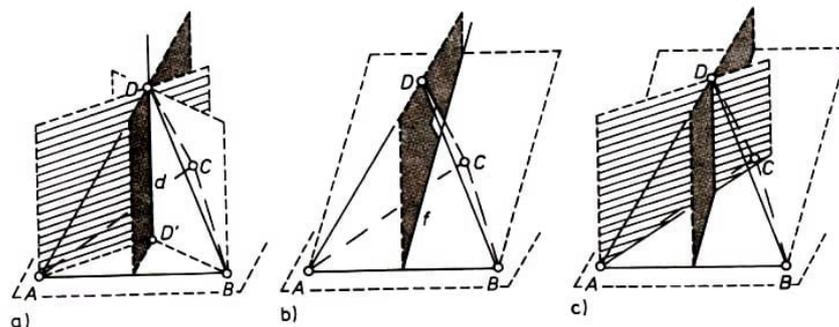


Abb. 16.6

Ferner haben wir bei der Lösung der Aufgabe (11.4) gezeigt, dass dafür aus der Menge der Ebenenspiegelungen nur die Spiegelungen an den sechs Mittellotebenen  $\mu(A, B)$ ,  $\mu(B, C)$ ,  $\mu(C, A)$ ,  $\mu(A, D)$ ,  $\mu(B, D)$  und  $\mu(C, D)$  in Frage kommen. Wir sehen uns die von ihnen erzeugte Untergruppe näher an, denn sie besteht natürlich nur aus Deckabbildungen des Tetraeders.

Die Ebenen  $\mu(A, B)$ ,  $\mu(B, C)$  und  $\mu(C, A)$  schneiden sich in dem Lot  $d$  von  $D$  auf die Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  (Abb. 16.6 a). Das Produkt der Spiegelungen an den Ebenen  $\mu(A, B)$  und  $\mu(B, C)$  ist eine nicht identische Drehung um  $d$ , und diese ergibt bei der Einschränkung auf die Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  eine nicht identische Drehung von  $\varepsilon_{ABC}$ , die eine Deckabbildung des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  ist.

Es gibt aber neben der identischen nur zwei nicht identische Drehungen von  $\varepsilon_{ABC}$ , die Deckabbildungen des Dreiecks  $ABC$  sind. Folglich ergeben die betrachteten drei Ebenenspiegelungen durch Verkettung neben der identischen nur zwei nicht identische

Drehungen um  $d$ .

Entsprechendes gilt für die Lote von den übrigen drei Ecken auf die jeweils gegenüberliegende Tetraederseitenfläche. So erhalten wir  $4 \cdot 2 = 8$  nicht identische Drehungen als Deckabbildungen.

Es bleiben nur noch diejenigen Verkettungen von zwei der sechs Ebenenspiegelungen offen, bei denen die Mittellotebenen zu gegenüberliegenden Tetraederkanten gehören; das sind z.B.  $\mu(A, B)$  und  $\mu(C, D)$ . Da diese Ebenen jeweils senkrecht zueinander sind, ist das Produkt eine Geradenspiegelung, bezüglich  $\mu(A, B)$  und  $\mu(C, D)$  an der Schnittgeraden  $f = \mu(A, B) \cap \mu(C, D)$  (Abb. 16.6b).

Damit haben wir drei Geradenspiegelungen als weitere Deckabbildungen des Tetraeders. Wir verketteten schließlich die Spiegelung an der Ebene  $\mu(A, B)$  jeweils mit den bereits aufgeführten zwei nicht identischen Drehungen an dem Lot durch  $A$  sowie an dem Lot durch  $B$  und mit den Spiegelungen an den Geraden, die die Mittelpunkte  $Mp(A, C)$ ,  $Mp(B, D)$  bzw.  $Mp(B, C)$ ,  $Mp(A, D)$  verbinden.

Diese sechs ungeraden Produkte sind nichttriviale Drehspiegelungen (d.h. keine Ebenenspiegelungen), und sie sind offenbar voneinander und von den bisherigen  $1 + 6 + 8 + 3 = 18$  Deckabbildungen verschieden.

Wegen  $18 + 6 = 24$  haben wir damit bereits die Elemente der Deckabbildungsgruppe vollständig erfasst.

Im letzten Teil der Lösung könnte man auch folgender Überlegung folgen. Wir verketteten die Spiegelung an der Geraden  $f$  jeweils mit den Spiegelungen an den Ebenen  $\mu(A, C)$ ,  $\mu(B, C)$ ,  $\mu(A, D)$  und  $\mu(B, D)$ . (In den restlichen beiden Symmetrieebenen ist die Gerade  $f$  enthalten.)

