

---

**A. I. Markuschewitsch**

**Komplexe Zahlen und konforme  
Abbildungen**

Übersetzung: Gerhard Ränike  
1956 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin  
MSB: Nr. 42  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## Vorwort

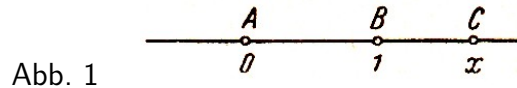
In diesem Bändchen lernt der Leser die komplexen Zahlen und die einfachsten Funktionen komplexer Zahlen (einschließlich der Joukowskischen Funktion und ihrer Anwendung zur Konstruktion des Profils eines Tragflügels) kennen. Für die Darstellung wurde die geometrische Form gewählt.

Die komplexen Zahlen werden als gerichtete Strecken und die Funktionen als Abbildungen betrachtet. Um den Leser mit dieser Auffassung von den komplexen Zahlen vertraut zu machen, beginnen wir mit der geometrischen Deutung der reellen Zahlen und der Rechenoperationen.

Dem Inhalt des Bändchens liegen Vorträge des Verfassers vor Schülern der 9. und 10. Klasse zugrunde. Kenntnis der komplexen Zahlen wird nicht vorausgesetzt.

A. I. Markuschewitsch

1. Zur geometrischen Darstellung der reellen Zahlen benutzt man die Zahlenachse (auch Zahlengerade genannt), d.h. eine Gerade, auf der ein Punkt  $A$ , der (Koordinaten-)Ursprung, welcher die Zahl  $0$ , und ein von ihm verschiedener Punkt  $B$ , welcher die Zahl  $+1$  darstellt, markiert sind (Abb. 1).



Die Richtung von  $A$  nach  $B$  sieht man als die positive Richtung der Zahlenachse, die Strecke  $AB$  als Einheit an. Die Strecke  $AC$  stellt dann eine reelle Zahl  $x$  dar, deren absoluter Betrag gleich der Länge dieser Strecke ist. Fällt  $C$  nicht mit  $A$  zusammen, d.h., ist  $x$  von  $0$  verschieden, so ist  $x$  positiv, wenn die Richtung von  $AC$  mit der positiven Achsenrichtung übereinstimmt, dagegen negativ, wenn die Richtung von  $AC$  der positiven Achsenrichtung entgegengesetzt ist.

2. Wir werden alle Strecken der Zahlenachse als gerichtete Strecken, als Vektoren auf der Geraden, ansehen. Bei jedem Vektor<sup>1</sup> unterscheiden wir Anfang(-spunkt) und Ende (Endpunkt); die Richtung vom Anfangspunkt zum Endpunkt sehen wir als Richtung des Vektors an. Vektoren werden wir mit zwei Buchstaben bezeichnen; an erster Stelle steht der Anfangs-, an der zweiten der Endpunkt.

Jeder Vektor (dessen Anfangspunkt nicht in  $A$  zu liegen braucht) stellt eine bestimmte reelle Zahl dar. Diese Zahl ist positiv, wenn die Richtung des Vektors mit der positiven Richtung der Achse übereinstimmt, negativ, wenn seine Richtung dieser entgegengesetzt ist. So stellt zum Beispiel der Vektor  $AB$  (Anfangspunkt  $A$ , Endpunkt  $B$ ) die Zahl  $+1$ , der Vektor  $BA$  (Anfangspunkt  $B$ , Endpunkt  $A$ ) die Zahl  $-1$  dar.

3. Die Richtung eines Vektors kann man dadurch festlegen, dass man den Winkel zwischen diesem Vektor und der positiven Achsenrichtung angibt. Stimmt die Richtung des Vektors mit der positiven Achsenrichtung überein, so ist dieser Winkel gleich  $0^\circ$ , ist sie der positiven Achsenrichtung entgegengesetzt, so nimmt man diesen Winkel gleich  $180^\circ$  (oder  $-180^\circ$ ) an.

Ist nun  $x$  irgendeine von Null verschiedene reelle Zahl, so nennt man den Winkel zwischen dem die Zahl  $x$  darstellenden Vektor und der positiven Achsenrichtung das Argument von  $x$ . Offenbar ist das Argument jeder positiven Zahl gleich  $0^\circ$ , das Argument jeder negativen gleich  $180^\circ$  (oder  $-180^\circ$ ).

Argument von  $x$  wird durch  $\text{Arg } x$  abgekürzt ( $\text{Arg}$  sind die Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes *argumentum*, das hier soviel wie Vorzeichen bedeutet). Der Zahl  $0$  entspricht kein Vektor, sondern ein Punkt. Obwohl wir im folgenden einen Punkt als Spezialfall eines Vektors, als Vektor der Länge Null, auffassen werden, können wir in diesem Fall weder von einer Richtung noch von einem Winkel mit der Zahlenachse sprechen. Der Zahl Null schreiben wir daher kein Argument zu.

4. Nun wollen wir die Operationen mit reellen Zahlen geometrisch deuten.

Dabei behandeln wir zunächst nur Addition und Multiplikation; danach werden wir leicht zur Deutung der inversen Operationen, d.h. der Subtraktion und der Division, übergehen können.

<sup>1</sup>Die in diesem Buch verwendete Form des Vektorbegriffs, besonders hinsichtlich der weiterhin zu besprechenden Multiplikation, weicht von dem in der eigentlichen Vektorrechnung verwendeten Vektorbegriff erheblich ab. Dem Leser wird daher empfohlen, hier "Vektor" lediglich als ein Bild für "komplexe Zahl" (in dem später auseinandergesetzten Sinn) anzusehen.

Es seien  $c_1$  und  $c_2$  zwei reelle Zahlen,  $AB_1$  und  $AB_2$  die sie darstellenden Vektoren. Wir suchen also Regeln, nach denen wir aus der Kenntnis der Vektoren  $AB_1$  und  $AB_2$  diejenigen Vektoren konstruieren können, welche die Summe  $c_1 + c_2$  bzw. das Produkt  $c_1 \cdot c_2$  darstellen.

Wir beginnen mit der Addition. Was muss man also mit dem Vektor  $AB_1$  tun, um den die Summe darstellenden Vektor  $AC$  zu bekommen?

Man kann leicht nachprüfen, dass es in allen Fällen genügt, vom Endpunkt des Vektors  $AB_1$  aus den Vektor  $B_1C$  abzutragen, der in Länge und Richtung mit  $AB_2$  übereinstimmt. Der Vektor  $AC$  ist dann der gesuchte Vektor, der die Summe  $c_1 + c_2$  darstellt (Abb. 2).

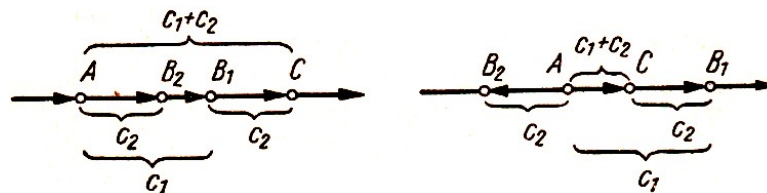


Abb. 2

**5.** Wir kommen nun zur Multiplikation. Ist einer der Faktoren gleich Null, so verschwindet auch das Produkt. Dann besteht der das Produkt darstellende Vektor nur aus einem Punkt. Es sei nun keiner der Faktoren gleich Null. Dann ist der absolute Betrag des Produktes  $c_1 \cdot c_2$  gleich  $|c_1| |c_2|$ , d.h. gleich dem Produkt der absoluten Beträge von  $c_1$  und  $c_2$ . Daher ist die Länge des das Produkt darstellenden Vektors gleich dem Produkt der Längen der Vektoren  $AB_1$  und  $AB_2$ , welche die Faktoren darstellen.

Das Vorzeichen von  $c_1 c_2$  stimmt, wenn  $c_2 > 0$ , mit dem Vorzeichen von  $c_1$  überein und ist ihm entgegengesetzt, wenn  $c_2 < 0$ . Mit anderen Worten:

Die Richtung von  $AD$  stimmt mit der von  $AB_1$  überein, wenn  $\text{Arg } c_2 = 0$ , d.h. wenn  $c_2 > 0$ , und ist ihr entgegengesetzt, wenn  $\text{Arg } c_2 = 180^\circ$ , d. h. wenn  $c_2 < 0$ .

Jetzt können wir ohne weiteres auf die Frage antworten, was mit dem den Faktor  $c_1$  darstellenden Vektor  $AB_1$  zu tun sei, um daraus den das Produkt  $c_1 c_2$  darstellenden Vektor  $AD$  zu erhalten (so- wohl  $c_1$  als auch  $c_2$  sollen dabei von 0 verschieden sein).

Man muss die Länge von  $AB_1$ , ohne die Richtung zu ändern, mit  $|c_2|$  multiplizieren und dann den so erhaltenen Vektor um einen Winkel drehen, der gleich dem Argument von  $c_2$  ist, d.h. um  $0^\circ$ , wenn  $c_2 > 0$  bzw. um  $180^\circ$ , wenn  $c_2 < 0$ .

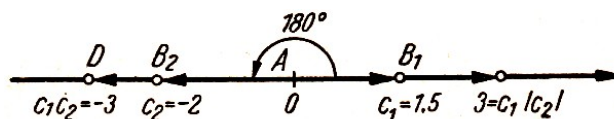


Abb. 3

Der Vektor, den wir dadurch erhalten, ist gerade die gesuchte Darstellung des Produktes. Abb. 3 veranschaulicht das Beispiel  $c_1 = 1,5$ ;  $c_2 = -2$ .

**6.** Jedem Vektor auf der Geraden haben wir eine Zahl zugeordnet, die durch diesen Vektor dargestellt wird. Jetzt betrachten wir alle möglichen Vektoren in der Ebene und ordnen jedem von ihnen eine Zahl zu, die durch diesen Vektor dargestellt werden soll.

Die Zahlen, zu denen wir auf diese Weise gelangen, die komplexen Zahlen, sind Zahlen anderer, allgemeinerer Art als die reellen Zahlen. Diese erweisen sich als Spezialfall der komplexen Zahlen, ähnlich wie die ganzen Zahlen nur ein Spezialfall der rationalen Zahlen und diese wieder ein Spezialfall der reellen Zahlen sind.

Wir beginnen damit, dass wir in der Ebene, deren Vektoren wir betrachten, zwei aufeinander

senkrecht stehende Geraden ziehen, d.h. zwei Zahlenachsen mit dem gemeinsamen Ursprung  $A$ , und dass wir die Strecke  $AB$  als Einheit wählen (Abb. 4).

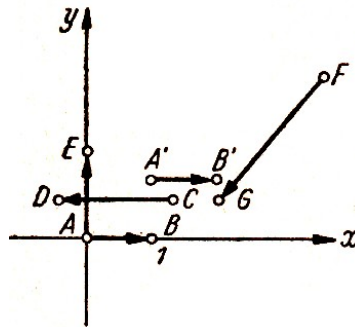


Abb. 4

Die eine dieser Achsen bezeichnen wir kurz als  $x$ -Achse, die andere als  $y$ -Achse. Dann kann jeder Vektor, der - wie früher - auf der  $x$ -Achse liegt, sowie jeder dazu parallele Vektor als geometrisches Bild einer reellen Zahl angesehen werden.

Beispielsweise stellen die Vektoren  $AB$  und  $A'B'$ , deren Länge gleich 1 ist und deren Richtung mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse übereinstimmt, die Zahl 1 dar, während der Vektor  $CD$ , dessen Länge gleich 2 und dessen Richtung der Richtung der positiven  $x$ -Achse entgegengesetzt ist, die Zahl -2 darstellt.

Vektoren, die weder auf der  $x$ -Achse noch zu ihr parallel liegen wie  $AE$  und  $FG$ , stellen keine reellen Zahlen dar. Von diesen Vektoren sagen wir, dass sie komplexe Zahlen darstellen.

Dabei stellen Vektoren, die gleiche Länge und gleiche Richtung sowie gleichen Richtungssinn haben (parallel und gleichgerichtet sind), ein und dieselbe Zahl dar, während Vektoren, die sich in Länge oder Richtung oder Richtungssinn unterscheiden, verschiedene komplexe Zahlen darstellen.

Hier greifen wir etwas vor, wir wissen noch gar nicht, was komplexe Zahlen sind, und sprechen schon von ihren Bildern. Jedoch kommt es auch im Leben nicht selten vor, dass man ein Portrait eher kennenlernt als das Original.

Weiter oben hatten wir gezeigt, wie man Operationen mit reellen Zahlen durch Operationen mit Vektoren, die diese Zahlen darstellen, ersetzen kann. Analog werden wir die Operationen mit komplexen Zahlen durch Operationen mit den sie darstellenden Vektoren ersetzen.

Die Rechenregeln werden wir uns nicht neu ausdenken, sondern wir behalten die geometrische Form der Regeln bei, die wir für Addition und Multiplikation reeller Zahlen gefunden hatten. Ein Unterschied besteht nur darin, dass letztere durch Vektoren auf der  $x$ -Achse (oder durch Vektoren, die zu dieser parallel liegen) dargestellt wurden, während die komplexen Zahlen durch Vektoren in der Ebene dargestellt werden, die nicht auf der  $x$ -Achse oder zu ihr parallel zu liegen brauchen.

**7.** Bevor wir weitergehen, betonen wir noch einmal, dass wir als komplexe Zahlen (komplex heißt soviel wie zusammengesetzt) die reellen (diese kennen wir schon) und die anderen Zahlen in der Ebene bezeichnen (von letzteren kennen wir bisher nur die "Bilder").

Zum Vergleich erinnern wir daran, dass man für rationale und irrationale Zahlen, wenn man sie zusammen betrachtet, ebenfalls einen gemeinsamen Namen hat, nämlich reelle Zahlen.

Wir kommen nun zur Addition komplexer Zahlen. Wir vereinbaren, die Regel beizubehalten, die für die Addition reeller Zahlen galt.

Es seien  $AB_1$  und  $AB_2$  zwei Vektoren, die gewisse komplexe Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  darstellen. Um den ihrer Summe  $c_1 + c_2$  entsprechenden Vektor zu konstruieren, tragen wir vom Endpunkt des Vektors  $AB_1$  den Vektor  $B_1C$  ab, der in Länge und Richtung mit dem Vektor  $AB_2$  übereinstimmt; der Vektor  $AC$ , der den Anfangspunkt von  $AB_1$  mit dem Endpunkt von  $B_1C$  verbindet, ist gerade der gesuchte Vektor (Abb. 5).

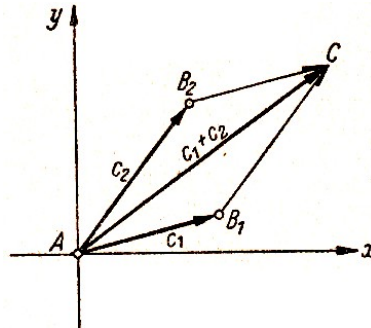


Abb. 5

Das Neue besteht hier darin, dass wir jetzt die Regel auf die Addition komplexer Zahlen (die durch beliebige Vektoren in der Ebene dargestellt werden) anwenden, während wir sie früher nur bei reellen Zahlen (die durch Vektoren auf einer Geraden dargestellt werden) anwandten.

Benutzen wir dieselbe Regel zur Konstruktion der Summe  $c_2 + c_1$  (die Reihenfolge der Summanden ist geändert), so muss man vom Endpunkt des Vektors  $AB_2$ , der  $c_2$  darstellt, einen Vektor abtragen, der in Länge und Richtung mit dem Vektor  $AB_1$ , der  $c_1$  darstellt, übereinstimmt. Wir erhalten offensichtlich denselben Punkt  $C$  (in Abb. 5 ergibt sich ein Parallelogramm), und folglich wird die Summe  $c_2 + c_1$  durch denselben Vektor  $AC$  dargestellt wie  $c_1 + c_2$ . Aus der Additionsvorschrift folgt also das kommutative Gesetz

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2$$

Man kann leicht zeigen, dass auch das assoziative Gesetz gilt:

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$$

Alle dazu notwendigen Konstruktionen sind in Abb. 6 ausgeführt.

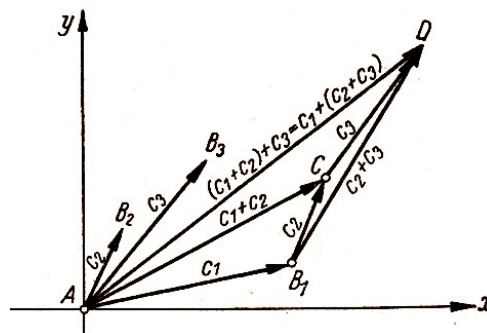


Abb. 6

Offenbar erhalten wir bei Addition von  $(c_1 + c_2)$  (dargestellt durch  $AC$ ) und  $c_3$  (dargestellt durch  $CD$ ) den gleichen Vektor  $AD$  wie bei Addition von  $c_1$  (dargestellt durch  $AB_1$ ) und  $(c_2 + c_3)$  (dargestellt durch  $B_1D$ ).

**8.** Bevor wir zur Multiplikation kommen, übertragen wir auf die komplexen Zahlen die Begriffe "absoluter Betrag" und "Argument".

