Wolfgang May

Differentialgleichungen

1971 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 49
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Inhalt des vorliegenden Bändchens[1] der Mathematischen Schülerbücherei ist im wesentlichen Gegenstand von Schülerzirkeln und Vorträgen vor Schülern gewesen. Es wendet sich an Schüler von der 11. Klasse an, soweit sie bereits differenzieren und integrieren können. Gegenüber den Vorträgen wurde aber bei der schriftlichen Fixierung der Stoff erweitert und ergänzt.
Dazu einige Bemerkungen.

In den Vorlesungen unserer Hochschulen wird aus methodologischen Erwägungen heraus der Stoffkomplex Differentialgleichungen erst dann behandelt, wenn der Hörer mit der Analysis genügend vertraut ist. Es hieße aber den Schülern der 11. und 12. Klassen, für die dieses Büchlein gedacht ist, von vornherein alle Aussichten auf das Verstehen und damit die Lust am Weiterlesen nehmen, wollte man mit der bei studentischen Hörern üblichen und erforderlichen Wissenschaftlichkeit vorgehen.

Dabei ist der Schüler aufgrund seiner Kenntnisse und Fertigkeiten auf dem Gebiet der Differential- und Integralrechnung wohl in der Lage, eine ganze Reihe von Differentialgleichungen zu lösen.

Daher wurde der Versuch unternommen, in das Gebiet der Differentialgleichungen systematisch einzuführen, aber über gewisse wichtige grundlegende Fakten nur zu referieren. Es wurde nicht mit Hinweisen gespart, an welchen Stellen Ergänzungen und Vertiefungen an Hand ausführlicher Lehrbücher später erfolgen müssen. Da sich die Kleine Enzyklopädie Mathematik in den Händen vieler Schüler befindet, wurde zur ersten Orientierung vor allem auf diese verwiesen.

Wenn bei unseren Lesern nach der Lektüre dieser vereinfachten Einführung der Wunsch erwächst, sich später genauer und mit ausreichenden Vorkenntnissen versehen mit dieser interessanten Materie zu beschäftigen, dann soll dieses Büchlein seinen Zweck erfüllt haben. Da in erster Linie das Bekanntwerden mit Lösungsverfahren angestrebt werden musste, sind den entsprechenden Abschnitten Übungsaufgaben beigefügt worden.

Im Interesse einer kürzeren Darstellung und schnelleren Rechnung wurde oft mit Mitteln der linearen Algebra gearbeitet. Es ist daher ratsam, sich neben der Lektüre dieses Buches mit Determinanten und Matrizen zu beschäftigen, z.B. an Hand der Bände "Determinanten" und "Matrizen" aus dieser Reihe (vgl. Literaturverzeichnis).

Wir möchten nicht unterlassen, allen Kollegen der Hochschule und der Erweiterten Oberschule, die uns mit Ratschlägen und wertvoller Kritik geholfen haben, an dieser Stelle herzlich zu danken.

Magdeburg, im Dezember 1969 W. May

[1] Anmerkung: Das für diese Abschrift zugrunde liegende Original enthält leider mehrere Druckfehler. Sie wurden weitgehend korrigiert. Sollten Fehler übersehen worden sein, so wird um einen Hinweis gebeten.

1 Begriffe

Die ersten Gleichungen, mit denen wir zu tun bekamen, waren solche wie

$$1 + 1 = 2 \qquad \text{oder} \qquad 2 \cdot 3 = 6$$

und ähnliche. Der Term auf der linken Seite wurde gegeben und der kleine ABC-Schütze hatte die Aufgabe, den entsprechenden Wert auf der rechten Seite einzusetzen. Je nach Können (oder auch Glück) wurde dann die "Lösung" der Aufgabe als richtig oder als falsch bezeichnet.

Wir gedenken dieser Zeiten mit Schmunzeln und wissen heute, dass es unsere Aufgabe war, Aussagen aufzustellen, die nach Möglichkeit den Wahrheitswert wahr für sich beanspruchen konnten. Aussagen mit dem Wahrheitswert falsch zogen dagegen Tadel in irgendeiner Form nach sich und wurden daher tunlichst vermieden.

Später lernten wir Gleichungen von der Form

$$x^2 + x - 2 = 0$$

kennen. Bei diesen (algebraischen) Gleichungen war es nicht von vornherein möglich, ihren Wahrheitswert anzugeben, also zu sagen, ob sie wahre oder falsche Aussagen darstellen. Diese Gleichungen enthalten Leerstellen, die gewöhnlich vorerst mit dem Buchstaben x als Zeichen für eine. passende Zahl ausgefüllt werden, und es kommt nun darauf an, diese "Variablen" x so zu interpretieren, dass wahre Aussagen entstehen.

Man nennt Gleichungen, die solche Leerstellen enthalten, Aussageformen. Die obige Gleichung bedeutet also die Aufforderung, nach geeigneten (reellen oder komplexen) Zahlen zu suchen, die, an die Stelle von x eingesetzt, bewirken, dass der Term auf der linken Seite den Wert Null annimmt.
Wir finden hier sogar zwei Zahlen, die als sogenannte Wurzeln der Gleichung in Frage kommen, $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$, wie man z.B. mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes sofort erkennt.
Der Grad der algebraischen Gleichung (hier 2) gibt in jedem Falle an, wieviel (nicht unbedingt verschiedene) Wurzeln vorhanden sind. Zu dieser Gesetzmäßigkeit werden wir später bei den Differentialgleichungen etwas Analoges finden.

Nicht jede Gleichung, die Variable enthält, ist eine Aussageform. Die Gleichung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

bedeutet nicht die Aufforderung, nach geeigneten Werten der Variablen x zu suchen, für die sie erfüllt ist, sondern sie bringt eine gewisse Eigenschaft der beiden goniometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ zum Ausdruck, die für alle x mit $-\infty < x < +\infty$ gilt.
Daher stellt sie eine Aussage (Universalaussage) dar. Die Angabe "für alle" (die nicht immer hingeschrieben wird) bezeichnet man als Variablenbindung.

Wir können das obige Beispiel benutzen, um noch eine anders geartete Aussage (Existentialaussage) zu machen, indem wir sagen: Es gibt mindestens einen Wert von x,

für den $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Hier wird die Angabe "es gibt" als Variablenbindung bezeichnet.
Gleichungen, die Variable, z.B. x, enthalten, auf die eine der oben genannten Variablenbindungen "für alle x" oder "es gibt mindestens ein x" angewandt wird, stellen also Aussagen dar und sind keine Aussageformen.

Zunächst beschäftigen wir uns weiter mit der Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Wir können diesem algebraischen Problem eine geometrische Deutung geben, indem wir gewissermaßen noch eine Dimension hinzunehmen und sagen:
Es ist uns eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $y = x^2 + x - 2$ gegeben, und wir sollen herausfinden, wo das Bild dieser Funktion mit der x-Achse gemeinsame Punkte hat, wo also y den Wert Null annimmt.

Damit ist gleichsam die x, y-Ebene der "Raum" geworden, auf den sich unsere weiteren Untersuchungen erstrecken. Gleichzeitig haben wir uns auf "das Reelle" beschränkt. Fast alle unsere weiteren Betrachtungen werden (von den Bezeichnungen abgesehen) auf diesen zweidimensionalen Raum, die x,y-Ebene, beschränkt bleiben und dort eine geometrische Deutung erfahren.

Zurück zu unserem Beispiel! Die Zahlenpaare $(-2; 0)$ und $(1; 0)$, deren Bilder gewisse Punkte auf der x-Achse sind, sind die Lösungen des zweidimensional aufgefassten Problems. Die genannten Werte, in die Gleichung $y = x^2 + x - 2$ eingesetzt, ergeben je eine wahre Aussage.

Unterwerfen wir y keinen Beschränkungen, so wird die Gleichung durch unendlich viele Zahlenpaare (x, y) erfüllt. Die Gesamtheit der Bilder dieser Punkte bildet eine zusammenhängende Kurve, eine Parabel.
Dass das so ist, ergibt sich aus einer gewissen Eigenschaft der gegebenen Funktion, nämlich ihrer Stetigkeit. Die Kenntnis des Begriffs Stetigkeit und das Vertrautsein mit den Eigenschaften der stetigen Funktionen ist für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen unerlässlich.

Da wir diese Vorkenntnisse bei unseren Lesern nicht voraussetzen können, werden wir versuchen, ohne diese auszukommen, und uns mit Hinweisen begnügen, wo diese Kenntnisse erworben werden können.[2]

Wir bilden nun die erste Ableitung der betrachteten Funktion

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + 1$$

Nehmen wir an, es wäre uns aus irgendwelchen Umständen nur diese letzte Gleichung vorgelegt worden, so stünden wir jetzt vor der Frage: Wie lautete die ursprüngliche Funktion $y(z)$?

[2]Zum Begriff der Stetigkeit von Funktionen einer Variablen: Kleine Enzyklopädie Mathematik (KlEM) S. 410.

Genau genommen suchen wir die Zuordnungsvorschrift der Funktion y. Im Interesse einer flüssigeren Darstellung werden wir sie kurz als "die Funktion" bezeichnen.

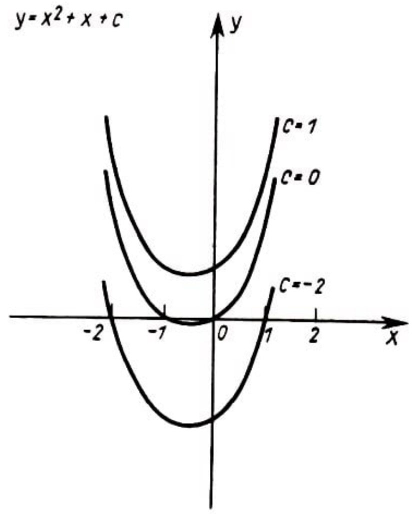
Gelänge uns die Beantwortung dieser Frage, so hätten wir bereits eine Differentialgleichung (eine sehr einfache) gelöst. Gesucht wird also die Funktion, deren erste Ableitung gleich dem Term auf der rechten Seite ist. Da wir durch Ableiten einer Funktion auf die Differentialgleichung gekommen sind, liegt es nahe, die Lösung auf dem Wege der Integration als der entgegengesetzten Operation zu suchen.
Wir integrieren auf beiden Seiten unbestimmt nach x:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} dx = \int (2x+1)\mathrm{d}x$$

und erhalten

$$y(x) = x^2 + x + c$$

Die auf beiden Seiten anfallenden Integrationskonstanten wurden auf der rechten Seite zu einer zusammengefasst.
Da die Konstante c völlig willkürlich ist, d. h. alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann, ergibt sich überraschenderweise, dass wir für jeden beliebig herausgegriffenen Wert von c eine unendliche Punktmenge (x, y, z) erhalten, deren Bild eine Parabel ist. Die Gesamtheit dieser Parabeln nennt man Parabelschar und c den Scharparameter (Bild 1).



Wir vermuten, dass sich unter der Schar diejenige Parabel befindet, von der wir ausgegangen sind.
Diese ging z.B. durch den Punkt $P(-2; 0)$, die oben bestimmte links vom Nullpunkt gelegene "Nullstelle" der Funktion.
Wir setzen die Werte $x = -2$ und $y = 0$ in die gefundene Lösung ein und erhalten:

$$0 = -(-2)^2 + (-2) + c$$

Dann kann c nur den Wert $c = -2$ annehmen. Wir erhalten also wieder

$$y = x^2 + x - 2$$

Wir hätten übrigens jeden anderen Punkt der Ausgangsparabel als den Punkt vorschreiben können, durch den die gesuchte Kurve geht. Ein allgemeiner Punkt unserer Parabel ist

$$P_0(x_0; y_0) = (x_0; x_0^2 + x_0 - 2)$$

Wir setzen die Werte oben ein und erhalten aus

$$x_0^2 + x_0 - 2 = x_0^2 + x_0 + c$$

wieder $c = -2$.

Die beschriebene Lösung unserer ersten Differentialgleichung weist typische Merkmale auf und gestattet die Erklärung einer Reihe wichtiger Begriffe.

Da die Lösung durch Integration erhalten wurde, nennt man die Lösungen der Differentialgleichungen auch ihre Integrale.
Zunächst ergab sich eine unendliche Menge von Funktionen, die sich aber nur in einer additiven Konstanten unterschieden. Die Gesamtheit dieser Funktionen bzw. die Kurvenschar als Bild dieser Gesamtheit nennt man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Jede einzelne Funktion bzw. jede einzelne Kurve der Schar als Bild dieser Funktion ist für sich Lösung der Differentialgleichung und wird als eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung bezeichnet.

In unserem Beispiel erhielten wir eine bestimmte partikuläre Lösung, indem wir forderten, dass die Lösungskurve durch einen bestimmten Punkt P_0 gehen solle. Man nennt einen solchen vorgegebenen Wert $y(x_0) = y_0$ Anfangswert und eine Differentialgleichung mit vorgeschriebenem Anfangswert ein Anfangswertproblem.

Differentialgleichungen sind also Gleichungen, die Ableitungen einer zu bestimmenden Funktion enthalten. Ist diese Funktion nur von einer Variablen abhängig, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Mit ihnen wollen wir uns in diesem Buch beschäftigen.
Sie sind von den partiellen Differentialgleichungen zu unterscheiden, in denen Funktionen von mehr als einer Variablen auftreten. Die in Frage kommenden Ableitungen sind sogenannte partielle.

Wir müssen noch die Begriffe Ordnung und Grad der Differentialgleichungen erklären. Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch die höchste in ihr vorkommende Ableitung bestimmt. Die von uns gelöste Differentialgleichung war also von 1. Ordnung. Die folgenden Beispiele stellen Differentialgleichungen verschiedener Ordnung dar:

(1)	$y' = x + y$	(1. Ordnung)
(2)	$(y'')^2 = y$	(2. Ordnung)
(3)	$y''' - 3y'' - y = 0$	(3. Ordnung)
(4)	$y^{(4)} = y$	(4. Ordnung)

Die Differentialgleichungen (1), (3) und (4) sind außerdem vom 1. Grad (linear). Jeder Summand enthält entweder die Funktion y oder eine ihrer Ableitungen, und zwar in der 1. Potenz.

Die Differentialgleichung (2) ist dagegen eine Differentialgleichung 2. Grades. Die Differentialgleichung (5) $y^2y' = x - y$ ist vom Grade 3.

Entscheidend ist die höchste Summe der Exponenten von y und seinen Ableitungen in den Summanden, falls die Differentialgleichung ein Polynom in y, y', ... darstellt.
Der Leser versuche die folgenden Differentialgleichungen nach Ordnung und Grad zu klassifizieren:

$$(6)\ y'' = \ln x^2, \quad (7)\ y'''y^3 = x^2, \quad (8)\ y' = \frac{2x-1}{y^2+1}, \quad (9)\ y'' = \sin y$$

Lösung: (6) 2. Ordnung - linear, (7) 3. Ordnung - 4. Grades (nichtlinear), (8) 1. Ordnung - 3. Grades (nichtlinear; Nenner beseitigen!), (9) 2. Ordnung - Grad nicht angebbar.

Zusammenfassung: Differentialgleichungen sind Gleichungen, die als Leerstellen Funktionen wie z.B. $y(x)$ und ihre Ableitungen enthalten, sind also Aussageformen. Man könnte sie in die Kategorie der Funktionalgleichungen einordnen, bei denen ebenfalls allgemeine Funktionssymbole als Leerstellen auftreten - allerdings ohne die Ableitungen dieser zu bestimmenden Funktionen.

Eine Differentialgleichung lösen heißt demnach, eine Funktion, z.B. $y(x)$, so zu bestimmen, dass sie mit ihren Ableitungen in die Gleichung eingesetzt, diese für alle x des Definitionsbereichs der Funktion und ihrer Ableitungen (bei $y = \sqrt{x}$ alle $x > 0$) zu einer wahren Aussage macht.

Damit wurde ausgesprochen, dass als Lösungen nur differenzierbare Funktionen in Frage kommen. Da differenzierbare Funktionen notwendigerweise auch stetig sind und die Bilder stetiger Funktionen zusammenhängende Kurven bilden, sind die Bilder der Lösungsfunktionen, auch Lösungskurven genannt, stets zusammenhängende Kurven.

Für die Leser, die noch nicht weiter in die Analysis eingedrungen sind, soll gesagt sein, dass die elementaren Funktionen, auf die wir uns beschränken wollen, in ihren Definitionsbereichen immer stetig sind.

2 Probleme, die auf Differentialgleichungen führen

Die Möglichkeiten, die Lehre von den Differentialgleichungen anzuwenden, sind, vor allem in der Technik, außerordentlich zahlreich. An einzelnen Beispielen, die nur einfachere Probleme berühren und lediglich einen winzigen Ausschnitt aus der Überfülle der anfallenden Aufgaben darstellen, soll dies verdeutlicht werden.

1. Wir waren eben auf das Problem gestoßen, alle Funktionen aufzusuchen, die mit ihrer 4. Ableitung übereinstimmen. Es ergibt sich die Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{(4)} - y = 0$$

2. Entsprechend könnte man fragen: Welche Funktionen stimmen mit ihrer 1. Ableitung überein? Für welche Funktionen ist $y'(x) = y(x)$?
Offenbar lässt sich die Zahl entsprechender Fragestellungen beliebig vermehren.

3. Die Differentialgleichung $y' - y^2 = 0$ beantwortet mit ihrer Lösung die Frage: Bei welchen Funktionen ist die 1. Ableitung mit dem Quadrat der Funktion identisch?

4. Im 1. Abschnitt fanden wir die Kurvenschar

$$y = x^2 + x + c$$

Ein Problem mit technisch-physikalischen Anwendungen besteht darin, die Kurvenschar zu bestimmen, bei der jede Kurve jede Kurve einer gegebenen Schar senkrecht schneidet. In einem beliebigen Punkt der gegebenen Schar galt $y'(x) = 2x + 1 = f'(x)$.

Schneiden sich die Kurven senkrecht, so stehen in den Schnittpunkten die Tangenten senkrecht aufeinander. Für die Richtungsfaktoren (m_1 und m_2) zweier Geraden, die senkrecht aufeinanderstehen, gilt

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Daher muss in jedem Schnittpunkt unserer Scharen, der geometrischen Bedeutung der 1. Ableitung als Richtungsfaktor einer Tangente entsprechend,

$$f'(x) = -\frac{1}{g'(x)}$$

gelten. Wir erhalten dann

$$g'(x) = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{2x+1}$$

und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{2x+1}$$

Ihre allgemeine Lösung ist die Kurvenschar mit der gewünschten Eigenschaft. Man nennt die Kurven dieser Schar die orthogonalen Trajektorien der gegebenen.

5. Es soll die Form eines Spiegels (Rotationsfläche) bestimmt werden mit der Eigenschaft, dass er alle Strahlen, die parallel zu seiner Symmetrieachse (x-Achse) einfallen, in einen bestimmten Punkt (den Koordinatenursprung) wirft.
Zum Ansatz ziehen wir eine Planfigur (Bild 2) heran.

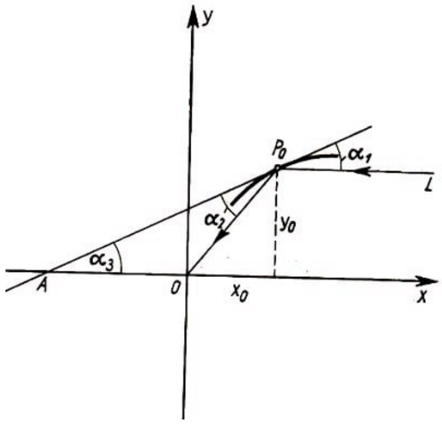


Bild 2:

Da die gesuchte Fläche eine Rotationsfläche darstellt, können wir aus Symmetriegründen die Betrachtung auf die Kurven beschränken, die sich beim Schnitt der Fläche mit einer Ebene durch die Symmetrie-(Rotations-) Achse ergeben.

Durch P_0 gehe ein Stück der gesuchten (Schnitt-) Kurve. $\overline{AP_0}$ ist ein Teil der in P_0 angelegten Tangente. Der durch Pfeile gekennzeichnete Lichtstrahl (L) hat den geforderten Verlauf.
Da er in P_0 an der Kurve, d. h. an der angelegten Tangente, gespiegelt wird, ergibt sich aus dem Reflexionsgesetz die Gleichheit der Winkel α_1 und α_2. Außerdem gilt wegen der Parallelität des einfallenden Strahls und der x-Achse

$$\alpha_1 = \alpha_3$$

Daher ist das Dreieck $\triangle AOP_0$ gleichschenklig ($\overline{AO} = \overline{P_0O}$). Wir stellen noch fest, dass $\alpha_3 = \alpha_0$ der Anstiegswinkel der Tangente ist und setzen an:

$$\tan\alpha_0 = f'(x_0) = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

(wegen $\overline{AO} = \overline{P_0O} = \sqrt{x_0^2 + y_=^2}$). Damit erhalten wir die Differentialgleichung

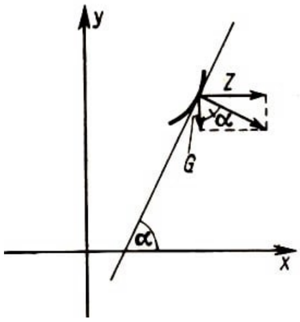
$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ihre Lösung, die später ermittelt wird, stellt die Schar aller Kurven dar, die bei Rotation um die x-Achse Spiegel der gewünschten Eigenschaft ergeben.

6. Lassen wir ein zylindrisches Gefäß mit Wasser um seine Symmetrieachse gleichmäßig rotieren, so nimmt die Oberfläche des Wassers schließlich eine bestimmte Form an. Diese ist zu bestimmen.
Wir betrachten wie im vorhergehenden Beispiel einen Achsenschnitt (die y-Achse ist Rotationsachse). Können wir die Schnittkurve der gesuchten Fläche mit der Schnittebene berechnen, dann erhalten wir damit die gesuchte Fläche als Rotationsfläche,

die durch die Schnittkurve erzeugt wird. Beim Ansatz sind physikalische Überlegungen anzustellen (vgl. Bild 3).

Bild 3:



Jedes Wasserteilchen (Masse m) steht während der Rotation unter dem Einfluss der Schwerkraft ($G = mg$) und der Fliehkraft ($Z = m\omega^2 r$).

Die Resultierende der beiden Kräfte muss in jedem Punkt auf der Tangente an die gesuchte Kurve senkrecht stehen. Andernfalls hätte die Resultierende noch eine Komponente in Richtung der Tangente, die eine seitliche Verschiebung des Wasserteilchens zur Folge hätte.
Wir nehmen dagegen an, dass sich bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit (ω) eine gleichbleibende Form der Wasseroberfläche eingestellt hat und jedes Teilchen innerhalb der Fläche seinen Platz beibehält. Aus dem Bild 3 entnehmen

$$\tan\alpha = f'(x) = \frac{Z}{G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g}x$$

Es ergibt sich die Differentialgleichung

$$y' = \frac{\omega^2}{g}x$$

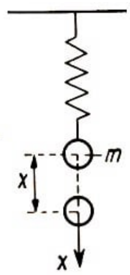
Da die Lösung sehr einfach ist, führen wir sie sofort durch. Wir erhalten durch unbestimmte Integration

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$$

Die gesuchten Kurven sind also Parabeln und die zugehörigen Flächen Rotationsparaboloide.

7. An einer Feder hängt die Masse m (Bild 4). Die Masse der Feder sei bedeutungslos gegenüber der angehängten Masse. Wir ziehen die Masse um eine kleine Strecke nach unten und lassen los.

Bild 4:



Wie heißt die Differentialgleichung der sich ergebenden Bewegung?

Zunächst erinnern wir an das Hookesche Gesetz, wonach die Kraft, die die Masse wieder in die Ruhelage zurückbringen will, proportional der Entfernung aus der Ruhelage ist. Ferner erinnern wir an das Newtonsche Kraftgesetz[3] $F = ma$ und daran, dass für den Wert der Beschleunigung $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ gilt. Dann können wir ansetzen $F = -kx$ (x ist die Auslenkung aus der Ruhelage). k, der Proportionalitätsfaktor aus dem Hookeschen Gesetz, ist eine Konstante und charakterisiert die besonderen Eigenschaften der verwendeten Feder. Das Minuszeichen drückt aus, dass die Kraft der Auslenkung entgegen wirkt. Es ergibt sich aus

$$F = ma, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

Die Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung ist eine Funktion $x(t)$, die den Bewegungsvorgang beschreibt (Weg-Zeit-Gesetz).

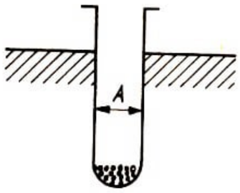


Bild 5:

In Wasser schwimmt aufrecht ein mit Schrotkörnern belastetes Reagenzglas (Bild 5) von der Masse m. Wir drücken das Glas vorsichtig senkrecht nach unten und lassen es dann los; es führt tanzende Bewegungen aus. Die Differentialgleichung dieser Bewegung entspricht der obigen.

Die Kraft, die das Reagenzglas in die Ruhelage zurückführt, ist beim Hineindrücken der Auftrieb. Nach dem Archimedischen Prinzip ist diese gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Damit erhalten wir (A ist der äußere Querschnitt des Reagenzglases):

$$F = ma = -xAg, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -xAg, \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x\frac{Ag}{m}$$

Bemerkung: Der Vorgang kommt infolge der inneren Reibung des Wassers zur Ruhe. Berücksichtigt man diese, so wird die Differentialgleichung entsprechend komplizierter.

8. Wir stellen uns die Frage: Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Körper senkrecht nach oben geschossen werden, damit er aus dem Schwerefeld der Erde herauskommt? Es handelt sich um die Ermittlung der zweiten kosmischen Geschwindigkeit.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Massen (m und M), deren Schwerpunkte die Entfernung r besitzen, mit der Kraft

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2}$$

[3] Gültig für Geschwindigkeiten, die merklich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen.

an; m sei die Masse des Flugkörpers, M die Masse der Erde und γ die sog. Gravitationskonstante, die experimentell ermittelt werden kann. Da diese Gravitation unserer Bewegung entgegenwirkt, müssen wir ansetzen:

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -F = -\frac{\gamma mM}{r^2}$$

Wir können die Differentialgleichung vereinfachen, wenn wir berücksichtigen, dass auf der Erdoberfläche ($r = R$) die Gravitation gleich dem Gewicht (mg) ist:

$$g = \frac{\gamma M}{R^2}; \qquad R^2g = \gamma M; \qquad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{R^2g}{r^2}$$

Die erhaltene Differentialgleichung 2. Ordnung lösen wir später.

9. Befestigen wir ein (unbegrenzt biegsames) Seil lose an zwei festen Punkten, so hängt es in bestimmter Weise durch. Für die entstehende Kurve, die Seilkurve oder auch Kettenlinie genannt, lässt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

aufstellen.[4]
Die Konstante c enthält unter anderem die Masse einer Längeneinheit des Seils.

10. Beim Zerfall eines radioaktiven Stoffes beobachtet man, dass die Zahl der Atome Δn, die in der Zeit Δt zerfallen, der Anzahl der vorhandenen Atome n proportional ist. Es ist also $\frac{\Delta n}{\Delta t} \sim n$, oder, wenn wir Δt gegen Null gehen lassen, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \sim n$, was zu der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

führt. Das Minuszeichen drückt aus, dass die Zahl der noch vorhandenen, d.h. nicht zerfallenen Atome abnimmt. λ ist eine Konstante, die für den betreffenden Stoff charakteristisch ist, seine sogenannte Zerfallskonstante.

Mit dieser Auswahl von einfachen Problemen, die im Ansatz alle auf Differentialgleichungen führen, wollen wir unseren Hinweis auf die Bedeutung dieser mathematischen Disziplin beschließen und uns der Frage zuwenden, wie man diese Differentialgleichungen lösen kann.
Wir greifen zunächst einen einfachen Fall heraus und betrachten Differentialgleichungen der Form $y' = f(x, y)$.

[4] Herleitung z.B. Kneschke, Differentialgleichungen und Randwertprobleme, B. I., S. 22.

3 Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das Richtungsfeld

Der vorgelegten Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ kann man eine einfache geometrische Deutung geben.
Wir setzen voraus, dass die Funktion $f(x, y)$ eindeutig ist, d.h., dass jedem Zahlenpaar (x, y) des Definitionsbereichs genau ein Wert entspricht. Dieser Wert ist gleich der 1. Ableitung der gedachten Lösungsfunktion an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der gedachten Lösungskurve im Punkt (x, y).

Zwischen den Koordinaten des beliebigen Punktes, x und y, und der 1. Ableitung der angenommenen Lösungsfunktion in diesem Punkt besteht also eine Zuordnungsvorschrift. So entstehen für alle Punkte der x, y-Ebene, für die die Funktion $f(x, y)$ definiert ist, sogenannte Wertetripel (x, y, y'), die man Linienelemente nennt. In ihrer Gesamtheit ergeben sie das Richtungsfeld der gegebenen Differentialgleichung.

Beispiele:
1. $y' = x$

Bei dieser Zuordnungsvorschrift tritt y nicht auf. Das ist ein Zeichen dafür, dass y beliebig anzunehmen ist. Auf der Geraden $x = 0$ haben wir also überall die Steigung Null, d. h. sämtliche Lösungskurven durchsetzen die y-Achse in waagerechter Richtung.

Auf der Geraden $x = 1$ haben wir überall die Steigung 1, auf der Geraden $x = -1$ die Steigung -1 usw. Wir deuten die Steigung durch eine kleine Strecke, einen kleinen Abschnitt der Tangente, an. Die Lösungskurven berühren in jedem Punkt diese Strecken.

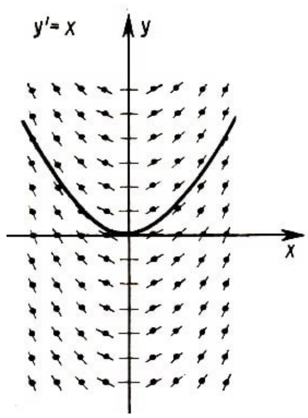


Bild 6:

Betrachten wir das Bild 6, das das Richtungsfeld der gegebenen Differentialgleichung darstellt, so liegt es nahe, als Lösungskurven eine Schar von parallel in Richtung der y-Achse verschobenen Parabeln anzunehmen.
In der Tat ist $y = \frac{x^2}{2} + c$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

2. $y' = -\frac{x}{y}$

Wir setzen $y \neq 0$ voraus. Auf der y-Achse erhalten wir die Steigung 0, auf der Geraden $y = x$ die Steigung -1, auf der Geraden $y = -x$ die Steigung 1 usw.

Nähern wir uns der x-Achse, so wächst $y'(x)$ dem Betrage nach über alle Grenzen, d.h., die Lösungskurve schneidet die x-Achse senkrecht. Der Nullpunkt muss allerdings ausgeschlossen bleiben. Hier ist keine nachträgliche Deutung möglich (Bild 7).

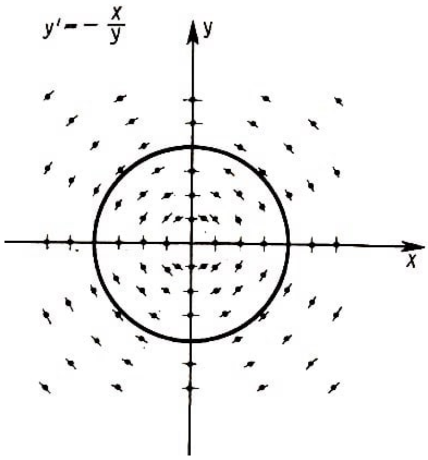


Bild 7:

Die Lösungskurven sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = c \qquad (c > 0)$$

In der Tat gilt für diese Kurvenschar $y' = -\frac{x}{y}$.