Das ergibt offenbar vier voneinander verschiedene ungerade Produkte, die keine Spiegelungen an Ebenen sind, also nichttriviale Drehspiegelungen sind. Das gleiche kann bezüglich der beiden anderen Geraden gesagt werden, die die Mitten gegenüberliegender Tetraederkanten verbinden.

Wir bekämen damit  $3 \cdot 4 = 12$  nichttriviale Drehspiegelungen als Deckabbildungen und damit insgesamt  $18 + 12 = 30$  Gruppenelemente.

(16.13) Aufgabe. Wo steckt bei diesen Überlegungen der Fehler ?

Unsere Lösung der Aufgabe (16.12) zeigt ferner, dass sich die Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders mit den Spiegelungen an den sechs Symmetrieebenen erzeugen lässt. Naheliegender ist folgende Frage.

(16.14) Aufgabe. Lässt sich dieses Erzeugendensystem reduzieren?

Lösung. Da die Symmetriegruppe nichttriviale Drehspiegelungen enthält, sind mindestens drei der Ebenenspiegelungen notwendig. Und man kommt in der Tat mit so vielen aus!

Natürlich gelingt das nur mit solchen, die zusammen als Produkt eine nicht triviale Drehspiegelung ergeben, so z.B. die Spiegelungen  $\sigma_1$  an  $\mu(A, B)$ ,  $\sigma_2$  an  $\mu(B, C)$  und  $\sigma_3$  an  $\mu(C, D)$  (Abb. 16.6 c).

Das Transformieren hilft uns nun leicht weiter. Es ist  $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  die Spiegelung  $\sigma_4$  an  $\mu(C, A)$ ,  $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$  die Spiegelung  $\sigma_5$  an  $\mu(B, D)$  und schließlich  $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_5 \circ \sigma_1$  die Spiegelung  $\sigma_6$  an  $\mu(A, D)$ .

Die aufgezeigten Sachverhalte über Symmetriegruppen sind für kristallographische Betrachtungen von Molekülen (und den von ihnen gebildeten Strukturen) von Interesse. Während für den Konstrukteur nur eigentliche Bewegungen relevant sind, betrachtet der Kristallograph fiktive Bewegungen, denn kein Kristall führt auch nur eine seiner Deckabbildungen jemals aus!

Diese braucht man aber zur Aufdeckung der Physik der Kristalle, zur Beschreibung ihrer geometrischen Struktur, natürlich in dem Bewusstsein, dass die Physik der Kristalle ihre Geometrie bestimmt.

(16.15) Aufgabe. Welchen Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$ , die bei der Lösung der Aufgabe (16.12) einzeln aufgeführt wurden, entsprechen welchen Permutationen von  $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$ ?

(16.16) Aufgabe. Welche Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$  erzeugt die nicht triviale Drehspiegelung  $\sigma_2 \circ \sigma_f$ , wobei  $\sigma_2$  die Spiegelung an der Symmetrieebene  $\mu(B, C)$  und  $f$  für Symmetrieachse entsprechend Abb. 16.6b ist?

(16.17) Aufgabe. Man bestimme alle Untergruppen der Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders  $ABCD$ . Welche von ihnen sind zyklisch, welche stimmen in ihrer Struktur miteinander überein?

(16.18) Aufgabe. Man bestimme die Bewegungen, aus denen die Symmetriegruppe eines Würfels besteht! Man gebe ein möglichst kleines Erzeugendensystem für diese Gruppe an.

Kochsalz kristallisiert zum Teil als Würfel und zum Teil als regelmäßiges Oktaeder aus.  
- Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein regelmäßiges Oktaeder (Abb. 16.7).

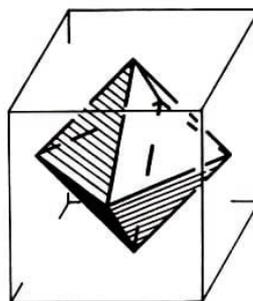


Abb. 16.7

Für die Untersuchungen in der Aufgabe (16.18) kann es von Wert sein, sich auf diese Figur zu stützen. (16.19) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die Gruppe der Deckabbildungen eines geraden Kreiskegels?

Bisher haben wir im Raum die Symmetrie einer Figur bezüglich einer Ebene, einer Geraden und eines Punktes erklärt, und zwar jeweils nur durch die Spiegelung an ihnen. Der Symmetriebegriff wird auch im Raum i.a. weiter gefasst.

