
L.I. Golovina und I.M. Jaglom

**Vollständige Induktion in der
Geometrie**

Übersetzung von R. Fredersdorf, M. Schmidt
1973 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 75
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Vollständige Induktion in der Geometrie	3
1.1	Berechnung mittels vollständiger Induktion	3
1.2	Beweise mittels vollständiger Induktion	8
1.2.1	Aufgaben über Karten	13
1.2.2	Färbungsprobleme	16
1.3	Vollständige Induktion bei Konstruktionen	30
1.4	Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion	38
1.5	Definition mittels vollständiger Induktion	43
1.6	Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl	53
1.6.1	Berechnung und Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl	57
1.6.2	Definition und Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl	61
1.7	Lösungen	75
2	Literatur	89

1 Vollständige Induktion in der Geometrie

1.1 Berechnung mittels vollständiger Induktion

In der Geometrie lässt sich die Methode der vollständigen Induktion ganz naturgemäß bei der Lösung geometrischer Aufgaben durch Berechnung verwenden, und das kommt ihrer Verwendung in Algebra und Zahlentheorie am nächsten. Wir betrachten zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1. Man berechne die Länge a_{2^n} der Seite eines (konvexen) 2^n -Ecks, das einem Kreis mit dem Radius R einbeschrieben ist.

Lösung. 1. Für $n = 2$ ist das 2^n -Eck ein Quadrat; seine Seitenlänge beträgt $a_4 = R\sqrt{2}$. Ferner finden wir gemäß der Formel

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_{2^n}^2}}$$

das die Länge der Seite eines regelmäßigen 8-Ecks $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, die Länge der Seite eines regelmäßigen 16-Ecks

$$a_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

die Länge der Seite eines regelmäßigen 32-Ecks

$$a_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

ist.

Man vermutet daher, dass für $n \geq 2$ die Länge der Seite eines regelmäßigen einbeschriebenen 2^n -Ecks

$$a_{2^n} = R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}}$$

ist.

2. Wir setzen voraus, die Länge der Seite eines regelmäßigen einbeschriebenen 2^n -Ecks werde durch die Formel (1) ausgedrückt. Dann gilt für ein regelmäßiges 2^{n+1} -Eck

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2 \frac{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}{4}}} = R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}}$$

somit ist die Formel (1) für alle n richtig.

Aus (1) folgt, dass der Umfang $U = 2\pi R$ eines Kreises mit dem Radius R gleich dem Grenzwert von

$$2^n R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}}$$

bei unbegrenzt wachsendem natürlichen n ist und dass daher

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}} \quad \text{oder} \quad \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}}$$

gilt.

Aufgabe 1. Man zeige mit Hilfe von (1), dass der Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)}$$

mit einem unendlichen Produkt im Nenner die Zahl π darstellt (Formel von Vieta). Das Bildungsgesetz für die Faktoren im Nenner wird durch die ersten drei angegebenen Faktoren festgelegt.

Beispiel 2. Man berechne die Radien r_n und R_n des ein- bzw. umbeschriebenen Kreises eines regelmäßigen (konvexen) 2^n -Ecks, das den Umfang U besitzt.

Lösung. 1. $r_2 = \frac{U}{8}$, $R_2 = \frac{U\sqrt{2}}{8}$.

2. Kennen wir die Radien r_n und R_n des ein- bzw. umbeschriebenen Kreises eines regelmäßigen 2^n -Ecks mit dem Umfang U , dann berechnen wir die Radien r_{n+1} und R_{n+1} des ein- bzw. umbeschriebenen Kreises eines 2^{n+1} -Ecks mit dem gleichen Umfang wie folgt:

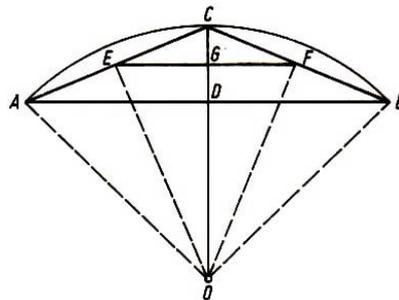


Abb. 1

Es sei AB (Abb. 1) Seite eines regelmäßigen 2^n -Ecks vom Umfang U , ferner O sein Mittelpunkt, C der Schnittpunkt des Umkreises mit der Winkelhalbierenden vom $\angle AOB$ und D der Mittelpunkt der Sehne AB ; weiter sei EF bezüglich AB die Mittellinie des Dreiecks ABC und G ihr Mittelpunkt.

Wegen $\angle AOE \cong \angle EOC \cong \angle COF \cong \angle FOB$ ist EF Seite eines regelmäßigen 2^{n+1} -Ecks, das einem Kreis mit dem Radius¹ $l(OE)$ einbeschrieben ist, wobei der Umfang dieses 2^{n+1} -Ecks gleich

$$2^{n+1}l(EF) = 2^{n+1} \frac{l(AB)}{2} = 2^n l(AB)$$

¹Mit $l(OE)$ wird die Länge der Strecke OE bezeichnet.

d.h. ebenfalls gleich U ist. Damit gilt $r_{n+1} = l(OG)$ bzw. $R_{n+1} = l(OE)$. Weiter ist klar, dass G Mittelpunkt von CD ist und dass somit wegen $r_n = l(OD)$ und $R_n = l(OC)$

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

gilt.

Im rechtwinkligen Dreieck OEC ist nach dem Kathetensatz $R_{n+1}^2 = R_n \cdot r_{n+1}$. Insgesamt erhalten wir

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$$

Wir betrachten die Folge $r_2, R_2, r_3, R_3, \dots, r_n, R_n, \dots$. Die Glieder dieser Folge streben gegen den Radius eines Kreises vom Umfang U , d.h. gegen $\frac{U}{2\pi}$.

Insbesondere ist $r_2 = \frac{1}{4}$ und $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ bei $U = 2$. Setzen wir noch $r_1 = 0$ und $R_1 = \frac{1}{2}$ dann erhalten wir den folgenden Satz:

Die Glieder der Zahlenfolge

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2+1}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4} + \sqrt{2} + 1}{16}, \dots$$

deren Anfangsglieder 0 und $\frac{1}{2}$ sind und deren übrige Glieder abwechselnd gleich dem arithmetischen bzw. dem geometrischen Mittel der beiden vorangehenden Folgenglieder sind, streben gegen $\frac{1}{\pi}$.

Beispiel 3. Man bestimme die Summe der Größen der Innenwinkel eines einfachen² (nicht notwendig konvexen) n -Ecks.

Lösung. 1. Die Summe der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ist $2R$, eines einfachen Vierecks $4R$, weil jedes solche Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden kann (Abb. 2).

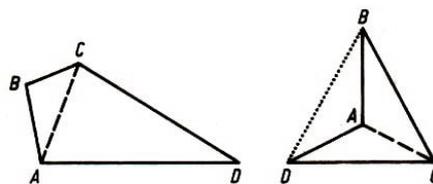


Abb. 2 a)

b)

2. Wir setzen voraus, die Summe der Größen der Innenwinkel eines beliebigen einfachen k -Ecks für $k < n$ sei gleich $2R(k - 2)$, und betrachten ein einfaches n -Eck $A_1A_2\dots A_n$. Zunächst zeigen wir, dass in jedem einfachen Vieleck mit wenigstens vier Ecken eine Diagonale existiert, die es in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenanzahl zerlegt.³

Für konvexe Vielecke ist das klar. Es seien A, B, C drei beliebige benachbarte Eckpunkte eines beliebigen einfachen Vielecks. Im Innenwinkel mit dem Scheitel B ziehen wir von

²"Einfach" bedeute in diesem Zusammenhang stets "einfach zusammenhängend".

³Man beachte, dass eine Diagonale eines nichtkonvexen Vielecks das Vieleck zerlegen oder ganz außerhalb desselben liegen kann (wie die Diagonale BD in Abb. 2b).

B aus alle Strecken, deren zweiter Endpunkt einer Vielecksseite angehört und deren Inneres sowohl im Inneren des Vielecks als auch des Innenwinkels mit dem Scheitel B liegt:

Es sind zwei Fälle möglich:

A. Alle von B verschiedenen Endpunkte liegen in genau einer Seite des Vielecks (Abb. 3a). In diesem Fall zerlegt die Diagonale AC unser n -Eck in ein $(n - 1)$ -Eck und ein Dreieck.

B. Nicht alle von B verschiedenen Endpunkte liegen in genau einer Seite (Abb. 3b). In diesem Fall ist einer dieser Endpunkte M eine Ecke des Vielecks, und die Diagonale BM zerlegt das Vieleck in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl.

Wir werden uns jetzt dem Beweis unserer ursprünglichen Behauptung zu.

Die Bezeichnung der Ecken des n -Ecks sei so gewählt, dass die Diagonale A_1A_k das Vieleck $A_1A_2\dots A_n$ in das k -Eck $A_1A_2\dots A_k$ und das $(n - k + 2)$ -Eck $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$ zerlegt.

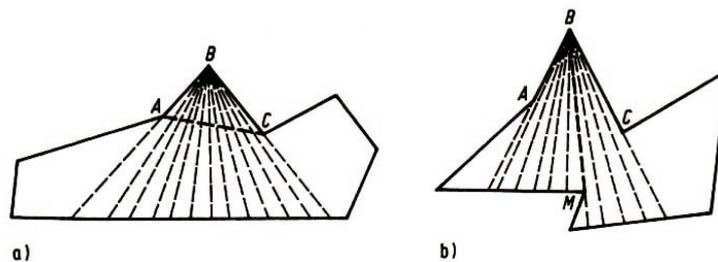


Abb. 3 a)

b)

Nach Voraussetzung sind die Summen der Größen der Innenwinkel des k -Ecks bzw. des $(n - k + 2)$ -Ecks gleich $2R(k - 2)$ bzw. $2R[(n - k + 2) - 2] = 2R(n - k)$; daher wird die Summe der Winkelgrößen des n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$ gleich $2R(k - 2) + 2R(n - k) = 2R(n - 2)$, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung für alle n folgt.

Wie wir in Beispiel 3 sahen, kann man in jedem einfachen Vieleck eine Diagonale finden, die es in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl zerlegt. Jedes dieser Vielecke, das noch kein Dreieck ist, kann man wieder in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl zerlegen usw. Folglich kann man jedes einfache Vieleck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen.

Beispiel 4. In wieviel Dreiecke kann ein einfaches (nicht unbedingt konvexes) n -Eck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, höchstens zerlegt werden?

Lösung. 1. Für das Dreieck ist diese Zahl 1 (im Dreieck kann man keine Diagonale ziehen); für das Viereck ist diese Zahl offensichtlich 2 (vgl. Abb. 2a und b).

2. Wir setzen voraus, dass jedes k -Eck mit $k < n$ durch einander nicht schneidende Diagonalen (unabhängig von der Art der Zerlegung) in $k - 2$ Dreiecke zerlegbar ist. Wir betrachten eine der Zerlegungen des n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$ in Dreiecke. Es sei A_1A_k eine der Diagonalen dieser Zerlegung; sie zerlegt das n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ bei geeigneter Wahl der Bezeichnung in ein k -Eck $A_1A_2\dots A_k$ und ein $(n - k + 2)$ -Eck $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$.

Nach Voraussetzung ist die Gesamtzahl der Dreiecke der Zerlegung gleich

$$(k - 2) + [(n - k + 2) - 2] = n - 2$$

damit ist unsere Behauptung für alle n bewiesen.

Aufgabe 2. Man bestimme die Anzahl N der Diagonalen, die einander nicht schneiden und bei der Zerlegung eines n -Ecks in Dreiecke benutzt werden.

Beispiel 5. Wieviel Möglichkeiten $P(n)$ gibt es, ein konvexes n -Eck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zu zerlegen?

Lösung. 1. Für ein Dreieck ist diese Zahl offenbar gleich 1; also ist $P(3) = 1$.

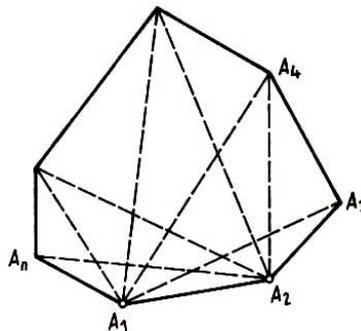


Abb. 4

2. Wir setzen voraus, dass wir die Zahl $P(k)$ für alle $k < n$ bestimmt haben, und wollen $P(n)$ bestimmen. Dazu betrachten wir ein konvexes n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ (Abb. 4). Für jede seiner Zerlegungen in Dreiecke wird die Seite A_1A_2 Seite eines Dreiecks der Zerlegung; der dritte Eckpunkt dieses Dreiecks muss einer der Punkte A_3, A_4, \dots, A_n sein.

Die Anzahl der Arten der Zerlegung des n -Ecks, für die dieser Eckpunkt mit dem Punkt A_3 übereinstimmt, ist gleich der Anzahl der Arten der Zerlegung des $(n - 1)$ -Ecks $A_1A_3A_4\dots A_n$ in Dreiecke, d.h. gleich $P(n - 1)$.

Die Anzahl der Arten der Zerlegung, für die dieser Eckpunkt mit A_4 übereinstimmt, ist gleich der Anzahl der Arten der Zerlegung des $(n - 2)$ -Ecks $A_1A_4A_5\dots A_n$, d.h. gleich $P(n - 2) = P(n - 2) \cdot P(3)$; die Anzahl der Arten der Zerlegung, für die er mit A_5 übereinstimmt, ist gleich $P(n - 3) \cdot P(4)$, da jede der Zerlegungen des $(n - 3)$ -Ecks $A_1A_5\dots A_n$ dabei mit jeder der Zerlegungen des Vierecks $A_2A_3A_4A_5$ kombiniert werden kann usw.

So kommen wir zu der Beziehung

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) \cdot P(3) + P(n-3) \cdot P(4) + \dots + P(3) \cdot P(n-2) + P(n-1) \quad (2)$$

Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$P(4) = P(3) + P(3) = 2,$$

$$P(5) = P(4) + P(3) \cdot P(3) + P(4) = 5,$$

$$P(6) = P(5) + P(4) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(4) + P(5) = 14,$$

$$P(7) = P(6) + P(5) \cdot P(3) + P(4) \cdot P(4) + P(3) \cdot P(5) + P(6) = 42$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Formel (2) kann man zeigen, dass für jedes n die Beziehung

$$P(n) = \frac{2(2n - 5)!}{(n - 1)!(n - 3)!}$$

gilt.

Aufgabe 3. In wieviel Teile wird ein konvexes n -Eck durch alle seine Diagonalen zerlegt, wenn sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden?

1.2 Beweise mittels vollständiger Induktion

Einige Sätze von Abschnitt 2.1 können bereits als Beispiele für die Anwendung der vollständigen Induktion beim Beweis geometrischer Sätze angesehen werden.

Zum Beispiel kann der Satz des Beispiels 3 folgendermaßen formuliert werden: Man zeige, dass die Summe der Winkelgrößen eines einfachen n -Ecks gleich $2R(n - 2)$ ist; in Beispiel 4 war zu beweisen, dass die sich nicht schneidenden Diagonalen ein einfaches n -Eck in $n - 2$ Dreiecke zerlegen.

In diesem Abschnitt betrachten wir weitere Beispiele dieser Art.

Beispiel 6. Es seien n beliebige Quadratflächen gegeben. Man beweise, dass man sie so in Teile zerlegen kann, dass sich aus sämtlichen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen lässt.

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist kein Beweis erforderlich. Wir beweisen nun, dass die Behauptung auch für $n = 2$ richtig ist. Die Seitenlängen der gegebenen Quadrate $ABCD$ und $abcd$ bezeichnen wir mit x bzw. y ; es sei etwa $x \geq y$.

Auf den Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge x (Abb. 5a) tragen wir die Strecken $AM \cong BN \cong CP \cong DQ$ der Länge $\frac{x+y}{2}$ ab und zerlegen die Fläche dieses Quadrates durch die Geraden MP und NQ , die sich offenbar im Mittelpunkt O des Quadrats schneiden und aufeinander senkrecht stehen.

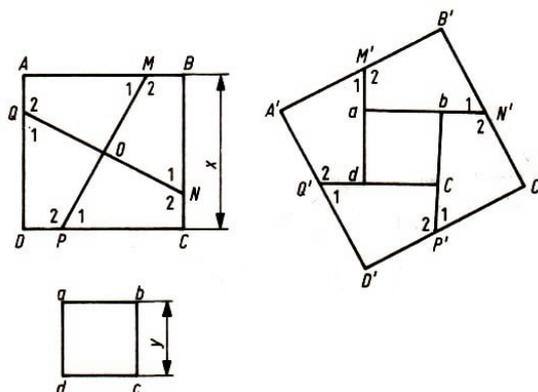


Abb. 5a, b

Dabei wird die Quadratfläche in vier kongruente Teile zerlegt. Diese Stücke legen wir an die zweite Quadratfläche an, wie in Abb. 5b gezeigt wird.

Die erhaltene Figur ist wieder eine Quadratfläche, da die Winkel bei den Punkten M', N', P', Q' Nebenwinkel und die Winkel A', B', C', D' rechte Winkel sind und

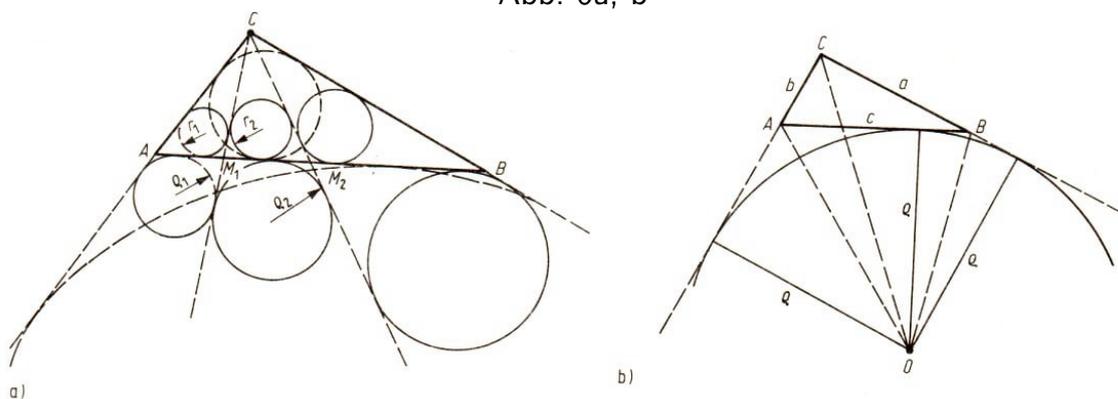
$A'B' \cong B'C' \cong C'D' \cong D'A'$ ist.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für n Quadratflächen schon bewiesen, und es seien $n + 1$ Quadratflächen $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$ gegeben.

Wir greifen zwei beliebige Quadratflächen, etwa K_n und K_{n+1} heraus. Wie in 1. gezeigt wurde, kann man eine neue Quadratfläche K' erhalten, wenn man eine dieser Quadratflächen zerlegt und die erhaltenen Teile an die zweite anlegt.

Ferner kann man nach Voraussetzung die Quadratflächen $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K'$ so in Teile zerlegen, dass man aus diesen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen kann, was zu beweisen war.

Abb. 6a, b



Beispiel 7. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Durch seinen Eckpunkt C seien $n - 1$ Geraden gelegt, die das Dreieck in n kleinere Dreiecke $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_{n-1}CB$ zerlegen. Wir bezeichnen mit r_1, r_2, \dots, r_n und $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ die Radien der In- bzw. Ankreise dieser Dreiecke, wobei alle betrachteten Ankreise im Winkel mit dem Scheitel C des ursprünglichen Dreiecks ABC liegen (Abb. 6 a); r und ρ seien die Radien des In- bzw. Ankreises im Winkel mit dem Scheitel C unseres Dreiecks ABC .

Man beweise die Beziehung

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$

Lösung. Wir bezeichnen mit F den Inhalt der Fläche des Dreiecks ABC und mit s seinen halben Umfang; dann ist bekanntlich $F = sr$. Ist O der Mittelpunkt des betrachteten Ankreises dieses Dreiecks (Abb. 6b), so gilt andererseits

$$F = F_{\Delta OAC} + F_{\Delta OCB} - F_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}a\rho - \frac{1}{2}c\rho = \frac{1}{2}(a + b - c)\rho = (s - c)\rho$$

folglich ist $sr = (s - c)\rho$ und $\frac{r}{\rho} = \frac{s-c}{s}$.

Ferner ergibt sich aus einer bekannten Formel der Trigonometrie (Halbwinkelsatz)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{und} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

woraus

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \cdot \frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{s-c}{s} = \frac{r}{\rho} \quad (3)$$

folgt. Nach diesen einleitenden Bemerkungen wenden wir uns dem Beweis des Satzes zu.

1. Für $n = 1$ ist unsere Behauptung offensichtlich. Wir beweisen ihre Richtigkeit für $n = 2$. In diesem Fall zerlegt eine Gerade das Dreieck ABC in zwei kleinere Dreiecke ACM und CMB . Nach der Formel (3) gilt (mit δ als Größe des Winkels $\angle ACM$)

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} &= \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\delta}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ - \delta}{2} \tan \frac{\beta}{2} \\ &= \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\delta}{2} \cot \frac{\delta}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{\rho} \end{aligned}$$

2. Wir setzen nun voraus, unsere Behauptung sei für $n - 1$ Geraden bewiesen und es seien n Geraden gegeben, die das Dreieck ABC in $n + 1$ kleinere Dreiecke $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$ zerlegen. Jetzt betrachten wir zwei von diesen Dreiecken, etwa ACM_1 und M_1CM_2 .

Wie wir in 1. sahen, ist

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}}$$

wobei r_{12} und ρ_{12} die Radien des In- bzw. des betrachteten Ankreises des Dreiecks ACM_2 sind. Für n Dreiecke $ACM_2, M_2CM_3, \dots, M_nCB$ gilt aber nach Voraussetzung

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

also ist

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

Aufgabe 4. Geraden durch den Punkt C mögen das Dreieck ABC auf zwei Arten in zwei Dreiecke ACM, CMB und $ACM', CM'B$ zerlegen; r_1, r_2 bzw. r'_1, r'_2 seien die Radien der Inkreise dieser Dreiecke.

Man beweise, dass aus $r_1 = r'_1$ stets $r_2 = r'_2$ folgt und dass die analoge Eigenschaft auch für die Radien der Ankreise im Dreieckswinkel mit dem Scheitel C gilt.

Aufgabe 5. Man beweise (in den Bezeichnungen des Beispiels 7), dass

$$\frac{r_1 + \rho_1}{R_1} + \frac{r_2 + \rho_2}{R_2} + \dots + \frac{r_n + \rho_n}{R_n} = \frac{r + \rho}{R}$$

gilt, wobei R_1, R_2, \dots, R_n und R die Radien der Umkreise der Dreiecke $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$ bzw. ABC sind.

Aufgabe 6. Es seien n Kreise ξ_1, \dots, ξ_n durch einen Punkt O gegeben, wobei sich ξ_1 und ξ_2, ξ_2 und ξ_3, \dots, ξ_n und ξ_1 jeweils in einem von O verschiedenen Punkt A_1, A_2, \dots bzw. A_n schneiden (Abb. 7).

Ferner sei B_1 ein von O verschiedener Punkt des Kreises ξ_1 . Mit g_1 bezeichnen wir im Fall $A_1 \neq B_1$ die Verbindungsgerade dieser Punkte und im Fall $A_1 = B_1$ die Tangente an ξ_1 im Punkt A_1 .

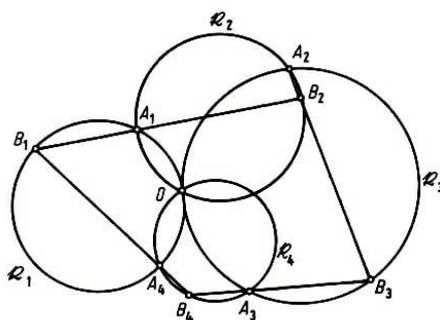


Abb. 7

Ferner sei B_2 der von A_1 verschiedene Schnittpunkt von g_1 und k_2 , falls g_1 Sekante von k_2 ist, und wir setzen $B_2 = A_1$, falls g_1 Tangente von k_2 ist.

Mit g_2 bezeichnen wir im Fall $A_2 \neq B_2$ die Verbindungsgerade dieser Punkte und im Fall $A_2 = B_2$ die Tangente an k_2 im Punkt A_2 . Analog werden B_3, \dots und g_3, \dots bestimmt. Man beweise, dass der auf dem Kreis k_1 erhaltene Punkt B_{n+1} mit B_1 übereinstimmt.

Beispiel 8. Man zeige, dass die Fläche jedes konvexen Vielecks, das von einem Parallelogramm verschieden ist, in eine Dreiecksfläche eingeschlossen werden kann, deren Seiten drei Seiten des Vielecks enthalten (Abb. 8).

Lösung. Wir zeigen zunächst (*), dass die Fläche jedes konvexen n -Ecks in die Fläche eines Dreiecks oder eines Parallelogramms eingeschlossen werden kann, deren Seiten drei bzw. vier Seiten des Vielecks enthalten (Abb. 8).

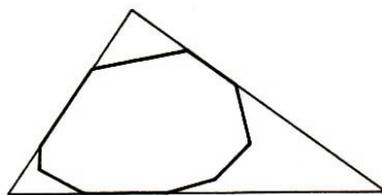


Abb. 8

1. Für $n = 3$ bedarf unsere Behauptung keines Beweises, für $n = 4$ ist sie offenbar ebenfalls richtig; denn entweder ist unser betrachtetes Viereck ein Parallelogramm, oder es hat zwei nichtparallele Gegenseiten, die wir bis zum Schnitt verlängern; wir erhalten ein Dreieck der gewünschten Art, das in seiner Fläche unsere Vierecksfläche enthält (Abb. 9 a).

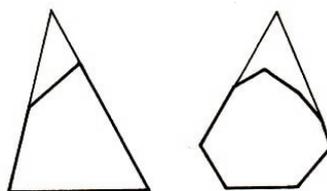


Abb. 9 a)

b)

2. Wir setzen jetzt voraus, unsere Behauptung sei schon für alle konvexen Vielecke, die weniger als n Seiten haben, richtig, und betrachten die Fläche eines beliebigen (konvexen!) n -Ecks μ (mit $n \geq 5$).

Dieses n -Eck hat sicherlich zwei nicht benachbarte und nicht parallele Seiten: Die Gesamtzahl der zu einer gegebenen Seite AB nicht benachbarten Seiten des n -Ecks μ

gleich $n - 3 \geq 2$, und das konvexe Vieleck kann nur eine einzige zu AB parallele Seite haben.

Wenn wir diese nichtparallelen Seiten bis zu ihrem Schnitt verlängern (Abb. 9 b), dann erhalten wir ein m -Eck μ_1 , dessen Fläche die Fläche von μ enthält; dabei gilt $m < n$. Alle Seiten dieses m -Ecks enthalten Seiten von μ .

Wenn wir noch das m -Eck μ_1 in die Fläche eines Dreiecks (Fall 1) oder eines Parallelogramms (Fall 2) einschließen - was nach Induktionsvoraussetzung möglich ist -, dann erhalten wir ein gewünschtes Dreieck oder Parallelogramm, dessen Fläche also die Fläche des n -Ecks μ enthält.

Jetzt können wir unsere Behauptung (*) für alle konvexen n -Ecke als bewiesen ansehen; wir zeigen, dass aus ihr auch die Behauptung des Beispiels folgt.

Im Fall 1 ist nichts mehr zu beweisen. Im Fall 2 sei $ABCD$ das erhaltene Parallelogramm. Ist das Vieleck μ aber kein Parallelogramm, dann ist wenigstens ein Eckpunkt von $ABCD$, etwa A , kein Eckpunkt von μ .

Wir betrachten jetzt den zu A nächstgelegenen Eckpunkt K des Vielecks μ , der in der Seite AB des Parallelogramms liegt und von dem die Seite KL des Vielecks μ ausgeht, die nicht in der Seite AB liegt.

Da das Vieleck μ konvex ist, meidet es die Halbebene bezüglich g_{KL} , die den Punkt A enthält (Abb. 10). Dann erzeugen die drei Geraden g_{BC} , g_{CD} und g_{KL} eine μ enthaltende Dreiecksfläche, deren Existenz wir nachweisen mussten.

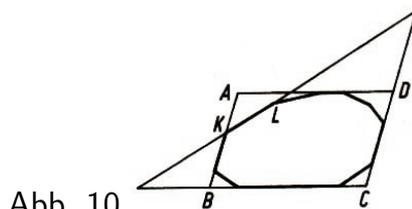


Abb. 10

Das Beispiel 9 ist deshalb besonders interessant, weil aus ihm mühelos die Lösung der folgenden Aufgabe folgt:

Aufgabe 7. Man zeige, dass die Fläche jedes von einem Parallelogramm verschiedenen Vielecks von drei ihrer gestauchten Bilder überdeckt werden kann.

Dieser Satz wurde zuerst von dem deutschen Geometer F. Levi im Jahre 1955 ausgesprochen; unabhängig von ihm wurde dieses Ergebnis von den Kisinjover Mathematikern I.Z. Gochberg und A.S. Markus bewiesen.

Da eine Parallelogrammfläche offensichtlich stets durch vier ihrer gestauchten Bilder überdeckt werden kann, aber niemals durch drei (Warum ?), ergibt sich somit der folgende Satz, den man Satz von Levi-Gochberg-Markus nennen kann.⁴

Es sei die Fläche eines konvexen Vielecks μ gegeben; die kleinste Anzahl ihrer gestauchten Bilder, mit denen man sie überdecken kann, ist 4 bzw. 3, je nachdem, ob es ein

⁴F. Levi sowie I.Z. Gochberg und A.S. Markus betrachteten nicht nur konvexe Vielecksflächen, sondern beliebige konvexe Figuren (vgl. [1], [2], [9]); aus der Gültigkeit des obigen Satzes folgt jedoch unmittelbar der entsprechende Satz für beliebige konvexe Figuren.

Parallelogramm ist oder nicht.

Von diesem Satz gehen sowohl F. Levi als auch I.Z. Gochberg und A.S. Markus zur entsprechenden stereometrischen Aufgabe über; dabei sprechen alle drei folgende Vermutung aus:

Die kleinste Anzahl gestauchter Bilder eines konvexen Polyeders μ , die μ vollständig überdecken, liegt zwischen 4 (sie ist gleich 4 z.B. für ein Tetraeder) und 8 (sie ist gleich 8 z.B. für einen Würfel); sie ist gleich 8 genau dann, wenn μ ein Parallelepiped ist.

An der Richtigkeit dieser Aussage zweifelt auch heute noch anscheinend keiner der an dieser Frage interessierten Gelehrten; jedoch ist es bisher niemandem gelungen, diese Behauptung zu beweisen, obwohl das viele bekannte Mathematiker versucht haben. Bezüglich dieses ganzen Problemkreises kann man dem Leser etwa [1] empfehlen.

Es gibt eine große Anzahl geometrischer Beweisaufgaben der verschiedensten Art, die mit der Methode der vollständigen Induktion gelöst werden können. In diesem Abschnitt werden wir jedoch nur noch einen Problemkreis berühren, der insbesondere deshalb interessant ist, weil er sich auf eines der berühmtesten Probleme, das sogenannte Vierfarbenproblem, konzentriert.

Dieser Problemkreis hängt mit den (mathematischen) Begriffen "Karte" und deren "regulärer Färbung" zusammen.

1.2.1 Aufgaben über Karten

In der Ebene sei ein Netz von Linien gegeben, die beliebige Punkte A_1, A_2, \dots, A_p ($p \geq 1$) verbinden und keine anderen gemeinsamen Punkte haben.

Wir nehmen weiter an, dass dieses Netz aus einem Stück besteht, d.h., dass man von jedem Punkt A_1, A_2, \dots, A_p zu jedem anderen Punkt gelangen kann, wenn man sich längs der Linien des Netzes bewegt (das Netz sei also "zusammenhängend").

Ein solches Netz werden wir eine Karte nennen, die gegebenen Punkte ihre Ecken⁵, die Abschnitte der Kurven zwischen zwei benachbarten Ecken Grenzen der Karte, die Teile der Ebene, in die sie zerlegt wird (einschließlich des unendlichen äußeren Gebiets), Länder der Karte. So stellen in Abb. 11 die Punkte A_1, A_2, \dots, A_8 die Ecken der Karte, die Kurven $A_1A_2, A_2A_7, A_1A_6, A_6A_7, A_1A_4, A_4A_3, A_3A_6, A_6A_5, A_5A_7, A_4A_8$ ihre Grenzen, die Gebiete $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und das unendliche äußere Gebiet σ ihrer Länder dar.

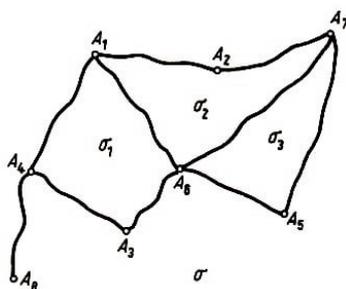


Abb. 11

⁵In der Graphentheorie sind auch die Bezeichnungen Eckpunkte, Knotenpunkte bzw. Knoten gebräuchlich. - Anm. d. Red.

Beispiel 9 (Satz von Euler). Wir bezeichnen die Anzahl der Länder einer beliebigen Karte mit s , die Anzahl ihrer Grenzen mit l und die Anzahl der Ecken mit p . Dann gilt $s + p = l + 2$.

Beweis (durch Induktion nach der Anzahl l der Kartengrenzen).

1. Es sei $l = 0$; dann ist $s = 1$, $p = 1$ (wegen $p \geq 1$ und $l = 0$); in diesem Fall gilt $s + p = l + 2$.

2. Wir setzen voraus, der Satz gelte für eine beliebige Karte, die n Grenzen hat, und betrachten eine Karte, die $l = n + 1$ Grenzen, s Länder und p Ecken enthält. Es sind zwei Fälle möglich:

a) Zu je zwei Ecken der Karte existiert genau ein Verbindungsweg längs der Kartengrenzen (mindestens ein solcher Weg existiert ja, da die Karte zusammenhängend ist). In diesem Fall enthält die Karte keinen einzigen geschlossenen Weg; daher hat sie die Gestalt, die Abb. 12 zeigt, und es ist $s = 1$.

