Herbert Pieper

Komplexe Zahlen

1988 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 110
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bei fast allen mathematischen Untersuchungen treten Zahlen auf. Die Zahlen sind eine Grundlage der Mathematik. Es gibt natürliche Zahlen (wie $1{,}2, 3, ...$), gebrochene Zahlen (wie $\frac{5}{7}$, $\frac{37}{8}$), ganze Zahlen $(0, 1, -1, 2, -2, ...)$, rationale Zahlen (wie $\frac{5}{7}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{37}{8}$, $-\frac{37}{8}$, $2, -2, 0,...$), reelle Zahlen (wie $\sqrt{2}$, $0, -\frac{5}{7}, 4, \pi, ...$).
Die Menge der reellen Zahlen kann schrittweise (durch rein-logische Konstruktionen) aus der der natürlichen Zahlen aufgebaut werden.
Die Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division reeller Zahlen liefert wieder reelle Zahlen.

Das Potenzieren reeller Zahlen mit natürlichen Exponenten ist erklärt:
Ist a eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl, so ist a^k das Produkt aus k gleichen Faktoren a.

Das Radizieren reeller Zahlen ist nur eingeschränkt erklärt: Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und k eine natürliche Zahl, so gibt es genau eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^k = a$.
Die Zahl b heißt k-te Wurzel aus a ($\sqrt[k]{a}$). Ist a negativ, so ist $\sqrt[k]{a}$ nicht definiert.

Das Potenzieren reeller Zahlen lässt sich nacheinander auf reelle Exponenten ausdehnen: Es wird (für $a \neq 0$) $a^0 = 1$ und $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ gesetzt. Nun wird vorausgesetzt, dass die Basis a positiv und von 1 verschieden ist.
Sind k und l ganze Zahlen, von denen die zweite positiv sei, so wird $a^{k/l} = \sqrt[l]{a^k}$ festgesetzt.
Hieraus und aus der Definition reeller Zahlen lässt sich eine Definition für a^b (mit positivem reellen a und beliebigem reellen b) gewinnen.

Das Logarithmieren reeller Zahlen ist nur eingeschränkt erklärt: Ist a eine positive reelle Zahl, so gibt es stets genau eine reelle Zahl b mit $e^b = a$. Die Zahl b heißt der Logarithmus von a zur Basis e ($\log_e a$). Ist a negativ, so ist $\log_e a$ nicht definiert.

Die Beseitigung der genannten Einschränkungen beim Radizieren und Logarithmieren ist durch die Erweiterung der Menge der reellen Zahlen zur Menge der komplexen Zahlen möglich:

Ist a eine beliebige komplexe Zahl ($\neq 0$) und k eine natürliche Zahl, so gibt es genau k verschiedene komplexe Zahlen, deren k-te Potenzen mit a übereinstimmen.
Ist a eine beliebige komplexe Zahl ($\neq 0$), so gibt es unendlich viele komplexe Zahlen b mit $e^b = a$.

Es war ein langwieriger und schwieriger Weg bis zur Beherrschung der komplexen Zahlen. Die Aufnahme komplexer Zahlen in die Algebra (in Form von Wurzeln negativer Zahlen) geschah im 16. Jahrhundert durch R. Bombelli.
Die erste Anwendung komplexer Zahlen bei Aufgaben der Analysis findet man bei G. W. Leibnız und Johann Bernoulli. In einem Briefwechsel stritten sie darüber, ob Logarithmen negativer Zahlen komplexe oder reelle Zahlen seien.

Die Problematik klärte L. Euler in der Mitte des 18. Jahrhunderts. Er ist als Wegbereiter für die umfassende Anwendung der komplexen Zahlen anzusehen. Doch von dem, was komplexe Zahlen eigentlich sind, hatte man lange Zeit noch eigenartige Vorstellungen.
So sprach Leibniz (1702) von den komplexen Zahlen als von einem "Wunder der Analysis, einer Missgeburt der Ideenwelt, einem Doppelwesen fast zwischen Sein und Nichtsein".
Und Euler schrieb (1768/69): "So ist klar, dass die Quadratwurzel von Negativzahlen nicht ... zu den möglichen [d. h. reellen] Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen,

dass dies unmögliche Zahlen sind .... Dennoch stellen sie unserem Verstande sich vor und finden in unserer Einbildung Platz."
Er betonte weiter: "Endlich muss noch das Bedenken gehoben werden, dass die Lehre von den unmöglichen Zahlen als nutzlose Grille angesehen werden könne. Allein dies Bedenken ist unbegründet; diese Lehre ist in der Tat von der größten Wichtigkeit."

Die komplexen Zahlen wurden wegen ihres großen Nutzens in der Mathematik zwar geduldet, waren jedoch nur unzureichend legitimiert, hatten stets etwas Geheimnisvolles, Rätselhaftes und Unbefriedigendes an sich.
Es ist eine der eindruckvollsten Tatsachen der Mathematikgeschichte:
Die Einbürgerung der komplexen Zahlen in die Mathematik, die Erkenntnis des Wesens dieser Zahlen geschah in einem Zeitraum von über drei Jahrhunderten.

Obwohl die Zahlen konsequent und fruchtbar in der Algebra, Zahlentheorie, Geometrie, Analysis und Physik angewendet worden sind, im 16. Jahrhundert durch R. Bombelli, im 17. Jahrhundert durch R. Descartes und G. W. Leibniz, im 18. Jahrhundert durch L. Euler, d'Alembert, J. Bernoulli und J. H. Lambert, in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. F. Gauß, N. H. Abel, C. G. J. Jacobi und A. L. Cauchy - um nur einige Namen zu nennen -, obwohl die Zahlen nach einigen vergeblichen Versuchen im 17. und 18. Jahrhundert dann Ende des 18. Jahrhunderts und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts (etwa durch C. Wessel, J. R. Argand, C. F. Gauß, A. L. Cauchy) geometrisch interpretiert[1] werden konnten, obwohl die Zahlen 1837 von W. R. Hamilton und J. Bolyai rein arithmetisch konstruiert wurden, vollzog sich der Übergang von der Fiktion der "imaginären Größe" zum vollwertigen Begriff der "komplexen Zahl" im Bewusstsein der Mathematiker nur zögernd.

Erst im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts wuchs ihr Zutrauen in die logische Zulässigkeit der komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen (die Konstruktion aus den reellen Zahlen, die geometrische Darstellung, sowie wichtige Eigenschaften und Anwendungen) und ihre Geschichte bilden den Gegenstand dieses Buches.
In einer Einleitung werden die Überlegungen dargestellt, die einst für Bombelli (im 16. Jahrhundert) das Argument für die Beschäftigung mit komplexen Zahlen lieferten.

Nach der theoretischen Einführung des komplexen Zahlbegriffs wird das Rechnen mit den komplexen Zahlen geübt, werden die Zahlen auf geometrische[2], arithmetische und algebraische Probleme angewendet.

Die Erweiterung der Begriffe Wurzel, Potenz und Logarithmus auf komplexe Zahlen findet ihren Höhepunkt in der (elementaren) Herleitung der merkwürdigen Beziehungen

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \qquad \text{und} i^i = e^{-\pi/2}$$

zwischen der Kreiszahl π, der Eulerschen Zahl e sowie $i = \sqrt{-1}$.

Jedes Kapitel enthält einige Übungsaufgaben. Die Lösungen der insgesamt 99 Aufgaben findet der Leser im Anhang. Der abschließende Abriss zur Geschichte der komplexen Zahlen ist

[1] Eine geometrische Interpretation findet sich schon Ende des 16. Jahrhunderts bei Vieta.
[2] Für die Behandlung geometrischer Probleme sei auf die Bücher von A. I. Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (4. Aufl., Berlin 1973) und I. M. Jaglom, Komplexe Zahlen und ihre Anwendungen in der Geometrie (Moskau 1969). Ein vom Verfasser geplantes Buch (Das Geheimnis der komplexen Zahlen) soll weitere geometrische Fragestellungen, wie etwa die Verwandtschaft des Kreises mit der Hyperbel, aber auch physikalische Anwendungen enthalten.

als erste Übersicht, aber auch als eine Anregung für die eingehendere Beschäftigung mit der Geschichte dieses Gegenstandes zu verstehen.

In gedrängter Form wird hier die Vorgeschichte und die über 350jährige Geschichte dieser Zahlen dargestellt. Es wird berichtet über die ersten erfolgreichen Rechnungen mit diesen "sophistischen" Größen (1572 in der Algebra des Bombelli), über deren umfassenden Gebrauch und Nutzen, über Schwierigkeiten und Widersprüche, die das Rechnen mit diesen Zahlen bereitete, über die Unklarheiten und Unsicherheiten im Umgang mit diesen Zahlen, also über das "Mysterium" der "imaginären Größen", über die geometrischen Darstellungen, über die Frage der Existenz dieser Zahlen, über nichtgeometrische Begründungen des komplexen Zahlbegriffs, über die Einsicht in das Wesen der komplexen Zahlen.

Ausführlich wird die Geschichte der komplexen Zahlen erst in einem weiteren Buch mit dem Titel Das Geheimnis der komplexen Zahlen dargestellt. Dort wird sich auch ein ausführliches Literaturverzeichnis befinden.
Das Buch ist aus der mehrjährigen Praxis beim fakultativen mathematischen Unterricht in der Abiturstufe der Alexander-von-Humboldt-Schule in Berlin und aus Studien zur Geschichte der Kreisteilung (insbesondere zu C. G. J. Jacobi) hervorgegangen.

Diese Einführung soll bereits für Oberschüler lesbar sein. (Seit einigen Jahren sind die komplexen Zahlen Gegenstand des fakultativen Mathematikunterrichts der Abiturstufe. Zukünftig sollen die komplexen Zahlen auch in den Aufgaben der Olympiaden Junger Mathematiker berücksichtigt werden.) Sie ist jedoch auch für Studenten (verschiedener Fachrichtungen, wie Mathematik, Physik, Elektronik, Ökonomie, Pädagogik u. a.) und für Lehrer von Interesse.

Für zahlreiche schöpferisch-kritische Hinweise und Verbesserungen bin ich Herrn Dr. O. Neumann (Friedrich-Schiller-Universität Jena) sehr dankbar. Mein herzlicher Dank gilt auch den Mitarbeitern vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, insbesondere Frau Dipl.-Math. E. Arndt, die das Erscheinen des Buches förderte, und Frau Dipl.-Math. K. Bratz für die mühevolle Arbeit am Manuskript, ferner Frau Leuthold für die Fertigung der Abbildungen, Herrn Fahr für die Umschlaggestaltung, meiner Kollegin, Frau Baumberg, für den "Kampf" mit der Schreibmaschine und den Mitarbeitern der Druckerei für die sorgfältige Arbeit.

Berlin, im Dezember 1983 Herbert Pieper

Einleitung

Das (historische) Argument für die Beschäftigung mit komplexen Zahlen

Die Frage, was eine Zahl eigentlich ist, werden wir hier zunächst nicht stellen.
Wir setzen die reellen Zahlen und das Rechnen mit ihnen als bekannt voraus. Unter natürlichen Zahlen verstehen wir im folgenden die Zahlen $1, 2, 3, ...$; insbesondere wird die Zahl Null nicht zu den natürlichen Zahlen gerechnet. (Die Null tritt nämlich historisch erst nach den positiven ganzen und gebrochenen Zahlen auf.)

Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen führen wieder auf natürliche Zahlen. Subtraktion und Division sind jedoch nur eingeschränkt möglich: Es gibt zu gegebenen natürlichen Zahlen m und n dann und nur dann eine natürliche Zahl w, für die $m + w = n$ gilt, wenn $m < n$ ist.
Es gibt zu gegebenen natürlichen Zahlen m und n dann und nur dann eine natürliche Zahl x, für die $mx = n$ gilt, wenn m ein Teiler von n ist.

Durch die Bildung rationaler Zahlen werden diese Einschränkungen aufgehoben.
Man kann zuerst ganze Zahlen und erst dann rationale Zahlen (als Quotienten ganzer Zahlen) einführen. Man kann aber auch zuerst Brüche (als Quotienten natürlicher Zahlen) und später die Null und negative Zahlen einführen, um die Menge der rationalen Zahlen zu erhalten.

Verstehen wir unter "Zahlen" zunächst nur die natürlichen Zahlen und die Brüche (also die positiven rationalen Zahlen), so ist die lineare Gleichung $ax = b$ (gegeben die Zahlen a, b, gesucht die Zahl x mit $ax = b$) stets (eindeutig) lösbar. (Eine Gleichung $ax + 5 = 0$ ist sinnlos, da es die Null nicht gibt. Sie würde auch bedeuten, dass eine positive Zahl gleich Null werden soll.) Die quadratischen Gleichungen sind jedoch nicht immer lösbar; z. B. die Gleichung $x^2 = 2$. Wir zeigen jetzt nämlich: Es gibt keine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Gäbe es eine Zahl a mit $a^2 = 2$, so wäre sie durch einen Bruch, also auch durch einen bereits gekürzten Bruch, d. h. in der Form $a = p/q$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p, q, darstellbar.

Aus $(p/q)^2 = 2$ folgt $p^2 = 2q^2$. Somit muss p^2 und damit auch p eine gerade Zahl sein: $p = 2k$. Dieses in $p^2 = 2q^2$ eingesetzt, liefert $q^2 = 2k^2$. Somit muss auch q^2 und damit q eine gerade Zahl sein.
Die Zahlen p und q wären also beide gerade. Das ist aber ein Widerspruch, da p und q als teilerfremd vorausgesetzt waren. Folglich gibt es keine Zahl $a = p/q$ mit $a^2 = 2$. Qed.

Es gibt somit keine Zahl, durch die die Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 ausgedrückt werden kann.

Schon im Indien des Altertums wird der bemerkenswert gute Näherungswert

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408}$$

für die Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 verwendet.

Ähnlich kann man zwar auf Grund geometrischer Überlegungen dem Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 eine Länge π zuordnen, jedoch gibt es (wie erst im 18. Jahrhundert gezeigt werden konnte) keine Zahl, durch die π ausgedrückt werden kann.

Es gibt zahlreiche Brüche, durch die π, also der Quotient vom Umfang U und Durchmesser d eines jeden Kreises, ziemlich genau wiedergegeben wird. Vielfach wird die natürliche Zahl 3 für diesen Quotienten verwendet. Archimedes von Syrakus (3. Jh. v. u. Z.) bewies:
"Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers", d. h.

$$3\frac{10}{71} < \frac{U}{d} < 3\frac{1}{7}$$

Der Näherungswert $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ trat in der Folgezeit oft auf. Zuang Heng (1. Jh.) gab als Verhältnis des Quadrates des Kreisumfangs zum Quadrat des Umfangs des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates den Wert $\frac{5}{8}$ an. Dies bedeutet, dass π^2 durch 10 angenähert wurde.[3]
Auch diese Näherung trat in der Folgezeit (z. B. im Mittelalter) häufig auf. Claudius Ptolemäus (2. Jh.)) beschrieb π in Sexigesimalbrüchen: $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \left(= \frac{377}{120}\right)$. Zu Chin-Zhi (5. Jh.) verwendete den Wert $\frac{355}{113}$ für π. Leonardo von Pisa (13. Jh.) ermittelte $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ als gute Näherung für π.[4]

Erst durch die Hinzufügung positiver irrationaler Zahlen zur Menge der Zahlen werden diese (und andere) Einschränkungen beseitigt.

Von nun an verstehen wir unter "Zahlen" die natürlichen Zahlen, die Brüche und die positiven irrationalen Zahlen (wie $7, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 111, \pi, \frac{77}{79}, \sqrt{13}$).
In diesem Zahlenbereich ist die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ (eindeutig) lösbar.

Wir untersuchen die quadratischen Gleichungen etwas ausführlicher, ähnlich wie sie einst in der dem al-Huwarizmi (9. Jh.) zugeschriebenen Algebra behandelt worden sind.
Da die Fälle, in denen eine positive Lösung nicht existiert, gar nicht berücksichtigt werden, gibt es sechs Typen von quadratischen Gleichungen (a, b positive Zahlen, x gesucht):

$$\text{I. } x^2 = ax,\ \text{II. } x^2 = b,\ \text{III. } x = b,\ \text{IV. } x^2 + ax = b,\ \text{V. } x^2 + b = ax,\ \text{VI. } x^2 = ax + b$$

(Der Typ $x^2 + ax + b = 0$ ist in unserem Zahlenbereich sinnlos, da die Null nicht vorkommt und eine positive Zahl auch nicht gleich Null werden könnte.)
Die Typen I, II, III besitzen genau eine Lösung:

$$\text{I. } x = a,\ \text{II. } x = \sqrt{b},\ \text{III. } x = b.$$

Die Typen IV und VI haben ebenfalls genau eine Lösung. Beispielsweise folgt aus der Gleichung IV:

$$x^2 + 2\left(\frac{a}{2}x\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

d.h. $x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$; und umgekehrt.
Der Gleichungstyp IV hat somit die Lösung

$$x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

[3] Ist r der Radius des Kreises, so gilt danach $\frac{(2\pi r)^2}{(8r)^2} \approx \frac{5}{8}$, d.h. $\pi^2 \approx 10$.
[4] Siehe auch die historische Einleitung des Verfassers in Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (Berlin 1980).

Für den Typ VI ergibt sich

$$x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}$$

Der Typ V hat für $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ keine Lösung. Ist $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so gibt es zwei Lösungen, nämlich

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Ist $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so gibt es eine Lösung ($x = \frac{a}{2}$). Dass die Gleichung vom Typ V im Fall $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ "unmöglich" ist, ist leicht zu erkennen:
Ist $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so gilt $4b > a^2$ und daher $4(x^2 + b) > 4x^2 + a^2 > 4ax$ [5] für jede Zahl x, d.h. $x^2 + b > ax$ und nicht $x^2 + b = ax$.

Unsere Betrachtungen zeigen: Es gibt keinen Grund bei der Behandlung quadratischer Gleichungen, die Null oder negative oder komplexe Zahlen als Lösungen einzubeziehen. Es ist nicht notwendig, den Zahlenbereich zu erweitern! (Man kann somit den gewohnten Gebrauch der Null, der negativen Zahlen und der komplexen Zahlen vermeiden.)

Es lässt sich historisch belegen, dass der Zahlbegriff allmählich auf die Menge der positiven rationalen und irrationalen Zahlen ausgedehnt wurde und dass im Laufe der Zeit die Null und die "negativen Größen" hinzukamen, die jedoch erst als "Zahlen" anerkannt werden mussten. Die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Zahlen zusammen mit Additions- und Subtraktionsregeln findet man bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme schon in der chinesischen Mathematik in neun Büchern (erhalten in einer Fassung aus dem Jahre 263 u. Z.).

Diophant (um 250 u. Z.) suchte in seiner Arithmetik zwar stets positive rationale Lösungen, benutzte aber bei Zwischenrechnungen auch negative Zahlen. Rechenregeln für positive und negative Zahlen gab in Indien wohl Brahmagupta (7. Jh.) erstmalig an. Als Lösungen für Gleichungen wurden die negativen Zahlen weder bei den indischen noch bei den islamischen Mathematikern anerkannt.

Erste Ansätze zur Einführung negativer Zahlen in Europa findet man bei Leonardo von Pisa (auch Fibonacci genannt, 13. Jh.). Es handelte sich allerdings um die Lösungen gewisser Gleichungssysteme.
Eine von Fibonacci behandelte Aufgabe lautet:

Vier Personen besitzen die Geldbeträge x_1, x_2, x_3 bzw. x_4. Sie finden eine Geldbörse mit dem Geldbetrag b. Zwischen diesen Größen bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} b + x_1 &= 2(x_2 + x_3) \\ b + x_2 &= 3(x_3 + x_4) \\ b + x_3 &= 4(x_4 + x_1) \\ b + x_4 &= 5(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Fibonacci schrieb: "Ich werde zeigen, dass diese Aufgabe unlösbar ist, wenn nicht zugestanden

[5] Ist $2x > a$, so ist $(2x - a)^2 = 4x^2 + a^2 - 4ax$ positiv. Ist $2x < a$, so ist $(a - 2x)^2 = 4x^2 + a^2 - 4ax$ positiv. ($2x = a$ ist beim Typ V im Fall $b > \left(\frac{a}{2}\right)^1$ nicht möglich.) Somit ist stets $4x^2 + a^2 > 4ax$.

wird, dass der erste Partner Schulden hat.[6] Aus der ersten Gleichung folgt

$$x_3 = \frac{b + x_1}{2} - x_2$$

Aus der zweiten ergibt sich hiermit

$$x_4 = \frac{b + x_2}{3} - x_3 = \frac{b + x_2}{3} - \frac{b + x_1}{2} + x_2 = \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}b$$

Hieraus und aus den beiden letzten Gleichungen folgt $\frac{9}{13}x_1 + \frac{38}{13}x_2 = \frac{33}{5}x_1 + \frac{22}{5}x_2$. Dies ist wegen $\frac{33}{5} > \frac{9}{13}$ und $\frac{22}{5} > \frac{38}{13}$ für positive Beträge x_1 und x_2 unmöglich.
Fibonacci gab die Lösung $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 4, b = 11$ an. Die negative Lösung $x_1 = -1$ hat einen vernünftigen (Schulden). Michael Stifel (16. Jh.) erfasste in seiner Arithmetica integra (1544) vollständig das Wesen der negativen Zahlen und ließ erstmals negative Koeffizienten in quadratischen Gleichungen zu. Trotzdem erkannte er negative Zahlen nicht als Gleichungswurzeln an.

Noch 1629 nannte Albert Girard eine kubische Gleichung mit einer negativen und zwei komplexen Wurzeln eine "equation inepte et absurde"[7]). Girard erkannte aber doch nicht nur negative Gleichungswurzeln neben den positiven an (wobei er sich die Bedeutung negativer Lösungen geometrisch veranschaulichte), sondern nahm auch die komplexen Wurzeln ("racines enveloppees"[8]) hinzu.
Er behauptete als allgemeine Regel, dass jede algebraische Gleichung immer so viele Wurzeln dieser drei Arten habe, wie ihr Grad angibt; dies wurde jedoch erst im 18./19. Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern bewiesen.[9]

Obwohl man bereits im 16. Jahrhundert die Null und die "negativen Größen" kannte (jedoch nicht unbedingt als "Zahlen" anerkannte), ließ man bei der Behandlung kubischer Gleichungen nur positive Koeffizienten und positive Lösungen zu. (Die negativen Wurzeln etwa der Gleichung $x^3 = px + q$ bestimmte man als positive Wurzeln der Gleichung $y^3 + q = py$. Dadurch wurde die Behandlung kubischer Gleichungen (wegen einer größeren Anzahl von Fallunterscheidungen) ziemlich mühsam.

Schon bei al-Hayyam und bei Fibonacci gab es Ansätze zur Auflösung, doch erst etwa 300 Jahre später werden durch Scipione del Ferro und Tartaglia die Formeln gefunden und durch Cardano 1545 veröffentlicht.[10]

Wir beschäftigen uns nun im folgenden mit (speziellen) kubischen Gleichungen, etwa der Gleichung

$$x^3 = ax + b \qquad (a, b \text{ positiv}) \tag{E.1}$$

Der Einfachheit halber wollen wir dabei auch die Null und die negativen Zahlen als Zahlen anerkennen, also unter "Zahlen" alle reellen Zahlen verstehen.
Wir versuchen, eine Lösung mit dem Ansatz $x = u + v$ zu finden.
Aus $x = u + v$ folgt $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx$, also

$$x^3 = 3uvx + (u^3 + v^3) \tag{E.2}$$

[6] Zitiert nach H. Gericke, Geschichte des Zahlbegriffs (Mannheim-Wien-Zürich 1970, S. 53)
[7] "eine dumme und sinnlose Gleichung"
[8] verwirrte Wurzeln
[9] Vgl. Kapitel 16.
[10] Siehe auch Kapitel 18.

Bestimmt man also u und v so, dass die beiden Gleichungen

$$a = 3uv \qquad , \qquad b = u^3 + v^3 \tag{E.3}$$

erfüllt sind, so ist $x = u + v$ eine Lösung der Gleichung (E.I). Aus den Gleichungen (E.3) folgt

$$(u^3 + v^3)^2 = u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = b^2 \qquad \text{und} \qquad 4u^3v^3 = 4\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man

$$(u^3 + v^3)^2 = b^2 - 4\left(\frac{a}{3}\right)^3 \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \tag{E.4}$$

Wir setzen $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$ und untersuchen zunächst den Fall $D \geq 0$. Für $D \geq 0$ folgt aus (E.4)

$$\left|\frac{u^3 - v^3}{2}\right| = \sqrt{D}$$

Ist $\frac{u^3-v^3}{2} \geq 0$, so ergibt sich aus $\frac{u^3-v^3}{2} = \sqrt{D}$ und $\frac{u^3+v^3}{2} = \frac{b}{2}$:

$$u^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{D} \qquad , \qquad v^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{D} \tag{E.5, E.6}$$

Ist $\frac{u^3-v^3}{2} < 0$, so ergibt sich

$$u^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{D} \qquad , \qquad v^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{D}$$

Durch Vertauschen der Vorzeichen bei $\sqrt{D}$ geht u^3 in v^3 und v^3 in u^3 über, durch Vertauschen von u und v bleiben die Gleichungen (E.3) aber unverändert.
Es genügt daher, z. B. die Beziehungen (E.5) und (E.6) zu betrachten.

Aus (E.5) folgt $u = u_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{D}}$. Aus (E.6) folgt $v = v_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{D}}$. Eine dritte Wurzel $\sqrt[3]{r}$ ist nur für reelle Zahlen $r \geq 0$ definiert; sie ist diejenige nichtnegative Zahl s mit $s^3 = r$. Wegen $a > 0$, $b > 0$ und $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a}{3}\right)^3$ - weil der Fall $D > 0$ betrachtet wird - sind $\frac{b}{2} + \sqrt{D}$ und $\frac{b}{2} - \sqrt{D}$ nichtnegativ; man beachte

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Die Gleichung $x^3 = ax + b$ wird tatsächlich (wie man nachrechnen kann) durch $x_0 = u_0 + v_0$, also

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

gelöst.
Beispiel: $x^3 = 6x + 40$ hat die Lösung

$$x_0 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

Es ist nun der Fall $D < 0$, also $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, zu untersuchen:

$$\left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2 = D \qquad , \qquad \frac{u^3 + v^3}{2} = \frac{b}{2} \tag{E.7}$$

Gesucht sind Lösungen der quadratischen Gleichung $y^2 = D$. Es gibt jedoch keine reelle Zahl y, deren Quadrat negativ ist.
Wir betrachten zunächst den Spezialfall $D = -1$, also die Gleichung

$$y^2 = -1 \tag{E.8}$$

Falls eine (nichtreelle) Lösung (wir bezeichnen sie mit "i") existiert[11], so ist auch $-i$ eine Lösung der Gleichung (E.8). Gibt es noch weitere Lösungen?

Es sei k irgendeine Lösung. Dann folgt unter Benutzung des distributiven und kommutativen Gesetzes $(k+i)(k-i) = kk + ik - ki - ii = k^2 + 1 = 0$.
Da ein Produkt nicht Null werden kann, ohne dass einer der Faktoren verschwindet, folgt $k - i = 0$, d.h. $k = i$, oder $k + i = 0$, d.h. $k = -i$. Es gibt also für die Gleichung (E.8) höchstens die Lösungen $x = i$ und $x = -i$.
Die Lösungen der Gleichung $y^2 = D = (-1)|D|$ $(D < 0)$ sind dann $i\sqrt{|D|}$ und $-i\sqrt{|D|}$.

In den eben durchgeführten Betrachtungen haben wir die für (reelle) Zahlen üblichen Rechenregeln verwendet. Wir werden sie auch im folgenden ohne Rechtfertigung verwenden.[12]
Es sei beispielsweise die Gleichung

$$x^3 = 15x + 4$$

mit $D = -121$ gegeben.[13]
Aus (E.7), $\left(\frac{u^3-v^3}{2}\right)^2 = -121$, $\frac{u^3+v^3+}{2} = 2$, folgt entweder $\frac{u^3-v^3}{2} = 11i$ oder $\frac{u^3-v^3}{2} = -11i$ und somit entweder $u^3 = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - 11i$ oder $u^3 = 2 - 11i$, $v^3 = 2 + 11i$.

Wie vorhin genügt es, z. B. die Beziehungen $u^3 = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - 11i$ zu betrachten. Wir versuchen, auch u in der Form $r + si$ zu finden. Aus

$$u^3 = (r + si)^3 = r^3 - 3rs^2 + (3rs^2 - s^3)i$$

und $u^3 = 2 + 11i$ folgt

$$r(r^2 - s^2) = 2 \qquad , \qquad s(3r^2 - s^2) = 11$$

Die Zahlen $r = 2$, $s = 1$ leisten das Verlangte. In der Tat, es gilt $(2+i)^3 = 2 + 11i$; analog findet man $(2-i)^3 = 2 - 11i$.
Die Zahl $x = u + v = (2+i) + (2-i) = 4$ ist tatsächlich eine Lösung von $x^3 = 15x + 4$.

Das Verfahren führt zwar auf eine im Bereich der reellen Zahlen unlösbare Gleichung $y^2 = -121$, und doch ist die vorgelegte Gleichung $x^3 = 15x + 4$ im Bereich der reellen Zahlen lösbar. Dieses ist eine erste Kostprobe davon, was dieses "i" vermag!

Es ist nun nicht schwer, sich geometrisch zu überlegen, dass eine Gleichung $x^3 = ax + b$ $(a > 0,\ b > 0)$ stets (also auch im Fall $D < 0$) eine (sogar positive) reelle Lösung hat.

[11] Der Existenzbeweis erfolgt später. Hier handelt es sich um heuristische Vorbetrachtungen.
[12] Die Rechtfertigung erfolgt später.
[13] Zur allgemeinen Untersuchung kubischer Gleichungen siehe Kapitel 15.

Gegeben sei eine Strecke AB der Länge a; diese sei eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 (Höhe $h = \frac{b}{2}$. vgl. Abb. E.1). Man verlängere die Strecke AB über B hinaus bis zum Punkt E, so dass BE die Länge 1 hat. Auf der verlängerten Geraden CD wähle man nun einen Punkt F wie folgt:
Die Verlängerung der Verbindungsgeraden FA schneide die Verlängerung von DB in G. Man errichte auf GE in G die Senkrechte. Sie schneide die Verlängerung von AB in H. F ist so zu wählen, dass FH auf FD senkrecht steht.
Behauptung: Die Strecke BG hat die Länge x mit $x^3 = ax + b$.

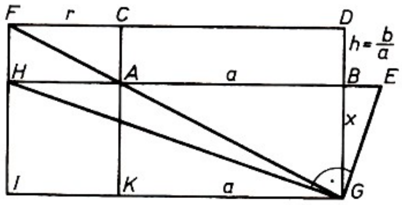


Abb. E 1

Beweis. Es bezeichne x die Länge BG von BG. Dann ist $BH = x$ (x ist die Höhe im rechtwinkligen Dreieck HEG. Nach dem Höhensatz gilt $x^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BH}$. Es ist aber $\overline{BE} = 1$.)
Folglich hat das Rechteck $HBIG$ den Flächeninhalt x^3.
Andererseits ist dieser Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $ABKG$ (mit dem Inhalt ax) und $AHIK$. $AHIK$ hat aber den gleichen Flächeninhalt wie $ABCD$[14], also b. Es gilt also in der Tat $x^3 = ax + b$.
Für beliebige positive a, b erhalten wir so einen positiven Wert für x.

Diese geometrische Überlegung nahm schon R. Bombelli (im 16. Jahrhundert) vor, und sie war für ihn und ist für uns das Argument für die Beschäftigung mit komplexen[15] Zahlen. Diese Zahlen der Form $r + si$ liefern uns ja auch - wie angegeben - eine reelle Lösung einer zunächst (nach dem angegebenen Verfahren im Fall $D < 0$) unlösbar erscheinenden Gleichung.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel dafür, was dieses "i" zu leisten vermag. Dass die Theorie der quadratischen Gleichungen nicht notwendig auf komplexe Zahlen führt, haben wir gesehen. Dennoch war es ein quadratisches Problem, in dem sie bereits 1545 auftraten.
Cardano behandelte in seinem Buch über die Algebra[16] die folgende Aufgabe: Man zerlege die Zahl 10 in zwei Summanden, deren Produkt gleich 40 ist.

Bezeichnen wir die gesuchten Summanden mit x und y, so muss

$$x + y = 10 \qquad , \qquad xy = 40 \tag{E.9}$$

gelten. Es handelt sich also um die Lösung der Gleichung

$$x(10 - x) = 40 \qquad \text{oder} \qquad x^2 - 10x + 40 = 0$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen - formal angewendet[17] - liefert

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15}i$$

[14] Es gelten (Ähnlichkeitssätze!) die folgenden Proportionen: $\frac{h+x}{a+r} = \frac{h}{r}$ (Dreiecke FGD, FAC), $\frac{h+x}{a+r} = \frac{x}{a}$ (Dreiecke FIG, AKG). Somit ist $\frac{h}{r} = \frac{x}{a}$, d.h. $xr = ha$.

[15] complexus (lat.) - umfassend

[16] Ars magna. Vgl. Kapitel 18

[17] Die Schreibweise "$\sqrt{r}$" ist ja nur für nichtnegative reelle Zahlen r definiert: $\sqrt{r}$ ist für $r \geq 0$ diejenige nichtnegative Zahl s mit $s^2 = r$. Eine Erweiterung des Definitionsbereiches erfolgt erst in Kapitel 11.

Es folgt

$$y_{1,2} = 10 - x_{1,2} = 5 \mp \sqrt{15}i$$

Die Zahlen $5 + \sqrt{15}i$ und $5 - \sqrt{15}i$ leisten in der Tat das Verlangte, weil

$$(5 + \sqrt{15}i) + 5 - \sqrt{15} = 10$$
$$(5 + \sqrt{15}i)(5 - \sqrt{15}) = 25 - 15i^2 = 25 + 15 = 40$$

ist.
Noch ist nicht zu erkennen, was die Ausdruck $r + si$ (r, s reell) wirklich bedeuten. Es ist ja immer noch völlig unklar, was $\sqrt{-1} = i$ ist.
Unser Zahlenbereich der reellen Zahlen muss erweitert werden. In dem neuen Bereich der komplexen Zahlen hat dann die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zwei Wurzeln (bezeichnet durch i und $-i$). Man erzielt (wie man beweisen kann) durch die Erweiterung sogar die Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen (beliebigen Grades)!

Algebraische Gleichungen (mit reellen Koeffizienten) brauchen im Reellen nicht unbedingt Wurzeln zu besitzen (z. B. $x^2 + 1 = 0$). Im Bereich der komplexen Zahlen hat jedoch jede algebraische Gleichung (jedes Polynom vom Grade > 1) mindestens eine Wurzel (Nullstelle).

Die neuen Zahlen müssen definiert werden. Ihre rein-logische Konstruktion aus den reellen Zahlen und ihre geometrische Deutung werden sich als völlig unproblematisch erweisen. Es wäre wünschenswert, dass für die neu definierten komplexen Zahlen dann die "üblichen" Rechenregeln gelten, und zweckmäßig, dass die neuen Zahlen sich mit den reellen Zahlen "vertragen" und dabei die reellen Zahlen eine Teilmenge aller komplexen Zahlen bilden.

Dass man zu sinnvollen Ergebnissen kommen kann, wenn man mit den zunächst noch völlig sinnlosen Ausdrücken der Form $r + si$ nach den für reelle Zahlen gültigen Regeln rechnet, haben wir gesehen:
Die Zahl 10 lässt sich in die zwei Summanden $5 + \sqrt{15}i$, $5 - \sqrt{15}i$ zerlegen, deren Produkt gleich 40 ist. Eine positive Lösung der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ findet man in der Form $x = u + v$, wobei $u^3 = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - 11i$ ist. Es ist

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i \qquad , \qquad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

und

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 4$$

tatsächlich eine Lösung von $x^3 = 15x + 4$.

Wir überlegen uns zunächst noch nicht, was dieses "i" eigentlich ist, ob $\sqrt{-1} = i$ wirklich existiert. Vorausgesetzt, dass i und $-i$ als Lösungen von $x^2 + 1 = 0$ existieren, wie müsste sich das Rechnen mit ihnen gestalten?

Zunächst ist $i^2 = (-i)^2 = -1$. Ferner ergibt sich

$$i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^3 i = (-i)i = -i^2 = 1, \qquad i^5 = i^4 i = i$$
$$i^6 = -1, \qquad i^7 = -i, \qquad i^8 = 1$$

usw. Negative Exponenten kann man vermöge $\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -1$, also

$$i^{-n} = (i^{-1})^n = \left(\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n = (-1)^n i^n$$

auf positive zurückführen. Wir haben hierbei die für reelle Zahlen gültigen Regeln für das Rechnen mit Potenzen formal übertragen. Doch die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln kann man nicht ohne weiteres übertragen, wie die folgenden Widersprüche zeigen:

$$\begin{aligned} -1 &= i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \\ -2 &= 2i^2 = ii\sqrt{4} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{4} = \sqrt{1}\sqrt{4} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} 2 + 5i + 8i^2 + 9i^3 + 6i^7 &= 2 + 5i - 8.9i - 6i = -6 - 10i \\ 3i^{-5} + 6i^{12} - i^{17} &= 3(-1)^5 + 6 + i = -3i + 6 - i = 6 - 4i \\ 17i^{-11} + 5i^{-6} + 1 + 4i^6 &= 17(-1)^{11}i^{11} + 5(-1)^6 i^6 + 1 + 4(-1) \\ &= -17(-i) + 5(-1) - 3 = -8 + 17i \end{aligned}$$

Jede Summe von Produkten ai^n einer reellen Zahl a mit einer Potenz i^n (n ganz) lässt sich auf diese Weise in einen Ausdruck $r + si$ (r, s reell) umformen.
Zwei solche Ausdrücke $r + si$ und $t + ui$ können offenbar dann und nur dann gleich sein, wenn $r = t$ und $s = u$ ist. Beispiele für die Addition und Subtraktion dieser Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} &(2 + i) + (1 - 3i) = 3 - 2i \\ &(-\pi + \sqrt{2}i) + (\pi - \sqrt{2}i) = 0 + 0i = 0 \end{aligned}$$

allgemeiner

$$(r + si) + (t + ui) = r + t + (s + u)i \tag{E.10}$$

$$(r + si) - (t + ui) = r - t + (s - u)i \tag{E.11}$$

Beispiele für die Multiplikation sind

$$\begin{aligned} &(2 + i) \cdot (1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i \\ &(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i) = (\sqrt{2})^2 - i^2 = 2 + 1 = 3 \\ &(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i \\ &(4 + \sqrt{2}i)^2 = 16 + 8\sqrt{2}i + 2i^2 = 14 + 8\sqrt{2}i \end{aligned}$$

allgemeiner

$$(r + si)(t + ui) = rt + rui + sti + sui^2 = (rt - su) + (ru + st)i \tag{E.12}$$

Es ist ferner

$$(r + si)(r - si) = r^2 + s^2 \tag{E.13}$$

Bei der Division $\frac{t+ui}{r+si}$ ($r + si \neq 0$) ist es sinnvoll, den Quotienten mit $r - si$ zu erweitern. Man erhält

$$\frac{t + ui}{r + si} = \frac{(t + ui)(r - si)}{(r + si)(r - si)} = \frac{tr - tsi + uri - usi^2}{r^2 + s^2}$$

also

$$\frac{t + ui}{r + si} = \frac{tr + us}{r^2 + s^2} + \frac{ur - ts}{r^2 + s^2} i \tag{E.14}$$

Beispiele für die Division sind

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i((1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2-3+i+6i}{1+9} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)} = \frac{3+2\sqrt{6}i-2}{3+2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}i$$

Ist $r+si$ eine gegebene "komplexe Zahl", gibt es dann eine solche, $t+ui$, mit $(t+ui)^2 = r+si$? Angenommen, $t+ui$ existiert. Dann muss $r+si = t^2-u^2+2tui$, also notwendig $r = t^2-u^2$ und $s = 2tu$ gelten. Es folgt

$$r^2 = t^4 - 2t^2u^2 + u^4 \qquad , \qquad s^2 = 4t^2u^2$$

somit $r^2+s^2 = (t^2+u^2)^2$ und daher (wegen $r^2+s^2 \geq 0, t^2+u^2 \geq 0$)

$$t^2 + u^2 = \sqrt{r^2+s^2}$$

Andererseits ist

$$t^2 - u^2 = r$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$2t^2 = r + \sqrt{r^2+s^2}$$

und durch Subtraktion

$$-2u^2 = r - \sqrt{r^2+s^2}$$

Somit gilt

$$t^2 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2} \qquad , \qquad u^2 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}$$

also

$$\sqrt{t^2} = |t| = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2}} \qquad , \qquad \sqrt{u^2} = |u| = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}}$$

Unter Berücksichtigung von $2Tu = s$ folgt: Ist s positiv, so muss entweder

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2}} \qquad \text{und} \qquad u = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}} \tag{E.15}$$

oder

$$t = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2}} \qquad \text{und} \qquad u = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}} \tag{E.16}$$

sein. Ist s negativ, so muss entweder

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2}} \qquad \text{und} \qquad u = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}} \tag{E.17}$$

oder

$$t = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{2}} \qquad \text{und} \qquad u = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2} - \frac{r}{2}} \tag{E.18}$$

sein.
Mit solchen reellen t und u gilt dann ersichtlich $t^2 - u^2 = r$ und wegen

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}+\frac{r}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}-\frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{r^2+s^2}+\frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{s^2}$$
$$= \frac{1}{2}|s| = \begin{cases} \frac{1}{2}s & \text{falls } s \text{ positiv} \\ -\frac{1}{2}s & \text{falls } s \text{ negativ} \end{cases}$$

auch $2tu = s$, also tatsächlich $(t+ui)^2 = r + si$.

Als Beispiel bestimmen wir die zwei "komplexen Zahlen" $t_1 + u_1 i$ und $t_2 + u_2 i$, deren Quadrat gleich i ist. Jetzt ist $r = 0$, $s = 1$. Es wird (mit (E.15) und (E.16))

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

also leisten die Zahlen $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ das Verlangte. Ist die gegebene Zahl $3 - 4i$ ($r = 3$, $s = -4$), so findet man (mit (E.17) und (E.18))

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2}+\frac{3}{2}} = 2 \qquad , \qquad u_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2}-\frac{3}{2}} = -1$$

und $t_2 = -2$, $u_2 = 1$. Die Quadrate der Zahlen $2 - i$ und $-2 + i = -(2-i)$ sind $3 - 4i$.

Alle vorstehenden Rechnungen und Überlegungen sind nur dann sinnvoll, falls die Existenz der "komplexen Zahlen" $r + si$ gesichert und die Gültigkeit der "üblichen" Rechenregeln nachgewiesen worden ist.

Eine "komplexe Zahl" $r + si$ ist offenbar durch die beiden reellen Zahlen r und s gegeben. Durch die Angabe dieser reellen Zahlen kann man jedoch immer noch zwei im allgemeinen verschiedene "komplexe Zahlen" aufschreiben, nämlich $r + si$ und $s + ri$.
Eine "komplexe Zahl" ist also nicht eindeutig durch eine Menge $\{r, s\}$ aus zwei reellen Zahlen bestimmt, vielmehr kommt es noch auf die Reihenfolge der Zahlen r und s an (nämlich darauf, welche Zahl Koeffizient von i ist). Von den Zahlen r, s ist die eine als erste, die andere als zweite (als Koeffizient von i) zu kennzeichnen.

Ist neben den zwei Zahlen auch deren Reihenfolge bekannt, so spricht man bekanntlich von einem geordneten Zahlenpaar. Zwischen geordneten Paaren reeller Zahlen und "komplexer Zahlen" (zunächst also: formale Ausdrücke der Form $r + si$) kann man eine eineindeutige Zuordnung angeben:

$$(r,s) \leftrightarrow r + si$$

Das Rechnen mit "komplexen Zahlen" wird sich als ein Rechnen mit geordneten Zahlenpaaren erweisen.

Wir werden komplexe Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen definieren. Das Rechnen mit den Zahlenpaaren wird dann in sinnvoller Weise (entsprechend unseren obigen Vorüberlegungen) erklärt. Doch zunächst wollen wir die Frage beantworten, was eigentlich ein geordnetes Paar (reeller Zahlen) ist.

Aufgaben

E.1. Man bestimme je eine positive Lösung der Gleichungen
a) $x^3 = 18(x+6)$, b) $x^3 - 12x - 16 = 0$, c) $24x^3 = 4x + 1$

E.2. Man bestimme die "komplexen Zahlen" , deren Quadrat
a) $2i$, b) $3+4i$, c) -50 ist.

E.3. Berechne
a) $\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$, b) $i^{10} + i^{14} - i^{18} + (-i)^{23}$

E.4. Berechne
a) $\frac{1}{5+7i}$, b) $\frac{\pi+i}{\pi-i}$

1 Geordnete Paare

In seinem Buch Paradoxien des Unendlichen[18] betrachtet Bernhard Bolzano, einer der Wegbereiter der Mengenlehre, eine "höchst merkwürdige Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher... übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, dass es sehr nötig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen.
Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolg, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es andererseits möglich, dass die eine dieser Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich fasst".

Als Beispiel führt Bolzano die Menge der Zahlen zwischen 0 und 5 und die Menge der Zahlen zwischen 0 und 12 an. Beide Mengen enthalten unendlich viele Zahlen. (Es gibt in ihnen zwar nur endlich viele natürliche Zahlen, jedoch bereits unendlich viele Brüche. Zwischen zwei beliebigen verschiedenen Brüchen r und s findet man ja stets einen weiteren Bruch, nämlich $\frac{r+s}{2}$.)

"Und ebenso gewiss ist die letzte Menge für größer als die erste zu erklären, da diese ja unwidersprechlich nur ein Teil von jener ist."
Die Menge A der Zahlen zwischen 0 und 5 ist eine Teilmenge der Menge B der Zahlen zwischen 0 und 12: $A \subset B$.
"Allein nicht minder wahr als alles dieses ist auch nachstehendes: Wenn x was immer für eine zwischen Null und 5 gelegene Größe bezeichnet, und wir bestimmen das Verhältnis zwischen x und y durch die Gleichung

$$5y = 12x \tag{1}$$

so ist auch y eine zwischen Null und 12 liegende Größe, und umgekehrt, so oft y zwischen Null und 12 liegt, so liegt x zwischen Null und 5."

Aus $0 \leq x \leq 5$ folgt $0 \leq \frac{12}{5}x \leq \frac{12}{5}x \cdot 5 = 12$.
Aus $0 \leq y \leq 12$ folgt $0 \leq \frac{5}{12}y \leq \frac{5}{12}y \cdot 12 = 5$.

"Auch folgt aus jener Gleichung (1), dass zu jedem Werte von x nur ein Wert von y und umgekehrt gehöre. Aus diesem beiden ist aber klar, dass es zu jeder in der Menge der zwischen Null und 5 liegenden Größen $= x$ eine in der Menge der zwischen 0 und 12 liegenden Größen $= y$ gebe, die sich mit jener zu einem Paare verbinden lässt, mit dem Erfolge, dass nicht ein einziges der Dinge, aus denen die beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt."

Man sagt auch, die beiden Mengen A und B seien umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen. Es werden zwei Zahlen, nämlich $x \in A$ und $y \in B$ (mit $5y = 12x$), zu einem Paar verbunden. Solche Paare (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$ sind beispielsweise $\left(1, \frac{12}{5}\right)$, $\left(\frac{5}{4}, 3\right)$, $\left(\frac{55}{12}, 11\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$. Da auch die Reihenfolge der Zahlen des Paares wichtig ist (die erste Zahl möge aus A sein, die zweite aus B), spricht man von geordneten Zahlenpaaren.

Zwei geordnete Paare (x, y), (x', y') sind genau dann als gleich anzusehen, d.h. $(x, y) =$

[18] Aus dem schriftlichen Nachlass herausgegeben: Leipzig 1851.

(x', y'), wenn $x = x'$ und $y = y'$ ist.

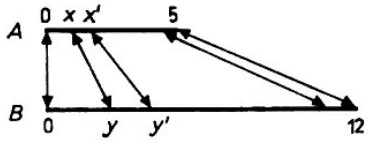


Abb. 1.1

Es werden also zwei Zahlen $x \in A$ und $y \in B$ mit $5y = 12x$ zu einem geordneten Paar (x, y) verbunden. Diese Verbindung der Zahlen x, y ist in Abb. 1.1 geometrisch durch Doppelpfeile markiert. Diese Pfeile kreuzen sich nie: Aus $x < x'$ folgt $\frac{12}{5}x < \frac{12}{5}x'$ also $y < y'$.
Von keinem Punkt x gehen zwei Pfeile aus: Die Zahl y ist durch x eindeutig bestimmt, nämlich $y = \frac{12}{5}$. Zu keinem Punkt y führen zwei Pfeile: Aus $y = y'$, d.h. $\frac{12}{5}x = \frac{12}{5}x'$ folgt $x = x'$.
Und dies ist nun das Paradoxon: Wir haben eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Zahlen der Menge B und den Zahlen der Menge A, so dass man meinen möchte, beide Mengen enthielten (zwar unendlich viele, jedoch) gleich viele Zahlen.[19] Und doch ist die Menge B eine echte Teilmenge der Menge A.

Dies widerspricht allen unseren Erfahrungen mit endlichen Mengen. In der Tat ist bei endlichen Mengen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen genau dann möglich, wenn die Mengen die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

Es ist z. B. dann und nur dann eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Stühlen in einem Klassenraum und den Schülern einer Klasse möglich, wenn genauso viele Stühle wie Schüler da sind. Kennt man die Anzahlen nicht, so lasse man die Schüler auf den Stühlen Platz nehmen. Bleiben Schüler stehen, so sind mehr Schüler als Stühle vorhanden, bleiben Stühle leer, so sind mehr Stühle als Schüler da, sind alle Stühle besetzt, so haben die Menge der Schüler und die Menge der Stühle die gleiche Anzahl von Elementen, sie sind gleichmächtig.

Das von Bolzano beschriebene Beispiel zeigt uns, dass eine unendliche Menge gleichmächtig mit einer ihrer echten Teilmengen sein kann.
Weitere derartige Beispiele, die noch überraschender sind, fand Cantor. Er zeigte, dass die Menge N aller natürlichen Zahlen und die Menge B aller Brüche gleichmächtig sind. Er zeigte auch, dass die Menge aller Punkte einer Ebene (und sogar die Menge aller Punkte des Raumes) gleichmächtig ist mit der Menge aller Punkte einer Geraden.

Die Eigenschaft einer unendlichen Menge, dass sie gleichmächtig mit einer ihrer echten Teilmengen ist, hat R. Dedekind in seiner Schrift "Was sind und was sollen die Zahlen?" (1887) zur Definition der unendlichen Mengen verwendet (und auf dieser Grundlage die Theorie der natürlichen Zahlen aufgebaut).

Zwei Mengen A und B heißen dabei also gleichmächtig, wenn jedes Element von A mit einem Element der Menge B zu einem geordneten Paar verbunden werden kann, so dass in beiden Mengen kein einziges Element ohne Verbindung zu einem geordneten Paar bleibt, und auch kein einziges in mehr als einem geordneten Paar vorkommt.

Es seien A und B irgend zwei Mengen, deren Elemente bekannt sein sollen. (Wir können alle Elemente der Mengen aufzählen, falls die Mengen endlich sind, oder wir können die Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft definieren - die Mengen enthalten alle die Dinge, die eine gegebene Eigenschaft haben.) Wir bezeichnen mit $A \times B$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

[19] Man sagt (nach G. Cantor, dem Begründer der Mengenlehre), dass A und B gleichmächtig sind.

Für $A = \{1,2\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ ist

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$
$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$$

(Im allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$.) Die Menge $A \times B$ wird als Produktmenge der Mengen A und B bezeichnet.

Ist A die Menge der Zahlen zwischen 0 und 5 und B die Menge der Zahlen zwischen 0 und 12, so lässt sich $A \times B$ als die Menge der Punkte eines Rechtecks in einem rechtwinkligen Koordinatensystem geometrisch veranschaulichen (vgl. Abb. 1.2).
Jeder Punkt dieses Rechtecks hat die Koordinaten (x, y) mit $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 12$.

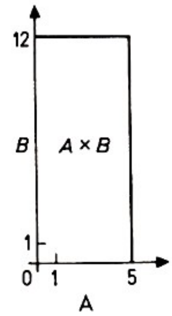


Abb. 1.2

Mit dem Begriff des geordneten Paares lässt sich leicht der für die Mathematik fundamentale Begriff der Funktion erklären. Im anschaulichen Sinn ist eine Funktion f eine Zuordnung, durch welche den Elementen a einer Menge A je ein eindeutig bestimmtes Element $b = f(a)$ einer Menge B zugeordnet ist.
Eine solche Zuordnung ist gegeben, wenn wir alle geordneten Paare (a, b) kennen, so dass $a \in A$, $b \in B$ und $b = f(a)$ ist. Es handelt sich um eine Teilmenge von $A \times B$.

Die Eindeutigkeit (jedem a wird genau ein b zugeordnet) besagt: Zu jedem $ainA$ gibt es ein und nur ein Paar $(a, b) \in A \times B$.

Definition. Eine Menge f von geordneten Paaren $(a, b) \in A \times B$ heißt Funktion f von A in B, wenn gilt:
Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein Paar (a, b).

Eine Funktion von A in B ist also eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B$ von A und B: $f \subseteq A \times B$. Für $(a, b) \in f$ schreibt man auch $b = f(a)$.
$f(a) \in B$ heißt der zugehörige Funktionswert. A heißt die Definitionsmenge der Funktion f; die Menge der $b \in B$, für die ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ existiert, heißt Wertemenge oder Bildmenge der Funktion f.

Wann sind zwei Funktionen gleich? Es seien f und g Funktionen von A in B. Dann ist $f = g$ genau dann, wenn f und g die gleichen Elemente (und das sind geordnete Paare (a, b) aus $A \times B$) enthalten: $(a, b) \in f$ dann und nur dann, wenn $(a, b) \in g$. Anders geschrieben: $b = f(a)$ genau dann, wenn $b = g(a)$; dies bedeutet: $f(a) = g(a)$ für jedes $a \in A$.
Eine Funktion ist durch Angabe der Definitionsmenge A und durch Angabe der Wertemenge aller $f(a)$ mit $a \in A$ eindeutig bestimmt. Gleiche Funktionen besitzen dieselbe Definitionsmenge und dieselbe Wertemenge.

Wir betrachten einige Beispiele. A möge dabei wieder die Menge der Zahlen zwischen 0 und

5 sein und B die Menge der Zahlen zwischen 0 und 12. Ist $0 \le a \le 5$ (also $a \in A$), so ist $0 \le \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$, also $\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 \in B$.

Die Funktion f bestehe aus allen geordneten Paaren $\left(a, \left(a - \frac{5}{2}\right)^2\right)$ mit $a \in A$. (Man schreibt kürzer $f(a) = \left(a - \frac{5}{2}\right)^2, a \in A$.) Sie wird geometrisch als Teilmenge von $A \times B$ durch die in Abb. 1.3 gezeichnete Kurve - Teil einer Parabel - veranschaulicht. Ist $0 \le a \le 5$ ($a \in A$), so ist $0 \le \frac{12}{5}a \le 12$, also $\frac{12}{5}a \in B$.

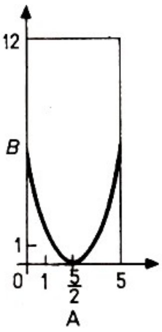


Abb. 1.3

Die Funktion g bestehe aus allen geordneten Paaren $\left(a, \frac{12}{5}a\right)$ mit $a \in A$. (Kürzer: $g(a) = \frac{12}{5}a$, $a \in A$.) Sie wird geometrisch als Teilmenge von $A \times B$ durch die in Abb. 1.4 gezeichnete Gerade g veranschaulicht. Die Funktion h bestehe aus allen geordneten Paaren (a, a) mit $a \in A$ (kürzer $h(a) = a$, $a \in A$).

Sie wird geometrisch als Teilmenge von $A \times B$ durch die in Abb. 1.4 gezeichnete Gerade h veranschaulicht. Ist $a \ne 5$, so ist

$$\frac{\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{a-5} = \frac{\left(\left(a - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\right)\left(\left(a - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2}\right)}{a - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}} = a - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = a$$

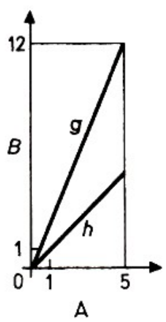


Abb. 1.4

Die Funktion h_1 besteht aus allen geordneten Paaren

$$\left(a, \frac{\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{a-5}\right), \qquad \text{mit } 0 \le a < 5$$

Bezeichnen wir die Menge aller Zahlen a mit $0 \le a < 5$ durch A_1, so wird h_1 geometrisch als Teilmenge von $A_1 \times B$ durch die Gerade h_1 (das ist die Gerade h ohne den Punkt $(5, 5)$) veranschaulicht.

Einige Anmerkungen zu diesen Beispielen:

1. Da die Funktionen h (von A in B) und h_1 (von A_1 in B) verschiedene Definitionsmengen besitzen, sind sie verschieden.

2. Die Wertemengen der Funktionen f und h sind echte Teilmengen von B. Die Wertemenge der Funktion g dagegen ist die Menge B: Zu jedem B existiert ein $a \in A$ mit $b = g(a)$. Solche Funktionen heißen surjektiv (Funktionen von A auf B).

3. Die Funktion g ist eineindeutig: Aus $g(a) = g(a')$ folgt $a = a'$ (d. h., aus $a \neq a'$ folgt $g(a) \neq g(a')$). Solche Funktionen heißen injektiv (eineindeutige Funktionen von A in B). Auch die Funktion h ist injektiv. Die Funktion f dagegen ist ersichtlich nicht injektiv.

4. Funktionen von A in B, die surjektiv und injektiv sind, heißen bijektiv (eineindeutige Funktionen von A auf B). Die Funktion g von A auf B ist bijektiv. Gibt es eine bijektive Funktion von einer Menge A auf eine Menge B, so sind A und B gleichmächtig.

Die Begriffsbildungen "bijektive Funktion" bzw. "gleichmächtige Menge" sollen noch durch zwei weitere Beispiele veranschaulicht werden.

Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen 1,2,3,4,... und G die Menge der geraden natürlichen Zahlen $2, 4, 6, 8, ...$ Die Funktion φ, definiert durch $\varphi(n) = 2n$ für $n \in N$ ist eine bijektive Funktion von N auf G. N und G sind also gleichmächtig.
(Es gibt "genausoviel" gerade Zahlen wie natürliche.)

Wir nehmen nun die Menge $N \times N$ aller geordneten Paare natürlicher Zahlen als Definitionsmenge einer Funktion. Die Funktion ψ sei für $(m,n) \in N \times N$ definiert durch $\psi((m,n)) = 2^{m-1}(2n-1)$. ψ ist eine Funktion von $N \times N$ auf N. ψ ist surjektiv: Zu $k \in N$ existiert ein geordnetes Paar (m,n) mit $\psi((m,n)) = k$. Um m und n aus der gegebenen Zahl k zu finden, schreiben wir k einfach als Produkt einer Zweierpotenz und einer ungeraden Zahl:

$$k = 2^{m-1}(2n-1) \qquad (m-1 = 0,1,2,...; n = 1,2,...)$$

Da durch diese Zerlegung die Zahlen m und n eindeutig bestimmt sind, ist ψ auch injektiv: Aus $\psi((m,n)) = \psi((m_1,n_1))$ folgt $(m,n) = (m_1,n_1)$, also $m = m_1$ und $n = n_1$.
Die Funktion ψ ist also eine bijektive Funktion von $N \times N$ auf N. ($N \times N$ und N enthalten "gleichviel" Elemente. Sie sind gleichmächtig.)

In einem Brief an den Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind stellte Georg Cantor (am 29. November 1873) folgende Frage:
Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen, R_+ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen; so ist die Frage einfach die, ob sich N dem R_+ so zuordnen lasse, dass zu jedem Element der einen Menge ein und nur eines der anderen gehört.

"Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein, es ist nicht möglich, denn N[20] besteht aus diskreten Teilen, R_+ aber bildet ein Kontinuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass N und R_+ keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu tun, vielleicht ist er ein sehr einfacher."[21]

Über die Fragestellung schrieb Cantor am 2. Dezember 1873 wieder nach Braunschweig: "Übrigens möchte ich hinzufügen, dass ich mich nie ernstlich mit ihr beschäftigt habe, weil sie kein

[20] Cantor verwendete die Bezeichnungen (n) und (x) für N und R_+.
[21] Zitiert nach H. Meschkowski, Probleme des Unendlichen - Werk und Leben Georg Cantors (Braunschweig 1967, S. 26/27).

besonders praktisches Interesse für mich hat und ich trete Ihnen ganz bei, wenn Sie sagen, dass sie aus diesem Grunde nicht viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte ...".[22]

Bereits 5 Tage später, am 7. Dezember 1873, konnte Cantor einen Beweis seiner Vermutung mitteilen: Es gibt keine bijektive Funktion von N auf R_+.
Es wird zunächst gezeigt: Es gibt keine bijektive Funktion von N auf das Intervall I der reellen Zahlen x mit $0 \leq x \leq 1$.

Gäbe es eine solche bijektive Funktion φ, so werde die reelle Zahl $\varphi(n)$ mit x_n bezeichnet.
Dann gibt es eine Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ von reellen Zahlen aus I derart, dass jede Zahl aus I gleich einer Zahl dieser Folge ist, die Folge also alle Zahlen des Intervalls I enthält. Hieraus wird sich ein Widerspruch ergeben.
Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, dass es eine bijektive Funktion von N auf I gibt, falsch sein muss. Und wenn es schon keine bijektive Funktion von N auf I gibt, gibt es erst recht keine bijektive Funktion von N auf R_+, was gezeigt werden sollte.

Wir wählen ein Teilintervall $I_1 \subset I$ der Länge $\frac{1}{3}$ so aus, dass $x_1 \notin I_1$. Es kann $x_2 \in I_1$ oder $x_2 \notin I_1$ sein, in jedem Fall können wir ein Teilintervall I_2 von I_1 auswählen, das die Länge $\frac{1}{3^2}$ ($\frac{1}{3}$ der Länge von I_1) hat, das x_2 nicht enthält; also $x_2 \notin I_2$, aber auch $x_1 \notin I_2$ (da $I_2 \subset I_1$ und $x_1 \not I_1$).
Indem wir so Teilintervalle auswählen, erhalten wir Intervalle $I_1, I_2, ...$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I_{n+1} \subset I_n$
2. Die Länge des Intervalls I_n ist $\frac{1}{3^n}$ (Die Intervalle werden mit wachsendem n immer kleiner.)
3. Die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ sind nicht in I_n enthalten.

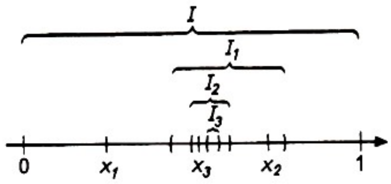


Abb. 1.5

Es ist anschaulich klar (vgl. Abb. 1.5) und ließe sich geometrisch beweisen, dass es eine Zahl x geben muss, die zu allen diesen Intervallen gehört. Dann gilt:
a) x gehört zu I, ist also gleich einer Zahl der Folge $x_1, x_2, x_3, ...$, z.B. $x = x_m$. Somit gilt $x \notin I_m$.
b) x gehört zu allen Intervallen, es ist also speziell $x \in I_m$. Das ist ein Widerspruch!

Den 7. Dezember 1873 hat man als Geburtstag der Mengenlehre bezeichnet. Das Gebiet, zu dem der Cantorsche Brief von diesem Tage die ersten Ergebnisse enthielt, wurde durch G. Cantor begründet.
In seinem Buch "Allgemeine Mengenlehre. Ein Fundament der Mathematik"[23] vertritt D. Klaua die Auffassung, "dass sich alle derzeitigen mathematischen Begriffe als mengentheoretische Begriffe erklären lassen und man damit jedes derzeitige Teilgebiet der Mathematik als Mengenlehre ansehen darf". Die Mengenlehre ist das (zumindest ein) Fundament der heutigen Mathematik; sie ist "der allgemeine logisch-methodologisch begriffliche Rahmen der gesamten

[22]ebenda
[23]Berlin 1964, S. 1.

Mathematik".[24]

Man kann den Begriff "geordnetes Paar" als neuen Begriff in die Mathematik einführen. Geordnete Paare lassen sich aber auch durch reine Mengenbildung definieren.

Aus zwei Elementen a, b kann man die Menge $\{a, b\}$ (bestehend aus diesen beiden Elementen) bilden. Hierbei sind jedoch die Elemente a und b völlig gleichberechtigt: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
Für ein geordnetes Paar (a, b) gilt jedoch $(a,b) = (b, a)$ dann und nur dann, wenn $a = b$ ist. (Allgemein: $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$, $b = d$ ist.)

Aus den Elementen a und b ist also eine Menge zu bilden, in der eines dieser Elemente gegenüber dem anderen so ausgezeichnet ist, dass man dem einen die Rolle des ersten, dem anderen die Rolle des zweiten Elementes geben kann. Dies leistet die Menge $\{\{a, b\}, \{b\}\}$, deren Elemente die Mengen $\{a, b\}$ und $\{b\}$ sind.
Es gilt nämlich $\{\{a, b\}, \{b\}\} = \{\{c, d\}, \{d\}\}$ wenn $a = c$ und $b = d$ ist, und auch nur dann.

In der Tat, da Mengen dann und nur dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, folgt aus der Gleichheit der Mengen

$$\{a,b\} = \{c,d\} \quad \text{und} \quad \{b\} = \{d\} \qquad \text{oder} \qquad \{a,b\} = \{d\} \quad \text{und} \quad \{b\} = \{c,d\}$$

(oder beides).
Aus $\{b\} = \{d\}$ folgt $b = d$ und damit aus $\{a,b\} = \{c,d\} = \{c,b\}$ auch $a = c$. Aus $\{a,b\} = \{d\}$ folgt $a = b = d$ und damit aus $\{b\} = \{c,d\}$, d.h. $b = c = d$, insgesamt $a = c = b = d$.

Umgekehrt folgt aus $a = c$ und $b = d$, dass $\{a\} = \{c\}$, $\{b\} = \{d\}$ und $\{a,b\} = \{c, d\}$ sind und damit $\{\{a, b\}, \{b\}\} = \{\{c, d\}, \{d\}\}$ ist, wie verlangt.

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

Definition. Die Menge $\{\{a, b\}, \{b\}\}$ heißt geordnetes Paar und wird mit (a, b) bezeichnet.

Wichtig ist für uns jedoch nicht diese Definition, sondern die Eigenschaft: $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

Aufgaben

1.1. Die Menge M sei gleichmächtig mit der Menge N der natürlichen Zahlen. Man beweise, dass eine unendliche Teilmenge von M auch gleichmächtig mit N ist.

1.2. Man beweise: Die Menge B der positiven rationalen, also gebrochenen Zahlen ist gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen.

1.3. Man beweise: Es gibt keine bijektive Funktion von einer Menge auf die Menge aller ihrer Teilmengen.

[24] G. Asser, 100 Jahre Mengenlehre. Mitteilungen der Math. Ges. der DDR, Heft 3 (1974), 17.

2 Rechnen mit Zahlenpaaren

Bei der Lösung der Gleichungen zweiten und dritten Grades ergaben sich Ausdrücke der Form $a+bi$, worin a, b reelle Zahlen sind. Hierbei wurde die Existenz des i als eine Lösung der Gleichung $x^2+1=0$ vorausgesetzt.

Was das "i" eigentlich ist, ob es überhaupt existiert, wissen wir bisher nicht. Durch einige Erfolge ermutigt, haben wir mit den Ausdrücken $a+bi$ wie mit reellen Zahlen gerechnet; dabei wurden die höheren Potenzen von i vermöge $i^2=-1$ auf die erste Potenz zurückgeführt; die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten haben wir immer wieder als "Binom" der Form $a+bi$ schreiben können (vgl. (E.10), (E.11), (E.12), (E.14)):

$$(r+si)+(t+ui)=(r+t)+(s+u)i \tag{2.1}$$

$$(r+si)-(t+ui)=(r+t)-(s+u)i \tag{2.2}$$

$$(r+si)\cdot(t+ui)=(rt-su)+(ru+st)i \tag{2.3}$$

$$\frac{(r+si)}{(t+ui)}=\frac{tr+su}{r^2+s^2}+\frac{ur-ts}{r^2+s^2}i \tag{2.4}$$

Zwei solche Binome $r+si$ und $t+ui$ sind dann und nur dann als gleich anzusehen, wenn $r=t$ und $s=u$ ist; einen Ausdruck $r+si$ kann man als geordnetes Paar (r, s) betrachten.