Der Vektor  $AB$  stelle die komplexe Zahl  $c$  dar. Unter dem absoluten Betrag von  $c$  versteht man

die Länge des Vektors  $AB$  und unter dem Argument von  $c$  den Winkel zwischen der positiven Richtung der  $x$ -Achse und dem Vektor  $AB$ . Entgegen dem Uhrzeigersinn zählt der Winkel positiv, in Uhrzeigerrichtung negativ. Außerdem kann man ein beliebiges ganzes Vielfaches von  $360^\circ$  hinzufügen.

Den absoluten Betrag und das Argument einer Zahl  $c$  bezeichnet man wie bei reellen Zahlen mit  $|c|$  bzw.  $\text{Arg } c$ . Neu im Vergleich zu den reellen Zahlen ist, dass das Argument einer komplexen Zahl von  $0^\circ$  und  $\pm 180^\circ$  verschieden sein kann, denn  $0^\circ$  und  $\pm 180^\circ$  sind gerade die Argumente der reellen von 0 verschiedenen Zahlen, und zwar  $0^\circ$  für positive und  $\pm 180^\circ$  für negative Zahlen.

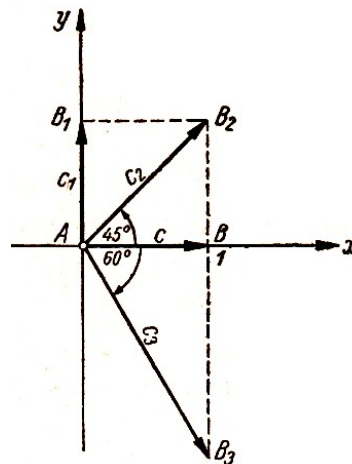


Abb. 7

In Abb. 7 sind die Vektoren  $AB$ ,  $AB_1$ ,  $AB_2$  und  $AB_3$  eingezeichnet, welche die komplexen Zahlen  $c$ ,  $c_1$  und  $c_2$  darstellen.

Der Leser möge die folgenden Behauptungen nachprüfen:

$$|c| = |c_1| = 1; \quad |c_2| = \sqrt{2}; \quad |c_3| = 2$$

$$\text{Arg } c = 0^\circ; \quad \text{Arg } c_1 = 90^\circ; \quad \text{Arg } c_2 = 45^\circ; \quad \text{Arg } c_3 = -60^\circ = 300^\circ$$

**9.** Nachdem wir den Begriff des absoluten Betrages und des Argumentes einer komplexen Zahl eingeführt haben, können wir auch die Regel für die Multiplikation von komplexen Zahlen beweisen.

Sie stimmt Wort für Wort mit der entsprechenden Vorschrift für die Multiplikation reeller Zahlen überein:

Um eine komplexe Zahl  $c_1$  mit einer komplexen Zahl  $c_2$  zu multiplizieren ( $c_1 \neq 0$  und  $c_2 \neq 0$ ), muss man die Länge des  $c_1$  darstellenden Vektors mit  $|c_2|$  multiplizieren (die Richtung des  $c_1$  darstellenden Vektors bleibt dabei erhalten) und dann den in der Länge veränderten Vektor im Punkt  $A$  um den Winkel drehen, der gleich dem Argument von  $c_2$  ist.

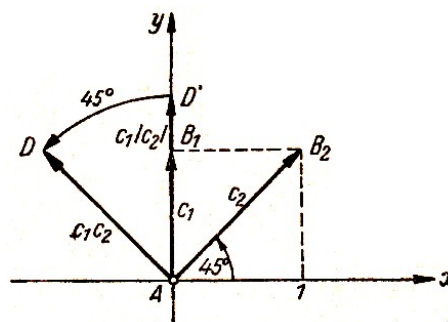


Abb. 8

Der so erhaltene Vektor stellt das Produkt  $c_1 \cdot c_2$  dar. Zum Beispiel wird das Produkt  $c_1 \cdot c_2$  durch den Vektor  $AD$  (Abb. 8) und das Produkt  $c_2 \cdot c_3$  durch den Vektor  $AE$  (Abb.9) dargestellt.

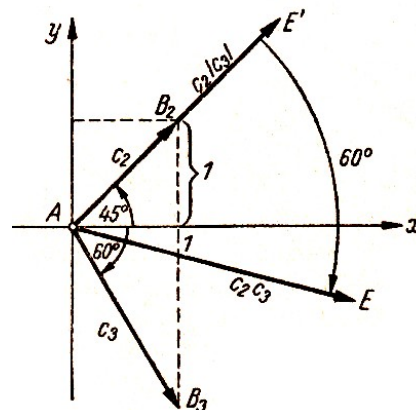


Abb. 9

Zur Multiplikationsvorschrift muss man noch hinzufügen, dass das Produkt verschwindet, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Wenden wir die Multiplikationsvorschrift auf das Produkt  $c_2 \cdot c_1$  an (die Reihenfolge der Faktoren ist geändert), so muss die Länge des Vektors, der  $c_2$  darstellt, mit  $|c_1|$  multipliziert und der so entstandene Vektor im Punkte  $A$  um den Winkel gedreht werden, der gleich dem Argument von  $c_1$  ist. Offenbar ist das Ergebnis dasselbe wie bei der Multiplikation  $c_1 \cdot c_2$ .

In beiden Fällen ist die Länge des erhaltenen Vektors gleich  $|c_1| \cdot |c_2|$ , während der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und diesem Vektor gleich  $\text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2$  ist. Somit ist

$$c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1$$

das kommutative Gesetz gilt also auch für die Multiplikation komplexer Zahlen. Ebenso gilt auch wieder das assoziative Gesetz

$$(c_1 \cdot c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot (c_2 \cdot c_3)$$

In der Tat wird jedes der beiden Produkte durch denselben Vektor dargestellt. Seine Länge ist  $|c_1| \cdot |c_2| \cdot |c_3|$ , während der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und diesem Vektor offenbar gleich  $\text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2 + \text{Arg } c_3$  ist.

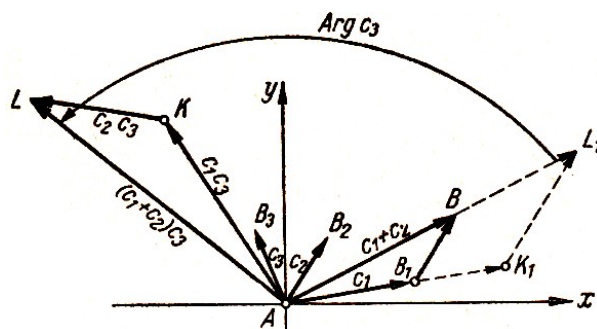


Abb. 10

Wir beweisen schließlich das distributive Gesetz

$$(c_1 + c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3$$

In Abb. 10 stellt der Vektor  $AB$  die Summe  $c_1 + c_2$  dar; multiplizieren wir, indem wir die Richtung von  $AB_1$  und  $AB_2$  beibehalten, alle Seiten des Dreiecks  $AB_1B$  mit  $|c_3|$ , so ergibt



sich das Dreieck  $AK_1L_1$ , das dem Dreieck  $AB_1B$  ähnlich ist; es wird durch die Vektoren  $AK_1$ ,  $K_1L_1$  und  $AL_1$  gebildet, die aus den Vektoren  $c_1$ ,  $c_2$  und  $(c_1 + c_2)$  durch Multiplikation ihrer Länge mit  $|c_3|$  hervorgehen (ohne Veränderung der Richtung).

Wir drehen nun das Dreieck  $AK_1L_1$  im Punkte  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c_3$ ; es ergibt sich das Dreieck  $AKL$ . Nach der Multiplikationsvorschrift stellt der Vektor  $AK$  das Produkt  $c_1c_3$ , der Vektor  $KL$  das Produkt  $c_2c_3$  und der Vektor  $AL$  das Produkt  $(c_1 + c_2)c_3$  dar. Gemäß der Additionsvorschrift finden wir aus diesem Dreieck

$$c_1c_3 + c_2c_3 = (c_1 + c_2)c_3$$

was zu beweisen war.

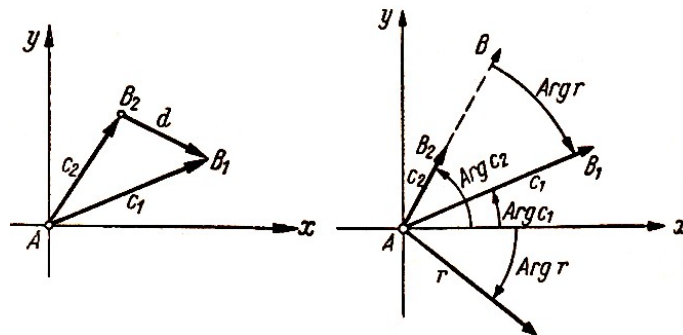


Abb. 11, 12

**10.** Die Subtraktion und Division werden als Umkehrungen der Addition und Multiplikation erklärt. Wir nennen nämlich eine komplexe Zahl  $d$  die Differenz der Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  und schreiben  $d = c_1 - c_2$ , wenn  $c_1 = c_2 + d$  gilt, das heißt, wenn  $c_1$  die Summe von  $c_2$  und  $d$  ist.

Abb. 11 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Wir sehen, dass wir den Vektor, der die Differenz  $c_1 - c_2$  darstellt, dadurch erhalten, dass wir den Punkt  $B_2$  (den Endpunkt des Vektors, der den Subtrahenden darstellt) mit dem Punkt  $B_1$  (dem Endpunkt des Vektors, der den Minuenden darstellt) verbinden und den ersten Punkt als Anfang, den zweiten als Endpunkt dieses Vektors ansehen.

Analog nennen wir die komplexe Zahl  $r$  den Quotienten von  $c_1$  und  $c_2$  ( $c_2 \neq 0$ ) und schreiben  $r = c_1 : c_2$  oder  $r = \frac{c_1}{c_2}$ , wenn  $c_1 = c_2r$  ist, das heißt, wenn  $c_1$  gleich dem Produkt von  $c_2$  mit  $r$  ist (Abb. 12).

Hieraus folgt, dass  $|r|$ , die Länge des Vektors, der  $r$  darstellt, gleich  $|c_1|/|c_2|$  ist, während  $\text{Arg } r$  gleich dem Winkel  $B_2AB_1$  ist, und zwar von  $AB_2$  nach  $AB_1$  gezählt (in Abb. 12 stimmt diese Richtung mit dem Uhrzeigersinn überein; der Winkel ist also hier negativ).

Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Werden  $c_1$  und  $c_2$  durch parallele und gleichgerichtete Vektoren dargestellt, so ist der Winkel  $B_2AB_1$  gleich  $0^\circ$ ; folglich ist  $\text{Arg } r = 0^\circ$ , das heißt,  $r$  ist eine reelle positive Zahl. Werden  $c_1$  und  $c_2$  durch parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Vektoren dargestellt, so ist der Winkel  $B_2AB_1$  gleich  $180^\circ$  (oder  $-180^\circ$ ), und  $r$  ist negativ reell.

Wir können also sagen, dass Addition und Multiplikation komplexer Zahlen denselben Gesetzen genügen (dem kommutativen, assoziativen und distributiven) wie bei den reellen Zahlen, während Subtraktion und Division ebenso wie bei den reellen Zahlen sich als zu Addition und Multiplikation inverse Grundrechenarten einführen lassen. Darum bleiben alle Rechenregeln und Formeln, die in der Algebra für reelle Zahlen abgeleitet wurden, wegen der Definition der vier Grundrechenarten und wegen der erwähnten Regeln auch für komplexe Zahlen richtig.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) &= c_1^2 - c_2^2 \\ (c_1 + c_2)^2 &= c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2 \\ \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} &= \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0, c_4 \neq 0) \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

**11.** Der sich mit Mathematik beschäftigende Leser ist schon wiederholt auf eine Erweiterung (oder Verallgemeinerung) des Zahlbegriffs gestoßen. Dies war zum Beispiel in der Arithmetik bei der Einführung der Brüche oder in der Algebra bei der Einführung der negativen Zahlen und später bei der Einführung der irrationalen Zahlen der Fall.

Jede neue Erweiterung des Zahlbegriffs ermöglichte die Lösung solcher Aufgaben, die bis dahin unlösbar oder sogar sinnlos waren. So ermöglichte die Einführung der Brüche, die Division zweier Zahlen immer dann auszuführen, wenn der Divisor von Null verschieden ist. Zum Beispiel konnte man 4 durch 3 oder 2 durch 5 teilen.

Die Einführung der negativen Zahlen erlaubte, die Subtraktion in jedem Falle auszuführen, zum Beispiel 5 von 2 abzuziehen; die Einführung der irrationalen Zahlen ermöglichte, die Länge jeder mit der Einheitsstrecke inkommensurablen Strecke durch eine Zahl anzugeben, zum Beispiel die Länge der Diagonalen in einem Quadrat, dessen Seitenlänge gleich 1 ist. Jedoch können wir nicht die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ziehen, wenn wir uns auf reelle Zahlen beschränken.

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass die Einführung der komplexen Zahlen diese Aufgabe lösbar macht. Natürlich werden wir als Quadratwurzel einer komplexen Zahl  $c$  (wir schreiben dafür  $\sqrt{c}$ ) eine komplexe Zahl  $a$  bezeichnen, deren Quadrat (das heißt, deren Produkt mit sich selbst) gleich  $c$  ist.

Es bedeutet also  $a = \sqrt{c}$ , dass  $a \cdot a = c$  ist. Es sei etwa  $c$  eine negative Zahl, zum Beispiel  $c = -1$ ; wir wollen  $\sqrt{-1}$  ermitteln. Dazu müssen wir also die Gleichung  $a^2 = -1$  lösen.

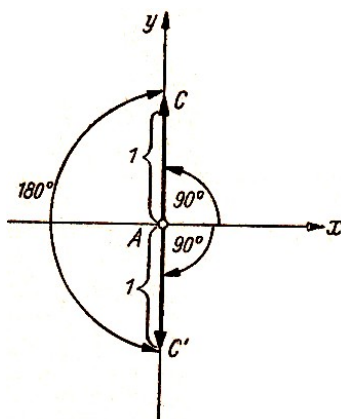


Abb. 13

Nun heißt  $a$  mit  $a$  zu multiplizieren nichts weiter, als erstens die Länge des Vektors, der  $a$  darstellt, mit  $|a|$  zu multiplizieren, das heißt, mit seiner eigenen Länge (dabei bleibt die Richtung ungeändert), und zweitens den so erhaltenen Vektor im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } a$  zu drehen.

Offenbar ist die Länge des so ermittelten Vektors dann gleich  $|a|^2$ . Nun soll aber dieser Vektor die Zahl  $-1$  darstellen; darum ist seine Länge gleich der Einheit, also  $|a|^2 = 1$ , und folglich  $|a| = 1$  (die Länge eines Vektors ist niemals negativ).

Weiterhin ist der Winkel zwischen dem Vektor, der  $a^2$  darstellt, und der  $x$ -Achse gleich  $\text{Arg } a + \text{Arg } a = 2 \text{Arg } a$ . Da  $a^2 = -1$  ist, muss  $2 \text{Arg } a = 180^\circ$  sein.

Hieraus folgt, dass entweder  $\text{Arg } a = 90^\circ$  oder  $\text{Arg } a = -90^\circ$  ist. Wir erhalten folglich zwei verschiedene Vektoren  $AC$  und  $AC'$ , die zwei verschiedene Werte von  $\sqrt{-1}$  darstellen (Abb. 13).

Die komplexe Zahl, die durch den Vektor  $AC$  dargestellt wird, bezeichnet man mit  $i$  und nennt sie die imaginäre Einheit.

Es ist  $|i| = 1$ ,  $\text{Arg } i = 90^\circ$ . Man sieht sofort, dass man die komplexe Zahl, die durch den Vektor  $AC'$  dargestellt wird, aus  $i$  durch Multiplikation mit  $-1$  erhält. Nach der Multiplikationsvorschrift muss man nämlich die Länge von  $AC$  mit  $|-1| = 1$  multiplizieren (dadurch ändert sich der Vektor  $AC$  nicht) und dann  $AC$  im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg}(-1) = 180^\circ$  drehen; man erhält  $AC'$ . Die diesem Vektor entsprechende komplexe Zahl ist demzufolge  $i(-1)$  oder  $-1 \cdot i$ , kürzer geschrieben:  $-i$ . Somit ist  $\sqrt{-1} = \pm i$ .

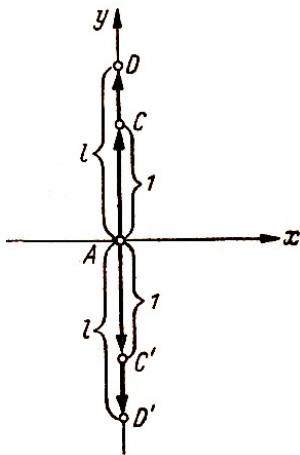


Abb. 14

Somit stellt ein beliebiger Vektor, der nicht gleich Null ist und auf der  $y$ -Achse oder ihr parallel liegt, eine imaginäre Zahl<sup>2</sup> der Form  $\pm li$  dar, wobei das positive oder negative Zeichen steht, je nachdem, ob der Vektor wie die positive  $y$ -Achse orientiert ist oder entgegengesetzt.