Wir zeigen, dass sich auf einer solchen Karte mindestens eine Ecke befindet, die nur einer einzigen Grenze angehört, eine sogenannte äußere Ecke (wie A_1 in Abb. 12).

Wir wählen eine beliebige Ecke der Karte. Ist sie keine äußere Ecke, dann gehört sie zu wenigstens zwei Grenzen. Wir bewegen uns auf einer dieser Grenzen bis zu ihrer zweiten Ecke. Ist auch diese Ecke keine äußere, dann endet in ihr noch eine andere Grenze; wir bewegen uns auf dieser Grenze zu ihrem zweiten Ende usw.

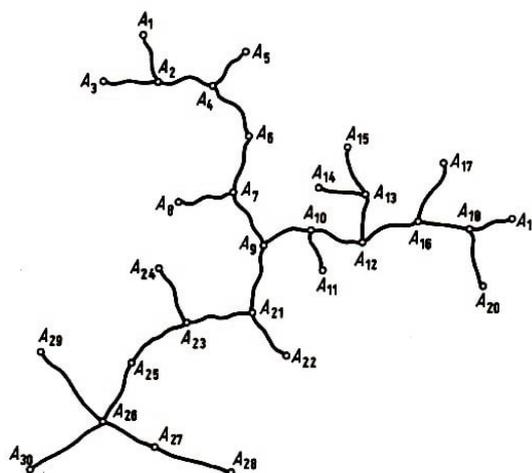


Abb. 12

Da die Karte nach Voraussetzung keine geschlossenen Wege enthält, kommen wir zu keiner der früher berührten Ecken zurück; da die Karte nur endlich viele Ecken hat, kommen wir schließlich zu einer äußeren Ecke.

Wir entfernen diese Ecke und diejenige Grenze, die diese Ecke als Endpunkt hat, und bekommen eine neue Karte, in der $l' = l - 1 = n$, $s' = s$ und $p' = p - 1$ ist, wobei diese neue Karte zusammenhängend bleibt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $s' + p' = l' + 2$, woraus $s + p = l + 2$ folgt.

b) Es existieren zwei Ecken, die durch wenigstens zwei Wege verbunden sind (Abb. 11). In diesem Fall existiert auf der Karte wenigstens ein geschlossener Weg, der durch diese

Ecken geht. Entfernen wir eine der Grenzen dieses Weges (ohne Ecken), so erhalten wir eine neue zusammenhängende Karte, in welcher $l' = l - 1 = n$, $p' = p$, $s' = s - 1$ ist. Nach Voraussetzung gilt $s' + p' = l' + 2$, woraus wieder $s + p = l + 2$ folgt.

Beispiel 10. Man beweise: Gehen von jeder Ecke einer Karte mindestens drei Grenzen aus (enthält also die Karte keine Ecken wie A_2, A_3, A_5, A_8 in Abb. 13), so gibt es ein Land mit höchstens fünf Grenzen.

Lösung. Da von jeder der p Ecken der Karte nicht weniger als drei Grenzen ausgehen und da jede Grenze zwei Ecken verbindet, gilt

$$\frac{3p}{2} \leq l \quad (4)$$

Wir nehmen jetzt an, jedes der s Länder habe wenigstens sechs Grenzen; da jede Grenze höchstens zwei Länder trennt, würde

$$\frac{6s}{2} \leq l \quad (5)$$

gelten. Die Ungleichungen (4) und (5) ergeben

$$s + p \leq \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}l = l$$

im Widerspruch zum Satz von Euler. Also ist unsere Annahme, jedes Land habe wenigstens sechs Grenzen, falsch.

Aufgabe 8. In einer Ebene seien fünf Punkte gegeben. Man beweise, dass es nicht möglich ist, in dieser Ebene jeden dieser Punkte mit jedem anderen Punkt zu verbinden, ohne dass sich Linien schneiden (Abb. 13).

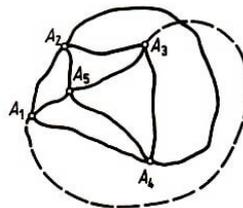


Abb. 13

Andere Beispiele der Anwendung des Satzes von Euler über Karten findet der Leser in [5] bzw. [15].

Aufgabe 9 (Eulerscher Polyedersatz). Man beweise, dass $s + p = l + 2$ gilt, wenn p die Anzahl der Ecken, l die Anzahl der Kanten und s die Anzahl der Seitenflächen eines konvexen Polyeders ist.⁶

Aufgabe 10. Man beweise, dass jedes konvexe Polyeder drei- oder vier- oder fünfeckige Flächen enthält.

Aufgabe 11. Man beweise, dass kein konvexes Polyeder mit sieben Kanten existiert.

⁶Dieser Satz war schon dem französischen Philosophen, Mathematiker und Physiker René Descartes (1596-1650) bekannt.

1.2.2 Färbungsprobleme

In einer Ebene sei eine beliebige Karte gegeben. Wir nennen sie regulär gefärbt, wenn jedes ihrer Länder mit einer bestimmten Farbe gefärbt ist, und zwar so, dass je zwei Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.

Als Beispiel einer regulär gefärbten Karte kann jede geographische Karte dienen. Selbstverständlich kann jede Karte regulär gefärbt werden, wenn man soviel Farben verwendet, wie Länder existieren; jedoch ist eine solche Färbung nicht ökonomisch.

Uns interessiert die minimale Anzahl der Farben, die zur regulären Färbung einer Karte notwendig ist. Offenbar kann man z.B. die in Abb. 14a dargestellte Karte mit zwei Farben regulär färben; für eine reguläre Färbung der Karte, die in Abb. 14b dargestellt ist, sind schon drei Farben nötig; die Karte, die in Abb. 14c dargestellt ist, kann man nur mit vier Farben regulär färben. Bis jetzt wurde noch keine Karte gefunden, die man nicht mit vier Farben hätte regulär färben können.

Als erster lenkte vor mehr als hundert Jahren der bedeutende deutsche Mathematiker A. F. Möbius die Aufmerksamkeit auf diese Tatsache. Bis jetzt haben viele bedeutende Gelehrte versucht, das Vierfarbenproblem zu lösen, d.h. entweder zu beweisen, dass vier Farben zur Färbung jeder Karte ausreichen, oder ein Beispiel für eine Karte zu finden, die nicht mit vier Farben regulär gefärbt werden kann.

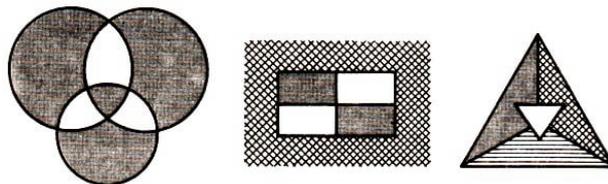


Abb. 14 a) b) c)

Bisher ist dies jedoch niemandem auf herkömmliche Weise gelungen.⁷

Man konnte nur beweisen, dass zur regulären Färbung jeder Karte in jedem Fall fünf Farben ausreichen (vgl. Beispiel 14). Es ist nicht schwer, solche Bedingungen zu finden, unter denen man eine Karte mit zwei (Beispiel 12) oder mit drei Farben (Beispiel 13) regulär färben kann. Wir beweisen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann (Beispiel 15): die Frage,

⁷Die Vermutung, dass für jede denkbare Landkarte vier Farben genügen, wurde wahrscheinlich zuerst von dem Londoner Mathematikstudenten Francis Guthrie 1852 ausgesprochen, aber erst 1878 durch eine Anfrage auf einer Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft richtig bekannt. Daraufhin gaben A. B. Kempe und P. G. Tait 1879 bzw. 1880 je einen "Beweis" an, die jedoch fehlerhaft waren. Der Fehler Kempes wurde erst 1890 durch P. J. Heawood entdeckt; er konnte jedoch den Fünffarbensatz beweisen. Trotz vielfältiger Lösungsversuche, bei denen u.a. die Graphentheorie ganz wesentlich weiterentwickelt wurde, blieb das Vierfarbenproblem ungelöst. Nach Vorarbeiten von H. Heesch konnten Wolfgang Haken und Kenneth Appel mit Hilfe aufwendiger Computerrechnung (mehr als 1000 Rechnerstunden!) an der Universität von Illinois in Urbana (USA) die ursprüngliche Vermutung bestätigen; der angegebene Beweis umfasst 56 Seiten Text und 114 Seiten Abbildungen, mehr als 30 Abbildungen je Seite. Die Grundlage bildet die sogenannte Entladungstheorie. Trotz dieses Resultates geht jedoch die Suche nach einem computerunabhängigen Beweis des Satzes von Kempe-Heesch-Appel-Haken weiter.

ob diese Bedingung von jeder beliebigen Karte erfüllt wird oder ob es eine Karte gibt, die sie nicht erfüllt, bleibt hier offen.

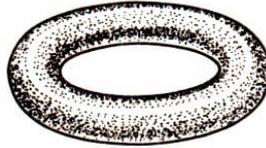


Abb. 15

Es ist interessant zu bemerken, dass für einige Flächen, die anscheinend komplizierter sind als die Ebene, das Problem der Färbung von Karten völlig gelöst ist. So ist z.B. bewiesen, dass auf einem "Autoschlauch" oder auf einem Torus (Abb. 15) zur regulären Färbung einer beliebigen Karte sieben Farben ausreichen, und es existieren Karten, die man mit sechs Farben nicht regulär färben kann.⁸

Im weiteren werden wir voraussetzen, die Karte enthalte keine nichttrennenden Grenzen, d.h. Grenzen, zu deren beiden Seiten ein und dasselbe Land liegt (wie die Grenze A_4A_8 in Abb. 11), weil anderenfalls die Aufgabenstellung über die reguläre Färbung keinen Sinn hätte.

Wir werden ferner voraussetzen, die Karte enthalte keine Ecken, von denen nur zwei Grenzen ausgehen (wie die Ecke A_2 in Abb. 11), da eine solche Ecke überflüssig ist. Mit anderen Worten, wir werden nur solche Karten betrachten, von deren Ecken mindestens drei Grenzen ausgehen, d.h. Karten, die der Bedingung des Beispiels 10 genügen; das Resultat dieses Beispiels wird im weiteren oftmals benutzt werden.⁹

⁸Im Jahre 1959 hat der deutsche Geometer G. Ringel (vgl. [15]) Resultate veröffentlicht, die der endgültigen Lösung des Problems der Färbung von Karten auf einer beliebigen, von der Ebene und von der Kugel verschiedenen Fläche nahekommen. Die kleinste Zahl von Farben, die zur regulären Färbung der Oberfläche eines Körpers notwendig ist, der wie ein "Kugelkörper mit p durchgehenden Löchern" gebaut ist, wird nach Ringel durch die verhältnismäßig komplizierte Formel

$$\left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right]$$

gegeben. Dabei bezeichnen die eckigen Klammern den ganzen Teil der eingeklammerten Zahl. So ist für den Torus (Abb. 15), der ein "Loch" hat, diese Zahl gleich

$$\left[\frac{7 + \sqrt{49}}{2} \right] = \left[\frac{14}{2} \right] = 7$$

für die "Brezel" mit zwei Löchern (Abb. 16) lautet sie



Abb. 16

$$\left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48 \cdot 2}}{2} \right] = \left[\frac{7\sqrt{97}}{2} \right] = \left[\frac{16,8\dots}{2} \right] = 8$$

⁹Bezüglich der regulären Färbung einer Karte stellt diese Voraussetzung aus folgenden Gründen keine Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen dar: Wenn von einer Ecke A nur zwei Grenzen ausgehen, die zu verschiedenen Ecken B und C führen, dann ist A offenbar überflüssig.

Für uns wird es außerdem vorteilhaft sein, vorauszusetzen, dass sich auf der Karte nur ein einziges unendliches Gebiet befindet, d.h., dass die Karte keine Grenzen hat, "die ins Unendliche gehen"; man kann zeigen, dass der Verzicht auf diese Bedingung keine einzige der folgenden Schlussfolgerungen ändert.

Eine Karte, in der von jeder Ecke genau drei Grenzen ausgehen, werden wir normal nennen. Es sei eine beliebige Karte S (Abb. 17a) gegeben. Um jede Ecke dieser Karte, von der mehr als drei Grenzen ausgehen, ziehen wir einen hinreichend kleinen Kreis und fügen ihn einem der Länder hinzu, die an diese Ecke grenzen.

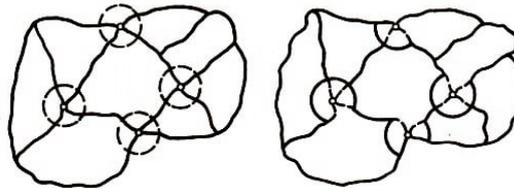


Abb. 17 a) b)

Wir erhalten dadurch eine normale Karte S' mit ebensoviel Ländern (Abb. 17b). Aus jeder regulären Färbung der Karte S' lässt sich aber leicht eine reguläre Färbung der Karte S mit derselben Anzahl Farben gewinnen und umgekehrt. Aus diesem Grunde werden wir uns bei dem Problem der regulären Färbung von Karten oft auf die Betrachtung normaler Karten beschränken.

Wir untersuchen jetzt die Struktur der einfachsten normalen Karten.¹⁰

Es sei p die Anzahl der Ecken, l die Anzahl der Grenzen und s die Anzahl der Länder einer normalen Karte; dann gilt $2l = 3p$, woraus $p = \frac{2}{3}l$ folgt. Außerdem gilt nach dem Satz von Euler $s + p = l + 2$, also $s = (l - p) + 2 = \frac{l}{3} + 2$, und daraus folgt $s \geq 2$. Für $s = 2$ findet man aber $l = 0$; so kann aber eine normale Karte offenbar nicht beschaffen sein.

Wählen wir $s = 3$, so erhalten wir $l = 3$ und $p = 2$; diese einfachste normale Karte hat die in Abb. 18a dargestellte Form. Für $s = 4$ erhalten wir $l = 6$ und $p = 4$. Wir zeigen, dass die Karte in diesem Fall die in Abb. 18b oder c dargestellte Form hat.

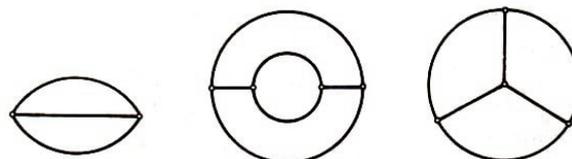


Abb. 18 a) b) c)

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit k_2 die Anzahl der Zweiecke der Karte, mit k_3 die Anzahl ihrer Dreiecke und mit k_4 die Anzahl der Vierecke (da $p = 4$ ist, kann die Karte

Anderenfalls entsteht bei der Beseitigung von A eine sogenannte Schlinge; man kann zunächst diese Schlinge und das von ihr umschlossene Land beseitigen, wobei eine Karte entsteht, zu deren regulären Färbung ebenso viele Farben nötig sind wie für die ursprüngliche Karte. - Anm. d. Red.

¹⁰Hier und im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen Karten gleicher Struktur (wie sie Abb. 14c und 27a zeigen), deren Länder und Grenzen man so nummerieren kann, dass in beiden Karten gleich nummerierte Länder durch gleich nummerierte Grenzen getrennt werden.

keine Länder mit mehr als vier Ecken haben). Dann ist

$$k_2 + k_3 + k_4 = s = 4 \quad \text{und} \quad 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, dass k_3 geradzahlig ist. Die Summe $k_2 + k_3 + k_4$, die ja gleich 4 ist, kann bis auf die Reihenfolge der Summanden die Form $2 + 2 + 0$; $2 + 1 + 1$; $3 + 1 + 0$; $4 + 0 + 0$ haben. Wir betrachten diese Fälle einzeln.

Sind zwei der Werte k gleich 2 und ist einer gleich 0, dann ist für $k_2 = 2, k_3 = 2, k_4 = 0$ die Summe $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 10 < 12$;

für $k_2 = 2, k_3 = 0, k_4 = 2$ ist $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$ - diesem Fall entspricht die Karte, die in Abb. 18b dargestellt ist;

für $k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = 2$ ist $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 14 > 12$.

Ist einer der Werte k gleich 2 und sind zwei gleich 1, dann hat nur für $k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 1$ die Summe $2k_2 + 3k_3 + 4k_4$ den Wert 12; eine solche Karte existiert, sie ist aber nicht normal (Abb. 19).

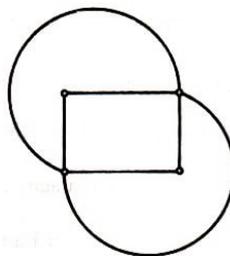


Abb. 19

Ist einer der Werte k gleich 3 und einer gleich 1, so muss $k_3 = 0$ sein, da k_3 geradzahlig ist; dann ist $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 \neq 12$.

Ist schließlich einer der Werte k gleich 4 und sind die restlichen 0, so ist nur für $k_2 = k_4 = 0, k_3 = 4$ die Summe $2k_2 + 3k_3 + 4k_4$ gleich $2l = 12$; die entsprechende Karte hat dann die in Abb. 18c dargestellte Form.

Manchmal werden wir nicht nur die Länder, sondern auch die Grenzen einer Karte färben; dabei werden wir die Farben, mit denen die Grenzen gefärbt sind, mit Ziffern 1, 2, 3, ... bezeichnen. Wenn alle Grenzen, die von ein und derselben Ecke ausgehen, bei dieser Nummerierung verschiedene Nummern erhalten, nennen wir die Nummerierung der Grenzen der Karte regulär (vgl. etwa Abb. 20).

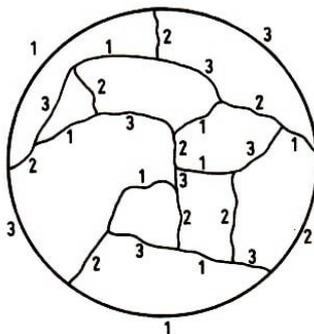


Abb. 20

Wir weisen darauf hin, dass das Problem, die Ecken einer Karte so zu nummerieren, dass "benachbarte" Ecken, d.h. Ecken, die durch eine Grenze verbunden sind, verschiedene

Nummern erhalten, ebenfalls mit dem Problem der regulären Färbung der Länder einer Karte zusammenhängt (vgl. [5], dort kann der Leser auch andere Beweise für viele der hier genannten Sätze finden).

Beispiel 11. In einer Ebene seien n Kreise gegeben. Man beweise, dass man bei beliebiger Anordnung dieser Kreise die so entstandene Karte mit zwei Farben regulär färben kann.

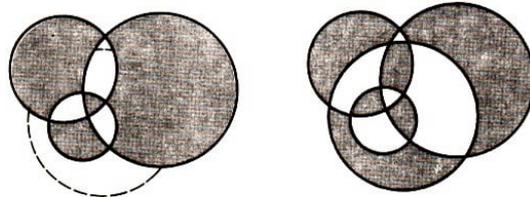


Abb. 21 a)

b)

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Karte, die von n Kreisen gebildet wird, richtig. In einer Ebene seien $n + 1$ Kreise gegeben. Entfernen wir einen dieser Kreise, so erhalten wir eine Karte, die man nach Induktionsvoraussetzung mit zwei Farben regulär färben kann, z.B. mit Schwarz und Weiß (Abb. 21 a).

Danach fügen wir den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und ändern auf der einen seiner Seiten (etwa in seinem Inneren) die Farbe jedes Gebietes in die entgegengesetzte (d.h. schwarz in weiß und umgekehrt); es ist leicht zu sehen, dass wir dabei eine Karte erhalten, die mit zwei Farben regulär gefärbt ist (Abb. 21 b).

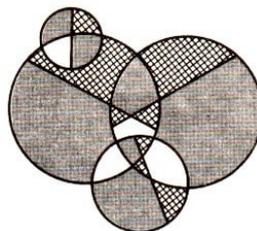


Abb. 22

Aufgabe 12. In einer Ebene seien n Kreise gegeben. Durch jeden der Kreise wird eine Sehne gelegt. Man zeige, dass die so entstandene Karte mit drei Farben regulär gefärbt werden kann (Abb. 22).

Beispiel 12 (Zweifarbensatz). Eine Karte kann mit zwei Farben genau dann regulär gefärbt werden, wenn von jeder ihrer Ecken eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht.

Lösung. Die Bedingung ist offenbar notwendig; denn würde von irgendeiner Ecke einer Karte eine ungerade Anzahl von Grenzen ausgehen, dann könnten schon die an diese Ecke angrenzenden Länder nicht mit zwei Farben regulär gefärbt werden (Abb. 23).

Den Beweis, dass die Bedingung hinreichend ist, führen wir durch Induktion nach der Anzahl der Grenzen der Karte.

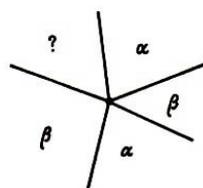
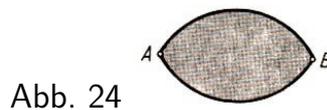


Abb. 23

1. Für eine Karte mit zwei Grenzen ist die Behauptung trivial (Abb. 24).
2. Wir setzen voraus, der Satz sei für alle Karten, in denen von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht und bei denen die Gesamtzahl der Grenzen n nicht überschreitet, richtig. Es sei eine Karte S gegeben, die $n + 1$ Grenzen hat und derselben Bedingung genügt.

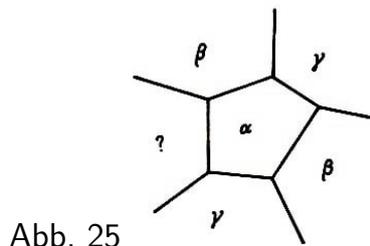


Wir beginnen mit einer beliebigen Ecke A der Karte S und bewegen uns in beliebiger Richtung längs der Grenzen der Karte. Da die Karte endlich viele Ecken hat, kommen wir schließlich in eine schon durchlaufene Ecke zurück. (Die Karte hat ja keine äußeren Ecken, da es keine nichttrennenden Grenzen gibt.)

Somit können wir einen sich nicht überschneidenden geschlossenen Weg herausnehmen, der aus Grenzen der Karte besteht. Auf diese Weise erhalten wir eine Karte S' mit weniger Grenzen, in der ebenfalls von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht, weil jede Ecke der Karte um eine gerade Anzahl von Grenzen - 0 oder 2 - verringert wird.

Nach Induktionsvoraussetzung kann man die Karte S' mit zwei Farben regulär färben. Fügen wir den herausgenommenen Weg hinzu und ändern wir etwa im Inneren des Weges alle Farben, so erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte S .

Beispiel 13 (Dreifarbensatz). Eine normale Karte kann genau dann mit drei Farben regulär gefärbt werden, wenn jedes ihrer Länder eine gerade Anzahl von Grenzen besitzt.



Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig; denn hätte die Karte ein Land s mit einer ungeraden Anzahl von Grenzen, dann wäre es schon unmöglich, s und die angrenzenden Länder mit drei Farben regulär zu färben (Abb. 25).

Den Beweis, dass die Bedingung hinreichend ist, führen wir durch Induktion nach der Anzahl n der Länder der Karte.

1. Für eine normale Karte, die aus drei Ländern besteht (Abb. 18a), ist der Satz richtig. Die normale Karte, die aus vier Ländern besteht und die in Abb. 18b dargestellt ist, kann schon mit drei Farben regulär gefärbt werden (es genügt, das "innere" Land mit derselben Farbe zu färben wie das äußere); die normale Karte, die in Abb. 18c dargestellt ist, genügt nicht der Bedingung, dass die Anzahl der Grenzen jedes Land gerade ist.

Somit kann jede normale Karte mit drei oder vier Ländern, bei der jedes Land eine gerade Anzahl von Grenzen hat, mit drei Farben regulär gefärbt werden.

2. Wir setzen voraus, der Satz sei für jede normale Karte richtig, bei der jedes Land der Karte eine gerade Anzahl von Grenzen besitzt und bei der Gesamtzahl der Länder $n - 1$ oder n ist.

Wir betrachten eine normale Karte S , die ebenfalls dieser Bedingung genügt und $n + 1$ Länder besitzt. Wie aus Beispiel 10 folgt, existiert auf der Karte S ein Land σ , das nicht mehr als fünf Grenzen hat. In unserem Fall wird σ entweder zwei oder vier Grenzen besitzen. Wir betrachten diese Fälle einzeln.

A. Das Land σ habe zwei Grenzen. Es seien A und B Ecken dieses Landes, σ_1 und σ_2 die Nachbarländer von σ (Abb. 28).

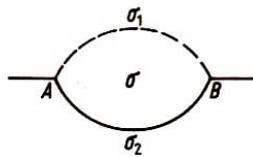


Abb. 26

Entfernt man die Grenze zwischen den Ländern σ und σ_1 sowie die Ecken A und B , so erhält man eine Karte S' . Diese ist eine normale Karte, da von ihren Ecken Grenzen in der ursprünglichen Anzahl ausgehen.

Jedes Land der Karte S' besitzt sogar eine gerade Anzahl von Grenzen; denn die Anzahl der Grenzen von jedem der Länder σ_1 und σ_2 wurde um 2 verringert, während sich die Anzahl der Grenzen der übrigen Länder nicht geändert hat. Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n ist, kann man sie nach Induktionsvoraussetzung mit drei Farben α, β, γ regulär färben.

Die Länder $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma$ und $\sigma'_2 = \sigma_2$ seien mit α bzw. β gefärbt. Stellen wir das Gebiet σ wieder her und färben es mit der Farbe γ , so erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte S .

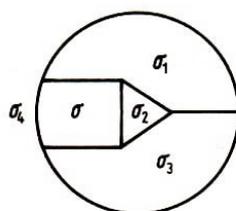
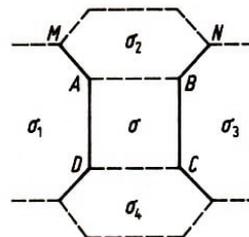


Abb. 27 a)



b)

B. Das Land σ besitze vier Grenzen. Es kann vorkommen, dass gegenüberliegende Grenzen von σ zu Ländern mit einer gemeinsamen Grenze (σ_1 und σ_3 in Abb. 27a) oder sogar zu einem einzigen Land (Abb. 18b) gehören.

Die übrigen Grenzen gehören zu zwei Ländern, die nicht aneinander grenzen. Es seien σ_2 und σ_4 solche Länder (Abb. 27 b).

Wir gliedern die Länder σ_2 und σ_4 an σ an, indem wir die Grenzen AB und CD entfernen. So erhalten wir eine Karte S' , die offenbar sogar eine normale Karte ist. Auch auf dieser Karte hat jedes Land eine gerade Anzahl von Grenzen.

Ist nämlich die Anzahl der Grenzen des Landes σ_1 gleich $2k_1$ die Anzahl der Grenzen

des Landes σ_2 gleich $2k_2$, die Anzahl der Grenzen des Landes σ_3 gleich $2k_3$ und die Anzahl der Grenzen des Landes σ_4 zu gleich $2k_4$, dann hat das Land $\sigma' = \sigma \cup \sigma_2 \cup \sigma_4$ offenbar $2k_2 + 2k_4 - 4$ Grenzen.

Bezeichnen σ_1 und σ_3 verschiedene Länder, dann hat das Land $\sigma'_1 = \sigma_1$ offenbar $2k_1 - 2$ Grenzen und das Land $\sigma'_3 = \sigma_3$ offenbar $2k_3 - 2$ Grenzen; bezeichnen σ_1 und σ_3 das gleiche Land, dann wird dieses Land auf der Karte S' vier Grenzen weniger besitzen als auf der Karte S . Die Anzahl der Grenzen der übrigen Länder ändert sich nicht.

Die Karte S' hat $n - 1$ Länder, folglich kann sie nach Induktionsvoraussetzung mit drei Farben α, β, γ regulär gefärbt werden.

Wir zeigen nun, dass dabei die Länder σ'_1 und σ'_3 mit ein und derselben Farbe gefärbt werden können. Das ist klar, wenn σ'_3 und σ'_1 das gleiche Land bezeichnen.

Anderenfalls sei das Land σ' mit der Farbe α und das Land σ'_1 mit der Farbe β gefärbt. Da längs des Abschnittes MN von σ' eine ungerade Anzahl $2k_2 - 3$ von Ländern liegt und die Farben dieser Länder in der Reihenfolge $\gamma, \beta, \gamma, \beta, \dots, \gamma$ abwechseln müssen, wird das Land σ'_3 mit der Farbe β gefärbt. Wir stellen das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe γ , während σ_2 und σ_4 die Farbe α behalten. So erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte S .

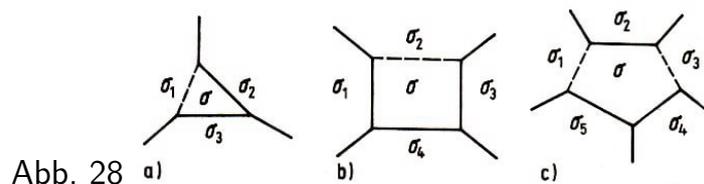
Beispiel 14 (Fünffarbensatz). Man kann jede normale Karte mit fünf Farben regulär färben.

Beweis. 1. Für Karten, die nicht mehr als fünf Länder haben, ist die Behauptung offensichtlich richtig.

2. Wir setzen voraus, der Satz sei für alle normalen Karten mit $n - 1$ oder mit n Ländern gültig, und betrachten eine Karte S , die aus $n + 1$ Ländern besteht. Wie in Beispiel 10 gezeigt wurde, enthält die Karte S wenigstens ein Land σ mit höchstens fünf Grenzen. Im folgenden betrachten wir alle dabei möglichen Fälle.

a) Das Land σ besitze zwei Grenzen (Abb. 26). Es seien σ_1 und σ_2 die zu σ benachbarten Länder. Gliedern wir das Land σ_1 an σ an, so erhalten wir eine normale Karte S' mit n Ländern. Nach Induktionsvoraussetzung kann die Karte S' mit fünf Farben regulär gefärbt werden.

Die Länder $\sigma'_1 = \sigma \cup \sigma_1$ und $\sigma'_2 = \sigma_2$ werden dabei mit zwei der fünf möglichen Farben gefärbt. Stellen wir das Land σ wieder her, so können wir es sogar mit einer der drei übrigen Farben färben.



b) Das Land σ besitze drei Grenzen (Abb. 28a). Wir gliedern σ_1 an σ an. Wenn wir die so entstehende Karte S' mit fünf Farben färben, dann können wir später das Gebiet σ mit einer der beiden Farben färben, die nicht bei der Färbung der Länder $\sigma'_1 = \sigma \cup \sigma_1$,

$\sigma'_2 = \sigma_2$, $\sigma'_3 = \sigma_3$ verwendet wurden.

c) Das Land σ besitze vier Grenzen (Abb. 28b). Es gibt zwei an σ anliegende Länder, die keine gemeinsame Grenze haben (vgl. Beispiel 13). Wir gliedern eines dieser Länder, etwa σ_2 , an σ an und erhalten eine aus n Ländern bestehende Karte S' , die nach Induktionsvoraussetzung mit fünf Farben regulär gefärbt werden kann.

Dabei sind die Länder $\sigma'_1 = \sigma_1$, $\sigma'_2 = \sigma_2 \cup \sigma$, $\sigma'_3 = \sigma_3$ und $\sigma'_4 = \sigma_4$ mit höchstens vier der fünf Farben gefärbt (wenn σ'_1 und σ'_3 das gleiche Land bezeichnen, sind σ'_1 , σ'_2 und σ'_4 , mit drei Farben regulär gefärbt). Belassen wir σ_2 in der Farbe von σ'_2 , dann brauchen wir σ nur mit einer von den Farben von σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 verschiedenen Farbe zu färben.

d) Das Land σ besitze fünf Grenzen (Abb. 28c). Wie in Beispiel 13 gibt es zwei zu σ benachbarte Länder, die nicht aneinander grenzen und nicht zusammenfallen. Es seien σ_1 und σ_3 solche Länder. Gliedern wir diese beiden Länder an σ an, so erhalten wir eine normale Karte S' , die $n - 1$ Länder besitzt. Nach Induktionsvoraussetzung kann die Karte S' mit fünf Farben regulär gefärbt werden.

Dabei werden die Länder $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma \cup \sigma_3$, $\sigma'_2 = \sigma_2$, $\sigma'_4 = \sigma_4$ und $\sigma'_5 = \sigma_5$ mit irgendwelchen vier der fünf Farben gefärbt. Stellen wir das Land σ wieder her, so können wir es mit der fünften Farbe färben.

Aufgabe 13. Auf einem Globus sind Staaten verteilt, wobei einige aus einem einzigen Teil und andere aus zwei Teilen (ohne gemeinsame Grenzen) bestehen. Man färbe die Karte dieses Planeten regulär, und zwar derart, dass das Territorium jedes Staates, unabhängig davon, ob er aus einem Teil oder aus zwei Teilen besteht, mit einer einzigen Farbe gefärbt wird und dass Staaten mit gemeinsamer Grenze mit verschiedenen Farben gefärbt werden.

Man beweise, dass dies immer möglich ist, wenn man zwölf Farben zur Verfügung hat, dass jedoch elf Farben zu diesem Zweck nicht immer ausreichen.

Beispiel 15 (Satz von Volynskij)¹¹. Eine normale Karte kann genau dann mit vier Farben regulär gefärbt werden, wenn sich ihre Grenzen mit drei Ziffern regulär nummerieren lassen.

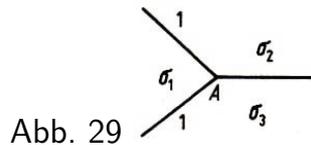
Lösung. A. Wenn eine normale Karte mit vier Farben regulär färbbar ist, kann man ihre Grenzen mit drei Ziffern regulär nummerieren.

Die normale Karte S sei mit den vier Farben α , β , γ , δ regulär gefärbt. Wir bezeichnen mit Ziffer 1 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben α und β bzw. mit den Farben γ und δ gefärbt sind, mit Ziffer 2 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben α und γ bzw. mit den Farben β und δ gefärbt sind, und mit Ziffer 3 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben α und δ bzw. mit den Farben β und γ gefärbt sind.