Um zu einer Definition der komplexen Zahlen zu gelangen, werden wir zunächst das Rechnen mit geordneten Paaren reeller Zahlen erklären.
Bei geeigneter Definition der Rechenoperationen zwischen Zahlenpaaren wird es sich zeigen, dass für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen dieselben Rechengesetze gelten wie in der Menge der rationalen (oder auch reellen) Zahlen. Die Definition der "Verknüpfungen" muss zweckmäßig sein.

Wäre beispielsweise eine Multiplikation geordneter Paare in der Form $(a, b)(c, d)=(ac, ba)$ sinnvoll? Die Multiplikation wäre kommutativ:

$$(a, b)(c, d)=(ac, bd)=(ca, db)=(c, d)(a,b)$$

Die Multiplikation wäre assoziativ:

$$\begin{aligned}((a, b)(c, d))(e,f)&=(ac, bd)(e,f)=((ac)e,(bd)f)=(a(ce), b(df))\\&=(a, b)(ce, df)=(a,b)((c,d)(e,f))\end{aligned}$$

Mit einer Addition der Form

$$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$$

würde für eine solche Multiplikation das distributive Gesetz gelten:

$$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))(e,f)&=(a+c,b+d)(e,f)=((a+c)e,(b+d)f)=(ae+ce, bf+df)\\&=(ae,bf)(cd,df)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f)\end{aligned}$$

Mit der angegebenen Addition wäre das Zahlenpaar $(0,0)$ als "Null" anzusehen. Mit der angegebenen Multiplikation wäre dann aber das Produkt zweier von "Null" verschiedener Zahlenpaare gleich "Null".
Ist $a\neq 0$, $d\neq 0$, so gilt $(a, 0)\neq(0, 0)$, $(0, d)\neq(0, 0)$, jedoch $(a, 0)(0, d)=(0, 0)$. Die wichtige Eigenschaft der rationalen (und reellen) Zahlen, dass nämlich ein Produkt nicht Null

werden kann, ohne dass einer der Faktoren verschwindet, würde bei einer solchen Definition der Multiplikation für Zahlenpaare nicht gelten.

Das hätte schwerwiegende Folgen. So wäre die Eindeutigkeit der Division nicht gesichert: Sind (a,b), (c,d) zwei von "Null" verschiedene Zahlenpaare mit $(a,b)(c,d) = (0{,}0)$ und ist (p,q) Quotient von (e,f) und (a,b), also $(a,b)(p,q) = (e,f)$, so würde auch

$$(a{,}b)((p{,}q) + (c{,}d)) = (e{,}f)$$

d. h. auch $(p,q) + (c,d)$ Quotient von (e,f) und (a,b) sein. Es wären (p,q) und $(p,q) + (c,d)$ zwei verschiedene Quotienten von (e,f) und (a,b).

Um die Verknüpfungen der Zahlenpaare zweckmäßig zu definieren, werden wir uns - auch durch den Erfolg beim formalen Rechnen mit den Ausdrücken $a+bi$ ermutigt - an den "Rechenregeln" (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) orientieren.
Beispielsweise werden die Addition und die Multiplikation, den Formeln (2.1) und (2.3) angepasst, dann in der Form

$$(r{,}s) + (t{,}u) = (r + t{,}s + u) \qquad \text{und} \qquad (r{,}s) \cdot (t{,}u) = (rt - su{,}ru + st)$$

zu definieren sein. Es wird sich zeigen, dass für die so "verknüpften" Zahlenpaare dieselben Rechengesetze gelten wie für die rationalen Zahlen.

Definition. In der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der geordneten Paare reeller Zahlen wird eine Addition und eine Multiplikation erklärt durch

$$(a + b) + (c + d) = (a + c{,}b + d) \tag{2.5}$$
$$(a + b) \cdot (c + d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{2.6}$$

Anmerkung. Die Operationen "$+$", "$\cdot$" für Zahlenpaare sind sorgfältig zu unterscheiden von den entsprechenden Operationen "$+$" und "$\cdot$" für reelle Zahlen; sie müssten eigentlich anders bezeichnet werden, etwa durch "$\oplus$" und "$\odot$". Da aber Verwechslungen nicht zu befürchten sind, verwenden wir dieselben Zeichen.

Es werden nun die grundlegenden Rechengesetze nachgewiesen. (I) Kommutatives Gesetz der Addition.

$$(a{,}b) + (c{,}d) = (a + c{,}b + d) = (c + a{,}d + b) = (c{,}d) + (a{,}b)$$

(II) Assoziatives Gesetz der Addition.

$$((a{,}b) + (c{,}d)) + (e{,}f) = (a + c + e{,}b + d + f) = (a{,}b) + ((c{,}d) + (e{,}f))$$

(III) Umkehrgesetz für die Addition. Zu je zwei Zahlenpaaren (a,b), (c,d) gibt es stets ein und nur ein Zahlenpaar (x,y) mit $(a{,}b) + (x,y) = (c,d)$.

Existenz. Das Paar $(x,y) = (c-a, d-b)$ leistet offenbar das Verlangte.
Eindeutigkeit. Aus $(a{,}b) + (x{,}y) = (c{,}d)$ und $(a{,}b) + (x,y') = (c{,}d)$ folgt

$$\begin{gathered}(a{,}b) + (x{,}y) = (a{,}b) + (x'{,}y') \\ (a + x, b + y) = (a + x', b + y') \qquad \text{d.h.} \\ a + x = a + x', \qquad b + y = b + y'\end{gathered}$$

somit $x = x'$, $y = y'$, also $(x,y) = (x',y')$.

(IIIa) Satz von der Existenz der Null. Es gibt genau ein Zahlenpaar, das, bei der Addition als Summand verwendet, keine Änderung hervorruft.

Existenz. Das Paar (0, 0) leistet das Verlangte!
Eindeutigkeit. Aus $(a,b) + (x,y) = (a,b)$ folgt nach (III) $(x, y) = (a - a,b - b) = (0,0)$.

(IIIb) Zu jedem Zahlenpaar (a, b) gibt es genau ein (inverses) Zahlenpaar (x, y) mit $(a, b) + (x, y) = (0,0)$.

Beweis. Nach (III) leistet das Zahlenpaar $(x, y) = (-a, -b)$ und nur dieses Zahlenpaar das Verlangte.

Wir vereinbaren die Schreibweise $(x, y) = -(a, b)$. Das nach (III) existierende Zahlenpaar (x, y) mit $(a, b) + (x, y) = (c, d)$ lässt sich dann in der Form

$$(x,y) = (c - a,d - b) = (c,d) + (-a, -b) = (c,d) - (a, b)$$

schreiben.

(IIIc) Nach der Definition der Multiplikation ist $(a, b)(0,0) = (0,0)$ für Jedes Zahlenpaar (a, b).

(IV) Kommutatives Gesetz der Multiplikation.

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = (c,d)(a,b)$$

(V) Assoziatives Gesetz der Multiplikation.

$$\begin{aligned}((a, b)(c, d))(e,f) &= (ac - bd, ad + bc)(e,f)\\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)\\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))\\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) = (a,b)((c,d),(e,f))\end{aligned}$$

(VI) Distributives Gesetz.

$$\begin{aligned}((a,b) + (c,d))(e,f) &= (a + c,b + d)(e,f) = ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e)\\ &= (ae + ce - bf - df,af + cf + be + de)\\ &= (ae - bf + ce - df,af + be + cf + de)\\ &= (ae - bf,af + be) + (ce - df,cf + de) = (a,b)(e,f) + (c,d)(e,f)\end{aligned}$$

(VII) Umkehrgesetz für die Multiplikation.
Zu je zwei Zahlenpaaren $(a,b) \neq (0,0)$, (c,d) gibt es stets ein und nur ein Zahlenpaar (x,y) mit

$$(x,y)(a,b) = (a,b)(x, y) = (c,d)$$

Existenz. (Wir orientieren uns an der Formel (2.4).) Wegen $(a, b) \neq (0, 0)$ ist $a^2 + b^2 \neq 0$. Das Paar $(x,y) = \left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$ leistet das Verlangte. In der Tat, es ist

$$(a, b)\left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2c + abd - bad + b^2c}{a^2 + b^2}, \frac{a^2d - abc + bac + b^2d}{a^2 + b^2}\right) = (0,0)$$

Eindeutigkeit. Wir benötigen die folgende Eigenschaft:
(VIIa) Nullteilerfreiheit. Das Produkt zweier Zahlenpaare ist dann und nur dann gleich $(0, 0)$, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren gleich $(0, 0)$ ist.

Beweis. Es ist $(a, b)(0, 0) = (0, 0)$. Wir zeigen, dass $(a, b)(x, y) = (0{,}0)$ und $(a, b) \neq (0, 0)$ die Gleichheit $(x, y) = (0, 0)$ nach sich zieht.
In der Tat, aus $(a, b)(x, y) = (ax - by, bx + ay) = (0, 0)$ folgt

$$(1) \quad ax - by = 0 \qquad , \qquad (2) \quad bx + ay = 0$$

Multiplikation von (1) mit $-b$ und von (2) mit a und nachfolgende Addition der Gleichungen ergibt $(a^2 + b^2)y = 0$, also (wegen $a^2 + b^2 \neq 0$) $y = 0$.
Multiplikation von (1) mit a und von (2) mit b und nachfolgende Addition der Gleichungen ergibt $(a^2 + b^2)x = 0$, also $x = 0$, was zu beweisen war.

Die gesuchte Eindeutigkeit folgt nun so:
Es sei $(a, b)(x, y) = (c, d)$ und $(a, b)(x', y') = (c, d)$. Hieraus folgt $(a, b)(x, y) = (a, b)(x', y')$, d.h.

$$(a{,}b)((x{,}y) - (x', y')) = (a{,}b)(x - x', y - y') = (0{,}0)$$

Wegen $(a, b) \cdot (0, 0)$ folgt hieraus nach (VIIa) $(x - x-, y - y') = (0{,}0)$, d.h. $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, also $x = x'$, $y = y'$.

(VIIb) Satz von der Existenz der Eins.
Es gibt genau ein Zahlenpaar, das bei der Multiplikation mit einem Zahlenpaar $\neq (0{,}0)$ keine Änderung hervorruft.

Existenz. Das Paar $(1, 0)$ leistet das Verlangte!

Eindeutigkeit. Aus $(a, b)(x, y) = (a, b)$ und $(a, b) \neq (0, 0)$ folgt nach (VII)

$$(x{,}y) = \left(\frac{aa + bb}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ba}{a^2 + b^2} \right) = (1{,}0)$$

(VIIc) Zu jedem Zahlenpaar $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt es genau ein (inverses) Zahlenpaar (x, y) mit $(a, b)(x, y) = (1, 0)$.

Beweis. Nach (VII) leistet das Zahlenpaar $(x{,}y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ Verlangte, und nur dieses Zahlenpaar.[25] Wir vereinbaren für (x, y) die Schreibweise

$$(x{,}y) = (a{,}b)^{-1} = \frac{(1{,}0)}{(a{,}b)}$$

Das nach (VII) existierende Zahlenpaar (x, y) mit $(a, b)(x, y) = (c, d)$ lässt sich dann in der Form

$$(x{,}y) = (a{,}b)^{-1}(c{,}d) = \frac{(c{,}d)}{(a{,}b)}$$

schreiben.
Jedes Zahlenpaar lässt sich nach (2.5) und (2.6) in der Form

$$(a, b) = (a, 0)(1{,}0) + (b, 0)(0, 1) \tag{2.7}$$

[25] Die formale Rechnung der Einleitung würde

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

ergeben.

darstellen. Somit wird das Rechnen mit geordneten Paaren auf das Rechnen mit speziellen Paaren der Form $(a, 0)$, $(1, -0)$, $(0, 1)$ zurückgeführt. Für die speziellen Zahlenpaare $(1, 0)$ und $(0, 1)$ folgt aus (2.6)

$$(1{,}0)(1{,}0) = (1{,}0), \qquad (1{,}0)(0{,}1) = (0{,}1), \qquad (0{,}1)(0{,}1) = (-1{,}0) = -(1{,}0) \tag{2.8}$$

Wir betrachten die Menge aller Zahlenpaare der Form $(a, 0)$. Die Addition (2.5) und Multiplikation (2.6) dieser Zahlenpaare ist besonders einfach:

$$(a{,}0) + (c{,}0) = (a + c{,}0) \qquad , \qquad (a{,}0)(c{,}0) = (ac{,}0) \tag{2.9,2.10}$$

Die Rechengesetze I, II, III, IV, V, VI, VII sind auch in dieser Teilmenge der Menge aller geordneten Paare gültig. So gibt es zu je zwei Zahlenpaaren $(a, 0)$ und $(c, 0)$ ein und nur ein Zahlenpaar $(x, 0)$ mit $(a, 0) + (x, 0) = (c, 0)$, nämlich $(x, 0) = (c - a, 0)$.
Zu je zwei Zahlenpaaren $(a, 0) \neq (0, 0)$, $(c, 0)$ gibt es ein und nur ein Zahlenpaar $(x, 0)$ mit $(a, 0)(x, 0) = (c, 0)$, nämlich $(x{,}0) = \left(\frac{c}{a}{,}0\right)$. Es gilt somit

$$(c{,}0) - (a{,}0) = (c - a{,}0) \qquad , \qquad \frac{(c{,}0)}{(a{,}0)} = \left(\frac{c}{a}{,}0\right) \tag{2.11,2.12}$$

Wir definieren nun eine Multiplikation der Zahlenpaare mit (reellen) Zahlen (in Verallgemeinerung von $-(a, b) = (-a, -b)$ durch

$$r(a, b) = (ra, rb) \tag{2.13}$$

Dann gelten (wie man leicht nachrechnet) folgende Regeln:

$$\begin{aligned} (MI) &\quad r((a{,}b) + (c{,}d)) = r(a{,}b) + r(c{,}d) \\ (MII) &\quad (r + s)(a{,}b) = r(a{,}b) + s(a{,}b) \\ (MIII) &\quad r(s(a, b)) = (rs)(a, b) \\ (MIV) &\quad 1 \cdot (a{,}b) = (a{,}b) \end{aligned}$$

Man erkennt ferner: $0(a, b) = (0{,}0)$, $r(0, 0) = (0{,}0)$ und

$$(a, 0) = a(1{,}0) \tag{2.14}$$

Jedes Zahlenpaar lässt sich nun (nach (2.14), (2.7), (2.8)) in der Form

$$(a, b) = a(1{,}0) + b(0, 1) \tag{2.15}$$

aufschreiben.
Da in der Menge der Zahlenpaare durch (2.5) eine Addition erklärt ist, die die Eigenschaften I, II, III besitzt, und durch (2.13) eine Multiplikation mit einer (reellen) Zahl erklärt ist, die die Eigenschaften MI, MII, MIII, MIV besitzt, nennt man die Menge aller Zahlenpaare reeller Zahlen auch einen (zweidimensionalen) Vektorraum, und die Elemente dieses Vektorraumes (die Zahlenpaare also) Vektoren.[26]

Die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ heißen Basisvektoren:

1. Jeder Vektor lässt sich nach (2.15) als Linearkombination der Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ mit

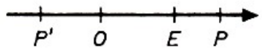
[26] Vgl. Kapitel 6.

reellen Koeffizienten darstellen.

2. Es gibt keine reellen Zahlen r, s so, dass $(1,0) = r(0,1)$, $(0,1) = s(1,0)$. Aus $a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$ folgt $a = b = 0$. (Man nennt $(1,0)$ und $(0,1)$ linear unabhängig.)

Es ist nicht schwer, die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einer reellen Zahl, aber auch Multiplikation und Division der Zahlenpaare geometrisch in einer Ebene zu veranschaulichen. Dazu werden wir zunächst einen jeden Punkt dieser Ebene eindeutig durch ein Zahlenpaar kennzeichnen.

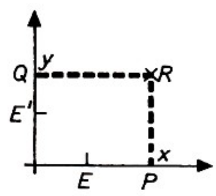
Wir wählen in der Ebene eine Gerade und auf ihr zwei Punkte O und E (rechts von O). Der Strecke OE (Einheitsstrecke) werde die Maßzahl (Länge) 1 zugeordnet.

Abb. 2.1 

Ist dann P ein beliebiger Punkt (vgl. Abb. 2.1), so entspricht der Strecke OP bekanntlich genau eine reelle Zahl als Maßzahl für die Länge dieser Strecke.

Umgekehrt tritt jede positive reelle Zahl als Maßzahl für die Länge einer Strecke OP auf. Die positiven reellen Zahlen entsprechen also den Punkten der durch O bestimmten Halbgeraden, auf der E liegt.
Nun werden der Punkt O und die Zahl 0 einander zugeordnet, und dem Punkt P' der zweiten durch O bestimmten Halbgeraden (auf der E nicht liegt) werde die negative Zahl $-x$ zugeordnet, wobei x die Maßzahl für die Länge der Strecke $P'O$ (Abstand des Punktes P' von O) ist. Durch einen Pfeil werde die positive Richtung (von links nach rechts) gekennzeichnet.

Nun wählen wir eine zweite Gerade, die die erste in O unter einem rechten Winkel schneidet und auf ihr einen Punkt E' (oberhalb O), so dass OE' die Länge 1 hat. Die (obere) Halbebene, in der E' liegt, heißt die positive. Durch einen Pfeil an der zweiten Geraden werde die positive Richtung gekennzeichnet (vgl. Abb. 2.2).

Abb. 2.2 

Ist nun R ein beliebiger Punkt der Ebene, so fällen wir von R auf beide Geraden das Lot. Es seien P der Fußpunkt des einen Lotes und Q der Fußpunkt des zweiten Lotes. Entsprechen den Punkten P bzw. Q die reellen Zahlen x bzw. y, so entspricht dem Punkt R das geordnete Zahlenpaar (x,y).

Den Punkten E, P bzw. Q entsprechen dabei die Paare $(1{,}0)$, $(x,0)$, $(0{,}y)$.
Die Zahlen x, y heißen Koordinaten des Punktes R (x seine Abszisse, y seine Ordinate). Die erste Gerade heißt Abszissenachse, die zweite Ordinatenachse.

Neben diesem (allgemein bekannten) rechtwinkligen Koordinatensystem betrachten wir noch das Polarkoordinatensystem als eine weitere Möglichkeit, einen Punkt der Ebene durch ein geordnetes Zahlenpaar zu kennzeichnen.
Wir wählen in der Ebene einen Punkt O (Pol) und einen von O ausgehenden Strahl a (Achse), kennzeichnen durch einen Pfeil eine positive Drehrichtung (gewählt im entgegengesetzten Sinn

der Uhrzeigerrichtung) und wählen ferner auf a einen Punkt E so, dass OE die Länge 1 hat.

Ein Punkt P der Ebene ist dann gekennzeichnet durch seinen Abstand r vom Pol und den Winkel φ $(0 < \varphi < 2\pi)$, um den der Strahl in die Lage OP positiv gedreht werden muss (vgl. Abb. 2.3).

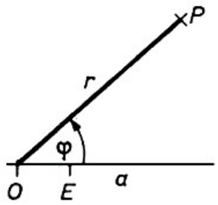


Abb. 2.3

r heißt Abstand oder Betrag von P, und p wird als Argument oder Arcus von P bezeichnet. Als Arcus von P kann man auch $\varphi + k2\pi$ (k ganzzahlig) nehmen.

Denkt man sich nun in der Ebene gleichzeitig ein rechtwinkliges Koordinatensystem und ein Polarkoordinatensystem gegeben derart, dass die Achse des letzteren mit der positiven Hälfte der Abszissenachse des ersteren zusammenfällt, so dass der Pol O im Punkt $(0{,}0)$ liegt, so bestehen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, p) eines beliebigen Punktes P folgende Gleichungen (vgl. Abb. 2.4):

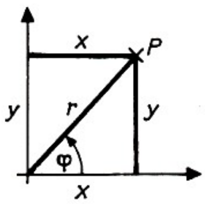


Abb. 2.4

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{2.16}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{(falls } x \neq 0) \tag{2.17}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{(falls } x^2 + y^2 \neq 0) \tag{2.18}$$

Es folgen einige Beispiele für Umrechnungen (Polarkoordinaten, rechtwinklige Koordinaten).

(1) Man berechne die Polarkoordinaten des Punktes $P = (\sqrt{3}, -1)$.
Es ist $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ und $\tan\varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Da der Punkt im IV. Quadranten liegt, folgt (vgl. Abb. 2.5) $\varphi = 330°$. ($-\frac{1}{3}\sqrt{3} = -\tan 30° = \tan(360° - 30°) = \tan 330°$.)

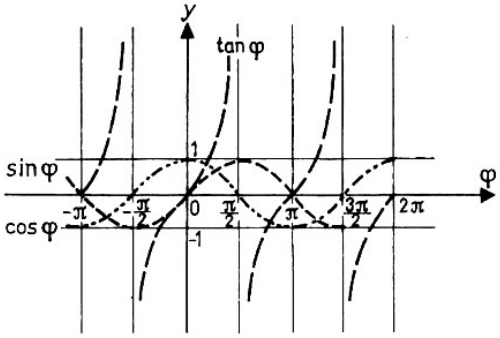


Abb. 2.5
Die trigonometrischen Funktionen $\tan\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$

Die Polarkoordinaten von P sind $(2, 330°)$.

2) Man berechne die Polarkoordinaten des Punktes $P = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
Es ist $r = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$ und $\tan\varphi = -1$. Da der Punkt im II. Quadranten liegt, folgt $\varphi = 135°$. $(-1 = -\tan 45° = \tan(180° - 45°) = \tan 135°.)$ Es ist $P = (4, 135°)$.

(3) Man berechne die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $P = (4, 60°)$.
Es ist $x = 4\cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$, $y = 4\sin 60° = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Die rechtwinkligen Koordinaten von P sind $(2{,}2\sqrt{3})$.

Wie spiegelt sich nun das Rechnen mit geordneten Paaren reeller Zahlen bei dieser geometrischen Deutung der Paare durch Punkte der Ebene wider?
(Der einfachen Sprechweise wegen unterscheiden wir den Punkt P und das zugeordnete rechtwinklige Koordinatenpaar nicht und sprechen vom Punkt $P = (x{,}y)$.)

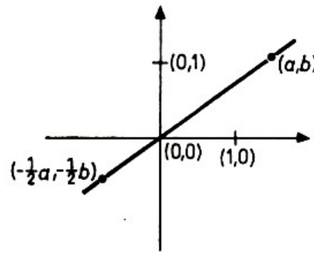


Abb. 2.6

Die Multiplikation eines Zahlenpaares (a, b) mit einer Zahl r liefert das Zahlenpaar (ra, rb). Der Punkt (ra, rb) liegt auf derselben Geraden, auf der die Punkte $(0, 0)$ und (a, b) liegen (vgl. Abb. 2.6). Insbesondere liegt der Punkt $(-a, -b) = -(a, b)$ auf dieser Geraden und ist das Bild von (a, b) beim "Spiegeln" am Punkt $(0, 0)$ (vgl. Abb. 2.7).

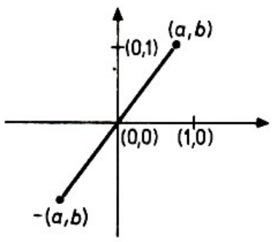


Abb. 2.7

Die Addition zweier Paare (a, b) und (c, d) liefert das Paar $(a + c{,}b + d)$. Die Punkte $(0, 0)$, (a, b), (c, d) und $(a + c, b + d)$ bilden ein Parallelogramm (vgl. Abb. 2.8).

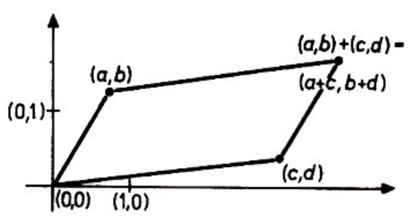


Abb. 2.8

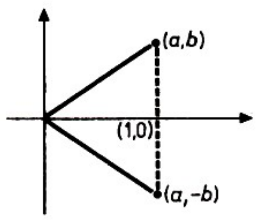


Abb. 2.9

Der Punkt $(a, -b)$ geht durch Spiegelung an der Abszissenachse aus dem Punkt (a, b) hervor (vgl. Abb. 2.9).
Die geometrische Deutung der Subtraktion folgt aus $(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d)$ (vgl. Abb. 2.10).

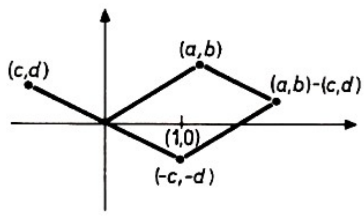


Abb. 2.10

Um auch die Multiplikation geometrisch zu veranschaulichen, ist es günstig, Polarkoordinaten zu betrachten:

$$(a,b) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Aus

$$(a,b) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad , \qquad (c,d) = s(\cos\psi, \sin\psi)$$

folgt

$$(a,b)(c,d) = rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi) \qquad \text{also}$$
$$(a,b)(c,d) = rs(\cos(\varphi+\psi), \sin(\varphi+\psi)) \tag{2.19}$$

(man benutze die Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$).
Der Abstand (Betrag) des Produktes ist gleich dem Produkt der Abstände der Faktoren. Das Argument (Arcus) des Produktes ist gleich der Summe der Argumente der Faktoren.

Die geometrische Lage des Produktes $(a,b)(c,d)$ lässt sich nun aus den Punkten $P = (a,b)$ und $Q = (c,d)$ wie folgt gewinnen:
Man konstruiere ein zu OPE ähnliches Dreieck $OR'Q'$, in dem die Länge von OQ' gleich s ist (vgl. Abb. 2.11).

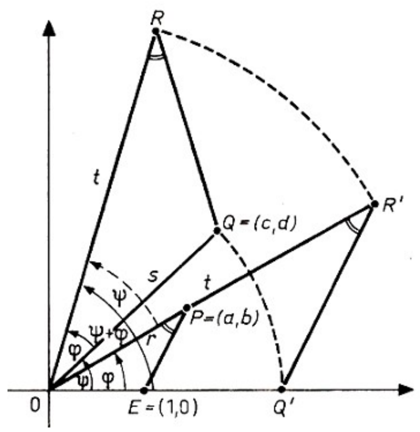


Abb. 2.11

Bezeichnet t die Länge von OR', so gilt (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke) $\frac{t}{s} = \frac{r}{1}$, also $t = rs$. Nun drehe man die Geraden OR' und OQ' (also das Dreieck $OR'Q'$) in positiver Richtung um den Winkel ψ. Man erhält aus R' den Punkt R mit dem Abstand rs und dem Arcus $\varphi + \psi$ (Q' geht in Q über). R stellt das Produkt von (a,b) und (c,d) dar.

Die Konstruktion des Quotienten $\frac{(c,d)}{(a,b)}$ (falls $(a,b) \neq (0,0)$ ist) erfolgt ähnlich. Beginnen wir mit $\frac{(1,0)}{(a,b)}$ $((a,b) \neq (0,0))$.
Aus $(a,b) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ folgt

$$\frac{(1,0)}{(a,b)} = \frac{1}{r}\frac{1}{(\cos\varphi, \sin\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{1}{(\cos\varphi, \sin\varphi)}\frac{(\cos\varphi, -\sin\varphi)}{(\cos\varphi, -\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{(\cos\varphi, -\sin\varphi)}{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi, 0)}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{(\cos\varphi, -\sin\varphi)}{(1,0)}$$

also

$$\frac{1}{r}\frac{1}{(\cos\varphi, \sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi), \sin(-\varphi)) \tag{2.20}$$

Man konstruiere nun ein zu OPE ähnliches Dreieck $OE'R'$, wobei die Länge von OE' gleich 1 ist (vgl. Abb. 2.12).

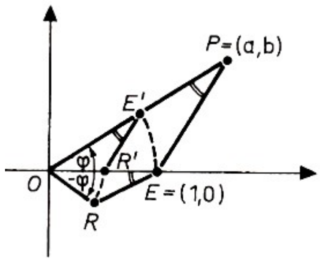


Abb. 2.12

Bezeichnet r' die Länge von OR', so gilt (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke) $\frac{r}{1} = \frac{1}{r'}$, also $r' = \frac{1}{r}$.
Dreht man nun das Dreieck $OE'R'$ um den Winkel $-\varphi$, dann geht OE' in OE über und R' wird zum gesuchten Punkt R, dessen Abstand $\frac{1}{r}$ und dessen Winkel $-\varphi$ ist. R stellt den Quotienten $\frac{(1,0)}{(a,b)}$ dar.

Aus $(a, b) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq (0, 0)$, $(c, d) = s(\cos\psi, \sin\psi)$ folgt

$$\frac{(c,d)}{(a,b)} = \frac{1}{(a,b)}(c,d) = \frac{s}{r}(\cos(-\varphi), \sin(-\varphi))(\cos\psi, \sin\psi)$$

also (wegen (2.19))

$$\frac{(c,d)}{(a,b)} = \frac{s}{r}(\cos(\psi - \varphi), \sin(\psi - \varphi)) \tag{2.21}$$

Der Betrag des Quotienten ist gleich dem Quotienten der Beträge von Zähler und Nenner. Das Argument des Quotienten ist gleich der Differenz der Argumente von Zähler und Nenner. Die geometrische Lage des Quotienten $\frac{(c,d)}{(a,b)}$ lässt sich nun aus den Punkten $P = (a,b)$ und $Q = (c,d)$ wie folgt gewinnen:

Man konstruiere ein zu OPE ähnliches Dreieck $OQ'R'$, indem die Länge von OQ' gleich s ist (vgl. Abb. 2.13). Bezeichnet t die Länge von OR', so gilt (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke) $t = \frac{t}{1} = \frac{s}{r}$. Nun drehe man die Geraden OQ' und OR' (also das Dreieck $OQ'R'$) um den Winkel $\psi - \varphi$.
Dann geht Q' in Q über, und R' liefert den gesuchten Punkt R mit dem Betrag $\frac{s}{r}$ und dem Argument $\psi - \varphi$.

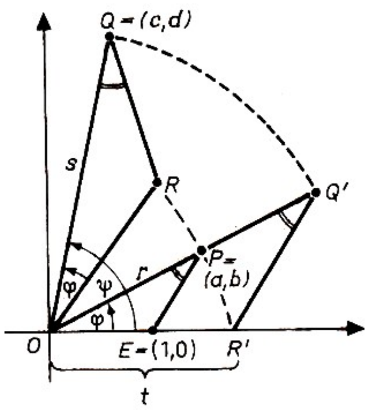


Abb. 2.13

$$R = \frac{(c,d)}{(a,b)}$$

Aufgaben

2.1. Man berechne die Polarkoordinaten von $P = (1, -1)$.

2.2. Man berechne die Polarkoordinaten von $P = (-5, 12)$.

2.3. Man berechne die rechtwinkligen Koordinaten von $P = (1, 300°)$.

2.4. Wie heißt die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = u^2$ mit dem Radius u in Polarkoordinaten?

2.5. Man berechne die rechtwinkligen Koordinaten des Produktes und des Quotienten der in Polarkoordinaten gegebenen Punkte $P = (2, 135°)$, $Q = (\sqrt{3}, 75°)$ auf zwei Arten:
a) Man berechne zuerst die Polarkoordinaten des Punktes und des Quotienten und daraus deren rechtwinklige Koordinaten.
b) Man berechne die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Punkte und daraus das Produkt und den Quotienten.

3 Isomorphe Körper sind im wesentlichen gleich

Da in der Menge der Zahlenpaare eine Addition und eine Multiplikation (2.5), (2.6)) erklärt sind, die die Eigenschaft I bis VII besitzen, Eigenschaften also, die auch für die Addition und Multiplikation rationaler Zahlen gelten, nennt man die Menge aller Zahlenpaare reeller Zahlen auch einen Rationalitätsbereich oder einen Körper.

Der Ausdruck Körper ist 1871 von R. Dedekind geprägt worden.[27]
Er nannte eine Menge von Zahlen einen Körper, wenn die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von je zwei Zahlen dieser Menge derselben Menge angehören; und führte als Beispiele die Menge Q aller rationalen Zahlen, die Menge R aller reellen Zahlen und die Menge $Q(\xi)$ aller Zahlen der Form $a + b\xi$ an (worin a, b beliebige rationale Zahlen sind und ξ eine irrationale Lösung - z.B. $\xi = \sqrt{5}$ - einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist).

Dedekind bemerkte: "Dieser Name soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in der Geometrie und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Vollkommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als organisches Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint.
Anfangs hatte ich denselben Begriff mit dem Namen eines rationalen Gebietes belegt, der aber weniger bequem ist. Der Begriff fällt im wesentlichen zusammen mit dem was Kronecker einen Rationalitätsbereich genannt hat."

Der Körperbegriff gebe "eine Einteilung der Zahlenarten nach einem natürlichen Gesichtspunkte", betonte Weber in seinem Lehrbuch der Algebra (1895)[28].
Eine abstrakte Theorie der Körper gab 1910 E. Steinitz.[29] Er fasste den Begriff "Körper" abstrakt und allgemein "als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkt und eindeutige Umkehrung zulassen. (Nur die Division durch Null ist auszuschließen.)"

Rationalitätsbereiche oder Körper sind also Mengen K, in denen eine Addition, bezeichnet z.B. mit $\oplus$, und eine Multiplikation, bezeichnet z.B. mit $\odot$, erklärt sind, so dass die Eigenschaften I bis VII erfüllt sind $(a,b,c \in K)$:

I. Kommutatives Gesetz der Addition:

$$a \oplus b = b \oplus a$$

II. Assoziatives Gesetz der Addition:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

III. Umkehrgesetz für die Addition: Zu je zwei Elementen a,b aus K existiert genau ein Element x in K mit $a \oplus x = b$. (Hieraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Nullelements 0 mit der Eigenschaft $a \oplus 0 = a$ für alle $a \in K$. Für ein b mit $a \oplus b = 0$ wird die Bezeichnung $b = \ominus a$ verabredet.)

IV. Kommutatives Gesetz der Multiplikation:

$$a \odot b = b \odot a$$

[27] R. Dedekind, Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (Berlin 1964, S. 20).
[28] H. Weber, Lehrbuch der Algebra (2. Aufl., 1898, S. 491).
[29] In seiner Abhandlung Algebraische Theorie der Körper. J.reine und angew. Math. 137 (1910), 167-309.

V. Assoziatives Gesetz der Multiplikation:

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

VI. Distributives Gesetz:

$$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$$

VII. Umkehrgesetz für die Multiplikation: Zu je zwei Elementen $a \neq 0$, b aus K existiert genau ein Element x in K mit $a \odot x = b$. (Hieraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Einselementes e mit der Eigenschaft $a \odot e = a$ für alle $a \in K$. Für ein b mit $a \odot b = e$ wird die Bezeichnung $b = a^{-1}$ verabredet.
Aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \odot b \neq 0$. Ist nämlich $a \neq b = 0$ und $a \neq 0$, so $a \odot b = 0 = a^{-1} \odot a \odot b = 1 \odot b = b$, also $b = 0$)

Beispiele für Körper sind:
(1) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.
(2) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.
(3) Die Menge $\{0, 1\}$ bestehend aus der Null und der Eins, die verknüpft werden durch:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 0 = 0 \odot 1 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1$$

(4) Die Menge P aller Zahlenpaare (a, b) reeller Zahlen a und b, wobei die Addition durch

$$(a{,}b) \oplus (c{,}d) = (a + c{,}b + d)$$

und die Multiplikation durch

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + be)$$

definiert sind.

(5) Die Teilmenge P_0 (von P) aller Zahlenpaare der Form $(a{,}0)$ (a reell) mit der (in (4) beschriebenen) Addition und Multiplikation (die sich reduziert auf)

$$(a\text{fl}0) \oplus (c{,}0) = (a + c{,}0) \qquad , \qquad (a{,}0) \odot (c{,}0) = (ac, 0)$$

(6)[30] Die Menge M aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit reellen Zahlen a, b. Die übliche Matrizenaddition solcher Matrizen ergibt wieder eine Matrix dieser Form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix}$$

Die übliche Matrizenmultiplikation solcher Matrizen ergibt ebenfalls wieder eine Matrix der betrachteten Form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

Die Null im Körper M ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die Eins in M ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ferner ist

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

[30] Der mit Matrizen nicht vertraute Leser kann dieses Beispiel (ohne Nachteil) übergehen.

(sofern $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, d.h. $a^2 + b^2 \neq 0$ ist).

Als Programm seiner (oben erwähnten) Abhandlung formulierte Steinitz:

"Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen". Grundlage für die Realisierung seines Programmes war sein "Isomorphieprinzip":

"Zwei Systeme mit doppelter Komposition (in jedem sind zwei Kompositionsgesetze gegeben, die wir Addition und Multiplikation nennen) heißen isomorph oder von gleichem (Kompositions-)Typus, wenn es möglich ist, ihre Elemente eineindeutig so aufeinander zu beziehen, dass der Summe und dem Produkt irgendzweier Elemente des einen Systems in dem andern allemal die Summe und das Produkt der entsprechenden Elemente zugeordnet ist; die Beziehung selbst heiße eine isomorphe oder Isomorphismus."

Definition. Zwei Körper K und K' heißen isomorph (von gleicher Struktur; man schreibt $K \cong K'$), wenn es eine bijektive Funktion φ von K auf K' gibt, mit den Eigenschaften:

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \boxplus \varphi(b) \qquad , \qquad \varphi(a \odot b) = \varphi(a) \boxdot \varphi(b)$$

(Die in K definierten Operationen Addition und Multiplikation werden mit $\oplus$ und $\odot$ bezeichnet. Die in K' definierten Operationen Addition und Multiplikation werden mit $\boxplus$ und $\boxdot$ bezeichnet.)

Es gibt also eine eineindeutige Funktion φ von K auf ganz K' so, dass der Funktionswert jeder Summe gleich der Summe der Funktionswerte und der Funktionswert jedes Produktes gleich dem Produkt der Funktionswerte ist. Die Funktion φ heißt auch Isomorphismus (vgl. Tab. 3.1).

Tabelle: Isomorphe Körper $K \cong K'$

	K	K'
Elemente	$a,b,c,\ldots$	$a',b',c',\ldots$
Addition	$\oplus$	$\boxplus$
Multiplikation	$\odot$	$\boxdot$

Die bijektive Funktion φ bewirke die Zuordnungen

$$a \longleftrightarrow a'$$
$$b \longleftrightarrow b'$$
$$\ldots$$

Dann gelten die eineindeutigen Zuordnungen

$$a \oplus b \longleftrightarrow a' \boxplus b'$$
$$a\odot \longleftrightarrow a' \boxdot b'$$
$$-b \longleftrightarrow -b'$$
$$a^{-1} \longleftrightarrow a'^{-1}$$

Beispiele:
(1) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht isomorph, da es keine bijektive Funktion von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

(2) Die Körper $\mathbb{R}$ und P_0 sind isomorph. Die Funktion φ von $\mathbb{R}$ auf P_0, definiert durch $\varphi(a) = (a,0)$ (für $a \in \mathbb{R}$) ist offenbar bijektiv, und es gilt

$$\varphi(a + b) = (a + b,0) = (a,0) \oplus (b,0) \qquad , \qquad \varphi(ab) = (a + b,0) = (a,0) \odot (b,0)$$

also ist φ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf P_0.

(3) Die Körper P und M sind isomorph. Die Funktion ψ von P auf M, definiert durch $\psi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (für $a, b \in \mathbb{R}$ ist bijektiv, und es gilt

$$\begin{aligned}
\psi((a+b)+(c+d)) = \psi((a+c, b+d)) &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \psi((a,b)) \oplus \psi((c,d)) \\
\psi((a+b)(c+d)) = \psi((ac-bd, ab+bc)) &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \psi((a,b)) \odot \psi((c,d))
\end{aligned}$$

Für Körper: K, K', K'' gilt:

1. Reflexivität: $K \cong K$ (Als Isomorphismus dient die identische Funktion $\varphi(a) = a$ für alle $a \in K$)

2. Symmetrie: Aus $K \cong K'$ folgt $K' \cong K$; (Es sei φ ein Isomorphismus von K auf K'. Die zu der bijektiven Funktion φ von K auf K' inverse Funktion φ^{-1} von K' auf K, definiert durch $\varphi^{-1}(\varphi(a)) = a$, ist ein Isomorphismus von K' auf K.)

3. Transitivität: Aus $K \cong K'$ und $K' \cong K''$ folgt $K \cong K''$. (Ist φ der Isomorphismus von K auf K', ψ der Isomorphismus von K' auf K'', so ist die Funktion η von K auf K'', definiert durch $\eta(a) = \psi(\varphi(a))$ für $a \in K$, ein Isomorphismus von K auf K''.)

Diese Eigenschaften zeigen, dass die Isomorphie von Körpern eine Verallgemeinerung der Gleichheit von Körpern ist. Isomorphe Körper nennt man auch im wesentlichen gleich oder im abstrakten Sinne gleich. Isomorphe Körper sind verschiedene Realisierungen desselben abstrakten Rechenschemas. Isomorphe Körper sind als nicht wesentlich verschieden anzusehen.

Die Körpertheorie (im Sinne von Steinitz) untersucht abstrakte Körper, also das, was allen isomorphen Körpern gemeinsam: ist: (das abstrakte Rechenschema). (Tab. 3.2; siehe nächste Seite) verdeutlicht das "abstrakte Rechenschema" der isomorphen Körper P und M und ihrer Teilkörper P_0 - bestehend aus allen Paaren der Form $(a,0)$, a reell - und M_0 - bestehend aus allen Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a reell)

P enthält einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Teilkörper P_0.[31] Es ist nicht schwer, einen Körper $\mathbb{C}$ anzugeben, der zu P isomorph ist und $\mathbb{R}$ als Teilkörper hat.

Diesen Körper $\mathbb{C}$ bilden wir aus P wie folgt: Die Menge C entstehe aus der Menge P, indem jedes Zahlenpaar der Form $(a, 0)$ durch die reelle Zahl a ersetzt wird $(C = (P \setminus P_0) \cup R)$. Die Addition und Multiplikation von geordneten Paaren (a, b), (c, d) (aus $P \setminus P_0$) bzw. reellen Zahlen a, c (aus $\mathbb{R}$) sind erklärt.

Die übrigen möglichen Summen und Produkte $(a,b) + c$, $(a,b)c$ werden durch[32] $(ab) + c = (a + c,b)$ und $(a, b)c = (ac, bc)$ sinnvoll erklärt. Hierdurch wird die Menge C ein Körper. $\mathbb{C}$ enthält $\mathbb{R}$ als Teilkörper.

[31] Ebenso: M enthält den zu $\mathbb{R}$ isomorphen Teilkörper M_0.
[32] Vgl. $(a,b) + (c,0) = (a + c,b)$, $(a, b)(c,0) = (ac, bc)$ bzw. (2.13).

Tabelle 3.2. Isomorphie zwischen P und M und zwischen P_0 und M_0

P	M
$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$	$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$
$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$	$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{pmatrix}$
$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$	$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$
$(a,b)(c,d)^{-1}=(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2})$	$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ca+db}{c^2+d^2} & \frac{cb-ad}{c^2+d^2} \\ -\frac{cb-ad}{c^2+d^2} & \frac{ca+db}{c^2+d^2} \end{pmatrix}$
P_0	M_0
$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$
$(a,0)-(c,0)=(a-c,0)$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a-c \end{pmatrix}$
$(a,0)(c,0)=(ac,0)$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}$
$(a,0):(c,0)=(\frac{a}{c},0)$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & 0 \\ 0 & \frac{a}{c} \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}$ und P sind isomorph. Die Funktion ψ von P auf $\mathbb{C}$, definiert durch

$$\psi((a,b)) = \begin{cases} a & \text{für } (a,b)=(a,0)\in P_0 \\ (a,b) & \text{für } (a,b)\in P\setminus P_0 \end{cases}$$

ist bijektiv, und es gilt

$$\psi((a,b)+(c+d)) = \psi((a,b))+\psi((c,d))$$
$$\psi((a,b)(c+d)) = \psi((a,b))\psi((c,d))$$

Jedes Element von $\mathbb{C}$ lässt sich (nach (2.15)) in der Form

$$a+bi \tag{3.1}$$

(a, b reelle Zahlen) schreiben, wenn wir

$$i=(0,1) \tag{3.2}$$

setzen. Dabei gilt $i^2=-1$ (vgl. (2.8)).

Zusammenfassend sei noch einmal das "Rechenschema" für den Körper $\mathbb{C}$ aufgeschrieben:

Addition: $(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$.
Die Addition ist kommutativ und assoziativ. Die Null ist $0+0i=0$.

Subtraktion: $-(c+di)=-c-di$, $(a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i$.

Multiplikation: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.
Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ. Die Eins ist $1+0i=1$. Addition und Multiplikation sind distributiv verbunden.

Division:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)^{-1} &= \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) \qquad \text{vorausgesetzt } a+bi \neq 0 \\
(c+di)(a+bi)^{-1} &= \frac{c+di}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2}((ac+bd)+(ad-bc)i) \qquad \text{vorausgesetzt } a+bi \neq 0
\end{aligned}
$$

Benutzen wir für die Darstellung geordneter Paare Polarkoordinaten r, φ, so gilt:

$$
(a,b) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)
$$

Daher lässt sich jedes Element von $\mathbb{C}$ auch in der (trigonometrischen) Form

$$
r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3.3}
$$

darstellen. Für die Multiplikation und Division zweier in der trigonometrischen Form gegebenen Elemente von C,

$$
r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{und} \qquad s(\cos\psi + i\sin\psi)
$$

gilt:

$$
\begin{aligned}
r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \\
\frac{1}{s(\cos\psi + i\sin\psi)} &= \frac{1}{s}(\cos\psi - i\sin\psi) = \frac{1}{s}(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)) \\
\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{s(\cos\psi + i\sin\psi)} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))
\end{aligned}
$$

Aufgabe

3.1. Man beweise die oben angegebene Transitivität der Isomorphie.

4 Was sind (komplexe) Zahlen?

In den verschiedenen Epochen der Geschichte gab es unterschiedliche Antworten: auf die Frage "Was sind Zahlen?".
Der heutige Zahlbegriff ist das Ergebnis einer langen Entwicklung.

Über die Erkenntnisse zur Entstehung und Entwicklung des Zählens, der Zahlzeichen, der Zahlensysteme, des Rechens mit Zahlen kann hier nicht berichtet werden. Bei derartigen Untersuchungen ist es erforderlich, umfangreiches archäologisches und philologisches Material zu benutzen.[33]

Eine erste Antwort auf die Frage, was eine Zahl eigentlich sei, wurde bereits in der Antike gegeben. Euklid definierte im 7. Buch seiner Elemente (um 300 v. u. Z.): "Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge". Er erklärte zuvor, was "Einheit" ist: "Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird", also das gezählte Ding selbst als Maß, unter Absehen von seinen physischen Eigenschaften.
Die Einheit (Eins) ist somit bei Euklid keine Zahl, denn sie ist keine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit. In Euklids Elementen werden neben natürlichen Zählen ("Zahlen") auch Brüche ("Zahlenverhältnisse") und positive irrationale Zählen ("Größenverhältnisse") eingeführt, doch letztere eben nicht als Zahlen bezeichnet.

Euklids Zahlendefinition ist in der lateinischen Form "numerus est unitatum collectio" bis ins 17. Jahrhundert wiederholt worden. In der Rechenpraxis wurde jedoch die Unterscheidung zwischen Zahl und Verhältnis immer weniger beachtet.

Archimedes rechnete ganz selbstverständlich mit Brüchen. Diophant ließ Brüche als Zahlenlösungen von Gleichungen zu. Eutokios verwendete den Begriff "ganze Zahl" für natürliche Zahlen, wird also auch andere als natürliche Zahlen als "Zahlen" angesehen haben.
In der indischen Algebra (9./14. Jh.) traten die quadratischen Irrationalitäten gleichberechtigt neben ganzen (auch negativen) und rationalen Zahlen auf.[34] Die Mathematiker in den islamischen Ländern (8./15. Jh.), denen Euklids Elemente als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen diente, dehnten den Zahlbegriff auf die Menge der positiven rationalen und irrationalen Zahlen aus.
Zu den Brüchen und irrationalen Zahlen kamen im Laufe der Zeit die Null und die "negativen Größen" hinzu, die auch erst als Zahlen anerkannt werden mussten.

Im 16./17. Jahrhundert wurde nicht nur mit natürlichen Zahlen, Brüchen und (positiven) irrationalen Zahlen gerechnet, sondern auch mit der Null und den negativen Zahlen (auch mit komplexen Zahlen) wurden die üblichen Rechenoperationen durchgeführt, diese als Zahlen behandelt. Es wurde eben mehr und mehr das den Zahlen Gemeinsame, das gleichartige Rechnen zur Kenntnis genommen.
Noch 1555 übernahm Petrus Ramus in seiner Arithmetik die Definition von "Einheit" und "Zahl" des Euklid, wollte jedoch die Eins auch als Zahl verstehen. 1569 versuchte er dann mit seinem Zahlbegriff alle rationalen Zahlen zu erfassen.[35]

Ende des 16. Jahrhunderts definierte Simon Stevin: "Zahl ist das, wodurch sich die Quantität

[33] Ein Übersichtsartikel zu dieser Problematik ist in der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 1 (8. Aufl., Berlin 1978) enthalten.
[34] Siehe A. P. Juschkewitsch, Geschichte. der Mathematik im Mittelalter (Leipzig 1964).
[35] H. Gericke, Geschichte des Zahlbegriffs (Mannheim-Wien-Zürich 1970, S. 31, 70).

eines jeden Gegenstandes ausdrückt."[36]
Er trat dafür ein, auch die Irrationalitäten als Zahlen anzuerkennen. Durch Descartes (1637) wurden die geometrischen Konstruktionen der antiken Verhältnislehre "den arithmetischen Operationen angeglichen und dabei die Einheit nicht als Punkt angesehen, sondern als eine beliebig angenommene Strecke und die übrigen Zahlen als andere Strecken, die zu der angenommenen Strecke das gleiche Verhältnis haben wie die in Rede stehenden Zahlen zur Einheit" (Wallis 1657)[37].

Isaac Newton erklärte in seiner Arithmetica universalis (1707): "Unter Zahl verstehen wir nicht sowohl eine Menge von Einheiten, sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer andern Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art: ganz, gebrochen, irrational; ganz, wenn sie die Einheit misst, gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie misst, irrational, wenn die Einheit mit ihr inkommensurabel ist."[38]
Die reellen Zahlen lassen sich somit als Strecken auf der Zahlengeraden geometrisch darstellen. Sowohl die geometrische Darstellung als auch die gemeinsamen Rechenregeln waren wesentliche Argumente für die Anerkennung der genannten Größen als Zahlen.

In der heutigen Schulmathematik gewinnt man die Zahlen durch sukzessive Erweiterung des Zahlbegriffs der natürlichen Zahlen.) Bei diesem genetischen Aufbau, angefangen von den natürlichen Zahlen bis zu den reellen Zahlen, wird man folgende Forderungen stellen:[39]

(a) Der alte Zahlenbereich ist eine Teilmenge des neuen.

(b) Die Verknüpfungen (wie Addition, Multiplikation) und Relationen (wie "gleich", "kleiner als") werden im neuen Bereich so definiert, dass sie für die Elemente des alten Zahlenbereichs als Sonderfall die ursprünglichen Verknüpfungen und Relationen liefern.

(c) Im neuen Bereich sind Aufgaben lösbar, die im alten nicht oder nur beschränkt lösbar waren.

(d) Der neue Zahlenbereich, der den alten umfasst und auch die Forderungen (b) und (c) erfüllt, ist "so klein wie möglich" und durch den alten "bis auf Isomorphie" eindeutig bestimmt.

Die natürlichen Zahlen $1,2,3,...$ haben folgende Eigenschaften (k, l, m, n bezeichnen natürliche Zahlen):
1. Es ist stets $n = n$.
2. Je zwei Zahlen sind entweder gleich oder ungleich.
3. Mit $k = l$, $l = m$ ist auch $k = m$.
4. Zwischen je zwei verschiedenen m, n gilt entweder $m > n$ oder $n > m$.
5. Aus $k > l$ und $l > m$ folgt $k > m$.

Zwei Zahlen l, m untereinander verknüpfen (addieren, multiplizieren) heißt, ihnen nach bestimmten Regeln eindeutig eine Zahl n zuzuordnen; wir schreiben $l \circ m = n$ ("$\circ$ bedeute "$+$" für die Addition, "$\cdot$" für die Multiplikation).
Die Verknüpfungen sind kommutativ ($l \circ m = m \circ l$) und assoziativ ($l \circ (m \circ n)) = ((l \circ m) \circ n)$.

[36] Zitiert nach H. Gericke, a. a. O., S. 31.
[37] Zitiert nach H. Gericke, a. a. O., S. 71/72.
[38] Zitiert nach H. Gericke, a. a. O., S. 71/72. Zwei Strecken g und h heißen inkommensurabel, wenn ihr Längenverhältnis eine irrationale Zahl ergibt.
[39] Vgl. Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I, S. 134f.

Addition und Multiplikation sind distributiv verbunden:

$$l(m+n) = l \cdot m + l \cdot n$$

Aus $m > n$ folgt $k \circ m > k \circ n$.[40]

Die Umkehrung der Verknüpfung (die Lösung der Gleichung $m \circ x = n$ bezeichnen wir mit $x = n \Box m$, "$\Box$" bedeute "$-$" für die Subtraktion, ":" für die Division) ist in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen im allgemeinen nicht möglich.
Man muss die Menge $\mathbb{N}$ erweitern, neue Zahlbegriffe einführen, durch die die Umkehrungen ausführbar werden. Dabei wird man sich an die vier genannten methodologischen Forderungen halten, so dass alle formalen Rechenregeln bestehen bleiben (Prinzip der: Permanenz der formalen Rechengesetze).[41]

So gelangt man zu den rationalen Zahlen. Auch bei dem (begrifflich schwierigen) Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen wird man sich vom heuristischen Permanenzprinzip leiten lassen.
Erst im 19. Jahrhundert wurden die reellen Zahlen aus den rationalen reinlogisch konstruiert, dann die rationalen Zahlen auf die natürlichen zurückgeführt und schließlich die natürlichen Zahlen charakterisiert.

Der sich so ergebende, genetische Aufbau der reellen Zahlen ist allerdings weit entfernt von der historischen Entwicklung des Zahlbegriffs.
In seiner Arbeit Über den Zahlbegriff[42] gab David Hilbert im Jahr 1900 eine axiomatische Charakterisierung des Körpers der reellen Zahlen. Er schrieb:

"Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völlig logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.
In der Theorie des Zahlbegriffs gestaltet sich die axiomatische Methode wie folgt:

Wir denken uns ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit a, b, c, ... Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht:

I. Axiome der Verknüpfung
I1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch "Addition" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen $a + b = c$ oder $c = a + b$.
I2. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existiert stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass $a + x = b$ bzw. $y + a = b$ wird.
I3. Es gibt eine bestimmte Zahl - sie heiße 0 -, so dass für jedes a zugleich $a + 0 = a$ und $0 + a = a$ ist.
I4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art, durch "Multiplikation" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen: $ab = c$ oder $c = ab$.
I5. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind und a nicht 0 ist, so existiert stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass $ax = b$ bzw. $ya = b$ wird.

[40] Diese Monotonieeigenschaft sichert die Eindeutigkeit der Umkehrungen der Verknüpfungen (falls sie existieren): Aus $m \circ x = n$ und $m \circ y = n$ und $x > y$ folgt $m \circ x > m \circ y$ (bzw. aus $y > x$ folgt, $m \circ y > m \circ x$), also $n > n$. Es muss also $x = y$ sein.
[41] Für ein ausführliches Studium des genetischen Aufbaues der reellen Zahlen sei verwiesen auf: G. Asser, Lehrbriefe (Potsdam 1957) und Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I.
[42] Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung (1900), S. 180-184.

I6. Es gibt eine bestimmte Zahl - sie heiße 1 -, so dass für jedes a zugleich $a1 = a$ und $1a = a$ ist.

II. Axiome der Rechnung
Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

II1. $a + (b + c) = (a + b) + c$,
II2. $a + b = b + a$,
II3. $a(bc) = (ab)c$,
II4. $a(b + c) = ab + ac$,
II5. $(a + b)c = ac + bc$,
II6. $ab = ba$

III. Axiome der Anordnung
III1. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) größer ($>$) als die andere; die letztere heißt (dann die kleinere, in Zeichen: $a > b$ und $b < a$. Für keine Zahl gilt $a > a$.
III2. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.
III3. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets $a + c > b + c$ und $c + a > c + b$.
III4. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets $ac > bc$ und $ca > cb$.

IV. Axiome der Stetigkeit
IV1. (Archimedisches Axiom).
Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addieren, dass die entstehende Summe die Eigenschaft hat $a + a + ... + a > b$.

IV2. (Axiom der Vollständigkeit).
Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme bei Erhaltung der Beziehungen zwischen den Zahlen die Axiome I, II, III, IV 1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und sämtlicher aufgeführten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Einige der Axiome I 1-6, II 1-6, III 1-4, IV 1-2 sind Folgen (der übrigen, und es entsteht so die Aufgabe, die logische Abhängigkeit der genannten Axiome zu erörtern ...
Wir erkennen beispielsweise folgende Tatsachen: Die Existenz der Zahl 0 (Axiom: I 3) ist eine Folge der Axiome I 1,2 und II 1; sie beruht also wesentlich auf dem assoziativen Gesetz der Addition. Die Existenz der Zahl 1 (Axiom I 6) ist eine Folge der Axiome I 4, 5 und II 3; sie beruht also wesentlich auf dem assoziativen Gesetz der Multiplikation.

Das kommutative Gesetz der Addition (Axiom II 2) ist eine Folge der Axiome I; II 1, 4, 5 dasselbe erscheint also im wesentlichen als eine Folge des assoziativen Gesetzes der Addition und der beiden distributiven Gesetze ... Das kommutative Gesetz der Multiplikation (Axiom II 6) ist eine Folge der Axiome I, II 1-5, III, IV 1, dagegen nicht schon eine Folge der Axiome I, II 1-5, III; jenes Gesetz kann hiernach aus den übrigen Axiomen dann und nur dann gefolgert werden, wenn man das Archimedische Axiom (Axiom IV 1) hinzuzieht ...

Die Axiome IV I und IV 2 sind voneinander unabhängig ... [Aus ihnen folgt,] wie man zeigen kann ... die Übereinstimmung unseres Zahlensystemes mit dem gewöhnlichen Systeme der reellen Zahlen ... Unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach ... zu denken ... ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige endliche und abgeschlossene System von Axiomen I-IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur

Gültigkeit haben, falls man sie mittels einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann."

Die Axiome der Verknüpfung und die Axiome der Rechnung zeigen, dass die betrachtete Menge ein Körper ist. Doch in diesem Körper ist neben den Verknüpfungsoperationen $(+,\cdot)$ noch eine Ordnungsrelation $(>)$ definiert, so dass die Axiome der Anordnung gelten. Man spricht von einem angeordneten Körper.
Angeordnete Körper, für deren Elemente das Axiom IV 1 erfüllt ist, heißen archimedisch angeordnet. Beispielsweise ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ein archimedisch angeordneter Körper. Für diesen Körper ist jedoch nicht das Axiom IV 2 der Vollständigkeit erfüllt:
Man kann der Menge der rationalen Zahlen noch die Menge der irrationalen Zahlen hinzufügen (die rationalen Zahlen "vervollständigen"), so dass auch in der Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen bei Erhaltung der Beziehungen zwischen den Zahlen die Axiome I, II, III, IV 1 sämtlich erfüllt sind.

Man kann beweisen, dass der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch das Hilbertsche Axiomensystem bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Ist $\mathbb{R}$ eine Menge, in der zwei Verknüpfungsoperationen $(+,\cdot)$ und eine Ordnungsrelation $(>)$ definiert sind, derart, dass das Hilbertsche Axiomensystem erfüllt ist, so gibt es einen Isomorphismus φ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ (also eine bijektive Funktion φ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$) mit

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b) \qquad , \qquad \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

für den überdies gilt: Aus $a>b$ folgt $\varphi(a)>\varphi(b)$.

Zur Charakterisierung der (reellen) Zahlen werden also benutzt:

(1) Die Äquivalenzrelation mit den Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität (Begriff der Gleichheit von Zahlen, Begriff der Isomorphie von Körpern).

(2) Die natürlichen Zahlen (im archimedischen Axiom: Es gibt eine natürliche Zahl n mit $na>b$).

(3) Das Hilbertsche Axiomensystem.

Der Körper der reellen Zahlen ist (nach Axiom IV 2) bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und sämtlicher Hilbertscher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig (Vollständigkeitssatz).

Wir suchen eine Erweiterung des Zahlbegriffs über die Menge der reellen Zahlen hinaus derart, dass die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar wird. Das kann nach dem Vollständigkeitssatz nicht geschehen, ohne auf gewisse fundamentale Gesetze zu verzichten. Überlegt man sich einmal nur, auf welche Gesetze man am wenigsten verzichten kann, so wird man an die Körperaxiome[43] denken, während man auf die Größenbeziehung verzichten könnte, ohne dadurch mit unseren Vorstellungen über den Zahlbegriff allzu sehr in Kollision zu geraten.

Die im vorigen Kapitel konstruierte Menge C besitzt nun folgende Eigenschaften:
1. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist eine Teilmenge von C.
2. Die Verknüpfungen (Addition, Multiplikation) sind in C so definiert, dass sie für die reellen Zahlen die ursprünglichen Verknüpfungen bedeuten.
3. In C ist die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar. (Lösungen: $i,-i$). In C sind (wie man zeigen

[43] Insbesondere an die Forderung, dass ein Produkt zweier von "Null" verschiedener Zahlen nicht gleich Null sein darf.

kann) sogar alle algebraischen Gleichungen lösbar. Jedes Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

vom Grad n lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren

$$x - \alpha_1, x - \alpha_2, ..., x - \alpha_n$$

($\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}, a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$) aufschreiben: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.)

4. Man kann beweisen: Jeder Körper, der $\mathbb{R}$ enthält (und als Vektorraum) über $\mathbb{R}$ von endlicher Dimension ist), ist isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ (Einzigkeitssatz).

Es ist nicht möglich, im Körper $\mathbb{C}$ eine Ordnungsrelation so einzuführen, dass die Axiome der Anordnung und das Archimedische Axiom erfüllt sind. Trotzdem ist es üblich, für die Elemente von $\mathbb{C}$ den Begriff "Zahl" zu verwenden. Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen komplexe Zahlen.

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen. Man kann nun fragen, ob es möglich sei, auf ähnliche Art und Weise über die komplexen Zahlen hinaus fortzuschreiten. Ist es möglich, an das Rechnen mit Paaren reeller Zahlen ein Rechnen mit Paaren komplexer Zahlen oder mit Tripeln, Quadrupeln usw. reeller Zahlen anzuschließen und damit wiederum "höhere Zahlen" zu definieren?
Man kann beweisen, dass das nur möglich ist, wenn man auf die Kommutativität der Multiplikation verzichtet.[44]

Dies bedeutet jedoch ein weiteres Entfernen vom vorgestellten Zahlbegriff. In diesem Sinne gibt es keine "höheren Zahlen" über die komplexen Zahlen hinaus.[45]
Zur Abrundung des Bildes über Zahlen sei folgendes ergänzt:

1. Die Nullstellen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten heißen algebraische Zahlen. (Nichtalgebraische Zahlen heißen transzendent.) Die Menge $\mathbb{H}$ aller algebraischen Zahlen ist ein Körper, der den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen enthält. Die Teilkörper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C} \supset \mathbb{H} \supset \mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$),die als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ von endlicher Dimension sind, heißen algebraische Zahlkörper. Sie werden in der algebraischen Zahlentheorie studiert.[46]

2. Die rationalen Zahlen lassen sich nicht nur durch die reellen Zahlen vervollständigen. Man kann sie auch nichtarchimedisch anordnen ("$>_p$"für eine Primzahl p: Für alle n gilt $na <_p a$). Als Vervollständigung erhält man die sogenannten p-adischen Zahlen.
Diese bilden einen nicht-archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{Q}_p$.[47] Die Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$ werden in der algebraischen Zahlentheorie studiert.

Aufgaben

4.1. Man beweise das kommutative Gesetz der Addition aus den Hilbertschen Axiomen I, II 1,4,5.

4.2. Man beweise das kommutative Gesetz der Multiplikation aus den Hilbertschen Axiomen I, III, II 1-5, IV 1.

[44] Durch Quadrupel (an Stelle von Zahlenpaaren) reeller Zahlen gewinnt man (mit geeigneten Verknüpfungen) -die sogenannten Quaternionen, deren Multiplikation nicht kommutativ ist.

[45] Vgl. H. Kneser, Die komplexen Zahlen und ihre Verallgemeinerungen. Math. phys. Semesterber. 1 (1949), 256-267.

[46] Vgl. H. Koch und H. Pieper, Zahlentheorie (Berlin 1976).

[47] Vgl. H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen (Berlin 1974; 2. Aufl.).

5 Rechnen mit komplexen Zahlen

Jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ lässt sich in zwei Formen darstellen; in der Normalform $\alpha = a + bi$ (a, b reell) und in der trigonometrischen Form $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r \geq 0$ reell, $0 < \varphi < 2\pi$). Dabei gilt $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (falls $a \neq 0$), $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ (falls $r > 0$).

Man bezeichnet $\varphi = \arg\alpha$ als Argument von α, $r = |\alpha|$ als Betrag von α, $a = r\cos\varphi$ als den reellen Teil (Realteil) von α ($a = \mathrm{Re}(\alpha)$) und $b = r\sin\varphi$ als den imaginären Teil (Imaginärteil) von α ($b = \mathrm{Im}(\alpha)$; vgl. Abb. 5.1).

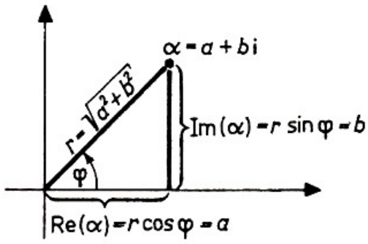


Abb. 5.1

Die Zahl $\overline{\alpha} = a - bi = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ heißt die zu α konjugierte Zahl. Die α und $\overline{\alpha}$ zugeordneten Punkte der Ebene liegen spiegelbildlich zur reellen Achse (Abszissenachse). Auf der reellen Achse liegen die Punkte α mit $\alpha = \overline{\alpha}$, d.h. $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$ (und damit die Realteile komplexer Zahlen), und nur diese.
Die $-\alpha$ und $\overline{\alpha}$ zugeordneten Punkte der Ebene liegen spiegelbildlich zur imaginären Achse (Ordinatenachse). Auf der imaginären Achse liegen die Punkte α mit $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ (und damit die Imaginärteile komplexer Zahlen) und nur diese (vgl. Abb. 5.2).

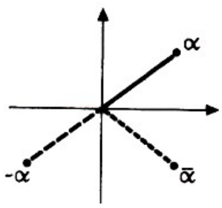


Abb. 5.2

Das Argument komplexer Zahlen besitzt folgende Eigenschaften[48][49].

$$\arg\overline{\alpha} \equiv -\arg\alpha(2\pi) \tag{5.1}$$

$$\arg(\alpha\beta) \equiv \arg\alpha + \arg\beta(2\pi) \tag{5.2}$$

$$\text{für } \beta \neq 0 : \arg\frac{\alpha}{\beta} \equiv \arg\alpha - \arg\beta(2\pi) \tag{5.3}$$

Für den Übergang zur konjugiert-komplexen Zahl gilt (5.1) und

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha \tag{5.4}$$

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

$$\overline{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \tag{5.5}$$

[48] Für Winkel φ, ψ bedeutet $\varphi \equiv \psi(2\pi)$, dass sich φ und ψ höchstens um Vielfache von 2π unterscheiden, also $\varphi = \psi + k \cdot 2\pi$ (k ganzzahlig, z. B. auch $k = 0$).