3. $y' = \sqrt{y}$

Bei dieser Differentialgleichung sind nur, in der oberen Halbebene ($y = 0$) Lösungskurven zu erwarten. Um das Richtungsfeld besser zeichnen zu können, fassen wir alle Punkte mit gleicher Steigung zusammen, indem wir $y' = c$ setzen und für c der Reihe nach geeignete feste Werte annehmen. Solche Kurven nennt man Isoklinen.[5]

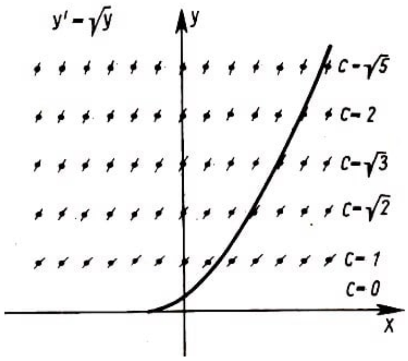


Bild 8:

Wie das Bild 8 zeigt, darf man parabelähnliche Lösungskurven vermuten, die parallel in waagerechter Richtung verschoben sind.
Die Rechnung ergibt $\sqrt{y} = \frac{x}{2} + c$ oder $y = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2$ mit der Einschränkung $\frac{x}{2} + c \geq 0$ wegen $\sqrt{y} \geq 0$. Es ist also jeweils die rechte Hälfte dieser Parabeln Lösungskurve.

4. $y' = \frac{x}{|x|}$

[5] Vgl. auch Kl. E.M. 5. 522.

Wir erinnern an die Definition des absoluten Betrages. Es gilt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Demnach erhalten wir für $x > 0$: $y' = 1$ und für $x < 0$: $y' = -1$.
Für $x = 0$ ist $y' = f(x)$ nicht definiert. Das Richtungsfeld hat eine sehr einfache Gestalt (Bild 9), und wir erhalten die Lösungen $y = x + c$ (in der rechten Halbebene) und $y = -x + c$ (in der linken Halbebene)

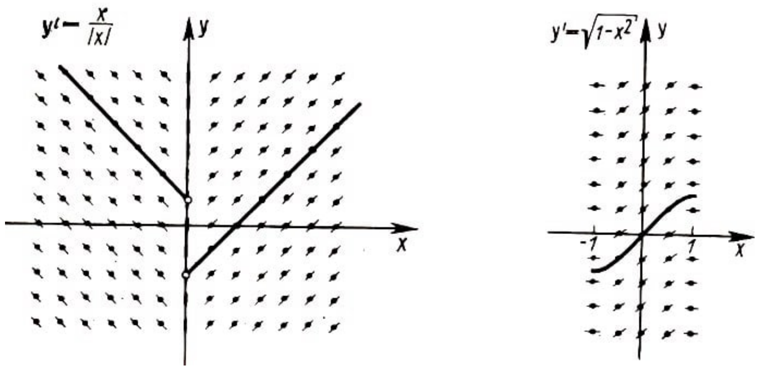


Bild 9, 10:

5. $y' = \sqrt{1-x^2}$

Der Definitionsbereich von $y' = f(x,y)$ ist der Vertikalstreifen, in dem x alle Werte von -1 bis $+1$ annehmen darf, während y beliebig ist.
Wir berechnen einige Isoklinen.

Aus $y' = 0$ folgt $x = -1$ und $x = +1$. Für $y' = 1$ erhalten wir $x = 0$. Wie man sieht, ergeben sich für y' Werte von 0 bis 1.
$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt $x = +\frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$.
Die allgemeine Lösung[6] ist $y(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$.
In Bild 10 wurde die partikuläre Lösung durch $P_0(0,0)$ eingezeichnet.

Es lässt sich allgemein zeigen, dass bei Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(x)$, wo die 1. Ableitung nur von x abhängig ist, eine Kurvenschar entsteht, deren Kurven in Richtung der y-Achse parallel verschoben sind.
Haben wir eine Differentialgleichung vom Typ $y' = g(y)$, wo die 1. Ableitung nur von y abhängig ist, so sind die Integralkurven in Richtung der x-Achse parallel gegeneinander verschoben.

Das Isoklinenverfahren gestattet einen Einblick in den ungefähren Verlauf der Lösungskurven und natürlich auch eine nachträgliche Kontrolle der rechnerischen Lösung. Bei ausreichender Zeichengenauigkeit lässt sich daraus ein graphisches Näherungsverfahren entwickeln.
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

[6] Kl. E.M. S. 279/80 $\arcsin x$ hier als Hauptwert.

Zur Ermittlung von Isoklinen setzen wir $y = c$ und lösen die Gleichung nach y auf. Die Isoklinen sind Geraden mit der Gleichung

$$y = \frac{c-1}{c+1}x$$

Bild 11 gibt das einfach zu zeichnende Richtungsfeld wieder.

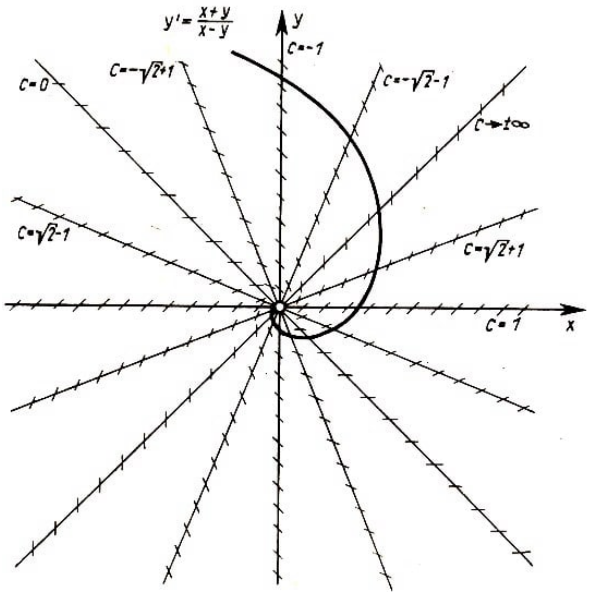


Bild 11:

Im Nullpunkt lässt sich kein Wert für y' ermitteln. Auf der Geraden $y = x$ stehen die Tangenten der gedachten Lösungskurven senkrecht zur x-Achse.
Wir vermuten als Lösungskurven Spiralen, die vom Nullpunkt - dem sogenannten Strudelpunkt - ausgehen und im mathematisch positiven Sinn gewunden sind. Die Rechnung wird diese Vermutung bald bestätigen.

4 Elementare Lösungsverfahren zu Differentialgleichungen 1. Ordnung. Trennung der Variablen

4.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Wir beschäftigen uns nun mit den Methoden, die es gestatten, Differentialgleichungen von der Form $y' = f(x,y)$ zu lösen.
Ein wichtiger Sonderfall liegt dann vor, wenn die rechte Seite als Produkt von zwei Termen geschrieben werden kann, von denen der eine nur x und der andere nur y enthält

$$y' = g(x)h(y)$$

Als Beispiel lösen wir das Anfangswertproblem

$$y' = 2xe^{-y} \qquad \text{mit} \qquad (x_0,y_0) = (2;0)$$

Zunächst teilen wir beide Seiten der Gleichung durch e^{-y} ($e^{-y} \neq 0$) und erhalten die zu lösende Gleichung in der äquivalenten Form

$$e^y y' = 2x$$

Dann bilden wir auf beiden Seiten das bestimmte Integral nach x mit den Grenzen x_0 und x

$$\int\limits_{x_0}^{x} e^y y' \mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x} 2x \mathrm{d}x$$

Da $e^y y'$ dasselbe ist wie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{y(x)})$, ergibt sich mit $x_0 = 2$

$$\left[e^{y(x)}\right]_2^x = \left[x^2\right]_2^x$$

und weiterhin

$$e^{y(x)} - e^{y(2)} = x^2 - 4$$

Wegen $y(2) = y_0 = 0$ erhalten wir

$$e^{y(x)} = x^2 - 3$$

und schließlich

$$y(x) = \ln(x^2 - 3) \qquad \text{mit} \qquad x^2 - 3 > 0$$

Die gefundene Funktion löst unsere Differentialgleichung, denn es gilt

$$y'(x) = \frac{1}{x^2 - 3} 2x = 2xe^{-y}$$

Für $x_0 = 2$ nimmt sie den vorgeschriebenen Wert $y(2) = \ln(4 - 3) = 0$ an. Nach der Integration hatte sich auf der linken Seite

$$e^{y(x)} - e^{y(x_0)}$$

ergeben, was sich auch als $e^y - e^{y_0}$ schreiben lässt: Das ist aber nichts anderes als

$$\int_{y_0}^{y} e^y \mathrm{d}y$$

Wir werden daher weiterhin den Lösungsweg abkürzen und formal wie folgt rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2xe^{-y} \\
e^y \mathrm{d}y &= 2x\mathrm{d}x \\
\int_{y_0}^{y} e^y \mathrm{d}y &= \int_{x_0}^{x} 2x\mathrm{d}x \\
e^{y_0} - e^y &= x^2 - x_0^2 \\
e^y &= x^2 - 3 \qquad (x_0 = 2; y_0 = 0) \\
y &= \ln(x^2 - 3)
\end{aligned}$$

Man nennt das vorgetragene Verfahren nach der 2. Zeile "Trennung der Variablen" und eine Differentialgleichung von der speziellen Form $y' = g(x)h(y)$ eine "Differentialgleichung mit trennbaren Variablen".

4.2 Allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall gehen wir gleich von $y' = g(x)h(y)$ aus, wobei wir zunächst voraussetzen, dass $h(y)$ in dem uns interessierenden Bereich der x,y-Ebene nirgends den Wert Null annimmt.
Wir dividieren die Gleichung durch $h(y)$ und integrieren wie oben nach x von x_0, bis x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{h(y)} \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$

Da wir jetzt mit allgemeinen Funktionssymbolen arbeiten, können wir nur weiterrechnen, wenn wir gewisse Voraussetzungen machen. Es möge $\int \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} = H(t) + c_0$ sein mit $H'(t) = \frac{1}{h(t)}$ und $\int g(t)\mathrm{d}t = G(t) + c_1$ mit $G'(t) = g(t)$. Der Integrand auf der linken Seite ist dann nichts anderes als

$$\frac{y'(x)}{h(y)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H(y)]$$

So erhält man

$$[H[y(x)]]_{x_0}^{x} = [G(x)]_{x_0}^{x} \qquad \text{oder} \qquad [H[y(x)] - [H[y(x_0)]] = G(x) - G(x_0) \qquad \text{oder}$$

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \tag{*}$$

Dasselbe Ergebnis hätten wir erhalten, wenn wir die Variablen getrennt und wie folgt integriert hätten:

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$

Lässt sich die Gleichung (*) nach y auflösen, so ergibt sich aus

$$H(y) = G(x) + c \qquad (c = H(y_0) - G(x_0)); \qquad y(x) = F[G(x) + c]$$

als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ($F(t)$ nach t ableitbar). Wir überzeugen uns davon, indem wir $y'(x)$ bilden.

$$y'(x) = F'(G(x) + c)G'(z) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Wegen $G(x) + c = H(y)$ ist andererseits

$$y'(x) = F'[H(y)]H'(y)y'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Hieraus folgt

$$F'[G(x) + c] = \frac{1}{H'(y)}; \qquad (H'(y) \neq 0)$$

und wegen

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad \text{und} \quad G'(x) = g(x) \qquad ; \qquad y'(x) = g(x)h(y)$$

Zu den Voraussetzungen über die Existenz von Stammfunktionen bemerken wir noch für den mit der Analysis vertrauten Leser, dass es genügt hätte, die Stetigkeit von $g(x)$ und $h(y)$ vorauszusetzen, da mit $h(y)$ auch $\frac{1}{h(t)}$ stetig ist - allerdings mit Ausnahme der Stellen, an denen $h(y) = 0$ ist. Dieser Fall wird uns später noch beschäftigen.

4.3 Weitere Beispiele

1. Im 3. Abschnitt betrachteten wir die Differentialgleichung $y' = \frac{-x}{y}$ $(y \neq 0)$. Sie ist von dem besprochenen Typ.
Die Trennung der Variablen ergibt $y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$. Es folgt

$$\int\limits_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = -\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \qquad , \qquad \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

Das Bild der allgemeinen Lösung besteht aus der Schar der konzentrischen Kreise um den Nullpunkt $(y = 0)$.
Für $y = 0$ ist der Term auf der rechten Seite der Differentialgleichung nicht definiert, weil (für $x \neq 0$) der Wert von $y'(x)$ beim Übergang von y zu Null über alle Grenzen

wächst.

Würden wir zu der gefundenen Kurvenschar die Differentialgleichung mit x als Funktion von y aufstellen, dann ergäbe sich

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{x}$$

mit wohldefiniertem Anstieg $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0\right)$ für $y = 0$ $(x \neq 0)$.
Die Rechnung führt, wovon sich der Leser selbst überzeugen möge, wieder zu der obigen Schar von Kreisen, nur mit dem Unterschied, dass jetzt der Wert $x = 0$ ausgeschlossen werden muss.

Es ist üblich, die Mängel in beiden Rechnungen durch Heranziehung der anderen Form der Differentialgleichung zu beheben, da sie offenbar Mängel der Rechenmethode sind und nicht etwa darauf beruhen, dass die Integralkurven in den Punkten $(\pm r; 0)$ bzw. $(0; \pm r)$ keine Tangenten besitzen. Die Menge der Punkte (x, y), die die Lösungskurve der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x,y)$$

bildet, wird also stillschweigend vereinigt mit der Menge der Punkte (x, y), die die Lösungskurve der entsprechenden Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f_2(x,y) = \frac{1}{f_1(x,y)}$$

bildet.

2. Gegeben ist ein Gleichstromkreis, der neben dem (stets vorhandenen) Ohmschen Widerstand (R) auch eine Spule (mit Selbstinduktion) enthält (Bild 12).

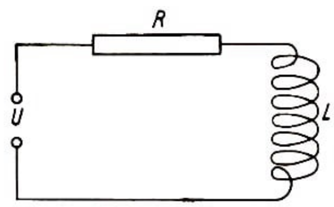


Bild 12:

Wir wollen den zeitlichen Verlauf der Stromstärke beim Einschalten studieren. Wie aus Schulversuchen bekannt ist, erreicht die Stromstärke bei einer bestimmten angelegten Gleichspannung U nicht sofort ihren vollen konstanten Wert.
Im Physikunterricht wird gezeigt, dass infolge der Selbstinduktion an den Enden der Spule eine Gegenspannung vom Betrag $-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ auftritt. L ist der Selbstinduktionskoeffizient der Spule, der alle Besonderheiten ihres Baues (Windungszahl, Länge, Querschnitt, Material) in einer Konstanten zusammenfasst.

Es wirkt also statt der angelegten Spannung U in Wirklichkeit die Spannung $U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ die nach dem Ohmschen Gesetz der Stromstärke I proportional ist, so dass wir

$$RI = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

erhalten. Wir haben damit eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $I(t)$ bekommen. U, R und L sind konstant. Als Anfangswert legen wir fest, dass zur Zeit des Einschaltens ($t = 0$) die Stromstärke den Wert $I = 0$ habe. Die Rechnung verläuft wie folgt:

$$\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= U - RI \\
\frac{\mathrm{d}I}{U - RI} &= \frac{1}{L}\mathrm{d}t && \text{(Trennung der Variablen)} \\
\int\limits_{I=0}^{I} \frac{\mathrm{d}I}{U - RI} &= \frac{1}{L}\int\limits_{t=0}^{t} \mathrm{d}t && (U - RI \neq 0) \\
\left[-\frac{1}{R}\ln|U - RI|\right]_0^I &= \frac{1}{L}\,[t]_0^t \\
\ln\left|\frac{U - RI}{U}\right| &= -\frac{R}{L}t
\end{aligned}$$

Da I höchstens kleiner als $\frac{U}{R}$ und damit $U - RI$ nur positiv sein kann, erhält man

$$1 - \frac{RI}{U} = e^{-\frac{R}{L}t} \qquad , \qquad I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Zur Zeit $t = 0$ ist die Stromstärke $I = 0$. Wenn t wächst, nimmt der Summand

$$e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{1}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

ständig ab. Für $t \to \infty$ ist sein Grenzwert Null. Dann gilt uneingeschränkt das Ohmsche Gesetz $I = \frac{U}{R}$. Je kleiner L ist, desto schneller geht $e^{-\frac{R}{L}t}$ gegen Null.
Bei einer Spule mit großer Selbstinduktion bleibt dagegen $e^{-\frac{R}{L}t}$ länger auf großen Werten, d.h., das Fließen des Stromes wird länger gehemmt.

3. Das Anfangswertproblem $(x^2 - 4)y' = 2xy$; $(x_0, y_0) = (0; 1)$ ist zu lösen.
Die Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2x}{x^2 - 4}\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int\limits_1^y \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\limits_0 x\frac{2x}{x^2 - 4}\mathrm{d}x$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
[\ln|y|]_1^y &= \left[\ln|x^2 - 4|\right]_0^x \\
\ln\left|\frac{y}{1}\right| &= \ln\left|\frac{x^2 - 4}{-4}\right| = \ln\left|\frac{x^2 - 4}{4}\right| \\
|y| &= \left|\frac{x^2}{4} - 1\right| \\
y &= \pm\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir nun, dass $y(0) = 1$ gelten muss, so sehen wir, dass nur das Minuszeichen gelten kann. Es ist also

$$y = 1 - \frac{x^2}{4}$$

die Funktion, die als Lösung in Frage kommt. Der Leser möge den Beweis selbst führen.

Die Entscheidung über das Vorzeichen der Lösung werden wir in gleichgelagerten Fällen in Zukunft schneller treffen.
In der Differentialgleichung $y' = yg(x)$ mit $\int g(x)dx = G(x) + c$ erhalten wir

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x, \qquad \ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = G(x) - G(x_0), \qquad y = \pm y_0 e^{G(x)-G(x_0)}$$

Da der 2. Faktor als Exponentialfunktion stets positiv ist, kann nur das Pluszeichen richtig sein, da für $x = x_0$ sich $y = +y_0$ ergeben muss. Anders ausgedrückt, in der Umgebung von P_0 müssen y und y_0 das gleiche Vorzeichen besitzen, so dass mit $\frac{x}{x_0} > 0$ stets $\frac{y}{y_0} > 0$ gilt.

In der Differentialgleichung $y' = -\frac{y}{x}$ mit $(x_0; y_0) = (1; -1)$ erhalten wir dann sofort

$$\ln\left|\frac{y}{-1}\right| = -\ln\left|\frac{x}{1}\right| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{1}{x}$$

Die allgemeine Lösung ist $y = \frac{c}{x}$ mit $c = x_0 y_0$.

4. Das letzte Beispiel des 2. Abschnitts hatte für den zeitlichen Ablauf des radioaktiven Zerfalls die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

ergeben (n ist die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen nicht zerfallenen Atome). Zur Zeit $t = 0$ sei die Anzahl der nicht zerfallenen Atome $n = n_0$. Die Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\lambda \mathrm{d}t$$

Es folgt

$$\int\limits_{n_0}^{n} \frac{\mathrm{d}n}{n} = -\lambda \int\limits_{0}^{t} \mathrm{d}t, \qquad \ln\frac{n}{n_0} = -\lambda t, \qquad n = n_0 e^{-\lambda t}$$

Zur Charakterisierung der Schnelligkeit des Zerfalls ist es üblich, die Halbwertszeit T anzugeben, d.h. die Zeit, in der die Hälfte der Atome zerfallen ist. Für $t = T$ ist also $n = \frac{n_0}{2}$.
Die Rechnung ist einfach:

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda T} \quad , \quad 1 = 2e^{-\lambda T}$$

$$0 = \ln 2 - \lambda T \quad , \quad T = \frac{1}{\lambda}\ln 2$$

4.4 Aufgaben

Die folgenden Anfangswertprobleme sind mit Trennung der Variablen zu lösen.

a) $y' = \frac{y}{x}$, $(x_0; y_0) = (-2; 1)$, Lösung: $y = -\frac{2}{x}$ $(x \neq 0)$.

b) $y' = 2xy - 6x + y - 3$, $(x_0; y_0) = (0; 2)$, Lösung: $y = 3 - e^{x^2+x}$.
Anleitung: Der Term auf der rechten Seite ist zunächst in ein Produkt zu verwandeln.

c) $y' = y \sin x$, $(x_0; y_0) = \left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$; Lösung: $y = -e^{-\cos x}$.

d) $y' = \frac{1+y^2}{2xy}$, $(x_0; y_0) = (-2; 1)$; Lösung: $y = \sqrt{-x-1}$; $(y > 0)$.

e) $y' = \frac{\tan y}{x}$, $(x_0; y_0) = \left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$; Lösung: $y = -\arcsin x$.

5 Probleme, die sich auf solche mit trennbaren Variablen zurückführen lassen

5.1 $y' = f(ax + by + c)$

Wenn wir die Differentialgleichung $y' = x - y$ lösen wollen, so sehen wir auf den ersten Blick keine Möglichkeit, eine Trennung der Variablen vorzunehmen. Man erreicht das Ziel dennoch mit Hilfe einer Substitution.
Nehmen wir an, dass eine ableitbare Funktion $y(x)$ als Lösung existiert, dann setzen wir

$$x - y(x) = u(x)$$

wobei $u(x)$ wieder eine ableitbare Funktion ist. Wir bilden die 1. Ableitung nach x und erhalten

$$1 - y'(x) = u'(x) \qquad \text{also} \qquad y'(x) = 1 - u'(x)$$

und demnach eine Differentialgleichung für $u(x)$

$$u'(x) = 1 - u(x)$$

Jetzt ist die Trennung der Variablen möglich:

$$\begin{aligned} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{1-u} &= \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \qquad (u \neq 1; u_0 = x_0 - y_0) \\ \ln \frac{1-u}{1-u_0} & x - x_0 \\ \frac{1-u}{1-u_0} &= e^{x-x_0} \\ u &= 1 - (1-u_0)e^{x_0}e^{-x} \end{aligned}$$

Nach der Rücksubstitution ergibt sich

$$y = x - 1(1-u_0)e^x e^{x_0} e^{-x} \qquad \text{oder} \qquad y = x - 1 + ce^{-x}$$

Diese Funktion erfüllt für beliebige reelle c die Differentialgleichung.
Für $c = 0$ erhalten wir $y = x - 1$; das entspricht dem Fall $u = 1$, der oben zunächst ausgeschlossen werden musste.
Die Gerade $y = x - 1$ trennt die Integralkurven in solche mit $c > 0$ (oberhalb) und solche mit $c < 0$ (unterhalb) (Bild 13).

Ist eine Differentialgleichung von der Form

$$y' = f(ax + by + c)$$

gegeben, so führt die Substitution $ax + by(x) + c = u(x)$ zum Ziel:
Wir erhalten wie oben durch Ableiten nach x

$$a + by' = u'$$

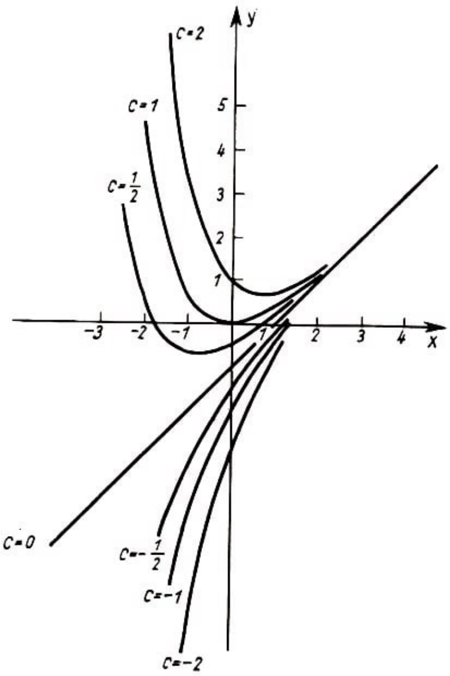


Bild 13:

und nach dem Einsetzen wegen $y' = f(u)$

$$u' = a + bf(u)$$

Es ist also wieder die Trennung der Variablen möglich:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx$$

Der Fall $a + bf(u) = 0$ muss gesondert behandelt werden.

5.2 Die Substitution $xy = u$

In der Differentialgleichung $y' = \frac{1+xy}{x^2}$ $(x \neq 0)$ setzt man $xy = u$ bzw. $xy(x) = u(x)$. Durch Ableiten nach x ergibt sich

$$y + xy' = u' \qquad \text{bzw.} \qquad y' = \frac{u' - y}{x}$$

und nach dem Einsetzen

$$\frac{u' - y}{x} = \frac{1 + u}{x^2} \qquad , \qquad u' = \frac{1 + u}{x} + y = \frac{1 + u}{x} + \frac{u}{x}$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}u}{1 + 2u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (u \neq -\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2} \ln|1 + 2u| = \ln|x| + \ln c \qquad (c > 0; \text{unbestimmte Integration})$$

$$1 + 2u = \pm c^2 x^2$$

$$2xy = -1 \pm c^2 x^2$$

$$y = -\frac{1}{2x} + Cx \qquad \left(C = \pm\frac{c^2}{2}\right)$$

Wir überzeugen uns durch Einsetzen, dass dies die gesuchte Lösung ist. Dem Fall $C = 0$ entspricht $u = -\frac{1}{2}$ oder $y = -\frac{1}{2x}$, was ebenfalls als Lösung in Frage kommt.

5.3 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine häufig vorkommende Substitution ist $\frac{y}{x} = u$ bzw. $\frac{y(x)}{x} = u(x)$ $(x \neq 0)$. Man verwendet sie bei Differentialgleichungen der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

den sogenannten Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.
Im 2. Abschnitt hatten wir die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

erhalten, als wir nach einer Kurve suchten, die bei Rotation um die x-Achse eine Fläche ergibt, die alle Lichtstrahlen, die parallel zur x-Achse einfallen, in den Nullpunkt reflektiert.
Wir dividieren auf der rechten Seite der Gleichung Zähler und Nenner durch x $(x \neq 0)$ und erhalten

$$y' = \frac{y/x}{1 + \sqrt{1 + (y/x)^2}}$$

Nunmehr substituieren wir

$$\frac{y}{x} = u \qquad \text{oder genauer} \qquad \frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Mit $y(x)$ ist auch $u(x)$ ableitbar $(x \neq 0!)$. Es ergibt sich

$$y(x) = xu(x) \qquad \text{und} \qquad y'(x) = u(x) + xu'(x)$$

woraus folgt (in Kurzschreibweise)

$$\begin{aligned}
u + xu' &= \frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \\
xu' &= \frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2}} - u = \frac{-u\sqrt{1 + u^2}}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \\
\frac{(1 + \sqrt{1 + u^2})\mathrm{d}u}{u\sqrt{1 + u^2}} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\int\limits_{u_0}^{u} \frac{(1 + \sqrt{1 + u^2})\mathrm{d}u}{u\sqrt{1 + u^2}} &= \int\limits_{x_0}^{x} -\frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

Zur Lösung des Integrals auf der linken Seite substituieren wir $\sqrt{1 + u^2} = t$. Dann ist $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ und wir erhalten

$$\frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u\sqrt{1 + u^2}}\mathrm{d}u = \frac{1 + t}{u^2}\mathrm{d}t = \frac{1 + t}{t^2 - t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t - 1}$$

Die Integration ergibt

$$\ln \frac{t-1}{t_0-1} = -\ln \frac{x}{x_0} = \ln \frac{x_0}{x}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
t-1 &= x_0(t_0-1)\frac{1}{x} \\
\sqrt{1+u^2}-1 &= x_0(\sqrt{1+u_0^2}-1)\frac{1}{x} \\
\sqrt{1+u^2} &= \frac{c}{x}+1 \qquad (c = x_0(\sqrt{1+u_0^2}-1)) \\
u^2 &= \left(\frac{c}{x}+1\right)^2 - 1 = \frac{c^2}{x^2}+\frac{2c}{x} \\
y^2 &= c^2+2cx = 2c\left(x+\frac{c}{2}\right)
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die gesuchten Kurven Parabeln - und damit die gesuchten Flächen Rotationsparaboloide - sind, die sich je nach dem Vorzeichen von c in Richtung der positiven oder negativen x-Achse öffnen.

Betrachten wir einige Kurven der Schar $y^2 = 2c\left(x+\frac{c}{2}\right)$ etwa für $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$ (Bild 14), so erkennen wir, dass sie sich bezüglich des Nullpunktes in Ähnlichkeitslage befinden.

Bemerkung: Die obige Rechnung bezieht sich genau genommen auf den Fall $x > 0$. Der Fall $x = 0$, der wegen der Substitution ausgeschlossen wurde, fügt sich ein, da hier

$$y' = \frac{y}{|y|} = \pm 1$$

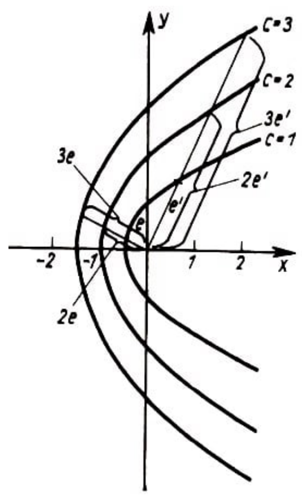


Bild 14:

ist, was beide Male Spiegelung des Strahls in den Nullpunkt bedeutet. Der Fall $x < 0$ ergibt eine andere Rechnung, die jedoch auch zu der Parabel $y^2 = 2c\left(x+\frac{c}{2}\right)$ führt.

2. Bemerkung: Der Leser versuche auch die Lösung mit der Substitution $\frac{x}{y} = t$ mit $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = t + y\frac{dt}{dy}$, die in diesem Falle von Vorteil ist.

Betrachten wir die Isoklinen einer Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, d.h., setzen wir für y' der Reihe nach verschiedene konstante Werte c ein, so ergibt sich $c = f\left(\frac{y}{x}\right)$ oder, nach dem Argument aufgelöst, $\frac{y}{x} = \varphi(c) = \text{const}$, also $y = \text{const} \cdot x$. Die Isoklinen sind daher alle Geraden durch den Nullpunkt, und man erkennt, dass die Lösungskurven ähnlich bezüglich des Nullpunkts angeordnet sein können.
Vergrößern oder verkleinern wir den Maßstab auf den Achsen in gleicher Weise, so können wir aus einer vorgegebenen Lösungskurve eine andere erzeugen.

Es sei $y = F(x)$ eine bestimmte Kurve der Schar. Wir ersetzen x durch kz^* und y durch ky^*. Dann gilt

$$\mathrm{d}x = k\mathrm{d}x^* \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}y = k\mathrm{d}y^*$$

so dass man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{k\mathrm{d}y^*}{k\mathrm{d}x^*} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{ky^*}{kx^*}\right) = f\left(\frac{y^*}{x^*}\right)$$

erhält. Es hat sich also $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} = f\left(\frac{y^*}{x^*}\right)$ ergeben, d.h., die durch die Ähnlichkeitstransformation erzeugte Kurve erfüllt ebenfalls die Differentialgleichung, gehört daher zur Schar der Lösungskurven.
(Verändern wir in der allgemeinen Lösung der obigen Differentialgleichung das Vorzeichen des Parameters, so ist eine Ähnlichkeitsabbildung nur in Verbindung mit einer Spiegelung möglich.)