Die erhaltene Nummerierung der Grenzen ist regulär. Denn gingen von einer beliebigen Ecke A zwei Grenzen aus, die mit ein und derselben Ziffer (z.B. mit Ziffer 1, Abb. 29) bezeichnet sind, dann müssten die Länder σ_2 und σ_3 die vom Land σ_1 durch Grenzen

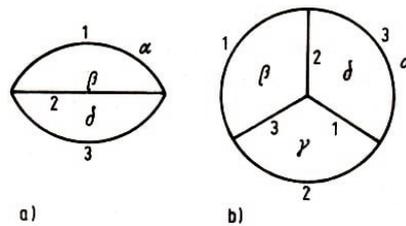
¹¹V.V. Volynskij (1923-1943), sowjetischer Mathematiker.

derselben Ziffer abgegrenzt sind ein und dieselbe Farbe haben. (Wenn σ_1 in unserem Beispiel die Farbe α hat, werden σ_2 und σ_3 mit der Farbe β gefärbt.) Das kann aber nicht sein, da σ_2 und σ_3 in einer normalen Karte aneinander grenzen.



B. Wenn man die Grenzen einer normalen Karte mit drei Ziffern regulär nummerieren kann, dann kann man ihre Länder mit vier Farben regulär färben. Den Beweis dieser Behauptung führen wir durch Induktion nach der Anzahl n der Länder der Karte.

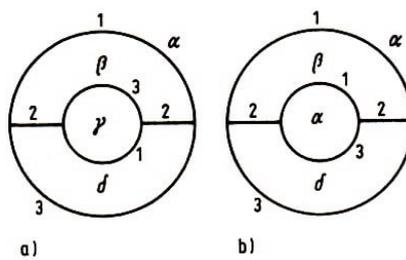
1. Die Grenzen der einfachsten normalen Karte mit drei Ländern (Abb. 18a) kann man eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mit den Ziffern 1, 2, 3 nummerieren. Wir betrachten die Karte, die Abb. 30a zeigt. Dabei hat die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben α und β gefärbt sind, die Nummer 1, die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben β und δ gefärbt sind, die Nummer 2 und die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben α und δ gefärbt sind, die Nummer 3.



Eine reguläre Färbung einer Karte S mit den vier Farben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bei der die Grenzen zwischen den Farben α und β und zwischen den Farben γ und δ die Nummer 1, die Grenzen zwischen den Farben α und γ und zwischen den Farben β und δ die Nummer 2 und die Grenzen zwischen den Farben α und δ und zwischen den Farben β und γ die Nummer 3 besitzen, nennen wir zulässig.

Wir haben gezeigt, dass man die einfachste normale Karte, die aus drei Ländern besteht, zulässig mit vier Farben regulär färben kann. Wir zeigen nun, dass dies auch für normale Karten mit vier Ländern zutrifft (Abb. 18b und c).

Die Grenzen der Karte, die in Abb. 18b dargestellt ist, kann man eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mit den Ziffern 1, 2, 3 regulär nummerieren (Abb. 30b). Die Färbung dieser Karte, die in Abb. 30b gezeigt ist, ist zulässig. Die Karte, die in Abb. 30b dargestellt ist, gestattet zwei wesentlich verschiedene Nummerierungen der Grenzen (Abb. 31a und 31b). Die Färbung dieser Karten, die in Abb. 31a und b gezeigt werden, ist ebenfalls zulässig.



2. Wir setzen voraus, dass jede normale Karte, deren Grenzen durch Ziffern regulär nummeriert sind und die aus $n - 1$ oder n Ländern besteht, mit vier Farben zulässig gefärbt werden kann. Jetzt betrachten wir eine normale Karte S , die aus $n + 1$ Ländern besteht und deren Grenzen durch drei Ziffern regulär nummeriert werden können. Wie wir in Beispiel 10 sahen, gibt es auf der Karte S ein Land σ , das höchstens fünf Grenzen besitzt.

Wir betrachten nun die verschiedenen Unterfälle einzeln.

a) Das Land σ besitze zwei Grenzen. Die einzig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mögliche Nummerierung der Grenzen in der Umgebung von σ ist in Abb. 32a dargestellt.

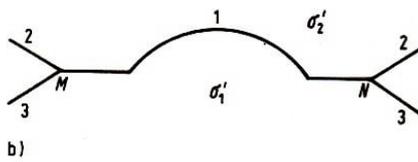
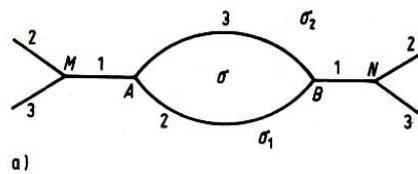


Abb. 34

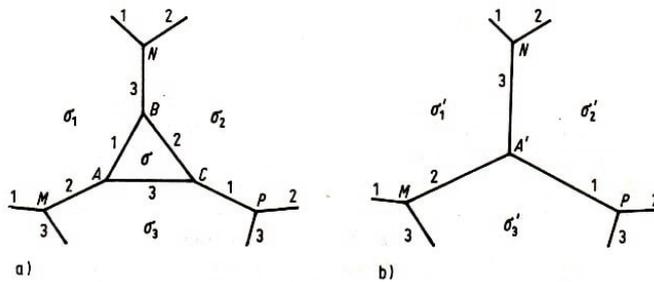


Abb. 32,33

Wir gliedern das Land σ_1 dem Land σ an; die neue Grenze MN , die die Länder $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma$ und $\sigma'_2 = \sigma_2$ (Abb. 32b) trennt, trägt die Nummer 1; die Nummern der übrigen Grenzen lassen wir unverändert.

Die entstandene Karte S' ist normal. Ihre Grenzen sind mit drei Ziffern regulär nummeriert. Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben, wobei das Land σ'_2 die Farbe β hat, wenn das Land σ'_1 die Farbe α besitzt. Stellen wir das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe γ , so erhalten wir eine zulässige Färbung der Karte S mit vier Farben.

b) Das Land σ besitze drei Grenzen. Die einzig mögliche Nummerierung der Grenzen in der Umgebung von σ zeigt Abb. 33a. Wir stellen uns vor, die Karte S sei auf einer Gummihaut aufgezeichnet, und ziehen das Land σ in einem Punkt zusammen. Dabei gehen die Grenzen AB , BC und AC verloren und die Ecken A , B und C fallen in einer Ecke A' zusammen (Abb. 33 b).

Vertauscht man die Nummerierung der Grenzen MA' , NA' , PA' (ehemals MA , NB , PC) und aller übrigen Grenzen nicht, so erhält man eine normale Karte S' mit regulär nummerierten Grenzen. Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n ist, kann man

sie mit vier Farben regulär färben.

Wenn das Land σ'_1 mit der Farbe α gefärbt wird, muss das Land σ'_2 die Farbe δ und das Land σ'_3 die Farbe γ besitzen. Wir stellen das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe β . So erhalten wir eine zulässige Färbung der Karte S .

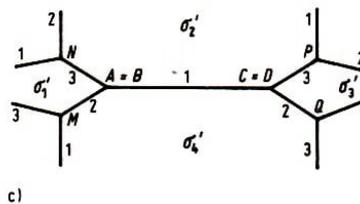
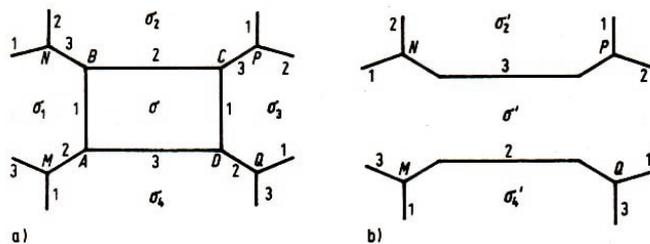
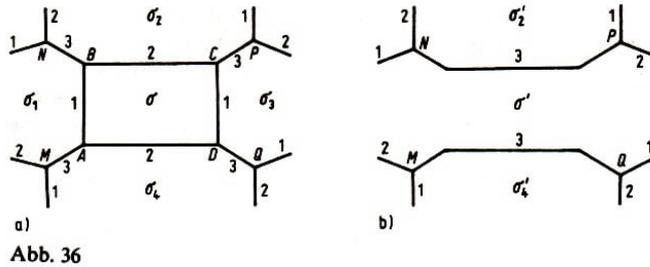


Abb. 34,35

c) Das Land σ besitze vier Grenzen. In diesem Fall sind zwei wesentlich verschiedene Nummerierungen der Grenzen in der Umgebung des Landes σ möglich (Abb. 34a und 35a). Zunächst betrachten wir den ersten Fall.

Es gibt zwei zu σ benachbarte Länder, die keine gemeinsamen Grenzen haben (vgl. Beispiel 13). Da die beiden Paare gegenüberliegender Länder σ_1, σ_3 und σ_2, σ_4 im Sinne der Nummerierung der Grenzen gleichberechtigt sind, können wir annehmen, dass die Länder σ_1 und σ_3 keine gemeinsamen Grenzen haben.

Wir gliedern an σ die Länder σ_1 und σ_3 an. Die neuen Grenzen NP und MQ erhalten die Nummer 3 (Abb. 34b). Die entstandene Karte S' ist normal mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich $n - 1$ ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben; dabei muss man die Länder $\sigma'_2 = \sigma_2$ und $\sigma'_4 = \sigma_4$ mit der Farbe δ färben, wenn man das Land $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$ mit der Farbe α färbt. Wir stellen das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe β .

Im zweiten Fall (Abb. 35a), wenn die Länder σ_1 und σ_3 keine gemeinsamen Grenzen haben, kann man analog vorgehen. In diesem Fall erhält zwar die neue Grenze NP wieder die Nummer 3, aber die Grenze MQ die Nummer 2 (Abb. 35b). Das Land $\sigma'_4 = \sigma_4$ wird mit der Farbe γ gefärbt. Wir stellen das Land σ wieder her und färben es wieder mit der Farbe β .

Schließlich setzen wir voraus, dass die Länder σ_2 und σ_4 keine gemeinsame Grenze besitzen. Wir ziehen das Viereck $ABCD$ so in eine Strecke zusammen, dass die Ecke A mit der Ecke B und die Ecke C mit der Ecke D zusammenfällt; dabei fällt die Grenze BC mit der Grenze AD zusammen.

Die Nummerierung der Grenzen MA , BN , PC und QD bleibe erhalten; die neue Grenze $BC = AD$ bekomme die Nummer 1 (Abb. 35c). Die entstandene Karte S' ist normal mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land σ'_1 die Farbe α hat, muss das Land σ'_2 die Farbe δ , das Land σ'_3 die Farbe α und das Land σ'_4 die Farbe γ haben. Wir stellen nun das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe β .

d) Das Land σ besitze fünf Grenzen. In diesem Fall ist die Nummerierung der Grenzen in der Umgebung des Landes σ (bis auf die Reihenfolge der Ziffern 1, 2, 3) eindeutig bestimmt (Abb. 36 a).

Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Land σ_5 weder mit σ_2 noch mit σ_3 gemeinsame Grenzen besitzt.

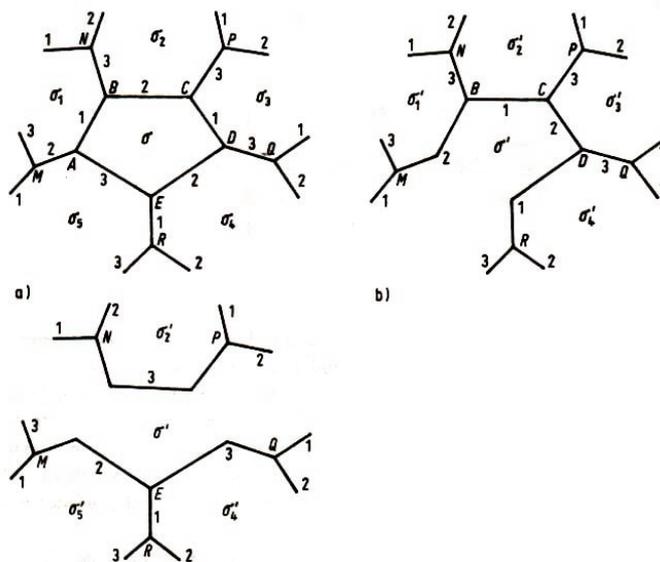


Abb. 36 c)

An σ wird das Land σ_5 angegliedert. Die neue Grenze MB bekommt die Nummer 2, die neue Grenze RD die Nummer 1, die Grenze BC nummerieren wir in 1, die Grenze CD in 2 um. So erhalten wir die normale Karte S' (Abb. 36 b) mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land $\sigma' = \sigma \cup \sigma_5$ mit der Farbe α gefärbt ist, müssen die Länder σ'_2 und σ'_4 mit der Farbe β gefärbt werden und die Länder σ'_1 und σ'_3 mit der Farbe γ . Wir stellen das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe δ .

Wenn das Land σ_5 an σ_2 grenzt oder σ_5 und σ_2 das gleiche Land bezeichnen, grenzen die (dann verschiedenen) Länder σ_1 und σ_3 nicht aneinander.

Wenn aber σ_5 und σ_3 das gleiche Land bezeichnen oder aneinandergrenzen, können die Länder σ_2 und σ_4 weder aneinandergrenzen noch identisch sein. Die beiden letzten Fälle sind im Sinne der Nummerierung der Grenzen gleichberechtigt.

Es genügt, den ersten Fall zu betrachten. Wir gliedern die Länder σ_1 und σ_3 an σ an. Die neue Grenze NP bekommt die Nummer 3, die neue Grenze ME die Nummer 2 und die neue Grenze EQ die Nummer 3. Dadurch erhalten wir eine normale Karte S' (Abb. 36c) mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte S' gleich n_1 ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land $\sigma' = \sigma \cup \sigma_1 \cup \sigma_3$ mit der Farbe α gefärbt ist, müssen die Länder $\sigma'_2 = \sigma_2$ und $\sigma'_4 = \sigma_4$ mit der Farbe δ und das Land $\sigma'_5 = \sigma_5$ mit der Farbe γ gefärbt werden. Wir stellen das Land σ wieder her und färben es mit der Farbe β .

Da wir nicht wissen, ob jede normale Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann; wissen wir auch nicht, ob man die Grenzen jeder normalen Karte mit drei Ziffern regulär nummerieren kann. Man kann nur folgende schwächere Behauptung beweisen.

Beispiel 16. Man kann die Grenzen jeder normalen Karte mit vier Ziffern regulär nummerieren.

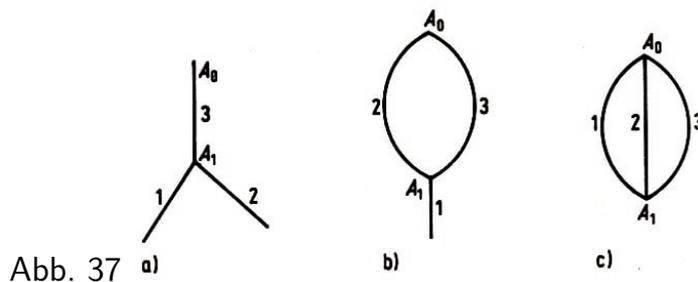
Beweis. Wir beweisen diese Behauptung für beliebige (nicht notwendig zusammenhängende) Karten, bei denen von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen. Den Beweis führen wir durch Induktion nach der Anzahl n der Ecken der Karte.

1. Für $n = 2$ ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Karte, bei der von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen und deren Eckenzahl n ist, richtig. Jetzt betrachten wir eine Karte S , die dieselbe Bedingung erfüllt und $n + 1$ Ecken hat. Wir entfernen eine dieser Ecken, etwa A_0 , zusammen mit den von ihr ausgehenden Grenzen.

So erhalten wir die Karte S' , bei der von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen und die n Ecken hat. Nach Induktionsvoraussetzung kann man die Grenzen der Karte S' mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 regulär nummerieren. Wir fügen nun die Ecke A_0 mit ihren Grenzen hinzu. Dann sind drei Fälle möglich:

a) Die Ecke A_0 ist nur zu einer Ecke A_1 der Karte S' benachbart und mit dieser durch eine, zwei oder drei Grenzen verbunden (Abb. 37a, b, c). In diesem Fall lässt sich die Nummerierung der Grenzen der Karte S' leicht in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte S fortsetzen.



b) Die Ecke A_0 ist zu zwei Ecken A_1 und A_2 der Karte S' benachbart. Eine der

benachbarten Ecken kann mit ihr durch zwei Grenzen verbunden sein (Abb. 38a, b). Man prüft leicht nach, dass man dabei in allen Fällen die Nummerierung der Grenzen der Karte S' in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte S fortsetzen kann.

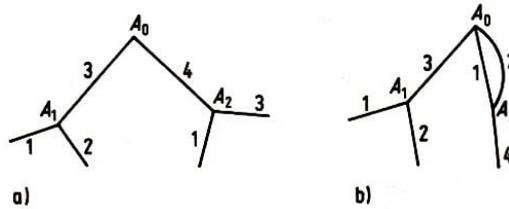


Abb. 38 a)

b)

c) Die Ecke A_0 ist zu drei Ecken A_1, A_2, A_3 der Karte S' benachbart (Abb. 39). Der ungünstigste Fall liegt vor, wenn von jeder der Ecken A_1, A_2, A_3 der Karte S' zwei Grenzen ausgehen.

In diesem Fall haben wir für jede der Grenzen A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 zwei mögliche Nummern, aus denen nur dann keine drei verschiedenen Nummern ausgewählt werden können, wenn diese drei Paare gleich sind, d.h., wenn die drei Paare von Grenzen der Karte S' , die durch die Ecken A_1, A_2, A_3 gehen, die gleichen Nummern, etwa 1 und 2, erhalten haben.

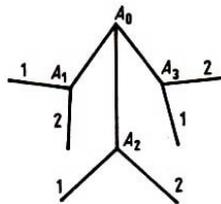


Abb. 39

Wir heben dann auf der Karte S' einen Weg maximaler Länge hervor, der in der Ecke A_1 beginnt und abwechselnd aus Grenzen mit den Nummern 1 und 3 besteht (ein solcher Weg kann aus einer einzigen Grenze bestehen und in einer der Ecken A_2, A_3 enden).

Dieser Weg kann sich nicht überschneiden, weil die Grenzen der Karte S' nach Voraussetzung regulär nummeriert sind. Wir ändern nun die Nummern dieses Weges, indem wir die 1 durch die 3 ersetzen und umgekehrt. Dabei bleibt die Nummerierung der Grenzen der Karte S' regulär, wobei in der neuen Nummerierung die drei Paare von Grenzen, die durch die Ecken A_1, A_2 und A_3 der Karte S' gehen, nicht mehr in derselben Weise nummeriert sind.

In diesem Fall kann man jedoch leicht die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte S' in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte S fortsetzen.

1.3 Vollständige Induktion bei Konstruktionen

Wenn in den Bedingungen einer Konstruktionsaufgabe eine natürliche Zahl auftritt (wenn beispielsweise n -Ecke zu konstruieren sind), dann lässt sich die Methode der vollständigen Induktion anwenden.

Wir werden eine Reihe von Beispielen der ebenen Geometrie betrachten, wobei wir in diesem Abschnitt auch überschlagene Vielecke (Abb. 40) und beliebige geschlossene Streckenzüge $A_1A_2\dots A_nA_1$ die wir hier kurz n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ nennen, untersuchen

werden.

Ist M Mittelpunkt der Strecke AB , dann erhalten wir B aus A durch Spiegelung am Punkt M (in der Ebene Drehung um M um 180°) und A aus B ebenfalls durch Spiegelung am Punkt M ; bezeichnen wir die Spiegelung am Punkt M mit σ_M und den Bildpunkt von X bei der Spiegelung an M mit $X\sigma_M$ oder X^M , dann können wir den genannten Sachverhalt durch $A\sigma_M = A^M = B$ und $B\sigma_M = B^M = A$ notieren.

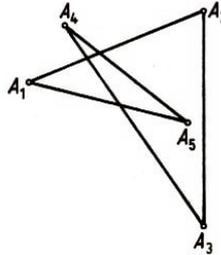


Abb. 40

Mitunter ist es zweckmäßig, mehrere Spiegelungen eines Punktes an Punkten nacheinander auszuführen. Werden die Spiegelungen σ_P und σ_Q nacheinander ausgeführt, dann ist die resultierende Abbildung $\sigma_P \circ \sigma_Q$ eine Verschiebung (Translation) des ursprünglichen Punktes um den doppelten gerichteten Abstand zwischen P und Q .

Werden drei Spiegelungen $\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_R$ nacheinander ausgeführt, dann ist die resultierende Abbildung $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ wieder Spiegelung an einem Punkt S , es ist also

$$\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_S \quad \text{bzw.} \quad \sigma_P \circ \sigma_Q = \sigma_S \circ \sigma_R$$

folglich stimmt der gerichtete Abstand von P nach Q mit dem von S nach R überein; bilden P, Q, R ein Dreieck, dann ist S speziell die vierte Ecke des Parallelogrammes $PQRS$ (vgl. [11] und [8]). Diese Aussagen lassen sich vorteilhaft bei der Lösung des folgenden Beispiels verwenden.

Beispiel 17. Es seien $2n + 1$ Punkte in einer Ebene gegeben. Man konstruiere ein $(2n + 1)$ -Eck, für welches diese Punkte Seitenmitten sind.

Lösung.

1. Sind im Fall $n = 1$ die Punkte A_1, A_2 und A_3 gegeben und nicht kollinear (d.h., liegen sie nicht auf einer Geraden), dann ziehen wir zu jeder Dreiecksseite die Parallele durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Parallelen schneiden sich in den Punkten X_1, X_2, X_3 eines gesuchten Dreiecks.

Diese Lösung können wir auch wie folgt erhalten: Wir bestimmen X_1 durch die Gleichung $\sigma_{A_1} \circ \sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_3} = \sigma_{X_1}$ sowie X_2, X_3 durch $X_2 = X_1^{A_1}$ und $X_3 = X_2^{A_2}$. Dann gilt

$$X_3^{A_3} = (X_2^{A_2})^{A_3} = ((X_1^{A_1})^{A_2})^{A_3} = X_1^{X_1} = X_1$$

d.h., dass neben A_1 und A_2 auch A_3 ein Seitenmittelpunkt des Dreiecks $X_1X_2X_3$ ist. In der zweiten Lösung wird nicht benötigt, dass $A_1A_2A_3$ ein Dreieck ist. Durch sie wird also der Fall $n = 1$ gelöst.

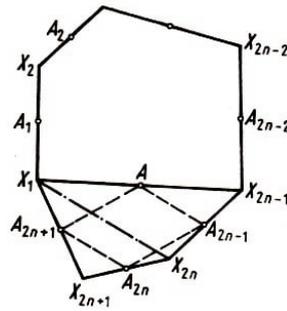


Abb. 41

2. Wir setzen voraus, die Aufgabe sei für je $2n - 1$ vorgegebene Punkte gelöst. Es seien jetzt $2n + 1$ Punkte $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ gegeben. Wir bestimmen einen Punkt A durch die Gleichung (Abb. 41)

$$\sigma_{A_{2n-1}} \circ \sigma_{A_{2n}} \circ \sigma_{A_{2n+1}} = \sigma_A$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu den $A_1, A_2, \dots, A_{2n-2}, A$ Punkte $X_1, X_2, \dots, X_{2n-2}, X_{2n-1}$ mit der geforderten Eigenschaft, wobei A Mittelpunkt von X_{2n-1} und X_1 ist, d.h., es gilt $X_{2n-1}^A = X_1$.

Wir setzen $X_{2n} = X_{2n-1}^{A_{2n-1}}, X_{2n+1} = X_{2n}^{A_{2n}}$ voraus. Dann gilt schließlich auch noch

$$X_{2n+1}^{A_{2n+1}} = (X_{2n}^{A_{2n}})^{A_{2n+1}} = ((X_{2n-1}^{A_{2n-1}})^{A_{2n}})^{A_{2n+1}} = X_{2n-1}^A = X_1$$

Zu den ebenen Bewegungen gehören die Drehungen und Verschiebungen. Bei der Nacheinanderausführung von Drehungen und Verschiebungen erhalten wir stets wieder Drehungen und Verschiebungen, zu denen wir auch die identische Abbildung zählen (vgl. [11], [8]).

Während die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen als resultierende Abbildung wieder eine Verschiebung ergibt, kann die resultierende Abbildung bei der Nacheinanderausführung zweier Drehungen sowohl Drehung als auch Verschiebung sein (vgl. [11], S. 121, 122).

Bezeichnen wir die Drehung um einen Punkt A um den Drehwinkel φ mit $\rho(A, \varphi)$, dann können wir genauer folgendes ausführen:

Die Nacheinanderausführung $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$ zweier Drehungen ist eine Drehung oder Verschiebung, je nachdem, ob $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 0$ oder $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ gilt; ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \neq 0$, dann ist die resultierende Abbildung eine Drehung mit dem Drehwinkel φ um ein geeignetes Drehzentrum; im Fall $A_1 = A_2$ ist die resultierende Abbildung stets eine Drehung um A_1 (vgl. [11]. S. 136/137). Diese Aussagen werden wir bei der Lösung des folgenden Beispiels benutzen.

Beispiel 18.¹² In einer Ebene seien n Punkte A_1, \dots, A_n und n Drehwinkel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gegeben. Man konstruiere ein n -Eck $X_1 \dots X_n$, das so beschaffen ist, dass

$$X_1 \rho(A_1, \varphi_1) = X_2, \quad X_2 \rho(A_2, \varphi_2) = X_3, \quad \dots, \quad X_n \rho(A_n, \varphi_n) = X_1$$

¹²Das Beispiel 17 kann als Spezialfall dieses Beispiels mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{2n+1} = 180^\circ$ aufgefasst werden.

gilt (Abb. 44).¹³

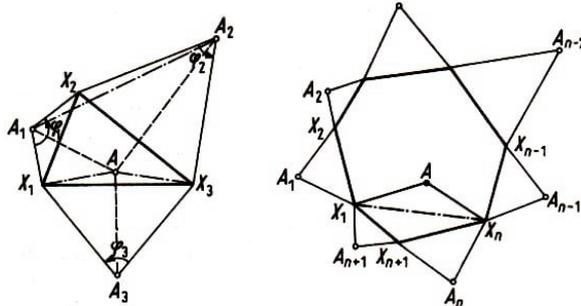


Abb. 42 a)

b)

Lösung. Diese Aufgabe ist nicht immer lösbar. Wenn sie lösbar ist, kann es mehrere Lösungen geben.

1. Es sei $n = 2$. Zu gegebenen Punkten A_1, A_2 und Drehwinkeln φ_1, φ_2 sind Punkte X_1, X_2 mit $X_1\rho(A_1, \varphi_1) = X_2$ und $X_2\rho(A_2, \varphi_2) = X_1$ zu konstruieren. Es muss also ein Punkt X_1 mit

$$X_1 = X_2\rho(A_2, \varphi_2) = X_1\rho(A_1, \varphi_1) \circ X_2\rho(A_2, \varphi_2)$$

bestimmt werden. Ist $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$ eine nichtidentische Drehung $\rho(A, \varphi)$, dann kann $X_1 = A$ und $X_2 = X_1\rho(A_1, \varphi_1)$ gewählt werden; weitere Lösungen X_1 existieren nicht. Ist die resultierende Abbildung $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$ die identische Abbildung, dann kann jeder Punkt der Ebene als X_1 und $X_2 = X_1\rho(A_1, \varphi_1)$ gewählt werden. Ist schließlich die resultierende Abbildung eine nichtidentische Verschiebung, dann ist die Aufgabe nicht lösbar.

Zur näheren Erläuterung dieser Aufgabe wollen wir noch den Fall $n = 3$ diskutieren (Abb. 42a). Zu gegebenen Punkten A_1, A_2, A_3 und Drehwinkeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind Punkte X_1, X_2, X_3 mit $X_1\rho(A_1, \varphi_1) = X_2$, $X_2\rho(A_2, \varphi_2) = X_3$ und $X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_1$ zu konstruieren. Es muss also ein Punkt X_1 mit

$$X_1 = X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_2\rho(A_2, \varphi_2) \circ X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_1 \circ \rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$$

bestimmt werden. Nun ist aber $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$ eine Drehung oder Verschiebung. Dann ist auch $\tau \circ \rho(A_3, \varphi_3)$ eine Drehung oder Verschiebung. Die Aufgabe ist eindeutig bzw. mehrdeutig, wobei alle Punkte der Ebene Lösungen sind, bzw. nicht lösbar, je nachdem, ob $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$ eine nichtidentische Drehung, die identische Abbildung bzw. eine nichtidentische Verschiebung ist.

2. Wir setzen voraus, dass $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_n, \varphi_n)$ Drehung oder Verschiebung ist. Gegeben seien nun $n + 1$ Punkte A_1, \dots, A_{n+1} und Drehwinkel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Zur Lösung der Aufgabe ist ein Punkt X_1 zu finden, für den

$$X_1 = X_1 \circ \rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_{n+1}, \varphi_{n+1})$$

¹³Eine andere Formulierung dieser Aufgabe lautet: Zu gegebenen n Punkten konstruiere man ein n -Eck, dessen Seiten Grundlinien gleichschenkliger Dreiecke mit den gegebenen Punkten als Spitzen und den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ an diesen Spitzen sind.

gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_n, \varphi_n) = \tau$ eine Drehung oder Verschiebung. Nun ist es leicht, die Lösbarkeit der Aufgabe zu diskutieren.

Aufgabe 14. In einer Ebene seien n Punkte gegeben. Man konstruiere ein n -Eck, für das diese Punkte Eckpunkte von Dreiecken sind, die auf den Seiten des n -Ecks konstruiert werden; dabei sollen die Dreiecke vorgegebene Drehwinkel bei diesen Eckpunkten und vorgegebene Seitenverhältnisse besitzen.¹⁴

Beispiel 19. In einer Ebene seien ein Kreis und n Punkte gegeben. Man beschreibe diesem Kreis ein n -Eck ein, dessen Seiten bzw. deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch die gegebenen Punkte hindurchgehen.

Lösung. Diese Aufgabe ist schwierig. Um sie zu lösen, werden wir die vollständige Induktion auf ganz unerwartete Weise anwenden, nämlich nicht nach der Anzahl n der Seiten des Vielecks.

Statt dessen werden wir die allgemeinere Aufgabe betrachten, ein n -Eck zu konstruieren, bei dem k benachbarte Seiten oder deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch k gegebene Punkte hindurchgehen, während die übrigen $n - k$ Seiten in einer ebenfalls vorgeschriebenen Reihenfolge parallel zu gegebenen Geraden sind. Diese Aufgabe geht für $k = n$ in die ursprüngliche über. Wir führen die Induktion nach der Zahl k .

1. Für $k = 1$ haben wir folgende Aufgabe: Einem Kreis ist ein n -Eck einzubeschreiben, dessen Seite $A_n A_1$ oder deren Verlängerung durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, während die $n - 1$ Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ der Reihe nach parallel zu gegebenen Geraden l_1, l_2, \dots, l_{n+1} sind.

Dabei ist zugelassen, dass benachbarte Punkte A_k, A_{k+1} zusammenfallen, wenn die Parallele zu l_k durch A_k eine Tangente ist.

Wir setzen zunächst voraus, die Aufgabe sei schon gelöst und ein gesuchtes Vieleck konstruiert (Abb. 43a, b).

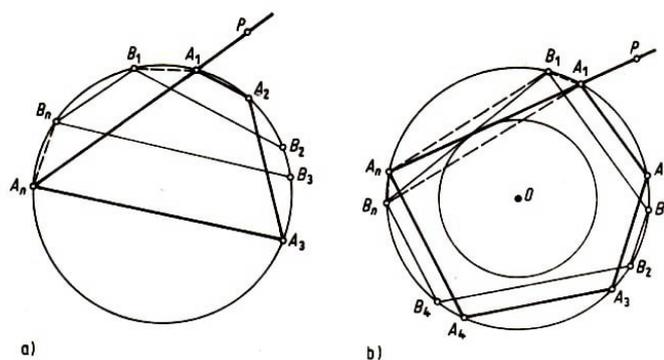


Abb. 43 a)

b)

Wir wählen auf dem Kreis einen beliebigen Punkt B_1 und konstruieren ein eingeschriebenes Vieleck $B_1 B_2 \dots B_n$, dessen Seiten $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots, B_{n-1} B_n$ der Reihe nach

¹⁴Diese Aufgabe ist als Verallgemeinerung des Problems im Beispiel 18 mit den gleichschenkligen Dreiecken $A_1 X_1 X_2, A_2 X_2 X_3, \dots$ aufzufassen. Demzufolge sind hier Drehstreckungen statt Drehungen zu betrachten.

zu l_1, l_2, \dots, l_{n-1} parallel sind; dabei ist $B_k = B_{k+1}$ genau dann zugelassen, wenn die Parallele zu l_k durch B_k Tangente ist.

Wir betrachten die Menge der Drehungen um den Kreismittelpunkt O . Die Drehung, die A_1 auf B_1 abbildet, habe den Drehwinkel φ_1 . (Dabei kann φ_1 als Maß des gerichteten Bogens $\widehat{A_1 B_1}$ aufgefasst werden.) Entsprechend werden $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ erklärt. Wegen der vorhandenen Parallelitäten gilt $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_3 = \dots$ (vgl. [11], Satz A auf S. 142).

Fall 1. Es sei n gerade. Dann gilt $\varphi_1 = -\varphi_n$. Nach dem genannten Satz A liegen A_1, A_n und B_1, B_n in zueinander parallelen Geraden (Abb. 43a). Um die Aufgabe zu lösen, können wir von einem beliebigen Punkt B , des Kreises ausgehen und die Parallele g zu $g_{B_1 B_n}$, (für $B_1 = B_n$ Tangente) durch P betrachten. Falls diese Gerade g den Kreis trifft, kann leicht eine Lösung angegeben werden; das ist z.B. für alle Punkte P der Kreisfläche erfüllt. Anderenfalls ist die Aufgabe nicht lösbar.

Fall 2. Es sei n ungerade. Dann gilt $\varphi_1 = \varphi_n$. Nach dem oben genannten Satz A liegen A_1, B_n und B_1, A_n in zueinander parallelen Geraden (Abb. 43 b).