Eine Figur  $\mathfrak{F}$  heißt bezüglich einer Geraden  $g$   $m$ -fach drehsymmetrisch genau dann, wenn es eine Drehung  $\rho$  um  $g$  derart gibt, dass  $\mathfrak{F}^\rho = \mathfrak{F}$  und  $\rho^m = \iota$  gilt.

Man nennt  $g$  eine Symmetrieachse  $n$ -ter Ordnung der Figur  $\mathfrak{F}$  oder eine  $n$ -zählige Symmetrieachse von  $\mathfrak{F}$  genau dann, wenn  $n$  die größte natürliche Zahl ist bei der  $\mathfrak{F}$  bezüglich  $g$   $n$ -fach drehsymmetrisch ist. (Der bisherige Begriff "Symmetrieachse von  $\mathfrak{F}$ " ordnet sich hier mit ein.)

Dabei interessieren natürlich nur Symmetrieachsen mit einer Ordnung  $\geq 2$ .

Ferner heißt  $g$  eine Symmetrieachse unendlicher Ordnung, wenn es eine Drehung  $\rho$  um  $g$  so gibt, dass  $\mathfrak{F}^\rho = \mathfrak{F}$  und  $\langle g \rangle$  eine unendliche zyklische Gruppe ist. Ein Beispiel dafür liefert Aufgabe (16.19).

Rückblickend können wir alle Symmetrieachsen für das regelmäßige Tetraeder angeben:

- drei zweizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Tetraederkanten (Aufgabe (13.15) und (16.12));
- vier dreizählige Achsen, nämlich die Lote von den Ecken auf die gegenüberliegenden Tetraederseitenflächen (Aufgabe (16.12)).

Für das regelmäßige Oktaeder ergibt sich:

- sechs zweizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Kanten (Aufgabe (13.16); Abb. 13.5);
- drei vierzählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken (Aufgabe (13.16); Abb. 13.5);
- vier dreizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Oktaederseitenflächen (gleichseitige Dreiecke).

(16.20) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen des Würfels und vergleiche das Ergebnis mit dem beim regelmäßigen Oktaeder! Man begründe das Ergebnis des Vergleichs.

Die Achsen einer Figur mit der größten Ordnung heißen Hauptachsen. Das regelmäßige Tetraeder hat vier Hauptachsen, und drei das regelmäßige Oktaeder.

Wir erklären schließlich noch: Eine Gerade  $g$  ist eine Drehspiegelachse  $n$ -ter Ordnung der Figur  $\mathfrak{F}$  genau dann, wenn es eine Drehung  $\rho$  um  $g$  und eine Spiegelung  $\sigma$  an einer zu  $g$  senkrechten Ebene so gibt, dass  $\mathfrak{F}^{\rho\sigma} = \mathfrak{F}$  und  $g^n = \iota$  gilt und jede andere Drehspiegelung mit der Achse  $g$ , die  $\mathfrak{F}$  auf  $\mathfrak{F}$  abbildet, bezüglich der Drehung eine kleinere Ordnung als  $n$  besitzt.

Beim regelmäßigen Tetraeder sind die drei zweizähligen Achsen gleichzeitig Drehspiegelachsen vierter Ordnung.

Auf spezielle Symmetriebezeichnungen, deren sich die Kristallographie bedient, verzichten wir bewusst. Auch bezüglich der Kristallographie war hier nur ein Seitenblick möglich; einschlägige Darlegungen findet man u.a. in [3, 8, 21, 19, 12].

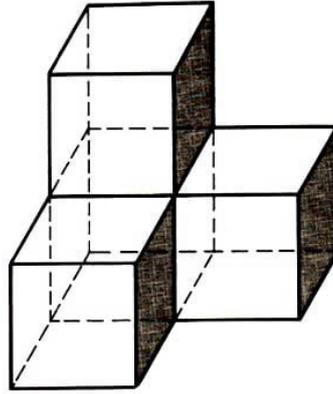


Abb. 16.8

(16.21) Aufgabe. Der Raum lässt sich mit kongruenten Würfeln so (lückenlos) parkettieren, dass Würfecken nur mit Würfecken zusammenstoßen (Abb. 16.8). Man bestimme die Symmetriegruppe dieser Raumparkettierung, indem man ein Erzeugendensystem findet.

Die letzte Betrachtung in diesem Abschnitt soll dem (Fernseh)-Fußball gelten. Wissen Sie auf Anhieb, welche Gestalt die schwarzen und weißen Teile haben, aus denen er zusammengesetzt ist? Er besteht aus 12 schwarzen regelmäßigen Fünfecks- und 20 weißen regelmäßigen Sechsecksflächen. Um jedes schwarze Fünfeck liegen fünf weiße Sechsecke, alle natürlich kugelförmig gewölbt (Abb. 16.9).

