

---

**W.G. Boltjanski und I.Z. Gochberg**

**Sätze und Probleme der  
kombinatorischen Geometrie**

Übersetzung: R. Brosowski, H. Matho  
Bearbeitung: B. Klotzek, S. Kloth  
1972 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin  
MSB: Nr. 61  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## Vorwort zur deutschen Ausgabe

Wir freuen uns sehr über die Veröffentlichung unseres Büchleins in deutscher Sprache. Wir sind besonders deshalb erfreut, weil sich dadurch nicht nur der Leserkreis vergrößert, sondern auch der Kreis derjenigen, welche versuchen werden, die 17 dem Buch beigefügten Probleme zu lösen.

Leser, die sich für die Problematik dieses Buches interessieren, seien auch auf unsere kürzlich im Verlag Nauka erschienene Broschüre hingewiesen. Sie enthält neue Ergebnisse und Probleme, die sich auf den ebenen Fall beziehen.

Vorliegendes Buch wurde auf Vorschlag von Dr. Ludwig Boll übersetzt. Studentinnen der Pädagogischen Hochschule Potsdam führten unter Leitung von Dr. sc. Benno Klotzek und Siegfried Kloth die Übersetzung aus. Wir danken den Übersetzern für eine Reihe von Verbesserungen und benutzen die Gelegenheit, den deutschen Kollegen unseren aufrichtigen Dank auszusprechen.

Moskau - Kischinew, 26. März 1971

W. Boltjanski, I. Gochberg

---

## Vorwort zur russischen Ausgabe

In der Theorie der konvexen Figuren gibt es viele schöne Resultate, die Schülern völlig zugänglich sind und auch Mathematiker interessieren. Einige solche Resultate wollen wir hier darlegen. Wir behandeln Aufgaben der Theorie der konvexen Figuren, die hauptsächlich mit der Zerlegung von Figuren in "kleinere" Teile zusammenhängen. (Dabei wurde bewusst auf die Darlegung topologischer Feinheiten verzichtet, um den anschaulichen Charakter der Problemstellungen zu betonen.)

Die Sätze und Aufgaben, die das Buch enthält, sind erst seit kurzem bekannt; die ältesten sind 30 Jahre alt, und viele Sätze befinden sich noch im "Kindesalter" - sie wurden in mathematischen Zeitschriften in den letzten fünf Jahren veröffentlicht.

Uns scheint, dass der grundlegende Teil des Buches von solchen Schülern der oberen Klassen, die sich für Mathematik interessieren, vollständig verstanden werden kann. Die Teile, die schwierig erscheinen, können weggelassen werden. Am einfachsten erscheinen die §§ 1-3, 7-10, 12-14, die sich auf ebene Figuren beziehen.

Die übrigen Paragraphen beziehen sich auf räumliche (und sogar auf  $n$ -dimensionale) Figuren. Der anspruchsvolle und vorgebildete Leser findet am Ende des Buches einige Anmerkungen und ein Verzeichnis von Büchern und Artikeln in Zeitschriften.

Die Hinweise auf die Anmerkungen werden durch hochgestellte Ziffern in eckigen Klammern gegeben, die Hinweise auf die Literatur in eckigen Klammern. An einigen Stellen (besonders in den Anmerkungen) hat die Darstellung das Niveau wissenschaftlicher Arbeiten. Wir betrachten den Einschub solcher Stellen in ein populärwissenschaftliches Buch als zulässig: Unserer Meinung nach ist die Popularisierung wissenschaftlicher Erkenntnisse nicht nur unter Anfängern, sondern auch unter Spezialisten möglich.

Das Buch führt den Leser an den gegenwärtigen Stand hinsichtlich der Problemstellungen und der Lösungen heran. Am Ende des Buches (§ 19) sind ungelöste Probleme angegeben, von denen einige so anschaulich und einfach formuliert sind, dass sogar fähige Schüler ihre Lösung versuchen können.

Zum Abschluss einige Worte über die "kombinatorische Geometrie" selbst. Dieser neue Zweig der Geometrie ist noch nicht in einem Buch zusammengefasst worden, und deshalb ist es zu früh, über den Gegenstand der kombinatorischen Geometrie zu sprechen.

Außer den Fragen, die in diesem Buch untersucht werden, gehören zur kombinatorischen Geometrie zweifellos der Fragenkreis, der mit dem Satz von Helly (vgl. [37], Kap. 2) zusammenhängt, die Probleme der Lagerung von Figuren (siehe das ausgezeichnete Buch von Fejes Toth [23]) und eine Reihe anderer Fragen. Dem interessierten Leser empfehlen wir ein Buch von Hadwiger und Debrunner [29], das den Problemen der kombinatorischen Geometrie der Ebene gewidmet ist, und eine interessante Übersicht Grünbaums [10], die mit dem Inhalt dieses Buches in enger Verbindung steht.

Die Autoren nutzen die Gelegenheit, I.M. Jaglom ihren Dank auszusprechen, dessen Enthusiasmus und freundschaftliche Hinweise nicht wenig zur Verbesserung des Buchtextes beitrugen.

W.G. Boltjanski, I.Z. Gochberg

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Zerlegung von Figuren in Teile kleineren Durchmessers</b>	<b>5</b>
1.1	§ 1 Der Durchmesser von Figuren . . . . .	5
1.2	§ 2 Problemstellung . . . . .	6
1.3	§ 3 Die Lösung des Problems für ebene Figuren . . . . .	7
1.4	§ 4 Die Zerlegung der Kugel in Teile kleineren Durchmessers . . . . .	10
1.5	§ 5 Die Lösung des Problems für Körper im Raum . . . . .	15
1.6	§ 6 Über die Vermutung Borsuks für $n$ -dimensionale Körper . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Die Überdeckung konvexer Körper durch gestauchte Körper und das Beleuchtungsproblem</b>	<b>27</b>
2.1	§ 7 Die konvexen Figuren . . . . .	27
2.2	§ 8 Das Problem der Überdeckung von Figuren mit gestauchten Figuren . . . . .	29
2.3	§ 9 Eine andere Formulierung des Problems . . . . .	31
2.4	§ 10 Die Lösung des Problems für ebene Figuren . . . . .	33
2.5	§ 11 Die Vermutung Hadwigers . . . . .	34
2.6	§ 12 Die Formulierung des Beleuchtungsproblems . . . . .	35
2.7	§ 13 Die Lösung des Beleuchtungsproblems für ebene Figuren . . . . .	37
2.8	§ 14 Die Äquivalenz beider Probleme . . . . .	40
2.9	§ 15 Einige Abschätzungen für die Größe $c(F)$ . . . . .	43
2.10	§ 16 Die Überdeckung durch gestauchte Figuren und die Beleuchtung bei unbeschränkten konvexen Figuren . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Einige verwandte Aufgaben</b>	<b>50</b>
3.1	§ 17 Das Problem Borsuks im Minkowskischen Raum . . . . .	50
3.2	§ 18 Die Probleme von Erdős und Klee . . . . .	55
3.3	§ 19 Einige ungelöste Probleme . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Anmerkungen</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>74</b>

# 1 Die Zerlegung von Figuren in Teile kleineren Durchmessers

## 1.1 § 1 Der Durchmesser von Figuren

Wir wollen einen Kreis mit dem Durchmesser  $d$  betrachten. Der Abstand zweier beliebiger Punkte  $M$  und  $N$  der Kreisfläche (Abb. 1) ist nicht größer als  $d$ . Dabei kann man zwei Punkte  $A$  und  $B$  unseres Kreises finden, die voneinander genau den Abstand  $d$  haben.

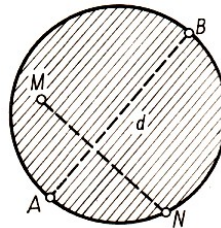


Abb. 1

Wir betrachten jetzt an Stelle des Kreises eine beliebige andere Figur und fragen uns, was man hier als "Durchmesser" ansehen kann. Das oben Gesagte bringt uns auf den Gedanken, den größten der Abstände zwischen zwei Punkten der Figur als Durchmesser zu bezeichnen. Mit anderen Worten, wir werden den Abstand  $d$  den Durchmesser der Figur  $F$  (Abb. 2) nennen, wenn

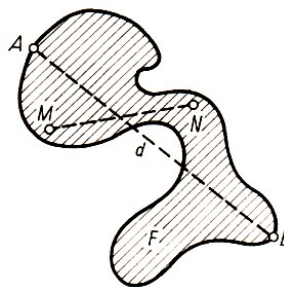


Abb. 2

1. der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten  $M$  und  $N$  der Figur  $F$  nicht größer als  $d$  ist und
2. man in der Figur  $F$  wenigstens ein Punktpaar  $A, B$  finden kann, dessen Abstand gleich  $d$  ist [Anmerkung 1].

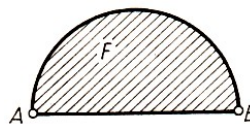


Abb. 3

Die Figur  $F$  möge eine Halbkreisfläche darstellen (Abb. 3). Mit  $A$  und  $B$  bezeichnen wir die Endpunkte, die den zugehörigen Halbkreis begrenzen. Dann ist klar, dass der Durchmesser der Figur  $F$  die Länge der Strecke  $AB$  ist.

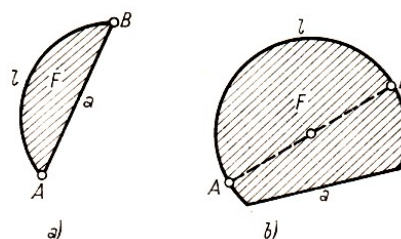


Abb. 4

Wenn im allgemeinen die Figur  $F$  ein Kreissegment darstellt, das durch den Bogen  $l$  und die Sehne  $a$  begrenzt wird, dann ist in dem Fall, dass der Bogen  $l$  nicht größer als der Halbkreis ist (Abb. 4a), der Durchmesser der Figur  $F$  gleich  $a$  (d.h. gleich der Länge der Sehne); ist der Bogen  $l$  größer als der Halbkreis (Abb. 4b), so stimmt der Durchmesser der Figur  $F$  mit dem Durchmesser des Kreises überein.

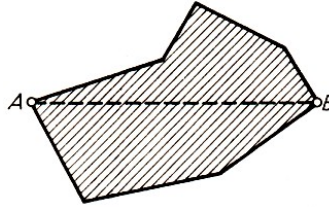


Abb. 5

Wenn  $F$  eine Vielecksfläche darstellt (Abb. 5), ist leicht einzusehen, dass der größte Abstand zwischen Ecken der Durchmesser ist. Insbesondere ist der Durchmesser einer beliebigen Dreiecksfläche gleich ihrer größten Seitenlänge (Abb. 6).

Wenn der Durchmesser der Figur  $F$  gleich  $d$  ist, können in der Figur  $F$  noch viele Punktepaare existieren, deren Abstand gleich  $d$  ist. Bei der Ellipse gibt es nur ein solches Punktepaar (Abb. 7), bei einem Quadrat zwei (Abb. 8), bei einem gleichseitigen Dreieck drei (Abb. 9) und schließlich bei einem Kreis unendlich viele solcher Punktepaare.

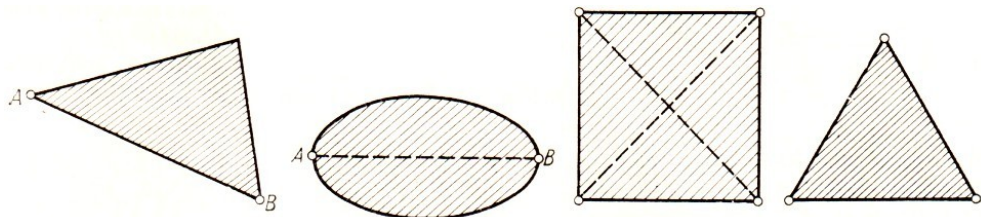


Abb. 6-9

## 1.2 § 2 Problemstellung

Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser  $d$  durch irgendeine Linie  $MN$  in zwei Teile zerlegt wird, hat einer dieser Teile den Durchmesser  $d$ . Ist nämlich  $M'$  der zum Punkt  $M$  diametral entgegengesetzte Punkt, dann muss er zu einem der beiden Teile gehören, und dieser Teil (der die Punkte  $M, M'$  enthält) besitzt den Durchmesser  $d$  (Abb. 10). [Anmerkung 2]

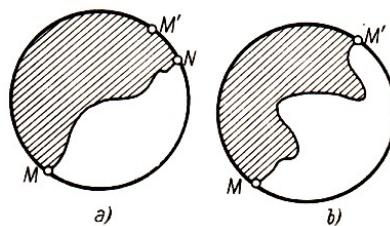


Abb. 10

Andererseits ist klar, dass man eine Kreisfläche in drei Teile zerlegen kann, derart dass jeder von ihnen einen Durchmesser kleiner  $d$  besitzt (Abb. 11).

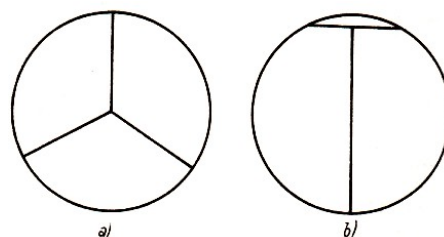
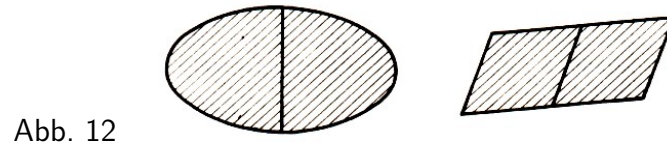


Abb. 11

Also kann man eine Kreisfläche vom Durchmesser  $d$  nicht derart in zwei Teile zerlegen, dass die Durchmesser der Teile kleiner als  $d$  werden, aber man kann sie in drei solche Teile zerlegen. Diese Eigenschaft besitzt auch ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $d$  (wird es in zwei Teile zerlegt, so muss irgendein Teil zwei Eckpunkte des Dreiecks enthalten, und der Durchmesser dieses Teils wird gleich  $d$ ). Aber es gibt Figuren, die man in zwei Teile mit kleinerem Durchmesser zerlegen kann (Abb. 12).



Wir können für eine beliebige Figur  $F$  das Problem der Zerlegung in Teile kleineren Durchmessers betrachten.[Anmerkung 3] Die kleinste Anzahl der Teile, die dafür benötigt wird, bezeichnen wir mit  $a(F)$ . Wenn  $F$  Fläche eines Kreises oder eines gleichseitigen Dreiecks ist, gilt  $a(F) = 3$ , aber für die Fläche einer Ellipse oder eines Parallelogramms ist  $a(F) = 2$ .

Das Problem der Zerlegung einer Figur in Teile kleineren Durchmessers kann man nicht nur für ebene Figuren betrachten, sondern auch für Körper, die sich im Raum (oder sogar im  $n$ -dimensionalen Raum) befinden.

Das Problem, welche Werte  $a(F)$  annehmen kann, stellte im Jahre 1933 der berühmte polnische Mathematiker K. Borsuk [4]. Seitdem wurden dem Studium dieses Problems zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten gewidmet. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sind im ersten Kapitel dieses Buches dargelegt.

Wir betrachten zuerst den Fall der ebenen Figuren, danach lösen wir das Problem für räumliche Körper, und zum Schluss geben wir dem vorgebildeten Leser eine Übersicht über die Ergebnisse im  $n$ -dimensionalen Fall.

### 1.3 § 3 Die Lösung des Problems für ebene Figuren

Wir haben schon gesehen, dass  $a(F)$  für einige ebene Figuren den Wert 2 und für andere den Wert 3 hat. Es taucht die Frage auf, ob man nicht eine ebene Figur finden kann, für die  $a(F) > 3$  ist, d.h. eine solche Figur, für deren Zerlegung in Teile kleineren Durchmessers man nicht mit drei Teilen auskommt, sondern vier oder mehr Teile benötigt.

Es erweist sich, dass die Dreiteilung immer ausreicht, d.h., es gilt der folgende von Borsuk im Jahre 1933 aufgestellte Satz [Anmerkung 4]:

Satz 1. Jede ebene Figur  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  kann in drei Teile mit einem Durchmesser  $< d$  zerlegt werden, d.h., es gilt  $a(F) \leq 3$ .

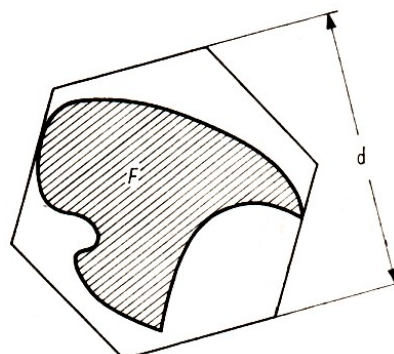


Abb. 13

Beweis. Den Hauptteil des Beweises wird die Herleitung des folgenden Lemmas bilden, das 1920 der ungarische Mathematiker Pal [20] fand:

Jede ebene Figur  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  kann in ein regelmäßiges Sechseck eingeschlossen werden, bei dem der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seiten gleich  $d$  ist (Abb. 13).

Wir nehmen eine Gerade  $l$ , die die Figur  $F$  nicht schneidet, und nähern diese Gerade der Figur  $F$  (durch Verschiebung) so lange, bis die verschobene Gerade die Figur  $F$  berührt (Abb. 14). Die erhaltene Gerade  $l_1$  besitzt die Eigenschaft, dass sie einen Punkt der Figur enthält und die ganze Figur  $F$  in einer berandeten Halbebene bezüglich  $l_1$  liegt; also ist  $l_1$  eine Stützgerade der Figur  $F$ . [4]

Wir führen außerdem eine zweite Stützgerade  $l_2$  ein, parallel zu  $l_1$  (Abb. 14). Es ist klar, dass sich die ganze Figur  $F$  in dem berandeten Streifen zwischen den Geraden  $l_1$  und  $l_2$  befindet und dass der Abstand zwischen diesen Geraden nicht größer ist als  $d$  (da der Durchmesser der Figur  $F$  gleich  $d$  ist).

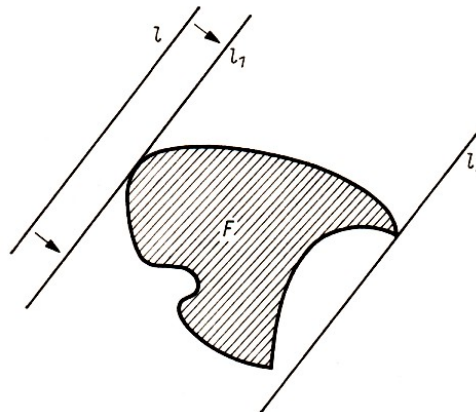


Abb. 14

Auf  $l_1$  wählen wir den Durchlaufsin aus, bezüglich dessen das Innere von  $F$  "links" liegt. Dann drehen wir die nunmehr gerichtete Gerade  $l_1$  entgegen dem Uhrzeigersinn um  $60^\circ$  und erhalten eine gerichtete Gerade  $m$ .

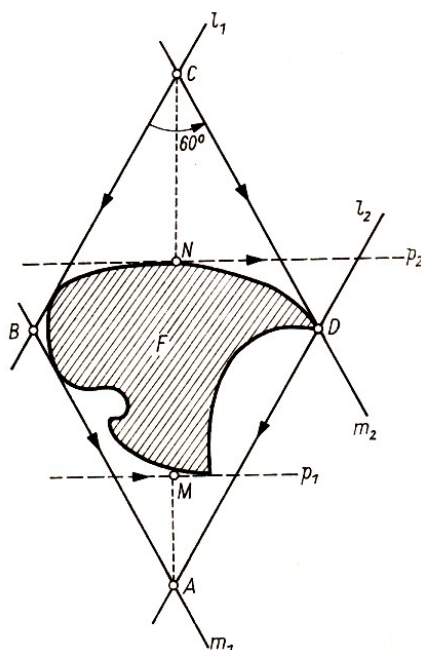


Abb. 15

Wir führen zwei gerichtete Stützgeraden ein, die in der Richtung und im Durchlaufsin mit  $m$  übereinstimmen. Diese Stützgeraden bezeichnen wir mit  $m_1$  und  $m_2$  derart, dass das Innere von  $F$  bezüglich  $m_1$  "links" und folglich bezüglich  $m_2$  "rechts" liegt (Abb. 15).

Die gerichteten Geraden  $m_1, l_1, m_2, l_2$  bilden ein Parallelogramm  $ABCD$  mit Winkeln von  $60^\circ$  bei  $A$  und  $C$  sowie mit Höhen, die nicht größer als  $d$  sind. Die Parallelogrammfläche enthält die Figur  $F$ .

Ferner führen wir zwei gerichtete Stützgeraden  $p_1, p_2$  der Figur  $F$  ein, die aus  $l_1$  durch Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um  $120^\circ$  entstehen; die Bezeichnung wird so gewählt, dass das Innere von  $F$  bezüglich  $p_1$  "links" und bezüglich  $p_2$  "rechts" liegt.



Schließlich bezeichnen wir mit  $M$  bzw. mit  $N$  die Fußpunkte der Lote, die von den Punkten  $A$  bzw.  $C$  auf diese Geraden gefällt werden (Abb. 15). Wir werden zeigen, dass man die Richtung der Geraden  $l_1$  so wählen kann, dass  $AM \cong CN$  erfüllt ist.

Dazu nehmen wir an, dass  $AM \not\cong CN$  ist, etwa  $a(A, M) < a(C, N)$ <sup>1</sup>; dann wird die Größe  $y = a(A, M) - a(C, N)$  negativ.

Jetzt verändern wir stetig die Richtung der Geraden  $l_1$  solange, bis sie sich um  $180^\circ$  geändert hat (die Figur  $F$  lassen wir fest). Zusammen mit der Geraden  $l_1$  werden wir auch die Lage der übrigen Geraden  $l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$  ändern, da ihre Lage durch die Wahl der Geraden  $l_1$  völlig bestimmt wird.

Deshalb werden bei der Änderung der Geraden  $l_1$  auch die Punkte  $A, C, M$  und  $N$  [Anmerkung 5] stetig geändert, das bedeutet aber, dass sich die Größe  $y = a(A, M) - a(C, N)$  stetig ändert. Wenn aber die Gerade  $l_1$  um  $180^\circ$  geändert wird, nimmt sie die Lage ein, die vorher die Gerade  $l_2$  besaß. Deshalb erhalten wir dasselbe Parallelogramm wie in Abb. 15, nur dass in ihm die Punkte  $A$  und  $C$  und auch  $M$  und  $N$  vertauscht sind.

Also wird in dieser Lage die Größe  $y$  schon positiv. Wenn wir jetzt die Änderung der Größe  $y$  bei der Änderung der Geraden  $l_1$  von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  graphisch darstellen (Abb. 16), sehen wir, dass sich eine Lage der Geraden  $l_1$  finden lässt, bei der die Größe  $y$  Null wird, d.h.  $a(A, M) = a(C, N)$  ist (denn die Größe  $y$ , die sich stetig von einem negativen zu einem positiven Wert ändert, muss für eine Lage von  $l_1$  Null werden).

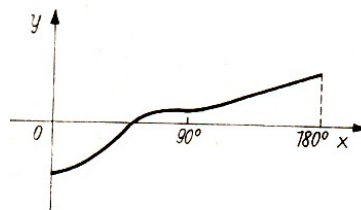


Abb. 16

Wir betrachten die Lage aller unserer Geraden für den Fall, dass die Größe  $y$  Null ist (Abb. 17).

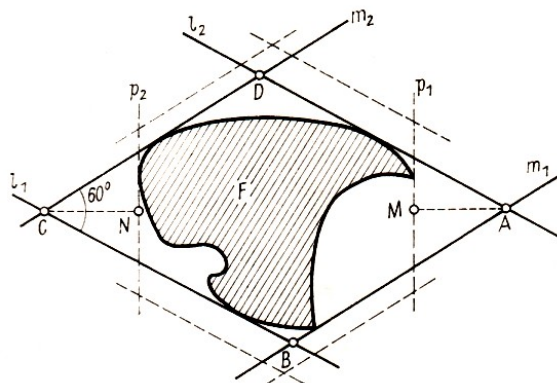


Abb. 17

Aus  $AM \cong CN$  folgt, dass das Sechseck, das durch die Geraden  $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$  gebildet wird, zentralsymmetrisch bezüglich eines Punktes  $O$  ist.

Jeder Winkel dieses Sechsecks ist gleich  $120^\circ$ , und der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seiten ist nicht größer als  $d$ . Wenn der Abstand zwischen  $p_1$  und  $p_2$  kleiner als  $d$  ist, dann verschieben wir diese Geraden so, dass der Abstand zwischen den verschobenen Geraden gleich  $d$  ist und  $O$  Symmetriezentrum bleibt.

<sup>1</sup>Mit  $a(A, B)$  wird der Abstand der Punkte  $A, B$  bezeichnet.

Ebenso verfahren wir mit den Geraden  $l_1, l_2$ , danach mit den Geraden  $m_1, m_2$ . Dadurch erhalten wir ein zentralsymmetrisches Sechseck (mit Winkeln von  $120^\circ$ ), bei welchem die gegenüberliegenden Seiten den Abstand  $d$  haben (gestricheltes Sechseck in Abb. 17). Aus dem Gesagten wird klar, dass alle Seiten dieses Sechsecks gleichlang sind, d.h., dieses Sechseck ist regelmäßig, wobei die Figur  $F$  in der Fläche des Sechsecks liegt.

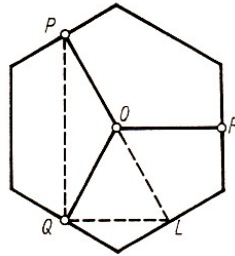


Abb. 18

Jetzt zeigen wir, dass man die Fläche des konstruierten regelmäßigen Sechsecks in drei Teile zerlegen kann, wovon jeder einen Durchmesser kleiner als  $d$  hat. Dabei wird auch die Figur  $F$  in drei Teile zerlegt, deren Durchmesser erst recht kleiner als  $d$  werden.

Eine geeignete Teilung der Fläche des regelmäßigen Sechsecks in drei Teile ist in Abb. 18 zu sehen. (Die Punkte  $P, Q$  und  $R$  sind die Mittelpunkte von Seiten,  $O$  ist der Mittelpunkt des Sechsecks).

Um sich davon zu überzeugen, dass die Durchmesser der Teile kleiner als  $d$  sind, genügt es zu bemerken, dass im Dreieck  $PQL$  bei  $Q$  ein rechter Winkel ist und deshalb  $a(P, Q) < a(P, L) = d$  ist.

Somit ist Satz 1 bewiesen. (Vgl. in Verbindung mit Satz 1 das Problem 4)

## 1.4 § 4 Die Zerlegung der Kugel in Teile kleineren Durchmessers

Wie leicht zu sehen ist, existieren im Raum solche Körper  $F$ , für die  $a(F)$  gleich 2 oder 3 ist. In Abb. 19 ist ein Körper  $F$  mit  $a(F) = 2$  dargestellt.

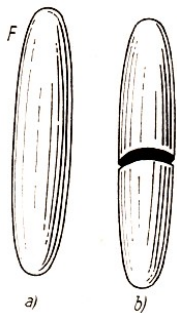


Abb. 19



Abb. 20



Wenn ferner  $F$  ein Kegel ist, dessen Höhe kleiner als der Radius der Grundfläche ist (Abb. 20a), dann ist  $a(F) = 3$ . Denn der Durchmesser dieses Körpers ist gleich dem Durchmesser der Grundfläche, und deshalb ist  $a(F) \geq 3$  (denn die Kreisfläche, die die Grundfläche bildet, kann man nicht in zwei Teile kleineren Durchmessers zerlegen); die Zerlegung des Körpers  $F$  in drei Teile kleineren Durchmessers zeigt Abb. 20b.

Im Raum existieren auch solche Körper, für die  $a(F) > 3$  ist. Zum Beispiel besitzt ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge  $d$  diese Eigenschaft. (Wird es in drei Teile zerlegt, so muss irgendeiner der Teile zwei Ecken des Tetraeders enthalten, und daher wird der Durchmesser dieses Teiles gleich  $d$  sein). Einen bedeutend tieferen Sachverhalt drückt der folgende

Satz 2 aus, welcher zeigt, dass sogar jeder Kugelkörper ein solcher Körper ist.

Satz 2. Ein Kugelkörper vom Durchmesser  $d$  kann nicht in drei Teile, deren Durchmesser kleiner als  $d$  ist, zerlegt werden.

Bevor zum Beweis übergegangen wird, stellen wir diesen Satz dem früher Gesagten gegenüber.<sup>2</sup> Wie wir gesehen haben, kann man eine Kreisfläche nicht in zwei Teile kleineren Durchmessers zerlegen. Wir verabreden, den Kreis als zweidimensionale Kugel zu bezeichnen (zweidimensional deshalb, weil er in einer Ebene liegt, welche bekanntlich zwei Dimensionen hat). Dann kommen wir zu der Formulierung:

Einen zweidimensionalen Kugelkörper vom Durchmesser  $d$  kann man nicht in zwei Teile kleineren Durchmessers zerlegen. Eine gewöhnliche Kugel (d.h. eine im dreidimensionalen Raum gelegene) nennt man natürlich dreidimensionale Kugel. Wenn wir den Fall des Kreises und der Kugel (Satz 2) zusammenfassen, dann kommen wir zu der folgenden Formulierung:

Satz 2'. Es ist unmöglich, einen  $n$ -dimensionalen Kugelkörper in  $n$  Teile kleineren Durchmessers zu zerlegen ( $n = 2, 3$ ).

Außer dem "zweidimensionalen Raum" (d.h. der Ebene) und dem dreidimensionalen Raum betrachtet man in der Mathematik und ihren Anwendungen sogar Räume mit vier und mehr Dimensionen.

Es zeigt sich, dass Satz 2' nicht nur für  $n = 2, 3$  gilt, sondern auch für jede natürliche Zahl  $n$ .

Der Satz wurde in dieser allgemeinen Formulierung von K. Borsuk [3] im Jahre 1933 aufgestellt, aber noch früher (im Jahre 1930) wurde im Grunde genommen dasselbe Ergebnis von den sowjetischen Mathematikern L. A. Ljusternik und L. G. Schnirelman erhalten, jedoch in einer anderen Formulierung.

Die Beweise, die von diesen Wissenschaftlern gefunden wurden, sind schwieriger und nicht elementar. (Sie beruhen auf Sätzen, die sich auf ein neues Gebiet der Geometrie, die sogenannte Topologie, beziehen.)

Deshalb ist es nicht möglich, diese Beweise hier zu führen. Doch für  $n = 3$  kann der Beweis elementar dargestellt werden. (Vgl. auch die später genannten Sätze, die von dem deutschen Mathematiker Lenz bewiesen wurden.)

Beweis von Satz 2. Wir bezeichnen mit  $E$  einen Kugelkörper vom Durchmesser  $d$ . Entgegen der Behauptung nehmen wir an, dass man  $E$  in drei Teile  $M_1, M_2, M_3$  zerlegen kann, wobei jeder von ihnen einen Durchmesser kleiner als  $d$  hat. Die zu  $E$  gehörige Kugelfläche bezeichnen wir mit  $S$ .

Die Menge aller Punkte der Kugel  $S$ , die zum Teil  $M_1$  gehören, sei  $N_1$ ; analog legen wir die Mengen  $N_2$  und  $N_3$  fest. Auf diese Weise wird die Kugel  $S$  in drei Mengen  $N_1, N_2, N_3$  geteilt; jede von ihnen hat offenbar einen Durchmesser kleiner als  $d$ .

Mit  $d_1$  bezeichnen wir den Durchmesser der Menge  $N_1$  (folglich gilt  $d_1 < d$ ), und wir setzen

$$h = \frac{1}{3}(d - d_1)$$

Wir führen jetzt auf der Kugel  $S$  folgende Konstruktion aus.

Wir wählen zwei diametral gegenüberliegende Punkte  $P$  und  $Q$  aus (die "Pole" der Kugel  $S$ ) und schneiden die Kugel  $S$  mit einigen Ebenen senkrecht zur Strecke  $PQ$ .

---

<sup>2</sup>Der Leser, dem die "n-dimensionalen" Überlegungen, die jetzt geführt werden, unverständlich scheinen, kann zum Beweis des Satzes 2 oder sogar, indem er den Beweis auslässt, sofort zur Lektüre des § 5 oder des Kapitels II übergehen.

Diese Ebenen schneiden die Kugel  $S$  in Kreisen ("Parallelkreisen"), die die Kugel  $S$  in zwei "polare Kappen" und mehrere Zonen teilen (Abb. 21a).

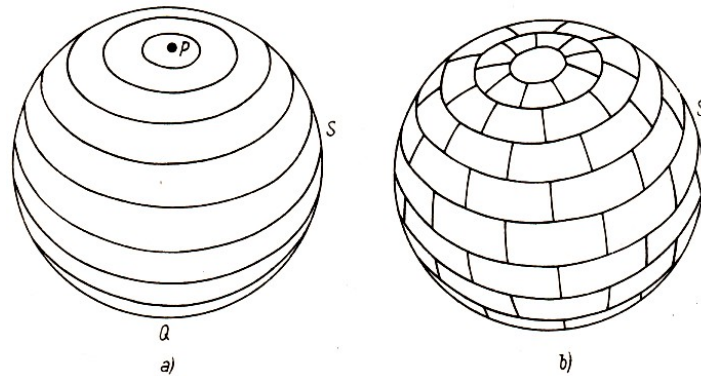


Abb. 21

Jede von diesen Zonen teilen wir durch Meridianbögen in mehrere Teile, so dass die erhaltene Teilung der Kugel an eine "Ziegelmauer" erinnert (Abb. 21b). Außerdem wählen wir die Anzahl der Meridiane und Parallelkreise so groß, dass jedes von den Stücken, in welche die Kugel geteilt wurde (die polaren Kappen und die "Ziegelflächen", einen Durchmesser  $< h$  besitzt.