[49] Nach (2.19) und (2.21). Beachte auch die dort beschriebene geometrische Deutung von $\alpha\beta$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$)

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2\operatorname{Re}\alpha, \quad \alpha - \overline{\alpha} = 2\operatorname{Im}\alpha i \tag{5.6}$$
$$\text{für } \alpha = a + bi : \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2 = |\overline{\alpha}|^2$$
$$|\alpha| = |\overline{\alpha}| \tag{5.7}$$

Die reelle Zahl $\alpha\overline{\alpha}$ gibt somit das Quadrat des Abstandes des Punktes α vom Nullpunkt an. Es ist $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$ also der Betrag von α.
Die wichtigsten Eigenschaften des Betrages sind

$$|\alpha| > 0, \text{ falls } \alpha \neq 0 \tag{5.8}$$
$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \quad \text{und} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \tag{5.9}$$
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad \text{Dreiecksungleichung} \tag{5.10}$$

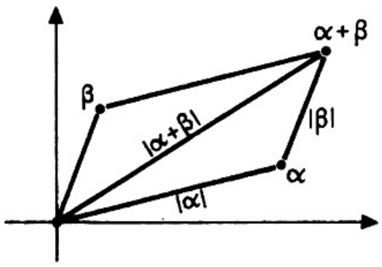


Abb. 5.3

Aus der geometrischen Deutung der Summe zweier komplexer Zahlen (vgl. Kap. 2) ist der Grund für die Benennung "Dreiecksungleichung" ersichtlich (vgl. Abb. 5.3).
Die Ungleichung ergibt sich so: Es ist

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha\overline{\beta}} + \beta\overline{\beta}$$

(nach (5.7), (5.5), (5.4)), also (nach (5.7), (5.6))

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha\overline{\beta} + |\beta|^2 \tag{5.11}$$

Hieraus folgt[50]

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\overline{\beta}| + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

und damit (wegen (5.8)) die Dreiecksungleichung.[51]

Ist $\arg\alpha = \varphi$, $\arg\beta = \psi$, $|\alpha| = r$, $|\beta| = s$, $|\alpha + \beta| = t$, so sind r und s die Katheten und t die Hypotenuse eines Dreiecks, und (5.11) kann in der Form

$$t^2 = r^2 + s^2 + 2rs\cos(\varphi - \psi) = r^2 + s^2 + 2rs\cos(\psi - \varphi)$$

also (Verallgemeinerter Satz von Pythagoras)

$$t^2 = r^2 + s^2 + 2rs\cos(\pi - (\psi - \varphi)) \tag{5.12}$$

geschrieben werden: In einem Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten vermindert um das doppelte Produkt aus den (Längen der) Katheten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (vgl. Abb. 5.4).

[50] Es ist stets $Re2\gamma \leq |\gamma|$.
[51] Siehe auch Aufgaben 5.4 und 5.5.

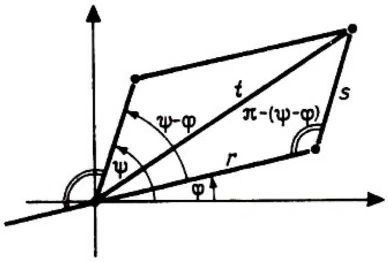


Abb. 5.4

Die Dreiecksungleichung besagt auch, dass für vier reelle Zahlen a, b, c, d stets

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \tag{5.13}$$

gilt.
Der Betrag einer Zahl α gibt ihren Abstand vom Nullpunkt an. Ersichtlich gibt allgemeiner der Betrag $|\alpha-\beta|$ der Differenz zweier Zahlen α, β ihren Abstand in der Zahlenebene an (vgl. Abb. 5.5).

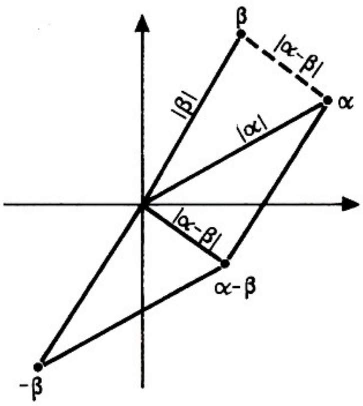


Abb. 5.5

Eine Zahl α mit $|\alpha|=1$ hat den Abstand 1 vom Nullpunkt, liegt also auf dem Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt, dem sogenannten Einheitskreis. Umgekehrt gilt für jeden Punkt z auf dem Einheitskreis $|z|=1$. Die Gleichung

$$|z|=1 \tag{5.14}$$

(nämlich $\sqrt{x^2+y^2}=1$, d.h. $x^2+y^2=1$ für $z=x+iy$) ist somit die Gleichung des Einheitskreises (der geometrische Ort aller Punkte z der Ebene mit $|z|=1$) (vgl. Abb. 5.6). Abb. 5.6

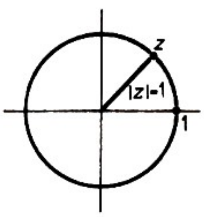


Abb. 5.6 Der Einheitskreis $|z|=1$

Die Ungleichung $|z| \leq 1$ gilt für alle und nur die Zahlen, die auf dem Einheitskreis und im Innern des Einheitskreises liegen.
Ist α irgendeine komplexe Zahl, so ist

$$|z-\alpha|=1 \tag{5.15}$$

die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 um den Punkt α. Es gilt nämlich dann und nur dann $|z-\alpha|=1$, wenn z von α den Abstand 1 hat.
Ist allgemeiner r eine positive reelle Zahl, so ist der geometrische Ort aller Punkte z mit

$$|z-\alpha|=r \tag{5.16}$$

der Kreis mit dem Radius r um den Punkt α (vgl. Abb. 5.7). (Alle Punkte dieses Kreises und nur diese haben von α den Abstand r.)

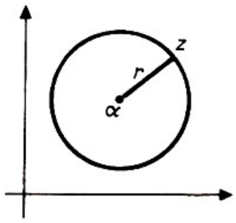


Abb. 5.7 Der Kreis $|z-\alpha|=r$

Die Ungleichung $|z-\alpha|<r$ gilt für alle Punkte z im Innern dieses Kreises.
Ist α eine beliebige komplexe Zahl, so bezeichnet man ein Produkt aus n Faktoren, die alle gleich α sind, mit α^n (n eine natürliche Zahl): $\alpha^n=\alpha\alpha^{n-1}$.
Für $\alpha\neq 0$ wird ferner vereinbart, dass $\alpha^0=1$ und $\alpha^{-n}=\frac{1}{\alpha^n}$. Die Potenz α^m ist somit für jeden ganzzahligen Exponenten m erklärt, und es gelten die üblichen Rechenregeln:

$$\alpha^{-n}=(a^{-1})^n=(\alpha^n)^{-1}, \quad (\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=\frac{\alpha^n}{\beta^n},$$
$$\alpha^{n+m}=\alpha^n\alpha^m, \quad \alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\alpha^m}, \quad \alpha^{nm}=(\alpha^n)^m$$

Für die Potenzen von i gilt

$$i^0=1, \quad i^1=i, \quad i^2=-1, \quad i^3=-i \tag{5.17}$$

ferner

$$i^4=1, \quad i^5=i, \quad i^6=-1, \quad i^7=-i \quad \text{usw.}$$
$$i^{-1}=i^3=-i, \quad i^{-2}=i^2=-1, \quad i^{-3}=i, \quad i^{-4}=i^0=1$$

usw. Ist m eine ganze Zahl und $m=4q+r$ mit $r=0,1,2$ oder 3 und ganzem q, so ist

$$i^m=i^{4q+r}=(i^4)^q i^r=i^r$$

Auch für komplexe Zahlen gilt der binomische Satz ($n\in\mathbb{N},\alpha,\beta\in\mathbb{C}$)

$$(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k=\alpha^n+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+...+\beta^n \tag{5.18}$$

So ist

$$(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3a(bi)^2+(bi)^3=a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3)$$

Der Betrag dieser Zahl ist

$$\sqrt{(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)^2}=\sqrt{a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6}=\sqrt{(a^2+b^2)^3}$$

was natürlich auch aus der Multiplikativität (5.9) des Betrages folgt:

$$|(a+bi)^3| = |a+bi|^3 = (\sqrt{a^2+b^2})^3$$

Für das Argument ψ der komplexen Zahl $(a+bi)^3$ gilt

$$\begin{aligned}
\cos\psi = \frac{a^3-3ab^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^3 - 3\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^3 - 3\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(1-\frac{a^2}{(\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\Big) \\
&= 4\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^3 - 3\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi
\end{aligned}$$

wobei φ das Argument von $a+bi$ ist.

Dies folgt auch so: Ist $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist einerseits

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3 = r^3[\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)]$$

andererseits $(a+bi)^3 = r^3(\cos\psi + i\sin\psi)$, also

$$\cos\psi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Da sich bei der Multiplikation die Argumente addieren, ist $\arg(a+bi)^3 = 3\arg(a+bi)$, d.h. $\psi \equiv 3\varphi(2\pi)$, d.h. $cos\psi = \cos 3\varphi$. Es folgt

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \tag{5.19}$$

Ähnlich zeigt man

$$\sin 3\varphi = \frac{3a^2b-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \tag{5.20}$$

Es ist nicht schwer, allgemein die Potenz α^n einer komplexen Zahl α zu berechnen, wenn sie in der trigonometrischen Form $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gegeben ist. Es ist

$$\alpha^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \qquad , \qquad \alpha^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

Ist schon $\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ bewiesen, so folgt

$$\begin{aligned}
\alpha^{k+1} &= \alpha\alpha^k = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \\
&= r^{k+1}(\cos(\varphi+k\varphi) + i\sin(\varphi+k\varphi)) = r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi)
\end{aligned}$$

Damit ist für $n \geq 1$ induktiv

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{5.21}$$

bewiesen. (5.21) gilt offenbar auch für $n = 0$; aber auch für negative ganze Zahlen: Wegen

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{\alpha^n} = r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))$$

Somit gilt für alle ganzen Zahlen m

$$|\alpha^m| = |\alpha|^m, \qquad \arg\alpha^m \equiv m\arg\alpha(2\pi) \tag{5.22}$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi \qquad \text{(Formel von Moivre, 5.23)}$$

Berechnet man $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$ für natürliche Exponenten n einerseits nach dem binomischem Satz,

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi \\ - i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + ...\end{aligned}$$

und andererseits nach der Formel von Moivre, so erhält man durch Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile Beziehungen der Form[52]

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - +... \tag{5.24}$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi - +... \tag{5.25}$$

Will man die Summen

$$\begin{aligned}\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + ... + \cos n\varphi \\ \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + ... + \sin n\varphi\end{aligned}$$

berechnen, so betrachtet man besser die Summe

$$\begin{aligned}S &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + ... + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n\end{aligned}$$

Wir setzen $\cos\varphi + i\sin\varphi = q$. Dann wird (als endliche geometrische Zahlenfolge)

$$\begin{aligned}S + 1 = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{qn+1-1}{q-1} = \frac{\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi - 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi - 1} \\ = \frac{(\cos(n+1)\varphi - 1) + i\sin(n+1)\varphi}{(\cos\varphi - 1) + i\sin\varphi}\end{aligned}$$

Unter Benutzung von $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, also (setze $\alpha = \frac{\psi}{a}$)

$$\cos\psi - 1 = -2\sin^2\frac{\psi}{2}$$

und $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, also (setze $\alpha = \frac{\psi}{2}$)

$$\sin\psi = 2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}$$

folgt

$$S + 1 = \frac{-2\sin^2\frac{n+1}{2}\varphi + 2i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\left[\cos\frac{n+1}{2}\varphi + i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right]}{2i\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right]}$$

[52]Siehe auch Aufgaben 5.17, 5.18 und 5.19

Durch Erweitern mit $\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$ ergibt sich

$$S + 1 = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}\varphi + i\sin\frac{n}{2}\varphi\right)$$

Somit gilt $(\mathrm{Re}(S) =)$

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - 1 \tag{5.26}$$

und $(\mathrm{Im}(S) =)$[53]

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + ... + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - 1 \tag{5.26}$$

Aufgaben

5.1. Man beweise $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$

5.2. Man beweise $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$ ohne Benutzung der trigonometrischen Darstellung.

5.3. Man beweise $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ohne Benutzung der trigonometrischen Darstellung.

5.4. Wann gilt in der Dreiecksungleichung das Gleichheitszeichen?

5.5. Man beweise $||\alpha| + |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

5.6. Man bestimme Beträge und Argumente der komplexen Zahlen i, $-i$, $1-i$, $-1-i$, $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-1$, $\frac{1+2i}{2+i}$, $(1+2i)(2+i)$.

5.7. Für welche komplexen Zahlen ist $|z| = 4$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$; $|z| = 5, \arg z = \pi$; $|z| = 3, \arg z = \frac{4\pi}{3}$?

5.8. Für welche komplexen Zahlen gilt a) $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, b) $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$, c) $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 0$, d) $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, e) $\mathrm{Im}\,\alpha > 0$, f) $\mathrm{Im}\,\alpha \leq 0$(geometrische Deutung)?

5.9. Man beweise: Es ist stets $-|\alpha| \leq \mathrm{Re}\,\alpha \leq |\alpha|$, $-|\alpha| \leq \mathrm{Im}\,\alpha \leq |\alpha|$.

5.10. Man deute die folgenden Ungleichungen geometrisch: a) $|\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$, b) $|\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$.

5.11. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte z mit $\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = u$ ($\alpha \neq \beta$ komplex, $u > 0$ reell).

5.12. Man berechne $(\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta})$ mit $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ auf zwei Arten.

5.13. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte z mit $|z-2| > |2z-1|$.

5.14. Man berechne a) i^{-333}, b) i^{-903}

5.15. Man berechne $(1+i)^{100}$.

5.16. Man berechne $\dfrac{\left(\frac{3-i}{1+3i}\right)^{101} - 63i}{[2\sqrt{2}(-1+i)]^5\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{30}} \cdot 16i$

[53]Siehe auch Aufgabe 5.20.

5.17. Man beweise:
$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi$;
$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$

5.18. Man drücke $\cos 5\varphi$ durch $\cos\varphi$ aus.

5.19. Man drücke $\tan 6\varphi$ durch $\tan\varphi$ aus.

5.20. Man berechne $\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + ... + \sin^2 n\varphi$ und $\cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + ... + \cos^2 n\varphi$.

6 Komplexe Zahlen als Vektoren der Ebene

Im 2. Kapitel haben wir die komplexen Zahlen (als Zahlenpaare) auf natürliche Weise umkehrbar eindeutig den Punkten der Ebene zugeordnet. Man kann aber geordnete Zahlenpaare und damit komplexe Zahlen auch als Vektoren der Ebene deuten.

Zwei Punkte A und B auf einer Geraden legen eine Strecke $\overline{AB}$ fest. Für eine gerichtete Strecke schreibt man $\overrightarrow{AB}$ (der Richtungspfeil ist von A nach B gerichtet). Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \tag{6.1}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \tag{6.2}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0 \tag{6.3}$$

Bezüglich eines ausgezeichneten Punktes O (etwa des Nullpunktes) gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}\overrightarrow{OB}$, also

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \tag{6.4}$$

Zwei gerichtete Strecken (Pfeile) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen äquivalent, wenn sie durch eine Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können. Zwei gerichtete Strecken sind also äquivalent, wenn sie auf derselben oder auf parallelen Geraden liegen, in die gleiche Richtung weisen und gleich lang sind.

Die Äquivalenzklassen einander äquivalenter gerichteter Strecken heißen Vektoren. Gerichtete Strecken, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben, sich also höchstens durch die Lage ihrer Anfangspunkte unterscheiden, repräsentieren denselben Vektor.

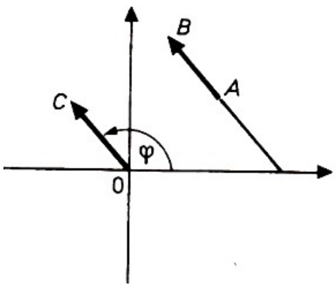


Abb. 6.1

So repräsentieren in Abb. 6.1 die A und B verbindende gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ und die dazu parallele und gleichlange Strecke $\overrightarrow{OC}$ denselben Vektor.

Einen Vektor $\mathfrak{a}$ veranschaulichen wir in der Ebene durch einen Repräsentanten, also durch eine gerichtete Strecke (Pfeil). Man pflegt gelegentlich auch von jeder einzelnen gerichteten Strecke zu sagen, sie sei ein Vektor. Die Bezeichnung $\mathfrak{a}$ steht möglichst in der Mitte des bezeichneten Vektors (vgl. Abb. 6.2).

Abb. 6.2

Ist $\mathfrak{a}$ irgendein Vektor und die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\mathfrak{a}$, so wird die Länge $|\mathfrak{a}|$ von $\mathfrak{a}$ definiert durch die Länge $|AB|$ der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$: $|\mathfrak{a}| = |AB|$.
Da jeder Repräsentant von $\mathfrak{a}$ dieselbe Länge hat, ist die Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Als Richtungswinkel einer in der, $x - y$-Ebene mit dem Koordinatenursprung O gelegenen gerichteten Strecke $\overrightarrow{OC}$ bezeichnet man den Winkel zwischen der positiven reellen Achse als erstem und der Strecke OC als zweitem Schenkel. Um diesen Winkel muss die positive reelle Achse im positiven Sinne gedreht werden, bis die Richtungen der positiven reellen Achse und der Strecke OC übereinstimmen.

Unter dem Richtungswinkel φ einer beliebigen gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$ soll dann der Richtungswinkel einer parallelen, gleichgerichteten und durch O gehenden gerichteten Strecke $\overrightarrow{OC}$ verstanden werden (vgl. Abb. 6.3).

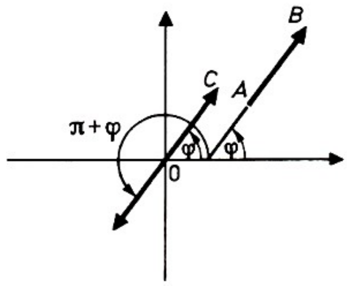


Abb. 6.3

Wir bezeichnen diesen Richtungswinkel mit $\varphi = (x, AB)$ (Winkel zwischen der positiven x-Achse und $\overrightarrow{AB}$).

Ist $\mathfrak{a}$ irgendein Vektor und die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\mathfrak{a}$, so wird der Richtungswinkel $(x, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ definiert durch den Richtungswinkel (x, AB) der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$: $(x, \mathfrak{a}) = (x, AB)$. Da parallele und gleichgerichtete Strecken den gleichen Richtungswinkel haben, ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Hat die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ den Richtungswinkel φ, so hat $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ den Richtungswinkel $\pi + \varphi$ (vgl. Abb. 6.3).

Hat der Punkt B in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O die Koordinaten (b_1, b_2), der Punkt A die Koordinaten (a_1, a_2), so heißen $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ die Koordinaten der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$.
Gleichlange, parallele und gleichgerichtete Strecken haben in demselben Koordinatensystem offenbar dieselben Koordinaten. Die Koordinaten einer Strecke hängen somit nur von der Länge und der Richtung der Strecke, nicht aber von der Lage des Anfangspunktes ab. Alle gerichteten Strecken, die ein und denselben Vektor repräsentieren, besitzen also dieselben Koordinaten.

Jeder Vektor $\mathfrak{a}$ ist damit eindeutig durch diese Koordinaten, also durch geordnete Paare (a_1, a_2) reeller Zahlen festgelegt. Wir schreiben: $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)$.

Die Deutung der Zahlenpaare als Vektoren der Ebene ist zugleich auch eine geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen durch Vektoren. Jeder Vektor in der Ebene veranschaulicht eine komplexe Zahl, nämlich die Zahl, deren Betrag gleich der Länge des Vektors ist und deren Argument gleich seinem Richtungswinkel ist.
Der eindeutig bestimmte die komplexe Zahl α veranschaulichende Vektor werde mit $\mathfrak{a}_\alpha$ bezeichnet.

Der Vektor $\mathfrak{a} = (a_1,a_2)$ mit der Länge $|\mathfrak{a}| = r$ und dem Richtungswinkel$(x, \mathfrak{a}) = \varphi$ veranschaulicht die komplexe Zahl $\alpha = a_1 + ia_2 = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.
Ist $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\mathfrak{a}_\alpha$, so ist natürlich r die Länge der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$ und φ ihr Richtungswinkel. Die Summe zweier Vektoren, etwa $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ sei der Vektor, der die

Summe $\alpha + \beta$ der zugeordneten komplexen Zahlen α, β veranschaulicht:

$$\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_{\alpha+\beta} \tag{6.5}$$

Wählt man zu $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ die Repräsentanten $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ so, dass $B = C$ ist, dann ist $\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{a}_\beta$, der durch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ repräsentierte Vektor (vgl. Abb. 6.4 und 6.5).

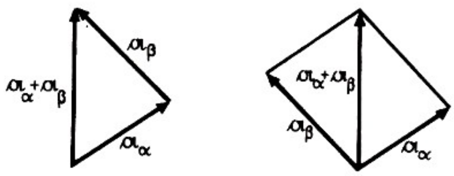


Abb. 6.4,6.5

Ist $\mathfrak{a}_\alpha = (a_1,a_2)$, $\mathfrak{a}_\beta = (b_1, b_2)$, so ist die Summe bzw. Differenz (Abb. 6.6)

$$\mathfrak{a}_{\alpha\pm\beta} = \mathfrak{a}_\alpha \pm \mathfrak{a}_\beta$$

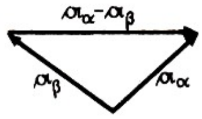


Abb. 6.6

Offenbar ist $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{o}$ der Nullvektor (der Länge 0) genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist.
Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl wird durch

$$r\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_{r\alpha} \tag{6.6}$$

erklärt. Ist $\mathfrak{a}_\alpha = (a_1,a_2)$, so $r\mathfrak{a} = (ra_1,ra_2)$. $r\mathfrak{a}_\alpha$, ist ein Vektor von der r-fachen Länge von $\mathfrak{a}_\alpha$, jedoch von der gleichen Richtung. Die komplexen Zahlen $r\alpha$ und α werden also durch parallele Vektoren, deren Längen sich wie $r : 1$ verhalten, veranschaulicht.

Die Gesamtheit der Vektoren der Ebene (also die Menge aller komplexen Zahlen) bildet vermittelst der Definitionen (6.5) und (6.6) einen Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper der reellen Zahlen, erzeugt durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1 = (1, 0)$ und $\mathfrak{a}_2 = (0, 1)$.

Sind $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ Repräsentanten der Vektoren $\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta, \mathfrak{a}_\gamma$, so gilt wegen $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = 0$ auch $\mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{a}_\beta + \mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{o}$, d.h. $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
Sind r, s, t die Längen von $\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta, \mathfrak{a}_\gamma$ und φ, χ, ψ ihre Richtungswinkel (vgl. Abb. 6.7), so sind also (Trennung von Real- und Imaginärteil!) die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$r\cos\varphi + s\cos\chi + t\cos\psi = 0 \quad , \quad r\sin\varphi + s\sin\chi + t\sin\psi = 0 \tag{6.7}$$

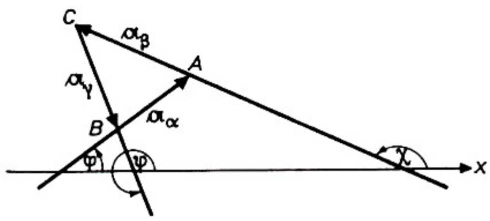


Abb. 6.7

Entsteht eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{AC}$ der Länge r und des Richtungswinkels χ durch Drehung um den Winkel ψ um A aus einer gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$ der Länge r und des Richtungswinkels φ, so ist $\chi = \psi + \varphi$ (Abb. 6.8).

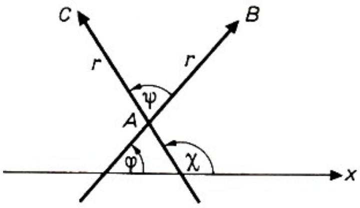


Abb. 6.8

Repräsentiert $\overrightarrow{AB}$ den Vektor $\mathfrak{a}_\alpha$ mit $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so repräsentiert $\overrightarrow{AC}$ den Vektor $\mathfrak{a}_{\alpha\gamma}$ mit $\gamma = \cos\psi + i\sin\psi$; denn es ist

$$\alpha\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = r(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) = r(\cos\chi + i\sin\chi)$$

Die Multiplikation der komplexen Zahlen bedeutet eine Multiplikation der Beträge und eine Addition der Argumente. Diese Multiplikation ermöglicht nun eine ebenfalls kommutative Multiplikation der ebenen Vektoren.

Das Produkt zweier Vektoren, etwa $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ sei der Vektor, der das Produkt $\alpha\beta$ der zugeordneten komplexen Zahlen α, β veranschaulicht:

$$\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_{\alpha\beta} \tag{6.8}$$

Die Länge des Produktes zweier Vektoren ist dann gleich dem Produkt der Längen der Faktoren, und der Richtungswinkel des Produktes zweier Vektoren ist gleich der Summe der Richtungswinkel der Faktoren.
Ist $\mathfrak{a}_\alpha = (a_1,a_2)$, $\mathfrak{a}_\beta = (b_1, b_2)$, so ist

$$\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b1)$$

Ist $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = s(\cos\chi + i\sin\chi)$, so gilt

$$\alpha\beta = rs\cos(\varphi+\chi) + i\sin(\varphi+\chi))$$

Ist die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OA}$ ein Repräsentant des Vektors $\mathfrak{a}_\alpha$ dessen Länge r und dessen Richtungswinkel φ ist, so kann man einen Repräsentanten $\overrightarrow{OC}$ des Vektors $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$, dadurch erhalten, dass man $\overrightarrow{OA}$ um den Winkel χ um den Ursprung O dreht und dann im Verhältnis $s:1$ streckt.
Ist $\overrightarrow{OB}$ ein Repräsentant von β (Länge s, Richtungswinkel χ), so sind die Dreiecke OAC und $O1B$ ähnlich (vgl. die Vorschrift zur Konstruktion des Produkts zweier komplexer Zahlen) (Abb. 6.9).

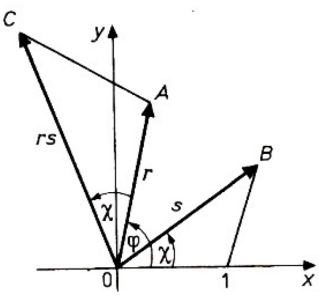


Abb. 6.9

Die Rechengesetze komplexer Zahlen übertragen sich auf das Rechnen: (Addieren, Multiplizieren und damit auch Subtrahieren und Dividieren) mit Vektoren (bzw. gerichteten Strecken).

Die Menge aller Vektoren bildet bei der angegebenen Definition der Summe und des Produkts einen Körper (der zum Körper der komplexen Zahlen isomorph ist).

Man kann die Addition und die Multiplikation von Vektoren natürlich auch unabhängig von den komplexen Zahlen in geeigneter Weise definieren und dann die Körpereigenschaft für die Menge aller ebenen Vektoren bei der angegebenen Definition der Summe und des Produkts nachweisen. So erhielte man wieder einen Körper, der zum Körper der komplexen Zahlen isomorph wäre (vgl. Aufgabe 6.1).

Man könnte die komplexen Zahlen auch auf diese Weise durch "geometrische Größen", nämlich durch Vektoren der Ebene, einführen.[54]
Eine solche Theorie der komplexen Zahlen trug zuerst Caspar Wessel vor.

Die folgenden Verabredungen dienen der Vereinfachung der Schreib- und Sprechweise: Veranschaulicht der Vektor $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\alpha = (a_1,a_2)$ der Länge r und des Richtungswinkels φ die komplexe Zahl α, so bezeichnen wir ihn auch durch diese Zahl,

$$\mathfrak{a}_\alpha = \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a_1 + a_2 i$$

Ist die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant des Vektors $\mathfrak{a}_\alpha$, so werden wir auch diese gerichtete Strecke durch die dem Vektor $\mathfrak{a}_\alpha$ zugeordnete komplexe Zahl bezeichnen,

$$\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a_1 + a_2 i$$

Schon im 2. Kapitel hatten wir nicht zwischen einem Punkt A und dem zugeordneten Koordinatenpaar unterschieden und später auch nicht zwischen A und der durch A veranschaulichten komplexen Zahl. Verwechslungen bzw. Verwirrungen dürften, sofern man den bisherigen Inhalt dieses Kapitels verstanden hat, nicht entstehen.

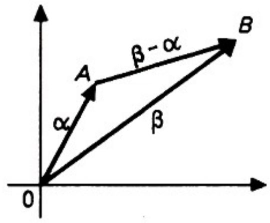


Abb. 6.10

Entsprechen den Punkten A bzw. B die komplexen Zahlen α bzw. β (wir schreiben $A = \alpha$, $B = \beta$), so veranschaulichen die gerichteten Strecken $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$ die Vektoren $\mathfrak{a}_\alpha$, bzw. $\mathfrak{a}_\beta$, (wir schreiben $\overrightarrow{OA} = \alpha$, $\overrightarrow{OB} = \beta$). Dann veranschaulicht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ den Vektor $\mathfrak{a}_\gamma$, mit $\gamma = \beta - \alpha$ (wir schreiben $\overrightarrow{AB} = \beta - \alpha$) (vgl. Abb. 6.10).

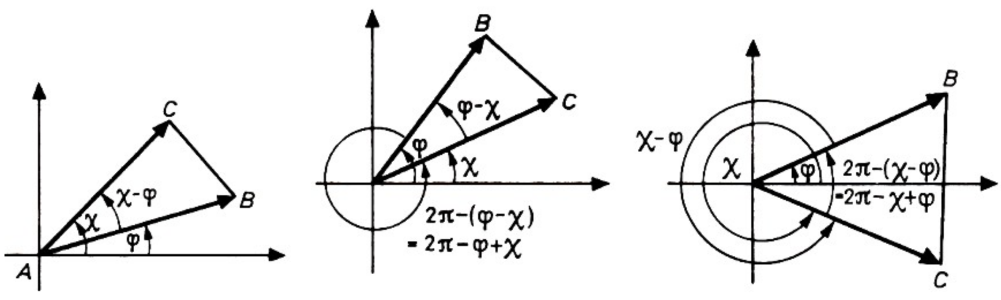


Abb. 6.11, 6.12, 6.13

[54]Vgl. A. I. Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (4. Aufl. Berlin 1973).

Entspricht überdies dem Punkt C die komplexe Zahl γ, so ist $\overrightarrow{AC} = \gamma - \alpha$. Ist φ der Richtungswinkel von $\overrightarrow{AB}$ und χ der Richtungswinkel von $\overrightarrow{AC}$, so lässt sich der Winkel BAC bei A zwischen den Schenkeln AB und AC (in positiver Richtung) aus φ und χ berechnen (vgl. Abbildungen 6.11, 6.12, 6.13, dort liege A im Koordinatensprung).

Daraus ergibt sich auch der Innenwinkel bei A des Dreiecks ABC. Ein ebenes Viereck $ABCD$ (Abb. 6.14)[55] lässt sich durch komplexe Zahlen bzw. Vektoren (Beträge und Argumente, Längen und Richtungswinkel) beschreiben.

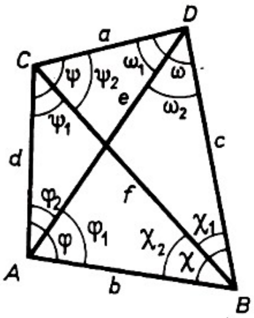


Abb. 6.14

Es mögen den Eckpunkten A, B, C bzw. D die komplexen Zahlen α, β, γ bzw. δ entsprechen. Dann gilt für die gerichteten Strecken der Seiten bzw. der Diagonalen des Vierecks $\overrightarrow{AB} = \beta - \alpha$, $\overrightarrow{BC} = \gamma - \beta$, $\overrightarrow{CD} = \alpha - \gamma$, $\overrightarrow{BD} = \delta - \beta$ (vgl. Abb. 6.15), und die Innenwinkel des Vierecks lassen sich durch die Richtungswinkel dieser gerichteten Strecken ausdrücken.

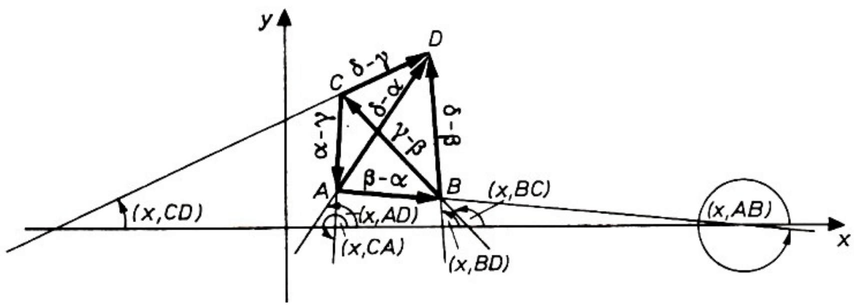


Abb. 6.15

Nun werde aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein Dreieck mit den Eckpunkten F, G, H auf symmetrische Art wie folgt gebildet (vgl. Abb. 6.16):

$$H = \alpha\beta + \delta\gamma = \kappa, \quad G = \alpha\gamma + \delta\beta = \lambda, \quad F = \alpha\delta + \beta\gamma = \mu \tag{6.9}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GH} &= \kappa - \lambda = \delta(\gamma - \beta) + \alpha(\beta - \gamma) \\
\overrightarrow{HF} &= \mu - \kappa = \delta(\alpha - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) \\
\overrightarrow{FG} &= \lambda - \mu = \beta(\delta - \gamma) + \alpha(\gamma - \delta)
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GH} &= (\delta - \alpha)(\gamma - \beta) = \overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{HF} &= (\delta - \beta)(\alpha - \gamma) = \overrightarrow{BD}\overrightarrow{CA} \\
\overrightarrow{FG} &= (\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

[55] Diese Vierecksbetrachtung stammt aus der Vorlesung über "imaginäre Größen", die C. F. Gauß von Neujahr bis Ostern 1840 in Göttingen gehalten hat (Gauss-Werke VII, S. 331-334). Ähnliche Betrachtungen trug am 16. Oktober 1852 A. F. Möbius in der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vor. Siehe Berichte über die Verhandlungen dieser Gesellschaft, math.-phys. Klasse Jg. 1852, S. 41-54.

Beispiele.
(1) Sind $\alpha = 2+i$, $\beta = 3$, $\gamma = 1+2i$, $\delta = 1+3i$, so $\kappa = 1+8i$, $\lambda = 3+14i$, $\mu = 2+13i$.
(2) Aus $\alpha = 1+4i$, $\beta = 11+3i$, $\gamma = 2+12i$, $\delta = 8+17i$ folgt $H = \kappa = -189+177i$, $G = \lambda = -9+231i$, $F = \mu = -74+187i$.

Da $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG} = 0$, gilt für das Viereck übrigens die Identität

$$\overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD} = 0 \tag{6.11}$$

Nun ist

$$\overrightarrow{AD} = \delta - \alpha = |AD|(\cos(x,AD) + i\sin(x,AD))$$
$$\overrightarrow{BC} = \gamma - \beta = |BC|(\cos(x,BC) + i\sin(x,BC))$$

Aus $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC}$ folgt

$$|GH| = |AD||BC| \qquad \text{und} \qquad (x,GH) = (x,AD) + (x,BC) \tag{6.12, 6.13}$$

Analog gilt

$$|AF| = |BD||CA| \qquad , \qquad (x,HF) = (x,BD) + (x,CA) \tag{6.14,6.15}$$

und

$$|FG| = |AB||CD| \qquad , \qquad (x,FG) = (x,AB)(x,CD) \tag{6.16,6.17}$$

Aus (6.17) und (6.15) (6.17) folgt

$$(xFG) - (x,HF) = (x,CD) + (x,AB) - (x,BD) - (x,CA) \tag{6.18}$$

Es bezeichne nun allgemein (PQ,RS) den Winkel, um welchen $\overrightarrow{PQ}$ im positiven Sinne gedreht werden muss, bis die Richtung von $\overrightarrow{PQ}$ mit der von $\overrightarrow{RS}$ übereinstimmt. Speziell ist $(PO,PR) = \angle QPR$.

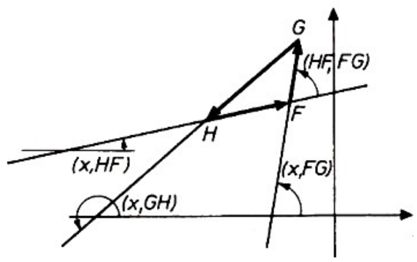


Abb. 6.16

Offenbar gilt dann (vgl. Abb. 6.16)

$$(x,FG) - (x,HF) = (HF,FG) = \pi + (FH,FG) = \pi + \angle HFG$$

Ferner ist

$$(x,CD) - (x,BD) = (BD,CD) = \pi + (DB,CD) = 2\pi + (DB,DC) = \angle BDC$$
$$(x,AB) - (x,CA) = (CA,AB) = \pi + (AC,AB) = \pi + \angle CAB$$

Hieraus und aus (6.18) folgt

$$\angle HFG = \angle BDC + \angle CAB \tag{6.19}$$

Da $(x, CD) - (x, CA) = \angle ACD$ und $(x, AB) - (x, BD) = \angle DBA$, gilt nach (6.18) natürlich auch

$$\angle HFG = \angle ACD + \angle DBA \tag{6.20}$$

Aus (6.17) und (6.13) folgt

$$(x, GM) - (x, FG) = (x, AD) + (x, BC) - (x, AB) - (x, CD)$$

Analog wie eben ergibt sich

$$\angle FGH = \angle CDA + \angle ABC = \angle BAD + \angle DCB \tag{6.21}$$

Endlich folgt aus (6.13) und (6.15)

$$(x, HF) - (x, GH) = (x, BD) + (x, CA) - (x, AD) - (x, BC)$$

woraus sich

$$\angle GHF = \angle ADB + \angle BCA = \angle CBD + \angle DAC \tag{6.22}$$

ergibt.

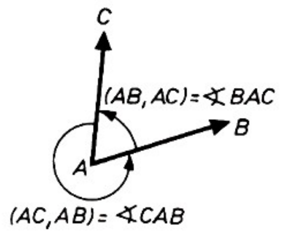


Abb. 6.17

Beachtet man, dass $\angle CAB + \angle BAC = 2\pi = 0$ (Abb. 6.17) und dass ähnliche Beziehungen auch zwischen den anderen Winkeln bestehen, so folgt aus (6.19) und (6.20), (6.21), (6.22):

$$\begin{aligned} \angle HFG &= \angle BDC - \angle BAC = \angle DBA - \angle DCA \\ \angle FGH &= \angle CDA - \angle CBA = \angle DCB - \angle DAB \\ \angle GHF &= \angle ADB - \angle ACB = \angle DAC - \angle DBC \end{aligned} \tag{6.23}$$

Hat man also in der (komplexen Zahlen-) Ebene ein Viereck mit den Eckpunkten A, B, C, D, so kann man durch (6.10) dem Viereck ein Dreieck mit den Eckpunkten G, H, F zuordnen. Die Seitenlängen (z. B. $|GH|$) des Dreiecks erhält man nach (6.12), (6.14), (6.16), indem man den gegenseitigen Abstand je zweier der vier Punkte A, B, C, D mit dem gegenseitigen Abstand der jedesmal zwei übrigen multipliziert ($|GH| = |AD||BC|$).
Jeder Innenwinkel des Dreiecks (z. B. $\angle HFG$ bei F) ist nach (6.23) gleich der Differenz der Winkel, unter welchen von den zwei Abständen, deren Produkt gleich der Länge der dem Winkel gegenüberliegenden Dreiecksseite ist, der eine Abstand von den Endpunkten des anderen aus erscheint (BC von D und A aus oder DA von B und C aus) (Abb. 6.18).

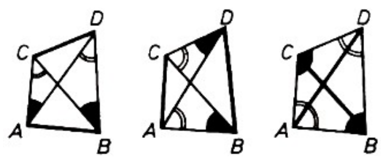


Abb. 6.18

Da sich in einem Dreieck die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, gilt

$$\frac{\sin\angle HFG}{|GH|} = \frac{\sin\angle FGH}{|FH|} = \frac{\sin\angle GHF}{|GF|} \tag{6.24}$$

Dies bedeutet (in den Bezeichnungen der Abb. 6.14) für das Viereck die Gleichheit folgender Quotienten

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{ef} = \frac{\sin(\chi-\psi)}{ef} = \frac{\sin(\omega_1-\chi_2)}{cd} = \frac{\sin(\psi_2-\varphi_1)}{cd} = \frac{\sin(\omega_2-\varphi_1)}{ba} = \frac{\sin(\varphi_2-\chi_1)}{ba}$$

Aufgaben

6.1. Man gebe von den komplexen Zahlen unabhängige Definitionen der Addition und der (kommutativen) Multiplikation der Vektoren der Ebene, so dass die Menge aller Vektoren bzgl. dieser Operationen einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper bildet.

6.2.[56] Man beweise: Der Mittelpunkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat von den drei Eckpunkten denselben Abstand.

6.3. Man beweise: Die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist parallel zur dritten Seite und hat eine Länge, die gleich der Hälfte der Länge der dritten Seite ist.

6.4. Man beweise: Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten eines Vierecks halbieren einander. Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte anstoßender Seiten eines Vierecks bilden ein Parallelogramm.

6.5. Man zeige: Die Summe der Quadrate der Seitenlängen eines Vierecks ist gleich der Summe aus der Summe der Quadrate der Diagonallängen und dem Vierfachen des Quadrates des Abstandes der Mittelpunkte der Diagonalen (Eulers Vierecksatz).

6.6. Man diskutiere die Ergebnisse über das Viereck dieses Kapitels für den Spezialfall, in dem die Eckpunkte A, B, C, D des Vierecks auf einem Kreis liegen.
a) Man beschreibe das zugehörige Dreieck GHF.
b) Man beweise $ef + cd = ab$ (Bezeichnungen wie in der Abb. 6.14).

[56] Die Aufgaben 6.2 und 6.5 diskutierte S. A. Schelkunoff, A note on geometrical applications of complex numbers. The American Mathematical Monthly 37 (1930), 301-303.

7 Von Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen

Die geometrischen Darstellungen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen (2. Kapitel) sollen nun benutzt werden, um einige einfache Funktionen von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ zu untersuchen und geometrisch zu deuten.
Für eine beliebige, aber fest gewählte komplexe Zahl α ist

$$f(z) = z + \alpha$$

eine Funktion von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$.
Ist $\alpha \neq 0$, so erhält man zu jedem Punkt z der Ebene den Bildpunkt $f(z)$ als den vierten Eckpunkt $z + \alpha$ des durch die Punkte O, z, α bestimmten Parallelogramms (Abb. 7.1).

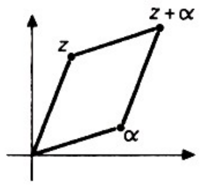


Abb. 7.1

Durchläuft z irgendeine Menge von Punkten der Zahlenebene, so entsteht das Bild dieser Punktmenge aus dem Original durch eine Parallelverschiebung (vgl. Abb. 7.2), die durch den Vektor α nach Größe und Richtung bestimmt ist.

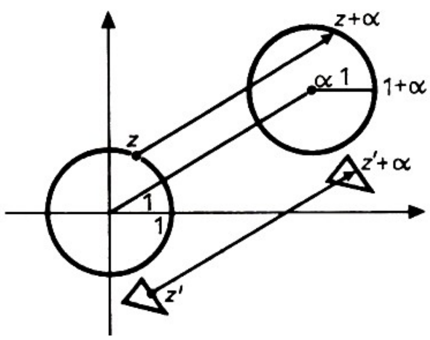


Abb. 7.2

Für eine beliebige, aber fest gewählte komplexe Zahl β ist

$$g(z) = z\beta$$

eine Funktion von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$.
Es sei zunächst $|\beta| = 1$, also etwa $\beta = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Dann ist $|g(z)| = |z|$ und $\arg g(z) \equiv \arg z + \varphi$. Den Bildpunkt $P' = g(z)$, des Punktes $P = z$ erhält man durch Drehung der gerichteten Strecke $\overrightarrow{OP}$ um den Winkel φ (im positiven Drehsinn) (Abb. 7.3).

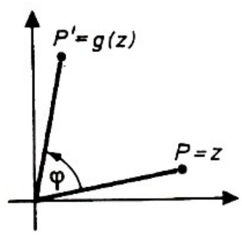


Abb. 7.3

Durchläuft z irgendeine Menge von Punkten der Zahlenebene, so entsteht das Bild dieser Punktmenge aus dem Original durch eine Drehung um den Winkel um den Nullpunkt (vgl. Abb. 7.4).

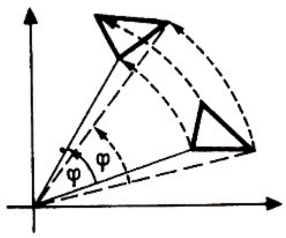


Abb. 7.4

Nun sei $|\beta| = r > 0$ beliebig, aber $\arg\beta = 0$, d. h. $\beta = r$ positiv reell. Dann ist $g(z) = zr$ und $|g(z)| = r|z|$, $\arg g(z) = \arg z$.
Der Bildpunkt $g(z)$ liegt auf derselben Geraden, auf der die Punkte z und der Nullpunkt liegen.

Der alte Abstand $|z|$ vom Nullpunkt verhält sich zum neuen Abstand $r|z|$ wie $1 : r$. Die Funktion $g(z)$ bedeutet für eine Punktmenge für $r > 1$ eine Streckung (ähnliche Vergrößerung), für $0 < r < 1$ eine Zusammendrückung (ähnliche Verkleinerung), für $r = 1$ die identische Abbildung auf sich selbst (vgl. Abb. 7.5).

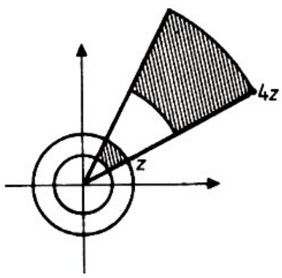


Abb. 7.5 $g(z) = 4z$

Endlich sei nun $\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl. Durchläuft z irgendeine Menge von Punkten der Zahlenebene, so entsteht das Bild $g(z) = z\beta = (zr)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = [z(\cos\varphi + i\sin\varphi)]r$ aus dem Original durch eine Drehung um den Winkel φ und eine Streckung auf das r-fache. Man spricht von einer Drehstreckung.

Die zusammengesetzte Funktion

$$h(z) = f(g(z)) = g(z) + \alpha = z\beta + \alpha$$

vermittelt eine Abbildung, bei der die Bildmenge aus dem Original dadurch entsteht, dass man zuerst die Drehstreckung $z \to z' = z\beta$ und danach die Parallelverschiebung $z' \to z' + \alpha$ ausführt.

Es soll nun noch die Funktion

$$j(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

diskutiert werden. Ist $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ und $j(z) = \frac{1}{z} = s(\cos\psi + i\sin\psi)$, so gilt $s = \frac{1}{r}$, $\psi = -\varphi$.
Um zu jedem Originalpunkt $z \neq 0$ den Bildpunkt zu finden, betrachten wir zwei einfachere Funktionen $j_1(z), j_2(z)$ so, dass $j(z) = j_2(j_1(z))$.
Bei der ersten Funktion j_1 soll das Argument dasselbe bleiben, während der Betrag in seinen reziproken Wert übergeht. Bei der zweiten Funktion j_2 soll der Betrag erhalten bleiben, während

der Arcus in den entgegengesetzten Wert übergeht. Offenbar leisten

$$j_1(z) = \frac{1}{\overline{z}} \qquad \text{und} \qquad j_2(z) = \overline{z}$$

das Verlangte. Es ist nämlich $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$, $\left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\arg \frac{1}{\overline{z}} = -\arg \overline{z} = \arg z$ und tatsächlich

$$j(z) = j_2(j_1(z)) = j_2\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{1}{z}$$

Die Funktion $j_2(z)$ bedeutet geometrisch die Spiegelung an der reellen Achse. Die Funktion $j_1(z)$ dagegen bedeutet geometrisch eine "Spiegelung" am Einheitskreis (oder Inversion):
Da $|j_1(z)| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg j_1(z) = argz$, liegt der Bildpunkt $j_1(z)$ von z auf dem Strahl Oz in der Entfernung $\frac{1}{|z|}$ vom Nullpunkt O.
Um den Bildpunkt $j_1(z)$ zu konstruieren, hat man verschieden vorzugehen, je nachdem, ob für den gegebenen Punkt z entweder $|z| = 1$ oder $|z| > 1$ oder $|z| < 1$ gilt.

Ist $|z] = 1$, so ist $j_1(z) = z$, d. h., die Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises bleiben fest.
Ist $|z] < 1$, so liegt z im Innern des Einheitskreises. Man errichte in z eine Senkrechte auf der Verbindungsgeraden von z mit dem Nullpunkt. Durch den Schnittpunkt T der Senkrechten mit dem Einheitskreis werde die Tangente an den Kreis gelegt (Abb. 7.6).

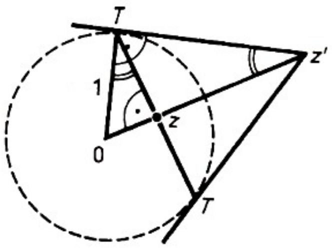


Abb. 7.6

Für den außerhalb des Einheitskreises gelegenen Schnittpunkt z' der Tangente mit der Geraden durch O und z gilt dann $\arg z' = \arg z$ und $\frac{|z'|}{1} = \frac{1}{|z|}$ (ähnliche Dreiecke $Oz'T$ und OTz), so dass in der Tat $z' = j_1(z)$ ist.

Ist $|z| > 1$, so liegt z außerhalb des Einheitskreises. Man lege eine Tangente von z aus an den Einheitskreis. Fällt man vom Berührungspunkt T auf die Verbindungsgerade von z mit dem Nullpunkt das Lot, so ist der Schnittpunkt $z' = j_1(z)$ (im Innern des Einheitskreises).

Für die Funktion $j(z) = \frac{1}{z} = j_2(j_1(z))$ erhält man den Bildpunkt eines Punktes $z \neq 0$, indem man zunächst z am Einheitskreis in den Punkt $z' = j_1(z)$ "spiegelt" (dabei werden die Punkte $\neq 0$ im Innern des Einheitskreises mit den Punkten außerhalb des Einheitskreises vertauscht, während die Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises fest bleiben) und danach den Punkt $z' = j_1(z)$ an der reellen Achse spiegelt (dabei werden die Punkte der oberen Halbebene mit den Punkten der unteren Halbebene vertauscht, während die Punkte der reellen Achse fest bleiben).

Die einzigen festbleibenden Punkte dieser Funktion sind also die Punkte $z = +1$ und $z = -1$. Die übrigen Punkte des Einheitskreises gehen wieder in Punkte des Einheitskreises über, während das Innere (die Punkte $\neq 0$) und das Äußere des Einheitskreises vertauscht werden.
Für von Null verschiedene Punkte $z_1 \neq z_2$ ist auch $\frac{1}{z_1} \neq \frac{1}{z_2}$.

Zu jeder komplexen Zahl $w \neq 0$ existiert eine komplexe Zahl $z \neq 0$ mit $w = \frac{1}{z}$. Bezeichnet man die Menge aller komplexen Zahlen z mit $0 < |z| \leq 1$ als "punktierten Einheitskreis", so ist die Menge

$$A = \{z|0 < |z| < 1\}$$

das Innere dieses punktierten Einheitskreises. Ist ferner

$$B = \{z||z| > 1\}$$

so ist durch $j(z) = \frac{1}{z}$ eine bijektive Funktion von A auf B gegeben, d. h., das Innere des punktierten Einheitskreises und das Äußere des Einheitskreises stellen gleichmächtige Mengen komplexer Zahlen dar!

Aufgaben

7.1. Man beschreibe die Drehung der $x-y$-Ebene um den Winkel φ (im positiven Drehsinn) in den $x-y$-Koordinaten.

7.2. Man beschreibe die Nacheinanderausführung einer Drehstreckung und einer Parallelverschiebung in rechtwinkligen Koordinaten.

7.3. Man beschreibe die Inversion an einem beliebigen Kreis um den Nullpunkt.

7.4. Wie heißt in rechtwinkligen Koordinaten der Bildpunkt des Punktes (x,y) bei der Spiegelung am Einheitskreis?

7.5. Man zeige, dass durch die Funktion $z \rightarrow \frac{1}{z}$ Kreise und Geraden wieder in Kreise oder Geraden übergehen (wobei aus einem Kreis eine Gerade und aus einer Geraden ein Kreis werden kann).

8 Die Zahlenkugel

Die im vorigen Kapitel betrachtete Funktion $j(z) = \frac{1}{z}$ ist für $z = 0$ nicht definiert. Je näher man z an den Nullpunkt heranrückt, um so weiter entfernt sich der Bildpunkt $j(z)$ und desto größer ist sein Betrag. Ferner gibt es keine komplexe Zahl z mit $j(z) = 0$. Will man Bildpunkte $j(z)$ in immer größerer Nähe von 0 erhalten, so muss man komplexe Zahlen z mit immer größerem Betrag nehmen.

Diese beiden Sachverhalte lassen sich geometrisch deuten, wenn man die komplexen Zahlen auf einer Kugel darstellt. Hierzu denke man sich eine Kugel (etwa vom Durchmesser 1), die die Zahlenebene im Nullpunkt berührt.
Der Berührungspunkt O heiße in Anlehnung an die geographischen Bezeichnungen Südpol. Der gegenüberliegende Nordpol P werde nun mit einem Punkt der Ebene, also einer komplexen Zahl z, durch eine Gerade verbunden. Diese schneidet die Kugeloberfläche in genau einem (vom Nordpol verschiedenen) Punkt, den wir mit Z bezeichnen.

Jeder komplexen Zahl z wird auf diese Weise genau ein von P verschiedener Punkt Z der Kugeloberfläche zugeordnet. Für verschiedene komplexe Zahlen $z' \neq z$ sind auch die zugeordneten Punkte Z', Z auf der Kugel verschieden.
Überdies gibt es zu jedem vom Nordpol verschiedenen Punkt Z der Kugel-(oberfläche) einen Punkt z der Ebene, so dass die Verbindungsgerade Pz die Kugeloberfläche in Z schneidet. (Es ist der Schnittpunkt z der von P aus durch den gegebenen Kugelpunkt Z gelegten Geraden mit der Ebene.)

Somit ist durch die Paare (z, Z) eine bijektive Funktion S von der Menge aller komplexen Zahlen (der Zahlenebene) auf die Menge der vom Nordpol verschiedenen Punkte der Kugeloberfläche gegeben.

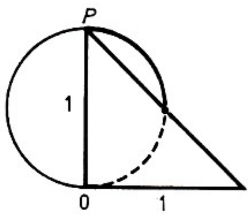


Abb. 8.1

Da der Kugeldurchmesser gleich 1 sein soll, erkennt man leicht: Das Innere des Einheitskreises der Ebene entspricht dabei der südlichen Halbkugel, das Äußere des Einheitskreises entspricht der nördlichen Halbkugel (ohne Nordpol), und die Peripherie des Einheitskreises entspricht dem Äquator (vgl. Abb. 8.1).

Die bijektive Funktion $j(z) = z$ vom Inneren des punktierten Einheitskreises auf das Äußere des Einheitskreises ist also auch eine Bijektion j^* von der südlichen Halbkugel ohne Südpol auf die nördliche Halbkugel ohne Nordpol. (Nun ist die Gleichmächtigkeit des Inneren des punktierten Einheitskreises und des Äußeren des Einheitskreises nicht mehr so paradox!)

Man kann die bijektive Funktion j^* erweitern zu einer Bijektion von der südlichen Halbkugel auf die nördliche Halbkugel, indem man noch dem Punkt O (Südpol) den Punkt P (Nordpol) zuordnet. Nähern sich die komplexen Zahlen z in der Ebene dem Nullpunkt, d. h., nähern sich die zugeordneten Kugelpunkte Z dem Südpol O, so entfernen sich in der Ebene die Bildpunkte $j(z) = \frac{1}{z}$ immer weiter, d. h., um so mehr nähern sich die Kugelbildpunkte $j^*(Z)$ dem Nordpol. Es ist also sinnvoll, $j^*(0) = P$ zu setzen.

Erklärt man $j * (P)$ in geeigneter Weise, so ist die Funktion $j*$ auf der gesamten Kugel(oberfläche) definiert:

1. Entspricht der Punkt $Z(\neq 0, \neq P)$ der Kugel der komplexen Zahl $z \neq 0$ der Ebene, d. h. $S(z) = Z$, so sei $j^*(Z) = Z'$, falls der Punkt Z' der Kugel der komplexen Zahl - der Ebene entspricht (d.h. $S(j(z)) = S\left(\frac{1}{z}\right) = Z'$).

2. $j^*(0) = P$.

3. Will man Bildpunkte $j(z)$ bzw. Kugelpunkte $j * (Z)$ in immer größerer Nähe von O erhalten, so muss man komplexe Zahlen z mit immer größerem Betrag, also Kugelpunkte in immer größerer Nähe zum Nordpol P nehmen.
Es ist also sinnvoll, $j^*(P) = O$ zu setzen. Dann ist j^* eine Bijektion von der Kugel auf sich.

Wir wollen diese Bijektion ein wenig genauer betrachten.
Die Funktion $j_2(z)$ bedeutet geometrisch die Spiegelung an der reellen Achse. Auf der Kugel entspricht ihr die Spiegelung an der Ebene des Nullmeridians. Tatsächlich entsprechen den von O ausgehenden Halbstrahlen der Ebene bei der Bijektion S von der Ebene auf die Kugel (ohne P) den Halbmeridianen auf der Kugel.
Der Richtungswinkel des Strahls ist die geographische Länge des Meridians. Das Bild der positiven reellen Achse bei S ist der Nullmeridian, das Bild der negativen reellen Achse ist der Meridian der Länge $180°$, die Bilder der positiven und negativen imaginären Achsen sind die Halbmeridiane der Länge $\pm 90°$. Zwei konjugierten Zahlen z und $\overline{z}$ entsprechen zwei Kugelpunkte, die zur Ebene des Nullmeridians spiegelbildlich liegen.
Einer Spiegelung an der reellen Achse in der Ebene entspricht also eine Spiegelung an der Ebene des Nullmeridians auf der Kugel.

Die Funktion $j_1(z)$ bedeutet geometrisch die Spiegelung am Einheitskreis. Auf der Kugel entspricht ihr die "Spiegelung" am Äquator.
Die Bilder (bei S) der Kreise um den Nullpunkt in der Ebene sind die Breitenkreise auf der Kugel. Hat der Kreis in der Ebene den Radius u, so ist die geographische Breite χ ($-\frac{\pi}{2} \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$, die nördliche Breite rechnet man positiv, die südliche negativ) des zugeordneten Breitenkreises durch die Beziehung

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right))u$$

gegeben. In der Tat, es ist (Abb. 8.2) $\alpha = \angle PzO = \angle POZ$. Da das Dreieck OZM gleichschenklig ist, gilt auch $\angle MOZ = \alpha$. Daher ist (im Dreieck OZM)

$$2\alpha + \frac{\pi}{2} + \chi = \pi \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$$

Außerdem gilt für $\alpha = \angle PzO$ offenbar $\cot\alpha = \frac{u}{1} = u$.

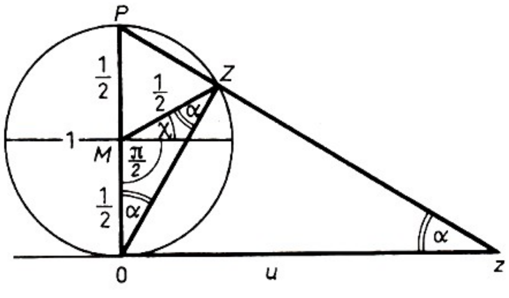


Abb. 8.2

In der Ebene ist mit $j_1(z) = z'$ auch $|z'| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg z' = \arg z$. Die zugeordneten Punkte $S(z') = Z'$ und $S(z) = Z$ auf der Kugel haben somit dieselbe geographische Länge, und für ihre Breiten χ' und χ gilt

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi'}{2}\right) = |z'| \qquad , \qquad \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right) = |z|$$

Wegen $|z'||z| = 1$ ist $\cot\kappa\cot\lambda = 1$ (mit $\kappa = \frac{\pi}{4} - \frac{\chi'}{2}$, $\lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}$), woraus nach dem Additionstheorem für den Kotangens

$$\cos(\kappa + \lambda) = \frac{\cot\kappa\cot\lambda - 1}{\cot\kappa + \cot\lambda} = 0$$

also jetzt $\kappa + \lambda = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\chi + \chi' = 0$, also $\chi' = -\chi$ folgt.
Die Punkte Z' und Z haben also entgegengesetzt gleiche geographische Breiten. Sie gehen tatsächlich durch Spiegelung am Äquator auseinander hervor.

Der der komplexen Zahl z entsprechende Punkt Z auf der Kugel geht durch die Funktion $j(z) = \frac{1}{z}$ also in den Punkt $j^*(Z)$ der Kugel über, den man erhält, wenn man zuerst an der Ebene des Nullmeridians und dann an der Ebene des Äquators spiegelt. Die beiden Spiegelungen entsprechen aber offenbar der einen Spiegelung an der Schnittgeraden der Ebene des Nullmeridians mit der Ebene des Äquators.
Diese eine Spiegelung bedeutet eine Drehung der Kugel um $180°$ um diese Gerade als Achse. Dabei geht tatsächlich der Südpol in den Nordpol und der Nordpol in den Südpol über, wie oben durch $j^*(0) = P$, $j^*(P) = O$ vereinbart worden ist.

Aufgaben

8.1. Welche geographische Länge und geographische Breite hat der Bildpunkt auf der Kugel der komplexen Zahl $z = (x,y) = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$? Wo liegen die Bildpunkte von 1, i, -1, $-i$?

8.2. Was entspricht auf der Kugel dem Büschel aller Geraden in der Ebene durch einen Punkt z?

8.3. Man drücke die Koordinaten der Punkte der Ebene durch die Koordinaten der entsprechenden Kugelpunkte aus, und umgekehrt.

9 Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen

Sind a und b die Längen der Katheten, c die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für die Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{I}$$

(Der Beweis ist aus der Berechnung der Fläche des abgebildeten Quadrats zu folgen: $(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$; vgl. Abb. 9.1).

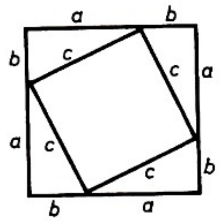


Abb. 9.1

Ist umgekehrt in einem Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten, so ist das Dreieck rechtwinklig (II).

(Schließen die Katheten a und b den Winkel γ ein, so gilt:
1. Ist $\gamma = 90°$ und bezeichnet c die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks, so ist $c^2 = a^2 + b^2$.
2. Ist $\gamma < 90°$ und bezeichnet d die Hypotenuse dieses Dreiecks, so ist $d < c$, also $d^2 < a^2+b^2$.
3. Ist $\gamma > 90°$ und bezeichnet e die Hypotenuse dieses Dreiecks, so ist $e > c$, also $e^2 > a^2+b^2$.

Da die Voraussetzungen in 1., 2., 3. alle möglichen Fälle erschöpfen und sich die Behauptungen paarweise ausschließen, gelten auch die Umkehrungen von 1., 2., 3.; insbesondere die Umkehrung von 1.)
Der Satz von Pythagoras (Sätze I und II) wird benutzt, (A), um die Seite eines Quadrats zu konstruieren, das gleich der Summe oder der Differenz von zwei Quadraten ist, oder (B), um die Diagonale eines Rechtecks zu berechnen; oder (C), um einen rechten Winkel zu konstruieren.

Schon in altbabylonischen Keilschrifttexten (aus der Zeit zwischen 1900 und 1600 v.u.Z.) wurden Aufgaben (vom Typ B) mit dem "Satz von Pythagoras" gelöst. In den Sulbasutras, altindischen Schriften von geometrisch-theologischem Charakter (wahrscheinlich aus der jungvedischen Zeit zwischen 800 und 500 v. u. Z.) ist der "Satz von Pythagoras" in den Beschreibungen zur Konstruktion von Opferaltären (Aufgaben vom Typ A und B) verwendet worden.

In seinen Elementen (um 325 v.u.Z. geschrieben) gab Euklid einen Beweis des "Satzes von Pythagoras" (mittels seiner Parallelogrammtheorie).
In der voreuklidischen Zeit dürfte der Satz (nach Ansicht einiger Mathematikhistoriker) mit Hilfe der Proportionenlehre bewiesen worden sein. Der Satz war den Pythagoreern (aus dem Zeitraum 500 bis 440 v.u.Z.) und Hippokrates von Chios bekannt. Proklos berichtete:

"Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen, so kann man darunter welche finden, die dieses Theorem auf Pythagoras zurückführen."[57]

Pythagoras lebte um 550 v.u.Z. Ob nun Pythagoras selbst diesen Satz kannte und ihn zuerst

[57] A. P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter (Leipzig 1964, S. 52).

bewiesen hat oder die Entdeckung des Satzes erst von jenen anonymen Mathematikern gemacht wurde, die ihre Theorie unter dem Namen "Pythagoreer" bekannt gemacht haben, ist eine offene Frage. Als wissenschaftliche Tatsache (bewiesener Satz) ist der Satz unzweifelhaft griechisch.

Ob nun die Griechen den Satz (unbewiesen) in Babylon, Indien, Ägypten oder China auf irgendeinem Wege erhalten (und dann einen Beweis gefunden) haben, ob der Satz an verschiedenen, voneinander unabhängigen Stellen erkannt worden ist, ob es eine gemeinsame (uns bisher unbekannte) Quelle für die babylonische, indische, ägyptische, chinesische und griechische Geometrie gibt und diese von den einzelnen Völkern weitgehend unabhängig weiter entwickelt wurde, ist eine offene Frage.

Es sei noch erwähnt, dass in einem ägyptischen Papyrus (aus der Zeit vor 2000 v.u.Z.) eine Zahlenbeziehung der Form $6^2+8^2 = 10^2$ erhalten ist. Doch von der Kenntnis dieser rein numerischen Identität kann man nicht auf die geometrische Einsicht des "Satzes von Pythagoras" schließen.
Es liegt höchstens im Bereich des Möglichen, dass die ägyptische Geometrie den "Satz von Pythagoras" kannte und zum Zwecke der Feldmessung (Aufgabentyp C) benutzte.

Ebenso befindet sich in einer alten chinesischen Kalenderschrift (wahrscheinlich aus der Zeit zwischen 500 und 300 v.u.Z., oftmals sogar mit 1100 v.u.Z. datiert) eine Figur mit dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5. In der Mathematik in neun Büchern, eine Zusammenfassung der Arbeit der chinesischen Mathematiker, die im ersten Jahrtausend v.u.Z. gelebt haben (wahrscheinlich aus dem 2. Jh. v.u.Z.) wurde der Satz bereits umfassend angewendet (Aufgaben vom Typ B).

In der Aufgabe 14 des Buches IX der altchinesischen Mathematik in neun Büchern handelt es sich um die Bestimmung der Längen von Wegen, die von zwei Fußgängern unter folgenden Bedingungen zurückgelegt werden:
Beide gehen von einem Punkt aus mit den Geschwindigkeiten 7 bzw. 3. Der erste geht in südlicher Richtung und legt einen Weg der Länge 10 zurück. Danach ändert er seine Richtung so, dass er mit dem zweiten, der stets in östlicher Richtung geht, in einem Punkt zusammentrifft (vgl. Abb. 9.2).

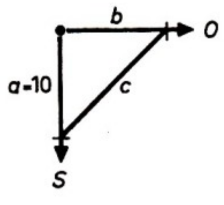


Abb. 9.2

In der Lösung der Aufgabe wird empfohlen, das folgende Zahlentripel zu bilden:

$$\frac{7^2+3^2}{2}, \quad \frac{7^2-3^2}{2}, \quad 7\cdot 3$$

Der schräg durchlaufende Weg (c) und der nach Osten durchlaufene Weg (b) werden damit wie folgt berechnet:

$$c = \left[10 \cdot \frac{7^2+3^2}{2}\right] : \frac{7^2-3^2}{2} = 14\frac{1}{2}$$

$$b = 10 \cdot (7\cdot 3) : \frac{7^2-3^2}{2} = 10\frac{1}{2}$$

Gegebene Größen der Aufgaben sind: $a = 10$, die Geschwindigkeiten (bei der Gesamtzeit t) $\frac{a+c}{t} = 7$, $\frac{b}{t} = 3$. Es gilt also $\frac{b}{a+c} = \frac{3}{7}$.
Das von den Wegen der Länge $a = 10$, b, c gebildete Dreieck ist rechtwinklig; daher ist $a^2 + b^2 = c^2$. Gesucht sind die Längen b und c. Aus $10^2 + b^2 = c^2$ und $b = \frac{3}{7}(10 + c)$ folgt

$$10^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 (10+c)^2 = c^2 \qquad \text{und hieraus} \qquad \left(\frac{7^2-3^2}{2}\right)c^2 - 10 \cdot 3c^2 - \frac{7^2+3^2}{2}10^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung lässt sich c in der angegebenen Form berechnen und daraus dann $b = \frac{3}{7}(10 + c)$.