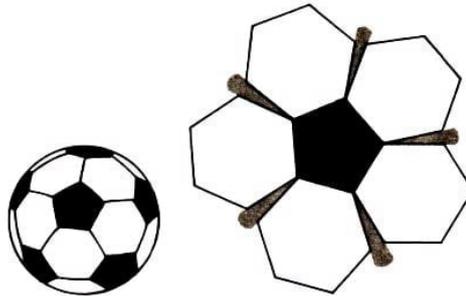


Abb. 16.9,16.10

Eine Ebene kann man in dieser Art mit regelmäßigen Fünf- und Sechsecken nicht überdecken (Abb. 16.10). Um so erstaunlicher ist die Möglichkeit auf der Kugel.

(16.22) Aufgabe. Man weise die Existenz einer derartigen Parkettierung der Kugeloberfläche nach, indem man eine Bewegungsgruppe findet, die Symmetriegruppe für die  $12 \cdot 5 = 60$  Ecken ist.

(Hinweis: Dies gelingt u.a. durch ein Erzeugendensystem, das aus einer Drehung fünfter Ordnung und einer Ebenenspiegelung besteht. Man berücksichtige die Möglichkeit des Transformierens.)

Schließlich möchten wir noch auf den weltweit bekannt gewordenen "Zauberwürfel" aus Ungarn hinweisen.<sup>23</sup>

Es werden an ihm zwar nur Drehungen um drei zueinander senkrechte Achsen mit schrittweise jeweils  $90^\circ$  ausgeführt, dennoch lassen sich viele Sachverhalte im Zusammenhang mit Verkettungen von Drehungen leicht erkennen und veranschaulichen.

<sup>23</sup>Näheres zu diesem mathematischen Spiel siehe u.a. "alpha" 16 (1982), Heft 1, S. 16-17; "practic", Heft 3/1981, S. 100-105, und W. Hintze: Der ungarische Zauberwürfel, 4. Aufl., Berlin 1986.

## IV. Anhang

### 17 Einiges zur Rolle und Stellung der Bewegungen in der Geometrie

Bei der Einführung der Bewegungen in der ebenen bzw. der räumlichen Geometrie haben wir von metrischen Größen und Beziehungen, im wesentlichen vom Längenbegriff (siehe Eigenschaft B 4) Gebrauch gemacht.

Das steht im Einklang damit, dass man normalerweise schon frühzeitig mit Längen und ihren Eigenschaften vertraut wird, z.T. schon im Vorschulalter (!).

Dieser Gesichtspunkt hat uns vor allem bewogen, die Bewegungen nicht als undefinierten Grundbegriff einzuführen. Bewegungen und ihre Eigenschaften erweisen sich äußerst nützlich bei der Darstellung und Lösung geometrischer Aufgabenstellungen, und wir hoffen, dass der Leser nach den bisherigen Einblicken dem zustimmt.

Dem Bewegungsbegriff kommt aber auch eine grundlegende Bedeutung für eine Begründung der Geometrie zu. Ein axiomatischer Aufbau geht von nicht näher erklärten Grundbegriffen (wie Punkt, Gerade, Ebene, Lagebeziehung (Inzidenz), u.a.m.) sowie damit formulierten und ohne Beweis vorausgesetzten Aussagen, den Axiomen aus.

Weitere Begriffe werden definiert; weitere (wahre) Aussagen werden aus den bisherigen durch logisches Schließen gewonnen. Bereits Euklid<sup>24</sup> hat um 325 v.u.Z. in seinem Buch "Elemente" einen streng logischen Aufbau der Geometrie versucht.

Einen mustergültigen Aufbau der euklidischen Geometrie (und der klassischen nicht-euklidischen Geometrie), der heutigen Maßstäben entspricht, gab Hilbert<sup>25</sup> in seinem richtungweisenden Buch "Grundlagen der Geometrie" (1899).

Im Euklid-Hilbertschen Aufbau ist die Strecken- und Winkelkongruenz die metrische Grundrelation.

Weitere Fortschritte verdankt man J. Hjelmslev<sup>26</sup>, der durch die systematische Verwendung von Spiegelungen fundamentale Ideen und Methoden für einen Aufbau der Geometrie schuf. In dem grundlegenden Buch [2] von F. Bachmann fand die weitere Entwicklung dieser Ideen eine erste umfassende Ausarbeitung.

Anstelle von (Strecken- und Winkel-) Kongruenzaxiomen können Bewegungsaxiome verwendet werden, etwa solche Aussagen wie B 1, B 2, B 3, B 5, B 7, B 8.