Wir betrachten jetzt alle Stücke, die einen gemeinsamen Punkt mit der Menge  $N_1$  haben. Zusammengenommen bilden sie eine Figur, die wir mit  $G_1$  bezeichnen. Da die Menge  $N_1$  den Durchmesser  $d_1$  besitzt und der Durchmesser jedes Stückes kleiner als  $h$  ist, ist der Durchmesser der Menge  $G_1$  kleiner als  $d_1 + 2h = d - h < d$ , d.h., der Durchmesser der Menge  $G_1$  ist kleiner als  $d$ .

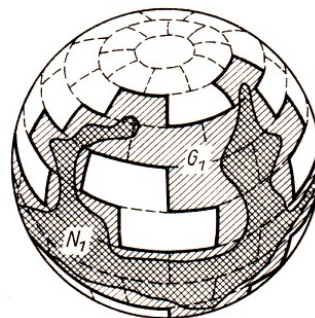


Abb. 22

Wir betrachten jetzt den Rand der Menge  $G_1$ . Es ist nicht schwer einzusehen, dass er aus endlich vielen geschlossenen Linien besteht, die sich selbst und einander nicht schneiden (Abb. 22); denn in jedem "Stoß"punkt treffen sich drei Stücke (Abb. 21b); wenn der "Stoß"punkt auf dem Rand der Menge  $G_1$  liegt, dann gehören von drei Teilen ein (Abb. 23) oder zwei (Abb. 24) zur Menge  $G_1$ .

Wir nehmen uns nun einen beliebigen Randpunkt der Menge  $G_1$  und bewegen uns von ihm aus auf dem Rand der Menge entlang. Bevor wir einen "Stoß"punkt erreichen, ist der Rand der Menge  $G_1$  ein wohlbestimmter Weg.

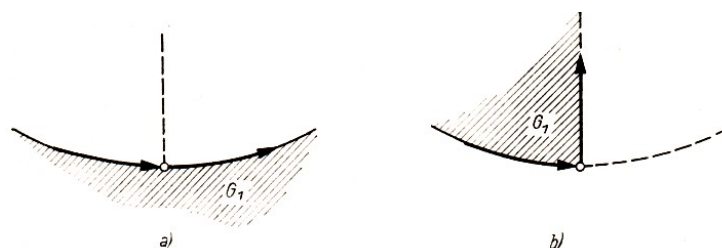


Abb. 23

Aber auch in einem "Stoß"punkt verzweigt sich der Rand nicht, sondern geht völlig eindeutig weiter. (Das ist unmittelbar aus Abb. 23 und Abb. 24 zu ersehen.)

Da die Anzahl der Wegstücke endlich ist, müssen wir, wenn wir uns auf dem Rand der Menge  $G_1$  weiterbewegen, zum Ausgangspunkt zurückkehren, d.h. eine geschlossene Linie beschreiben (denn der Rand kann nirgends abbrechen).

Es sei bemerkt, dass der Rand der Menge  $G_1$  sich nicht nur aus einer solchen geschlossenen Linie zusammensetzen kann, sondern aus mehreren (Abb. 22). Die geschlossenen Linien, die den Rand der Menge  $G_1$  bilden, bezeichnen wir mit  $L_1, L_2, \dots, L_k$ .

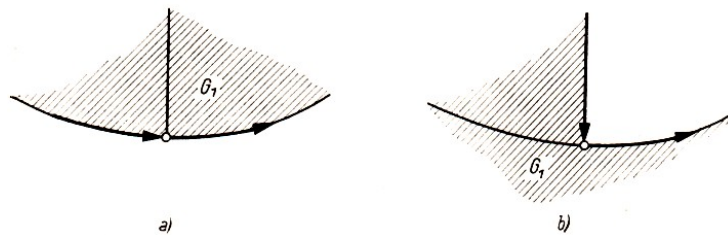


Abb. 24

Es sei jetzt  $G'_1$  eine Menge, die symmetrisch zur Menge  $G_1$  bezüglich des Mittelpunktes der Kugel  $S$  ist, d.h.,  $G'_1$  besteht aus allen Punkten der Kugel  $S$ , die den Punkten der Menge  $G_1$  diametral gegenüberliegen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Mengen  $G_1$  und  $G'_1$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Denn wenn der Punkt  $A$  den Mengen  $G'_1$  und  $G_1$  angehört, dann muss der Punkt  $B$ , der dem Punkt  $A$  diametral gegenüberliegt,  $G_1$  angehören (da  $A$  zu  $G'_1$  gehört).

Aber dann gehören die beiden diametral gegenüberliegenden Punkte  $A$  und  $B$  der Menge  $G_1$  an, und das widerspricht der Annahme, dass die Menge  $G_1$  einen Durchmesser kleiner als  $d$  besitzt.

Der Rand der Menge  $G'_1$  wird von den Linien  $L'_1, L'_2, \dots, L'_k$ , den zu  $L_1, L_2, \dots, L_k$  symmetrischen Linien, gebildet. Da die Mengen  $G_1$  und  $G'_1$  keinen gemeinsamen Punkt haben, schneiden die geschlossenen Linien  $L_1, L_2, \dots, L_k, L'_1, L'_2, \dots, L'_k$  einander nicht.

Wenn in der Kugel  $q$  geschlossene Linien gegeben sind, die weder sich selbst noch einander schneiden, dann zerlegen sie die Kugel in  $q+1$  Teile. Das ist durch Induktion leicht einzusehen: Eine Linie teilt die Kugel in zwei Teile, und jede folgende Linie, die hinzugefügt wird, schneidet einen neuen Teil aus. [Anmerkung 6]

Da wir  $2k$  Linien  $L_1, L_2, \dots, L_k, L'_1, L'_2, \dots, L'_k$  haben, zerlegen sie die Kugel in  $2k+1$  Teile, d.h. in eine ungerade Anzahl von Teilen. Diese Teile werden wir als Länder bezeichnen.

Jedes Land ist entweder völlig in der Menge  $G_1$  oder in der Menge  $G'_1$  enthalten oder ist außerhalb der Mengen  $G_1$  und  $G'_1$  gelegen. Da die Linien  $L_1, L_2, \dots, L_k$  zu den Linien  $L'_1, L'_2, \dots, L'_k$  symmetrisch sind, hat jedes Land ein zu ihm symmetrisches Land, oder es ist selbst symmetrisch bezüglich des Kugelmittelpunktes.

Die Zahl der Länder, die paarweise symmetrisch zueinander sind, ist gerade, aber da die Gesamtzahl der Länder ungerade ist, lässt sich wenigstens ein Land finden, das bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrisch zu sich selbst ist.

Es sei  $H$  solch ein Land und  $C$  ein innerer Punkt von ihm. Da das Land  $H$  symmetrisch ist, gehört auch der Punkt  $C'$ , der diametral dem Punkt  $C$  gegenüberliegt, dem Land  $H$  an. Daraus ist ersichtlich, dass der Durchmesser des Landes  $H$  gleich  $d$  ist, und deshalb ist der ganze innere Teil des Landes  $H$  außerhalb der Mengen  $G_1$  und  $G'_1$  gelegen.

Aber da  $H$  ein Land ist, stellt es selbst ein zusammenhängendes Stück der Kugel dar, und deshalb kann man die Punkte  $C$  und  $C'$  (Abb. 25) durch eine Linie  $\Gamma$  verbinden, die völlig im

Inneren des Landes  $H$  liegt.

Die Linie  $\Gamma'$ , symmetrisch zur Linie  $\Gamma$ , verbindet dieselben Punkte  $C$  und  $C'$  und ist ebenfalls völlig im Innern des Landes  $H$  gelegen. Die Linien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  haben keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge  $G_1$  und erst recht keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge  $N_1$ .

Wir kommen jetzt auf die Mengen  $N_1, N_2, N_3$  zurück, die am Anfang des Beweises eingeführt wurden. Jeder Punkt der Linie  $\Gamma$  gehört einer der Mengen  $N_2, N_3$  an. Die Endpunkte  $C$  und  $C'$  (die diametral gegenüberliegen) gehören zu verschiedenen der Mengen  $N_2, N_3$ ; es möge  $C$  zur Menge  $N_2$  und  $C'$  zur Menge  $N_3$  gehören.

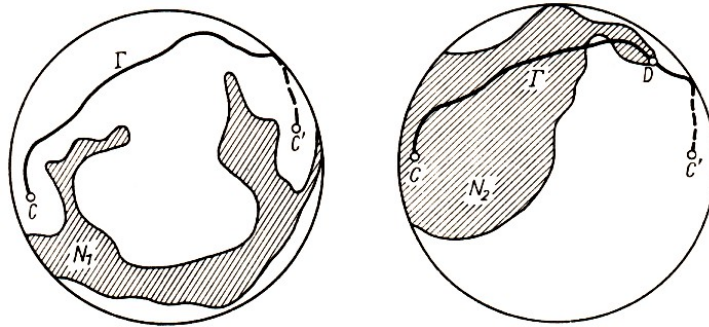


Abb. 25, 26

Wir bewegen uns auf der Linie  $\Gamma$  vom Punkt  $C$  nach  $C'$  und bezeichnen den letzten Punkt der Menge  $N_2$ , dem wir begegnen, mit  $D$  (Abb. 26). Wenn der Punkt  $D$  nicht zur Menge  $N_3$  gehört, dann gehört in  $\Gamma$  eine Umgebung von ihm ebenfalls nicht zu  $N_3$ . [Anmerkung 7]

Aber dann können Punkte, die auf der Linie  $\Gamma$  zwischen  $D$  und  $C'$  und in einer solchen Umgebung liegen, zu keiner der Mengen  $N_1, N_2, N_3$  gehören, was unmöglich ist. Folglich gehört der Punkt  $D$  zu den beiden Mengen  $N_2$  und  $N_3$ .

Wir betrachten zum Schluss den Punkt  $D'$ , der dem Punkt  $D$  diametral gegenüberliegt. Er gehört der Linie  $\Gamma'$  an und ist folglich nicht in der Menge  $N_1$  enthalten. Aber er ist auch nicht in den Mengen  $N_2, N_3$  enthalten, denn diese Mengen besitzen einen Durchmesser  $< d$  und enthalten den Punkt  $D$ . Somit wäre der Punkt  $D'$  in keiner der Mengen  $N_1, N_2, N_3$  enthalten, was der Annahme widerspricht.

Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass der Kugelkörper  $E$  nicht in drei Mengen kleineren Durchmessers geteilt werden kann.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Wir haben also für den Kugelkörper  $E$  die Ungleichung  $a(E) > 3$  bewiesen. Wie groß ist nun aber die Zahl  $a(E)$  genau? Kann man die Kugel in vier Teile kleineren Durchmessers teilen oder sind vielleicht mehr Teile erforderlich?

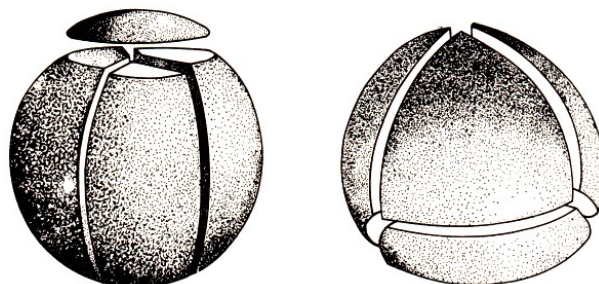


Abb. 27, 28

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass  $a(E) = 4$  ist, d.h., dass die Teilung der Kugel in vier Teile kleineren Durchmessers möglich ist. Eine solche Teilung wird in Abb. 27 gezeigt. Eine andere, mehr symmetrische Teilung kann auf folgende Weise erhalten werden:



Wir beschreiben in die Kugel  $E$  vom Durchmesser  $d$  ein regelmäßiges Tetraeder  $ABCD$  ein und betrachten die dreiflächigen Winkel  $OABC$ ,  $OABD$ ,  $OACD$  und  $OECD$  mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt  $O$ , unter welchen vom Mittelpunkt  $O$  der Kugel die Flächen des Tetraeders zu sehen sind.

Diese vier dreiflächigen Winkel spalten die Kugel  $E$  in vier Teile (Abb. 28); jeder von diesen hat einen Durchmesser kleiner als  $d$ .

## 1.5 § 5 Die Lösung des Problems für Körper im Raum

Dieser Paragraph enthält lediglich den Beweis des folgenden Satzes.

Satz 3. Jeder Körper  $F$  mit dem Durchmesser  $d$ , der sich im dreidimensionalen Raum befindet, kann in vier Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden, d.h.  $a(F) \leq 4$ .

Bevor zum Beweis übergegangen wird, machen wir einige Bemerkungen über die Stellung dieses Satzes in der kombinatorischen Geometrie und über die Geschichte seiner Formulierung und seines Beweises.<sup>3</sup>

Wir haben gesehen, dass für eine beliebige zweidimensionale Figur  $F$  die Ungleichung  $a(F) \leq 3$  erfüllt ist, außerdem gilt in diesem Zusammenhang für einen zweidimensionalen Kugelkörper (d.h. für eine Kreisfläche) die Gleichheit.

Für einen dreidimensionalen Kugelkörper  $E$  gilt die Gleichung  $a(E) = 4$ .

Wenn wir einen  $n$ -dimensionalen Kugelkörper mit  $E^n$  bezeichnen (wobei  $n = 2, 3$  ist), dann lautet die Gleichung  $a(E^n) \leq n + 1$ . Diese Beziehung gilt nicht nur für  $n = 2, 3$ , sondern auch für ein beliebiges natürliches  $n$ .

Nach der Bemerkung im Anschluss an den Satz 2' gilt  $a(E^n) = n + 1$ , d.h., dass ein Kugelkörper  $E^n$  nicht in  $n$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann.

Dagegen reichen schon  $n + 1$  Teile aus; das ergibt sich im  $n$ -dimensionalen Raum durch Konstruktion einer solchen Zerlegung des Kugelkörpers  $E^n$ , die analog der Zerlegung ist, die für  $n = 3$  in Abb. 27 dargestellt ist.

Wir werden hier nicht ausführlich darauf eingehen. Für den Leser, der die  $n$ -dimensionale Geometrie kennt, wird die Konstruktion der Zerlegungen, die den in Abb. 27, 28 dargestellten Darlegungen analog sind, nicht besonders schwierig sein.

Also ist  $a(E^n) = n + 1$ . Für  $n = 2$  ergibt sich der zweidimensionale Kugelkörper  $E^2$  (d.h. eine Kreisfläche) als eine Figur, die eine maximale Anzahl von Teilen (bei der Zerlegung in Teile kleineren Durchmessers) benötigt, d.h. eine Figur  $F$ , für die in der Ungleichung  $a(F) \leq 3$  die Gleichheit erfüllt ist.

Natürlich ist anzunehmen, dass ein solcher Sachverhalt auch bei allen größeren Werten von  $n$  erhalten bleibt. Diese Vermutung wurde von K. Borsuk [4] im Jahre 1933 formuliert. Sie lautet:

Die Vermutung von Borsuk.

Jeder Körper mit dem Durchmesser  $d$ , der sich im  $n$ -dimensionalen Raum befindet, kann in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden, d.h., im  $n$ -dimensionalen Raum ist die Ungleichung  $a(F) \leq n + 1$  erfüllt.

Um den Beweis dieser Vermutung bemühten sich viele Mathematiker in aller Welt. Aber sogar

---

<sup>3</sup>Diese " $n$ -dimensionalen" Überlegungen können auch übergangen werden.

für  $n = 3$  (d.h. für einen Körper, der sich im gewöhnlichen Raum befindet) gelang es lange nicht, dieses Problem vollständig zu lösen.

Die Lösung (für  $n = 3$ ) wurde erst 1955 von dem englischen Mathematiker Eggleston [32] gefunden: Er zeigte, dass im dreidimensionalen Raum die Vermutung Borsuks tatsächlich wahr ist, d.h., es gilt der oben formulierte Satz 3.

Es bleibt zu bemerken, dass der Beweis Egglestons sehr schwierig, lang und nicht elementar ist. Im Jahre 1957 wurde von dem israelischen Mathematiker Grünbaum ein neuer, sehr elementarer und kürzerer Beweis eben dieses Satzes [7] angegeben.

Dieser Beweis erinnert an den Beweis des Satzes 1: Ein Körper  $F$  wird in ein Polyeder eingeschlossen, das dann in vier Teile vom Durchmesser  $< d$  zerlegt wird. Wir legen den Beweis Grünbaums dar.

Beweis des Satzes 3. Die Herleitung des folgenden Lemmas, das 1953 von dem amerikanischen Mathematiker Gale [11] aufgestellt wurde, wird der erste Teil des Beweises sein:

Jeder räumliche Körper  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  kann in ein regelmäßiges Oktaeder eingeschlossen werden, bei dem der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seitenflächen gleich  $d$  ist.

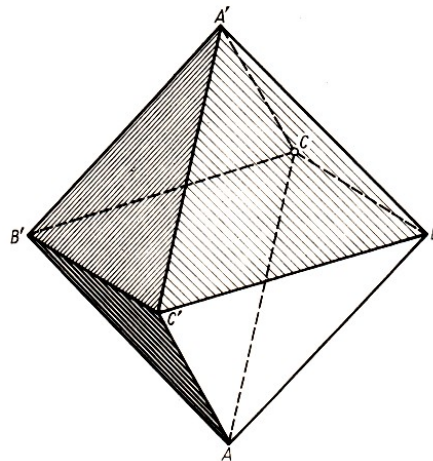


Abb. 29

Wir betrachten ein regelmäßiges Oktaeder  $ABCA'B'C'$ , wobei  $A$  und  $A'$ ,  $B$  und  $B'$ ,  $C$  und  $C'$  paarweise gegenüberliegende Eckpunkte sind und der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seitenflächen gleich  $d$  ist (Abb. 29).

Das Oktaeder hat acht Seitenflächen, die paarweise parallel sind. Wir betrachten nicht vier Paare paralleler Ebenen, in denen diese Seitenflächen liegen, sondern nur drei; wir nehmen z.B. die Ebenen  $ABC'$  und  $A'B'C$ ,  $AB'C$  und  $A'BC'$ ,  $A'BC'$  und  $AB'C'$ .

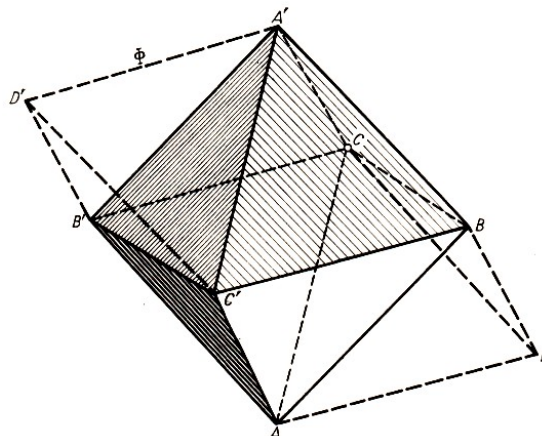


Abb. 30



Diese Paare paralleler sich schneidender Ebenen bilden das Parallelepiped  $AB'CD A'BC'D'$  (vgl. Abb. 30, in welcher die "neuen" Kanten dieses Parallelepipeds fett gestrichelt sind); dieses Parallelepiped bezeichnen wir mit  $\Phi$ .

Der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds  $\Phi$  ist nach wie vor gleich  $d$ . Ferner ist die Diagonale  $DD'$  eine Senkrechte zu den "weggelassenen" Seitenflächen  $ABC$  und  $A'B'C'$  des Oktaeders. Das Parallelepiped  $\Phi$  hat somit die folgende Eigenschaft:

Wenn zwei Ebenen senkrecht zur Diagonalen  $DD'$  sind und sich in einem Abstand  $\frac{d}{2}$  Mittelpunkt des Parallelepipeds befinden, dann spalten sie vom Parallelepiped zwei dreiseitige Pyramiden ab; der mittlere Teil ist ein regelmäßiges Oktaeder.

Die Ebene  $BDB'D'$  ergibt eine Symmetrieebene des betrachteten Parallelepipeds  $\Phi$ ; die Gerade  $l$ , die senkrecht auf dieser Ebene steht und durch die Mitte der Diagonalen  $DD'$  hindurchgeht, ergibt eine Symmetrieachse, d.h., bei der Drehung des Parallelepipeds um die Gerade  $l$  um  $180^\circ$  geht es in sich selbst über (Abb. 31).

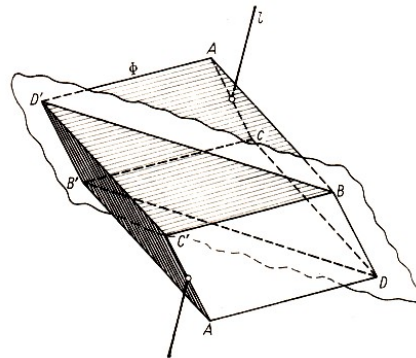


Abb. 31

Es sei  $F$  jetzt ein Körper mit dem Durchmesser  $d$ . Wir wählen zwei Ebenen derart, dass sie parallel zur Seitenfläche  $AB'CD$  des Parallelepipeds  $\Phi$  sind und dass sich der Körper zwischen ihnen befindet (Abb. 32).

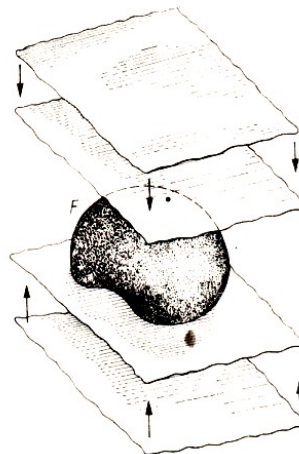


Abb. 32

Ferner werden wir diese Ebenen so lange dem Körper  $F$  durch Verschieben nähern, bis sie ihn berühren. Somit erhalten wir zwei Stützebenen des Körpers, parallel zur Seitenfläche  $AB'C'D$ . Dann bestimmen wir noch zwei Paare von Stützebenen der Figur  $F$ , die parallel zu den anderen Seitenflächen des Parallelepipeds sind. Dadurch erhalten wir ein umschriebenes Parallelepiped des Körpers  $F$  mit Seitenflächen, die parallel zu den Seitenflächen des Parallelepipeds  $\Phi$  sind. Dieses umschriebene Parallelepiped bezeichnen wir mit  $\Pi$  und seine Diagonale, die der

Diagonalen  $DD'$  entspricht, mit  $EE'$ .

Wir führen noch zwei Stützebenen des Körpers  $F$  ein, die senkrecht zur Diagonalen  $DD'$  des Parallelepipeds sind. Die Lote, die auf diese Ebenen von den Punkten  $E$  und  $E'$  gefällt werden, haben etwa die Fußpunkte  $M$  bzw.  $M'$ ; die Differenz  $a(E, M) - a(E', M')$  bezeichnen wir mit  $y$ .

Wir werden zeigen, dass man das ursprüngliche Parallelepiped so in den Raum legen kann, dass  $a(E, M) = a(E', M')$  gilt. Wir nehmen an, dass  $a(E, M) \neq a(E', M')$  ist, also etwa  $a(E, M) < a(E', M')$ , d.h.,

$$y = a(E, M) - a(E', M')$$

ist negativ.

Wir drehen das Parallelepiped  $\Phi$  stetig um die Gerade  $l$  und den Drehwinkel  $\varphi$  ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ). Gemeinsam mit dem Parallelepiped ändern sich stetig das Parallelepiped  $\Pi$  und auch die Stützebenen, die senkrecht auf der Diagonalen  $DD'$  stehen.

Deshalb werden bei den Drehungen für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  des Parallelepipeds  $\Phi$  die Punkte  $E, E'$  und  $M, M'$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  stetig den Platz wechseln, und folglich wird sich auch die von  $\varphi$  abhängige Größe  $y = a(E, M) - a(E', M')$  stetig ändern.

Dabei werden die Punkte  $E$  und  $E'$  die Plätze vertauschen, und deshalb wird die Größe  $y$  positiv. Die graphische Darstellung der Abhängigkeit der Größe  $y$  vom Drehwinkel  $\varphi$  wird uns davon überzeugen, dass eine solche Lage des gedrehten Parallelepipeds gefunden wird, bei der  $y$  Null wird, d.h.  $a(E, M) = a(E', M')$  ist.

Wir werden nun das Parallelepiped  $\Phi$  (und das Parallelepiped  $\Pi$ ) in dieser Lage betrachten. Die Stützebenen, die senkrecht zur Diagonalen  $DD'$  sind, bezeichnen wir mit  $\alpha$  und  $\beta$ . Das Parallelepiped  $\Pi$  und diese Stützebenen sind bezüglich eines Punktes  $O$  zentralsymmetrisch.

Wenn der Abstand zwischen zwei beliebigen gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds  $\Pi$  kleiner als  $d$  ist, dann ziehen wir die Ebenen dieser Seitenflächen so auseinander, dass der Abstand zwischen den auseinandergezogenen Flächen gleich  $d$  ist und  $O$  Symmetriezentrum bleibt. So verfahren wir mit allen drei Paaren paralleler Seitenflächen des Parallelepipeds  $\Pi$ , ebenso mit den parallelen Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ .

Dadurch erhalten wir ein neues Parallelepiped  $\Pi^*$ , das deckungsgleich dem ursprünglichen Parallelepiped  $\Phi$  ist, und zwei Ebenen  $\alpha^*$  und  $\beta^*$ , die senkrecht zur Diagonalen  $DD'$  stehen und den Abstand  $\frac{d}{2}$  vom Mittelpunkt  $O$  des Parallelepipeds haben.

Diese Ebenen spalten vom Parallelepiped  $\Pi^*$  zwei dreiseitige Pyramiden ab, und der übrige Teil stellt ein regelmäßiges Oktaeder dar. Dann ist klar, dass sich der Körper  $F$  innerhalb dieses Oktaeders befindet.

Also bringen wir den Körper  $F$ , der den Durchmesser  $d$  besitzt, in einem regelmäßigen Oktaeder  $ABCA'B'C'$  unter, bei dem der Abstand zwischen den gegenüberliegenden Seitenflächen gleich  $d$  ist.

Der folgende Teil des Beweises wird mit der Konstruktion eines Polyeders  $V$  schließen, das etwas kleiner ist als das Polyeder  $ABCA'B'C'$  und auch den Körper  $F$  enthält. Wir führen nämlich zwei Ebenen  $\gamma$  und  $\gamma'$  ein, die senkrecht zur Diagonalen  $AA'$  stehen und sich im Abstand  $\frac{d}{2}$  vom Mittelpunkt  $O$  des Oktaeders befinden.

Diese beiden Ebenen spalten vom Oktaeder zwei Pyramiden (mit den Eckpunkten  $A$  und  $A'$ ) ab. Eine dieser Pyramiden enthält in ihrem Innern keine Punkte des Körpers  $F$  (wenn  $P$  und

$Q$  beliebige innere Punkte dieser Pyramiden sind, dann liegen sie auf verschiedenen Seiten des Streifens, der von den Ebenen  $\gamma, \gamma'$  begrenzt wird, und deshalb ist  $a(P, Q) > d$ .

Es sei etwa die Pyramide mit dem Eckpunkt  $A'$  diejenige, die keine inneren Punkte von  $F$  enthält (im entgegengesetzten Fall könnten  $A$  und  $A'$  vertauscht werden).

Das Polyeder, das vom Oktaeder nach Abspalten der erwähnten Pyramide mit dem Eckpunkt  $A'$  übrigbleibt, enthält den Körper  $F$  (Abb. 33).

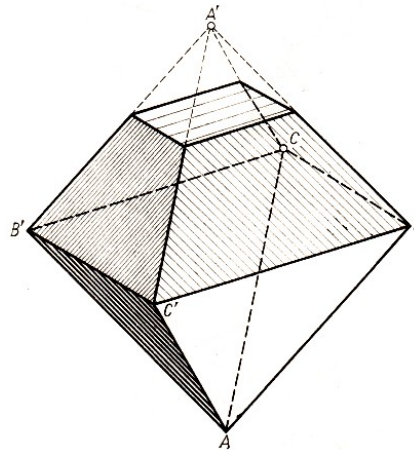


Abb. 33

Jetzt führen wir zwei Ebenen ein, die senkrecht zur Diagonalen  $BB'$  stehen und sich im Abstand  $\frac{d}{2}$  vom Mittelpunkt  $O$  des Oktaeders befinden. Sie spalten wieder zwei Pyramiden (mit den Eckpunkten  $B$  und  $B'$ ) ab, außerdem enthält eine Pyramide im Innern keine Punkte des Körpers  $F$ ; das sei etwa die Pyramide mit dem Eckpunkt  $B'$  (Abb. 34).

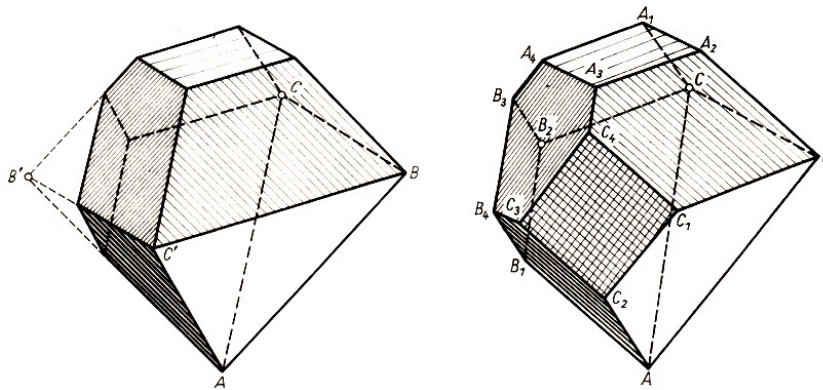


Abb. 34, 35

Das Polyeder, das man aus dem vorangegangenen erhält, wenn man eine Pyramide mit dem Eckpunkt  $B'$  abtrennt, enthält auch den Körper  $F$ . Analog kann man eine entsprechend gebildete Pyramide mit dem Eckpunkt  $C$  bzw.  $C'$  abspalten, etwa die Pyramide mit dem Eckpunkt  $C'$ . Wir gehen zum Polyeder  $V$  über, das in Abb. 35 dargestellt ist und den ganzen Körper  $F$  enthält.

Für die Beendigung des Beweises bleibt festzustellen, dass man das Polyeder  $V$  in vier Teile zerlegen kann, die alle einen Durchmesser kleiner als  $d$  haben (denn dabei wird der Körper  $F$ , der in dem Polyeder  $V$  eingeschlossen ist, in vier Teile zerlegt, wobei der Durchmesser jedes Teiles erst recht kleiner als  $d$  ist). Wir geben jetzt eine geeignete Zerlegung des Polyeders  $V$  an (vgl. Abb. 36a; Abb. 36b zeigt die Seitenansicht des Polyeders  $V$  mit der Sechseckfläche).

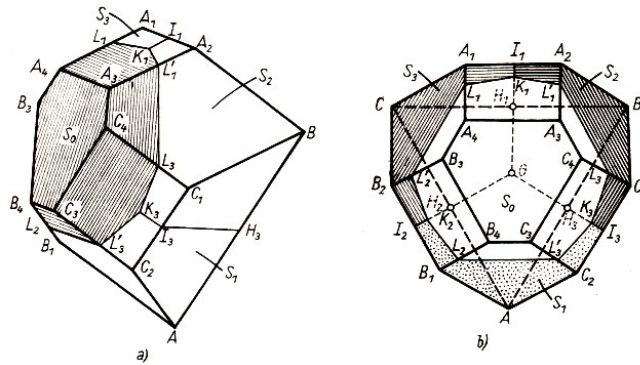


Abb. 36

Das Polyeder  $V$  hat außerdem eine dreieckige Seitenfläche  $ABC$  (die vom Oktaeder übriggeblieben ist), drei quadratische Seitenflächen  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $B_1B_2B_3B_4$ ,  $C_1C_2C_3C_4$  (die Grundflächen der abgespaltenen Pyramiden), drei fünfeckige Seitenflächen und drei trapezförmige Seitenflächen.

Es sei  $G$  der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$ ,  $H_1, H_2, H_3$  seien die Seitenmitten dieses Dreiecks und  $I_1, I_2, I_3$  die Mitten der kleineren von den parallelen Gegenseiten der Trapeze. Wir nehmen die Punkte  $k_1, K_2, K_3$  die in den quadratischen Seitenflächen liegen, und die Punkte  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$ , die auf den Quadratseiten liegen, die nicht parallel zu den Grundseiten der Trapeze sind.

Wenn wir jetzt die ausgewählten Punkte miteinander verbinden, teilen wir die Oberfläche des Polyeders  $V$  in vier Gebiete  $S_0, S_1, S_2, S_3$  die von den folgenden in sich geschlossenen Linien begrenzt werden:

$$\begin{aligned} L'_1K_1L_1L'_2K_2L_2L'_3K_3L_3L'_1, & \quad GH_2I_2K_2L_2L'_3K_3I_3H_3G, \\ GH_3I_3K_3L_3L'_1K_1I_1H_1G, & \quad GH_1I_1K_1L_1L'_2K_2I_2H_2G \end{aligned}$$

Der Punkt  $O$  ist Mittelpunkt des Oktaeders, aus dem wir durch Abspalten der Pyramiden das Polyeder  $V$  erhielten. Der Punkt  $O$  liegt innerhalb des Polyeders  $V$ .

Wir betrachten alle möglichen Strecken, die den Punkt  $O$  mit den Punkten des Gebietes  $S_0$  verbinden. Alle diese Strecken ergeben einen bestimmten Körper  $V_0$ , der eine "Pyramide" mit der Spitze  $O$  ist, dessen "Grundfläche" das unebene Gebiet  $S_0$  ist.