Man nennt die  $y$ -Achse die imaginäre Achse. Die  $x$ -Achse, auf der alle Vektoren reelle Zahlen darstellen, wird reelle Achse genannt.

Wir betrachten irgendeinen Vektor  $A'E'$ , der weder auf der einen noch auf der anderen Achse liegt und auch zu keiner dieser Achsen parallel ist. Mit Hilfe der in Abb. 15 angegebenen Konstruktion kann man die Zahl  $c$ , die durch diesen Vektor dargestellt wird, als Summe zweier anderer Zahlen darstellen; die eine wird durch den Vektor  $A'B'$  dargestellt, der parallel zur  $x$ -Achse ist (oder auf ihr liegt), während die andere durch den Vektor  $B'E'$  dargestellt wird, der parallel zur  $y$ -Achse verläuft.

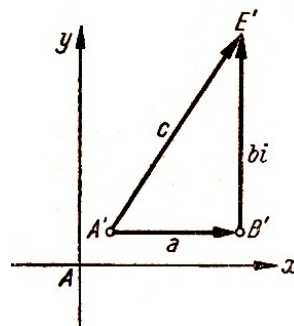


Abb. 15

Nun repräsentiert aber  $A'B'$  eine reelle Zahl  $a$ , während  $B'E'$  eine imaginäre Zahl  $bi$  bedeutet. Somit ist also  $c = a + bi$ .

Somit haben wir die komplexe Zahl  $c$  durch die reellen Zahlen  $a$  und  $b$  und durch die imaginäre Einheit  $i$  dargestellt. Da  $A'E'$  zu keiner der beiden Achsen parallel vorausgesetzt war, gilt

<sup>2</sup>Wir nennen hier nur diejenigen komplexen Zahlen, deren zugeordnete Vektoren auf der imaginären Achse liegen oder ihr parallel sind, imaginäre Zahlen. Einem anderen Sprachgebrauch zufolge versteht man unter imaginären Zahlen die nichtreellen komplexen Zahlen; unsere imaginären Zahlen werden dann rein imaginäre Zahlen genannt.

---

$a \neq 0, b \neq 0$ .

Man sieht sofort, dass Zahlen, die durch Vektoren dargestellt werden, welche zu einer der beiden Achsen parallel verlaufen, in analoger Weise geschrieben werden können.

Ist der Vektor parallel zur reellen Achse, so stellt er eine Zahl der Form  $a + 0i$  dar, ist er parallel zur imaginären Achse, so haben wir eine Zahl der Form  $0 + bi$ .

Es kann also jede komplexe Zahl  $c$  in der Form  $c = a + bi$  dargestellt werden, wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind und  $i$  die imaginäre Einheit ist.

### 13. Wir fassen zusammen:

Wir gingen von der Darstellung der reellen Zahlen durch Vektoren aus, die alle auf ein und derselben Geraden lagen. Dann kleideten wir die Ausführung der Grundrechenarten mit ihnen in eine geometrische Form und betrachteten die Vektoren in der ganzen Ebene als Darstellungen von Zahlen allgemeinerer Art (die wir komplexe Zahlen nannten), die nur in dem Spezialfall, dass die Vektoren auf der  $x$ -Achse oder parallel zu ihr liegen, in die reellen Zahlen übergehen.

Wir übertragen auf die Vektoren in der Ebene die Operationen, die wir auf die Vektoren auf der Geraden angewendet hatten, und führten so Addition und Multiplikation ein (und dann auch die inversen Operationen Subtraktion und Division). Dabei überzeugten wir uns davon, dass sie denselben Regeln genügen, wie sie für die reellen Zahlen gelten.

Jedoch wissen wir von den komplexen Zahlen selbst noch nichts, außer, dass sie sich alle durch Vektoren darstellen lassen, wobei zwei beliebige Vektoren, die gleich lang, parallel und von gleichem Richtungssinn sind, dieselbe komplexe Zahl darstellen, während Vektoren, die sich in Länge, Richtung oder Richtungssinn unterscheiden, verschiedene Zahlen darstellen.

Wir überzeugten uns davon, dass die komplexen Zahlen es ermöglichen, die Quadratwurzel aus  $-1$  zu ziehen, und führten die imaginäre Einheit  $i$  als einen der zwei Werte von  $\sqrt{-1}$  ein, und zwar als den Wert der Wurzel, dessen Argument  $+90^\circ$  beträgt.

Schließlich haben wir gezeigt, indem wir uns auf die Rechenvorschriften für komplexe Zahlen stützten, dass jede komplexe Zahl  $c$  in der Form  $c = a + bi$  dargestellt werden kann, wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind.

Somit besteht  $c$  aus den beiden Summanden  $a$  und  $bi$ ;  $a$  wird durch einen Vektor der reellen Achse dargestellt und kann als Produkt der reellen Zahl  $a$  mit der reellen Einheit angesehen werden;  $bi$  wird durch einen Vektor der imaginären Achse dargestellt und kann als Produkt der reellen Zahl  $b$  mit der imaginären Einheit  $i$  angesehen werden.

Diese Struktur der komplexen Zahlen ist der Grund dafür, dass diese Zahlen komplex (zusammengesetzt) genannt werden.

Man nennt  $a$  den Realteil und  $b$  den Imaginärteil der komplexen Zahl  $c$ . Zum Beispiel ist bei  $c = 3 - 2i$  der Realteil gleich 3 und der Imaginärteil gleich  $-2$ .

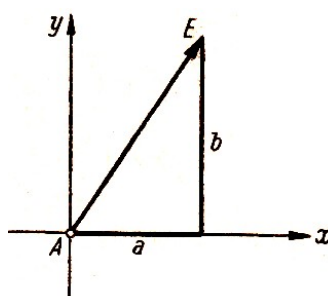


Abb. 16

**14.** Stellen wir komplexe Zahlen  $c$  durch Vektoren mit dem Anfangspunkt in  $A$  dar, so entsprechen voneinander verschiedenen komplexen Zahlen nicht zusammenfallende Vektoren und umgekehrt (das heißt, nicht zusammenfallende Vektoren entsprechen verschiedenen komplexen Zahlen).

Es sei  $c = a + bi$ ; dann hat der Endpunkt des Vektors  $AE$ , welcher die Zahl  $c$  darstellt, die Abszisse  $a$  und die Ordinate  $b$  (Abb. 16).

Bringen wir also den Anfangspunkt des die Zahl  $c = a + bi$  darstellenden Vektors in den Koordinatenursprung  $A$ , so sind die Zahlen  $a$  und  $b$  die Koordinaten des Endpunktes dieses Vektors.

Macht man von dieser Bemerkung Gebrauch, so kann man komplexe Zahlen geometrisch nicht nur durch Vektoren, sondern auch durch Punkte darstellen. Jede komplexe Zahl  $a + bi$  kann man nämlich durch genau einen Punkt  $E$  mit den Koordinaten  $a$  und  $b$  darstellen. Umgekehrt gilt auch: Jeden Punkt  $E'$  mit den Koordinaten  $a'$  und  $b'$  kann man als Bild der komplexen Zahl  $a' + ib'$  auffassen.

In Abb. 17 entsprechen die Punkte  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  der Reihe nach den Zahlen  $-1, i, -i, 1 + i, 1 - i$ .

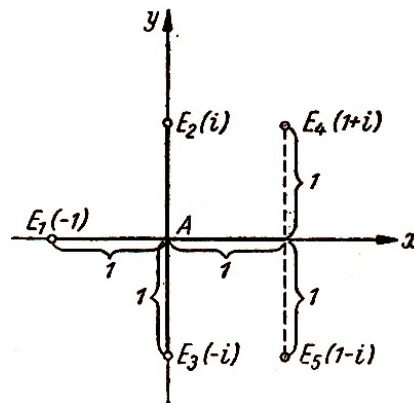


Abb. 17

Im folgenden werden wir der Kürze halber unter dem "Punkt  $z$ " sowohl die komplexe Zahl  $z$  selbst als auch den sie darstellenden Punkt  $E$  verstehen. Sagen wir zum Beispiel der "Punkt  $1 + i$ ", so meinen wir sowohl die Zahl  $1 + i$  als auch den sie darstellenden Punkt  $E_4$  (Abb. 17). Aus dem Text wird dann jeweils hervorgehen, was gerade mit dem Ausdruck gemeint ist. Übrigens ist es nicht notwendig, sich mit dieser Frage zu beschäftigen. Man kann beide Interpretationen als gleichbedeutend benutzen.

**15.** Es sei  $z$  ein gewisser Punkt. Addiert man zu  $z$  einen anderen Punkt  $a$ , so erhält man einen neuen Punkt  $z' = z + a$ .

Man kann offenbar vom Punkt  $z$  zum Punkt  $z'$  durch Verschiebung um den Vektor  $a$  gelangen, das heißt durch Verschiebung des Punktes  $z$  in Richtung des Vektors  $a$  um einen Betrag, der gleich der Länge des Vektors  $a$  ist (Abb. 18).

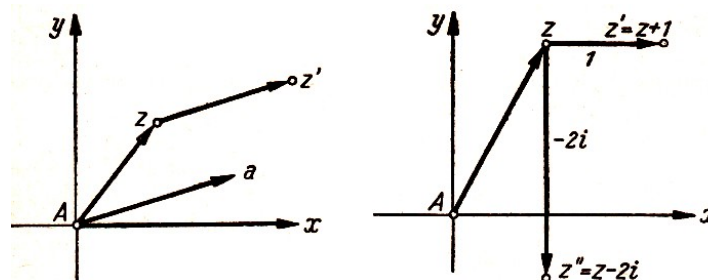


Abb. 18, 19

Durch Wahl entsprechender Werte für  $a$  kann man jede Verschiebung des Punktes  $z$  erreichen. Will man zum Beispiel den Punkt  $z$  in der positiven Richtung der  $x$ -Achse um eine Einheit verschieben, so wählen wir  $a = 1$ . Der Punkt  $z' = z + 1$  ist dann der gesuchte Punkt. Soll  $z$  in der negativen Richtung der  $y$ -Achse um zwei Einheiten verschoben werden, so wählen wir  $a = -2i$ . Der Punkt  $z'' = z + (-2i) = z - 2i$  ist dann der gesuchte (Abb. 19).

Also bedeutet die Addition  $z' = z + a$  geometrisch eine Verschiebung des Punktes  $z$  um den Vektor  $a$ .

**16.** Wir betrachten die Multiplikation von  $z$  mit einer Zahl  $c \neq 0$ . Dazu müssen wir die Länge des Vektors  $AE$  (das heißt die Zahl  $|z|$ ) mit  $|c|$  multiplizieren und den so erhaltenen Vektor  $AE_1$  um den Winkel  $\text{Arg } c$  drehen (Abb.20).

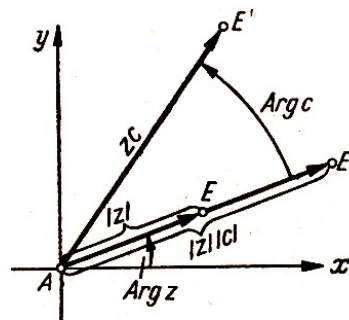


Abb. 20

Die erste Operation verändert nicht die Richtung des Vektors  $AE$ , sondern nur seine Länge. Ist  $|c| < 1$ , so wird die Länge kleiner, bei  $|c| > 1$  größer, bei  $|c| = 1$  bleibt sie erhalten. Wir nennen diese Operation eine Streckung des Vektors  $AE$  um den Faktor  $|c|$ .

Das Wort "Streckung" ist hier nur bedingt richtig, tatsächlich findet eine Streckung nur bei  $|c| > 1$  statt, dann nimmt die Länge des Vektors  $AE$  um den Faktor  $|c|$  zu. Wir wollen aber diesen Ausdruck auch bei  $|c| = 1$  (wenn die Länge von  $AE$  erhalten bleibt) und bei  $|c| < 1$  (wenn die Länge von  $AE$  kleiner wird) verwenden.

Ist  $c$  eine reelle positive Zahl, so ist  $\text{Arg } c = 0$ . Dann wird der gestreckte Vektor nicht weiter gedreht. Der Punkt  $E_1$  stellt dann das Produkt  $z \cdot c$  dar. Man kann sagen, dass die Multiplikation von  $z$  mit der reellen positiven Zahl  $c$  geometrisch die Streckung des Vektors  $AE$  (der  $z$  darstellt) um den Faktor  $c$  bewirkt.

Ändert man  $c$ , so erhält man die verschiedensten Längen von  $AE$ ; um  $AE$  zu verdoppeln, muss man  $z$  mit 2 multiplizieren; um die Länge auf  $\frac{2}{3}$  der ursprünglichen zu verkürzen, muss man  $z$  mit  $\frac{2}{3}$  multiplizieren.

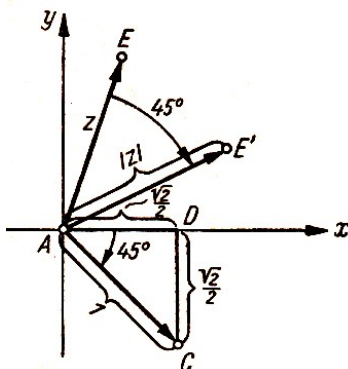


Abb. 21

Ist  $c$  keine positive reelle Zahl, so ist  $\text{Arg } c \neq 0$ . Dann bedeutet die Multiplikation von  $z$  mit  $c$  nicht nur eine Streckung des Vektors  $AE$ , sondern auch eine Drehung des gestreckten Vektors im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$ . Allgemein bedeutet also die Ausführung der Multiplikation  $z \cdot c$  eine Drehstreckung (Streckung um  $|c|$  und Drehung im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$ ).

Ist speziell  $|c| = 1$ , so besteht die Multiplikation mit  $c$  nur aus einer Drehung um  $\text{Arg } c$ .

Durch geeignete Wahl von  $c$  kann man  $AE$  um jeden Winkel drehen.

Wollen wir  $AE$  um  $90^\circ$  im positiven Sinne drehen (entgegen dem Uhrzeigersinn), so müssen wir  $z$  mit  $i$  multiplizieren, denn es ist  $|i| = 1$  und  $\text{Arg } i = 90^\circ$ .

Um  $AE$  im negativen Sinne (im Uhrzeigersinn) um  $45^\circ$  zu drehen, müssen wir  $z$  mit der komplexen Zahl  $c$  multiplizieren, deren Argument  $-45^\circ$  beträgt.

Diese Zahl findet man in Abb. 21. Der Punkt  $C$  stellt dort diese Zahl  $c$  dar. Die Koordinaten von  $C$  sind, wie man leicht sieht,  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Daher ist  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Somit bewirkt eine Multiplikation von  $z$  mit  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$  eine Drehung von  $AE$  (durch  $AE$  wird  $z$  dargestellt) im Punkt  $A$  um einen Winkel von  $45^\circ$  in negativer Richtung.

**17.** Die Formeln  $z' = z + a$  bzw.  $z' = cz$  transformieren den Punkt  $z$  in den Punkt  $z'$ . Wir betrachten nicht einen, sondern unendlich viele Punkte  $z$ , die eine geometrische Figur  $P$  (zum Beispiel wie in Abb. 22 ein Dreieck) bilden.

Wenden wir für jeden Punkt  $z$  die Formel  $z' = z + a$  an, so erhalten wir für jeden Punkt  $z$  einen neuen Punkt  $z'$ , der um den Vektor  $a$  parallel verschoben ist. Alle diese parallel verschobenen Punkte  $z'$  bilden eine neue Figur  $P'$ .

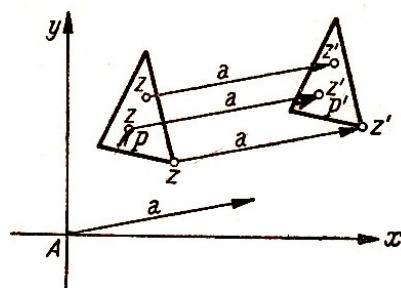


Abb. 22

Offenbar kann man diese auch erhalten, indem man die Figur  $P$  als Ganzes um den Vektor  $a$  verschiebt. Man kann also durch die Formel  $z' = z + a$  nicht nur einen Punkt, sondern eine ganze Figur (eine Punktmenge) transformieren.

Die Transformation besteht aus der Parallelverschiebung (Translation) der Figur um den Vektor  $a$ . Natürlich ist die transformierte Figur der ursprünglichen kongruent.

**18.** Man kann auf jeden Punkt  $z$  von  $P$  die Formel  $z' = cz$  anwenden. Ist  $c$  eine reelle positive Zahl, so wird jeder Punkt  $z$  der Figur  $P$  in einen neuen Punkt  $z'$  transformiert, der auf demselben von  $A$  ausgehenden Strahl liegt wie  $z$ , während das Verhältnis  $\frac{|z'|}{|z|}$  (d.h. das Verhältnis der Abstände der Punkte  $z'$  bzw.  $z$  von  $A$ ) gleich  $c$  ist.

Eine solche Transformation nennt man in der Geometrie eine Ähnlichkeitstransformation oder Homothetie. Man nennt  $A$  das Zentrum der Ähnlichkeitstransformation und die Zahl  $c$  ihren Koeffizienten.