Bei der Spiegelung am Lot von O auf diese Geraden werden jeweils A_1 und B_n sowie B_1 und A_n vertauscht, d.h.. die Punktepaare A_1, A_n und B_1, B_n liegen in Tangenten eines Kreises um O , oder O liegt in $g_{A_1 A_n}$ und $G_{B_1 B_n}$.

Um die Aufgabe zu lösen, können wir von einem beliebigen Punkt B , des Kreises ausgehen und $g_{B_1 B_n}$ (für $B_1 = B_n$ Tangente) bestimmen. Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit ist die Bedingung, dass der Punkt P vom Kreismittelpunkt keinen kleineren Abstand hat als diese Gerade.

Wenn die Bedingung erfüllt ist, dann können wir $g_{B_1 B_n}$ um O derart drehen, dass ihr Bild g durch P geht. Dabei geht B_1 in einen Punkt A_1 des Kreises über und es kann leicht eine Lösung angegeben werden. Hinreichend für die Lösbarkeit ist z.B., dass P kein innerer Kreispunkt ist.

2. Wir setzen voraus, die Aufgabe, ein in den Kreis einbeschriebenes n -Eck zu konstruieren, von dem k benachbarte Seiten oder deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch k Punkte hindurchgehen, während die übrigen $n - k$ Seiten in einer ebenfalls vorgeschriebenen Reihenfolge parallel zu gegebenen Geraden sind, sei gelöst. Zu konstruieren ist ein Vieleck $A_1 A_2 \dots A_n$, das dem Kreis einbeschrieben ist und bei dem die $k + 1$ benachbarten Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k+1} A_{k+2}$ oder deren Verlängerungen der Reihe nach durch $k + 1$ gegebene Punkte P_1, P_2, \dots, P_{k+1} hindurchgehen und die übrigen $n - k - 1$ Seiten in einer vorgegebenen Reihenfolge zu gegebenen Geraden parallel sind.

Um diese Aufgabe auf die Induktionsvoraussetzung zurückzuführen, wollen wir P_1 und P_2 durch $g_{P_1 P_2}$ und einen geeigneten Punkt P'_2 "ersetzen".

Wir setzen zunächst voraus, dass $A_1 A_2 \dots A_n$ Lösung der Aufgabe ist (Abb. 44). Die Parallele g zu $g_{P_1 P_2}$ durch A_1 möge den Kreis in A'_2 treffen, wobei $A'_2 = A_1$ nur dann zugelassen ist, wenn g Tangente ist.

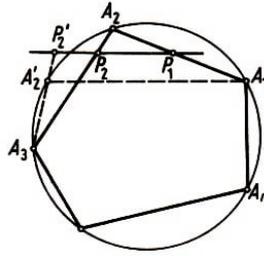


Abb. 44

Die Sekante oder Tangente durch A'_2 und A_3 möge $g_{P_1P_2}$ in P'_2 schneiden. Dann gelten die folgenden gleichsinnigen Kongruenzen der gerichteten Winkel zwischen Geraden (vgl. [11], besonders S. 144):

$$(g_{A_1A_2}, g_{P_1P_2}) \cong (g_{A_1A_2}, g_{A_1A'_2}) \cong (g_{A_2A_3}, g_{A'_2A_3})$$

folglich ist $P_1P'_2A_3A_2$ ein Sehnenviereck bezüglich eines geeigneten zweiten Kreises. Da A_2A_3 gemeinsame Sehne beider Kreise ist, hat P_2 bezüglich dieser Kreise dieselbe Potenz (Sekanten- bzw. Sehnensatz).

Somit lässt sich P'_2 aus P_1 und P_2 ohne Kenntnis der Lösung $A_1A_2\dots A_n$ konstruieren. Nach Induktionsvoraussetzung können wir ein n -Eck $A_1A_2A_3\dots A_n$ konstruieren. Nun ist es nicht schwierig, ein gesuchtes n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ zu konstruieren. Ist die in Beispiel 19 formulierte Aufgabe nach 1. und 2. gelöst?

Aufgabe 15. Man beschreibe einem gegebenen Kreis ein n -Eck ein, von dem k (nicht unbedingt benachbarte) Seiten durch k gegebene Punkte hindurchgehen, während die übrigen $n - k$ Seiten zu gegebenen Geraden parallel sind.

Beispiel 20. Es seien zwei parallele Geraden l und l_1 gegeben. Mit alleiniger Hilfe eines Lineals zerlege man die Strecke AB auf der Geraden l in n deckungsgleiche Teile.

Lösung. 1. Es sei $n = 2$. Einen beliebigen Punkt S der Ebene, der nicht auf den Geraden l und l_1 liegt, verbinden wir mit den Punkten A und B (Abb. 45 a). Wir bezeichnen mit C und D die Schnittpunkte der Geraden g_{AS} bzw. g_{BS} mit der Geraden l_1 .

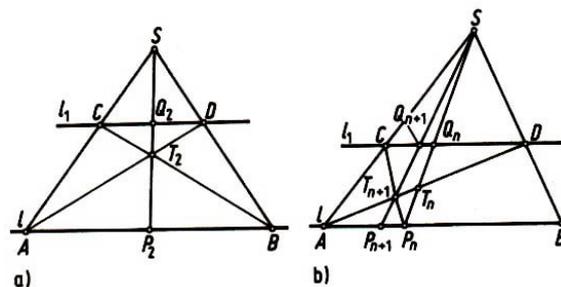


Abb. 45 a)

b)

Den Schnittpunkt der Geraden g_{AD} und g_{BC} bezeichnen wir mit T_2 , den Schnittpunkt der Geraden g_{ST_2} und l mit P_2 . Wir beweisen, dass der Punkt P_2 der gesuchte ist, d.h., dass $\overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{n} \overrightarrow{AB}$ gilt.

Mit Q_2 bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden g_{ST_2} und l_1 . Nach dem Strahlensatz gelten die Beziehungen

$$\frac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{T_2B}}{\overrightarrow{T_2C}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{DC}} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{P_2A}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$$

Folglich ist $\frac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{AP_2}}{\overrightarrow{Q_2C}}$, und daher gilt

$$\overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wir setzen nun voraus, wir hätten mit alleiniger Hilfe eines Lineals einen solchen Punkt P_n der Strecke AB konstruiert, für den $\overrightarrow{AP_n} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ gilt.

Außerhalb von l und l_1 wählen wir einen beliebigen Punkt S und bezeichnen mit T_n und Q_n die Schnittpunkte der Geraden g_{SP_n} mit g_{AD} bzw. l_1 (Abb. 45b).

Den Schnittpunkt T_{n+1} der Geraden g_{AD} und g_{CP_n} verbinden wir mit S . Die Schnittpunkte von $g_{ST_{n+1}}$ mit den Geraden l_1 und l bezeichnen wir mit Q_{n+1} bzw. P_{n+1} . Wir beweisen, dass P_{n+1} der gesuchte Punkt ist, d.h., dass

$$\overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$$

gilt.

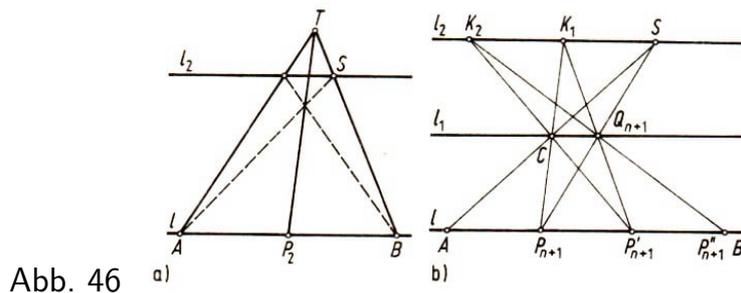
Nach dem Strahlensatz gelten die Beziehungen

$$\frac{\overrightarrow{P_nP_{n+1}}}{\overrightarrow{CQ_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nT_{n+1}}}{\overrightarrow{CT_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nA}}{\overrightarrow{CD}} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{AP_{n+1}}}{\overrightarrow{CQ_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} \quad (6,7)$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) erhalten wir

$$\frac{\overrightarrow{P_nP_{n+1}}}{\overrightarrow{AP_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nA}}{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{n}, \quad \overrightarrow{AP_{n+1}} = \overrightarrow{AP_n} + \overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{n}\overrightarrow{AP_{n+1}}$$

und schließlich $\overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$.



Um die folgenden Punkte P'_{n+1} , P''_{n+1} , ... der Zerlegung zu finden, genügt es, nach demselben Verfahren die Strecken

$$\overrightarrow{P_{n+1}P'_{n+1}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{P_{n+1}B}, \quad \overrightarrow{P'_{n+1}P''_{n+1}} = \frac{1}{n-1}\overrightarrow{P'_{n+1}B} \quad \text{usw.}$$

zu konstruieren.

Bemerkung. Bei der Konstruktion der Punkte P'_{n+1} , P''_{n+1} kann man auch wie folgt

verfahren: Mit Hilfe des Punktes P_2 kann man durch den Punkt S die Gerade $l_2 \parallel l$ hindurchlegen (vgl. Abb. 45a, bei der der Punkt T auf g_{BS} beliebig gewählt wurde). Es sei K_1 der Schnittpunkt der Geraden $g_{P_{n+1}C}$ mit l_2 und P'_{n+1} der Schnittpunkt der Geraden $g_{K_1Q_{n+1}}$ mit l (Abb. 46 b).

Dann ist leicht nachzuweisen, dass $\overrightarrow{P_{n+1}P'_{n+1}} \# \overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \overrightarrow{AB}$ ist¹⁵. Die Konstruktion der folgenden Punkte $P''_{n+1}, P'''_{n+1}, \dots$ verläuft analog.

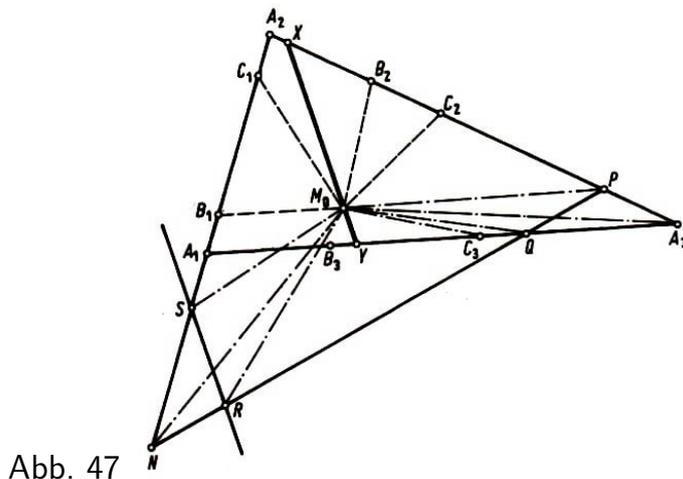
Aufgabe 16. Man konstruiere mit Hilfe eines Zirkels gegebener Schenkelöffnung a und eines Lineals eine Strecke der Länge $\frac{a}{n}$.

1.4 Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion

Wir behandeln nun einige Aufgaben zur Bestimmung von Figuren mit Hilfe vollständiger Induktion.

Beispiel 21. Auf den Seiten des konvexen n -Ecks $A_1 \dots A_n$ werden die Strecken $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ abgetragen. Man bestimme die Menge der inneren Punkte M des Vielecks, für welche die Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$ konstant ist. (gleich der Summe $F_{\Delta M_0 B_1 C_1} + F_{\Delta M_0 B_2 C_2} + \dots + F_{\Delta M_0 B_n C_n}$ ist, wobei M_0 ein bestimmter Punkt im Innern des Vielecks ist).

Lösung. 1. Es sei $n = 3$ (Abb. 47). Auf den Seiten A_3A_2 und A_3A_1 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ tragen wir die Strecken $A_3P \cong BC_2$ und $A_3Q \cong B_3C_3$ ab.



Dann gilt¹⁶

$$F_{\Delta M_0 B_2 C_2} + F_{\Delta M_0 B_3 C_3} = F_{\Delta M_0 P A_3} + F_{\Delta M_0 Q A_3} = F_{\Delta P Q A_3} + F_{\Delta M_0 P Q}$$

also

$$F_{\Delta M_0 B_1 C_1} + F_{\Delta M_0 B_2 C_2} + F_{\Delta M_0 B_3 C_3} = F_{\Delta P Q A_3} + (F_{\Delta M_0 B_1 C_1} + F_{\Delta M_0 P Q})$$

¹⁵Das Zeichen # bedeutet Parallelgleichheit (vgl. auch [11], S. 125).

¹⁶Wir nehmen hier an, der Punkt M_0 liege im Innern des Vierecks A_1A_2PQ ; anderenfalls würde sich die Überlegung geringfügig ändern.

Entsprechend gilt

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MB_2C_2} + F_{\Delta MB_3C_3} = F_{\Delta PQA_3} + (F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ})$$

Daher ist die gesuchte Figur durch folgende Bedingung charakterisiert:

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ} = F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0PQ}$$

Es sei N der Schnittpunkt der Geraden $g_{A_1A_2}$ und g_{PQ} (wenn diese Geraden parallel sind, wird die gesuchte Figur eine Strecke parallel zu diesen Geraden). Wir tragen auf den Schenkeln des Winkels $\angle A_2NP$ die Strecken $NR \cong PQ$ und $NS \cong B_1C_1$ ab; dann gilt

$$F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0PQ} = F_{\Delta M_0NS} + F_{\Delta M_0NR} = F_{\Delta NRS} + F_{\Delta M_0RS}$$

und entsprechend

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ} = F_{\Delta NRS} + F_{\Delta MRS}$$

Folglich besteht die gesuchte Figur aus den Punkten M , die innerhalb des Dreiecks liegen und für die $F_{\Delta MRS} = F_{\Delta M_0RS}$ gilt, d.h., es ist eine Strecke XY einer Geraden, die durch den Punkt M_0 verläuft (und parallel zur Geraden g_{RS} ist).¹⁷

2. Wir nehmen nun an, wir wüssten schon, dass die gesuchte Figur für das n -Eck aus einer Strecke besteht (die selbstverständlich durch den Punkt M_0 hindurchgeht), und betrachten jetzt das $(n + 1)$ -Eck $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$.

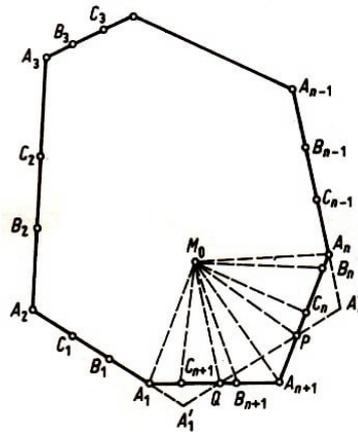


Abb. 48

Es seien $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n, B_{n+1}C_{n+1}$ auf seinen Seiten abgetragene Strecken und M_0 ein Punkt im Innern dieses $(n + 1)$ -Ecks (Abb. 48). Auf den Schenkeln des Winkels $\angle A_1A_{n+1}A_n$ tragen wir vom Scheitel aus die Strecken $A_{n+1}P \cong B_nC_n$ und $A_{n+1}Q \cong B_{n+1}C_{n+1}$ ab. Dann gilt für einen Punkt M der gesuchten Figur

$$F_{\Delta MB_nC_n} + F_{\Delta MB_{n+1}C_{n+1}} = F_{\Delta MA_{n+1}P} + F_{\Delta MA_{n+1}Q} = F_{\Delta A_{n+1}PQ} + F_{\Delta MPQ}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MB_2C_2} + \dots + F_{\Delta MB_{n-1}C_{n-1}} + F_{\Delta MPQ} \\ = F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0B_2C_2} + \dots + F_{\Delta M_0B_{n-1}C_{n-1}} + F_{\Delta M_0PQ} \end{aligned}$$

¹⁷Es wäre möglich, die Induktion mit $n = 2$ zu beginnen, wenn das "2-Eck" als n -Eck aus zwei Strecken mit gemeinsamem Endpunkt definiert wird.

Nach Induktionsvoraussetzung ist die gesuchte Figur eine Strecke, die durch den Punkt M_0 verläuft.

Anhand der Lösung dieser Aufgabe lässt sich auch eine Methode zur Konstruktion der gesuchten Figur finden.

Aufgabe 17. Gegeben seien n Geraden l_1, l_2, \dots, l_n und auf jeder von ihnen eine Strecke $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$, ferner ein Punkt M_0 . Man bestimme die Menge der Punkte M , für welche die algebraische Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$ gleich der entsprechenden Summe für den Punkt M_0 ist.

Dabei ist der Flächeninhalt der Dreiecksfläche MB_iC_i ($i = 1, 2, \dots, n$) positiv zu rechnen, wenn der Punkt M auf der gleichen Seite der Geraden l_i , wie der Punkt M_0 liegt, anderenfalls negativ.

Aufgabe 18. Man zeige, dass in einem Viereck, das einem Kreis umbeschrieben ist, die Mitten der Diagonalen auf einer Geraden durch den Kreismittelpunkt liegen (Satz von Newton; vgl. Abb. 49).

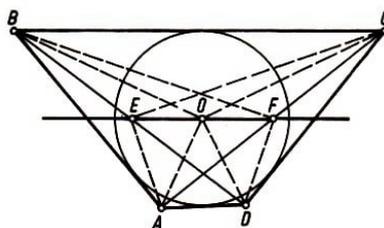


Abb. 49

Aufgabe 19. Man zeige, dass die Gerade, welche die Mittelpunkte der Diagonalen eines konvexen Vierecks (das weder ein Trapez noch ein Parallelogramm ist) verbindet, die Strecke halbiert, welche die Schnittpunkte der Verlängerungen gegenüberliegender Seiten verbindet (Satz von Gauß; vgl. Abb. 50).

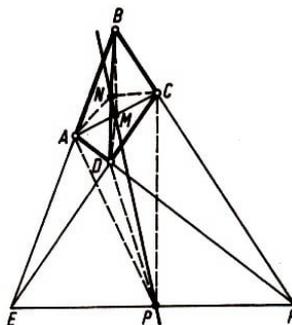


Abb. 50

Beispiel 22. Gegeben seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n und n (positive oder negative reelle) Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n . Man bestimme die Menge der Punkte, für welche die Summe

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 + \dots + a_n l(MA_n)^2$$

konstant ist.

Lösung. 1. Es sei $n = 2$. Wir wollen zunächst annehmen, die beiden Zahlen a_1 und a_2

seien positiv. Auf der Strecke A_1A_2 wählen wir den Punkt O , der A_1A_2 im Verhältnis $a_2 : a_1$ teilt. Dann gilt also

$$l(OA_1) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2) \quad , \quad l(OA_2) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} l(A_1A_2) \quad (*)$$

Nun sei M ein beliebiger Punkt der Ebene und H Fußpunkt des Lotes, das von M auf die Gerade $g_{A_1A_2}$ gefällt wird (Abb. 51). Dann ist nach dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 &= l(MO)^2 + l(A_1O)^2 \pm l(A_1O)l(HO) \\ l(MA_2)^2 &= l(MO)^2 + l(A_2O)^2 \pm l(A_2O)l(HO) \end{aligned}$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $l(A_2O)$ und die zweite mit $l(A_1O)$ multiplizieren und die übereinanderstehenden Glieder addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} &l(MA_1)^2 \cdot l(A_2O) + l(MA_2)^2 \cdot l(A_1O) \\ &= l(MO)^2(l(A_2O) + l(A_1O)) + l(A_1O)^2 \cdot l(A_2O) + l(A_2O)^2 \cdot l(A_1O) \\ &= l(MO)^2 \cdot l(A_1A_2) + l(A_1O) \cdot l(A_2O) \cdot k(A_1A_2) \end{aligned}$$

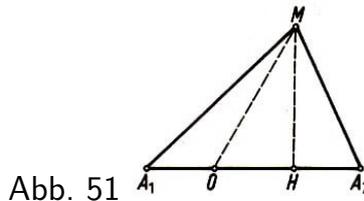


Abb. 51

Unter Berücksichtigung von (*) erhalten wir also

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 \frac{a_1 l(A_1A_2)}{a_1 + a_2} + l(MA_2)^2 \frac{a_2 l(A_1A_2)}{a_1 + a_2} &= \\ &= l(MO)^2 \cdot l(A_1A_2) + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2 \end{aligned}$$

oder

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 = (a_1 + a_2) l(MO)^2 + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2$$

Wenn also $a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 = R^2$ ist, gilt

$$l(MO)^2 = \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2 = \text{const.}$$

Daher ist $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2 > 0$ die gesuchte Punktmenge ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius

$$\sqrt{\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2}$$

Für

$$\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 = 0$$

besteht die gesuchte Figur aus einem einzigen Punkt O . Ist schließlich

$$\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 < 0$$

so gibt es keinen Punkt, der die Bedingung erfüllt.

Der Fall, dass a_1 und a_2 beide negativ sind, lässt sich offenbar auf den vorhergehenden zurückführen. Im Fall $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ und $a_1 + a_2 \neq 0$ (etwa $a_1 + a_2 > 0$) kann der Punkt O auf der Verlängerung der Strecke $A_1 A_2$ über A_2 hinaus so gewählt werden, dass

$$l(A_2 O) : l(A_1 O) = \left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right| : \left| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right|$$

gilt. Die weiteren Überlegungen unterscheiden sich dann nicht von den obigen.

Ist schließlich $a_1 + a_2 = 0$, so lautet die Aufgabe: Man bestimme die Menge der Punkte M , für welche die Differenz der Quadrate der Abstände von zwei vorgegebenen Punkten A_1 und A_2 konstant ist. Es sei H Fußpunkt des Lotes vom Punkt M auf die Gerade $g_{A_1 A_2}$ (Abb. 51), dann ist

$$l(M A_1)^2 = l(M H)^2 + l(A_1 H)^2 \quad , \quad l(M A_2)^2 = l(M H)^2 + l(A_2 H)^2$$

also

$$l(M A_1)^2 - l(M A_2)^2 = l(A_1 H)^2 - l(A_2 H)^2$$

Setzt man

$$l(M A_1)^2 - l(M A_2)^2 = R^2 \quad \text{so ist} \quad l(A_1 H) - l(A_2 H) = \frac{R^2}{l(A_1 A_2)}$$

oder - wenn der Punkt H auf eine Verlängerung der Strecke $A_1 A_2$ fällt -

$$l(A_1 H) + l(A_2 H) = \frac{R^2}{l(A_1 A_2)}$$

Es gibt genau einen Punkt H , der dieser Bedingung genügt; die gesuchte Punktmenge ist dann die Senkrechte zur Geraden $g_{A_1 A_2}$ im Punkt H .

2. Wir nehmen nun an, wir hätten schon bewiesen, dass die gesuchte Figur bei n ($n \geq 2$) gegebenen Punkten für $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ ein Kreis und für $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ eine Gerade ist.

Jetzt betrachten wir $n + 1$ Punkte A_1, A_2, \dots, A_{n+1} und $n + 1$ Zahlen a_1, a_2, \dots, a_{n+1} . Falls sich unter a_1, \dots, a_{n+1} eine Null befindet, gilt die Behauptung offensichtlich. Anderenfalls gibt es unter a_1, \dots, a_{n+1} zwei Zahlen gleichen Vorzeichens; wir dürfen voraussetzen, dass a_n, a_{n+1} gleiche Vorzeichen besitzen, da wir das anderenfalls durch

Umnummerieren so einrichten. Folglich gibt es in der Strecke $A_n A_{n+1}$ einen Punkt O derart, dass für jeden Punkt M der Ebene

$$a_n l(MA_n)^2 + a_{n+1} l(MA_{n+1})^2 = (a_n + a_{n+1}) l(MO)^2 + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} (A_n A_{n+1})^2$$

gilt. Somit führt unsere Aufgabe auf die Bestimmung der Menge der Punkte M , für welche die Summe

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 + \dots + a_{n-1} l(MA_{n-1})^2 + (a_n + a_{n+1}) l(MO)^2$$

konstant ist.

Nach Induktionsvoraussetzung wird die gesuchte Figur für $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \neq 0$ ein Kreis und für $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 0$ eine Gerade.

Aufgabe 20. Man bestimme die Menge der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von n gegebenen Punkten konstant ist.

Aufgabe 21. Man bestimme einen Punkt, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu n gegebenen Punkten minimal ist.

Aufgabe 22. Man bestimme die Menge der Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist.

Aufgabe 23. Gegeben sei das n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$. Man bestimme die Menge der Punkte M , für welche die Fläche des Vielecks, dessen Eckpunkte die Projektion von M auf die Seiten des gegebenen Vielecks sind, einen gegebenen Flächeninhalt F hat.

1.5 Definition mittels vollständiger Induktion

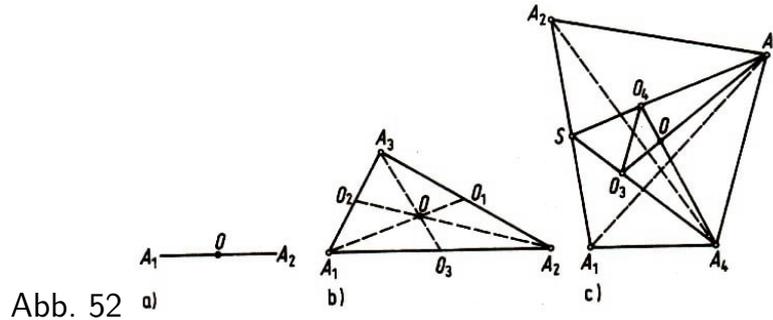
Interessante Beispiele der Anwendung der vollständigen Induktion in der Geometrie liefern Aufgaben, die Begriffe enthalten, bei deren Definition der Übergang "von n auf $n + 1$ " benutzt wird. Aufgaben dieser Art ist der vorliegende Abschnitt gewidmet.

Beispiel 23. Definition der Schwerlinien und des Schwerpunktes eines n -Ecks.¹⁸

1. Unter dem Schwerpunkt einer Strecke $A_1 A_2$ wollen wir ihren Mittelpunkt O verstehen (Abb. 52a). Danach kann man die Schwerlinien eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ als diejenigen Strecken definieren, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (Abb. 52b).

Bekanntlich schneiden sich die Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt und teilen - von den Eckpunkten aus gerechnet - einander im Verhältnis 2:1. Der Punkt, in dem sich alle Schwerlinien des Dreiecks schneiden, nennt man den Schwerpunkt des Dreiecks.

¹⁸Es ist zweckmäßig, in den Beispielen und Aufgaben über Schwerpunkte und Schwerlinien unter einem n -Eck stets ein konvexes Vieleck zu verstehen, bei dem drei aufeinander folgende Eckpunkte nicht kollinear sind. Die Definitionen und abgeleiteten Aussagen lassen sich auf n -Ecke ohne diese Nebenbedingungen ausdehnen. Das ist unter Verwendung der Mittel der analytischen Geometrie bzw. des Vektorbegriffes besonders leicht möglich.



Wir wollen jetzt unter den Schwerelinien eines Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ diejenigen Strecken verstehen, die seine Eckpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit den Schwerpunkten O_1, O_2, O_3, O_4 der von den übrigen drei Eckpunkten gebildeten Dreiecke verbinden (Abb. 52c).

Wir beweisen nun, dass sich die Schwerelinien eines Vierecks in einem Punkt schneiden und dort - von den Eckpunkten aus gerechnet - einander im Verhältnis 3:1 teilen:

Mit S bezeichnen wir den Schwerpunkt (Mittelpunkt) der Seite A_1A_2 und mit O_4 und O_3 die Schwerpunkte der Dreiecke $A_1A_2A_3$ bzw. $A_1A_2A_4$. Es sei O der Schnittpunkt der Schwerelinien A_3O_3 und A_4O_4 des Vierecks. Da SA_3 und SA_4 die Schwerelinien der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_2A_4$ sind, ist

$$\frac{\overrightarrow{SA_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{SA_4}}{\overrightarrow{SO_3}} = 3 \quad \text{also} \quad \frac{\overrightarrow{SA_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = \frac{\overrightarrow{SA_4}}{\overrightarrow{SO_3}}$$

Hieraus folgt aber $\overrightarrow{O_3O_4} \parallel \overrightarrow{A_3A_4}$ und

$$\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\overrightarrow{SA_3}} = \frac{\overrightarrow{O_4O_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = 3$$

Nach dem Strahlensatz folgt hiernach

$$\frac{\overrightarrow{OA_4}}{\overrightarrow{OO_4}} = \frac{\overrightarrow{OA_3}}{\overrightarrow{OO_3}} = \frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\overrightarrow{O_3O_4}} = -3$$

Somit werden je zwei benachbarte (d.h. von benachbarten Eckpunkten ausgehende) Schwerelinien des Vierecks durch ihren Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 geteilt.

Hieraus folgt, dass alle vier Schwerelinien des Vierecks durch den Punkt O hindurchgehen und durch ihn sämtlich im Verhältnis 3:1 geteilt werden. Den Schnittpunkt O der Schwerelinien des Vierecks nennt man den Schwerpunkt des Vierecks.

2. Wir setzen nun voraus, wir hätten schon für alle $k < n$ die Schwerelinien des k -Ecks als diejenigen Strecken definiert, welche die Eckpunkte des k -Ecks mit den Schwerpunkten der $(k - 1)$ -Ecke verbinden, die jeweils von den übrigen $k - 1$ Eckpunkten gebildet werden.

Für alle $k < n$ sei ferner der Schwerpunkt des k -Ecks als Schnittpunkt seiner Schwerelinien definiert. Wir setzen ferner als bereits bewiesen voraus, dass die Schwerelinien jedes k -Ecks für $k < n$ durch den Schwerpunkt des k -Ecks - von den Eckpunkten aus gerechnet - im Verhältnis $(k - 1) : 1$ geteilt werden.

Jetzt definieren wir die Schwerlinien des n -Ecks als diejenigen Strecken, welche die Eckpunkte des n -Ecks mit den Schwerpunkten der $(n - 1)$ -Ecke verbinden, die von den übrigen $n - 1$ Ecken gebildet werden. Unter diesen Annahmen beweisen wir, dass sich alle Schwerlinien des n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$ in einem Punkt schneiden und dort - von den Eckpunkten aus gerechnet - im Verhältnis $(n - 1) : 1$ geteilt werden.

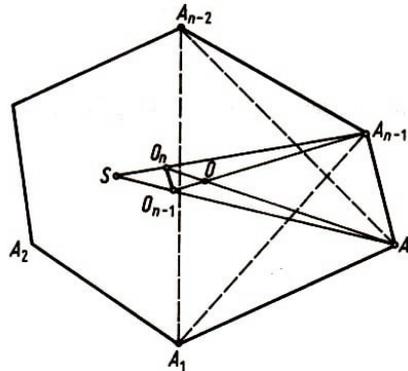


Abb. 53

Es sei S der Schwerpunkt des $(n - 2)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n-2}$. Dann werden die Strecken SA_{n-1} und SA_n Schwerlinien der $(n - 1)$ -Ecke $A_1A_2A_{n-1}$ und $A_1A_2\dots A_{n-2}A_n$ (Abb. 53). Sind O_n und O_{n-1} die Schwerpunkte dieser $(n - 1)$ -Ecke, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\frac{\overrightarrow{SA_{n-1}}}{\overrightarrow{SO_n}} = \frac{\overrightarrow{SA_n}}{\overrightarrow{SO_{n-1}}} = n - 1$$

Folglich ist

$$O_nO_{n-1} \parallel A_nA_{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}{\overrightarrow{O_nO_{n-1}}} = n - 1$$

Bezeichnen wir mit O den Schnittpunkt der Schwerlinien $O_{n-1}A_{n-1}$ und O_nA_n des n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$, so folgt nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overrightarrow{OA_{n-1}}}{\overrightarrow{OO_{n-1}}} = \frac{\overrightarrow{OA_n}}{\overrightarrow{OO_n}} = \frac{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}{\overrightarrow{O_{n-1}O_n}} = -(n - 1)$$

Somit werden je zwei benachbarte Schwerlinien des n -Ecks durch den Schnittpunkt innen im Verhältnis $(n - 1) : 1$ geteilt. Hieraus folgt aber, dass sich alle Schwerlinien des n -Ecks in einem Punkt schneiden und dort im Verhältnis $(n - 1) : 1$ geteilt werden. Jetzt können wir den Schwerpunkt des n -Ecks als Schnittpunkt seiner Schwerlinien definieren (und dann die Schwerlinien eines $(n + 1)$ -Ecks als diejenigen Strecken, welche die Eckpunkte des $(n + 1)$ -Ecks mit den Schwerpunkten der n -Ecke verbinden, die von den übrigen n Eckpunkten gebildet werden).

Die Methode der vollständigen Induktion erlaubt zu behaupten, dass unsere Definition der Schwerlinien und des Schwerpunktes des n -Ecks für jedes n sinnvoll ist.

Aufgabe 24. Im n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ bezeichnen wir mit O_1 den Schwerpunkt des $(n - 1)$ -Ecks $A_2A_3\dots A_n$, mit O_2 den Schwerpunkt des $(n - 1)$ -Ecks $A_1A_3\dots A_n$, ..., mit O_n den Schwerpunkt des $(n - 1)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n-1}$.

Man beweise, dass das n -Eck $O_1O_2\dots O_n$ aus dem gegebenen n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ durch eine Stauchung hervorgeht.

Unter einer Schwerelinie k -ter Ordnung eines n -Ecks ($k < n$) versteht man diejenige Strecke, die den Schwerpunkt eines aus k beliebigen Eckpunktes des n -Ecks gebildeten k -Ecks mit dem Schwerpunkt des aus den übrigen $n - k$ Eckpunkten gebildeten $(n - k)$ -Ecks verbindet, wobei sich die Reihenfolge der Eckpunkte dieser Vielecke aus der des n -Ecks ergibt.

Somit ist eine Schwerelinie k -ter Ordnung auch gleichzeitig eine Schwerelinie $(n - k)$ -ter Ordnung. Die Schwerelinien des n -Ecks, die im Beispiel 23 definiert wurden, könnte man Schwerelinien erster Ordnung nennen.

Aufgabe 25. Man beweise, dass sich alle Schwerelinien k -ter Ordnung eines n -Ecks in einem Punkt schneiden und dort im Verhältnis $(n - k) : k$ geteilt werden.

Aufgabe 26. Man formuliere die Behauptung der Aufgabe 25 für $n = 4$, $k = 2$.