Man erkennt eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung daran, dass die Summe der Exponenten von x und y in jedem Summanden dieselbe ist - y' bleibt unberücksichtigt.
Beispiel:

$$x^2y' - y^2 - xy - x^2 = 0$$

Nach Division durch x^2 $(x \neq 0)$ erhält man

$$y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Die Substitution $\frac{y}{x} = u$ führt auf

$$u + xu' = u^2 + u + 1$$

was nach Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ergibt. Durch unbestimmte Integration erhält man

$$\arctan u = \ln|x| + \ln c = \ln c|x| \qquad (c > 0)$$

oder nach der Rücksubstitution

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln c|x|$$

Zur Veranschaulichung der Lösung ist es zweckmäßig, zu Polarkoordinaten überzugehen. Wir setzen

$$x = r\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r\sin\varphi \qquad (r > 0)$$

Dann ist $\frac{y}{x} = \tan\varphi$ und $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$. Demnach erhalten wir

$$\varphi = \ln cr|\cos\varphi| = \ln cr + \ln|\cos\varphi|$$

und nach Umstellung

$$\ln cr = \varphi - \ln|\cos\varphi| = \ln\frac{e^{\varphi}}{|\cos\varphi|}$$

so dass r als Funktion von φ dargestellt werden kann:

$$r = C\frac{e^{\varphi}}{|\cos\varphi|} \qquad \left(C = \frac{1}{c}\right)$$

In dieser Form zeigt sich deutlich die Ähnlichkeit der Kurven der Schar.

5.4 $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x+y+3}{x-y-1}$$

kann ebenfalls als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung gelöst werden. Mit Hilfe einer geeigneten Transformation bringt man die störenden Absolutglieder zum Verschwinden. Wir suchen den Schnittpunkt der Geraden

$$x+y+3 = 0 \qquad \text{und} \qquad x-y-1 = 0$$

und legen ein neues Koordinatensystem durch diesen Schnittpunkt. Der Schnittpunkt unserer Geraden ist $S(-1;-2)$. Wir transformieren

$$x = \xi - 1; \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi \qquad \text{und} \qquad y = \eta - 2; \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta$$

und erhalten die neue Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}$$

Jetzt setzen wir $\frac{\eta}{\xi} = u$ und erhalten nach der Trennung der Variablen

$$\frac{(1-u)\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}\xi}{xi} \qquad \text{und} \qquad \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|\xi| + \ln c \quad (c > 0)$$

$$\arctan u = \ln c|\xi|\sqrt{1+u^2} = \ln c\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

Wir gehen wieder zu Polarkoordinaten über und setzen

$$\xi = \rho \cos \Phi \qquad \text{und} \qquad \eta = \rho \sin \Phi$$

Dann erhalten wir wegen $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

$$\arctan \tan \Phi = \Phi = \ln c\rho \qquad , \qquad \rho = Ce\Phi \quad \left(C = \frac{1}{c}\right)$$

Die Lösungskurven sind (logarithmische) Spiralen um den Punkt $(\xi, \eta) = (0; 0)$. Dann sind die Integralkurven der ursprünglichen Differentialgleichung Spiralen um den Punkt $S(-1; -2)$.

Liegt die Differentialgleichung in der allgemeinen Form

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

vor, so ist die gezeigte Methode immer anwendbar, wenn sich das Gleichungssystem

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

lösen lässt. Das ist stets der Fall, wenn die "Koeffizientendeterminante"

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

ist.[7] Andernfalls ist der Term auf der rechten Seite eine Konstante, oder er lässt sich auf die Form $F(Ax + By + c)$ bringen, die uns aus 5.1. bekannt ist.

5.5 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

5.5.1 Lösung mit dem Ansatz $y(x) = u(x)v(x)$

Wir gehen nun zu einer Differentialgleichung von der Form

$$y'(x) + a(x)y(x) = h(x)$$

über. Sie ist von der 1. Ordnung. Da sowohl y als auch die 1. Ableitung von y in jedem Summanden der linken Seite nur je einmal, und zwar in der 1. Potenz, vorkommen, ist sie eine, lineare Differentialgleichung erster Ordnung.
Wenn $h(x)$ nicht identisch Null ist, so nennt man sie außerdem inhomogen. Ist dagegen $h(x) \equiv 0$, d.h. $h(x) = 0$ für alle x der in Frage kommenden Intervalle, so wird sie als homogen bezeichnet.

Es gibt einen Lösungsansatz, der die Lösung des Problems auf die zweimalige Anwendung der Methode der Trennung der Variablen zurückführt.

[7] KL E.M. S. 706.

Man setzt nämlich nach Bernoulli

$$y(x) = u(x)v(x)$$

nimmt sich also vor, zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ statt der einen $y(x)$ zu bestimmen und gewinnt damit die Freiheit, über eine dieser Funktionen beliebig verfügen zu können.
Wir bilden zunächst

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Es ergibt sich

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x) = h(x)$$

Nun klammern wir $u(x)$ aus und erhalten

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + a(x)v(x)] = h(x)$$

Wir verfügen jetzt so über die Funktion $v(x)$, indem wir verlangen, dass der Term in der Klammer Null wird:

$$v'(x) + a(x)v(x) = 0$$

Dieses Problem gestattet aber die Trennung der Variablen,

$$\frac{\mathrm{d}v}{v(x)} = -a(x)\mathrm{d}x$$

und ist mit den gewohnten Einschränkungen lösbar.
Unter Verwendung der so bestimmten Funktion $v(x)$ vereinfacht sich (durch Wegfall der Klammer) das ursprüngliche Problem zu

$$u'(x)v(x) = h(x)$$

Wie man sieht, ist auch hier eine Trennung der Variablen möglich,

$$\mathrm{d}u = \frac{h(x)}{v(x)}\mathrm{d}x$$

so dass auch die Funktion $u(x)$ (im allgemeinen) bestimmt werden kann. Die gesuchte Lösung ist dann

$$y(x) = u(x)v(x)$$

Beispiele:
1. $xy' - y = 3x^2$
Substitution: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$
Einsetzen der neuen Veränderlichen:

$$x(u'v + v'u) - uv = 3x^2 \qquad , \qquad xu'v + u(xv' - v) = 3x^2$$

1. Teil der Rechnung:

$$\begin{aligned}
xv' - v &= 0\\
\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (x \neq 0)\\
\ln\frac{v}{v_0} &= \ln\frac{x}{x_0}\\
v &= \frac{v_0}{x_0}x
\end{aligned}$$

2. Teil der Rechnung:

$$\begin{aligned}
xu'v &= 3x^2\\
xu'\frac{v_0}{x_0}x &= 3x^2\\
\mathrm{d}u &= \frac{x_0}{v_0}3\mathrm{d}x\\
\int_{u_0}^{u} \mathrm{d}u &= \frac{3x_0}{v_0}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x\\
u - u_0 &= \frac{3x_0}{v_0}(x - x_0)\\
u &= u_0 + \frac{3x_0}{v_0}(x - x_0)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist dann:

$$\begin{aligned}
y(x) = u(x)v(x) &= \left[u_0 + \frac{3x_0}{v_0}(x - x_0)\right]\frac{v_0}{x_0}x = \frac{u_0v_0}{x_0}x + 3x(x - x_0)\\
&= \frac{y_0}{x_0}x + 3x^2 - 3x_0x \quad \text{(wegen } y_0 = x_0v_0\text{)} = \left[\frac{y_0}{x_0} - 3x_0\right]x + 3x^2
\end{aligned}$$

Sie löst das Anfangswertproblem mit dem beliebigen Anfangswert $P_0(x_0; y_0)$.
Für $P_1(-1; 3)$ ergibt sich $y(x) = 3x^2$.
Die allgemeine Lösung des Problems ist $y = cx + 3x^2$, wie die Probe zeigt.

2. $y' \cos x + y \sin x = 1$
Substitution: $y = uv$; $y' = u'v + iv'$.
Einsetzen: $u'v \cos x + u(v' \cos x + v \sin x) = 1$.
1. Teil der Rechnung:

$$\begin{aligned}
v' \cos x + v \sin x &= 0\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \qquad (\cos x \neq 0)\\
\ln\frac{v}{v_0} &= \ln\frac{\cos x}{\cos x_0}\\
v &= \frac{v_0}{\cos x_0}\cos x
\end{aligned}$$

2. Teil der Rechnung:

$$
\begin{aligned}
u'v\cos x &= 1 \\
u'\frac{v_0}{\cos x_0}\cos^2 x &= 1 \\
\mathrm{d}u &= \frac{\cos x_0}{v_0}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
u - u_0 &= \frac{\cos x_0}{v_0}(\tan x - \tan x_0) \\
u &= u_0 + \frac{\cos x_0}{v_0}(\tan x - \tan x_0)
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
y = uv &= \left[u_0 + \frac{\cos x_0}{v_0}(\tan x - \tan x_0)\right]\frac{v_0}{\cos x_0}\cos x \\
&= \frac{y_0}{\cos x_0}\cos x + \sin x - \tan x_0 \cos x = \left(\frac{y_0 - \sin x_0}{\cos x_0}\right)\cos x + \sin(x) \quad (\cos x_0 \neq 0)
\end{aligned}
$$

Diese Funktion löst das Anfangswertproblem mit (x_0, y_0) als beliebigem Anfangswert, während die allgemeine Lösung

$$y = c\cos x + \sin x$$

lautet.
Bemerkung: Wie im 1. Beispiel besteht die allgemeine Lösung aus der Summe zweier Funktionen, von denen die eine mit dem Scharparameter multipliziert ist.

Betrachten wir noch einmal die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$xy' - y = 3x^2$$

Dann nennt man die Differentialgleichung $xy' - y = 0$ die zugehörige homogene Differentialgleichung. Ihre Lösung kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln\frac{y}{y_0} &= \ln\frac{x}{x_0} \\
y &= \frac{y_0}{x_0}x = cx
\end{aligned}
$$

Das ist aber der 1. Summand der allgemeinen Lösung. Der 2. Summand ist die Funktion $y(x) = 3x^2$.

Wir bilden damit $xy' - y = x \cdot 6x - 3x^2 = 3x^2$ und sehen, dass diese Funktion eine

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Da sie keinen Parameter enthält, ist sie nur eine spezielle, d.h. partikuläre Lösung.
Damit ist die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung die Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Dem Leser sei es überlassen, selbst nachzuprüfen, dass wir dieselben Verhältnisse bei unserem 2. Beispiel

$$y' \cos x + y \sin x = 1$$

wiederfinden.
Das deutet auf eine Gesetzmäßigkeit.

Gehen wir von der allgemeinen linearen inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = h(x)$$

aus, so erhalten wir nach Durchführung der Substitution $y(x) = u(x)v(x)$

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + a(x)v(x)] = h(x)$$

Der 1. Rechenschritt bestand darin, den Term in der Klammer gleich Null zu setzen:

$$v'(x) + a(x)v(x) = 0$$

und die entstandene Differentialgleichung mit Trennung der Variablen zu lösen.
Man beachte, dass diese Differentialgleichung keine andere als die zugehörige homogene mit anderen Bezeichnungen (v statt y) ist. Wir führen die Rechnung durch:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -a(x)\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int\limits_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int\limits_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x$$

Über die Funktion $a(x)$ setzen wir voraus, dass sie sich integrieren lässt, und dass

$$\int a(x)\mathrm{d}x = A(x) + c \qquad \text{mit} \qquad A'(x) = a(x)$$

gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln \frac{v}{v_0} &= -(A(x) - A(x_0)) \\ v &= v_0 e^{-A(x)+A(x_0)} = v_0 e^{A(x_0)} e^{-A(x)} = c e^{-A(x)} \qquad (c = v_0 e^{A(x_0)}) \end{aligned}$$

Der 2. Rechenschritt bedeutet die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'(x)v(x) &= h(x) \\ u'(x)ce^{-A(x)} &= h(x) \\ u'(x) &= \frac{1}{c}e^{A(x)}h(x) \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{c}e^{A(x)}h(x)\mathrm{d}x \\ \int\limits_{u_0}^{u} \mathrm{d}u &= \frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x} e^{A(x)}h(x)\mathrm{d}x \\ u - u_0 &= \frac{1}{c}(H(x) - H(x_0)) \end{aligned}$$

wobei wir vorausgesetzt haben, dass das Integral $\int e^{A(x)}h(x)\mathrm{d}x$ lösbar ist und die Stammfunktion $H(x) + c$ mit $H'(x) = e^{A(x)}h(x)$ hat. Dann erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) = u(x)v(x) &= \left\{u_0 + \frac{1}{c}[H(x) - H(x_0)]\right\} ce^{-A(x)} \\ &= cu_0e^{-A(x)} + [H(x) - H(x_0)]e^{-A(x)} \\ &= [cu_0 - H(x_0)]e^{-A(x)} + H(x)e^{-A(x)} \\ Ce^{-A(x)} + H(x)e^{-A(x)} &= y_H(x) + y_P(x) \quad (C = cu_0 - H(x_0)) \end{aligned}$$

Dass der 1. Summand Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist, wurde bereits gezeigt. Wir beweisen noch, dass der zweite Summand Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

$$\begin{aligned} y_P(x) &= H(x)e^{-A(x)} \\ y_P'(x) &= H'(x)e^{-A(x)} + H(x)e^{-A(x)}[-a(x)] = h(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} - a(x)H(x)e^{-A(x)} \end{aligned}$$

Wegen

$$y_P(x) = H(x)e^{-A(x)} \qquad \text{ist also} \qquad y_P'(x) + a(x)y_P(x) = h(x)$$

was zu beweisen war.

Wir möchten hier bereits darauf aufmerksam machen, dass auch bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung die allgemeine Lösung die Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

5.5.2 Variation der Konstanten

Werfen wir noch einmal einen Blick auf den beschriebenen Lösungsweg, so fällt auf, dass in

$$y(x) = u(x)v(x)$$

der eine Faktor $v(x)$ bis auf unwesentliche Unterschiede in der Integrationskonstanten die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

Nehmen wir an, die Lösung $y_H(x)$ sei bereits bekannt. Sie habe die Form $y_H(x) = cy_H^*(x)$.
Dann wäre nur noch ein geeigneter Faktor im Sinne von $u(x)$ so zu bestimmen, dass die inhomogene Differentialgleichung gelöst wird. Man könnte also auf den Gedanken kommen, mit dem Ansatz

$$y(x) = u(x) \cdot y_H^*(x)$$

weiter zu rechnen. In der Tat ist dieser Lösungsweg von Lagrange beschritten worden. Er setzt in der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_H(x) = C \cdot y_H^*(x)$$

an die Stelle der Konstanten C die Funktion $C(x)$ und nennt diese Methode: Variation der Konstanten.

Es soll hier gleich erwähnt werden, dass sich die Methode - im Gegensatz zu der Bernoullischen - auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen lässt.
An einem 3. Beispiel soll die Methode erprobt werden:

$$y' + \frac{3}{x}y = x \qquad (x_0,y_0) = (1;2)$$

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

durch unbestimmte (!) Integration:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{3}{x}\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln|y| &= -3\ln|x| + \ln c = \ln\frac{c}{|x|^2} \quad (c > 0) \\
y_H(x) &= \frac{C}{x^3} \quad (C = \pm c)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir gemäß der Methode der Variation der Konstanten an:

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^3}$$

Die weitere Rechnung ergibt

$$y'(x) = \frac{C'(x)x^3 - 3C(x)x^2}{x^6} \qquad , \qquad \frac{3}{x}y(x) = \frac{3C(x)}{x^4}$$

nach dem Einsetzen folgt

$$\begin{aligned}\frac{C'(x)x^3 - 3C(x)x^2}{x^6} + \frac{3C(x)}{x^4} &= x \\ C'(x)x^3 - 3C(x)x^2 + 3C(x)x^2 &= x^7 && \text{(Multiplikation mit } x^6\text{)} \\ C'(x) &= x^4 \\ C(x) &= \frac{x^5}{5} && \text{(Integrationskonstante gleich Null gesetzt)}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = \frac{C}{x^3} + \frac{x^2}{5}$$

Der Leser überzeuge sich selbst davon, dass $y = \frac{C}{x^3}$ die zugehörige homogene Differentialgleichung löst, während $y = \frac{x^2}{5}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.
Wir führen die Rechnung jetzt allgemein durch:

$$y'(x) + a(x)y(x) = h(x)$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist wie oben

$$y_H(x) = ce^{-A(x)} \qquad [A'(x) = a(x)]$$

Wir setzen an

$$y(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

und erhalten nach dem Einsetzen

$$y'(x) + a(x)y(x) = c'(x)e^{-A(x)} + c(x)e^{-A(x)}[-a'(x)] + a(x)c(x)e^{-A(x)} = c'(x)e^{-A(x)}$$

Es bleibt also zu lösen

$$c'(x)e^{-A(x)} = h(x) \qquad \text{oder} \qquad c'(x) = h(x)e^{A(x)}$$

und wir erhalten

$$c(x) = \int h(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x(+c) = H(x)(+c) \qquad [H'(x) = h(x)e^{-A(x)}]$$

Damit ergibt sich

$$y(x) = ce^{-A(x)} + H(x)e^{-A(x)}$$

wie oben mit dem Verfahren von Bernoulli.
Sind die auftretenden Integrale lösbar, wie bisher immer vorausgesetzt wurde, dann ist es die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ebenfalls.

Die Funktion $h(x)$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung wird als Störfunktion bezeichnet. Die Bezeichnung stammt aus der Astronomie.
Bringen wir die Differentialgleichung auf die Form

$$y'(x) = -a(x)y(x) + h(x)$$

und zeichnen das zugehörige Richtungsfeld, so wird dieses von der Funktion $h(x)$ offenbar merklich beeinflusst ("gestört"). (Das gleiche trifft natürlich auch für die Lösung zu.)
Drei einfache Beispiele sollen das veranschaulichen.

1. $y' = 0$, $h(x) = 0$, Lösung $y = c$ (Bild 15)
2. $y' = 2x$, $h(x) = 2x$, Lösung $y = c + x^2$ (Bild 16)
3. $y = \cos x$, $h(x) = \cos x$, Lösung $y = c + \sin x$ (Bild 17)

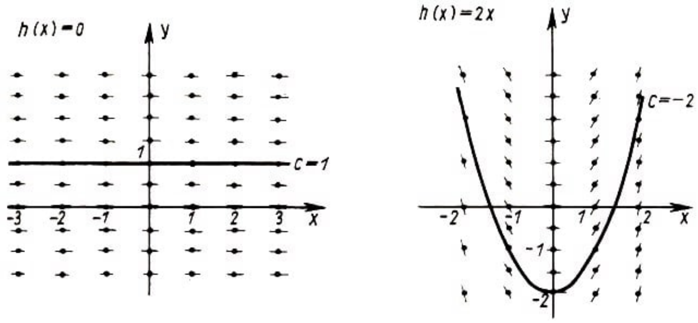


Bild 15,16:

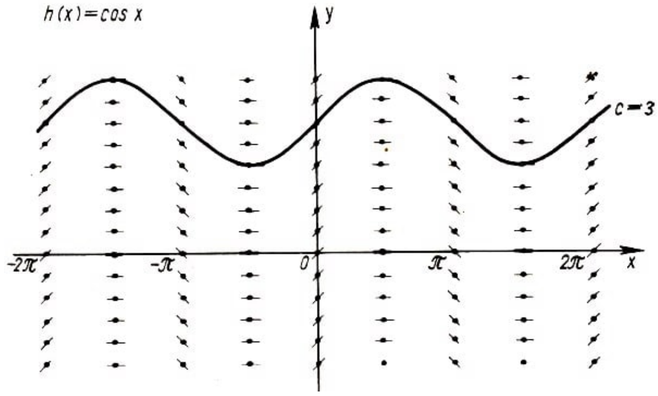


Bild 17:

Die homogene Differentialgleichung besitzt stets die (triviale) Lösung $y = 0$.

4. Wir greifen auf das 3. Beispiel des 4. Abschnittes zurück, verwenden dieselbe Schaltung (Bild 12), legen aber jetzt eine Wechselspannung $U(t)$ an.
Wegen der vorhandenen Spule mit Selbstinduktion wirkt wieder nur die Spannung $U_I = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$, und es gilt wieder

$$U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

Jetzt ist aber U keine Konstante, sondern U ist selbst eine Funktion der Zeit mit der Gleichung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ($\omega = 2\pi f$ ist die sogenannte Kreisfrequenz).
Die Differentialgleichung

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = U_0 \sin \omega t$$

ist linear inhomogen von 1. Ordnung, kann also von uns gelöst werden. Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

Es ergibt sich

$$I = c \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten setzen wir

$$I(t) = c(t)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{und erhalten schließlich} \qquad c'(t) = \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t$$

$$c(t) = \int \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\mathrm{d}t(+c)$$

Nebenrechnung (partielle Integration):

$$\begin{aligned}
\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\mathrm{d}t &= -\frac{\cos\omega t}{\omega}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\omega}\int\cos\omega t\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\cos\omega t}{\omega}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{\omega^2 L}\sin\omega t e^{\frac{R}{L}t} - \frac{R^2}{L^2\omega^2}\int\sin\omega t e^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t \\
\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\mathrm{d}t &= \frac{R}{\omega^2 L}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right) \\
\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\mathrm{d}t &= \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right)
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$c(t) = \frac{U_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right) + ce - \frac{R}{L}t$$

und

$$I(t) = \frac{U_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right) + ce - \frac{R}{L}t$$

Wenn wir die Anfangsbedingung stellen, dass zur Zeit $t = 0$ die Stromstärke $I(0) = 0$ ist - wir schalten also zur Zeit $t = 0$ erst ein - dann ergibt sich für c ein bestimmter Wert, nämlich

$$c = \frac{U_0\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

Der 1. Summand lässt sich erheblich vereinfachen, wenn man für $\frac{\omega L}{R} = \tan\varphi$ setzt $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ Man erhält zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{U_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right) &= \frac{U_0 R}{(\omega^2 L^2 + R^2)\cos\varphi}(\sin\omega t\cos\varphi - \sin\varphi\cos\omega t) \\
&= \frac{U_0 R}{(\omega^2 L^2 + R^2)\cos\varphi}\sin(\omega t - \varphi)
\end{aligned}$$

Wenn man bedenkt, dass

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

ist, ergibt sich schließlich für den 1. Summanden

$$\frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

Das Endresultat lautet dann

$$I(t) = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} + \frac{U_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} + \frac{U_0 \sin \varphi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Mit wachsendem t wird der 2. Summand schnell bedeutungslos: Dann ist praktisch

$$I(t) = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

φ ist der Phasenunterschied, um den die Stromstärke der Spannung nachhinkt (Folge der Selbstinduktion). $U = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$ ist die phasenverschobene Spannung.
Dann ist das Verhältnis von Spannung und Stromstärke ohne Berücksichtigung des Phasenunterschieds gleich $\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}$, dem Widerstand des Wechselstromkreises mit Selbstinduktion.
Für $L = 0$ ergibt sich der Ohmsche Widerstand R, der Phasenunterschied verschwindet $(\arctan 0 = 0)$, und wir erhalten $J = \frac{U}{R}$ entsprechend dem Ohmschen Gesetz.

5.6 Aufgaben

a) $y' = \sin^2(x - y + 3)$; $(x_0; y_0) = (0; 3)$ Lösung: $y = x - \arctan x + 3$

b) $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$; $(x_0; y_0) = (1; 1)$, Anleitung: Substitution $xy = u$ Lösung: $x^2 + y^2 = r^2$

c) $y' = -\frac{x}{y}$ (als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung behandeln!)
Lösung: $x^2 + y^2 = r^2$

d) $x^2 y' = y^2$ (als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung behandeln!)
Lösung: $y = \frac{x}{1 - cx}$
Die Integralkurven für $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$ sind durch geeignete Ähnlichkeitstransformationen ineinander überzuführen.

e) $(x - y)y' - (x + y + 2) = 0$; $(x_0; y_0) = (0; 0)$
Lösung: $\rho = \sqrt{2} e^{\Phi - \frac{\pi}{4}}$, $(\rho = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$; $\Phi = \arctan \frac{y+1}{x+1}$ wert

f) $y' - y = x^3$
Lösung: $y = ce^x(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$,

g) $xy' - 2y = \ln x$
Lösung: $y = cx^2 - \frac{1}{4}(\ln x^2 + 1)$, $(x > 0)$

6 Bemerkungen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

6.1 Zu den Begriffen Existenz und Eindeutigkeit

Die Frage nach der Existenz von Lösungen ist uns aus der Algebra bekannt. Greifen wir das Beispiel aus dem 1. Abschnitt

$$x^2 + x +^2 = 0$$

noch einmal auf und erinnern uns daran, dass wir nur Lösungen aus der Menge der reellen Zahlen suchten, dann wissen wir, dass eine Gleichung von allgemeiner Gestalt wie

$$x^2 + x + q = 0$$

nicht immer reelle Lösungen besitzt. Wir lösen die Gleichung formal

$$x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - q}$$

und erkennen, dass reelle Lösungen nur dann existieren, wenn

$$\frac{1}{4} - q \geq 0$$

ist. $q \leq \frac{1}{4}$ ist also die notwendige Bedingung dafür, dass reelle Lösungen existieren. Sie ist auch hinreichend, denn wenn wir $q \leq \frac{1}{4}$ voraussetzen, erhalten wir als Lösungen gewiss reelle Zahlen.

Im 4. Beispiel von Abschnitt 5 stießen wir auf das Gleichungssystem

$$x + y + 3 = 0 \qquad , \qquad x - y - 1 = 0$$

Uns interessiert, ob eine Lösung vorhanden und ob sie eindeutig ist. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

von Null verschieden sein muss, was hier der Fall ist. Diese Bedingung ist, wie dort gezeigt wird, notwendig und hinreichend dafür, dass eine Lösung $[(x,y) = (-1;-2)]$ existiert und dass sie die einzige ist.[8] Wäre die Koeffizientendeterminante gleich Null wie in

$$x + y = 3 \qquad , \qquad x + y = 1$$

so würde überhaupt keine Lösung existieren (1. Möglichkeit). In dem Gleichungssystem

$$x + y = 3 \qquad , \qquad 2x + 2y = 6$$

[8] Kl. E.M. S. 706.

wo ebenfalls die Koeffizientendeterminante verschwindet, existiert zwar die Lösung mit $(x, y) = (4; -1)$, aber sie ist nicht die einzige. Es liegt keine Eindeutigkeit der Lösung vor; man kann sogar beliebig viele andere Zahlenpaare (x, y) angeben, die das Gleichungssystem erfüllen (2. Möglichkeit).
Die geometrische Deutung können wir dem Leser überlassen.

Bei den Differentialgleichungen sind wir bisher ganz naiv so verfahren, dass wir mit Hilfe von Integrationen versucht haben, eine Funktion $y(x)$ zu bestimmen, die für alle zulässigen x die Differentialgleichung erfüllt.
Genau genommen haben wir dabei folgendes gemacht:

Wir haben z.B. in $y' = 2xe^{-y}$ angenommen, dass es eine Lösung, die wir $y = \eta(x)$ nennen wollen, gibt. Dann muss also

$$\eta'(x) = 2xe^{-\eta(x)} \qquad \text{gelten und damit} \qquad e^{\eta}\mathrm{d}\eta = 2x\mathrm{d}x$$

Nach der Integration folgt

$$e^{\eta} = x^2 + c \qquad \text{und} \qquad \eta(x) = \ln(x^2 + c)$$

Die letzte Gleichung stellt damit für $x^2 + c > 0$ die notwendige Bedingung dafür dar, dass eine solche Funktion mit der Eigenschaft

$$\eta'(x) = 2xe^{-\eta(x)}$$

existiert. Wir können auch so sagen: Gibt es eine solche Funktion $\eta(x)$, dann hat sie die Gestalt

$$\eta(x) = \ln(x^2 + c)$$

Wir müssen aber noch prüfen, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Zu diesem Zweck gehen wir von $\eta(x) = \ln(x^2 + c)$ aus. Durch Ableiten folgt daraus

$$\eta'(x) = \frac{2x}{x^2 + c}$$

und unter Berücksichtigung, dass $e^{\eta(x)} = x^2 + c$ und $e^{-\eta(x)} = \frac{1}{x^2+c}$ gilt,

$$\eta'(x) = 2xe^{-\eta(x)}$$

Für die Erfüllung der Differentialgleichung ist also notwendig und hinreichend, dass

$$y(x) = \ln(x^2 + c)$$

mit $x^2 + c > 0$ ist. Das bedeutet zunächst einmal die Existenz der Lösung (Bild 18).

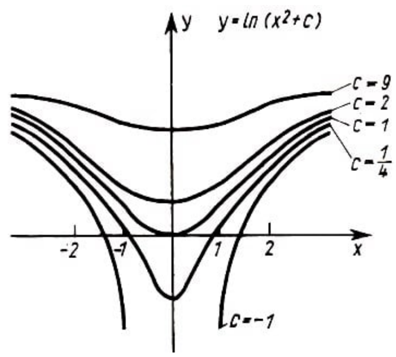


Bild 18:

Dass die Frage nach der Existenz von Lösungen bei Differentialgleichungen nicht müßig ist, zeigt das Beispiel der Differentialgleichung $y'^2 + y^2 = 0$, die im Reellen überhaupt keine Lösung besitzt.

Von der Eindeutigkeit der Lösung sprechen wir dann, wenn durch einen Punkt P_0 genau eine Integralkurve geht. Durch ein bestimmtes $c = e^{y_0} - x_0^2$ wird die Kurve festgelegt, die durch den Punkt $P_0(x_0; y_0)$ geht.

Würde die Kurve $y = \ln(x^2 + c + \Delta c)$ $(\Delta c \neq 0)$ ebenfalls durch den Punkt P_0 gehen, würde also neben

$$c = e^{y_0} - x_0^2 \qquad \text{auch} \qquad c + \Delta c = e^{y_0} - x_0^2$$

gelten, so ergäbe die Substraktion $\Delta c = 0$ im Widerspruch zu der Voraussetzung $\Delta c \neq 0$, Damit ist auch die Eindeutigkeit der Lösung gesichert:

Ein Beispiel für Mehrdeutigkeit bietet die Differentialgleichung $xy' = y$ mit der Lösung $y(x) = cx$. Durch den Punkt $(0; 0)$ gehen unendlich viele Integralkurven, denn die allgemeine Lösung stellt die Schar aller Geraden durch den Nullpunkt dar.

6.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Ist in der Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$ die Funktion $y = \eta(x)$ eine Lösung, so folgt daraus

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)} = g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$

wobei wir ein Intervall wählen, in dem $h(y) \neq 0$ gilt.
Da wir mit den allgemeinen Funktionssymbolen g und h rechnen, werden wieder wie im vorigen Abschnitt Voraussetzungen notwendig.

Nach der Theorie würde es genügen, die Stetigkeit der Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ für die "Umgebung" von x_0 und y_0 vorauszusetzen, wobei sich diese Umgebung unter Umständen von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken kann. Da uns der Begriff Stetigkeit nicht zur Verfügung steht, helfen wir uns wie oben damit, dass wir annehmen, dass zu den Integralen $\int g(x)\mathrm{d}x$ und $\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}$ bzw. $\int \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)}$ die Stammfunktionen $G(x)$ und $H(y)$ existieren, was in unseren Beispielen immer der Fall war.

Wem der Begriff Stetigkeit vertraut ist, der weiß, dass aus der Stetigkeit der Funktionen g und h $(h \neq 0)$ ihre Integrierbarkeit folgt. Das bedeutet allerdings nicht, dass Stammfunktionen unter den elementaren Funktionen existieren. Für Integrale wie

$$\int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\mathrm{d}x \quad (0 < k < 1)$$

kann man keine elementare Funktion als Stammfunktion angeben.
Die Integration gelingt nur mit Hilfe von Potenzreihen, die wir in unseren Betrachtungen ebenfalls ausklammern müssen. Wir geben also nichts auf, wenn wir bei unseren

(weitergehenden) Voraussetzungen bleiben.