Bei einer Ähnlichkeitstransformation geht die Menge aller Punkte der Figur  $P$  in die Menge derjenigen Punkte über, die die Figur  $P'$  bilden (Abb. 23). Diese Figur heißt ein homothetisches Bild der gegebenen. Man sieht leicht, dass dann, wenn die gegebene Figur ein Vieleck ist, auch das transformierte Bild ein Vieleck ist (zum Beispiel ein Dreieck). Die beiden Vielecke sind ähnlich. Um dies zu beweisen, braucht man nur zu beachten, wie bei einer Ähnlichkeitstransformation Punkte transformiert werden, die auf ein und derselben Seite  $BC$  des Vielecks  $P$  liegen (Abb. 23).

Werden  $B$  in  $B'$  und  $C$  in  $C'$  übergeführt, so finden wir, wenn wir  $B'$  und  $C'$  durch eine Gerade verbinden, dass die Dreiecke  $ABC$  und  $AB'C'$  ähnlich sind. (Sie stimmen in dem

Verhältnis zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, denn es ist  $AB'/AB = AC'/AC = c$ , und beide Dreiecke haben den Winkel bei  $A$  gemeinsam.)

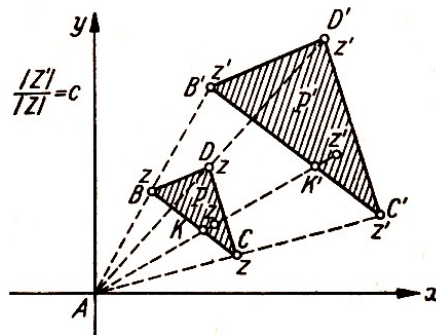


Abb. 23

Hieraus folgt weiter, dass die Seite  $B'C'$  parallel zu  $BC$  und dass  $B'C'/BC = c$  ist. Sei nämlich  $K$  ein Punkt auf  $BC$ . Dann trifft der Strahl  $AK$  die Seite  $B'C'$  in einem Punkt  $K'$ . Die Dreiecke  $AKC$  und  $AK'C'$  sind ebenfalls ähnlich, und folglich gilt  $AK'/AK = AC'/AC = c$ . Daher ist der Punkt  $K'$  der dem Punkt  $K$  durch die von uns untersuchte Ähnlichkeitstransformation  $z' = c \cdot z$  zugeordnete transformierte Punkt. Hieraus ergibt sich, dass alle Punkte von  $BC$  bei der Ähnlichkeitstransformation in Punkte übergeführt werden, die auf der Seite  $B'C'$  liegen.

Jeder Punkt auf  $B'C'$  ist dabei einem der Punkte auf  $BC$  durch die Transformation zugeordnet. Die ganze Strecke  $B'C'$  geht daher durch die Transformation aus  $BC$  hervor.

Führen wir diese Überlegung für alle Seiten von  $P$  durch, so finden wir, dass sie alle in die entsprechenden Seiten des transformierten Vielecks  $P'$  übergehen. Es sind dabei einander entsprechende Seiten paarweise parallel, und das Verhältnis ihrer Längen ist gleich ein und derselben Zahl  $c$ , d.h.

$$B'C'/BC = C'D'/CD = D'B'/DB = c$$

Damit haben wir die Ähnlichkeit der Figuren  $P$  und  $P'$  gezeigt.

Man kann also mit Hilfe der Formel  $z' = c \cdot z$  ( $c$  ist reell und positiv) nicht nur einen Punkt transformieren, sondern auch eine ganze Figur  $P$ . Es handelt sich um eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum  $A$  und dem Koeffizienten  $c$ .

Ist  $P$  ein Vieleck, so liefert die Transformation ein Vieleck  $P'$ , das  $P$  ähnlich ist.

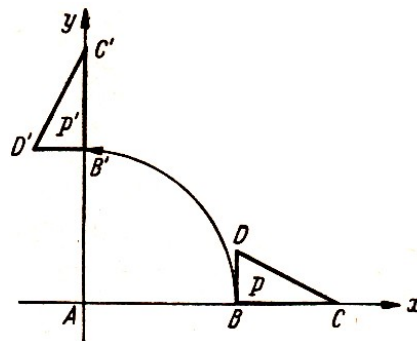


Abb. 24

**19.** Es sei nun  $c$  in der Formel  $z' = c \cdot z$  nicht positiv reell. Wir nehmen zunächst an, es sei  $|c| = 1$ . Dann besteht die ganze Multiplikation in der Drehung des die Zahl  $z$  darstellenden Vektors im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$ .

Wendet man diese Operation auf jeden Punkt  $z$  der Figur  $P$  an, so ist schließlich die ganze Figur  $P$  im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$  gedreht.



Es wird also durch die Formel  $z' = c \cdot z$  mit  $|c| = 1$  eine Figur  $P$  in eine Figur  $P'$  transformiert, die aus  $P$  durch die Drehung im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$  hervorgeht. Nehmen wir  $c = i$ , so ist  $\text{Arg } i = 90^\circ$ . Die Transformation  $z' = i \cdot z$  bewirkt eine Drehung der Figur im Punkt  $A$  um  $90^\circ$ .

In Abb. 24 ist dargestellt, wie diese Transformation auf ein Dreieck wirkt. Gilt in  $z' = c \cdot z$  nicht  $|c| = 1$ , sondern ist  $c$  eine beliebige komplexe Zahl (nicht positiv reell und von Null verschieden), so führen wir die Abbildung der Figur  $P$  jetzt in zwei Schritten aus. Zuerst werden die Längen mit dem Faktor  $|c|$  multipliziert. Dabei geht  $P$  in die ähnliche Figur  $P_1$  über. Dann drehen wir  $P_1$  im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$ .

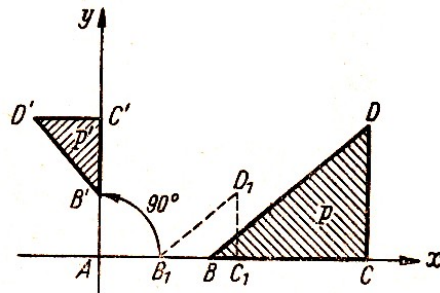


Abb. 25

In Abb. 25 ist die Anwendung der Transformation  $z' = \frac{i}{2}z$  (hier ist  $|\frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$  und  $\text{Arg } \frac{i}{2} = 90^\circ$ ) auf das Dreieck  $BCD$  dargestellt.

**20.** In den Formeln  $z' = z + a$  und  $z' = c \cdot z$  kann man  $z$  als unabhängige und  $z'$  als abhängige Veränderliche ansehen. Wir haben es mit einfachsten Funktionen einer komplexen Veränderlichen  $z$  zu tun.

Verknüpfen wir  $z$  und irgendwelche komplexen Konstanten durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzieren (letzteres betrachten wir als wiederholte Multiplikation), so erhalten wir verschiedene Funktionen von  $z$ , zum Beispiel

$$z' = \frac{1}{z}, \quad z' = z^2 + cz + d, \quad z' = \frac{z - a}{z - b}, \quad \text{usw.}$$

Alle diese Funktionen einer komplexen Veränderlichen nennt man rational. Sie heißen so, da die Operationen, mit deren Hilfe sie gebildet werden (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) "rational" genannt werden.

Es gibt nicht nur rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Wir können zum Beispiel Funktionen der Form  $z' = \sqrt[n]{z}$ ,  $z' = a^z$ ,  $z' = \sin z$  und andere definieren und untersuchen. In diesem Büchlein beschränken wir uns auf die rationalen Funktionen, und zwar auf die einfachsten von ihnen.

**21.** Wir haben gesehen, dass den Funktionen  $z' = z + a$  bzw.  $z'' = c \cdot z$  bestimmte geometrische Abbildungen entsprechen. Durchläuft nämlich die Veränderliche  $z$  die Figur  $P$ , so durchläuft der Funktionswert  $z' = z + a$  die Punkte der Figur  $P'$  (man erhält letztere durch Verschiebung der Figur  $P$  um den Vektor  $a$ ).

Der Funktionswert  $z'' = c \cdot z$  durchläuft die Punkte der Figur  $P''$ , die man aus  $P$  durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Koeffizienten  $|c|$  nach Drehung im Punkt  $A$  um den Winkel  $\text{Arg } c$  erhält.

Man kann also sagen, dass die Funktion  $z' = z + a$  eine Parallelverschiebung und die Funktion  $z'' = c \cdot z$  eine Ähnlichkeitstransformation mit Drehung vermitteln (ist  $c$  positiv reell, so hat man nur die Ähnlichkeitstransformation; ist  $|c| = 1$ , aber  $c \neq 1$ , so haben wir nur die Drehung).

Wir fragen uns nun, was man über die durch andere Funktionen einer komplexen Veränderlichen vermittelten Abbildungen sagen kann, besonders über die Abbildungen durch rationale Funktionen. Mit diesem Problem wollen wir uns gerade auf den folgenden Seiten des Büchleins beschäftigen.

Und damit der Leser einsieht, dass diese Beschäftigung nicht nutzlos ist, verraten wir ihm schon jetzt, dass sich die durch rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen vermittelten Transformationen durch erstaunliche Vielfalt und einen großen Reichtum an geometrischen Eigenschaften auszeichnen.

Obgleich sich bei diesen Abbildungen Größe und Form der Figur ändern, bleiben Winkel zwischen zwei Kurven, die zu der betrachteten Figur gehören, erhalten.<sup>3</sup>

Speziell bei den Funktionen  $z' = z + a$  bzw.  $z'' = c \cdot z$  ergibt sich die Winkeltreue direkt, da es sich hier um eine Parallelverschiebung, eine Ähnlichkeitsformation oder eine Drehung handelt. Es ist bemerkenswert, dass die Winkeltreue auch bei Transformationen durch beliebige rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen weiterbesteht, ja sogar bei noch viel allgemeineren und komplizierteren Funktionen einer komplexen Veränderlichen, den sogenannten analytischen Funktionen. Über letztere können wir aber in diesem kleinen Büchlein nicht in voller Allgemeinheit sprechen, sondern müssen uns mit einigen einfachsten Sonderfällen begnügen.

22. Die geometrischen Transformationen, bei denen die Winkel und der Drehsinn der Winkel zwischen je zwei beliebigen Kurven der zu transformierenden Figur erhalten bleiben, nennt man konforme Transformationen, meist aber konforme Abbildungen.

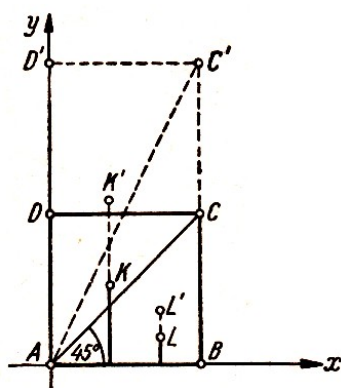


Abb. 26

22. Als Beispiele für konforme Abbildungen können wir die weiter oben behandelte Parallelverschiebung, die Ähnlichkeitstransformation und die Drehung ansehen.

Weitere Beispiele werden wir noch bringen. Wir wollen jetzt zeigen, welche Bedeutung es hat, dass wir in die Definition der konformen Abbildung die Forderung aufnehmen, dass von je zwei sich schneidenden (zu der Figur gehörenden) Kurven eingeschlossene Winkel erhalten bleiben.

Wir betrachten das Quadrat  $ABCD$  und transformieren es in eine andere Figur derart, dass die Abszisse  $x$  eines jeden Punktes erhalten bleibt, während die Ordinate  $y$  verdoppelt wird; dann geht zum Beispiel  $K$  in  $K'$  und  $L$  in  $L'$  über.

Wenden wir diese Transformation auf alle Punkte des Quadrates  $ABCD$  an, so erhalten wir offenbar  $ABC'D'$  mit der gleichen Grundseite und der doppelten Höhe. Die Seite  $AB$  geht dabei in sich über (kein Punkt ändert seine Lage, da ihre Ordinaten gleich Null sind, und nach "Verdoppelung" ebenfalls gleich Null sind); es gehen ferner  $AD$  in  $AD'$ ,  $DC$  in  $D'C'$  und  $BC$  in  $BC'$  über.

Natürlich bleiben die von den Seiten eingeschlossenen rechten Winkel erhalten. Wir betrachten nun den Winkel  $BAC$  zwischen der Seite  $AB$  und der Diagonalen  $AC$  unseres Quadrats (Abb. 26). Dieser Winkel ist gleich  $45^\circ$ .

Bei der Transformation ändert sich die Seite  $AB$  nicht,  $AC$  geht jedoch in  $AC'$  über (warum?). Folglich ändert sich der Winkel  $BAC$ , er geht in den größeren Winkel  $BAC'$  über.

<sup>3</sup>Es kann allerdings einzelne Punkte geben, in denen die Winkel verdoppelt, verdreifacht, ... (allgemein: mit einer natürlichen Zahl multipliziert) werden, wenn der Scheitel des Winkels in einem dieser Punkte liegt. Solche Punkte sind aber Ausnahmen.

Nehmen wir an Stelle des Winkels  $BAC$  den Winkel  $PQC$  mit dem Scheitel in irgendeinem anderen Punkt  $Q$  des Quadrate  $ABCD$  (Abb. 27), so können wir zeigen, dass sich auch dieser Winkel bei der betrachteten Transformation ändert.

Wir können daraus den folgenden Schluss ziehen: Obgleich manche Winkel des Vierecks  $ABCD$  (z.B. die rechten Winkel in den vier Ecken) bei der betrachteten Transformation erhalten bleiben, ist die ganze Abbildung nicht konform, da man für jeden Punkt aus  $ABCD$  einen Winkel mit dem Scheitel in diesem Punkt angeben kann, der sich bei dieser Transformation ändert (vergrößert).

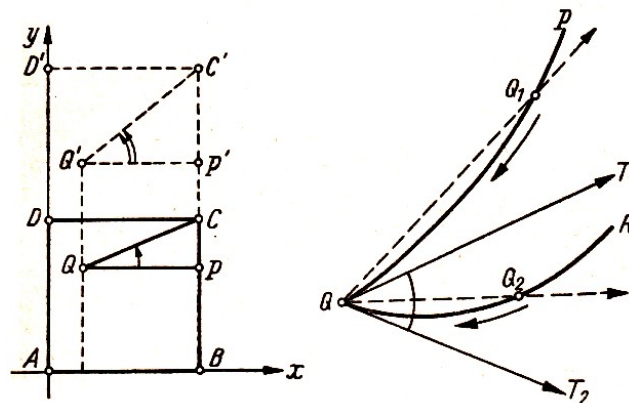


Abb. 27, 28

**23.** Bevor wir weitergehen, müssen wir erklären, was wir unter dem Winkel zwischen zwei Kurven  $QR$  und  $QP$ , die sich im Punkte  $Q$  schneiden, verstehen wollen (Abb. 28).

Wir wählen auf der Kurve  $QP$  einen von  $Q$  verschiedenen Punkt  $Q_1$  und ziehen die Sehne  $QQ_1$ . Ebenso legen wir auf  $QR$  einen von  $Q$  verschiedenen Punkt  $Q_2$  fest und ziehen die Sehne  $QQ_2$ .

Den Winkel  $Q_1QQ_2$  kann man als Näherungswert für den zu bestimmenden Winkel  $PQR$  ansehen. Je näher die Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  an  $Q$  heranrücken, desto mehr nähern sich die Sehnen den Kurven  $QP$  und  $QR$  in der Umgebung von  $Q$ .

Daher kann man dann auch den Winkel  $Q_1QQ_2$  als stets bessere Annäherung an den von unseren Kurven im Punkte  $Q$  gebildeten Winkel ansehen. Streben  $Q_1$  auf der Kurve  $QP$  und  $Q_2$  auf der Kurve  $QR$  gegen  $Q$ , so gehen die Sekanten  $QQ_1$  und  $QQ_2$  in die Grenzlagen  $QT_1$  und  $QT_2$  über.

Die Strahlen  $QT_1$  und  $QT_2$  berühren unsere Kurven in  $Q$  enger als alle anderen Strahlen durch  $Q$ . Man nennt  $QT_1$  und  $QT_2$  die Tangenten an die Kurven  $QP$  und  $QR$  im Punkte  $Q$ .

Den Winkel  $T_1QT_2$  sieht man als Winkel zwischen den Kurven  $QP$  und  $QR$  im Schnittpunkt  $Q$  an. Somit ist der Winkel zwischen zwei sich in einem Punkte schneidenden Kurven als der Winkel zwischen den in diesem Punkte an die beiden Kurven gelegten Tangenten erklärt.

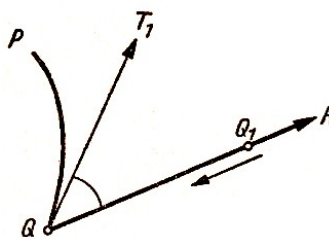


Abb. 29

Diese Definition ist auch auf den in einem Punkte  $Q$  von einer Kurve  $QP$  und einer Geraden  $QR$  gebildeten Winkel anwendbar (Abb. 29).