Weitere metrische Begriffe und Aussagen können aufgebaut werden. So wird eine Figur  $\mathfrak{F}$  kommt (deckungsgleich) zu einer Figur  $\mathfrak{F}'$  genannt, wenn es eine Bewegung  $\varphi$  mit  $\mathfrak{F}^\varphi = \mathfrak{F}'$  gibt. Insbesondere ist damit die Kongruenz von Strecken ( $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ) gegeben; als Länge von  $\overline{AB}$  kann die Menge der zu  $\overline{AB}$  kongruenten Strecken aufgefasst werden.

Spezielle Bewegungen wie die Spiegelungen werden durch zusätzliche Forderungen aus-

---

<sup>24</sup>Euklid von Alexandria, 365(?)–300(?) v.u.Z.

<sup>25</sup>David Hilbert (1862–1943), Professor in Königsberg und Göttingen.

<sup>26</sup>Johannes Hjelmslev (1873–1950), dänischer Mathematiker.

gezeichnet. (Siehe dazu die Definitionen in den Abschnitten 2, 5, 13 und 14 sowie den Satz (12.7).)

In einfacher Weise lässt sich eine so grundlegende metrische Relation wie die Orthogonalität erklären:

$$a \perp b : \Leftrightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a \text{ und } \sigma_a \neq \sigma_b$$

$$g \perp \varepsilon : \Leftrightarrow \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_g \text{ und } \sigma_g \neq \sigma_\varepsilon$$

$$\eta \perp \varepsilon : \Leftrightarrow \sigma_\eta \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\eta \text{ und } \sigma_\eta \neq \sigma_\varepsilon$$

Eine Rechtfertigung dazu geben die Aussagen in den Aufgaben (3.11), (11.3) und (13.14).

In den für die Lehreraus- und -weiterbildung verfassten Geometrielehrbüchern [15] und [16] wird die Bewegung (von Figuren) als einziger metrischer Grundbegriff verwendet. Die Geometrie lässt sich allein aus dem Spiegelungsbegriff begründen. Wir können dazu hier nur auf einige gewichtige Sachverhalte aufmerksam machen, zu denen wir in unseren bisherigen Betrachtungen mit teilweise gänzlich anderen Absichten gelangt sind und verweisen ansonsten vor allem auf [2].

Die Bewegungsgruppe der ebenen (bzw. räumlichen) Geometrie lässt sich allein mit den Spiegelungen an Geraden (bzw. an Ebenen) erzeugen. Im Rahmen dieser Gruppe lassen sich die Punktspiegelungen (bzw. Punkt- und Geradenspiegelungen) und - wie wir gerade feststellten - die Orthogonalität beschreiben. Darüber hinaus kann in dieser Gruppe auch die Lagebeziehung (Inzidenz) dargestellt werden:

$$A \in g \Leftrightarrow \sigma_A \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_A$$

(siehe Aufgaben (5.12) und (5.13)); im Raum gilt gleiches und außerdem

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_A \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_A$$

(Aufgabe (16.6)).

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Geometrie in ihrer (von Spiegelungen erzeugten) Bewegungsgruppe zu formulieren. Eine geometrische Aussage kann als gruppentheoretische Aussage über Spiegelungen und Spiegelungsprodukte formuliert werden, und es bietet sich an, die Behauptung aus den Voraussetzungen durch Gruppenrechnen in der Bewegungsgruppe, durch Rechnen mit Spiegelungen zu beweisen.

Nachträglich lässt sich diese Methode an vielen Stellen unserer Darlegungen mehr oder minder deutlich erkennen, das erste Mal haben wir den Leser beim Beweis des Satzes (3.12) bewusst darauf aufmerksam gemacht. (Beim Lösen der Aufgaben möchte der Leser diese Möglichkeit besonders in Betracht ziehen.)

## 18 Abbildungsgruppen als Ordnungsprinzip in der Geometrie

Wir haben gesehen, dass die Spiegelungen neue und grundlegende Mittel und Methoden - gruppentheoretische - für die Geometrie eröffnen.

In seiner unter dem Namen "Erlanger Programm" bekannt gewordenen Antrittsvorlesung hat F. Klein 1872 durch die Einführung des Gruppenbegriffs erreicht, die Fülle der bis dahin vorliegenden geometrischen Kenntnisse nach einem einheitlichen Prinzip zu ordnen. Einem Teilgebiet der Geometrie wird eine Gruppe von Abbildungen so zugeordnet, dass diese Geometrie durch die Eigenschaften, die bei der Abbildungsgruppe invariant bleiben, vollständig bestimmt ist.