Die Integration ergibt dann wie oben

$$H(\eta) - H(\eta_0) = G(x) - G(x_0) \qquad \text{oder} \qquad H(\eta) = G(x) + c$$

mit $c = H(\eta_0) - G(x_0)$.
Da $h(y) \neq 0$ vorausgesetzt wurde und auch $H'(y) = \frac{1}{h(y)}$ von Null verschieden ist, kann $H'(y)$ und auch $H'(\eta)$ entweder nur positiv oder nur negativ sein.

Wenn aber die Ableitung, d. h. der Anstieg einer Funktion, immer nur positiv (bzw. negativ) ist, heißt das, dass das Bild der Kurve immer nur (von links nach rechts) ansteigt (bzw. fällt). Diese Eigenschaft der Funktion bezeichnet man als Monotonie.
Sie ist für uns in diesem Augenblick sehr bedeutsam, da wir dann folgern können, dass jedem $H(\eta)$ genau ein η zugeordnet ist. Das bedeutet, dass wir die Umkehrfunktion $\eta = F(H)$ bilden können. Nun kann in $H(\eta) = G(x) + c$ nach η aufgelöst werden, und wir erhalten

$$\eta(x) = F(G(x) + c)$$

Wenn es eine Lösung gibt, so ist es diese. Im vorigen Abschnitt wurde bereits gezeigt, dass $\eta(x)$ die Differentialgleichung erfüllt.

Damit ist $\eta(x) = F[G(x) + c]$ unter den gemachten Voraussetzungen notwendig und hinreichend für die Richtigkeit der Differentialgleichung. Das heißt aber, dass die Existenz der Lösung feststeht.

Den Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung führen wir indirekt.
Die Gleichung $H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$ wird offenbar von dem Anfangswert (x_0,y_0) erfüllt. Die Integralkurve geht durch $P_0(x_0,y_0)$.
Die hieraus eindeutig bestimmbare Funktion $y = F[G(x) + c]$ besitzt dann die gleiche Eigenschaft. Angenommen, es gäbe eine zweite Lösungsfunktion $y^*(x)$, deren Bild durch $P_0(x_0,y_0)$ geht, dann würde die Gleichung

$$H(y^*) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$$

ebenfalls richtig sein. Durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir

$$H(y) - H(y^*) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad H(y) = H(y^*)$$

Da wir aber bereits gesehen haben, dass die Funktion $H(y)$ die Eigenschaft der Monotonie besitzt, so folgt aus der Gleichheit der Funktionswerte die Gleichheit der Argumente $y = y^*$, das heißt, dass es nur eine Funktion gibt, die die Differentialgleichung erfüllt und deren Bild durch P_0 geht.

Wir haben damit die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung unter den gemachten Voraussetzungen bewiesen, allerdings mit der Einschränkung $h(y) \neq 0$.

Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen.

Sollte $y'(x) = g(x)h(y)$ identisch verschwinden, d.h. $h(y)$ nur den Wert Null annehmen, so gibt es nur die eine Lösung $y = c$, bzw., um es deutlicher zu machen,

$$y = c + 0 \cdot x$$

Die Lösung existiert und ist auch eindeutig. $y = y_0 + 0 \cdot x_0$ ist die Gleichung der Lösungskurven durch P_0 - sie ist die einzige.

Viel mehr interessiert der Fall, dass es diskrete Werte von y sind, wo $h(y)$ verschwindet; wir werden uns vorläufig als Modell auf einen einzigen Wert beschränken.
In $y' = g(x)h(y)$ sei also $h(y_0) = 0$. Dann ist aber bereits $y = y_0$ bzw. $y = y_0 + 0 \cdot x$ eine Lösung, da für $y = y_0$ beide Seiten der Gleichung verschwinden.

Ist das die einzige Lösung mit dem Anfangswert (x_0, x_0)? Die Rechnung würde zur Trennung der Variablen und zur Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$

führen.
Der Integrand auf der linken Seite ist jetzt für $y = y_0$ nicht definiert. Würde damit die Integration hinfällig, so gäbe es für den Anfangswert $(x_0{,}y_0)$ in der Tat keine weitere Lösung als

$$y = y_0 + 0 \cdot x$$

Tatsächlich ist aber unter gewissen Bedingungen die Integration möglich. Wir haben es mit einem sogenannten uneigentlichen Integral zu tun.

Dem Integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, dessen Integrand in der unteren Grenze nicht definiert ist, kann man noch einen Sinn beilegen, indem man den kritischen Wert $x = 0$ ausspart und zunächst $x = \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ als untere Grenze nimmt, um nach erfolgter Integration ε gegen Null streben zu lassen. Existiert der Grenzwert, so hat das Integral einen Sinn.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

Geometrisch bedeutet das, dass der Inhalt der Fläche unter der Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ einen endlichen Wert besitzt, obwohl $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \to 0$ über alle Grenzen wächst.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{y} \qquad \text{mit } (x_0; y_0) = (1; 0)$$

Nach dem oben Gesagten ist $y = 0 + 0 \cdot x$, mit der x-Achse als Bild, eine Lösung. Die Rechnung nach der Methode der Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = \int_1^x \mathrm{d}x$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} &= \int_{1}^{x}\mathrm{d}x \\
\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{y}-\sqrt{\varepsilon}) &= x-1 \\
\sqrt{y} &= x-1 \quad (x\geq 0) \\
y &= (x-1)^2 \quad \text{mit } x-1\geq 0
\end{aligned}$$

Damit hat sich eine weitere Lösung für den Anfangswert $(x_0; y_0) = (1; 0)$ ergeben. Es liegt keine Eindeutigkeit vor.
Wir hätten auch einen beliebigen Punkt P_0 der oberen Halbebene als den Punkt wählen können, durch den die Lösungskurve gehen soll. Die Rechnung führt dann neben $y = y_0 + 0 \cdot x$ zu der weiteren Lösung

$$y = (x-c)^2, \quad (x-c)\geq 0 \qquad \text{mit } c = x_0 - \sqrt{y_0}$$

Die sich ergebenden Integralkurven sind Halbparabeln. Man könnte jetzt von P_0 auf der Halbparabel in Richtung x-Achse wandern, vom gemeinsamen Punkt der Halbparabel mit der x-Achse ein beliebiges Stück auf der x-Achse (z.B. nach rechts) und den Weg auf einer anderen Halbparabel fortsetzen (Bild 19).

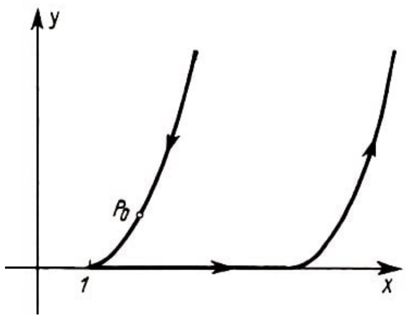


Bild 19:

In jedem Punkt ist unsere Differentialgleichung erfüllt. Es gibt aber unendlich viele Möglichkeiten, solche Lösungskurven (die alle durch P_0 gehen) zusammenzubauen.

Was wir an einem speziellen Beispiel erkannt haben, lässt sich sinngemäß auf alle Probleme übertragen, in denen das uneigentliche Integral auf der linken Seite einen Sinn hat oder, wie man auch sagt, konvergiert.
Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}$, $h(y_0) = 0$ schließt also die Eindeutigkeit aus.

Gegenbeispiel. Die Differentialgleichung $y' = x - y$ führte zu Beginn des 5. Abschnitts nach der Substitution $x - y = u$ auf die neue Differentialgleichung mit trennbaren Variablen $u' = 1 - u$.
$u(x) = 1$ bzw. $y = x - 1$ ist eine sofort erkennbare Lösung. Unter der Voraussetzung $1 - u \neq 0$ ergibt die weitere Rechnung

$$\ln\frac{1-u}{1-u_0} = -(x-x_0)$$

und schließlich

$$y = x - 1 + ce^{-x} \qquad (c = (1 - x_0 + y_0)e^{x_0})$$

Für verschiedene Werte von c ergeben sich verschiedene Kurven, die keinen Punkt gemeinsam haben, wie man leicht nachweist (Bild 13).
Haben diese vielleicht doch einen Punkt mit $y = x-1$, das dem Wert $u_0 = 1$ entspricht, gemeinsam?
Dann müsste das uneigentliche Integral, das sich z.B. für $u_0 = 1$ ergibt, einen endlichen Grenzwert besitzen. Für $u > 1$ ergibt sich

$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^u \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln\frac{1-u}{-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\frac{\varepsilon}{u-1}$$

Wie man sieht, strebt mit $\varepsilon \to 0$ der Wert von $\ln\frac{\varepsilon}{1-u}$ gegen $-\infty$.
Das uneigentliche Integral konvergiert nicht; es divergiert. Das bedeutet, dass keine Integralkurve einen Punkt mit $y = x - 1$ gemeinsam hat.

Ähnlich steht es mit der Differentialgleichung $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = U - RI$ (Abschnitt 4).
Ohne Rechnung erkennt man, dass $U = RI$ bzw. $I = \frac{U}{R} = \text{const}$ eine Lösung ist. Die genaue Rechnung ergab mit (t_0, I_0)

$$\ln\frac{U-RI}{U} = -\frac{R}{L}t \qquad \text{bzw.} \qquad I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Für $I_0 = \frac{U}{R}$ hätte sich auf der linken Seite ein divergierendes Integral ergeben. Die Lösung ist eindeutig. Die Lösung $I = \frac{U}{R}$ ergibt sich nur als Grenzwert für $t \to +\infty$.

Wir fassen zusammen: Für die Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$ $(y' \neq 0)$ existiert eine eindeutige Lösung, wenn in der Umgebung des Anfangswertes $h(y) \neq 0$ gilt und die Integrale

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} \qquad \text{und} \qquad \int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$

existieren. Ist $h(y_0) = 0$, so existiert trotzdem noch eine eindeutige Lösung mit $y(x) = y_0$ im Grenzfall, wenn das Integral

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}$$

divergiert. Die Fälle, die sich auf Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen zurückführen lassen, sind sinngemäß einzuordnen.

6.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Bei der Differentialgleichung $y'(x)+a(x)y(x) = h(x)$ lösen wir zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

$y(x) = 0$ ist immer eine Lösung.
Das Integral $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln \frac{y}{y_0}$ divergiert im Fall $y_0 = 0$.
Daher existiert für die zugehörige homogene Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $y_H(x) = ce^{-A(x)}$ mit $A'(x) = a(x)$ (vgl. Abschnitt 5.5.2.). Der mit der Analysis vertraute Leser weiß, dass hierzu die Stetigkeit von $a(x)$ hinreichend ist.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der vorgelegten inhomogenen Differentialgleichung setzen wir nach der Methode der Variation der Konstanten an

$$y_P(x) = c(x)e^{-A(x)} \qquad \text{und erhalten} \qquad c(x) = \int h(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x$$

mit beliebiger Festlegung der Integrationskonstanten. Wenn wir die Existenz des Integrals auf der rechten Seite voraussetzen, wozu die Stetigkeit von $h(x)$ und $a(x)$ hinreicht, dann ist die Existenz von $y_P(x)$ und damit auch von $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ gesichert.

Da die Eindeutigkeit von $y_H(x)$ bereits feststeht, also durch jeden Punkt P_0 des zulässigen Bereiches nur eine Kurve geht, so folgt daraus die Eindeutigkeit von $y(x) = y_H(x)+y_P(x)$, da der zugefügte Summand wohl das Bild der Kurvenschar von $y_H(x)$ in Richtung der y-Achse verzerren ("stören"), aber nicht die Eigenschaft der Eindeutigkeit zerstören kann.

6.4 Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

Unsere bisherigen Betrachtungen galten nur für die behandelten speziellen Typen der Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x,y)$.
Die Theorie der Differentialgleichungen gibt aber Wege an, auch im allgemeinen Fall zu einem Urteil über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu kommen. Da zur Herleitung dieser notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Kenntnis der unendlichen Reihen erforderlich ist, kann im Rahmen dieses Büchleins darüber nur referiert werden.
Auch das macht noch einige Vorbemerkungen notwendig.

Im Zusammenhang mit dem Richtungsfeld haben wir gesagt, dass durch die Gleichung $y' = f(x, y)$ jedem Zahlenpaar (x, y) ein bestimmter Wert der 1. Ableitung der gesuchten Funktion $y(x)$ zugeordnet wird.
In unseren Beispielen ergaben sich Richtungsfelder, die unschwer erkennen ließen, welche Kurven in das Feld hineinpassen. Wir würden aber völlig ratlos sein, wenn wir z.B. eine Funktion $f(x, y)$ so definieren würden, dass $f(x, y)$ den Wert 1 annimmt, falls x und y ganzzahlig sind und den Wert 0 in allen anderen Fällen.

Wir überlassen es dem Leser, sich ein solches Richtungsfeld selbst aufzuzeichnen, und er möge dann versuchen, eine Kurve zu finden, die etwa diesem Richtungsfeld angepasst werden kann.

Veranschaulichen wir die gegebene Funktion, indem wir im dreidimensionalen Raum jedem Zahlenpaar $(x; y)$ die Koordinaten z zuordnen, so erhalten wir für die Punkte mit ganzzahligen x und y (Gitterpunkte) den Wert $z = 1$ und sonst $z = 0$. Die geometrische Darstellung ergibt eine "mathematische Bürste" (Bild 20).

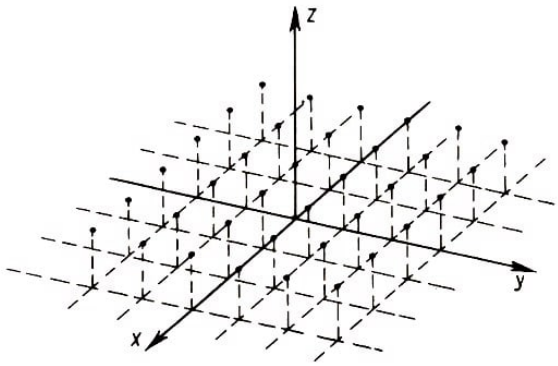


Bild 20:

Für eine solche Funktion können wir also kein brauchbares Richtungsfeld finden. Ergibt sich dagegen als Bild eine zusammenhängende Fläche, so wird, wie wir nur mitteilen können, auch ein Richtungsfeld in der x,y-Ebene entstehen, dem stets Integralkurven angepasst werden können.

Die Funktion $z = f(x, y)$ muss stetig sein, damit das Bild eine zusammenhängende Fläche über dem Definitionsbereich ergibt. Unstetigkeit liegt vor, wenn Punkte (einzelne oder zusammenhängende Punktmengen) fehlen, wenn die Fläche Verwerfungen besitzt oder wenn die Funktionswerte in der Nachbarschaft gewisser Punkte über alle Grenzen wachsen.

Eine stetige Funktion ist beschränkt, was wir im Definitionsbereich durch die Ungleichung $|f(x, y)| \leq M$ ausdrücken können:

Wenn in der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ die Funktion $f(x, y)$ stetig ist, wenigstens für einen gewissen Bereich der x, y-Ebene, so existiert dort mindestens eine Lösung (Peano).

Wir benötigen noch den Begriff der partiellen Ableitung. Um es ganz einfach zu formulieren:
Wenn die Funktion $f(x, y)$ der beiden voneinander unabhängigen Variablen x und y so abgeleitet wird, dass nur x als unabhängige Veränderliche gilt, während y als Konstante behandelt wird, so sagt man: Die Funktion ist partiell nach x abgeleitet worden. Schreibweise:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Beispiele:

$$f(x, y) = x^2 y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy$$
$$f(x, y) = \sin x \cos y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x \cos y$$
$$f(x, y) = e^y \ln x \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} e^y$$

Entsprechend gilt für die partielle Ableitung nach y, dass x als Konstante betrachtet wird, während man in der gewohnten Weise nach y ableitet. Schreibweise:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\text{Beispiele:}\quad \begin{array}{ll} f(x,y) = x^2 y & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \\ f(x,y) = \sin x \cos y & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\sin x \sin y \\ f(x,y) = e^y \ln x & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^y \ln x \end{array}$$

Nach diesen Vorbemerkungen werden wir hinreichende Bedingungen dafür angeben, dass die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit $(x,y) = (x_0, y_0)$ als Anfangswert eine stetig differenzierbare eindeutige Lösung besitzt. In ausführlicher Form lauten diese nach Picard und Lindelöf, dass

$$1. \quad f(x,y)$$

im Definitionsbereich stetig sein und

$$2. \quad |f(x,y)| < M \qquad \text{sowie} \qquad 3. \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial y}\right| < N$$

gelten muss [M und N sind (genügend große) positive Zahlen].
Da die Funktion $f(x,y)$ nicht immer in der ganzen x,y-Ebene definiert (und damit nicht stetig) ist, so ist es üblich, zunächst einen Anfangswert $P_0(x_0, y_0)$ so zu wählen, dass $f(x_0, y_0)$ definiert ist, und ein Rechteck um diesen Punkt abzugrenzen, in dem ebenfalls die Stetigkeit vorliegt, aber auch die anderen Bedingungen erfüllt sind:

$$a < x_0 < b \qquad , \qquad c < y_0 < d$$

Man führt dann die Untersuchungen über die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung durch, wobei man im Auge behält, dass einige oder alle Werte von a, b, c und d über alle Grenzen wachsen können, so dass eine eindeutige Lösung oft in der ganzen x, y-Ebene existiert.

Bemerkung: Die 3. Bedingung lässt sich durch eine "Lipschitzbedingung" ersetzen, die weniger verlangt aber in der Rechnung unhandlicher ist.[9]

Beispiele:
1. $y' = -f(x,y) = x + y$
Der Definitionsbereich ist die ganze x, y-Ebene. Wir teilen mit, dass dort die Funktion $f(x,y)$ stetig ist.
Die Funktion ist beschränkt. Grenzen wir z.B. ein Quadrat mit den Ecken $P_1(100; 100)$, $P_2(-100; 100)$, $P_3(-100; -100)$ und $P_4(100; -100)$ ab, so erkennen wir, dass in P_1 der größte Funktionswert $f(P_1) = 100 + 100 = 200$ auftritt und in P_3 der kleinste mit $f(P_3) = -100 - 100 = -200$.
Dazwischen liegen alle anderen Werte. Demnach gilt $|f(x,y)| < 200$. Die erste Ableitung ist

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

Sie ist konstant, also auch beschränkt.
Demnach existiert eine eindeutige Lösung. Sie ist, wie der Leser selbst errechnen möge:

$$y(x) = ce^x - x - 1 \qquad \text{mit} \qquad c = e^{-x_0}(x_0 + y_0 + 1)$$

[9] Kl. E.M. S. 535.

2. $y' = f(x,y) = \frac{x}{|x|}$
(4. Beispiel aus Abschnitt 3).
Wir können uns die Fläche, die diese Funktion darstellt, leicht vorstellen. y ist beliebig. Dann ist $z = 1$ für die rechte Halbebene und $z = -1$ für die linke Halbebene. Für $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert; es fehlen also alle Punkte über der y-Achse.
Es liegt eine "Verwerfung" vor. Die Funktion ist also, wenn wir die ganze x, y-Ebene betrachten, nicht stetig. Die Funktion ist aber in jeder Halbebene für sich stetig.
Die Funktion ist in beiden Halbebenen beschränkt:

$$x > 0 \quad f(x,y) = 1 \qquad , \qquad x < 0 \quad f(x,y) = -1$$

daher gilt $|f(x,y)| = 1$.
Die partiellen Ableitungen sind ebenfalls beschränkt:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

Also sind in jeder Halbebene eindeutige Lösungen zu erwarten.
Wir kennen sie bereits. In der rechten Halbebene ist es $y(x) = x + c_1$ $(x > 0)$ mit $c_1 = y_0 - x_0$ und in der linken Halbebene $y(x) = -x + c_2$ $(x < 0)$ mit $c_2 = y_0 + x_0$.

3. $y' = 2\sqrt{y}$
(8. Beispiel dieses Abschnitts)
Der Definitionsbereich ist die obere Halbebene, einschließlich der x$-$Achse. Wir teilen mit, dass die Funktion stetig ist. Sie ist auch beschränkt. $|2\sqrt{y}| = 2\sqrt{y} < M$, wenn

$$y = \frac{M^2}{4}$$

ist. Die partielle Ableitung nach y lautet:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Nähern wir uns der x-Achse, so wachsen die Werte über alle Grenzen. Wir schließen daher die x-Achse aus und legen eine untere Grenze fest: $y \geq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Dann ist

$$\sqrt{y} \geq \sqrt{\varepsilon} \qquad , \qquad \frac{1}{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{\varepsilon} = N$$

Jetzt ist eine eindeutige Lösung zu erwarten. Durch den Ausschluss der x-Achse entfällt die oben beschriebene Vieldeutigkeit der Lösungen (vgl. Bild 19).

Die zuletzt mitgeteilten Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung lassen sich im Gegensatz zu den Überlegungen am Anfang dieses Abschnittes auf die Prüfung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Differentialgleichungen höherer Ordnung sowie auf Systeme von Differentialgleichungen übertragen.

7 Das Eulersche Streckenzugverfahren

Bisher haben wir uns mit speziellen Formen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ beschäftigt. Die Beispiele für (relativ leicht) lösbare Differentialgleichungen dieses Typs lassen sich noch vermehren, etwa durch die mit den Namen von Riccati und Bernoulli gekennzeichneten.
Es muss aber gesagt werden, dass alle behandelten und aufgeführten Typen nur einen kleinen Teil der vor allem in den Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen ausmachen.

So wie bei den algebraischen Gleichungen höheren Grades (etwa $n > 3$) Näherungsverfahren entwickelt worden sind, die es gestatten, mit beliebiger Genauigkeit die Lösungen überall da anzugeben, wo keiner der wenigen direkt lösbaren Fälle vorliegt, so gibt es auch für die Differentialgleichungen solche Näherungsverfahren. Auch hier kann der Grad der Genauigkeit beliebig gesteigert und vorgegeben werden.

Wir wollen uns mit dem einfachen Eulerschen Streckenzugverfahren befassen, von dem es auch eine verbesserte Form gibt. Sein Prinzip beruht darauf, kleine Kurvenstücke durch Tangentenstücke zu ersetzen. Es ist sowohl graphisch als auch numerisch ausführbar. Grundsätzlich sind nur Anfangswertprobleme damit zu lösen.

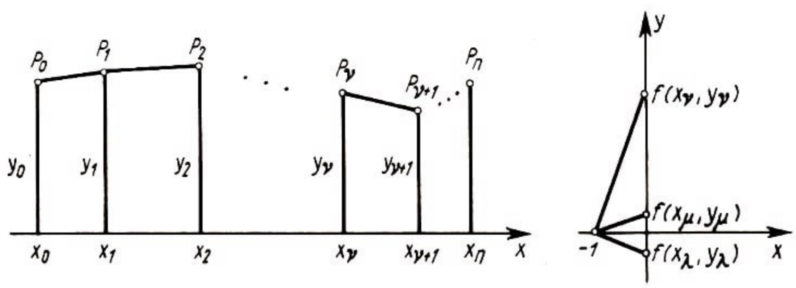


Bild 21 a,b:

Der Punkt $P_0(x_0,y_0)$ sei das Bild des Anfangswerts. Dann ist diesem Punkt durch $y' = f(x,y)$ eine bestimmte Richtung zugeordnet.
Wir zeichnen ein Stück der entsprechenden Tangente der Lösungskurve bis zum Punkt mit der Abszisse x_1, wo eine größere Richtungsänderung eintreten möge (Bild 21a).
Die Gleichung der Geraden durch P_0 mit dem Anstieg $y'(x_0) = f(x_0,y_0)$ lautet

$$y = y_0 + f(x_0,y_0)(x - x_0)$$

Dann ist $y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1 - x_0)$. So gehen wir weiter vom Punkt (x_1,y_1) mit dem Anstieg $f(x_1,y_1)$ bis zum Punkt mit der Abszisse x_2. Es wird dann entsprechend

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)(x_2 - x_1)$$

Allgemein ist

$$y_{\nu+1} = y_\nu + f(x_\nu,y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)$$

So entsteht der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$, der angenähert den Verlauf der Lösungskurve im Intervall $x_0 = a \leq x \leq x_n = b$ wiedergibt.
Durch Verkleinerung der Teilintervalle $\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$ kann die Genauigkeit vergrößert werden. Das Verfahren ist graphisch und rechnerisch durchführbar.

Bei der graphischen Lösung ist es zweckmäßig, sich einen "Pol" in $(-1;0)$ einzuzeichnen und die Werte $f(x_\nu, y_\nu)$ auf der y-Achse abzutragen. Verbindet man die entstehenden Punkte mit dem Pol, so hat diese Strecke die Richtung der Geraden durch P_ν mit dem Anstieg $f(x_\nu, y_\nu)$ (Bild 21b).

Für eine numerische Näherungslösung nähen wir als Beispiel die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{y-1}$ mit dem Anfangswert $(x_0, y_0) = (1;2)$ und beschränken uns auf das Intervall $1 \leq x \leq 2$ (siehe Tabelle).
Die exakte Lösung ist $y = x^2 + 1$.

Zum Vergleich rechnen wir einmal mit der (konstanten) "Schrittweite" $\Delta x_\nu = h_1 = 0{,}2$ und zum anderen mit $h_2 = 0{,}1$. In der letzten Spalte geben wir die Differenz zwischen dem Näherungswert und dem genauen Wert an. Die erhaltenen Näherungswerte sind bei diesem Beispiel durchweg zu klein.

1. $h = 0{,}2$

ν	x_ν	y_ν	$hf(x_\nu,y_\nu)$	$y_{\nu+1}$	genauer Wert	Fehler
0	1	2	$0{,}2 \cdot 2\sqrt{2-1} = 0{,}4 \cdot 1$	$2 + 0{,}4 = 2{,}4$	2,44	-0,04
1	1,2	2,4	$0{,}4 \cdot 1{,}183$	2,8732	2,96	-0,0868
2	1,4	2,8732	$0{,}4 \cdot \sqrt{1{,}8732}$	3,4204	3,56	-0,1396
3	1,6	3,4204	$0{,}4 \cdot 1{,}555$	4,0424	4,24	-0,1976
4	1,8	4,044	$0{,}4 \cdot 1{,}744$	4,74	5,00	-0,26
5	2,0	4,74	$0{,}4 \cdot 1{,}934$	5,5136	5,84	-0,3264

2. $h = 0{,}1$

ν	x_ν	y_ν	$hf(x_\nu,y_\nu)$	$y_{\nu+1}$	genauer Wert	Fehler
0	1	2	$0{,}2 \cdot \sqrt{1} = 0{,}2$	2,2	2,21	-0,01
1	1,1	2,2	$0{,}2 \cdot \sqrt{1{,}2} = 0{,}219$	2,419	2,44	-0,021
2	1,2	2,419	$0{,}2 \cdot \sqrt{1{,}419} = 0{,}238$	2,657	2,69	-0,033
3	1,3	2,657	$0{,}2 \cdot \sqrt{1{,}657} = 0{,}257$	2,914	2,96	-0,046
4	1,4	2,914	$0{,}2 \cdot \sqrt{1{,}914} = 0{,}277$	3,191	3,25	-0,059
5	1,5	3,191	$0{,}2 \cdot \sqrt{2{,}191} = 0{,}296$	3,487	3,56	-0,073
6	1,6	3,487	$0{,}2 \cdot \sqrt{2{,}487} = 0{,}315$	3,802	3,89	-0,088
7	1,7	3,802	$0{,}2 \cdot \sqrt{2{,}802} = 0{,}335$	4,135	4,24	-0,105
8	1,8	4,135	$0{,}2 \cdot \sqrt{3{,}135} = 0{,}354$	4,489	4,61	-0,121
9	1,9	4,489	$0{,}2 \cdot \sqrt{3{,}489} = 0{,}373$	4,862	5,00	-0,138
10	2	4,862	$0{,}2 \cdot \sqrt{3{,}862} = 0{,}393$	5,255	5,41	-0,155

Wie man sieht, wird der absolute Fehler mit der Verkleinerung der Schrittweite kleiner. Andererseits nimmt die Abweichung vom genauen Wert mit der Entfernung von x_0 zu.

3. Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Die rechte Seite $f(x,y)$ ist offenbar nur für $x^2 + y^2 \leq 1$ definiert, also für alle Zahlenpaare (Punkte), die innerhalb und auf dem Einheitskreis liegen. Der Wertevorrat beträgt

$$0 \leq f(x,y) \leq 1$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist also beschränkt. Wir teilen mit, dass sie stetig ist, also ein "brauchbares" Richtungsfeld ergibt. Wir zeichnen dieses mit Hilfe der Isoklinen. Auf dem Einheitskreis ist überall $y' = 0$; im Nullpunkt ist $y' = 1$. Auf den Kreisen

$$x^2 + y^2 = 1 - c^2$$

die sich ergeben, wenn wir $y' = c$ setzen, erhalten wir Anstiege zwischen 0 und 1 (vgl. Bild 22).

Es ist jetzt leicht, Kurven zu zeichnen, die auf dieses Richtungsfeld passen.
Wir berechnen eine dieser Integralkurven, nämlich die, die durch den Nullpunkt geht. Die Schrittweite sei $h = 0{,}1$. Dann ergibt sich die folgende Tabelle für die Rechnung

ν	x_ν	y_ν	$hf(x_\nu, y_\nu)$	$y_{\nu+1}$
0	0	0	$0{,}2 \cdot 1 = 0{,}1$	0,1
1	0,1	0,1	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}02} = 0{,}099$	0,199
2	0,2	0,199	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}0796} = 0{,}0959$	0,2949
3	0,3	0,2949	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}17700{,}0907}$	0,3856
4	0,4	0,3856	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}3087} = 0{,}0831$	0,4687
5	0,5	0,4687	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}4697} = 0{,}0728$	0,5415
6	0,6	0,5415	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}6533} = 0{,}0589$	0,6004
7	0,7	0,6004	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 0{,}8505} = 0{,}0387$	0,6391
8	0,8	0,6391	$0{,}1 \cdot \sqrt{1 - 1{,}084}$ entfällt	

8 Über die implizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Bisher wurden nur explizite Differentialgleichungen von der Form

$$y' = f(x,y)$$

betrachtet. Die Differentialgleichung war bereits nach y' "aufgelöst". Die Differentialgleichung

$$y'^2 - \frac{9}{4}x = 0$$

ist dagegen in der impliziten Form gegeben. Allgemein nennt man eine Differentialgleichung von der Form

$$F(x,y,y') = 0$$

implizit.
Man wird stets versuchen, die implizite Form in die explizite überzuführen. In unserem Beispiel ergibt sich

$$y'^2 = \frac{9}{4}x \qquad , \qquad |y'| = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad (x \geq 0)$$

Also erhalten wir 2 Differentialgleichungen:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad y' = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Das bedeutet, dass jedem Punkt (x, y) mit $x > 0$ zwei Richtungen zugeordnet sind. Die Lösungen der Differentialgleichungen sind

$$y_1(x) = x\sqrt{x} + y_0 - x_0\sqrt{x_0} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = -x\sqrt{x} + y_0 + x_0\sqrt{x_0}$$

oder $y_1(x) = x\sqrt{x} + c_1$ und $y_2(x) = -x\sqrt{x} + c_2$.
Nehmen wir P_0 für beide Lösungen auf der y-Achse an, dann ist $x_0 = 0$ und y_0 in beiden Fällen das gleiche. Dann können wir zusammenfassen:

$$y - c = \pm x\sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad (y - c)^2 = x^3$$

Nur so erhalten wir in den entstehenden "Neilschen Parabeln" noch eine Kurvenschar und eine allgemeine Lösung (Bild 23).

Dieses einfache Beispiel zeigt schon, dass jetzt die Verhältnisse verwickelter werden können, auch da, wo noch $y'(x)$ zum Subjekt einer neuen Differentialgleichung von der Form

$$y' = f(x, y)$$

gemacht werden kann.