In der Tat lösen $b = 10\frac{1}{2}$ und $c = 14\frac{1}{2}$ die gegebene Aufgabe. Es ist $10^2 + \left(10\frac{1}{2}\right)^2 = \left(14\frac{1}{2}\right)^2$, das Dreieck mit den Seiten $10, 10\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}$ also rechtwinklig.
Der erste Fußgänger legt mit der Geschwindigkeit 7 einen Weg der Länge $10 + 14\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$ zurück, der zweite Fußgänger legt mit der Geschwindigkeit 3 einen Weg der Länge $10\frac{1}{2}$ zurück. Die Gesamtzeit ist

$$\frac{24\frac{1}{2}}{7} = \frac{10\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{2}$$

Das Dreieck mit den Seiten $10, 10\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}$ ist ähnlich dem Dreieck mit den Seiten

$$20 = \frac{7^2-3^2}{2}, \quad 21 = 7 \cdot 3, \quad 29 = \frac{7^2+3^2}{2}$$

Dieses ist ein rechtwinkliges Dreieck ($20^2 + 21^2 = 29^2$), bei dem die Katheten und die Hypotenuse ganzzahlige Längen haben.

Andere solche Dreiecke sind die mit den Seiten 3, 4, 5 oder 5, 12, 13 oder 8, 15, 17 oder 65, 72, 97 oder 36, 77, 85 oder 48, 55, 73.
Wir nennen allgemein drei natürliche Zahlen a, b, c, die als Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke auftreten, für die also $a^2+b^2 = c^2$ ist, ein pythagoreisches Zahlentripel (a, b, c). Es entsteht die Frage nach einer Übersicht über alle pythagoreischen Zahlentripel (also über alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen).

Ist (a, b, c) ein solches Tripel, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$, also $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$.
Geometrisch bedeutet dies: Der Punkt $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ liegt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ mit dem Radius 1. Es ist ein Punkt, dessen Koordinaten gebrochene Zahlen $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ sind.

Ist umgekehrt $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, dessen Koordinaten $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ gebrochene Zahlen sind, so gilt - wir nehmen an, dass die Brüche $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ gleichnamig gemacht sind, also $q = s$ ist $-\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{r}{q}\right)^2 = 1$, d.h. $p^2 + r^2 = q^2$, und (p, r, q) ist ein pythagoreisches Zahlentripel.
Die Frage nach allen pythagoreischen Zahlentripeln ist also gleichbedeutend mit dem Aufsuchen von Punkten auf dem Einheitskreis, deren Koordinaten gebrochene Zahlen sind. Wir bestimmen zunächst die größere Menge aller Punkte des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten.

Angenommen, ξ und η sind rationale Zahlen mit $\xi^2 + \eta^2 = 1$, also (ξ, η) ein Punkt des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten ξ, η. Diesem Punkt entspricht die komplexe Zahl $\alpha = \xi + i\eta$, und es gilt (da α auf dem Einheitskreis liegt) $|\alpha| = 1$, also $\alpha\overline{\alpha} = 1$. Hieraus folgt $\alpha + 1 = \alpha + \alpha\overline{\alpha} = \alpha(1 + \overline{\alpha})$, also $\alpha = \frac{1+\alpha}{1+\overline{\alpha}}$.

Es ist $1 + \alpha = (1 + \xi) + i\eta$. Denken wir uns die rationalen Zahlen $1 + \xi$ und η gleichnamig gemacht, so können wir sie in der Form $1+\xi = \frac{m}{k}$, $\eta = \frac{n}{k}$ mit ganzen Zahlen m, n, k aufschreiben. Dann ist

$$1+\alpha = \frac{1}{k}(m+ni) \qquad , \qquad 1+\overline{\alpha} = \overline{1+\alpha} = \frac{1}{k}(m-ni)$$

und damit

$$\xi + i\eta = \alpha = \frac{1+\alpha}{1+\overline{\alpha}} = \frac{m+ni}{m-ni} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} + \frac{2mn}{m^2+n^2}i$$

also

$$\xi = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \qquad , \qquad \eta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

Sind also ξ, η rationale Zahlen mit $\xi^2+\eta^2=1$, so gibt es ganze Zahlen m, n so, dass

$$\xi = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \quad \eta = \frac{2mn}{m^2+n^2} \qquad \text{oder auch} \qquad \xi = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad \eta = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

ist. Umgekehrt gilt für beliebige ganze Zahlen m, n

$$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2 + \left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2 = \frac{(m^2+n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} = 1$$

d. h., die Punkte

$$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right) \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$$

liegen auf dem Einheitskreis. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 9.1. Alle Punkte des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten haben die Form $\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$ oder $\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$,
worin m und n beliebige ganze Zahlen sind.

Man erhält auch alle Punkte des Einheitskreises mit rationalen Koordinaten in der im Satz angegebenen Form, wenn darin m und n beliebige ganze, jedoch teilerfremde Zahlen sind. In der Tat, sind m' und n' nicht teilerfremd, etwa $m' = gm$, $n' = gn$ mit teilerfremden Zahlen m, n, so gilt

$$\frac{m'^2-n'^2}{m'^2+n'^2} = \frac{g(m'^2-n'^2)}{g(m'^2+n'^2)} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{2m'n'}{m'2^+n'^2} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

Es seien m, n beliebige teilerfremde ganze Zahlen und etwa

$$\xi = \frac{a}{c} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \qquad , \qquad \eta = \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

die rationalen Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis. Da m, n teilerfremd sind, sind m, n nicht beide gerade.

1. Fall: m und n sind auch nicht beide ungerade.
Dann ist m^2-n^2 ungerade, also auch jeder Teiler von m^2-n^2 ungerade und daher auch der größte gemeinsame Teiler t von m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 ungerade. t ist auch ein gemeinsamer

Teiler von $(m^2+n^2)+(m^2-n^2) = 2m^2$ und $(m^2+n^2)-(m^2-n^2) = 2n^2$, also (da t ungerade ist) ein gemeinsamer Teiler von m^2 und n^2.
Hieraus folgt $t=1$, da m und n teilerfremd sind. Der größte gemeinsame Teiler von m^2-n^2, $2mn$ und m^2+n^2 ist somit 1.

2. Fall: m und n sind beide ungerade.
Dann sind $m+n$ und $m-n$ gerade Zahlen, also $m+n=2m'$, $m-n=2n'$ mit ganzen Zahlen m', n'. Es gilt

$$m = m'+n' \qquad , \qquad n = m'-n'$$

Hieraus folgt erstens, dass m' und n' teilerfremd sind. (Hätten sie einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler, so auch m und n; aber m und n sind teilerfremd.) Es folgt zweitens, dass m' und n' nicht beide ungerade sind.
(Wären m' und n' beide ungerade, so wäre $m = m'+n'$ gerade, aber m und n sind beide ungerade.)
Außerdem gilt auch

$$\xi = \frac{a}{c} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{(m'+n')^2-(m'-n')^2}{(m'+n')^2+(m'-n')^2} = \frac{2m'n'}{m'^2+n'^2}$$
$$\eta = \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2} = \frac{2(m'+n')(m'-n')}{(m'+n')^2+(m'-n')^2} = \frac{m'^2-n'^2}{m'^2+n'^2}$$

worin wie im 1. Fall m', n' teilerfremd und nicht beide ungerade sind und der größte gemeinsame Teiler von $m'^2-n'^2$, $2m'n'$, $m'^2+n'^2$ daher 1 ist.
Im ersten Fall folgt mit ganzem k

$$a = (m^2-n^2)k, \qquad b = 2mnk, \qquad c = (m^2+n^2)k$$

im zweiten Fall folgt mit ganzem k'

$$a = 2m'n'k, \qquad b = (m'^2-n'^2)k, \qquad c = (m'^2+n'^2)k$$

Aus diesen Betrachtungen folgt der

Satz 9.2. Alle Lösungen der Gleichung $a^2+b^2=c^2$ in ganzen Zahlen werden gegeben durch

$$a = (m^2-n^2)k, \qquad b = 2mnk, \qquad c = (m^2+n^2)k \tag{9.1}$$

oder

$$a = 2mnk, \qquad b = (m^2-n^2)k, \qquad c = (m^2+n^2)k \tag{9.2}$$

worin m, n, k ganze Zahlen, m, n teilerfremd und nicht beide ungerade sind.

Hieraus ergibt sich die gesuchte Übersicht über alle pythagoreischen Zahlentripel (a,b,c) mit $a^2+b^2=c^2$ (a, b, c natürliche(!) Zahlen):
Man wähle in (9.1) oder (9.2) beliebige natürliche Zahlen m, n, k, wobei m, n teilerfremd und nicht beide ungerade sind und $m>n$ ist. Für $k=1$ ergeben sich die teilerfremden Tripel

$$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2) \qquad , \qquad (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) \tag{9.3}$$

(Beispiele in der Tabelle 9.1).

Tabelle 9.1. Pythagoreische Zahlentripel

m	n	m^2	n^2	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2
2	1	4	1	3	4	5
3	2	9	4	5	12	13
4	1	16	1	15	8	17
4	3	16	3	7	24	25
5	2	25	4	21	20	29
5	4	25	16	9	40	41
6	1	36	1	35	12	37
6	5	36	25	11	60	61
7	2	49	4	45	28	53
7	4	49	16	33	56	65
7	6	49	36	13	84	85

$m > n$, eine gerade, eine ungerade, teilerfremd

Dabei tritt jedes der Tripel einmal und nur einmal auf, weil die natürlichen Zahlen m, n durch a, b, c eindeutig bestimmt sind.

Pythagoreische Zahlentripel treten nicht nur in der chinesischen Mathematik in neun Büchern auf. Das erwähnte ägyptische Papyrus enthält das Tripel (6, 8, 10). In den erwähnten indischen Schriften werden folgende Tripel angegeben: (15, 36, 39), (5, 12, 13), (3, 4, 5), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37).
Das Dreieck mit den Seitenlängen 15, 36, 39 ergibt sich aus dem Dreieck mit den Seiten 5, 12, 13 durch Multiplikation der Seitenlängen mit 3. (Die Dreiecke werden zur Lösung von Aufgaben vom Typ C benutzt.)

Der altbabylonische Keilschrifttext (geschrieben zwischen 1900 und 1600 v. u. Z.) mit der Katalognummer 322 der Plimpton-Sammlung der Columbia-Universität in New-York (kurz "Plimpton 322") enthält die in der Tabelle 9.2 angegebenen fünfzehn Tripel.

Tabelle 9.2. "Plimpton 322": $h^2 + b^2 = d^2$

h	b	d	Nr.
120	119	169	1
3456	3367	4825	2
4800	4601	6649	3
13500	12709	18541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2700	2291	3541	7
960	799	1249	8
600	481	769	9
6480	4961	8161	10
60	45	75	11
2400	1675	2929	12
240	161	285	13
2700	1771	3229	14
90	56	106	15

Der Text ist eine Tabelle mit vier Spalten und stellt nur das rechte Teilstück einer größeren Tafel dar. Die letzte Spalte enthält die laufende Nummer der 15 Zeilen. Die vorletzte Spalte gibt nach der Überschrift die "Diagonale"d und die vorhergehende Spalte die "Breite" b (des rechtwinkligen Dreiecks, Abb. 9.3) an.

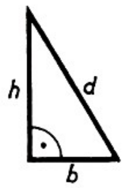


Abb. 9.3

Alle diese Zahlen genügen der Gleichung $d^2 - b^2 = h^2$ mit einer ganzen Zahl h ("Höhe"). Die erste Spalte des vorhandenen Reststücks der Tafel enthält nicht die Höhe h, sondern die Quadrate $\left(\frac{d}{h}\right)^2$.

Die Werte für $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ von der ersten bis zur 15. Zeile nehmen fast linear ab. Die zugehörigen 15 Dreiecke verändern sich von der ersten bis zur 15. Zeile so:

Das erste rechtwinklige Dreieck ist (fast) ein halbes Quadrat, da h und b (fast) übereinstimmen. Der Quotient $\frac{b}{h}$ nimmt von 0,99 bis 0,62 ab. Das letzte rechtwinklige Dreieck hat (annähernd) die Winkel $90°$, $60°$, $30°$. Dies zeigt eine gewisse sinnvolle Ordnung in der Tabelle.

Es gibt verschiedene Hypothesen, wie die in der Tabelle angegebenen pythagoreischen Tripel berechnet worden sind. Die folgende Interpretation geht auf E. M. Bruns (1949) und O. Neugebauer (1946) zurück.[58]

Ist (h, b, d) ein pythagoreisches Zahlentripel, so gilt $d^2 = h^2 + b^2$ oder $\left(\frac{d+b}{h}\right)\left(\frac{d-b}{h}\right) = 1$. Schreiben wir $\frac{d+b}{h} = \alpha$, so wird $\frac{d-b}{h} = \alpha^{-1}$, und es gilt

$$\frac{d}{h} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1}) \quad , \quad \frac{b}{h} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1})$$

also $d = \frac{h}{2}(\alpha+\alpha^{-1})$, $b = \frac{h}{2}(\alpha-\alpha^{-1})$. Ist umgekehrt h eine natürliche Zahl und α eine rationale Zahl derart, dass $d = \frac{h}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$, $b = \frac{h}{2}(\alpha - \alpha^{-1})$ ganze Zahlen sind, so gilt $d^2 = h^2 + b^2$. Setzen wir $\alpha = \frac{p}{q}$, so ist $\alpha^{-1} = \frac{q}{p}$ und es wird

$$\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq} \quad , \quad \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}$$

Wählt man nun zu gegebenem h die ganzen Zahlen p und q so, dass $2pq$ ein Teiler von h wird (also nicht notwendig $2pq = h$), so bilden

$$h, \qquad b = \frac{h}{2}(\alpha + \alpha^{-1}) = \frac{h(p^2 + q^2)}{2pq}, \qquad d = \frac{h}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) = \frac{h(p^2 - q^2)}{2pq}$$

ein pythagoreisches Zahlentripel. Einige der in der Tabelle des Plimptontextes gegebenen Werte erhält man wie folgt:

1. Zeile: $h = 120, p = 12, q = 5, \alpha = \frac{12}{5}, \alpha^{-1} = \frac{5}{12}$

$$b = \frac{120}{2}\frac{144 - 25}{60} = 119, \qquad d = \frac{120}{2}\frac{144 - 25}{60} = 169$$

2. Zeile: $h = 3456, p = 64, q = 27, \alpha = \frac{64}{27}, \alpha^{-1} = \frac{27}{64}$, $b = 3367$, $d = 4825$

[58]Vgl. O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity (Princeton 1952).

11. Zeile: $h = 60, p = 2, q = 1, \alpha = \frac{2}{1}, \alpha^{-1} = \frac{1}{2}$, $b = 45$, $d = 75$

15. Zeile: $h = 90, p = 9, q = 5, \alpha = \frac{9}{5}, \alpha^{-1} = \frac{5}{9}$, $b = 56$, $d = 106$

In der Zeile 11 haben b, d und h den gemeinsamen Teiler 15, in der Zeile 15 haben b, d und h den gemeinsamen Teiler 2. In allen anderen Zeilen sind b und d teilerfremd.
Im allgemeinen kann man p und q so wählen, dass $2pq = h$ ist. Diese Tripel haben die Form

$$(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2) \tag{9.4}$$

In der Zeile 11 ist jedoch $2pq = 4$ ein echter Teiler von $h = 60$. Es gibt tatsächlich keine natürlichen Zahlen p und q $(p > q)$ mit $2pq = 60$, also $pq = 30$, $45 = p^2 - q^2$, $75 = p^2 + q^2$, wie man aus der Zerlegung von 30 in natürliche Faktoren ersieht (vgl. Tabelle 9.3).

Tabelle 9.3. Es gibt keine natürlichen Zahlen $p > q$ mit $2pq = 60$ und $p^2 - q^2 = 45$, $p^2 + q^2 = 75$

p	q	$2pq$	$p^2 - q^2$	$p^2 + q^2$
30	1	60	899	901
15	2	60	221	229
10	3	60	91	109
6	5	60	11	61

Das Tripel der Zeile 11 lässt sich also nicht in der Form (9.4) schreiben.[59]
(Zeile 11 ergibt sich übrigens aus den Formeln (9.2) mit $m = 2$, $n = 1$, $k = 15$. Zeile 15 ergibt sich aus den Formeln (9.1) mit $m = 7$, $n = 23$,$k = 2$.)

Es ist zu vermuten, dass die Babylonier die durch die Formeln (9.1) und (9.2) ausgedrückten Tripel allgemein nicht gekannt haben, vielmehr die Tripel von "Plimpton 322" auf ähnliche Weise gefunden haben könnten wie die beschriebene.
Proklos beschrieb zwei Methoden, zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist. Die eine Methode "Pythagoreische Tripel", also rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, zu finden, führe man auf Pythagoras, die andere auf Platon zurück.

"Man nimmt eine gegebene ungerade Zahl als kleinere Kathete an. Von dem Quadrat derselben die Einheit subtrahiert, und der Rest halbiert, gibt die größere Kathete; zu dieser die Einheit addiert, gibt die Hypotenuse. Man nimmt z. B. 3 an, von dem Quadrate nimmt man die Einheit weg, und halbiert den Rest 8, d. i. 4; dazu addiert man wiederum die Einheit, das macht 5, und es wird das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 gefunden.

Die Platonsche Methode beginnt von der geraden Zahl. Man nimmt nämlich irgendeine gerade Zahl und setzt sie als eine Kathete; diese halbiert und die Hälfte ins Quadrat erhoben, und dem Quadrate die Einheit hinzugefügt, gibt die Hypotenuse; die Einheit von dem Quadrate subtrahiert, gibt die andere Kathete. Nimmt man z. B. 4 an, so gibt die Hälfte 2 aufs Quadrat erhoben 4. Davon die Einheit subtrahiert, gibt 3, die Einheit addiert, gibt 5, und man erhält dasselbe Dreieck, welches aus der ersten Methode hervorging."[60]

In Formeln sind es die folgenden pythagoreischen Zahlentripel, die hier beschrieben werden (g eine natürliche Zahl):

$$\left(2g + 1, \frac{(2g+2)^2 - 1}{2}, \frac{(2g+1)^2 + 1}{2}\right) \quad , \quad (2g, g^2 - 1, g^2 + 1) \tag{9.5,9.6}$$

[59] Dies ist in einigen anderen Erläuterungen zum Plimptontext nicht berücksichtigt worden.
[60] Zitiert nach: G. Nesselmann, Die Algebra der Griechen (Berlin 1842).

(Beispiele in den Tabellen 9.4, 9.5).

Tabelle 9.4. Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (Pythagoras zugeschrieben)

$n = 2g + 1$	$\frac{n^2-1}{2}$	$\frac{n^2+1}{2}$
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	4
11	60	61
13	84	85

Tabelle 9.5. Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (Platon zugeschrieben)

$m = 2g$	$\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1$	$\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1$
4	3	5
6	8	10
8	15	17
10	24	26
12	35	37
14	48	50

Der römische Architekt Vitruvius schrieb, Pythagoras habe mit Hilfe des Dreiecks 3, 4, 5 gelehrt, praktisch einen rechten Winkel zu konstruieren, indem er drei Lineale, deren Länge sich wie die Zahlen 3, 4, 5 zueinander verhalten, zusammenstellte.

Auch in Euklids Elementen (Buch 10) wird die Aufgabe behandelt, zwei Quadratzahlen so zu finden, dass auch ihre Summe eine Quadratzahl ist.
Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $b^2 = (c + a)(c - a)$. Sind nun $c + a$ und $c - a$ beide gerade oder ungerade Zahlen und überdies solche Zahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist, so lässt sich die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Ist $c + a = u$, $c - a = v$ (daher $u > v$) also $c = \frac{u+v}{2}$, $a = \frac{u-v}{2}$ (das sind wieder natürliche Zahlen, weil u und v beide gerade oder beide ungerade sind, ihre Summe oder Differenz aber gerade ist), worin uv ein Quadrat ist, so gilt

$$\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{u-v}{2}, uv, \frac{u+v}{2}\right) \tag{9.7}$$

ist somit ein "Pythagoreisches Zahlentripel". Natürlich müssen sich diese Tripel, wenn sie teilerfremd sind, auch in der Form (9.3) mit geeigneten m, n darstellen lassen (Übungsaufgabe!).

Tabelle 9.6. "Pythagoreische Tripel" nach Euklid
$m > n$, beide gerade oder beide ungerade, mn Quadratzahl

m	n	$\sqrt{mn}$	$\frac{m-n}{2}$	$\frac{m+n}{2}$
3	1	3	4	5
8	2	4	3	5
27	3	9	12	15
16	4	8	6	10
25	1	5	12	13
18	2	6	8	10
32	2	8	15	17

Die Pythagoras bzw. Platon zugeschriebenen Tripel bekommt man als Spezialfall der Euklidischen wie folgt:

$$n = 1, \qquad m = (2g+1)^2 \qquad \text{(ungerades Quadrat, Pythagoras)}$$
$$n = 2, \qquad m = \frac{(2g)^2}{2} \qquad \text{(Hälfte einer geraden Quadratzahl, Platon)}$$

Diophant stellt im II. Buch seiner Arithmetik als 8. Aufgabe:
Eine gegebene Quadratzahl ist in zwei Quadratzahlen zu zerlegen. Am Beispiel $16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$, anders geschrieben

$$4^2 = \left(\frac{4\cdot 4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3\cdot 4}{5}\right)^2 \qquad \text{mit} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

wird die Methode erläutert. Gesucht sind Lösungen der Gleichung $w^2 = x^2 + y^2$ bei gegebener Quadratzahl w^2. Diophant setzte (im Prinzip)

$$x = t, \qquad y = kt - w$$

Es muss $y^2 = (kt-w)^2 = w^2 - t^2$ gelten, woraus $t = \frac{2wk}{k^2+1}$ folgt, also $x = t = \frac{2wk}{k^2+1}$, und daher $y = kt - w = w\frac{k^2-1}{k^2+1}$. Tatsächlich ist

$$\left(\frac{2wk}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{w(k^2-1)}{k^2+1}\right)^2 = w^2 \tag{9.8}$$

(Für $w^2 = 16, w = 4, k = 2$ ergibt sich $x = \frac{2\cdot 4\cdot 2}{5}, y = \frac{4\cdot 3}{5}$)
Wendet man die Methode Diophants auf die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ oder $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ an, so ergibt sich

$$\frac{x}{z} = \frac{2k}{k^2+1} \qquad , \qquad \frac{y}{z} = \frac{k^2-1}{k^2+1} \tag{9.9}$$

Sieht man k als Bruch an (was bei Diophant möglich ist), so erhält man (falls $k = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p; q)

$$x = 2pq, \qquad y = p^2 - q^2, \qquad z = p^2 + q^2 \tag{9.10}$$

als hinreichende Bedingung für ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Es handelt sich für teilerfremde p, q um teilerfremde Tripel, wenn p gerade und q ungerade oder wenn p ungerade und q gerade ist.
Wenn p und q beide ungerade sind, so ist $pq, \frac{p^2-q^2}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}$ ein teilerfremdes Tripel, welches man aber auch in der Form $p'^2 - q'^2, 2p'q', p'^2 + q'^2$ schreiben kann (mit teilerfremden p', q', nicht beide ungerade, so dass $p + q = 2p'$, $p - q = 2q'$), $p = p' + q'$, $q = p' - q'$.

Die tieferliegende Erkenntnis, dass alle Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen teilerfremden Zahlen x, y, z notwendig von der Form (9.10) oder der Form $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$ sind, worin die natürlichen Zahlen p und q ($p > g$) nicht beide ungerade und teilerfremd sein sollen, scheint erstmalig in einer anonymen arabischen Quelle aus dem 10. Jahrhundert erwähnt worden zu sein.

In einer Randbemerkung zur Aufgabe II.8 des Diophant, eine gegebene Quadratzahl in die

Summe zweier Quadratzahlen zu zerlegen, sprach Pierre Fermat um 1637 die Behauptung aus, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt. (Man spricht von der Fermatschen Vermutung.)
Er hätte einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, der Rand wäre nur zu schmal, um ihn darauf aufzuschreiben.

Für eine große Anzahl von Exponenten n ist Fermats Behauptung durch Mathematiker wie Euler, Dirichlet, Legendre, Lamé, Kummer, Wieferich, Vandiver, Wagstaff und vielen anderen bestätigt worden. Bis heute ist es jedoch nicht gelungen, die Fermatsche Vermutung vollständig zu beweisen.

Aus einem 1983 von G. Faltings (Universität Wuppertal) bewiesenen Satz folgt nur, dass für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jeden natürlichen Exponenten $n > 2$ jeweils (wenn überhaupt, so nur) höchstens endlich viele Lösungen mit drei von Null verschiedenen ganzen teilerfremden Zahlen x, y, z möglich sind.

Aufgaben

9.1. Man beweise: Die Gleichung $3^n + 4^n = 5^n$ $(n > 2)$ hat keine Lösungen in natürlichen Zahlen.

9.2. Man bestimme alle Pythagoreischen Dreiecke (rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen ein pythagoreisches Zahlentripel bilden), deren Flächeninhalte gleich ihrem Umfang sind.

10 Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von zwei Quadraten

Im vorigen Kapitel wurde die Aufgabe gelöst, ein gegebenes Quadrat in die Summe zweier Quadrate zu zerlegen. Welche natürlichen Zahlen, auch solche, die selbst keine Quadrate sind, lassen sich überhaupt als Summe zweier Quadrate darstellen?
Zunächst gilt

Satz 10.1. Sind zwei Zahlen jeweils Summe zweier Quadrate, so gilt das auch für ihr Produkt.

Dies war wahrscheinlich schon Diophant bekannt. Bei der Lösung der Aufgabe III.22 seiner Arithmetik geht es um die Darstellung von 65 als Summe zweier Quadrate:
"Ihrer Natur nach lässt sich ... die Zahl 65 zweimal in je zwei Quadrate zerfällen, nämlich in 16 und 49, sowie in 64 und 1. Dies rührt daher, dass 65 durch Multiplikation der Zahlen 13 und 5 entsteht, von denen jede sich in zwei Quadrate zerlegen lässt"[61], nämlich

$$65 = 5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2$$

In seinem um 1225 geschriebenen Buch der Quadrate (Liber quadratorum) formulierte Leonardo von Pisa (Fibonacci) die (leicht überprüfbare) Beziehung

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \tag{10.1}$$

aus der sofort der Satz 10.1 folgt.
Aus (10.1) folgt für $a = c$, $b = d$ die Gleichung

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

also für $a > b$ das Pythagoreische Tripel $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$.
Diophant behandelte in seiner Aufgabe II.10 das Problem, eine Zahl, die keine Quadratzahl, jedoch Summe zweier Quadrate ist, in die Summe zweier anderer Quadrate zu zerlegen. Sein Zahlenbeispiel ist

$$13 = 2^2 + 3^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

Bei Fibonacci befindet sich für dieselbe Aufgabe das Beispiel:

$$41 = 4^2 + 5^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{31}{5}\right)^2 = \left(\frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

das er unter Benutzung der Formel (10.1) erhielt.
Führen wir die komplexen Zahlen $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ ein, so ist

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= a^2 + b^2, \qquad |\beta|^2 = c^2 + d^2 \\ |\alpha\beta| &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ |\overline{\alpha}\beta| &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

und (10.1) bedeutet dann, dass $|\alpha|^2|\beta|^2 = |\alpha\beta|^2 = |\overline{\alpha}\beta|^2$ ist. Setzen wir $N(\alpha) = |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$ (Norm der komplexen Zahl α), so lässt sich (10.1) also in der Form

$$N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(\overline{\alpha}\beta) \tag{10.2}$$

[61] Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim (Leipzig 1890, S. 111).

aufschreiben.

Da es sich bei unserer Ausgangsfrage um die Darstellung als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen handelt, wollen wir die komplexen Zahlen der Form $\alpha = a + bi$ mit ganzen Zahlen a, b genauer untersuchen. Diese Zahlen sollen im folgenden Gaußsche Zahlen genannt werden.[62] Die Menge der Gaußschen Zahlen werde mit G bezeichnet. Geometrisch bilden sie in der Zahlenebene die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, auch Gitterpunkte genannt (Abb. 10.1).

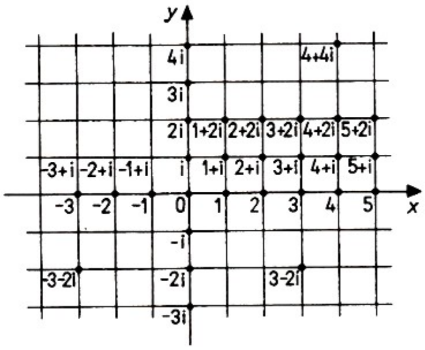


Abb. 10.1

Zu einer beliebigen komplexen Zahl ξ gibt es offensichtlich (vgl. Abb. 10.2) stets eine Gaußsche Zahl $\gamma \in G$, deren Abstand von ξ gleich $|\xi - \gamma| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist.

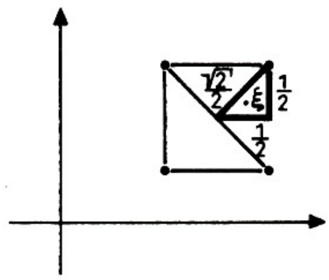


Abb. 10.2

Dies bedeutet, dass zu $\xi \in mathbbC$ stets ein $\gamma \in G$ existiert, so dass

$$N(\xi - \gamma) = |\xi - \gamma|^2 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad N(\xi - \gamma) < 1 \tag{10.3}$$

ist.
Die Addition, Subtraktion und Multiplikation Gaußscher Zahlen liefert wieder Gaußsche Zahlen. Bei der Division Gaußscher Zahlen ergeben sich nicht immer Gaußsche Zahlen. Ist dies doch der Fall, so liegt eine besondere Eigenschaft vor.
Sind α und β Gaußsche Zahlen und ist ihr Quotient ebenfalls eine Gaußsche Zahl, so heißt α ein Teiler von β. (Bezeichnung: $\alpha \mid \beta$).

Beispiele.
$1 - i \mid 2$, da $\frac{2}{1-i} = 1 + i \in G$;
$3 - 4i \mid 17 - 6i$, da $\frac{17-6i}{3-4i} = 3 + 2i \in G$

Gilt $\alpha \mid \beta$, so gibt es ein $\gamma \in G$ mit $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, d.h. $\beta = \alpha\gamma$. Wegen (10.2) folgt hieraus $N(\beta) = N(\alpha)N(\gamma)$ mit natürlichen Zahlen $N(\alpha), N(\gamma), N(\beta)$ und somit $N(\alpha) \mid N(\beta)$ (Teilbarkeit in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen), also:

[62] C. F. Gauß publizierte 1831 eine Arbeit, in der diese Zahlen betrachtet wurden.

Aus $\alpha \mid \beta$ folgt $N(\alpha) \mid N(\beta)$. (10.4)

Die Gaußschen Zahlen 1, -1, i, $-i$ werden Einheiten genannt.
Ist ε eine dieser vier Einheiten, so gilt $N(\varepsilon) = 1$, also $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$, d.h. $\varepsilon \mid 1$.
Ist umgekehrt $\varepsilon = e + fi \in G$ ein Teiler der 1, so gilt wegen (10.4) auch $N(\varepsilon) \mid N(1)$, also $N(\varepsilon) \mid 1$, d. h. $N(\varepsilon) = e^2 + f^2 = 1$. Hieraus folgt entweder $e^2 = 1$ und $f^2 = 0$, d.h. $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ oder $e^2 = 0$ und $f^2 = 1$, d.h. $\varepsilon = i$ oder $\varepsilon = -i$.

Wegen $\alpha = 1 \cdot \alpha = (-1)(-\alpha) = i(-i\alpha) = (-i)i\alpha$ ist jede der vier Einheiten Teiler einer jeden Gaußschen Zahl α.
Zwei Gaußsche Zahlen α und β heißen assoziiert (Bezeichnung: $\alpha \equiv \beta$), wenn es eine Einheit ε mit $\alpha = \varepsilon\beta$ gibt. (Dann gilt auch $\beta = \varepsilon'\alpha$, worin $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}$ eine Einheit ist.) Die zu einer Zahl α assoziierten sind $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$.

Jede Gaußsche Zahl ist durch die zu ihr assoziierten Gaußschen Zahlen (insbesondere durch sich selbst) und durch die Einheiten teilbar.
Von den Einheiten verschiedene Gaußsche Zahlen ρ (das sind die ρ mit $N(\rho) > 1$) heißen Gaußsche Primzahlen, wenn sie nur durch zu ihr assoziierte Gaußsche Zahlen und durch die Einheiten teilbar sind. Eine Gaußsche Primzahl ρ besitzt also außer den acht (trivialen) Teilern 1, ρ, -1, $-\rho$, i, $i\rho$, $-i\rho$ keine weiteren Teiler.
Wir werden den folgenden Satz beweisen.

Satz 10.2. Jede von einer Einheit verschiedene Gaußsche Zahl ist im wesentlichen[63] eindeutig als Produkt von Gaußschen Primzahlen darstellbar.

Dieser Satz entspricht dem in der Menge der natürlichen Zahlen geltenden Satz von der eindeutigen Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl als Produkt von Primzahlen[64].

Zur Vorbereitung wird ein Divisionsverfahren erklärt, das dem Euklidischen Algorithmus für ganze Zahlen entspricht.

Satz 10.3. Es seien $\beta \neq 0$ und α beliebige Gaußsche Zahlen. Dann gibt es ein Paar γ, η Gaußscher Zahlen mit
$$\alpha = \beta\gamma + \eta \quad \text{und} \quad N(\eta) < N(\beta) \tag{10.5}$$

Beweis. Nach (10.3) existiert zu $\xi = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}$ ein $\gamma \in G$ mit $N\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right) = 1$.
Setzt man $\alpha - \beta\gamma = \eta$, so gilt

$$N(\eta) = N(\alpha - \beta\gamma) = N\left(\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right)\right) = N(\beta)N\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right) < N(\beta)$$

qed.
Ist in (10.5) $\eta \neq 0$, so folgt ebenso die Existenz Gaußscher Zahlen γ_1, η_1 mit

$$\beta = \eta\gamma_1 + \eta_1 \quad \text{und} \quad N(\eta_1) < N(\eta)$$

So fortsetzend erhält man eine Folge Gaußscher Zahlen $\eta_1 \neq 0$, γ_1, $\eta_2 \neq 0$, γ_2, $\eta_3 \neq 0$, γ_3, ...,

[63] Im wesentlichen, d.h. abgesehen von der Anordnung der Primzahlen, dem Auftreten von Einheiten und den Möglichkeiten bei der Wahl assoziierter Gaußscher Primzahlen
[64] Vgl. H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen (2. Aufl., Berlin 1984, Satz 3).

$\eta_n \neq 0$, γ_n, η_{n+1}, $\gamma n + 1$ mit[65]

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1\gamma_2 + \eta_2 && N(\eta_2) < N(\eta_1) \\ \eta_1 &= \eta_2\gamma_3 + \eta_3 && N(\eta_3) < N(\eta_2) \\ &\ldots \\ \eta_{n-2} &= \eta_{n-1}\gamma_n + \eta_n && N(\eta_n) < N(\eta_{n-1}) \\ \text{aber} \quad \eta_{n-1} &= \eta_n\gamma_{n+1} + \eta_{n+1} && N(\eta_{n+1}) = 0, \eta_{n+1} = 0 \text{also} \quad \eta_{n-1} \quad = \eta_n\gamma_{n+1} \end{aligned}$$

Alle Gaußschen Zahlen τ mit den beiden Eigenschaften
(I) $\tau \mid \alpha$ und $\tau \mid \beta$
(II) aus $\kappa \mid \alpha$ und $\kappa \mid \beta$ folgt $\kappa \mid \tau$ (und umgekehrt)
sind assoziiert.
Sind nämlich τ_1, τ_2 zwei solche Zahlen, so gilt $\tau_1 \mid \tau_2$, also $\tau_2 = \delta\tau_1$, und $\tau_2 \mid \tau_1$, also $\tau_1 = \delta'\tau_2$. Hieraus folgt $\tau_2 = \delta\tau_1 = \delta\delta'\tau_2$, d.h. $\delta\delta' = 1$, also $\delta \mid 1$, δ ist eine Einheit und τ_1, τ_2 sind assoziiert.

Die somit im wesentlichen (bis auf Assoziierte) eindeutig bestimmte Zahl τ mit (I) und (II) heißt der größte gemeinsame Teiler von α und β. (Bezeichnung: $\tau = (\alpha,\beta)$.)

Ist nun $\alpha = \beta\gamma + \eta$ mit $N(\eta) < N(\beta)$, so gilt offenbar: Jeder gemeinsame Teiler von α und β teilt auch η und jeder gemeinsame Teiler von β und η teilt auch α.
Ist $\tau \equiv (\alpha, \beta)$ und $\omega \equiv (\beta, \eta)$, so folgt $\omega \mid \tau$ und $\tau \mid \omega$, d. h., τ und ω sind assoziiert: $(\alpha, \beta) \equiv (\beta,\eta)$.
Aus der Divisionskette ergibt sich daher

$$(\alpha,\beta) \equiv (\beta,\eta) \equiv (\eta,\eta_1) \equiv \ldots \equiv (\eta_{n-2}, \eta_{n-1}) \equiv (\eta_{n-1},\eta_n) \equiv (\equiv -n,0) \equiv eta_n$$

Der größte gemeinsame Teiler (α, β) wird durch den letzten von 0 verschiedenen Divisionsrest η_n gegeben.

Man schreibe nun die Gleichungskette des Divisionsalgorithmus in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \eta_n &= \eta_{n-2} - \eta_{n-1}\gamma_n \\ \eta_{n-1} &= \eta_{n-3} - \eta_{n-2}\gamma_{n-1} \\ &\ldots \\ \eta_3 &= \eta_1 - \eta_2\gamma_3 \\ \eta_2 &= \eta - \eta_1\gamma_2 \\ \eta_1 &= \beta - \eta\gamma_1 \\ \eta &= \alpha - \beta\gamma \end{aligned}$$

Setzt man erst η_{n-1} aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung ein, danach η_{n-2} aus der dritten Gleichung in die so erhaltene Gleichung, und so weiter, so erhält man schließlich für den größten gemeinsamen Teiler η_n von α, β eine Darstellung der Form

$$(\alpha, \beta) \equiv \eta_n = \varphi\alpha + \psi\beta \tag{10.6}$$

mit Gaußschen Zahlen φ und ψ.

[65] Die Normen sind natürliche Zahlen und nehmen monoton ab. Daher wird der fortgesetzte Divisionsalgorithmus nach endlich vielen Schritten dadurch abbrechen, dass die Norm 0 wird.

Ist insbesondere $(\alpha,\beta)\equiv 1$, so gibt es Gaußsche Zahlen κ und λ mit

$$1=\kappa\alpha+\lambda\beta \tag{10.7}$$

Zum Beweis des Satzes 10.2 benötigen wir noch den

Hilfssatz 10.4. Ist ρ eine Gaußsche Primzahl und sind α,β beliebige Gaußsche Zahlen, so gilt: Aus $\rho\mid\alpha\beta$ folgt $\rho\mid\alpha$ oder $\rho\mid\beta$.

Beweis. Aus $\rho\nmid\alpha$ folgt $(\rho,\alpha)=1$, also gibt es Gaußsche Zahlen κ,λ mit $1=\kappa\rho+\lambda\alpha$ oder $\beta=(\kappa\beta)\rho+\lambda(\alpha\beta)$. Aus $\rho\mid\alpha\beta$ folgt somit $\rho\mid\beta$. Qed.

Beweis des Satzes 10.2.
a) Der Existenzbeweis für eine Darstellung der Gaußschen Zahl α (mit $N(\alpha)>1$) als Produkt von Gaußschen Primzahlen, $\alpha=\rho_1\rho_2...\rho_r$, wird mittels vollständiger Induktion geführt.

Ist $N(\alpha)=2$, so ist α Gaußsche Primzahl (vgl. Aufgabe 10.1). Es sei $N(\alpha)>2$. Die Behauptung sei für alle Gaußschen Zahlen, deren Norm >1 aber $<N(\alpha)$ ist, bewiesen.
Ist $\alpha=\rho_1$ Gaußsche Primzahl, so ist nichts weiter zu beweisen. Ist α keine Gaußsche Primzahl, so gibt es eine Gaußsche Zahl β mit $\beta\mid\alpha$, so dass $\alpha=\beta\gamma$, $M(\beta)>1$, $N(\gamma)>1$ und $N(\beta)<N(\alpha)$, $N(\gamma)<N(\alpha)$.

Nach der Induktionsannahme besitzen β und γ Produktzerlegungen in Gaußsche Primzahlen, etwa $\beta=\rho_1...\rho_q$, $\gamma=\rho_{q+1}...\rho_r$, und somit $\alpha=\rho_1\rho_2...\rho_r$.

b) Zur Eindeutigkeit ist zu zeigen: Sind $\alpha\equiv\rho_1\rho_2...\rho_r$ und $\alpha\equiv\pi_1\pi_2...\pi_s$ zwei Darstellungen von α als Produkt von Gaußschen Primzahlen, so gilt
1. $s=r$,
2. die Gaußschen Primzahlen $\pi_1,...,\pi_s$ sind (bis auf die Reihenfolge) zu den Gaußschen Primzahlen $\rho_1,...,\rho_r$ assoziiert.

Der Eindeutigkeitsbeweis wird auch mittels vollständiger Induktion geführt.
Für $N(\alpha)=2$ ist, da α dann Gaußsche Primzahl ist, $r=s=1$ und etwa $\alpha\equiv\rho_1\equiv\pi_1$.
Es sei $N(\alpha)>2$. Die Behauptung sei für alle Gaußschen Primzahlen β mit $1<N(\beta)<N(\alpha)$ bewiesen. Aus $\rho_1\mid\pi_1...\pi_s$ folgt nach dem Hilfssatz 10.4 $\rho_1\mid\pi_1$ oder $\rho_1\mid\pi_2$ oder ... oder $\rho_1\mid\pi_s$, etwa $\rho_1\mid\pi_1$, d.h. $\pi_1\equiv\rho_1$. Dann gilt

$$\frac{\alpha}{\pi_1}\equiv\pi_2...\pi_s\equiv\rho_2...\rho_r$$

Wegen $1<N\left(\frac{\alpha}{\pi_1}\right)<N(\alpha)$ folgt (nach der Induktionsannahme) $s-1=r-1$, d.h. $s=r$, und das Übereinstimmen der $\pi_2,...,\pi_s$ mit den $\rho_2,...,\rho_r$ bis auf Assoziierte und bis auf die Reihenfolge. Qed.

Es soll nun eine Übersicht über die Gaußschen Primzahlen gegeben werden.

Zunächst gilt: Wenn ρ eine Gaußsche Primzahl ist, dann gibt es sicher eine natürliche Zahl n mit $\rho\mid n$ (z. B. $n=\rho\overline{\rho}=N(\rho)$). Es sei p die kleinste natürliche Zahl mit $\rho\mid p$. Dann ist p eine Primzahl.[66]
Es sind also alle Gaußschen Primzahlen gefunden, wenn für jede Primzahl p alle (nichtassoziierten) Gaußschen Primzahlen, die p teilen, bestimmt sind.

[66] Wäre p keine Primzahl, also $p=ab$ mit natürlichen Zahlen a,b ($1<a<p$, $1<b<p$), so folgt aus $\rho\mid ab$, dass $\rho\mid a$ oder $\rho\mid b$. Wegen $a<p$, $b<p$ widerspricht dies der Wahl von p als kleinster natürlicher Zahl, die von ρ geteilt wird.

Wir unterscheiden die Fälle:

1. $p = 2$, 2. $p > 2$, 2. a) p Primzahl der Form $4m + 3$, 2. b) p Primzahl der Form $4m + 1$.

1. Es sei $p = 2$. Aus $\rho \mid 2$ und $2 = (1 + i)(1 - i)$ folgt nach dem Hilfssatz 10.4 $\rho \mid 1 + i$ oder $\rho \mid 1 - i$. Wegen $N(1 + i) = 2$ ist $1 + i$ Gaußsche Primzahl (vgl. Aufg. 10.1), und $1 - i = (-i)(1 + i)$ ist zu $1 + i$ assoziiert.
Es ist $\rho \equiv (1 + i)$ und $2 \equiv (1 + i)^2$.

2. Es sei $p > 2$. Aus $\rho \mid p$ folgt nach (10.4) $N(\rho) \mid N(p)$. Da $N(p) = p^2$ ist, muss $N(\rho) = p$ oder $N(\rho) = p^2$ sein.
2.a) Es sei p von der Form $4m + 3$ und $\rho = a + bi$ (a, b ganzzahlig) ein Teiler von p. Da die Summe zweier Quadrate $N(\rho) = a^2 + b^2$ stets die Reste 0, 1, 2 bei der Division durch 4 hat, nie jedoch den Rest 3, ist eine Darstellung $N(\rho) = p$ in diesem Fall unmöglich.
Es muss also $N(\rho) = p^2$ sein. Aus $\rho \mid p$ folgt $p = \rho\varepsilon$ (mit einer Gaußschen Zahl ε). Wegen $p^2 = N(p) = N(\rho)N(\varepsilon)$ muss $N(\varepsilon) = 1$, also ε Einheit sein. Somit ist ρ zu p assoziiert: $\rho \equiv p$.

2.b) Es sei p eine Primzahl der Form $4m + 1$.
Für Primzahlen p ist stets $(p - 1)! + 1$ durch p teilbar.[67] Nun ist

$$(p-1)! - 1 = \left(1 \cdot 2 \cdot 3 ... \frac{p-1}{2}\right)(p-1)(p-2)(p-3)...\left(p - \frac{p-1}{2}\right) - 1$$

Die Division durch p liefert auf der linken Seite den Rest 0, auf der rechten dagegen den Rest[68]

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-1}{2}\right)!(-1)(-2)(-3)...\left(-\frac{p-1}{2}\right) + 1 &= \left(\frac{p-1}{2}\right)!(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(-\frac{p-1}{2}\right) + 1 \\ &= \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 + 1\end{aligned}$$

Somit ist p ein Teiler von $g^2 + 1$ mit $g = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$.
Aus $\rho \mid p$ folgt $\rho \mid g^2 + 1 = (g + i)(g - i)$, also $\rho \mid g + 1$ oder $\rho \mid g - 1$. ρ ist nicht zu p assoziiert, also p keine Gaußsche Primzahl.
Wäre nämlich ρ zu p assoziiert, so würde auch $p \mid g + i$ oder $p \mid g - i$ gelten, was wegen $\frac{g}{p} + \frac{i}{p} \notin G$ und $\frac{g}{p} - \frac{i}{p} \notin G$ unmöglich ist.

Die Primzahl p ist somit in G zerlegbar: $p = \rho\alpha$ mit $N(\rho) > 1$, $N(\alpha) > 1$. Aus $N(p) = p^2 = N(\rho)N(\alpha)$ folgt dann $N(\rho) = p$ und $N(\alpha) = p$, d. h. (vgl. Aufg. 10.1), ρ und α sind Gaußsche Primzahlen.
Setzt man $\rho = a + bi$ (a, b ganzzahlig), so folgt $N(\rho) = p = a^2 + b^2 = (a + bi)\alpha$, d.h. $\alpha = a - bi = \overline{\rho}$.
Die Primzahl p ist in die Gaußschen Primzahlen ρ und $\overline{\rho}$ zerlegbar, $p = \rho\overline{\rho}$.
Zusammenfassend gilt der folgende

Satz 10.5. Die Gaußschen Primzahlen sind
1. die zu $1 + i$ assoziierten Gaußschen Zahlen,
2. die zu den Primzahlen p der Form $4m + 3$ assoziierten Gaußschen Zahlen,
3. die zu $a + bi$ und $a - bi$ assoziierten Gaußschen Zahlen, wobei a, b ganzzahlige Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = p$ mit einer Primzahl p der Form $4m + 1$ sind.

[67] Beweis z. B. in: H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen (2. Aufl., Berlin 1984, S. 61).
[68] Da p von der Form $4m + 1$ ist, ist $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

Als schönes Nebenergebnis ergibt sich der

Satz 10.6. Jede Primzahl der Form $p = 4m + 1$ lässt sich auf genau 8 Arten in die Summe zweier Quadrate, $p = a^2 + b^2$, zerlegen.

Beweis. Nach dem Satz 10.5 gilt

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = N(a + bi)$$

genau dann, wenn $p = 2$ oder p von der Form $4m + 1$ ist. Ist p von der Form $4m + 1$, so gilt $p = \rho\overline{\rho}$, und alle Gaußschen Primzahlen, die p teilen, sind die zu ρ und $\overline{\rho}$ assoziierten Zahlen, also die acht verschiedenen Zahlen ρ, $i\rho$, $-\rho$, $-i\rho$, $\overline{\rho}$, $i\overline{\rho}$, $-\overline{\rho}$, $-i\overline{\rho}$.
Die acht verschiedenen Möglichkeiten entsprechen den acht Gleichungen $(\pm a)^2 + (\pm b^2) = (\pm b)^2 + (\pm a)^2 = p$. Bis auf die Reihenfolge und die Vorzeichen von a und b gibt es nur eine Quadratsummendarstellung.

Abschließend wollen wir mit Hilfe der Gaußschen Zahlen noch die folgende Frage beantworten: Auf wieviel verschiedene Arten lässt sich eine natürliche Zahl n als Summe zweier Quadrate a^2, b^2 ($a \neq 0$, $b \neq 0$) darstellen?

Es sei $n = a^2 + b^2 = \alpha\overline{\alpha}$ mit $\alpha = a + bi$ (a, b ganzzahlig). Wir benutzen die eindeutige Zerlegung der natürlichen Zahl n in Primzahlen und die eindeutige Zerlegung der Gaußschen Zahl α in Gaußsche Primzahlen:

$$1. \quad n = 2^e p_1^{f_1} p_2^{f_2} ... p_k^{f_k} q_1^{h_1} q_2^{h_2} ... q_s^{h_s}$$

($p_1, p_2, ..., p_k$ Primzahlen der Form $4m + 1$, $q_1, ..., a_s$ Primzahlen der Form $4m + 3$, e, f_1, f_2, ..., f_k, h_1, h_2, ..., h_s ganze Zahlen ≥ 0).

$$2. \quad \alpha = j^y (1 + i)^u \rho_1^{v_1} \rho_2^{v_2} ... \rho_k^{v_k} \overline{\rho_1}^{w_1} \overline{\rho_2}^{w_2} ... \overline{\rho_k}^{w_k} q_1^{x_1} q_2^{x_2} ... q_s^{x_s}$$

($\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k$ Gaußsche Primzahlen, die Teiler von Primzahlen der Form $4m+1$ sind, $q_1, q_2, ..., q_s$ Primzahlen der Form $4m + 3$, $y = 0, 1, 2$ oder 3, $u, v_1, v_2, ..., v_k, w_1, w_2, ..., w_k, x_1, x_2, ..., x_s$ ganze Zahlen ≥ 0)[69] Aus 2. folgt

$$3. \quad n = \alpha\overline{\alpha} = 2^u p_1^{v_1+w_1} p_2^{v_2+w_2} ... p_k^{v_k+w_k} q_1^{2x_1} ... q_s^{2x_s}$$

Der Vergleich von 1. und 3. ergibt:

$y = 0,1,2,3$ (vier Möglichkeiten)
$u = e$ (eindeutig)
$v_1 + w_1 = f_1$ ($f_1 + 1$ Möglichkeiten der Wahl von v_1 bzw. w_1)[70]
...
$v_k + w_k = f_k$ ($f_k + 1$ Möglichkeiten der Wahl von v_k bzw. w_k)
$2x_1 = h_1, ..., 2x_s = h_s$ (jeweils eindeutig möglich, sofern alle Zahlen $h_1, ..., h_s$ gerade sind).

Folglich gibt es $4(f_1 + 1)(f_2 + 1)...(f_k + 1)$ Möglichkeiten der Darstellung von n als Summe zweier Quadrate, vorausgesetzt, alle h_i in 1. sind gerade.

[69] Einige der Exponenten können gleich Null sein. Dadurch ist ja auch die Wahl der gleichen Anzahlen k und s in 1. und 2. möglich.

[70] Die $f_1 + 1$ Möglichkeiten der Wahl von z.B. v_1 (dann ist w_1 eindeutig bestimmt) ergeben sich so: $v_1 = 0$, dann $w_1 = f_1 \cdot v_1 = 1$, dann $w_1 = f_1 - 1$,...,$v_1 = f_!$. dann $w_1 = 0$.

Satz 10.7. Ist $n = 2^e p_1^{f_1} p_2^{f_2} ... p_k^{f_k} q_1^{h_1} q_2^{h_2} ... q_s^{h_s}$ (p_1,$p_2, ..., p_k$ Primzahlen der Form $4m + 1$, $q_1, q_2, ..., q_s$ Primzahlen der Form $4m + 3$) und gilt

$$2 \mid h_1, 2 \mid h_2, ..., 2 \mid h_s$$

so kann man n auf $4(f_1 + 1)(f_2 + 1)...(f_k + 1)$ Arten als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen darstellen.
Gilt für ein j unter gleichen Voraussetzungen $2 \nmid h_j$, so lässt sich n nicht als Summe zweier Quadrate darstellen.

Es sind also nicht alle natürlichen Zahlen als Summe zweier Quadrate darstellbar, insbesondere nicht die Primzahlen der Form $4m + 3$.
Man kann zeigen, dass jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten darstellbar ist. (Von Fermat im 17. Jh. vermutet, von Lagrange im 18. Jh. bewiesen, die Anzahl der Darstellungen einer Zahl bestimmte Jacobi im 19. Jh.) Dass 4 die kleinste Anzahl von Quadraten ist, durch die alle natürlichen Zahlen darstellbar sind, folgt aus der Tatsache, dass eine Zahl der Form $8m + 7$ nicht als Summe von drei Quadratzahlen darstellbar ist (Aufgabe 10.2).

Beispiele. $13 = 4+9$, $41 = 25+16$, $65 = 5·13 = 64+1$, $7681 = 25^2+84^2$, $600577 = 96^2+769^2$, $299521 = 540^2 + 89^2$.
Die Zahl $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 4410$ besitzt $4 \cdot 2 = 8$ Darstellungen als Summe zweier Quadrate.
Die Zahl $3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 19 = 59700375$ besitzt keine Darstellung als Summe zweier Quadrate, da die Primzahl 3 den ungeraden Exponenten 3 in der Primzahlzerlegung hat.
Die Zahl $5^4 \cdot 19^2 = 225625$ besitzt $4 \cdot 5 = 20$ Darstellungen als Summe zweier Quadrate.

Aufgaben

10.1. Man zeige: Eine Gaußsche Zahl α, deren Norm $N(\alpha) = p$ eine Primzahl ist, ist eine Gaußsche Primzahl.

10.2. Man beweise: Eine Zahl der Form $8m + 7$ ist nicht als Summe von drei Quadratzahlen darstellbar.

10.3. Eine Zerlegung einer Zahl n in die Summe zweier Quadrate $n = a^2 + b^2$ heißt primitiv, falls $(a, b) = 1 ist$. Man zeige:
n ist primitiv in die Summe zweier Quadrate zerlegbar genau dann, wenn $4 \nmid n$ und Primzahlen der Form $4m + 3$ als Faktoren nicht auftreten. Dann gibt es 2^{2+k} verschiedene Arten, die Zahl n als Summe zweier Quadrate primitiv darzustellen (k ist die Anzahl der Primzahlen der Form $4m + 1$ in der Primzahlzerlegung von n).

11 Quadratische Gleichungen

Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so gibt es immer eine und nur eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^2 = a$. Diese eindeutig bestimmte Zahl b heißt Quadratwurzel aus a und wird mit $b = \sqrt{a}$ bezeichnet.
Beispielsweise gilt

$$\sqrt{25} = 5, \sqrt{2} \approx 1{,}4142136, (\sqrt{a})^2 a(a > 0), \sqrt{a^2} = |a|$$

Ist nun α eine beliebige komplexe Zahl, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, so gilt $\beta^2 = \alpha$ mit einer komplexen Zahl $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$, also

$$a^2(\cos 2\psi + i\sin 2\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

genau dann, wenn $s^2 = r$, d.h. $s = \sqrt{r}$ ist und 2ψ mit φ übereinstimmt oder 2ψ sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π von φ unterscheidet ($2\psi \equiv \varphi(2\pi)$), d.h., $2\psi = \varphi + 2\pi g$ (g ganze Zahl). Ist darin g gerade, $g = 2m$, so ist

$$\frac{\varphi + 2\pi g}{2} = \frac{\varphi}{2} + m2\pi$$

ist g ungerade, $g = 2m + 1$, so ist

$$\frac{\varphi + 2\pi g}{2} = \frac{\varphi + 2\pi}{2} + m2\pi$$

Es ist also entweder $\psi \equiv \frac{\varphi}{2}$ oder $\psi \equiv \frac{\varphi+2\pi}{2}(2\pi)$. Sowohl für die komplexe Zahl

$$\beta_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

als auch für die komplexe Zahl

$$\beta_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 2\pi\right)\right)$$

und nur für diese Zahlen, ist das Quadrat $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Somit gilt der

Satz. Ist α eine komplexe Zahl, so gibt es genau zwei verschiedene komplexe Zahlen β_1, β_2 mit $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \alpha$.

Jede der Zahlen $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi g}{2} + i\sin\frac{\varphi+2\pi g}{2}\right)$ mit $g = 0$ oder $g = 1$ heißt eine Quadratwurzel aus $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (vgl. Abb. 11.1).

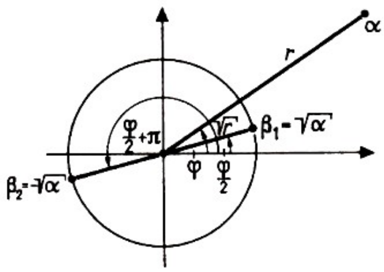


Abb. 11.1

Definition. Die Zahl $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ mit $0\le\frac{\varphi}{2}<\pi$ heißt der Hauptwert unter den beiden Quadratwurzeln aus $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Er wird mit $\sqrt{\alpha}$ bezeichnet.

Ist speziell α positiv reell, also $\alpha=r,\varphi=0$, so ist der Hauptwert gleich $\sqrt{r}$; es stimmt dann die Bezeichnung mit der bisher gebräuchlichen überein.
Der Betrag von $\sqrt{\alpha}$ mit $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ist also $\sqrt{|\alpha|}=\sqrt{r}$ das Argument ist $0\le\frac{\varphi}{2}<\pi$. Ist

$$\begin{aligned}\beta_1&=\sqrt{\alpha}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\qquad\left(0\le\frac{\varphi}{2}<\pi\right)\quad\text{so}\\ \beta_2&=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)(\cos\pi+i\sin\pi)\\ &=\sqrt{\alpha}(-1)=-\sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

Die beiden Quadratwurzeln aus α sind somit $\sqrt{\alpha}$ (Hauptwert) und $-\sqrt{\alpha}$.

Beispiele.

(1) Die Quadratwurzeln aus 1 sind $\sqrt{1}=1,\ -\sqrt{1}=-1$.

(2) Die Quadratwurzeln aus -1 sind $\beta_1=\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ (wegen $-1=\cos\pi+i\sin\pi$), also

$$\sqrt{-1}=-i \tag{11.1}$$

und $\beta_2=-\sqrt{-1}=-i$.

(3) Es ist $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{i}=-i$ (der Quotient der Hauptwerte $\sqrt{1},\sqrt{-1}$, aber $\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{-1}=i$ (der Hauptwert der Wurzel). Die Gleichung $\frac{1}{i}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{-1}=i$ ist ein Fehlschluss, es ist ja $\frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}}\ne\sqrt{\frac{+1}{-1}}$. Vor gedankenloser Verwendung des Wurzelzeichens sei gewarnt!

(4) Die Quadratwurzeln aus einer negativen reellen Zahl $a=|a|(-1)=|a|(\cos\pi+i\sin\pi)$ sind $\beta_1=\sqrt{a}=\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{|a|}i$ und $\beta_2=-\sqrt{|a|}i$; z.B. $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$, $\sqrt{-9}=3i$ (Hauptwerte).

(5) Die Quadratwurzeln aus einer positiven Zahl a sind $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$.

(6) Die Quadratwurzeln aus $i=\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}$ sind $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}$, also (Hauptwert)

$$\sqrt{i}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \tag{11.2}$$

und $-\sqrt{i}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$.

(7) Es sind die Quadratwurzeln aus $3+4i$ und $3-4i$ zu berechnen. Die Zahlen $3+4i$ und $3-4i$ haben den Betrag $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Ist φ das Argument von $3+4i$, so hat $3-4i$ das Argument $2\pi-\varphi$. Es ist $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.
Zur Bestimmung von $cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}$ benutze man die Beziehung $\cos 2\psi=2\cos^2\psi-1$, also $\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1$, d.h. $\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\varphi+1}{2}=\frac{4}{5}$.
Aus $\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}=1$ ergibt sich dann $\sin^2\frac{\varphi}{2}=1-\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{5}$.

Wegen $0\le\frac{\varphi}{2}<\pi$ sind $\cos\frac{\varphi}{2},\sin\frac{\varphi}{2}$ beide positiv; somit ist $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Hieraus folgt $\sqrt{3+4i}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ $(0\le\varphi<\pi)$, also

$$\sqrt{3+4i}=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=2+i\quad\text{(Hauptwert)}$$

Die zweite Quadratwurzel aus $3+4i$ ist $-\sqrt{3+4i}=-2-i$. Die Quadratwurzeln aus $3-4i$ sind

$$\sqrt{5}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{2\pi-\varphi}{2}\right)\qquad\text{und}\qquad\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}+\pi\right)\right)$$

Es ist

$$\begin{aligned}\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)&=-\cos\frac{\varphi}{2},\quad \sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\frac{\varphi}{2}\\ \cos\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right)&=\cos\frac{\varphi}{2},\quad \sin\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

Da $\frac{\pi}{2}<\pi-\frac{\varphi}{2}<pi$, ist $\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)$ positiv, also $\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)$ negativ. Somit ist $\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Die beiden Quadratwurzeln aus $3-4i$ sind

$$\sqrt{3-4i}=\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-2+i=-(2-i)\quad\text{(Hauptwert)}$$

und $2-i$ (vgl. Abbildung 11.2)

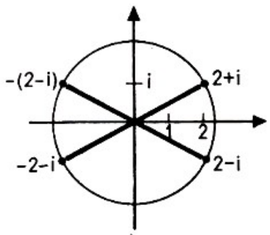


Abb. 11.2
Die Quadratwurzeln aus $3+4i$ und $3-4i$

Wie im Beispiel (7) gilt allgemein: Sind $c+di$, $-(c+di)$ die Quadratwurzeln aus $a+bi$, so sind die zu diesen Quadratwurzeln konjugierten Zahlen $c-di$, $-(c-di)$ die Quadratwurzeln aus der zur gegebenen Zahl konjugierten Zahl $a-bi$.

Ist nämlich $\alpha=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist

$$\overline{\alpha}=a-bi=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$$

Die Quadratwurzeln aus α sind

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\quad,\quad\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\pi\right)\right),\quad\left(0\le\frac{\varphi}{2}<\pi\right)$$

Die Quadratwurzeln aus $\overline{\alpha}$ sind

$$\begin{aligned}\sqrt{r}\left(\cos\frac{-\varphi}{2}+i\sin\frac{-\varphi}{2}\right)&=\sqrt{r}\left(\cos\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\\ &=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{r}\left(\overline{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{-\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{-\varphi}{2}+\pi\right)\right)=\sqrt{r}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\\ &=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\pi-\frac{-\varphi}{2}\right)\right)=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(-\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)\right)\\ &=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)-i\sin\left(\frac{-\varphi}{2}+\pi\right)\right)=\sqrt{r}\left(\overline{\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{-\varphi}{2}+\pi\right)}\right)\end{aligned}$$

Die Quadratwurzeln aus einer komplexen Zahl $a + ib$ lassen sich auch nach der folgenden Methode berechnen. Angenommen, es ist $x + iy$ eine komplexe Zahl mit $(x + iy)^2 = a + ib$. Dann gilt $x^2 - y^2 + i2xy = ai + b$, also $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$ oder

$$x^2 + (-y)^2 = a \qquad \text{und} \qquad x^2(-y^2) = -\frac{b^2}{4} \tag{11.3}$$

Die reellen Zahlen x^2 und $-y^2$ sind somit (Satz von Vieta) die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0 \tag{11.4}$$

Die Lösungen sind

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \qquad , \qquad \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Da $x^2 > 0$, $-y^2 < 0$ ist, muss

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \qquad \text{und} \qquad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2}a) \tag{11.5}$$

sein. Hieraus folgt entweder

$$\text{entweder} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{oder} \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{11.6}$$

$$\text{entweder} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \qquad \text{oder} \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \tag{11.7}$$

Wegen $2xy = b$ sind x und y für positives b mit gleichem Vorzeichen zu wählen, für negatives b aber x und y mit entgegengesetztem Vorzeichen.
Dass umgekehrt für diese Zahlen $x+iy$ wirklich $(x+iy)^2 = a+ib$ gilt, ist leicht zu bestätigen.

Bezeichnet $\operatorname{sgn} b$ das Vorzeichen von b; so sind somit die beiden Quadratwurzeln aus $a + bi$ gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right) \quad \text{und} \tag{11.8}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right) \quad \text{und} \tag{11.9}$$

Welche der beiden Zahlen der Hauptwert $a+ib$ ist, kann man aus der Lage in der Zahlenebene bestimmen.

Beispiel. Um die Quadratwurzeln aus $3-4i$ zu bestimmen, mache man den Ansatz $(x+iy)^2 = 3 - 4i$. Der Vergleich ergibt $x^2 + (-y^2) = 3$, $2xy = -4$, also $x^2(-y)^2 = -4$.
Die quadratische Gleichung $t^2 - 3t - 4 = 0$ hat die Lösungen

$$\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3^2 + 4^2}) = 4 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3^2 + 4^2}) = -1 \qquad (x^2 \text{ und } -y^2)$$

Hieraus folgt $x = 2$ oder $x = -2$ und $y = 1$ oder $y = -1$. Da $2xy = -4 < 0$, muss $x = 2$ und $y = -1$ oder $x = -2$ und $y = 1$ sein. Die Quadratwurzeln aus $3 - 4i$ sind $2 - i$ und $-2 + i = -(2 - i)$. Der Hauptwert ist $\sqrt{3 - 4i} = -2 + i$.

Die bis jetzt betrachteten Gleichungen

$$z^2 = \alpha \tag{11.10}$$

(gegeben die komplexe Zahl α, gesucht die beiden komplexen Zahlen z mit $z^2 = \alpha$) sind spezielle quadratische Gleichungen.

Es seien α, β beliebige (komplexe) Zahlen. Wir fragen nach den Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \tag{11.11}$$

Ist z eine Lösung von (11.11), so gilt notwendig

$$z^2 + \alpha z = -\beta, \quad z^2 + \alpha z + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta, \quad \left(z^2 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta$$

also entweder

$$z + \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \qquad \text{(Hauptwert) oder} \qquad z + \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta}$$

d.h. entweder

$$z = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \qquad \text{(Hauptwert) oder} \qquad z = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \tag{11.12}$$

Umgekehrt sind die Zahlen (11.12) tatsächlich Lösungen von z.
Die bekannten Lösungsformeln für quadratische Gleichungen gelten also auch allgemeiner im Bereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Aufgaben

11.1. Man berechne $\sqrt{2i}$.

11.2. Man berechne a) $\sqrt{-15+8i}$, b) die Quadratwurzeln aus $-5+12i$, c) die Quadratwurzeln aus $-7+24i$, d) $\sqrt{4+3i}$.

11.3. Man löse die quadratische Gleichung $z^2 + (5+3i)z + \frac{9}{2}i = 0$.

11.4. Man löse die quadratische Gleichung $z^2 + 15z + 57 = 0$.

11.5. Wenn $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, so $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

11.6. Man berechne a) die Quadratwurzeln aus $1 + \sqrt{3}i$,
b) die Quadratwurzeln aus $1 - \sqrt{3}i$,
c) $\sqrt{1+\sqrt{-3}} - \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ oder $-\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$,
d) $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ oder $-\sqrt{1-\sqrt{-3}} - \sqrt{1-\sqrt{-3}}$

12 Über die Teilung des Kreises in gleiche Bögen

Am 1. Juni 1796 konnte man in dem damals in Jena erscheinenden "Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung" (Nr. 66) unter der Rubrik "Neue Entdeckungen" lesen:

"Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich des Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden. C. F. Gauß, a. Braunschweig. Stud. der Mathematik zu Göttingen.