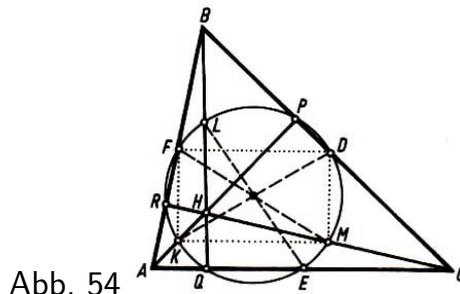


Abb. 54

Der Kreis, der durch die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks hindurchgeht (Abb. 54), heißt Eulerscher Kreis¹⁹ dieses Dreiecks. Er besitzt eine Reihe interessanter Eigenschaften (so z.B. geht der Eulersche Kreis außer durch die Mitten D , E , F der Seiten noch durch die Fußpunkte P , Q , R der Höhen AP , BQ und CR sowie durch die drei Punkte K , L , M , welche die Strecken AH , BH , CH halbieren, wobei H der Schnittpunkt der Höhen ist;²⁰ deshalb wird der Eulersche Kreis oft auch Neunpunktekreis des Dreiecks genannt.)

Da der Eulersche Kreis des Dreiecks ABC dem Dreieck DEF umschrieben ist, das

¹⁹In der Literatur wird dieser Kreis meist Feuerbachscher Kreis genannt, nach Karl Feuerbach (1800-1834). Wie uns I.M. Jaglom mitteilte, war dieser Kreis schon Leonhard Euler (1707-1783) bekannt. Deshalb scheint es ihm richtiger zu sein, vom Eulerschen Kreis zu sprechen. Das hat sich in den letzten fünfzig Jahren in der UdSSR bereits durchgesetzt.

²⁰Das Viereck $KFDM$ (Abb. 54) ist ein Rechteck, denn es gilt $FK \parallel BH \parallel DM$, weil KF und DM die Mittellinien der Dreiecke ABH und CBH mit der gemeinsamen Seite BH sind, $FD \parallel AC \parallel KM$, weil FD und KM die Mittellinien der Dreiecke ABC und AHC mit der gemeinsamen Seite AC sind, sowie $BH \perp AC$. Folglich sind die Strecken FM und DK kongruent und halbieren einander. Ebenso beweist man, dass auch die Strecke EL zu diesen kongruent ist und dass der Mittelpunkt von EL mit dem gemeinsamen Mittelpunkt von FM und DK zusammenfällt. Hieraus folgt, dass der Eulersche Kreis, der durch die Punkte D , E und F hindurchgeht, auch durch K , L und M verläuft: der Mittelpunkt dieses Kreises fällt mit dem gemeinsamen Mittelpunkt von DK , EL und FM zusammen, und der Durchmesser ist zu diesen Strecken kongruent.

Da nach dem bereits Bewiesenen K und D diametral gegenüberliegende Punkte des Eulerschen Kreises sind und der Winkel $\angle KPD$ ein rechter Winkel ist, geht der Eulersche Kreis durch den Punkt P hindurch. Ebenso lässt sich beweisen, dass er auch durch die Punkte Q und R verläuft.

ein Bild des Dreiecks ABC im Maßstab $1/2$ ist, beträgt sein Radius $R/2$. (Hier und im folgenden ist R der Radius des Umkreises des Ausgangsdreiecks ABC .)

Der Begriff des Eulerschen Kreises kann folgendermaßen auf beliebige einem Kreis einbeschriebene Vielecke verallgemeinert werden.

Aufgabe 27. 1. Ein Kreis vom Radius $R/2$, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Sehne A_1A_2 ist (Abb. 55a), heißt Eulerscher Kreis der Sehne A_1A_2 des Kreises \mathfrak{k} mit dem Radius R .

Die drei Eulerschen Kreise der Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ mit dem Umkreis \mathfrak{k} schneiden sich in einem Punkt O , welcher Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $R/2$ ist, der durch die Mittelpunkte der drei Eulerschen Kreise geht. Dieser Kreis heißt Eulerscher Kreis des Dreiecks $A_1A_2A_3$ (Abb. 55b).

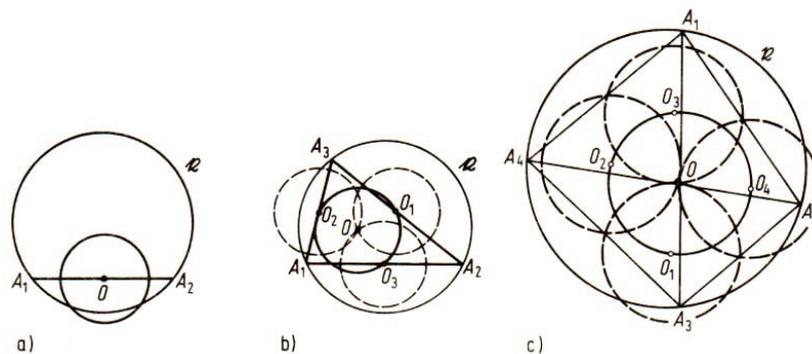


Abb. 55

2. Wir nehmen nun an, der Eulersche Kreis eines einem Kreis \mathfrak{k} einbeschriebenen n -Ecks sei definiert, und es sei bekannt, dass sein Radius $R/2$ beträgt (R Radius des Kreises \mathfrak{k}).

Nun betrachten wir das $(n+1)$ -Eck $A_1A_2A_3\dots A_{n+1}$, das dem Kreis \mathfrak{k} einbeschrieben ist. Dann schneiden sich die $n+1$ Eulerschen Kreise der n -Ecke $A_2A_3\dots A_{n+1}$, $A_1A_3\dots A_{n+1}$, ..., $A_1A_2\dots A_n$ in einem Punkt, welcher Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $R/2$ ist, der durch die Mittelpunkte aller $n+1$ Eulerschen Kreise geht.

Dieser Kreis heißt Eulerscher Kreis des $(n+1)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n+1}$ (vgl. Abb. 55c, in der der Eulersche Kreis eines Vierecks dargestellt ist).

Aufgabe 28. Es sei $A_1A_2\dots A_n$ ein beliebiges n -Eck, das einem Kreis \mathfrak{k} einbeschrieben ist. Man beweise, dass der Schwerpunkt des n -Ecks (vgl. Beispiel 23) auf derjenigen Strecke liegt, die den Mittelpunkt von \mathfrak{k} mit dem Mittelpunkt des Eulerschen Kreises des n -Ecks verbindet und diese Strecke im Verhältnis $2 : (n-2)$ teilt.

Aufgabe 29. 1. Es sei ein dem Kreis \mathfrak{k} einbeschriebenes Dreieck $A_1A_2A_3$ gegeben, und P sei ein beliebiger Punkt dieses Kreises. Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote, die vom Punkt P auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällt werden, auf einer Geraden liegen (Abb. 56); diese Gerade heißt Simsonsche Gerade des Punktes P bezüglich des Dreiecks $A_1A_2A_3$.²¹

²¹Robert Simson (1687-1768), schottischer Mathematiker; nicht zu verwechseln mit dem bedeutend bekannteren Londoner Mathematiker Thomas Simpson (1710-1761).

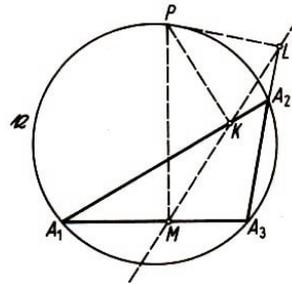


Abb. 56

2. Wir nehmen nun an, wir hätten bereits die Simsonsche Gerade eines Punktes P des Kreises k bezüglich jedes einbeschriebenen n -Ecks definiert. Es sei $A_1A_2\dots A_{n+1}$ ein dem Kreis k einbeschriebenes $(n + 1)$ - Eck.

Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote, die vom Punkt P auf die $n + 1$ Simsonschen Geraden dieses Punktes bezüglich aller möglichen n -Ecke, die von n Eckpunkten des $(n + 1)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n+1}$ gebildet werden, auf einer Geraden liegen.

Diese Gerade nennen wir die Simsonsche Gerade des Punktes P bezüglich des $(n + 1)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n+1}$.

Beispiel 24. 1. Es seien l_1, l_2, l_3, l_4 vier Geraden allgemeiner Lage, d.h., keine zwei von ihnen sind parallel und keine drei von ihnen gehen durch denselben Punkt.

Es bezeichne O_1 den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, das von den Geraden l_2, l_3, l_4 gebildet wird, O_2 den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, das von den Geraden l_1, l_3, l_4 gebildet wird, usw. Dann liegen die vier Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 (Abb. 57).

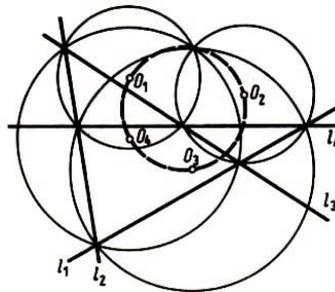


Abb. 57

2. Der Mittelpunktskreis von n Geraden sei schon definiert, und es seien $n + 1$ Geraden l_1, l_2, \dots, l_{n+1} allgemeiner Lage gegeben.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Mittelpunktskreises der n Geraden l_2, l_3, \dots, l_{n+1} mit O_1 , den Mittelpunkt des Mittelpunktskreises der n Geraden l_1, l_3, \dots, l_{n+1} mit O_2 usw. Dann liegen die $n + 1$ Punkte O_1, O_2, \dots, O_{n+1} auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der $n + 1$ Geraden l_1, l_2, \dots, l_{n+1} .

Beweis. 1. Es seien l_1, l_2, l_3, l_4 vier Geraden allgemeiner Lage (Abb. 59), A_{12} Schnittpunkt von l_3 und l_4 , ferner A_{13} Schnittpunkt von l_2 und l_4 usw.; O_1 sei der Mittelpunkt des Umkreises k_1 des Dreiecks, das von den Geraden l_2, l_3, l_4 gebildet wird, usw.

Wir beweisen zunächst, dass sich die Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 in einem Punkt M schneiden.

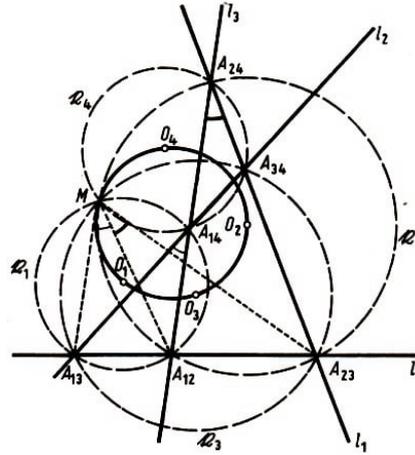


Abb. 58

Ist M Schnittpunkt von \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 und von A_{12} verschieden, dann gelten die folgenden gleichsinnigen Kongruenzen der gerichteten Winkel zwischen Geraden (vgl. [11], besonders S. 144);

$$(g_{MA_{13}}, g_{MA_{12}}) \cong (l_2, l_3) \quad ; \quad (g_{MA_{12}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_3, l_1)$$

Hieraus folgt $(g_{MA_{13}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_2, l_1)$, so dass auch \mathfrak{k}_3 durch M geht. Ebenso beweist man, dass auch \mathfrak{k}_4 durch M geht.

Jetzt können wir bereits beweisen, dass die Punkte O_1, O_2, O_3 und O_4 auf einem Kreis liegen. Wir betrachten die drei Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und \mathfrak{k}_3 die durch einen Punkt M gehen. Die Kreise \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_3 schneiden sich noch im Punkt A_{31} , die Kreise \mathfrak{k}_2 und \mathfrak{k}_3 im Punkt A_{23} . Hieraus folgt (vgl. die Lösung der Aufgabe 6)

$$(g_{O_3O_1}, g(O_3O_2)) \cong (g_{MA_{13}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_2, l_1)$$

Ebenso lässt sich auch $(g_{O_4O_1}, g(O_4O_2)) \cong (l_2, l_1)$ zeigen, und damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für n Geraden schon bewiesen, und betrachten jetzt $n + 1$ Geraden l_1, l_2, \dots, l_{n+1} allgemeiner Lage.

Es sei O_1 Mittelpunkt des Mittelpunktskreises \mathfrak{k}_1 der n Geraden l_2, l_3, \dots, l_{n+1} usw., O_{12} Mittelpunkt des Mittelpunktskreises \mathfrak{k}_{12} der $n - 1$ Geraden l_3, l_4, \dots, l_{n+1} usw.

Wir beweisen zunächst, dass sich die Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$ in einem Punkt M schneiden. Es sei M ein von O_{12} verschiedener Schnittpunkt der Kreise \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 . In diesem Fall haben wir (vgl. den Schluss von 1.)

$$(g_{MO_{13}}, g_{MO_{12}}) \cong (l_2, l_3) \quad , \quad (g_{MO_{12}}, g_{MO_{23}}) \cong (l_3, l_1)$$

Hieraus folgt

$$(g_{MO_{13}}, g_{MO_{23}}) \cong (l_2, l_1) \cong (g_{O_{34}O_{13}}, g_{O_{34}O_{23}})$$

d.h., dass der Kreis \mathfrak{k}_3 durch M geht. Genauso wird bewiesen, dass jeder der übrigen Kreise $\mathfrak{k}_4, \mathfrak{k}_5, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$ durch M geht.

Wir betrachten jetzt die drei Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und \mathfrak{k}_3 die durch den einen Punkt M gehen.

Die Kreise \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_3 schneiden sich noch im Punkt O_{13} , die Kreise \mathfrak{k}_2 , und \mathfrak{k}_3 im Punkt O_{23} .

Entsprechend den obigen Überlegungen gilt

$$(g_{O_3O_1}, g_{O_3O_2}) \cong (g_{MO_{13}}, g_{MO_{23}}) \cong (g_{O_{34}O_{13}}, g_{O_{34}O_{23}}) \cong (l_2, l_1)$$

Genauso zeigt man, dass auch für jeden der Punkte O_i ($i = 4, \dots, n + 1$)

$$(g_{O_iO_1}, g_{O_iO_2}) \cong (l_2, l_1)$$

gilt. Hieraus folgt aber, dass alle Punkte $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots, O_{n+1}$ auf einem Kreis liegen. Damit ist der Beweis von Beispiel 24 beendet.

In der Formulierung des Beispiels 24 kann man überall die Umkreise durch einbeschriebene Kreise ersetzen. Hier taucht jedoch eine zusätzliche Schwierigkeit auf, die damit zusammenhängt, dass zwar der Umkreis eines Dreiecks eindeutig (als Kreis durch die Eckpunkte) definiert ist, aber ein einbeschriebener Kreis (als Kreis, der alle Seiten des Dreiecks berührt) einer von vier Kreisen sein kann.

Alle drei Seiten werden nämlich von dem Inkreis und drei Ankreisen berührt.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, können wir folgendermaßen vorgehen. Wir führen gerichtete Geraden und Kreise in unserer Betrachtung ein, wobei auf jeder Linie der Durch- bzw. Umlaufsinn durch einen Pfeil festgelegt wird.

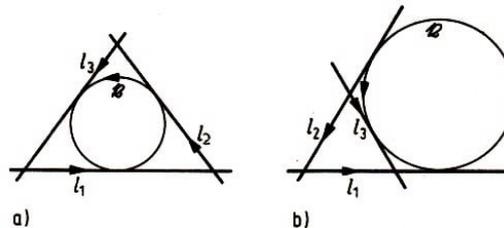


Abb. 59 a)

b)

Ferner werden wir gerichtete Geraden und Kreise genau dann als einander berührend ansehen, wenn auch ihre Richtungen im Berührungspunkt zusammenfallen. Dann existiert ein einziger gerichteter Kreis, der drei gegebene gerichtete Geraden l_1, l_2, l_3 , die sich nicht in einem Punkt schneiden, berührt (Abb. 59 a, b), der gerichtete einbeschriebene Kreis des von den gerichteten Geraden l_1, l_2 und l_3 gebildeten Dreiecks.

Man beweise die Behauptungen der Aufgaben 30 bis 34.

Aufgabe 30. 1. Es seien l_1, l_2, l_3 und l_4 vier gerichtete Geraden allgemeiner Lage (vgl. Beispiel 24), O_1, O_2, O_3 und O_4 die Mittelpunkte der gerichteten einbeschriebenen Kreise der Dreiecke, die von l_2, l_3 und l_4 , von l_1, l_3 und l_4 usw. gebildet werden. Dann liegen die vier Punkte O_1, O_2, O_3 und O_4 auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der vier gerichteten Geraden l_1, l_2, l_3 und l_4 (Abb. 60).

2. Der Mittelpunktskreis von n gerichteten Geraden sei schon definiert, und es seien $n + 1$ gerichtete Geraden allgemeiner Lage $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, l_{n+1}$ gegeben. Mit $O_1, O_2, \dots, O_n, O_{n+1}$ bezeichnen wir die Mittelpunkte der Mittelpunktskreise der $n + 1$ Systeme von n gerichteten Geraden, die man aus unseren $n + 1$ Geraden auswählen kann.

Dann liegen die $n + 1$ Punkte O_1, O_2, \dots, O_{n+1} auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der $n + 1$ gerichteten Geraden.

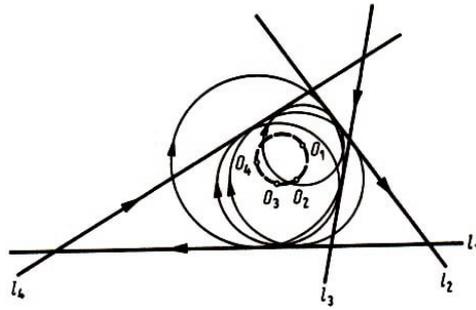


Abb. 60

Aufgabe 31. Definition des Orthozentrums eines einem Kreis einbeschriebenen Vielecks.

1. Als Orthozentrum eines Dreiecks wird bekanntlich der Höhenschnittpunkt bezeichnet.

2. Das Orthozentrum des dem Kreis k einbeschriebenen n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$ sei schon definiert, und es liege ein dem Kreis k einbeschriebenes $(n + 1)$ -Eck $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}$ vor.

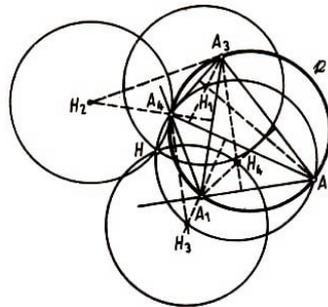


Abb. 61

Wir bezeichnen mit H_1, H_2, \dots, H_{n+1} die Orthozentren der $n + 1$ Vielecke $A_2A_3\dots A_{n+1}, A_1A_3\dots A_{n+1}, \dots, A_1A_2\dots A_n$. Dann schneiden sich die Kreise mit den Mittelpunkten H_1, H_2, \dots, H_{n+1} und den gleichen Radien wie k in einem Punkt H ; dieser Punkt wird dann Orthozentrum des $(n + 1)$ -Ecks $A_1A_2\dots A_{n+1}$ (vgl. das Orthozentrum des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ in Abb. 61) genannt.

Aufgabe 32. 1. Unter dem Zentralpunkt zweier (sich schneidender) Geraden wollen wir ihren Schnittpunkt verstehen (Abb. 62a).

Unter dem Zentralkreis dreier Geraden allgemeiner Lage (vgl. Beispiel 23) verstehen wir denjenigen Kreis, der durch die Zentralpunkte jedes Paares dieser Geraden geht (Abb. 62b).

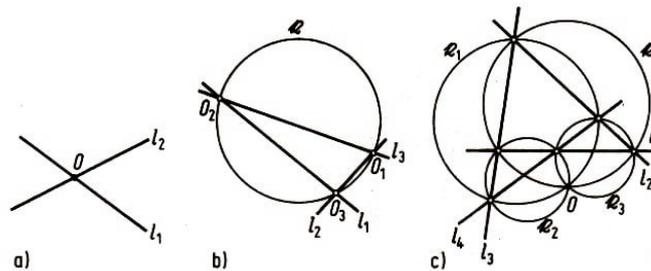


Abb. 62 a)

b)

c)

Es seien jetzt vier Geraden allgemeiner Lage l_1, l_2, l_3, l_4 gegeben. Wir bezeichnen mit k_1 den Zentralkreis der drei Geraden l_2, l_3, l_4 mit k_2 den Zentralkreis der drei Geraden

l_1, l_3, l_4 usw. Dann schneiden sich die vier Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4$ in einem Punkt O , den man Zentralpunkt der vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 nennt (Abb. 62c).

2. Wir nehmen nun an, der Zentralkreis von $2n - 1$ Geraden und der Zentralpunkt von $2n$ Geraden seien schon definiert, und es seien $2n + 1$ Geraden allgemeiner Lage $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ gegeben. Mit A_1 bezeichnen wir den Zentralpunkt der $2n$ Geraden $l_2, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$, mit A_2 den Zentralpunkt der $2n$ Geraden $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ usw., mit A_{2n+1} den Zentralpunkt der $2n$ Geraden l_1, l_2, \dots, l_{2n} . Dann liegen die Punkte $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ auf einem Kreis, den wir Zentralkreis der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ nennen.

Es seien schließlich $2n + 2$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ allgemeiner Lage gegeben. Wir bezeichnen mit \mathfrak{k}_1 den Zentralkreis der $2n + 1$ Geraden $l_2, l_3, \dots, l_{2n+2}$, mit \mathfrak{k}_2 den Zentralkreis der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_3, \dots, l_{2n+2}$ usw., mit \mathfrak{k}_{2n+2} den Zentralkreis der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}$.

Dann schneiden sich die Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{2n+1}, \mathfrak{k}_{2n+2}$ in einem Punkt, den wir den Zentralpunkt der $2n + 2$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ nennen.

Aufgabe 33. 1. Gegeben seien drei Geraden l_1, l_2, l_3 allgemeiner Lage. Der Mittelpunkt des Umkreises des von ihnen gebildeten Dreiecks heißt Zentralpunkt der drei Geraden.

Wir betrachten jetzt vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 allgemeiner Lage. Mit A_1 bezeichnen wir den Zentralpunkt der drei Geraden l_2, l_3, l_4 , mit A_2 den Zentralpunkt der drei Geraden l_1, l_3, l_4 usw.

Dann liegen die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einem Kreis (vgl. Beispiel 24), welcher Zentralkreis der vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 genannt wird.

2. Der Zentralpunkt von $2a - 1$ Geraden und der Zentralkreis von $2n$ Geraden seien schon definiert und es seien $2n + 1$ Geraden allgemeiner Lage $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ gegeben. Wir bezeichnen mit \mathfrak{k}_1 den Zentralkreis der $2n$ Geraden $l_2, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$, mit \mathfrak{k}_2 den Zentralkreis der $2n$ Geraden $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ usw., mit \mathfrak{k}_{2n+1} den Zentralkreis der $2n$ Geraden l_1, l_2, \dots, l_{2n} .

Dann schneiden sich die Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{2n+1}$ in einem Punkt, den wir Zentralpunkt der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ nennen.

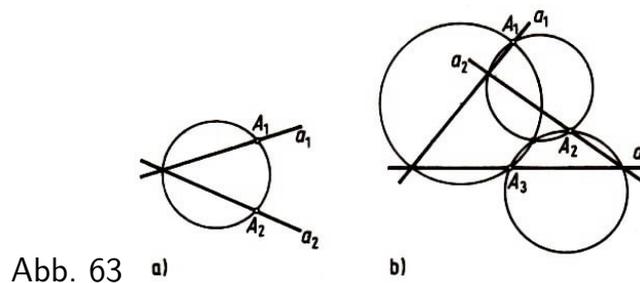
Es seien schließlich $2n + 2$ Geraden allgemeiner Lage $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ gegeben. Den Zentralpunkt der $2n + 1$ Geraden $l_2, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ bezeichnen wir mit A_1 , den Zentralpunkt der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ mit A_2 usw., den Zentralpunkt der $2n + 1$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ mit A_{2n+2} . Dann liegen die Punkte $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$ auf einem Kreis, den wir Zentralkreis der $2n + 2$ Geraden $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ nennen.

Unter einem Linienelement versteht man das Paar aus einem Punkt A und einer Richtung, d.h. einer Geraden a , die durch A hindurchgeht. Ein Linienelement wird mit (A, a) bezeichnet.

Die n Linienelemente $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ werden wir konzyklisch (von "Zyklus"-Kreis) nennen, wenn die Geraden a_1, a_2, \dots, a_n Geraden allgemeiner Lage sind (vgl. Beispiel 24) und die n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 34. 1. Als Richtungskreis zweier Linienelemente (A_1, a_1) und (A_2, a_2) , die so beschaffen sind, dass die Punkte A_1 und A_2 voneinander verschieden sind und die Geraden a_1 und a_2 sich schneiden, wird der Kreis bezeichnet, der durch die Punkte A_1 , A_2 und durch den Schnittpunkt von a_1 und a_2 geht (Abb. 63 a); wenn dabei etwa der Punkt A_1 mit dem Schnittpunkt von a_1 und a_2 übereinstimmt, dann verlangen wir noch, dass dieser Kreis die Gerade a_1 in A_1 berührt.

Die Richtungskreise dreier Paare von Linienelementen (A_1, a_1) und (A_2, a_2) , (A_1, a_1) und (A_3, a_3) , (A_2, a_2) und (A_3, a_3) (die so beschaffen sind, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 sämtlich voneinander verschieden sind und die Geraden a_1, a_2, a_3 allgemeine Lage haben) schneiden sich in einem Punkt, dem sogenannten Richtungspunkt der Linienelemente (A_1, a_1) , (A_2, a_2) und (A_3, a_3) (Abb. 63 b).



2. Der Richtungskreis von $2n-2$ konzyklischen Linienelementen und der Richtungspunkt von $2n-1$ Linienelementen seien schon definiert.

Wir betrachten $2n$ konzyklische Linienelemente. Die $2n$ Richtungspunkte aller möglichen Systeme von je $2n-1$ dieser konzyklischen Linienelemente liegen auf einem Kreis, dem Richtungskreis der $2n$ konzyklischen Linienelemente. Wenn man $2n+1$ konzyklische Linienelemente betrachtet, dann bestimmen alle Systeme von je n Linienelementen $2n+1$ Richtungskreise, die sich sämtlich in einem Punkt schneiden, dem Richtungspunkt der $2n+1$ konzyklischen Linienelemente.

1.6 Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl

Beim Studium der Stereometrie fällt eine gewisse Analogie zwischen Sätzen der Stereometrie und Sätzen der Planimetrie auf. So sind Eigenschaften des Parallelepipeds (bzw. Spates) in vielem Eigenschaften des Parallelogramms ähnlich; man betrachte z.B. die Sätze:

"Im Parallelepiped sind die gegenüberliegenden Seitenflächen kongruent, die Körperdiagonalen schneiden sich in einem Punkt und halbieren einander" und "Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten kongruent, und die Diagonalen halbieren einander");

Eigenschaften der Kugel sind Eigenschaften des Kreises ähnlich (man betrachte z.B. die Sätze:

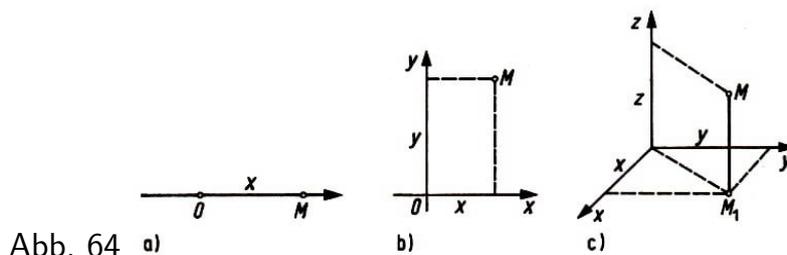
"Die Tangentialebene einer Kugel steht senkrecht auf dem Berührungsradius" und "Die Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem Berührungsradius").

Andererseits gibt es wesentliche Unterschiede zwischen den Eigenschaften ebener und räumlicher Figuren. Der Hauptunterschied besteht darin, dass die Figuren der Ebene

zwei Dimensionen ("Länge" und "Breite") besitzen, während die räumlichen Körper drei Dimensionen ("Länge", "Breite" und "Höhe") haben.

Dementsprechend lässt sich die Lage eines Punktes in der Ebene durch zwei Koordinaten x und y charakterisieren (Abb. 64b), während man zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raum drei Koordinaten x , y und z braucht (Abb. 64c).

Deshalb nennt man unseren gewöhnlichen Raum häufig den dreidimensionalen Raum ("Raum mit drei Dimensionen"), während man bei der Ebene sagt, sie sei ein zweidimensionaler Raum ("Raum mit zwei Dimensionen").



Diese Terminologie kann man noch weiter ausdehnen. Die Lage eines Punktes auf einer Geraden wird durch eine einzige Koordinate x charakterisiert (Abb. 64a).

Das hängt damit zusammen, dass auf einer Geraden alle Figuren (z.B. Strecken) nur eine Dimension ("Länge") besitzen. Deshalb nennt man eine Gerade einen eindimensionalen Raum. Das erlaubt zu sagen, die Dimension eines Raumes kann 1, 2 oder 3 sein.

Sätze der Stereometrie sind gewöhnlich schwieriger als die entsprechenden Sätze der Planimetrie. Die Eigenschaften ebener Figuren sind ihrerseits komplizierter als die Eigenschaften der Figuren der Geraden (Strecken).

Beim Beweis "dreidimensionaler" (d.h. stereometrischer) Sätze stützt man sich oft wesentlich auf die Kenntnis der entsprechenden "zweidimensionalen" (d.h. planimetrischen) Sätze.

Beispielsweise stützt sich der Beweis, dass die (Körper-)Diagonalen des Parallelepipeds einander halbieren, auf die entsprechende Eigenschaft der Diagonalen des Parallelogramms. Seinerseits stützt sich der Beweis "zweidimensionaler" Sätze manchmal auf den der analogen "eindimensionalen".

Dieser Umstand ermöglicht es, in einigen geometrischen Aufgaben die Methode der vollständigen Induktion nach der Dimensionszahl anzuwenden, die den aufeinanderfolgenden Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen und schließlich zum dreidimensionalen Raum umfasst. Beispiele solcher Art sind in diesem Abschnitt zusammengestellt.

In der modernen Mathematik und Physik spielt der Begriff des n -dimensionalen Raumes, in dem die Lage eines Punktes durch n Koordinaten festgelegt ist, eine große Rolle. Hierbei ist n eine beliebige natürliche Zahl, die auch größer als 3 sein kann (vgl. etwa [3], [4], [16]). Eigenschaften von Figuren im n -dimensionalen Raum beweist man oft durch vollständige Induktion nach der Dimension des Raumes.

Dabei können wir eigentlich nur beim Beweis " n -dimensionaler" Sätze mit beliebigem

natürlichen n mit vollem Recht von der "Methode der vollständigen Induktion" sprechen (denn nur dann kommt der "Satz 2", der zur Beschreibung dieser Methode verwendet wird und der die Möglichkeit des Übergangs von einem beliebigen $n = k$ zu dem nächsten Wert $n = k + 1$ behauptet, voll zur Geltung).

Die Methode der vollständigen Induktion ermöglicht es, alle Resultate dieses Abschnitts auf den n -dimensionalen Raum zu übertragen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Da aber der Begriff des n -dimensionalen Raumes über den Rahmen der mathematischen Vorkenntnisse hinausgeht, die beim Leser dieses Büchleins vorausgesetzt werden können, beschränken wir uns im folgenden auf die Fälle $n = 1, 2$ oder 3 (d.h. auf den Fall der Geraden, der Ebene und des gewöhnlichen Raumes).

Bei der Untersuchung der Beispiele und der Lösungen der Aufgaben dieses Abschnitts beachte man, dass dem Kreis in der Ebene (d.h. der Menge der Punkte, die von einem gegebenen Punkt O gleich weit entfernt sind, Abb. 65 b) im Raum die Kugel (Abb. 65 c) und auf der Geraden ein Paar von Punkten, die von O gleich weit entfernt sind (Abb. 65 a), entspricht.

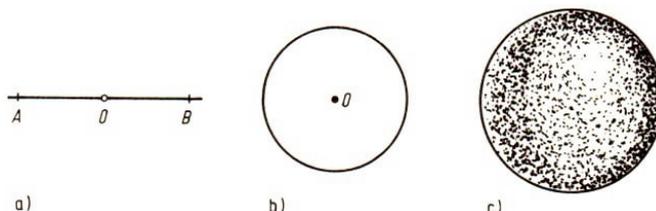


Abb. 65 a)

b)

c)

Der Kreisfläche in der Ebene entspricht im Raum der Kugelkörper und auf der Geraden die Strecke. Dem Dreieck ABC in der Ebene (Abb. 66 b) entspricht im Raum das Tetraeder (d.h. eine beliebige dreiseitige Pyramide mit den vier Eckpunkten $ABCD$ (Abb. 66 c) und in der Geraden die Strecke AB , welche die beiden "Eckpunkte" A, B besitzt (Abb. 66 a).

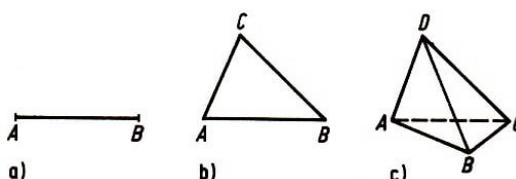


Abb. 66 a)

b)

c)

Es sei bemerkt, dass die Frage, welcher Satz der Stereometrie einem gegebenen Satz der Planimetrie entspricht, im allgemeinen nicht eindeutig beantwortet werden kann. Manchmal ist es zweckmäßig, anzunehmen, dem Dreieck in der Ebene entspreche nicht das Tetraeder - eine Figur, deren Dimension um 1 höher ist -, sondern wieder ein Dreieck, das im Raum liegt. Analog dazu kann man annehmen, einer Geraden in der Ebene entspreche im Raum eine Gerade oder eine Ebene.

Auf diese Weise kann man verschiedene "stereometrische Analoga" zu einem und demselben Satz der Planimetrie erhalten. Beispielsweise entsprechen dem Satz

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes M der Ebene von allen Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks mit dem Mittelpunkt O und dem Umkreisradius R

ist gleich $n(R^2 + l(OM)^2)$.²²

die beiden folgenden Sätze der Stereometrie:

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes M des Raumes von allen Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks mit dem Mittelpunkt O und dem Umkreisradius R ist gleich $n(R^2 + l(OM)^2)$."

und

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes M des Raumes von allen Eckpunkten eines regelmäßigen Polyeders mit n Eckpunkten, das einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R einbeschrieben ist, ist gleich $n(R^2 + l(OM)^2)$ ".