Es sei  $QT_1$  die Tangente an  $QP$  im Punkte  $Q$ . Um unsere Definition anwenden zu können, müssen wir auch die Gerade  $QR$  durch ihre Tangente ersetzen. Man sieht aber leicht ein, dass die Tangente an die Gerade  $QR$  mit der Geraden selbst zusammenfällt. Um nämlich eine Sekante zu erhalten, müssen wir auf  $QR$  einen von  $Q$  verschiedenen Punkt  $Q_1$  wählen und die Gerade durch  $Q$  und  $Q_1$  ziehen. Offenbar ist dies die Gerade  $QR$  selbst.

Nähert sich  $Q_1$  dem Punkt  $Q$ , so ändert sich die Sekante überhaupt nicht. Daher ist die Tangente als Grenzlage der Sekanten wiederum die Gerade  $QR$ . Folglich muss man unter dem Winkel zwischen der Kurve  $QP$  und der Geraden  $QR$  den von der Tangente  $QT_1$  und der Geraden  $QR$  gebildeten Winkel verstehen.

Ist  $QR$  selber Tangente an  $QP$  (d.h., fällt  $QR$  mit  $QT_1$  zusammen), so ist der Winkel zwischen  $QR$  und  $QP$  gleich Null. Folglich ist in einem Punkt  $Q$  der Winkel zwischen einer Kurve und der in diesem Punkte  $Q$  an sie gelegten Tangente gleich Null.

**24.** Konforme Abbildungen werden vielfach verwendet. In der Kartographie benutzt man sie bei der Konstruktion von Landkarten.

Jede geographische Karte bildet einen Teil der Erdoberfläche auf eine Ebene (ein Blatt Papier) ab. Bei einer solchen Darstellung werden die Umrisse der Kontinente, Meere und Ozeane mehr oder weniger stark verzerrt. Der Leser überzeugt sich leicht davon, dass es unmöglich ist, einen Teil einer Kugeloberfläche (zum Beispiel einen Teil eines entzweigegangenen Tischtennisballes) ohne Dehnung und Stauchung, ohne Riss und Falten auf eine Ebene auszubreiten.

Daher ist es nicht möglich, ohne Verzerrung einen Teil der Oberfläche der Erde (die wir hier als Kugel ansehen wollen) auf die Ebene abzubilden, d.h., es gibt keine verzerrungsfreie Landkarte. Es zeigt sich aber, dass man eine Karte konstruieren kann, auf der die Winkel zwischen verschiedenen Kurven auf der Erdoberfläche erhalten bleiben.

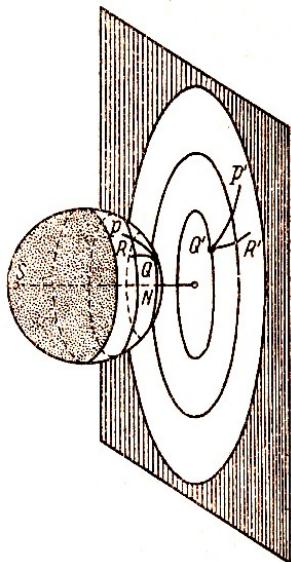


Abb. 30

Angenommen, wir sollten eine Karte der nördlichen Halbkugel herstellen, auf der die Winkel zwischen verschiedenen Richtungen auf der Erdoberfläche treu abgebildet werden.

Um uns anschaulich zu machen, wie dies vor sich geht, nehmen wir einen großen Globus aus irgendeinem durchsichtigen Stoff, zum Beispiel Glas, der mit undurchsichtiger Farbe so bemalt ist, dass nur die Umrisse der Kontinente, Länder und Meere auf der nördlichen Halbkugel sowie das Netz der Meridiane und Breitenkreise von der Farbe unbedeckt, also durchsichtig sind. Außerdem sollen die krummlinigen Schenkel irgendeines Winkels  $PQR$  mit dem Scheitel in einem beliebigen Punkt der nördlichen Halbkugel ungefärbt bleiben.

Befestigt man im Südpol des Globus eine kleine, aber lichtstarke Glühlampe und stellt man vor den Globus senkrecht zu seiner Nord-Süd-Achse einen Schirm, so sieht man im dunklen Zimmer auf dem Schirm die Karte der nördlichen Halbkugel (Abb. 30).

Man kann geometrisch beweisen, dass diese Abbildung, die man stereographische Projektion nennt, winkeltreu ist, d.h., dass die Winkel zwischen zwei beliebigen Kurven auf dem Globus gleich den Winkeln zwischen den Bildern der beiden Kurven in der Ebene sind. Insbesondere bleibt also auch der Winkel  $PQR$  erhalten.

**25.** Wir haben im vorigen Abschnitt gezeigt, wie man eine winkeltreue Karte der nördlichen

Halbkugel erhalten kann. Setzt man nun dort die Lichtquelle (Lampe), von der die projizierenden Strahlen ausgehen, nicht in den Süd-, sondern in den Nordpol des Globus, so erhält man auf analoge Weise eine Winkeltreue Karte der südlichen Halbkugel. Jede der beiden so erhaltenen Karten stellt eine ebene Figur dar.

Wendet man auf sie eine konforme Abbildung an, so gehen sie in eine neue Figur über, die man wieder als geographische Karte ansehen kann. Da sich bei einer konformen Abbildung die Winkel nicht ändern, haben wir auch auf der neuen Karte dieselben Winkel wie auf der Erdoberfläche.

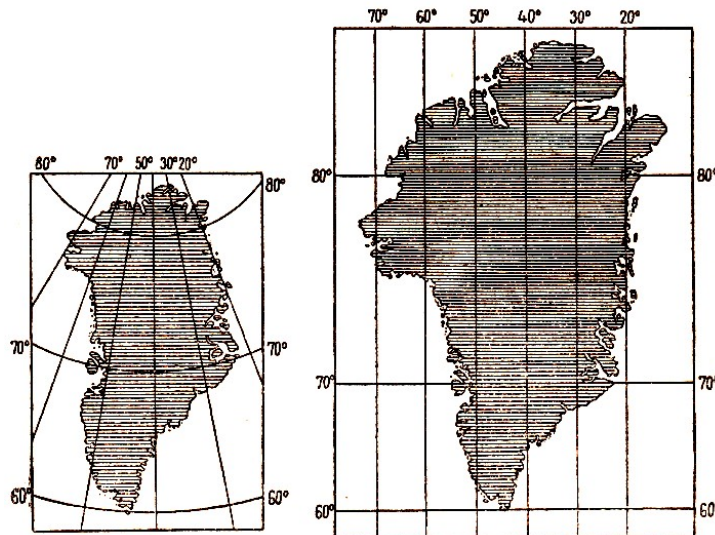


Abb. 31a, b

In Abb. 31a haben wir eine Karte Grönlands in stereographischer Projektion. Wendet man auf jeden Punkt dieser Karte die Transformation

$$z' = \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

an, so erhält man die in Abb. 31b dargestellte Karte. Hier nimmt man als Basis der Logarithmen die sogenannte Nepersche Zahl  $e = 2,71828\dots$ , und  $\operatorname{Arg} z$  ist nicht im Winkelmaß, sondern im Bogenmaß zu nehmen.

Diese Formel sieht zweifellos recht kompliziert und gekünstelt aus. Wir können sie hier nicht genau untersuchen und auch nicht beweisen, dass diese Formel tatsächlich eine konforme Abbildung vermittelt. Es sei nur noch bemerkt, dass die auf diese Weise entstandene Karte vor ungefähr 400 Jahren von dem holländischen Gelehrten Mercator konstruiert wurde.

Sie fand von jener Zeit an große Verbreitung in der Navigation. Ihr Vorzug gegenüber in stereographischer Projektion ausgeführten Karten besteht darin, dass hier nicht nur die Meridiane, sondern auch die Breitenkreise in Geraden transformiert werden. Überdies werden hier auch solche Wege auf der Erdoberfläche in Geraden übergeführt, längs derer die Nadel des Kompasses stets in dieselbe Richtung weist.

Diese Kurven nennt man Loxodromen.

**26.** Die wichtigsten Anwendungen finden die konformen Abbildungen in Physik und Mechanik. Bei vielen Aufgaben, die zum Beispiel vom elektrischen Potential in den einen geladenen Kondensator umgebenden Raumpunkten, von der Temperatur um einen erwärmten Körper oder von den Geschwindigkeiten der Teilchen einer Flüssigkeit (bzw. eines Gases) handeln, die einen Kanal entlangströmt und dabei irgendein Hindernis umfließt usw., muss man das

Potential, die Temperatur, die Geschwindigkeit usw. berechnen.

Diese Aufgaben kann man ohne große Schwierigkeiten lösen, wenn der in ihnen vorkommende Körper eine besonders einfache geometrische Form hat (zum Beispiel eine ebene Scheibe oder ein Kreiszyylinder ist).

Man muss aber die Rechnung noch in vielen anderen Fällen durchführen können. Wird zum Beispiel ein Flugzeug konstruiert, so muss man die Geschwindigkeit der Luftteilchen in dem den Tragflügel umströmenden Strom berechnen.<sup>4</sup>

Ein Tragflügel hat den in Abb. 32a dargestellten Querschnitt (Tragflügelprofil). Nun ist die Berechnung der Geschwindigkeiten besonders einfach, wenn der Querschnitt des umströmten Körpers ein Kreis ist, d.h., wenn der umströmte Körper ein Kreiszyylinder ist (Abb. 32 b).

Um nun die Aufgabe der Umströmung des Tragflügels auf die einfachere Aufgabe der Umströmung eines Kreiszyinders zurückführen zu können, muss man das gestrichelte Gebiet von 32a (das Äußere des Profils) auf das gestrichelte Gebiet von 32b (das Äußere des Kreises) konform abbilden.

Diese Abbildung wird durch eine gewisse Funktion einer komplexen Veränderlichen vermittelt. Kennt man diese Funktion, so kann man von den Geschwindigkeiten bei der Umströmung des Kreiszyinders zu den Geschwindigkeiten bei der Umströmung des Tragflügels übergehen und folglich die gestellte Aufgabe vollständig lösen.

Auf ähnliche Art erlaubt die konforme Abbildung die Zurückführung der Berechnung des elektrischen Potentials und der Temperatur beliebig geformter Körper (von Körpern mit beliebigem Profil) auf die einfachsten Fälle, bei denen die Aufgabe schon gelöst ist.



Abb. 32a, b

Den umgekehrten Übergang zur Umgebung der ursprünglich vorgegebenen elektrisch geladenen (oder erwärmten) Körper liefert wieder eine Funktion einer komplexen Veränderlichen, welche eine konforme Abbildung vermittelt.

**27.** All das über die Verwendung der konformen Abbildung in der Kartographie, der Mechanik und der Physik Gesagte hatten wir ohne Beweise gelassen. Wir können in diesem Büchlein auch keine Beweise geben, da zu ihrem Verständnis beim Leser Kenntnisse erforderlich wären, die erst an Hochschulen vermittelt werden.

Wir werden jetzt bis zum Ende dieses Büchleins einfachste rationale Funktionen betrachten, welche konforme Abbildungen vermitteln. Wir wollen hier behandeln:

- 1)  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  (die sogenannte gebrochene lineare Funktion);
- 2)  $z' = z^2$ ;
- 3)  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .

Letztere wird nach dem bekannten russischen Gelehrten Nikolai Jegorowitsch Joukowski (1847-1921) benannt<sup>5</sup>, den W. I. Lenin mit Recht als "Vater der russischen Luftfahrt" bezeichnete.

<sup>4</sup>Beim Fliegen bewegen sich natürlich sowohl die Luftteilchen als auch der Flügel selbst. Nach den Gesetzen der Mechanik können wir jedoch die ganze Untersuchung auf den Fall zurückführen, dass der Flügel feststeht und die Luft auf ihn auftrifft und ihn umströmt.

<sup>5</sup>Spricht Schukowski; hier wurde die in der wissenschaftlichen Literatur übliche Schreibweise verwendet.

Man nennt diese Funktion deshalb Joukowski-Funktion weil es N. J. Joukowski war, der sie mit Erfolg bei der Lösung einiger Fragen der Theorie des Flugzeugs anwandte. Insbesondere zeigte er, wie sich mit Hilfe dieser Funktion Tragflügelprofile konstruieren lassen, die sowohl theoretische als auch praktische Bedeutung haben.

Über diese Anwendung der Joukowski-Funktion werden wir noch sprechen.

**28.** Wir beginnen mit der linearen gebrochenen Funktion  $z' = \frac{z-a}{z-b}$ , wobei  $a$  und  $b$  voneinander verschiedene komplexe Zahlen sind.

Wir werden zeigen, dass vermittels dieser Funktion jeder Bogen  $PLQ$  eines Kreises, der die Punkte  $a$  und  $b$  verbindet, in einen Strahl  $P'L'$  transformiert wird, der durch den Koordinatenursprung verläuft, wobei der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und diesem Strahl gleich dem Winkel zwischen der Richtung  $baN$  und der Tangente an den Kreisbogen im Punkte  $a$  ist (Abb. 33).

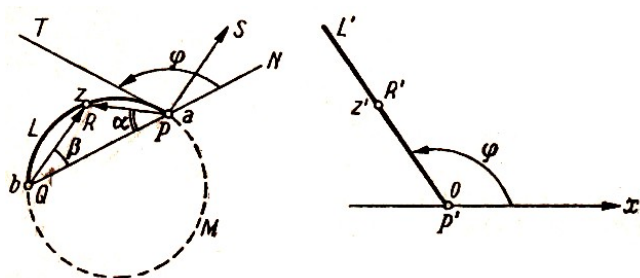


Abb. 33

Der Punkt  $z$  liege auf dem Bogen  $PLQ$  (Abb. 33a). Wir beweisen, dass sein Bildpunkt (das heißt der ihm entsprechende Punkt  $z' = \frac{z-a}{z-b}$ ) auf dem Strahl  $P'L'$  liegen muss (Abb. 33b).

Um den Vektor  $z'$  zu konstruieren, braucht man die Länge des Vektors, nämlich  $|z'|$ , und den Neigungswinkel gegen die positive reelle Achse, das heißt  $\text{Arg } z'$ . Nun ist  $z'$  der Quotient der komplexen Zahlen  $z - a$  und  $z - b$ , die durch die Vektoren  $PR$  und  $QR$  dargestellt werden. Dabei ist  $|z'| = \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$  und  $\text{Arg } z'$  gleich dem Winkel  $SPR$  (der Vektor  $PS$  hat gleiche Länge und Richtung wie  $QR$ ), und zwar von  $PS$  nach  $PR$  gezählt. Offenbar ist  $\angle SPR = \angle QRP$ ; also sind diese Winkel gleich dem halben Bogen  $QMP$ . Der Winkel  $NPT$  wird auch durch die Hälfte dieses Bogens<sup>6</sup> gemessen.

Daher ist

$$\text{Arg } z' = \angle SPR = \angle QRP = \angle NPT = \varphi$$

Somit hat, wenn  $z$  auf dem Bogen  $PLQ$  liegt, der entsprechende Punkt  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  ein und dasselbe Argument  $\varphi$ . Dies bedeutet, dass alle diese Punkte auf ein und demselben Strahl  $P'L'$  liegen, der gegen die positive reelle Achse um den Winkel  $\varphi$  geneigt ist.

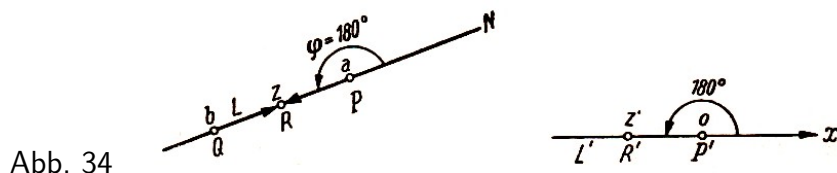


Abb. 34

Dieser Beweis bleibt auch dann richtig, wenn  $PLQ$  kein Kreisbogen, sondern die Sehne  $PQ$  ist. Dann ist  $\varphi = 180^\circ$ , und der Strahl  $P'L'$  fällt mit der negativen reellen Achse zusammen (Abb. 34).

<sup>6</sup>Der Satz vom Sehnentangentenwinkel besagt nämlich: Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über dem zugehörigen Kreisbogen.

Liegt nämlich  $z$  auf der Strecke  $PQ$ , so sind die die Zahlen  $z - a$  und  $z - b$  darstellenden Vektoren entgegengesetzt gerichtet. Hieraus folgt, dass der Quotient  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  eine reelle negative Zahl ist, das heißt,  $z'$  liegt auf der negativen reellen Achse.

Wir haben bewiesen, dass die Bilder der Punkte des Bogens  $PLQ$  auf dem Strahl  $P'L'$  liegen. Aber gibt es zu jedem Punkt auf  $L'P'$  einen Originalpunkt auf  $PLQ$ , oder gibt es auf  $P'L'$  Punkte, die keinen Originalpunkt auf  $PLQ$  haben?

Wir werden zeigen, dass jeder Punkt auf  $P'L'$  einem Punkt des Bogens entspricht.

Wir beginnen mit dem Punkt  $P'$ , dem Koordinatenursprung; dieser Punkt ist das Bild von  $P$ , da  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  bei  $z = a$  gleich Null wird. Wir nehmen irgendeinen anderen Punkt  $z'$  auf  $P'L'$  (Abb. 35), der von  $P'$  verschieden ist (das heißt  $z' \neq 0$ ).