Wir zeigen an einem weiteren Beispiel, welche Erscheinungen zusätzlich bei einer impliziten Differentialgleichung auftreten können.

$$y'^2 y^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad , \qquad y' = \pm\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}$$

Wir lösen die beiden Fälle gleichzeitig (durch Trennung der Variablen):

$$\int_{y_0}^{y} \pm\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x$$

$$\left[\pm\sqrt{r^2 - y^2}\right]_{y_0}^{y} = x - x_0$$

$$\pm\sqrt{x^2 - y^2} = x - x_0 + \sqrt{r^2 - y_0^2} = x - c$$

$$r^2 - y^2 = (x - c)^2$$

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2$$

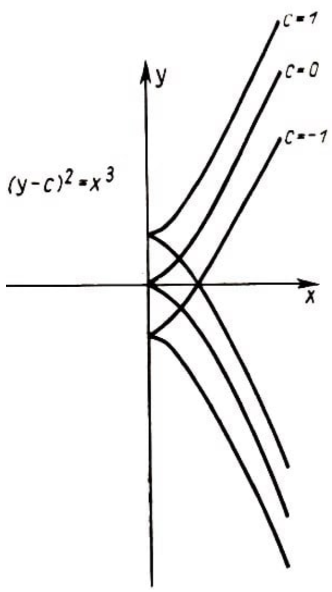


Bild 23

Die - zusammengefasste - allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist also die Schar der Kreise mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Diese Kurvenschar wird von den Geraden $y = r$ und $y = -r$ "eingehüllt" (Bild 24). Jeder Kreis wird von jeder der beiden Geraden berührt und jede Gerade berührt jeden Kreis.

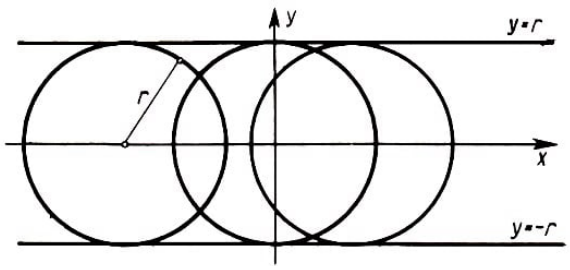


Bild 24:

Man beachte, dass die beiden Geraden $y = r$ und $y = -r$ ebenfalls Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung

$$y'^2 y^2 + y^2 = r^2$$

sind. In beiden Fällen ist $y' = 0$ und $y^2 = r^2$.
Neben der allgemeinen Lösung gibt es also die einhüllenden Geraden noch zusätzlich als Lösungen. Man nennt solche zusätzlichen Lösungen singuläre Lösungen.

Ihre Auffindung erfordert die Kenntnis der Theorie der impliziten Funktionen, die wir jedoch nicht allgemein bei unseren Lesern voraussetzen können.
Der Hauptsatz dieser Theorie besagt, dass man in unserem Falle bei $F(x, y, y') = 0$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$$

prüfen muss.
Wo diese partielle Ableitung immer von Null verschieden ist, ist jedem Zahlenpaar (Punkt) (x, y) auch nur ein einziger Wert von y' zugeordnet. Jeder Punkt ist regulär.
Die Punkte, in denen $\frac{\partial F}{\partial y'}$ dagegen verschwindet, nennt man singulär, und es besteht die Möglichkeit, dass die Gesamtheit der singulären Punkte eine Kurve ergibt, die auch noch eine Lösung der Differentialgleichung - die singuläre Lösung - ist.

Wir sehen unsere Beispiele daraufhin an.

1. Bei $F(x, y, y') = y'^2 - \frac{9}{4}x = 0$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

Aus $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ folgt $y' = 0$.
Ist $y' = 0$, dann ist in $y'^2 - \frac{9}{4}x = 0$ für x nur der Wert Null möglich. Alle Punkte der y-Achse sind singuläre Punkte. Die y-Achse berührt aber keine einzige Kurve der Schar der allgemeinen Lösung und ist damit keine singuläre Lösung.

2. In $y'^2 y^2 + y^2 - r^2 = 0$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'y^2$$

y kann nicht identisch verschwinden, sonst wäre stets $r = 0$ und die Aufgabe gegenstandslos. Nehmen wir dagegen $y' \equiv 0$ an, so ergibt sich $y^2 - r^2 = 0$, d.h., entweder ist dann für alle x $y(x) = +r$ oder $y(x) = -r$.
Hiermit haben sich die beiden Geraden, die die Kurven der allgemeinen Lösung einhüllten, tatsächlich als singuläre Lösungen ergeben.

3. Betrachten wir dagegen die Differentialgleichung

$$F(x,y, y') = y'(1 + x^2) - 2x = 0$$

so ergeben sich mit $\frac{\partial F}{\partial y'} = 1 + x^2 \geq 1$ $(\neq 0)$ für die 1. partielle Ableitung nach y' stets Werte, die von Null verschieden sind. Daher gibt es außer der allgemeinen Lösung

$$y(x) = \ln(1 + x^2) + c$$

auch keine singulären Lösungen.

Ist also eine Differentialgleichung in der impliziten Form $F(x, y, y') = 0$ gegeben, so untersucht man die 1. partielle Ableitung der Funktion $F(x; y, y')$ nach y', also $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$.
Kann sie nicht verschwinden, so besteht, wenn überhaupt, ein eindeutiges Richtungsfeld. Die Punkte dagegen, in denen $\frac{\partial F}{\partial y'}$ verschwindet, können eine Kurve bilden, die eventuell als singuläre Lösung in Frage kommt.
Mit diesem Hinweis müssen wir uns begnügen und an die weiterführende Literatur verweisen.

9 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung - Einführung

9.1 Rand- und Anfangsbedingungen

Nach den bisherigen Ausführungen ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung eine Gleichung, die außer der (nicht immer explizit auftretenden) Variablen x eine Funktion $y(x)$ dieser Variablen sowie ihre Ableitungen bis zur zweiten enthält.
Die 2. Ableitung muss unbedingt in der Differentialgleichung auftreten, während die Funktion $y(x)$ und ihre 1. Ableitung $y'(x)$ auch fehlen können.

Die einfachste Differentialgleichung 2. Ordnung, ist $y''(x) = 0$. Wir lösen sie durch zweimalige unbestimmte Integration:

$$y'(x) = c_1 \qquad ; \qquad y(x) = c_1 x + c_2$$

Charakteristisch - für alle Differentialgleichungen 2. Ordnung - ist das Auftreten von zwei beliebigen Konstanten in der Lösung.
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x = \cos x$$

Diese ist außerdem linear, da jeder Summand auf der linken Seite nur y oder y' oder y'' enthält und zwar in der ersten Potenz.
Der Term auf der linken Seite ist nichts anderes als die 2. Ableitung von $y \cos x$. Daher können wir die Differentialgleichung in der Form

$$(y \cos x)'' = \cos x$$

schreiben und finden durch unbestimmte Integrationen zunächst

$$(y \cos x)' = \sin x + c_1, \qquad \text{die "Zwischenlösung"}$$

und schließlich

$$y \cos x = -\cos x + c_1 x + c_2$$

so dass also

$$y(x) = c_1 \frac{x}{\cos x} + c_2 \frac{1}{\cos x} - 1 \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

die Funktion ist, die als Lösung in Frage kommt. Der Leser überzeuge sich durch Einsetzen der Funktion und ihrer Ableitungen in die Differentialgleichung, dass sie es tatsächlich ist.

Wir weisen nochmals auf die zwei Konstanten hin als Folge der zwei Integrationen. Zur Bestimmung von c_1 und c_2 benötigen wir zwei Gleichungen.
Man könnte z.B. zwei Punkte vorschreiben, durch die unsere Integralkurve gehen soll. Wenn wir festsetzen, dass die Integralkurve durch die Punkte $P_1(0;1)$ und $P_2\left(\frac{\pi}{3};1\right)$ gehen soll, dann erhalten wir die Werte $c_1 = -\frac{3}{\pi}$ und $c_2 = 2$, wie der Leser selbst

errechnen möge. Damit ergibt sich die spezielle Lösung

Wenn, wie hier, Bedingungen in der Form gestellt werden, dass die Lösungskurve durch zwei vorbestimmte Punkte gehen soll, so spricht man von Randbedingungen. (In den praktischen Problemen liegen diese Punkte in der Regel am Rande des Arbeitsbereichs.) Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, eine bestimmte Lösungskurve festzulegen, indem man einen Punkt vorschreibt und die Richtung der Kurve in diesem Punkt, also den Wert der 1. Ableitung.

Vorgeschrieben wird also das Wertetripel $(x_0, y(x_0), y'(x_0))$. In diesem Falle spricht man von Anfangsbedingungen.
Fassen wir die obige Differentialgleichung als Anfangswertproblem mit $(x_0, y_0, y_0') = (0; 1; 1)$ auf, so ergibt sich die spezielle Lösung

$$y(x) = \frac{x+2}{\cos x} - 1 \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Wir behaupten ferner, dass sowohl

$$y_1(x) = \frac{x}{\cos x} \qquad \text{als auch} \qquad y_2(x) = \frac{1}{\cos x}$$

auf der linken Seite der Differentialgleichung eingesetzt, für diesen Term den Wert Null liefern. Anders formuliert: Für diese Funktionen gilt $y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x = 0$.

Man sagt: $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind partikuläre Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung, die sich aus der gegebenen durch Nullsetzen der rechten Seite ergibt.
Dann nennt man $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ deren allgemeine Lösung.

Schließlich behaupten wir, dass der 3. Summand $y_3(x) = -1$ eine (spezielle) Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist. Man spricht dann von einer partikulären Lösung der vorgelegten linearen inhomogenen Differentialgleichung. Den Beweis überlassen wir dem Leser.
Wir überlassen dem Leser ferner, nachzuprüfen, dass in der Lösung der Differentialgleichung $y''(z) = 0$ ebenfalls jeder Summand für sich Lösung ist.

Nun betrachten wir die nichtlineare Differentialgleichung

$$2x^2 y'' + 2x^2 (y')^2 + 8xyy' + 2y^2 = 6x$$

Der Term auf der linken Seite ist die 2. Ableitung von x^2y^2. Somit folgt aus $(x^2y^2)'' = 6x$ über die Zwischenlösung

$$\begin{aligned} (x^2y^2)' &= 3x^2 + c_1 \\ x^2y^2 &= x^3 + c_1 x + c_2 \\ y^2 &= x + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Dann hat die Differentialgleichung, wie man durch Einsetzen zeigt, die Lösungen

$$y_1 = +\sqrt{x + c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x^2}} \qquad \text{und} \qquad y_2 = -\sqrt{x + c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x^2}}$$

Eine Aufspaltung in Summanden ist unmöglich und daher eine Nachprüfung, ob sich die Lösung auch hier als Summe zweier partikulärer Lösungen ergibt, gegenstandslos.

9.2 Erniedrigung der Ordnung

In unseren weiteren Betrachtungen beschäftigen wir uns nur mit linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.
Die lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0 \qquad (x \neq 0)$$

besitzt, wie man unschwer erkennt, eine Lösung $y_1(x) = x$. Wir vermuten, dass es noch eine weitere Lösung gibt und setzen zu deren Bestimmung an

$$y_2(x) = y_1(x)\int \eta(x)\mathrm{d}x = x\int \eta(x)\mathrm{d}x$$

Mit $y_2'(x) = \int \eta \mathrm{d}x + x\eta$ und $y_2''(x) = 2\eta + x\eta'$ erhalten wir beim Einsetzen

$$2\eta x\eta' - \frac{2}{x}\int \eta \mathrm{d}x - 2\eta + \frac{2}{x}\int \eta \mathrm{d}x = 0 \qquad , \qquad x\eta' = 0$$

Da laut Differentialgleichung $x \neq 0$ sein muss, ist $\eta' = 0$ die notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer geeigneten Funktion $\eta(x)$.
Die Lösung ist $\eta = c$, wobei wir vereinfachend $c = 1$ setzen, da es uns nur um die er von $y_2(x)$ geht. Demnach kommt als zweite Lösung $y_2(x) = x\int 1\mathrm{d}x = x^2$ in Frage (Integrationskonstante gleich Null gesetzt). Die "Probe" bestätigt unsere Vermutung.

Es lässt sich allgemein zeigen, was der Leser als Aufgabe betrachten möge, dass sich bei Kenntnis einer partikulären Lösung $y_1(x)$ mit Hilfe des Ansatzes $y_2(x) = y_1(x)\int \eta \mathrm{d}x$ stets eine zweite partikuläre Lösung $y_2(x)$ ermitteln lässt.
Man muss dabei lediglich die Stetigkeit der Koeffizienten von $y(x)$, $y'(x)$ voraussetzen ($y''(x)$ habe den Koeffizienten 1).

Es hat sich wieder eine Analogie zur Algebra ergeben. Der Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht die algebraische Gleichung zweiten Grades, die ebenfalls zwei Lösungen hat.
Kennt man eine dieser Lösungen x_1, so kann man durch Division mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ den Grad der Gleichung erniedrigen und aus der verbliebenen Gleichung 1. Grades die 2. Lösung gewinnen.

In $x^2 - 3x + 2 = 0$ erraten wir etwa die Lösung $x_1 = 1$, spalten den Linearfaktor $(x - 1)$ ab und erhalten aus

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0$$

durch Nullsetzen des zweiten Faktors der rechten Seite die noch fehlende Lösung $x_2 = 2$.

Entsprechend haben wir bei unserer Differentialgleichung durch einen geeigneten Ansatz die Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung auf eine solche 1. Ordnung zurückgeführt. Wir möchten gleich darauf hinweisen, dass die Ordnung einer linearen Differentialgleichung auf diese Weise stets, auch für $n > 2$, erniedrigt werden kann.

9.3 Die Wronski-Determinante - Fundamentalsystem der Lösungen

Hat die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, dann sind auch $c_1y_1(x)$ und $c_2y_2(x)$ Lösungen (c_1 und c_2 beliebige reelle Zahlen), wie man sofort sieht.
Auch die Linearkombination beider Teillösungen

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

ist Lösung. Aus

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad \text{folgt} \qquad y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) \qquad \text{und}$$

$$y''(x) = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)$$

Setzen wir in die linke Seite der Differentialgleichung ein, so erhalten wir e

$$\begin{aligned} &c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + a(x)[c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)] + b(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] \\ &= c_1[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)] + c_2[y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)] \end{aligned}$$

Da $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sein sollen, verschwinden die Terme in den eckigen Klammern. Damit hat der ganze Ausdruck den Wert Null, was bedeutet, dass die Linearkombination die Differentialgleichung erfüllt.

Man nennt, wie schon gesagt, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind partikuläre Lösungen von ihr.
Wählt man $c_1 = c_2 = 0$, so ergibt sich die "triviale" Lösung $y(x) = 0$, die bei jeder homogenen Differentialgleichung vorhanden ist.

Es soll noch erklärt werden, warum diese Lösung als allgemeine bezeichnet wird. Sie stellt eine zweiparametrige Kurvenschar dar. Jede der Konstanten c_1 und c_2 kann alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Man kann mit diesen Kurven, wenn es der Definitionsbereich der partikulären Lösungen erlaubt, zweifach die x,y-Ebene überdecken wie in

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

Nehmen wir ein Anfangswertproblem an, d. h. schreiben wir vor, welche Werte die Funktion $y(x)$ und ihre 1. Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 (im Definitionsbereich von $y(x)$ und $y'(x)$) annehmen sollen, dann muss unter den Kurven der zweiparametrigen Schar, die die allgemeine Lösung darstellen, genau eine vorhanden sein, die die Anfangsbedingungen erfüllt.

Das bedeutet, dass sich c_1 und c_2 in jedem Fall eindeutig bestimmen lassen müssen. Wir schreiben also vor:

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0) = y_0 \qquad ; \qquad c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0) = y_0'$$

Aus diesem Gleichungssystem ergeben sich in Determinantenschreibweise nach der Cramerschen Regel

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \qquad ; \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}$$

wenn die im Nenner stehende Determinante nicht verschwindet.
Ist das der Fall, so können die dem Anfangswert entsprechenden Werte von c_1 und c_2 eindeutig bestimmt werden, und dann soll die Lösung als allgemein bezeichnet werden.

Die im Nenner aufgetretene Determinante wird "Wronski-Determinante" genannt. Wir bezeichnen sie von nun an mit

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \qquad \text{oder allgemein} \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Für die Existenz einer allgemeinen Lösung ist also $W(x) \neq 0$ zu fordern.
Nehmen wir an, dass sich die zweite partikuläre Lösung von der ersten nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, $y_2(x) = ky_1(x)$, so erhalten wir

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & ky_1(x) \\ y_2(x) & ky_2(x) \end{vmatrix} = 0$$

c_1 und c_2 können nicht bestimmt werden. Daher kann

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = (c_1 + kc_2)y_1(x)$$

nicht mehr als allgemeine Lösung bezeichnet werden.
Geben wir der Konstanten k die Gestalt $k = -\frac{c_1}{c_2}$ $(c_2 \neq 0)$, so ergibt sich

$$y_2(x) = -\frac{c_1}{c_2}y_1(x) \qquad \text{oder} \qquad c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

oder, da diese Beziehung für alle x des Definitionsbereichs gilt,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$$

Wegen $c_2 \neq 0$ kann die Gleichung jederzeit wieder nach $y_2(x)$ umgestellt werden. Wir sagen in diesem Fall: $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind voneinander linear abhängig. Wir haben gesehen, dass dann die Wronski-Determinante verschwindet.
Nehmen wir dagegen eine nichtverschwindende Wronski-Determinante an, und besteht trotzdem die Identität

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0, \qquad \text{so gilt auch} \qquad c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \equiv 0$$

und wir berechnen mit Hilfe von Determinanten nach der Cramerschen Regel

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ 0 & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = 0 \qquad \text{und} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 0 \end{vmatrix}}{W(x)} = 0 \quad (W(x) \neq 0)$$

Die Identität kann in einem solchen Fall nur durch $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ erfüllt werden. In diesem Fall nennt man die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig.

Soll also $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung sein, so müssen die partikulären Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sein, was man mit Hilfe der Wronski-Determinante nachprüft.
Zwei Lösungen mit diesen enden bilden ein sogenanntes Fundamentalsystem.

In der Differentialgleichung $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ $(x \neq 0)$ bilden also die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem, denn es gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

wegen der Voraussetzung. Es gibt theoretisch unendlich viele Möglichkeiten, ein Fundamentalsystem von Lösungen für eine Differentialgleichung anzugeben. In der obigen Differentialgleichung bilden auch die Funktionen

$$y_1^*(x) = x + x^2 \qquad , \qquad y_2^*(x) = x - x^2$$

ein solches, denn es ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} x + x^2 & x - x^2 \\ 1 + 2x & 1 - 2x \end{vmatrix} = -2x^2 \neq 0$$

wie oben. Mit wenig Phantasie kann man sich beliebig viele weitere Fundamentalsysteme zusammenbauen.

9.4 Die Differentialgleichung der Wronski-Determinante

Die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$. Dann ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Hieraus folgt für die 1. Ableitung von $W(x)$

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x)$$

Da $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sein sollen, gilt

$$\begin{aligned}
&y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = 0 \qquad \text{oder}\\
&y_1''(x) = -a(x)y_1'(x) - b(x)y_1(x) \qquad \text{bzw.}\\
&y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x) = 0 \qquad \text{oder}\\
&y_2''(x) = -a(x)y_2'(x) - b(x)y_2(x)
\end{aligned}$$

Setzen wir in den Ausdruck für $W'(x)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
W'(x) &= y_1(x)[-a(x)y_2'(x) - b(x)y_2(x)] - y_2(x)[-a(x)y_1'(x) - b(x)y_1(x)]\\
&= -a(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)] = -a(x)W(x)
\end{aligned}$$

In dieser Differentialgleichung für $W(x)$ trennen wir die Variablen und integrieren von x_0 bis x:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{w} &= -a(x)\mathrm{d}x\\
\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}w}{w} &= -\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x\\
\ln\frac{W(x)}{W(x_0)} &= -\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x\\
W(x) &= W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

(Wenn $a(x)$ stetig ist, existiert das Integral.)

Kann man für irgendein x_0 des Definitionsbereichs nachweisen, dass $W(x_0)$ verschwindet, so folgt daraus $W(x) \equiv 0$.
Ist dagegen $W(x_0) \neq 0$ für irgendein x_0, so folgt daraus $W(x) \neq 0$ für den ganzen Definitionsbereich, da e^t stets positiv und damit von Null verschieden ist $\left(t = -\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x\right)$.

9.5 Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Nunmehr betrachten wir unter Beschränkung auf Anfangswertprobleme die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$$

Wir behaupten, dass sich die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung additiv zusammensetzt.

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_P(x)$$

Der Leser überzeuge sich selbst davon, dass diese Funktion die Differentialgleichung löst.

Nach unserer Erklärung des Begriffs allgemeine Lösung müsste sich in dieser zweiparametrigen Kurvenschar jede spezielle Lösung mit vorgeschriebenen Werten $y(x_0)$ und $y'(x_0)$, wenn x_0 in den Definitionsbereichen von $a(x)$, $b(x)$ und $h(x)$ liegt, befinden.
Das bedeutet, dass sich die Konstanten c_1 und c_2 eindeutig bestimmen lassen müssen. Wir verlangen also

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + y_P(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + y_P'(x_0) = y_0'$$

Dann ergibt sich ein inhomogenes Gleichungssystem für c_1 und c_2.

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 - y_P(x_0)$$
$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_P'(x_0)$$

das lösbar ist, wenn die Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Diese ist aber die Wronski-Determinante $W(x)$ für $x = x_0$, deren Nichtverschwinden für alle in Frage kommenden z schon für die Existenz der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gefordert werden musste.

Wir wollen noch auf eine interessante Parallele zwischen den linearen Differentialgleichungen und den linearen Gleichungssystemen hinweisen. Ein Beispiel soll genügen.
Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y - 3z = 5$$

Da das System unterbestimmt ist, können wir eine der Variablen $z = c$ frei wählen. Das Gleichungssystem

$$x + y = 1 - c \quad , \quad x - y = 5 + 3c$$

hat dann die Lösungen

$$x = 3 + c \quad , \quad y = -2 - 2c$$

oder anders geschrieben $(x; y) = (3 + c; -2 - 2c)$.
Dafür können wir aber nach den Regeln über das Rechnen mit Zahlenpaaren schreiben

$$(x; y) = (3; -2) + (c; -2c) = c(1; -2) + (3; -2)$$

Wenn wir aus dem gegebenen inhomogenen Gleichungssystem das "zugehörige homogene" Gleichungssystem

$$x + y + z = 0 \quad , \quad x - y - 3z = 0$$

bilden, so hat dies die Lösung

$$(x;y) = (z;-2z) \qquad \text{bzw.} \qquad (c;-2c) = c(1;-2)$$

Diese Lösung wird als allgemeine Lösung bezeichnet wegen der frei zu wählenden Konstante c.
Nunmehr bestimmen wir eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, indem wir $z = 0$ setzen. Sie lautet

$$(x,y)_P = (3;-2)$$

Demnach ist die vollständige Lösung

$$(x,y) = c(1;-2) + (3;-2)$$

ebenfalls eine Summe aus der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems und einer (gewissen) partikulären Lösung des inhomogenen Systems.

9.6 Bemerkung zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass sich unser Gedankengang darauf stützte, dass eine Lösung $y_1(x)$ existiere.
Hat man in der Algebra ein Polynom n-ten Grades

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

und ist eine Nullstelle dieses Polynoms $x = x_1$ bekannt, dann lässt sich der "Linearfaktor" $(x - x_1)$ abspalten.

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

wobei $P_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n-1)$ten Grades ist. Der Beweis kann notfalls in den Schulbüchern nachgelesen werden.[10]

Zu beachten ist, dass es mindestens eine Nullstelle x_1 geben muss.
Diese Lücke schließt der Fundamentalsatz der Algebra, der besagt, dass jedes Polynom mindestens eine (reelle oder komplexe) Nullstelle besitzt. (Mehr braucht nicht verlangt zu werden.) Dass genau n (nichtnotwendig verschiedene) Lösungen existieren, ergibt sich dann durch wiederholte Anwendung des Fundamentalsatzes.

Unsere Betrachtungen über die Differentialgleichungen 2. Ordnung müssen also noch dadurch ergänzt werden, dass Kriterien für die Existenz von Lösungen angegeben werden. Wir können diese Kriterien wie bei der Differentialgleichung 1. Ordnung nur ohne Beweis mitteilen.
Die Differentialgleichung 2. Ordnung sei in der Form $y''(x) = f(x,y,y')$ gegeben.[11]
Dann existiert genau eine Lösung mit $y(x) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

[10] z.B. Lehrbuch Mathematik, Klasse 11, 1967, S. 104.
[11] Wir betrachten wieder ein Anfangswertproblem.

1. $f(x,y,y')$ ist als Funktion der drei Variablen x, y und y' stetig.
2. $|f(x,y,y')| < M$
3. $\left|\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}\right| < N_1$
4. $\left|\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}\right| < N_2$

(M, N_1 und N_2 sind genügend große positive reelle Zahlen.)

Bei der Aufstellung der Anfangsbedingungen muss beachtet werden, dass für x_0 die Werte $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ definiert sind.
Fasst man $y'(x)$ als eine unabhängige Koordinate auf, so hat man mit dem Anfangswert (x_0, y_0, y'_0) gewissermaßen einen Punkt P_0 im dreidimensionalen Raum ($y'(x)$ entspricht dabei z) und grenzt in diesem Raum einen Quader ab, der P_0 enthält. Alle Betrachtungen werden dann in diesem Quader durchgeführt, wobei man sich vorbehält, dessen Grenzen gegebenenfalls bis ins Unendliche zu erweitern.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ bringen wir auf die Form

$$y'' = \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y$$

Der Wert $x = 0$ muss ausgeschlossen werden. Dann lässt sich aber zeigen, dass die Funktion $f(x,y,y') = \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y$ stetig ist (1. Bedingung).
Sie ist dann auch beschränkt $\left|\frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y\right|$ (2. Bedingung),
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{x^2}$ (sowohl x als auch y' wurden als Konstante betrachtet),
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2}{x^2} < N_1 = \frac{2}{\gamma}$, wenn $|x| > \delta$ ($\delta > 0$) gilt (3. Bedingung),
$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{2}{x}$ (x und y wurden als Konstante aufgefasst),
$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = \frac{2}{|x|} < N_2 = \frac{2}{\delta}$, wenn wie oben $|x| > \delta$ eingehalten wird (4. Bedingung).

Unter Ausschluss von $x = 0$ und der Festsetzung $|x| > \delta$ ($\delta > 0$) können die Bedingungen 2, 3 und 4 erfüllt werden. Dann steht zusammen mit der 1. Bedingung die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung fest.

Im allgemeinen Fall gehen wir von der Form

$$y''(x) = -a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x,y,y')$$

aus.
Da $a(x)$, $b(x)$ und $h(x)$ als stetige Funktionen vorausgesetzt werden, wobei eventuell über die Faktoren $y'(x)$ und $y(x)$ noch einschränkende Bedingungen eingehalten werden müssen, ist nach Sätzen über stetige Funktionen der Term auf der rechten Seite stetig (1. Bedingung).
Dann gilt auch $|f(x,y,y')| < M$ (2. Bedingung).

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} = -b(x) \qquad ; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-b(x)| < N_1$$

ist erfüllt wegen der Stetigkeit von $b(x)$ (3. Bedingung).

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = -a(x) \qquad ; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = |-a(x)| < N_2$$

ist erfüllt wegen der Stetigkeit von $a(x)$ (4. Bedingung).

9.7 Aufgaben

1. Die Differentialgleichung $\frac{y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} + \frac{2y}{x^3}$ $(x \neq 0)$ ist zu lösen
a) mit den Randbedingungen $(x_1{,}y_1) = (1;1)$ und $(x_2{,}y_2) = (2;0)$,
b) Mit der Anfangsbedingung $(x_0, y_0, y_0') = (-1;3;-3)$.
Anleitung: Man bringe den Term auf der linken Seite auf die Form $[yg(x)]''$!

Lösung: $y(x) = c_1x^2 + c_2x + 1$ (allgemeine Lösung),
zu a) $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$, zu b) $y(x) = 2x^2 + x + 1$.

2. Die Differentialgleichung $y''\sqrt{x} + \frac{y'}{\sqrt{x}} - \frac{y}{4\sqrt{x^3}} = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ ist zu lösen
a) mit den Randbedingungen $(x_1{,}y_1) = (1;0)$ und $(x_2, y_2) = (4;2)$,
b) mit der Anfangsbedingung $(x_0, y_0, y_0') = (1;0;1)$.
Anleitung: wie oben

Lösung: $y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{15}x^2$ (allgemeine Lösung)
a) $y(x) = -\frac{63}{15}\sqrt{x} + \frac{52}{45}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{15}x^2$
b) $y(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{15}x^2$

3. Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ ist zu lösen, indem benützt wird, dass $y_1(x) = \sin x$ Lösung ist.

Lösung: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

4. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ $(x \neq 0)$
$y_1(x) = x$ ist eine Lösung. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung!

Lösung: $y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x}$

5. $y'' = \cos x$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und berechnen Sie die Wronski-Determinante!

Lösung: $y(x) = c_1x + c_2 - \cos x$; $W(x) = -1$

6. Bestätigen Sie, dass die Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 0$ die Lösungen $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{2x}$ besitzt! Bilden diese ein Fundamentalsystem?

Lösung: Ja, denn $W(x) = e^{3x} \neq 0$.

7. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.
Bestätigen Sie, dass $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ Lösungen sind! Bilden diese ein Fundamentalsystem?

Lösung: Ja! Wegen $y'' = \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y$ muss $x \neq 0$ genommen werden, woraus $W(x) = x^2 \neq 0$ folgt.

10 Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf solche 1. Ordnung zurückführen lassen

Es ist ein allgemeiner und häufig angewandter Arbeitsgrundsatz der Mathematik, eine neue Problemsituation daraufhin zu prüfen, ob sie nicht ganz oder teilweise eine bekannte enthält. Wir können hier einige spezielle Fälle von Differentialgleichungen 2. Ordnung angeben (sogar nichtlineare), die sich in der Ordnung reduzieren lassen und mit Hilfe der Kenntnisse über die Differentialgleichungen 1. Ordnung gelöst werden können.

In der Differentialgleichung $F(x,y,y',y'') = 0$ bzw. $y'' = f(x,y,y')$ können gewisse Variable (außer y'') fehlen.

10.1 y und y' treten nicht auf

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn y und y' nicht auftreten.