Beide Sätze sind richtig, und beide lassen sich aus dem entsprechenden "zweidimensionalen" in der Weise folgern, dass bei der Herleitung jeweils vollständige Induktion nach der Dimensionszahl benutzt wird. Wir wollen auf diese Fragen nicht näher eingehen, schlagen vielmehr dem Leser vor, den Übergang vom "eindimensionalen" zum "zweidimensionalen" und "dreidimensionalen" Satz in den Beispielen 27 und 34 mit dem in den Beispielen 25 und 32 zu vergleichen.

In allen Beispielen und Aufgaben dieses Abschnitts wird der "dreidimensionale" (stereometrische) Satz als der grundlegende betrachtet, obwohl häufig der entsprechende Satz, der sich auf den zweidimensionalen (ebenen) Fall bezieht, am interessantesten ist, und der Übergang vom zweidimensionalen zum dreidimensionalen Fall nur skizziert, aber nicht vollständig ausgeführt wird.

²²Nach dem Kosinussatz gilt für die fragliche Summe S zunächst

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \left(r^2 + l(OM)^2 - 2Rl(OM) \cos \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) \\ &= n(R^2 + l(OM)^2) - 2Rl(OM) \cdot \sum_{k=1}^n \cos \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung äquivalent dazu, dass die Summe

$$C_\alpha := \sum_{k=1}^n \cos \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

verschwindet. Nach einem Additionstheorem gilt

$$C_\alpha = \sum_{k=1}^n \cos \left(\cos \alpha \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin \alpha \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \cos \alpha \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin \alpha \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n}$$

Da $\sin \frac{2k\pi}{n} = -\sin \frac{2(n-k)\pi}{n}$ gilt, verschwindet der Subtrahend. Für eine gerade Zahl n ist analog $C_0 = 0$. Allgemein kann gesagt werden, dass eine Ummummerierung der Ecken

$$\cos \alpha C_0 = C_\alpha = C_{\alpha + \frac{2k\pi}{n}} = \cos \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) C_0$$

ergibt. Folglich verschwindet C_0 , und die behauptete Aussage besteht zu Recht.

1.6.1 Berechnung und Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl

Beispiel 25. In wieviel Teile wird der Raum von n Ebenen zerlegt, von denen sich je drei schneiden und keine vier gemeinsame Punkte haben (solche Ebenen werden wir "Ebenen allgemeiner Lage" nennen)?

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Man stelle fest, in wie viele Teile die Gerade durch n Punkte zerlegt wird. Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

Lösung. Wir bezeichnen diese Zahl mit $F_1(n)$. Offenbar ist $F_1(n) = n + 1$.

B. In wieviele Teile zerlegen n Geraden, von denen sich je zwei schneiden, während je drei keine gemeinsamen Punkte haben (n Geraden "allgemeiner Lage"), die Ebene?

Lösung. 1. Eine Gerade zerlegt ihre Ebene in zwei Teile.

2. Wir nehmen an, die Anzahl $F_2(n)$ der Teile, in welche n Geraden allgemeiner Lage die Ebene zerlegen, sei uns bekannt, und betrachten $n + 1$ Geraden allgemeiner Lage. Die ersten n Geraden zerlegen die Ebene in $F_2(n)$ Teile.

Die $(n + 1)$ -te Gerade l wird nach Voraussetzung von jeder der übrigen n Geraden in n verschiedenen Punkten geschnitten. Diese Punkte zerlegen die Gerade l in $F_1(n) = n + 1$ Teile (siehe A).

Folglich schneidet die Gerade l noch $n + 1$ früher erhaltene Teile der Ebene, d.h., zu den $F_2(n)$ Teilen kommen $F_1(n) = n + 1$ Teile hinzu. Damit ist

$$F_2(n + 1) = F_2(n) + F_1(n) = F_2(n) + (n + 1) \quad (8)$$

Setzen wir in Gleichung (8) die Werte $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ für n ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F_2(n) &= F_2(n - 1) + n \\ F_2(n - 1) &= F_2(n - 2) + (n - 1) \\ &\dots \\ F_2(3) &= F_2(2) + 3, \\ F_2(2) &= F_2(1) + 2. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $F_2(1) = 2$ erhalten wir durch Einsetzen

$$F_2(n) = F_2(1) + [n + (n - 1) + \dots + 2] = 1 + [n + (n - 1) + \dots + 2 + 1]$$

und schließlich

$$F_2(n) = 1 + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. 1. Eine einzige Ebene zerlegt den Raum in zwei Teile.

2. Wir setzen voraus, die Zahl $F_3(n)$ der Teile, in welche n Ebenen allgemeiner Lage den Raum zerlegen, sei bekannt, und betrachten $n + 1$ Ebenen allgemeiner Lage. Die

ersten n Ebenen zerlegen den Raum in $F_3(n)$ Teile. Die $(n + 1)$ -te Ebene π schneidet diese n Ebenen in n Geraden allgemeiner Lage; folglich wird n in $F_2(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$ Teile zerlegt (siehe B). Damit erhalten wir

$$F_3(n + 1) = F_3(n) + F_2(n) = F_3(n) + \frac{n^2n + 2}{2} \quad (9)$$

Ersetzen wir n in Gleichung (9) durch $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F_3(n) &= F_3(n - 1) + \frac{(n - 1)^2 + (n - 1) + 2}{2} \\ F_3(n - 1) &= F_3(n - 2) + \frac{(n - 2)^2 + (n - 2) + 2}{2} \\ &\dots \\ F_3(3) &= F_3(2) + \frac{2^2 + 2 + 2}{2} \\ F_3(2) &= F_3(1) + \frac{1^2 + 1 + 2}{2} \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_3(n) &= F_3(1) + \frac{1}{2}[(n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 1^2] + \frac{1}{2}[(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n-1 \text{ Zweien}}] \end{aligned}$$

und hieraus schließlich unter Berücksichtigung von $F_3(1) = 2$

$$F_3(n) = 2 + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{12} + \frac{(n - 1)n}{4} + (n - 1) = \frac{(n + 1)(n^2 - n + 6)}{6}$$

Aufgabe 35. In wieviel Teile wird der Raum von n Kugeln zerlegt, von denen je drei einander in zwei Punkten schneiden und keine vier durch einen Punkt gehen?

Beispiel 26. Man bestimme die Menge der Punkte des Raumes, bei denen die Summe der Quadrate der Abstände von n gegebenen Punkten A_1, A_2, \dots, A_n konstant (gleich d^2) ist.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben:

A. Auf einer Geraden seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n gegeben. Man bestimme diejenigen Punkte M der Geraden, für welche $l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = d^2$ ist, wobei d eine gegebene Länge ist.

Lösung. Wir wählen unsere Gerade als Zahlengerade. Die Punkte A_1, A_2, \dots, A_n mögen den Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n und der gesuchte Punkt M der Zahl x entsprechen. Nun können wir den Abständen M von A_1, M von A_2, \dots, M von A_n die Maßzahlen bezüglich einer Längeneinheit e zuordnen. Folglich gilt

$$l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2]e^2$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2 &= \\ &= x^2 - 2a_1x + a_1^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2 + \dots + x^2 - 2a_nx + a_n^2 \\ &= nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &= n \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \end{aligned}$$

Den Punkt mit der Koordinate $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ bezeichnen wir mit A ; dann gilt

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 &= \\ &= nl(MA)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)e^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}e^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Somit ist

$$nl(MA)^2 = d^2 - \left((a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right)$$

also

$$l(MA) = \sqrt{\frac{1}{n} \left[d^2 - \left((a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right) e^2 \right]}$$

Diese Gleichung definiert, wenn der Radikand positiv ist, zwei Punkte M , welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen; sie liegen auf verschiedenen Seiten des Punktes A .

B. Man bestimme die Menge der Punkte der Ebene, deren Summe der Quadrate der Abstände von n gegebenen Punkten A_1, A_2, \dots, A_n konstant (gleich d^2) ist.

Lösung.²³ Wir wählen in der Ebene ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem und bezeichnen die Projektionen der Punkte A_1, A_2, \dots, A_n auf die x -Achse und auf die y -Achse mit A'_1, A'_2, \dots, A'_n bzw. $A''_1, A''_2, \dots, A''_n$. Die Projektionen des Punktes M auf die Koordinatenachsen bezeichnen wir mit M' bzw. M'' . Dann gilt

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 &= l(M'A'_1)^2 + l(M''A''_1)^2 \\ l(MA_2)^2 &= l(M'A'_2)^2 + l(M''A''_2)^2 \\ &\dots \\ l(MA_n)^2 &= l(M'A'_n)^2 + l(M''A''_n)^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 &= l(M'A'_1)^2 + l(M'A'_2)^2 + \dots + l(M'A'_n)^2 \\ &\quad + l(M''A''_1)^2 + l(M''A''_2)^2 + \dots + l(M''A''_n)^2 \end{aligned}$$

²³Eine andere Lösung dieser Aufgabe wurde schon früher angegeben (vgl. Beispiel 22 und Aufgabe 20).

Nach (10) gilt

$$\begin{aligned} l(M'A'_1)^2 + l(M'A'_2)^2 + \dots + l(M'A'_n)^2 &= \\ &= nl(M'A')^2 + \left[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} \right] e^2 \\ l(M''A''_1)^2 + l(M''A''_2)^2 + \dots + l(M''A''_n)^2 &= \\ &= nl(M''A'')^2 + \left[(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right] e^2 \end{aligned}$$

wobei x_1, x_2, \dots, x_n die Abszissen und y_1, y_2, \dots, y_n die Ordinaten der Punkte A_1, A_2, \dots, A_n , ferner A' und A'' Punkte der x - bzw. y -Achse mit den Koordinaten

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

sind. Damit gilt

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 &= \\ &= nl(MA)^2 + \left[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right] e^2 \end{aligned} \quad (11)$$

wobei A der Punkt der Ebene ist, dessen Projektionen auf die Koordinatenachsen A' bzw. A'' sind. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} nl(MA)^2 &= d^2 - \left((x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right) e^2 \end{aligned}$$

also mit²⁴

$$\begin{aligned} \rho &= d^2 - \left((x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right) e^2 \\ l(MA) &= \sqrt{\frac{1}{n}\rho} \end{aligned}$$

Die gesuchte Figur ist also der Kreis mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{n}\rho}$ wenn der Radikand positiv ist. Die Figur besteht aus einem einzigen Punkt A , wenn der Radikand 0 ist, und enthält keinen Punkt, wenn der Radikand negativ ist.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Hinweis. Man betrachte im Raum ein kartesisches Koordinatensystem und projizierte alle Punkte auf die x, y -Ebene und auf die z -Achse. Ferner verwende man die Formeln (10) und (11).

²⁴Variable ρ in dieser Abschrift eingefügt

1.6.2 Definition und Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl

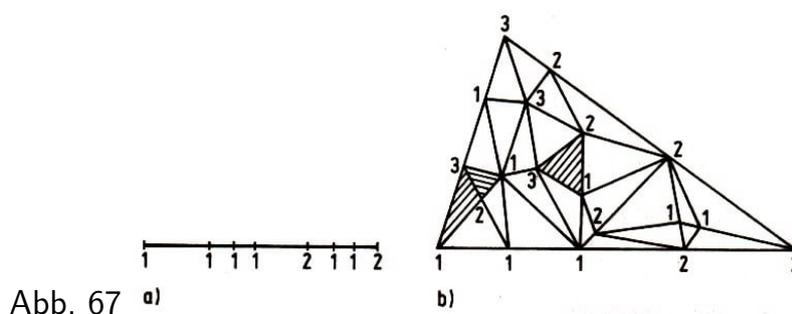
Beispiel 27. Ein Tetraeder, dessen vier Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 nummeriert sind, wird so in kleinere Tetraeder zerlegt, dass je zwei der Tetraeder der Zerlegung keine gemeinsamen Punkte oder einen gemeinsamen Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante (aber nicht einen Teil einer Kante) oder eine gemeinsame Seitenfläche (aber nicht einen Teil einer Seitenfläche) besitzen.

Alle Eckpunkte der so entstandenen kleinen Tetraeder werden wieder mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 nummeriert. Dabei werden diejenigen Eckpunkte, die auf einer Seitenfläche des großen Tetraeders liegen, mit den drei Ziffern nummeriert, mit denen die Eckpunkte dieser Seitenfläche nummeriert sind, während diejenigen Eckpunkte, die auf einer Kante des großen Tetraeders liegen, mit den beiden Ziffern nummeriert werden, mit denen die Eckpunkte dieser Kante nummeriert sind.

Man beweise, dass man wenigstens ein kleines Tetraeder finden kann, dessen vier Eckpunkte sämtlich mit verschiedenen Ziffern nummeriert sind.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben:

A. Eine Strecke, deren Eckpunkte mit den Ziffern 1 und 2 bezeichnet sind, wird durch einige sich nicht überlappende kleinere Strecken zerlegt. Alle Punkte der Zerlegung werden mit den Ziffern 1 oder 2 (Abb. 67 a) nummeriert. Man beweise, dass es wenigstens eine Strecke der Zerlegung gibt, deren Eckpunkte mit verschiedenen Ziffern bezeichnet sind.



Lösung. Wir zeigen, dass die Anzahl der Strecken, die mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet sind, ungerade ist. Hieraus folgt aber die Existenz einer solchen Strecke (denn 0 ist eine gerade Zahl). Mit A bezeichnen wir die Anzahl der Eckpunkte der Strecken der Zerlegung, die mit der Ziffer 1 bezeichnet sind.

Diese Zahl ist offenbar ungerade; denn jede Ziffer 1, die im Innern der großen Strecke steht (die Anzahl dieser Ziffern bezeichnen wir mit k), ist Eckpunkt von zwei Strecken der Zerlegung, und nur diejenige Ziffer 1, mit der ein Eckpunkt der großen Strecke bezeichnet ist, gehört genau einer Strecke der Zerlegung an.

Folglich ist $A = 2k + 1$. Ist andererseits p die Anzahl der 1,1-Strecken unter allen Strecken der Zerlegung und q die Anzahl der 1,2-Strecken, dann wird die Anzahl A der 1-Eckpunkte gleich $A = 2p + q$. Aus $2k + 1 = 2p + q$ ergibt sich, dass q ungerade ist.

B. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2 und 3 nummeriert sind, wird

so in kleinere Dreiecke zerlegt, dass zwei Dreiecke der Zerlegung entweder gar keine gemeinsamen Punkte oder einen gemeinsamen Eckpunkt oder eine gemeinsame Seite (aber nicht einen Teil einer Seite) haben.

Alle Eckpunkte des Dreiecks der Zerlegung werden mit den Ziffern 1, 2 und 3 nummeriert; dabei werden die Eckpunkte, die auf einer Seite des großen Dreiecks liegen, mit einer der Ziffern, mit denen die Eckpunkte dieser Seiten nummeriert sind, bezeichnet (Abb. 67 b). Man beweise, dass man wenigstens ein Dreieck der Zerlegung finden kann, dessen Ecken sämtlich mit verschiedenen Ziffern nummeriert sind.

Lösung. Wir zeigen, dass die Anzahl der 1,2,3-Dreiecke ungerade ist. Zu diesem Zweck berechnen wir die Gesamtzahl A der Seiten der Dreiecke der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2 nummeriert sind. Die Anzahl der 1,2-Strecken, die im Innern des ursprünglichen Dreiecks liegen, bezeichnen wir mit k , die Anzahl der Strecken, die auf der Seite $\overline{12}$ des großen Dreiecks liegen, mit l (auf den anderen Seiten des ursprünglichen Dreiecks kann keine der 1,2-Strecken liegen).

Weil jede der ersten k Strecken der Zerlegung zu zwei Dreiecken der Zerlegung und jede der l letzten Strecken zu einem Dreieck gehört, ist $A = 2k + l$.

Nun sei p die Anzahl der Dreiecke der Zerlegung, deren Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 2 oder 1, 2, 1 nummeriert sind, und q die Anzahl der 1,2,3-Dreiecke. Weil jedes der ersten p Dreiecke zwei 1,2-Seiten und jedes der q letzten eine solche Seite besitzt, ist $A = 2p + q$. Aus $2k + l = 2p + q$ folgt, dass q und l zugleich gerade oder ungerade sind. Die Zahl l ist aber nach Satz A ungerade; folglich ist auch q ungerade.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. Es sei A die Anzahl der Flächen der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet sind. Wenn k solche Flächen im Innern des ursprünglichen Tetraeders liegen und l auf der Seitenfläche 123, ist $A = 2k + l$.

Ist andererseits p die Zahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 1, 2, 3; 1, 2, 2, 3 oder 1, 2, 3, 3 nummeriert sind und q die Anzahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind, so ist $A = 2p + q$. Aus $2k + l = 2p + q$ folgt, dass die Zahlen q und l zugleich gerade oder ungerade sind. Die Zahl l ist aber nach B ungerade, folglich ist auch q ungerade.

In der Einführung zu diesem Abschnitt haben wir darauf hingewiesen, dass die vollständige Induktion nach der Dimensionszahl manchmal durch übliche vollständige Induktion ersetzt werden kann.

Wir führen hier entsprechende Beispiele an.

Beispiel 28. Man beweise den in Beispiel 27 A formulierten Satz mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl n der Strecken der Zerlegung.

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Zerlegung der Strecke in n kleinere Strecken bewiesen. Es sei eine Zerlegung der Strecke $\overline{12}$ in $n + 1$ kleinere Strecken gegeben. Sind nicht alle diese Strecken mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet, so gibt es eine

Strecke, deren Endpunkte mit einer einzigen Ziffer, etwa 1, 1, bezeichnet sind. Wir ziehen diese Strecke auf einen Punkt zusammen. Dann erhalten wir eine Zerlegung der Strecke $\overline{12}$ in n kleinere Strecken.

Nach Induktionsvoraussetzung finden wir in dieser Zerlegung und schließlich auch in der ersten Zerlegung wenigstens eine Strecke, die mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet wurde, was zu beweisen war.

Beispiel 29. Man beweise den in Beispiel 27 B formulierten Satz mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl n der Dreiecke der Zerlegung.

Lösung. 1. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Für $n = 2$ ist sie leicht zu verifizieren.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für jede Zerlegung des Dreiecks 123 in n oder weniger Dreiecke schon bewiesen.

Es sei eine Zerlegung des Dreiecks in $n + 1$ Dreiecke gegeben. Sind nicht alle diese Dreiecke mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet, so finden wir ein Dreieck, bei welchem zwei Eckpunkte die gleiche Nummer tragen, etwa 1.

Zur Seite $\overline{11}$ gehören entweder zwei Dreiecke der Zerlegung (wenn diese Seite im Innern des ursprünglichen Dreiecks liegt, Abb. 68 a) oder ein Dreieck (wenn diese Seite auf einer Seite des ursprünglichen Dreiecks liegt, Abb. 68 b).

Wir ziehen diese Strecke auf einen Punkt zusammen.

Dadurch erhalten wir eine neue Zerlegung des Dreiecks 123 in $n - 1$ (im ersten Fall, Abb. 68 c) oder in n (im zweiten Fall, Abb. 68 d) Dreiecke. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in dieser Zerlegung wenigstens ein Dreieck, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet sind; dann gibt es aber auch schon in der ersten Zerlegung ein solches Dreieck (Warum?).

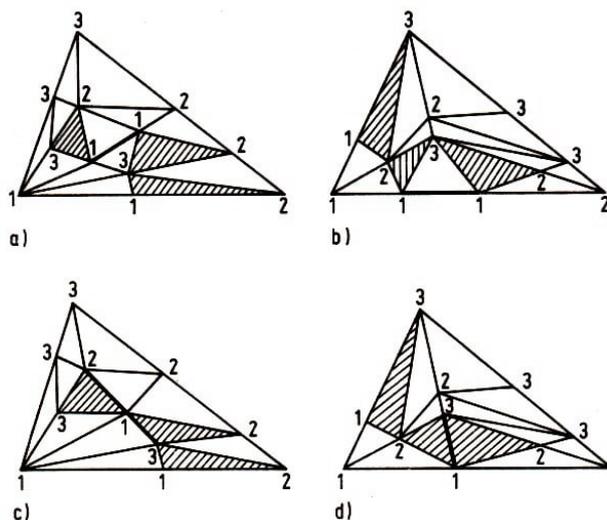


Abb. 68 c)

d)

Aufgabe 36. Man beweise den Satz des Beispiels 27 C mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Tetraeder der Zerlegung.

Den Satz des Beispiels 27 kann man noch präzisieren. Wir führen den Begriff der "Orientierung" eines Tetraeders ein, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 nummeriert

sind, indem wir die Tetraeder, für die - vom Eckpunkt 4 aus betrachtet - der Umlaufsinn des Dreiecks 123 (vom Eckpunkt 1 zum Eckpunkt 2 und dann zum Eckpunkt 3) mit dem Uhrzeigersinn übereinstimmt, von den Tetraedern unterscheiden für die dieser Umlaufsinn - vom Eckpunkt 4 aus betrachtet - sich vom Uhrzeigersinn unterscheidet. Dann gilt die Aussage der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 37. Man beweise, dass unter der Bedingung des Beispiels 27 die Zahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 nummeriert und so orientiert sind wie das Haupttetraeder, um 1 größer ist als die Anzahl der 1,2,3,4-Tetraeder, die davon verschieden orientiert sind.

Beispiel 30. Im Raum seien $n > 3$ Kugelkörper gegeben, von denen je vier einen gemeinsamen Punkt haben. Man beweise, dass ein Punkt existiert, der allen Kugelkörpern angehört.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Auf einer Geraden seien n Strecken gegeben, von denen jeweils zwei gemeinsame Punkte besitzen. Man beweise, dass ein Punkt existiert, der allen Strecken angehört.

Lösung. 1. Für $n = 2$ ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für je n Strecken schon bewiesen, und auf einer Geraden seien $n+1$ Strecken l_1, l_2, \dots, l_n gegeben, die der Voraussetzung des Satzes genügen. Nach Induktionsvoraussetzung haben die n Strecken l_1, l_2, \dots, l_n wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Wir bezeichnen ihren Durchschnitt (welcher offenbar ein Punkt oder eine Strecke ist) mit l .

Wir beweisen, dass die Strecken l_{n+1} und l wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben. Anderenfalls existiert ein Punkt A , der l_{n+1} und l_n trennt (Abb. 69 a).

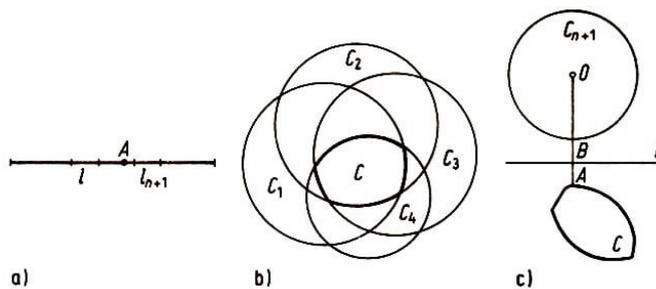


Abb. 69 a)

b)

c)

Jede der Strecken l_1, l_2, \dots, l_n enthält aber l und nach Voraussetzung wenigstens einen Punkt der Strecke l_{n+1} . Folglich enthält jede dieser Strecken den Punkt A ; folglich müsste A in l liegen.

Der erhaltene Widerspruch beweist, dass l_{n+1} und l gemeinsame Punkte haben. Der Durchschnitt von l und l_{n+1} gehört allen Strecken l_1, l_2, \dots, l_n an.

B. In der Ebene seien $n > 2$ Kreisflächen gegeben, von denen je drei gemeinsame Punkte besitzen. Man beweise, dass mindestens ein Punkt existiert, der in allen Kreisflächen liegt.

Lösung. 1. Für $n = 3$ ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für je n Kreisflächen schon bewiesen und in der Ebene seien $n + 1$ Kreisflächen $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die n Kreisflächen C_1, C_2, \dots, C_n wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Wir bezeichnen den Durchschnitt von C_1, C_2, \dots, C_n mit C (das ist ein Kreisbogenvieleck (Abb. 69 b); es kann auch zu einer Kreisfläche oder zu einem Punkt entarten).

Wir werden beweisen, dass die Figur C mit der Kreisfläche C_{n+1} gemeinsame Punkte hat. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann kann eine Gerade l gefunden werden, die die Figuren C_{n+1} und C trennt:

Es sei A der Punkt der Figur C , der dem Mittelpunkt O von C_{n+1} am nächsten liegt, und B der Schnittpunkt der Strecke OA mit dem Rand von C_{n+1} . (Ein solcher Punkt existiert im Innern der Strecke OA , da nach unserer Annahme der Abstand des Punktes A von O größer als der Radius von C_{n+1} ist.) Die Mittelsenkrechte von AB kann als Gerade l benutzt werden.²⁵

Da alle Kreisflächen C_1, C_2, \dots, C_n die Figur C enthalten und nach Voraussetzung gemeinsame Punkte mit C_{n+1} , treffen sie auch die Gerade l . Wir bezeichnen die Strecke, die C_1 aus der Geraden l schneidet, mit a_1 , die Strecke, die C_2 aus dieser Geraden schneidet, mit a_2 usw.

Auf der Geraden l werden wir dann n Strecken a_1, a_2, \dots, a_n haben. Je zwei der Strecken a_1, a_2, \dots, a_n haben wenigstens einen gemeinsamen Punkt: Wir betrachten zwei von ihnen, etwa a_1 und a_2 .

Es sei M ein beliebiger Punkt der Figur C , dann gehört der Punkt M sowohl C_1 als auch C_2 an. Da sich je drei von den gegebenen Kreisflächen schneiden, existiert ein Punkt N im Durchschnitt von C_1, C_2 und C_{n+1} . Dann gehört die Strecke MN ganz C_1 und C_2 an. Folglich wird ihr Schnittpunkt mit der Geraden l gemeinsamer Punkt der Strecken a_1 und a_2 .

Wie aus dem Satz A folgt, existiert auf der Geraden l ein Punkt, der allen Strecken a_1, a_2, \dots, a_n angehört, also auch C_1, C_2, \dots, C_n , folglich auch der Figur C . Das widerspricht der Konstruktion der Geraden l .

Demnach müssen C_{n+1} und C einen gemeinsamen Punkt haben, und dies ist ein gemeinsamer Punkt von $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. 1. Für $n = 4$ ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für je n Kugelkörper schon bewiesen, und

²⁵Wenn die Gerade l die Figuren C_{n+1} und C nicht trennt, befindet sich auf ihr ein Punkt K , der der Figur C angehört. Im Dreieck OAK ist der Winkel $\angle OAK$ ein spitzer; außerdem gilt $l(OA) \leq l(OK)$ nach Definition des Punktes A . Folglich wird der Fußpunkt L des Lotes von O auf die Gerade g_{AK} zwischen den Punkten A und K liegen, wobei $l(OL) < l(OA)$ gilt. Da die beiden Punkte A und K allen Kreisflächen C_1, C_2, \dots, C_n angehören, gilt das auch für die ganze Strecke AK ; folglich gehört auch ihr Punkt L jeder Kreisfläche C_1, C_2, \dots, C_n an, also liegt auch ihr Punkt L in der Figur C . Deshalb muss $l(OL) \geq l(OA)$ gelten. Dieser Widerspruch, nach welchem das Lot länger wäre als eine Schräge, beweist unsere Behauptung.

es seien $n + 1$ Kugelkörper $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ gegeben.

Den Durchschnitt der n Kugelkörper $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ (der nach Induktionsvoraussetzung nicht leer ist) bezeichnen wir mit Φ . Dann kann man wie in Beispiel 30 B zeigen:

Wenn der Kugelkörper Φ_{n+1} keinen Punkt von Φ enthält, dann existiert eine Ebene π , die Φ und Φ_{n+1} trennt. Die Figuren, in denen die einzelnen Kugelkörper $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ die Ebene π schneiden, sind Kreisflächen, von denen je drei gemeinsame Punkte besitzen. Folglich existiert in der Ebene π ein Punkt, der allen diesen Kreisflächen angehört und der also in Φ liegt. Das widerspricht der Definition der Ebene π .

Der Satz des Beispiels 30 kann statt mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl auch direkt mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kreisflächen bewiesen werden.

Beispiel 31. Man beweise den Satz des Beispiels 30 B mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kreisflächen.

Lösung. Wir beweisen den entsprechenden Satz für Kreisbogenvielecksflächen, d.h. für Figuren, die Durchschnitt endlich vieler Kreisflächen, d.h. für Figuren, die Durchschnitt endlich vieler Kreisflächen sind; hieraus wird als Spezialfall unsere ursprüngliche Behauptung folgen:

1. Für $n = 3$ ist die Behauptung offenbar richtig.

Gegeben seien vier Kreisbogenvielecksflächen C_1, C_2, C_3, C_4 , von denen sich je drei schneiden. Wir bezeichnen mit A_1 einen gemeinsamen Punkt der Figuren C_2, C_3 und C_4 , mit A_2 einen gemeinsamen Punkt der Figuren C_1, C_3 und C_4 usw. Es sind zwei Fälle möglich:

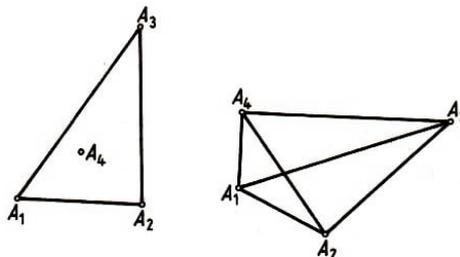


Abb. 70 a)

b)

a) Einer der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 , etwa A_4 , gehört der (eventuell zu einer Strecke entarteten) Dreiecksfläche an, die durch die übrigen drei Punkte bestimmt wird (Abb. 70a). Da das Dreieck $A_1A_2A_3$ ganz zu C_4 gehört, ist auch A_4 ein Punkt der Figur C_4 ; folglich ist A_4 gemeinsamer Punkt aller vier Figuren C_1, C_2, C_3, C_4 .

b) Keiner der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gehört der Dreiecksfläche an, die von den übrigen Punkten bestimmt wird. Dann wird der Schnittpunkt A der Diagonalen des (konvexen) Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ (Abb. 70 b) als gemeinsamer Punkt der Dreiecksflächen $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ und $A_2A_3A_4$ gemeinsamer Punkt aller vier Figuren C_1, C_2, C_3, C_4 .

2. Unsere Behauptung sei für n Kreisbogenvielecksflächen schon bewiesen. Wir betrachten jetzt $n + 1$ Kreisbogenvielecksflächen $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$. Mit C bezeichnen

wir den Durchschnitt der Figuren C_n und C_{n+1} (offenbar ist C ebenfalls eine Kreisbogenwiecksfläche) und beweisen, dass sich je drei der n Figuren $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C$ schneiden; nach Voraussetzung existiert zu je drei der Figuren C_1, C_2, \dots, C_{n-1} wenigstens ein gemeinsamer Punkt; wir betrachten jetzt C und zwei weitere dieser Figuren, etwa C_1, C_2, C . Da sich von den Figuren C_1, C_2, C_n, C_{n+1} je drei schneiden, haben diese vier Figuren nach 1. einen gemeinsamen Punkt, und dies ist ein gemeinsamer Punkt der Figuren C_1, C_2 und C .

Da sich je drei der n Figuren C_1, C_2, \dots, C_n, C schneiden, haben nach Induktionsvoraussetzung alle diese Figuren einen gemeinsamen Punkt, der auch gemeinsamer Punkt der $n + 1$ Figuren $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ ist.

Aufgabe 38. Man beweise die Aussage des Beispiels 30 C mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kugelkörper.

Aufgabe 39. In der Ebene seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n gegeben, und der Abstand zwischen je zwei von ihnen sei nicht größer als die Längeneinheit e . Man beweise, dass alle diese Punkte in einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}e$ enthalten sind (Satz von Young²⁶).

Aufgabe 40. Im Raum seien n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n gegeben, und der Abstand zwischen je zwei von ihnen sei nicht größer als die Längeneinheit e . Man beweise, dass alle diese Punkte in einem Kugelkörper mit dem Radius $\frac{\sqrt{6}}{4}e$ enthalten sind.

Eine Verallgemeinerung der Aussage des Beispiels 30 und zahlreiche Anwendungen findet man in [9].²⁷

Beispiel 32. Wir betrachten endlich viele Halbräume²⁸, die den ganzen Raum ausfüllen. Man beweise, dass man aus ihnen vier (oder weniger) Halbräume auswählen kann, die schon den ganzen Raum ausfüllen.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Eine Gerade sei von endlich vielen Halbgeraden (Strahlen) überdeckt. Man beweise, dass man aus ihnen zwei Halbgeraden auswählen kann, die schon die Gerade überdecken.

Lösung. Es sei A der Anfangspunkt, der bei allen "nach links gerichteten" Halbgeraden am weitesten "rechts" liegt, und B der Anfangspunkt, der bei allen "nach rechts gerichteten" Halbgeraden am weitesten "links" liegt. Da die Halbgeraden nach Voraussetzung die Gerade überdecken, liegt der Punkt B nicht rechts von A , und die beiden Halbgeraden mit den Anfangspunkten A und B überdecken die Gerade vollständig.

²⁶J.W. Young (1863-1942), englischer Mathematiker.

²⁷Die Aussage in Beispiel 30 B ist auch dann noch richtig, wenn statt der Kreisfläche beliebige konvexe Figuren betrachtet werden. (Das ist nach dem Beweis zum Beispiel 30 unmittelbar einzusehen.) Dieser allgemeinere Satz ist als Satz von Helly bekannt.

²⁸Jede Ebene zerlegt die Menge der übrigen Punkte des Raumes in zwei Teile, sogenannte Halbräume, derart, dass die Verbindungsstrecke je zweier Punkte, die in verschiedenen Teilen des Raumes liegen, die Ebene trifft und die Verbindungsstrecke zweier Punkte aus ein und demselben Raumteil die Ebene meidet. Die Ebene wird Trägerebene dieser Halbräume genannt.