Analog betrachten wir die "Pyramiden"  $V_1, V_2, V_3$  mit der Spitze  $O$  und den "Grundflächen"  $s_1, S_2, S_3$ . Alle Körper  $V_0, V_1, V_2, V_3$  bilden das ganze Polyeder  $V$  (Abb. 37).

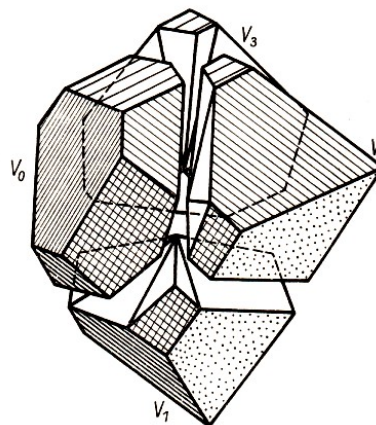


Abb. 37

Bis jetzt haben wir die Lage der Punkte  $K_1, K_2, K_3$  und  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  auf den quadratischen Flächen und ihren Seiten noch nicht genau festgelegt. Jetzt werden wir eine

Lage dieser Punkte so angeben, dass jeder der Körper  $V_0, V_1, V_2, V_3$  einen Durchmesser kleiner als  $d$  haben wird.

Wir wählen die Punkte  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  so, dass sie von den kleineren Grundseiten der Trapeze einen Abstand  $\frac{15\sqrt{3}-10}{46\sqrt{2}}d$  besitzen (d.h., dass die Strecken  $A_1L_1, A_2L_2, \dots$  die genannte Länge haben).

Ferner wählen wir den Punkt  $K_1$  so, dass  $K_1L_1 \cong K_1L'_1$  ist und dass der Abstand des Punktes  $K_1$  zur kleineren Grundseite des Trapezes (d.h. zur Strecke  $A_1A_2$ ) gleich  $\frac{1231\sqrt{3}-1986}{1518\sqrt{2}}$  ist.

Der Leser möge sich nicht über die Kompliziertheit der Wahl dieser Zahlen wundern. Sie wurden mit Hilfe schwieriger Berechnungen von Grünbaum selbst gefunden (diese Zahlen wurden dabei von ihm so ausgewählt, dass alle Teile  $V_0, V_1, V_2, V_3$  die gleichen Durchmesser besitzen).

Es zeigt sich, dass bei einer solchen Auswahl der Punkte  $K_1, K_2, K_3, L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  der Durchmesser jedes Körpers  $V_0, V_1, V_2, V_3$  tatsächlich kleiner als  $d$ , nämlich

$$\frac{\sqrt{6129030 - 937419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}}d \approx 0,9887d$$

ist.

Zur Bestimmung dieses Ergebnisses, also zur Berechnung des Durchmessers des Polyeders  $V_0$ , muss man alle möglichen Abstände zwischen seinen Eckpunkten finden und den größten auswählen. Diese Aufgabe wird völlig elementar gelöst (z.B. mit Hilfe vielfacher Anwendungen des Satzes von Pythagoras oder mit Mitteln der analytischen Geometrie), erfordert aber umfangreiche Berechnungen.

Mit den folgenden Berechnungen (sie können bei der ersten Lektüre ausgelassen werden) wird auch der Beweis des Satzes 3 beendet.

Wir nehmen ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $Oxyz$  im Raum und sechs Punkte  $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a), A'(-a, 0, 0), B'(0, -a, 0), C'(0, 0, -a)$ , wobei  $a$  eine beliebige positive Zahl ist.

Diese sechs Punkte sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders. Dann ist klar, dass die Ebene, in der die Seitenfläche  $ABC$  dieses Oktaeders liegt, die Gleichung  $x+y+z = a$  besitzt; ihr Abstand vom Mittelpunkt des Oktaeders (d.h. vom Koordinatenursprung) ist  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ . Folglich gilt für den Abstand  $d$  zwischen zwei parallelen Seitenflächen dieses Oktaeders  $d = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Die Ebene, die senkrecht auf der Diagonalen  $AA'$  steht, ist parallel zur  $y, z$ -Ebene. Die Ebene, die senkrecht auf der Diagonalen  $AA'$  steht, den Abstand  $\frac{d}{2}$  vom Mittelpunkt des Oktaeders hat und eine Pyramide mit dem Eckpunkt  $A'$  vom Oktaeder abspaltet, genügt der Gleichung  $x = -\frac{d}{2}$ .

Nun kann man die Koordinaten der Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  leicht finden (Abb. 35). Der Punkt  $A_2$  befindet sich z.B. in der  $x, y$ -Ebene (d.h., für ihn gilt  $z = 0$ ), in der Ebene mit der Gleichung  $x = -\frac{d}{2}$  und in der Ebene der Seitenfläche  $A'BC$ , d.h. in der Ebene mit der Gleichung  $-x + y + z = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ . Demzufolge hat der Punkt  $A_2$  die Koordinaten

$$x = -\frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{d}{2}, \quad y = a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{d}{2}(\sqrt{3} - 1), \quad z = 0$$

Wir setzen  $a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{d}{2}(\sqrt{3} - 1) = b$  und finden die Koordinaten aller Punkte  $A_i, B_i, C_i$ :

$$\begin{aligned} A_1 \left( -\frac{d}{2}, 0, b \right), & \quad A_2 \left( -\frac{d}{2}, b, 0 \right), & \quad A_3 \left( -\frac{d}{2}, 0, -b \right), & \quad A_4 \left( -\frac{d}{2}, -b, 0 \right), \\ B_1 \left( b, -\frac{d}{2}, 0 \right), & \quad B_2 \left( 0, -\frac{d}{2}, b \right), & \quad B_3 \left( -b, -\frac{d}{2}, 0 \right), & \quad B_4 \left( 0, -\frac{d}{2}, -b \right), \\ C_1 \left( 0, b, -\frac{d}{2} \right), & \quad C_2 \left( b, 0, -\frac{d}{2} \right), & \quad C_3 \left( 0, -b, -\frac{d}{2} \right), & \quad C_4 \left( -b, 0, -\frac{d}{2} \right). \end{aligned}$$

Somit sind die Koordinaten aller Eckpunkte des Polyeders  $V$  berechnet.

Wir gehen zur Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte der Polyeder  $V_0, V_1, V_2, V_3$  über.

Der Punkt  $G$  hat die Koordinaten

$$x = y = z = \frac{a}{3} = \frac{d}{2\sqrt{3}} : \quad G \left( \frac{d}{2\sqrt{3}}, \frac{d}{2\sqrt{3}}, \frac{d}{2\sqrt{3}} \right)$$

Die Punkte  $H_1, H_2, H_3$  lassen sich leicht als Mitten der Strecken  $BC, CA, AB$  finden:

$$H_1 \left( 0, \frac{d\sqrt{3}}{4}, \frac{d\sqrt{3}}{4} \right), \quad H_2 \left( \frac{d\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{d\sqrt{3}}{4} \right), \quad H_3 \left( \frac{d\sqrt{3}}{4}, \frac{d\sqrt{3}}{4}, 0 \right)$$

Ferner sind die Punkte  $I_1, I_2, I_3$  die Mitten der Strecken  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  mit

$$I_1 \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad I_2 \left( \frac{b}{2}, -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad I_3 \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{d}{2} \right)$$

Wir bestimmen jetzt die Koordinaten der Punkte  $L_1$  und  $L'_1$ . Der Vektor  $\mathbf{p}$ , der von  $A_1$  nach  $A_4$  gerichtet ist und den Betrag  $I$  hat, hat die Gestalt

$$\mathbf{p} = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Deshalb ist  $\overrightarrow{A_1L_1} = \overrightarrow{A_2L'_1} = c\mathbf{p}$ <sup>4</sup>, wobei  $c = \frac{15\sqrt{3} - 10}{46\sqrt{2}}d$  ist. Das gibt uns die Möglichkeit, die Koordinaten der Punkte  $L_1, L'_1$  zu bestimmen:

$$L_1 \left( -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}}, b - \frac{c}{\sqrt{2}} \right), \quad L'_1 \left( -\frac{d}{2}, b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right)$$

Analog finden wir die übrigen Punkte  $L_i$  und  $L'_i$ :

$$\begin{aligned} L_2 \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right), & \quad L'_2 \left( -\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, b - \frac{c}{\sqrt{2}} \right) \\ L_3 \left( -\frac{c}{\sqrt{2}}, b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right), & \quad L'_3 \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right) \end{aligned}$$

Nach der Definition des Punktes  $K_1$  haben wir  $\overrightarrow{I_1K_1} = e\mathbf{p}$ , wobei

$$e = \frac{1231\sqrt{3} - 1986}{1518\sqrt{2}}d$$

<sup>4</sup>Dabei bezeichnet etwa  $\overrightarrow{A_1L_1}$  den Vektor, der  $A_1$  in  $L_1$  überführt.

ist. Nun bestimmen wir die Koordinaten des Punktes  $K_1$  (und analog die der Punkte  $K_2, K_3$ ):

$$K_1 \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right), \quad K_2 \left( \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right)$$

$$K_3 \left( \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right)$$

Damit sind alle Eckpunkte der Polyeder  $V_0, V_1, V_2, V_3$  bestimmt (der gemeinsame Eckpunkt dieser Polyeder ist der Koordinatenursprung  $O$ ).

Jetzt braucht man zur Bestimmung des Durchmessers des Polyeders  $V_0$  (bzw.  $V_1, V_2, V_3$ ) nur noch den größten Abstand zwischen seinen Eckpunkten zu finden, was nicht schwierig ist, da die Koordinaten aller Eckpunkte bestimmt sind. Zum Beispiel erhalten wir aus

$$K_1 = \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right) = \left( -\frac{d}{2}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{1518} \cdot \frac{d}{2}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{1518} \cdot \frac{d}{2} \right)$$

$$L_2 = \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{31\sqrt{3} - 36}{46} \cdot \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, -\frac{15\sqrt{3} - 10}{46} \cdot \frac{d}{2} \right)$$

die Länge  $l$  der Strecke  $K_1L_2$ :

$$l = \sqrt{\left( b - \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{d}{2} \right)^2 + \left( -\frac{d}{2} - \frac{b}{2} + \frac{e}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( -\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2} + \frac{e}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

Indem wir  $b, c$  und  $e$  mit Hilfe von  $d$  ausdrücken, erhalten wir

$$l = \frac{\sqrt{6129030 - 937419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} d \approx 0,9887d$$

Das ist auch der größte Abstand zwischen den Eckpunkten des Polyeders  $V_0$  (d.h. der Durchmesser des Polyeders  $V_0$ ). Analog berechnen wir die Durchmesser der Polyeder  $V_1, V_2, V_3$ .

In diesem Beweis zerfällt das Polyeder  $V$  in die Teile  $V_0, V_1, V_2, V_3$ , wobei sich die Durchmesser sehr wenig von  $d$  unterscheiden. Die Ursache besteht darin, dass das Polyeder  $V$  nicht nur den Körper  $F$  enthält, sondern auch viel "Überflüssiges".

Wenn es gelänge, ein besseres Polyeder auszuwählen, das den Körper  $F$  enthält, könnte man den Wert  $0,9887d$  etwas verkleinern, der die Durchmesser der Teile abschätzt.

Wir heben noch hervor, dass die Aufgabe Borsuks im dreidimensionalen Raum gleichzeitig mit Grünbaum (im Jahre 1957) auch von dem ungarischen Mathematiker Heppes [30] gelöst wurde; aber seine Lösung ist weniger bekannt, weil sie in ungarischer Sprache veröffentlicht wurde, die den weitaus meisten Mathematikern unbekannt ist. In der Lösung von Heppes ist die Zerlegung "schlechter" als im angegebenen Beweis. Er hat für die Durchmesser der Teile die obere Schranke  $0,9977d$  erhalten.

## 1.6 § 6 Über die Vermutung Borsuks für $n$ -dimensionale Körper

Den Leser wird jetzt die Frage interessieren, ob die Vermutung Borsuks<sup>5</sup> in Räumen mit einer Dimension größer als drei bewiesen wurde. Zu unserem Bedauern konnte dieses Problem bis zur heutigen Zeit trotz der Bemühungen vieler Mathematiker nicht gelöst werden.

<sup>5</sup>Dem Leser, der mit der Geometrie des  $n$ -dimensionalen Raumes nicht vertraut ist, empfehlen wir jetzt die Durcharbeitung von Kapitel II.

Es ist nicht einmal bekannt, ob sie für Körper im vierdimensionalen Raum richtig ist, d.h., es ist nicht bekannt, ob ein vierdimensionaler Körper vom Durchmesser  $d$  in fünf Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann. Dabei tritt eine interessante Eigenschaft des betrachteten Problems auf:

der starke Kontrast zwischen der außerordentlich einfachen Formulierung der Aufgabe und den gewaltigen Schwierigkeiten bei ihrer Lösung - Schwierigkeiten, die bis auf den heutigen Tag völlig unüberwindlich scheinen. (Vgl. in Verbindung damit die Probleme 1, 2, 3, 5)

Aber für einige spezielle  $n$ -dimensionale Körper ist die Richtigkeit der Vermutung Borsuks nachgewiesen.

An erster Stelle sind die Arbeiten des berühmten Schweizer Geometers Hadwiger zu nennen. Hadwiger betrachtet nicht beliebige Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes, sondern nur konvexe Körper (einige Bemerkungen über konvexe Figuren findet der Leser in § 7); denn es ist klar, dass für die Gültigkeit der Vermutung Borsuks ihre Gültigkeit für solche Körper hinreichend ist.

In einer Arbeit aus dem Jahre 1946 (vgl. [24]) betrachtet Hadwiger  $n$ -dimensionale konvexe Körper mit glattem Rand, d.h. konvexe Körper, bei denen durch jeden Randpunkt genau eine Stützhyperebene verläuft. Durch elegante Schlussfolgerungen zeigt Hadwiger, dass für solche konvexen Körper die Vermutung Borsuks richtig ist. Es gilt der folgende

Satz 4. Jeder  $n$ -dimensionale konvexe Körper mit glattem Rand, der den Durchmesser  $d$  besitzt, kann in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden.

Beweis. Es sei  $F$  irgendein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper mit glattem Rand, der den Durchmesser  $d$  besitzt. Wir betrachten außerdem einen  $n$ -dimensionalen Kugelkörper  $E$ , der denselben Durchmesser  $d$  hat, und wir konstruieren eine beliebige Zerlegung dieses Kugelkörpers in  $n + 1$  Teile vom Durchmesser  $< d$  (vgl. Abb. 27, 28).

Die Teile, in die der Kugelkörper  $E$  zerlegt wird, bezeichnen wir mit  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . Wir konstruieren jetzt eine Zerlegung des Randes  $G$  des Körpers  $F$  in  $n + 1$  Mengen  $N_0, N_1, \dots, N_n$ .

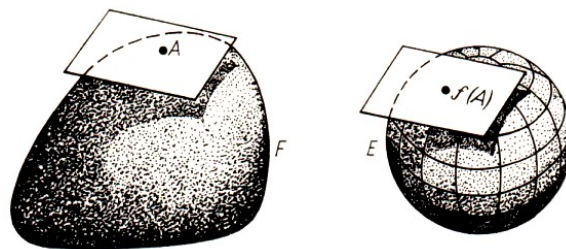


Abb. 38

$A$  sei ein beliebiger Randpunkt des Körpers  $F$ . Wir legen durch den Punkt  $A$  die Stützhyperebene des Körpers  $F$ , die nach unserer Voraussetzung eindeutig existiert. Parallel dazu legen wir die Tangentialhyperebene des Kugelkörpers  $E$  derart, dass der Körper  $F$  und der Kugelkörper  $E$  - ausgenommen die Berührungspunkte - auf ein und derselben Seite bezüglich dieser Hyperebenen liegen (Abb. 38).

Den Punkt, in dem die konstruierte Hyperebene den Kugelkörper  $E$  berührt, bezeichnen wir mit  $f(A)$ . Der Punkt  $A$  soll per definitionem zur Menge  $N_i$  genau dann gehören, wenn der entsprechende Punkt  $f(A)$  der Menge  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) angehört. Im Ergebnis wird der ganze Rand  $G$  des Körpers  $F$  in  $n + 1$  Mengen  $N_0, N_1, \dots, N_n$  zerlegt. [Anmerkung 8]

Wir zeigen, dass jede der Mengen  $N_0, N_1, \dots, N_n$  einen Durchmesser  $< d$  besitzt. Wir nehmen



im Gegensatz dazu an, dass etwa die Menge  $N_i$  den Durchmesser  $d$  besitzt und  $A, B$  zwei Punkte der Menge  $N_i$  mit dem Abstand  $a(A, B) = d$  sind.

Wir führen zwei Hyperebenen  $\Gamma_A$  und  $\Gamma_B$  ein, die durch die Punkte  $A$  und  $B$  gehen und senkrecht auf der Strecke  $AB$  stehen. Dann ist klar, dass sich der Körper  $F$  in dem Streifen zwischen diesen Hyperebenen befindet (sonst wäre der Durchmesser des Körpers  $F > d$ ), d.h.,  $\Gamma_A$  und  $\Gamma_B$  sind Stützhyperebenen des Körpers  $F$ , die durch die Punkte  $A$  und  $B$  gehen.

Aus der Parallelität dieser Stützhyperebenen folgt, dass die entsprechenden Punkte  $f(A)$  und  $f(B)$ , die auf dem Rand von  $E$  liegen, sich diametral gegenüberliegen, d.h., der Abstand zwischen den Punkten  $f(A)$  und  $f(B)$  ist gleich  $d$ .

Da andererseits  $A$  und  $B$  zur Menge  $N_i$  gehören, gehören die Punkte  $f(A)$  und  $f(B)$  zur Menge  $M_i$  und deshalb ist der Abstand der Punkte  $f(A)$  und  $f(B)$  kleiner als  $d$ .

Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass keine Menge  $N_0, N_1, \dots, N_n$  den Durchmesser  $d$  besitzen kann.

Es sei jetzt  $O$  ein beliebiger innerer Punkt des Körpers  $F$ . Für beliebiges  $i = 0, 1, \dots, n$  bezeichnen wir mit  $P_i$  den "Kegel" mit der Spitze  $O$ , dessen krummlinige "Grundfläche" die Menge  $N_i$  ist.

Es ist offensichtlich, dass die konstruierten "Kegel"  $P_0, P_1, \dots, P_n$  den ganzen Körper  $F$  ausfüllen, d.h., wir haben eine Zerlegung des Körpers  $F$  in  $n + 1$  Teile erhalten.

Außerdem ist klar, dass jede Menge  $P_i$  einen Durchmesser  $< d$  hat (denn der Durchmesser der "Grundfläche"  $N_i$  ist kleiner als  $d$ ). Auf diese Weise ist eine Zerlegung des Körpers  $F$  in  $n + 1$  Teile vom Durchmesser  $< d$  vorgenommen worden. Damit ist der Satz 4 bewiesen.

In einer anderen Arbeit aus dem Jahre 1947 (vgl. [25]), in der der geführte Beweis präzisiert ist, beweist Hadwiger folgenden Satz.

Wenn ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper vom Durchmesser  $d$  die Eigenschaft besitzt, dass längs seines Randes innerhalb dieses konvexen Körpers eine  $n$ -dimensionale Kugel mit dem Radius  $r$  frei bewegt werden kann, dann kann der betrachtete Körper in  $n + 1$  Teile zerlegt werden, wobei der Durchmesser jedes Teiles nicht größer ist als

$$d - 2r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

Folglich ist für konvexe Körper mit glattem Rand die Vermutung Borsuks richtig (Satz 4). Es bleiben konvexe Körper übrig, die Eckpunkte besitzen (d.h. Punkte, in denen es keine eindeutig bestimmte Stützhyperebene gibt).

Für solche Körper gibt es bis heute fast keine Ergebnisse. Übrigens legte der deutsche Mathematiker Lenz in der Arbeit [17] aus dem Jahre 1955 dar, dass man einen beliebigen  $n$ -dimensionalen konvexen Körper vom Durchmesser  $d$  in Teile kleineren Durchmessers zerlegen kann, wobei die Anzahl dieser Teile<sup>6</sup> nicht größer ist als  $(\sqrt{n} + 1)^n$ .

<sup>6</sup>Beweis. Wir bezeichnen mit  $m$  eine ganze Zahl, die den Ungleichungen

$$\sqrt{n} < m \leq \sqrt{n} + 1$$

genügt.

Ferner schließen wir einen  $n$ -dimensionalen Körper  $F$  vom Durchmesser  $d$  in einen Würfel mit der Kantenlänge  $d$  ein, und jede Kante dieses Würfels teilen wir in  $m$  gleichlange Teile. Wenn wir jetzt durch die Teilpunkte Hyperebenen parallel zu den Rändern des Würfels legen, zerlegen wir diesen Würfel in  $m^n$

Aber dieser Wert ist natürlich ungenau und von  $n + 1$  in der Vermutung Borsuks ziemlich weit entfernt. Der Wert von Lenz garantiert z.B. die Möglichkeit, einen beliebigen vierdimensionalen Körper in 81 Teile kleineren Durchmessers zu zerlegen, während die Vermutung von Borsuk fordert, die Zerlegung eines vierdimensionalen Körpers in fünf Teile kleineren Durchmessers zu ermöglichen. In der jüngsten Zeit gab Danzer [12] eine bessere obere Schranke für den Wert  $a(F)$ :

$$a(F) < \sqrt{\frac{(n+2)^3}{2}} \cdot (2 + \sqrt{2})^{\frac{n-1}{2}}$$

(Für vierdimensionale Körper garantiert dieser Wert die Möglichkeit der Zerlegung in 55 Teile kleineren Durchmessers !)

---

kleinere Würfel mit der Kantenlänge  $\frac{d}{m}$ . Der Durchmesser jedes Würfels ist gleich  $\frac{d}{m}\sqrt{n}$  und deshalb kleiner als  $d$ :

$$\frac{d}{m}\sqrt{n} < \frac{d}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = d$$

Die durchgeführte Zerlegung in Würfel ruft eine Zerlegung des Körpers  $F$  in Teile vom Durchmesser  $< d$  hervor; dabei überschreitet die Anzahl der Teile  $m^n$  nicht, d.h., sie überschreitet erst recht nicht  $(\sqrt{n}+1)^n$ .

## 2 Die Überdeckung konvexer Körper durch gestauchte Körper und das Beleuchtungsproblem

### 2.1 § 7 Die konvexen Figuren

Eine ebene Figur  $F$  heißt genau dann konvex, wenn sie mit zwei Punkten  $A$  und  $B$  auch die Verbindungsstrecke  $AB$  enthält (Abb. 39).

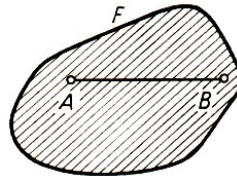


Abb. 39

So sind die Flächen von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen, Kreisen, Kreissegmenten, Ellipsen Beispiele für konvexe Figuren (Abb. 40).

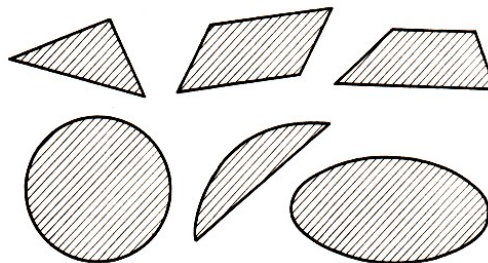


Abb. 40

In Abb. 41 sind Beispiele nichtkonvexer Figuren zu sehen.

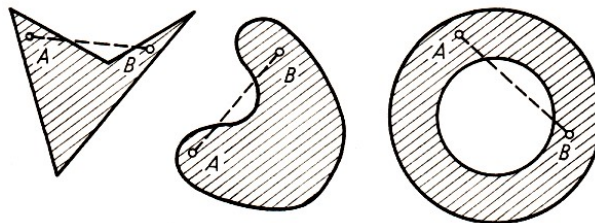


Abb. 41

Die Figuren, die in Abb. 40 dargestellt sind, sind beschränkt. Es gibt auch unbeschränkte konvexe Figuren ("sie erstrecken sich bis ins Unendliche"): Halbebenen, Winkelflächen, deren Größen kleiner als  $180^\circ$  ist, Halbstreifen, Parabelflächen (Abb. 42).

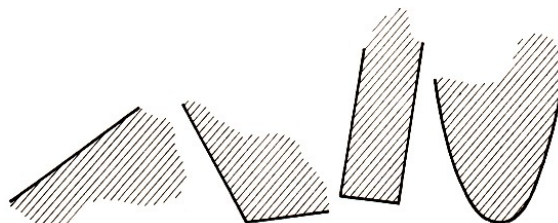


Abb. 42

Die Punkte einer beliebigen konvexen Figur  $F$  werden in zwei Mengen eingeteilt: innere Punkte und Randpunkte.

Innere Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass auch noch eine Umgebung von ihnen ganz zur Figur  $F$  gehört. Wenn also  $A$  ein innerer Punkt der Figur  $F$  ist, dann gehört eine Kreisscheibe mit  $A$  als Mittelpunkt und einem (evtl. sehr kleinen) Radius ganz zur Figur  $F$  (Abb. 43).

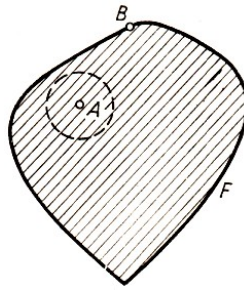


Abb. 43

Bei einem Randpunkt der Figur  $F$  gehören zu jeder seiner Umgebungen sowohl Punkte der Figur  $F$  als auch solche Punkte, die nicht zur Figur  $F$  gehören (Punkt  $B$  in Abb. 43).<sup>7</sup>

Alle Randpunkte zusammengenommen bilden eine Linie, die man als Rand der konvexen Figur  $F$  bezeichnet. Wenn die Figur  $F$  beschränkt ist, dann stellt ihr Rand eine geschlossene Linie dar (Abb. 39, 40).

Für die weitere Betrachtung bemerken wir, dass jede Gerade, die durch einen inneren Punkt einer konvexen, beschränkten Figur verläuft, den Rand dieser Figur in genau zwei Punkten schneidet (Abb. 44).<sup>8</sup> Außerdem gehört die Strecke, die die beiden Punkte verbindet, der Figur an, und der übrige Teil der Geraden liegt außerhalb der Figur  $F$ .

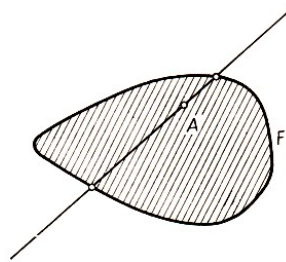


Abb. 44

Es sei  $B$  ein beliebiger Randpunkt der konvexen Figur  $F$ . Vom Punkt  $B$  aus zeichnen wir Halbgeraden, die durch von  $B$  verschiedene innere Punkte der Figur  $F$  verlaufen. Diese Halbgeraden füllen eine Halbebene aus (Abb. 45a) oder bilden einen konvexen Winkelraum (Abb. 45b).

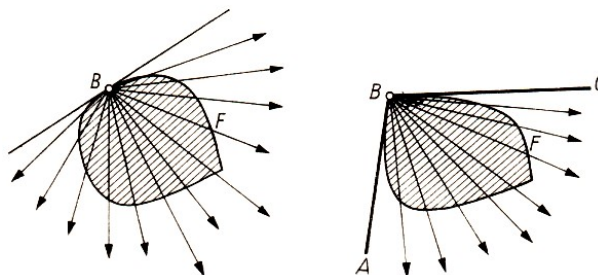


Abb. 45

Im ersten Fall ist die Gerade, die die Halbebene begrenzt, eine Stützgerade der Figur  $F$ . Eine beliebige andere Gerade, die durch den Punkt  $B$  verläuft, zerlegt die Figur in zwei Teile (Abb. 46), d.h., sie ist keine Stützgerade.

<sup>7</sup>Hier werden nur abgeschlossene konvexe Figuren betrachtet, d.h. Figuren, die sämtliche Randpunkte enthalten; dadurch werden lästige Fallunterscheidungen vermieden. Schließlich sei auch - wenn nichts Gegenteiliges gesagt wird - vorausgesetzt, dass jede ebene bzw. räumliche (bzw.  $n$ -dimensionale) konvexe Figur innere Punkte und Randpunkte besitzt.

<sup>8</sup>Ausführlichere Angaben über konvexe Figuren (und insbesondere Beweise der hier erwähnten Eigenschaften dieser Figuren) kann der Leser in den Büchern [2], [18], [28], [33], [34], [37] finden.

Mit anderen Worten, durch den Punkt  $B$  verläuft in diesem Fall eine eindeutig bestimmte Stützgerade der Figur  $F$ .

Im zweiten Fall (Abb. 45b) liegt die ganze Figur  $F$  innerhalb der Winkelfläche  $ABC$  einer Größe kleiner als  $180^\circ$ , und deshalb verlaufen durch den Punkt  $B$  unendlich viele Stützgeraden der Figur  $F$  (Abb. 47).

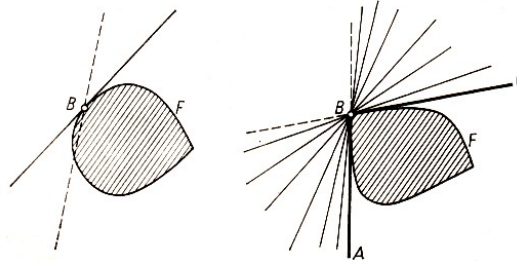


Abb. 46, 47

Insbesondere sind die Geraden  $g_{BA}$  und  $g_{BC}$  Stützgeraden. Die Halbgeraden  $BA^+$  und  $BC^+$  (in Abb. 47 fett gezeichnet) nennt man Halbtangenten der Figur  $F$  im Punkt  $B$ .

Wenn wir beide Fälle zusammenfassen, erkennen wir, dass durch jeden Randpunkt  $B$  einer konvexen Figur  $F$  wenigstens eine Stützgerade dieser Figur geht. Wenn durch den Punkt  $B$  nur eine einzige Stützgerade von  $F$  geht (Abb. 45a), dann bezeichnet man  $B$  als regulären Randpunkt dieser Figur.

Wenn durch den Punkt  $B$  aber unendlich viele Stützgeraden der Figur  $F$  verlaufen, dann bezeichnet man  $B$  als Eckpunkt oder singulären Randpunkt (Abb. 45b).

## 2.2 § 8 Das Problem der Überdeckung von Figuren mit gestauchten Figuren

Es sei  $F$  eine ebene Figur. In der Ebene wählen wir einen beliebigen Punkt  $O$ , und außerdem wählen wir eine positive Zahl  $k$ .

Für einen beliebigen Punkt  $A$  der Figur  $F$  finden wir auf der Halbgeraden  $OA^+$  einen solchen Punkt  $A'$ , dass  $OA' : OA = k$  gilt (Abb. 48).

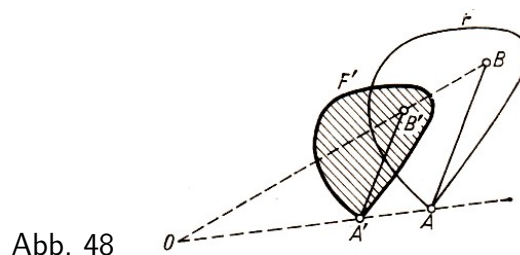


Abb. 48

Die Menge aller auf diese Weise erhaltenen Punkte  $A'$ , stellt eine neue Figur  $F'$  dar. Den Übergang von der Figur  $F$  zur Figur  $F'$  nennt man Streckung<sup>9</sup> mit dem Zentrum  $O$  und dem Koeffizienten  $k$ , und die Figur  $F'$  selbst heißt gestreckte Figur zu  $F$ .

(Die Streckung mit negativem Koeffizienten werden wir nirgends brauchen und deshalb auch nicht betrachten.)

Gilt für den Streckungskoeffizienten  $k$  die Ungleichung  $0 < k < 1$ , dann sprechen wir von einer Stauchung. Wenn die Figur  $F$  konvex ist, dann ist auch ihr gestrecktes Bild  $F'$  konvex

<sup>9</sup>Die Bezeichnung für diese Abbildung ist in der Literatur nicht einheitlich. Statt "Streckung" findet man auch "Dehnung" bzw. "Homothetie". - Anm. d. Red.

(denn liegt die Strecke  $AB$  ganz in der Figur  $F$ , dann liegt die Strecke  $A'B'$  ganz in der Figur  $F'$ ).

Wenn der Streckungskoeffizient  $k$  kleiner als 1 ist, dann ist die Figur  $F'$  ein gestauchtes Bild der Figur  $F$ .

Wir kommen jetzt zum Problem: Gegeben sei eine beschränkte, ebene konvexe Figur  $F$ . Es ist die minimale Zahl von gestauchten Bildern der Figur  $F$  zu bestimmen, mit der man die Figur  $F$  ganz überdecken kann. Diese minimale Zahl bezeichnen wir mit  $b(F)$ .

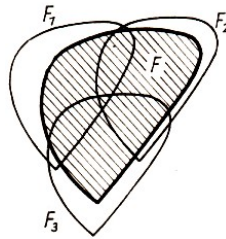


Abb. 49

Wenn  $b(F) = m$  ist, dann bedeutet das:

1. Es gibt solche Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_m$  (Abb. 49), die aus  $F$  durch Stauchung hervorgehen und die Figur  $F$  ganz überdecken. (Die entsprechenden Stauchungskoeffizienten  $k_1, k_2, \dots, k_m$  und ebenso die Stauchungszentren können voneinander verschieden sein.)
2. Eine Überdeckung mit weniger als  $m$  gestauchten Figuren ist nicht möglich.