Beispiel: $y'' - \sin x = 0$
Die Lösung von $y'' = \sin x$ führt über die Zwischenlösung

$$y' = -\cos x + c$$

zu der allgemeinen Lösung

$$y = c_1 x + c_2 - \sin x$$

Im allgemeinen Fall wäre dann

$$y'' = f(x) \qquad \text{mit} \qquad y' = \int f(x)\mathrm{d}x + c \qquad \text{und}$$

$$y(x) = \int \left[\int f(x)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + c_1 x + c_2$$

10.2 y tritt nicht auf

Wenn y nicht explizit auftritt, kann man $y'(x) = p(x)$ setzen. Dann ist $y''(x) = p'(x)$ und aus $F(x,y',y'') = 0$ wird $F(x,p,p') = 0$, bzw. aus $y'' = (x,y')$ wird $p'(x) = f(x,p)$, also eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

1. Beispiel: Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$y'' - x(y')^2 = 0 \qquad \text{mit } (x_0,y_0,y_0') = (0;1;2)$$

Wir setzen $y'(x) = p(x)$, woraus folgt $y''(x) = p'(x)$. Nach dem Einsetzen ergibt sich $p'(x) - xp^2 = 0$ und nach Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = x\mathrm{d}x \qquad ; \qquad \int_{-2}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \int_0^x x\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} \qquad ; p = -\frac{2}{x^2+1}$$

Nach der Resubstitution folgt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2}{x^2+1}$$

und weiter - ebenfalls mit Trennung der Variablen -

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \frac{-2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
\int\limits_1^y \mathrm{d}y &= -2\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
y-1 &= -2\arctan x \\
y &= 1-2\arctan x
\end{aligned}$$

2. Beispiel:
Dieser Typ von Differentialgleichungen ergibt sich überall dort, wo eine mechanische Bewegung einen Widerstand findet, der proportional zur Geschwindigkeit ist.
Nehmen wir an, dass ein Auto mit der (konstanten) Kraft A angetrieben wird, und dass dieser Bewegung eine Kraft $k \cdot v$ (k: Proportionalitätsfaktor, v: Geschwindigkeit) entgegenwirkt. Die Anfangsbedingungen besagen, dass zur Zeit $t = 0$, der zurückgelegte Weg $s = 0$ und die Geschwindigkeit $v = 0$ betragen mögen, was bedeutet, dass das Auto zur Zeit $t = 0$ erst anfährt.
Das Weg-Zeit-Gesetz der Bewegung ist zu ermitteln. Welche Höchstgeschwindigkeit wird erreicht?
Nach Newton ist (m: Masse des Autos)

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = A - kv = A - k\frac{ds}{dt}$$

Wir setzen $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = p(t)$, so dass $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = p'(t)$ ist: $mp'(t) = A - kp$.
Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}p}{A-kp} &= \mathrm{d}t \\
m\int\limits_0^p \frac{\mathrm{d}p}{A-kp} &= \int\limits_0^t \mathrm{d}t \\
-\frac{m}{k}\ln|A-kp|_0^p &= t \\
-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{k}{A}p\right) &= t \\
v = p &= \frac{A}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)
\end{aligned}$$

Resubstitution:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{A}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\\ \mathrm{d}s &= \frac{A}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\mathrm{d}t\\ \int\limits_0^s \mathrm{d}s &= \frac{A}{k}\int\limits_0^t \left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\mathrm{d}t\\ s &= \frac{A}{k}\left[t+\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)\right]\end{aligned}$$

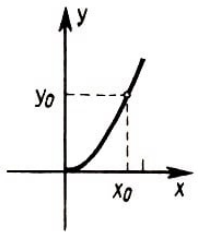
Mit wachsendem t geht $e^{-\frac{k}{m}t}$ gegen Null. Die Geschwindigkeit geht dann zu ihrem Höchstwert $v_m = \frac{A}{k}$ über.
Das Weg-Zeit-Gesetz vereinfacht sich zu $s_m = \frac{A}{k}t - \frac{Am}{k^2}$, d.h., in gleichen Zeiten werden dann gleiche Strecken zurückgelegt.

10.3 x tritt nicht explizit auf

Die Differentialgleichung möge nun die Form $y'' = f(y,y')$ besitzen, d.h., die unabhängige Variable x tritt nicht explizit auf.
In diesem Falle setzen wir formal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$. Wir fassen also $y'(x)$ als Funktion von y auf. Dies werde an einem einfachen Beispiel erläutert.

In $y = x^2$ ist $y' = 2x$. Wir drücken x durch y aus, was für $x \geq 0$ ergibt $x = \sqrt{y}$. Dann erhalten wir $y' = 2\sqrt{y}$. Für $x < 0$ hätten wir $y' = -2\sqrt{y}$ erhalten.

Bild 25:



Um x eindeutig durch y ausdrücken zu können, müssen wir Monotonie verlangen (Bild 25). Mit anderen Worten:
Die 1. Ableitung muss ein gleichbleibendes Vorzeichen in dem betrachteten Intervall ($x \geq> 0$) haben. Dazu genügt es, $y'(x) \neq 0$ vorauszusetzen.

1. Beispiel

$$y'' = (y')^3 = 0 \qquad (x_0 y_0, y_0') = (0{,}0{,}1)$$

Wir setzen also $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, dem Anfangswert $p(0) = 1$ entsprechend, dann ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'(y)p \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Nach dem Einsetzen ergibt sich

$$pp'(y) - p^3 = 0 \qquad , \qquad p[p'(y) - p^2] = 0$$

Wegen $p \neq 0$ muss dann $p'(y) - p^2 = 0$ sein. Die Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \mathrm{d}y$$
$$\int\limits_1^p \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \int\limits_0^y \mathrm{d}y$$
$$-\frac{1}{p} + 1y$$

Dann erhalten wir zunächst: $p = \frac{1}{1-y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und nehmen wieder die Trennung der Variablen vor:

$$(1-y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$
$$\int\limits_0^y (1-y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^x \mathrm{d}x$$
$$y - \frac{y^2}{2} = x$$

und schließlich ist $(y-1)^2 = -2(x-\frac{1}{2})$. Das Bild ist eine Parabel, mit dem Scheitelpunkt $S(3;1)$, die sich in Richtung der negativen x-Achse öffnet.
Im Interesse der Eindeutigkeit der Funktionswerte und unter Beachtung der Voraussetzung $y' > 0$ erhalten wir schließlich $y = 1 - \sqrt{1-2x}$; $(x < \frac{1}{2})$ als Lösung.

2. Beispiel:
Im 2. Abschnitt war unter anderem die Differentialgleichung der Kettenlinie

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

angeführt worden.
Wir sind nun in der Lage, diese zu lösen. Als Anfangswert wählen wir $(x_0, y_0, y_0') = (0;1;0)$. Außerdem sei $c = 1$.
Nach der Substitution $y'(x) = p(y)$ mit $y''(x) = p'(y)p$ erhalten wir

$$pp'(y) = \sqrt{1+p^2}$$

und nach Trennung der Variablen

$$\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \mathrm{d}y$$

Es folgt

$$\int\limits_0^p \frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \int\limits_1^0 \mathrm{d}y$$
$$\sqrt{1+p^2} - 1 = y - 1$$
$$1 + p^2 = y^2$$
$$p = \pm\sqrt{y^2 - 1}$$

und die weitere Rechnung erfolgt wieder mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} &= \pm\mathrm{d}x\\ \int\limits_1^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} &= \pm\int\limits_0^x \mathrm{d}x\\ \operatorname{arcosh} y &= \pm x\\ y &= \cosh(\pm x) = \cosh x\end{aligned}$$

(Da $y = \cosh x$ eine gerade Funktion ist.) Das Bild der Funktion $y = \cosh x$ wird daher als Kettenlinie bezeichnet.

3. Beispiel:
Welche Kurven besitzen eine konstante Krümmung?
Unter der Krümmung einer Kurve als Bild der Funktion $y = f(x)$ verstehen wir $K(x) = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$; der reziproke Betrag davon wird als Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{|K(x)|} = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}$$

bezeichnet.[12]
Eine Gerade etwa mit $y = mx + b$ und daher $y'' = 0$ besitzt also die Krümmung Null bzw. einen unendlichen Krümmungsradius.
Der Kreis ist uns aus der Anschauung als gleichmäßig gekrümmte Linie bekannt, was bedeuten würde, dass der oben angegebene Ausdruck für $k(x)$ einen konstanten Wert besitzt für alle in Frage kommenden x.

Wir fragen, ob es noch mehr Kurven mit konstanter Krümmung gibt. Nehmen wir an, $y(x)$ sei eine derartige Kurve; es sei also

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = k = \text{const.}$$

Dann würde die Lösung der Differentialgleichung alle Funktionen und mit ihnen alle Kurven liefern, für die unsere Forderung zutrifft. Die Substitution $y'(x) = p(y)$ ergibt mit Trennung der Variablen und nachfolgender Integration:

$$\begin{aligned}\frac{p'(y)p}{\sqrt{1+p^2}^3} &= k\\ \frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}^3} &= k\mathrm{d}y\\ \int \frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}^3} &= \int k\mathrm{d}y\\ -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} &= ky + c_1\end{aligned}$$

[12] Kl. E.M. S.445.

Hieraus ergibt sich zunächst

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-(ky+c_1)^2}{(ky+c_1)^2}}$$

Wir führen wieder für $p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ein und die weitere Rechnung verläuft wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \pm\sqrt{\frac{1-(ky+c_1)^2}{(ky+c_1)^2}} \\
\frac{|ky+c_1|\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(ky+c_1)^2}} &= \pm\mathrm{d}x \\
\int \frac{|ky+c_1|\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(ky+c_1)^2}} &= \pm\int \mathrm{d}x \\
-\frac{1}{k}\sqrt{1-(ky+c_1)^2} &= \pm(x+c_2)
\end{aligned}$$

Nun ordnen wir das Ergebnis. Nach Beseitigung der Wurzel durch Quadrieren ergibt sich

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}(ky+c_1)^2 = (x+c_2)^2$$

und wir erhalten schließlich mit $\frac{c_1}{k} = c_1^*$

$$(x+c_2)^2 + (y+c_1^*)^2 = \frac{1}{k^2} = \rho^2$$

Damit haben wir die zweiparametrige Schar aller Kreise mit dem Radius $\frac{1}{|k|} = \rho$ und den beliebigen Mittelpunkten $M(-c_2, -c_1^*)$ erhalten. Wenn es also Kurven konstanter Krümmung gibt, dann sind es Kreise.

10.4 x und y' treten nicht explizit auf

Die Differentialgleichung habe die Form $y'' = f(y)$ d.h. y' und x treten nicht explizit auf.
Die Erniedrigung der Ordnung geschieht durch Multiplikation der Gleichung mit y'. Wir erhalten

$$y''y' = f(y)y'$$

und bemerken, dass die linke Seite nichts anderes als

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'^2)$$

ist. Nun integrieren wir

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'^2) = f(y)y'$$

nach x unter Benutzung der Anfangsbedingungen:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'^2)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x} f(y)y'\mathrm{d}x = \int\limits_{y_0}^{y} f(y)\mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int\limits_{y_0}^{y} f(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}[(y'(x_0)]^2$$

Es hat sich eine (nichtlineare) Differentialgleichung 1. Ordnung ergeben.

1. Beispiel: $y'' = -\frac{2}{y^3}$ mit $(x_0, y_0, y'_0) = (0; 1; 0)$
Wir multiplizieren mit y':

$$y''y' = -2\frac{y'}{y^3}$$

Jetzt lassen sich sogar beide Seiten als Ableitungen nach x schreiben:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Die Integration nach x liefert

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

dann ist

$$y'^2 = 2\frac{1-y^2}{y^2} \qquad \text{und} \qquad y' = \pm\frac{\sqrt{2(1-y^2)}}{y}$$

Es folgt Trennung der Variablen und nachfolgend Integration:

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\sqrt{2}\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{1}^{y}\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\sqrt{2}\int\limits_{0}^{x}\mathrm{d}x$$

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm\sqrt{2}x$$

$$1-y^2 = 2x^2$$

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + y^2 = 1$$

Die Lösungskurve ist eine Ellipse. In den Schnittpunkten mit der x-Achse ist der Term auf der rechten Seite der gegebenen Differentialgleichung nicht definiert.

2. Beispiel: Wir berechnen die 2. kosmische Geschwindigkeit aus der Differentialgleichung der Bewegung, die im 2. Abschnitt abgeleitet wurde. Es war

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{gR^2}{r^2}$$

Die Multiplikation mit $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -gR^2 \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

und erlaubt die Umformung

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = gR^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]_{t_0}^{t} &= gR^2\left[\frac{1}{t}\right]_{t_0}^{t} \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\right]^2_{t=t_0} &= gR^2\left[\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r(t_0)}\right] \end{aligned}$$

Zur Zeit des Abschusses $t_0 = 0$ habe der abgeschossene Körper die Geschwindigkeit v_0 - die gesuchte. Da sich in diesem Augenblick der Flugkörper auf der Erde befindet, ist $r(t_0) = R$. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gR^2\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{R}\right)$$

Aus physikalischen Gründen wird die Bewegung mit wachsendem t langsamer, während die Entfernung vom Erdmittelpunkt wächst.
Für $t \to \infty$ erhalten wir demnach $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \to 0$ und $r \to \infty$. Wir führen diesen Grenzübergang durch und erhalten

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}v_0^2 &= gR^2\left(-\frac{1}{R}\right) \\ v_0^2 &= 2gR \\ v_0 &= \sqrt{2gR} \end{aligned}$$

Die numerische Rechnung ergibt $v_0 \approx 11{,}2$ km/s.

10.5 Aufgaben

1. $y'' - \cos x = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 - \cos x$

2. $y'' - \frac{1}{x} = 0$; $(x_0, y_0, y_0') = (-2; 1; 0)$
Lösung: $y = x\left[\ln\left(-\frac{x}{2}\right) + 1\right] + 3$

3. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$
Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 + x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

4. $y'' + (y')^2 = 0$; $(x_0,y_0,y_0') = (1;1;1)$
Lösung: $y(x) = \ln x + 1$; Anleitung: y tritt nicht auf.

5. $y'' - y' = \sin x$
Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

6. $x^2 y'' - xy' = \sqrt{x}$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{x}$

7. $y'' y = 2(y')^2$
Lösung: $y(x) = \frac{1}{c_1 x + c_2}$; Anleitung: x tritt explizit nicht auf.

8. $2y''\sqrt{y} = y'$; $(x_0,y_0,y_0') = (0;4;2)$
Lösung: $y(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2$

9. $y'' = y' y^2$; $(x_0,y_0,y_0') = (-1;3;9)$
Lösung: $y(x) = \frac{3}{\sqrt{-6x-5}}$

10. $y'' = -\frac{1}{2y^2}$; $(x_0,y_0,y_0') = (0;1;-1)$
Lösung: $y(x) = \sqrt[3]{(1-\frac{3}{2}x)^2}$; Anleitung: $y'' = f(y)$

11. $y'' = 2y^3$; $(x_0,y_0,y_0') = (\frac{1}{2};2;-4)$
Lösung: $y(x) = \frac{1}{x}$

12. $y'' = -2\sin y \cos^2 y$; $(x_0,y_0,y_0') = \left(1;\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$
Lösung: $y(x) = \arctan x$

11 Lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

11.1 Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

In diesem Abschnitt behandeln wir einen Typ von Differentialgleichungen 2. Ordnung, der ohne Integration zu lösen ist, und eine große Bedeutung für gewisse technisch-physikalische Probleme besitzt. Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung

$$y'(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

(a, b konstante reelle Zahlen). Wir stellen die explizite Form

$$y'' = -ay' - by$$

her und prüfen die Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

1. $y'' = f(y',y)$ ist für alle Werte von y' und y stetig.
2. $|f(y', y)| < M$ gilt demnach ebenfalls.
3. $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-b| < N_1$ ist für alle x erfüllt.
4. $\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = |-a| < N_2$ ist ebenfalls für alle x erfüllt.

Nach den mitgeteilten Sätzen existiert also eine Lösung, und sie ist für jedes Anfangswertproblem die einzige.
Die Lösung erfolgt durch den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Wir nehmen an, die Lösung habe diese Form. Dann ist

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \qquad \text{und} \qquad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0 \qquad , \qquad e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Da die Exponentialfunktion $e^{\lambda x}$ stets von Null verschieden ist, muss

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

sein als notwendige Bedingung dafür, dass Funktionen von der Gestalt $y(x) = e^{\lambda x}$ die Differentialgleichung identisch erfüllen.
Diese notwendige Bedingung ist aber stets erfüllbar, da eine algebraische Gleichung, wie sie sich hier ergeben hat, immer (reelle oder komplexe) Wurzeln besitzt.

Die Lösung der Differentialgleichung ist damit auf ein algebraisches Problem zurückgeführt worden. Die zu lösende Gleichung heißt (bei allen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) charakteristische Gleichung.
Die Lösungen der hier aufgetretenen quadratischen Gleichung können reell und verschieden, reell und übereinstimmend und konjugiert komplex sein. Wir müssen uns mit jedem dieser Fälle beschäftigen.

11.2 Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind reell und verschieden

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung seien λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).
Entsprechend unserem Ansatz erhalten wir dann zwei Lösungen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Wenn diese ein Fundamentalsystem bilden, dann wäre $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ die allgemeine Lösung der vorgelegten homogenen Differentialgleichung. Wir berechnen die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Sie hat einen von Null verschiedenen Wert, da die Exponentialfunktion $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$ nie verschwindet und $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ gilt wegen der Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bilden also ein Fundamentalsystem.

Beispiel: $y'' - 3y' + 2y = 0$
Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ hat die Wurzeln $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.
Dann hat die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

11.3 Die charakteristische Gleichung besitzt eine reelle Doppelwurzel

Die charakteristische Gleichung habe die Doppelwurzel λ_0. Es ergibt sich gewissermaßen zweimal die Lösung $y(x) = e^{\lambda_0 x}$. Von einem Fundamentalsystem kann keine Rede sein. Dann betrachten wir aber diese Lösung als die 1. partikuläre Lösung und ermitteln die zweite mit Hilfe des Ansatzes

$$y_2(x) = y_1(x) \int \eta \mathrm{d}x = e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x$$

zwecks Erniedrigung der Ordnung. Für die Ableitungen ergibt sich

$$y_2'(x) = \lambda_0 e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x + e^{\lambda_0 x} \eta$$

und

$$y_2''(x) = \lambda_0^2 e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} \eta + e^{\lambda_0 x} \eta'$$

Wir setzen ein und erhalten als notwendige Bedingung dafür, dass der Ansatz zum Erfolg führt:

$$\lambda_0^2 e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} \eta + e^{\lambda_0 x} \eta' + a\lambda_0 e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x + a e^{\lambda_0 x} \eta + b e^{\lambda_0 x} \int \eta \mathrm{d}x = 0$$

Das ergibt geordnet

$$e^{\lambda_0 x}(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b)\int \eta \mathrm{d}x + e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + a)\eta + e^{\lambda_0 x}\eta' = 0$$

Der Term in der 1. Klammer verschwindet, da λ_0 eine Lösung der charakteristischen Gleichung sein sollte. Aber auch der Term in der 2. Klammer verschwindet, da nach dem Wurzelsatz von Vieta der Koeffizient der zweithöchsten Potenz gleich der Summe der Lösungen mit umgekehrtem Vorzeichen ist:

$$a = -(\lambda_0 + \lambda_0) = -2\lambda_0$$

Wegen $e^{\lambda_0 x} > 0$ reduziert sich damit die notwendige Bedingung dafür, dass der Ansatz $y_2(x) = e^{\lambda_0 x}\int \eta \mathrm{d}x$ zur Ermittlung einer zweiten partikulären Lösung führt, auf die Differentialgleichung für $\eta(x)$

$$\eta'(x) = 0$$

Die Lösung ist $\eta(x) = c$, wobei wir den einfachsten Fall $\eta(x) = 1$ wählen können, da nur eine partikuläre Lösung gebraucht wird. Dann ist

$$\int \eta \mathrm{d}x = x + c \qquad \text{oder} \qquad \int \eta \mathrm{d}x = x$$

nach der gleichen Überlegung wie oben, und wir erhalten schließlich oder

$$y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$$

Wir prüfen noch die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} > 0$$

Also ist $y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}$ die gesuchte allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel: $y'' + \sqrt{8}y' + 2y = 0$
Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \sqrt{8}\lambda + 2 = 0$$

hat die Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt{2} = \lambda_0$. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 x e^{-\sqrt{2}x} \qquad \text{oder auch} \qquad y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-\sqrt{2}x}$$

11.4 Die charakteristische Gleichung habe komplexe Lösungen

Es sei $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ und $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Dann ergibt sich also als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

In dieser Form ist nicht zu erkennen, dass sich für $x = x_0$ der reelle Wert $y(x_0) = y_0$ laut Anfangsbedingung ergibt.
Für die Leser, die die Eulersche Formel[13]

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

kennen, formen wir mit ihrer Hilfe um:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= (c_1 + c_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(c_1 - c_2)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

Damit sich nun für $x = x_0$ ein reeller Wert ergibt, müssen $c_1 + c_2$ und $i(c_1 - c_2)$ reelle Werte ergeben. Wir vermuten, dass c_1 und c_2 (konjugiert) komplexe Zahlen sind und setzen an

$$c_1 = A - Bi \qquad , \qquad c_2 = A + Bi \qquad (A, B \text{ rell})$$

Dann ergibt sich

$$c_1 + c_2 = 2A \qquad \text{und} \qquad c_1 - c_2 = -2Bi$$

sowie $i(c_1 - c_2) = 2B$.
So erhalten wir die gesuchte Lösung in der reellen Form

$$y(x) = 2Ae^{\alpha x}\cos\beta x + 2Be^{\alpha x}\sin\beta x \qquad \text{oder} \qquad y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Der Leser, der die Eulersche Formel nicht kennt, überzeuge sich zunächst davon, dass die Funktionen

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

partikuläre Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

sind. Wir führen die Rechnung für die Funktion $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ durch. Die benötigten Ableitungen sind

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad \text{und}$$

$$y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) = e^{\alpha x}[&\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x \\ &+ a\alpha\cos\beta x - a\beta\sin\beta x + b\cos\beta x] \end{aligned}$$

Da $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

[13]Kl.E.M. S. 155 u. S. 731.

sind, gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$\begin{aligned} a &= -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(\alpha + \beta i + \alpha - \beta i) = -2\alpha \\ b &= \lambda_1 \lambda_2 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

Wir setzen diese Werte für a und b ein und erhalten

$$\begin{aligned} y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) = e^{\alpha x}[&\alpha^2 \cos\beta x - 2\alpha\beta \sin\beta x - \beta^2 \cos\beta x - 2\alpha^2 \cos\beta x \\ &- 2\alpha\beta \sin\beta x + \alpha^2 \cos\beta x + \beta^2 \cos\beta x] = 0 \end{aligned}$$

Die entsprechende Rechnung für $y_2(x)$ überlassen wir dem Leser und weisen nur noch nach, dass die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem bilden. Wir betrachten dazu deren Wronski-Determinante.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x\cos\beta x + \beta\cos^2\beta x - \alpha\sin\beta x\cos\beta x + \beta\sin^2\beta x) = e^{\alpha x}\beta \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist als Exponentialfunktion stets von Null verschieden. Wenn der zweite Faktor β gleich Null wäre, dann hätten wir $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ und damit entgegen unserer ausdrücklichen Annahme keine komplexen Lösungen. Also ist β auch von Null verschieden. (α darf den Wert Null annehmen.)
Die Wronski-Determinante ist also von Null verschieden und unsere Funktionen bilden ein Fundamentalsystem.

Beispiele:
1. $y'' - 2y' + 5y = 0$
Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.
Demnach ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

2. Wir können nunmehr zwei Beispiele des 2. Abschnittes lösen.
Für die Schwingungen einer an einer Feder aufgehängten Masse m erhielten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

k ist die "Federkonstante". Das "tanzende" Reagenzglas (Bild 5) lieferte die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Ag}{m}x$$

g Erdbeschleunigung, m Masse des Reagenzglases, A äußerer Querschnitt.
Beide Differentialgleichungen sind von der 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und lassen sich auf die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + ax = 0$$

bringen; a ist konstant und positiv. Wir lösen beide Probleme gleichzeitig. Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + a = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}i$.
Dann erhalten wir also als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{a}t + c_2 \sin\sqrt{a}t$$

Nunmehr legen wir Anfangsbedingungen fest. Die Bewegung beginnt, wenn wir nach erfolgter Auslenkung $x = d$ zur Zeit $t = 0$ die Masse an der Feder bzw. das Reagenzglas loslassen. Bis dahin sind die Körper in Ruhe. Es gilt also $x(0) = d$ und $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$.[14]

$$\begin{aligned} x(0) &= d = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \\ \dot{x}(t) &= -c_1\sqrt{a}\sin\sqrt{a}t\cos\sqrt{a}t \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $c_1 = d$ und $c_2 = 0$. Die Bewegungen verlaufen nach dem Weg-Zeit-Gesetz

$$x(t) = d\cos\sqrt{a}t$$

Sie verlaufen periodisch und infolge der vereinfachenden Annahme des Fehlens von Reibung ungedämpft. Uns interessiert noch die Schwingungszeit (T), d.h. die Dauer einer vollen Periode.
Die erste Periode ist beendet, wenn t alle Werte von $t = 0$ bis $t = T$ durchlaufen hat. Dabei muss das Argument der Funktion $\cos\sqrt{a}t$ mit Null beginnend den Wert 2π erreicht haben. Es gilt also

$$\sqrt{a}T = 2\pi \qquad \text{oder} \qquad T = 2\pi\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Bei der (linearen) Federschwingung erhalten wir damit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Führen wir Versuche mit derselben Feder, aber mit verschiedenen Massen durch, indem wir diese vergrößern, dann wächst T und die Schwingungen verlaufen langsamer.
Vergrößern wir die Federkonstante k, d.h., nehmen wir eine "strammere" Feder, dann wird T kleiner und die Schwingungen verlaufen schneller. Entsprechend ergibt sich bei dem Reagenzglas

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{m}{A}}$$

Das stärker mit Schrotkörnern belastete Glas schwingt langsamer. Wird - bei gleicher Masse - ein Glas mit größerem Querschnitt genommen, dann schwingt dieses Glas schneller.
Wir möchten unserem Leser empfehlen, das Ergebnis der Rechnung im Experiment nachzuprüfen.

[14] $\dot{x}(t)$ ist die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t: $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

11.5 Transformation einer beliebigen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung auf eine solche mit konstanten Koeffizienten

Wegen des einfachen Lösungsweges der linearen Differentialgleichungen mit konstanten, Koeffizienten, erhebt sich die Frage, ob man nicht eine Substitution finden kann, die eine Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$A(x)y'' + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.
Nehmen wir an, $x = f(t)$ sei eine geeignete Substitution, dann geht $y(x)$ in $y[f(t)] = \eta(t)$ über. Dann ist

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta'(t)}{f'(t)} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\eta'(t)}{f'(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\eta'(t)}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} && \text{(Kettenregel)} \\ &= \frac{\eta''(t)f'(t) - \eta'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\frac{1}{f'(t)} && \text{(Quotientenregel)} \\ &= \frac{\eta''(t)f'(t) - \eta'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3} \end{aligned}$$

Die ursprünglichen Koeffizienten mögen bei der Substitution in $A(a) = A^*(t)$, $B(x) = B^*(t)$ und $C(x) = C^*(t)$ übergehen, so dass wir die neue Differentialgleichung

$$\frac{A*(t)}{[f'(t)]^2}\eta''(t) + \left[\frac{B^*(t)}{f'(t)} - \frac{A^*(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}\right]\eta'(t) + C^*(t)\eta(t) = 0$$

erhalten. Die notwendigen Bedingungen für die Durchführbarkeit der Substitution lauten also, dass die Terme

$$\frac{A*(t)}{[f'(t)]^2}, \quad \frac{B^*(t)}{f'(t)} - \frac{A^*(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}, \quad \text{und} \quad C^*(t)$$

konstante Werte annehmen.

1. Beispiel: $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$
Es ist $A(x) = 4x = 4f(t)$, $B(x) = 2$ und $C(x) = -1 = C^*(t)$. Die 3. Bedingung ist also bereits erfüllt.
Aus der 1. Bedingung versuchen wir $f(t)$ zu ermitteln. Es muss gelten

$$\frac{4f(t)}{[f'(t)]^2} = \text{const} = c, \qquad [f'(t)]^2 = 4\frac{f(t)}{c}, \qquad f'(t) = \pm 2\sqrt{\frac{f(t)}{c}}$$

Da es nur um die Existenz einer Substitution $x = f(t)$ geht, setzen wir vereinfachend $f'(t) = 2\sqrt{f(t)}$. Diese Differentialgleichung 1. Ordnung lässt sich lösen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{2\sqrt{f}} = \mathrm{d}t, \qquad \sqrt{f} = t, \qquad f(t) = t^2 = x$$

Wir prüfen die 2. Bedingung. Aus $f(t) = t^2$ folgen $f'(t) = 2t$ und $f''(t) = 2$.
Dann wird der 2. Term zu

$$\frac{2}{2t} - \frac{4t^2 \cdot 2}{8t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = 0 = \text{ const} \qquad \text{für } t \neq 0$$

Damit ist eine geeignete Substitution gefunden worden. Als neue Differentialgleichung für $\eta(t)$ erhalten wir $\eta''(t) - \eta(t) = 0$. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0$ sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.
Dann ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\eta(t) = c_1 e^t + c^2 e^{-t}$$

und nach der Rücksubstitution

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{x}} + c_2 e^{-\sqrt{x}} \qquad (x > 0)$$

Für das Anfangswertproblem mit $(x_0,y_0,y_0') = (1; -2e; e)$ ergibt sich $y(x) = -2e^{-\sqrt{x}}$.

2. Beispiel: $(1 - x^2)y''(x) - (x + 3\sqrt{1 - x^2})y'(x) + 2y = 0$
Die 3. Bedingung ist bereits erfüllt.
Die 1. Bedingung führt auf die Differentialgleichung $\frac{1-f^2}{f'^2} = c$ oder $f' = \sqrt{1 - f^2}$ (vereinfacht), die wir mittels Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{1 - f^2}} = \mathrm{d}t, \qquad \arcsin f = t, \qquad f(x) = \sin t = x$$

Der Term der 2. Bedingung liefert dann mit $A(x) = A^*(x) = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$, $B(x) = B^*(t) = -\sin t - 3|\cos t|$ sowie $f'(t) = \cos t$ und $f''(t) = -\sin t$:

$$\frac{B^*(t)}{f'(t)} - \frac{A^*(t)f''(t)}{[f'(t)|^3} = \frac{-\sin t - 3|\cos t|}{\cos^3 t} - \frac{\cos^2 t(-\sin t)}{\cos^3 t} = -3$$

für $\cos t > 0$, die 2. Bedingung ist also auch erfüllt.
Damit erhält man als Differentialgleichung für $\eta(t)$

$$\eta''(t) - 3\eta'(t) + 2\eta(t) = 0$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.
Somit ergibt sich zunächst als allgemeine Lösung $\eta(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ und schließlich

$$y(x) = c_1 e^{\arcsin x} + c_2 e^{2 \arcsin x}, \qquad (-1 < x < +1)$$

3. Beispiel: Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2y}{x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad (x_0,y_0,y_0') = (-1;4;-5)$$

Die 3. Bedingung wird dadurch erfüllt, dass wir die ganze Gleichung mit x^2 $(x \neq 0)$ multiplizieren. Es ergibt sich zunächst

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Damit die 1. Bedingung erfüllt ist, muss die Differentialgleichung

$$\frac{f^2}{f'^2} = c$$

erfüllt sein. Wir lösen sie in der bekannten Weise:

$$\begin{aligned} f'(t) &= f(t) && \text{(vereinfacht)} \\ \frac{\mathrm{d}f}{f} &= \mathrm{d}t \\ \ln|f| &= t + \ln c \quad \text{mit } c > 0 \\ |f| &= ce^t \\ f(f) &= \pm e^t = x \end{aligned}$$

was wir auch schreiben können $|x| = e^t$.
Wir führen die Substitution $x = \pm e^t$ aus:

$$\frac{A^*(t)}{[f'(t)]^2} = 1\frac{B^*(t)}{f'(t)} - \frac{A^*(t)f''(t)}{[f'(t)]^3} = \frac{\pm 2e^t}{\pm e^t} - \frac{e^{2t}(\pm e^t)}{\pm e^{3t}} = -2 - 1 = -3$$

Damit ergibt sich die lineare Differentialgleichung für $\eta(t)$ mit konstanten Koeffizienten

$$\eta''(t) - 3\eta'(t) + 2\eta(t) = 0$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, so dass wir als allgemeine Lösung

$$\eta(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

erhalten. Dann ergibt die Rücksubstitution

$$y(x) = c_1|x| + c_2x^2$$

Nunmehr berücksichtigen wir die Anfangsbedingungen und erhalten aus

$$4 = c_1 + c_2 \qquad \text{und} \qquad -5 = -c_1 - 2c_2$$

$c_1 = 3$ und $c_2 = 1$. Die Funktion $y(x) = -3x + x^2$, $(x < 0)$ löst also das Anfangswertproblem.