Wir legen das für die Ebene kurz näher dar.

Die Transformationen der Ebene, die den Forderungen B 2, B 3 und B 4 genügen, sind die Bewegungen und bilden die Bewegungsgruppe. Die Geometrie, die durch die Invarianten zu dieser Gruppe bestimmt ist, ist die Geometrie, die man gewöhnlicherweise in der Schule zugrunde legt, die Kongruenzgeometrie oder euklidische Geometrie.

Werden die Forderungen an die Transformationen (Invarianzforderungen) abgeschwächt, so enthält die neue Transformationsgruppe die bisherige als Untergruppe, die zugehörige Geometrie wird allgemeiner, jedoch inhaltlich ärmer (weniger Invarianten).

Ersetzt man B 4 durch die Forderung, dass Teilverhältnisse invariant bleiben, dann bekommt man Dehnungen hinzu; man erhält die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen und diesbezüglich die äquiforme Geometrie, mit der man in der Schule in der Ähnlichkeitslehre vertraut gemacht wird.

Werden nur noch B 2 und B 3 gefordert (und, falls man anordnungsgeometrische Beziehungen außer Betracht lässt, nur noch B 2), dann ergibt sich die sogenannte Gruppe der affinen Abbildungen und diesbezüglich die affine Geometrie.

## V. Lösungsanmerkungen

Zu (1.2).  $(q \cup K)^\alpha = q^- \cup K^-$ ;  $(q \cup K)^\beta = p \cup H$ ;  $(q \cup K)^\gamma = p^- \cup H$ .

Zu (2.6). Man betrachte die Spiegelung an der Mittelsenkrechten einer Dreiecksseite.

Zu (2.8). Im Fall  $|\sphericalangle p, q| \leq 60^\circ$  und nur dann gibt es für alle Lagen von  $A, B$  stets genau eine Lösung.

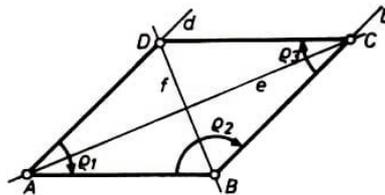


Abb. L.1

Zu (3.10). (Siehe Abb. L. 1.) a)  $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_e \circ \sigma_f$

b)  $\rho_1 \circ \rho_3^{-1} = \sigma_d \circ \sigma_b$ ; mit  $P^{\rho_1} = P^{\rho_3}$  wäre  $(P^{\rho_1})^{\rho_3^{-1}} = P$  und weiter  $P^d = P^b$  ( $\neq P$ ) und damit  $d = b$ .

Zu (3.18). Betrachte die Drehung  $\rho$  um das Zentrum des Quadrats über  $\overline{AB}$  mit  $A^\rho = B$ .

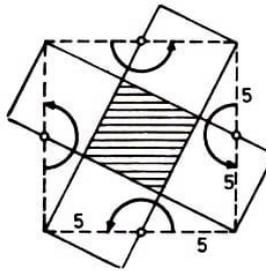


Abb. L.2

Zu (5.4). a.) Abb. L. 2;  $5A = (5 + 5)^2 \Rightarrow A = 20$ .

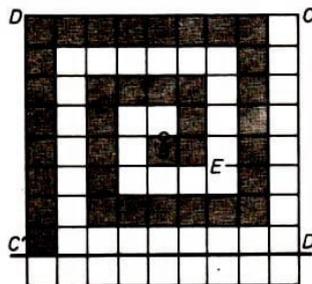


Abb. L.3

Zu (5.5). Ohne letzte Zeile liegt eine zentralsymmetrische Figur vor (Abb. L. 3);  $A = \left(\frac{81-9}{2} + 9\right) \cdot 4 \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$ ,  $U = 43 \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 6 \text{ cm} = 184 \text{ cm}$ .

Zu (5.12). Mit  $A \notin g$  wäre  $A^g \neq A$ . Aus  $A^g = A^h$  folgte dann  $g = h$ .

Zu (5.19).  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_B = \overrightarrow{AA^B} = \overrightarrow{CC^D} = \sigma_C \circ \sigma_D$ ; Umkehrung indirekt.  
Zur Folgerung:

$$\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C \circ \sigma_D \Rightarrow \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_D \Rightarrow \sigma_B \circ \sigma_D = \sigma_A \circ \sigma_C$$



Zu (14.4). Das gilt genau dann, wenn  $\varepsilon \perp \chi$  und  $g_{PP\varphi} \parallel \varepsilon$  für irgendeinen Punkt  $P \notin \chi$  ist.