B. Die ganze Ebene werde von endlich vielen Halbebenen²⁹ überdeckt. Man beweise, dass man aus ihnen zwei oder drei Halbebenen auswählen kann, die schon die ganze Ebene überdecken.

Lösung. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Halbebenen.

1. Für $n = 3$ ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir nehmen nun an, unsere Behauptung sei für n Halbebenen wahr, und es seien $n + 1$ Halbebenen $F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}$ gegeben, welche die ganze Ebene überdecken. Die Trägergeraden dieser Halbebenen bezeichnen wir mit $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$. Es sind zwei Fälle möglich:

Fall 1. Die Gerade l_{n+1} ist ganz in einer der gegebenen Halbebenen enthalten, etwa in F_n . Dann sind die Geraden l_n und l_{n+1} parallel. Liegen die Halbebenen F_n und F_{n+1} auf verschiedenen Seiten ihrer Trägergeraden (Abb. 71 a), dann überdecken schon die Halbebenen F_n und F_{n+1} die Ebene.

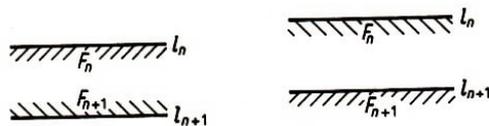


Abb. 71 a) b)

Anderenfalls ist eine dieser beiden Halbebenen ganz in der anderen enthalten (beispielsweise F_{n+1} in F_n ; Abb. 71 b), und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung, weil in diesem Fall schon n Halbebenen (in unseren Fall F_1, F_2, \dots, F_n) die ganze Ebene überdecken.

Fall 2. Die Gerade l_{n+1} ist in keiner der Halbebenen F_1, F_2, \dots, F_n enthalten. Diese Halbebenen überdecken die Gerade l_{n+1} und schneiden aus ihr m ($\leq n$) Halbgeraden heraus, die l_{n+1} überdecken.

Wie wir in A sahen, kann man aus diesen Halbgeraden zwei auswählen, die ebenfalls schon die Gerade überdecken. Die entsprechenden Halbebenen seien F_{n-1} und F_n . Wir betrachten jetzt die beiden möglichen Fälle der gegenseitigen Anordnung der Halbebenen F_{n-1}, F_n und F_{n+1} einzeln:

a) Die Halbebene F_{n+1} enthält den Schnittpunkt der Geraden l_{n-1} und l_n (Abb. 72 a). Dann überdecken schon die drei Halbebenen F_{n-1}, F_n und F_{n+1} die Ebene.

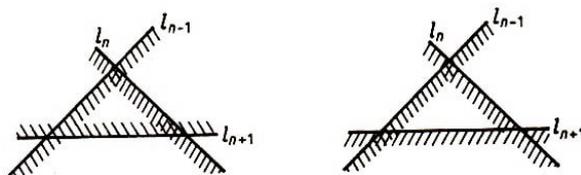


Abb. 72 a) b)

²⁹Jede Gerade einer Ebene zerlegt die Menge der übrigen Punkte der Ebene in zwei Teile, sogenannte Halbebenen, derart, dass die Verbindungsstrecke je zweier Punkte aus verschiedenen Teilen die Gerade trifft und die je zweier Punkte aus ein und demselben Teil der Ebene die Gerade meidet. Die Gerade wird Trägergerade dieser Halbebenen genannt.

b) Die Halbebene F_{n+1} enthält den Schnittpunkt der Geraden l_{n-1} und l_n nicht (Abb. 72 b). Dann wird die Ebene von den n Halbebenen F_1, F_2, \dots, F_n überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der gegebenen Halbräume.

1. Für $n = 4$ ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für n Halbräume wahr, und es seien $n + 1$ Halbräume $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$ gegeben, die den Raum überdecken. Die Trägerebenen dieser Halbräume bezeichnen wir mit $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}$. Es sind zwei Fälle möglich:

Fall 1. Die Ebene π_{n+1} ist völlig in einem der Halbräume V_1, V_2, \dots, V_n enthalten, etwa in V_n . Dann sind die Ebenen π_{n+1} und π_n parallel. Wenn die Halbräume V_{n+1} und V_n auf verschiedenen Seiten ihrer Trägerebenen liegen, überdecken schon diese beiden Halbräume den ganzen Raum. Anderenfalls ist einer der beiden Halbräume ganz in dem anderen enthalten, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Fall 2. Die Ebene π_{n+1} ist nicht in einem der Halbräume V_1, V_2, \dots, V_n enthalten. Dann wird sie von diesen Halbräumen, die aus ihr $m \leq n$ Halbebenen F_1, F_2, \dots, F_m ausscheiden, vollständig überdeckt. Nach B kann man aus diesen Halbebenen zwei oder drei auswählen, die bereits π_{n+1} überdecken (Abb. 71a und 72a). Wir betrachten die hier möglichen Fälle einzeln:

a) Die Ebene π_{n+1} wird von zwei Halbebenen (Abb. 71 a) überdeckt, etwa von F_1 und F_2 , wobei die entsprechenden Ebenen π_1 und π_2 parallel sind (Abb. 73a). Dann wird der ganze Raum von den beiden Halbräumen V_1 und V_2 ausgefüllt.

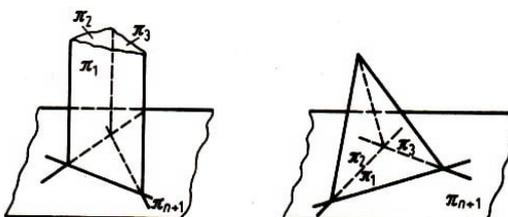
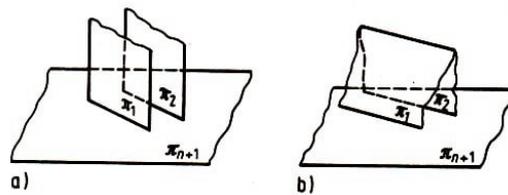


Abb. 73

b) Die Ebene π_{n+1} wird etwa von den beiden Halbebenen F_1 und F_2 überdeckt und die entsprechenden Ebenen π_1 und π_2 schneiden sich (Abb. 73b). Wenn der Halbraum V_{n+1} die Schnittgerade der Ebenen π_1 und π_2 enthält, dann füllen die drei Halbräume V_1, V_2 und V_{n+1} den ganzen Raum aus. Anderenfalls wird der Halbraum V_{n+1} durch die Halbräume V_1 und V_2 überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

c) Die Ebene π_{n+1} wird von drei Halbebenen (Abb. 72a), etwa F_1, F_2 und F_3 überdeckt, wobei die Ebene π_3 zur Schnittgeraden der Ebenen π_1 und π_2 parallel ist. Die entsprechenden Ebenen bilden ein "Prisma" (Abb. 73c). Dann füllen die drei Halbräume V_1, V_2 und V_3 den ganzen Raum aus.

d) Die Ebene π_{n+1} wird etwa von den drei Halbebenen F_1, F_2 und F_3 überdeckt. Die Ebene π_3 ist nicht der Schnittgeraden der Ebenen π_1, π_2 parallel. Die Ebenen π_1, π_2, π_3 und π_{n+1} bilden eine "Pyramide" (Abb. 73d).

Wenn der Halbraum V_{n+1} den Schnittpunkt der Ebenen π_1, π_2 und π_3 enthält, füllen die vier Halbräume V_1, V_2, V_3 und V_{n+1} den Raum aus. Anderenfalls wird der Halbraum V_{n+1} von den Halbräumen V_1, V_2 und V_3 überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 41. Man beweise, dass im Raum nicht mehr als vier Halbgeraden (Strahlen) existieren können, die paarweise zwischen sich stumpfe Winkel bilden.

Beispiel 33. Man beweise die Existenz einer Zahl C_3 , derart, dass die Seiten jedes räumlichen Vielecks $A_1A_2\dots A_n$, wenn sie sämtlich höchstens gleich der Längeneinheit sind, ohne Änderung ihrer Größe und ihrer Richtung so umgeordnet werden können, dass das entstehende Vieleck in einen Kugelkörper mit dem Radius C_3 eingeschlossen werden kann.

Wie überall in diesem Abschnitt betrachten wir zuerst entsprechende "eindimensionale" und "zweidimensionale" Aufgaben.

A. Man beweise: Es gibt eine Länge C_1 derart, dass für jeden geschlossenen Streckenzug $A_1A_2\dots A_n$ in einer Geraden, bei dem die Länge jeder der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ die Längeneinheit nicht übertrifft, ein geschlossener Streckenzug $B_1B_2\dots B_n$ und eine eindeutige Zuordnung seiner Seiten zu den Seiten von $A_1A_2\dots A_n$ existieren, bei der einander zugeordnete gerichtete Seiten $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ den gleichen Vektor bestimmen ($\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \# \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$) und $B_1B_2\dots B_n$ in einer Strecke der Länge $2C_1$ enthalten ist.

Lösung. Wir vereinbaren, die Länge a_i der Seite A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$; unter A_{n+1} verstehen wir den Punkt A_1) unseres geschlossenen Streckenzuges $A_1A_2\dots A_n$ positiv zu zählen, wenn der Punkt A_{i+1} rechts von A_i liegt (wir wählen unsere Gerade, auf der alle Punkte liegen, waagrecht), und negativ im anderen Fall; a_i ist also der gerichtete Abstand von A_i nach A_{i+1} .

Dann ist $a_1 + a_2$ der gerichtete Abstand von A_1 und A_3 (der nach unserer Verabredung positiv oder negativ werden kann), $a_1 + a_2 + a_3$ der gerichtete Abstand von A_1 nach $A_4, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ der gerichtete Abstand von A_1 nach A_n und $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0$ der gerichtete Abstand von A_1 nach A_1 .

Nach der Voraussetzung über den geschlossenen Streckenzug $B_1B_2\dots B_n$ kann unsere Aussage wie folgt formuliert werden:

Es seien n positive bzw. negative Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ gegeben. Die Beträge dieser n Zahlen übertreffen die Zahl 1 nicht, und ihre Summe ist gleich Null. Man beweise, dass diese Zahlen in eine solche Reihenfolge $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}$ umgestellt werden können

(hier sind i_1, i_2, \dots, i_n die Zahlen $1, 2, \dots, n-1, n$ aber in anderer Reihenfolge), dass alle Summen $a_{i_1}, a_{i_1} + a_{i_2}, \dots, a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$ dem Betrag nach eine Zahl C_1 (die von der Reihenfolge a_1, a_2, \dots, a_n und von der Zahl n nicht abhängt) nicht übertreffen.

Wir beweisen, dass $C_1 = 1$ gewählt werden kann. Es seien a'_1, a'_2, \dots, a'_p alle positiven Zahlen der Folge a_1, a_2, \dots, a_n und $a''_1, a''_2, \dots, a''_q$ die übrigen Glieder dieser Folge ($p+q = n$).

Wir nehmen so viele der ersten positiven Zahlen a'_1, a'_2, \dots, a'_k ($k < p$), dass ihre Summe die Zahl 1 nicht übertrifft (z.B. nur die Zahl a'_1). Danach fügen wir so viele der negativen Zahlen $a''_1, a''_2, \dots, a''_l$ ($l \leq q$) hinzu, dass die Summe aller verwendeten Zahlen negativ, aber dem Betrage nach nicht größer als 1 wird.

Nun wenden wir uns von neuem den positiven Zahlen zu usw., bis wir alle gegebenen Zahlen verbraucht haben. Die dabei erhaltene Folge

$$a_1^* = a'_1, a_2^* = a'_2, \dots, a_k^* = a'_k, a_{k+1}^* = a''_1, a_{k+2}^* = a''_2, \dots, a_{k+l}^* = a''_l, \dots$$

besitzt die geforderte Eigenschaft.

Den eben bewiesenen Satz über n positive bzw. negative Zahlen können wir auch in einer anderen Form aussprechen:

Die Ecken unseres Streckenzuges bestimmen Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ derart, dass A_i durch α_i in A_{i+1} abgebildet wird. Die Beträge dieser n Vektoren übertreffen die Zahl 1 nicht, und ihre Summe ist gleich dem Nullvektor.

Diese Vektoren können in eine solche Reihenfolge $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$ umgestellt werden, dass alle Summen $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}$ dem Betrag nach die Zahl $C_1 = 1$ nicht übertreffen.

B. Man beweise: Es gibt eine Länge C_2 derart, dass in einer Ebene für jeden geschlossenen Streckenzug $A_1A_2\dots A_n$, bei dem die Länge der Seiten die Längeneinheit nicht übertrifft (Abb. 74), ein geschlossener Streckenzug $D_1D_2\dots D_n$ und eine eindeutige Zuordnung seiner Seiten zu den Seiten von $A_1A_2\dots A_n$ existieren, bei der einander zugeordnete gerichtete Seiten $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ und

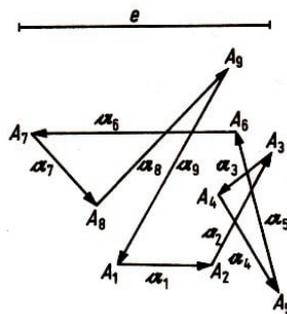


Abb. 74

$\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ den gleichen Vektor bestimmen ($\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \neq \overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ und $D_1D_2\dots D_n$ in einer Kreisfläche vom Radius C_2 enthalten ist).

Lösung. Wir beweisen, dass man für C_2 stets $\sqrt{5}$ Längeneinheiten wählen kann. Die Ecken eines beliebigen Streckenzuges bestimmen Vektoren $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ derart, dass A_i durch α_i in A_{i+1} abgebildet wird (Abb. 74).

Wir wählen aus den Vektoren einige, mit $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_s$ bezeichnete Vektoren derart aus, dass $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \dots + \mathfrak{b}_s$ maximalen Betrag besitzt bzw. dass die die Figur schließende Strecke $B_1 B_{s+1}$ größtmögliche Länge hat (Abb. 75).

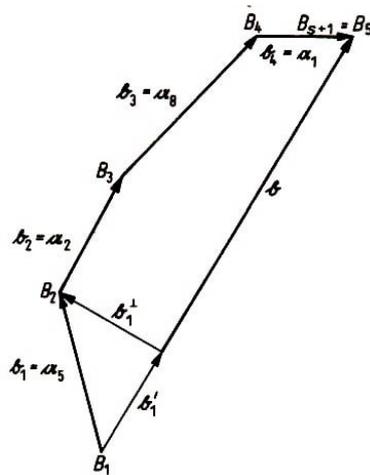


Abb. 75

Die übrigen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{b}_{s+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$. Es gilt

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \dots + \mathfrak{b}_n = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \dots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

Wir zerlegen jeden der Vektoren \mathfrak{b}_ν in seine Parallelkomponente \mathfrak{b}'_ν und seine Normalkomponente \mathfrak{b}_ν^\perp bezüglich \mathfrak{b} , d.h., es gilt $\mathfrak{b}'_\nu \parallel \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_\nu^\perp \perp \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}'_\nu + \mathfrak{b}_\nu^\perp$. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}'_1 + \mathfrak{b}'_2 + \dots + \mathfrak{b}'_s &= \mathfrak{b} & , & & \mathfrak{b}_1^\perp + \mathfrak{b}_2^\perp + \dots + \mathfrak{b}_s^\perp &= \mathfrak{o} \\ \mathfrak{b}'_{s+1} + \dots + \mathfrak{b}'_n &= -\mathfrak{b} & , & & \mathfrak{b}_{s+1}^\perp + \dots + \mathfrak{b}_n^\perp &= \mathfrak{o} \end{aligned}$$

sowie $|\mathfrak{b}'_\nu| \leq 1$ und $|\mathfrak{b}_\nu^\perp| \leq 1$ für $\nu = 1, \dots, n$.

Nach A können $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_s$ bzw. $\mathfrak{b}_{s+1}, \dots, \mathfrak{b}_n$ derart zu $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_s$ bzw. $\mathfrak{c}_{s+1}, \dots, \mathfrak{c}_n$ umgeordnet werden, dass

$$\begin{aligned} |\mathfrak{c}_1^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\mu^\perp| &\leq 1 & \text{für} & & \mu &= 1, 2, \dots, s \\ |\mathfrak{c}_{s+1}^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\nu^\perp| &\leq 1 & \text{für} & & \nu &= s+1, \dots, n \end{aligned}$$

gilt.

Wiederum nach A können wir die Vektoren $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n$ derart zu Vektoren $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_n$ umordnen, dass erstens die Reihenfolge $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_s$ bzw. $\mathfrak{c}_{s+1}, \dots, \mathfrak{c}_n$ erhalten bleibt und zweitens

$$|\mathfrak{d}'_1 + \dots + \mathfrak{d}'_\nu| \leq 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n$$

gilt. Wir erhalten nach dem Satz des Pythagoras und nach der Dreiecksungleichung für Vektoren folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{d}_1 + \dots + \mathfrak{d}_\lambda|^2 &= |\mathfrak{d}'_1 + \dots + \mathfrak{d}'_\lambda|^2 + |\mathfrak{d}_1^\perp + \dots + \mathfrak{d}_\lambda^\perp|^2 \\ &\leq 1 + |\mathfrak{c}_1^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\mu^\perp + \mathfrak{c}_{s+1}^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\nu^\perp|^2 \\ &\leq 1 + (|\mathfrak{c}_1^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\mu^\perp| + |\mathfrak{c}_{s+1}^\perp + \dots + \mathfrak{c}_\nu^\perp|)^2 \leq 5 \end{aligned}$$

für $\lambda = 1, \dots, n$ und geeignete μ und ν . Daraus folgt wie behauptet

$$|\vartheta_1 + \dots + \vartheta_\lambda| \leq \sqrt{5}$$

für $\lambda = 1, \dots, n$.

Es sei $D_1 = A_1$ und D_{i+1} der Punkt, der aus D_i durch Anwendung von ϑ_i hervorgeht. Wir haben dann ein n -Eck $D_1 D_2 \dots D_n$, das in der Kreisfläche um D_1 mit dem Radius von $\sqrt{5}$ Längeneinheiten liegt.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Hinweis. Man beweise, dass für C_3 stets $\sqrt{21}$ Längeneinheiten gewählt werden können. Die Überlegungen in diesem Fall verlaufen analog zu B; es sind die senkrechten Projektionen der Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ auf die Ebene K , die senkrecht auf der schließenden Strecke $\overline{B_1 B_{s+1}}$ steht, zu betrachten.

Beispiel 34. Definition der Schwerlinien und des Schwerpunktes eines Tetraeders.

A. Der Schwerpunkt einer Strecke sei wie in Beispiel 23 definiert.

B. Auch die Schwerlinien und der Schwerpunkt eines Dreiecks seien wie in Beispiel 23 definiert.

C. Unter einer Schwerlinie eines Tetraeders verstehen wir eine Strecke, die einen Eckpunkt des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche verbindet.

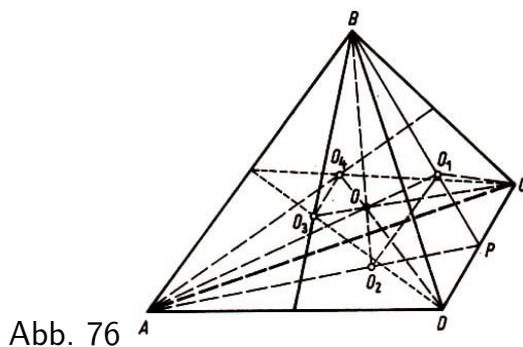


Abb. 76

Wir beweisen, dass sich die Schwerlinien eines Tetraeders in einem Punkt schneiden. Dazu betrachten wir das Tetraeder $ABCD$ (Abb. 76).

Es seien O_1, O_2, O_3, O_4 die Schwerpunkte der Dreiecke BCD, CDA, DAB bzw. ABC . Da sich die Geraden g_{BO_1} und g_{AO_2} im Mittelpunkt P der Strecke CD schneiden, schneiden sich auch die Geraden g_{AO_1} und g_{BO_2} in einem Punkt O_{12} .

Analog dazu schneiden sich die Geraden g_{AO_1} und g_{CO_3} , die Geraden g_{AO_1} und g_{DO_4} , die Geraden g_{BO_2} und g_{CO_3} , die Geraden g_{BO_2} und g_{DO_4} und die Geraden g_{CO_3} und g_{DO_4} in den Punkten O_{13} bzw. O_{14} bzw. O_{23} bzw. O_{24} bzw. O_{34} .

Wir beweisen nun, dass alle diese Punkte übereinstimmen (auf der Zeichnung mit dem Punkt O). Würden etwa O_{12} und O_{13} nicht übereinstimmen, dann lägen die Geraden g_{AO_1}, g_{BO_2} und g_{CO_3} in einer Ebene π durch die Punkte O_{12}, O_{13} und O_{23} .

Dann läge aber auch die Gerade g_{DO_3} , die die Geraden g_{AO_1} , g_{BO_2} und $g_{C=3}$ schneidet, in dieser Ebene π , d.h., alle vier Eckpunkte des Tetraeders müssten in der Ebene π liegen. Da dies nicht richtig ist, müssen die Punkte O_{12} und O_{13} übereinstimmen. Mit diesen Punkten stimmen auch alle übrigen Punkte O_{14} , O_{23} , O_{24} und O_{34} überein. Den Schnittpunkt der Schwerlinien des Tetraeders nennt man den Schwerpunkt des Tetraeders.

Aufgabe 42. Man beweise, dass jede der Schwerlinien des Tetraeders durch den Schwerpunkt im Verhältnis 3:1 (von den Eckpunkten aus gerechnet) geteilt wird.

1.7 Lösungen

1. Wir bezeichnen mit F_{2^n} den Flächeninhalt des regelmäßigen 2^n -Ecks, das dem Kreis mit dem Radius R eingeschrieben ist, mit h_{2^n} den Abstand seiner Seiten vom Mittelpunkt. Dann folgt aus (1)

$$h_{2^n} = \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}} = \frac{R}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}$$

und (für $n \geq 3$)

$$F_{2^n} = 2^n \left(\frac{1}{2} a_{2^n} \right) h_{2^n} = 2^{n-1} R^2 \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-3 \text{ Zweien}}} = 2^{n-2} R a_{2^{n-1}}$$

Ferner ist

$$\frac{F_{2^n}}{F_{2^{n+1}}} = \frac{2^{n-1} a_{2^n} h_{2^n}}{2^{n-1} R a_{2^n}} = \frac{h_{2^n}}{R} = \cos \frac{180^\circ}{2^n}$$

woraus

$$\frac{F_4}{F_{2^n}} = \frac{F_4}{F_8} \cdot \frac{F_8}{F_{16}} \dots \frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}} = \cos \frac{180^\circ}{4} \cos \frac{180^\circ}{8} \dots \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}}$$

folgt. Da

$$F_4 = 2R^2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{2^n} = \pi R^2$$

gilt, ist $\frac{2}{\pi}$ Grenzwert des Ausdrucks $\cos 45^\circ \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ}{4} \dots$. Danach braucht man nur die Formel

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

zu benutzen.

2. Weil N Diagonalen und n Seiten des n -Ecks Seiten von $n - 2$ Dreiecken sind (vgl. Beispiel 4), folgt $2N + n = 3(n - 2)$ und somit

$$N = n - 3$$

3. Das konvexe $(n + 1)$ -Eck $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ wird von der Diagonalen $A_1 A_n$ in das n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$ und das Dreieck $A_1 A_n A_{n+1}$ zerlegt. Wir setzen die Zahl $F(n)$ der Teile, in welche das n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$ durch seine Diagonalen zerlegt wird, als bekannt voraus und bestimmen, um welche Zahl diese Zahl $F(n)$ wächst, wenn der Eckpunkt A_{n+1} hinzukommt. Diese Zahl ist um 1 größer als die Anzahl der Teile, in welche die vom Eckpunkt A_{n+1} ausgehenden Diagonalen durch die übrigen Diagonalen zerlegt werden. So finden wir

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + 1 + [1(n-2) + 1] + [2(n-3) + 1] + \dots + [(n-2)(n-(n-1)) + 1] \\ &= F(n) + (n+1) \cdot 1 + [1+2+\dots+(n-2)] \cdot n - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-2)(n-1)] \\ &= F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = F(n) + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} - 1 \end{aligned}$$

(vgl. Kap. 1, Beispiele 3 und 6).

Durch Addition der einzelnen Zuwächse (vgl. Kap. 1, Beispiele 3 und 4 sowie Aufgabe 4), erhalten wir

$$F(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}$$

4. Mit den Bezeichnungen im Beispiel 7 ist zuerst zu beweisen, dass $\frac{r}{\rho} = 1 - \frac{2r}{h}$ und $\frac{\rho}{r} = 1 + \frac{2\rho}{h}$ gilt, wobei h die vom Punkt C ausgehende Höhe ist. Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2r_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) &= 1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r'_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r'_2}{h}\right) \\ \left(1 - \frac{2\rho_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2\rho_2}{h}\right) &= 1 - \frac{2\rho}{h} = \left(1 - \frac{2\rho'_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2\rho'_2}{h}\right) \end{aligned}$$

5. Bekanntlich gilt $F = sr = (s-c)\rho = \frac{abc}{4R}$, woraus wir mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\frac{r + \rho}{2R} = \frac{\frac{F}{s} + \frac{F}{s-c}}{\frac{abc}{2F}} = \frac{(a+b)[c^2 - (a-b)^2]}{2abc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos \alpha + \cos \beta$$

erhalten.

6. Zunächst beweist man den folgenden Hilfssatz:

Es seien O_1 bzw. O_2 die Mittelpunkte der Kreise ξ_1 bzw. ξ_2 , die sich in O schneiden, B_1B_2 eine Sehne durch den zweiten Schnittpunkt A_1 dieser Kreise (Abb. 77). Dann erscheinen B_1B_2 und O_1O_2 von O aus unter ein und demselben Winkel. Dann beweist man die Behauptung für drei Kreise. Danach nimmt man an, der Satz sei für $n-1$ Kreise richtig und betrachtet n Kreise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

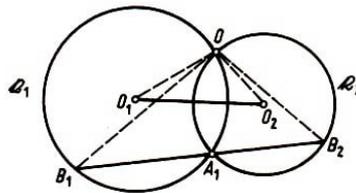


Abb. 77

Man zieht die Sehne durch den Punkt B_{n-1} und den Schnittpunkt der Kreise ξ_{n-1} und ξ_1 . Auf die $n-1$ Kreise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ wendet man die Induktionsvoraussetzung an.

2. Lösung. Wir betrachten gerichtete Winkel zwischen Geraden, auch Kreuze genannt (vgl. [11]). Es gelten folgende gleichsinnige Kongruenzen

$$(g_{OB_1}, g_{A_1B_1}) \cong (g_{OO_1}, g_{O_1O_2}) \quad , \quad (g_{A_1B_1}, g_{OB_2}) \cong (g_{O_1O_2}, g_{OO_2})$$

daraus folgt

$$(g_{OB_1}, g_{OB_2}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_2})$$

Analog erhalten wir

$$(g_{OB_2}, g_{OB_3}) \cong (g_{OO_2}, g_{OO_3})$$

usw. Dann gilt

$$(g_{OB_1}, g_{OB_{k+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_{k+1}})$$

unter der Voraussetzung

$$(g_{OB_1}, g_{OB_k}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_k})$$

wegen

$$(g_{OB_k}, g_{OB_{k+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_1})$$

Für $k = n + 1$ erhalten wir

$$(g_{OB_1}, g_{OB_{n+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_1})$$

woraus mit $g_{OB_1} = g_{OB_{n+1}}$ die Behauptung folgt.

7. Es sei $M = A_1A_2A_3\dots A_n$ ein konvexes n -Eck, das kein Parallelogramm ist, und ABC ein Dreieck, wobei etwa $A_1A_2 \subseteq AB$, $A_kA_{k+1} \subseteq BC$ und $A_lA_{l+1} \subseteq CA$ gelten. Wir wählen im Innern von M einen Punkt O und verbinden ihn durch Strecken mit drei beliebigen Punkten P , Q und R der Seiten A_1A_2 , A_kA_{k+1} bzw. A_lA_{l+1} . Die Strecken OP , OQ und OR zerlegen die zu M gehörige Fläche F in drei Teile M_1 , M_2 und M_3 .

Mit F_1 , F_2 und F_3 bezeichnen wir Flächen, die wir aus F durch Stauchungen mit den Zentren A , B bzw. C erhalten, wobei die Stauchungsfaktoren so gewählt werden, dass M_1 , M_2 und M_3 (bei geeigneter Nummerierung) von F_1 , F_2 bzw. F_3 überdeckt werden.

8. Wir nehmen an, alle diese Punkte seien entsprechend der Bedingung der Aufgabe verbunden. Dabei können wir voraussetzen, dass zu je zwei Punkten genau eine Verbindung gehört. Wir kommen zu einer Karte, die fünf Ecken, $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Grenzen und folglich sieben Länder hat (Satz von Euler).

Dass solche Karten unmöglich sind, folgt aus Überlegungen, die denen ähnlich sind, die zur Ungleichung (5) führten.

9. Zu einem konvexen Polyeder wählen wir eine Kugel mit hinreichend großem Radius, deren Mittelpunkt im Innern des Polyeders liegt. Vom Mittelpunkt der Kugel projizieren wir alle Punkte des Polyeders auf die Kugeloberfläche S .

Die dort entstandene Karte projizieren wir von einem beliebigen ihrer Punkte P , der auf keiner Grenze liegt, auf diejenige Ebene, die die Kugeloberfläche im Gegenpol von P berührt (stereografische Projektion). Auf die erhaltene ebene Karte wenden wir den Satz von Euler an.

10. Vgl. Beispiel 10.

11. Man wende den Satz von Euler an.

12. Es sei eine Karte gegeben, die von n Kreisen mit Sehnen gebildet wird und mit drei Farben α, β, γ regulär gefärbt ist. Wir führen einen $(n + 1)$ -ten Kreis ein und färben die Länder um, die im Innern des Kreises liegen:

a) auf der einen Seite der Sehne nach der Vorschrift

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad \beta \rightarrow \gamma, \quad \gamma \rightarrow \alpha$$

b) auf der anderen Seite der Sehne nach der Vorschrift

$$\alpha \rightarrow \gamma, \quad \beta \rightarrow \alpha, \quad \gamma \rightarrow \beta$$

13. Wir zeigen zunächst, dass zwölf Farben immer zur regulären Färbung der Karte unseres Planeten ausreichen. Wenn die Zahl der Länder der Karte 12 nicht übertrifft, ist klar, dass uns zwölf Farben genügen.

Wir setzen nun voraus, unsere Behauptung sei für alle Karten, die n ($n \geq 12$) Länder enthalten, richtig, und betrachten irgendeine Karte, die $n + 1$ Länder enthält.

Wie schon früher können wir uns auf den Fall normaler Karten beschränken; ferner können wir annehmen, dass jedes Land aus zwei Teilen besteht, da wir einem Land σ , das nur aus einem Teil besteht, ein nicht sehr großes Territorium zuteilen können, das wir um eine Ecke herauslösen, in der irgendwelche drei von σ verschiedene Länder zusammenstoßen.

Man kann auch den Fall der Länder ausschließen, die einen ringförmigen Teil enthalten; denn wenn ein Land σ_1 die Form eines Ringes hat, das Land σ' an diesen Ring von innen grenzt, das Land σ'' von außen angrenzt, dann können wir zu σ' einen solchen Teil des Ringes, der von σ' , σ_1 und von σ'' (das ist selbstverständlich) begrenzt wird, hinzufügen; wenn zwölf Farben für die Färbung der neuen Karte ausreichen, dann wird das auch für die alte Karte möglich sein.

Wir bezeichnen jetzt mit p die Anzahl der Ecken, mit l die Anzahl der Grenzen und mit s die Anzahl der Länder der Karte; dann gilt, weil die Karte normal ist $2l = 3p$; andererseits gilt nach der Eulerschen Formel (Beispiel 9) in diesem Fall $2s + p = l + 2$, weil die Zahl der Gebiete auf der Karte gleich $2s$ ist.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$12s = 3p + 12$$

oder, wenn wir die Anzahl der Länder mit i Grenzen mit $s^{(i)}$ bezeichnen, wobei $i = 4, 5, 6, \dots$ ist,

$$12(s^{(4)} + s^{(5)} + s^{(6)} + \dots) = (4s^{(4)} + 5s^{(5)} + 6s^{(6)} + \dots) + 12, \quad \text{d.h.}$$

$$8s^{(4)} + 7s^{(5)} + 6s^{(6)} + \dots + 2s^{(10)} + s^{(11)} = s^{(13)} + 2s^{(14)} + 3s^{(15)} + \dots + 12$$

Hieraus folgt, da eine der Zahlen $s^{(4)}, s^{(5)}, \dots, s^{(11)}$ positiv sein muss, dass es ein Land σ gibt, das weniger als zwölf Grenzen besitzt; wenn wir jeden der zwei Teile dieses Landes zu einem der an diesen Teil grenzenden Länder hinzufügen, erhalten wir eine Karte mit n Ländern, die man nach Induktionsvoraussetzung mit zwölf Farben regulär färben kann.

Danach wird es einfach, die Ausgangskarte regulär mit zwölf Farben zu färben (vgl. Abb. 78).

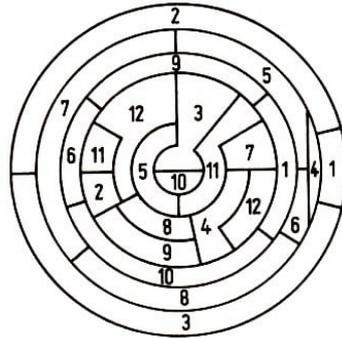


Abb. 78

Um nachzuweisen, dass elf Farben nicht ausreichen können, genügt es, ein Beispiel einer Karte mit zwölf Ländern anzugeben, von denen jeweils jedes von elf Ländern begrenzt wird.

14. In der Ebene seien also n Punkte A_1, \dots, A_n , Drehwinkel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ und Streckungsfaktoren k_1, \dots, k_n gegeben. Es ist ein n -Eck $X_1 \dots X_n$ derart zu konstruieren, dass

$$X_1 \rho(A_1, \varphi_1) \mathfrak{d}(A_1, k_1) = X_2, \quad X_2 \rho(A_2, \varphi_2) \mathfrak{d}(A_2, k_2) = X_3, \quad \dots$$

$$X_n \rho(A_n, \varphi_n) \mathfrak{d}(A_n, k_n) = X_1$$

gilt. Die Aufgabe kann analog zum Beispiel 18 (einem Spezialfall dieser Aufgabe) gelöst werden.