Es verdient angemerkt zu werden, dass Hr. Gauß jetzt in seinen 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit eben so glücklichem Erfolge der Philosophie und der klassischen Literatur als der höheren Mathematik gewidmet hat.
Den 18. April 96. E. A. W. Zimmermann, Prof."[71]

Die Beschreibung der geometrischen Konstruktion der regelmäßigen n-Ecke mit $n = 3, 5, 15$ ist nicht schwer.
Trägt man von einem beliebigen Umfangspunkt eines Kreises sechsmal hintereinander seinen Radius ab, so erhält man ein regelmäßiges 6-Eck. Verbindet man jede zweite Ecke, so entsteht das regelmäßige 3-Eck (vgl. Abb. 12.1).

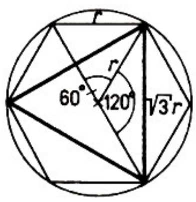


Abb. 12.1
Regelmäßiges Sechseck (Seitenlänge r), Regelmäßiges Dreieck (Seitenlänge $\sqrt{3}$)

Die Seite des einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 10-Ecks ist der größere Abschnitt des nach dem "Goldenen Schnitt" geteilten Radius dieses Kreises. Verbindet man jede zweite Ecke, so entsteht das regelmäßige 5-Eck.

Es sei einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ein regelmäßiges 10-Eck einbeschrieben. Sind E und F zwei benachbarte Ecken, so ist $s_{10} = EF$ eine Seite des 10-Ecks, das Dreieck EFM ist gleichschenklig, der Mittelpunktswinkel EMF ist $36°$, und die Basiswinkel MEF bzw. MFE sind $72°$ (vgl. Abb. 12.2).

[71] Diese Ankündigung der Entdeckung der geometrischen Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks war die erste Veröffentlichung von Gauß.

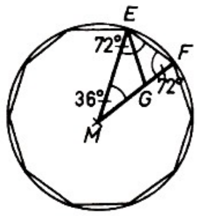


Abb. 12.2

Durch die Winkelhalbierende EG des Basiswinkels MEF entstehen die ähnlichen Dreiecke EFG und EFM. (Sie haben gleiche Winkel.) Folglich gilt

$$ME : EF = EF : FG, \text{ da } ME = r, EF = s_{10}, FG = r - s_{10}$$

(Abb. 12.3) ist, folgt

$$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}) \tag{12.1}$$

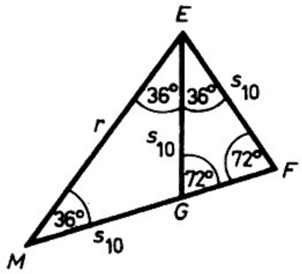


Abb. 12.3

$$s_{10} = EF = EG = MG$$

Der Radius $r = MF$ ist somit durch den Punkt G in die Teile s_{10} und $r - s_{10}$ so geteilt, und es gilt die Proportion (12.1). Man sagt, dass G den Radius nach dem "Goldenen Schnitt" teilt. Die Gesamtstrecke (Radius) verhält sich zur größeren Teilstrecke wie die größere Teilstrecke zur kleineren.
Hieraus ergibt sich: 1. die Seitenlänge s_{10}, 2. die Konstruktion des 10-Ecks.

1. Setzt man $\tau = \frac{r}{s_{10}}$, so gilt $\tau = \frac{r}{s_{10}} = \frac{s_{10}}{r - s_{10}}$, $r^2 - rs_{10} = s_{10}^2$, $\left(\frac{r}{s_{10}}\right)^2 - \frac{r}{s_{10}} = 1$, also

$$\tau^2 - \tau = 1 \tag{12.2}$$

Da $\tau > 0$ ist, ergibt sich $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es folgt

$$s_{10} = \frac{1}{\tau} r = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r \tag{12.3}$$

2. Auf einem Durchmesser AB des Kreises zeichne man den zu AB senkrechten Radius MC. D halbiere den Radius AM. Der Kreisbogen mit dem Radius DC um D schneide den Radius MB in G (vgl. Abb. 12.4).

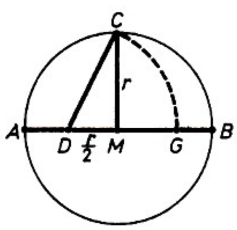


Abb. 12.4

$$MG = s_{10}$$

Dann ist $MG = s_{10}$. In der Tat, es ist

$$DC = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5} = \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}r = \frac{r}{2} + s_{10}$$

Bemerkung. Nimmt man den Einheitskreis ($r = 1$), so ist

$$s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{12.4}$$

Man kann $\sqrt{5}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1 und 2 erhalten. Dann muss man 1 subtrahieren und den Rest halbieren, um s_1 zu bekommen.

Wegen $\frac{1}{15} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ erhält man den Zentriwinkel $\frac{2}{15}$ eines regelmäßigen 15-Ecks, indem man die Differenz zwischen dem doppelten Zentriwinkel $2 \cdot \frac{2\pi}{15}$ des 5-Ecks und dem Zentriwinkel $\frac{2\pi}{3}$ des gleichseitigen Dreiecks nimmt.
Die Ecken des regelmäßigen 4-Ecks (Quadrats) ergeben sich als Schnittpunkte zweier zueinander senkrecht stehender Durchmesser mit dem Kreis (vgl. Abb. 12.5).

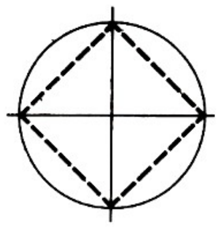


Abb. 12.5

Durch Halbierung der Seiten eines n-Ecks ist es möglich, aus einem regelmäßigen n-Eck ein: regelmäßiges $2n$-Eck zu konstruieren. Ist $AB = s_n$, eine Seite des n-Ecks und C der Mittelpunkt von AB und D der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden CM mit dem Kreisbogen (vgl. Abb. 12.6), so ist $AD = s_{2n}$, eine Seite des $2n$-Ecks.

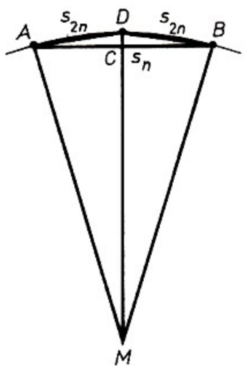


Abb. 12.6

Wir können somit alle die regelmäßigen n-Ecke konstruieren, für die

$$n = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^k, ... \quad \text{oder}$$
$$n = 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ..., 3 \cdot 2^k, ... \quad \text{oder}$$
$$n = 5, 10, 20, 40, 80, 160, ...,5 \cdot 2^k, ... \quad \text{oder}$$
$$n = 15, 30, 60, 120, 240, ..., 15 \cdot 2^k, ...$$

ist.

Die von uns konstruierbaren regelmäßigen n-Ecke ($n \geq 3$) mit einer Seitenzahl unter 300 sind die mit den folgenden Eckenzahlen: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96, 120, 128, 160, 192, 240, 256.
(Eine Konstruktionsbeschreibung dieser regelmäßigen n-Ecke gab bereits Euklid in den Elementen.)

Kann man aber nicht auch beispielsweise das regelmäßige 7-Eck oder das 9-Eck oder das 11-Eck konstruieren? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, was eine "geometrische Konstruktion" eigentlich ist.

Welche "Werkzeuge" lassen wir für die Konstruktion zu?

Die Konstruktionen sollen mit dem Zirkel und dem Lineal geschehen, d.h. durch eine beliebige, aber endliche Anzahl von folgenden einfachen Grundkonstruktionen: "Ziehen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte" und "Beschreibung eines Kreises, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben sind".

Zur Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks genügt es, die Seite des n-Ecks oder den Zentriwinkel $\frac{2\pi}{n}$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Betrachten wir ein regelmäßiges n-Eck, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist und dessen eine Ecke im Punkt 1 der reellen Achse liegt (vgl. Abb. 12.7).

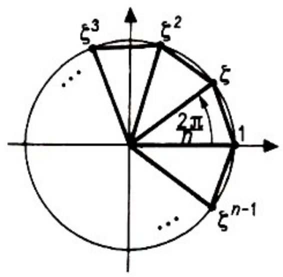


Abb. 12.7

Die erste von 1 verschiedene Ecke ist offenbar

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \tag{12.5}$$

Die zweite Ecke ist

$$\cos 2\frac{2\pi}{n} + i\sin 2\frac{2\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \zeta^2$$

Die nächste Ecke ist ζ^3 usw. Die $(n-1)$-te Ecke ist ζ^{n-1}. Und die n-te Ecke ist wieder

$$\zeta^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + \sin 2\pi = 1$$

Für jede Potenz ζ^k gilt

$$(\zeta^k)^n = \zeta^{kn} = (\zeta^n)^k = 1^k = 1 \quad (k = 1,2,..,n-1)$$

Bildet man höhere Potenzen, so erhält man keine neuen Zahlen:

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n\zeta = \zeta, \quad \zeta^{n+2} = \zeta^2, ...$$

Auch Potenzen mit negativen Exponenten lassen sich immer wieder auf die n verschiedenen Zahlen 1, ζ, ζ^2, ..., ζ^{n-1} zurückführen:

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta^n}{\zeta} = \zeta^{n-1}, \quad \zeta^{-2} = \zeta^{n-2}, ...$$

Ist $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine komplexe Zahl mit $z^n = 1$, so gilt $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 1$, d.h. $r^n = 1$, also $r = 1$ und $\cos n\varphi = 1$, $\sin n\varphi = 0$, also ist $n\varphi$ ein Vielfaches von 2π, $\varphi = k\cdot\frac{2\pi}{n}$ mit einer ganzen Zahl k; somit ist $z = \zeta^k$. Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz. Es sei $n \geq 1$. Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^n = 1$, nämlich

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad z_2 = \zeta^2, \quad ...,$$
$$z_k = \zeta^k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad ..., \quad z_{n-1} = \zeta^{n-1}$$

Es sind die Ecken des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, dessen eine Ecke im Punkt 1 liegt.

Die Zahlen 1, ζ, ζ^2, ..., ζ^{n-1} heißen n-te Einheitswurzeln. Die n-ten Einheitswurzeln genügen der Gleichung

$$z^n - 1 = 0 \tag{12.6}$$

vom Grad n. Aus $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1)$ und der Tatsache, dass ein Produkt genau dann gleich Null wird, wenn mindestens ein Faktor Null ist, folgt entweder $z = 1$ oder

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0 \tag{12.7}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $\zeta, \zeta^2, ..., \zeta^{n-1}$. Die Gleichung (12.6) heißt Kreisteilungsgleichung, weil ihre Lösungen die Ecken des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind, die den Kreis in n gleiche Bögen teilen.
Aus (12.7) folgt für die Summe der n-ten Einheitswurzeln

$$1 + \zeta + \zeta^2 + ... + \zeta^{n-1} = 0 \tag{12.8}$$

Aus $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ folgt

$$2\cos\frac{2\pi}{n} = \zeta + \zeta^{-1} \tag{12.9}$$

Kann man $\zeta + \zeta^{-1}$ konstruieren, so auch $\cos\frac{2\pi}{n}$ (und umgekehrt) und damit den Zentriwinkel des regelmäßigen n-Ecks.

Beispiele.
(1) Die dritten Einheitswurzeln sind $1, \rho, \rho^2$ mit

$$\rho = \cos 120° + i\sin 120° = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad \rho^2 = \cos 240° + i\sin 240° = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Die Zahlen ρ, ρ^2 sind die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{12.10}$$

(2) Die vierten Einheitswurzeln sind offenbar $1, i, -1, -i$. Die Zahlen $i, -1, -i$ sind die Lösungen der Gleichung

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1) = 0 \tag{12.11}$$

(3) Um die fünften Einheitswurzeln zu konstruieren, hat man zunächst die Gleichung

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{12.12}$$

zu lösen. Ist $\zeta = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ die eine Lösung von (12.12), so ist $u = \zeta + \zeta^{-1} = \zeta + \zeta^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}(> 0)$ und $u^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2$. Aus $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ folgt (nach Division durch ζ^2) $\zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta + \zeta^{-1} + 1 = 0$ oder

$$u^2 + u - 1 = 0 \tag{12.13}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Wegen $u > 0$ ist $u = \frac{-1\sqrt{5}}{2}$ und

$$\zeta^2 + \zeta^3 = \zeta^2 + \zeta^{-2} = u^2 - 2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Die Konstruktion der Strecke $u = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ ergibt sich hieraus (wie oben beschrieben):
Der Radius $AM = 1$ werde in D halbiert (vgl. Abb. 12.8).

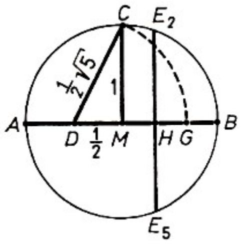


Abb. 12.8
Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

Dann gilt $DC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Der Kreisbogen mit dem Radius DC um D schneide den Radius MB in G. Die Strecke MG hat die Länge

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = u = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

Ist H der Halbierungspunkt der Strecke MG, so ist $MH = \cos\frac{2\pi}{5}$ und die Mittelsenkrechte auf MG im Punkt H schneidet den Kreis bereits in zwei Eckpunkten E_2, E_5 (ζ, ζ^{-1}) des regelmäßigen 5-Ecks.
Die fünften Einheitswurzeln ζ, ζ^4 bzw. ζ^2, ζ^3 kann man aus den Gleichungen $z + z^{-1} = \frac{-1+5}{2}$, d.h.

$$z^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}z + 1 = 0 \tag{12.14}$$

und $z + z^{-1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, d.h.

$$z^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}z + 1 = 0 \tag{12.15}$$

explizit bestimmen. Die Lösungen der quadratischen Gleichung (12.14) sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$
$$z_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung (12.15) sind

$$z_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1 - i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$
$$z_4 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

Die fünften Einheitswurzeln sind somit 1 und

$$\begin{aligned}
\zeta &= \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \qquad (12.16)\\
\zeta^2 &= \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\\
\zeta^3 &= \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\\
\zeta^4 &= \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile folgt hieraus insbesondere

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), \qquad \sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad (12.17)$$

$$\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), \qquad \sin 144^\circ = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{1 - 2\sqrt{5}} \qquad (12.18)$$

(4) Betrachten wir nun das dem Einheitskreis einbeschriebene regelmäßige Siebeneck.
Um die siebenten Einheitswurzeln zu konstruieren, hat man die Gleichung

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (12.19)$$

zu lösen. Dividiert man (12.19) durch z^3, so folgt

$$z^3 + z^{-3} + z^2 + z^{-2} + z + z^{-1} + 1 = 0$$

oder

$$(z + z^{-1})^3 - 3(z + z^{-1}) + (z + z^{-1})^2 - 2 + (z + z^{-1}) + 1 = 0$$

oder

$$(z + z^{-1})^3 + (z + z^{-1})^2 - 2(z + z^{-1}) + 1 = 0$$

Setzen wir $u = z + z^{-1}$, so besteht die kubische Gleichung

$$u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0 \qquad (12.20)$$

Man kann beweisen, dass keine der Lösungen von (12.20) mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Daher ist auch $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ als eine Lösung dieser Gleichung und damit $\cos\frac{2\pi}{7}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, d. h., das regelmäßige 7-Eck kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden; folglich auch nicht das (regelmäßige) 14-Eck, 28-Eck, 56-Eck, 112-Eck, 224-Eck, ..., $7 \cdot 2^k$-Eck.

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts war man davon überzeugt (ohne es zu beweisen), dass man überhaupt keine weiteren n-Ecke außer die oben angegebenen regelmäßigen n-Ecke, bei denen n das Produkt von 2 oder 3 oder 5 oder 15 mit einer Potenz von 2 ist, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (sondern nur mechanisch mittels Anwendung eines Winkelmessers).

Da erschien in Jena die zitierte Notiz des Studenten Carl Friedrich Gauß, in der er behauptete, dass "noch eine Menge anderer" regelmäßiger Vielecke, z. B. das Siebzehneck, mit Zirkel und Lineal konstruierbar wären. Zwei Jahrtausende war die Kreisteilung auf dem Stand aus der Zeit des Euklid stehengeblieben.
Nun entdeckte der junge Gauß die erste neue Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks seit dem griechischen Altertum:

"Der Tag war der 29. März 1796; und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran", schrieb er später.
Tatsächlich war Gauß durch vorangehende Überlegungen auf diese bahnbrechende Entdeckung vorbereitet, die nun in bestimmter Weise kommen musste. Die Grundlagen dieser Entdeckung, die Zurückführung des Problems auf die Lösungen (Wurzeln) der Kreisteilungsgleichung und die "Zerteilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$

in zwei Gruppen" hatte Gauß bereits im Winter 1796, während seines ersten Semesters an der Göttinger Universität, gefunden.
"Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir bei meinem Ferienaufenthalt in Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte."

Für den Cosinus des Winkels $\frac{2\pi}{17}$ gab Gauß übrigens den folgenden Ausdruck an:

$$\cos\frac{2\pi}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

woraus man die Konstruierbarkeit dieser Größe folgern kann.

In seinem 1801 in Leipzig erschienenen Zahlentheoriebuch Disquisitiones arithmeticae (Arithmetische Untersuchungen) löste Gauß sein in der Jenaer Zeitung gemachtes Versprechen ein und behandelte ausführlich die Problematik der Konstruktion regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Im Vorwort bemerkte er:

"Die Theorie der Kreisteilung oder die der regelmäßigen Vielecke gehört eigentlich nicht zur Arithmetica, aber ihre Prinzipien können nur der transzendenten Arithmetica entnommen werden: dieses Ergebnis wird den Geometern genau so unerwartet erscheinen wie die neuen Wahrheiten, die daraus hervorgehen, und die sie, hoffe ich, mit Vergnügen sehen werden."

Im siebenten Abschnitt des für die Entwicklung der Zahlentheorie grundlegenden Buches schrieb er:
"Da die Teilung des Kreises in 3 und 5 Teile zur Zeit des Euklid bekannt war, gibt es sicher Gründe sich zu wundern, dass man in einer Periode von 2000 Jahren nichts zu den Entdeckungen hinzugefügt hat, und dass alle Geometer mit Gewissheit verkündet haben, dass außer diesen Teilungen und denen welche man daraus ableitet (die Teilungen in 2^k, 15, $3\cdot 2^k$, $5\cdot 2^k$, $15\cdot 2^k$ Teile) keine anderen mit geometrischer Konstruktion ausgeführt werden können."

Mit zahlentheoretischen und algebraischen Hilfsmitteln erkannte Gauß, dass die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks mit Zirkel und Lineal allein von der zahlentheoretischen Natur der Zahl n abhängt. Sein Ergebnis über die Kreisteilung, welches er aus seiner Methode, die Kreisteilungsgleichung aufzulösen, gewonnen hatte, lautet:
Die Teilung des Kreisbogens in p gleiche Teile (p Primzahl), bzw. die Konstruktion des regelmäßigen p-Ecks, ist mit Zirkel und Lineal ausführbar, wenn p eine Primzahl der Form $p=2^k+1$ ist.

Gauß sprach auch klar aus, dass die angegebenen Werte von p die einzigen sind, die Konstruktion also auch nur dann mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, wenn p die angegebene Form hat (sofern p als Primzahl vorausgesetzt wird).

Er teilte jedoch den Beweis nicht mit, glaubte aber, "doch darauf hinweisen zu müssen, damit nicht einer noch andere Teilungen außer den von unserer Theorie gelieferten, z. B. die Teilungen in 7, 11, 13, 19, ... Teile auf geometrische Konstruktionen zurückzuführen hoffe und seine Zeit unnütz vergeude".
(Der Beweis wurde später von anderen Mathematikern gegeben.) Welche Primzahlen in der unendlichen Folge

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

aller Primzahlen haben die Form $2^k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$?
Die Folge aller Zahlen der Form $2^k + 1$ beginnt mit

3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025, ...

Hierunter sind die Primzahlen 3, 5, 17, 257.

Ist k eine natürliche Zahl, die keine Zweierpotenz ist, dann besitzt k eine ungerade natürliche Zahl m als Teiler, und es ist $k = ml$ $(l \in \mathbb{N})$ und

$$2^k + 1 = 2^{ml} + 1 = (2^l + 1)(2^{l(m-1)} - 2^{l(m-2)} + -... + 2^{l\cdot 2} - 2^l + 1)$$

d.h., $2^l + 1$ ist ein Teiler von $2^k + 1$, also ist $2^k + 1$ keine Primzahl. Ist somit $2^k + 1$ eine Primzahl, so muss k eine Zweierpotenz sein.

Die Umkehrung gilt nicht! Beispielsweise ist

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

(Fermat vermutete um 1640, dass die Zahlen $212^k + 1$ stets Primzahlen sind. Erst Euler erkannte 1732, dass $2^{2^5} + 1$ den Teiler 641 hat.)

Welche der Zahlen $F_k = 2^{2^k} + 1$ sind nun Primzahlen? (Die Primzahlen unter den Zahlen $F_k = 2^{2^k} + 1$ heißen Fermatsche Primzahlen.)
Für $k = 0,1,2,3,4$ ergeben sich die Primzahlen $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$. Dies sind die einzigen Fermatschen Primzahlen, die man kennt!
Man hat für $k > 5$ bisher keine weitere Fermatsche Primzahl gefunden.

Man kennt 46 Werte von k, für die F_k keine Primzahl ist, nämlich

$$k = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 30, 32, 36, 38, 39, 42, 52,$$
$$55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 260, 267, 268, 284, 316, 452, 1945.$$

Von den übrigen Zahlen F_k mit $k = 17, 20, 22, 24, 28, 29, 31, 33, ...$ ist gegenwärtig nicht bekannt, ob sie Primzahlen sind.
Für Primzahlen p der Form $2^{2^k} + 1$, also $p = 3, 5, 17, 257, 65537$, (...?), und nur für diese kann das regelmäßige p-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Das geometrische Problem der Kreisteilung ist damit zurückgeführt auf das (noch ungelöste) zahlentheoretische Problem, eine Übersicht über alle Fermatschen Primzahlen zu geben.

Sind bereits ein regelmäßiges p-Eck und ein regelmäßiges q-Eck konstruiert, so kann man ein regelmäßiges pq-Eck wie folgt konstruieren (vorausgesetzt, p und q sind Primzahlen oder nur: p und q sind teilerfremde natürliche Zahlen):

Sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen, so gibt es ganze Zahlen g und h mit $pg+qh=1$ (Aufgabe 12.7). Es folgt $\frac{1}{pq}=\frac{g}{p}+\frac{q}{h}$. Der Zentriwinkel $\frac{2\pi}{pq}$ des regelmäßigen pq-Ecks lässt sich aus den beiden Winkeln $\frac{2\pi}{p}$ und $\frac{2\pi}{q}$ zusammensetzen:

$$\frac{2\pi}{pq}=g\frac{2\pi}{p}+h\frac{2\pi}{q}$$

Hieraus und aus dem obigen Ergebnis folgt:

Die Teilung des Kreises in n gleiche Teile, bzw. die Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks, ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal ausführbar, wenn

$$n=2^e p_1\cdot p_2\cdot ...\cdot p_r$$

ist, worin die Zahlen $p_1,p_2,...,p_r$ verschiedene Fermatsche Primzahlen und e, r ganze Zahlen ≥ 0 sind ($r=0$ bedeute $n=2^e$, $e=0$ heißt $2^e=1$).

Zu den oben angegebenen konstruierbaren n-Ecken mit einer Seitenzahl unter 300 sind noch die mit folgenden Eckenzahlen hinzuzufügen:

$$17,34=2\cdot 17,51=3\cdot 17,68=2^2\cdot 17,85=5\cdot 17,102=2\cdot 3\cdot 17,136=2^3\cdot 17,$$
$$170=2\cdot 5\cdot 17,204=2^2\cdot 3\cdot 17,255=3\cdot 5\cdot 17,257,272=2^4\cdot 17$$

Aufgaben

12.1. Man berechne die sechsten Einheitswurzeln.

12.2. Es sei p eine Primzahl und $\zeta=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$. Man beweise: Aus $\zeta^j=1$ folgt, dass p ein Teiler von j ist.

12.3. Ist $\zeta=\cos\frac{2\pi}{i}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, so sind die p-ten Einheitswurzeln durch $\zeta,\zeta^2,\zeta^3,...,\zeta^p$ gegeben. Man beweise: Ist p eine Primzahl und ε irgendeine p-te Einheitswurzel $\neg 1$, so sind auch $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,...,\varepsilon^p$ die p p-ten Einheitswurzeln.

12.4. Es seien q und p Primzahlen. Man beweise: Ist $\delta\neq 1$ eine q-te Einheitswurzel und $\varepsilon\neq 1$ eine p-te Einheitswurzel, so erhält man alle pq-ten Einheitswurzeln, wenn man jede der q Zahlen $\delta,\delta^2,...,\delta^q$ mit jeder der p Zahlen $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,...,\varepsilon^p$ multipliziert.

12.5. Wie sind die fünfzehnten Einheitswurzeln zu berechnen?

12.6. Man berechne

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\cdot 2\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2n+1}$$

12.7. Man beweise: Sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen, so gibt es ganze Zahlen g und h mit $pg+qh=1$.

13 Abrollende regelmäßige Vielecke

[72] Es sei ein regelmäßiges n-Eck mit der Seitenlänge a, dem Inkreisradius r, dem Umkreisradius R und dem Zentriwinkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ gegeben (Abb. 13.1).

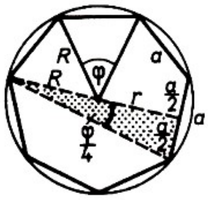


Abb. 13.1

Eine Ecke, P_1, liege im Koordinatenursprung O der komplexen Zahlenebene. Das Vieleck soll auf der reellen Achse solange abrollen, bis die Ecke P_1 wieder auf dieser Geraden liegt (Abb. 13.2).

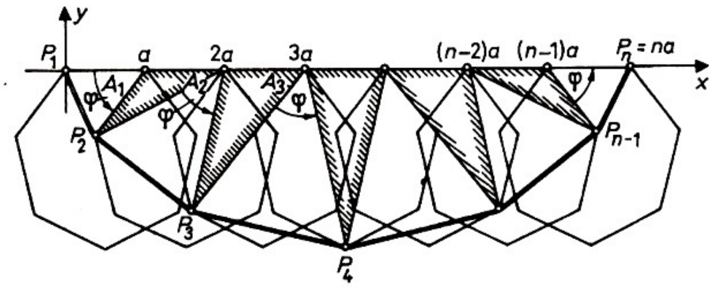


Abb. 13.2 $(n = 7)$

Die betrachtete Ecke P_1 möge beim Abrollen nacheinander in den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n$ liegen, die den komplexen Zahlen $z_1 = 0, z_2, z_3, ..., z_{n-1}, z_n$ entsprechen sollen. Es soll zunächst die Lage dieser Punkte bestimmt werden.

Die Punkte $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ mögen die jeweiligen Drehpunkte sein. Sie liegen auf der reellen Achse und entsprechen den Zahlen a, $2a$, $3a$, ..., $(n-1)a$.
Durch Drehen der (gerichteten) Strecke $\overrightarrow{A_1P_1}$ um den Punkt A_1 mit dem Winkel φ geht P_1 in P_2 über. (Vgl. Abb. 13. 2.) Durch Drehen der Strecke $\overrightarrow{A_2P_2}$ um den Punkt A_2, mit dem Winkel φ geht P_2 in P_3 über usw.
Durch Drehen der Strecke $\overrightarrow{A_kP_k}$ um den Punkt A_k mit dem Winkel φ geht P_k in P_{k+1} über $(k = 1,2,..,n-1)$.

Die gerichteten Strecken $\overrightarrow{A_kP_k}$ bzw. $\overrightarrow{A_{k+1}P_{k+1}}$ lassen sich wie folgt durch komplexe Zahlen darstellen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1P_1} &= -a = z_1 - a \\
\overrightarrow{A_1P_2} &= z_2 - a \\
\overrightarrow{A_2P_2} &= \overrightarrow{A_2P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = -2a + z_2 = z_2 - 2a \\
\overrightarrow{A_2P_3} &= \overrightarrow{A_2P_1} + \overrightarrow{P_1P_3} = -2a + z_3 = z_3 - 2a \\
&\;... \\
\overrightarrow{A_kP_k} &= z_k - ka \\
\overrightarrow{A_{k+1}P_{k+1}} &= z_{k+1} - ka
\end{aligned}$$

[72]Den Anstoß zu diesem Kapitel gab R. Wyss, Über das Abrollen regulärer n-Ecke: Eine Anregung zur Anwendung der komplexen Zahlen im Schulunterricht, Didaktik der Mathematik 1979/1, 1-11.

$\overrightarrow{A_kP_k}$ geht durch Drehung um den Winkel φ in $\overrightarrow{A_kP_{k+1}}$ über. Bezeichnet ζ die n-te Einheitswurzel $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, so lässt sich diese Drehung um $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ durch eine Multiplikation mit ζ beschreiben:

$$z_{k+1} - ka = (z_k - ka)\zeta$$

Es gelten somit die Formeln

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (z_k - ka)\zeta + ka \qquad \text{(aufzuschreiben für } k = 1,2,..,n-1)\\ z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt nacheinander

$$\begin{aligned} z_1 &= 0\\ z_2 &= (z_1 - a)\zeta + a = a(1-\zeta)\\ z_3 &= (z_2 - 2a)\zeta + 2a = (a - a\zeta - 2a)\zeta + 2a = a(2 - \zeta - \zeta^2) \end{aligned}$$

usw., allgemein

$$z_{k+1} = a(k - \zeta - \zeta^2 - ... - \zeta^k) \tag{13.1}$$

Der letzte Punkt ist $z_n = na$, natürlich auch nach (13.1):

$$z_n = a[(n-1) - \zeta - \zeta^2 - ... - \zeta^{n-1}] = an$$

(da $1 + \zeta + \zeta^2 + ... + \zeta^{n-1} = 0$ ist). Benutzt man die Summenformel der geometrischen Reihe, so ergibt sich aus (13.1)

$$z_{k+1} = a[k + 1 - (\zeta + \zeta^2 + ... + \zeta^k)] = a\left[k + 1 - \frac{1-\zeta^{k+1}}{1-\zeta}\right]$$

Damit ist die verschiedene Lage des Punktes P_1 beim Abrollen des regelmäßigen Vielecks beschrieben.

Jetzt soll noch die Länge L des Streckenzuges zwischen den Punkten $P_1, P_2, ..., P_n$ berechnet werden. Die Länge ist

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + ... + |z_{k+1} - z_k| + ... + |z_n - z_{n-1}|$$

Nach (13.1) ist $|z_{k+1} - z_k| = a(1 - \zeta^k)$. Verwenden wir die abkürzende Schreibweise $\zeta^{k/2}$ für

$$\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} = \cos\frac{k}{2}\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{k}{2}\frac{2\pi}{n}$$

so ist $|1 - \zeta^k| = 2\operatorname{Im}\zeta^{k/2}$.
In der Tat, in der Abbildung 13.3 sind die Dreiecke ABC und ATD kongruent, also $TD = CB = \operatorname{Im}\zeta^{k/2}$. Die Gerade AC halbiert die Strecke DE (der Länge $|1-\zeta^k|$), so dass $TD = \frac{|1-\zeta^k|}{2}$. Hieraus folgt

$$\frac{|1-\zeta^k|}{2} = \operatorname{Im}\zeta^{k/2}$$

das ist die Behauptung.

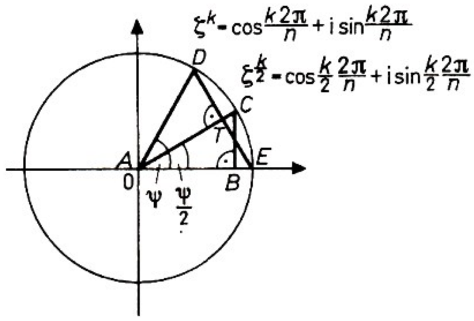


Abb. 13.3

Somit ist

$$L = \sum_{k=1}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = a \sum_{k=1}^{n-1} |1 - \zeta^k| = a \sum_{k=1}^{n} |1 - \zeta^k| = a \sum_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{Im}\,\zeta^{k/2} = a2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}\right) \tag{13.2}$$

Da $\zeta^{\frac{n-j}{2}} = \cos\frac{(n-j)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-j)\pi}{n} = (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{-j\pi}{n} + i\sin\frac{-j\pi}{n}\right)$
$= -\left(\cos\frac{-j\pi}{n} - i\sin\frac{-j\pi}{n}\right)$

ist $\zeta^{j/2} + \zeta^{\frac{n-j}{2}} = \cos\frac{j\pi}{n} + i\sin\frac{j\pi}{n} - \cos\frac{j\pi}{n} + i\sin\frac{j\pi}{n} = 2i\sin\frac{j\pi}{n}$

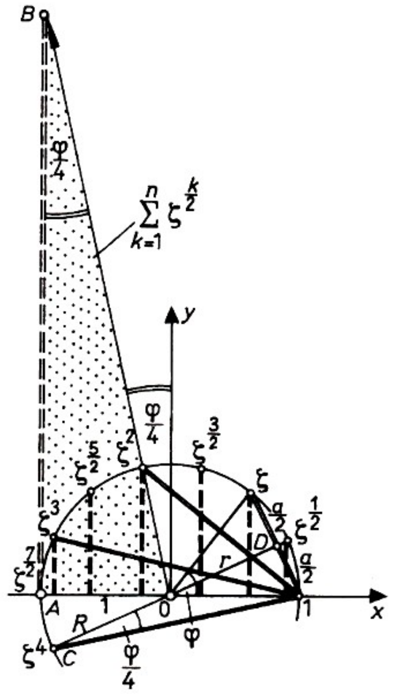


Abb. 13.4 ($n = 7$)

rein imaginär. Da aber $\zeta^{n/2} = \cos\frac{n\pi}{n} + i\sin\frac{n\pi}{n} = -1$ ist, folgt, dass die komplexe Zahl $\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}$ den Realteil

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}\right) = -1 \tag{13.3}$$

hat.
Dreht man den Kreis in der Abbildung 13.4 um den Winkel $-\frac{\varphi}{4}$ um den Punkt O, dann liegen die zu den komplexen Zahlen $\zeta^{1/2}, \zeta^{2/2}, ..., \zeta^{n/2}$ gehörenden Punkte offensichtlich symmetrisch zur y-Achse. Daher besitzt die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}$ das Argument $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}$ also

$$\arg\left(\sum_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}\right) = \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2} \tag{13.4}$$

Mit (13.3) und (13.4) ist die Lage der komplexen Zahl $\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}$ in der Zahlenebene bekannt (in der Abb. 13.4 der Punkt B).

Die Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und $1DC$ (Abb. 13.4, vgl. Abb. 13.1) liefert die Proportion $|AB| : 1 = (r + R) : \frac{a}{2}$. Da $|AB| = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \zeta^{k/2}\right)$, ergibt sich nach (13.2) $L = a2|AB| = a\frac{4(r+R)}{a}$. Die gesuchte Länge des Streckenzuges ist somit

$$L = 4(r + R) \tag{13.5}$$

Für $\to \infty$ wird im Grenzwert $r = R$, das n-Eck wird ein Kreis und die Länge L nach (13.5) gleich $8R$.

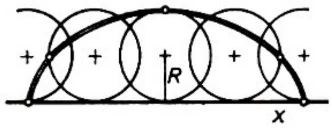


Abb. 13.5

Wenn ein Kreis in seiner Ebene auf einer ihn berührenden Gerade abrollt, so beschreibt jeder Punkt P seiner Peripherie eine aus unendlich vielen kongruenten Bögen zusammengesetzte Kurve, die als Zykloide bezeichnet wird. Die Länge eines Zykloidenbogens (Abb. 13.5) ist somit gleich $8R$.

Mittels komplexer Zahlen lassen sich unschwer auch das Produkt aller Teilstrecken des Streckenzuges und die Summe der Quadrate über den Teilstrecken berechnen (Aufgaben 13.1 und 13.2). Durch geometrische Überlegungen kann man auch den Flächeninhalt unter dem Streckenzug bestimmen. Die hier behandelten Fragen lassen sich durch ähnliche Betrachtungen auch für das Abrollen eines regelmäßigen n-Ecks auf einem dazu kongruenten n-Eck beantworten.

Aufgaben

13.1. Man berechne die Summe der Quadrate über den Teilstrecken des Streckenzuges $P_1P_2...P_n$.

13.2. Man berechne das Produkt aller Teilstrecken des Streckenzuges

14 Wurzeln

Es sei n eine natürliche Zahl. Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so gibt es eine und nur eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^n = a$. Die eindeutig bestimmte Zahl b heißt n-te Wurzel aus a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Beispiele. $\sqrt[3]{8} = 2$ (da $2^3 = 8$). $\sqrt[10]{1024} = 2$ (da $2^{10} = 1024$). $\sqrt[5]{243} = 3$ (da $3^5 = 243$). $\sqrt[5]{5} \approx 1{,}3797297$, $\sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471285$, $\sqrt[1000000]{1000000} \approx 1{,}0000138$. (Übrigens konvergiert die Folge $\sqrt[n]{n}$ für $\to \infty$ gegen 1.)

Für $a < 0$ ist die Schreibweise $\sqrt[n]{a}$ im Reellen nicht erklärt! Für komplexe Zahlen gilt folgender Satz.

Satz 14.1. Es sei $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$.
Dann gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen, deren n-te Potenzen mit α übereinstimmen, nämlich die Zahlen

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\zeta^k = \beta_0\zeta^k\end{aligned}$$

mit

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \qquad \text{und} \qquad k = 0{,}1{,}2{,}...{,}n-1$$

Beweis. Nach der Formel von Moivre ((5.21), (5.23)) ist für $\beta_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ die n-te Potenz $\beta_0^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \alpha$.
Dann gilt auch, da ζ eine n-te Einheitswurzel ist, $(\beta_0\zeta^k)^n = \beta_0^n(\zeta^n)^k = \alpha 1^k = \alpha$.
Ist umgekehrt $\beta^n = \alpha$, so erhält man (wegen $\beta_0^n = \alpha \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^n = 1$, d.h, $\frac{\beta}{\beta_0}$ ist eine n-te Einheitswurzel, d.h. $\frac{\beta}{\beta_0} = \zeta^k$ mit $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ und $k = 0{,}1{,}2{,}...{,}n$ .Qed.

In der Zahlenebene liegen die Zahlen $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$ auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ und sind die Ecken eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, deren eine Ecke $\beta_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ ist (vgl. Abb. (14.1).

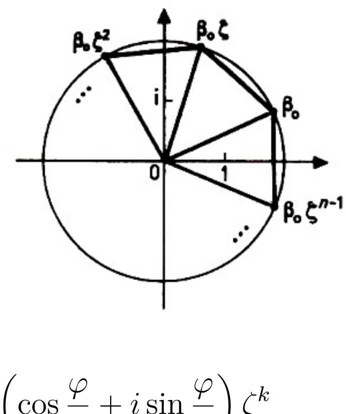


Abb. 14.1

Jede der Zahlen

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\zeta^k \tag{14.1}$$

für $k = 0, 1, 2,..,n-1$, $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, heißt n-te Wurzel aus $\alpha r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Für $0 \leq \frac{\varphi}{n} < \frac{2\pi}{n}$ heißt $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ der Hauptwert unter den n n-ten Wurzeln.

Ist $\alpha = a \geq 0$ reell, so ist $|\alpha| = a$, $\arg\alpha \equiv 0(2\pi)$, und der Hauptwert ist $\sqrt[n]{a}$.

Für eine nichtnegative reelle Zahl ist die eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Wurzel $\sqrt[n]{a}$ der Hauptwert. Wir vereinbaren allgemein für den Hauptwert (und nur für diesen!) die Schreibweise $\sqrt[n]{\alpha}$ oder $\alpha^{1/n}$:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \quad (0 \le \varphi < 2\pi) \quad \text{oder} \tag{14.2}$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \tag{14.3}$$

Man beachte, dass jetzt Rechenregeln wie

$$\sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

im allgemeinen nicht mehr gelten. Auch hier soll noch einmal vor einer gedankenlosen Verwendung des Wurzelsymbols gewarnt werden.

Beispiel: Es ist

$$\sqrt[3]{-i}\,\sqrt[3]{-1} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{5}$$

jedoch $\sqrt[3]{(-i)(-1)} = \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ (Siehe auch (14.8) und das auf (14.8) folgende Beispiel.)

Potenziert man die Gleichung (14.3) mit m, so ergibt sich vermöge der Festsetzung

$$\alpha^{m/n} = (\alpha^{1/n})^m \tag{14.4}$$

$$[r(\cos\varphi + \sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = r^{m/n}\left(\cos\frac{m}{n}\varphi + i\sin\frac{m}{n}\varphi\right) \tag{14.5}$$

Da m, n natürliche Zahlen sind, ist hierin $\frac{m}{n}$ eine gebrochene Zahl. Weil aber auch für negative Exponenten (und $\alpha \neq 0$)

$$\begin{aligned}\alpha^{-k} = [r(\cos\varphi + \sin\varphi)]^{-k} &= \frac{1}{[r(\cos\varphi + \sin\varphi)]^k} = \frac{r^{-k}(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)}{(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)} \\ &= \frac{r^{-k}(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)}{\cos^2 k\varphi + \sin^2 k\varphi}\end{aligned}$$

also

$$\alpha^{-k}(\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)) \tag{14.6}$$

ist, gilt

$$\alpha^a = r^a(cos\varphi + i\sin\varphi)^a = r^a(\cos a\varphi + i\sin a\varphi) \tag{14.7}$$

für beliebige rationale Zahlen a. (Für $\alpha = 0$ muss $a > 0$ sein.)

Anmerkung. Für $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist

$$\alpha^{m/n} = (\alpha^{1/n})^m = r^{m/n}\left(\cos\frac{m}{n}\varphi + i\sin\frac{m}{n}\varphi\right)$$

Es ist jedoch im allgemeinen

$$(\alpha^m)^{1/n} \neq \alpha^{m/n} \quad \text{d.h.} \quad \sqrt[n]{\alpha^m} \neq (\sqrt[n]{\alpha})^m \tag{14.8}$$

Beispiel.
Es sei $\alpha = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha^{3/4} &= 2^{3/4}\left(\cos\frac{3}{4}\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{3}{4}\frac{5\pi}{3}\right) = 2^{3/4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\
&= 2^{3/4}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{3/4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2^{3/4}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}\sqrt{2}(1+i) = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{4}(1+i)\\
&= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{32}(1+i) = -\sqrt[4]{2}(1+i)\\
\alpha^3 &= 2^3(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi)\\
(\alpha^3)^{1/4} &= \sqrt[4]{\alpha^3} = 2^{3/4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}(1+i)
\end{aligned}$$

Somit ist $(\alpha^3)^{1/4} \neq (\alpha^{1/4})^3$. Es ist eben $5\pi \equiv \pi(2\pi)$, aber nicht $\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$, sondern nur $\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Bildet man aus $\alpha^3 = 2^3(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)$ sofort $2^{3/4}\left(\cos\frac{5\pi}{+}i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ so erhält man nicht den Hauptwert $\sqrt[4]{\alpha^3}$, da nicht $0 \leq \frac{5\pi}{4} < \frac{2\pi}{4}$, sondern $\frac{5\pi}{4} > \frac{2\pi}{4}$ ist.

Die vierten Wurzeln aus α^3 sind

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Die vierten Wurzeln aus α sind

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}+k\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}+k\frac{2\pi}{4}\right)\right) \quad (k = 0{,}1{,}2{,}3)$$

Die dritten Potenzen der vierten Wurzeln aus α sind

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{17\pi}{4} + i\sin\frac{17\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&\sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{23\pi}{4} + i\sin\frac{23\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2^3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Die vierelementige Menge der vierten Wurzeln aus α^3 stimmt also mit der Menge der dritten Potenzen der vierten Wurzeln aus α überein. Jedoch ist $\sqrt[4]{\alpha^3}$ (Hauptwert) nicht gleich $\sqrt[4]{a})^3$ (die dritte Potenz des Hauptwertes der vierten Wurzel aus α).

Bezeichnen $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-2}$ die n n-ten Wurzeln aus α, so gilt $\beta_k^n = \alpha$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$. Hieraus folgt $(\overline{\beta}_n)^n = \overline{\beta_k^n} = \overline{\alpha}$.

Mit den Zahlen β_k, sind auch die konjugierten Zahlen $\overline{\beta}_k$ paarweise verschieden. Die $\overline{\beta}_0$, $\overline{\beta}_1$, ..., $\overline{\beta}_{n-1}$ sind also die nach Satz 1 existierenden n verschiedenen komplexen Zahlen, deren n-te Potenzen mit α übereinstimmen.

Satz 14.2. Sind $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$ die n n-ten Wurzeln aus α, so sind $\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, ..., \overline{\beta}_{n-1}$ die n n-ten Wurzeln aus $\overline{\alpha}$.

Es folgen nun einige Zahlenbeispiele für die Berechnung n-ter Wurzeln.

Beispiele.
(1) Man berechne die dritten Wurzeln aus $1+i$. Der Hauptwert ist

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Aus $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$, d.h. $\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\varphi+1}{2}$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-\cos^2\frac{\varphi}{2}$ folgt

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \qquad \text{und} \qquad \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad \text{also}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

und daher

$$\sqrt[3]{1+i} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

Die beiden übrigen dritten Wurzeln aus $1+i$ sind $\sqrt[3]{1+i}\rho$, $\sqrt[3]{1+i}\rho^2$, wobei

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad \rho^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

die dritten Einheitswurzeln $\sqrt{1}$ sind.

(2) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{\cos\pi + \sin\pi} = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}$

(3) Man berechne die vierten Wurzeln aus -4. Der Hauptwert ist

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$$

Die übrigen Werte ergeben sich aus dem Hauptwert durch Multiplikation mit den vierten Einheitswurzeln ($\neq 1$), $1, -i$: $-1+i, -1-i, 1-i$.

(4) Mit $\rho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ berechne $\sqrt[4]{\rho}$. Da $\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ (dritte Einheitswurzel), gilt

$$\sqrt[4]{\rho} = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt[6]{-1}$$

(Beispiel 2).

(5) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Nach Beispiel (1) ist

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad , \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Somit gilt

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

Die vierten Wurzeln aus $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ sind also $\sqrt[4]{\alpha} = \beta_0$, $\beta_0 i$, $\beta_0(-1)$, $\beta_0(-i)$.

(6) $\sqrt[5]{2+2i} = \sqrt[5]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right) \approx 1{,}21599 + i0{,}19270$

(7) Man berechne die vierten Wurzeln aus 81.
$\sqrt[4]{81} = 3$. Die anderen vierten Wurzeln aus 81 sind $3i$, -3, $-3i$.

[8] $\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9} \approx 0{,}76604 + i0{,}64279$

Die Werte der Wurzeln aus einem Produkt komplexer Zahlen lassen sich übrigens auch nach dem folgenden Satz bestimmen.

Satz 14.3. Es sei γ irgendeine der n n-ten Wurzeln aus $\alpha \neq 0$ (z.B. $\gamma = \sqrt[n]{\alpha}$ Hauptwert), und es seien β_0, β_1, ..., β_{n-1} die n verschiedenen n-ten Wurzeln aus $\beta \neq 0$, dann sind $\gamma\beta_0$, $\gamma\beta_1$, ..., $\gamma\beta_{n-1}$ die n-ten Wurzeln aus $\alpha\beta$.

Beweis. Nach Satz 14.1 gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen, deren n-te Potenzen übereinstimmen. Die Zahlen $\gamma\beta_0$, $\gamma\beta_1$, ..., $\gamma\beta_{n-1}$ leisten das Verlangte:
Sie sind paarweise verschieden, und es gilt $(\gamma\beta_k)^n = \gamma^n\beta_k^n = \alpha\beta$.

Beispiele.
(1) Man berechne die Quadratwurzeln aus $9i$. Es ist $\sqrt{9} = 3$. Die Quadratwurzeln aus i sind $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ (11. Kapitel) und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$. Die Quadratwurzeln aus $9i$ sind somit

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}(1+i) \qquad , \qquad -\frac{3}{2}\sqrt{2}(1+i)$$

(2) Man berechne die vierten Wurzeln aus -64. Es ist $-64 = 16(-4)$ und $\sqrt[4]{16} = 2$. Die vierten Wurzeln aus -4 sind (siehe Beispiel (3) oben) $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Die vierten Wurzeln aus -64 sind somit $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$, $2-2i$.

Zur Vorbereitung des Studiums der kubischen Gleichungen im folgenden Kapitel betrachten wir noch ausführlich die Kubikwurzeln.

Die dritten Einheitswurzeln sind: $\sqrt[3]{1} = 1$ (Hauptwert),

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \rho^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{\rho}$$

Es gilt

$$\rho + \overline{\rho} = -1, \quad \rho\overline{\rho} = 1, \quad \rho = \overline{\rho}^2, \quad \overline{\rho} = \rho^2$$

$$\rho^2 + \rho + 1 = 0 \tag{14.9}$$

Aus $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ folgt

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}3 = (-1)\rho^2 \quad \text{(Hauptwert)}$$

Die beiden anderen dritten Wurzeln aus -1 sind

$$(-1)\rho^2\rho = (-1)\rho^3 = -1 \qquad , \qquad (-1)\rho^2\rho^2 = (-1)\rho$$

Ist a eine positive reelle Zahl, so ist die positive reelle Zahl $\sqrt[3]{a}$ der Hauptwert. Die anderen dritten Wurzeln aus a sind $\sqrt[3]{a}\rho$, $\sqrt[3]{a}\rho^2$.
Ist a eine negative reelle Zahl, so $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$. Es ist

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{|a|}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{|a|}\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{|a|}\rho^2$$

Die beiden anderen dritten Wurzeln aus a sind

$$-\sqrt[3]{|a|}\rho^2\rho = -\sqrt[3]{|a|} \quad \text{reell!, und} \quad -\sqrt[3]{|a|}\rho^2\rho 2 = -\sqrt[3]{|a|}\rho$$

Ist also a eine reelle Zahl, so ist stets genau eine der dritten Wurzeln aus a reell. Diesen eindeutig bestimmten reellen Wert bezeichnen wir im folgenden stets mit $\sqrt[3]{a}^*$ ("die reelle dritte Wurzel aus"). Es ist

$$\sqrt[3]{a}^* = \begin{cases} \sqrt[3]{a} & \text{falls } a \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|a|} & \text{falls } a \leq 0 \end{cases} \tag{14.10}$$

Beispiele. $\sqrt[3]{-1}^* = -1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8}^* = -2$.

Ist x eine komplexe Zahl, so sind die dritten Wurzeln aus $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \quad \text{(Hauptwert)}$$
$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\alpha}\rho$$
$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\alpha}\rho^2$$

Beispiele.
(1) Man berechne $\sqrt[3]{-2+2i}$.
Es ist $-2+2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Hieraus folgt

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

also

$$\sqrt[3]{-2+2i} = 1 + i \tag{14.11}$$

(2) Man berechne die dritten Wurzeln aus $-2-2i$.
Die dritten Wurzeln aus $-2+2i$ sind $1+i$, $(1+i)\rho$, $(1+i)\rho^2$ (Beispiel (1), vgl. Abb. 14.2).

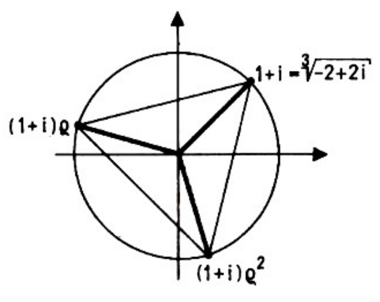


Abb. 14.2
Die dritten Wurzeln aus $-2+2i$

Die dritten Wurzeln aus $-2-2i$ sind daher $1-i$, $(1-i)\overline{\rho} = (1-i)\rho^2$, $(1-i)\overline{\rho}^2 = (1-i)\rho$.

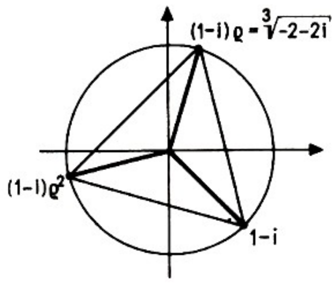


Abb. 14.3
Die dritten Wurzeln aus $-2-2i$

Der Hauptwert ist offenbar (vgl. Abb. 14.3) $\sqrt[3]{-2-2i} = (1-i)\rho$.

Die direkte Berechnung des Hauptwertes kann auch so erfolgen: Es ist

$$-2-2i = \sqrt{8}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

also

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-2-2i} &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\rho = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\rho = (1-i)\rho\end{aligned}$$

(3) $\sqrt[3]{2+11i}$. Es ist

$$2+11i = \sqrt{125}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{125}} \approx 0{,}17889 \qquad , \qquad \sin\varphi = \frac{11}{\sqrt{125}} \approx 0{,}98387$$

also $\varphi = 79{,}695°$. Es ist dann

$$\frac{1}{3}\varphi = 26{,}568°, \quad \cos\frac{\varphi}{3} = 0{,}8944, \quad \sqrt{5}\cos\frac{\varphi}{3} = 2$$

$$\sin\frac{\varphi}{3} \approx 0{,}4472, \quad \sqrt{5}\sin\frac{\varphi}{3} = 1$$

Somit ist

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

also

$$\sqrt[3]{2+11i} = 2+i \tag{14.13}$$

Die Summe von $\sqrt[3]{2+11i}$ mit einer geeigneten dritten Wurzel aus $2-11i$ (nämlich $2-i$) ist reell ($=4$).

Um die (reelle) Summe von $\sqrt[3]{a+i\sqrt{b}}$ mit einer geeigneten dritten Wurzel aus $a-i\sqrt{b}$ zu finden, machte schon Bombelli um 1560 den Ansatz[73]

$$\sqrt[3]{a+i\sqrt{b}} = p + i\sqrt{q} \tag{14.14}$$

[73] Nach M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Zweiter Band (2. Aufl., Leipzig 1900, S. 624)

wobei er voraussetzte, dass a, b, p, q positiv (rational) sind. Es folgt

$$a + i\sqrt{b} = (p + i\sqrt{q})^3 = p^3 - 3pq + i(3p^2\sqrt{q} - (\sqrt{q})^3)$$

Der Vergleich der Realteile ergibt

$$a = p^3 - 3pq \tag{14.15}$$

der Vergleich der Imaginärteile ergibt

$$\sqrt{b} = (3p^2 - q)\sqrt{q} \tag{14.16}$$

Es gibt eine dritte Wurzel aus $a - i\sqrt{b}$, die gleich $p - i\sqrt{q}$ ist. Dann ist die gesuchte Summe gleich $2p$. Man hat somit $2p$ zu bestimmen. Nun gilt

$$(p - i\sqrt{q})^3 = p^3 - 3pq + i(-3p^2\sqrt{q} + (\sqrt{q})^3) = a - i\sqrt{b}$$

und

$$(p + i\sqrt{q})^3(p - i\sqrt{3})^3 = (p^2 + q^2)3 = (a + i\sqrt{b})(a - i\sqrt{b}) = a^2 + b^2$$

also (da $a, b,p,q > 0$)

$$p^2 + q = \sqrt[3]{a^2 + b} \tag{14.17}$$

Ist $\sqrt[3]{a^2 + bc}$ rational, so $p^2 + q = c$, $q = c - p^2$, $-3pq = 3p^3 - 3cp$, also

$$p^3 - 3pq = 4p^3 - 3cp \tag{14.18}$$

Aus (14.15) und (14.18) folgt, dass p eine Lösung der kubischen Gleichung

$$a = 4p^3 - 3cp \tag{14.19}$$

ist.

Das Auffinden von b erleichterte Bombelli sich so: Wegen $p^2 + q = c$ muss $p^2 < c$ und wegen $p^3 - 3pq = a$ muss $p^3 > a$ sein. Da Bombelli nur rationale Zahlen für p suchte und da p ganzzahlig sein muss, wenn c und a ganzzahlig sind, ist es oft leicht, die Zahl p mit $p < \sqrt{c}$, $p > \sqrt[3]{a}$ zu finden (sofern eine solche Zahl überhaupt existiert).

Beispiele.

(1) $\sqrt[3]{52 + i\sqrt{2209}}$ (vgl. Kap. 18).

$a = 52$, $b = 2209$; $c = \sqrt[3]{52^2 + 2209} = \sqrt[3]{4913} = 17$.

Gesucht ist p so, dass $p^2 < 17$, $p^3 > 52$. $p = 4$ leistet das Verlangte (und genügt der Gleichung (14.19): $52 = 4 \cdot 4^3 - 3 \cdot 17 \cdot 4$). Die (reelle) Summe von $\sqrt[3]{52 + i\sqrt{2209}}$ mit einer geeigneten dritten Wurzel aus $52 - i\sqrt{2209}$ ist somit gleich 8.

Da $q = c - p^2 = 17 - 16 = 1$ ist, folgt auch $\sqrt[3]{52 + \sqrt{2209}} = 4 + i$.

(2) $\sqrt[3]{4 + i\sqrt{11}}$ (Bombelli 1572).

$a = 4$, $b = 11$, $c = \sqrt[3]{4^4 + 11} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Gesucht ist p so, dass $p^2 < 3$, $p^3 > 4$, also $\sqrt[3]{4} < p < \sqrt[2]{3}$. Ein solches ganzzahliges p gibt es nicht.

Die Gleichung (14.19) lautet $4 = 4p^3 - 3 \cdot 3p$, also $8 = (2p)^3 - 9(2p)$. Offenbar genügt der Wert $2p = -1$ dieser Gleichung. Bei dem Bombellischen Verfahren muss aber p positiv sein.

Moivre berechnete 1738 die dritten Wurzeln aus $a + i\sqrt{b}$ (a, b positiv) folgendermaßen.[74]
Aus dem Ansatz (14.14) folgt (14.15) und (14.16) und daraus (14.17), was die für p kubische Gleichung (14.19) ergibt. Nun verglich er (14.19) mit der Dreiteilungsgleichung (14.20) für den Cosinus:
Ist r der Radius eines Kreises, $l = r\cos\varphi$, $p = r\cos\frac{\varphi}{3}$, so gilt wegen $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$ ((5.19))

$$4p^3 - 3r^2p = r^2l \tag{14.20}$$

Aus dem Vergleich mit (14.19) folgt $c = r^2$, $a = r^2l$, also $r = \sqrt{c}$, $l = \frac{a}{c} = \sqrt{c}\cos\varphi$.
Man bilde $\frac{\varphi}{3}$, $\frac{2\pi-\varphi}{3}$, $\frac{2\pi+\varphi}{3}$, dann sind $(p =)\sqrt{c}\cos\frac{\varphi}{3}$, $\sqrt{c}\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}$, $\sqrt{c}\frac{2\pi+\varphi}{3}$ die drei Lösungen der Gleichung (14.19).
q bestimmt man aus $p^2 + q = c$. Für z.B. $p = \sqrt{c}\frac{\varphi}{3}$ findet man $q = c - p^2 = c\left(1 - \cos\frac{\varphi}{3}\right) = c\sin^2\frac{\varphi}{3}$.

Aufgaben

14.1. Man berechne die zweiten Wurzeln aus $-i$.

14.2. Man berechne a) $(\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}})^3$, b) $\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})^3}$, c) $(\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}})^3$, d) $\sqrt[4]{(1-i\sqrt{3})^3}$

14.3. Man berechne $\sqrt[9]{-1+i}$.

14.4. Man berechne den Betrag und die Argumente
a) der zehnten Wurzeln aus i,
b) der zwölften Wurzeln aus $5 + 5\sqrt{3}i$,
c) der sechsten Wurzeln aus 64,
d) der sechsten Wurzeln aus -64.

14.5. Man berechne eine fünfte Wurzel aus
a) $\frac{61}{64} + i\sqrt{\frac{375}{4096}}$, b) $\frac{61}{64} - i\sqrt{\frac{375}{4096}}$

14.6. Man berechne $\sqrt[3]{2+2i}$.

14.7. Man berechne $\sqrt[3]{2-11i}$.

14.8. Man berechne $\sqrt[3]{2+11i} = \sqrt[3]{2+i\sqrt{121}}$ nach dem Verfahren ((14.14) bis (14.19)) von Bombelli.

14.9. Man berechne das Produkt von $\sqrt[3]{3+i\sqrt{10}}$ mit ihrer konjugierten Zahl.

[74] Nach A. v. Braunmühl, Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes, Bibliotheca Mathematica (3) 2 (1901), 97-102, insbesondere S. 100.

15 Kubische Gleichungen

Zu den berühmten Problemen der griechischen Antike gehören das Problem der Verdoppelung des Würfels und das Problem der Dreiteilung eines Winkels (beides allein mit Zirkel und Lineal).

Hat der gegebene Würfel die Kantenlänge a, so ist sein Volumen a^3. Bezeichnen wir die gesuchte Kantenlänge des Würfels mit dem Volumen $2a^3$ mit x, so genügt x der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2a^3 = 0 \tag{15.1}$$

(Man kann beweisen, dass x nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.)

Ist ein Winkel φ durch seinen Cosinus $\cos\varphi = b$ gegeben, dann ist das Problem der Winkeldreiteilung gleichwertig mit der Aufgabe, $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ zu konstruieren. Da

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$$

ist, ist das Problem auf die Aufgabe zurückgeführt, eine Lösung der kubischen Gleichung

$$4x^3 - 3x = b \qquad \text{(Dreiteilungsgleichung, 15.2)}$$

mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Man kann beweisen, dass keine Lösung der kubischen Gleichung

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \tag{15.3}$$

(wir nehmen $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $b = \cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2}$) mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Die Bestimmung der Seiten eines regelmäßigen Neunecks führte schon al-Biruni auf die kubische Gleichung

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \tag{15.4}$$

zurück. (Schreibt man (15.3) in der Form $(2x)^3 - \frac{6}{2}2x - 1 = 0$ und setzt wieder x für $2x$, so entsteht (15.4).) Bezeichnen wir den Zentriwinkel des dem Einheitskreis einbeschriebenen Neunecks mit $2\varphi = \frac{2\pi}{9}$, so ist $3\varphi = \frac{\pi}{3}$ und daher einerseits $\cos 3\varphi = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ andererseits $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, also $8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi = 1$.
Die Zahl $x = 2\cos\varphi$ genügt somit der kubischen Gleichung (15.4). Hat man $2\cos\frac{2\pi}{18}$, so hat man das 18-Eck und gewinnt daraus das Neuneck. (Es ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.)

Die 19. Aufgabe des VI. Buches der Arithmetik des Diophant lautet, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dass die Summe des Flächeninhalts und der Hypotenuse eine Quadratzahl, der Umfang ein Kubus sei.

Diophant setzte den Flächeninhalt gleich f und die Hypotenuse $a^2 - f$ (so dass die erste Forderung mit $f + (a^2 - f) = a^2$ erfüllt ist). Da der Flächeninhalt gleich f gesetzt wurde, wird das Produkt der Katheten $2f$ sein. (Das Dreieck ist rechtwinklig!)
Wenn wir die eine Kathete gleich 2 annehmen, so wird die andere gleich f sein. Der Umfang ist $2 + f + a^2 - f = a^2 + f$. Es ist a so zu wählen, dass $a^2 + 2$ eine Kubikzahl b^3 ist.

Diophant nahm nun $a = x + 1$ und $b = x - 1$ an. Es muss $(x+1)^2 + 2 = (x-1)^3$, d.h. $x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$ sein, also x der kubischen Gleichung

$$x^3 + x = 4x^2 + 4 \tag{15.5}$$

genügen. Diophant gab die Lösung $x = 4$ an. Ist hiernach ein a bestimmt (also $a = 5$ bei Diophant), so folgt aus $f^2 + 4 = (a^2 - f)^2$ (Satz von Pythagoras) der Wert von f:

$$f = \frac{(a^2+2)(a^2-2)}{2a^2}$$

$(= \frac{(25+2)(25-2)}{2\cdot 25} = \frac{621}{50}$ bei Diophant; das Dreieck hat die Seiten 2, $\frac{621}{50}$, $25 - \frac{621}{50} = \frac{629}{50}$ und den Umfang $\frac{1350}{50} = 27 = 3^3)$[75]

Die vorangestellten Probleme (zusammen mit den Aufgaben 15.1 bis 15.5) zeigen, wie notwendig es ist, kubische Gleichungen zu lösen.

Eine kubische Gleichung ist eine Gleichung dritten Grades von der Form

$$x^3 + ax^3 + bx + c = 0 \tag{15.6}$$

mit reellen Zahlen a, b, c. (Besitzt x^3 einen von 1 und 0 verschiedenen Koeffizienten, so dividiert man die Gleichung durch diese Koeffizienten, und die Gleichung geht in die Form (15.6) über.)

Ist der absolute Koeffizient $c = 0$,so ist $x^3 + ax^2 + bx = x(x^2 + ax + b) = 0$, also $x = 0$ oder $x^2 + ax + b = 0$, also nur eine quadratische Gleichung zu lösen.

Beispiele.
(1) $x^3 + x^2 + 2x = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i, \qquad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}i$$

(als Lösungen $x^2 + x + 2 = 0$).

(2) $x^3+10x^2+16x = 0$. Es ist $x_1 = 0$ oder $x^2+10x+16 = 0$, also $x_2 = -5+\sqrt{25-16} = -2$, $x_2 = -5 - \sqrt{25-16} = -8$.

Ist x_1 eine Lösung von $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so ist das Polynom $f(x)$ durch $x - x_1$ teilbar.
Da $0 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c$, folgt

$$f(x) = f(x) - 0 = (x_3 - x_1^3) + a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$$

also in der Tat

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x)$$

mit

$$f_1(x) = x^2 + xx_1 + x_1^2 + (ax + x_1) + b = x^2 + (x_1 + a) + (x_1^2 + ax_1 + b)$$

Ist nun x_2 eine Lösung der quadratischen Gleichung $f_1(x) = 0$, also $f_1(x_2) = 0$, so ist

$$f_1(x) = f_1(x) - f_1(x_2) = (x - x_2)f_2(x)$$

mit $f_2(x) = x + (x_1 + x_2 + a)$. Die lineare Gleichung $f_2(x) = 0$ hat die Lösung $x_3 = -(x_1 + x_2 + a)$. Es ist $f_2(x) = x -_x 3$, $f_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)$, also

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{15.7}$$

[75] Euler hat bewiesen, dass die Gleichung $a^2 + 2 = b^3$ nur eine ganzzahlige Lösung $a = 5$, $b = 3$ besitzt.

Beispiele.
(1) $x^3 - 1 = (x-1)(x-\rho)(x-\rho^2) = (x-1)(x^2+x+1)$ mit $\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\rho^2 = \overline{\rho}$

(2) $x^3 - 8 = (x-2)(x-2\rho)(x+2\rho) = (x-2)(x^2+2x+4)$
(3) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$
(4) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x+2i)(x-2i) = (x-1)(x^2+4)$
(5) $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$
(6) $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$

Ist somit x_1 irgendeine Lösung von $f(x) = 0$, so gibt es zwei weitere Zahlen x_2, x_3 so, dass (15.7) gilt.
Da aber ein Produkt dann und nur dann verschwindet, wenn wenigstens ein Faktor verschwindet, gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = x_1$ oder $\alpha = x_2$ oder $\alpha = x_3$ ist. Eine kubische Gleichung hat also (höchstens) drei (verschiedene) Lösungen.

Hat die kubische Gleichung eine komplexe Zahl α als Lösung, so ist auch die konjugierte Zahl $\overline{\alpha}$ eine Lösung dieser Gleichung.

In der Tat folgt aus $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ auch

$$\overline{\alpha}^3 + a\overline{\alpha}^2 + b\overline{\alpha} + c = \overline{\alpha}^3 + \overline{a\alpha}^2 + \overline{b\alpha} + c = \overline{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c} = 0$$

(man beachte, dass für reelle Zahlen d stets $\overline{d} = d$ ist).

Da $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$ mit reellen Zahlen $\alpha + \overline{\alpha}$ und $\alpha\overline{\alpha}$ ist, lässt sich $f(x)$ stets in der Form

$$f(x) = (x-r)(x^2+sx+t) \tag{15.8}$$

(mit reellen Zahlen r, s, t) schreiben.
Eine kubische Gleichung hat somit mindestens eine reelle Lösung, nämlich entweder genau drei (nicht notwendig verschiedene) reelle Lösungen oder eine reelle und zwei konjugiert-komplexe Lösungen.

Aus der Produktdarstellung (15.7) folgt für $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ die Darstellung

$$f(x) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3$$

Der Vergleich der Koeffizienten liefert die folgenden Beziehungen (Satz von Vieta) zwischen den Lösungen x_1, x_2, x_3 und den Koeffizienten a, b, c der kubischen Gleichung $f(x) = 0$:

$$a = -(x_1+x_2+x_3), \qquad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \qquad c = -x_1x_2x_3 \tag{15.9}$$

Beispiele.
(1) Wie heißt die kubische Gleichung mit den Lösungen 1, 2, 3?
Aus $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ folgt mit (15.9) $a = -6$, $b = 2+6+3 = 11$, $c = -6$, also lautet die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

(2) Wie heißt die kubische Gleichung mit den Lösungen 1, i, $-i$?
Aus $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 - i$ folgt $a = -1$, $b = i + 1_i = 1$, $c = 1$, also lautet die Gleichung $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.