Offenbar kann  $z'$  keine positive reelle Zahl sein, da der Strahl  $P'L'$  nicht mit der positiven reellen Achse zusammenfällt.

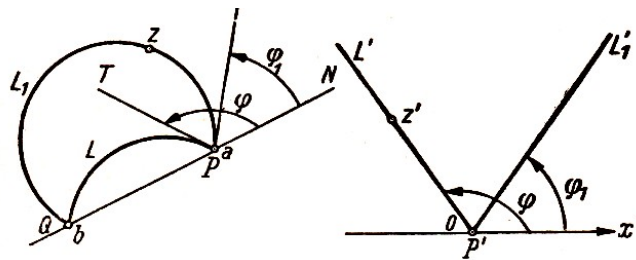


Abb. 35

Sehen wir  $z$  als Unbekannte an und lösen wir die Gleichung  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  nach  $z$  auf, so finden wir  $zz' - z'b = z - a$  und hieraus  $z = \frac{z'b-a}{z'-1}$ .

Somit haben wir gefunden, dass zu jedem Punkt  $z'$  auf  $P'L'$  ein und nur ein Wert  $z$  existiert derart, dass  $z'$  das Bild von  $z$  ist.

Wo liegt nun dieser Punkt  $z$ ? Kann es vorkommen, dass er nicht auf  $PLQ$  liegt?

Wir werden uns davon überzeugen, dass dies unmöglich ist. Zunächst sehen wir, dass  $z$  nicht auf der Geraden liegen kann, die die Verlängerung von  $PQ$  (nach außen) ist. Wäre dies doch der Fall, so hätten  $z - a$  und  $z - b$  gleiches Argument, und  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  wäre eine positive Zahl. Liegt  $z$  nicht auf dieser Geraden außerhalb von  $PQ$ , so kann man  $P$  und  $Q$  durch einen Kreisbogen so verbinden, dass dieser Bogen durch  $z$  geht (lassen wir zu, dass  $z$  auf der Strecke  $PQ$  selbst liegt, so müsste man an Stelle des Bogens diese Strecke nehmen).

Wir bezeichnen diesen Bogen mit  $PL_1Q$ . Da er von  $PLQ$  verschieden ist, bildet die Tangente an ihn im Punkt  $P$  mit der Richtung von  $baN$  den Winkel  $\varphi_1 \neq \varphi$  (Abb. 35). Dann muss der Wert der Funktion  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  für diesen Punkt  $z$  durch einen Punkt auf dem Strahl  $P'L_1$  dargestellt werden, der gegen die positive reelle Achse um den Winkel  $\varphi_1$  geneigt ist und folglich nicht mit  $P'L'$  übereinstimmt.

Wir kamen also zu einem Widerspruch, da wir fanden, dass der von  $P'$  verschiedene Punkt  $z'$  sich sowohl auf dem Strahl  $P'L'$  als auch auf dem Strahl  $P'L_1$  befinden muss.

Somit ist bewiesen, dass jeder Punkt  $z'$ , der auf  $P'L'$  liegt, das Bild genau eines Punktes  $z$  ist, wobei  $z$  auf  $PLQ$  liegt. Bild- und Originalpunkt sind durch  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  verknüpft. Hieraus folgt, dass der  $z'$  entsprechende Punkt  $z$ , der durch die Gleichung  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  bestimmt ist, den Bogen  $PLQ$  durchläuft, wenn  $z'$  den Strahl  $P'L'$  durchläuft.

Wir zeigen nun, dass der Punkt  $z'$  auf dem Strahl  $P'L'$  in ein und derselben Richtung entlang wandert und sich unendlich weit von  $P'$  entfernt, wenn sich  $z$  in einer Richtung  $PQ$  längs des Bogens  $PLQ$  bewegt.



Dazu brauchen wir nur zu beweisen, dass die Entfernung (Abb. 33)

$$P'R' = |z'| = \frac{|z - a|}{|z - b|} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

bei dem entsprechenden Verhalten von  $z$  beliebig groß wird. Nun ist  $\varphi + \alpha + \beta = 180^\circ$ . Hieraus folgt

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi), \quad \sin \beta = \sin(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi$$

und folglich

$$P'R' = |z'| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi}{\sin \alpha} = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cot \alpha$$

Bewegt sich  $z$  auf  $PLQ$  von  $P$  nach  $Q$ , so nimmt der Winkel  $\alpha$  von  $180^\circ - \varphi$  bis  $0^\circ$  ab, während sich  $\varphi$  nicht ändert. Daher wächst  $\cot \alpha$  von  $-\cot \varphi$  bis  $+\infty$  und  $|z'| = \cos \varphi + \cot \alpha \sin \varphi$  ebenfalls (da  $\sin \varphi$  positiv ist), und zwar von  $\cos \varphi - \cot \varphi \sin \varphi = 0$  bis  $+\infty$ .

**29.** Wir betrachten irgendeinen Kreis  $PLM$ , der durch den Punkt  $a$ , aber nicht durch  $b$  geht (Abb. 36a). Der Winkel zwischen der Tangente im Punkte  $a$  und der Richtung  $baN$  sei gleich  $\varphi$ .

Wir ziehen durch die Punkte  $a$  und  $b$  einen Hilfskreis, dessen Tangente im Punkte  $a$  mit der Richtung  $baN$  den Winkel  $\varphi + 90^\circ$  bilden möge. Dieser Kreis schneidet den ersten Kreis in einem gewissen Punkt  $E$ , und wir bezeichnen mit  $c$  die komplexe Zahl, die durch diesen Punkt dargestellt wird.

Es wird nun bewiesen, dass mittels der Funktion  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  der Kreis  $PLM$  in den Kreis  $P'L'M'$  (Abb. 36b) transformiert wird, der als Durchmesser  $P'E'$  hat, wobei der Punkt  $P'$  die Zahl 0 darstellt, während  $E'$  die Zahl  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  repräsentiert. Dabei bildet die Tangente im Punkt  $P'$  an den Kreis  $P'L'M'$  mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi$ .

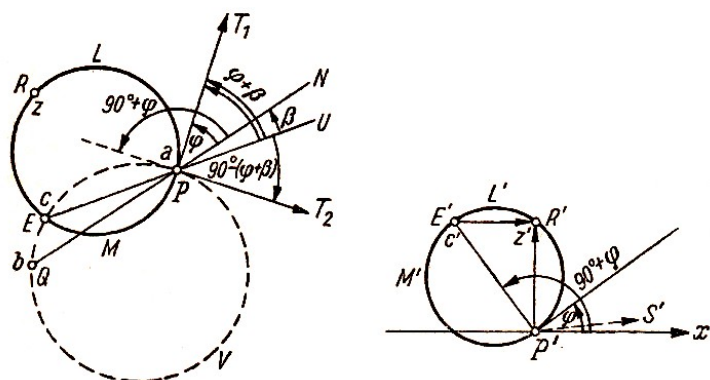


Abb. 36a, b

Wir wollen nun beweisen, dass für jeden Punkt  $z$  auf  $PLM$  der entsprechende Punkt  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  auf dem Kreis  $P'L'M'$  liegt, für den die Punkte 0 und  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  die Endpunkte des Durchmessers sind.

Offenbar genügt es zu beweisen, dass von jedem Punkt  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  (unter Voraussetzung, dass  $z$  auf  $PLM$  liegt) die Strecke  $P'E'$  unter einem rechten Winkel erscheint, d.h., dass der Winkel  $E'R'P'$ , der durch die Vektoren  $E'R'$  und  $P'R'$  gebildet wird, die von den Zahlen  $z' - c'$  und  $z'$  dargestellt werden, ein rechter ist.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Die Punkte der Ebene, von denen aus eine vorgegebene Strecke unter einem rechten Winkel erscheint, liegen auf dem mit dieser Strecke als Durchmesser konstruierten Kreis.

Es ist  $E'R'P'$  gleich  $S'P'R'$  (der Vektor  $P'S'$  hat gleiche Länge und Richtung wie der Vektor  $E'R'$ ), gerechnet von  $P'S'$  nach  $P'R'$ . Der Winkel  $S'P'R'$  ist gleich  $\text{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$ , der uns interessierende Winkel  $P'R'E'$  stimmt also mit dem Argument der Zahl  $\frac{z'}{z'-c'}$  überein, d.h.,  $\angle P'R'E' = \text{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$ . Wir formen den Ausdruck  $\frac{z'}{z'-c'}$  um, indem wir  $z'$  durch  $\frac{z-a}{z-b}$  und  $c'$  durch  $\frac{c-a}{c-b}$  ersetzen, und erhalten

$$\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z-a}{z-b} : \left( \frac{z-a}{z-b} - \frac{c-a}{c-b} \right) = \frac{z-a}{z-b} : \frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{b-a}{b-c} = \frac{z''}{b''}$$

Wir setzen hier  $\frac{z-a}{z-b} = z''$  und  $\frac{b-a}{b-c} = b''$ . Offenbar ist  $z''$  eine gebrochene lineare Funktion von  $z$  und unterscheidet sich von unserer Ausgangsfunktion  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  nur dadurch, dass der Punkt  $b$  durch  $c$  ersetzt ist.

Auf diese neue Funktion wenden wir das in Abschnitt 28 Bewiesene an. Befindet sich nämlich  $z$  auf einem Kreisbogen, der  $a$  und  $c$  verbindet, so muss  $z''$  auf einem vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehenden Strahl liegen. Bildet dabei die Tangente an den Kreis im Punkt  $a$  mit der Richtung  $caU$  den Winkel  $\alpha$ , so ist der entsprechende Strahl gegen die Richtung der positiven Achse ebenfalls um  $\alpha$  geneigt.

Mit anderen Worten:

Das Argument von  $z''$  ist gleich  $\alpha$ . Da sich  $z$  auf dem Kreisbogen  $PLE$  befindet, der durch die Punkte  $a$  und  $c$  geht, und der Winkel zwischen der Tangente  $PT_1$  an diesen Kreis und der Richtung  $caU$  gleich  $\beta + \varphi$  ist (Abb. 36 a), muss das Argument der Zahl  $z'' = \frac{z-a}{z-c}$  für alle  $z$  auf  $PLE$  gleich  $\beta + \varphi$  sein.

Andererseits liegt  $b$  auf dem die Punkte  $a$  und  $c$  verbindenden Kreisbogen  $PVE$ . Die Tangente  $PT_2$  im Punkt  $a$  an diesen Kreis bildet mit der Richtung  $caU$  den Winkel  $(\beta + \varphi) - 90^\circ$  (der Absolutbetrag dieses Winkels ist  $90^\circ - (\beta + \varphi)$ , aber aus Abb. 36a geht hervor, dass er in unserem Falle negativ gezählt werden muss, d.h., wir müssen ein Minuszeichen davorsetzen).

Darum muss der Wert der gebrochenen linearen Funktion  $\frac{z-a}{z-c}$ , der  $z = b$  entspricht, d.h. die Zahl  $b'' = \frac{b-a}{b-c}$ , durch einen Punkt auf einem Strahl dargestellt werden, der im Koordinatenursprung beginnt und mit der positiven reellen Achse einen Winkel von  $(\beta + \varphi) - 90^\circ$  bildet, d.h., es ist  $\text{Arg} b'' = (\beta + \varphi) - 90^\circ$ .

Nun zeigen wir, dass

$$P'R'E' = \text{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$$

Wir fanden, dass

$$\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z''}{b''}, \quad \text{Arg } z'' = \beta + \varphi, \quad \text{und} \quad \text{Arg } b'' = (\beta + \varphi) - 90^\circ$$

ist. Hieraus folgt, dass  $\text{Arg} \frac{z''}{b''} = 90^\circ$  (Abb. 37) und

$$P'R'E' = \text{Arg} \frac{z'}{z'-c'} = \text{Arg} \frac{z''}{b''} = 90^\circ$$

ist.

Somit erscheint von jedem Punkt  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  die Strecke  $P'E'$  unter einem rechten Winkel. Das bedeutet, dass der Punkt  $z'$  auf dem Kreis  $P'L'M'$  liegt, dessen Durchmesser die Strecke  $P'E'$  ist.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Zum Beweis wählten wir den Punkt  $z$  auf dem Bogen  $PLE$ . Dann fällt der entsprechende Punkt  $z'$  auf den

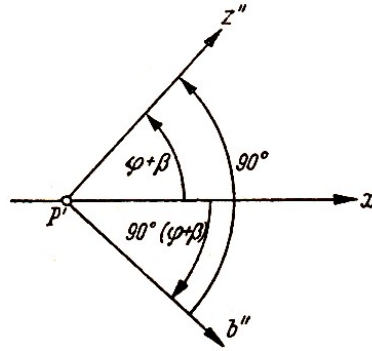


Abb. 37

Wir müssen nun noch beweisen, dass die Tangente an diesen Kreis im Punkt  $P'$  mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass der Winkel zwischen dem Durchmesser  $P'E'$  und dieser Achsenrichtung gleich  $\varphi + 90^\circ$  ist. Der letztere Winkel stimmt mit  $\text{Arg } c' = \text{Arg } \frac{c-a}{c-b}$  überein. Der Punkt  $c$  liegt aber auf dem Bogen  $PEQ$  des Kreises, der die Punkte  $a$  und  $b$  verbindet.

Da die Tangente im Punkt  $a$  an diesen Kreis mit der Richtung  $baN$  den Winkel  $90^\circ + \varphi$  bildet, muss der Punkt  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  auf einem Strahl liegen, der mit der positiven reellen Achse ebenfalls einen Winkel von  $90^\circ + \varphi$  bildet, d.h., es ist  $\text{Arg } c' = 90^\circ + \varphi$ , was zu beweisen war.

**30.** An einem Beispiel wollen wir zeigen, wie die in Abb. 38a schraffierte Figur durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  abgebildet wird.

Diese Funktion ist von der Form  $\frac{z-a}{z-b}$ , wobei  $a = 1$  und  $b = -1$  ist. Da der Bogen  $PLQ$  durch die Punkte  $1$  und  $-1$  geht und im Punkt  $a = 1$  mit der Richtung  $QPN$  den Winkel  $\varphi$  bildet, wird er nach Abschnitt 28 in den Strahl  $P'L'$  transformiert, der durch den Koordinatenursprung geht und mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt.

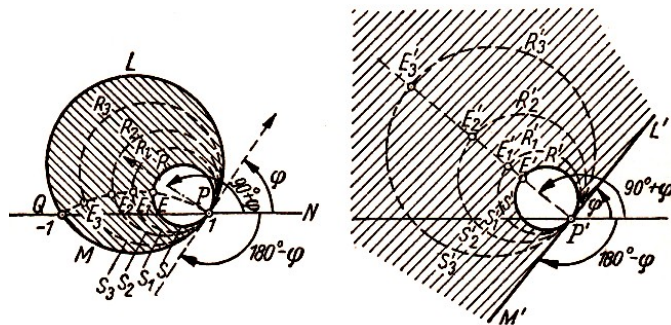


Abb. 38

Der Bogen  $PMQ$  verbindet ebenfalls die Punkte  $1$  und  $-1$ , aber er bildet im Punkte  $a = 1$  mit der Richtung  $QPN$  den Winkel  $\varphi - 180^\circ$  (der Betrag dieses Winkels ist  $180^\circ - \varphi$ ; dabei ist er aber im Uhrzeigersinn, d.h. in negativer Richtung gezählt).

Die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  transformiert daher den Bogen  $PMQ$  in den Strahl  $P'M'$ , der vom Koordinatenursprung ausgeht und mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi - 180^\circ$  bildet. Offensichtlich setzen sich  $P'L'$  und  $P'M'$  zu einer Geraden zusammen. Die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  transformiert demnach den ganzen Kreis  $PLQM$  (der aus den Bogen  $PLQ$  und  $PMQ$

Halbkreis  $P'L'E'$ . Wählen wir den Punkt  $z$  auf dem Bogen  $EMP$ , so bleibt der Beweis derselbe, nur ist die Richtung der Tangente im Punkt  $a$  an diesen Kreis genau entgegengesetzt wie die von  $PT_1$ . Das hat zur Folge, dass  $\text{Arg } z''$  nicht gleich  $\beta + \varphi$ , sondern gleich  $(\beta + \varphi) - 180^\circ$  ist. Daher erhalten wir für den Winkel  $P'R'E' = \text{Arg } \frac{z'}{z'-c'}$  den Wert  $(\beta + \varphi - 180^\circ) - (\beta + \varphi - 90^\circ) = -90^\circ$ , d.h.,  $z'$  liegt auf dem Halbkreis  $E'M'P'$ .

---

besteht) in die Gerade  $M'P'L'$ .

Wir ziehen durch die Punkte  $P$  und  $Q$  einen Hilfskreis, dessen Tangente im Punkte  $P$  mit  $QPN$  den Winkel  $\varphi + 90^\circ$  einschließt. Dieser Bogen schneidet den Kreis  $PRS$  im Punkt  $E$ . Nach Abschnitt 28 wird der Bogen  $PEQ$  durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  in einen Strahl abgebildet, der durch  $P'$  geht und gegen die positive reelle Achse um  $\varphi + 90^\circ$  geneigt ist. Dabei geht  $E$  in einen Punkt  $E'$  auf diesem Strahl über.