Zu (14.10). Der gemeinsame Punkt ist das Bild des Mittelpunktes der Tetraederumkugel bei der Spiegelung am Schwerpunkt des Tetraeders. (Vgl. dazu Aufgabe (5.9).)

Zu (15.2). Nein.

Zu (16.5). Mit  $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$  ist

$$\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta) \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \sigma_\beta \circ \varphi)$$

Zu (16.10). Es gibt eine Ebene  $\varepsilon$  mit  $a, b, c \perp \varepsilon$  oder es gibt eine Gerade  $g$  mit  $a, b, c \perp g$ .

Zu (16.13). Diese 12 nichttrivialen Drehspiegelungen sind nicht alle voneinander verschieden. (Vgl. Aufgabe (14.6).)

Zu (16.16). Für  $\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_f$  ist  $\langle \varphi \rangle = \{1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3\}$ .

Zu (16.19). Alle Drehungen um die Achse des Kegels.

Ausführliche Darstellungen der Lösungen zu den gestellten Aufgaben (nebst weiteren Aufgaben) findet man in

A. Rosslund: Aufgaben zu Bewegungen in der Ebene. Diplomarbeit, PHKL Potsdam 1984,

Th. Gaertner: Aufgaben zu Bewegungen im Raum. Diplomarbeit, PHKL Potsdam 1984.

## Literatur

- [1] Argunow, B.I., M.B. Balk: Geometrische Konstruktionen in der Ebene, Moskau 1955 (russisch)
- [2] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1973. (Übersetzung ins Russische, Moskau 1969.)
- [3] Belger, M., und L. Ehrenberg: Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen. Bd. 23, Leipzig 1981.
- [4] Beyer, R.: Technische Raumkinematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
- [5] Beyer, R., und E. Schörner: Raumkinematische Grundlagen (grafisch behandelt und plastisch gesehen). München 1953.
- [6] Böhm, J., u. a.: Geometrie II. MfL Bd. 7, 2. Aufl., Berlin 1978.
- [7] Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel-Stuttgart 1963 (Autorisierte Übersetzung aus dem Englischen).
- [8] Dmitriev, I. S.: Symmetrie in der Welt der Moleküle. Leipzig 1979 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [9] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV: Geometrie. 2. Aufl., Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [10] Gilde, W.: Gespiegelte Welt. Leipzig 1979.
- [11] Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. MSB Bd. 4, Leipzig 1966.
- [12] Hilbert, D., und C. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932 (Übersetzung ins Russische, Moskau 1981).
- [13] Jaglom, H. M.: Geometrische Darstellungen, Moskau 1955 (russisch)
- [14] Jeger, M.: Konstruktive Abbildungsgeometrie. 3. Aufl. Luzern-Stuttgart 1964.
- [15] Klotzek, B.: Geometrie. Berlin 1971.
- [16] Klotzek, B., und E. Quaisser: Nichteuklidische Geometrie. MfL Bd. 17, Berlin 1978.
- [17] Ljubitsch, J.I., L.A. Schorr, Kinematische Methoden in der Geometrie, Moskau 1976 (russisch)
- [18] Quaisser, E., und H.-J. Sprengel. Räumliche Geometrie. MSB Bd. 103, Berlin 1981.
- [19] Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung 4. Aufl., Basel- Stuttgart 1956.
- [20] Vollmer, J. (Herausgeber): Getriebetechnik. Berlin 1969.
- [21] Weyl, H.: Symmetry. Princeton 1952 (deutsche Übersetzung, Basel-Stuttgart 1955).

---

## Anhang - Bezeichnungen und Symbole

$M \cup N$  ... Vereinigung der Mengen  $M$  und  $N$ , d.h. die Menge aller Elemente, die in  $M$  oder in  $N$  enthalten sind

$M \cap N$  ... Durchschnitt der Mengen  $M$  und  $N$ , d.h. die Menge aller Elemente, die in  $M$  und  $N$  enthalten sind

$M \subseteq N$  ...  $M$  ist Teilmenge von  $N$ , d.h., jedes Element von  $M$  ist in der Menge  $N$  enthalten

$M \setminus N$  Differenzmenge, d.h. die Menge aller Elemente von  $M$ , die nicht in der Menge  $N$  enthalten sind

$g_{AB}$  ... Verbindungsgerade der Punkte  $A$  und  $B$

$g \parallel h$  ... Gerade  $g$  ist parallel zur Geraden  $h$

$g \parallel \varepsilon$  ... Gerade  $g$  ist parallel zur Ebene  $\varepsilon$