Die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung (15.6) führen wir auf die Lösung einer reduzierten kubischen Gleichung (ohne quadratisches Glied) zurück. Wir setzen

$$x = t - \frac{a}{3} \tag{15.10}$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
x^3 &= t^3 - 3t^2\frac{a}{3} + 3t\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = t^3 - at + \frac{a^2}{3}t - \frac{a^3}{27} \\
ax^2 &= at^2 - \frac{2}{3}a^2t + \frac{a^3}{9} \\
bx &= bt - \frac{ab}{3}
\end{aligned}
$$

also

$$x^3 + ax^2 + bx + c = t^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)t + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right)$$

Sind somit t_1, t_2, t_3 die Lösungen der Gleichung

$$t^3 + pt + q = 0 \tag{15.11}$$

worin

$$p = -\frac{a^2}{3} + b \qquad , \qquad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \tag{15.12}$$

so sind, nach (15.10), $x_1 = t_1 - \frac{a}{3}$, $x_2 = t_2 - \frac{a}{3}$, $x_3 = t_3 - \frac{a}{3}$ die Lösungen der Gleichung (15.6). Es genügt somit, die reduzierte Gleichung (15.11) zu lösen.

Beispiel.
Die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ geht durch $x = t + 2$ wegen

$$p = -12 + 11 = -1, \qquad q = -\frac{2}{27}\cdot 216 - \frac{-66}{3} - 6 = -16 + 22 - 6 = 0$$

in $t^3 - t = t(t^2 - 1) = 0$ über. Diese Gleichung hat die Lösungen $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$, also hat die gegebene Gleichung die Lösungen $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Für (15.11) findet man eine geometrische Lösung, wenn man $t^3 = -pt - q$ schreibt. Man hat nur die kubische Parabel $y = t^3$ zu zeichnen und mittels eines Lineals ihre Schnittpunkte mit der Geraden $y = -pt - q$ zu bestimmen (vgl. Abb. 15.1).

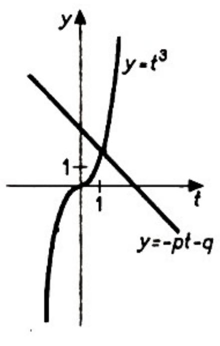


Abb. 15.1

Die so gefundene Lösung ist meist eine Näherungslösung und kann mittels der Methoden der praktischen Mathematik verbessert werden. Uns aber interessieren "Lösungsformeln", ähnlich wie wir sie für quadratische Gleichungen kennen.

Um nun die reduzierte Gleichung (15.11) algebraisch zu lösen, schreiben wir sie auch in der Form

$$t^3 = -pt - q \tag{15.13}$$

Nun ist $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$, also

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3) \tag{15.14}$$

Lassen sich somit zwei Zahlen u und v so finden, dass

$$3uv = -p \qquad \text{und} \qquad u^3 + v^3 = -q \tag{15.15, 15.16}$$

wird, so gilt $(u+v)^3 = -p(u+v) - q$,d.h.,

$$t = u + v \tag{15.17}$$

ist eine Lösung der kubischen Gleichung (15.13).
Angenommen, zwei Zahlen u und v genügen den beiden Gleichungen (15.15) und (15.16). Dann gilt

$$u^3 + v^3 = -q \qquad \text{und} \qquad u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{15.18}$$

Die Zahlen u^3 und v^3 sind folglich (Satz von Vieta) Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{15.19}$$

Hieraus ergibt sich entweder

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} \qquad \text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} \tag{15.20}$$

oder

$$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} \qquad \text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} \tag{15.21}$$

Durch Vertauschen der Vorzeichen der in (15.20) und (15.21) auftretenden Quadratwurzeln geht u^3 in v^3 und v^3 in u^3 über, durch das Vertauschen von u und v bleiben aber die Gleichungen (15.15) und (15.16) unverändert. Es genügt daher, nur eines der Vorzeichenpaare zu betrachten; also etwa die Beziehungen (15.20).

Ist u_1 eine beliebige Lösung von $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}$, so sind $u_1\rho$, $u_1\rho^2$ die beiden anderen Lösungen. Ist v_1 eine beliebige Lösung von $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}$, so sind $v_1\rho$, $v_1\rho^2$ die beiden anderen Lösungen.

Sind also u und v zwei Zahlen, die den beiden Gleichungen (15.15) und (15.16) genügen, so ist (u,v) notwendig eines der neun Lösungspaare (u_1, v_1), $(u_1, v_1\rho)$, $(u_1, v_1\rho^2)$, $(u_1\rho, v_1)$, $(u_1\rho, v_1\rho)$, $(u_1\rho, v_1\rho^2)$, $(u_1\rho^2, v_1)$, $(u_1\rho^2, v_1\rho)$, $(u_1\rho^2, v_1\rho^2)$ der Gleichungen (15.20).

Ist umgekehrt (u,v) irgendeines aus der Menge dieser neun Lösungspaare, so gelten die beiden Gleichungen (15.20), und folglich gilt $u^3 + v^3 = -q$, $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ (wie man leicht ausrechnet).

Welche der neun Zahlenpaare (u,v) erfüllen nun neben der Gleichung (15.16) auch die Gleichung (15.15)?

Zu der beliebigen Lösung u_1 von $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}$ wähle man v_1 so, dass $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$ ist. Dann gilt

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} \tag{15.22}$$

und

$$v_1^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u_1^3} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

(mit $-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ erweitern!), d. h., v_1 ist eine Lösung von

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Wegen $\rho^3 = 1$ erfüllen von den neun Lösungspaaren nur diese drei beide Gleichungen (15.16) und (15.15): (u_1,v_1) (v_1 nach (15.22)), $(u_1\rho, v_1\rho^2)$, $(u_1\rho^2, v_1\rho)$.
Die drei Zahlen

$$t_1 = u_1 + v_1, \qquad t_2 = u_1\rho + v_1\rho^2, \qquad t_3 = u_1\rho^2 + v_1\rho \tag{15.23}$$

sind somit Lösungen der kubischen Gleichung $t^3 + pt + q = 0$. Da eine kubische Gleichung höchstens drei Lösungen besitzt, sind damit auch schon alle Lösungen gegeben.

Es soll nun noch geklärt werden, wenn zwei dieser Lösungen zusammenfallen, wann alle Lösungen reell sind, wann komplexe Lösungen auftreten.
Dazu setzen wir

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

und unterscheiden die drei Fälle $D = 0$, $D > 0$, $D < 0$.

1.Fall: $D = 0$.
Die Gleichungen (15.20) lauten

$$u^3 = -\frac{q}{2} \qquad , \qquad v^3 = -\frac{q}{2}$$

Es sei $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{1}}^*$ (die reelle dritte Wurzel aus $-\frac{q}{2}$; dann ist nach (15.22) auch v_1 reell, also gleich u_1:

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{1}}^* = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{1}} & \text{falls } -\frac{q}{2} \geq 0, \text{ d.h. } q \leq 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{q}{1}} & \text{falls } \frac{q}{2} \geq 0, \text{ d.h. } q \geq 0 \end{cases}$$

Die Lösungen der kubischen Gleichung sind

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^* \\ t_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^*\rho + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^*\rho^2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^*(\rho + \rho^2) = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^* = t_3 \end{aligned}$$

Satz 15.1. Die kubische Gleichung $t^3 + pt + q = 0$ (p, q reell) mit $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ hat drei reelle Lösungen, von denen zwei einander gleich sind:

$$t_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^* \qquad , \qquad t_2 = t_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^* \tag{15.25}$$

Setzt man t_2 in die Gleichung $t^3 + pt + q = 0$ ein, so erhält man

$$\frac{q}{2} - p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^{*} + q = 0 \qquad \text{also} \qquad -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^{*} = \frac{3}{2}\frac{q}{p} \tag{15.26}$$

Beispiel. $t^3 - 3t + 2 = 0$, $p = -3$, $q = 3$, $D = \frac{2^4}{4} + \frac{-27}{27} = 0$.
$-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}^{*} = \sqrt[3]{-1}^{*} = -1$.
Die Lösungen sind $t_1 = -2$, $t_2 = t_3 = 1$.

2.Fall: $D > 0$.
In den Gleichungen (15.20) $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$, $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$ sind die rechten Seiten reelle Zahlen. Es sei $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ (die reelle dritte Wurzel aus $-\frac{q}{2} + \sqrt{D}$.
Dann ist nach (15.22) auch v_1 reell, also $v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}^{*}$ (die reelle dritte Wurzel aus $-\frac{q}{2} - \sqrt{D}$). Es ist

$$u_1\rho + v_1\rho^2 = u_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)$$
$$u_1\rho^2 + v_1\rho = u_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)$$

Diese Zahlen sind wegen $u_1 - v_1 \neq 0$ (da $u_1^3 \neq v_1^3$) konjugiert-komplex.

Satz 15.2. Die kubische Gleichung $t^3 + pt + q = 0$ (p, q reell) mit $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ hat die reelle Lösung

$$t_1 = u_1 + v_1 \quad \text{mit} \quad u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}^{*}, \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}^{*} \tag{15.27}$$

(Cardanische Formel) und die konjugiert-komplexen Lösungen

$$t_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \tag{15.28}$$

$$t_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \tag{15.29}$$

Beispiel.
$t^3 + 9t + 26 = 0$, $p = 9$, $q = 26$, $D = 13^2 + 3^3 = 196$. $\sqrt{D} = 14$.
$u_1 = \sqrt[3]{-13 + 14}^{*} = 1$, $v_1 = \sqrt[3]{-13 - 14}^{*} = -3$
Die Lösungen sind

$$t_1 = 1 - 3 = -2, \qquad t_2 = -\frac{1}{2}(-2) + i\frac{\sqrt{3}}{2}4 = 1 + 2\sqrt{3}i, \qquad t_3 = 1 - 2\sqrt{3}i$$

3. Fall: $D < 0$ (Casus irreducibilis).
Da $\sqrt{D} = -\sqrt{-D}$ mit $-D > 0$ ist, sind die rechten Seiten der Gleichungen (15.20) konjugiert-komplexe Zahlen. Wir können sie in der Form

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{15.30}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi)) \tag{15.31}$$

aufschreiben. Hierin ist der Betrag

$$r = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + (\sqrt{-D})^2} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{also} \qquad r = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \tag{15.32}$$

(Man beachte: Wegen $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist $p < 0$)

Das Argument φ ist wegen $0 < \varphi < \pi$ (da $\sqrt{-D} > 0$, liegt $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}$ in der oberen Halbebene, für $q > 0$ im zweiten, für $q < 0$ im ersten Quadranten) durch

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{r} = -\frac{q}{2r} \tag{15.33}$$

eindeutig gegeben. Die Lösungen der Gleichung (15.30) sind

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\\
u_2 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
u_3 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung (15.31) sind

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi-\varphi}{3} + i\sin\frac{2\pi-\varphi}{3}\right)\\
u_2 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{2\pi-\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
u_3 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{2\pi-\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Von den neun möglichen Paaren u, v sind die zu wählen, für die

$$uv = -\frac{p}{3}$$

gilt. Da das Produkt der Beträge bereits

$$(\sqrt[3]{r})^2 = \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}^{\,2} = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 = -\frac{p}{3}$$

ist, muss man u und v so wählen, dass das Argument von uv, also die Summe der Argumente von u und v, gleich 0 oder 2π wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
\arg u_1 + \arg v_3 &= 2\pi, \qquad \arg u_2 + \arg v_2 = 2\pi\\
\arg u_3 + \arg v_1 &= \frac{\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} = 2\pi
\end{aligned}$$

Benutzt man $\sin(2\pi - \psi) = -\sin\psi$, so erhält man als Lösungen der kubischen Gleichungen die im folgenden Satz angegebenen (beachte $p < 0$, $\sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$) für $t_1 = u_1 + v_3$, $t_2 = u_2 + v_2$, $t_3 = u_3 + v_1$.

Satz 15.3. Die kubische Gleichung $t^3 + pt + q = 0$ (p, q reell) mit $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ hat drei reelle Lösungen

$$t_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \tag{15.34}$$
$$t_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{15.35}$$
$$t_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right) \tag{15.36}$$

wobei sich $0 < \varphi < \pi$ aus $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}$ berechnet.

Beispiel.
$t^3 - 6t + 4 = 0$, $p = -6$, $q = 4$, $D = -4$, $\cos\varphi = \frac{-2}{(\sqrt{2})^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, daher $\varphi = 135°$, $\frac{\varphi}{3} = 45°$.
Die Lösungen sind

$$\begin{aligned}
t_1 &= 2\sqrt{2}\cos 45° = 2\sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\\
t_2 &= 2\sqrt{2}\cos(45° + 120°) = 2\sqrt{2}(\cos 45°\cos(180° - 60°) - \sin 45°\sin(180° - 60°))\\
&= -1 - \sqrt{3}\\
t_3 &= 2\sqrt{2}\cos(45° + 240°) = 2\sqrt{2}(\cos 45°\cos(270° - 30°) - \sin 45°\sin(270° - 30°))\\
&= -1 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Man kann auch direkt von den Gleichungen (15.20) ausgehen, die für diese kubische Gleichung die Form $u^3 = -2 + 3i$, $v^3 = -2 - 2i$ besitzen. Wählt man $u = 1 + i$, $v = 1 - i$ (vgl. (14.11), (14.12)), so wird unmittelbar

$$\begin{aligned}
t_1 &= (1 + i) + (1 - i) = 2\\
t_2 &= u_1\rho + v_1\rho^2 = -1 - \sqrt{3}\\
t_3 &= u_1\rho^2 + v_1\rho = -1 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aufgaben

Die Probleme der Aufgaben 15.1 bis 15.5 führen auf die Lösung kubischer Gleichungen. Diese kubischen Gleichungen sollen aufgestellt werden.

15.1. Gegeben seien der Inhalt und der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks, gesucht sind die Seiten.

15.2. Gegeben seien Inhalt und Oberfläche eines Zylinders, gesucht sind der Radius und die Höhe.

15.3. Wie tief sinkt eine Eiskugel im Wasser ein?

15.4. Es ist der Halbkreis mit dem Durchmesser d gesucht, in den sich drei gegebene Strecken der Längen a, b, c derart als Sehnen einzeichnen lassen, dass $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$ ist.

15.5. Für welche Winkel φ verschwindet die Summe $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi$?

In den folgenden Aufgaben 15.6 bis 15.12 sollen die angegebenen kubischen Gleichungen gelöst werden.

15.6. $t^3 = 6t + 40$ (Stevin 1585).

15.7. $t^3 = 30t + 36$ (Stevin 1585).

15.8. $t^3 = 15t + 4$ (Bombelli 1572).

15.9. $t^3 - 13t - 12 = 0$ (Girard 1629).

15.10. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ (Descartes 1637).

15.11. Man löse die auf Seite 119 angegebenen kubischen Gleichungen a) (15.4), b) (15.5).

15.12. Man löse die kubischen Gleichungen der Aufgaben a) 15.2, b) 15.3, c) 15.5.

16 Über Gleichungen höheren Grades

Eine biquadratische Gleichung[76] ist eine Gleichung vierten Grades von der Form

$$x^4 + ax^3 + bx^3 + cx + d = 0 \tag{16.1}$$

(mit reellen Zahlen a, b, c, d). Wir setzen

$$x = t - \frac{a}{4} \tag{16.2}$$

Hat man die Lösungen der durch (16.2) reduzierten biquadratischen Gleichung

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0 \tag{16.3}$$

worin

$$p = b - \frac{3}{8}a^2, \qquad q = c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3, \qquad r = d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4$$

so erhält man durch (16.2) die Lösungen von (16.1).
Lassen sich drei Zahlen u, v, w so finden, dass

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \tag{16.5}$$

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \tag{16.6}$$

$$uvw = -\frac{q}{8} \tag{16.7}$$

wird, so ist

$$t = u + v + w \tag{16.8}$$

eine Lösung der biquadratischen Gleichung (16.3).

Angenommen, drei Zahlen u, v, w genügen den drei Gleichungen (16.5), (16.6) und

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64} \tag{16.9}$$

Dann sind u^2, v^2, w^2 Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0 \tag{16.10}$$

Sind umgekehrt z_1, z_2, z_3 die Lösungen von (16.10) und u, v, w Zahlen mit $u^2 = z_1$, $v^2 = z_2$, $w^2 = z_3$, so gelten die Gleichungen (16.5), (16.6), (16.9). Welche dieser Zahlen u, v, w erfüllen neben (16.5) und (16.6) auch die Gleichung (16.7)?

Zu der beliebigen Lösung u_1 der Gleichung $u^2 = z_1$ und der beliebigen Lösung v_1 von $v^2 = z_2$ wähle man w_1 so, dass $u_1v_1w_1 = -\frac{q}{8}$ ist. Dann gilt

$$w_1 = -\frac{q}{8u_1v_1} \qquad \text{und} \qquad w_1^2 = z_3 \tag{16.11}$$

[76] Über biquadratische Gleichungen wird im folgenden nur ein grober Abriss gegeben. Die Verifikation der einzelnen Behauptungen wird dem Leser überlassen.

Die folgenden vier Tripel und nur diese erfüllen die Gleichungen (16.5), (16.6), (16.7):

$$(u_1,v_1,w_1),(u_1,-v_1,-w_1),(-u_1,v_1,-w_1),(-u_1,-v_1,w_1)$$

Die vier Zahlen

$$t_1=u_1+v_1+w_1,\qquad t_2=u_1-v_1-w_1,\qquad t_3=-u_1+v_1-w_1,\qquad t_4=-u_1-v_1+w_1 \tag{16.12}$$

sind die Lösungen der biquadratischen Gleichung (16.3).

Beispiel.
$t^4+a^4=0$; $p=0$, $q=0$, $r=a^4$. Die kubische Gleichung (16.10) ist

$$z^3-\frac{4a^4}{16}z=z\left(z^2-\frac{1}{4}a^4\right)=0$$

Sie hat die Lösungen $z_1=0$, $z_2=\frac{1}{2}a^2$, $z_3=-\frac{1}{2}a^2$. Man wähle

$$u_1=0,\qquad v_1=\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\qquad w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}ai$$

Dann sind

$$\begin{aligned}
t_1&=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}ai=\frac{sqrt2}{2}a(1+i)\\
t_2&=-\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}ai=\frac{sqrt2}{2}a(-1-i)\\
t_3&=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}ai=\frac{sqrt2}{2}a(1-i)=\overline{t_1}\\
t_4&=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}ai=\frac{sqrt2}{2}a(-1+i)=\overline{t_2}
\end{aligned}$$

die gesuchten Lösungen. Nach (11.2) sind $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ die Quadratwurzeln aus i (Hauptwert $\sqrt{i}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$). Die Quadratwurzeln aus $-i$ sind dann $\sqrt{-1}\sqrt{i}$ und $\sqrt{-1}(-\sqrt{i})$, also $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)i=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i)=\sqrt{-i}$ (Hauptwert) und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)i=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$.
Die vier Lösungen der Gleichung $t^4+a^4=0$ sind somit

$$t_1=a\sqrt{i},\quad t_2=-a\sqrt{i},\quad t_3=-a\sqrt{-i},\quad t_4=a\sqrt{-i}$$

Beseitigt man mittels

$$z=z'-\frac{p}{6} \tag{16.13}$$

das quadratische Glied der Gleichung (16.10), so gilt

$$z'^3+p'z'+q'=0 \tag{16.14}$$

mit

$$p'=-\frac{1}{2^43}(p^2+12r)\qquad,\qquad q'=-\frac{1}{2^63}(2p^3-72pr+27q^2)$$

Es ist $D' = \left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3 = -\frac{1}{2^{14}3^3}\Delta$ mit

$$\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$$

Unter der Voraussetzung, dass $q \neq 0$ ist, kann man dann folgende Übersicht über die Lösungen von (16.3) geben.

1. Fall: $D' = 0$.
a) Ist $p < 0$ und $p^2 - 4r > 0$, so sind alle Lösungen reell. Zwei von ihnen fallen zusammen. Gilt überdies $p^2 + 12r = 0$ und $8p^3 + 27q^2 = 0$, so fallen drei Wurzeln zusammen.
b) Gilt nicht gleichzeitig $p < 0$ und $p^2 - 4r > 0$, so gibt es eine reelle Doppellösung und ein Paar konjugiert-komplexer Lösungen.

2. Fall: $D' > 0$ ($\Delta < 0$).
Es gibt vier verschiedene Lösungen: zwei reelle, zwei konjugiert-komplexe.

3. Fall: $D' < 0$ ($\Delta > 0$).
a) Ist $p < 0$ und $p^2 - 4r > 0$, so sind alle Lösungen reell.
b) Ist nicht gleichzeitig $p < 0$ und $p^2 - 4r > 0$, so gibt es zwei Paare konjugiert-komplexer Lösungen.

Nach den Lösungsformeln für quadratische Gleichungen (11. Kapitel) haben wir die Lösungen für kubische Gleichungen (15.23) und die Lösungen für biquadratische Gleichungen (16.12) beschrieben. Man erkennt das Gemeinsame der angegebenen Lösungsverfahren:
Um die Lösung einer solchen Gleichung zu erhalten, muss man auf die Koeffizienten in geeigneter Weise die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen anwenden. Kann man die Lösungen einer algebraischen Gleichung in dieser Weise bekommen, so sagt man, dass die Gleichung algebraisch auflösbar ist.
Quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen sind algebraisch auflösbar.

Die Lösungsverfahren für kubische und biquadratische Gleichungen wurden erstmals 1545 von Cardano veröffentlicht und gehen auf Scipione del Ferro und Tartaglia (kubische Gleichungen) und auf Ferrari (biquadratische Gleichungen) zurück.
Alle Bemühungen der Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts, in ähnlicher Weise algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades (algebraisch) aufzulösen, blieben ohne Erfolg.

1799 sprach Gauß in seiner Doktorarbeit die Vermutung aus, dass die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht algebraisch auflösbar sei. Es handelt sich nicht um das Unvermögen der Mathematiker, dass die Lösungen nicht in der beschriebenen Art gefunden werden können, sondern es dürfte - davon war Gauß überzeugt - im Gegenteil bewiesen werden, dass das unmöglich ist.
Dass es aber stets komplexzahlige (speziell reelle) Lösungen gibt, hatte Gauß im Anschluss an d'Alembert und Euler gerade (in seiner Doktorarbeit) bewiesen.

Satz von Gauß. Jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit reellen (oder komplexen)[77] Koeffizienten

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^n + ... + a_1x + a_0 = 0$$

[77] Lässt man komplexe Koeffizienten zu, so kann man Real- und Imaginärteil der linken Seite der Gleichung gesondert betrachten und erhält zwei Gleichungen nur mit reellen Koeffizienten. Dies ist auch der Grund, warum kubische und biquadratische Gleichungen nur mit reellen Koeffizienten betrachtet werden (Kapitel 15, 16).

hat im Körper der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung, also eine komplexe Zahl α mit $f(\alpha) = 0$.

Hieraus folgt der Fundamentalsatz über algebraische Gleichungen:
Jedes Polynom n-ten Grades

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^n + ... + a_1 x + a_0$$

kann in ein Produkt von genau n Faktoren zerlegt werden,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n) \tag{16.15}$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ komplexe Zahlen sind. Jede algebraische Gleichung $f(x) = 0$ besitzt also genau n Lösungen $\alpha_1, ..., \alpha_n$.[78]

Da mit einer komplexen Zahl $\alpha = a + bi$ auch die konjugierte Zahl $\overline{\alpha} = a - bi$ eine Lösung einer algebraischen Gleichung ist,[79] tritt in (16.15) mit dem Faktor $(x - \alpha)$ auch der Faktor $(x - \overline{\alpha})$ auf.
Man kann jeweils das Produkt $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ zu einem Faktor $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ vom Grad 2 mit reellen Koeffizienten zusammenfassen. Somit lässt sich $f(x)$ auch in der Form

$$f(x) = (x - a_1)...(x - a_k)(x^2 + p_1 x + q_1)...(x^2 - p_l x + q_l) \tag{16.16}$$

schreiben (wobei $k + 2l = n$ ist und $a_1, ..., a_k, p_1, q_1, ..., p_l, q_l$ reelle Zahlen sind).

Beispiel.
Es ist

$$t^4 - a^4 = (t - a\sqrt{i})(t + a\sqrt{i})(t + a\sqrt{-1})(t - a\sqrt{-1})$$

Darin ist

$$\begin{aligned}(t + a\sqrt{-1})(t - a\sqrt{-i}) &= \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i)\right) \\ &= t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)t - \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i)t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2(1+i)(1-i) \\ &= t^2 - \sqrt{2}at + a^2\end{aligned}$$

und ebenso

$$(t + a\sqrt{i})(t - a\sqrt{-1}) = t^2 + \sqrt{2}at + a^2$$

Somit ist

$$t^4 - a^4 = (t^2 - \sqrt{2}at + a^2)(t^2 + \sqrt{2}at + a^2)$$

[78]Nach dem Satz von Gauß besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung $\alpha_1 \in \mathbb{C}$. Dann gilt $f(x) = (x - \alpha_1)g(x)$ mit einem Polynom von Grad $n - 1$. Dieses besitzt eine Lösung $\alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt $g(x) = (x - \alpha_2)h(x)$. Das Polynom h(x) besitzt eine Lösung $\alpha_3 \in \mathbb{C}$, und es ist $h(x) = (x - \alpha_3)k(x)$ usw.
Es wird $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$. Ist β irgendeine Lösung von $f(x) = 0$, so gilt $f(\beta) = (\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)...(\beta - \alpha_n)$, also $\beta - \alpha_i = 0$, d.h. $\beta = \alpha_i$ für ein i.

[79]Aus $f(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$ folgt

$$\begin{aligned}0 = \overline{f(\alpha)} &= \overline{\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0} = \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{\alpha}^{n-1} + ... + \overline{a_1}\overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + ... + a_1\overline{\alpha} + a_0\end{aligned}$$

(für reelle Zahlen a ist $\overline{a} = a$).

Durch Vergleich der Koeffizienten in (16.15) erhält man unschwer den Wurzelsatz von Vieta. Zwischen den Lösungen (Wurzeln) $\alpha_1, ..., \alpha_n$ und den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung $x^n + a_{n-1}x^n + ... + a_1x + a_0 = 0$ bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n &= -a_{n-1} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n &= a_{n-2} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -a_{n-3} \\ &... \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n &= (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauß bzw. dem Fundamentalsatz über algebraische Gleichungen ist gesichert, dass genau n komplexzahlige (speziell auch reelle, nicht notwendig verschiedene) Lösungen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades wirklich existieren.

Doch eine Methode zur Berechnung der Lösungen wird damit nicht gegeben. Auch die Frage, ob eine algebraische Gleichung n-ten Grades sogar algebraisch auflösbar ist, wird damit nicht beantwortet. Zwischen 1799 und 1813 versuchte P. Ruffini diese Frage, wie Gauß, negativ zu beantworten. Später (1824 und 1826) gab dann N. H. Abel einen einwandfreien Beweis für den

Satz von Abel. Algebraische Gleichungen, deren Grad $n \geq 5$ ist, sind im allgemeinen nicht algebraisch auflösbar.

Es gibt also im allgemeinen keine "Lösungsformeln", in denen die Lösungen dadurch gewonnen werden, dass man die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen auf die Koeffizienten der Gleichung anwendet. Für spezielle Gleichungen kann das durchaus der Fall sein (z.B. $x^5 - 1 = 0$, fünfte Einheitswurzeln).
Ein vollständiger Überblick über alle algebraisch auflösbaren Gleichungen wird durch die sogenannte Galoissche Theorie gegeben.[80]

Aufgaben

16.1. Man löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 8x^3 + 11 = 68x$ (Bombelli 1572).

16.2. Man löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 42x^2 + 12 = 58x^3 + 80x$.

16.3. Man löse die biquadratische Gleichung $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

16.4. Welche algebraische Gleichung besitzt die n Zahlen

$$\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}, ..., \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

als Lösungen?

16.5. a) Welche Gleichung besitzt die n Zahlen

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1}, ..., \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

als Lösungen.
b) Man berechne die Summe dieser Zahlen.

[80] Es sei verwiesen auf das in der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Bibliothek (Bd. 28) des Teubner-Verlages erschienene Buch von Emil Artin, Galoissche Theorie (Leipzig 1959).

17 Über Grenzwerte, Logarithmen und Potenzen

Eine Zahlenfolge besteht aus unendlich vielen (komplexen) Zahlen, so dass auf Grund einer bestimmten Vorschrift den natürlichen Zahlen $1{,}2{,}3,\ldots$ eindeutig je eine Zahl $z_1, z_2, z_3, \ldots$ zugeordnet ist (symbolisch: $\{z_n\}$). Die einzelnen Zahlen z_n heißen Glieder der Folge. Zahlenfolgen sind also Funktionen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{C}$ (vgl. 1. Kapitel).

Eine Zahlenfolge $\{z_n\}$ heißt Nullfolge (symbolisch: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$), wenn sie die folgende Eigenschaft hat:
Ist K_r ein beliebiger Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r (also die Menge der komplexen Zahlen z mit $|z| = r$; (vgl. (5.16)), so liegen fast alle Zahlen z_n innerhalb von K_r.
"Fast alle" heißt "alle, mit Ausnahme von endlich vielen".

Wie klein auch r gewählt wird, stets liegen alle Zahlen z_n, deren Index n größer oder gleich einer gewissen Zahl n_0 (die von r abhängt) ist, innerhalb von K_r, so dass also höchstens eine endliche Anzahl $n_0 - 1$ von Gliedern am Anfang der Folge $z_1, z_2, \ldots, z_{n_0-1}$ außerhalb oder auf K_r liegt.
Wenn r sehr klein ist, so kann n_0 sehr groß sein. Für jeden noch so kleinen Wert von r müssen eben fast alle Zahlen z_n innerhalb von K_r liegen: Für $r > 0$ gibt es ein n_0 so, dass $|z| < r$ wird für alle $n > n_0$.

Beispiel.
Die Folge $5 + 25i$, $4 + 16i$, $3 + 9i$, $2 + 4i$, $1 + i$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}i$, ..., , $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}i$, ... ist eine Nullfolge.

Eine komplexe Zahl w heißt Grenzwert einer Folge $\{z_n\}$, wenn $\{z_n - w\}$ eine Nullfolge ist.

Beispiel.
1 ist Grenzwert der Folge $\left\{1 + \frac{1}{n}i\right\}$.

Besitzt eine Zahlenfolge einen Grenzwert, so heißt die Folge konvergent. Eine Folge $\{z_n\}$ ist also dann und nur dann konvergent, wenn es eine (komplexe) Zahl w gibt und für jedes $r > 0$ ein n_0, so dass $|z_n - w| < r$ wird für alle $n > n_0$.

Bemerkungen.
1. Diese Definition ist die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Folge reeller Zahlen (mit einem reellen Grenzwert). Im Reellen betrachtet man die Zahlen innerhalb eines Intervalls (um den Grenzwert) auf der Zahlengeraden, im Komplexen innerhalb eines Kreises (um den Grenzwert) in der Zahlenebene.
Folgen, die im reellen Sinn konvergieren, konvergieren offenbar auch im komplexen Sinn.

Ist umgekehrt eine Folge $\{s_n\}$ reeller Zahlen im komplexen Sinn konvergent, so gibt es eine komplexe Zahl $w = a + bi$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = w$. Dann gilt $s_n - w = (s_n - a) + (-b)i$.

Nun ist einerseits $|s_n - w| = \sqrt{(s_n - a)^2 + b^2} \geq |b|$, aber andererseits $|s_n - w| < r$ für beliebig kleines r. Hieraus folgt $|b| < r$ für beliebig kleines r, was nur für $b = 0$ möglich ist. Der Grenzwert w ist also reell.

2. Eine Folge $\{z_n\}$ komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn die beiden reellen Folgen $\{\mathrm{Re}\,(z_n)\}$ und $\{\mathrm{Im}\,(z_n)\}$ konvergent sind.
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,(z_n)$$

Beweis. a) Die Folge $\{z_n = a_n + b_n i\}$ sei konvergent und habe den Grenzwert $z = a + bi$. Für jedes $r > 0$ existiert ein n_0, so dass für alle $n > n_0$ stets $|z_-z| < r$ ist. Dann ist auch $|a_n - a| \leq |z_n - z| < r$ und $|b_n - b| \leq |z_n - z| < r$ (beachte die Ungleichungen der Aufgabe 5. 10), d. h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

b) Gilt umgekehrt $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$, so gibt es für $r > 0$ stets ein n_0, so dass für alle $n > n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad |b_n - b| < \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Mit $z = a + bi$ gilt dann

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_b - b)^2} < r$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Qed.

Für die Beträge r_n und Argumente φ_n von z_n gilt $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n^2 + \lim_{n\to\infty} b_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = r(= |z|) \qquad \text{(reelle Folgen)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \arctan \frac{b_n}{a_n} = \arctan \frac{b}{a} = \varphi(\equiv \arg z) \qquad \text{(reelle Folgen)}$$

Die Folge $\{r_n(\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)\}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn die reellen Folgen $\{r_n\}$ und $\{\varphi_n\}$ (Bogenmaß) konvergent sind. Ist $\lim_{n\to\infty} r_n = r$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

3. Sind $\{z_n\}$ und $\{z'_n\}$ konvergente Zahlenfolgen mit dem Grenzwert z bzw. z', so sind auch $\{z_n + z'_n\}$, $\{z_n - z'_n\}$, $\{z_n z'_n\}$ und (falls $\lim_{n\to\infty} z'_n = z' \neq 0$) $\left\{\frac{z_n}{z'_n}\right\}$ konvergente Zahlenfolgen mit dem Grenzwert $z + z'$, $z - z'$, zz' bzw. $\frac{z}{z'}$.
Als Beispiel betrachten wir für eine reelle Zahl a die Folge

$$z_1 = \left(1 + \frac{ia}{1}\right)^1, \quad z_2 = \left(1 + \frac{ia}{2}\right)^2, \quad z_3 = \left(1 + \frac{ia}{3}\right)^3, \quad ..., z_n = \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n, \quad ...$$

Für die Beträge dieser Zahlen gilt

$$\begin{aligned} |z_n|^2 = z_n\overline{z_n} &= \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n \left(1 - \frac{ia}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1}\frac{a^2}{n^2} + \binom{n}{2}\left(\frac{a^2}{n^2}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{a^2}{n^2}\right)^3 + ... + + \binom{n}{n}\left(\frac{a^2}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\left(\frac{a^2}{n^2}\right)^k &= \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\left(\frac{a^2}{n}\right)^k = \frac{1}{n^k}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a^2}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{a^2}{n}\right)^k < \frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{a^2}{n}\right)^k \end{aligned}$$

da $1 - \frac{l}{n} < 1$ für $l = 1{,}2{,}...{,}k-1$ $k! \geq 2^{k-1}$). Hieraus folgt

$$|z_n|^2 < 1 + \frac{a^2}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a^2}{n}\right)^3 + ... + + \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{a^2}{n}\right)^n$$

also

$$|z_n|^2 < 1 + \frac{a^2}{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}\frac{a^2}{n} - 1}$$

weil

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{a^2}{n}\right)^n &= \frac{a^2}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{n} + \left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{a^2}{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}\frac{a^2}{n} - 1}\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|^2 = 1$ und daher auch $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ ist.
Für die Argumente φ_n der Zahlen $\left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n$ gilt $\varphi_n \equiv n \arg\left(1 + \frac{ia}{n}\right)(2\pi)$.
Wir setzen $1 + \frac{ia}{n} = \rho_n(\cos\psi_n + i\sin\psi_n)$. Dann gilt (Bogenmaß, Abb. 17.1)

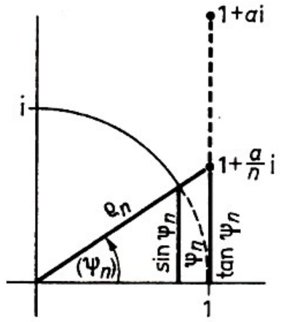


Abb. 17.1

$\sin\psi_n \leq \psi_n \leq \tan\psi_n$, also $\frac{1}{\rho_n}\frac{a}{n} \leq \psi_n \leq \frac{a}{n}$. Folglich ist $n\frac{1}{\rho_n}\frac{a}{n} \leq n\psi_n \leq n\frac{a}{n}$, also $\frac{1}{\rho_n}a \leq n\psi_n \leq a$.
Hieraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \equiv \lim\limits_{n\to\infty} n\psi_n = a(2\pi)$ (da $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$, wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}i\right) = 1$).

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \equiv a(2\pi)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \cos a + i\sin a$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{ai}{n}\right)^n = \cos a + i\sin a \tag{17.1}$$

(Der Grenzwert liegt auf dem Einheitskreis.)
In Analogie zu den reellen Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459... \tag{17.2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{na} = e^a \tag{17.3}$$

mit der Eigenschaft $e^a e^b = e^{ab}$, bezeichnen wir den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{ai}{n}\right)^n$ mit e^{ai}. Nach (17.1) gilt

$$e^{ai} = \cos a + i\sin a \qquad \text{(Eulersche Gleichung ,17.4)}$$

Hieraus folgt die Eigenschaft
$$e^{ai}e^{bi} = e^{(a+b)i} \tag{17.5}$$
Aus (17.4) folgt ferner $e^{2\pi i} = 1$, allgemeiner
$$e^{2k\pi i} = 1 \quad (k \text{ ganzzahlig}) \tag{17.6}$$
Ist $e^{ai} = 1$, so ist gleichzeitig $\cos a = 1$ und $\sin a = 0$, also $a = 2k\pi$, d.h., aus $e^{ai} = 1$ folgt
$a = 2k\pi$ (17.7)
Ferner gilt
$$e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1, \qquad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \qquad e^{\frac{-\pi i}{2}} = -i \tag{17.8}$$
Die n-ten Einheitswurzeln haben die Darstellung
$$e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^k = \zeta^k \qquad , \qquad \zeta = e^{\frac{2\pi}{n}i} \tag{17.9}$$
für $k = 0,1,2,...,n-1$.
Für beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$ werde e^z durch
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{17.10}$$
definiert. Für $z = x$ reell ist $e^z = e^x$ (reelle e-Funktion), so dass es sich in (17.10) um die Verallgemeinerung der reellen e-Funktion handelt. Aus (17.10) folgt unmittelbar die fundamentale Eigenschaft
$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \tag{17.11}$$
Hieraus ergibt sich, dass e^z für keine komplexe Zahl z gleich Null werden kann. Wäre $e^{z_0} = 0$ für ein z_0, so wäre
$$e^{z_0+z'} = e^{z_0}e^{z'} = 0 \cdot e^{z'} = 0$$
Da es für jede komplexe Zahl z ein z' mit $z = z_0 + z'$ gibt, wäre $e^z = 0$ für alle z, was unsinnig ist. Aus (17.11) ergibt sich ferner $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, allgemeiner
$$e^{z+2k\pi i} = e^z \tag{17.12}$$
Ist umgekehrt $e^{z'} = e^z$, so folgt aus (17.11) $e^{z'-z} = 1$. Wegen (17.10) und (17.7) bedeutet dies[81] $z' - z = 2k\pi i$, d.h. $z' = z + 2kpi$.

Die Zahl e ist im Reellen nicht nur die Basis der e-Funktion (17.3), sondern auch die Basis des natürlichen Logarithmus.
Bekanntlich ist die reelle Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^{>0}$ (vgl. Abb. 17.2).[82]

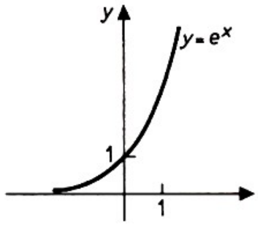


Abb. 17.2

[81]Aus $e^z = e^{x+iy} = 1$ folgt $e^x = 1$, also $x = 0$ und $e^{iy} = 1$, also (nach (7)) $y = 2k\pi$. Somit ist $z = 2ki$.
[82]$\mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Menge aller positiven reellen Zahlen.

Ihre Umkehrfunktion, das ist die Funktion, die jedem $y \in \mathbb{R}^{>0}$ das eindeutig bestimmte $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x = y$ zuordnet, ist auch eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}^{>0}$ auf $\mathbb{R}$.
Sie heißt Logarithmusfunktion. Der natürliche Logarithmus der positiven Zahl y ist die reelle Zahl x mit $e^x = y$ (Bezeichnung: $x = \ln y$). Der Logarithmus $\ln y$ ist die eindeutig bestimmte Zahl b mit $e^b (= e^{\ln y}) = y$.

Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ (17.10) ist nicht bijektiv. Sie ist nach (17.12) periodisch mit der Periode $2\pi i$. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z = 0$ gibt es unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$.
In der Tat, es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $e^w = z$ mit $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = z$$

Hieraus folgt (vgl. (17.10)) $e^u = |z|$, d. h. $u = \ln |z|$ (reeller Logarithmus), und $v \equiv \arg z (2\pi)$, d.h. $v = \arg z + 2k\pi$ (k ganzzahlig). Es ist somit (für $z \neq 0$)

$$w = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \tag{17.13}$$

oder

$$w = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \left(\arctan \frac{y}{x} + 2k\pi \right)$$

Umgekehrt gilt für komplexe Zahlen w der Form (17.13) $e^w = z$. Da für positive reelle Zahlen $z = x$ die Zahl $w = \ln x$ (reeller Logarithmus) wird, heißt in Verallgemeinerung davon jede Zahl w der Form (17.13) ein natürlicher Logarithmus von z.
Jede komplexe Zahl $z = 0$ hat nach (17.13) (für alle ganzen Zahlen k) unendlich viele natürliche Logarithmen. Alle natürlichen Logarithmen von z haben denselben Realteil ($\ln |z|$), während sich die Imaginärteile um Vielfache von 2π unterscheiden.

Wir nennen den eindeutig bestimmten natürlichen Logarithmus von z, dessen Imaginärteil zwischen 0 (einschließlich) und 2π (ausschließlich) gelegen ist, den Hauptwert unter den unendlich vielen Logarithmen und bezeichnen ihn mit $\log z$.

Ist $z \neq 0$ und $|z| = r$ und $\arg z = \varphi$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), so ist

$$\log z = \ln r + i\varphi \tag{17.14}$$

Für positive reelle Zahlen $z = r$ ist $\log z = \ln r$, so dass $\log$ eine Verallgemeinerung von $\ln$ ist.

Beispiele.
(1) Alle komplexen Zahlen w mit $e^w = 1$ sind gegeben durch $w = \ln 1 + 2k\pi i$ (k ganzzahlig).

(2) Es ist $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$, also

$$\log(-1) = \pi i \tag{17.15}$$

Alle komplexen Zahlen w mit $e^w = -1$ sind gegeben durch $w = \log(-1) + 2k\pi i = \pi i + 2k\pi i = (2k + 1)\pi i$.

(3) Es ist $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, also

$$\log i = \frac{\pi}{2} i \tag{17.16}$$

Alle komplexen Zahlen w mit $e^w = i$ sind gegeben durch $w = \frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i = \frac{4k+1}{2}\pi i$.

(4) Es ist $|-i| = 1$, $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$, also

$$\log(-i) = \frac{3\pi}{2}i \tag{17.17}$$

Alle komplexen Zahlen w mit $e^w = -i$ sind gegeben durch

$$\frac{3\pi}{2} + +2k\pi i = \frac{4k+3}{2}\pi i$$

Bemerkung. Die Rechenregeln

$$\ln r_1 r_2 = \ln r_1 + \ln r_2 \qquad , \qquad \ln \frac{r_1}{r_2} = \ln r_1 - \ln r_2$$

(für positive reelle r_1, r_2) und $\ln r^k = k \ln r$ (r positiv, k ganz) lassen sich im allgemeinen nicht auf komplexe Zahlen übertragen.

Ist $|z_1| = r$, $\arg z_1 = \varphi_1$ $(0 \leq \varphi_1 < 2\pi)$, also $\log z_1 = \ln r_1 + i\varphi_1$, und $|z_2| = r_2$, $\arg z_2 = \varphi_2$ $(0 \leq \varphi_2 < 2\pi)$, also $\log z_2 = \ln r_2 + i\varphi_2$, so ist $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$, und $\arg z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 \equiv \varphi(2\pi)$ $(0 \leq \varphi < 2\pi$; aber im allgemeinen nicht $\varphi_1 + \varphi_2 < 2\pi)$, so dass $\log z_1 z_2 = \ln(r_1 r_2) + i\varphi$ wird, während

$$\log z_1 + \log z_2 = \ln(r_1 r_2) + i(\varphi_1 + \varphi_2)$$

ist. Es gilt also[83]

$$\log z_1 z_2 \equiv \log z_1 + \log z_2 (2\pi i) \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0)$$

Ebenso

$$\log \frac{z_1}{z_2} \equiv \log z_1 - \log z_2, \qquad \log z + \equiv k \log z (2\pi i) \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z \neq 0)$$

Ist a eine positive reelle Zahl, so gilt $a^n = a \cdot a ... a$ (n Faktoren), $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$ (für rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, $q > 0$, p ganzzahlig),

$$a^b = e^{b \ln a} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{b \ln a}{n}\right)^n \qquad (b \text{ reell})$$

Ist $\alpha \neq 0$ eine komplexe Zahl, so ist $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha ... \alpha$ (n Faktoren), $\alpha^{p/q} = (\alpha^{1/q})^p = (\sqrt[q]{\alpha})^p$ (für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $q > 0$, p ganzzahlig) (vgl. 14. Kapitel).
Wir definieren für einen komplexen Exponenten β

$$\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha} \tag{17.18}$$

Ist speziell $\beta = n$, so ist

$$\alpha^\beta = e^{n \log \alpha} = (e^{\log \alpha})^n = \alpha^n$$

Ist speziell $\beta = \frac{p}{q}$, so ist

$$\alpha^\beta = e^{\frac{p}{q} \log \alpha} = e^{\frac{p}{q} \ln |\alpha|} e^{\frac{p}{q} i \arg \alpha} = |\alpha|^{\frac{p}{q}} \left(\cos\left(\frac{p}{q} \arg \alpha\right) + i \sin\left(\frac{p}{q} \arg \alpha\right)\right) = \alpha^{\frac{p}{q}}$$

[83] d.h. bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$; also $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2\pi i k$ mit einem geeigneten k

Bemerkung. Die für reelle Potenzen bekannten Rechenregeln $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$, $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ gelten für komplexe Potenzen nicht mehr.

Beispiele.
(1) $2^i = e^{i\log 2} = e^{i\ln 2} = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2) = 0{,}76924 + i + 0{,}63896$

(2) Es sei $\alpha = 1 - \frac{1}{2}i$. Dann ist $(e^{2\pi i})^\alpha = 1^\alpha = e^{\alpha\ln 1} = e^0 = 1$, aber

$$e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i + \phi} = e^\pi = 23{,}140692632779269...$$

(3) $i^i = e^{i\log i} = e^{i\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, also

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078795763507619... \tag{17.19}$$

Aufgaben

17.1. a) Hat die Zahlenfolge $\{i^n\alpha\}$ ($\alpha \neq 0$ komplex) einen Grenzwert?
b) Hat die Zahlenfolge $\left\{\left(1 + \frac{i}{n^2}\right)^n\right\}$ einen Grenzwert?

17.2. Man berechne alle natürlichen Logarithmen von
a) $-e$, b) -2, c) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

17.3. Man berechne $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.

17.4. "Wenn e die Basis des hyperbolischen Logarithmus, π den halben Kreisumfang, und n eine positive oder negative Zahlen bedeuten, so ist bekanntlich

$$e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1 \qquad , \qquad e^{1+2n\pi\sqrt{-1}} = e$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi\sqrt{-1})^2} = e = e^{1+4n\pi\sqrt{-1}-4n^2\pi^2}$$

Da aber $e^{1+4n\pi\sqrt{-1}} = e$ ist, so würde daraus folgen: $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, welches absurd ist. Nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultats gefehlt ist." (Clausen 1827)[84]).

[84] J. reine und angew. Math. 2 (1827), 286-287.

18 Zur Geschichte der komplexen Zahlen

[85] Die Anfänge des Rechnens mit Zahlen der Form $a + \sqrt{b}$ lassen sich bis Euklid (300 v. u. Z.) zurückverfolgen. Die Beschränkung auf positive b war jedoch bis ins 16. Jahrhundert selbstverständlich.

Bei Heron (um 60 u. Z.), Diophant (um 250 u. Z.), Chuquet (1484) wird man nur wegen falsch gewählter Zahlenbeispiele auf die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen geführt. Mahavira (830) und Bhaskara (1150) erklärten, dass es keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl gebe.
Und dies blieb die Ansicht der Mathematiker für lange Zeit. (Die Ansicht ist natürlich richtig, wenn man sagt, dass es unter den reellen Zahlen keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl gibt.)

Abraham bar Hiya (auch Savasorda genannt, 1120), Fibonacci (1202), Pacioli (1487), Cardano (1539, 1545), Bombelli (1572), Ghetaldi (1637) bemerkten bei der Lösung quadratischer Gleichungen, dass diese in gewissen Fällen (wenn man die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl zu berechnen hätte) nicht möglich wäre.
1545 sprach Cardano beim Auftreten von negativen Lösungen und von Quadratwurzeln aus negativen Zahlen von "falschen" Gleichungslösungen. Er löste die Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist, bzw. die Zahl -6 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist. Er erkannte $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$ bzw. $-3 + \sqrt{-31}$, $-3 - \sqrt{-31}$ als Lösungen, nannte sie jedoch "wahrhaft sophistische Lösungen". (Cardano verfügte über eine Symbolik, diese Größen aufzuschreiben!)

Nicht nur bei der Behandlung quadratischer Gleichungen, sondern in seinem ganzen Werk Ars magna befolgte Cardano die allgemeine Regel, "dass immer dann, wenn das, was vorgeschrieben ist, nicht ausgeführt werden kann, das, was vorgelegt war, nicht existiert und nicht existieren konnte[86]" (also die Aufgabe selbst unmöglich wäre). Er erkannte nicht, dass bei gewissen kubischen Gleichungen die Auflösungsvorschrift auf Quadratwurzeln aus negativen Zahlen führt (also das, was vorgeschrieben ist, nicht ausgeführt werden kann), obwohl das, was vorgelegt war, existiert (die vorgelegte Gleichung hat eine reelle Lösung), die Aufgabe also nicht "unmöglich" ist.

Kubische Gleichungen[87] ergaben sich schon in der Antike beim klassischen Delischen Problem der Verdopplung des Würfels, beim Problem der Dreiteilung des Winkels, bei der Archimedischen Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene so zu teilen, dass die Volumina der beiden dabei entstehenden Kugelabschnitte in einem gegebenen Verhältnis stehen, oder auch bei der Aufgabe, die Seite eines regelmäßigen Siebenecks zu finden.

Babylonische Keilschrifttexte enthalten kubische Gleichungen, die mit Hilfe der Tafeln von Kubikzahlen ausgewertet wurden.[88]

[85] In diesem Kapitel wird (außer bei Zitaten und Hinweisen) auf Quellen- und Literaturangaben verzichtet. Der Leser wird die Belege zusammen mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis in dem vom Verfasser geplanten Buch "Das Geheimnis der komplexen Zahlen" finden.

[86] Zitiert nach H. Gerick, Geschichte des Zahlbegriffs (Mannheim-Wien-Zürich 1970, S. 58).

[87] Zur Geschichte der kubischen Gleichungen siehe: L. Matthiessen. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen (Leipzig 1878. S. 362-540, Ss. 799-813, 888-912, 938-952); J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 3. Band (3. Aufl., Berlin-Leipzig 1937, S. 118-160); A. P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter (Leipzig 1964. S. 63-70. 256-267).

[88] Vgl. B. L. Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft (2. Aufl., Basel-Stuttgart 1966, S. 114f., S. 70f.)

"Die griechischen Geometer entwickelten ... eine geometrische Methode zur Konstruktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung, doch haben sie dieses Verfahren nicht auf irgendeinen größeren Problemkreis und erst recht nicht auf die Entwicklung einer allgemeinen Theorie dieser Gleichung angewandt. Diese Arbeit blieb den Gelehrten der islamischen Länder vorbehalten."[89]

Im 9. Jahrhundert versuchte al-Mahani vergeblich, die Aufgabe des Archimedes algebraisch zu lösen. Konstruktive Lösungen dieser Aufgabe mit Hilfe von Kegelschnitten gab im 10. Jahrhundert al-Hhaitham (= al-Hazin). Man stieß immer häufiger auf Probleme, die auf Gleichungen dritten Grades führten.
Die Algebra der Gleichungen hat im 11. Jahrhundert al-Hayyam "in eine wissenschaftliche Form gebracht und die allgemeine Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen durch geometrische Konstruktion mit Hilfe des Kreises und der Kegelschnitte gelehrt".[90]

Er diskutierte fünfundzwanzig Formen von Gleichungen vom Grade ≤ 3. Für die quadratischen Gleichungen gab er geometrische und algebraische Beweise. Für die kubischen Gleichungen fand er mit Hilfe von Kegelschnitten positive Lösungen.
(Ähnliche Konstruktionen wurden später von Fermat, Descartes, van Schooten u. a. ohne Kenntnis des Werkes von al-Hayyam angegeben.) al-Hayyam bemühte sich auch, jedoch vergeblich, eine rechnerische Regel zur Lösung kubischer Gleichungen zu finden.

Das Bemühen des Regiomontanus um eine exakte Lösung war nicht erfolgreich. Noch Ende des 15. Jahrhunderts mussten Chuquet und Paccioli in ihren algebraischen Werken eingestehen, dass (algebraische) Lösungen für kubische Gleichungen noch nicht gefunden wären. Das sollte erst italienischen Wissenschaftlern zu Beginn des 16. Jahrhunderts gelingen. (Pacioli musste sich bei kubischen Gleichungen komplizierter, schwerfälliger geometrischer Lösungsmethoden bedienen.) Man erstrebte einfache Auflösungsregeln, deren Anwendung jeder lernen konnte.

Endlich fanden dann Scipio del Ferro (um 1500) und Tartaglia (1535) die ersehnten Lösungsverfahren. Cardano publizierte sie 1545 in seiner Ars magna (mit Beweis).
Der casus irreducibilis $x^3 = px + q$ mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ bereitete Tartaglia und Cardano unüberwindliche Schwierigkeiten. Cardano vermied in der Ars magna Aufgaben dieser Art. (Erst in einer späteren Schrift, 1570, beschäftigte er sich damit.)

In seiner Algebra (1572) beschäftigte sich Rafael Bombelli von der Universität in Bologna ausführlich mit dem Rechnen (Multiplizieren, Ausziehen der dritten Wurzel, Dividieren, Addieren, Subtrahieren) mit "komplexen Zahlen" und mit quadratischen und kubischen Gleichungen. Mit diesem Werk beginnt die eigentliche Geschichte der Theorie der komplexen Zahlen.

Auch Bombelli bemerkte (wie Cardano), dass gewisse quadratische Gleichungen nicht gelöst werden könnten, falls Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auftreten.
"Das ist aber kein Mangel des Lösungsverfahrens, sondern des Problems selbst, das von Unmöglichem handelt oder nicht richtig angesetzt ist", betonte er.
(Auch Ghetaldi (1627) sprach von unmöglichen Problemen, aus deren Lösungen deren Unmöglichkeit erkannt werde. Doch bereits Girard (1629) erkannte den Nutzen der "unmöglichen" Lösungen.)

Bombelli verfügte über ein Verfahren zur Ausrechnung gewisser Kubikwurzeln $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$. Bei der Behandlung des "casus irreducibilis" der kubischen Gleichungen erkannte er damit:

[89] A. P. Juschkewitsch, a. a. O., S. 257-258.
[90] L. Matthiessen, a. a. O., S. 293.

Führt auch die Lösungsvorschrift des Cardano zunächst auf Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, so wird das Ergebnis doch reell. Das war immerhin ein Argument sich mit den "sophistischen Größen" zu befassen.
Doch was geschieht, wenn es mit dem praktischen (jedoch nicht allgemeinen) Verfahren Bombellis zur Bestimmung von Kubikwurzeln nicht möglich ist, die geforderten Kubikwurzeln auszurechnen?

Durch eine geometrische Konstruktion konnte Bombelli nachweisen, dass eine kubische Gleichung $x^3 = px + q$ (für positive p und q stets (also auch im irreduziblen Fall $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$) eine positive Lösung hat.

Das war für Bombelli wohl das entscheidende Argument für eine Beschäftigung mit komplexen Zahlen. Nur mit komplexen Zahlen konnte man kubische Gleichungen mit drei reellen Wurzeln algebraisch auflösen.
Diejenigen Fälle, in welchen die Lösungsformeln für kubische Gleichungen unter der Kubikwurzel Quadratwurzeln aus negativen Zahlen enthalten, beschäftigten die Mathematiker nach Cardano (1570) und Bombelli für noch lange Zeit, zumal Bombelli (und nach ihm auch andere Wissenschaftler, wie Descartes) die Allgemeingültigkeit der Cardanischen Auflösungsregel bezweifelt hatte, sein Werk aber auch vergessen worden war.

Schon 1591 fand Vieta, dass man den irreduziblen Fall der Cardanischen Regel dadurch umgehen kann, dass man die kubische Gleichung mit der Dreiteilungsgleichung identifiziert.[91]
Descartes gab auch eine geometrische Lösung für die positive Wurzel der kubischen Gleichung $x^3 = px + q$ im irreduziblen Fall.

Als fast 100 Jahre nach dem Erscheinen der Bombellischen Algebra in England eine Diskussion über kubische Gleichungen (ausgelöst 1667 durch Ferguson) geführt wurde, las Leibniz in der Pariser königlichen Bibliothek Bombellis Algebra und machte seine englischen Freunde 1675 darauf aufmerksam. Noch ein Jahr zuvor hielt Leibniz den Durchgang durchs Imaginäre bei der Behandlung kubischer Gleichungen im irreduziblen Fall für vermeidbar.
Nach den Bombelli-Studien überzeugte er sich jedoch von der Allgemeingültigkeit der Cardanischen Regel unter Einbeziehung des Imaginären.

Das Imaginäre könnte man auch bei reellen Wurzelwerten wohl nicht vermeiden.
Mit kubischen Gleichungen und Methoden zu deren Auflösungen beschäftigten sich auch weiterhin viele Mathematiker, u. a. Colson, Moivre, Tschirnhaus, Euler, Bezout, Lambert, Lagrange, Cayley, Kummer.[92]

Insbesondere der irreduzible Fall war Anlass für zahlreiche Spezialuntersuchungen und Diskussionen nicht nur im 17. Jahrhundert, sondern auch in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, besonders in Italien.[93]
Es wurden hierbei keine neuen Resultate gewonnen, doch allmählich überzeugten sich die Mathematiker von den Vorteilen, die der Gebrauch imaginärer Größen mit sich brachte. Die kubischen Gleichungen lieferten ein Argument für die Beschäftigung mit komplexen Zahlen im

[91] Bringt man beispielsweise (in modernen Bezeichnungen) die Gleichung $x^3 = px + q$ auf die Form der Dreiteilungsgleichung $x^3 = 3r^2x + sr^2$ ($p = 3r^2, q = sr^2$), so liegt der irreduzible Fall für $\frac{s}{2} < r$ vor. Wegen $s < 2r$ gibt es ein ψ mit $s = 2r\cos\psi$. Die Zahl $x = 2r\cos\frac{\psi}{3}$ ist dann eine Lösung der gegebenen Gleichung, da $4\cos^3\frac{\psi}{3} - 3\cos\frac{\psi}{3} = \cos\psi$ ist.
[92] Siehe Matthiessen, a. a. O.
[93] Siehe F. Cajori, Algebra. In: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV (Leipzig 1908, S. 72-153, insbesondere S. 148-153).

16. Jahrhundert und gewisse Anerkennung derselben im 17. und 18. Jahrhundert.

Nicht nur die Auflösung der quadratischen und kubischen, auch die der biquadratischen Gleichungen wurde mit Hilfe des Zeichens $\sqrt{-1}$ allgemein (formal) ausführbar.
Im Jahre 1702 konnte Leibniz darauf hinweisen, dass sich imaginäre Größen nicht weniger als reelle in der Analysis der Gleichungen mit Recht und mit Nutzen verwenden lassen.

Newton unterschied in seiner Arithmetica universalis (1707) positive, negative und unmögliche (also komplexe) Wurzeln. Unmögliche Wurzeln algebraischer Gleichungen beschrieben die Fälle unmöglicher Probleme (Probleme, die keine physikalische oder geometrische Lösung haben) so, als ob sie möglich wären.
Er untersuchte, in welcher Anzahl unmögliche Wurzeln vorkommen, ein Problem, das im 18. Jahrhundert auch von Maclaurin, Campbell, Kästner, du Gua de Malves, Euler und Waring behandelt worden ist.

So konnte Lagrange 1777 als einen der wichtigsten Fortschritte, welche die Analysis (Algebra) in der vorangegangenen Zeit gemacht habe, den erachten, dass sie durch imaginäre Größen nicht länger in Verlegenheit gesetzt würde und dass dieselben der Rechnung ebenso unterzogen würden wie reelle Größen.
Die Vorteile, welche imaginäre Größen in der Gleichungstheorie gewähren, zeigten sich auch beim Fundamentalsatz der Algebra, den Gauß den "Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen" nannte.

Schon Roth formulierte 1608 die Aussage, dass eine Gleichung vom Grad n höchstens n Lösungen haben kann. In einer 1615 publizierten Arbeit sprach Vieta (1591) den nach ihm bezeichneten Wurzelsatz (für Gleichungen der Grade 2 bis 5) aus. Girard erweiterte ihn 1629 auf Gleichungen beliebigen Grades. Es gibt somit für jeden Grad Gleichungen, die soviel Wurzeln haben wie ihr Grad angibt.
(Schon Cardano (1545) bemerkte, dass es kubische Gleichungen mit drei Wurzeln gäbe.)
Girard erkannte neben positiven Lösungen auch negative und komplexe Lösungen an und formulierte die allgemeine Regel, dass jede Gleichung n-ten Grades n Lösungen hat.

Nun war es unmöglich, die Wichtigkeit der komplexen Zahlen zu übersehen.
Rolle (1690) erkannte, dass die Gleichung $x^n - a = 0$ n Wurzeln besitzt. Descartes (1637) bemerkte, dass es für jeden Grad Gleichungen gibt, die soviel (reelle) Lösungen haben, wie ihr Grad angibt. Die Wurzeln wären jedoch nicht immer reell, sondern manchmal nur eingebildet (seulement imaginaires). Man könnte sich stets soviel Wurzeln jeder Gleichung vorstellen (imaginer), wie der Grad der Gleichung angibt.

Ähnlich sah es Newton (1707). Hiernach ist es fast ein Axiom, dass jede Gleichung stets Wurzeln besitzt (wenn keine reellen, so eben imaginäre) und damit (vgl. Kap. 16) genau n (reelle oder imaginäre) Wurzeln. Es ist nun zu zeigen, und das versuchten d'Alembert (1746), Euler (1751), Foncenex (1759), Lagrange (1772), Fuss (1781) und andere Mathematiker des 18. Jahrhunderts, dass die Wurzeln jeder Gleichung auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ (a,b reell) gebracht werden können.

Schon in einem Brief an Goldbach (1742) hatte Euler behauptet, dass jedes Polynom in einfache reelle Faktoren oder wenigstens in quadratische reelle Faktoren zerlegt werden kann. Die imaginären Faktoren würden nämlich paarweise auftreten, d. h. eine algebraische Gleichung mit $a + b\sqrt{-1}$ auch $a - b\sqrt{-1}$ als Wurzel besitzen, so dass das Produkt

$$(x - (a + b\sqrt{-1})(x - (a - b\sqrt{-1})$$

ein quadratisches reelles Polynom wird.
An der letzten Aussage zweifelte jedoch Nicolas Bernoulli (1742) wie auch Leibniz schon 40 Jahre zuvor (1702). (Die Fragestellung nach der Zerlegung in einfachste reelle Faktoren hatte sich übrigens sowohl bei Leibniz als auch bei Euler, d'Alembert, Johann Bernoulli stets aus der Aufgabe der Zerlegung einer rationalen Funktion in Partialbrüche bei der Integration rationaler Funktionen ergeben.)

Euler schrieb später, dass zu jener Zeit niemand mehr daran zweifelte, dass alle imaginären Größen, woher sie auch ihren Ursprung nehmen, auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ gebracht werden können, obwohl diese Wahrheit damals noch nicht auf genügend sichere und einleuchtende Art bewiesen worden sei.
Unter anderen Forderungen an die Forschung hatte er 1783 auch die eines strengen Beweises für diesen Fundamentalsatz gestellt.

Im Oktober 1797 schrieb Gauß in sein Tagebuch, dass durch eine natürliche Methode (von ihm) bewiesen worden sei, dass Gleichungen imaginäre Wurzeln haben. Im Jahre 1799 promovierte er dann mit einem Beweis des Fundamentalsatzes, dass jede Gleichung n-ten Grades wirklich n Wurzeln besitzt, dass sich ein Polynom mit reellen Koeffizienten stets in Faktoren ersten und zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zerlegen lässt.

"Meinen Beweis werde ich ohne jede Benutzung imaginärer Größen durchführen, obschon auch ich mir dieselbe Freiheit gestatten könnte, deren sich alle neueren Analytiker bedient haben.[94]"

Einleitend stellte Gauß die Mängel der Beweisversuche seiner Vorgänger d'Alembert, Euler, de Foncenex und Lagrange dar. Gauß war sich darüber im klaren, dass auch er ein (lückenhaftes) Argument der algebraisch-geometrischen Anschauung entnommen hatte.[95]
Im 19. Jahrhundert wurden dann noch viele weitere Beweise (von Gauß, Argand, Cauchy und anderen) des Fundamentalsatzes gegeben.

In seinen Disquisitiones arithmeticae (1801) stellte Gauß (unter Verwendung komplexer Zahlen) die Theorie der Kreisteilung dar, insbesondere gelang ihm die vollständige Auflösung der Kreisteilungsgleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1 = 0 \qquad (p \text{ Primzahl})$$

Was Gauß an diesem Beispiel durchgeführt hatte, haben die Mathematiker des 19. Jahrhunderts (erwähnt seien Abel, Galois, Kronecker) auf beliebige algebraische Gleichungen verallgemeinert. Aber nicht nur für die Algebra, sondern auch für die Zahlentheorie waren Gauß Entdeckungen wegweisend.

Er erschloss der Anwendung der komplexen Zahlen ein neues Gebiet, die Zahlentheorie. (Erste zahlentheoretische Anwendungen finden sich aber schon bei Euler.) Die komplexen Zahlen und die Kreisteilungstheorie benutzte er bei seinen Untersuchungen zur Theorie der biquadratischen Reste, Jacobi benutzte sie zur Theorie der kubischen und höheren Potenzreste.
Auch Cauchy hatte erkannt, dass die Verwendung imaginärer Ausdrücke nicht allein in der Algebra, sondern auch in der Zahlentheorie großen Vorteil gewähren könnte.

Dies zeigten in der Tat die weiteren zahlentheoretischen Untersuchungen von Gauß, Cauchy, Dirichlet und Kummer (u.a.). Es sei bemerkt, dass Gauß in der Selbstanzeige (einer zahlentheoretischen Arbeit) von 1831 etwaige Einwendungen gegen die Heranziehung der komplexen

[94] Die vier Gauss'schen Beweise ... (Hrsg. E. Netto), Ostwald's Klassiker Nr. 14 (Leipzig-Berlin 1913, S. 5).
[95] Der Beweis "ist im Prinzip richtig, aber nicht vollständig" (F. Klein).

Zahlen in die Zahlentheorie mit der Berufung auf ihre anschauliche Darstellbarkeit zurückgewiesen hat.
Die komplexen Zahlen erwiesen sich nicht nur in der Algebra und Zahlentheorie, sondern auch in der Analysis als nützlich.

Die Trigonometrie wurde wesentlich durch den Satz von Moivre bereichert. Schon am Ende des 17. Jahrhunderts konnten Newton (1676) und Moivre (1698) $\sin n\varphi$ bzw. $\cos n\varphi$ als Funktionen von $\sin\varphi$ bzw. $\cos\varphi$ ausdrücken.
(Spezialfälle für niedrige n ergaben sich aus geometrischen Betrachtungen Vietas (1591).)