Das Problem der Überdeckung einer konvexen Figur mit gestauchten Figuren kann man nicht nur für ebene Figuren betrachten, sondern auch für konvexe Körper im Raum (oder sogar im  $n$ -dimensionalen Raum). Das Problem, welche Werte  $b(F)$  annehmen kann, wurde im Jahre 1960 von den Mathematikern I. Z. Gochberg und A. S. Markus [6] aus Kischinew formuliert. Etwas früher wurde dieses Problem (aber in anderer Formulierung) von dem deutschen Mathematiker F. W. Levi betrachtet ([15]; vgl. Problem 14).

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Figur  $F$  eine Kreisfläche ist. Dann ergeben sich beliebige Kreisflächen kleineren Durchmessers als gestauchte Figuren. Es ist leicht einzusehen, dass zwei solcher Kreisflächen unmöglich die ursprüngliche Kreisfläche  $F$  überdecken, d.h.  $b(F) \geq 3$ :

Es seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei Kreisflächen kleineren Durchmessers mit den Mittelpunkten  $O_1, O_2$  (Abb. 50).

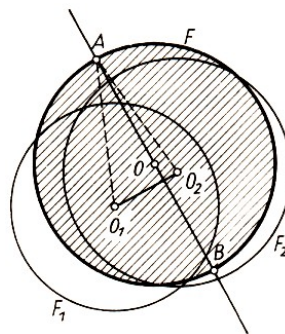


Abb. 50

Vom Mittelpunkt  $O$  der ursprünglichen Kreisfläche  $F$  fällen wir das Lot auf die Verbindungsgerade der Mittelpunkte  $O_1, O_2$ . Diese Senkrechte schneidet den Rand von  $F$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$ .

Der Punkt  $A$  sei etwa auf derjenigen Seite der Geraden  $g_{O_1O_2}$  gelegen, auf der auch der Punkt  $O$  liegt (wenn die Gerade  $g_{O_1O_2}$  durch den Punkt  $O$  führt, dann kann man einen beliebigen von den Punkten  $A, B$  nehmen).

Dann ist

$$a(A, O_1) \geq a(A, O) = r \quad , \quad a(A, O_2) \geq a(A, O) = r$$

wobei  $r$  der Radius der Kreisfläche  $F$  ist. Da die Kreisflächen  $F_1, F_2$  Radien besitzen, die kleiner als  $r$  sind, liegt der Punkt  $A$  auf keinem von ihnen, d.h., die Kreisflächen  $F_1, F_2$  überdecken nicht die ganze Kreisfläche  $F$ .

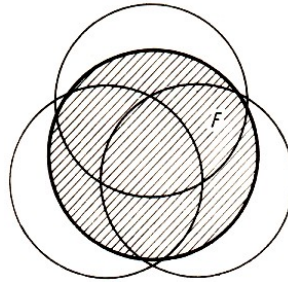


Abb. 51

Andererseits ist die Kreisfläche  $F$  leicht mit drei Kreisflächen kleineren Durchmessers zu überdecken (Abb. 51). Somit gilt im Fall des Kreises  $b(F) = 3$ .

Wir betrachten noch den Fall, dass  $F$  eine Parallelogrammfläche ist. Dann ist klar, dass keine gestauchte Parallelogrammfläche zwei Eckpunkte der Parallelogrammfläche  $F$  enthalten kann. Mit anderen Worten, die vier Eckpunkte der Parallelogrammfläche  $F$  müssen in vier verschiedenen gestauchten Parallelogrammflächen liegen, d.h.  $b(F) \geq 4$ .

Vier gestauchte Figuren sind aber offenbar ausreichend (Abb. 52). Somit gilt im Fall der Parallelogrammfläche  $b(F) = 4$ .

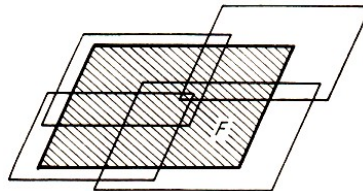


Abb. 52

## 2.3 § 9 Eine andere Formulierung des Problems

Dem Problem der Überdeckung einer Figur mit gestauchten Figuren kann man eine Form verleihen, die dem Problem Borsuks über die Zerlegung einer Figur in Teile kleineren Durchmessers angenähert entspricht.

Es sei  $F$  eine konvexe Figur und  $G$  ein Teil davon. Wir nennen die positive reelle Zahl  $k$  das Außenmaß von  $G$  genau dann, wenn

1. ein gestrecktes Bild  $F'$  von  $F$  mit dem Streckungskoeffizienten  $k$  existiert, das  $G$  enthält,
2.  $G$  in keinem gestreckten Bild von  $F$  mit einem Koeffizienten  $< k$  enthalten ist. [Anmerkung 9]

Es ist offensichtlich, dass das Außenmaß dann gleich 1 ist, wenn der Teil  $G$  mit der ganzen Figur  $F$  übereinstimmt. Deshalb ist für einen beliebigen nicht mit  $F$  übereinstimmenden Teil  $G$  der Figur  $F$  das Außenmaß  $k \leq 1$ . Auch wenn der Teil  $G$  nicht mit der ganzen Figur  $F$  übereinstimmt, braucht das Außenmaß  $k$  nicht kleiner als 1 zu sein.



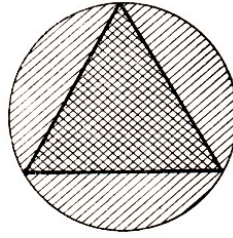


Abb. 53

Wenn  $F$  beispielsweise eine Kreisfläche ist und der Teil  $G$  ein eingeschriebenes spitzwinkliges Dreieck (Abb. 53), dann ist das Außenmaß des Teiles  $G$  gleich 1 (denn eine Kreisfläche mit kleinerem Durchmesser enthält das Dreieck  $G$  nicht).

Den Teil  $G$  der Figur  $F$  werden wir einen Teil kleineren Außenmaßes nennen, wenn sein Außenmaß  $k < 1$  ist.

Wenn wir vom Begriff des Außenmaßes Gebrauch machen, könnten wir der Definition der Größe  $b(F)$  eine andere Form verleihen:

$b(F)$  ist offensichtlich die kleinste Zahl von Teilen kleineren Außenmaßes, in die man die konvexe Figur  $F$  zerlegen kann. Zum Beweis seien  $F_1, F_2, \dots, F_m$  gestauchte Figuren, die  $F$  überdecken. Mit  $G_1, G_2, \dots, G_m$  bezeichnen wir die Teile der Figur  $F$ , die  $F$  aus den Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_m$  ausschneidet.

Es ist offensichtlich, dass jeder der Teile  $G_1, G_2, \dots, G_m$  der Figur  $F$  ein Außenmaß  $< 1$  hat.

Wenn die Figur  $F$  von  $m$  gestauchten Figuren überdeckt wird, dann kann man sie in  $m$  Teile kleineren Außenmaßes zerlegen. Wenn umgekehrt die Figur  $F$  in  $m$  Teile  $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_m$  kleineren Außenmaßes zerlegt werden kann, dann gibt es gestauchte Bilder  $F_1, F_2, \dots, F_m$  von  $F$ , die der Reihe nach die Teile  $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_m$  enthalten. Diese Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_m$  überdecken auch die Figur  $F$ .

All das Gesagte (d.h. die Definition des Außenmaßes und die andere Definition der Zahl  $b(F)$ ) bezieht sich selbstverständlich nicht nur auf ebene Figuren, sondern auch auf konvexe Figuren beliebiger Dimension. Das Problem der Überdeckung einer konvexen Figur mit gestauchten Figuren kann man folglich als das Problem der Zerlegung einer Figur  $F$  in Teile kleineren Außenmaßes formulieren.

In dieser Form erinnert es uns sehr an das, was wir in Kapitel I über das Problem Borsuks kennengelernt haben.

Aber der Zusammenhang zwischen diesen Problemen ist nicht nur äußerlich. In dem Fall, dass die Figur  $F$  den Durchmesser  $d$  besitzt, hat die Figur, die gestauch zu  $F$  mit dem Koeffizienten  $k$  ist, den Durchmesser  $kd$ .

Hieraus folgt, dass jeder Teil kleineren Außenmaßes auch ein Teil kleineren Durchmessers ist. (Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig; z.B. ist ein gleichseitiges Dreieck, das einer Kreisfläche  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  eingeschrieben ist, ein Teil mit kleinerem Durchmesser, aber es hat das Außenmaß 1; Abb. 53.)

Wenn also die konvexe Figur  $F$  in  $m$  Teile kleineren Außenmaßes zerlegt werden kann, dann kann sie auch in  $m$  Teile mit kleinerem Durchmesser zerlegt werden. (Wie das Beispiel der Parallelogrammfläche lehrt, gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht.)

Für jede konvexe Figur  $F$  gilt somit die Ungleichung

$$a(F) \leq b(F) \quad (*)$$

Diese Behauptung ist sowohl für ebene konvexe Figuren als auch für konvexe Figuren beliebiger



Dimension wahr. (Vgl. in Verbindung damit das Problem 7)

Wir bemerken, dass das Problem der Zerlegung in Teile kleineren Außenmaßes sich nur auf konvexe Figuren bezieht, dass aber das Problem Borsuks über die Zerlegung in Teile kleineren Durchmessers für beliebige (sogar nichtkonvexe) Figuren gestellt wurde.

Das aber ist unwesentlich; es ist leicht zu zeigen, dass die Vermutung Borsuks auch für beliebige  $n$ -dimensionale Figuren gilt, wenn sie für  $n$ -dimensionale konvexe Figuren zutrifft.

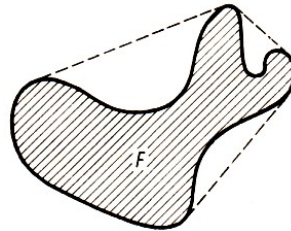


Abb. 54

Denn es gibt für jede Figur  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  eine kleinste sie enthaltende konvexe Figur  $\tilde{F}$ ; diese konvexe Figur (Abb. 54), die konvexe Hülle<sup>10</sup> der Figur  $F$  genannt, hat den gleichen Durchmesser  $d$ .

Daraus folgt, dass die Möglichkeit der Zerlegung in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers für konvexe  $n$ -dimensionale Figuren bereits die Vermutung Borsuks beweist.

## 2.4 § 10 Die Lösung des Problems für ebene Figuren

Wie wir in § 8 gesehen haben, ist eine Kreisfläche beim Problem der Überdeckung einer konvexen Figur mit gestauchten Figuren (im Unterschied zum Borsukschen Problem) nicht mehr eine Figur, die die größte Anzahl von überdeckenden Figuren fordert: Für eine Parallelogrammfläche nimmt die Zahl  $b(F)$  einen größeren Wert an als für eine Kreisfläche.

Natürlich tritt die Frage auf, ob es ebene Figuren gibt, für die die Größe  $b(F)$  einen noch größeren Wert annimmt als für eine Parallelogrammfläche. Es erweist sich, dass solche Figuren nicht existieren; darüber hinaus wird unter allen ebenen konvexen Figuren nur für die Parallelogrammfläche die Gleichung  $b(F) = 4$  erfüllt.

Es gilt also der folgende Satz, der 1960 von I. Z. Gochberg und A. S. Markus [6] aufgestellt wurde (nicht viel früher, im Jahre 1955, erhielt F. W. Levi [16] ein anderes Ergebnis, das dem Wesen nach mit diesem Satz übereinstimmt; siehe Problem 14):

**Satz 5.** Für jede ebene beschränkte konvexe Figur  $F$ , die keine Parallelogrammfläche ist, gilt die Gleichung  $b(F) = 3$ ; wenn  $F$  eine Parallelogrammfläche ist, dann gilt  $b(F) = 4$ .

Den Beweis dieses Satzes werden wir jetzt nicht durchführen, da wir diesen Satz in § 14 als Folgerung aus anderen Ergebnissen erhalten werden.

<sup>10</sup>Den Übergang von einer  $n$ -dimensionalen Figur  $F$  zu deren konvexer Hülle  $\tilde{F}$  kann man sich wie folgt ausgeführt denken: Wir nehmen zu  $F$  alle Punkte hinzu, die in Strecken mit Endpunkten aus  $F$  liegen; die erhaltene Figur nennen wir  $F_1$ . Zu  $F_1$  nehmen wir alle Punkte von solchen Strecken hinzu, bei denen je ein Endpunkt in  $F$  bzw.  $F_1$  liegt; die erhaltene Figur nennen wir  $F_2$ . Analog  $F_2$  werden  $F_3, F_4, \dots$  gebildet.

Wie etwa mit Methoden der analytischen Geometrie gezeigt werden kann, gehört ein Punkt genau dann zu  $\tilde{F}$ , wenn er in irgendeinem  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) liegt. Indem man noch benutzt, dass in einem Dreieck einem rechten bzw. stumpfen Winkel die längste Seite gegenüberliegt, erhält man leicht

$$d(F) = d(F_1) = d(F_2) = \dots = d(\tilde{F})$$

Wir bemerken nur noch, dass der Satz 5 einen neuen Beweis des Satzes 1 liefert. Denn ist die ebene Figur  $F$  keine Parallelogrammfläche, dann ist  $b(F) = 3$  nach Satz 5, und deshalb ist  $a(F) \leq 3$  (vgl. Ungleichung (\*)).

Wenn  $F$  eine Parallelogrammfläche ist, dann ist  $a(F) = 2$  (Abb. 12b). Somit ist stets  $a(F) \leq 3$ .

## 2.5 § 11 Die Vermutung Hadwigers

Nach der Lösung des Problems der Überdeckung mit gestauchten Figuren für ebene konvexe Figuren wenden wir uns der Betrachtung dieses Problems für Körper zu.

Für welchen konvexen Körper  $F$  im Raum nimmt  $b(F)$  den größten Wert an?

Nach Satz 5 ist zu vermuten, dass ein solcher konvexer Körper des dreidimensionalen Raumes ein Parallelepiped ist. Für ein Parallelepiped nimmt die Größe  $b(F)$  den Wert  $b(F) = 8$  an.

Denn es kann kein Parallelepiped, das gestauchtes Bild von  $F$  ist, zwei Eckpunkte des Parallelepipeds  $F$  enthalten. Folglich müssen die acht Eckpunkte des Parallelepipeds  $F$  in acht verschiedenen gestauchten Parallelepipeden liegen, d.h.  $b(F) \leq 8$ .

Acht gestauchte Parallelepipede sind offenbar ausreichend. Das Parallelepiped  $F$  kann man z.B. in acht gestauchte Parallelepipede (mit Koeffizienten  $k = 1/2$ ) zerlegen: Man erhält sie, indem man durch den Mittelpunkt von  $F$  drei zu den Seitenflächen parallele Ebenen legt.

Ein analoger Sachverhalt gilt für ein  $n$ -dimensionales Parallelepiped:  $b(F) = 2^n$ .

Ist dieser Wert schon der größtmögliche Wert für  $b(F)$ , d.h., kann jeder  $n$ -dimensionale konvexe Körper  $F$  in  $2^n$  Teile kleineren Außenmaßes zerlegt werden?

Wenn ja, sind dann die  $n$ -dimensionalen Parallelepipede die einzigen konvexen Körper, für die  $b(F) = 2^n$  ist?

Im Jahre 1957 veröffentlichte Hadwiger [26] eine Liste ungelöster geometrischer Probleme. Unter ihnen befanden sich auch die oben genannten Probleme. Dort formulierte er die Vermutung, dass für jeden  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $b(F) \leq 2^n$  ist und dass Gleichheit nur im Fall des Parallelepipeds erreicht wird.

Unabhängig davon wurde diese Vermutung von I. Z. Gochberg und A. S. Markus [6] veröffentlicht.

Diese Probleme sind bis heute noch nicht gelöst. Auch für  $n = 3$  steht ihre Lösung aus, es ist unbekannt, ob jeder konvexe Körper des dreidimensionalen Raumes in acht Teile kleineren Außenmaßes zerlegt (oder mit acht gestauchten Körpern überdeckt) werden kann. Darüber hinaus ist sogar die Lösung dieser Probleme für konvexe Polyeder (vgl. Problem 8) unbekannt.

Die Mathematiker A. J. Lewin und J. I. Petunin aus Woronesh zeigten, dass für jeden  $n$ -dimensionalen zentralsymmetrischen konvexen Körper  $F$  die Ungleichung  $b(F) \leq (n + 1)^n$  gilt.

Für dreidimensionale konvexe Körper bedeutet das, dass  $b(F) \leq 4^3 = 64$  ist. Wie wir sehen, ist diese Schranke viel größer als die in der Vermutung Hadwigers. Wie uns schließlich aus der Arbeit [10] bekannt wurde, erhielt kürzlich Rogers für zentralsymmetrische Körper die Abschätzung

$$b(F) \leq 2^n \cdot (n \ln n + n \ln \ln n + 5n)$$

Die Vermutung Hadwigers macht eine Aussage über die obere Grenze für  $b(F)$ . Die untere Grenze für diese Größe kann man genau angeben:

Für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper gilt die Ungleichung  $b(F) \geq n + 1$ , insbesondere ist für dreidimensionale konvexe Körper  $b(F) \geq 4$ ; außerdem gibt es Körper (z.B. eine  $n$ -dimensionale Kugel), für die  $b(F) = n + 1$  ist. Den Beweis der Ungleichung  $b(F) \geq n + 1$  führen wir später durch (vgl. § 15).

Zu jeder natürlichen Zahl  $m$ , die der Ungleichung  $4 \leq m \leq 8$  genügt, gibt es im dreidimensionalen Raum einen konvexen Körper  $F$  (sogar ein Polyeder), für den  $b(F) = m$  ist. Diese Polyeder erhält man aus einem Würfel durch "Abschneiden" von hinreichend vielen Ecken (Abb. 55).

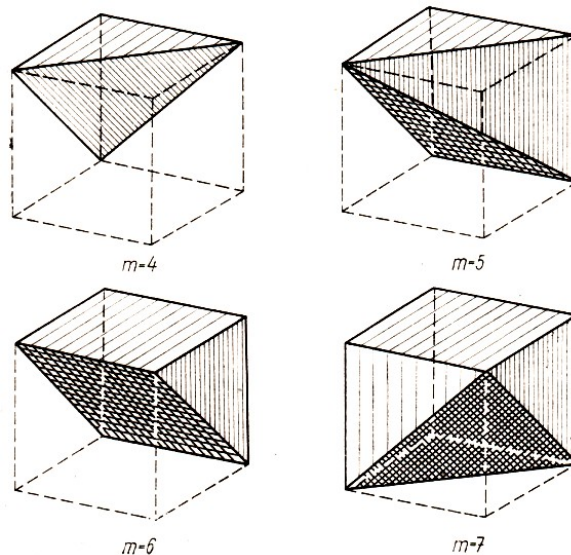


Abb. 55

Ein analoger Sachverhalt gilt auch im  $n$ -dimensionalen Raum:

Zu jeder natürlichen Zahl  $m$ , die der Ungleichung  $n + 1 \leq m \leq 2^n$  genügt, gibt es im  $n$ -dimensionalen Raum einen beschränkten konvexen Körper (sogar ein Polyeder), für den  $b(F) = m$  gilt.

## 2.6 § 12 Die Formulierung des Beleuchtungsproblems

Es seien  $F$  eine beschränkte konvexe Figur und  $l$  die Richtung einer beliebigen gerichteten Geraden in einer Ebene. Der Randpunkt  $A$  der Figur  $F$  ist ein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l$  genau dann, wenn das Bündel gerichteter Geraden der Richtung  $l$  auf dem Rand der Figur den Punkt  $A$  und eine Umgebung von ihm "beleuchtet" (Abb. 56).

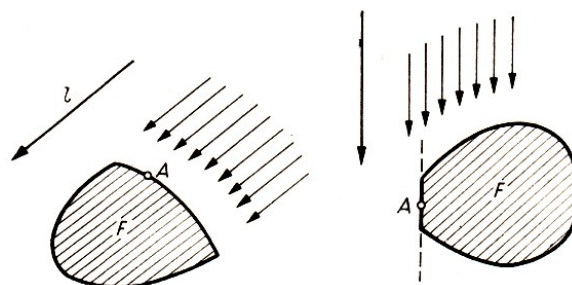


Abb. 56, 57

Wenn eine gerichtete Gerade der Richtung  $l$  durch den Punkt  $A$  eine Stützgerade für die Figur  $F$  ist (Abb. 57), dann rechnen wir den Punkt  $A$  nicht zu den beleuchteten Punkten bezüglich der Richtung  $l$ . Der Punkt  $A$  ist also genau dann ein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l$ , wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Eine gerichtete Gerade  $p$  der Richtung  $l$  durch den Punkt  $A$  ist keine Stützgerade der Figur  $F$  (d.h., auf der Geraden  $p$  existieren innere Punkte der Figur  $F$ ).
2. Der Punkt  $A$  ist der erste Punkt der Figur  $F$  auf der gerichteten Geraden  $p$ .

Wir sprechen ferner davon, dass die Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_m$  für die Beleuchtung des Randes der Figur  $F$  ausreichend sind, wenn jeder Randpunkt der Figur ein beleuchteter Punkt bezüglich wenigstens einer dieser Richtungen ist.

Schließlich bezeichnen wir mit  $c(F)$  die kleinste natürliche Zahl  $m$  der Eigenschaft, dass in der Ebene  $m$  Richtungen existieren, die für die Beleuchtung des ganzen Randes der Figur  $F$  ausreichend sind.

Das Problem der Bestimmung von  $c(F)$ , das Beleuchtungsproblem des Randes der Figur  $F$ , kann man nicht nur für ebene Figuren, sondern auch für konvexe Körper im Raum (und sogar im  $n$ -dimensionalen Raum) betrachten. Die beleuchteten Punkte werden dabei durch dieselben Bedingungen 1 und 2 definiert wie im Fall der ebenen Figuren (Abb. 58).

Das Beleuchtungsproblem wurde 1960 von dem Moskauer Mathematiker W. G. Boltjanski [1] gestellt.

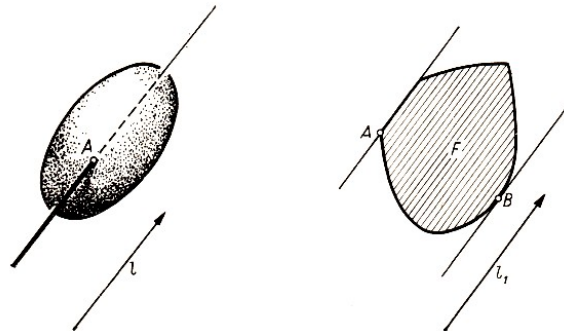


Abb. 58, 59

Es ist sehr leicht zu zeigen, dass  $c(F) \geq 3$  für jede ebene Figur  $F$  ist. Zum Beweis seien  $F$  eine ebene beschränkte konvexe Figur und  $l_1, l_2$  beliebige Richtungen. An die Figur legen wir zwei Stützgeraden der Richtung  $l_1$ ;  $A$  und  $B$  seien Randpunkte der Figur  $F$ , die auf diesen Stützgeraden liegen (Abb. 59).

Dann ist keiner der Punkte  $A, B$  ein beleuchteter Punkt der Richtung  $l_1$ , aber die Richtung  $l_2$  kann nicht mehr als einen dieser Punkte beleuchten. Also sind zwei Richtungen für die Beleuchtung des ganzen Randes der Figur  $F$  nicht ausreichend.

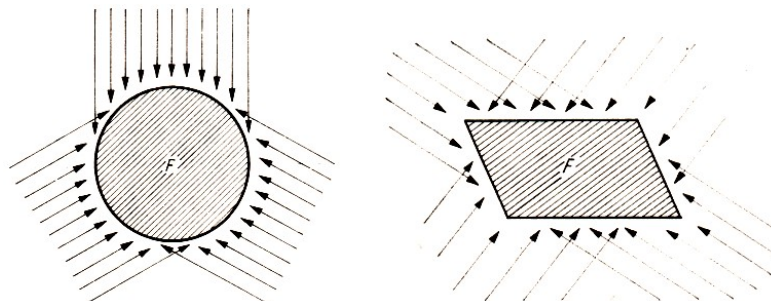


Abb. 60, 61

Im Fall der Kreisfläche (Abb. 60) sind für die Beleuchtung des Randes drei Richtungen ausreichend. Für eine Parallelogrammfläche (Abb. 61) sind drei Richtungen schon nicht mehr ausreichend (da eine Richtung nicht gleichzeitig zwei Eckpunkte des Parallelogramms beleuchtet), aber vier Richtungen reichen für die Beleuchtung des ganzen Parallelogramms aus, d.h., für einen Kreis ist  $c(F) = 3$ , und für ein Parallelogramm ist  $c(F) = 4$ .

## 2.7 § 13 Die Lösung des Beleuchtungsproblems für ebene Figuren

Wie auch im Fall der Überdeckung einer Figur mit gestauchten Bildern spielt beim Beleuchtungsproblem das Parallelogramm eine besondere Rolle.

Und zwar gilt folgender

Satz 6. Für eine beliebige ebene beschränkte konvexe Figur  $F$ , die keine Parallelogrammfläche ist, gilt die Gleichung  $c(F) = 3$ ; wenn  $F$  eine Parallelogrammfläche ist, dann gilt  $c(F) = 4$ .

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, dass die Figur  $F$  keinen Eckpunkt hat. In diesem Fall wählen wir drei Richtungen  $l_1, l_2, l_3$ , welche miteinander jeweils Winkel von  $120^\circ$  bilden (Abb. 62), und zeigen, dass diese drei Richtungen den ganzen Rand der Figur  $F$  beleuchten.

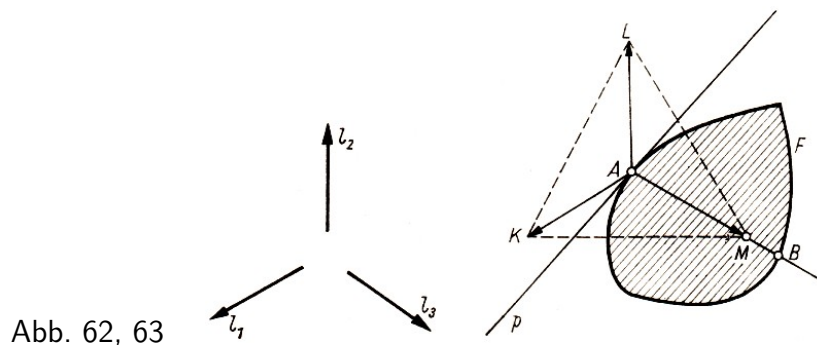


Abb. 62, 63

Es sei  $A$  ein beliebiger Randpunkt der Figur  $F$  (Abb. 63). Wir legen durch den Punkt  $A$  eine Stützgerade  $p$  der Figur  $F$ . Wir betrachten drei gerichtete Strecken der Richtung  $l_1, l_2$  bzw.  $l_3$  mit dem Anfangspunkt  $A$  und den Endpunkten  $K, L$  bzw.  $M$ . Dann liegt der Punkt  $A$  im Dreieck  $KLM$ . Da die Gerade  $p$  durch den inneren Punkt  $A$  des Dreiecks  $KLM$  geht, zerlegt sie dieses Dreieck in zwei Teile.

Folglich liegen in beiden Halbebenen bezüglich  $p$  Eckpunkte des Dreiecks  $KLM$ . Wir wählen einen Eckpunkt des Dreiecks  $KLM$ , der in der Halbebene bezüglich  $p$  liegt, in der sich auch das Innere der Figur  $F$  befindet, etwa den Eckpunkt  $M$ , der zur Richtung  $l_3$  gehört.

Die Gerade  $g_{AM}$  ist keine Stützgerade für die Figur  $F$  (da sie verschieden ist von der Geraden  $p$  und die Figur  $F$  im betrachteten Fall keine Eckpunkte und deshalb in jedem Randpunkt genau eine Stützgerade hat). Folglich schneidet die Gerade  $g_{AM}$  die Figur  $F$ , d.h., sie geht durch innere Punkte dieser Figur.

Die Gerade  $g_{AM}$  schneidet den Rand der Figur  $F$  in zwei Punkten, der eine ist der Punkt  $A$ ; den zweiten Schnittpunkt bezeichnen wir mit  $B$ . Die Punkte  $B$  und  $M$  liegen in der gleichen von  $A$  ausgehenden Halbgeraden.

Wenn wir uns auf der Geraden  $g_{AM}$  in Richtung  $l_3$  bewegen, wird folglich  $A$  der erste uns begegnende Punkt der Figur  $F$  sein. Da die Gerade  $g_{AM}$  außerdem durch innere Punkte der Figur  $F$  geht, beleuchtet die Richtung  $l_3$  den Punkt  $A$ .

Der beliebig gewählte Randpunkt  $A$  der Figur  $F$  ist ein beleuchteter Punkt bezüglich einer der Richtungen  $l_1, l_2$  bzw.  $l_3$  und daher ist  $c(F) = 3$ .

Jetzt nehmen wir an, dass die Figur  $F$  Eckpunkte hat. Es sei  $A$  ein Eckpunkt von  $F$ . Im Punkt  $A$  legen wir zwei Halbtangenten an die Figur  $F$  und betrachten die Stützgeraden, die parallel zu den Halbtangenten verlaufen (Abb. 64), so dass wir ein umschriebenes Parallelogramm  $ABCD$  erhalten.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass der Punkt  $C$  dieses Parallelogramms nicht in der Figur  $F$

liegt, und bezeichnen mit  $M$  bzw.  $N$  die Punkte, die in der Figur  $F$  auf den Seiten  $CB$  bzw.  $CD$  dem Punkt  $C$  am nächsten liegen. Die Punkte  $M$  und  $N$  teilen den Rand der Figur  $F$  in zwei Teile; wir betrachten denjenigen Teil, der den Punkt  $A$  nicht enthält, und wählen auf ihm zwei Punkte  $P$  und  $Q$ .

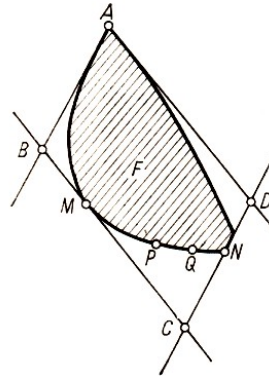


Abb. 64

Die Bezeichnung der Punkte  $P$  und  $Q$  sei so gewählt, dass die Punkte auf dem Rand der Figur  $F$  in folgender Reihenfolge liegen:  $M, P, Q, N$ . Die Punkte  $P$  und  $Q$  liegen innerhalb des Parallelogramms  $ABCD$ .

Falls drei der Punkte  $B, D, P$  und  $Q$  in einer Geraden liegen, kann der Leser leicht drei Richtungen angeben, die für die Beleuchtung des Randes der Figur ausreichen. Anderenfalls werden wir zeigen, dass die durch  $\overrightarrow{QD}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  bestimmten Richtungen  $l_1, l_2$  bzw.  $l_3$  den ganzen Rand der Figur  $F$  beleuchten.

Die Gerade  $g_{QD}$  schneidet den Rand der Figur  $F$  in zwei Punkten, einer von ihnen ist der Punkt  $Q$  (Abb. 65).

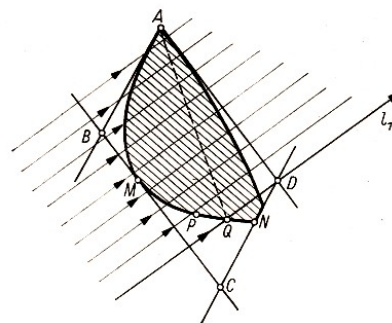


Abb. 65

Daraus kann man leicht schließen, dass der Punkt  $Q$  ein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l_1$  ist. Wenn wir durch alle Punkte der Strecke  $AQ$  parallele Geraden zu  $g_{QD}$  legen, dann sind alle Punkte des Bogens  $QA$ , der den Punkt  $M$  enthält, außer dem Punkt  $A$ , beleuchtete Punkte bezüglich der Richtung  $l_1$ . Analog sind (Abb. 66) alle von  $A$  verschiedenen Punkte des Bogens  $AP$  beleuchtete Punkte bezüglich der Richtung  $l_2$ . Somit beleuchten die Richtungen  $l_1$  und  $l_2$  mit Ausnahme des Punktes  $A$  den ganzen Rand der Figur  $F$ . Den Punkt  $A$  beleuchtet die Richtung  $l_3$ .



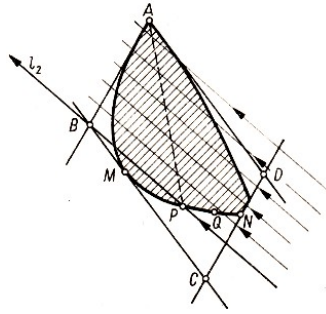


Abb. 66

Also beleuchten die Richtungen  $l_1, l_2, l_3$  den ganzen Rand der Figur  $F$ , d.h.  $c(F) = 3$ .

Im folgenden Fall liegt der Punkt  $C$  in der Figur  $F$ , aber etwa der Punkt  $B$  nicht. Der Fall, dass einer der Strahlen  $CB^+, CD^+$  keine Halbtangente in  $C$  ist, ist leicht auf den vorhergehenden Fall zurückzuführen:

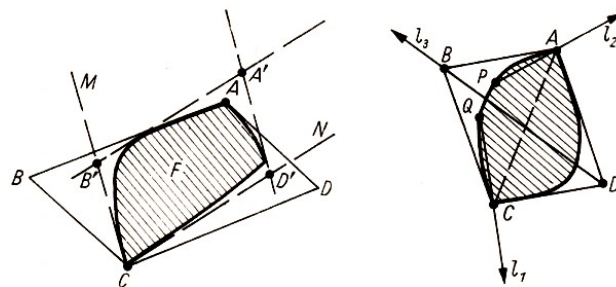


Abb. 67 und 68

Es genügt, die Halbtangenten  $CM^+, CN^+$  und die zu ihnen parallelen Stützgeraden der Figur  $F$  zu betrachten (Abb. 67); in dem erhaltenen umbeschriebenen Parallelogramm  $CB'A'D'$  liegt der Eckpunkt  $A'$  nicht in der Figur  $F$ . Wir können deshalb voraussetzen, dass  $CB^+$  und  $CD^+$  Halbtangenten sind. Die Punkte  $A$  und  $C$  teilen den Rand der Figur  $F$  in zwei Teile; wir betrachten denjenigen Teil, der in der Halbebene bezüglich der Diagonalen  $AC$  liegt, die auch den Punkt  $B$  enthält.