$\varepsilon \parallel \eta$  ... Ebene  $\varepsilon$  ist parallel zur Ebene  $\eta$

$\varepsilon_{ABC}$  bzw.  $\varepsilon_{Pg}$  bzw.  $\varepsilon_{gh}$  ... Verbindungsebene von  $A, B, C$  bzw. von  $P$  und  $g$  bzw. von  $g$  und  $h$

$\overline{AB}$  ... Strecke mit den Endpunkten  $A$  und  $B$

$AB$  ... Inneres der Strecke  $\overline{AB}$

$O(p)$  ... Scheitel der Halbgeraden  $p$

$OA^+$  ... Halbgerade mit dem Scheitel  $O$ , die den Punkt  $A$  enthält

$OA^-$  bzw.  $p^-$  ... zur Halbgeraden  $OA^+$  (bzw.  $p$ ) entgegengesetzte Halbgerade

$ABC^+$  ... Halbebene der Ebene  $\varepsilon_{ABC}$  bezüglich  $g_{AB}$ , die den Punkt  $C$  enthält

$ABC^-$  bzw.  $H^-$  ... zur Halbebene  $ABC^+$  (bzw.  $H^+$ ) entgegengesetzte Halbebene

$\sphericalangle p, q$  bzw.  $\sphericalangle AOB$  ... Winkel mit den Schenkeln  $p$  und  $q$  bzw.  $OA^+$  und  $OB^+$

$\sphericalangle p, q$  ... gerichteter Winkel

$|AB|$  ... Länge der Strecke  $\overline{AB}$  (bzw. deren Maßzahl)

$|\sphericalangle p, q|$  ... Größe des Winkels  $\sphericalangle p, q$  (bzw. deren Maßzahl)

$|\sphericalangle, q|$  ... Größe des gerichteten Winkels  $\sphericalangle p, q$  (bzw. deren Maßzahl)

$Mp(A, B)$  ... Mittelpunkt von  $A, B$

$K(M, r)$  ... Kreis (bzw. Kugel) mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$

$g \perp h$  ... Gerade  $g$  ist senkrecht zur Geraden  $h$

$g \perp \varepsilon$  ... Gerade  $g$  ist senkrecht zur Ebene  $\varepsilon$

$\eta \perp \varepsilon$  ... Ebene  $\eta$  ist senkrecht zur Ebene  $\varepsilon$

$g \perp\!\!\!\perp h$  ... Gerade  $g$  ist senkrecht zu der Geraden  $h$  im weiten Sinne

$\mu(P, Q)$  ... Mittellotebene von  $P, Q$

---

$M \times N$  ... Produktmenge, d.h. Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in M$  und  $y \in N$

$x^\alpha$  ... Bild des Elements  $x$  bei der Abbildung  $\alpha$

$D(\alpha)$  bzw.  $W(\alpha)$  ... Definitionsbereich bzw. Wertebereich einer Abbildung  $\alpha$

$\iota$  ... identische Abbildung

$\alpha^{-1}$  ... Umkehrung einer Abbildung  $\alpha$

$\alpha|_T$  ... Einschränkung einer Abbildung  $\alpha$  auf eine Menge  $T \subseteq D(\alpha)$

$\alpha \circ \beta$  ... Produkt (oder Verkettung oder Nacheinanderausführung) der Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$

$\sigma_g$  ... Spiegelung an der Geraden  $g$

$\sigma_P$  ... Spiegelung an dem Punkt  $P$

$\sigma_\varepsilon$  ... Spiegelung an der Ebene  $\varepsilon$

$\mathfrak{F}^g$  bzw.  $\mathfrak{F}^P$  bzw.  $\mathfrak{F}^\varepsilon$  ... Bild der Figur  $\mathfrak{F}$  bei der Spiegelung  $\sigma_g$  bzw.  $\sigma_P$  bzw.  $\sigma_\varepsilon$

$\rho(P, \vec{\alpha})$  ... Drehung um  $P$  mit dem Drehmaß  $\vec{\alpha}$

$\vec{AB}$  ... Verschiebung, die den Punkt  $A$  auf den Punkt  $B$  abbildet

$\langle T \rangle$  ... Untergruppe, die von  $T$  erzeugt wird

$\alpha^n$  ...  $n$ -faches Produkt von  $\alpha$

OJM ... Olympiade Junger Mathematiker der DDR (seit 1961); eine weitere Zahlenangabe wie z.B. 31046 bedeutet: 3. OJM, Startklasse 10, 4. Stufe (d.h. DDR-Stufe), 6. Aufgabe

IMO ... Internationale Mathematikolympiade (seit 1959)