Nach Abschnitt 29 wird der Kreis  $PRES$  durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  in den Kreis  $P'R'E'S'$  (mit  $P'E'$  als Durchmesser) transformiert.

Bei der Abbildung geht der Kreis  $PLQM$  in die Gerade  $M'P'L'$  und der Kreis  $PRES$  in den Kreis  $P'R'E'S'$  über, den die Gerade  $M'P'L'$  im Punkte  $P'$  berührt. Wir untersuchen nun, wie die schraffierte Figur durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  abgebildet wird.

Bis jetzt haben wir die Aufgabe noch nicht vollständig gelöst. Wir haben nur geklärt, in welche Kurven die Ränder des Bereiches übergehen. Wir müssen noch die Transformation der von den Kreisen  $PRES$  und  $PLQM$  eingeschlossenen Punkte untersuchen.

Um uns auch hier Klarheit zu verschaffen, denken wir uns die ganze schraffierte Figur von Kreisen ausgefüllt, die  $PLQM$  im Punkt  $P$  berühren und die von  $PRES$  und  $PLQM$  eingeschlossen sind. Sie schneiden den Bogen  $PEQ$  in Punkten, die zwischen  $E$  und  $Q$  liegen.

In Abb. 38a sind von den unendlich vielen derartigen Kreisen drei gestrichelte eingezeichnet, die den Bogen  $PEQ$  in den Punkten  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  schneiden. Untersuchen wir, in welche Kurven diese Kreise durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  abgebildet werden, so können wir uns eine Vorstellung von dem gesuchten Gebiet machen.

Wir stützen uns auf das in Abschnitt 29 Gesagte: Der Kreis  $PR_1E_1S_1$  geht danach in den Kreis  $P'R'_1E'_1S'_1$  über, der Kreis  $PR_2E_2S_2$  in den Kreis  $P'R'_2E'_2S'_2$ , usw.

Am Schluss von Abschnitt 28 haben wir bewiesen, dass der Abstand des Punktes  $z'$  von  $P'$  vergrößert wird, wenn  $z$  sich auf  $PQ$  dem Punkt  $Q$  nähert. Hieraus folgt, dass  $E'_2$  (das Bild von  $E_2$ ) auf dem Strahl weiter als  $E'_1$  (das Bild von  $E_1$ ) von  $P'$  entfernt liegt, wenn  $E_2$  näher als  $E_1$  an  $Q$  liegt.

Daher muss der Durchmesser  $P'E'_2$  des Kreises  $P'R'_2E'_2S'_2$  größer als der Durchmesser  $P'E'_1$  des Kreises  $P'R'_1E'_1S'_1$  sein, wie die Abbildung zeigt.

Nimmt man den Kreis  $PR_3E_3S_3$ , der  $PEQ$  genügend nahe bei  $Q$  schneidet, so kann man erreichen, dass der Bildkreis  $P'R'_3E'_3S'_3$  einen beliebig großen Durchmesser hat. Es ist klar, dass die Bilder der Kreise  $PR_1E_1S_1$ ,  $PR_2E_2S_2$ ,  $PR_3E_3S_3$ , ... usw. (die das in Abb. 38a gestrichelte Gebiet ausfüllen) ihrerseits das in Abb. 38 b gestrichelte Gebiet ausfüllen.

Dieses Gebiet ist das Bild der ursprünglichen Figur bei Abbildung durch die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$ . Somit bildet die Funktion  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  einen durch zwei Kreise berandeten Bereich (Abb. 38a) in einen durch eine Gerade und einen Kreis berandeten Bereich ab (Abb. 38b).

31. Wir wollen uns jetzt mit der Abbildung durch die Funktion  $z' = z^2$  befassen. In einer Fußnote wurde schon darauf vorbereitet, dass in der allgemeinen Regel von der Winkeltreue bei Abbildungen durch rationale Funktionen eine Ausnahme möglich ist. Es können sich nämlich Winkel, deren Scheitelpunkte in gewissen besonderen Punkten liegen, ändern.

Im vorliegenden Fall existiert so ein Punkt, nämlich der Koordinatenursprung  $A$ . Wir werden zeigen, dass alle Winkel, deren Scheitelpunkte in  $A$  liegen, bei der Transformation  $z' = z^2$  verdoppelt werden.

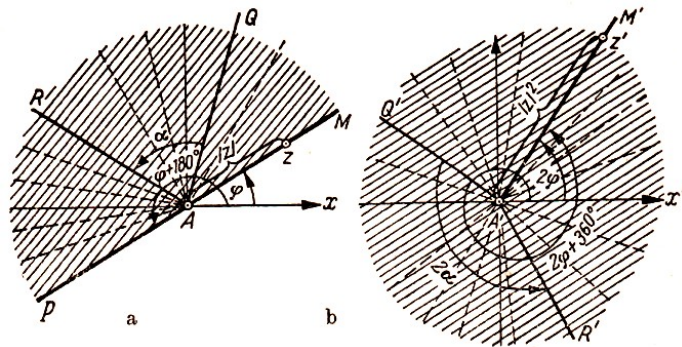


Abb. 39a und b

Wir ziehen den Strahl  $AM$ , der durch den Punkt  $A$  geht und mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi$  bildet (Abb. 39a).

Für jeden Punkt  $z$ , der auf diesem Strahl liegt, ist  $\text{Arg } z = \varphi$ . Da man den Vektor  $z' = z^2 = z \cdot z$  aus dem Vektor  $z$  durch Streckung um den Faktor  $M$  und Drehung um den Winkel  $\text{Arg } z = \varphi$  erhält, ist  $|z'| = |z| \cdot |z| = |z|^2$  und  $\text{Arg } z' = \text{Arg } z + \text{Arg } z = 2\varphi$ .

Darum muss der Punkt  $z'$  auf dem Strahl  $A'M'$  liegen, der vom Punkt  $A'$  ausgeht und mit der positiven reellen Achse den Winkel  $2\varphi$  einschließt. Bewegt sich  $z$  auf  $AM$  und wird der Abstand von  $A$  nach  $z$  beliebig groß, so wird der Abstand des entsprechenden Punktes  $z'$  von  $A'$  auf  $A'M'$  ebenfalls beliebig groß. Dabei ist der Abstand von  $z'$  nach  $A'$  immer gleich dem Quadrat des Abstandes zwischen  $A$  und  $z$ , da  $|z'| = |z|^2$  ist.

Hieraus folgt, dass die Funktion  $z' = z^2$  den Strahl  $AM$  in den Strahl  $A'M'$  transformiert, der mit der  $x'$ -Achse einen Winkel bildet, der doppelt so groß wie der Originalwinkel ist.

Man sieht leicht ein, dass der Strahl  $AP$ , der mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi + 180^\circ$  bildet ( $AM$  und  $AP$  liegen auf einer Geraden), durch die Funktion  $z' = z^2$  ebenfalls in den Strahl  $A'M'$  transformiert wird. Verdoppelt man nämlich  $\varphi + 180^\circ$ , so erhält man  $2\varphi + 360^\circ$ .

Der Strahl, der um diesen Winkel gegen die  $x'$ -Achse geneigt ist, fällt mit  $A'M'$  zusammen.

Wir untersuchen nun, wie die Funktion  $z' = z^2$  die in Abb. 39a schraffierte Figur transformiert. Man nennt die Figur eine Halbebene. Die Halbebene kann man als Menge unendlich vieler Strahlen ansehen, die durch  $A$  verlaufen und gegen die  $x$ -Achse um Winkel geneigt sind, welche größer als  $\varphi$ , aber kleiner als  $180^\circ + \varphi$  sind.

Die Strahlen  $AM$  und  $AP$  bilden den Rand der Halbebene (eine Gerade). Diese beiden Strahlen zählen wir nicht zur Halbebene hinzu. Die Funktion  $z' = z^2$  transformiert die Strahlen der Halbebene in Strahlen, die durch  $A'$  gehen und gegen die  $x'$ -Achse um Winkel größer als  $2\varphi$  und kleiner als  $2\varphi + 360^\circ$  geneigt sind.

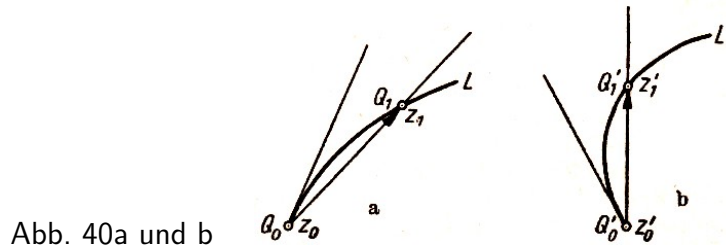
Hieraus folgt, dass die von  $AM$  und  $AP$  berandete Halbebene in einen Bereich transformiert wird, der von einem Strahl  $A'M'$  berandet wird (Abb. 39b). Diese Figur kann man als Ebene ohne den Strahl  $A'M'$  ansehen. Sie wird durch alle Punkte der Ebene mit Ausnahme der auf  $A'M'$  liegenden Punkte gebildet.

Wählen wir in der Halbebene zwei Strahlen  $AQ$  und  $AR$ , die gegen die  $x$ -Achse um die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ( $\varphi_2 > \varphi_1$ ) geneigt sind, so schließen sie den Winkel  $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$  ein. Bei Durchführung der Transformation  $z' = z^2$  gehen diese in die Strahlen  $A'Q'$  und  $A'R'$  über, die gegen die  $x'$ -Achse um die Winkel  $2\varphi_1$  und  $2\varphi_2$  geneigt sind. Offenbar ist  $\angle Q'A'R'$  gleich  $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\alpha$ .

Somit verdoppeln sich die Winkel, deren Scheitel in  $A$  liegen, bei der Transformation  $z' = z^2$ , d.h., die Abbildung ist im Punkt  $A$  nicht konform.

**32.** Wir beweisen nun, dass sich Winkel, deren Scheitel in einem beliebigen Punkt  $z_0 \neq 0$  liegen, bei der Transformation  $z' = z^2$  nicht ändern. Hieraus folgt, dass der Koordinatenursprung der einzige Punkt ist, in dem die Abbildung nicht konform ist.

Es sei  $L$  irgendeine Kurve, die von  $z_0$  ausgeht. Nehmen wir auf  $L$  einen Punkt  $z_1$ , der von  $z_0$  verschieden ist, so stimmt die Richtung der die Punkte  $z_0$  und  $z_1$  verbindenden Sekante mit der Richtung des Vektors  $Q_0Q_1$  überein, der die Differenz  $z_1 - z_0$  darstellt (Abb. 40a).



Die Funktion  $z' = z^2$  bildet die Kurve  $L$  in eine Kurve  $L'$  und damit die Punkte  $z_0$  und  $z_1$  in neue Punkte  $z'_0 = z_0^2$  und  $z'_1 = z_1^2$  ab. Offenbar fällt die Richtung der Sekante, die  $z'_0$  und  $z'_1$  verbindet, mit der Richtung des Vektors  $Q'_0Q'_1$  zusammen, der die Differenz  $z'_1 - z'_0$  darstellt (Abb. 40b).

Vergleichen wir die Richtungen zweier Sekanten, so genügt es, die Richtungen der Vektoren  $z'_1 - z'_0$  und  $z_1 - z_0$  zu betrachten. Da der von ihnen eingeschlossene Winkel (vom Vektor  $z_1 - z_0$  nach  $z'_1 - z'_0$  gezählt) mit dem Argument des Quotienten  $\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$  übereinstimmt, brauchen wir nur  $\text{Arg} \frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$  zu berechnen.

Wir formen den Quotienten  $\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$  um, indem wir  $z'_1 = z_1^2$  und  $z'_0 = z_0^2$  setzen. Wir erhalten

$$\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = z_1 + z_0 \quad \text{d.h.} \quad \text{Arg} \frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \text{Arg}(z_1 + z_0)$$

Folglich ist der von den Sekanten der Kurven  $L'$  und  $L$  (die Sekanten sind durch die entsprechenden Punkte  $z_0$  und  $z_1$  (auf  $L$ ) bzw.  $z'_0 = z_0^2$  und  $z'_1 = z_1^2$  (auf  $L'$ ) gelegt) eingeschlossene Winkel gleich  $\text{Arg}(z_1 + z_0)$ .

Wir gehen von den Sekanten zu den Tangenten über, d.h., wir lassen den Punkt  $z_1$  auf der Kurve  $L$  beliebig nahe an den Punkt  $z_0$  heranrücken. Dann wird auch der Punkt  $z'_1 = z_1^2$  auf der Kurve  $L'$  beliebig nahe an  $z'_0 = z_0^2$  heranrücken. Daher nähern sich unsere Sekanten beliebig den Tangenten, die in den Punkten  $z_0$  bzw.  $z'_0$  an die Kurven gelegt sind. Der Winkel zwischen den Sekanten geht dann in den Winkel zwischen den Tangenten über.

Nun ist aber der Winkel zwischen den Sekanten gleich  $\text{Arg}(z_0 + z_1)$ ; dieser Winkel geht in  $\text{Arg}(2z_0)$  über, wenn  $z_1$  gegen  $z_0$  strebt,  $\text{Arg}(2z_0)$  stimmt aber mit  $\text{Arg} z_0$  überein.

Ist etwa  $z_0 = 2$ , so ist  $\text{Arg} z_0 = 0$ . Hieraus folgt, dass die Richtung der Tangenten im Punkt  $z_0 = 2$  an irgendeine Kurve  $L$ , die durch diesen Punkt geht, mit der Richtung der Tangenten im Punkt  $z'_0 = z_0^2 = 4$  an die Kurve  $L'$ , in welche die Funktion  $z' = z^2$  die Kurve transformiert, übereinstimmt.

Ist  $z_0 = i$ , so ist  $\text{Arg} z_0 = 90^\circ$ , und folglich stehen die Tangente im Punkt  $z_0 = i$  an die durch diesen Punkt gezogene Kurve  $L$  und die Tangente im Punkt  $z'_0 = i^2 = -1$  an das Bild  $L'$  der Kurve  $L$  aufeinander senkrecht.

Wir können also allgemein sagen, dass sich die Tangente im Punkt  $z_0$  um den Winkel  $\text{Arg} z_0$  dreht, wenn die betreffende Kurve durch die Funktion  $z' = z^2$  abgebildet wird.

Es ist jetzt leicht einzusehen, warum Winkel mit dem Scheitel in  $z_0$  ( $z_0 \neq 0$ ) bei dieser Transformation nicht geändert werden.

Gehen durch den Punkt  $z_0$  zwei Kurven  $L_1$  und  $L_2$ , die den Winkel  $\alpha$  in diesem Punkt einschließen, so bilden in diesem Punkt die Tangenten an die Kurven den Winkel  $\alpha$ .

Nach der Transformation gehen der Punkt  $z_0$  in den Punkt  $z'_0 = z_0^2$  und die Kurven  $L_1$  bzw.  $L_2$  in  $L'_1$  bzw.  $L'_2$  über. Die Richtung der Tangenten im Punkt  $z_0$  an die neuen Kurven erhält man aus den alten Tangentenrichtungen durch Drehung um ein und denselben Winkel, nämlich  $\text{Arg } z_0$ .

Offenbar ist der von den neuen Tangenten eingeschlossene Winkel wieder gleich  $\alpha$ . Das bedeutet aber, dass sich der Winkel zwischen zwei Kurven, dessen Scheitelpunkt in einem beliebigen Punkt  $z_0 \neq 0$  liegt, bei der Transformation  $z' = z^2$  nicht ändert.

Man kann das Verfahren, durch das wir bewiesen haben, dass die Abbildung  $z' = z^2$  konform ist, auch auf andere Funktionen anwenden, zum Beispiel auf die gebrochene lineare Funktion  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  oder die Joukowskische Funktion  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .

Nur erhält man hier andere Drehwinkel für die Tangente. So ergibt sich für die gebrochene lineare Funktion, dass sich die Tangente im Punkt  $z_0$  an eine durch diesen Punkt hindurchgehende Kurve um den Winkel  $\text{Arg } \frac{a-b}{(z_0-b)^2}$  dreht, während bei der Joukowskischen Funktion dieser Winkel gleich  $\text{Arg} \left( 1 - \frac{1}{z_0^2} \right)$  ist.

Im ersten Fall muss man zusätzlich voraussetzen, dass  $z_0 \neq b$  ist (in diesem Punkt verliert der Ausdruck  $\frac{z-a}{z-b}$  seinen Sinn), im zweiten Fall, dass  $z_0 \neq 0$  (aus demselben Grunde) und außerdem  $z_0 \neq \pm 1$  ist (in diesen Punkten wird  $1 - \frac{1}{z_0^2}$  gleich Null, und  $\text{Arg} \left( 1 - \frac{1}{z_0^2} \right)$  ist unbestimmt).

Man könnte auch beweisen, dass die Joukowskische Funktion in den Punkten  $-1$  und  $+1$  keine konforme Abbildung vermittelt; Winkel, deren Scheitelpunkte in diesen Punkten liegen, werden bei der Transformation verdoppelt.