Nur wird anstatt der Drehung $\rho(A_1, \varphi_1)$ um den gegebenen Punkt A_1 um den bekannten Drehwinkel φ_1 hier eine Ähnlichkeitsabbildung betrachtet, die aus der Drehung um den Drehwinkel φ_1 und einer Streckung (Homothetie) $\mathfrak{d}(A_1, k_1)$ mit dem Zentrum A_1 und einem Streckungsfaktor k_1 (Seitenverhältnis des entsprechenden Dreiecks) besteht.

Für $A_2, A_3, \dots, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ und k_2, k_3, \dots gilt Entsprechendes. Die aufeinanderfolgende Ausführung zweier solcher Ähnlichkeitsabbildungen ist einer gewissen dritten Ähnlichkeitsabbildung gleich (vgl. [11], S. 251, Formel (64) in Verbindung mit dem Satz 79 oder [8]).

Durch vollständige Induktion kann man sich eine Übersicht über Produkte von n Drehstreckungen verschaffen und dann die Lösbarkeit der Aufgabe diskutieren.

15. Die Seite $A_1 A_2$ eines gesuchten Vielecks gehe durch den Punkt P und die Seite $A_2 A_3$ sei parallel zur Geraden l (Abb. 79). Wir bezeichnen mit P' bzw. A'_2 den Punkt, der symmetrisch zum Punkt P bzw. A_1 bezüglich des Lotes zur Geraden l durch den Kreismittelpunkt liegt.

Im n -Eck $A_1 A'_2 A_3 \dots A_n$ ist die Seite $A_1 A_2$ parallel zur gegebenen Geraden l und die Seite $A'_2 A_3$ geht durch den bekannten Punkt P' .

Wenn wir diese Konstruktion hinreichend oft durchführen, reduziert sich die Aufgabe auf die Konstruktion des n -Ecks, bei dem k benachbarte Seiten durch bekannte Punkte gehen und die übrigen $n - k$ Seiten parallel zu gegebenen Geraden sind.

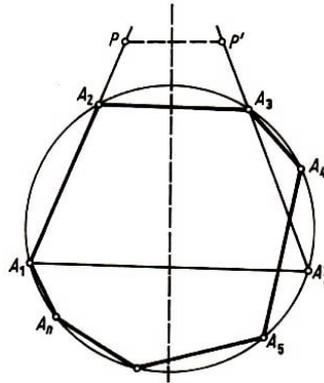


Abb. 79

16. Auf dem Kreis vom Radius a legen wir die Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ fest als Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Wir nehmen an, der Punkt B_n auf der Strecke OA_n mit $l(OB_n) = \frac{1}{n}l(OA_n) = \frac{a}{n}$ sei schon bekannt (hier wird $A_{6m+k} = A_k$ für jedes m und $k = 1, 2, \dots, 6$ angesehen; $B_1 = A_1$), und bezeichnen mit B_{n+1} den Schnittpunkt der Geraden $g_{OA_{n+1}}$ und $g_{B_n A_{n+2}}$. Dann ist

$$l(OB_{n+1}) = \frac{a}{n+1}$$

Die Lösung der Aufgabe 16 kann auch aus der Lösung des Beispiels 20 gefolgert werden (wie?).

17. Die gesuchte Figur ist eine Gerade. Der Beweis ist analog zur Lösung des Beispiels 21.

18. Mit den Bezeichnungen der Abb. 49 gilt

$$F_{\triangle BCE} + F_{\triangle ADE} = F_{\triangle BCF} + F_{\triangle ADF} = F_{\triangle BCO} + F_{\triangle ADO} = \frac{1}{2}F$$

wobei F der Flächeninhalt der Vierecksfläche ist. Hieraus ergibt sich nach Beispiel 21 (oder Aufgabe 17), dass die Punkte E, F und O auf einer Geraden liegen.

19. Mit den Bezeichnungen der Abb. 50, wobei die Punkte M und N die Mitten der Diagonalen AC und BD sind und P die Mitte der Strecke EF ist, gilt

$$F_{\triangle ABM} + F_{\triangle CDM} = F_{\triangle ABN} + F_{\triangle CDN} = F_{\triangle ABP} - F_{\triangle CDP} = \frac{1}{2}F$$

wobei F der Flächeninhalt der Vierecksfläche ist. Hieraus ergibt sich nach Aufgabe 17, dass die Punkte M, N und P auf einer Geraden liegen.

20. Es genügt, in der Voraussetzung des Beispiels 22 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ zu setzen.

21. Es ist dies der Mittelpunkt des Kreises, der in Aufgabe 20 gesucht wurde.

22. Wenn M Punkt der gesuchten Figur ist, so gilt $\frac{l(AM)}{l(BM)} = c$, also $l(AM)^2 - c^2 \cdot l(BM)^2 = 0$; damit ist die vorliegende Aufgabe auf das Beispiel 22 zurückgeführt.

23. Man kann zeigen, dass der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche mit Eckpunkten, die

Fußpunkte der Lote von einem Punkt M auf die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind, gleich

$$\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| F_{\Delta A_1A_2A_3}$$

ist, wobei R der Radius des umbeschriebenen Kreises \mathfrak{k} des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und d der Abstand des Punktes M vom Mittelpunkt des Kreises \mathfrak{k} ist. Hieraus folgt, dass für $n = 3$ die gesuchte Figur ein zu \mathfrak{k} konzentrischer Kreis oder ein Paar solcher Kreise ist. Mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Anzahl der Seiten des Vielecks lässt sich zeigen, dass auch für jedes n die gesuchte Figur ein Kreis oder ein Paar konzentrischer Kreise ist.

24. Im Beispiel 23 wurde

$$\frac{\overrightarrow{OA_{n-1}}}{\overrightarrow{OO_{n-1}}} = \frac{\overrightarrow{OA_n}}{\overrightarrow{OO_n}} = -(n-1)$$

bewiesen. Mit der gleichen Überlegung erhält man

$$\frac{\overrightarrow{OA_k}}{\overrightarrow{OO_k}} = \frac{\overrightarrow{OA_{k+1}}}{\overrightarrow{OO_{k+1}}} = -(n-1)$$

für $k = 1, \dots, n-1$. Folglich ist O das Zentrum und $-\frac{1}{n-1}$ der Stauchungsfaktor.

25. Es seien S_1 und S_2 die Schwerpunkte des $(k-1)$ -Ecks $A_2A_3 \dots A_k$ und des $(n-k-1)$ -Ecks $A_{k+2}A_{k+3} \dots A_n$, ferner O_1 und O_2 die Schwerpunkte der k -Ecke $A_1A_2 \dots A_k$ und $A_2A_3 \dots A_{k+1}$, schließlich O_3 und O_4 die Schwerpunkte der $(n-k)$ -Ecke $A_{k+1} \dots A_n$ und $A_{k+2} \dots A_n A_1$ (Abb. 80).

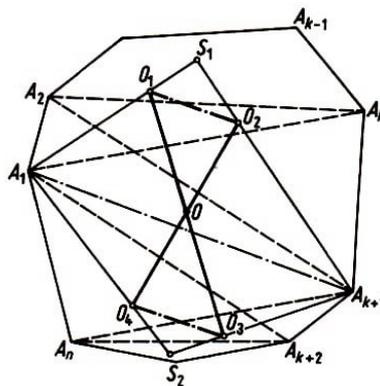


Abb. 80

Dann gilt

$$\frac{\overrightarrow{O_1S_1}}{\overrightarrow{O_1A_1}} = \frac{\overrightarrow{O_2S_1}}{\overrightarrow{O_2A_{k+1}}} = -\frac{1}{k-1} \quad \text{und} \quad O_1O_2 \parallel A_1A_{k+1}$$

$$\frac{\overrightarrow{O_3S_2}}{\overrightarrow{O_3A_{k+1}}} = \frac{\overrightarrow{O_4S_2}}{\overrightarrow{O_4A_1}} = -\frac{1}{n-k-1} \quad \text{und} \quad O_3O_4 \parallel A_1A_{k+1}$$

Wenn jetzt O Schnittpunkt der Schwerlinien k -ter Ordnung $\overrightarrow{O_2O_4}$ und $\overrightarrow{O_1O_3}$ ist, so gilt

$$\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_3}} = \frac{\overrightarrow{OO_2}}{\overrightarrow{OO_4}} = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\overrightarrow{O_3O_4}} = \frac{\frac{1}{k}\overrightarrow{A_1A_{k+1}}}{\frac{1}{n-k}\overrightarrow{A_{k+1}A_1}} = -\frac{n-k}{k}$$

Man kann sogar beweisen, dass für beliebige k der Schnittpunkt der Schwerlinie k -ter Ordnung des n -Ecks mit seinem Schwerpunkt übereinstimmt.

26. Die Strecken, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten und die Mittelpunkte der Diagonalen eines beliebigen Vierecks miteinander verbinden, schneiden sich in einem Punkt und halbieren einander.

27. Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein beliebiges Viereck, das dem Kreis \mathfrak{k} einbeschrieben ist. Der Eulersche Kreis des Dreiecks $A_1A_2A_3$ geht durch die drei Mittelpunkte der Strecken H_4A_1 , H_4A_2 , H_4A_3 , wobei H_4 Schnittpunkt der Höhen von $A_1A_2A_3$ ist.

Daraus folgt, dass er aus \mathfrak{k} durch Stauchung mit dem Zentrum H_4 und dem Stauchungsfaktor $\frac{1}{2}$ hervorgeht. Daher gehört der Mittelpunkt der Strecke H_4A_4 diesem Kreis an.

Jetzt bleibt nur zu bemerken, dass die Mittelpunkte der Strecken H_1A_1 , H_3A_2 , H_3A_3 und H_4A_4 , wobei H_1, H_2 und H_3 Schnittpunkte der Höhen der entsprechenden Dreiecke sind, zusammenfallen. Dies folgt daraus, dass z.B. das Viereck $A_1H_2H_1A_2$ ein Parallelogramm ist, weil bei der Streckung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $A_2A_3A_4$ bzw. $A_3A_4A_1$ als Zentrum und dem Faktor -2 (mit P als Mittelpunkt von A_3A_4)

$$\frac{\overrightarrow{H_1A_2}}{\overrightarrow{NM}} = -2 = \frac{\overrightarrow{H_2A_1}}{\overrightarrow{MP}}$$

gilt.

Wir nehmen jetzt an, für alle k -Ecke, deren Seitenzahl k der Ungleichung $k \leq n$ ($n \geq 4$) genügt, sei die Existenz des Eulerschen Kreises schon bewiesen, und betrachten ein $(n+1)$ -Eck $A_1 \dots A_n A_{n+1}$ das dem Kreis \mathfrak{k} einbeschrieben ist.

Es ist zu beweisen, dass sich die Eulerschen Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$ der n -Ecke $A_2A_3 \dots A_{n+1}, A_1A_3A_4 \dots A_{n+1}, \dots, A_1A_2 \dots A_n$ in einem Punkt schneiden. Dazu genügt es zu beweisen, dass sich je drei von ihnen in einem Punkt schneiden, etwa $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und \mathfrak{k}_3 ; denn schneiden sich je drei von $m \geq 5$ paarweise verschiedenen Kreisen in einem Punkt, dann schneiden sich auch alle Kreise in einem Punkt.³⁰

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{13}, \mathfrak{k}_{23}$ die Eulerschen Kreise der $(n-1)$ -Ecke $A_3A_4 \dots A_{n+1}$,

³⁰Für $m = 4$ ist dieser Schluss falsch (Abb. 81).

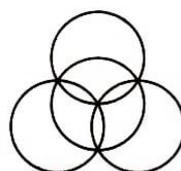


Abb. 81

$A_2A_4A_5\dots A_{n+1}$, $A_1A_4A_5\dots A_{n+1}$ und mit O_{12} , O_{13} , O_{23} ihre Mittelpunkte. Es seien noch O_1, O_2 und O_3 die Mittelpunkte der Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ und O_{123} Mittelpunkt des Eulerschen Kreises im des $(n-2)$ -Ecks $A_4A_5\dots A_{n+1}$.

In diesem Fall kommen wir zu Abb. 82.

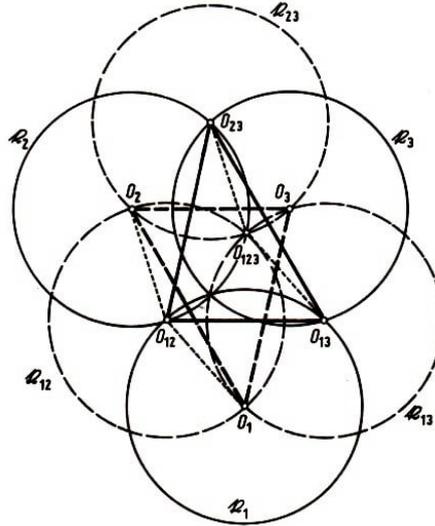


Abb. 82

Die Dreiecke $O_1O_2O_{12}$ und $O_{23}O_{13}O_{123}$ sind parallelkongruent, denn die Verschiebung $s(\overrightarrow{O_1O_{13}})$ führt auch O_{12} in O_{123} und O_2 in O_{23} über, weil $O_1O_{12}O_{123}O_{13}$ und $O_2O_{12}O_{123}O_{23}$ Rhomben sind.

Insbesondere sind O_1O_2 und $O_{13}O_{23}$ kongruent; analog erweist sich, dass $O_1O_3 \cong O_{23}O_{12}$ und $O_2O_3 \cong O_{13}O_{12}$ ist. Folglich gilt

$$\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle O_{23}O_{13}O_{12}$$

Da die Kreise $\mathfrak{k}_{23}, \mathfrak{k}_{13}$ und \mathfrak{k}_{12} sich im Punkt O_{123} schneiden, müssen sich auch die Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und \mathfrak{k}_3 in einem Punkt schneiden.

28 (vgl. [6], Bd. 1, Lösung von Aufgabe 52c). Es sei r der Radius von \mathfrak{k} . Die Kreise $\mathfrak{k}(A_i, r)$ um die Eckpunkte A_i mit demselben Radius r gehen durch den Mittelpunkt M von \mathfrak{k} .

1. Es sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck. Seine Seitenhalbierenden A_iS_i schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks. Nach dem Beispiel 23 gilt $A_iS : SS_i = 2 : 1$. Bei der Stauchung $\mathfrak{d}(S, -\frac{1}{2})$ geht jeder Kreis $\mathfrak{k}(A_i, r)$ in den Eulerschen Kreis der A_i gegenüberliegenden Seite und $\mathfrak{k}(M, r)$ in den Eulerschen Kreis $\mathfrak{k}(O, \frac{r}{2})$ von $A_1A_2A_3$ über. Folglich gilt wie behauptet $MS : SO = 2 : 1$.

2. Nun sei $n \geq 4$ und die Behauptung für alle $(n-1)$ -Ecke gültig. Der Schwerpunkt von $A_2A_3\dots A_n$ werde mit S_1 bezeichnet, der von $A_1A_3\dots A_n$ mit S_2 usw. Wir führen zuerst die Stauchung $\mathfrak{d}(S, -\frac{1}{n-1})$ mit dem Zentrum im Schwerpunkt S des gegebenen n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$ aus. Nach dem Beispiel 23 gehen dabei die Eckpunkte A_i in die Schwerpunkte S_i über, die Kreise $\mathfrak{k}(A_i, r)$ in die Kreise $\mathfrak{k}(S_i, \frac{r}{n-1})$, welche das Bild M' von M als gemeinsamen Punkt besitzen.

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für die Mittelpunkte O_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der Eulerschen Kreise der $(n-1)$ -Ecke $A_2A_3\dots A_n$, $A_1A_3\dots A_n$ usw.

$$MS_i : S_iO_i = 2 : ((n-1) - 2) = 2 : (n-3)$$

und folglich

$$MS_i : MO_i = 2 : (n-1)$$

wird jetzt die Stauchung $\mathfrak{d}\left(M, \frac{n-1}{2}\right)$ ausgeführt, dann gehen die Kreise $\mathfrak{k}\left(S_i, \frac{r}{n-1}\right)$ in Kreise mit dem Mittelpunkt O_i und dem Radius $\frac{r}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{r}{2}$, d.h. in die Eulerschen Kreise von $A_2A_3\dots A_n$, $A_1A_3\dots A_n$ usw. über.

Sie haben das Bild O von M' gemeinsam; O ist der Mittelpunkt des Eulerschen Kreises des gegebenen n -Ecks $A_1A_2\dots A_n$. Der Punkt O ist letztlich Bild von M , und es gilt

$$MS : SM' = 1 : \frac{1}{n-1} = (n-1) : 1 \quad \text{bzw.} \quad MS : MM' = (n-1) : n$$

$$MM' : MO = 1 : \frac{n-1}{2} = 2 : (n-1)$$

und folglich

$$MS : MO = 2 : n \quad \text{d.h.} \quad MS : SO = 2 : (n-2)$$

29. Der Satz über die Simsonsche Gerade des Punktes P des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ist weithin bekannt. Beim Beweis kann man sich vorteilhaft auf die gleichsinnige Kongruenz gerichteter Winkel zwischen Geraden stützen.

30. Die Lösung dieser Aufgabe ist der Lösung des Beispiels 24 ähnlich.

31. Wir bemerken, dass die Orthozentren der einem Kreis einbeschriebenen Vielecke eine Reihe von Eigenschaften besitzen, die den Eigenschaften der Orthozentren der Dreiecke ähnlich sind. Viele davon, deren Beweis zwangsläufig mittels vollständiger Induktion geführt wird, weil das Orthozentrum des Vielecks durch Induktion definiert ist, sind in [6] angegeben.

32. (vgl. [6], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 218a), oder [17], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 125). Zur Lösung des ersten Teils der Aufgabe verwendet man zweckmäßigerweise Aussagen über Drehstreckungen.

Zur Lösung des zweiten Teils werden zusätzlich solche über Spiegelungen am Kreis benutzt (siehe [8]; [6], Bd. 2). Bei Spiegelungen an Kreisen ist es üblich, die gewöhnlichen Kreise und die Geraden Kreise zu nennen.

1. Hier ist nur die Existenz des Zentralpunktes O von vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 allgemeiner Lage zu beweisen. Es sei A_{12} der Schnittpunkt von l_3 und l_4 , A_{13} der von l_2 und l_4 usw.

Dann schneiden sich \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 in A_{12} und einem weiteren Punkt O . Wir zeigen, dass auch \mathfrak{k}_3 und \mathfrak{k}_4 durch O gehen:

Zunächst ist O Zentrum der Drehstreckung, die $A_{13}A_{23}$ auf $A_{14}A_{24}$ abbildet, denn die

gerichteten Peripheriewinkel $\angle A_{13}A_{12}A_{14}$, $\angle A_{13}OA_{14}$ und $\angle A_{23}A_{12}A_{24}$, $\angle A_{23}OA_{24}$ sind kongruent (vgl. etwa [11], S. 144, und [6], S. 105/106 in Bd. I).

Aus

$$\angle A_{13}OA_{14} \cong \angle A_{23}OA_{24} \quad \text{folgt} \quad \angle A_{13}OA_{23} \cong \angle A_{14}OA_{24}$$

aus

$$OA_{13} : OA_{23} = OA_{14} := A_{24} \quad \text{folgt} \quad OA_{13} : OA_{14} = OA_{23} := A_{24}$$

d.h., O ist auch Zentrum der Drehstreckung, die $A_{13}A_{14}$ auf $A_{23}A_{24}$ abbildet. Folglich gilt

$$\angle A_{13}OA_{23} \cong \angle A_{13}A_{34}A_{23} \cong \angle A_{14}A_{34}A_{24} \cong \angle A_{14}OA_{24}$$

und die Kreise \mathfrak{k}_3 und \mathfrak{k}_4 gehen somit durch O .

2. Es seien jetzt l_1, l_2, \dots, l_n ($n \geq 5$) Geraden allgemeiner Lage.

a) n ungerade.

Es sei A_1 der Zentralpunkt von l_2, l_3, \dots, l_n , A_2 der von l_1, l_3, \dots, l_n usw. Es sei \mathfrak{k}_{12} der Zentralkreis von l_3, \dots, l_n , \mathfrak{k}_{13} der von l_2, l_4, \dots, l_n usw.

Ferner sei A_{123} der Zentralpunkt von l_4, \dots, l_n , A_{124} der von l_3, l_5, \dots, l_n usw. Mit \mathfrak{k}_{1234} werde schließlich der Zentralkreis von l_5, \dots, l_n usw. bezeichnet.

(Die gewählten Indizes gehören also stets zu den ausgelassenen Geraden; für $n = 5$ sei $\mathfrak{k}_{1234} = l_5$, $\mathfrak{k}_{1235} = l_4$, ...)

Zu zeigen ist, dass A_1, A_2, \dots, A_n auf einem Kreis liegen. Das ist klar, wenn je vier dieser Punkte auf einem Kreis liegen. Es genügt sogar zu zeigen, dass A_1, A_2, A_3 und A_4 auf einem Kreis liegen.

Durch A_1 gehen gemäß der Definition $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{13}, \dots, \mathfrak{k}_{1n}$; allgemein gilt $A_i \in \mathfrak{k}_{ij}$ für $i \neq j$. Ferner geht \mathfrak{k}_{12} durch $A_{123}, A_{124}, \dots, A_{12n}$ usw. Durch A_{123} gehen aber auch $\mathfrak{k}_{1234}, \dots, \mathfrak{k}_{123n}$ usw. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} A_2, A_{123} \in \mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23} & \quad , & \quad A_3, A_{234} \in \mathfrak{k}_{23}, \mathfrak{k}_{34} \\ A_4, A_{134} \in \mathfrak{k}_{34}, \mathfrak{k}_{14} & \quad , & \quad A_1, A_{124} \in \mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{14} \end{aligned}$$

Da $A_{123}, A_{234}, A_{134}$ und A_{124} einem Kreis angehören, muss auch durch A_1, A_2, A_3, A_4 ein Kreis gehen. (Dieses Teilproblem kann mit Hilfe einer Spiegelung an einem Kreis auf eine Aufgabe mit Geraden zurückgeführt werden; dazu vgl. etwa [6], S. 487 in Bd. 2 und dann [6], S. 239 und S. 125f. in Bd. 1.)

b) n gerade.

Nun sei \mathfrak{k}_1 der Zentralkreis von l_2, l_3, \dots, l_n , \mathfrak{k}_2 der von l_1, l_3, \dots, l_n usw. A_{12} bezeichne den Zentralpunkt von l_3, l_4, \dots, l_n usw. analog den Bezeichnungen in a).

Hier ist zu zeigen, dass $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_n$ einen gemeinsamen Punkt haben. Wegen $n > 5$ genügt es zu beweisen, dass je drei der Kreise, etwa $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ und \mathfrak{k}_3 , durch einen Punkt gehen.

Gemäß Definition gilt

$$\begin{aligned} A_{12}, A_{13}, A_{14} \in \mathfrak{k}_1, & \quad , & \quad A_{12}, A_{23}, A_{24} \in \mathfrak{k}_2, & \quad , & \quad A_{13}, A_{23}, A_{34} \in \mathfrak{k}_3 \\ A_{12}, A_{14}, A_{24} \in \mathfrak{k}_{124}, & \quad , & \quad A_{13}, A_{14}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{134}, & \quad , & \quad A_{23}, A_{24}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{234} \end{aligned}$$

Wegen $A_{1234} \in \mathfrak{k}_{124}, \mathfrak{k}_{134}, \mathfrak{k}_{234}$ gehen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ durch einen gemeinsamen Punkt (vgl. obige Verweise auf [6]).

33. Die Beweise der hier formulierten Sätze sind völlig analog zu den Beweisen der Sätze, die den Inhalt der Aufgabe 32 bilden.

34. (vgl. [6], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 218b)). Die Aufgabe kann mit denselben Hilfsmitteln wie die Aufgabe 32 gelöst werden. Das trifft auf den Induktionsanfang mit $n = 3, 4$ wie auf den Schluss von $n - 1$ auf n zu.

Um die Analogie des Vorgehens deutlich zu machen, werde hier der Fall einer ungeraden Zahl $n \geq 5$ etwas näher betrachtet:

Es seien $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ konzyklische Linienelemente. Ferner sei \mathfrak{k}_1 der Richtungskreis von $(A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$, \mathfrak{k}_2 der von $(A_1, a_1), (A_3, a_3), \dots, (A_n, a_n)$ usw.

Werden die zwei Linienelemente (A_i, a_i) und (A_j, a_j) ausgelassen, dann besitzen die übrigen einen Richtungspunkt A_{ij} .

Der Richtungskreis der $n - 3$ Linienelemente, die beim Auslassen von $(A_i, a_i), (A_j, a_j)$ und (A_k, a_k) verbleiben, werde mit \mathfrak{k}_{ijk} bezeichnet. Schließlich sei A_{ijkl} der Richtungspunkt der $n - 4$ Linienelemente (A_p, a_p) mit $p \neq i, j, k, l$ oder im Sonderfall $n = 5$ einfach A_p .

Es ist zu beweisen, dass k_1, k_2, \dots, k_n einen gemeinsamen Punkt besitzen. Wegen $n \geq 5$ genügt es zu zeigen, dass je drei dieser Kreise diese Eigenschaft haben, etwa $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$. Aufgrund der Festlegung der Bezeichnungen gilt

$$A_{12}, A_{13}, A_{14} \in \mathfrak{k}_1, \quad A_{12}, A_{23}, A_{24} \in \mathfrak{k}_2, \quad A_{13}, A_{23}, A_{34} \in \mathfrak{k}_3$$

$$A_{12}, A_{14}, A_{24} \in \mathfrak{k}_{124}, \quad A_{13}, A_{14}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{134}, \quad A_{23}, A_{24}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{234}$$

Auch der Fall einer geraden Zahl n kann auf die Lösungshinweise zur Aufgabe 32 zurückgeführt werden.

35. Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. In wieviel Teile zerlegen n "eindimensionale" Kreise (d.h. n Punktepaare) ohne gemeinsame Punkte die Gerade (siehe in Einführung zu 2.6.)?

Lösung. $2n$ Punkte zerlegen die Gerade in $2n + 1$ Teile.

A'. Man ermittle die Anzahl $\Phi_1(n)$ der Teile, in die n Punktepaare ohne gemeinsame Punkte, die auf einem Kreis liegen, diesen Kreis zerlegen.

Lösung. $\Phi_1(n) = 2n$.

B. Man ermittle die Anzahl $\Phi_2(n)$ der Teile, in welche n sich paarweise schneidende Kreise die Ebene zerlegen (jedoch sollen keine drei Kreise durch einen Punkt gehen).

Lösung. Da n Kreise den $(n + 1)$ -ten Kreis in n Punktepaaren schneiden und ihn daher in $\Phi_1(n) = 2n$ Teile zerlegen (vgl. A'), schneidet der $(n + 1)$ -te Kreis $\Phi_1(n) = 2n$ aus den $\Phi_2(n)$ Teilen, in die n Kreise die Ebene teilen, aus. Hieraus erhalten wir die

Gleichung

$$\Phi_2(n+1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) = \Phi_2(n) + 2n$$

Mittels dieser Gleichung und $\Phi_2(1) = 2$ erhalten wir $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$.

B'. In wieviel Teile zerlegen n sich paarweise schneidende Kreise die Kugeloberfläche, in der sie liegen, wenn keine drei Kreise durch einen Punkt gehen?

Lösung. In $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ Teile.

C. Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Da n Kugeln die $(n+1)$ -te Kugel in n Kreisen schneiden, die sich paarweise schneiden, wobei keine drei durch einen Punkt gehen, wird die $(n+1)$ -te Kugel in $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ Teile zerlegt (vgl. B'); und da n Kugeln nach der Induktionsvoraussetzung den Raum in $\Phi_3(n)$ Teile zerlegen, teilen die $n+1$ Kugeln den Raum in

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

Teile. Hieraus und aus $\Phi_3(1) = 2$ folgt schließlich

$$\Phi_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}$$

36. Der Beweis ist analog zum Beweis der Behauptung des Beispiels 29.

37. Folgende Aufgaben werden nacheinander betrachtet:

A. In den Voraussetzungen des Beispiels 27 A werden wir die 1,2-Strecken, für welche die Richtung vom Eckpunkt 1 zum Eckpunkt 2 mit der Richtung von 1 nach 2 für die Hauptstrecke übereinstimmt, von den 1,2-Strecken unterscheiden, für welche die Richtung von 1 nach 2 der Richtung der Hauptstrecke entgegengerichtet ist.

Man beweise, dass die Anzahl der erstgenannten Strecken um 1 größer ist als die der zweiten.

B. Wir wollen sagen, das Dreieck 123 (vgl. Beispiel 27 B) sei im Uhrzeigersinn (oder entgegen dem Uhrzeigersinn) orientiert, wenn der Umlauf seiner Eckpunkte von 1 nach 2 und dann nach 3 im Uhrzeigersinn (oder entgegen dem Uhrzeigersinn) erfolgt.

Man beweise, dass die Anzahl der Teildreiecke, die mit den Ziffern 1, 2, 3 nummeriert und wie das ursprüngliche Dreieck orientiert sind, um 1 größer ist als die Anzahl der übrigen Teildreiecke, die mit den Ziffern 1, 2, 3 nummeriert sind.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

38. Man beweise den entsprechenden Satz für "Kugelflächenpolyeder", d.h. für Körper, die Durchschnitt endlich vieler Kugelkörper sind. Der Beweis dieses Satzes wird analog zum Beweis der Behauptung des Beispiels 31 geführt.

39. Man zeige zunächst, dass man je drei dieser Punkte in einen Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}e$ einschließen kann. Danach wird um jeden der gegebenen Punkte eine Kreisfläche mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}e$ konstruiert und gezeigt, dass sich je drei dieser Kreisflächen treffen. Ein gemeinsamer Punkt aller dieser Kreisflächen, der nach dem Ergebnis im Beispiel 30

B existiert, ist eben der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}e$, der alle gegebenen Punkte enthält.

40. Der Beweis ist analog zur Lösung der Aufgabe 39.

41. Im Raum sei ein endliches System von Halbgeraden gegeben, die paarweise einen stumpfen Winkel bilden, wobei wir voraussetzen, dass dieses System in dem Sinn maximal ist, dass keine weitere Halbgerade existiert, die mit allen gegebenen Halbgeraden einen stumpfen Winkel bildet.

Wir tragen an jede Halbgerade einen Halbraum an, der durch die Ebene begrenzt ist, die durch den Träger des Halbgeradensystems geht und auf der Halbgeraden senkrecht steht, und der die Halbgerade enthält. Da unser System der Halbgeraden maximal ist, füllen diese Halbräume den ganzen Raum aus, und unsere Behauptung folgt aus dem Ergebnis des Beispiels 32.

42. Man benutze die Tatsache, dass der Schwerpunkt des Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt (vgl. Beispiel 23).

2 Literatur

- [1] Boltjanski, W. G., und I. Z. Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [2] Boltjanski, W. G., und I. M. Jaglom, Konvexe Figuren und Körper, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [3] Boltjanski, W. G., und I. M. Jaglom, Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, 2. Aufl., 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [4] Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl, Berlin 1972.
- [5] Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen, 1: Mehrfarbenprobleme, 4. Aufl., Berlin 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [6] Jaglom, I. M., Geometrische Darstellung, Band 1 und 2, Moskau 1955 und 1956 (russisch).
- [7] Jaglom, I. M., Komplexe Zahlen, Moskau 1963 (russisch).
- [8] Jaglom, I. M., und L. S. Atanasjan, Geometrische Transformationen, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, 2. Aufl., Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [9] Jaglom, I. M., und W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [10] Jaglom, A. M., und I. M. Jaglom, Nichtelementare Aufgaben, Moskau 1954 (russisch)
- [11] Klotzek, B., Geometrie, Berlin 1971 (Studienbücherei).
- [12] Novikov, P. S., Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [13] Polya, G., Mathematik und plausibles Schließen, Band 1 (Induktion und Analogie in der Mathematik), Basel 1962 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [14] Polya, G., Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung; Lernen und Lehren, Basel und Stuttgart 1966 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [15] Ringel, G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin 1959.
- [16] Rosenfeld, B. A., und I. M. Jaglom, Mehrdimensionale Räume, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [17] Schklarski, D. O., Theorie der Elementarmathematik, Band 2 und 3, Moskau 1952 und 1954 (russisch).

Zusatz bei der deutschen Ausgabe

Bakelman, I. J., Spiegelung am Kreis, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

1976 (Übersetzung aus dem Russischen).

Belkner, H., Determinanten. 3. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig 1976.

Boltjanski, V. G., und V. A. Efremovis, Anschauliche kombinatorische Topologie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986, (Übersetzung aus dem Russischen).

Donath, E., Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

Enzyklopädie der Elementarmathematik, Teil IV, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).

Flachsmeyer, J., Kombinatorik, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

Gelfans, I. M., E. G. Glagolewa und E. N. Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974 (Übersetzung aus dem Russischen).

Gelfand, I. M., E. G. Glagolewa und A. A. Kirillow, Die Koordinatenmethode, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).

Hilbert, D., und S. Cohn-Vosse, Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1932; Nachdruck Dover Publications, New York 1944.

Hajos, G., Einführung in die Geometrie, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (Übersetzung aus dem Russischen).

Hameister, E., Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, 3. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Klotzek, B., U. Lengtat, E. Letzel und K. Schröder, kombinieren, parkettieren, färben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1985.

Markuschewitsch, A. I., Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

Miller, M., Rechenvorteile, 7. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig 1983

Pieper, H., Die komplexen Zahlen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984

Rademacher, O., und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin 1930;

Sedlacek, J., Einführung in die Graphentheorie, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972 (Übersetzung aus dem Tschechischen).

Sedlacek, J., Keine Angst vor Mathematik. 5. Aufl., VEB Fachbuchverlag Leipzig 1969 (Übersetzung aus dem Tschechischen).

Wilenskin, N. J., Unterhaltsame Mengenlehre, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).