11.6 Aufgaben

1 Welche Differentialgleichungen besitzen die angegebenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung?

a) $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -2$ Lösung: $y'' - y = 0$
b) $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -3$ Lösung: $y'' + y' - 6y = 0$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ Lösung: $y'' + 4y' + 4y = 0$
d) $\lambda_1 = 2 + i;\ \lambda_2 = 2 - i$ Lösung: $y'' - 4y' + 5y = 0$

2. a) $y'' + 6y' + 5y = 0$ Lösung: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$
b) $y'' - 10y' - 24y = 0$ Lösung: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{12x}$

3. a) $y'' + 6y' + 9y = 0$ Lösung: $y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$
b) $y'' - 2y' + y = 0$ Lösung: $y(x) = e^{x}(c_1 + c_2 x)$

4. a) $y'' - 2y' + 2y = 0$ Lösung: $y(x) = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
b) $y'' + 2y' + 10y = 0$ Lösung: $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

5. Bei welchen Funktionen ist die 2. Ableitung identisch mit dem arithmetischen Mittel aus der Funktion und der 1. Ableitung?
Lösungen: $1. y(x) = ce^{x}$; 2. $y(x) = ce^{-\frac{x}{2}}$; 3. $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}$

6. Die folgenden Differentialgleichungen sind durch eine geeignete Substitution zunächst in solche mit konstanten Koeffizienten zu verwandeln.
a) $(x-1)^2 y'' + (x-1)y' - y = 0$
Lösung: $y(x) = \frac{c_1}{x-1} + c_2(x-1)$
b) $x^4 y'' + 2x^3 y' + 9y = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 \cos \frac{3}{x} + c_2 \sin \frac{3}{x}$, $(x \neq 0)$

12 Die homogene Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung

12.1 Begriff und Bemerkung zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Im Anschluss an das letzte Beispiel des vorigen Abschnittes wollen wir nun Differentialgleichungen von der allgemeinen Form

$$a_2x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0y(x) = 0$$

betrachten. Es ist der Typ, der als "Eulersche Differentialgleichung" bezeichnet wird. Alle Glieder sind von der Form $a_nx^ny^{(n)}(x)$; die a_n sind dabei reelle Zahlen, und der Exponent der Potenz von x stimmt mit der Ordnung der Ableitung der Funktion $y(x)$ überein.

Wir stellen die Gleichung zunächst nach $y''(x)$ um. Hierbei darf a_2 von Null verschieden angenommen werden, sonst wäre die Differentialgleichung nicht von der 2. Ordnung. Es ergibt sich

$$y''(x) = -\frac{a_1}{a_2}\frac{y'(x)}{x} - \frac{a_0}{a_2}\frac{y(x)}{x^2} = f(x,y,y')$$

Auf diese Form beziehen sich die Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Die Theorie fordert dabei in gewissen Intervallen von x, y und y'.

1. die Stetigkeit der Funktion $f(x, y, y')$,
2. $|f(x,y,y')| < M$;
3. $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|-\frac{a_0}{a_2}\frac{1}{x^2}\right| < N_1$,
3. $\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = \left|-\frac{a_1}{a_2}\frac{1}{x}\right| < N_2$

Hieraus erkennt man, dass der Wert $x = 0$ ausgeschlossen werden muss. Man bezeichnet solche Differentialgleichungen als singulär, insbesondere hier als schwachsingulär, da der Exponent von x im Nenner des Gliedes mit $y'(x)$ den Wert 1 und in dem Glied mit $y(x)$ den Wert 2 nicht überschreitet.

12.2 Die Substitution $|x| = e^t$

Um die vorgelegte Differentialgleichung in eine solche mit konstanten Koeffizienten zu überführen, verwenden wir wie im letzten Beispiel des vorigen Abschnitts die Substitution

$$|x| = e^t \qquad \text{bzw.} \qquad t = \ln|x|$$

Da e^t für alle t stets positiv ist, ist damit der Wert $x = 0$ ausgeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y(\pm e^t) = \eta(t) \\ y'(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \eta'(t)\frac{1}{x} && \text{(Kettenregel)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\eta'(t)\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta'(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} + \eta'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(Produktregel)}\\
&= \frac{1}{x^2}\eta''(t) - \frac{1}{x^2}\eta'(t)
\end{aligned}
$$

Die gegebene Differentialgleichung für $y(x)$ geht damit in die Differentialgleichung für $\eta(t)$

$$a_2[\eta''(t)-\eta'(t)]+a_1\eta'(t)+a_0\eta(t) = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_2\eta''(t)-(a_1-a_2)\eta'(t)+a_0\eta(t) = 0$$

über. Sie ist linear homogen und besitzt konstante Koeffizienten, kann also nach unseren Kenntnissen aus dem vorigen Abschnitt gelöst werden. Die charakteristische Gleichung lautet

$$a_2\lambda^2 + (a_1 - a_2)\lambda + a_0 = 0$$

Beispiel: $x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$
Wir setzen $|x| = e^t$ und erhalten nach dem obigen $x^2y''(x) = \eta''(t)-\eta'(t)$ und $xy'(x) = \eta'(t)$, so dass die neue Differentialgleichung für $\eta(t)$ mit konstanten Koeffizienten

$$\eta''(t) + 6\eta'(t) + 8\eta(t) = 0$$

entsteht. Ihre charakteristische Gleichung hat die Wurzeln $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Dann ergibt sich zunächst als allgemeine Lösung für $\eta(t)$

$$\eta(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t}$$

und nach der Rücksubstitution

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^4}$$

12.3 Der Ansatz $y(x) = |x|^\lambda$

Wir möchten nunmehr unsere Leser auf einen einfacheren Ansatz hinweisen. Die bisherigen Beispiele haben in ihren Lösungen stets Potenzen von $|x|$ als partikuläre Lösungen enthalten. Wir versuchen daher sofort den Ansatz $y(x) = |x|^\lambda$ $(x \neq 0)$.

1. $x > 0$
Angenommen, $y(x) = x^\lambda$ sei eine (partikuläre) Lösung, dann ist $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ und $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$.
Wir setzen ein und erhalten

$$a_2x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + a_1x\lambda x^{\lambda-1} + a_0x^\lambda = x\lambda[a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0]$$

Dann besteht für die Richtigkeit unserer Annahme die notwendige Bedingung $a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0$, da x^λ wegen $x \neq 0$ nie verschwindet. Diese ist aber nichts anderes als die oben gefundene charakteristische Gleichung

$$a_2\lambda^2 + (a_1 - a_2)\lambda + a_0 = 0$$

Sie möge die Wurzeln λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) besitzen. Dann erhalten wir sofort die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

2. $x < 0$
Jetzt ist $|x| = -x$, und der Ansatz lautet $y(x) = (-x)^\lambda$. Die weitere Rechnung ergibt mit $y'(x) = -\lambda(-x)^{\lambda-1}$ und $y''(x) = \lambda(\lambda-1)(-x)^{\lambda-2}$ die notwendige Bedingung

$$a_2 x^2 \lambda(\lambda-1)(-x)^{\lambda-2} + a_1 x(-\lambda)(-x)^{\lambda-1} + a_0(-x)^\lambda = 0$$

und wegen $x^2 = (-x)^2$ und $x = -(-x)$

$$(-x)^\lambda [a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0] = 0$$

oder, da $x \neq 0$

$$a_2\lambda^2 + (a_1 - a_2)\lambda + a_0 = 0$$

Wie man sieht, hat sich die gleiche charakteristische Gleichung wie im Fall $x > 0$ ergeben. Ihre Wurzeln sind daher ebenfalls λ_1 und λ_2. Dann ergibt sich als allgemeine Lösung des Problems

$$y(x) = c_1(-x)^{\lambda_1} + c_2(-x)^{\lambda_2}, \qquad (x < 0)$$

Wir fassen nun beide Fälle zusammen und erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1|x|^{\lambda_1} + c_2|x|^{\lambda_2}$$

Das soll bedeuten: Haben wir ein Anfangswertproblem zu lösen mit $x_0 > 0$, so gilt als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

Ist dagegen $x_0 < 0$, so nehmen wir

$$y(x) = c_1(-x)^{\lambda_1} + c_2(-x)^{\lambda_2}$$

Beispiel: $4x^2y'' + 4xy' + \frac{1}{4}y = 0$
Die charakteristische Gleichung lautet in jedem Fall

$$4\lambda(\lambda-1) + 4\lambda - 1 = 0 \qquad , \qquad \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Als allgemeine Lösung ergibt sich

$$y(x) = c_1\sqrt{|x|} + \frac{c_2}{\sqrt{|x|}}$$

Die Anfangsbedingungen

$$a) \quad (x_0, y_0, y_0') = (4; 0; 1) \qquad \text{und} \qquad b) \quad (x_0, y_0, y_0') = (-4; 0; 1)$$

liefern die speziellen Lösungen

$$a) \qquad y(x) = 2\sqrt{x} - \frac{8}{\sqrt{x}}; \qquad (x > 0)$$

$$b) \qquad y(x) = -2\sqrt{-x} - \frac{8}{\sqrt{-x}}; \qquad (x < 0)$$

Es erhebt sich die Frage, ob sich dann die Beschäftigung mit dem zuerst behandelten Ansatz mit der Substitution $|x| = e^t$ nicht von vornherein erübrigt hätte.
Das trifft wohl für die Lösung der bisher behandelten homogenen Differentialgleichungen zu.

Bei inhomogenen Differentialgleichungen ist aber bekanntlich noch eine spezielle Lösung zu ermitteln. Der Umfang und die Schwierigkeit der Rechnung sind dabei in hohem Maße von der Form der Störfunktion $h(x)$ abhängig. Wir werden uns im nächsten Abschnitt ausführlich mit der Ermittlung der Lösungen dieser inhomogenen Differentialgleichungen beschäftigen.

12.4 Mehrfache und komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Aber auch bei der Untersuchung gewisser homogener Differentialgleichungen ist der zuerst beschriebene Lösungsweg zweckmäßig.
Wir haben noch die Fälle zu behandeln, wo die charakteristische Gleichung mehrfache oder komplexe Wurzeln hat. Da wir uns damit bereits bei den Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigt haben, können wir uns jetzt kurz fassen.

1. Wenn eine Doppelwurzel vorliegt, wenn also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ gilt, erhalten wir nach der Substitution $|x| = e^t$ die allgemeine Lösung

$$\eta(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 t e^{\lambda_0 t}$$

Wir brauchen nur die Substitution rückgängig zu machen und erhalten sofort

$$y(x) = c_1 |x|^{\lambda_0} + c_2 |x|^{\lambda_0} \ln|x| = |x|^{\lambda_0}(c_1 + c_2 \ln|x|)$$

Liegt demnach eine Doppelwurzel vor mit der 1. partikulären Lösung $y_1(x)$, so erhält man die 2. partikuläre Lösung dadurch, dass man $y_1(x)$ mit dem Faktor $\ln|x|$ versieht: $y_2(x) = y_1(x)\ln|x|$.

2. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung seien komplex: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ und $\lambda_2 = a - \beta i$.
Dann erhalten wir mit der Substitution $|x| = e^t$

$$\eta(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)t}$$

oder in der reellen Form

$$\eta(t) = e^{\alpha t}[A\cos\beta t + B\sin\beta t]$$

Die Rücksubstitution liefert

$$y(x) = |x|^\alpha [A\cos(\beta \ln |x|) + B\sin(\beta \ln |x|)]$$

Beispiel: 1. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$,
Der Ansatz $y(x) = |x|^\lambda$ führt zu der charakteristischen Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 4 = 0 \qquad , \qquad (\lambda - 2)^2 = 0$$

Wir sind nunmehr in der Lage, die allgemeine Lösung sofort anzugeben:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln |x|$$

2. $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$
Man erhält als charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 3 = 0 \qquad , \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2}$ und $\lambda_1 = -1 - i\sqrt{2}$. Die allgemeine Lösung des Problems ist daher

$$y(x) = \frac{1}{|x|}[A\cos\sqrt{2}\ln |x| + B\sin\sqrt{2}\ln |x|]$$

Die Eulersche Differentialgleichung tritt in bestimmten Gebieten der Technischen Mechanik auf.

Bemerkungen:
1. Ist in $a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$ die Funktion $y = f(x)$ Lösung und ist diese in der ganzen x, y-Ebene mit Ausnahme von $x = 0$ definiert, so ist $f(-x)$ ebenfalls Lösung.

Aus $y = f(-x)$ folgt $y' = -f(-x)$ sowie $y'' = f''(-x)$ und durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} a^2 x^2 f''(-x) + a_1 x[-f'(-x)] + a_0 f(-x) &= a^2(-x)^2 f''(-x) + a_1(-x) f'(-x) + a_0 f(-x) \\ &= a^2 \xi^2 f''(\xi) + a_1 \xi f'(\xi) + a_0 f(\xi) \end{aligned}$$

wenn wir $-x = \xi$ setzen, da nach der Voraussetzung $f(x)$ für alle x außer $x \neq 0$ Lösung sein soll.
Ist aber die Lösung $y = (x)$ nur in einer Halbebene definiert, z.B. für $x > 0$, so ist auch $y = f(-x)$ Lösung und zwar nur in der linken Halbebene (vgl. das letzte Beispiel und die Aufgaben 6 bis 8).

2. Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der obigen Differentialgleichung natürliche Zahlen, so braucht der Wert $x = 0$ in Abmilderung der weitergehenden Bedingungen für die Existenz der Lösungen nicht mehr ausgeschlossen zu werden (vgl. die Aufgaben 1 und 2), wohl aber für die Eindeutigkeit.

12.5 Aufgaben

1. $x^2y'' - xy' = 0$; Lösung: $y(x) = c_1 + c_2x^2$

2. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$; Lösung: $y(x) = c_1|x| + c_2|x|^3$ oder einfacher $y(z) = C_1x + C_2x^3$

3. $xy'' - 4y' + 6\frac{y}{x} = 0$
Lösung: $y(x) = c_1|x|^2 + c_2|x|^3$ oder einfacher $y(x) = C_1x^2 + C_2x^3$ $(x \neq 0)$
Anleitung: Zunächst die Differentialgleichung mit $x \neq 0$ multiplizieren!

4. $x^2y'' + xy' - n^2y = 0$ $(n \geq 1$, ganz); Lösung: $y(x) = c_1|x|^n + c_2|x|^{-n}$

5. $x^2y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0$, $(n \geq 1$, ganz); Lösung: $y(x) = c_1|x|^n + c_2|x|^{n-1}$

6. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
a) $(x_0,y_0,y_0') = (1; 0; 0)$, b) $(x_0,y_0,y_0') = (1; 0; 1)$,
c) $(x_0,y_0,y_0') = (1; 1; 1)$, d) $(x_0,y_0,y_0') = (1; 1; 2)$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1|x| \cos \ln |x| + c_2|x| \sin \ln |x|$
Lösungen der Anfangswertprobleme:
a) $y(x) \equiv 0$, b) $y(x) = x \sin \ln x$, c) $y(x) = x \cos \ln x$, d) $y(x) = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$

7. $2x^2y'' - xy' + y = 0$, $x_0,y_0,y_0') = (-1; 1; 1)$
Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1\sqrt{|x|} + c_2|x|$
Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = 4\sqrt{-x} + 3x$

8. $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(x_0,y_0,y_0') = (-1; 1; 1)$
Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1|x| + c_2|x| \ln |x|$
Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = -x - 2x \ln(-x)$

9. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$, $(x_0,y_0,y_0') = (-1; 1; 1)$
Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cos \ln x^2 + c_2 \sin \ln x^2$
Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = \cos \ln x^2 - \frac{1}{2} \sin \ln x^2$

13 Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

13.1 Spezielle Formen der Störfunktion

Wenn die Störfunktion $h(x)$ nicht identisch verschwindet, dann ist die Differentialgleichung inhomogen und es muss noch eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung bestimmt werden.
Zunächst betrachten wir spezielle Formen von $h(x)$.

Liegt die Differentialgleichung $y'' - y' - 6y = e^x$ vor, so ist die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

Zur Bestimmung einer Funktion $y_p(x)$, die die inhomogene Differentialgleichung löst, bedenken wir, dass die Ableitungen von e^x wieder die Exponentialfunktion e^x sind.
Wir vermuten daher ein Vielfaches von e^x als Lösung und setzen an: $y_p(x) = Ae^x$. (A eine konstante reelle Zahl). Bilden wir die Ableitungen und setzen ein, so ergibt sich

$$Ae^x - Ae^x - 6Ae^x \equiv e^x$$

als notwendige Bedingung, die A erfüllen muss. Da $e^x > 0$ ist, reduziert sie sich auf $-6A = 1$ mit $A = -\frac{1}{6}$.
Dann kann nur $y_p(x) = -\frac{1}{6}e^x$ gelten. Diese Funktion ist in der Tat Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet dann

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2^{3x} - e^x$$

Wir lösen jetzt

$$y'' - y' - 6y = 2\sin x$$

Eine Überlegung, ähnlich der obigen, führt jetzt zu der Vermutung, dass eine Funktion von der Form

$$y_p(x) = A\sin x + B\cos x$$

die inhomogene Differentialgleichung lösen könnte.
Wir bilden die Ableitungen und setzen ein. Dann muss, wenn unser Ansatz richtig ist,

$$-A\sin x - B\cos x - A\cos x + B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x \equiv 2\sin x$$

gelten. Geordnet ergibt das

$$(-7A + B)\sin x + (-7B - A)\cos x = 2\sin x$$

Diese Identität kann nur durch

$$-7A + B = 2 \qquad \text{und} \qquad -A - 7B = 0$$

nach Koeffizientenvergleich erfüllt werden. Das ergibt für die unbestimmten Koeffizienten

$$A = -\frac{7}{25} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{25}$$

und als spezielle Lösung

$$y_p(x) = -\frac{7}{25}\sin x + \frac{1}{25}\cos x$$

wie man leicht nachweist. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{25}(7\sin x + \cos x)$$

Nun soll $h(x) = 2x^2 - 5$ sein. Der Term auf der linken Seite der Differentialgleichung soll als Summe einer Funktion und ihrer Ableitungen, jeweils mit gewissen Koeffizienten versehen, ein Polynom 2. Grades ergeben. Daher setzen wir an

$$y_p(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

Wir bilden die Ableitungen, setzen ein, ordnen und erhalten die zu erfüllende Identität

$$-6A_2 x^2 - (6A_1 + 2A_2)x - (6A_0 + A_1 - 2A_2) \equiv 2x^2 - 5$$

Sie kann (für alle x) nur erfüllt werden, wenn gilt

$$\begin{aligned} -6A_2 &= 2 \\ 6A_1 + 2A_2 &= 0 \\ 6A_0 + A_1 - 2A_2 &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(Koeffizientenvergleich)}$$

Dann ergibt sich $A_2 = -\frac{1}{3}$, $A_1 = \frac{1}{9}$ und $A_0 = \frac{19}{27}$. Die Funktion

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{19}{27}$$

löst die Differentialgleichung, so dass wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{19}{27}$$

erhalten. Eine Verallgemeinerung aus den bisherigen Beispielen wäre indessen verfrüht.

13.2 Der Resonanzfall

Wir lösen die Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 6e^{2x}$$

Die charakteristische Gleichung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung hat die Doppelwurzel $\lambda_0 = 2$. Es ergibt sich also

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Man beachte, dass $h(x)$ die gleiche Exponentialfunktion e^{2x} wie $y_H(x)$ enthält. Der Leser möge jetzt selbst die Ansätze $y_{p_1} = Ae^{2x}$ und $y_{p_2} = Axe^{2x}$ ausprobieren.
Da beide Funktionen partikuläre Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind, wird der Term auf der linken Seite beim Einsetzen stets verschwinden, woraus sich wegen $0 \neq 6e^{2x}$ ergibt, dass die Ansätze nicht zum Ziel führen.

Wir nehmen statt dessen den Ansatz $y_p(x) = Ax^2e^{2x}$. Nach dem Einsetzen ergibt sich als notwendige Bedingung

$$4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x} - 8Axe^{2x} - 8Ax^2e^{2x} + 4Ax^2e^{2x} \equiv 6e^{2x}$$

$$2Ae^{2x} \equiv 6e^{2x} \qquad , \qquad A = 3$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + 3x^2e^{2x}$$

Die Störfunktion hatte die Form $h(x) = ce^{\alpha x}$. Die Übereinstimmung der in der Lösung auftretenden Exponentialfunktionen kam dadurch zustande, dass α Wurzel - sogar Doppelwurzel - der charakteristischen Gleichung war. Dieser Fall wird als Resonanzfall bezeichnet.

Wäre α einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung gewesen, so hätten wir $y_p(x) = Ax^1e^{2x}$ ansetzen müssen.
In der Differentialgleichung $y''(x) + y(x) = -2\cos x$ ist

$$y_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Auch hier liegt wegen des 1. Summanden der Resonanzfall vor. Wir setzen daher an:

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x$$

Die notwendige Bedingung lautet dann

$$-2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x \equiv -2\cos x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x \equiv -2\cos x$$

woraus sich $A = 0$, $B = -1$ ergibt. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - x\sin x$$

Zusammenfassung und Verallgemeinerung:

1. Ist $h(x) = ae^{\alpha x}$, so setzt man $y_p(x) = Ae^{\alpha x}$ an.
2. Ist $h(x) = a\cos x$ oder $b\sin x$, so lautet der Ansatz

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

3. Ist $h(x)$ ein Polynom $P_n(x)$, so setzt man ein Polynom vom gleichen Grade mit unbestimmten Koeffizienten an:

$$y_p(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1x + A_0$$

Liegt der Resonanzfall vor, kommt also mindestens eine der partikulären Lösungen von $y_H(x)$ in $h(x)$ vor, so ist die angesetzte Funktion mit x oder x^2 zu multiplizieren, je nachdem die entsprechende Wurzel der charakteristischen Gleichung einfach oder doppelt ist.

13.3 Variation der Konstanten

Wie verfahren wir nun bei der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad (x \neq k\pi)$$

Das zu erläuternde Lösungsverfahren hat allgemeine Bedeutung und wird Variation der Konstanten genannt. Im 5. Abschnitt tauchte dieser Begriff bereits im Zusammenhang mit der Lösung von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf.
Er wird jetzt sinngemäß auf entsprechende Probleme 2. Ordnung übertragen.

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist

$$y_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Wir machen jetzt einen Ansatz für die spezielle Lösung $y_p(x)$; indem wir nach Lagrange die Konstanten c_1 und c_2 durch die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ ersetzen.
Gelingt die Bestimmung dieser beiden Funktionen, dann haben wir eine brauchbare Methode gefunden. Wir bilden zunächst die Ableitungen von

$$y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

Es ist

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cos x - c_1(x) \sin x + c_2'(x) \sin x + c_2(x) \cos x$$

Würden wir weiter ableiten, so müssten Ableitungen zweiter Ordnung auftreten. Wir vermeiden dies und schaffen gleichzeitig eine zweite Gleichung zur Bestimmung der beiden hypothetisch angenommenen Funktionen, indem wir $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$ so gewählt denken, dass $c_1(x) \cos x + c_2'(x) \sin x \equiv 0$.
Dann nimmt die 1. Ableitung die einfachere Form

$$y_p' = -c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$$

an, und die 2. Ableitung lautet:

$$y_p''(x) = -c_1'(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2'(x) \cos x - c_2(x) \sin x$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$-c_1'(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2'(x) \cos x - c - 2(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \equiv \frac{1}{\sin x}$$

also

$$-c_1'(x) \sin x + c_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

Wir haben damit ein lineares Gleichungssystem für die 1. Ableitungen der Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ erhalten:

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2' \cos x &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Die Lösbarkeit dieses Systems ist die notwendige Bedingung sowohl für die Brauchbarkeit des Ansatzes als auch für die Zweckmäßigkeit der in der 1. Gleichung ausgedrückten Festsetzung.
Die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems hat den Wert

$$D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

und ist daher von Null verschieden; sie ist außerdem gleich der Wronski-Determinante der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
Das deutet darauf hin, dass der Ansatz mit jeder allgemeinen Lösung einer zugehörigen homogenen Differentialgleichung in dieser Weise zum Erfolg führt. Die weitere Rechnung ergibt:

$$c_1'(x) = -\sin x \frac{1}{\sin x} = -1 \qquad , \qquad c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Dann erhalten wir durch unbestimmte Integrationen

$$c_1(x) = -x \qquad , \qquad c_2(x) = \ln|\sin x|$$

(Integrationskonstanten gleich Null gesetzt).
Wir setzen diese Ergebnisse in den Ansatz ein und bekommen

$$y_p(x) = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

und damit die vollständige Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x| \quad (x \neq k\pi)$$

Die Probe überlassen wir dem Leser.

Die beschriebene Lösungsmethode ist auch bei Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten brauchbar. Nehmen wir an, dass zur Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$$

die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bekannt ist:

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Das bedeutet, dass die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, und dass die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.
Setzen wir die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

an, so erhalten wir mit der Zusatzbedingung

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) \equiv 0 \qquad , \qquad y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

und hieraus

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

Wir setzen in die gegebene Differentialgleichung ein, und so ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)] + c_2'(x)y_2'(x) \\ + c_2(x)[y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)] = h(x) \end{aligned}$$

Da $y_1(x)$ und $y_2(x)$ als partikuläre Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung vorausgesetzt wurden, sind die Terme in den Klammern identisch Null. Wir erhalten damit das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem für $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= h(x) \end{aligned}$$

Seine Koeffizientendeterminante ist die von Null verschiedene Wronski-Determinante. $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$ sind bestimmbar. Wir erhalten

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)h(x)}{W(x)} \qquad \text{und} \qquad c_2'(x) = -\frac{y_1(x)h(x)}{W(x)}$$

Aus Stetigkeitsbetrachtungen über die Terme auf den rechten Seiten ergibt sich die Integrierbarkeit, so dass in jedem Fall $c_1(x)$ und $c_2(x)$ durch Integrale angegeben werden können.
Die Probe bestätigt, dass alle notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.

Für die Leser, die mit der Matrizenrechnung vertraut sind, möchten wir noch bemerken, dass sich das gefundene inhomogene Gleichungssystem mit Hilfe von Matrizen auch so schreiben lässt:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass es sich auf die "Normalform"

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$$

bezieht, wo also der Koeffizient der höchsten Ableitung den Wert 1 hat.

Weitere Beispiele:
1. $x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $(x > 0)$
Die Eulersche Differentialgleichung, die sich für $h(x) = 0$ ergibt, lässt sich leicht mit dem Ansatz $y_H(x) = |x|^\lambda$ lösen. Aus der charakteristischen Gleichung $\lambda(\lambda-1)+\lambda-4 = \lambda^2 - 4 = 0$ ergibt sich $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist also

$$y_H(x) = c_1 x^2 + \frac{c^2}{x^2}$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen wir durch die Methode der Variation der Konstanten. Wir stellen die "Normalform" her:

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{4y}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

und setzen an

$$y_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)\frac{1}{x^2}$$

In Matrizenform erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x^2} \\ 2x) & -\frac{2}{x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich:

$$c_1'(x) = \frac{-1/x^4\sqrt{x}}{-4/x} = \frac{1}{4}x^{-\frac{7}{2}} \qquad \text{und} \qquad c_2'(x) = \frac{1/\sqrt{x}}{-4/x} = -\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}$$

und schließlich

$$c_1(x) = -\frac{1}{10}x^{-\frac{5}{2}} \qquad \text{und} \qquad c_2(x) = -\frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$$

sowie

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{15}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist demnach

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{4}{15}\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

2. $4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 3\ln^2 x$
Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist eine Eulersche. Bei dieser besonderen Form der Störfunktion ist die Substitution $|x| = e^t$ zweckmäßig. Da die rechte Seite nur für $x > 0$ definiert ist, setzen wir sofort $x = e^t$. Dann gilt

$$x^2y''(x) = \eta''(t) - \eta'(t) \qquad \text{und} \qquad xy'(x) = \eta'(t)$$

so dass unsere Differentialgleichung in

$$4(\eta''(t) - \eta'(t)) + 4\eta'(t) - \eta(t) = 3t^2 \qquad , \qquad 4\eta''(t) - \eta(t) = 3t^2$$

übergeht. Wir lösen zunächst

$$4\eta''(t) - \eta(t) = 0$$

Es ist
$$\eta_H(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}$$
Die Störfunktion ist ein Polynom 2. Grades in t. Wir setzen daher an

$$\eta_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

Es ergibt sich
$$\eta_p'(t) = A_1 + 2A_2 t \qquad \text{und} \qquad \eta_p''(t) = 2A_2$$
Dann erhalten wir durch Einsetzen zunächst die Identität

$$8A_2 - A_0 - A_1 t - A_2 t^3 \equiv 3t^2$$

woraus folgt $A_2 = -3$, $A_1 = 0$, $A_0 = -24$.
Mithin ist $\eta_p(t) = -3t^2 - 24$, und die allgemeine Lösung lautet

$$\eta(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} - 3t^2 - 24$$

Nun führen wir wieder x anstelle von e^t ein und erhalten als allgemeine Lösung unseres ursprünglichen Problems

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{\sqrt{x}} - 24 - 3\ln^2 x \quad (x > 0)$$

Der Ansatz von $y(x) = x^\lambda$ führt leicht zu

$$y_H = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$$

Die Bestimmung von $y_p(x)$ ist dagegen nur nach der Methode der Variation der Konstanten möglich, was zu langwierigen Rechnungen führt. Man erhält

$$c_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}(\ln^2 x + 4\ln x + 8) \qquad \text{und}$$

$$c_2 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}(\ln^2 x - 4\ln x + 8)$$

und.damit auch
$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\frac{c_2}{\sqrt{x}} - 24 - 3\ln^2 x$$
Das Beispiel zeigt, dass es vorteilhaft ist, beide Lösungsmöglichkeiten der Eulerschen Differentialgleichung zu kennen.

3. $2x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x$
Mit dem Ansatz $y(x) = |x|^\lambda$ erhalten wir als Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Demnach ist $y_H(x) = c_1|x| + c_2\sqrt{|x|}$. Die Störfunktion $h(x) = x$ ist also eine partikuläre Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (Resonanzfall). Hätten wir

mit der Substitution $|x| = e^t$ gearbeitet, dann müssten wir $\eta(t) = Ate^t$ ansetzen. Entsprechend lautet jetzt unser Ansatz

$$y_p(x) = Ax \ln |x|$$

Setzen wir in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$2Ax - Ax \ln |x| - Ax + Ax \ln |x| \equiv x$$

woraus $A = 1$ folgt. Damit ergibt sich die Lösung

$$y(x) = c_1|x| + c_2\sqrt{|x|} + x \ln x$$

4. $y'' - 2y' = 3x^2$
Wir setzen $y'(x) = p(x)$ und lösen die Differentialgleichung in dieser Form:

$$p'(x) - 2p(x) = 3x^2$$

Die Lösung von $p'(x) - 2p(x) = 0$ ist $p_H(x) = ce^{2x}$.
Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzen wir als Polynom $p^*(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$ an. Ist dieser Ansatz geeignet, dann müsste gelten

$$p' * (x) - 2p^*(x) = A_1 + 2A_2x - 2A_1x - 2A_2x^2 \equiv 3x^2$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A_2 = -\frac{3}{2}$, $A_1 = -\frac{3}{2}$, $A_0 = -\frac{3}{4}$. Also ist die allgemeine Lösung

$$p(x) = ce^{2x} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Hieraus folgt durch (unbestimmte) Integration

$$y(a) = c_1e^{2x} + c_2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die zugehörige homogene Differentialgleichung zu lösen:

$$y_H(x) = c_1e^{2x} + c_2$$

und die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten zu ermitteln oder durch den Ansatz mit einem Polynom dritten(!) Grades mit unbestimmten Koeffizienten. Diese Rechnungen möge der Leser als Aufgabe selbständig durchführen.