Auf diesem Bogen wählen wir zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , die innerhalb des Parallelogramms  $ABCD$  liegen (Abb. 68) und für die die Reihenfolge  $A, P, Q, C$  zutrifft. Wir werden zeigen, dass die durch  $\vec{QC}, \vec{PA}$  und  $\vec{DB}$  bestimmten Richtungen  $l_1, l_2$  bzw.  $l_3$  den ganzen Rand der Figur  $F$  beleuchten. Wenn wir nämlich durch alle Punkte der Strecke  $QA$  parallele Geraden zu  $g_{QC}$  legen (Abb. 69a), werden alle Punkte des Bogens  $QA$ , der  $P$  enthält, beleuchtete Punkte bezüglich der Richtung  $l_1$ .

Auch  $A$  ist ein beleuchteter Punkt bezüglich  $l_1$ , denn die zu  $g_{QC}$  parallele Gerade durch  $A$  geht durch das Innere des Parallelogramms, und deshalb muss sie innere Punkte der Figur  $F$  enthalten, da  $AB^+$  und  $AD^+$  Halbtangenten sind.

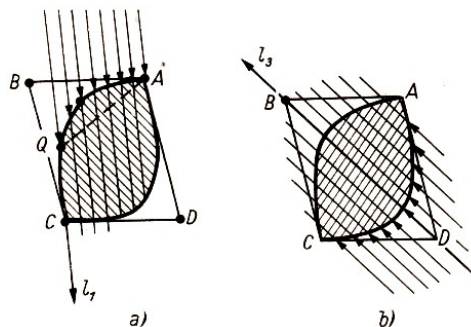


Abb. 69

Analog beleuchtet die Richtung  $l_2$  alle Punkte des Bogens  $PC$ , der  $Q$  enthält. Die Richtungen  $l_1$  und  $l_2$  beleuchten zusammen alle Punkte des Bogens  $APQC$ , insbesondere die Punkte  $A$  und  $C$  (Abb. 68). Die übrigen Punkte des Randes werden durch die Richtung  $l_3$  beleuchtet (Abb. 69b).

In den betrachteten Fällen ist  $c(F) = 3$ .

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, dass alle vier Eckpunkte des Parallelogramms  $ABCD$  in der Figur  $F$  liegen. Wegen der vorausgesetzten Konvexität stimmt dann die Figur  $F$  mit der Fläche des Parallelogramms  $ABCD$  überein, und daher ist  $c(F) = 4$ .

Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

## 2.8 § 14 Die Äquivalenz beider Probleme

Der aufmerksame Leser hat gewiss bemerkt, dass etwa für Kreisflächen und Parallelogrammflächen die Größe  $c(F)$  dieselben Werte wie  $b(F)$  annimmt, dass man den Satz 6 aus Satz 5 erhält, indem man  $b(F)$  durch  $c(F)$  ersetzt. Für ebene beschränkte konvexe Figuren stimmen also die Größen  $b(F)$  und  $c(F)$  überein.

Dieser Sachverhalt gilt nicht nur für ebene Figuren. Es gilt vielmehr der folgende Satz, der 1960 von W. G. Boltanski [1] bewiesen wurde:

Satz 7. Für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$  gilt

$$b(F) = c(F) \quad (**)$$

Folglich ist das Beleuchtungsproblem äquivalent mit dem Problem der Überdeckung eines konvexen Körpers mit gestauchten Körpern. Darüber hinaus besitzt das Beleuchtungsproblem wohl den Vorzug einer großen Anschaulichkeit. Aus Satz 7 folgt sofort Satz 5, der oben nicht bewiesen wurde:

Satz 6 wurde bewiesen, und wegen der Gleichung (\*\*) gilt Satz 5. (Der ursprüngliche Beweis des Satzes 5, der von I. Z. Gochberg und A. S. Markus aufgestellt wurde und die Gleichung (\*\*) nicht benutzte, war schwieriger als der Beweis des Satzes 6.)

Die Gleichung (\*\*) erlaubt es, die Vermutung Hadwigers neu zu formulieren: Der Rand jedes  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körpers  $F$  kann mit Hilfe von  $2^n$  Richtungen beleuchtet werden; für den Fall, dass der Körper  $F$  kein  $n$ -dimensionales Parallelepipid ist, genügen zur Beleuchtung seines Randes  $2^n - 1$  Richtungen.

Wir haben schon bemerkt, dass diese Vermutung bis jetzt noch nicht einmal für  $n = 3$  bewiesen wurde, d.h., bis jetzt konnte noch nicht bewiesen werden, dass der Rand eines beliebigen beschränkten konvexen Körpers im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von acht Richtungen beleuchtet werden kann. Das ist sogar für konvexe Polyeder noch nicht bewiesen worden (vgl. Problem 9).

Den Beweis von Satz 7 führen wir für ebene konvexe Figuren durch. Für konvexe Körper (beliebiger Dimension) kann der Beweis analog durchgeführt werden, es ergeben sich aber einige Komplikationen, auf die wir in den Anmerkungen eingehen.

Wir nehmen an, dass eine ebene konvexe Figur  $F$  mit  $m$  gestauchten Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_m$  überdeckt werden kann. Das Zentrum und den Koeffizienten der Stauchung, durch die die Figur  $F$  in  $F_i$  übergeht, bezeichnen wir mit  $O_i$  bzw.  $k_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Folglich ist jede der Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_m$  kleiner als 1.



Wir wählen jetzt einen beliebigen inneren Punkt  $A$  der Figur  $F$ , der mit keinem der Punkte  $O_1, O_2, \dots, O_m$  übereinstimmt, und bezeichnen mit  $l_1, l_2, \dots, l_m$  die Richtungen, die von  $\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_2A}, \dots, \overrightarrow{O_mA}$  bestimmt werden.

Wir werden zeigen, dass die Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_m$  für die Beleuchtung des ganzen Randes der Figur ausreichen.

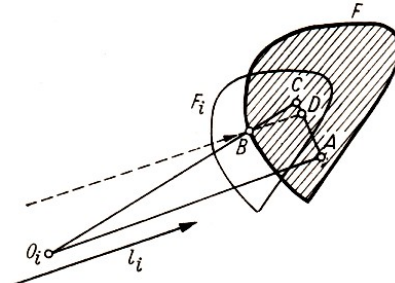


Abb. 70

Es sei  $B$  ein beliebiger Randpunkt der Figur  $F$  (Abb. 70). Dann liegt der Punkt  $B$  in einer der Mengen  $F_1, F_2, \dots, F_m$  etwa in  $F_i$ . Da bei der Stauchung mit dem Zentrum  $O_i$  und dem Koeffizienten  $k_i$  die Figur  $F$  in  $F_i$  übergeht, gibt es einen Punkt  $C$  der Figur  $F$ , der bei dieser Stauchung in den Punkt  $B$  übergeht.

Somit ist  $O_iB : O_iC = k_i$ . In den Fällen  $O_i = B = C$  bzw.  $A = C$  gilt die Behauptung offensichtlich.

Anderenfalls wählen wir in der Strecke  $AC$  einen Punkt  $D$  mit  $AD : AC = k_i$ . Aus der Gleichung  $O_iB : O_iC = AD : AC$  folgt, dass  $g_{BC} \parallel g_{O_iA}$  ist. Da der Punkt  $C$  in der Figur  $F$  und  $A$  im Inneren dieser Figur liegt, ist das Innere der Strecke  $AG$  im Inneren der Figur  $F$  enthalten, insbesondere ist  $D$  ein innerer Punkt dieser Figur.

Also geht die Gerade  $g_{BD}$  durch den inneren Punkt  $D$  der Figur  $F$ . Daraus folgt, dass  $B$  ein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l_i$  ist. Somit ist jeder Randpunkt der Figur  $F$  beleuchteter Punkt bezüglich einer der Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_m$ .

Wir haben gezeigt, dass  $m$  Richtungen für die Beleuchtung des Randes der Figur  $F$  ausreichen, wenn  $F$  mit  $m$  gestauchten Figuren überdeckt werden kann.

Folglich gilt die Ungleichung

$$c(F) \leq b(F)$$

Wir überprüfen jetzt umgekehrt die Richtigkeit der Ungleichung

$$c(F) \geq b(F)$$

Wir nehmen an, dass die  $s$  Richtungen  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  für die Beleuchtung des ganzen Randes der Figur  $F$  ausreichen. Wir betrachten zwei gerichtete Stützgeraden der Figur  $F$ , die zur Richtung  $l'_i$  gehören (Abb. 71), und bezeichnen mit  $A$  bzw.  $B$  die ersten Punkte der Figur  $F$  auf diesen Stützgeraden.

Dann ist klar, dass mit Ausnahme von  $A$  und  $B$  alle Punkte des Bogens  $\Delta_i$ , mit den Endpunkten  $A, B$  (in Abb. 71 fett gezeichnet) beleuchtete Punkte bezüglich der Richtung  $l'_i$  sind.

Die Menge aller beleuchteten Punkte bezüglich der Richtung  $l'_i$  ist somit ein Bogen  $\Delta_i$  ohne Endpunkte; diese Menge werden wir Beleuchtungsgebiet bezüglich der Richtung  $l'_i$  nennen. [Anmerkung 10]

Da die Richtungen  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  den ganzen Rand der Figur  $F$  beleuchten, überdecken die entsprechenden Beleuchtungsgebiete  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  den ganzen Rand der Figur  $F$ .

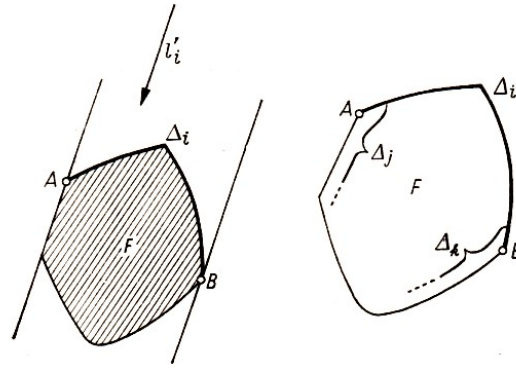


Abb. 71, 72

Der Punkt  $A$  in Abb. 71 ist kein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l'_1$ , deshalb wird er bezüglich einer anderen Richtung  $l'_j$  beleuchtet. Dann ist bezüglich  $l'_j$  sogar eine Umgebung von  $A$  auf dem Rand der Figur  $F$  beleuchtet, d.h., die Beleuchtungsgebiete  $\Delta_i$  und  $\Delta_j$ , überlappen sich (Abb. 72).

Ebenso wird auch der zweite Endpunkt  $B$  des Bogens  $\Delta_i$ , durch ein Beleuchtungsgebiet  $\Delta_k$  überdeckt.

Da die offenen Beleuchtungsgebiete  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  einander überlappen, überdecken verkleinerte Gebiete  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$ , die im Inneren von  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{s-1}$  bzw.  $\Delta_s$  enthalten sind (Abb. 73), auch den Rand der Figur  $F$ . [Anmerkung 11]

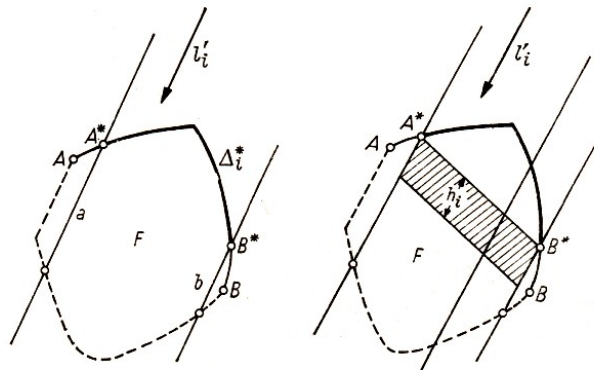


Abb. 73, 74

Mit  $A$  und  $B$  bezeichnen wir die Endpunkte des Bogens  $\Delta_i$  und mit  $A^*$  und  $B^*$  die Endpunkte des Bogens  $\Delta_i^*$ . Die gerichteten Geraden der Richtung  $l'_i$  durch die Punkte  $A^*$  und  $B^*$  müssen durch innere Punkte der Figur  $F$  gehen, da  $A^*$  und  $B^*$  beleuchtete Punkte bezüglich der Richtung  $l'_i$  sind.

Die Längen der Sehnen, die  $F$  aus diesen Geraden schneidet, bezeichnen wir mit  $a$  und  $b$  und wählen eine Länge  $h_i$ , die kleiner als  $a$  und  $b$  ist.

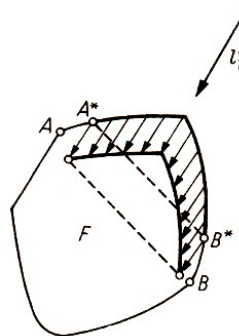


Abb. 75

Dann liegt das Parallelogramm, für das  $A^*B^*$  eine Seite ist und eine weitere Seite in einer der genannten Sehnen liegt und die Länge  $h_i$  hat, ganz in der Figur  $F$  (Abb. 74). Daraus folgt,

dass  $F$  aus einer beliebigen Geraden der Richtung  $l'_i$  durch einen beliebigen Punkt des Bogens  $\Delta_i^*$  eine Sehne mit einer Länge  $> h_i$  herauschneidet.

Bei der Verschiebung in der Richtung  $l'_i$  um den Betrag  $h_i$  (Abb. 75) wird der Bogen  $\Delta_i^*$  in das Innere der Figur  $F$  abgebildet. [Anmerkung 12] Wenn wir jedoch eine Verschiebung der Figur  $F$  in der zu  $l'_i$  entgegengesetzten Richtung um den Betrag  $h_i$  durchführen, erhalten wir eine Figur  $F_i^*$ , die den Bogen  $\Delta_i^*$  in ihrem Innern enthält (Abb. 76).

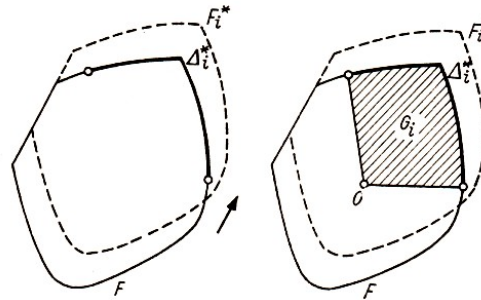


Abb. 76, 77

Wenn wir im Innern von  $F_i^*$  einen beliebigen Punkt  $O_i^*$  wählen, dann gibt es einen Stauchungskoeffizienten  $k_i^*$  derart, dass das Bild  $F'_i$  von  $F_i^*$  bei der Stauchung mit dem Zentrum  $O_i^*$  und dem Koeffizienten  $k_i^*$  den Bogen  $\Delta_i^*$  enthält.

Die Konstruktion führen wir für alle  $i = 1, 2, \dots, s$  durch und erhalten Figuren  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$ , die gestauchte Bilder der Figur  $F$  sind.

Es sei  $O$  innerer Punkt der Figur  $F$ . Wir dürfen voraussetzen, dass jede Figur  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  den Punkt  $O$  enthält (Abb. 77):

Wir brauchen nur  $O_i^* = O$  und dann die Beträge  $h_i$  genügend klein und die Stauchungskoeffizienten  $k_i^*$  genügend nahe bei 1 zu wählen.

Schließlich bezeichnen wir mit  $G_i$  den "Sektor" mit dem Eckpunkt  $O$  und dem Bogen  $\Delta_i^*$  (dieser Sektor ist in Abb. 77 schraffiert). Da die Figur  $F'_i$  konvex ist und außerdem den Bogen  $\Delta_i^*$  und den Punkt  $O$  enthält, umfasst sie den ganzen Sektor  $G_i$ .

Folglich enthalten die gewählten Figuren  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  der Reihe nach die Sektoren  $G_1, G_2, \dots, G_s$ . Außerdem ist klar, dass die Sektoren  $G_1, G_2, \dots, G_s$  die ganze Figur  $F$  ausfüllen (da die Bögen  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$  den ganzen Rand der Figur  $F$  überdecken). Deshalb überdecken die Figuren  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  die Figur  $F$ . [Anmerkung 13]

Wenn  $s$  Richtungen zur Beleuchtung des Randes der Figur  $F$  ausreichen, dann kann die Figur  $F$  mit  $s$  gestauchten Figuren überdeckt werden. Folglich gilt die Ungleichung

$$b(F) \leq c(F)$$

Aus den bewiesenen Ungleichungen  $c(F) \leq b(F)$  und  $b(F) \leq c(F)$  folgt die zu beweisende Identität

$$b(F) = c(F)$$

## 2.9 § 15 Einige Abschätzungen für die Größe $c(F)$

Hier beweisen wir zwei einfache Sätze, die insbesondere die Frage nach dem Wert von  $c(F)$  für konvexe Figuren mit glattem Rand vollständig beantworten.

Satz 8. Für jeden  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$  gilt die Ungleichung  $c(F) \geq n + 1$ .

Den Beweis führen wir für dreidimensionale beschränkte konvexe Körper durch ( $n = 3$ ); für andere Werte von  $n$  ist der Beweis analog.

Es seien  $F$  ein beliebiger dreidimensionaler beschränkter konvexer Körper und  $l_1, l_2, l_3$  drei beliebige Richtungen. Wir zeigen, dass bezüglich dieser Richtungen nicht der ganze Rand des Körpers  $F$  beleuchtet werden kann.

Wir betrachten drei von einem Punkt  $O$  ausgehende gerichtete Strecken der Richtungen  $l_1, l_2$  bzw.  $l_3$  und eine Ebene  $\Gamma$ , die durch  $O, l_1$  und  $l_2$  bestimmt ist. Diese Ebene werden wir als "horizontal" ansehen und voraussetzen, dass die durch  $l_3$  bestimmte gerichtete Strecke den "unteren" Halbraum bezüglich  $\Gamma$  meidet (Abb. 78a).

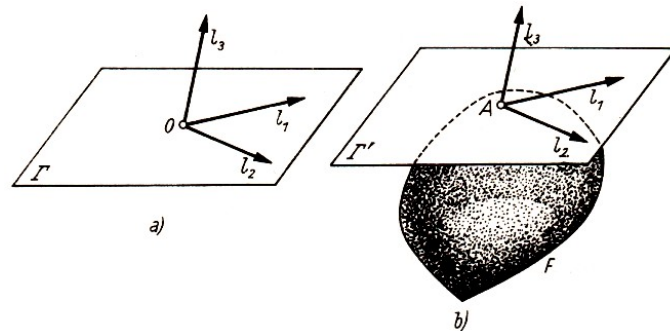


Abb. 78

Es sei  $\Gamma'$  die zu  $\Gamma$  parallele Stützebene, bezüglich der der Körper  $F$  den "oberen" Halbraum meidet (Abb. 78b), und  $A$  sei ein gemeinsamer Punkt der Ebene  $\Gamma'$  und des Körpers  $F$ . Dann ist der Punkt  $A$  bezüglich keiner der Richtungen  $l_1, l_2, l_3$  ein beleuchteter Punkt:

Da  $A$  in der Stützebene  $\Gamma'$  liegt, ist das für die Richtungen  $l_1$  und  $l_2$  offensichtlich;  $A$  ist auch bezüglich  $l_3$  kein beleuchteter Punkt, da die zu  $l_3$  gehörige gerichtete Strecke nicht in den "unteren" Halbraum bezüglich  $\Gamma'$  zeigt. Somit reichen drei Richtungen für die Beleuchtung des Randes des Körpers  $F$  nicht aus, und deshalb ist  $c(F) \geq 4$ .

Satz 9. Wenn  $F$  ein beschränkter konvexer  $n$ -dimensionaler Körper mit glattem Rand ist, dann sind für die Beleuchtung seines Randes  $n + 1$  Richtungen ausreichend, d.h.  $c(F) = n + 1$ .

Beweis. Für  $n = 2$  folgt dieser Satz aus dem Satz 6. Für beliebiges  $n$  ist der Beweis dem ersten Teil des Beweises von Satz 6 analog:

Wir wählen ein beliebiges  $n$ -dimensionales Simplex (d.h. ein  $n$ -dimensionales "Tetraeder"), von einem inneren Punkt  $O$  ziehen wir  $n + 1$  gerichtete Strecken nach seinen Eckpunkten  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  (Abb. 79) und erhalten  $n + 1$  Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ , die für die Beleuchtung des Randes des  $n$ -dimensionalen konvexen Körpers  $F$  mit glattem Rand ausreichen.

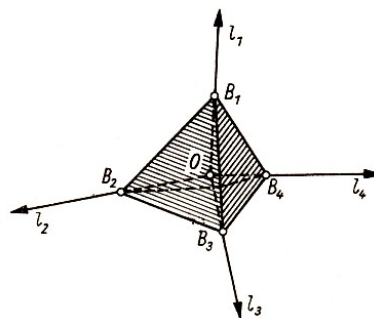


Abb. 79

Es sei  $A$  ein beliebiger Randpunkt von  $F$  und  $\Gamma$  die Stützhyperebene, die durch diesen Punkt hindurchgeht. Wir verschieben das Simplex parallel zu sich derart, dass  $O$  in  $A$  übergeht (Abb. 80).

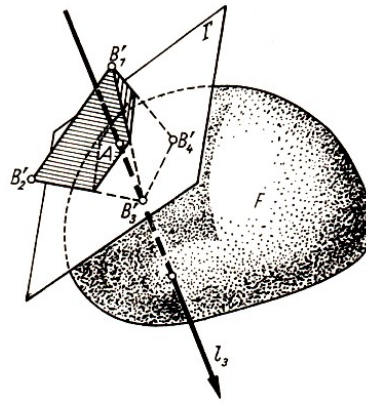


Abb. 80

Da die Hyperebene  $\Gamma$  durch den inneren Punkt  $A$  des verschobenen Simplexes geht, zerlegt sie dieses Simplex, d.h., in beiden Halbräumen bezüglich  $\Gamma$  gibt es Punkte des Simplexes. Das Bild  $B'_i$  des Punktes  $B_i$  sei ein Eckpunkt, der in dem Halbraum bezüglich  $\Gamma$  liegt, welcher das Innere des Körpers  $F$  enthält (Eckpunkt  $B'_3$  in Abb. 80).

Die Gerade  $g_{AB'_i}$  ist keine Stützgerade des Körpers  $F$ , da der Körper  $F$  glatten Rand hat und deshalb alle Stützgeraden in der Hyperebene  $\Gamma$  liegen. Mit anderen Worten, die Gerade  $g_{AB'_i}$  geht durch innere Punkte des Körpers  $F$ .

Hieraus kann man leicht folgern, dass der Punkt  $A$  bezüglich der Richtung  $l_i$  beleuchtet ist. Also reichen die Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  für die Beleuchtung des Randes von  $F$  aus, d.h.  $c(F) \leq n + 1$ .

Da der Körper  $F$  als beschränkt vorausgesetzt wurde, gilt nach Satz 8 die Ungleichung  $c(F) \geq n + 1$ ; somit ist  $c(F) = n + 1$ .

Bemerkung. Es gilt sogar der folgende Satz, der 1960 von W. G. Boltjanski [1] bewiesen wurde, wobei sich der Beweis ein wenig komplizierter gestaltet:

Wenn ein  $n$ -dimensionaler beschränkter konvexer Körper nicht mehr als  $n$  Randpunkte mit mehr als einer Stützhyperebene<sup>11</sup> hat, dann ist  $c(F) = n + 1$ . [Anmerkung 14] (Vgl. in Verbindung damit das Problem 10)

Folgerung. Für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$  gilt die Ungleichung

$$b(F) \geq n + 1$$

Wenn der Körper  $F$  außerdem (mit Ausnahme von höchstens  $n$  Randpunkten) einen glatten Rand hat, dann ist

$$a(F) \leq b(F) = n + 1$$

Somit gilt für  $n$ -dimensionale beschränkte konvexe Körper mit glattem Rand (und sogar für  $n$ -dimensionale Körper, die nicht mehr als  $n$  Randpunkte mit mehr als einer Stützhyperebene haben) die Vermutung von Borsuk.

Das geht unmittelbar aus den Beziehungen (\*) und (\*\*) hervor. Somit erhalten wir hier einen neuen Beweis des Hadwigerschen Satzes (Satz 4) und sogar eine umfassendere Aussage.

<sup>11</sup>Solche Punkte wurden für  $n = 2$  Eckpunkte genannt, weil sie im Fall der Vielecksflächen gerade deren Ecken sind. Bei den konvexen Polyedern gibt es nicht nur in den Ecken mehrere Stützebenen, sondern in jedem Punkt einer Kante.

## 2.10 § 16 Die Überdeckung durch gestauchte Figuren und die Beleuchtung bei unbeschränkten konvexen Figuren

Hier werden Ergebnisse dargelegt, die hauptsächlich von dem Mathematiker P. S. Soltan aus Kischinew veröffentlicht wurden. Die Beweise führen wir nicht aus; der Leser sei auf die Originalarbeit Soltans [22] verwiesen.

Für unbeschränkte konvexe Figuren (siehe Abb. 42) verliert das Problem Borsuks seinen Sinn; da der Durchmesser einer solchen Figur unendlich wird. Aber das Beleuchtungsproblem und das Problem der Überdeckung einer Figur mit gestauchten Bildern (d.h. mit Figuren, die gestaucht zur Ausgangsfigur sind) behalten nach wie vor ihre Bedeutung. Hier erwartet uns zuerst eine Überraschung:

Im Gegensatz zu dem in Satz 7 für beschränkte konvexe Figuren erhaltenen Ergebnis kann für unbeschränkte konvexe Figuren  $F$  durchaus  $b(F) \neq c(F)$  sein.

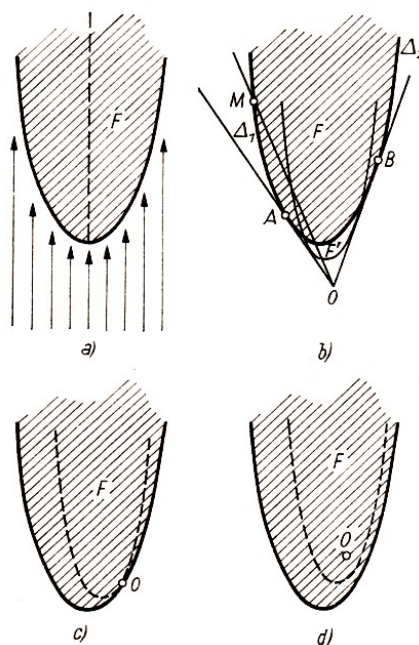


Abb. 81

Am einfachsten sieht man das am Beispiel der konvexen Fläche  $F$ , die von einer Parabel  $P$  begrenzt wird. Der Rand  $P$  dieser konvexen Figur  $F$  kann bezüglich einer Richtung beleuchtet werden, d.h.  $c(F) = 1$  (Abb. 81a).

Jedoch kann die Figur  $F$  unmöglich von endlich vielen gestauchten Bildern überdeckt werden, d.h.  $b(F) = \infty$ . Es sei  $F'$  Bild von  $F$  bei der Stauchung mit dem Koeffizienten  $k$  und dem außerhalb  $F$  liegenden Zentrum  $O$  (Abb. 81b);  $A$  und  $B$  seien die Berührungspunkte der Tangenten von  $O$  an die Parabel  $P$ .

Die Punkte  $A$  und  $B$  zerlegen die Parabel  $P$  in drei Teile: in einen Bogen  $\widehat{AB}$  und in zwei unbeschränkte Bögen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ , die in den Punkten  $A$  und  $B$  enden. Dann ist klar, dass die Figur  $F'$  keinen Punkt der Bögen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  enthält; denn jeder Punkt  $M$  aus  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  ist bei der Stauchung Bildpunkt eines Punktes außerhalb der Figur  $F$ . Die Figur  $F'$  kann somit nur ein endliches Stück der Parabel  $P$  enthalten, das in dem Bogen  $\widehat{AB}$  liegt.

Wählt man als Stauchungszentrum einen Punkt  $O$  der Figur  $F$ , dann enthält jedes gestauchte Bild  $F'$  von  $F$  höchstens einen Punkt der Parabel  $P$  (Abb. 81c, d).



Somit enthält jedes gestauchte Bild von  $F$  höchstens ein endliches Stück der Parabel  $P$ , und daher sind für die Überdeckung der ganzen Figur  $F$ , die die Parabel  $P$  enthält, unendlich viele gestauchte Figuren notwendig, d.h.  $b(F) = \infty$ .

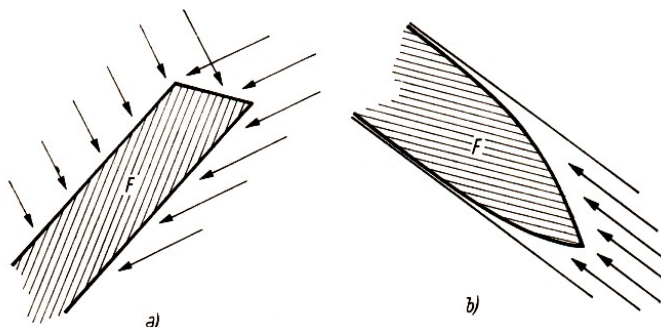


Abb. 82

Es existieren auch solche unbeschränkte konvexe Figuren, für die  $b(F)$  endlich ist. Wenn  $F$  beispielsweise ein Halbstreifen ist (in Abb. 82a schraffiert), dann ist  $b(F) = 2$ ; in diesem Fall ist  $c(F)$  ebenfalls gleich 2, d. h.  $b(F) = c(F)$ .

Schließlich gibt es auch unbeschränkte konvexe Figuren, für die  $b(F)$  und  $c(F)$  endlich sind, aber nicht übereinstimmen. Wenn die Figur  $F$  beispielsweise in einem Streifen zwischen zwei parallelen Geraden liegt und sich asymptotisch den Rändern dieses Streifens nähert (Abb. 82 b), dann ist offensichtlich  $b(F) = 2$  und  $c(F) = 1$ .

In Verbindung damit entstehen folgende Fragen:

Für welche unbeschränkten konvexen Figuren bleibt die Gleichheit  $b(F) = c(F)$  bestehen?  
 Für welche unbeschränkten konvexen Figuren nimmt die Größe  $b(F)$  endliche Werte an? Gibt es unbeschränkte konvexe Figuren, für die  $c(F) = \infty$  ist?  
 (Vgl. auch die Probleme 12, 13, 14)

Einige dieser Fragen beantworten wir hier. Im ersten Teil des Beweises von Satz 7 wurde nicht benutzt, dass die betrachteten konvexen Figuren beschränkt sind; daher gilt die Ungleichung

$$c(F) \leq b(F) \quad (***)$$

auch für beliebige unbeschränkte konvexe Figuren.

Im folgenden formulieren wir Satz 10, den P. S. Soltan im Jahre 1963 erhalten hat und der eine Antwort auf die zweite Frage gibt.

Es sei  $F$  eine unbeschränkte konvexe Figur (beliebiger Dimension). Wir wählen einen beliebigen inneren Punkt  $O$  der Figur  $F$  und betrachten alle möglichen Halbgeraden, die vom Punkt  $O$  ausgehen und ganz in der Figur  $F$  enthalten sind.

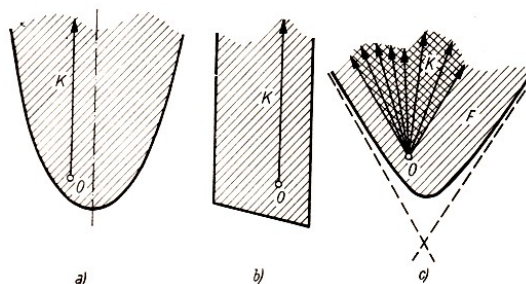


Abb. 83

Insgesamt bilden alle diese Halbgeraden offensichtlich eine unbeschränkte konvexe Figur  $K$ ; sie wird einbeschriebener Kegel der Figur mit der Spitze  $O$  genannt. Für eine Parabelfläche



(Abb. 83a) oder für einen Halbstreifen (Abb. 83b) besteht der einbeschriebene Kegel aus einer Halbgeraden; für eine von einem Hyperbelast begrenzte konvexe Fläche (Abb. 83c) aber ist der einbeschriebene Kegel eine Winkelfläche. Durch Verschiebung erhält man alle einbeschriebenen Kegel aus einem vorgegebenen einbeschriebenen Kegel.

Ferner nennt P. S. Soltan die unbeschränkte konvexe Figur  $F$  fast konisch, wenn es eine Länge  $r$  derart gibt, dass alle Punkte der Figur  $F$  von einem einbeschriebenen Kegel  $K$  einen Abstand  $\leq r$  besitzen.

So sind z.B. die Figuren, die in den Abb. 83b und 83c dargestellt sind, fast konische Figuren. Dagegen ist die Figur, die in Abb. 83a dargestellt ist, nicht fast konisch, da sich die Punkte der Parabel unbeschränkt von ihrer Achse entfernen.

Satz 10. Die Größe  $b(F)$  nimmt für eine unbeschränkte konvexe Figur  $F$  genau dann einen endlichen Wert an, wenn  $F$  eine fast konische Figur ist.