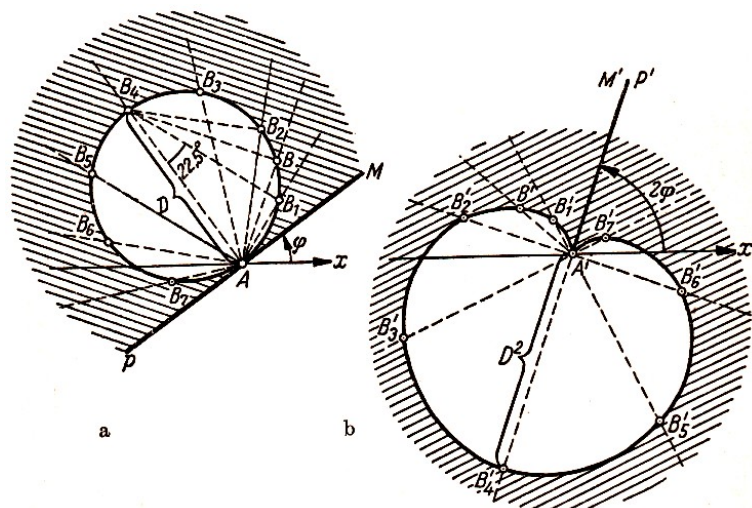


Abb. 41a und b

**33.** Wir wollen untersuchen, in welche Figur der durch den Punkt  $A$  gehende Kreis bei der Abbildung  $z' = z^2$  übergeht. Die in diesem Punkt an den Kreis gelegte Tangente bildet mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  (Abb. 41 a).

Der Kreis liegt in der von dieser Tangente berandeten Halbebene. Die Funktion  $z' = z^2$  transformiert die Halbebene in die Ebene mit Ausnahme des Strahles  $A'M'$ . Um das Bild des Kreises zu ermitteln, ziehen wir von  $A$  aus in die Halbebene Strahlen und kennzeichnen auf jedem den

---

Schnittpunkt mit dem Kreis.

Auf unserer Zeichnung sind sieben Strahlen eingezeichnet, alle Winkel  $MAB_1, B_1AB_2, B_2AB_3, \dots, B_7AP$  sind so gewählt, dass sie untereinander gleich sind (je  $22,5^\circ$ ).

Die Funktion  $z' = z^2$  transformiert sie in Strahlen, die die doppelten Winkel miteinander einschließen; jeder der Winkel  $M'A'B'_1, B'_1A'B'_2, B'_2A'B'_3, \dots, B'_7A'P'$  ist gleich  $45^\circ$ .

Wir untersuchen, wohin die Punkte  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_7$  abgebildet werden. Der Abstand ihrer Bilder  $B'_1, B'_2, B'_3, \dots, B'_7$  vom Punkt  $A'$  ist gleich dem Quadrat der entsprechenden Abstände  $AB_1, AB_2, AB_3, \dots, AB_7$ .

Nun ist aus Abb. 41 ersichtlich, dass  $AB_7 = AB_1 = AB_4 \cdot \sin 22,5^\circ = D \sin 22,5^\circ$  ist ( $D$  ist der Durchmesser des Kreises). Weiterhin ist  $AB_6 = AB_2 = D \sin 45^\circ, AB_5 = AB_3 = D \sin 67,5^\circ, AB_4 = D$ .

Nun ist (auf 4 Stellen genau)

$$\sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - 1,4142\dots}{4} = 0,1464\dots$$

$$\sin^2 45^\circ = 0,500, \quad \sin^2 67,5^\circ = \cos^2 22,5^\circ = 1 - \sin^2 22,5^\circ = 0,8535\dots$$

Folglich ist  $A'B'_7 = A'B'_1 = 0,1464D^2, A'B'_6 = A'B'_2 = 0,5000D^2, A'B'_5 = A'B'_3 = 0,8535D^2, A'B'_4 = D^2$ .

Durch die Punkte  $A', B'_1, B'_2, \dots, B'_7$  geht die Bildkurve des Kreises bei der Transformation  $z' = z^2$ . Um sie genauer zu erhalten, kann man eine größere Auswahl von Strahlen nehmen. Diese Kurve nennt man Kardioide (oder Herzlinie).

Man sieht leicht, dass die gestrichelte Figur aus Abb. 41a (die Halbebene mit Ausschluss des Kreises) durch die Funktion  $z' = z^2$  in die gestrichelte Figur aus Abb. 41b übergeht; letztere wird durch die Kardioide und den Strahl  $A'M'$  berandet, der den Winkel  $2\varphi$  mit der positiven reellen Achse bildet.

Man kann beweisen, dass der Strahl  $A'M'$  zu beiden Bögen der Kardioide, die im Punkt  $A$  beginnen, tangential gerichtet ist. Wir ziehen in Abb. 41a einen Strahl  $AB$ , wobei  $B$  der Schnittpunkt mit dem Kreise ist. Ist der Winkel  $MAB$  gleich  $\alpha$ , so ist  $AB = D \sin \alpha$ . Durch die Funktion  $z' = z^2$  wird dieser Strahl in den Strahl  $A'B'$  (Abb. 41b) transformiert, wobei  $B'$  (das Bild von  $B$ ) auf der Kardioide liegt.

Nach den uns bekannten Eigenschaften der Transformation  $z' = z^2$  erhalten wir  $\angle M'A'B' = 2\alpha$  und  $A'B' = (AB)^2 = D^2 \sin^2 \alpha$ .

Wir nehmen den Winkel  $\alpha$  als Veränderliche und lassen ihn gegen Null gehen. Dann geht der Winkel  $2\alpha$  zwischen  $A'B'$  und  $A'M'$  ebenfalls gegen Null und der Strahl  $A'B'$ , die Sekante an die Kardioide, dreht sich im Punkte  $A'$  und kommt der Grenzlage  $A'M'$  beliebig nahe. Der Punkt  $B'$  geht gegen  $A'$ , da, der Abstand  $A'B' = D^2 \sin^2 \alpha$  mit  $\alpha$  gegen Null strebt.

Daraus folgt, dass  $A'M'$  (die Grenzlage der Sekante) die Tangente an den Bogen  $A'B'_1B'_2\dots$  im Punkte  $A'$  ist. Man kann sich davon überzeugen, dass  $A'M'$  auch die Tangente im Punkte  $A'$  an den Bogen  $A'B'_7B'_6\dots$  ist.

**34.** Wir wenden uns zum Schluss der Joukowskischen Funktion

$$z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

und ihrer Anwendung auf die Transformation von Bereichen zu, die durch zwei Kreise berandet werden. Der eine Kreis geht durch die Punkte  $-1$  und  $+1$ , der andere tangiert den ersten im Punkte  $+1$  von innen (Abb. 42).



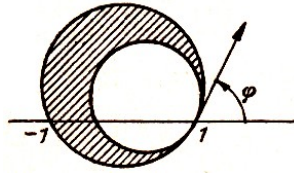


Abb. 42

Wir zeigen zuerst, dass man die Transformation  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  auf die schrittweise Ausführung einiger einfacherer, uns schon bekannter Transformationen zurückführen kann.

Dazu betrachten wir den Quotienten  $\frac{z'_1}{z'+1}$ . Ersetzen wir darin  $z'$  durch  $\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , so finden wir

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z} = \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2$$

Also folgt aus  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , dass

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2$$

ist.

Es ist auch die Umkehrung richtig. Wir erhalten nämlich aus der zweiten Aussage

$$z' - 1 = z' \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2 + \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2$$

und hieraus

$$z' \left[ 1 - \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2 \right] = 1 + \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2$$

sowie

$$z' = \frac{1 + \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2}{1 - \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2} = \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = \frac{2z^2 + 2}{4z} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

Damit sind die beiden Gleichungen  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  und  $\frac{z'-1}{z'+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2$  äquivalent (eine folgt aus der anderen).

Man kann daher die Joukowskische Transformation  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  in der Form  $\frac{z'-1}{z'+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2$  darstellen.

Nun ist aber ersichtlich, dass man den Übergang von  $z$  zu  $z'$  in drei Stufen vornehmen kann. Zuerst gehen wir von der Veränderlichen  $z$  zu einer Hilfsvariablen  $z_1$  nach der Formel

$$z_1 = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{1}$$

über, dann von  $z_1$  zu  $z_2$  gemäß der Formel

$$z_2 = z_1^2 \tag{2}$$

und schließlich von  $z_2$  zu  $z'$  nach

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = z_2 \tag{3}$$

Man sieht, dass man, wie es sein muss,  $\frac{z'-1}{z'+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2$  erhält, wenn der Ausdruck für  $z_1$  aus der Formel (1) in (2) eingesetzt und dann (2) in (3) substituiert wird.

Man ersetzt die Joukowskische Transformation durch die drei Transformationen (1), (2) und (3), die nacheinander auszuführen sind, da jede von ihnen einfacher als die Joukowskische Transformation und uns schon bekannt ist.

Wir wenden auf die in Abb. 42 dargestellte Figur die Transformation (1), auf das so erhaltene Bild die Transformation (2) und schließlich auf das sich hierbei ergebende Bild die Transformation (3) an.

Wir erinnern uns daran, dass wir schon in Abschnitt 30 die in Abb. 38a dargestellte Figur (sie stimmt im Prinzip mit der Figur aus Abb. 42 überein) durch die Funktion  $z'_1 = \frac{z-1}{z+1}$  (d.h. durch die Funktion (1)) in die in Abb. 38b dargestellte Figur abbilden konnten.

Sie wird durch die durch 0 gehende und mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi$  einschließende Gerade und durch einen diese Gerade in Punkt 0 tangierenden Kreis berandet. Man kann sagen, dass es die Halbebene ausschließlich eines Kreises ist. Diese Figur transformieren wir mit Hilfe der Funktion (2).

Es genügt ein Blick auf Abb. 41, um zu sehen, dass diese Aufgabe von uns schon in Abschnitt 33 gelöst wurde. Wir hatten dort gesehen, dass wir die in Abb. 41b dargestellte Figur erhalten. Sie ist von einer Kardioide und einem Strahl berandet. Wir brauchen auf diese Figur nur noch die Transformation (3) anzuwenden. Hier kann man  $z'$  als unabhängige Veränderliche ansehen und  $z_2$  als Funktionswert.

Aus dem Ergebnis von Abschnitt 28 folgt, dass der Punkt  $z'$  auf einem Kreisbogen entlangwandert, der die Punkte  $+1$  und  $-1$  verbindet und dessen Tangente im Punkt  $+1$  mit der positiven reellen Achse den Winkel  $2\varphi$  bildet (Abb. 43), wenn sich  $z_2$  auf dem Strahl  $A'M'$  bewegt, der durch den Nullpunkt geht und gegen die positive reelle Achse um  $2\varphi$  geneigt ist.

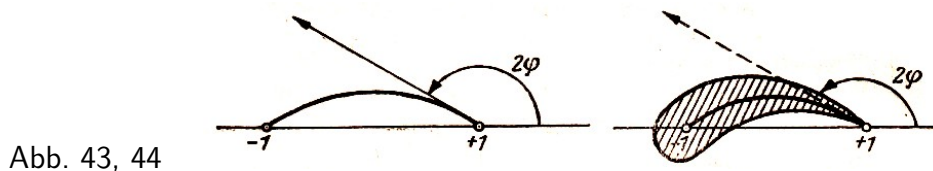


Abb. 43, 44

Wir haben so das Bild des Strahls  $A'M'$  bei der Transformation  $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$  gefunden.

Um das Bild der Kardioide zu ermitteln, müssen wir untersuchen, wohin ihre Punkte transformiert werden, zum Beispiel  $B'_1, B'_2, \dots, B'_7$ . Wir wollen hier keine weiteren Berechnungen anstellen, sondern in Abb. 44 nur das endgültige Bild angeben.

Die Figur hat die Form des Profils (d.h. des Querschnitts) eines Tragflügels. Diese Art von Profilen wurde zuerst von den russischen Gelehrten S. A. Tschaplygin und N. J. Joukowski vorgeschlagen. Deshalb nennt man sie Joukowski-Tschaplygin-Profile.

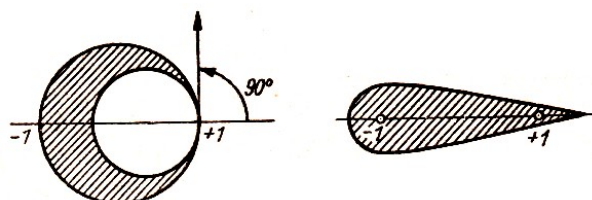


Abb. 45

Ändert man den Neigungswinkel  $\varphi$  der Tangenten an den Kreis im Punkt 1 (Abb. 42) und den Radius des kleinen Kreises, so kann man die verschiedensten Profile erhalten. Ist  $\varphi$  ein rechter Winkel, d.h., ist die Strecke von  $-1$  nach  $+1$  der Durchmesser des größeren Kreises, so ist das entsprechende Profil bezüglich der reellen Achse symmetrisch (Abb. 45). Ein solches Profil nennt man zuweilen Joukowski-Steuer.

---

Die Joukowski-Tschaplygin-Profilen sind die Grundprofile bei allen Untersuchungen zur Theorie des Tragflügels.

Zum besseren Verständnis des Stoffes raten wir dem Leser, die nachstehend angegebenen Übungsaufgaben wirklich durchzurechnen.

---

## Übungen und Aufgaben

1. Man beweise: Sind zwei komplexe Zahlen  $c_1 = a_1 + ib_1$  und  $c_2 = a_2 + ib_2$  gleich, so stimmen ihre Real- und Imaginärteile überein, also  $a_1 = a_2$  und  $b_1 = b_2$ .

Hinweis: Man geht davon aus, dass gleiche komplexe Zahlen durch Vektoren dargestellt werden, die gleich lang, parallel und gleich gerichtet sind.

2. Unter Verwendung des kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetzes für Addition und Multiplikation sind folgende Rechnungen mit komplexen Zahlen auszuführen.

a)  $(3 - 7i) + (-2 + i) + (-1 + 5i)$ ;

b)  $(3 - 7i)(3 + 7i)$ ;

c)  $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})$ ;

d)  $(1 + i)^2 : (1 - i)^2$ ;

e)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$

Lösungen: a)  $i$ , b)  $58$ , c)  $1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ , d)  $-1$ , e)  $-1$ .

3. Man beweise, dass jede komplexe Zahl  $c = a + bi \neq 0$ , deren absoluter Betrag gleich  $r$  und deren Argument gleich  $\alpha$  ist, in der Form

$$c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

dargestellt werden kann. Das ist die trigonometrische Form einer komplexen Zahl.

Hinweis: Man drücke  $a$  und  $b$  mit Hilfe einer Zeichnung, in der  $c = a + bi$  als Vektor dargestellt wird, durch  $r$  und  $\alpha$  aus.

4. Man beweise, dass aus

$$c_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \quad \text{und} \quad c_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

folgt:

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Hinweis: Man verwende die geometrische Form der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen, oder man multipliziere  $c_1$  mit  $c_2$  unter Anwendung der Gesetze für Addition und Multiplikation und benutze dann die Formeln für den Kosinus und den Sinus einer Summe.

8[1.5ex] 5. Unter Verwendung des Resultates der vorigen Aufgabe beweise man, dass

$$c^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \quad (*)$$

gilt, wenn  $c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  ist. Dabei ist  $r$  der Betrag und  $\alpha$  das Argument von  $c$ , und  $n$  ist eine natürliche Zahl. Aus (\*) schließt man, dass

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

gilt (Formel von Moivre).

6. Unter Benutzung der Formel von Moivre aus Aufgabe 5 berechne man

a)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$ ,

b)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{2}\right)^{217}$ ,

---

Hinweis: Es ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

Lösungen: a)  $-1$ , b)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ .

7. Man leite mit Hilfe der Moivreschen Formel aus Aufgabe 5 Formeln für  $\cos n\alpha$  und  $\sin n\alpha$  mit  $n = 2, 3, 4$  her.

Hinweis: In der Moivreschen Formel

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

multipliziere man die Potenzen von  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  aus (zum Beispiel

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$$

und vergleiche Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Moivreschen Formel.

Lösungen:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha \\ \cos 4\alpha &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin 4\alpha &= 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

8. In welchen Bereich geht ein Dreieck, dessen Ecken in  $0, 1 - i, 1 + i$  liegen, durch die Transformation

$$z' = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$$

über? Was bedeutet diese Transformation geometrisch?

Hinweis: Man beginne mit der geometrischen Bedeutung. Man kann aber auch mit der Berechnung der Ecken des transformierten Dreiecks anfangen.

9. In welchen Bereich geht bei der Transformation  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  ein Halbkreis über, der oberhalb der reellen Achse liegt und die Strecke von  $-1$  bis  $+1$  als Durchmesser besitzt?

Lösung: In den rechten Winkel, der die negative reelle und die positive imaginäre Achse als Schenkel besitzt.

10. Wie wird ein Winkel  $\alpha$  ( $\alpha \leq 120^\circ$ )<sup>9</sup> mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung durch die Funktion  $z' = z^3$  transformiert?

Lösung: Der Bildwinkel ist dreimal so groß, sein Scheitelpunkt befindet sich im Koordinatenursprung.

---

<sup>9</sup>Für  $\alpha > 120^\circ$  erhält man mehrfach bedeckte Bereiche.