Bernoulli (1712) und Fagnano (1719) konnten (unter Benutzung von Logarithmen komplexer Zahlen) $\tan n\varphi$ durch $\tan\varphi$ ausdrücken. Durch die Betrachtung gewisser algebraischer Gleichungen fand dann Moivre (1707, 1722) einen Satz, der implizit die Moivresche Formel enthält; dieser Zusammenhang mit der Winkelteilung wurde dann acht Jahre später in seinem Buch Miscellanea analytica (1730) direkt ausgesprochen.
Obwohl schon von Newton die Potenzreihen von e^x, $\cos x$, $\sin x$ angegeben wurden, hat erst Euler (1748) in § 133 seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen die Moivresche Formel

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

mittels Potenzreihen hergeleitet und aus ihr Darstellungen von $\cos nx$, $\sin nx$ entwickelt. (Alle diesbezüglichen Formeln hatte dann 1808 Lagrange in seinen Legons sur le calcul des fonctions zusammengestellt.)

Schon einige Jahre vorher hatte Euler (zwischen 1740 und 1743) durch Vergleich der Reihenentwicklungen gefunden, dass $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ ist, und erkannt, dass Zusammenhänge zwischen trigonometrischen Funktionen mit rein-imaginärem Argument und der Exponentialfunktion mit reellem Exponenten bestehen.
Die Gültigkeit der Moivreschen Formel für komplexes Argument zeigte Cauchy (1847).

Auf der Grundlage der Erkenntnis, dass durch das Imaginäre ein Zusammenhang zwischen Kreis und Hyperbel gegeben werden kann,[96] konnte Riccati (1752) die Hyperbelfunktionen analog den Kreisfunktionen in die Mathematik einführen und Lambert (1768) dieselben für die Mathematik verwendungsfähig machen.

Was die Trigonometrie betrifft, sei noch erwähnt, dass Euler (1775) bei der Untersuchung der Partialbruchzerlegung der Funktion $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi - \cos\varphi}$ imaginäre Winkel betrachtete, dass Argand (1806) auch trigonometrische Anwendungen seiner Untersuchungen zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen machte, dass Schilling (1891) eine Arbeit über die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle komplexer Argumente publizierte.

Auch die Infinitesimalrechnung wurde durch die Verwendung komplexer Zahlen bereichert. Es stellte sich heraus, dass die im Reellen voneinander verschiedenen Formeln

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan x\sqrt{a} & (a > 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-a}} \log \frac{1+x\sqrt{-a}}{1-x\sqrt{-a}} & (a < 0) \end{cases}$$

im Komplexen identisch sind. "Diese Übereinstimmung sprach den ästhetischen Sinn der Mathematiker an."[97]

[96] Dieser Zusammenhang wird in Pieper, Das Geheimnis der komplexen Zahlen, beschrieben.
[97] W. F. Osgood in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Zweiter Band (Analysis), Zweiter Teil II.B 1, Heft 1 (1901), S. 6.

Leibniz (1702) und Bernoulli (1702) führten durch die von ihnen verwendete Methode der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen komplexe Zahlen in die Berechnung von Integralen ein. Auch Euler (1727, 1777), Laplace (1812), Poisson (1813, 1820), Cauchy (1824) benutzten komplexe Zahlen zur Integralberechnung. Poisson (1815) fand, dass der Übergang vom Reellen zum Imaginären unrichtige Resultate ergeben kann.

d'Alembert (1752) integrierte gewisse partielle Differentialgleichungen mittels Funktionen komplexer Variabler.

Gauß (1811) kannte bereits wichtige Sätze über die Integration durch imaginäres Gebiet. Cauchys Memoire über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825) wurde ein Markstein für die Verwendung komplexer Zahlen bei der Integration. Es galt, die durch formale Integration komplexer Ausdrücke erhaltenen Formeln der Integralrechnung mit strengen Methoden zu durchdenken.
Mit der Integral- und Differentialrechnung hatte man gegen Ende des 17. Jahrhunderts die Grundlagen für eine Theorie der elementaren transzendenten Funktionen gewonnen.

Die Mathematiker bemühten sich jedoch bald, diese Theorie ohne Benutzung der Infinitesimalrechnung durch "algebraische" Methoden zu begründen. Während man in der Infinitesimalrechnung nur gelegentlich - wie eben erwähnt - mit komplexen Zahlen, meist aber nur mit reellen Zahlen arbeitete, wurden die komplexen Zahlen in der die algebraischen Methoden verwendenden Analysis, die später algebraische Analysis genannt wurde, systematisch angewandt.

Der Beginn dieser mathematischen Disziplin ist mit Eulers Introductio in analysin infinitorum (1748), die Wende zur strengen Begründung der Theorie mit Cauchys Analyse algebrique (1821) und der Abschluss offenbar mit dem Enzyklopädieartikel von Alfred Pringsheim und Georg Faber (1909) anzusetzen.[98]

Die Integralrechnung (mit nur gelegentlicher Benutzung komplexer Zahlen) und die algebraische Analysis sind als Vorstufen zur eigentlichen Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher anzusehen. Bei der Anwendung der Integralrechnung auf Probleme der mathematischen Physik wurde schon Euler (1777) auf Funktionenpaare u, v der Veränderlichen x, y geführt, die den für die Funktionentheorie fundamentalen (sogenannten Cauchy-Riemannschen) Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

genügten.

Cauchys Algebraische Analysis von 1821 und insbesondere sein Memoire von 1825 sind als der eigentliche Beginn einer Funktionentheorie anzusehen.
Es handelt sich im ersten um das Problem der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Potenzreihe, das wesentlich durch den Gebrauch komplexer Zahlen gelöst werden konnte, im zweiten um die allgemeine systematische Behandlung bestimmter Integrale zwischen imaginären Grenzen.

"Allerdings war es Cauchy von vornherein nicht um die imaginären Größen als solche zu tun. Er verhielt sich diesen gegenüber neutral, ja man könnte fast sagen, dass sein Bestreben eher darauf gerichtet war, derselben zu entraten. Erst nachdem er sein Problem unter Trennung der

[98] Die Beantwortung der Frage, was die "algebraische Analysis" eigentlich ist, erhält man beim Studium dieses Enzyklopädieartikels. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendung. Zweiter Band, Dritter Teil, Erste Hälfte (Leipzig 1909-1921, II.C 1, Heft 1 (1909), S. 1-46).

Funktionen in ihren reellen und rein imaginären Teil gelöst hatte, erkannte er, wie gut es ist, eine solche Trennung eben nicht vorzunehmen, sondern direkt von dem Satz $\int f(z)dz = 0$, wo das Integral über eine beliebige geschlossene Kurve hin erstreckt wird, auszugehen.
(Die beiden Gleichungen $\int udx + \int vdy = 0$, $\int vdx - \int udy = 0$, welche die mathematische Physik lieferte, werden also jetzt zu einer einzigen Gleichung zwischen komplexen Größen vereinigt.)"[99]

Etwa von 1826 an hatten sich Abel und Jacobi mit dem Studium der elliptischen Funktionen befasst. Die Periodeneigenschaften dieser Funktionen basieren auf den komplexen Zahlen.
Schon Gauß hatte die Bedeutung der komplexen Zahlen insbesondere durch seine Entdeckung der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktionen erkannt und unabhängig von Abel und Jacobi die elliptischen Funktionen studiert (ohne etwas darüber zu publizieren).

Zahlreiche Mathematiker beschäftigten sich mit den neuen Funktionen und schufen die Grundlage dafür, dass in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine allgemeine Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher insbesondere durch Riemann und Weierstraß geschaffen werden konnte.

Nicht nur in der Algebra, Zahlentheorie und Analysis, auch in der Geometrie wurden die komplexen Zahlen benutzt. Fagnano (1719) konnte den Umfang U des Einheitskreises in der Form

$$U = 4\sqrt{-4}\log\left(\frac{-1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1)}}\right)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}$$

darstellen und hat später eine Arbeit Cyclometria imaginariorum (1762) publiziert.
Euler und Bernoulli gaben (1728) Beziehungen an, aus denen $U = -4i\log i$, also $\frac{\pi}{2} = -i\log i$ folgt. Duhre (1751) erkannte Zusammenhänge zwischen der Kreisfläche, dem imaginären Hyperbelsektor und dem imaginären Logarithmus.
Das Thema der Verwandtschaft von Kreis und Hyperbel mit Hilfe der imaginären Größe wurde auch von Foncenex, Lambert (1768), Ferroni (1782) und anderen behandelt.

In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts kam Bezout (1764) zu der Einsicht, dass die Anzahl der Durchschnittspunkte von algebraischen Kurven vom Grad m und vom Grad n maximal mn sei und diese Zahl bei der Zulassung imaginärer Größen (und bei geeigneter Verabredung über das Verhalten der Kurven im Unendlichen) stets erreicht wird.
Im 19. Jahrhundert beschäftigten sich die Geometer auf Grund wegweisender Untersuchungen von v. Staudt mit der Frage nach der geometrischen Bedeutung imaginärer Gebilde in der Geometrie (z. B. Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden, welche denselben nicht trifft), so Stolz, Frege in seiner Dissertation (1873) und Felix Klein. Argand (1806), Cauchy (1847), Hankel (1867) u. a. gaben geometrische Anwendungen der komplexen Zahlen.

Nicht zuletzt ist unter den geometrischen Fragestellungen, in denen komplexe Zahlen systematisch verwendet werden, die Theorie der Kreisteilung zu nennen, die Gauß in seinen Disquisitiones arithmeticae ausführlich algebraisch und arithmetisch behandelt hat. (Die Zuordnung zwischen den Eckpunkten eines regelmäßigen n-Ecks mit den n-ten Einheitswurzeln hatte man schon vor Gauß gekannt.)

Schon frühzeitig wurden die komplexen Zahlen in Untersuchungen zu physikalischen und anderen Problemen verwendet; so in d'Alemberts (1746) Abhandlung über die allgemeine Ursache

[99] Osgood, a. a. O., S. 7.

der Winde, d'Alembert (1752), Eulers (1755), Cauchys (1814) Arbeiten über die Hydrodynamik, Lamberts (1768) astronomischen Untersuchungen, Lagrandes (1772) Theorie der geographischen Karten, Poissons (1813) Betrachtungen über die Frage nach der Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche leitender Körper.
Von Steinmetz (1893) wurden die komplexen Zahlen in die Elektrotechnik eingeführt.

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, dass die komplexen Zahlen in verschiedensten Gebieten der Mathematik angewendet wurden und wertvolle Ergebnisse lieferten, teilweise neue (die man nachträglich rein reell zu beweisen versuchte), teilweise bekannte (in eleganterer Weise oder in befriedigenderer Form).
Der casus irreducibiles der kubischen Gleichungen, der Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen, die Eulersche Formel (der Zusammenhang zwischen trigonometrischen und Exponentialfunktionen), der Satz von Bezout, Abels und Jacobis elliptische Funktionen, Cauchys algebraische Analysis, Gauß' Betrachtungen über biquadratische Reste waren einige der schwerwiegendsten Argumente für die Anerkennung der komplexen Zahlen.

Die vollständige Beherrschung des Begriffs der komplexen und der Theorie der komplexen Zahlen, die Vorstellungen von diesen Größen blieben für lange Zeit hinter den Anwendungen zurück. Es war ein langwieriger und schwieriger Weg bis zur Beherrschung der komplexen Zahlen.

Das Rechnen mit rein-imaginären Zahlen beherrschten bereits Bombelli (in der Algebra, 1572) und Cardano (im Gespräch über Plus und Minus, verfasst nach der Lektüre der Bombellischen Algebra). Sie behandelten die Größen $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ als "Vorzeichen" und formulierten deren Multiplikationsregeln, wie z. B. $(-\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = (x)$.

Bombelli bemerkte, dass man eine Summe von reellen und rein-imaginären Zahlen nicht weiter zusammenfassen könne. Er gab zahlreiche Beispiele für die Berechnung von Produkten, Kubikwurzeln, wie z. B. $\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}}$, Quotienten, Summen und Differenzen komplexer Zahlen, von Produkten und Summen von Kubikwurzeln aus komplexen Zahlen.
Er erkannte dabei den Zusammenhang zwischen der Kubikwurzel aus einer komplexen Zahl und den Kubikwurzeln der dazu konjugiert-komplexen Zahl.

Für Cardano (1576) war es auffallend und im Widerspruch zum ganzen "Euklid", dass eine Zahl wie $2+\sqrt{-1}$, wo der positive Teil den "negativen" übersteige, ins Quadrat erhoben $3+4\sqrt{-1}$ gebe, wo jetzt der "negative" Teil den positiven übersteige. Ihm war es nicht klar, dass die Summe einer dritten Wurzel aus $2 + 11,,sqrt{-1}$ und einer dritten Wurzel aus $2 - 11\sqrt{-1}$ gleich 4 wäre (dieses Beispiel steht bei Bombelli bei der Behandlung der kubischen Gleichung $x^3 = 15x + 4$).

Die 100 Jahre später von Leibniz angegebene Identität[100] $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ (als Beispiel dafür, dass man Summen von Wurzeln geraden Grades bilden kann, die komplexe Zahlen enthalten, die aber selbst reell sind), war für die Zeitgenossen (unter ihnen Huygens und Wallis) ein überraschendes, mysteriöses Ergebnis. (Das Beispiel wurde später von Kästner (1794) in seinen Anfangsgründen behandelt.)
Das Rechnen mit komplexen Zahlen war notwendig bei der Lösung quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen. Insbesondere ergab sich immer wieder die Aufgabe, Kubikwurzeln aus komplexen Zahlen zu berechnen. Es seien Ferguson (1667), Newton (1670), Wallis (1673) genannt.

[100] Zu $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ ist eine geeignete Quadratwurzel aus $1-\sqrt{-3}$ zu addieren (vgl. Aufgabe 11.6).

Michael Rolle (1690) erkannte, dass jede n-te Wurzel n Werte besitze. Moivre (1738) gab eine Vorschrift zur Bestimmung der n-ten Wurzeln aus $a+\sqrt{-b}$. D'Alembert (1768) beschäftigte sich mit der Vieldeutigkeit der n-ten Wurzeln aus komplexen Zahlen.
Auch Wessel (1797) gab die verschiedenen n-ten Wurzeln an. Euler fand Mitte des 18. Jahrhunderts, dass $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ einen reellen Wert ($=$ 0,2078795763) besitzt,[101] welches ihm merkwürdig zu sein schien (und Argand 1813 bezweifelte).

D'ALembert (1746) zeigte, dass nicht nur die Addition $\alpha+\beta$, Subtraktion $\alpha-\beta$, Multiplikation $\alpha\beta$, Division $\frac{\alpha}{\beta}$, sondern auch die Potenzierung α^β zweier komplexer Zahlen α, β wieder eine komplexe Zahl $A+B\sqrt{-1}$ (A, B reell) liefert. Euler zeigte überdies, dass auch

$$\begin{gathered}\log(a+b\sqrt{-1}),\quad \sin(a+b\sqrt{-1}),\quad \cos(a+b\sqrt{-1}),\quad \tan(a+b\sqrt{-1}),\\ \arcsin(a+b\sqrt{-1}),\quad \arccos(a+b\sqrt{-1}),\quad \arctan(a+b\sqrt{-1})\end{gathered}$$

wieder die Form $A+B\sqrt{-1}$ haben. Er entwickelte eine vollständige Theorie der elementaren Funktionen komplexer Variabler. Er bewies den Moivreschen Satz für positive, negative, rationale und irrationale Exponenten. Abel (1826) untersuchte die binomische Reihe für komplexe Exponenten.

Welche Schwierigkeiten das Rechnen mit komplexen Zahlen im 17./18., aber auch im 19. Jahrhundert gelegentlich (trotz Eulers Resultaten) noch bereitete, zeigen folgende Beispiele.
Leibniz (1702) gelang es nicht, das Produkt

$$(x+a\sqrt{i})(x-a\sqrt{i})(x+a\sqrt{-i})(x-a\sqrt{-1}) = x^4+a^4$$

in zwei quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten aufzuschreiben.
Nicolaus Bernoulli (1742) konnte ebenfalls das Polynom

$$\begin{aligned}x^4-4x^3+2x^2+4x+4 =&(x-1-\sqrt{2+\sqrt{-3}})(x-1+\sqrt{2+\sqrt{-3}})\\ &(x-1-\sqrt{2-\sqrt{-3}})(x-1+\sqrt{2-\sqrt{-3}})\end{aligned}$$

nicht in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen. Doch Euler teilte ihm die gesuchte Zerlegung mit. (Wie heißen die beiden Faktoren?[102]))
Euler nannte es (1741) ein "merkwürdiges Paradoxon" dass

$$\frac{2^{\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

näherungsweise gleich $\frac{10}{13}$ wäre. Emerson (1780) machte in seinem Treatise of Algebra die Aussage, dass das Produkt imaginärer Größen selbst imaginär sein müsse.

Für Argand (1813) war $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ein Beispiel dafür, dass sich eine Größe nicht auf die Form $p+q\sqrt{-1}$ bringen lasse. Und noch 1847 behauptete in einer kurzen Mitteilung in den Comptes rendus (der Pariser Akademie) Vallès, dass nicht alle imaginären Ausdrücke auf die Form $a+b\sqrt{-1}$ reduzierbar wären.

[101] Siehe (17.19).

[102] Die beiden Faktoren sind $x^2-(2+\sqrt{4+\sqrt{7}})x+1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}$ und $x^2-(2-\sqrt{4+\sqrt{7}})x+1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}$

Die falsche Benutzung der Potenzierungsregeln (bei komplexen Exponenten) führte zu widersprüchlichen Resultaten bei Clausen (1827).[103] Vallès und Catalan diskutierten (1869/1870) widersprüchliche Ergebnisse bezüglich Potenzen und Wurzeln.

Es waren insbesondere die Logarithmen komplexer Zahlen, die zu verschiedenen Zeiten heftige Diskussionen auslösten.
Schon 1702 wurde Bernoulli bei Integrationsaufgaben auf imaginäre Logarithmen geführt. 1712 behandelte Leibniz die Frage, ob es einen Logarithmus einer negativen Zahl gäbe. Über 16 Monate diskutierten Bernoulli und Leibniz dann brieflich diese Frage (publiziert 1745).

Während Leibniz behauptete, dass die Logarithmen von negativen Zahlen imaginär seien, suchte Bernoulli nach Argumenten dafür, dass sie reell seien. Die logarithmische Kurve $y = \log x$ habe zwei Zweige, symmetrisch zur y-Achse, genauso wie die Hyperbel zwei verschiedene Zweige besitzt.
Es sei $\log(-x) = \log x$, insbesondere also $\log(-1) = 0$.
Die Argumente von Leibniz für $\log(-1) \neq 0$ und dafür, dass die Logarithmen negativer Zahlen imaginär seien, konnten Bernoulli nicht überzeugen.

In einer der Berliner Akademie 1749 vorgelegten Arbeit[104] setzte Euler sich mit den Ansichten Bernoullis und Leibniz' auseinander und erkannte den Grund für die Schwierigkeiten in der Unendlichvieldeutigkeit der Logarithmen.

Auch in der Korrespondenz zwischen dem jungen Euler und seinem Lehrer Bernoulli in den Jahren 1727 bis 1729 wurde das Problem negativer und imaginärer Größen behandelt. Bernoulli nahm hier im wesentlichen denselben Standpunkt ein wie 15 Jahre zuvor im Briefwechsel mit Leibniz, während Euler die Schwierigkeiten hervorhob, die sich ergeben, wenn man $\log x = \log(-x)$ annimmt.
Euler und Bernoulli erkannten dabei die Identität $\log i = \frac{\pi}{2} i$ die später Euler (1749), Fagnano (1761), Paoli (1780) erneut herleiteten. (Francais (1813) konnte dieser "symbolischen und geheimnisvollen Gleichung" durch geometrische Deutung einen vernünftigen Sinn geben; ebenso de Morgan (1842).)

20 Jahre später (1747) erörterten noch einmal d'Alembert und Euler in mehreren Briefen die Frage der Logarithmen imaginärer und negativer Zahlen. Hierbei konnte Euler zur richtigen Beantwortung der Frage kommen, konnte die Einwände d'Alemberts zurückweisen und seine Theorie von verschiedenen Gesichtspunkten aus in voller Klarheit darstellen. Seine Ansichten publizierte er in der schon erwähnten 1749 der Berliner Akademie vorgelegten Abhandlung, deren erste Redaktion bereits 1747 vorlag.

Es wird berichtet, dass Euler kurz vor dem Tode seines verehrten Lehrers Johann Bernoulli (am 1.1.1748) diesem seine Resultate bezüglich der Logarithmen mitteilen konnte, und der gute alte Mann antwortete, dass er nun zufrieden sterbe, weil er sehe, dass alle Widersprüche, die einst zu einer großen Kontroverse über die Logarithmen negativer Zahlen zwischen Leibniz und ihm geführt hätten, beseitigt wären.

Über Logarithmen komplexer Zahlen kamen auch Duhre (1751), Walmesley (1755), Foncenex (1759), Paoli (1780), Trincano (1781), Ferroni (1782), Kästner (1786), Gauß (1811), Francais (1813), Cauchy (1821, 1844, 1847), Ohm (1823), de Morgan (1842), Björling (1847, 1852), Cayley (1867) zu richtigen Ergebnissen.

[103] Siehe Aufgabe 17.4.
[104] De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires.

D'Alembert (1761, 1778) trat noch einmal für Bernoulli, aber gegen Leibniz', Eulers, Foncenex' Auffassungen über Logarithmen negativer Größen auf und konnte Foncenex teilweise überzeugen. (Der Artikel über Logarithmen in Diderots Enzyklopädie stammte von d'Alembert.)

In einem Lehrbuch von 1763 wurde Eulers Theorie der Logarithmen von Segner behandelt. Karsten (1765) gab eine historische Darstellung zum Begriff der "Logarithmen verneinter Größen", stellte sich auf Eulers Seite und kritisierte die Auffassungen d'Alemberts. Riccati (1767) und Franchini (1792) wiederum vertraten die Argumente von Bernoulli und d'Alembert. Pessuti (1777) verteidigte Eulers Ergebnisse.
Callandrelli (1778) attackierte Eulers und Pessutis Ansichten. Fontana (1782) vertrat den Eulerschen Standpunkt. Caldani (1782) wandte sich gegen Eulers Meinung (was d'Alembert veranlasst haben soll, Caldani als den ersten Mathematiker Italiens zu bezeichnen).

Schubert (1794) verteidigte Eulers Auffassung. Euler behandelte in seiner Introductio (1748) nicht das Problem der Logarithmen. Die darin behandelten Zusammenhänge zwischen trigonometrischen und Exponentialfunktionen waren jedoch die Grundlage für die ein Jahr später der Akademie vorgelegte Lösung des Problems.
Ein dreiviertel Jahrhundert danach gab Cauchy in seiner Analyse algebrique (1821) eine solche Darstellung der Logarithmentheorie.
Dort sind auch zum ersten Mal besondere unterscheidende Symbole für die vielwertigen Funktionen und für ihre Hauptwerte eingeführt worden. (Die Bezeichnung "Hauptwert"- valor principalis - geht übrigens auf Björling (1847) zurück.)

Trotz des Cauchyschen Buches erschienen in Gergonnes Annalen (in Frankreich) unklare Arbeiten über Logarithmen von Bouvier (1824), Vincent (1825), Stein (1825), die sich teilweise erneut gegen Eulers, also auch Cauchys Auffassungen aussprachen.

Auch Graves (1829) wollte "Ungenauigkeiten" der Eulerschen Theorie verbessern. Selbst der von seinen Landsleuten sehr geschätzte Cambridger Gelehrte Peacock fand (1833) Argumente dafür, dass negative Zahlen reelle Logarithmen hätten. Auch Augustus de Morgan (1836) und Gregory (1837) beteiligten sich an der Diskussion um die Logarithmen in England. Pagani (1837) in Brüssel, Cerquero (1837) in San-Fernando kamen zu fehlerhaften Ergebnissen.

Gauss betonte in nachgelassenen, um 1850 verfassten Manuskripten, dass "die lange streitigen Fragen über die Logarithmen der negativen Größen [also wenigstens zwischen 1702 und 1749] ... immer nur ein Streit de lana caprina [über Ziegenwolle] bleiben mussten, so lange nicht der Begriff von Logarithmen aus Einem Guss auf eine für das ganze Gebiet der Größen gültigen, vollkommen klare Art festgestellt war."[105]

Diese Begriffsfeststellung gab 1749 Euler; zum Allgemeingut der Mathematiker wurde sie wohl erst durch Cauchys Buch über algebraische Analysis und durch Vervollkommnung und lehrbuchartige Darstellungen der Funktionentheorie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts.
Die Mathematiker rechneten seit dem 16. Jahrhundert mit komplexen Zahlen, formulierten die Rechengesetze, definierten Funktionen komplexer Variabler. Man rechnete mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen wie mit "wirklichen" Zahlen, obwohl man sie als unmögliche oder eingebildete oder imaginäre Größen bezeichnete. Über ihr Wesen, über ihre Begründung herrschte für lange Zeit die größte Unklarheit und Unsicherheit.

Cardano (1545) nannte $5+\sqrt{-15}, 5-\sqrt{-15}$ (und ähnliche) "wahrhaft sophistische Größen". Auch Bombelli (1572) sprach von sophistischen Größen. Dass sich die imaginären Teile im

[105] Gauß - Werke, X, 1 (Leipzig 1917, S. 403).

irreduziblen Fall kubischer Gleichungen aufheben, diese Tatsache schien ihm mehr "auf Sophismen als auf Wahrheit zu beruhen". Cardano (1576) gestand ein, dass er nicht wisse, was diese Größen wirklich wären, die so viele Wunder tun. Stevin (1585) lehnte die Beschäftigung mit ihnen ab. Descartes (1628, 1637) sprach von scheinbaren (imaginären), d. h. im Ganzen unausführbaren Wurzeln aus negativen Zahlen.
"Es gibt... . keine Größe, die denen, die man sich vorstellt [den reellen], entspräche".[106]

Leibniz (1702) sprach von "jenem Wunder der Analysis, einer Missgeburt der Ideenwelt, einem Doppelwesen fast zwischen Sein und Nichtsein, was wir eine imaginäre Wurzel nennen".[107] Bernoulli (1702) meinte, dass das Auftreten imaginärer Wurzeln unschädlich wäre, doch walte hier noch ein größeres Mysterium.

Christian Wolff bezeichnete in seinem Mathematischen Lexikon (1716) Wurzeln aus einer "Größe, so weniger als nichts, ... deren Exponent eine gerade Zahl ist", als eingebildete Wurzeln (radix imaginaria), "weil sie unmöglich sind". Sie würden "in der Mathematik geduldet, weil sie wie andere eingebildete Sachen sonderlichen Nutzen im Erfinden haben".
Diesen Standpunkt vertrat auch noch Euler. Er kam in seiner Vollständigen Anleitung zur Algebra zu dem Schluss, "dass die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht ... zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können". Sie würden "unmögliche Zahlen" genannt werden.

"Dennoch stellen sie unserem Verstande sich vor, und finden in unserer Einbildung Platz: daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden."
Euler erklärte, dass das Bedenken, "dass die Lehre von den unmöglichen Zahlen als nutzlose Grille angesehen werden könne", unbegründet wäre. Diese Lehre wäre in der Tat von der größten Wichtigkeit.
Wenn die Auflösung von Aufgaben zu unmöglichen Zahlen führte, so hätte man ein sicheres Zeichen, dass die Aufgabe Unmögliches verlange. Die imaginären oder unmöglichen Werte (von Kubikwurzeln) verdienten aber "nichts desto weniger beachtet zu werden".

Kühn (1750) meinte, dass eine Rechnung, die von möglichen oder reellen Größen ausgehe und in Übereinstimmung mit unzweifelhaften Grundsätzen behandelt sei, in keiner Weise zu Unmöglichem, Nichtreellem, Unangebbarem führen könne. Durch eine geometrische Konstruktion machte er sich klar, dass die Aussage, dass alle reellen Quadrate positiv wären, nicht zu Recht bestände.
Für Maseres (1758) hatten die Vorzeichen "+" und "-" nur dann eine Bedeutung, wenn Größen addiert und subtrahiert würden.
Playfair (1778) erklärte, dass Operationen mit imaginären Schriftzeichen, obwohl in sich selbst unsinnig, Kennzeichen wären für andere, welche Sinn mit sich führten. Die mit imaginären Symbolen durchgeführten Operationen, obwohl an sich absurd, würden als Wegweiser zu solchen dienen, welche verständlich wären. Nach Krügel (1805) wären unmögliche Wurzeln nichts weiter als Bezeichnungen.

Roger Martin (1781) erkannte an, dass imaginäre Größen auch Zahlen seien. Paolo Frisi (1782) unterschied eine reelle und eine imaginäre Null (was Riccarti (1788) geometrisch zu begründen versuchte), wogegen sich später Gregorio Fontana (1799) wandte.

In London kam William Frend noch am Ende des 18. Jahrhunderts zur Verwerfung aller negativen und imaginären Größen. Buée (1805) vertrat die Auffassung, "dass die imaginären Größen,

[106] R. Descartes Geometrie (Hrsg. L. Schlesinger) (Leipzig 1923, S. 81).
[107] Leibniz über die Analysis des Unendlichen (Hrsg. G. Kowalewski), Ostwald's Klassiker Nr. 162 (Leipzig 1908, S. 52ff.).

die in den Lösungen eines Problems enthalten sind, nicht einen Widerspruch in den Angaben desselben bestätigen, sondern die Mittel dazu liefern, diese Bedingungen zu erfüllen".

Argand (1806) bemerkte (nach einer geometrischen Deutung), dass die Bezeichnung "imaginär" nicht richtig wäre, da die in Frage kommenden Größen wirklich existierten. Für Grunert (im Klügelschen Wörterbuch 1831) war das Auftreten imaginärer Größen im Endresultat von Aufgaben immer noch ein Kriterium dafür, dass die Aufgabe selbst unmöglich wäre, d. h. die Erfüllung sich widersprechender Bedingungen verlangte.
Wie unklar selbst Cauchy über die komplexen Zahlen noch dachte, zeigen seine Äußerungen in der Algebraischen Analysis von 1821:

"In der Analysis nennt man einen symbolischen Ausdruck oder ein Symbol jede Verbindung von algebraischen Zeichen, welche an und für sich nichts bedeutet oder welcher man einen Wert beilegt, der verschieden ist von demjenigen, welchen sie natürlicherweise haben müsste. Ebenso nennt man symbolische Gleichungen alle diejenigen, welche buchstäblich genommen und in dem gewöhnlichen Sinne aufgefasst unrichtig sind oder keine Bedeutung haben, aus denen man richtige Resultate ableiten kann. ... Unter den symbolischen Ausdrücken und Gleichungen, deren Betrachtung in der Analysis von einiger Wichtigkeit ist, verdienen diejenigen, welche man imaginäre nennt, besonders hervorgehoben zu werden."[108]

Hankel kritisierte 1867 diese Erklärungen Cauchys und nannte sie ein unerhörtes Spiel mit Worten, das der Mathematik schlecht anstehe. Cauchy meinte, dass ein Ausdruck mit komplexen Zahlen, wie z. B. die Multiplikationsformel für die Zahlen $\cos\varphi + i\sin\varphi$ "buchstäblich genommen unrichtig" wäre und keinen Sinn hätte. Er bezeichnete auch in seinen Vorlesungen über Differentialrechnung (1829) als imaginären Ausdruck jeden symbolischen Ausdruck von der Form $a + b\sqrt{-1}$ (a, b reell).
(Doch was ist $\sqrt{-1}$?)

Eine imaginäre Gleichung wäre nicht anderes als die symbolische Darstellung zweier Gleichungen zwischen reellen Zahlgrößen. (Hat Cauchy hier die Darstellung komplexer Zahlen als geordnete Zahlenpaare im Auge?)
(Noch in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts war die Cauchysche Auffassung - nach Hankel - allgemein verbreitet.) In späteren Veröffentlichungen (1847) hatte Cauchy klarere Auffassungen vertreten und sich dem Standpunkt von Gauß genähert.

Gauß, der sich mit den Fragen nach der "wahren Metaphysik der imaginären Größen", der Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Erweiterung des reellen Zahlenbereichs zu dem der komplexen Zahlen, nach einer einwandfreien Begründung derselben, von seinen Jugendjahren an beschäftigt hat, schrieb (1799):[109]

"Sollen imaginäre Größen überhaupt in der Analysis beibehalten werden (was aus mehreren Gründen, welche freilich hinlänglich sicher gestellt werden müssen, richtiger erscheint, als sie zu verwerfen), dann müssen sie notwendiger Weise für ebenso möglich wie die reellen Größen gelten; deshalb möchte ich reelle und imaginäre unter der gemeinsamen Bezeichnung von möglichen Größen umfassen; unmöglich würde ich dagegen eine Größe nennen, welche Bedingungen zu genügen hätte, denen auch nach Zulassung imaginärer Größen nicht genügt werden kann; so also dass dieser Ausdruck dasselbe bedeutet, als wenn man sagt, dass eine solche Größe im ganzen Größenbereich nicht bestehe.
Ich möchte aber nicht zulassen, dass man hieraus eine ganz besondere Größenart bilde. Wenn

[108] A. L. Cauchy, Algebraische Analysis (Hrsg. C. Itzigsohn) (Berlin 1885, S. 118).
[109] Die vier Gauss'schen Beweise ... (Hrsg. E. Netto), Ostwald's Klassiker Nr. 14 (Leipzig 1913, S. 6/7).

jemand sagt, ein geradliniges, gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck sei unmöglich, so wird dem niemand widersprechen.

Will man dagegen ein solches unmögliches Dreieck als eine neue Dreiecksart betrachten und andere Dreieckseigenschaften auf dieses anwenden, so wird jeder dies lächerlich finden. Das heißt mit Worten spielen oder vielmehr Missbrauch treiben. Übrigens will ich nicht in Abrede stellen, dass das, was ich hier gegen den Missbrauch unmöglicher Größen gesagt habe, in gewissem Sinne auch imaginären Größen entgegengehalten werden kann.

Doch behalte ich mir die Rechtfertigung dieser Einführung sowie eine eingehende Auseinandersetzung dieser ganzen Sache für eine andere Gelegenheit vor."

Die Theorie der imaginären Größen wäre nach Gauß' Ansicht (1801) "bisher von Niemand auf klare Begriffe zurückgeführt worden.[110]"
In Briefen an Bessel vertrat Gauß 1811 den Grundsatz, "dass man in dem Reiche der Größen die imaginären ... als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse[111]". Er sehe "die imaginären Werte ... nicht als Hors d'Oeuvres [Beiwerk] sondern als ebenso gute Größen an wie die reellen[112]".

Und 1825 schrieb er: "Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir mit großer Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können.[113]"

Noch 1831 musste Gauß sagen, dass die imaginären Zahlen weniger eingebürgert als nur geduldet wären und wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel erschienen. Er teilte in der Selbstanzeige einer zahlentheoretischen Arbeit[114] über Potenzreste die "Quintessenz" seiner "schon seit fast 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Größen" mit.

Den imaginären Zahlen müsste das "völlig gleiche Bürgerrecht" mit den reellen Zahlen eingeräumt werden. Die Versetzung des dargestellten zahlentheoretischen Themas in das Gebiet der komplexen Zahlen könnte "vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Größen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstößig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde unbegründeter sein, als eine solche Meinung", denn die Arithmetik der komplexen Zahlen wäre der "anschaulichsten Versinnlichung fähig".
Hierdurch würde "die wahre Metaphysik der imaginären Größen in ein neues helles Licht gestellt". Gauß sah noch, wie andere Mathematiker (im 18. Jahrhundert), 1 als mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1 an.

Johann Bolyai brachte später (1837) einige Einwände gegen die Ausführungen von Gauß. Er wandte sich zum Beispiel gegen die Einführung von $\sqrt{-1}$ als mittlerer Proportionalen zwischen $+1$ und -1.
Die Betrachtung des Raumes sollte man in der Arithmetik vermeiden. In seinen Vorlesungen über mathematische Analysis (1837) sagte Bartels, dass als eine unmögliche Größe jeder analytische Ausdruck bezeichnet würde, der in sich einen Widerspruch enthält und für den sich keine reelle Größe als Wert findet. Ein Satz, dessen Beweis nur mit Hilfe der unmöglichen

[110] Gauß' Untersuchungen über höhere Arithmetik (Hrsg. H. Maser) (Berlin 1889, S. 63).
[111] Gauß - Werke VII (Leipzig 1900, S. 90ff.).
[112] Briefwechsel Gauß-Bessel (Leipzig 1880, S. 172).
[113] P. Stäckel, Gauß als Geometer (Leipzig 1918, S. 18).
[114] Gauß - Werke II (Leipzig 1876, S. 171ff.).

Größen geführt würde, könnte wohl nie als streng mathematisch bewiesen angesehen werden.

In der Rezension[115] dieser Vorlesungen bemerkte Kummer (1838) dass sich "jetzt von mehreren Seiten her eine gewisse Abneigung gegen den Gebrauch der imaginären Formeln in der Analysis kundgibt". (Hatte man Gauß' Selbstanzeige von 1831 nicht zur Kenntnis genommen?)
Kummer stellte sich auf den Standpunkt Cauchys und betonte: "Eine imaginäre Formel [ist] nicht eine Größe, sondern nur eine Formel, und hat als solche keinen Widerspruch in sich."

"Eine Gleichung zwischen imaginären Formeln stellt bekanntlich immer zwei Gleichungen dar, und ist ... als ein abgekürzter symbolischer Ausdruck für die beiden in ihr enthaltenden Gleichungen realer Größen anzusehen; insofern ist auch die Rechnung mit imaginären Formeln ebenfalls nur Rechnung mit wirklichen Größen."

Nach Gauß war der Begriff der komplexen Zahlen in der Mitte des 19. Jahrhunderts (im Unterschied zum Ende des 18. Jahrhunderts) "jedermann geläufig", obwohl er auch bemerken musste, dass mancher über die imaginären Größen in der Art spräche, als dass er sich noch ganz auf einem Standpunkt befände, auf dem man sich vor 1831 befunden hätte.
Eugen Dühring (1877) bezeichnet das Imaginäre als das "Schoßkind komplexer Mystik".

"Eingebildete Größen, unmögliche Größen sind Größen, die nur in der Bezeichnung, nur der Form nach, nicht aber in Wirklichkeit vorhanden sind", schrieb Hoffmann in seinem Mathematischen Wörterbuch (1861).
Natani "definierte" im Hoffmannschen Wörterbuch (1867) eine "imaginäre Größe als die Wurzel einer negativen Zahl". Den Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$, "der sich beim Auflösen der allgemeinen quadratischen Gleichungen ergibt", nannte er eine komplexe Größe.
Da der Ausdruck $\sqrt{-1}$ "in keiner Größenbeziehung zur Einheit" stände, könnte er nicht im eigentlichen Sinn als Größe oder Quantität bezeichnet werden.

Er schrieb weiter: "Der Ausdruck imaginäre Zahl ist richtiger, weil wir bei dem Worte Zahl eben nur an die Resultate von Rechnungsoperationen, gleichviel, ob dieselben auf reelle Größen führen oder nicht, zu denken veranlasst sind." Es wäre notwendig, "die Zahl $i = \sqrt{-1}$ als neues Element in die Rechnung einzuführen", jedoch um die Bedeutung dieses Ausdrucks brauchte man sich nicht zu kümmern.
Auch hier haben wir den formalen Standpunkt Cauchys vom Jahre 1821. Jedoch stellte Natani anschließend auch die Cauchysche Theorie (der geometrischen Größen, der Kongruenzen modulo $x^2 + 1$) vom Jahre 1847 dar. Diese "scheint uns allerdings geeignet jede Dunkelheit, die dem Imaginären anklebt, gewissermaßen mit einem Schlage zu beseitigen".

Am Ende des zweiten Drittels des 19. Jahrhunderts musste Hankel (1867)[116] mit Recht kritisieren, dass "die wahre Metaphysik des Imaginären ... in den meisten Darstellungen" jedoch immer noch "sehr im Argen" läge.
Hankel selbst bezeichnete eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ mit i (ohne sich um die Existenz der Lösung zu kümmern). Dieses i wäre nicht reell und "weiter nichts als ein Zeichen für ein eingebildetes Objekt, dessen eigentliches Wesen in der reinen Theorie ganz unbestimmt bleibt und bleiben muss, da wir uns in dieser nur mit seinen formalen Verknüpfungen zu beschäftigen haben, deren Gesetze wir nach dem Prinzip der Permanenz bestimmen werden".

Es sei erwähnt, dass Frege (1884) die rein formale Theorie Hankels kritisierte. Am Ende des 19. Jahrhunderts betonte E. Study in seinem Enzyklopädieartikel über komplexe Zahlen, dass man

[115] E. E. Kummer collected papers II (Berlin-Heidelberg-New York 1975, S. 682f.).
[116] H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme (Leipzig 1867, S. 72).

auch damals immer "noch in verbreiteten Lehrbüchern eine Art der Darstellung antrifft, der man schwer entnehmen kann, was nach Ansicht der Verfasser Definitionen und was Folgerung sein soll[117] ".
Den Grund dafür sah er darin, dass Gauß die von ihm versprochene Rechtfertigung der Einführung der komplexen Größen niemals geliefert habe.

Ein viertel Jahrhundert später musste noch Allen[118] auf die unverzeihliche Nachlässigkeit (inexensable carelessness) einiger algebraischer Schriftsteller in Bezug auf die Terminologie der komplexen Zahlen aufmerksam machen.
Er bemängelte beispielsweise, dass oft i als eine der Wurzeln von x^2+1 definiert würde. (Denn, woher wüsste man, dass $x^2+1=0$ wenigstens eine Lösung besitzt, und auch nicht mehr als zwei - wie in der Quaternionentheorie?!)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war also immer noch eine weit verbreitete Unklarheit über die komplexen Zahlen zu bemerken.
Hatte man die Bemühungen führender Mathematiker des 19. Jahrhunderts um eine Begründung des komplexen Zahlbegriffs allgemein nicht beachtet - die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen und deren Begründung durch "geometrische Größen" (also die Ersetzung der "algebraischen Größen" durch geometrische), die "arithmetische" Begründung Hamiltons, die algebraische Begründung Cauchys und die Begründung des gewöhnlichen komplexen Zahlbegriffs als Spezialfall höherer komplexer Zahlen?

Etwa 20 Jahre nach der Einführung der komplexen Zahlen in der Algebra des Bombelli konstruierte Francois Viete, der Bombellis Neuerung kannte, jedoch selbst nirgends komplexe Zahlen eingeführt hatte, einen eigenartigen Kalkül mit rechtwinkligen Dreiecken, den man als erste geometrische Interpretation der komplexen Zahlen ansehen kann.[119] Die uns heute bekannte geometrische Darstellung fanden die Mathematiker erst Ende des 18. und im 19. Jahrhundert.

Die Bemühungen von Wallis (1673, 1685) und Kühn (1750) um eine geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen waren wenig erfolgreich. Foncanex vertrat (1759) die Ansicht, dass die komplexen Zahlen keine geometrische Deutung zuließen. Aus der Unmöglichkeit der imaginären Größen folge wohl die Unmöglichkeit, sie geometrisch darzustellen.

Einer Bemerkung von Cauchy zufolge gab Truel (1786) die erste richtige Darstellung. Eine solche findet sich wenig später auch bei Wessel (1797).
Wessel hat die komplexen Zahlen durch die Punkte der Ebene (Strecken) veranschaulicht, und die uns heute wohlbekannten den vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen entsprechenden geometrischen Konstruktionen beschrieben, diese umgekehrt zur Definition der vier Rechenoperationen für die Strecken verwendet und bewiesen, dass auf Grund dieser Definitionen die "üblichen Rechengesetze" gelten, dass also die Strecken der Ebene bei geeigneter Definition der Summe und des Produkts einen Körper bilden (der natürlich zum Körper der komplexen Zahlen isomorph ist).

Wessel gab somit die erste exakte Theorie der komplexen Zahlen. An Carnot, der bei Stre-

[117] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Erster Band, erster Teil (Leipzig 1898-1904, I.A.4 Bd. I, Heft 2 (1899).
[118] American Mathematical Monthly 29 (1922), 301-303.
[119] I. G. Bachmakova, E. I. Slavutin, "Genesis triangulorum" de F. Viete et ses recherches dans l'analyse indeterminee. Archive für History of Exact Sciences 16 (1977), 289-306. Siehe auch H. Pieper, Zur Geschichte der komplexen Zahlen. Wiss. Z. PH Erfurt 18 (1982), 63-77. In dem Buch Das Geheimnis der komplexen Zahlen) werden auch die späteren Bemühungen um geometrische Darstellungen der komplexen Zahlen ausführlicher dargestellt.

cken Länge und Richtung unterschied und die Richtungen durch Einheitswurzeln kennzeichnen wollte, knüpfte Buée (1805) an. Für ihn war $\sqrt{-1}$ das Symbol des Senkrechtstehens.
Indem er in einer bestimmten Weise die Idee der absoluten Größe mit dem Gedanken der Richtung kombinierte, löste Argand (1806) das Problem der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen. Die Arbeit von Truel gilt als verschollen; Wessels Abhandlung wurde vergessen und erst ein Jahrhundert später neu publiziert; der Argandsche Essai - nur in geringer Anzahl verbreitet - blieb - obwohl sich sieben Jahre später Francais, Gergonne, Servois und Argand selbst (1813) noch einmal in mehreren Aufsätzen zum Thema der geometrischen Darstellung äußerten - unbeachtet, bis endlich Cauchy (1847) auf ihn aufmerksam machte.

Bis dahin haben sich weitere Gelehrte, wie Gompertz (1818), Mourey (1828), Warren (1828/1829), Peacock (1830), Gauß (1831), Scheffler (1846), Drobisch (1848) und Cauchy selbst (1847) mit der Problematik befasst.
Gauß kannte die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen schon in seinen frühesten Jahren (wahrscheinlich vor 1796, wie aus Briefstellen geschlossen werden kann).

Eine aus dem Jahre 1805 stammende Zeichnung ist wohl der erste nachweisbare Beleg für seine Benutzung der komplexen Zahlenebene. In einem Brief an Bessel (1811) schrieb er, dass man "das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen, sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen [kann], worin jeder Punkt, durch Abszisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Größe $a + bi$ gleichsam repräsentiert[120]".

Gauß trug seine Gedanken in der 1831er Selbstanzeige und in einer Vorlesung (1840) vor. Sie waren um 1850 jedoch noch nicht allgemein bekannt (wie sich aus einer Briefstelle von Gauß (1850) ergibt). Gauß ordnete den komplexen Zahlen umkehrbar eindeutig die Punkte der Ebene zu, beschrieb jedoch nicht die uns bekannten geometrischen Operationen mit Punkten, die der Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen entsprechen.
Argand gab sie an, aber nur zur Veranschaulichung der Grundrechenarten, während Wessel und Mourey die Rechenoperationen durch die bekannten geometrischen Konstruktionen definierten und nachwiesen, dass dann die üblichen Rechengesetze gelten.

Cauchy betrachtete die komplexen Zahlen lange Zeit nur als "symbolische Ausdrücke" und identifizierte sie nicht mit den Punkten der Ebene. Doch fand sich bei ihm oft eine Zuordnung der Zahlen $a + bi$ zum Punkt (a, b) und eine Benutzung der Sprache der Geometrie.
Die spätere Cauchysche Darstellung (1847), die im wesentlichen die Argands und Francais' ist und das Rechnen mit komplexen Zahlen durch das geeignet definierte Rechnen mit geometrischen Größen (der ihnen entsprechenden Vektoren) ersetzt, fand u. a. in Hoffmanns Mathematischem Wörterbuch (1867) und in Hoüels Elementarer Theorie der komplexen Größen (1869) Aufnahme und damit Verbreitung.

Hoüel gab bald danach (1874) den Essai von Argand (1806) zusammen mit später (1813) veröffentlichten Abrissen von Francais, Gergonne, Argand und Servois neu heraus.

Es soll noch erwähnt werden, dass Frege (1873) eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen durch Winkelgrößen in der Ebene gegeben hat, dass W. F. Schüler (1878) behauptete, dass das Imaginäre in der Cartesischen Koordinatenebene nicht adäquat wiedergegeben werden könnte, und eine andere geometrische Interpretation versuchte, dass J. Brill (1888) eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen durch Geraden statt durch Punkte gegeben hat, dass die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen auf der Kugel auf Riemann

[120] Gauß - Werke VIII (Leipzig 1900, S. 90ff.).

zurückgeht und zuerst von Neumann (1865) veröffentlicht worden ist.
(Eine im Nachlass vorhandene von Gauß vor dem 6. Mai 1800 geschriebene Notiz zeigt, dass Gauß schon damals die komplexen Zahlen auf der Kugeloberfläche veranschaulicht hatte.)

Die Idee der komplexen Zahlenebene und die geometrische Begründung des komplexen Zahlbegriffs ist insbesondere durch Hankel (1867) im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts allgemein bekannt geworden. Nach Hankel hätte man, "um die komplexen Zahlen durch Punkte [oder Strecken] einer Ebene repräsentieren zu dürfen, nichts weiter nötig, als die formale Übereinstimmung der Operationsregeln herzustellen[121]".

Die Menge der Vektoren in der Ebene zusammen mit den geeignet definierten Operationen würde als isomorph zur Menge der Zahlen $a + bi$ zusammen mit den nach dem Permanenzprinzip bestimmten Operationen erkannt. Hierdurch würde auch die "Realität", die Existenz der Zahlen $a + bi$ gesichert.

Die Darstellung komplexer Zahlen in der Wessel-Argand-Gaußschen Zahlenebene wurde tatsächlich von Hankel und anderen Mathematikern als ein Beweis für die Existenz der komplexen Zahlen angesehen. Hankel (1867) schrieb:[122]
"Als unmöglich gilt den Mathematikern streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden, bedarf keines Beweises."

Wären aber die betreffenden Zahlen: logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definiert und also ohne Widerspruch, so könnte die Frage, ob die Zahlen möglich oder unmöglich sind, nur darauf hinauskommen, ob es im "Gebiete des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen ... Objekte gebe, an welchen die Zahlen ... zur Erscheinung kommen." Die aus $\sqrt{-1}$ zusammengesetzten Zahlen konnte man solange unmögliche nennen, als man keinerlei anschauliche Darstellungen gefunden hatte, und ihre Operationen geometrisch gedeutet worden waren.

Frege (1884) kritisierte Hankel:[123] "Dass dem Mathematiker nur, was sich selbst widerspricht, als unmöglich gelte, muss beanstandet werden. Ein Begriff ist zulässig, auch wenn seine Merkmale einen Widerspruch enthalten; man darf nur nicht voraussetzen, dass etwas unter ihn falle.
Aber daraus, dass der Begriff keinen Widerspruch enthält, kann noch nicht geschlossen werden, dass etwas unter ihn falle."

Weiter bemerkte Frege: "Wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen, so führen wir etwas Fremdartiges in die Arithmetik ein; wenn wir aber nur den Begriff einer solchen Zahl durch Merkmale bestimmen, wenn wir nur verlangen, dass die Zahl gewisse Eigenschaften habe, so bürgt nichts dafür, dass auch etwas unter den Begriff falle und unseren Anforderungen entspreche."

Durege (1864) zeigte, dass die imaginären und anderen Zahlen eine gemeinsame Entstehungsart haben. Sie alle fänden ihre Existenz in ihrer Definition begründet. Er schrieb:[124]
"Die äußere Konsequenz und die harmonische Übereinstimmung in allen ihren Teilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dass man jedesmal, wenn man einen neu

[121] H. Hankel, a. a. O., S. 83.
[122] H. Hankel, a. a. O., S. 6-7.
[123] G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik (Breslau 1884, S. 105-106, 114).
[124] H. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen ... (Leipzig 1864, S. 9).

eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt.
Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen ... Bei der Übertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Größen findet ... der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, dass dabei keinerlei Widersprüche auftreten."

Dureges Grundsatz gleicht der von Hankel als Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichneten methodologischen Forderung. Ansätze dazu wurden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts schon von M. Ohm und in England von Preacock, de Morgan, Gregory und Hamilton gemacht. Hankel nahm dabei auch auf Grassmann (1844) Bezug.

Frege (1884) schrieb später[125] (und diese Äußerung kann auf Durège und Hankel bezogen werden):
"Man stellt die Forderung, dass die bekannten Rechnungsregeln für die neu einzuführenden Zahlen möglichst erhalten bleiben, und leitet daraus allgemeine Eigenschaften und Beziehungen ab. Stößt man nirgends auf einen Widerspruch, so hält man die Einführung der neuen Zahlen für gerechtfertigt, als ob ein Widerspruch nicht dennoch irgendwo versteckt sein könnte, und als ob Widerspruchslosigkeit schon Existenz wäre."

Auch Georg Cantor (1883) ging auf das Problem der Wirklichkeit oder Existenz der Zahlen ein.[126] Er unterschied die immanente Realität der Zahlen (wir dürften die Zahlen "insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserem Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs Beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmten Beziehungen stehen") von ihrer transienten Realität (den Zahlen könnte "insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellect gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen").

Unter Verwendung dieser Begriffe kann man sagen, dass die Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert nur die transiente Realität erkannten. Die reellen Zahlen galten als "wirkliche" Zahlen, da sie geometrisch darstellbar sind (man identifizierte die Zahlen mit ihren geometrischen Bildern). Den komplexen Zahlen schienen keine geometrischen Objekte zu entsprechen, sie galten als "eingebildete" Zahlen.

Die geometrische Darstellung dieser Zahlen bewies ihre transiente Realität. Cantor vertrat die Ansicht, dass die Mathematik "bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials einzig und allein auf die immanente Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher keinerlei Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer transienten Realität zu prüfen".
Bei der Einführung neuer Zahlen wäre man "nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und .... eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, dass sie sich in gegebenen Fällen untereinander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muss sie als existent und real in der Mathematik angesehen werden."

Cantor erwähnte übrigens nicht die Hamiltonsche Definition der komplexen Zahlen, die ja wohl die immanente Realität nachweist. Für Hilbert (1925) ist die Erweiterung des Zahlbereichs durch Zufügung des idealen Elementes $\sqrt{-1}$ "nur dann statthaft, wenn dadurch im alten

[125] G. Frege, a. a. O., S. 108.
[126] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Teil 5. Math. Ann. 21 (1883), 545-591.

engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen.[127]"

Weber betonte im Anschluss an Hilbert und Schoenfliess[128], dass "vor allem ein System von Axiomen aufzustellen ist, durch welche der Gebrauch der Zahlen festgesetzt wird und ihre Theorie in sich widerspruchsfrei aufgebaut werden kann".
Die Hamiltonsche Theorie der Zahlenpaare und das System der für die reellen Zahlen geltenden Hilbertschen Axiome leiste die immanente Begriffsbestimmung und den axiomatischen Aufbau der komplexen Zahlen.

Hamilton (1837) hatte die erste einwandfreie rein arithmetische Begründung der komplexen Zahlen, ihre rein-logische (heute wohlbekannte) Konstruktion durch Zahlenpaare reeller Zahlen geliefert. (Sie wurde unabhängig von Hamilton auch von Bolyai (1837) entwickelt.) Erst durch das Vorwort seiner Vorlesungen über Quaternionen (1853) wurde Hamiltons Konstruktion einem größeren Kreis von Mathematikern bekannt.
Mit der dabei wegen der willkürlich erscheinenden Rechengesetze offen gebliebenen Frage, wie man Summe und Produkt zweier Zahlenpaare als Funktionen ihrer Koordinaten erklären muss, wenn für diese Funktionen Funktionalgleichungen bestehen sollen, die die formalen Gesetze der Arithmetik zum Ausdruck bringen, beschäftigten sich Weierstraß (in seinen Vorlesungen von 1863 an), Maximowitsch (1885), F. Schur (1888), Pasch (1904) und Bieberbach (1918).

Zehn Jahre nach Hamiltons Begründung zeigte auch Cauchy (1847), dass zur Begründung der komplexen Zahlen die Darstellung durch Vektoren in der Ebene nicht notwendig ist. Seine Begründung durch algebraische Kongruenzen modulo $x^2 + 1$ wurde später von Grunert (1865, 1866) und Saporetti (1887) noch einmal ausführlich dargestellt und fand durch Natani (1867) auch Eingang in das Hoffmannsche Mathematische Wörterbuch.
(Die Idee von Cauchy ist übrigens von Kronecker (1887) verallgemeinert worden.)

Hankel (1867) machte sowohl der Hamiltonschen als auch der Cauchyschen Theorie den "Vorwurf einer der Sache nicht adäquaten Behandlung[129]". Es ist zu vermuten, dass diese Bemerkung Hankels die Ursache dafür war, dass zumindest die Hamiltonsche Theorie sich erst am Ende des 19. Jahrhunderts und zu Beginn des 20. Jahrhunderts allgemein verbreitete.

Die Einführung der komplexen Zahlen durch Zahlenpaare durch Hamilton gaben u. a. Weber in seinem Lehrbuch der Algebra (1895), Burkhardt in seiner Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und Study in dem Artikel über komplexe Größen für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (1899).

Die Behandlung der komplexen Zahlen erfolgte im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts meist im Zusammenhang mit der Behandlung der höheren komplexen Zahlen. Hankel (1867) formulierte:
"Erst durch die Behandlung der gewöhnlichen imaginären Zahlen nach denselben Prinzipien und in Gemeinschaft mit den höheren komplexen Zahlen kann ihre wahre Bedeutung in das volle Licht gesetzt werden."

Mit Hankel begann eine systematische Behandlung allgemeiner komplexer Zahlensysteme. Es ging dabei insbesondere um die Beantwortung der von Gauß (1831) aufgeworfenen Frage, "warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen

[127]D. Hilbert, Über das Unendliche. Jahresber. DMV 36 (1927), 201-215.
[128]Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik I (Leipzig 1922, S. 182).
[129]H. Hankel, a. a. O.,S. 72-73.

liefern können[130] ".

Schon in seinen Vorlesungen 1861/62 hatte Weierstraß über diesen Gegenstand vorgetragen. Später (1883) hatte er seine Ansicht in einem (publizierten) Brief an H. A. Schwarz präzisiert und die Gaußsche Auffassung von der Unmöglichkeit einer umfassenden Erweiterung der reellen und komplexen Zahlen, insofern man die wichtigsten Eigenschaften der komplexen Zahlen (das sind die, welche die Menge der komplexen Zahlen zu einem kommutativen Körper machen) zu erhalten sucht, als richtig erkannt.
Ebenfalls mit diesem Gegenstand haben sich B. Peirce (1881), Schwarz (1884), Dedekind (1885), Hölder (1886), Peterson (1887), Schur (1888), Hilbert (1896), Study (1898) u. a. befasst.

Versuche zur Schaffung von Hilfsmitteln zur Behandlung räumlicher geometrischer Probleme (analog zu den komplexen Zahlen als Hilfsmittel zur Behandlung ebener geometrischer Probleme) machten schon Wessel (1797), Argand (1813) (durch Hinzunahme von i^i als dritter Einheit), Servois (1813).
In England beschäftigten sich seit 1833 Hamilton, J. T. Grave, Ch. Grave und de Morgan mit dieser Problematik. Hamilton erkannte, dass die Beibehaltung des kommutativen Gesetzes der Multiplikation ein Aufgeben des distributiven Gesetzes erfordert; letzteres ist aber für die Multiplikation wesentlicher als ersteres.

Er schuf 1843 mit seinem System der Quaternionen das erste Beispiel eines nicht-kommutativen Körpers. (Deren Multiplikationsgesetz hatte bereits Gauß (1819) erkannt.) Frobenius bewies (1872) die Einzigkeit dieses Beispiels (als Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen), ein Resultat, das 1881 auch Ch. S. Peirce fand. Study (1889) untersuchte Systeme komplexer Zahlen, die sowohl die von Weierstraß, Hankel u. a. betrachteten Systeme als auch die Hamiltonschen Quaternionen umfassen.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Grundlagen für eine isomorphe Darstellung der komplexen Zahlen durch Matrizen bereits Cayley (1858) geschaffen hatte, dass Ostrowski (1916) eine Charakterisierung des Körpers der komplexen Zahlen auf der Grundlage der sogenannten Bewertungstheorie und endlich Pontrjagin (1932) eine topologische Charakterisierung des Körpers der komplexen Zahlen gegeben hatten.

Es ist eine der eindrucksvollsten Tatsachen der Mathematikgeschichte:
Die Einbürgerung der komplexen Zahlen in die Mathematik, die Erkenntnis des Wesens dieser Zahlen in weiten Kreisen der Wissenschaftler, insbesondere auch der Mathematiker, geschah in einem Zeitraum von nahezu vier Jahrhunderten. Es waren im wesentlichen die folgenden drei, schon von Gauß beschriebenen Schwierigkeiten, mit denen die Gelehrten sich auseinanderzusetzen hatten.

1. "Die Schwierigkeiten, mit denen man die Theorie der imaginären Größen umgeben glaubt, haben ihren Grund großenteils in den wenig schicklichen Benennungen. Hätte man ... die positiven Größen direkte, die negativen inverse, die imaginären laterale Größen genannt, so wäre Einfachheit anstatt Verwirrung, Klarheit anstatt Dunkelheit die Folge gewesen.[131]"

2. "Bei allem dem sind die imaginären Größen, so lange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als vielmehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen auf gleiche Linie gestellt zu

[130] Gauß' Untersuchungen über höhere Arithmetik (Hrsg. H. Maaser) (Berlin 1889, S. 548).
[131] Gauß, 1832. In: Gauß' Untersuchungen über höhere Arithmetik (Hrsg. H. Maser) (Berlin 1889, S. 548).

werden.[132]"

3, "Die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen ... Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren: allein die den reellen Größen gegenübergestellten imaginären - ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obgleich unschicklich, unmögliche genannt - sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Größen steuert, verschmähen zu wollen.[133]"

Das Rechnen mit dem Imaginären galt für lange Zeit als ein Rechnen mit dem Unmöglichen. Blieb das Imaginäre im Resultat stehen, so bedeutete das die Unlösbarkeit der Aufgabe. Die Grundlage der "wenig schicklich benannten" imaginären Größen, denen man ein "denkbares Substrat unbedingt" absprach, bestand in der Tat lange Zeit in einer "Fiction". Eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergäbe, existierte nicht.
Der Begriff "imaginäre Größe" war ein widerspruchsvoller Begriff ($\sqrt{-1}$ ist eine Größe[134]), $\sqrt{-1}$ kann keine Größe sein), der etwas als nicht existent Erkanntes (bzw. Angenommenes) als existent setzt, war eine der Wirklichkeit (scheinbar) nicht entsprechende Annahme, die zu bestimmten Zwecken (in der Algebra und später in anderen Teilgebieten der Mathematik) gemacht wurde.

Der Begriff des Imaginären wurde nur deshalb zugelassen, weil er als Hilfsmittel der mathematischen Erkenntnis diente (wovon die zahlreichen Anwendungen schon im 16., 17., 18. Jahrhundert zeugen). So waren beispielsweise für Euler "Zahlen" stets "reelle Zahlen", dennoch bildete er Quadratwurzeln von negativen Zahlen.
Obwohl diese Zahlen "wie z. B. $\sqrt{-4}$ ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, dass dadurch eine Zahl angedeutet wird, welche mit sich selbst multipliziert als Produkt -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diese Zahlen dem Verfahren der Rechnung zu unterwerfen", schrieb Euler 1770 in der Vollständigen Anleitung zur Algebra.

Diese "Ausgeburt der Ideenwelt" (LEIBNIZ), dieser widerspruchsvolle Begriff der "imaginären Größe", der "unmöglichen Zahl", dieses "inhaltsleere Zeichenspiel", dem man ein "denkbares Substrat unbedingt" absprach, konnte auch keine vernünftige geometrische oder nichtgeometrische Deutung zulassen. Man brauchte eine solche somit auch gar nicht zu suchen.

Damit blieb der Begriff lange Zeit fiktiv und nicht existent. Das Bewusstsein, es hier mit einer Fiktion und einem irrealen Begriff zu tun zu haben, wirkte so außerordentlich hinderlich dem Fortschritt entgegen. Nur zögernd gestand man ein, dass im Imaginären doch wohl noch eine andere Bedeutung enthalten sein müsse als die einer zur Vereinfachung gewisser Rechnungen zwar nützlichen, in sich aber sinnlosen Fiktion.

Die (schon im 17. Jahrhundert von Wallis gemachte) Erkenntnis, dass die imaginären Grö-

[132] Gauß, 1850. In: Gauß - Werke X, 1 (Leipzig 1917, S. 404-405).
[133] Gauß, 1831. In: Gauß - Werke II (Leipzig 1876, S. 174ff.).
[134] "Ich glaube, dass... der leichtfertige und inconsequente Gebrauch des Wortes 'Größe' in den Köpfen der Mathematiker (nicht bloß der Anfänger) viel Unheil angerichtet hat, und sollte daher meinen, dass es allgemein als ein wahrer Segen empfunden werden müsste, wenn dieser in seiner quallenhaften Unbestimmtheit geradezu gemeingefährliche terminus technicus aus dem Unterricht möglichst verschwindet", sagte A. Pringsheim in: Jahresber. DMV 6 (1896/7), 80.

ßen durch Punkte der Ebene gedeutet werden können, ähnlich wie die reellen Zahlen durch Punkte der Geraden, beseitigte nicht die Zweifel an ihrer logischen Zulässigkeit. Als es Argand 1806 gelang, die Grundrechenoperationen mit den "unmöglichen Größen" geometrisch zu veranschaulichen, vermerkte er unsicher am Schluss, dass seine Methode, die in seinem Essai auseinandergesetzt wurde, auf zwei Konstruktionsprinzipien beruhe, einem für die Multiplikation und einem für die Addition gerichteter Strecken, und dass bemerkt worden wäre, dass diese Prinzipien auf Induktionen beruhten, die keinen hinreichenden Grad von Beweiskraft besäßen, sie könnten wohl nur als Hypothesen anerkannt werden.

Selbst nach der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen (nicht aber der Operationen) durch Gauß, durch die "die Metaphysik der imaginären Größen in ihr rechtes Licht gesetzt und nachgewiesen ist, dass diese ebensogut wie die negativen ihre reale gegenständliche Bedeutung haben", folgte die verbreitete Anerkennung des komplexen Zahlbegriffs nur langsam. Dies traf auch auf die nichtgeometrischen Darstellungen zu.

Nur zögernd vollzog sich der Übergang von der Fiktion der "imaginären Größe" zum vollwertigen Begriff der "komplexen Zahl" im Bewusstsein der meisten Mathematiker.
Wollte man "Größen", die sich nicht wie die reellen Zahlen der Größe nach anordnen lassen, die also keine "messbaren" Größen sind, wollte man diese "imaginären Größen" darum nicht als Zahlen anerkennen?

Es zeigte sich, dass die unbewusste Anwendung des Permanenzprinzips (so, "als ob" es sich um reelle Zahlen handele) den Grund der fiktiven Begriffsbildung (die Gleichsetzung von "Zahl" und "reeller Zahl") nur noch festigte.

Die bewusste Anwendung des Permanenzprinzips (durch Hankel 1867) trug mit zu der Einsicht bei, dass es sich bei den komplexen Zahlen um einen neuen, weiteren Zahlbereich handelt und dass die wie im Bereich der reellen Zahlen bezeichneten üblichen Operationen erst neu definiert werden müssen. Entscheidend war dabei auch die Erkenntnis, dass allgemein eine Rechnung mit verschiedenen Einheiten ("höheren" komplexen Zahlen) möglich ist und sinnvoll sein kann und dass sich diesem allgemeinen Begriff das Rechnen mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen unterordnet.

Besonders Grassmanns Rechnung mit Größen, die durch mehrere 'Einheiten' definiert sind (Grassmanns Ausdehnungslehre von 1844, die jedoch bei den Mathematikern lange Zeit unbeachtet blieb), in Verbindung mit der dem Prinzip nach verwandten Quaternionenrechnung Hamiltons, ließ letztlich, das lässt sich schon bei Hankel erkennen, allmählich das Zutrauen der Mathematiker in die logische Zulässigkeit der komplexen Zahlen entstehen.

Die abstrakten Charakterisierungen des Körpers der komplexen Zahlen bilden dann den Abschluss der Entwicklung des Begriffs der komplexen Zahl.

Literaturhinweise (Auswahl)

M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bände II, III. 2. Aufl. Leipzig 1900/1901.

E. Cartan und E. Study: Nombres complexes. In: Encyclopedie des sciences mathématiques pures et appliquees. Edition francaise. Tome I, vol. 1. Fasc. 3.1.5. Paris-Leipzig 1908, S. 329-468.

H. Hankel: Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867.

H. Gericke: Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim-Wien-Zürich 1970.

A. I. Markuschewitsch: Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen. Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

Ch. J. Scriba: The concept of number. Mannheim-Zürich 1968.