Es sei  $F$  eine unbeschränkte  $n$ -dimensionale konvexe Figur, die fast konisch ist;  $q$  sei die Dimension des einbeschriebenen Kegels dieser Figur. P. S. Soltan hat in Ergänzung des Satzes 10 eine beschränkte  $(n - q)$ -dimensionale konvexe Figur  $M$  konstruiert, die durch die Figur  $F$  bestimmt ist [Anmerkung 15] und der Gleichung

$$b(F) = b(M)$$

genügt. Für  $q = n$  ist die Figur  $M$  ein Punkt, und damit gilt  $b(F) = b(M) = 1$ ; für  $q = n - 1$  ist die Figur  $M$  eine Strecke, und deshalb ist  $b(F) = b(M) = 2$ .

Wenn eine  $n$ -dimensionale fast konische konvexe Figur  $F$  einen  $n$ -dimensionalen einbeschriebenen Kegel hat, dann ist  $b(F) = 1$ ; aber wenn sie einen  $(n - 1)$ -dimensionalen einbeschriebenen Kegel besitzt, dann ist  $b(F) = 2$ .

Für ebene Figuren erhält man das folgende Ergebnis, das 1961 von dem Mathematiker W. N. Wisitei [5] aus Kischinew gefunden wurde:

Es sei  $F$  eine zweidimensionale fast konische Figur, die keine Gerade enthält; wenn ihr einbeschriebener Kegel  $K$  eine Halbgerade ist, dann ist  $b(F) = 2$ ; wenn  $K$  eine Winkelfläche ist, dann ist  $b(F) = 1$ . Wenn die zweidimensionale konvexe Figur schließlich eine Gerade enthält, dann ist sie ein Streifen, eine Halbebene oder eine Ebene; in diesen Fällen nimmt die Größe  $b(F)$  die Werte 2, 1 bzw. 1 an. Damit ist die Frage nach den Werten der Größe  $b(F)$  für ebene fast konische Figuren vollständig beantwortet.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass P. S. Soltan Beispiele dreidimensionaler unbeschränkter konvexer Figuren konstruiert hat, für die  $c(F) = \infty$  ist.

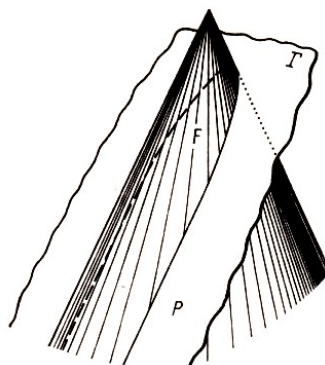


Abb. 84

Das einfachste Beispiel dieser Art erhält man auf folgende Weise. Wir betrachten einen unbeschränkten Kreiskegel und eine Ebene  $\Gamma$ , die parallel einer Mantellinie ist und ihn schneidet.

Diese Ebene teilt den Kegel in zwei unbeschränkte konvexe Körper, von denen wir den betrachten, der die Kegelspitze enthält. Dieser unbeschränkte konvexe Körper  $F$  (Abb. 84) besitzt die geforderte Eigenschaft  $c(F) = \infty$ .

Wir bezeichnen mit  $P$  die Parabel, die wir beim Schnitt der Ebene  $\Gamma$  mit dem Kegelmantel erhalten. Jeder Punkt  $A$  der Parabel  $P$  ist ein Punkt, in dem keine eindeutig bestimmte Stützebene von  $F$  existiert. In  $A$  bilden die Tangentialebene des Kegels und die Ebene  $\Gamma$  einen Winkel, dessen Größe gegen Null strebt, wenn sich der Punkt  $A$  auf der Parabel  $P$  unbeschränkt von der Spitze des Kegels entfernt.

Daraus folgt, dass bezüglich jeder Richtung höchstens ein endlicher Bogen der Parabel  $P$  beleuchtet wird. Um den ganzen Rand des Körpers  $F$  (und insbesondere alle Punkte der Parabel  $P$ ) zu beleuchten, sind demzufolge unendlich viele Richtungen notwendig, d.h.  $c(F) = \infty$ .

### 3 Einige verwandte Aufgaben

#### 3.1 § 17 Das Problem Borsuks im Minkowskischen Raum

Wenn eine Strecke  $LM$  als Einheitsstrecke ausgewählt wird, dann ist die Länge  $l(AB)$  einer beliebigen Strecke  $AB$  gleich dem Verhältnis  $AB : LM$ .

Die Länge der Strecke  $AB$  hängt nicht von der Richtung und der Lage ab. In einigen Aufgaben besteht die Notwendigkeit, die Länge der Strecke anders zu definieren, wobei die Länge der Strecke auch von ihrer Richtung abhängen soll.

Für die Definition der Länge einer Strecke ist es bei diesem Vorhaben notwendig, eine Einheitslänge für jede Richtung anzugeben. Eine sehr interessante Definition dieser Art wurde am Ende des 19. Jahrhunderts von dem berühmten deutschen Mathematiker H. Minkowski vorgeschlagen. Diese Definition betrachten wir vor allem im Fall der Geometrie der Ebene.

Es sei eine beschränkte ebene konvexe Figur  $G$  gegeben, die symmetrisch bezüglich eines Punktes  $O$  ist (Abb. 85).

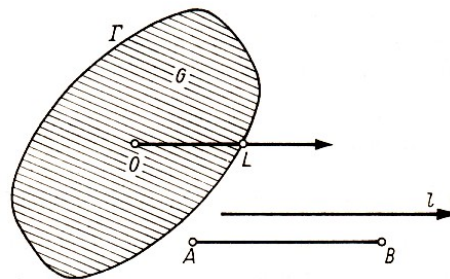


Abb. 85

Mit  $\Gamma$  bezeichnen wir die Kurve, die die Figur  $G$  begrenzt. Wir werden die Strecke  $OL$  genau dann Einheitsstrecke bezüglich der Richtung  $l$  nennen, wenn  $L$  in  $\Gamma$  liegt und die Gerade  $g_{OL}$  die Richtung  $l$  besitzt.<sup>12</sup>

Die Länge der Strecke  $AB$  bezüglich der neuen Längenmessung wird jetzt als das Verhältnis  $AB : OL$  definiert, wobei  $OL$  eine Einheitsstrecke parallel zu  $AB$  ist. (Falls der Punkt  $A$  mit dem Punkt  $B$  zusammenfällt, ist die Länge der Strecke  $AB$  natürlich gleich Null.)

Im weiteren Verlauf werden wir die Länge der Strecke  $AB$  bezüglich der neuen Längenmessung, die durch die Figur  $G$  definiert wird, mit  $l_G(AB)$  bezeichnen. Es gilt  $l_G(OM) = 1$  genau dann, wenn der Punkt  $M$  auf der Kurve  $\Gamma$  liegt.

Wenn der Punkt  $M$  im Innern der Figur  $G$  liegt, dann gilt  $l_G(OM) < 1$ ; liegt der Punkt  $M$  außerhalb der Figur  $G$ , so ist  $l_G(OM) > 1$ .<sup>13</sup>

Wenn die Figur  $G$  eine Kreisfläche ist, erhalten wir die übliche Definition der Länge, bei der die Länge einer Strecke nicht von ihrer Richtung abhängt.

Wir beweisen jetzt grundlegende Eigenschaften des neuen Längenbegriffes. Wie wir schon wissen, ist

$$l_G(AB) \geq 0$$

Außerdem gilt das Gleichheitszeichen in der letzten Beziehung dann und nur dann, wenn die Punkte  $A$  und  $B$  zusammenfallen. Es gilt

$$l_G(AB) = l_G(BA)$$

<sup>12</sup>Für die Gerade  $g_{OL}$  braucht kein Durchlaufsinne ausgezeichnet zu werden, da hier im Gegensatz zu Kapitel II nicht die Richtungen gerichteter Geraden betrachtet werden. Demzufolge sind hier Geraden schon dann gleichgerichtet, wenn sie parallel sind.

<sup>13</sup>Bezüglich der neuen Längenmessung ist  $\Gamma$  folglich ein Einheitskreis.

Wenn schließlich  $AB$  und  $CD$  parallele Strecken sind und  $AB : CD = k$  ist, dann gilt

$$l_G(AB) = k \cdot l_G(CD)$$

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch von der Konvexität der Figur  $G$  gemacht. Es zeigt sich, dass die Konvexität der Figur  $G$  die folgende, sehr wichtige Eigenschaft des neuen Längenbegriffs liefert:

Dreiecksungleichung. In jedem Dreieck  $ABC$  übertrifft die Länge einer der Seiten (bezüglich der Längenmessung, die durch die Figur  $G$  definiert ist) nicht die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.<sup>14</sup>

Beweis. Wir setzen

$$l_G(BC) = a, \quad l_G(AC) = b, \quad l_G(AB) = c$$

Wir bestimmen in der Figur  $G$  die "Radien"  $OP$  und  $OQ$ , die die gleiche Richtung wie die Strecken  $BC$  und  $CA$  besitzen (Abb. 86).

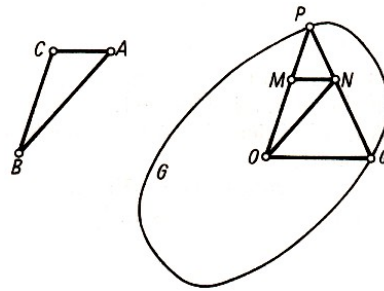


Abb. 86

Dann wählen wir auf der Strecke  $OP$  den Punkt  $M$  derart, dass  $OM : MP = a : b$  ist, und bestimmen  $N$  auf  $OQ$  derart, dass  $MN \parallel OQ$  gilt. Wenn wir die Ähnlichkeit der Dreiecke  $OPQ$  und  $MPN$  berücksichtigen, erhalten wir

$$l_G(OM) = OM : OP = \frac{a}{a+b}, \quad l_G(MN) = MN : OQ = MP : OP = \frac{b}{a+b}$$

Folglich ist

$$BC : OM = l_G(BC) : l_G(OM) = a : \frac{a}{a+b} = a+b,$$

$$CA : MN = l_G(CA) : l_G(MN) = b : \frac{b}{a+b} = a+b$$

Damit gilt  $BC : OM = CA : MN$  und  $\angle BCA \cong \angle OMN$ . Hieraus folgt, dass die Dreiecke  $BCA$  und  $OMN$  ähnlich (sogar ähnlich gelegen) sind und deshalb  $AF \parallel ON$  und  $AB : ON = a+b$  ist, d.h.

$$l_G(AB) : l_G(ON) = a+b$$

Also ist

$$l_G(ON) = \frac{l_G(AB)}{a+b} = \frac{c}{a+b}$$

<sup>14</sup>Im weiteren Verlauf werden wir die Dreiecksungleichung nicht brauchen, aber für den interessierten Leser führen wir ihren Beweis durch.

Die Punkte  $P$  und  $Q$  gehören zur Figur  $G$ ; infolge der Konvexität dieser Figur gehört die ganze Strecke  $PQ$  zu  $G$ , und insbesondere gehört der Punkt  $N$  zur Figur  $G$ . Daraus folgt, dass  $l_G(ON) \leq 1$ , d.h.  $\frac{c}{a+b} \leq 1$ , oder schließlich  $c \leq a + b$  ist. Das bedeutet gerade, dass

$$l_G(AB) \leq l_G(BC) + l_G(AC)$$

Eine Ebene, in der die Längenmessung durch eine konvexe zentralsymmetrische Figur definiert ist, nennt man eine Minkowskische Ebene. Analog ist der  $n$ -dimensionale Minkowskische Raum definiert, d.h. der Raum, in dem die Längenmessung durch einen konvexen zentralsymmetrischen Körper  $G$  definiert ist. Diesen Körper  $G$  nennt man auch Einheitskugel des Minkowskischen Raumes.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Aufgabe Borsuks im Minkowskischen Raum über. Die in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Aufgaben gehen durch Ersetzen der gewöhnlichen Ebene und des Raumes durch die Minkowskische Ebene bzw. den Minkowskischen Raum in diese über.

Bei der Überdeckung durch gestauchte Figuren und im Beleuchtungsproblem werden - wenn überhaupt - Längen paralleler Strecken verglichen; folglich hängt die Lösung dieser Aufgaben nicht davon ab, wie diese Längen definiert sind. Solche Aufgaben nennt man affin.

Anders verhält es sich mit dem Problem Borsuks. Bei diesem Problem soll eine Figur vom Durchmesser  $d$  in Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden. Es ist klar, dass der Durchmesser sowohl bei der gesamten Figur als auch bei ihren Teilen wesentlich davon abhängt, wie die Längenmessung definiert ist.

Zum Beispiel kann man bei der üblichen Längenmessung die Parallelogrammfläche in zwei Teile kleineren Durchmessers zerlegen (Abb. 12b). Betrachtet man diese Parallelogrammfläche in einer Minkowskischen Ebene, in der sie selbst die Rolle der Figur  $G$  spielt, dann ist der "Durchmesser" der ganzen Parallelogrammfläche und ihrer Teile in Abb. 12b offensichtlich gleich 2.

Das folgt daraus, dass in der betrachteten Minkowskischen Ebene die "Länge" jeder Seite und jeder Diagonalen der Parallelogrammfläche gleich 2 ist. Deshalb kann man im betrachteten Fall die Parallelogrammfläche nicht in drei Teile kleineren Durchmessers zerlegen. Aber eine Zerlegung in vier Teile kleineren Durchmessers ist möglich.

Damit hängt die Größe  $a(F)$  von der Wahl der Figur  $G$  ab, die in der Minkowskischen Ebene die Rolle des Einheitskreises spielt.

Wir werden deshalb die Größe  $a(F)$  bei der Betrachtung des Problems von Borsuk für eine Minkowskische Ebene (oder einen Minkowskischen Raum) im folgenden mit  $a_G(F)$  bezeichnen.

Das Problem der Ermittlung der Größe  $a_G(F)$  wurde im Jahre 1957 von Grünbaum [8] betrachtet, von welchem auch der grundlegende Teil des folgenden Satzes 11 stammt. Aber der Beweis Grünbaums ist schwieriger als der hier angeführte.

Satz 11. Für eine beliebige ebene beschränkte Figur  $F$ <sup>15</sup> gilt die Beziehung

$$a_G(F) \leq 4$$

außerdem wird das Gleichheitszeichen genau dann angenommen, wenn die Figuren  $G$  und  $F$  Parallelogrammflächen in Ähnlichkeitslage sind .

<sup>15</sup>Hier werden nur konvexe Figuren betrachtet. Übrigens gilt  $a_G(F) = 4$  bereits dann, wenn  $G$  und die konvexe Hülle von  $F$  Flächen von ähnlich gelegenen Parallelogrammen sind.

Beweis. Wir bemerken, dass die Ungleichung (\*) auch im Fall eines Minkowskischen Raumes gültig bleibt:

$$a_G(F) \leq b(F) \quad (****)$$

Das wird ebenso abgeleitet wie die Ungleichung (\*). Wenn also die Figur  $F$  keine Parallelogrammfläche ist, gilt  $a_G(F) \leq b(F) = 3$  nach Satz 5.

Es sei jetzt  $F$  eine Parallelogrammfläche mit den Ecken  $A, B, C, D$ . Durch den Mittelpunkt  $O$  der Figur  $G$  legen wir zwei Geraden, parallel zu den Diagonalen der Parallelogrammfläche  $F$ , und bezeichnen mit  $A_1C_1$  und  $B_2D_2$  die Strecken, die durch die Figur  $G$  auf diesen Geraden herausgetrennt werden. Wir konstruieren zu  $ABCD$  ähnlich gelegene Parallelogramme, für die  $A_1C_1$  bzw.  $B_2D_2$  Diagonalen sind (Abb. 87).

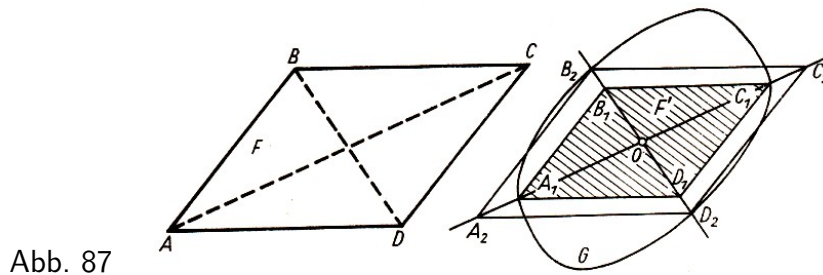


Abb. 87

Mit  $F'$  bezeichnen wir die Fläche des kleineren dieser beiden Parallelogramme, etwa mit der Diagonalen  $A_1C_1$ . Da die Parallelogrammflächen  $F$  und  $F'$  ähnlich sind, ist  $a_G(F) = a_G(F')$ , und deshalb können wir in der weiteren Überlegung statt  $F$  die Parallelogrammfläche  $F'$  betrachten.

Es ist leicht zu sehen, dass  $l_G(A_1C_1) = 2$  ist und dass somit der Durchmesser der Parallelogrammfläche  $F'$  nicht kleiner als 2 sein kann. (Wir bezeichnen als Durchmesser im folgenden eine Länge, die durch die Figur  $G$  bestimmt wird.)

Der Durchmesser der Parallelogrammfläche  $F'$  ist aber auch nicht größer als 2; denn sie ist vollständig in der Figur  $G$ , die den Durchmesser 2 besitzt, enthalten. Folglich ist der Durchmesser der Figur  $F'$  gleich 2.

Wir legen jetzt durch den Punkt  $O$  die Gerade  $p$ , die parallel zu den Seiten  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  ist, und bezeichnen mit  $M$  und  $N$  ihre Schnittpunkte mit dem Rand der Figur  $G$ . Wenn die Punkte  $M$  und  $N$  nicht auf den Seiten  $B_1C_1$  und  $A_1D_1$  der Parallelogrammfläche  $F'$  liegen (Abb. 88), dann ist die ganze Sechseckfläche  $A_1B_1MC_1D_1N$  in der Figur  $G$  enthalten.

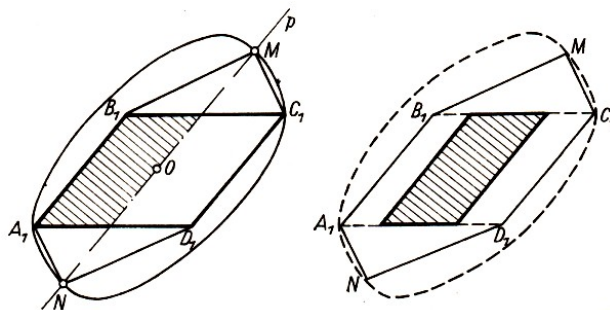


Abb. 88, 89

Hieraus ist leicht zu folgern, dass der Durchmesser jeder "Hälfte", in die die Gerade  $p$  das Parallelogramm  $F'$  teilt, kleiner als 2 ist (Abb. 89), so dass  $a_G(F') = 2$  gilt.

Wenn die Punkte  $M$  und  $N$  auf den Seiten der Parallelogrammfläche  $F'$  liegen, dann müssen die Geraden  $g_{B_1C_1}$  und  $g_{A_1D_1}$  Stützgeraden der Figur  $G$  sein; denn durch den Randpunkt  $M$

der Figur  $G$  muss eine Stützgerade hindurchgehen, und, jede Gerade, die verschieden von  $g_{B_1C_1}$  ist, zerlegt die Parallelogrammfläche  $F'$  und damit auch die Figur  $G$ . Auf diese Weise wird die ganze Figur  $G$  in den von den Geraden  $g_{B_1C_1}$  und  $g_{A_1D_1}$ ; bestimmten Streifen eingeschlossen (Abb. 90).

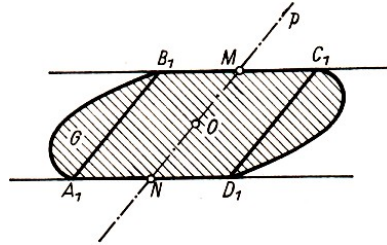


Abb. 90

Folglich ist  $a_G(F') = 2$ , oder die Figur  $G$  wird von dem Streifen, der durch die Geraden  $g_{B_1C_1}$  und  $g_{A_1D_1}$  bestimmt ist, eingeschlossen.

Analog finden wir, wenn wir eine Gerade  $q$  parallel zu den Seiten  $B_1C_1$  und  $A_1D_1$  durch  $O$  legen, dass  $a_G(F') = 2$  ist oder die Figur  $G$  in dem von den Geraden  $g_{A_1B_1}$  und  $g_{C_1D_1}$  bestimmten Streifen eingeschlossen ist.

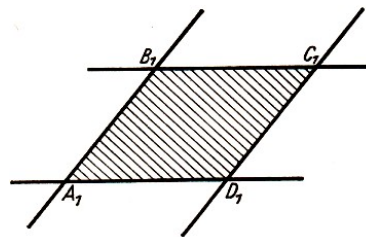


Abb. 91

Aus unserer Fallunterscheidung folgt, dass  $a_G(F') = 2$  ist oder die Figur in beiden genannten Streifen eingeschlossen ist (Abb. 91).

Im letzten Fall muss die Figur  $G$  mit der Parallelogrammfläche  $F'$  übereinstimmen.

Folglich ist entweder  $a_G(F) = a_G(F') = 2$ , oder die Figur  $G$  stimmt mit der Parallelogrammfläche  $F'$  überein, und dann ist, wie wir schon wissen,  $a_G(F) = a_G(F') = 4$ .

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten einen  $n$ -dimensionalen Minkowskischen Raum, dessen Längenmessung durch einen zentralsymmetrischen konvexen Körper  $G$  definiert ist.

In diesem Raum gilt für einen Körper  $F$  mit glattem Rand (mit Ausnahme von höchstens  $n$  Randpunkten) die Ungleichung  $a_G(F) \leq n + 1$  infolge der Ungleichung (\*\*\*) . Wenn  $F$  ein  $n$ -dimensionales Parallelepiped ist, dann gilt offensichtlich  $a_G(F) = 2^n$ . Die Ungleichung (\*\*\*) und die Vermutung Hadwigers liefern die folgende Vermutung:

Für einen beliebigen beschränkten Körper  $F$ , der im  $n$ -dimensionalen Minkowskischen Raum mit der Einheitskugel  $G$  liegt, gilt die Ungleichung

$$a_G(F) \leq 2^n$$

die Gleichung  $a_G(F) = 2^n$  gilt nur für den Fall, dass  $G$  und  $F$  ähnlich gelegene Parallelepipede sind.

Möglicherweise gilt die Beziehung

$$a_G(F) \leq b(G)$$



(vgl. Problem 15). Für den Fall  $n = 2$  sind diese Ungleichungen oben bewiesen worden. Aber schon für  $n = 3$  ist kein Beweis bekannt. Es gibt Figuren  $F$ , für die  $a_G(F) < a(F)$  ist. Wenn  $G$  ein Quadrat und  $F$  ein Kreis ist, dann sieht man leicht, dass  $a_G(F) = 2$  ist (Abb. 92), während  $a(F) = 3$  ist.

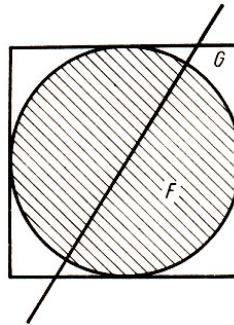


Abb. 92

### 3.2 § 18 Die Probleme von Erdős und Klee

Wir betrachten im  $n$ -dimensionalen Raum einen beliebigen Quader und bezeichnen mit  $M$  die Menge aller Eckpunkte dieses Parallelepipeds. Wenn  $n = 2$  ist, dann besteht die Menge  $M$  aus vier Punkten (Abb. 93); für  $n = 3$  besteht die Menge  $M$  aus acht Punkten (Abb. 94); im allgemeinen besteht die Menge  $M$  für beliebiges natürliches  $n$  aus  $2^n$  Punkten.

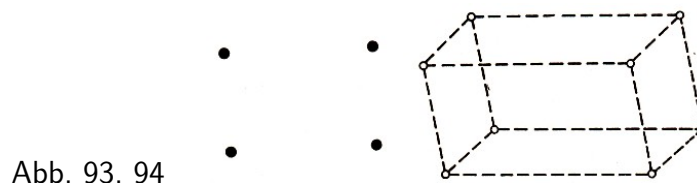


Abb. 93, 94

Wenn  $A, B, C$  drei beliebige Punkte der Menge  $M$  (d. h. drei beliebige Eckpunkte des  $n$ -dimensionalen Quaders sind), dann ist leicht einzusehen, dass die Größe  $\gamma$  von  $\angle ABC$  den Wert  $\pi/2$  nicht übertrifft; denn nehmen wir den Punkt  $B$  als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen positive Achsen die von  $B$  ausgehenden Kanten des Parallelepipeds enthalten (der Fall  $n = 3$  ist in Abb. 95 dargestellt), dann sind die Koordinaten von  $A$  und  $C$  nichtnegativ.

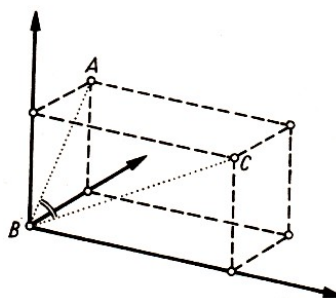


Abb. 95

Deshalb sind alle Koordinaten der durch  $\vec{BA}, \vec{BC}$  gebildeten Vektoren, ihr Skalarprodukt und  $\cos \angle ABC$  nichtnegativ, d.h.  $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$ .

Im  $n$ -dimensionalen Raum gibt es also eine Menge  $M$ , die aus  $2^n$  Punkten besteht (und zwar die Menge aller Eckpunkte eines Quaders), so dass für drei beliebig gewählte Punkte  $A, B, C$  dieser Menge die Größe von  $\angle ABC$  den Wert  $\frac{\pi}{2}$  nicht übertrifft.

Gibt es im  $n$ -dimensionalen Raum eine Menge dieser Eigenschaft, die mehr als  $2^n$  Elemente

enthält?

Dieses Problem wurde (ungefähr im Jahre 1950) von dem berühmten ungarischen Mathematiker P. Erdős [36] formuliert. Er sah voraus, dass die Antwort auf diese Frage negativ ist, d.h., dass eine solche Menge nicht aus mehr als  $2^n$  Elementen bestehen kann.

Mit dem Problem von Erdős ist noch ein Problem verwandt, das im Jahre 1960 in der Arbeit des amerikanischen Mathematikers Klee [14] gestellt wurde und auch aus der Untersuchung der Parallelepipede entsteht.

Wir bezeichnen wiederum mit  $M$  die Menge aller Eckpunkte eines Parallelepipeds, das nicht mehr unbedingt Quader sein muss. Wenn  $A$  und  $B$  zwei beliebige Punkte der Menge  $M$  sind, dann kann man zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Parallelepipeds finden, von denen eine den Eckpunkt  $A$  und die andere  $B$  enthält. Deshalb existieren zwei parallele Stützhyperebenen der Menge  $M$  (die Hyperebenen jener Seitenflächen), die durch  $A$  bzw.  $B$  gehen (Abb. 96).

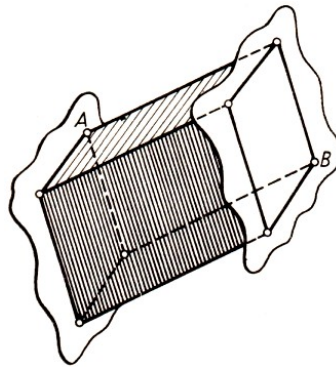


Abb. 96

Im  $n$ -dimensionalen Raum existiert also eine solche Menge  $M$ , die aus  $2^n$  Punkten derart besteht, dass zu zwei Punkten  $A$  und  $B$  dieser Menge auch zwei parallele Stützhyperebenen der Menge  $M$  existieren, die durch  $A$  bzw.  $B$  gehen.

Klee vermutete, dass im  $n$ -dimensionalen Raum keine Menge existiert, die die genannte Eigenschaft besitzt und aus mehr als  $2^n$  Elementen besteht (dabei werden nur solche Mengen betrachtet, die nicht ganz in einer Hyperebene liegen).

Die Beziehung, die zwischen dem Problem Klees und den in Kapitel II betrachteten Problemen besteht, ist nicht schwer zu erkennen. Es sei  $N$  eine Menge im  $n$ -dimensionalen Raum, die aus  $m$  Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_m$  besteht und die "Eigenschaft Klees" besitzt (d.h., für zwei beliebige Punkte  $A_i, A_j$  gibt es zwei parallele Stützhyperebenen, die durch diese Punkte gehen). Mit  $V$  bezeichnen wir die konvexe Hülle der Menge  $N$ . Dann gilt, wie unten gezeigt wird,  $b(V) = m$ .

Es seien  $A_i, A_j$  zwei beliebige Punkte der Menge  $N$  und  $\alpha, \beta$  zwei parallele Stützhyperebenen der Menge  $N$ , die durch  $A_i$  bzw.  $A_j$  gehen. Dann ist klar, dass  $\alpha$  und  $\beta$  auch Stützhyperebenen der Menge  $V$  sind.

Es sei jetzt  $V'$  ein gestauchtes Bild des Körpers  $V$ , und  $\alpha'$  und  $\beta'$  seien Stützhyperebenen des Körpers  $V'$ , parallel zu  $\alpha$  bzw.  $\beta$ .

Dann ist der Abstand zwischen den Hyperebenen  $\alpha'$  und  $\beta'$  kleiner als der Abstand zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  und deshalb können sich die beiden Punkte  $A_i, A_j$  nicht in dem "Streifen" befinden, den die Hyperebenen  $\alpha'$  und  $\beta'$  begrenzen.

Darüber hinaus kann der Körper  $V'$  höchstens einen der Punkte  $A_i, A_j$  enthalten. Folglich ist klar, dass der Körper  $V'$  nicht mehr als einen der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_m$  enthält. Somit müssen bei der Überdeckung des Körpers  $V$  mit gestauchten Bildern von  $V$  die Punkte  $A_1,$

$A_2, \dots, A_m$  in paarweise verschiedenen Körpern liegen, d.h.  $b(V) \geq m$ .

Wenn wir andererseits  $m$  Richtungen wählen, die die Eckpunkte  $A_1, A_2, \dots, A_m$  des Körpers  $V$  beleuchten, dann beleuchten sie offensichtlich die ganze Oberfläche des Polyeders  $V$ . Folglich ist  $c(V) \leq m$ , und damit ist  $b(V) \leq m$ . Aus dem Bewiesenen folgt schließlich die Gleichung  $b(V) = c(V) = m$ .

Man kann zeigen, dass die gefundene Beziehung zwischen dem Problem Klees und der Zahl  $b(V)$  bei der Lösung des Problems von Hadwiger nützlich ist.

Wenn man nämlich eine negative Lösung des Kleeschen Problems erhalten würde, d.h., wenn man eine Menge  $N$  konstruieren könnte, die die Eigenschaft Klees besitzt und aus mehr als  $2^n$  Punkten besteht, dann würde  $b(V) > 2^n$  für die konvexe Hülle  $V$  dieser Menge  $N$  gelten, d.h., wir würden eine negative Lösung des Problems von Hadwiger erhalten.

Aber eine positive Lösung des Kleeschen Problems bedeutet nur, dass  $b(V) \leq 2^n$  für spezielle Körper  $V$  ist, aber nicht unbedingt für beliebige konvexe  $n$ -dimensionale Körper. (Vgl. im Zusammenhang damit das Problem 11)

Wie steht es mit der Lösung der Probleme von Klee und Erdős? Im Jahre 1962 wurde von Danzer und Grünbaum [13] gezeigt, dass diese beiden Probleme eine positive Lösung besitzen, d.h., es gilt folgender

Satz 12. Eine Menge  $N$ , die im  $n$ -dimensionalen Raum liegt und die Eigenschaft von Erdős oder Klee besitzt, enthält nicht mehr als  $2^n$  Elemente.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass eine Menge  $N$ , die in einem  $n$ -dimensionalen Raum enthalten ist und die Eigenschaft von Erdős besitzt, auch die Eigenschaft von Klee hat.

Es sei  $N$  eine Menge, die aus den Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_m$  besteht und die Eigenschaft von Erdős besitzt. Wir wählen zwei beliebige Punkte  $A_i, A_j$  der Menge  $N$  und legen durch diese Punkte zwei zur Strecke  $A_i A_j$  senkrechte Hyperebenen (Abb. 97).

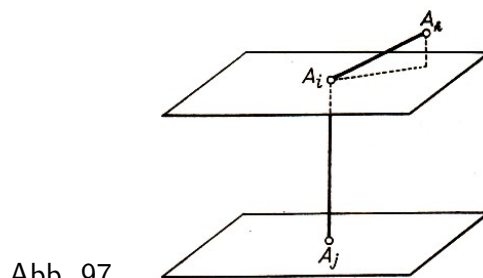


Abb. 97

Dann müssen diese Hyperebenen Stützhyperebenen der Menge  $N$  sein:

Wenn es in der Menge  $N$  einen Punkt  $A_k$  derart gibt, dass  $A_j$  und  $A_k$  in verschiedenen Halbräumen bezüglich der Hyperebene durch  $A_i$  liegen, dann ist der Winkel  $\angle A_j A_i A_k$  stumpf; das widerspricht der Eigenschaft von Erdős. Also gehen durch die Punkte  $A_i, A_j$  der Menge  $N$  zwei parallele Stützhyperebenen der Menge  $N$ , d.h.,  $N$  besitzt die Eigenschaft von Klee.

Es bleibt noch zu beweisen, dass jede Menge im  $n$ -dimensionalen Raum, die die Eigenschaft von Klee besitzt, nicht mehr als  $2^n$  Punkte enthält.