J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. 4. Aufl. Band 1: Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin-New York 1980.

H. Wussing: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979.

Zeitschrift "Der Mathematikunterricht". Jg. 10 (1964), Heft 2; Jg. 12 (1966), Heft 1.

19 Anhang: Lösungen der Aufgaben

E.1. a) Für die Gleichung $x^3 = 18x + 108$ ist $D = 2700$, $\sqrt{D} = 30\sqrt{3}$. Eine Lösung ist $x = u_0 + v_0$ mit $u_0^3 = 54 + 30\sqrt{3}$ und $v_0^3 = \frac{a}{3u_0}$. Man versuche, u_0 in der Form $c + d\sqrt{3}$ zu finden!
Aus $(c+d\sqrt{3})^3 = c^3+3c^2d\sqrt{3}+9cd^2+3d^3\sqrt{3} = 54+30\sqrt{3}$ folgt $c^3+9cd^2 = c(c^2+9d^2) = 54$, $3c^2d + 3d^3 = 3d(c^2 + d^2) = 30$. Durch Probieren findet man $c = 3$, $d = 1$.
Mit $u_0 = 3 + \sqrt{3}$ wird $v_0 = \frac{18}{9+3\sqrt{3}} = \frac{18(9-3\sqrt{3})}{81-27} = 3 - \sqrt{3}$. Die Zahl $u_0 + v_0 = 6$ ist eine Lösung der gegebenen Gleichung.

b) Für die Gleichung $x^3 = 12x + 16$ ist $D = 0$. Eine Lösung ist $x = u_0 + v_0$ mit $u_0^3 = 8$, also z.B. $u_0 = 2$, und $v_0 = 2$. Die Zahl 4 ist eine Lösung der gegebenen Gleichung.

c) Für die Gleichung $x^3 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}$ ist $D = \frac{49}{2^8 3^6}$, also $\sqrt{D} = \frac{7}{432}$. Aus $u_0^3 = \frac{1}{27}$ findet man z.B. $u_0 = \frac{1}{3}$ und damit $v_0 = \frac{1}{6}$. Die Zahl $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ist eine Lösung der gegebenen Gleichung.

E.2. a) $1 + i$ und $-(1 + i)$. b) $2 + i$ und $-(2 + i)$. c) $5\sqrt{i}$ und $-5\sqrt{2}i$.

E.3. a) 0, b) $-1 - 1 + 1 + i = -1 + i$.

E.4. a) (Erweiterung des Quotienten mit $5 - 7i$) $\frac{5}{74} - \frac{7}{74}i$
b) $\frac{\pi^2-1}{\pi^2+1} + \frac{2\pi}{\pi^2+1}i$.

Kapitel 1

1.1. Wir dürfen (da M gleichmächtig mit N ist) die Elemente von M als eine unendliche Folge $m_1, m_2, m_3, ...$ schreiben. Es sei T eine unendliche Teilmenge von M und m_{k_1} das erste Element dieser Folge, das zugleich zu T gehört, m_{k_2}, das zweite solche Element dieser Folge usw. Wir erhalten eine (unendliche) Folge $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, ...$, die aus allen Elementen von T besteht. Die Funktion $\varphi(m_{k_i}) = i$ ist dann eine bijektive Funktion von T auf N.

1.2. Jede gebrochene Zahl r ist eindeutig in der Form $r = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen m, n darstellbar. Setzt man $\psi(r) = (m, n)$, so ist ψ eine injektive Funktion von B in $N \times N$, also eine bijektive Funktion von B auf eine Teilmenge T von $N \times N$.
Daher ist B gleichmächtig mit einer unendlichen Teilmenge T von $N \times N$. $N \times N$ ist gleichmächtig mit N.
Nach Aufgabe 1.1 ist T vermöge einer bijektiven Funktion φ (von T auf N) auch gleichmächtig mit N. Dann ist die Funktion χ definiert durch $\chi(r) = \varphi(\psi(r))$ für $r \in B$ eine bijektive Funktion von B auf N.

1.3. Unter den Teilmengen gibt es die leere Menge, die kein Element enthält. Ein Element wird - sofern die gegebene Menge mindestens zwei Elemente besitzt - zu mehreren Teilmengen gehören.
Angenommen, es gibt zwischen den Elementen und den Teilmengen einer Menge M eine eineindeutige Zuordnung. Es gibt ein Element, das der leeren Menge zugeordnet ist. Dies ist ein Element, dem eine Teilmenge zugeordnet ist, zu der es nicht gehört. Die Menge aller solcher Elemente ist eine Teilmenge T von M.
Der Teilmenge T entspreche bei der angenommenen eineindeutigen Zuordnung das Element a. Wenn a zu T gehören würde ($a \in T$), so wäre a (nach Definition von T) ein Element, dem eine Teilmenge zugeordnet ist (T), zu der es nicht gehört, also $a \notin T$. Wenn $a \notin T$, so wäre a ein Element, dem eine Teilmenge zugeordnet ist (T), zu der es nicht gehört, also nach Definition von T doch $a \in T$.

Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Die Annahme der eineindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen und den Teilmengen einer Menge M führt zu einem Widerspruch. Es gibt also keine solche Zuordnung.

Kapitel 2

2.1. $r = \sqrt{2}$, $\tan\varphi = -1$. Der Punkt liegt im IV. Quadranten, folglich ist $\varphi = 360° - 45° = 315°$. Die Polarkoordinaten des Punktes sind $(\sqrt{2}, 315°)$.

2.2. $r = 13$, $\tan\varphi = -\frac{12}{5}$, $\varphi = 112{,}62°$ (Punkt liegt im II. Quadranten).

2.3. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

2.4. Es ist $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = u^2$ oder $r = u$. Unabhängig vom Winkel φ ist r konstant gleich u.

2.5. a) Die Polarkoordinaten des Punktes sind $(2\sqrt{3}, 135° + 75°)$, die rechtwinkligen Koordinaten daher

$$x = 2\sqrt{3}\cos 210° = 2\sqrt{3}\cos(180° + 30°) = -2\sqrt{3}\cos 30° = -2\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{3} = -3$$

und

$$y = 2\sqrt{3}\sin 210° = -2\sqrt{3}\sin 30° = -\sqrt{3}$$

Die Polarkoordinaten des Quotienten sind $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 135° - 75°\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 60°\right)$, die rechtwinkligen Koordinaten daher

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad , \qquad y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 60° = 1$$

b) Die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Punkte sind

$$P = (2\cos 135°, 2\sin 135°) = (-\sqrt{2}, 2)$$

$$Q = (\sqrt{3}\cos 75°, \sqrt{3}\sin 75°) = (\sqrt{3}\sin 15°, \sqrt{3}\cos 15°) = \left(\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}, \sqrt{3}\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

Es wird (nach (2.6))

$$PQ = \left(-\sqrt{2}\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2}\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2}\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}[\sqrt{2\cdot 3(2-\sqrt{3})} + \sqrt{2\cdot 3(2+\sqrt{3})}], -\frac{1}{2}[\sqrt{2\cdot 3(2+\sqrt{3})} - \sqrt{2\cdot 3(2-\sqrt{3})}]\right) = (-3, -\sqrt{3})$$

(Setzt man nämlich $\sqrt{6(2+\sqrt{3})} + \sqrt{6(2-\sqrt{3})} = e$, $\sqrt{6(2+\sqrt{3})} - \sqrt{6(2-\sqrt{3})} = f$, so wird $e^2 = 36$ und $ef = 2\sqrt{3}\cdot 6$, also $e = 6, f = 2\sqrt{3}$) Ferner wird (nach (VII))

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} + -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}(-f), \frac{1}{2}e\right) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right)$$

Kapitel 3

3.1. Ist φ der Isomorphismus von K auf K' und ψ der Isomorphismus von K' auf K'', so sind φ, ψ bijektive Funktionen. Dann ist η definiert durch $\eta(a) = \psi(\varphi(a))$ für $a \in K$, offenbar eine bijektive Funktion von K auf K''. Ferner gilt

$$\eta(a+b) = \psi(\varphi(a+b)) = \psi(\varphi(a) \oplus \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) \boxplus \psi(\varphi(b)) = \eta(a) \boxplus \eta(b) \quad \text{und}$$
$$\eta(a \cdot b) = \psi(\varphi(a \cdot b)) = \psi(\varphi(a) \odot \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) \boxdot \psi(\varphi(b)) = \eta(a) \boxdot \eta(b)$$

($+, \cdot$ bzw. $\oplus, \bigodot$ bzw. $\boxplus, \boxdot$ bezeichnen die Operationen in K bzw. K' bzw. K''.)

Kapitel 4

4.1. Es ist einerseits

$$(a+b)(1+1) = (a+b)1 + (a+b)1$$

und andererseits

$$(a+b)(1+1) = a+b+a+b = a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b$$

folglich

$$a+(b+a)+b = a+(a+b)+b$$

und daher nach I 2: $b+a = a+b$.

4.2. Ist $n = 1+1+...+1$ (n Summanden) und K eine beliebige Zahl, so gilt nach II 5, I 6:

$$Kn = K(1+1+...+1) = K1+K1+...+K1 = K+K+...+K$$

und

$$nk = (1+1+...+1)K = 1K+1K+...+1K = K+K+...+K$$

also $Kn = nK$. Wir nehmen nun an, dass es zwei Zahlen a, b gäbe, für die das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht gültig ist. Es sei z.B. $a > 0$ und $b > 0$ und $ab - ba > 0$.
Nach I 5 gibt es eine Zahl c ($c > 0$) mit $(a+b+1)c = ab - ba$. Nun wähle man eine Zahl d so, dass $d > 0$, $d < 1$, $d < c$. Wir bezeichnen mit m und n die nach IV 1 existierenden ganzen Zahlen > 0, für die $md < a \leq (m+1)d$, $nd < b \leq (n+1)d$ ist. Multipliziert man diese Ungleichungen und berücksichtigt $nK = Kn$, so folgt $mnd^2 < ba$

$$ab \leq mnd^2 + (m+n+1)d^2 \qquad \text{also} \qquad ab - ba < (m+n+1)d^2$$

Nun ist $md < a$, $nd < b$, $d < 1$, somit $(m+n+1)d < a+b+1$, $(m+n+1)d^2 < (a+b+1)d$, d.h. $ab - ba < (a+b+1)d$ oder (wegen $d < c$) $ab - ba < (a+b+1)c$.
Diese Ungleichung widerspricht der Wahl der Zahl c. Qed.
(Nach Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1962, Kap. VI, 3 32. Im dortigen 3 33 wird übrigens gezeigt, dass das kommutative Gesetz nicht schon eine Folge der Axiome I, II 1-5, III ist. Das kommutative Gesetz kann also aus den übrigen Axiomen genau dann gefolgert werden, wenn man das Archimedische Axiom IV 1 hinzuzieht.)

Kapitel 5

5.1. $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\overline{\alpha + \beta} = (a+c) - (b+d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

5.2. $|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$, also (wegen $|\alpha| \geq 0$, $|\beta| \geq 0$) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

5.3. Aus $\beta\gamma = \alpha$ folgt $|\alpha| = |\beta||\gamma|$, also für $\beta \neq 0$ gilt $|\gamma| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

5.4. Aus $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ folgt (vgl. (5.11))

$$|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta} + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

also

$$2|\alpha||\beta| = 2|\alpha\beta| = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha\overline{\beta} \qquad \text{d.h.} \qquad \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = |\alpha\beta| = |\alpha\overline{\beta}|$$

Hieraus folgt $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \geq 0$ und $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = 0$. Und umgekehrt! Das Gleichheitszeichen gilt also dann und nur dann, wenn $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \geq 0$ und $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = 0$ 0 ist.
Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn α oder β Null sind. Sind $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ und $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$, so gilt $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = rs\sin(\varphi-\psi) = 0$ genau dann, wenn (da $sr \neq 0$) $\varphi - \psi$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

In diesem Fall ist die zweite Bedingung $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = rs\cos(\varphi-\psi) \geq 0$ mit $\varphi - \psi = 2k\pi$ (k ganzzahlig) gleichwertig. Es gilt für $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$ dann und nur dann $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$, wenn $\psi \equiv \varphi(2\pi)$, d.h., wenn die Punkte α und β auf einem und demselben von 0 ausgehenden Strahl liegen.

5.5. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|\alpha| = |(\alpha+\beta) - \beta| \leq |\alpha+\beta| + |\beta|$, d.h. $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha+\beta|$; ferner (beachte $|-\alpha| = |\alpha|$) $|\beta| = |(\alpha+\beta) - \alpha| \leq |\alpha+\beta| + |\alpha|$, also $|beta| - |\alpha| = -(|\alpha| + |\beta|) \leq |\alpha+\beta|$.
Somit gilt stets $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha+\beta|$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta} \leq 0$ und $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta} = 0$ ist.

Beweis. Nach der Lösung der Aufgabe 5.4 gilt $|\alpha| = |(\alpha+\beta) + (\beta)| = |\alpha+\beta| + |\beta|$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta)(\overline{-\beta})) = 0$ und $\mathrm{Re}\,((\alpha+\beta)(\overline{-\beta})) \geq 0$, d.h. $\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta)(\overline{\beta})) = 0$ und $\mathrm{Re}\,((\alpha+\beta)(\overline{\beta})) \leq 0$ ist.
Nun ist $\mathrm{Im}\,((\alpha+\beta)(\overline{-\beta})) = \mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta} + |\beta|^2) = \mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta})$. Aus $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = 0$ folgt aber $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = |\alpha\overline{\beta}| = |\alpha\beta|$.
Daher ist $\mathrm{Re}\,((\alpha+\beta)\overline{\beta})) = |\beta|^2 + \mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \leq 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \leq 0$ und $|\beta|^2 \leq |\,\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = |\alpha\beta|$, also $|\beta| \leq |\alpha|$. Somit ist $|\alpha| = |\alpha+\beta| + |\beta|$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \leq 0$ und $|\beta| \leq |\alpha|$.
Analog ist $|\beta| = |\alpha+\beta| + |\alpha|$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) \leq 0$ und $|\alpha| \leq |\beta|$.
Beides zusammen ergibt die Behauptung. Qed.

Die angegebenen Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind. Sind $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ und $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$, so gilt $\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\beta}) = rs\sin(\varphi-\psi) = 0$ genau dann, wenn $\varphi \equiv \psi(\pi)$ ist.
In diesem Fall ist die zweite Bedingung $\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = rs\cos(\varphi-\psi) \leq 0$ mit $\varphi - \psi = (2k+1)\pi$ (k ganzzahlig), d.h. mit $\varphi - \psi = 2k\pi + \pi \equiv \pi(2\pi)$ gleichwertig. Abb. A.1)

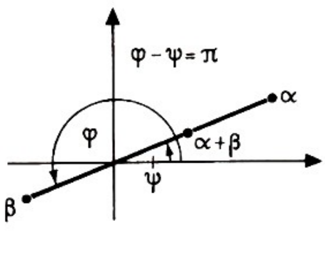


Abb. A.1

5.6. $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$; $|-i| = 1$, $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$; $|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i)\frac{7\pi}{4}$; $|-1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1-i) = 225° = \frac{5\pi}{4}$; $|\sqrt{3}+1| = 2$, $\arg(\sqrt{3}+1) = 30°$; $|\sqrt{3}-1| = 2$, $\arg(3-i) = 330°$;

$|1+2i| = \sqrt{5}$, $|2+i| = \sqrt{5}$, $\left|\frac{1+2i}{2+i}\right| = 1$, $|(1+2i)(2+i)| = 5$; $\arg(1+2i) = 63{,}43°$, $\arg(2+i) = 26{,}57°$, $\arg((1+2i)(2+i)) = 90°$, $\arg\left(\frac{1+2i}{2+i}\right) = 36{,}87°$.

5.7. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; $z = -5$; $z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

5.8. a) imaginäre Achse, b) reelle Achse, c) rechte Halbebene einschließlich imaginärer Achse, d) linke Halbebene, e) obere Halbebene, f) untere Halbebene einschließlich reeller Achse.

5.9. $-r \le r\cos\varphi \le r$, $-r \le r\sin\varphi \le r$

5.10. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jede der beiden Katheten höchstens so lang wie die Hypotenuse.

5.11. $|z-\alpha|^2 = u^2|z-\beta|^2$; a) $u = 1$: Die Mittelsenkrechte zur Verbindungsstrecke von α und β. b) $u \ne 1$. $(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = u(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$, d.h. $z\overline{z}(1-u^2) - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + u^2(\beta\overline{z} + \overline{\beta}z) + \alpha\overline{\alpha} - u^2\beta\overline{\beta} = 0$, d.h.

$$\left|z - \frac{\alpha - u^2\beta}{1-u^2}\right|^2 = u^2\frac{|\alpha-\beta|^2}{(1-u^2)^2}$$

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden durch α und β liegt.

5.12. Einerseits $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}) = (\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)} = |\alpha-\beta|^2$. Andererseits

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}) &= [(r\cos\varphi - s\cos\psi) + i(r\sin\varphi - s\sin\psi)]\\ &\quad\cdot[(r\cos\varphi - s\cos\psi) - i(r\sin\varphi - s\sin\psi)]\\ &= (r\cos\varphi - s\cos\psi)^2 + (r\sin\varphi - s\sin\psi)^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos(\psi-\varphi)\end{aligned}$$

Somit

$$|\alpha-\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\cos(\psi-\varphi) \qquad \text{(Cosinussatz)}$$

5.13. Aus $|z-2| > |2z-1|$ folgt $(z-2)(\overline{z}-2) > (2z-1)(2\overline{z}-1)$, also $3 > 3z\overline{z}$, d.h. $3 > 3|z|^2$, $1 > |z|^2$, $|z|] < 1$ und umgekehrt: Das Innere des Einheitskreises.

5.14. a) $-i$, b) i.

5.15. $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^{100} = (2i)^{50} = -2^{50}$. Oder $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + i\sin\frac{\varphi}{4}\right)$, $(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = 2^{50}(\cos\pi + \sin\pi) = -2^{50}$.

5.16.

$$\left(\frac{3-i}{1-3i}\right)^{101} = \left(\frac{(-i)(1+3i)}{1+3i}\right)^{101} = (-i)^{101} = -i$$

$$[2\sqrt{2}(-1+i)]^5 = \left[4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^5 = 2^{10}\left(\cos\frac{15}{4}\pi + i\sin\frac{15}{4}\pi\right)$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\frac{\pi}{8}\right)^3 0 = \cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$$

Ergebnis: $\frac{-i-63i}{2^{10}}16i = \frac{(-64)16i^2}{2^{10}} = 1$

5.17. $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i2\cos\varphi\sin\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 + i2\cos\varphi\sin\varphi$. Vergleich der Realteile und Vergleich der Imaginärteile liefern die Behauptungen.

5.18. $\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$. Der Vergleich der Realteile liefert

$cos5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$. Wegen $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ folgt hieraus $\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$

5.19. Nach (5.24) und (5.25) ist und Erweiterung mit $\frac{1}{\cos^6\varphi}$ wird

$$\tan 6\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 6\varphi} = \frac{6\tan\varphi - 20\tan^3\varphi + 6\tan^5\varphi}{1 - 15\tan^2\varphi + 15\tan^4\varphi - \tan^6\varphi}$$

5.20. Unter Benutzung von $\cos^2\psi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi)$ (Aufgabe 5.17) ist

$$C = \cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + ... + \cos^2 n\varphi = \frac{1}{2}(n + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + ... + \cos 2n\varphi)$$

Setzt man $2\varphi = \varphi'$, so folgt mit (5.26)

$$C = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi'\cos\frac{n}{2}\varphi'}{\sin\frac{\varphi'}{2}} - 1\right) = \frac{n-1}{2} + \frac{\sin(n+1)\varphi\cos n\varphi}{2\sin\varphi}$$

Wegen $\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi$ wird dann

$$S = \sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + ... + \sin^2 n\varphi = n - \frac{n-1}{2} - \frac{\sin(n-1)\varphi\cos n\varphi}{2\sin\varphi}$$

also

$$S = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin(n+1)\varphi\cos n\varphi}{2\sin\varphi}$$

Kapitel 6

6.1. Die Addition und eine (kommutative) Multiplikation der Vektoren kann wie folgt repräsentantenweise erklärt werden. (Dabei ist die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten nachzuweisen!)
Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegebene Vektoren und $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ Repräsentanten von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Verschiebt man $\overrightarrow{CD}$ so, dass der Anfangspunkt dieser gerichteten Strecke mit B zusammenfällt, also $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$ gesetzt werden kann, so wird man $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ als Repräsentant für $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ anzusehen haben. (Die übliche Vektoraddition!)
Zur Definition der Multiplikation mögen die Repräsentanten der Vektoren $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ von einem Punkt O ausgehen, $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$. Es werde vereinbart, dass zwei Quotienten von O ausgehender gerichteter Strecken gleich sind, $\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OF}}$, wenn die Dreiecke COD und FOG ähnlich sind (Abb. A.2), also $|OC| : |OD| = |OF| : |OG|$ und $\angle COD = \angle FOG$.

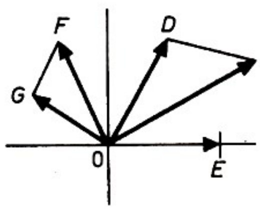


Abb. A.2

Es werde ferner eine Einheitsstrecke $\overrightarrow{OE}$ der Länge $|OE| = 1$ festgelegt derart, dass für alle $\overrightarrow{OD}$ gilt $\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OE}} = \overrightarrow{OD}$. Das Produkt der gerichteten Strecken $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ sei dann die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OC}$ (Abb. A.3) so, dass $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OE}}$, d.h. derart, dass die Dreiecke COB und AOE ähnlich sind. Dann gilt $|OC||OE| = |OC| = |OA||OB|$ und $\angle EOC = \angle EOA + \angle EOB$.
Liegen OA, OB in der Geraden OE, so entartet das Dreieck AOE in eine Strecke.

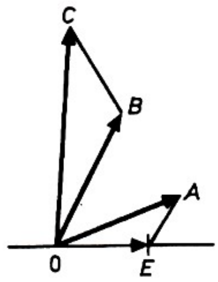


Abb. A.3

Dann ist $\angle EOC = 0$ oder π, je nachdem, ob OA, OB gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, während $|OC| = |OA||OB|$ ist (Abb. A.4).

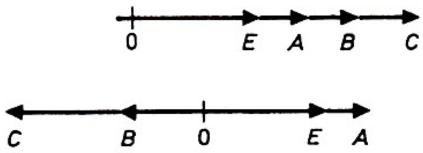


Abb. A.4

Auf den Nachweis der Körperaxiome soll hier verzichtet werden.

6.2. 1. Die Eckpunkte A, B, C des rechtwinkligen Dreiecks mögen in der komplexen Zahlenebene durch die komplexen Zahlen α, β, γ dargestellt werden (Abb. A.5). Dann wird der Mittelpunkt D von BC durch $\delta = \frac{\beta+\gamma}{2}$ dargestellt. Dann ist $\overrightarrow{AB} = \frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \frac{\gamma-\beta}{2}$. Aus $\left|\frac{\gamma+\beta}{2}\right| = \left|\frac{\gamma-\beta}{2}\right|$ folgt die Behauptung.

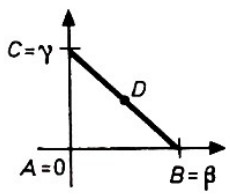


Abb. A.5

2. In der gezeichneten Lage des Dreiecks ist $\beta = b$ reell und $C = ci$ rein-imaginär und es ist $D = \frac{1}{2}(b + ci)$. Dann ist $OD = \left|\frac{1}{2}(b+ci) - 0\right| = \frac{1}{2}|b + ci| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$ und

$$BC = |b - ci| = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad \text{also} \qquad OD = \frac{1}{2}|BC| = |DC| = |DB|$$

6.3. Die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC mögen in der komplexen Zahlenebene durch die komplexen Zahlen α, β, γ dargestellt werden. Dann wird der Mittelpunkt D der Strecke AC durch $\delta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, der Mittelpunkt E der Strecke BC durch $\varepsilon = \frac{\beta+\gamma}{2}$ dargestellt (vgl. Abb. A.6).

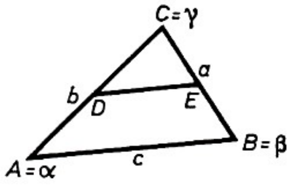


Abb. A.6

Dann ist $\overrightarrow{DE} = \varepsilon - \delta = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Da $\overrightarrow{AB} = \beta - \alpha$ folgt sofort die Behauptung.

6.4. Die Eckpunkte des Vierecks seien $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $D = \delta$. Die Mittelpunkte der

Seiten sind $E = \frac{\alpha+\delta}{2}$, $F = \frac{\beta+\gamma}{2}$, $G = \frac{\gamma+\delta}{2}$, $H = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der Seiten sind

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\delta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+\delta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

fallen also zusammen. Ferner gilt $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, d.h., die gerichteten Strecken $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HF}$ repräsentieren denselben Vektor (sind also parallel und besitzen die gleiche Länge) (vgl. Abb. A.7).

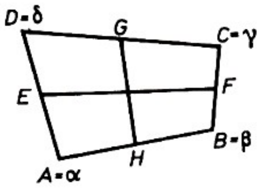


Abb. A.7

6.5. Der Mittelpunkt I der Diagonalen $\overrightarrow{AC}$ ist $I = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, der Mittelpunkt K der Diagonalen $\overrightarrow{BD}$ ist $K = \frac{\beta+\delta}{2}$ (vgl. Abb. A.8). Dann ist $\overrightarrow{IK} = \frac{\beta+\delta}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Ferner gilt

$$\overrightarrow{BD} = \delta-\beta, \quad \overrightarrow{AC} = \gamma-\alpha, \quad \overrightarrow{AB} = \beta-\alpha, \quad \overrightarrow{BC} = \gamma-\beta, \quad \overrightarrow{CD} = \delta-\gamma, \quad \overrightarrow{DA} = \alpha-\delta$$

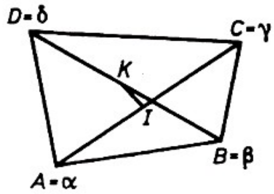


Abb. A.8

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 &= |\beta-\alpha|^2+|\gamma-\beta|^2+|\delta-\gamma|^2+|\alpha-\delta|^2\\ &= (\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+(\gamma-\beta)(\overline{\gamma}-\overline{\beta})+(\delta-\gamma)(\overline{\delta}-\overline{\gamma})+(\alpha-\delta)(\overline{\alpha}-\overline{\delta})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|AC|^2+|BD|^2+(2|IK|)^2 &= |\gamma-\alpha|^2+|\delta-\beta|^2+|\beta+\delta-\alpha-\gamma|^2\\ &= (\gamma-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+(\delta-\beta)(\overline{\delta}-\overline{\beta})+(\beta+\delta-\alpha-\gamma)(\overline{\beta}+\overline{\delta}-\overline{\alpha}-\overline{\gamma})\end{aligned}$$

Weiteres Ausrechnen beider Ausdrücke bestätigt die Gleichheit:

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|IK|^2$$

6.6. Es seien P, Q, R, S vier Punkte eines Kreises. Da Peripheriewinkel über gleichem Bogen gleich sind, gilt: Liegen R und S auf einer Seite der Geraden PQ, so ist die Winkeldifferenz $\angle PRQ - \angle PSQ = (RP, RQ) - (SP, SQ) = 0$.
Ferner gilt: Liegen R, S auf verschiedenen Seiten der Geraden PQ, so ist
$\angle PRQ - \angle PSQ = (RP, RQ) - (SP, SQ) = (2\pi - \psi) - \varphi = 2\pi - (\psi + \varphi))\pi$
(da $\psi + \varphi = \pi$, vgl. Abb. A.9).

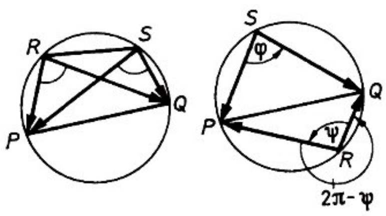


Abb. A.9

Liegen somit die vier Eckpunkte A, B, C, D des Vierecks auf einem Kreis, etwa C und D auf verschiedenen Seiten von AB, so ist

$$\angle BDC - \angle BAC = 0, \quad \angle CDA - \angle CBA = 0, \quad \angle ADB - \angle ACB = \pi$$

Aus (6.23) folgt

$$(FH, FG) = \angle HFG = 0, \quad (GF,GH) = \angle FGH = 0, \quad (HG,HF) = \angle GHF = \pi$$

Somit haben FH und FG dieselbe Richtung, ebenso GF und GH. G, H, F liegen auf einer Geraden, H zwischen F und G. Dies bedeutet, dass $|GH|+|HF| = |GF|$. Mit (6.12), (6.14), (6.16) ergibt sich hieraus die bekannte Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen eines einem Kreis einbeschriebenen Vierecks:

$$|AD||BC| + |BD||CA| = |CD||AB|$$

Kapitel 7

7.1. Es sei $z = (x, y)$, $\beta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Dann ist der Bildpunkt von z bei der Drehung der x,y-Ebene um den Winkel φ

$$g(z) = (x',y') = z\beta = (x,y)(\cos\varphi, \sin\varphi) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

also

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \qquad , \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

7.2. Ist $z = (x,y)$, $\beta = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\alpha = (a, b)$, so lässt sich $h(z) = (x',y') = z\beta + \alpha$ in der Form

$$x' = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a \qquad , \qquad y' = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + b$$

schreiben.

7.3. Der Kreis mit dem Radius u um den Nullpunkt ist durch die Gleichung $|z| = u$gegeben. Die Funktion $j_1(z) = \frac{u^2}{z}$ beschreibt die "Spiegelung" an diesem Kreis.

7.4. Geht der Punkt (x, y) durch Spiegelung am Einheitskreis in den Punkt (x', y') über, so ist

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad , \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

7.5. Geraden und Kreise können durch eine Gleichung der Form

$$A(x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0 \tag{1}$$

(A, B, C, D reelle Zahlen) dargestellt werden, wobei für Geraden $A = 0$ ist und für Kreise $A \neq 0$ und $4AD < B^2 + C^2$ gilt.

Die Bildpunkte $z' = (x', y')$ der diese Gleichung erfüllenden Punkte $z = (x, y)$ sind nach der Lösung der Aufgabe 7.4

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad , \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

und wegen $|z||z'| = 1$ gilt umgekehrt

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \qquad , \qquad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

Aus (*) folgt

$$A\frac{x'^2 + y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + B\frac{x'}{x'^2 + y'^2} + C\frac{y'}{x'^2 + y'^2} + D = 0$$

oder $A + Bx' + Cy' + D(x'2^2 + y'^2) = 0$. Die Punkte (x', y') liegen also wieder auf einem Kreis oder auf einer Geraden.

Kapitel 8

8.1. Die geographische Länge φ und die Breite χ, die sich aus der Beziehung $\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right) = r$ ergibt.
Die Bildpunkte von $1, i, -1, -i$ liegen auf dem Äquator und haben die Längen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$.

8.2. Das Büschel aller Kreise, die durch den Bildpunkt $S(z) = Z$ und den Nordpol P gehen.

8.3. Das räumliche Koordinatensystem ξ, η, ζ sei so gewählt, dass die ξ- bzw. η-Achse mit der x- bzw. y-Achse übereinstimmt, während die ζ-Achse in den Durchmesser OP (Südpol-Nordpol) fällt. Der Durchmesser OP habe die Länge 1.
Dem Punkt $z = (x,y) = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ entspreche der Kugelpunkt $Z = (\xi, \eta, \zeta)$. Dann gilt $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ ($\zeta \neq 1$, d.h. $Z \neq P$ und

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad \xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}$$

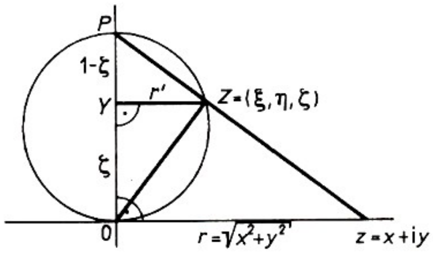


Abb. A.10

Beweis. In Abb. A.10 ist $Oz = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|OP| = 1$, $|OY| = \zeta$. Wir setzen $|YZ| = r'$. Die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke OYZ und zOP liefern die Proportion

$$\zeta : r' = r : 1 \tag{1}$$

und die Dreiecke ZYP und zOP die Proportion

$$r' : (1 - \zeta) = r : 1 \tag{2}$$

Hieraus folgt (aus (1) $\zeta = rr'$ in (2) eingesetzt und nach r' aufgelöst) $r' = \frac{r}{1+r^2}$ bzw. (aus (2) $r' = r(1 - \zeta)$ in (1) eingesetzt und nach r aufgelöst) $r^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}$ und (aus (1) $r' = \frac{\zeta}{r}$, aus (2) $r' = r(1 - \zeta)$, beides gleichgesetzt und nach ζ aufgelöst) $\zeta = \frac{r^2}{1+r^2}$.

Da $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$ und offenbar $\xi = r'\cos\varphi$, $\eta = r'\sin\varphi$ ist, folgt

$$\xi = r'\cos\varphi = \frac{r\cos\varphi}{1+r^2} = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = r'\sin\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1+r^2} = \frac{y}{1+x^2+y^2},$$

$$\zeta = \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

und hieraus auch der umgekehrte Zusammenhang.

Kapitel 9

9.1. Aus $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $n > 2$ folgt $5^n = 5^2 5^{n-2} = 3^2 5^{n-2} + 4^2 5^{n-2} > 3^1 3^{n-2} + 4^2 4^{n-2} = 3^n + 4^n$

9.2. Aus $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y + z = \frac{1}{2}$ folgt (durch Elimination von z) $xy - 4x - 4y + 16 = (x-4)(y-4) = 8$. $x-4$ und $y-4$ sind ganzzahlig. Wäre $x - 4 < 0$, so entweder $x - 4 = -1$ oder $x - 4 = -2$ oder $x - 4 = -4$ oder $x - 4 = -8$, und es wäre $y - 4 = -8$ (also $y = -4$) oder $y - 4 = -4$ (also $y = 0$) oder $x = 0$ oder $x = -4$, was jeweils unmöglich ist.
Somit muss $x - 4 > 0$, also $x - 4$ gleich 1 oder 2 oder 4 oder 8 sein, d.h. $x = 5$ oder 6 oder 8 oder 12, und damit $y = 12$ oder 8 oder 6 oder 5. Es gibt genau zwei Dreiecke der gesuchten Art, nämlich die Dreiecke mit den Seitenlängen 5, 12, 13 und 6, 8, 10. Der Flächeninhalt bzw. der Umfang beträgt 30 bzw. 24.

Kapitel 10

10.1. Aus $\beta \mid \alpha$ (für $\alpha, \beta \in G$), also $\alpha = \beta\gamma$ mit $\gamma \in G$ folgt $p = N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$, d. h. entweder $N(\beta) = 1$ und $N(\gamma) = p$ oder $N(\gamma) = 1$ und $N(\beta) = p$.
Beispiel: $N(2 + 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$, also ist $2 + 3i$ eine Gaußsche Primzahl.

10.2. Eine Quadratzahl lässt bei der Division durch 8 den Rest 0 oder den Rest 1 oder den Rest 4. Die Summe dreier Quadrate lässt niemals den Rest 7 (bei der Division durch 8).

10.3. Es sei $n = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$ ($\alpha = a + bi$) mit $(a,b) = 1$. Da a und b teilerfremd sind, kann $\alpha = a + bi$ durch keine Primzahl p teilbar sein. Die Zerlegung der Gaußschen Zahl α in Gaußsche Primzahlen sei wieder

$$\alpha = i^y (1+i)^u \rho_1^{v_1} \rho_2^{v_2} ... \rho_k^{v_k} \overline{\rho}_1^{w_1} \overline{\rho}_2^{w_2} ... \overline{\rho}_k^{w_k} q_1^{x_1} q_2^{x_2} ... q_s^{x_s}$$

Da $2 \mid \alpha$ nicht sein kann, folgt $u \leq 1$. Notwendig ist auch $x_j = 0$ ($j = 1,2,...,s$). Von den zwei Zahlen v_m, w_m muss wenigstens eine Zahl 0 sein (für $m = 1,2,...,k$). (Wären nämlich diese drei Bedingungen nicht erfüllt, gäbe es eine Primzahl p mit $p \mid \alpha$)
Somit lässt sich die Zerlegung von α in der folgenden Form aufschreiben:

$$\alpha = i^y (1+i)^u \rho_1^{v_1} \rho_2^{v_2} ... \rho_k^{v_k} \overline{\rho}_1^{w_1} \overline{\rho}_2^{w_2} ... \overline{\rho}_k^{w_k}$$

wobei wenigstens jeweils eine der Zahlen v_m, w_m (für $m = 1, ..., k$) gleich Null ist. (Umgekehrt, wenn α eine solche Zerlegung besitzt, gibt es kein $p \mid \alpha$)

Man erhält für n

$$n = \alpha\overline{\alpha} = 2^u p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_k^{c_k}$$

(alle $c_m \geq 0$, $u = 0,1$), worin entweder $c_m = v_m$ oder $c_m = w_m$ (für $m = 1,2,...,k$). Somit erhält man als Anzahl der Möglichkeiten $2^2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{2+k}$.

Kapitel 11

11.1. Es ist $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; also $\sqrt{2i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i$. (Vgl. Aufgabe E.2a).

11.2. a) Aus $(x+iy)^2 = -15 + 8i$ folgt $x^2 - y^2 = -15$, $2xy = 8$, $x^2(-y^2) = -\left(\frac{8}{2}\right)^2$.

Die Gleichung $t^2 + 15t + \frac{8^2}{4} = 0$ hat die Lösungen $\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{15^2 + 8^2}) = \frac{1}{2}(-15 + 17) = 1$ und $\frac{1}{2}(-15 - \sqrt{15^2 + 8^2}) = -16$. Da $xy > 0$ ist, muss $x = 1$ und $y = 4$ oder $x = -1$ und $y = -4$ sein. Die Quadratwurzeln aus $-15 + 8i$ sind $1 + 4i$ und $-(1 + 4i)$. Der Hauptwert ist $\sqrt{-15 + 8i} = 1 + 4i$.

b) $(2 + 3i)$, $-(2 + 3i)$. c) $3 + 4i$, $-(3 + 4i)$.

d) Aus $(x + iy)^2 = 4 + 3i$ folgt $x^2 - y^2 = 4$, $x^2(-y^2) = -\frac{3^2}{4}$.
Die Gleichung $t^2 - 4t - \frac{3^2}{4} = 0$ hat die Lösungen $\frac{9}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Man hat $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x = \frac{-3}{\sqrt{2}}$ und $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ zu nehmen. Die Quadratwurzeln aus $4 + 3i$ sind $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ und $\frac{-3}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, der Hauptwert ist $\sqrt{4 + 3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$.

11.3 Da $\sqrt{\left(\frac{5+3i}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}i} = \sqrt{4 + 3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$ (Aufgabe 11.2, d) ist, sind $z_1 = \frac{-5-3i}{2} + \frac{3+i}{\sqrt{2}} = \frac{-5+3\sqrt{2}}{2} + i\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$ und $z_2 = \frac{-5-3i}{2} - \frac{3+i}{\sqrt{2}} = \frac{-5-3\sqrt{2}}{2} + i\frac{-3-\sqrt{2}}{2}$ die gesuchten Lösungen.

11.4. Da $\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 57} = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ist, sind $z_1 = -\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $z_2 = -\frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ die gesuchten Lösungen.

11.5. Aus $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$ folgt $z^2 - 2\cos\varphi z + 1 = 0$, also $z = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ oder $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Hieraus ergibt sich sofort $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ oder $z^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$, also $\frac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$ oder $\frac{1}{z^n} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.
In jedem Fall ist $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

11.6. a) Nach (11.8) ist

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{3}i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1^2+3}+1} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1^2+3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{4}+1} + i\sqrt{\sqrt{4}-1}) = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)\end{aligned}$$

Die zweite Quadratwurzel aus $1 + \sqrt{3}i$ ist $-\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)$

b) Nach (11.9) ist

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{\sqrt{4}-1} - i\sqrt{\sqrt{4}-1}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)$$

Die zweite Quadratwurzel aus $1 - \sqrt{2}3i$ ist $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)$.

c) $\sqrt{1+\sqrt{3}i} - \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{6}$, $-\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i} = -\sqrt{6}$,

d) $\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2}i$, $-\sqrt{1+\sqrt{3}i} - \sqrt{1-\sqrt{3}i} = -\sqrt{2}i$.

Kapitel 12

12.1. Es ist $z^6-1=(z^3-1)(z^3+1)=(z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1)=0$.
Die Lösungen von $z^2+z+1=0$ sind die dritten Einheitswurzeln $\rho=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \rho^2=\rho=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Die Lösungen von $z^2-z+1=0$ sind $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Die sechs sechsten Einheitswurzeln sind somit 1, z_1, ρ, -1, ρ^2, z_2.

12.2. Aus $\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^j=\cos j\frac{2\pi}{p}+i\sin j\frac{2\pi}{p}=1$ folgt $\cos\frac{j}{p}2\pi=1$, $\sin\frac{j}{p}2\pi=0$, d.h., $\frac{j}{p}$ muss eine ganze Zahl sein.

12.3. Ist $\varepsilon=\zeta^k$ mit einem $1\leq k\leq p-1$, so gilt $(\varepsilon^j)^p=(\zeta^p)^{kj}=1$ für $j=1,2,..,p$, d.h., $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,...,\varepsilon^{p-1},\varepsilon^p=1$ sind p-te Einheitswurzeln.
Sind j_1 und j_2 verschieden, so auch ε^{j_1} und ε^{j_2} (für $1\leq j_1\leq p-1$, $1\leq j_2\leq p-1$).
Wäre $\varepsilon 1j_1=\varepsilon^{j_2}$, so $\zeta^{kj_1}=\zeta^{kj_2}$, d.h. $\zeta^{(j_1-j_2)k}=1$. Es wäre (Aufgabe 12.2) p ein Teiler von $(j_1-j_2)k$, was nur möglich ist (da j_1,j_2,k kleiner als p sind), wenn j_1 und j_2 gleich sind.

12.4. Die Zahlen $\delta^j\varepsilon^k$ ($j=1,..,q$, $i=1,...,p$) sind qp verschiedene Zahlen mit $(\delta^j\varepsilon^k)^{qp}=(\delta^q)^{jp}(\varepsilon^p)^{kq}=1$.

12.5. Sind 1, ρ, ρ^2 die dritten Einheitswurzeln, 1, ζ, ζ^2, ζ^3, ζ^4 die fünften Einheitswurzeln, so sind

$$1,\rho,\rho^2,\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4,\rho\zeta,\rho\zeta^2,\rho\zeta^3,\rho\zeta^4,\rho^2\zeta,\rho^2\zeta^2,\rho^2\zeta^3,\rho^2\zeta^4$$

die fünfzehnten Einheitswurzeln.

12.6. Die Gleichung $z^{2n+1}-1=0$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned}&1, \qquad \alpha=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}, \qquad \alpha^2=\cos\frac{4\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4\pi}{2n+1},...,\\ &\alpha^{2n}=\cos\frac{4n\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\end{aligned}$$

$(2n+1)$-te Einheitswurzeln).
Ihre Summe ist nach (12.83) $1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{2n}=0$, d.h.

$$\begin{aligned}&\left[1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right]\\ &+i\left[1+\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+...+\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right]=0\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}=0$$

Nun ist

$$\cos\frac{4n\pi}{2n+1}=\cos\frac{2\pi}{2n+1} \qquad , \qquad \cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}=\cos\frac{4\pi}{2n+1}$$

usw., also gilt

$$1+2\cos\frac{2\pi}{2n+1}+2\cos\frac{4\pi}{2n+1}+...+2\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0$$

Die gesuchte Summe ist $-\frac{1}{2}$.

12.7. Man betrachte die $q-1$ Zahlen $p, 2p, ..., (q-1)p$. Diese lassen bei der Division durch q nicht den Rest 0. Es gibt jedoch darunter eine Zahl gp $(1 \leq g \leq q-1)$, die bei der Division durch q den Rest 1 besitzt. (Hieraus folgt $gp = h'q + 1$ oder $gp + hq = 1$, mit ganzen Zahlen g und $h = -h'$.) Käme der Rest 1 nicht vor, so hätten die $q-1$ Zahlen höchstens $q-2$ Reste bei der Division durch q. Zwei der Vielfachen, etwa ap und bp mit natürlichen Zahlen $1 \leq b < a \leq q-1$, müssten denselben Rest bei der Division durch q haben. Dann wäre q ein Teiler von $ap - bp = (a-b)p$. Da q und p teilerfremd sind, müsste q ein Teiler von $a-b$ sein, was wegen $0 < a-b < q$ unmöglich ist.

Kapitel 13

13.1. Es ist

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - z_k|^2 &= a^2|1-\zeta^k|^2 = a^2(1-\zeta^k)(\overline{1-\zeta^k}) = a^2(1-\zeta^k)(1-\overline{\zeta}^k) \\ &= a^2(1-\zeta^k-\overline{\zeta}^k+\zeta^k\overline{\zeta}^k) = a^2(2-\zeta^k-\overline{\zeta}^k) \end{aligned}$$

(letzteres wegen $\zeta\overline{\zeta} = 1$). Weil die Summe aller Einheitswurzeln $= 0$ ist, folgt hieraus für die gesuchte Summe S aller Quadrate $|z_{k+1} - z_k|^2$ $(k = 1,2,...,n-1)$

$$S = a^2(2(n-1) - (-1) - (-1)) = 2na^2$$

13.2. Das gesuchte Produkt ist $P = na^{n-1}$. In der Tat, es ist

$$\prod_{k=1}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = \prod_{k=1}^{n-1} a|1-\zeta^k| = a^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} |1-\zeta^k|$$

Wegen des paarweisen Auftretens der Einheitswurzeln ζ^k und $\overline{\zeta}^k$ ist aber $\prod\limits_{k=1}^{n-1} |1-\zeta^k| = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-\zeta^k) = p(1)$ mit

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-\zeta)(z-\zeta^2)...(z-\zeta^{n-1}) = \frac{(z-1)(z-\zeta)(z-\zeta^2)...(z-\zeta^{n-1})}{z-1} \\ &= \frac{z^n-1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 \end{aligned}$$

Man erkennt $p(1) = n$.

Kapitel 14

14.1. Die Quadratwurzeln aus i sind $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ (11.2) und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$. Nach Satz 14.2 sind daher $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$ die Quadratwurzeln aus $-i$.
Der Hauptwert ist $\sqrt{-i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$ (wie sich aus der Lage dieser Zahl in der Zahlenebene ergibt).

14.2. a) $\sqrt[4]{2}(1+i)$, b) $\sqrt[4]{2}(1+i)$, c) $-\sqrt[4]{2}(1+i)$, d) $\sqrt[4]{2}(1+i)$.

14.3.

$$\sqrt[9]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt[18]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[18]{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

14.4. $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt[10]{i} = \cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}$. Der Betrag ist 1. Die Argumente sind $\frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{10}$ $(k = 0,1,2,...,9)$, also 9°, 45°, 81°, 117°, 153°, 189°, 225°, 261°, 297°, 333°.

b) $5+5\sqrt{3}i = 10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\sqrt[12]{5+5\sqrt{3}i} = \sqrt[12]{10}\left(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36}\right)$. Der Betrag ist $\sqrt[12]{10}$. Die Argumente sind $\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{12}$ $(k = 0,1,2,...,11)$, also 5°, 35°, 65°, 95°, 125°, 155°, 185°, 215°, 245°, 275°, 305°, 335°.

c) $\sqrt[6]{64} = 2$. Der Betrag ist 2. Die Argumente sind 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°.

d) $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. $\sqrt[6]{-64} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (Hauptwert). Der Betrag ist 2. Die Argumente sind 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°

14.5. a) Es ist $\alpha = \frac{61}{64}+i\sqrt{\frac{375}{4096}} = \frac{61}{64}+i\frac{\sqrt{375}}{64}$. Der Betrag dieser Zahl ist 1. Setzen wir $\alpha = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$, so ist eine fünfte Wurzel gegeben durch $cos\varphi + i\sin\varphi$.
Wegen $\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$ (Lösung der Aufgabe 5.18) findet man $t = \cos\varphi$ aus $\frac{61}{2^6} = 2^4t^5 - 20t^3 + 80\frac{t}{2^4}$. Man erkennt $t = \frac{1}{2^2}$ als eine Lösung. Aus $\cos\varphi = \frac{1}{4}$ folgt $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
Tatsächlich gilt für $\gamma = \frac{1}{4}+i\frac{15}{4}$, dass $\gamma^5 = \alpha$ ist.

b) Aus $\zeta^5 = \alpha$ folgt $\overline{\gamma}^5 = \overline{\alpha}$. Eine fünfte Wurzel aus $\overline{\alpha} = \frac{61}{64} - i\frac{\sqrt{375}}{64}$ ist somit $\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$.

14.6. Es ist $2+2i = -1(-2-2i)$. Eine dritte Wurzel aus -1 ist -1. Nach Satz 14.3 und Beispiel 2 zu den kubischen Wurzeln sind die dritten Wurzeln aus $2+2i$ daher $-1+i$, $(-1+i)\rho$, $(-1+i)\rho^2$. Der Hauptwert ist $\sqrt[3]{2+2i} = (-1+i)\rho$ (Abb. A.11).

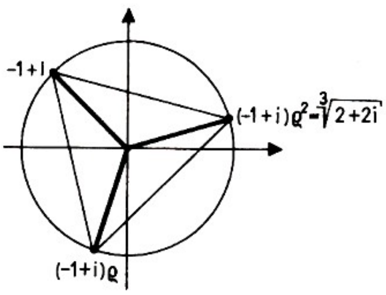


Abb. A.11 Die dritten Wurzeln aus $2+2i$

14.7. Es ist $2-11i = \sqrt{125}(\cos(2\pi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi))$, wenn $0 \le \varphi = \arg(2+11i) < 2\pi$. Dann wird

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2-11i} &= \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{3}\right)\right)\\ &= \sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}\right)\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = (2-i)\rho\end{aligned}$$

(vgl. (14.13)). Die dritten Wurzeln aus $2-11i$ sind $(2-i)\rho$, $(2-i)\rho^2$, $2-i$.

14.8. $\sqrt[3]{2+i\sqrt{121}}$, $a = 2$, $b = 121$, $c = \sqrt[3]{125} = 5$. Gesucht ist p so, dass $p^2 < 5$, $p^3 > 2$, also $\sqrt[3]{2} < p < \sqrt{5}$.
$p = 2$ leistet das Verlangte (und genügt der Gleichung (14.19)). Die reelle Summe von $\sqrt[3]{2+11i}$ mit einer geeigneten Wurzel aus $2-11i$ ist somit gleich 4. Da $q = c-p^2 = 1$ ist, folgt auch $\sqrt[3]{2+11} = 2+i$.

14.9. Ist $\sqrt[3]{3+i\sqrt{10}} = c+di$, so

$$(c+di)^3 = 3+i\sqrt{10}, \quad (c-di)^3 = 3-i\sqrt{10},$$

$$(c+di)^3(c-di)^3 = (3+i\sqrt{10})(3-i\sqrt{10}) = 19$$

die gesuchte reelle Zahl ist $\sqrt[3]{19}$.

Kapitel 15

15.1. Mit den Bezeichnungen der Abb. A.12 ist der Flächeninhalt $F = ch$, der Umfang $2U = (a+c)$. Setzt man $a = U - c$, $h = \frac{F}{c}$ in $c^2 + h^2 = a^2$ ein, so erhält man die kubische Gleichung $2Uc^3 - Uc^2 + F^2 = 0$ für c. (Aus F $= ch$ folgt dann $h4$, aus $c^2 + h^2 = a^2$ dann a.)

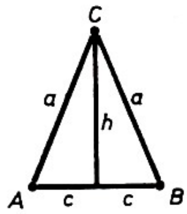


Abb. A.12 c Halbbasis, a Schenkel

15.2. Bezeichnet r den gesuchten Radius und A die gesuchte Höhe, so ist das Volumen $V = \pi r^2 h$ und die Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Setzt man $h = \frac{V}{\pi r^2}$ in O ein, so ergibt sich die kubische Gleichung $r^3 - \frac{O}{2\pi} r + \frac{V}{\pi} = 0$ für r.

15.3. Bei Abkühlung auf unter 0°C wird unter Vergrößerung des Volumens um $\frac{1}{11}$ (9%) aus Wasser Eis. Die Dichte des Eises ist also $\frac{11}{12}$ (0,92 g/cm^3). Bezeichnet d den Durchmesser der Eiskugel, so ist ihr Volumen $\frac{\pi}{6} d^3$ und ihre Masse $M = \frac{11}{12}\frac{\pi}{6} d^3$.
Bezeichnet t die Eintauchtiefe der Kugel, so ist das Volumen dieses Kugelabschnitts $V = \frac{\pi}{3} t^3 \left(\frac{3}{2} d - t\right)$. Nach dem archimedischen Prinzip verdrängt die Kugel soviel Wasser, wie ihr Gewicht ausmacht. Aus $M = V$ folgt $t^3 - \frac{3}{2} dt + \frac{11}{24} d13 = 0$ oder mit $x = \frac{t}{d}$ also die kubische Gleichung $x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{24} = 0$ in x.

15.4. Bezeichnen $e = AC$ und $f = BD$ die Diagonalen des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt (Abb. A.13) $e^2 = d^2 - c^2$, $f^2 = d^2 - a^2$ (Satz von Pythagoras) und $ef = ac + bd$ (Satz von Ptolemäus). Hieraus folgt $(d^2 - c^2)(d^2 - a^2) = (ac + bd)^2$.
Der gesuchte Durchmesser d genügt somit der kubischen Gleichung $d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0$.

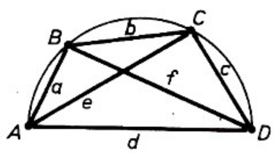


Abb. A.13

15.5. $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, $\cos^3\varphi = 4\cos 3\varphi - 3\cos\varphi$. Mit $u = \cos\varphi$ muss $u + 2u^2 - 1 + 4u^3 - 3u = 0$ oder $8u^3 + 4u^2 - 4u - 2 = 0$ oder (mit $x = u$) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ sein.

15.6. $D = 20^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 392 > 0$. Die Cardanische Formel gibt $t_1 = 4$. Aus $(t-4)(t^2 + 4t + 10) = t^3 - 6t - 40$ folgt $t^2 + 4t + 10 = 0$; $t_2 = -2 + \sqrt{6}i$, $t_2 = -2 - \sqrt{6}i$.

15.7. $D = 18^2 - 10^2 = -26^2 < 0$. $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{10}$. $\cos\varphi \approx 0{,}56921$, $\varphi \approx 55{,}30485°$, $\frac{\varphi}{3} = 18{,}434951°$, $\cos\frac{\varphi}{3} = 0{,}94868$, $\sqrt{10}\cos\frac{\varphi}{3} = 3$, $t_1 = 6$.
Aus $t^3 - 30t - 36 = (t-6)(t^2 + 6t + 6) = 0$ folgt $t^2 + 6t + 6 = 0$, also $t_{2,3} = -3 \pm \sqrt{3}$.

15.8. $D = -121 < 0$. $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{5}$. $\cos\varphi = \frac{2}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2}{25}\sqrt{5}$, $\varphi \approx 79{,}69515°$, $\cos\frac{\varphi}{3} = 0{,}89443$,

$t_1 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\varphi}{3} = 4$ $(= 2+i+2-i$, vgl. Kap. 14), t_2, t_3 sind die Lösungen von $\frac{t^3-15t-4}{t-4} = t^2+4t+1 = 0$, also $t_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.

15.9. $D = -\frac{35^2}{3^3} < 0$. Man erhält $t1_=4$. t_2, t_3 sind die Lösungen von $\frac{t^3-13t-12}{t-4} = t^2+4t+3 = 0$, also $t_2 = -1$, $t_3 = -3$.

15.10. Durch die Transformation $x = t+2$ wird die Gleichung reduziert auf $t^3+1 = t(t^2+1) = 0$ mit $D > 0$. Die Lösungen sind daher $x_1 = 2, x_2 = 2+i, x_3 2-i$.

15.11. a) $t13 - 3t - 1 = 0$. $D = -\frac{3}{4} < 0$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60°$, $\sqrt{-\frac{p}{3}} = 1$.
$t_1 = 2\cos 20°$, $t_2 = 2\cos 240°$, $t_3 = 2\cos 260°$.

b) Durch die Transformation $x = t+3$ wird die Gleichung $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$ reduziert auf $t^3 - \frac{13}{3}t - \frac{200}{27} = 0$. $D = \frac{17^2}{3\cdot 3^2} > 0$.
$\sqrt{D} = \frac{17}{9}\sqrt{3}$, $-\frac{q}{2} + \sqrt{D} = \frac{100}{27} + \frac{51}{27}\sqrt{3}$, $-\frac{q}{2} - \sqrt{D} = \frac{100}{27} - \frac{51}{27}\sqrt{3}$.
$t_1 = u_1 + v_1 = \frac{8}{3}$, also $x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$. Die beiden anderen Lösungen sind Lösungen der Gleichung $\frac{x^3-4x^2+x-4}{x-4} = x^2 - 1 = 0$, also $x_2 = i$, $x_3 = -i$.

15.12. a) $D = \frac{1}{4}\frac{V}{\pi^2} - \frac{O^3}{27\cdot 8\pi^3} = \frac{1}{8\cdot 27\pi^3}(54\pi V^2 - O^3)$
Es ist $D = 0$, falls $54\pi V^2 = O^3$; $D > 0$, falls $54\pi V^2 > O^3$; $D < 0$, falls $54\pi V^2 < O^3$.
Durch Betrachtung der Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln (Satz von Vieta) erkennt man: Für $D = 0$ hat die kubische Gleichung genau eine positive Lösung, für $D > 0$ keine positive, für $D < 0$ zwei positive Lösungen.

b) Die Gleichung $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24} = 0$ geht vermöge $u = x^{-1} = \frac{d}{t}$ über in $u^3 - \frac{36}{11}u + \frac{24}{11} = 0$.
Es ist $D < 0$, $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{11}{12}}$, $\varphi = 163{,}22134°$, $\frac{\varphi}{3} \approx 54{,}40711°$, $\cos\frac{\varphi}{3} = 0{,}58202$.
$u_1 = 1{,}2158$, also $x_1 = 0{,}8225$, d.h. $x_1 = \frac{41}{50}$. (Die Eiskugel sinkt zu $\frac{41}{50}$ ihres Durchmessers ein.)

c) Die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ reduziert sich vermöge $x = t - \frac{1}{3}$ auf $t^3 - \frac{7}{3}t - \frac{34}{27} = 0$.
Es ist $D < 0$, $t_1 = -\frac{2}{3}$, also $x_1 = -1$.
Die beiden anderen Lösungen sind aus $\frac{x^3+x^2-2x-2}{x+1} = x^2 - 2$ zu bestimmen: $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Die gesuchten Werte sind $\cos\varphi = u = -\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bzw. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\varphi = 120°, 45°, 135°$.

Kapitel 16

16.1. Bombelli erläutert die Methode Ferraris zur Auflösung biquadratischer Gleichungen am Beispiel dieser Gleichung wie folgt (in moderner Wiedergabe)[135]):
Die Gleichung wird so geordnet, dass beide Seiten, um eine gewisse gleiche Größe ergänzt, zum Quadrat werden. Auf beiden Seiten der Gleichung $x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 16x^2 + 68x - 11$ addiere man $z^2 - z(2x^2 + 8x)$. Es ergibt sich

$$(x^2 + 4x - z)^2 = (16 - 2z)x^2 + (68 - 8z)x + z^2 - 11$$

Die linke Seite ist für jedes z ein Quadrat. Die rechte Seite wird nur dann ein Quadrat der Form $(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$, wenn $1 - 2z = a^2$, $z^2 - 11 = b^2$, $68 - 8z = 2ab$ ist. Bereits hieraus oder aus der Bedingung (für z) $(68 - 8z)^2 = 4(16 - 2z)(z^2 - 11)$, d.h. aus der kubischen Gleichung $z^2 - 147z + 666 = 0$, bestimmt man $z = 6$.
Die gegebene Gleichung lässt sich nun in der Form $(x^2+4x-6)^2 = 4x^2+20x+25 = (2x+5)^2$ schreiben. Man hat etwa die quadratische Gleichung $x^2 + 4x - 6 = 2x + 5$ zu lösen, um eine

[135] Nach J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. Dritter Band (3. Aufl., Berlin-Leipzig 1937, S. 164).

Lösung der Ausgangsgleichung zu gewinnen.

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung ($x^2+2x-11=0$) sind $x_1=-1+\sqrt{12}$, $x_2=-1-\sqrt{12}$. Hingegen liefert die quadratische Gleichung $x^2+4x-6=-(2x+5)$ oder $x^2+6x-1=0$ die Lösungen $x_3=-3+\sqrt{10}$, $x_4=-3-\sqrt{10}$. In der Tat, man rechnet unschwer nach, dass

$$x^4+8x^3-64x+11=(x+1-\sqrt{12})(x+1+\sqrt{12})(x+3-\sqrt{10})(x+3+\sqrt{10})$$

ist.

16.2. Die Lösungen sind $1+2i$, $1-2i$, $3+4i$, $3-4i$

16.3. Die Lösungen sind $1+i$, $1-i$, $\frac{1}{6}(-1+\sqrt{13})$, $\frac{1}{6}(-1-\sqrt{13})$

16.4. Nach (5.25) und wegen $\cos^2\varphi+i\sin^2\varphi=1$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\varphi=&\binom{2n+1}{1}(1-sin^2\varphi)^n\sin\varphi-\binom{2n+1}{3}(1-sin^2\varphi)^{n-1}\sin^3\varphi\\&+-...+(-1)^n\sin^{2n+1}\varphi\end{aligned}$$

Daher sind die $2n+1$ Zahlen 0, $\sin\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, ..., $\sin\frac{n\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{-\pi}{2n+1}=-\sin\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{-2\pi}{2n+1}=-\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, ..., $\sin\frac{-n\pi}{2n+1}=-\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ die Wurzeln der folgenden Gleichung vom Grad $2n+1$:

$$\binom{2n+1}{1}(1-x^2)^nx-\binom{2n+1}{3}(1-x^2)^{n-1}x^3+-...+(-1)^nx^{2n+1}=0 \qquad (*)$$

Durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors x auf der linken Seite erkennt man, dass die von 0 verschiedenen Zahlen

$$\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\sin^2\frac{2\pi}{2n+1},...,\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

die n Wurzeln der folgenden Gleichung vom Grad n sind (setze nach dem Ausklammern in (*) $x^2=t$):

$$\binom{2n+1}{1}(1-t)^n-\binom{2n+1}{3}(1-t)^{n-1}t+-...+(-1)^nt^n=0$$

16.5. a) Nach (5.25) und wegen $\cot\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ ist

$$\sin(2n+1)\varphi=\sin^{2n+1}\varphi\left[\binom{2n+1}{1}\cot^{2n}\varphi-\binom{2n+1}{3}\cot^{2n-2}\varphi+\binom{2n+1}{5}\cot^{2n-4}\varphi-+...\right]$$

Für $\varphi=\frac{\pi}{2n+1},\frac{2\pi}{2n+1},\frac{3\pi}{2n+1},...,\frac{n\pi}{2n+1}$ gilt daher

$$\binom{2n+1}{1}\cot^{2n}\varphi-\binom{2n+1}{3}\cot^{2n-2}\varphi+\binom{2n+1}{5}\cot^{2n-4}\varphi-+...=0$$

Somit sind die n Zahlen

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1},\cot^2\frac{2\pi}{2n+1},\cot^2\frac{3\pi}{2n+1},...,\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

die n Wurzeln der folgenden Gleichung vom Grad n:

$$\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+5}{1}x^{n-2} - +... = 0$$

b) Nach a) sind die gegebenen Zahlen alle Lösungen der Gleichung

$$x^n = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}x^{n-1} + \frac{\binom{2n+1}{5}}{\binom{2n+1}{1}}x^{n-2} - +... = 0$$

Nach dem Satz von Vieta ist die Summe der Lösungen (also die gesuchte Summe) gleich

$$\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Koeffizient von x^{n-1} mit negativem Vorzeichen).

Kapitel 17

17.1. a) Die Zahlenfolge $\{i^n\alpha\}$ ($\alpha \neq 0$ komplex) hat keinen Grenzwert. In jedem Kreis um α, um $i\alpha$, $-\alpha$, $-i\alpha$, α, $i\alpha$, $-\alpha$, $-i\alpha$, α, $i\alpha$, $-\alpha$, $-i\alpha$, α, ...

b) Die Zahlenfolge $\left\{\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^n\right\}$ hat den Grenzwert 1. Tatsächlich ist die Folge $\left\{\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^n - 1\right\}$ eine Nullfolge, denn es gilt:

$$\left|\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^n - 1\right| = \left|\binom{n}{1}\frac{i}{n^2} + \binom{n}{2}\frac{i^2}{n^4} + ... + \binom{n}{n}\frac{i^n}{n^{2n}}\right| \leq \left|\frac{i}{n}\right| + \left|\binom{n}{2}\frac{i^2}{n^4}\right| + ... + \left|\binom{n}{n}\frac{i^n}{n^{2n}}\right|$$

(Dreiecksungleichung)

wegen $|i^k| = 1$, $|n^k| = n^k$ ist somit

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^n - 1\right| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left\{\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^4} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^{2n-2}}\right\} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left\{\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^4} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\right\}\end{aligned}$$

da $\frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n^3}, ..., \frac{1}{n^{2n-2}} \leq \frac{1}{n^n}$; wegen $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \leq n^k$, also $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq 1$ folgt

$$\left|\left(1+\frac{i}{n^2}\right)^2 - 1\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\{1+1+...+1\} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n}$$

17.2. a) Es ist $|-e| = e$, $\arg(-e) = \pi$, also nach (17.14), $\log(-e) = \ln e + i\pi = 1 + i\pi$ (Hauptwert).
Alle komplexen Zahlen w mit $e^w = -e$ sind gegeben durch $w = 1+i\pi+2k\pi i = 1+(2k+1)\pi i$ (k ganzzahlig).

b) $\ln 2 + (2k+1)\pi i$ (k ganzzahlig)

c) Es ist $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$, $\arg\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, also $\log\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}i$ (Hauptwert).
Die gesuchten Logarithmen sind $\frac{\pi}{4}o + 2k\pi i = (8k+1)\frac{\pi i}{4}$ (k ganzzahlig).

17.3. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i} = e^{-i \log \frac{1+i}{\sqrt{2}}} = e^{-i(\frac{\pi}{4}i)}$ (nach der Lösung 17.2, c)).
Somit $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i} = e^{\frac{\pi}{4}}$

17.4. Clausen benutzt $e^{2n\pi i} = 1$ (n ganzzahlig; siehe (17.6)) und erhält richtig $e^{1+2n\pi i} = e^1 e^{2n\pi i} = e$ (siehe (17.5), (17.11)).
Hieraus folgert er einerseits

$$(e^{1+2n\pi i})^{1+2n\pi i} = (e)^{1+2n\pi i} = e$$

und benutzt andererseits

$$(e^{1+2n\pi i})^{1+2n\pi i} = e^{(1+2n\pi i)(1+2n\pi i)} = e^{(1+2n\pi n)^2}$$

Letzteres ist aber nicht richtig. Setzen wir $z = 1 + 2n\pi i$, so gilt nämlich $(e^z)^z \neq e^{z^2}$.

Es ist $|e^z| = e$, $|\arg e^z = 2n\pi$. Die Logarithmen von e^z sind die Zahlen $w = z + 2k\pi i = 1 + 2n\pi i + 2k\pi i = 1 + i(2n\pi + 2k\pi)$.
Wählt man nun k_0, derart, dass $0 \leq 2n\pi + 2k_0\pi = (n + k_0)2\pi < 2\pi$ ist, also $k_0 = -n$, so erhält man den Hauptwert

$$\log e^z = \ln e = 1$$

Nach Definition (17.17) ist dann $(e^z)^z = e^{z \log e^z} = e^z$. Wäre auch $e^{z^2} = e^z$, so $z^2 = z + 2m\pi i$ (m ganzzahlig). Es ist aber $z^2 = 1 + 4n\pi i - 4n^2\pi^2 = z + 2n\pi i - 4n^2\pi^2$ und eine Darstellung $-4n^2\pi^2 + i2n\pi = i2m\pi$ unmöglich. Somit ist $e^{z^2} \neq e^z$. Insgesamt gilt $(e^z)^z \neq e^{z^2}$.