Es sei  $N$  eine Menge, die aus den Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_m$  besteht und die Eigenschaft von Klee besitzt. Mit  $V_1$  bezeichnen wir die konvexe Hülle der Menge  $N$ . Ferner bezeichnen wir mit  $V_2, \dots, V_m$  die Körper, die wir der Reihe nach aus  $V_1$  durch Verschiebung bezüglich  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_m}$  erhalten (Abb. 98).

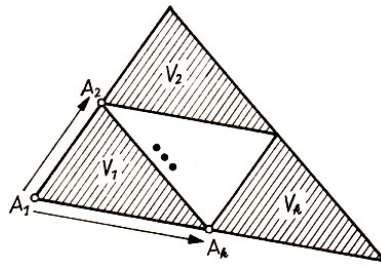


Abb. 98

Zunächst beweisen wir, dass die Körper  $V_1, V_2, \dots, V_m$  paarweise keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzen. Dazu betrachten wir die Körper  $V_i$  und  $V_j$ . Durch die Punkte  $A_i$  und  $A_j$  die zum Körper  $V_1$  gehören, legen wir zueinander parallele Stützhyperebenen  $\alpha$  und  $\beta$ . Zur Vereinfachung wollen wir diese Hyperebenen als "horizontal" ansehen; außerdem liege der Körper  $V_1$  "unterhalb" der Hyperebene  $\alpha$  und "oberhalb"  $\beta$  (Abb. 99).

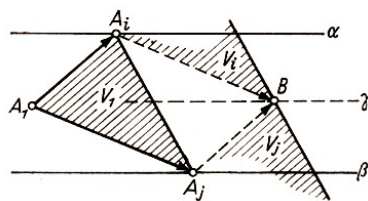


Abb. 99

Ferner wählen wir einen Punkt  $B$  derart, dass  $A_i A_1 A_j B$  ein Parallelogramm wird. Bei der Verschiebung bezüglich  $\overrightarrow{A_1 A_j}$  geht der Punkt  $A_i$  in  $B$  und die Hyperebene  $\alpha$  in die Hyperebene  $\gamma$  über, die durch  $B$  parallel zu  $\alpha$  verläuft;  $V_1$  geht dabei in den Körper  $V_j$  über, der somit "unterhalb" der Hyperebene  $\gamma$  liegt.

Analog geht bei der Verschiebung bezüglich  $\overrightarrow{A_1 A_i}$  der Punkt  $A_j$  in  $B$ , die Hyperebene  $\beta$  in die Hyperebene  $\gamma$  und  $V_1$  in den Körper  $V_i$  über, der somit "oberhalb" der Hyperebene  $\gamma$  liegt. Also liegen die inneren Punkte von  $V_i$  und  $V_j$  in verschiedenen Halbräumen bezüglich der Hyperebene  $\gamma$ , und daher besitzen  $V_i$  und  $V_j$  keinen gemeinsamen inneren Punkt.

Das gilt übrigens auch für  $i = 1$ , wenn man die Verschiebungen bezüglich  $\overrightarrow{A_1 A_j}$  und  $\overrightarrow{A_1 A_1}$  sowie zueinander parallele Stützhyperebenen durch  $A_1$  und  $A_j$  betrachtet.

Mit  $V$  bezeichnen wir jetzt den Körper, den man aus  $V_1$  durch Streckung mit dem Zentrum  $A_1$  und dem Koeffizienten 2 erhält. Wir zeigen, dass alle Körper  $V_1, V_2, \dots, V_m$  in  $V$  enthalten sind.

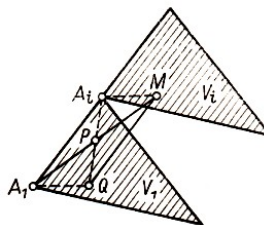


Abb. 100

Ist  $M$  ein Punkt der Menge  $V_i$ , dann gibt es einen solchen Punkt  $Q$  der Menge  $V_1$ , dass  $\overrightarrow{A_1 A_i}$  und  $\overrightarrow{Q M}$  denselben Vektor bestimmen (Abb. 100). Mit  $P$  bezeichnen wir den Mittelpunkt der Strecke  $MA_1$ . Dann stimmt der Punkt  $P$  auch mit dem Mittelpunkt der Strecke  $QA_1$  überein, und wegen der Konvexität der Menge  $V_1$  gehört der Punkt  $P$  zu  $V_1$ . Wegen  $A_1 M : A_1 P = 2$  liegt  $M$  in  $V$ , d.h., der Körper  $V_i$  ist in  $V$  enthalten.

Es sei jetzt  $v$  das Volumen des ( $n$ -dimensionalen) Körpers  $V_1$ ; da die Menge  $N$  nicht in einer

Hyperebene liegt, ist dann  $v \neq 0$ . Jeder der Körper  $V_2, \dots, V_m$  besitzt dieses Volumen  $v$ . Außerdem besitzen die Körper  $V_1, V_2, \dots, V_m$  paarweise keinen gemeinsamen inneren Punkt. Folglich ist das Volumen des Körpers, der sich aus den Körpern  $V_1, V_2, \dots, V_m$  zusammensetzt, gleich  $mv$ . Ferner ist das Volumen des Körpers  $V$ , den man (im  $n$ -dimensionalen Raum) aus  $V_1$  durch Streckung mit dem Koeffizienten 2 erhält, gleich  $2^n \cdot v$ .

Da der aus  $V_1, V_2, \dots, V_m$ , zusammengesetzte Körper in  $V$  enthalten ist, gilt  $mv \leq 2^n \cdot v$ . Schließlich erhalten wir wegen  $v \neq 0$  die geforderte Ungleichung  $m \leq 2^n$ .

### 3.3 § 19 Einige ungelöste Probleme

Zum Schluss formulieren wir Probleme, von denen einige schon früher erwähnt wurden und andere den erwähnten Problemen verwandt sind.

#### Problem 1

Wir beginnen mit dem grundlegenden Problem des ersten Teils, dem Problem Borsuks:

Es ist zu zeigen, dass jeder  $n$ -dimensionale Körper  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann, d.h., dass die Ungleichung  $a(F) \leq n + 1$  gilt.

Es genügt, dieses Problem für konvexe Körper zu lösen, d.h., es genügt zu zeigen, dass jeder  $n$ -dimensionale konvexe Körper mit dem Durchmesser  $d$  in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann.

Wir erinnern daran, dass dieses Problem für  $n \geq 4$  nicht gelöst ist.

#### Problem 2

Es gibt noch ein Problem, das völlig äquivalent ist mit dem Problem Borsuks und mit der Betrachtung der Figuren konstanter Breite zusammenhängt.

Es sei  $F$  eine ebene beschränkte Figur und  $l$  eine Gerade. Wir konstruieren zwei Stützgeraden der Figur  $F$ , die senkrecht zu  $l$  sind; der Abstand  $h$  zwischen diesen Stützgeraden wird als Breite der Figur  $F$  bezüglich der Richtung von  $l$  bezeichnet (Abb. 101).

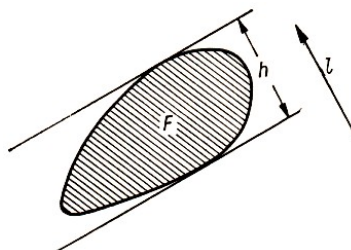


Abb. 101

Eine konvexe Figur  $F$  nennt man genau dann Figur konstanter Breite, wenn sie bezüglich jeder Richtung die Breite  $d$  hat. Außer dem Kreis mit dem Durchmesser  $d$  gibt es unendlich viele andere Figuren konstanter Breite; die einfachste von ihnen ist das Reuleaux-Dreieck, das durch drei Bögen von Kreisen mit dem Radius  $d$  begrenzt wird (Abb. 102).

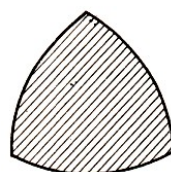


Abb. 102

Analog nennt man einen räumlichen beschränkten konvexen Körper genau dann einen Körper konstanter Breite, wenn seine Breite (d.h. der Abstand zwischen zwei parallelen Stützebenen) bezüglich aller Richtungen den gleichen Wert besitzt.

Es ist leicht einzusehen, dass jede Figur (oder jeder Körper) konstanter Breite  $d$  den Durchmesser  $d$  besitzt. Die Umkehrung gilt natürlich nicht: Eine Figur mit dem Durchmesser  $d$  ist nicht notwendig eine Figur konstanter Breite  $d$ . Aber es gilt der folgende wichtige Satz (vgl. etwa das Buch von Bonnesen und Fenchel [2]):

Jede Figur mit dem Durchmesser  $d$  kann in eine Figur konstanter Breite  $d$  eingebettet werden.

Eine analoge Aussage gilt auch im Raum (oder im  $n$ -dimensionalen Raum): Jeder Körper mit dem Durchmesser  $d$  kann in einen Körper konstanter Breite  $d$  eingebettet werden.

Aus dem formulierten Satz folgt unmittelbar, dass es genügt, die Vermutung Borsuks für Körper konstanter Breite zu untersuchen. Wir kommen somit zu folgendem Problem, das mit dem Problem Borsuks äquivalent ist.

Es ist zu beweisen, dass jeder  $n$ -dimensionale Körper konstanter Breite  $d$  in  $n + 1$  Teile mit einem Durchmesser  $< d$  zerlegt werden kann.

Im Zusammenhang mit den Körpern konstanter Breite bemerken wir noch, dass Lenz [17] im Jahre 1955 den folgenden Satz bewiesen hat.

Kein  $n$ -dimensionaler Körper konstanter Breite kann in  $n$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden. Wenn aber ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper mit glattem Rand kein Körper konstanter Breite ist, dann kann er in  $n$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden.

### Problem 3

Das Problem 1 (oder das ihm gleichwertige Problem 2) ist anscheinend außerordentlich schwierig. In Verbindung damit kommen wir auf ein anderes (möglicherweise nicht viel einfacheres) Problem:

Es ist zu beweisen, dass jedes  $n$ -dimensionale konvexe Polyeder, das den Durchmesser  $d$  hat, in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann.

Für  $n \geq 4$  ist das Problem nicht gelöst. Bei der Ermittlung des Durchmessers eines Polyeders genügt es, nur seine Eckpunkte zu berücksichtigen. Deshalb ist das gestellte Problem äquivalent zu:

Im  $n$ -dimensionalen Raum ist eine endliche Punktmenge gegeben, die den Durchmesser  $d$  besitzt. Es ist zu beweisen, dass diese Menge in  $n + 1$  Teilmengen zerlegt werden kann, von denen jede einen Durchmesser  $< d$  hat.

Dieses Problem besitzt auch unabhängig vom allgemeinen Problem Borsuks Interesse. Eine einfache Lösung dieses Problems für  $n = 2$  folgt aus einem Satz, den 1946 Erdős [35] bewiesen hat (vgl. [29]). Für  $n = 3$  erhielten 1956 die ungarischen Mathematiker Heppes und Revesz [31] (also nach dem Erscheinen der Arbeit Egglestons [32]) die Lösung dieses Problems, die bedeutend einfacher als die allgemeine Lösung des Problems Borsuks für  $n = 3$  ist, die Eggleston bzw. Grünbaum angegeben haben.

Für  $n \geq 4$  ist das Problem nicht gelöst.

**Problem 4**

Aus dem Beweis des Satzes 1 ist leicht zu folgern, dass jede ebene Figur mit dem Durchmesser  $d$  in drei Teile zerlegt werden kann, deren Durchmesser nicht größer als  $\frac{d\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660d$  ist, da aus der Gleichung  $l(PL) = d$  leicht folgt, dass  $l(PQ) = \frac{d\sqrt{3}}{2}$  ist (vgl. Abb. 18).

Diese Abschätzung der Durchmesser der Teile ist nach [11] die beste, da offensichtlich ein Kreis mit dem Durchmesser  $d$  nie in drei Teile zerlegt werden kann, deren Durchmesser kleiner als  $\frac{d\sqrt{3}}{2}$  sind. Denn ein Teil, der einen Durchmesser  $< \frac{d\sqrt{3}}{2}$  hat, schneidet aus dem Kreis eine abgeschlossene Menge [1] heraus, für die die Punkte maximalen Abstandes einen Zentriwinkel bestimmen, dessen Größe kleiner als  $120^\circ$  ist; deshalb können drei solche Teile den Kreis nicht überdecken.

Wir bemerkten, dass die Abschätzung

$$\frac{\sqrt{6129030 - 937419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}}d \approx 0,9887d$$

nicht die beste ist. Das folgende Problem besteht darin, beim Problem der Zerlegung eines dreidimensionalen Körpers mit dem Durchmesser  $d$  in Teile kleineren Durchmessers die beste Abschätzung für die Durchmesser der Teile zu finden.

Es ist also eine solche Zahl  $\alpha < 1$  zu bestimmen, dass jeder dreidimensionale Körper mit dem Durchmesser  $d$  in vier Teile mit Durchmessern  $\leq \alpha d$  zerlegt werden kann und dass ein dreidimensionaler Körper mit dem Durchmesser  $d$  existiert, der nicht in vier Teile mit Durchmessern  $< \alpha d$  zerlegt werden kann.

Der amerikanische Mathematiker Gale [11] vermutete 1953, dass  $\alpha = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{\sqrt{6}} \approx 0,888$  ist. Diese Vermutung ist bis jetzt weder bewiesen noch widerlegt worden.

**Problem 5**

Dieses Problem ist in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung des Borsukschen Problems.<sup>16</sup>

Wir nennen bei einem  $n$ -dimensionalen beschränkten Körper den Radius seiner  $n$ -dimensionalen umbeschriebenen Kugel (der kleinsten ihn enthaltenden Kugel) seinen Radius. Im allgemeinen ist der Radius eines Körpers ungleich der Hälfte seines Durchmessers. Beim gleichseitigen Dreieck sind z.B. der Radius  $r$  und der Durchmesser  $d$  durch die Beziehung  $d = r\sqrt{3}$  verknüpft.

Das folgende Problem besteht darin zu zeigen, dass jeder  $n$ -dimensionale Körper mit dem Durchmesser  $d$  in  $n + 1$  Teile mit Radien  $< \frac{d}{2}$  zerlegt werden kann.

Es ist klar, dass das eine Verschärfung des Borsukschen Problems ist, da jeder Körper mit einem Radius  $< \frac{d}{2}$  offensichtlich einen Durchmesser  $< d$  hat.

Wenn die kleinste Zahl der Teile mit einem Radius  $< \frac{d}{2}$ , in die der gegebene Körper  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  zerlegt werden kann, mit  $a'(F)$  bezeichnet wird, dann kann das Problem wie folgt formuliert werden:

Es ist zu zeigen, dass für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen Körper die Ungleichung  $a'(F) \leq n + 1$  gilt. Dass das aufgestellte Problem eine Verschärfung des Borsukschen Problems ist, äußert sich in der Ungleichung  $a(F) \leq a'(F)$ .

<sup>16</sup>Andere Varianten des Borsukschen Problems und ungelöste Probleme kann der Leser in einer interessanten Übersicht Grünbaums [10] finden.



Für  $n = 2$  ergibt die Lösung dieses Problems für  $a'(F)$  denselben Wert wie für  $a(F)$  im Satz 1: Es ist leicht zu sehen, dass die Radien der drei Teile, in die das regelmäßige Sechseck in Abb. 18 zerlegt wird, gleich  $\frac{d\sqrt{3}}{4} < \frac{d}{2}$  sind.

Für  $n = 3$  ist dieses Problem nicht gelöst. (Die von Grünbaum angegebene Zerlegung - Beweis von Satz 3 - ergibt keine Radien der Teile kleiner  $\frac{d}{2}$ .)

Für eine  $n$ -dimensionale Kugel mit dem Durchmesser  $d$  ist eine Zerlegung in  $n + 1$  Teile mit Radien  $< \frac{d}{2}$  möglich: Es genügt, eine Zerlegung zu nehmen, die analog der in Abb. 28 dargestellten Zerlegung ist.

### Problem 6

Es seien  $F$  und  $G$  zwei  $n$ -dimensionale beschränkte Körper. Der Körper  $G$  hat nach Definition eine kleinere Breite als der Körper  $F$  genau dann, wenn bezüglich jeder Richtung  $l$  die Breite des Körpers  $G$  kleiner ist als die Breite des Körpers  $F$ .

Die kleinste Anzahl von Teilen kleinerer Breite, in die der gegebene Körper  $F$  zerlegt werden kann, bezeichnen wir mit  $b'(F)$ . Offensichtlich gilt  $a(F) \leq b'(F) \leq b(F)$ . Das folgende Problem besteht darin zu zeigen, dass ein beliebiger  $n$ -dimensionaler Körper  $F$  in  $2^n$  Teile kleinerer Breite zerlegt werden kann, d.h.  $b'(F) \leq 2^n$ .

Dieses Problem ist affin, d.h., die Größe  $b'(F)$  ändert sich bei affinen Abbildungen des Körpers  $F$  nicht; wie wir wissen, haben die Größen  $a(F)$  und  $a'(F)$  diese Eigenschaft nicht.

### Problem 7

Für welche Klasse konvexer Körper gelten die Gleichungen

$$a(F) = b'(F) = b(F)$$

Sind diese Gleichungen insbesondere für Körper konstanter Breite wahr?

Man soll nicht glauben, dass  $b'(F)$  und  $b(F)$  trivialerweise übereinstimmen, dass also Teile kleinerer Breite und Teile kleineren Außenmaßes immer zusammenfallen. Wenn beispielsweise  $F$  eine Kreisfläche und  $G$  ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck ist (Abb. 53), dann ist  $G$  ein Teil kleinerer Breite, aber das Außenmaß des Teiles  $G$  ist gleich 1.

### Problem 8

Als folgendes Problem wiederholen wir die Vermutung Hadwigers:

Es ist zu zeigen, dass jeder  $n$ -dimensionale beschränkte konvexe Körper  $F$  mit  $2^n$  gestauchten Körpern überdeckt werden kann (oder, was dasselbe ist, mit  $2^n$  Teilen kleineren Außenmaßes überdeckt werden kann), d.h.  $b(F) \leq 2^n$ . Es ist auch zu zeigen, dass die Gleichung  $b(F) = 2^n$  nur für  $n$ -dimensionale Parallelepipede gilt.

Satz 5 liefert die Lösung dieser Probleme für  $n = 2$ . Schon für  $n = 3$  ist die Lösung unbekannt. Die Lösung dieses Problems ist sogar für dreidimensionale Polyeder unbekannt:

Es ist zu zeigen, dass ein beliebiges konvexes dreidimensionales Polyeder  $M$  mit acht gestauchten Polyedern (wenn  $M$  kein Parallelepiped ist, dann mit sieben Polyedern) überdeckt werden kann.

### Problem 9

Satz 7 erlaubt es, dem Problem 8 eine andere Fassung zu geben, die äquivalent zur vorigen ist.

Es ist zu zeigen, dass der Rand eines  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körpers bezüglich  $2^n$  Richtungen beleuchtet werden kann, d.h.  $c(F) \leq 2^n$ . Es ist außerdem zu zeigen, dass die Gleichung  $c(F) = 2^n$  nur für  $n$ -dimensionale Parallelepipede gilt.

Dieses Problem ist schon für  $n = 3$  und selbst für dreidimensionale Polyeder ungelöst geblieben:

Es ist zu zeigen, dass der Rand eines beliebigen konvexen dreidimensionalen Polyeders  $M$  bezüglich acht Richtungen (wenn  $M$  kein Parallelepiped ist, bezüglich sieben Richtungen) beleuchtet werden kann.

### Problem 10

Wie wir wissen, gilt  $c(F) = n + 1$  für  $n$ -dimensionale beschränkte konvexe Körper, die nicht mehr als  $n$  Randpunkte mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyperebene besitzen. In Verbindung damit entstehen folgende Probleme:

Ist für jeden  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$ , der  $n + 1$  Randpunkte mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyperebene besitzt, die Gleichung  $c(F) = n + 1$  richtig? (Für  $n = 2$  wird durch Satz 6 eine bestätigende Antwort gegeben.)

Ist für jeden  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$ , bei dem die Menge aller Randpunkte mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyperebene eine Dimension  $\leq n - 3$  besitzt, die Gleichung  $c(F) = n + 1$  erfüllt?

Gilt für jeden dreidimensionalen beschränkten konvexen Körper  $F$ , der endlich viele Randpunkte mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyperebene besitzt, die Gleichung  $c(F) = 4$ ?

### Problem 11

Welche  $n$ -dimensionalen beschränkten und konvexen Körper  $F$  ( $n \geq 2$ ) besitzen folgende Eigenschaft:

Es gibt auf dem Rand von  $F$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{c(F)}$  derart, dass keine zwei dieser Punkte bezüglich ein und derselben Richtung beleuchtet werden können.

Die  $n$ -dimensionalen Parallelepipede besitzen diese Eigenschaft, die  $n$ -dimensionalen Kugeln jedoch nicht (da dort je zwei Randpunkte, die nicht Endpunkte eines Durchmessers sind, von einer Richtung beleuchtet werden).

Wir bemerken, dass für Körper mit den oben angegebenen Eigenschaften das Problem 9 gelöst ist:

Dazu bezeichnen wir mit  $M$  ein Polyeder mit den Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_{c(F)}$ . Da  $M$  im Körper  $F$  enthalten ist, können auch beim Polyeder  $M$  nicht zwei Ecken bezüglich ein und derselben Richtung beleuchtet sein.

Wenn wir "Pyramiden" des Polyeders  $M$  mit den Spitzen  $A_i$  und  $A_j$  abschneiden und eine "Pyramide" so verschieben, dass ihre verschobene Spitze mit der Spitze der anderen zusammenfällt, dann enthält die verschobene "Pyramide" keinen inneren Punkt der anderen (anderenfalls würde eine Richtung existieren, bezüglich der beide Ecken  $A_i, A_j$  beleuchtet sind).

Deshalb wird das Innere der verschobenen "Pyramide" vom Inneren der anderen "Pyramide"

durch eine Hyperebene  $\Gamma$  getrennt. Wenn jetzt durch die Ecken  $A_i$  und  $A_j$  Hyperebenen gelegt werden, die parallel zu  $\Gamma$  sind, dann sind diese Hyperebenen Stützhyperebenen für das Polyeder  $M$ .

Somit besitzt die Menge der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{c(F)}$  die Eigenschaft von Klee, und deshalb gilt  $c(F) \leq 2^n$  nach Satz 12.

### Problem 12

In Verbindung mit Satz 10 entstehen folgende Fragen:

Welcher Bedingung muss ein unbeschränkter konvexer  $n$ -dimensionaler Körper genügen, damit für ihn die Größe  $c(F)$  einen endlichen Wert annimmt?

Unter welcher Bedingung gilt für einen unbeschränkten konvexen Körper  $F$  die Gleichung  $b(F) = c(F)$ ?

Für ebene Figuren macht es keine Schwierigkeit, die Lösung anzugeben. In diesem Fall nimmt die Größe  $c(F)$  immer einen endlichen Wert an und insbesondere den Wert 2, wenn der Rand der Figur  $F$  zwei parallele Strahlen enthält, und den Wert 1 in allen übrigen Fällen (wenn nur  $F$  nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt; ist  $F$  eine Ebene, dann hat das Problem der Beleuchtung keinen Sinn).

Für  $n \geq 3$  sind die genannten Probleme nicht gelöst.

### Problem 13

Im  $n$ -dimensionalen Raum bezeichnen wir mit  $c'(F)$  die kleinste Anzahl der punktförmigen Lichtquellen, durch welche man von außen (Abb. 103) den ganzen Rand eines  $n$ -dimensionalen konvexen Körpers  $F$  beleuchten kann.

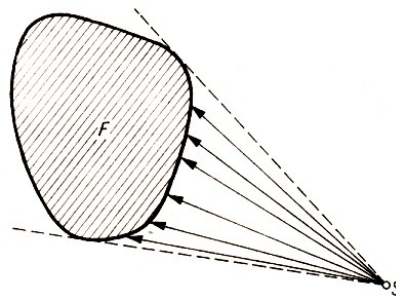


Abb. 103

Wie P. S. Soltan zeigte, genügt die Größe  $c'(F)$  den Ungleichungen  $c(F) \leq c'(F) \leq b(F)$ , so dass für beschränkte konvexe Körper alle drei Größen  $c(F)$ ,  $c'(F)$ ,  $b(F)$  übereinstimmen.

Für unbeschränkte Körper stimmt die Größe  $c'(F)$  im allgemeinen nicht mit den beiden Größen  $b(F)$  und  $c(F)$  überein. Außerdem hat P. S. Soltan bewiesen (vgl. [22]), dass  $c'(F)$  für unbeschränkte Körper  $F$  genau dann endlich ist, wenn  $F$  fast konisch ist. In Verbindung damit entstehen folgende Fragen:

Unter welcher Bedingung gelten die Gleichungen  $c'(F) = c(F)$  bzw.  $c'(F) = b(F)$ ?

Für  $n = 2$  ist dieses Problem von W. N. Wisitei [5] gelöst worden: Er zeigte, dass  $c'(F) = b(F)$  für beliebige ebene unbeschränkte Figuren gilt.

### Problem 14

Wir bezeichnen mit  $b''(F)$  die kleinste Anzahl der konvexen Körper, die man aus einem gegebenen  $n$ -dimensionalen konvexen Körper  $F$  durch Verschiebung erhält und die die Eigenschaft

besitzen, dass jeder Punkt von  $F$  im Inneren eines verschobenen Körpers liegt.

Die Aufgabe der Bestimmung der Größe  $b''(F)$  wurde im Jahre 1954 vom deutschen Mathematiker F. W. Levi [15] gestellt. Er zeigte in [16], dass für eine ebene beschränkte konvexe Figur, die keine Parallelogrammfläche ist,  $b''(F) = 3$  und für die Parallelogrammfläche  $b''(F) = 4$  ist. Wie P. S. Soltan in [22] zeigte, genügt die Größe  $b''(F)$  den Ungleichungen  $c(F) \leq b''(F) \leq b(F)$ , so dass für beschränkte konvexe Körper die Größen  $b(F)$ ,  $c(F)$ ,  $b''(F)$ ,  $c'(F)$  übereinstimmen. Deshalb folgt Satz 5 unmittelbar aus dem oben formulierten Satz von Levi. Für unbeschränkte Körper stimmt die Größe  $b''(F)$  im allgemeinen nicht mit einer der Größen  $b(F)$ ,  $c(F)$ ,  $c'(F)$  überein. In Verbindung damit entstehen folgende Fragen:

Welcher Bedingung muss ein unbeschränkter konvexer  $n$ -dimensionaler Körper  $F$  genügen, damit für ihn die Größe  $b''(F)$  einen endlichen Wert annimmt? Unter welchen Bedingungen gelten die Gleichungen  $b''(F) = b(F)$ ,  $b''(F) = c(F)$  bzw.  $b''(F) = c'(F)$ ?

### Problem 15

Wir erinnern an Probleme, die mit der Minkowskischen Geometrie zusammenhängen:

Es ist zu zeigen, dass für einen beliebigen beschränkten Körper  $F$  im  $n$ -dimensionalen Minkowskischen Raum mit der Einheitskugel  $G$  die Ungleichung

$$a_G(F) \leq 2^n$$

gilt, außerdem gilt die Gleichung  $a_G(F) = 2^n$  nur in dem Fall, dass  $G$  und  $F$  ähnlich gelegene Parallelepipede sind.

Gilt für einen beliebigen Körper  $F$  die Ungleichung  $a_G(F) \leq b(G)$ ?

Wir überlassen es dem Leser, die Probleme 2-5 für einen Minkowskischen Raum umzuformulieren.

### Problem 16

Es sei  $F$  ein beschränkter konvexer  $n$ -dimensionaler Körper. Mit  $i(F)$  bezeichnen wir die größte der ganzen Zahlen, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Es existieren solche Körper  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  die man aus  $F$  mit Hilfe von Verschiebungen erhält, die sich paarweise nicht überschneiden (d.h., sie besitzen paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte) und von denen jeder wenigstens einen gemeinsamen Punkt mit dem Körper  $F$  hat.

Wenn beispielsweise  $F$  eine Kreisfläche ist, dann ist  $i(F) = 7$  (Abb. 104) und wenn  $F$  eine Parallelogrammfläche ist, dann ist  $i(F) = 9$  (Abb. 105); in beiden Fällen stimmt eine der Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  mit der Ausgangsfigur  $F$  überein (in den Abbildungen schraffiert), und die übrigen "umschließen" sie.

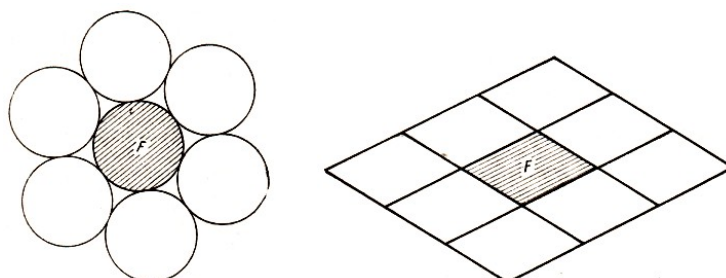


Abb. 104; 105

Im Jahre 1961 bewies Grünbaum in [9] folgenden Satz:

Wenn  $F$  eine ebene beschränkte konvexe Figur ist, die keine Parallelogrammfläche ist, dann gilt  $i(F) = 7$ , wobei stets eine der Figuren  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  mit der Ausgangsfigur  $F$  übereinstimmt. Außerdem sind folgende Ungleichungen für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen beschränkten konvexen Körper bekannt:

1.  $i(F) \geq n^2 + n + 1$ ; die Gleichheit gilt z.B. für ein  $n$ -dimensionales Simplex (Grünbaum [9]);
2.  $i(F) \leq 3^n$ ; die Gleichheit gilt nur für  $n$ -dimensionale Parallelepipede (Hadwiger [27]).

In Verbindung damit wurde von Grünbaum folgendes Problem aufgeworfen:

Es ist zu zeigen, dass die Größe  $i(F)$  immer nur ungerade Werte annimmt, außerdem existiert für eine beliebige ungerade Zahl  $k$ , die zwischen  $n^2 + n + 1$  und  $3^n$  liegt, ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper  $F$ , der der Bedingung  $i(F) = k$  genügt.

### Problem 17

Wir wollen kurz sagen, dass die Figuren  $G_1, G_2, \dots, G_k$  die Figur  $F$  umschließen, wenn jede Linie, die von einem beliebigen Punkt der Figur  $F$  ausgeht und sich ins Unendliche erstreckt, unbedingt einen Punkt mit einer der Figuren  $G_1, G_2, \dots, G_k$  gemeinsam hat.

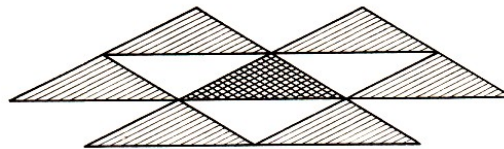


Abb. 106

Darüber hinaus bezeichnen wir für einen beliebigen  $n$ -dimensionalen konvexen Körper  $F$  mit  $e(F)$  die kleinste ganze Zahl, die folgende Eigenschaft besitzt:

Es existieren solche Körper  $F_1, F_2, \dots, F_{e(F)}$ , die man aus  $F$  durch Verschiebung erhält, von denen sich keiner mit dem Körper  $F$  überschneidet, und die außerdem den Körper  $F$  umschließen.

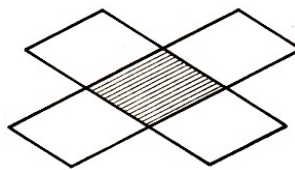


Abb. 107

Grünbaum zeigte im Jahre 1961 in [9], dass für eine ebene konvexe Figur  $F$ , die keine Parallelogrammfläche ist,  $e(F) = 6$  (Abb. 104, 106), aber für eine Parallelogrammfläche  $e(F) = 4$  ist (Abb. 107).

Welche Werte kann die Größe  $e(F)$  für  $n$ -dimensionale konvexe Körper annehmen?

Für  $n \geq 3$  sind keine Resultate bekannt.

## 4 Anmerkungen

[1] (zu S. 5) Die im Text angegebene Definition des Durchmessers einer Figur setzt implizit voraus, dass jede "Figur", die einen Durchmesser besitzt, eine abgeschlossene Menge darstellt (d.h., dass zu einer solchen Figur alle ihre Randpunkte gehören).

Wenn  $F$  beispielsweise ein offener Kreis vom Durchmesser  $d$  ist (d.h. das Innere eines Kreises vom Durchmesser  $d$ ), dann ist das Supremum der Abstände zwischen zwei Punkten der Figur  $F$  gleich  $d$ , aber in diesem Fall gibt es keine zwei Punkte der Figur  $F$ , deren Abstand genau gleich  $d$  ist.

Wenn wir aber zur Figur  $F$  alle Randpunkte hinzunehmen (d.h., einen abgeschlossenen Kreis bzw. die Kreisfläche betrachten), dann wird dieses Supremum angenommen: Man wird zwei Punkte  $A$  und  $B$  finden, deren Abstand voneinander gleich  $d$  ist.

Wenn  $F$  im allgemeinen eine abgeschlossene beschränkte Menge (in der Ebene oder im euklidischen Raum beliebiger Dimension) ist, dann findet man zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Figur  $F$ , deren Abstand maximal ist. Denn sind  $M$  und  $N$  zwei beliebige Punkte der Menge  $F$  und  $a(M, N)$  deren Abstand, dann ist die Funktion  $a(M, N)$  bezüglich  $M$  und  $N$  stetig.

Aber jede stetige Funktion (im gegebenen Fall von zwei Variablen  $M, N$ ), deren Argumente in einer abgeschlossenen beschränkten Menge liegen, nimmt ihr Maximum (Minimum) an.

Somit findet man zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Figur  $F$  derart, dass  $a(A, B) \geq a(M, N)$  für beliebige Punkte  $M, N$  der Figur  $F$  ist. Der Abstand  $d = a(A, B)$  zwischen derartigen Punkten stellt gerade den Durchmesser der Menge  $F$  dar.

[2] (zu S. 6) Hier ist die Rede von der Zerlegung einer Figur in Teile und von den Durchmessern dieser Teile.

In Übereinstimmung mit der vorigen Anmerkung werden wir die Teile, in die die Figur zerlegt wird, wieder als abgeschlossene Mengen ansehen. Deshalb wird der im Text erläuterte Satz in folgender Weise präzisiert:

Wenn die Kreisfläche  $F$  mit dem Durchmesser  $d$  auf irgendeine Art als Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen dargestellt wird, dann besitzt eine Teilmenge gerade diesen Durchmesser  $d$ .

Die Überlegung, die auf S. 6 angestellt wird, gibt natürlich nicht den vollständigen Beweis dieser Behauptung. Der genaue Beweis sieht folgendermaßen aus.

Mit  $H_1$  und  $H_2$  bezeichnen wir die betrachteten abgeschlossenen Teilmengen (so dass ihre Vereinigung  $H_1 \cup H_2$  die gesamte Kreisfläche ergibt). Die Punkte der Menge  $H_1$ , die auf dem zugehörigen Kreis liegen, stellen eine gewisse Menge  $K_1$  dar; analog ergibt sich die Menge  $K_2$ . Der Kreis stellt somit die Vereinigung der beiden abgeschlossenen Teilmengen  $K_1$  und  $K_2$  dar. Wenn eine Menge, beispielsweise  $K_2$  leer ist (d.h. keine Punkte enthält), dann fällt  $K_1$  mit dem Kreis zusammen; deshalb hat die Menge  $K_1$  und somit  $H_1$  den Durchmesser  $d$ .

Wenn beide Mengen  $K_1, K_2$  nicht leer sind, dann haben sie unbedingt einen gemeinsamen Punkt  $A$  (denn der Kreis ist zusammenhängend, und deshalb kann man ihn nicht als Vereinigung zweier durchschnittsfremder abgeschlossener Teilmengen darstellen).

Wir bezeichnen den Punkt, der dem Punkt  $A$  diametral gegenüberliegt, mit  $B$ , und der Punkt  $B$  liege etwa in der Menge  $K_2$ . Dann enthält  $K_2$  die Punkte  $A$  und  $B$ . Folglich besitzt die Menge  $K_2$  und somit  $H_2$  den Durchmesser  $d$ . In jedem Fall besitzt wenigstens eine der Mengen  $H_1, H_2$  den Durchmesser  $d$ .

[3] (zu S. 7) Wir machen noch eine Anmerkung zur "Zerlegung" einer Figur. Das Wort "Zerlegung" kann man in dem Sinn verstehen, dass die Figur  $F$  die Vereinigung gewisser abgeschlossener Teilmengen ist:

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m$$

(vgl. Anmerkung [2]).

In diesem Fall sprechen die Mathematiker gewöhnlich davon, dass die Mengen  $H_1, H_2, \dots, H_m$  eine Überdeckung der Figur  $F$  bilden. Aber am besten ist der Ausdruck "Zerlegung" in diesem Sinn zu verstehen, dass die abgeschlossenen Mengen  $H_1, H_2, \dots, H_m$  nicht nur eine Überdeckung der Figur  $F$  darstellen, sondern außerdem einander nicht "überlappen", d.h., sie besitzen paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte.

Es ist leicht einzusehen, dass das Problem der Zerlegung einer Figur in Teile kleineren Durchmessers unabhängig davon ist, welche der beiden Auffassungen wir dem Ausdruck "Zerlegung" verleihen. Denn stellt die Figur  $F$  die Vereinigung einiger ihrer abgeschlossenen Teilmengen dar:

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m$$

(es ist möglich, dass sie einander überlappen), dann können wir diese Teile, die den Durchmesser der Teile nicht vergrößern, so "ausbessern", dass sie einander nicht überlappen. Die Mengen<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} &H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \dots \cup H_m), \\ &H_2 \setminus (H_3 \cup \dots \cup H_m), \\ &\dots \\ &H_{m-2} \setminus (H_{m-1} \cup H_m), \\ &H_{m-1} \setminus H_m, \\ &H_m \end{aligned}$$

stellen eine Überdeckung der Figur  $F$  dar und enthalten paarweise keine gemeinsamen Punkte. Diese Mengen brauchen nicht abgeschlossen zu sein. Aber ihre "abgeschlossenen Hüllen", d.h. die Mengen

$$\begin{aligned} H'_1 &= \overline{H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \dots \cup H_m)}, \\ H'_2 &= \overline{H_2 \setminus (H_3 \cup \dots \cup H_m)}, \\ &\dots \\ H'_{m-1} &= \overline{H_{m-1} \setminus H_m}, \\ H'_m &= \overline{H_m} \end{aligned}$$

werden schon zu abgeschlossenen Teilmengen der Figur  $F$ , die paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte enthalten und eine Überdeckung der Figur  $F$  ergeben.

Aus der beliebigen Überdeckung  $(H_1, H_2, \dots, H_m)$  der Figur  $F$  mit abgeschlossenen Teilmengen erhielten wir so die Überdeckung  $(H'_1, H'_2, \dots, H'_m)$ , die aus solchen Mengen besteht, die einander nicht überlappen. Die Durchmesser der Teile vergrößern sich dabei natürlich nicht (denn die Menge  $H'_i$  ist in  $H_i$  enthalten).

[4] (zu S. 7) Die im Text angeführten Überlegung (die verbunden ist mit der "Annäherung"

<sup>17</sup>Mit  $A \setminus B$  bezeichnet man die Menge, die man erhält, wenn man aus der Menge  $A$  alle Punkte entfernt, die in der Menge  $B$  liegen.



der Geraden  $l$  an die Figur  $F$ ) gibt natürlich nicht den strengen Beweis der Existenz der Stützgeraden  $l_1$ . Den strengen Beweis kann man z.B. auf folgende Weise erhalten.

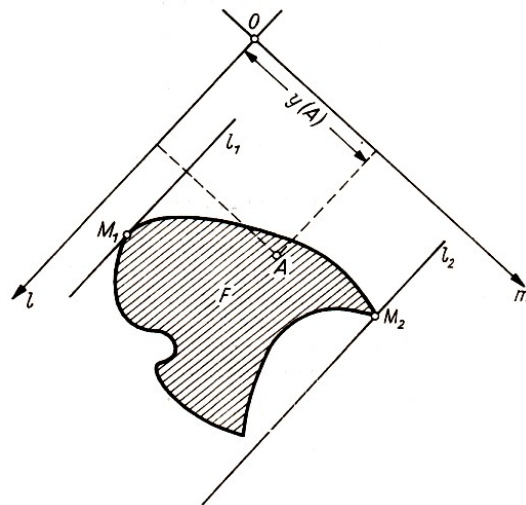


Abb. 108

Wir nehmen die Gerade  $l$ , die die Figur  $F$  nicht schneidet, und eine Gerade  $m \perp l$ . Wir verwenden die Geraden  $l$  und  $m$  als Koordinatenachsen (Abb. 108) und bezeichnen mit  $y(A)$  die Ordinate (die längs der Geraden  $m$  gemessen wird) für einen beliebigen Punkt  $A$  der Figur  $F$ .

Für die Figur  $F$  wird so eine Funktion  $y(A)$  definiert; dabei ist diese Funktion stetig (denn die Differenz  $y(A) - y(A')$  ist nicht größer als die Länge der Strecke  $AA'$ ). Aber eine stetige Funktion, die auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge  $F$  definiert ist, nimmt ihr Maximum und Minimum an.

Mit anderen Worten, es existieren solche Punkte  $M_1$  und  $M_2$  der Figur  $F$ , dass  $y(M_1) \leq y(A) \leq y(M_2)$  für einen beliebigen Punkt  $A$  dieser Figur ist.

Wenn wir durch die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  zu  $l$  parallele Geraden legen, dann wird die ganze Figur  $F$  in einen von  $l_1$  und  $l_2$  berandeten Streifen eingeschlossen. Die Geraden  $l_1$  und  $l_2$ , die durch die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  parallel zu  $l$  verlaufen, sind somit zwei Stützgeraden der Figur  $F$ , von denen im Text die Rede ist (vgl. Abb. 14).

[5] (zu S. 9) Wir werden zeigen, dass z.B. der Punkt  $A$  stetig von der Richtung der Geraden  $l_1$  abhängt. Wir nehmen an, dass sich die Gerade  $l_1$  um einen gewissen Winkel  $\alpha$  ändert (Abb. 109), wobei wir Geraden  $l'_1, l'_2, m'_1, m'_2$  und Punkte  $A', B', C', D'$  erhalten.

Durch die Punkte  $A$  und  $B$  führen wir die Geraden  $m_A$  und  $m_B$ , die mit  $m_1$  den Winkel  $\alpha$  bilden (d.h. parallele Geraden zu  $m'_1$ ). Da die Gerade  $m_A$  die Figur  $F$  schneidet, hat die Gerade  $m_B$  mit  $F$  keine gemeinsamen Punkte, denn die Stützgerade  $m'_1$  liegt zwischen  $m_A$  und  $m_B$ . Analoges ergibt sich, wenn wir durch die Punkte  $A$  und  $D$  Geraden  $l_A$  und  $l_D$  führen, die mit  $l_2$  den Winkel  $\alpha$  bilden (d.h. parallele Geraden zu  $l'_2$ ), dann liegt die Stützgerade  $l'_2$  zwischen  $l_A$  und  $l_D$ .

Folglich liegt der Punkt  $A'$ , in dem sich die Stützgeraden  $m'_1$  und  $l'_2$  schneiden, in einem (evtl. entarteten) Parallelogramm, das von den Geraden  $m_A, m_B, l_A, l_D$  gebildet wird.

Aber die Abmessungen dieses Parallelogramms (das in Abb. 109 gestrichelt ist) können beliebig klein gemacht werden, wenn nur der Winkel  $\alpha$  genügend klein gewählt wird. Der Punkt  $A'$  ist  $A$  beliebig nahe, wenn der Winkel  $\alpha$  genügend klein wird. Das bedeutet gerade, dass der Punkt  $A$  stetig von der Richtung der Geraden  $l_1$  abhängt.

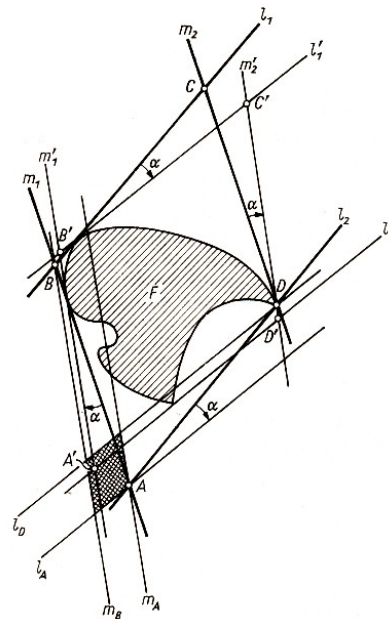


Abb. 109

Analoge Überlegungen führen dazu, dass die Punkte  $C, M, N$  stetig von der Richtung der Geraden  $l_1$  abhängen.

[6] (zu S. 13) Es ist leicht einzusehen, dass  $q$  geschlossene Linien in der Kugel, die weder sich selbst noch einander schneiden, die Kugel in  $q + 1$  Teile zerlegen.

Der strenge Beweis dieser Behauptung ist jedoch nicht einfach (er wird mit Mitteln der Topologie geführt). Es genügt zu sagen, dass wir schon bei  $q = 1$  den Satz erhalten, dass eine einfach geschlossene Linie die Kugel in zwei Teile zerlegt; das ist der berühmte Jordansche Satz, zu dessen Beweis man nicht geringe Bemühungen benötigt.

Heute wird man diesen Satz als triviale Folgerung des Dualitätssatzes von L. S. Pontrjagin erhalten, auf den wir jedoch in diesem populärwissenschaftlichen Buch nicht eingehen können. Da auf Grund der Anschauung keine Zweifel an der Gültigkeit des Satzes zu erwarten sind, begnügen wir uns mit diesen Bemerkungen.

[7] (zu S. 14) Für die Linie  $F$  führen wir den Parameter  $t$  ein, der von 0 bis 1 wächst, wenn ein Punkt die Linie  $F$  von  $C$  nach  $C'$  durchläuft. Die Menge  $M$  der  $t$ , für die der entsprechende Punkt von  $\Gamma$  in der Menge  $N_2$  liegt, ist abgeschlossen (da  $N_2$  eine abgeschlossene Menge ist). Folglich enthält die Menge  $M$  ein maximales Element  $t_0$ . Der Punkt von  $\Gamma$ , der dem Parameter  $t_0$  entspricht, liegt in der Menge  $N_2$ ; aber die Punkte von  $P$ , die zu größeren Parametern gehören, liegen nicht in der Menge  $N_2$ . Aber das bedeutet, dass ein letzter Punkt  $D$  in der Menge  $N_3$  existiert, der uns bei einer Bewegung auf der Linie  $\Gamma$  von  $C$  nach  $C'$  begegnet (nämlich der Punkt mit dem Parameter  $t_0$ ).

Wenn der Punkt  $D$  nicht in der Menge  $N_3$  liegt, dann ist der Abstand vom Punkt  $D$  zur Menge  $N_3$  positiv (wir erinnern daran, dass die Menge  $N_3$  abgeschlossen ist). Deshalb liegt in  $\Gamma$  eine Umgebung von  $D$  ebenfalls nicht in der Menge  $N_3$ .

[8] (zu S. 24) Die Mengen  $N_0, N_1, \dots, N_n$  sind abgeschlossen: Zu jedem Randpunkt  $A$  des Körpers  $F$  wurde ein Randpunkt  $f(A)$  des Kugelkörpers  $E$  derart gewählt, dass die Tangentialhyperebenen in diesen Punkten parallel sind und außerdem die Körper  $F$  und  $E$  - ausgenommen die Berührungspunkte - auf der gleichen Seite bezüglich der Hyperebenen liegen.

Wir erhalten somit eine Abbildung  $f$  des Randes des Körpers  $F$  in den Rand des Körpers  $E$ . Diese Abbildung ist eindeutig (denn durch jeden Randpunkt des Körpers  $F$  verläuft eine

einzigste Stützhyperebene) und, wie man beweisen kann, stetig.

Ferner liegt per definitionem der Punkt  $A$  genau dann in der Menge  $N_i$ ; wenn der Punkt  $f(A)$  in der Menge  $M_i$  liegt, d.h., wenn  $N_i = f^{-1}(M_i)$  ist. Da die Abbildung  $f$  stetig und die Menge  $M_i$  abgeschlossen ist, ist die Menge  $N_i = f^{-1}(M_i)$  ebenfalls abgeschlossen ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

[9] (zu S. 31) Es sei  $F$  eine konvexe beschränkte Figur und  $G$  irgendeine abgeschlossene Teilmenge davon. Dann existiert das Außenmaß von  $G$ . Wir betrachten alle möglichen gestreckten Bilder von  $F$ , die die Figur  $G$  enthalten.

Die untere Grenze aller Streckungskoeffizienten dieser Figuren bezeichnen wir mit  $k_0$ . Wenn  $k_0 = 1$  ist, dann ist das Außenmaß des Teiles  $G$  gleich 1 (denn es existieren keine gestauchten Bilder von  $F$ , die  $G$  enthalten).

Es sei  $k_0 < 1$ : Dann können wir eine Folge  $F_1, F_2, \dots, F_q, \dots$  von gestauchten Bildern von  $F$  mit zugehörigen Streckungszentren  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  und Streckungskoeffizienten  $k_1, k_2, \dots, k_q, \dots$  derart wählen, dass jede Figur der Folge die Menge  $G$  enthält und die Gleichung  $\lim_{q \rightarrow \infty} k_q = k_0$  gilt.

Dabei können wir voraussetzen, dass die Ungleichungen

$$1 > k_1 > k_2 > \dots > k_q > \dots > k_0$$

erfüllt sind.

Dann ist leicht einzusehen, dass alle Punkte  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  von der Figur  $F$  einen Abstand  $\leq \frac{d}{1-k_1}$  besitzen, wobei  $d$  der Durchmesser der Figur  $F$  ist. Dazu nehmen wir an, dass der Punkt  $O_q$  einen größeren Abstand von  $F$  als  $\frac{d}{1-k_1}$  besitzt. Dann gilt

$$a(O_q, A) > \frac{d}{1-k_1}$$

für einen beliebigen Punkt  $A$  der Figur  $F$ . Bei der Streckung mit dem Zentrum  $O_q$  und dem Koeffizienten  $k_q$  geht der Punkt  $A$  in einen Punkt  $A'$  mit  $\overrightarrow{O_q A'} = k_q \cdot \overrightarrow{O_q A}$  über. Deshalb gilt

$$a(A, A') = (1 - k_q)a(O_q, A) > (1 - k_1)a(O_q, A) > d$$

Jeder Punkt  $A$  der Figur  $F$  geht bei dieser Streckung in einen Punkt  $A'$  mit  $a(A, A') > d$  über, d.h., er geht in den Punkt  $A'$  über, der nicht in der Figur  $F$  liegt. Mit anderen Worten, die Figur  $F_q$ , in die  $F$  bei der betrachteten Streckung übergeht, besitzt keine gemeinsamen Punkte mit  $F$ . Aber das widerspricht der Tatsache, dass die Figur  $F_q$  den Teil  $G$  der Figur  $F$  enthält.

Also liegen alle Punkte  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  in endlichem Abstand von der Figur  $F$ . Deshalb besitzt die Folge  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  einen Häufungspunkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen (indem man nötigenfalls zu einer geeigneten Teilfolge übergeht), dass die Folge  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  nur einen Häufungspunkt  $O_0$  hat, d.h., es existiert der Grenzwert  $\lim_{q \rightarrow \infty} O_q = O_0$ .

Dann ist leicht einzusehen, dass die Figur  $F_0$ , die gestaucht Bild der Figur  $F$  mit dem Streckungszentrum  $O_0$  und dem Koeffizienten  $k_0$  ist, die Figur  $G$  enthält (wegen  $\lim_{q \rightarrow \infty} k_q = k_0$ ,  $\lim_{q \rightarrow \infty} O_q = O_0$ ).

Andererseits existiert kein gestaucht Bild von  $F$  mit einem kleineren Koeffizienten als  $k_0$ , das  $G$  ganz enthält (nach Definition der unteren Grenze). Das bedeutet, dass  $k_0$  das Außenmaß des Teiles  $G$  ist.

Folglich existiert für jeden abgeschlossenen Teil  $G$  der Figur  $F$  das Außenmaß.

[10] (zu S. 41) Im Fall eines  $n$ -dimensionalen konvexen Körpers  $F$  (für  $n > 2$ ) ist das Beleuchtungsgebiet (d.h. die Menge aller Punkte, die Beleuchtungspunkte bezüglich einer gegebenen Richtung  $l$  sind) natürlich kein Bogen.

Aber das Beleuchtungsgebiet (bei beliebigem  $n$ ) ist eine offene Teilmenge des Randes des Körpers  $F$ . Ist nämlich  $A$  ein beleuchteter Punkt bezüglich der Richtung  $l$ , dann wird auf dem Rand von  $F$  eine Umgebung von  $A$  bezüglich  $l$  beleuchtet. Das bedeutet gerade, dass das Beleuchtungsgebiet eine offene Teilmenge des Randes des Körpers  $F$  ist.

[11] (zu S. 42) Im  $n$ -dimensionalen Fall muss an Stelle des im Text beschriebenen "verkleinerten Bogens" der folgende Satz benutzt werden.

Es seien  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  Richtungen, die für die Beleuchtung des Randes des  $n$ -dimensionalen Körpers  $F$  ausreichen; mit  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$  bezeichnen wir die Beleuchtungsgebiete bezüglich dieser Richtungen.

Dann existieren solche abgeschlossenen Mengen  $\Delta^*_1, \Delta^*_2, \dots, \Delta^*_s$ , die der Reihe nach in den Beleuchtungsgebieten  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$  enthalten sind und den Rand des Körpers  $F$  überdecken.

Beweis. Den Rand des Beleuchtungsgebietes  $\Delta'_i$  bezeichnen wir mit  $\Gamma_i$ , (z.B. besteht der Rand des Beleuchtungsgebietes in Abb. 71 aus zwei Punkten  $A$  und  $B$ ; bei einem dreidimensionalen konvexen Körper bildet eine Kurve den Rand des Beleuchtungsgebietes).

Wir definieren auf dem Rand des konvexen Körpers  $F$  eine Funktion  $f_i$ : Wenn der Punkt  $A$  nicht im Beleuchtungsgebiet  $\Delta'_i$  liegt, dann setzen wir  $f_i(A) = 0$ . Wenn  $A$  ein Punkt des Gebietes  $\Delta'_i$  ist, dann bezeichnen wir mit  $f_i(A)$  den Abstand des Punktes  $A$  vom Rand  $\Gamma_i$  des Gebietes  $\Delta'_i$ .

Es ist klar, dass die Funktion  $f_i(A)$  stetig ist und positive Werte in den Punkten des Gebietes  $\Delta'_i$  annimmt (und nur in diesen Punkten). Die Summe

$$\varphi(A) = f_1(A) + f_2(A) + \dots + f_s(A)$$

ist eine stetige Funktion auf dem Rand des Körpers  $F$  und nimmt nur positive Werte an, da jeder Randpunkt des Körpers  $F$  in einem der Beleuchtungsgebiete  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$  liegt. Es sei  $\sigma$  der kleinste Wert dieser Funktion, d.h.  $\varphi(A) \geq \sigma > 0$  für jeden Randpunkt  $A$  des Körpers  $F$ .

Mit  $\Delta^*_i$  bezeichnen wir die Menge der Randpunkte  $A$  des Körpers  $F$ , für die die Ungleichung  $f_i(A) \geq \frac{\sigma}{s}$  gilt. Die Menge  $\Delta^*_i$  ist abgeschlossen und im Beleuchtungsgebiet  $\Delta'_i$  enthalten.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Mengen  $\Delta^*_1, \Delta^*_2, \dots, \Delta^*_s$  den ganzen Rand des Körpers  $F$  überdecken. Es sei  $A$  ein beliebiger Randpunkt des Körpers  $F$ . Dann ist  $\varphi(A) \geq \sigma$ , d.h.

$$f_1(A) + f_2(A) + \dots + f_s(A) \geq \sigma$$

Aber dann muss für ein  $i$  die Ungleichung  $f_i(A) \geq \frac{\sigma}{s}$  erfüllt sein und folglich der Punkt  $A$  in wenigstens einer der Mengen  $\Delta^*_1, \Delta^*_2, \dots, \Delta^*_s$  liegen.

[12] (zu S. 43) Im  $n$ -dimensionalen Fall existiert eine solche Länge  $h'_i$ , dass eine Verschiebung der Menge  $\Delta^*_i$  in der Richtung  $l'_i$  um einen Betrag kleiner  $h'_i$  die Menge  $\Delta^*_i$  in das Innere des Körpers  $F$  abbildet.

Dazu bezeichnen wir für jeden Punkt  $A$  der Menge  $\Delta^*_i$  durch  $g(A)$  die Länge der Sehne, die durch den Körper  $F$  aus der Geraden der Richtung  $l'_1$  durch den Punkt  $A$  herausgeschnitten wird.

Die Funktion  $g(A)$ , die auf der Menge  $\Delta_i^*$  definiert ist, ist stetig und nimmt nur positive Werte an, da jeder Punkt  $A$  der Menge  $\Delta_i^*$  im Beleuchtungsgebiet  $\Delta_i'$  liegt und deshalb die entsprechende Gerade durch innere Punkte des Körpers  $F$  geht.

Da die stetige Funktion  $g(A)$  auf der abgeschlossenen Menge  $\Delta_i^*$  definiert ist, nimmt sie in einem Punkt ihren kleinsten Wert an, den wir mit  $h_i'$  bezeichnen.

Somit ist  $g(A) \geq h_i > 0$  für jeden Punkt  $A$  der Menge  $\Delta_i^*$ . Mit anderen Worten, der Körper  $F$  schneidet aus jeder Geraden der Richtung  $l_i'$  durch einen beliebigen Punkt der Menge  $\Delta_i^*$  eine Sehne einer Länge  $\geq h_i$  heraus. Hieraus folgt unsere Behauptung.

[13] (zu S. 43) Der abschließende Teil des Beweises von Satz 7 wird im  $n$ -dimensionalen Fall so wie im Text geführt, nur haben wir in diesem Fall keine "Sektoren", sondern "Kegel"  $G_1, G_2, \dots, G_s$  mit dem Eckpunkt  $O$  und krummlinigen "Grundflächen"  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$ .

[14] (zu S. 45) Es sei  $F$  ein konvexer beschränkter  $n$ -dimensionaler Körper, welcher  $n$  Randpunkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyper ebene hat. Wir wählen Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , bezüglich der  $A_1, A_2, \dots, A_n$  der Reihe nach beleuchtete Punkte sind.

Da bei kleinen "Änderungen" der Richtung  $l_i$  der Punkt  $A_i$  offensichtlich ein beleuchteter Punkt bezüglich dieser Richtung bleibt, dürfen wir voraussetzen, dass die Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  nicht parallel zu einer Hyper ebene sind.

Wir wählen Punkte  $O, B_1, B_2, \dots, B_n$  derart, dass diese Richtungen durch die gerichteten Strecken  $\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}, \dots, \overrightarrow{OB_n}$  bestimmt sind, und setzen

$$\overrightarrow{OB_{n+1}}\varphi = -\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB_2} - \dots - \overrightarrow{OB_n}$$

Die durch  $\overrightarrow{OB_{n+1}}$  bestimmte Richtung sei  $l_{n+1}$ . Die  $n+1$  Punkte  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  bilden ein Simplex, das den Punkt  $O$  im Innern enthält. Deshalb reichen die Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$  aus, alle von  $A_1, A_2, \dots, A_n$  verschiedenen Punkte auf dem Rand des Körpers  $F$  zu beleuchten (vgl. den Beweis von Satz 9).

Die Randpunkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  werden wegen der Wahl der Richtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  auch beleuchtet.

Wenn also der  $n$ -dimensionale Körper  $F$  höchstens  $n$  Randpunkte mit nicht eindeutig bestimmter Stützhyper ebene hat, dann ist  $c(F) = n + 1$ .

[15] (zu S. 48) Es sei  $F$  ein konvexer unbeschränkter fast konischer  $n$ -dimensionaler Körper und  $K$  ein einbeschriebener Kegel dieses Körpers. Wir setzen voraus, dass der Kegel  $K$  die Dimension  $q$  hat, und bezeichnen mit  $L$  den linearen Unterraum der Dimension  $q$ , der den Kegel  $K$  enthält.

Schließlich sei  $P$  das orthogonale Komplement zu  $L$  durch einen Punkt  $O$  von  $L$ .

Mit  $N$  bezeichnen wir die Menge aller Punkte  $O$  des Unterraumes  $P$ , die die folgende Eigenschaft besitzen:

Man kann einen Punkt  $A$  des Kegels  $K$  und einen Punkt  $B$  des Körpers  $F$  derart wählen, dass die gerichteten Strecken  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{OC}$  den gleichen Vektor ergeben. Die Menge  $N$  ist ein  $(n - q)$ -dimensionaler beschränkter konvexer Körper. Die abgeschlossene Hülle von  $N$  bezeichnen wir mit  $M$ .

Das ist ein  $(n - q)$ -dimensionaler beschränkter konvexer Körper, der nach P. S. Soltan der Gleichung  $b(F) = b(M)$  genügt.

## 5 Literatur

- [1] Boltjanski, W. G., Aufgaben über Grenzen von Körpern, (1960), russisch
- [2] Bobbesen, T., und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin 1934.
- [3] Borsuk, K., Über die Zerlegung einer Euklidischen  $n$ -dimensionalen Vollkugel in  $n$  Mengen, Verb. Internat. Math. Kongr. Zürich 2 (1932), 192.
- [4] Borsuk, K., Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale Sphäre, Fundamente. Math. 20 (1933), 177-190.
- [5] Wisitei, W. N., Nichtabgeschlossene Figuren, (1962), russisch
- [6] Gochberg, I. Z., Aufgaben über unbegrenzte Figuren, (1960), russisch
- [7] Grünbaum, B., A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1957), 776-778.
- [8] Grünbaum, B., Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes, Bull. Res. Council Israel 7F (1957), 25-30.
- [9] Grünbaum, B., On a conjecture of H. Hadwiger, Pacific J. Math. 11 (1961), 215-219.
- [10] Grünbaum, B., Borsuk's problem and related questions, Proc. Symposia Pure Math. 7 (1963), 271-284.
- [11] Gale, D., On inscribing  $n$ -dimensional sets in a regular  $n$ -simplex, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 222-225.
- [12] Danzer, L., Überdeckungen mit kongruenten Kugeln und Durchschnittseigenschaften von Kugelfamilien in euklidischen Räumen hoher Dimension.
- [13] Danzer, L., und B. Grünbaum, Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee, Math. Z. 79 (1962), 95-99.
- [14] Klee, V. L., Unsolved problems in intuitive geometry, Seattle 1960.
- [15] Levi, F. W., Ein geometrisches Überdeckungsproblem, Arch. Math. 5 (1954), 476-478.
- [16] Levi, F. W., Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns, Arch. Math. 6 (1955), 369 bis 370.
- [17] Lenz, H., Zur Zerlegung von Punktengen in solche kleineren Durchmessers, Arch. Math. 6 (1955), 413-416.
- [18] Ljusternik, N. A., Konvexe Figuren und Polyeder, Moskau 1956, russisch
- [19] Ljusternik, N. A., und L. G. Schnirelman, Topologische Methoden, Moskau 1930, russisch
- [20] Pal, I., Über ein elementares Variationsproblem, Danske Videnskab. Selkab., Math.-Fys. Meddel. 3, No. 2 (1920).
- [21] Soltan, P. S., Grenzen konvexer Körper, (1962), russisch
- [22] Soltan, P. S., Offene und geschlossene konvexe Körper, (1963), russisch
- [23] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.
- [24] Hadwiger, H., Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, Com-

- ment. Math. Helv. 18 (1945/46),
- [25] Hadwiger, H., Über die Zerstückung eines Eikörpers, Math. Z. 51 (1947), 161-165.
- [26] Hadwiger, H., Ungelöste Probleme, No 20, Elemente Math. 12 (1957), 121.
- [27] Hadwiger, H., Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern, Arch. Math. 8 (1957), 212-213.
- [28] Hadwiger, H., Altes und Neues über konvexe Körper, Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1955.
- [29] Hadwiger, H., und H. Debrunner, Kombinatorische Geometrie in der Ebene, Monogr. Enseign. Math. No 2 (1959).
- [30] Heppes, A., Tébéli ponthalmazok felosztása kisebb atmérőjű részhalmazok összegére, A magyar tudományos akadémia 7 (1957), 413-416.
- [31] Heppes, A., und P. Revesz, Zum Borsukschen Zerlegungsproblem, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 159-162.
- [32] Eggleston, H. G., Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter, J. London Math. Soc. 80 (1955), 11 -24.
- [33] Eggleston, H. G., Convexity, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1958.
- [34] Eggleston, H. G., Problems in euclidean space: Application of convexity, Pergamon Press, London-New York 1957.
- [35] Erdős, P., On sets of distances of  $n$  points, Amer. Math. Monthly 53 (1946), 248-250.
- [36] Erdős, P., Some unsolved problems, Michigan Math. J. 4 (1957), 291 - 300.
- [37] Jaglom, I. M., und W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [38] Alexandrow, A. D., Konvexe Polyeder, Akademie-Verlag, Berlin 1958 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [39] Boltjanski, W. G., Zerlegungsgleichheit von Vielecken und Vielflachen, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [40] Boltjanski, W. G., und I. M. Jaglom. Konvexe Figuren und Körper, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [41] Boltjanski, W. G., und I. Z. Gochberg, Zerlegung von Figuren in kleinere Teile, Moskau 1971, russisch



### **Zusatz bei der deutschen Ausgabe**

zusammengestellt von Dr. E. Hameister

Blaschke, W., Kreis und Kugel, 2. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1956.

Chintschin, A. J., Drei Perlen der Zahlentheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1951 (Übersetzung aus dem Russischen).

Coxeter, H. S. M., Unvergängliche Geometrie, Birkhäuser, Basel- Stuttgart 1963 (Übersetzung aus dem Englischen).

Fejes Toth, L., Reguläre Figuren, B. G. Teubner, Leipzig / Akadémiai Kiado, Budapest 1965.

Flachsmeyer, J., Kombinatorik, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970.

Halmos, P. R., Naive Mengenlehre, 2. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970 (Übersetzung aus dem Amerikanischen).

Hasse, H., Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung, Schriftenreihe zur Mathematik, Otto Selle Verlag, Frankfurt/M.-Pinneberg 1955.

Helly, E., Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 32 (1923), 175-176.

Hilbert, D., und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, Berlin 1932, Nachdruck Dover Publications, New York 1944.

Hopf, H., Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie, Math.-Phys. Sem.-Ber. 3 (1953), 14-29.

Müller, A., Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen, Elemente Math. 15 (1953), 37-38.

Rademacher, H., und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin 1930, Nachdruck Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York 1969.

Sz.-Nagy, B., Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper, Acta Scient. Math. 15 (1954), 169-177.

van der Waerden, B. L., Einfall und Überlegung, Nachdruck der 1. Aufl., Birkhäuser, Basel 1968.

Zich, O., und A. Kolman, Unterhaltsame Logik, B. S. B. Teubner, Leipzig 1970 (Übersetzung aus dem Tschechischen).