13.4 Aufgaben

1. $y'' - 2y' + y = x^3 - x^2 + x - 1$
Lösung: $y(x) = e^x(c_1 + c_2x) + x^3 + 5x^2 + 15x + 19$

2. $y'' - y = \cos 3x$
Lösung: $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{10}\cos 3x$

3. $y'' + y' - 2y = 3e^x$
Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + xe^x$ (Resonanzfall!)

4. $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = e^x(x^2 + x)$
Lösung : $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-x} + e^x(x^2 - 4x + 8)$
Anleitung: $y_p(x) = e^x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$ ansetzen!

5. $y'' + y = e^x \sin x$
Lösung: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{5}e^x(2\cos x - \sin x)$

6. $x^2 y'' - 3xy' = \frac{1}{x}$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x^2 - \frac{8}{3}\sqrt{x}$

7. $x^2 y + 3xy' = \frac{1}{x}$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

8. Man bestimme eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $x^2 y'' + axy' + by = kx^r$ (a, b, k, r reelle Zahlen) mit dem Ansatz $y_p(x) = Ax^r$.
Lösung: $A = \frac{k}{f(r)}$ ($f(r) \neq 0$), wenn $f(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung ist. Man prüfe damit die Ergebnisse der 6. und 7. Aufgabe nach!

9. $x^2 y'' + xy' - y = 2x^2 \sin x$
Lösung: $y(x) = c_1|x| + c_2 \frac{1}{|x|} - 2\sin x - \frac{2}{x}\cos x$

10. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x \ln x$
Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 - \frac{x}{2}(\ln^2 x + \ln x^2 + 2)$; $(x > 0)$

14 Geometrische Deutung der (expliziten) Differentialgleichung 2. Ordnung

14.1 Ein graphisches Näherungsverfahren

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y, y')$, $y(x0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$.
Die Funktion $f(x, y, y')$ möge die Voraussetzungen erfüllen, die gewährleisten, dass eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Dann existiert also eine bestimmte Lösungskurve durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$, und sie hat dort den Anstieg $y'(x_0)$. Außerdem liefert die Differentialgleichung einen bestimmten Wert für die 2. Ableitung $y''(x_0)$.
Rufen wir uns die Formel für die Krümmung einer Kurve[15]

$$K(x) = \frac{y''(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}^3}$$

ins Gedächtnis zurück, so folgt aus dem Gesagten, dass an der Stelle x_0 durch die Differentialgleichung und die Anfangswerte die Krümmung der Kurve bestimmt ist. Damit hat auch der Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{|K|} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}^3}{|y''|}$$

einen bestimmten Wert. Ein Anfangswertproblem der Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ legt also - bei Erfüllung gewisser Voraussetzungen - eine bestimmte Kurve fest, für die im Anfangspunkt P_0 der Anstieg und die Krümmung vorgeschrieben sind, während die Differentialgleichung den weiteren Verlauf bestimmt.

Beispiel: $y''(x) = x + y'(x)$; $(x_0,y_0y'_0) = (0; 2; 1)$
Das Anfangswertproblem hat die Lösung $y(x) = 2e^x - x - \frac{x^2}{2}$.
Im Punkt $P_0(0; 2)$ ist $y''(x_0) = y''(0) = 1 > 0$.
Die Kurve ist nach unten gekrümmt ("Minimumtyp"). Der Wert der Krümmung beträgt

$$K(0) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

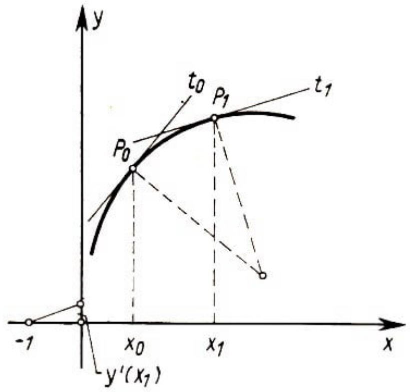
Der Krümmungsradius hat also die Maßzahl $\rho = \sqrt{8}$.
Mit dem Anfangswert $(x_0,y_0,y'_0) = (0; 0; -1)$ ergibt sich bei derselben Differentialgleichung die Lösung $y(x) = -x - \frac{x^2}{2}$.
Punkt $P_0(0; 0)$ ist $y''(0) = -1 < 0$. Die Kurve ist in diesem Punkt nach oben gekrümmt ("Maximumtyp"). Die Werte für die Krümmung und den Krümmungsradius sind

$$K(0) = -\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \text{und} \qquad \rho = \sqrt{8}$$

[15] KLE. M. S.445.

Wir können mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse ein Näherungsverfahren entwickeln. Nehmen wir an, dass wir die Lösung des Anfangswertproblems $y'' = f(x, y, y')$ mit (x_0, y_0, y'_0) in dem Intervall $a \leq x \leq b$ brauchen. Wir zerlegen das Intervall in n Teile, die nicht unbedingt gleich sein müssen. Die Teilpunkte seien $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$.

Durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ zeichnen wir ein Stück der Tangente t_0, an die Lösungskurve mit dem Anstieg $y'(x_0) = y'_0$. Ferner berechnen wir den Krümmungsradius ρ_0.
Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt auf der in P_0 auf t_0 errichteten Senkrechten im Abstand ρ_0 von P_0. Das Vorzeichen der Krümmung bestimmt, nach welcher Seite abgetragen wird.



Im Bild 26 wurde $y''(x_0)$ und damit $K(x_0)$ negativ angenommen. Wir ersetzen nun die eigentliche Integralkurve durch den Krümmungskreis.

Durch die Stelle x_1, die im Interesse der Genauigkeit der Näherung genügend nahe bei x_0 liegen soll, zeichnen wir die Parallele zur y-Achse bis zum (oberen) Schnittpunkt mit dem Krümmungskreis K_0. Wir erhalten so einen Näherungswert y_1 für $y(x_1)$ und einen der Lösungskurve angenäherten Punkt P_1.
In P_1 legen wir die Tangente an K_0. Ihr Anstieg sei y'_1. Dann ist $y''(x_1)$ berechenbar und damit der Krümmungsradius für den nächsten Näherungskreis K_1.

So erhalten wir fortschreitend eine Näherung der Lösungskurve, die sich aus lauter Kreisbogenstücken zusammensetzt.
Als Beispiel und Übungsaufgabe geben wir das Anfangswertproblem

$$y'' = -\sqrt{1-(y')^2} \quad \text{mit} \quad (x_0,y_0,y'_0) = (0;1;0)$$

Man ermittle graphisch den Wert $y(1)$! Der exakte Wert ist $y(1) = 0{,}5402$.

15 Ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung expliziter Differentialgleichungen 2. Ordnung

Das Eulersche Streckenzugverfahren aus dem 7. Abschnitt ersetzte die Lösungskurve durch aneinandergereihte Geradenstücke. Wir verfeinern dieses Verfahren, indem wir die Lösungskurve durch Stücke quadratischer Parabeln ersetzen.

Zu lösen ist das Anfangswertproblem $y'' = f(x,y,y')$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$. Unter den Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist $y''(x_0) = f(x_0,y_0,y_0') = y_0''$ berechenbar.
Nun setzen wir die Gleichung einer quadratischen Parabel

$$F(x) = A(x - x_0)^2 + B(x - x_0) + C$$

an mit den unbestimmten Koeffizienten A, B und C und bestimmen diese so, dass $F(x_0) = y_0$, $F'(x_0) = y_0'$ und $F''(x_0) = y_0''$ wird. Wegen $F'(x) = 2A(x - x_0) + B$ und $F''(x) = 2A$ ist dann

$$F(x_0) = C = y_0, \qquad F'(x_0) = B = y_0', \qquad F''(x_0) = 2A = y_0''$$

so dass wir als Gleichung der Näherungsparabel durch P_0

$$F(x) = \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2 + y_0'(x - x_0) + y_0$$

erhalten. An der Stelle x_0 liefert $F(x)$ den genauen Wert für die Lösung. Wir setzen $x_0 = a$ und wollen einen angenäherten Wert an der Stelle $x = b$ $(b > a)$ errechnen.

Zu diesem Zweck teilen wir die Länge des Intervalls $a \leq x \leq b$, wie im vorigen Abschnitt in n Teile, so dass wir wieder die Teilpunkte $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n = b$ erhalten. Bei äquidistanter Einteilung mit $\frac{b-a}{n} = h$ ist

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad ..., \quad x_\nu = a + 2r, \quad ..., \quad x_n = x_0 + nh = b$$

An der Stelle $x_1 = x_0 + h$ hergeben sich aus der Parabel die Werte

$$F(x_1) = \frac{y_0''}{2}(x_1 - x_0)^2 + y_0'(x_1 - x_0) + y_0 = \frac{y_0''}{2}h^2 + y_0'h + y_0 = y_1$$
$$F'(x_1) = y_0''(x_1 - x_0) + y_0' = y_0''h + y_0' = y_1'$$

und aus der Differentialgleichung $f(x_1,y_1,y_1') = y_1''$.
Wir beginnen von neuem, setzen wieder unbestimmt an

$$F(x) = A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C$$

und erhalten analog

$$F(x_2) = \frac{y_1''}{2}h^2 + y_1'; \qquad F'(x_2) = y_1''h + y_1'; \qquad f(x_2, y_2, y_2') = y_2''$$

So setzen wir die Rechnung fort und erhalten allgemein

$$\begin{aligned} F(x_{\lambda+1}) &= \frac{1}{2}y''_\lambda h^2 + y'_\lambda + y_\lambda = y\lambda + 1 \\ F'(x_{\lambda+1}) &= y''_\lambda h + y'_\lambda = y'_{\lambda+1} \quad (\lambda = 0{,}1{,}2{,}...{,}n-1) \\ f(x_{\lambda+1}, y_{\lambda+1}, y'_{\lambda+1}) &= y''_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1{,}2{,}...{,}n) \end{aligned}$$

Als Beispiel wählen wir die Aufgabe des vorigen Abschnitts.
Wir lösen $y'' = -\sqrt{1-(y')^2}$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ näherungsweise und bestimmen einen angenäherten Wert für $y(1)$. Unsere Rechnung beschränkt sich also auf das Intervall $0 \leq x \leq 1$.
Wir teilen das Intervall in 10 gleiche Teile, setzen daher $h = 0{,}1$. Der Gang der Rechnung ist aus der Tabelle ersichtlich.

λ	x_λ	y_λ	y'_λ	y''_λ	genauer Wert	Abweichung
0	0	1	0	-1	1	0
1	0,1	0,9950	-0,1	-0,9950	0,9950	0
2	0,2	0,9800	-0,1995	-0,9799	0,9801	-0,0001
3	0,3	0,9552	-0,2975	-0,9547	0,9554	-0,0002
4	0,4	0,9207	-0,3930	-0,9196	0,9211	-0,0004
5	0,5	0,8768	-0,4850	-0,8745	0,8776	-0,0008
6	0,6	0,8239	-0,5724	-0,8200	0,8253	-0,0014
7	0,7	0,7626	-0,6544	-0,7562	0,7648	-0,0022
8	0,8	0,6932	-0,7300	-0,6834	0,6967	-0,0033
9	0,9	0,6170	-0,7983	-0,6022	0,6215	-0,0045
10	1,0	0,9342	-	-	0,5402	-0,0060

Man beachte

$$\begin{aligned} \frac{y''_\lambda}{2}h^2 + 3y'_\lambda h + y_\lambda &= y_{\lambda+1} \\ y''_\lambda h + y'_\lambda &= y'_{\lambda+1} \\ -\sqrt{1-(y'_{\lambda+1})^2} &= y''_{\lambda+1} \end{aligned}$$

Mit der Verkleinerung der Schrittweite h wächst die Genauigkeit. Dem Leser, der die Taylor-Formel[16] kennt, wird aufgefallen sein, dass die Näherungsparabeln nichts anderes als die Entwicklungen der gesuchten Funktion nach dem Taylorschen Satz mit den Entwicklungsmittelpunkten $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ bis zum quadratischen Glied (ohne Restglied) darstellen.

[16] Kl. E.M. S. 502

16 Differentialgleichungen von höherer als 2. Ordnung

16.1 Zur allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung höherer Ordnung

Nach den vorangegangenen Ausführungen über die Differentialgleichungen 2. Ordnung ist es nicht mehr schwer, Differentialgleichungen höherer Ordnung zu lösen.

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{(4)} \ln x + \frac{4}{x} y''' - \frac{6}{x^2} y'' + \frac{6}{x^3} y = 120x$$

Die linke Seite ist nichts anderes als die 4. Ableitung von $y \ln x$. Dann erhalten wir durch viermalige unbestimmte Integration

$$y \ln x = x^5 + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

und damit die Lösung für $x > 0$, $x \neq 1$

$$y(x) = \frac{x^5}{\ln x} + \frac{c_1 x^3}{6 \ln x} + \frac{c_2 x^2}{2 \ln x} + \frac{c_3 x}{\ln x} + \frac{c_4}{\ln x}$$

Sie enthält vier willkürlich wählbare Integrationskonstanten. Wir vermuten daher, dass

$$y_H(x) = \frac{1}{\ln x} (c_1^* x^3 + c_2^* x^2 + c_3^* x + c_4^*)$$

die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Sie setzt sich aus vier partikulären Lösungen zusammen, was der Leser selbst durch Einsetzen bestätigen möge.
Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist vermutlich

$$y_H(x) = \frac{x^5}{\ln x}$$

was der Leser ebenfalls untersuchen möge.
Da wir vier willkürliche Konstanten erhalten haben, können wir 4 Bedingungen vorschreiben. Bei einem Anfangswertproblem wären das die Werte $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ und $y'''(x_0)$.

Verdient $y_H(x) = \frac{1}{\ln x}(c_1^* x^3 + c_2^* x^2 + c_3^* x + c_4^*)$ die Bezeichnung allgemeine Lösung, so müssten sich die Konstanten c_ν^* so bestimmen lassen, dass die Anfangsbedingungen - unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches von $y(x)$ und seiner Ableitungen - erfüllt sind.
Setzen wir zur Abkürzung

$$y_1(x) = \frac{x^3}{\ln x}, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad y_3(x) = \frac{x}{\ln x}, \quad y_4(x) = \frac{1}{\ln x}$$

dann ist mit

$$
\begin{aligned}
y_H(x) &\equiv c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + c_4y_4(x) \\
y'_H(x) &\equiv c_1y'_1(x) + c_2y'_2(x) + c_3y'_3(x) + c_4y'_4(x) \\
y''_H(x) &\equiv c_1y''_1(x) + c_2y''_2(x) + c_3y''_3(x) + c_4y''_4(x) \\
y'''_H(x) &\equiv c_1y'''_1(x) + c_2y'''_2(x) + c_3y'''_3(x) + c_4y'''_4(x)
\end{aligned}
$$

Die Erfüllung der Anfangsbedingungen liefert für die c_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ das inhomogene Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + c_3y_3(x_0) + c_4y_4(x_0) &= y_H(x_0) = y_0 \\
c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) + c_3y'_3(x_0) + c_4y'_4(x_0) &= y'_H(x_0) = y'_0 \\
c_1y''_1(x_0) + c_2y''_2(x_0) + c_3y''_3(x_0) + c_4y''_4(x_0) &= y''_H(x_0) = y''_0 \\
c_1y'''_1(x_0) + c_2y'''_2(x_0) + c_3y'''_3(x_0) + c_4y'''_4(x_0) &= y'''_H(x_0) = y'''_0
\end{aligned}
$$

Die Theorie der linearen Algebra fordert für die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems das Nichtverschwinden der Koeffizientendeterminante, die nichts anderes als die Wronski-Determinante ist:

$$
D = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & y'_3(x) & y'_4(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & y''_3(x) & y''_4(x) \\ y'''_1(x) & y'''_2(x) & y'''_3(x) & y'''_4(x) \end{vmatrix} \neq 0
$$

Wäre auch nur eine der partikulären Lösungen $y_\nu(x)$ von einer oder mehreren der anderen partikulären Lösungen linear abhängig, z.B.

$$
y_1(x) = ay_2(x) + by_3(x) + cy_4(x)
$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind, die nicht alle gleichzeitig Null sind, dann würde nach einer gewissen Determinantenregel $W(x)$ verschwinden und keine allgemeine Lösung vorliegen.
Der Leser möge den mit einigem rechnerischen Aufwand durchzuführenden Nachweis des Nichtverschwindens der hier in Frage kommenden Wronski-Determinante selbst führen.

16.2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es wird jetzt schon sichtbar, wie sich alle Überlegungen und Ergebnisse bei den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung sinngemäß übertragen lassen. Besonders leicht zu lösen sind lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten als Beispiel die Differentialgleichung

$$
y^{(4)}(x) = y(x) \qquad \text{oder auch} \qquad y^{(4)}(x) - y(x) = 0
$$

Da sie konstante Koeffizienten hat, setzen wir wie früher an:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

(vgl. Abschnitt 11). Gibt es solche Funktionen, so muss λ die charakteristische Gleichung $\lambda^4 - 1 = 0$ erfüllen. Die Wurzeln sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i$$

Wir erhalten also vier Funktionen, die dann ausschließlich in Frage kommen:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = e^{ix}, \quad y_4(x) = e^{-ix}$$

An Stelle der beiden letzten Funktionen nehmen wir

$$y_3^*(x) = \cos x \qquad , \qquad y_4^*(x) = \sin x$$

Die Probe zeigt, dass alle vier Funktionen zu den gesuchten gehören.
Wir zeigen noch, dass die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

ist, indem wir das Nichtverschwinden der Wronski-Determinante beweisen

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = e^x e^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & -1 & -\sin x & \cos x \\ 1 & 1 & -\cos x & -\sin x \\ 1 & -1 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -2 & -\sin x - \cos x & \cos x - \sin x \\ 0 & 0 & -2\cos x & -2\sin x \\ 0 & -2 & \sin x - \cos x & -\cos x - \sin x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & -\sin x - \cos x & \cos x - \sin x \\ 0 & -2\cos x & -2\sin x \\ 0 & 2\sin x & -2\cos x \end{vmatrix} = -2(4\cos^2 x + 4\sin^2 x) = -8 \neq 0
\end{aligned}$$

In der allgemeinen Form lösen wir also jede lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$.
Man übersieht ohne weiteres, dass die Bestimmung von λ auf eine algebraische Gleichung n-ten Grades führt, die charakteristische Gleichung, die stets lösbar ist und genau n (nicht notwendig voneinander verschiedene) Wurzeln hat. Es ergeben sich dann n partikuläre Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

wenn die Wurzeln alle verschieden sind, da dann die Wronski-Determinante stets von Null verschieden ist, wie sich allgemein zeigen lässt.
Wir gehen noch auf den Fall ein, dass die charakteristische Gleichung mehrfache Nullstellen besitzt:

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(7)} - 3y^{(6)} + 3y^{(5)} - y^{(4)} = 0$$

Als charakteristische Gleichung finden wir

$$\lambda^7 - 3\lambda^6 + 3\lambda^5 - \lambda^4 = \lambda^4(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = \lambda^4(\lambda - 1)^3 = 0$$

Die Wurzeln sind

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 1$$

Unmittelbar erhalten wir als partikuläre Lösungen

$$y_1(x) = e^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad y_5(x) = e^x$$

Würde man $y_2(x) = y_3(x) = y_4(x) = 1$ und $y_6(x) = y_7(x) = e^x$ setzen, so würde die Wronski-Determinante verschwinden. Wir erinnern uns, dass man bei einfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. weitere Lösungen durch Multiplikation mit x erhielt. Dann setzen wir die allgemeine Lösung so an:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^x + c_6xe^x + c_7x^2e^x$$

Wir können das Ergebnis folgendermaßen bestätigen: Der Term auf der linken Seite der Differentialgleichung ist nichts anderes als die 4. Ableitung von $y''' - 3y'' + 3y' + y = 0$. Wir integrieren viermal unbestimmt und erhalten

$$y''' - 3y'' + 3y' + y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

Nun lösen wir die zugehörige homogene Differentialgleichung der neu entstandenen Differentialgleichung. Die linke Seite ist aber $e^x[ye^{-x}]'''$ (Leibnizsche Regel). Wir lösen, da $e^x > 0$ ist,

$$[ye^{-x}]''' = 0$$

Dreifache unbestimmte Integration ergibt

$$ye^{-x} = c_5 + c_6x + c_7x^2$$

so dass wir als allgemeine Lösung erhalten

$$y_H(x) = e^x(c_5 + c_6x + c_7x^2)$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist offenbar ein Polynom 4. Grades wie die rechte Seite. Dann ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^x + c_6xe^x + c_7x^2e^x$$

Ein anderes, allgemein brauchbares Verfahren erniedrigt mit Hilfe einer bekannten Lösung schrittweise die Ordnung der Differentialgleichung durch die Substitution

$$y_2(x) = y_1(x) \int \eta \mathrm{d}x$$

Die entstehende Differentialgleichung in $\eta(x)$ wäre in unserem Fall also von 6. Ordnung. Eine sofort erkennbare Lösung sei $\eta_1(x)$. Dann setzen wir weiter an

$$\eta_2(x) = \eta_1(x) \int \mu(x)\mathrm{d}x$$

wodurch eine Differentialgleichung 5. Ordnung in $\mu(x)$ entsteht. So kann man bis hinab zur 1. Ordnung verfahren.

Die Ermittlung der Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten führt immer auf die Lösung einer algebraischen Gleichung n-ten Grades. Sind die Wurzeln dieser Gleichung $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ $(r \leq n)$ bekannt, dann lässt sie sich in der Form

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} ... (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0; \qquad (m_1 + m_2 + ... + m_r = n)$$

schreiben. Wir schließen von dieser Form entsprechend dem obigen Beispiel mit Hilfe der Leibnizschen Regel zurück auf die gegebene Differentialgleichung n-ter Ordnung, aber nun in Form eines Produktes. Es ergibt sich zunächst

$$e^{\lambda_1 x}[ye^{-\lambda_1 x}]^{(m_1)} e^{\lambda_2 x}[ye^{-\lambda_2 x}]^{(m_2)} ... e^{\lambda_r x}[ye^{-\lambda_r x}]^{(m_r)} = 0$$

Die außerhalb der eckigen Klammern auftretenden Exponentialfunktionen sind stets von Null verschieden und können durch Division beseitigt werden. Dann erhalten wir unsere Differentialgleichung in der äquivalenten Produktdarstellung

$$[ye^{-\lambda_1 x}]^{(m_1)} [ye^{-\lambda_2 x}]^{(m_2)} ... [ye^{-\lambda_r x}]^{(m_r)} \equiv 0$$

Sie kann jetzt dadurch gelöst werden, dass jeder einzelne Faktor für sich gleich Null gesetzt und unbestimmt integriert wird. Damit erhalten wir r Lösungen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x + ... + c_{m_1-1} x^{m_1-1}) \\ &... \\ y_r(x) &= e^{\lambda_r x}(c_1^* + c_2^* x + ... + c_{m_r-1}^* x^{m_r-1}) \end{aligned}$$

Ihre Summe ist die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.
Damit die n partikulären Lösungen, die diese Lösung enthält, ein Fundamentalsystem bilden, muss die Wronski-Determinante von Null verschieden sein. Dieser Nachweis lässt sich durch Ausrechnen der Determinante führen. Wir teilen das Ergebnis nur mit.

16.3 Eulersche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wenn wir die Eulersche Differentialgleichung für beliebige $n > 2$ betrachten, also eine Differentialgleichung von der Form

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_2 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (a_i = \text{ const})$$

so erinnern wir uns, dass die Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung durch die Substitution $|z| = e^t$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten übergeführt werden konnte. Wir wenden die Substitution auch bei $n \geq 3$ an und setzen für $x > 0$

$$y(x) = y(e^t) = \eta(t)$$

Dann ist

$$y'(x) = \eta'(t)\frac{1}{x} \qquad \text{und damit} \qquad xy'(x) = \eta'(t)$$

wie wir bereits wissen. Wir leiten weiter nach x ab und erhalten

$$xy''(x) + y'(x) = \eta''(t)\frac{1}{x} \qquad \text{oder} \qquad x^2 y''(x) + xy'(x) = \eta''(t)$$

und nach Einsetzen für $xy'(x)$

$$x^2 y''(x) = \eta''(t) - \eta'(t)$$

Die nächste Ableitung nach x liefert über

$$x^2 y'''(x) + 2xy''(x) = \eta'''(t)\frac{1}{x} - \eta''(t)\frac{1}{x}$$

nach Multiplikation mit x

$$x^3 y'''(x) + 2x^2 y''(x) = \eta'''(t) - \eta''(t)$$

und nach Einsetzen der bekannten Werte

$$x^3 y'''(x) = \eta'''(t) - 3\eta''(t) + 2\eta'(t)$$

Die rechte Seite besitzt einen gesetzmäßigen Aufbau. Wir führen das Symbol D ein mit der Erklärung, dass

$$D\eta(t) = \eta'(t), \quad D^2\eta(t) = \eta''(t), \quad ..., \quad D^n\eta(t) = \eta^{(n)}(t)$$

bedeuten soll. Man nennt D einen Operator. Er wird wie ein Faktor behandelt, bedeutet aber die n-malige Ableitung der dahinterstehenden Funktion. Ohne auf die Operatorenrechnung weiter eingehen zu wollen, benützen wir den Operator D im Interesse einer kürzeren Schreibweise.[17]

[17] Kneschke, Differentialgleichungen und Randwertprobleme, S. 244.

Dann ist nach unseren früheren Rechnungen in neuer Schreibweise

$$\begin{aligned} xy'(x) &= D\eta(t) \\ x^2y''(x) &= D^2\eta(t) - D\eta(t) = D(D-1)\eta(t) \\ x^3y'''(x) &= D^3\eta(t) - 3D^2\eta(t) + 2D\eta(t) = D(D-1)(D-2)\eta(t) \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass dann

$$x^n y^{(n)}(x) = D(D-1)...(D-n+1)\eta(t)$$

ist. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion.
Als Induktionsbasis können die 3 oben angeführten Fälle für $n = 1, 2, 3$ gelten. Dann setzen wir voraus, dass für

$$n = k \qquad x^k y^{(k)}(x) = D(D-1)...(D-k+1)\eta(t)$$

erwiesen sei und behaupten für $n = k+1$ die entsprechende Beziehung.
Wir leiten die für $n = k$ als richtig angenommene Gleichung nach x ab:

$$x^k y^{(k+1)}(x) + kx^{k-1}y^{(k)}(x) = DD(D-1)...(D-k+1)\eta(t)\frac{1}{x}$$

Nach Multiplizieren mit x ergibt sich

$$x^{k+1}y^{(k+1)}(x) = DD(D-1)...(D-k+1)\eta(t) - kx^k y^{(k)}(x)$$

und mit Berücksichtigung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} x^{k+1}y^{(k+1)} &= [DD(D-1)...(D-k+1) - kD(D-1)...(D-k+1)]\eta(t) \\ &= D(D-1)...(D-k+1)(D-k)\eta(t) \end{aligned}$$

Das ist aber die Induktionsbehauptung. Somit gilt allgemein für $n \geq 1$

$$x^n y^{(n)}(x) = D(D-1)...(D-n+1)\eta(t)$$

was sich mit Hilfe von Binomialkoeffizienten auch kürzer schreiben lässt:

$$x^n y^{(n)}(x) = n!\binom{D}{n}\eta(t)$$

Die Eulersche Differentialgleichung geht also mit $x = e^t$ über in

$$n!\binom{D}{n}\eta(t) + a_{n-1}(n-1)!\binom{D}{n-1}\eta(t) + ... + a_2 2!\binom{D}{2}\eta(t) + a_1 1!\binom{D}{1}\eta(t) + a_0\eta(t) = 0$$

eine Differentialgleichung für $\eta(t)$ mit konstanten Koeffizienten.

Alle bisher über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gemachten

Bemerkungen lassen sich damit sinngemäß bei den Eulerschen Differentialgleichungen verwenden.
Liegt eine homogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit einer dreifachen Wurzel der charakteristischen Gleichung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$ vor, so ergibt sich zunächst die allgemeine Lösung für $\eta(t)$

$$\eta(t) = e^{\lambda_0 t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$$

und nach der Rücksubstitution

$$y(x) = |x|^{\lambda_0}(c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \ln^2|x|)$$

Besitzt die charakteristische Gleichung unter anderem das Paar komplexer Lösungen $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ und $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, so erhalten wir als Lösung zunächst (in der reellen Form)

$$\eta(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + ...$$

und dann

$$y(x) = c_1 \cos \ln|x| + c_2 \sin \ln|x| + ...$$

Nachdem auf diese Weise geklärt werden konnte, wie in den besonderen Fällen zu verfahren ist, können wir in Zukunft wieder den einfachen Ansatz $y = |x|^\lambda$ verwenden, wie unten in den Beispielen geschehen soll.

Nehmen wir an, dass die Funktion $y = f(x)$ eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist, dann gilt

$$x^n f^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}f^{(n-1)}(x) + ... + a_2x^2f''(x) + a_1xf'(x) + a_0f(x) = 0$$

Wir ersetzen x durch $(-x)$ und erhalten auf der linken Seite

$$\begin{aligned}(-x)^n(-1)^nf^{(n)}(-x) + a_{n-1}(-x)^{n-1}(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(-x) + ...\\ + a_2(-x)^2(-1)^2f''(-x) + a_1(-x)(-1)xf'(-x) + a_0f(-x)\\ = x^nf^{(n)}(-x) + a_{n-1}x^{n-1}f^{(n-1)}(-x) + ...\\ + a_2x^2f''(-x) + a_1xf'(-x) + a_0f(-x)\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass die Funktion $f(-x) = f^*(x)$ ebenfalls die Differentialgleichung erfüllt, wenn sie in der ganzen x, y-Ebene definiert ist (vgl. die Bemerkung am Ende von 12.4).
Dann genügt es, die Rechnung mit $x = e^t > 0$ durchzuführen. Andernfalls ist mit $f(x)$ $(x > 0)$ auch $f(|x|)$ Lösung.
Der Wert $x = 0$ bleibt zunächst weiterhin ausgeschlossen, da in der Normalform

$$y^{(n)}(x) = -\frac{a_{n-1}}{x}y^{(n-1)}(x) - ... - \frac{a_1}{x^{n-1}}y'(x) - \frac{a_0}{x^n}y(x)$$

die Variable x im Nenner auftritt. Auf die Normalform beziehen sich aber alle Bedingungen für die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen.

Später kann unter Umständen nachträglich eine Zulassung von $x = 0$ eintreten (vgl. 2. Bemerkung in 12.4).

Die Theorie fordert für die Existenz der Lösung die Stetigkeit der Funktion $y^{(n)}(x) = f(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}(x)$, wobei die Stelle $x = 0$ auszunehmen ist, und für die Eindeutigkeit, die Beschränktheit von $y^{(n)}(x)$ sowie von

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y''}\right|, \quad ..., \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right|$$

in einer gewissen Umgebung von $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Beispiele:
1. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$
Der Ansatz $y = x^\lambda$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Die Wurzeln sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Demnach ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1|x| + c_2|x|^2 + c_3|x|^3 \qquad \text{oder auch} \qquad y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

2. $x^4y^{(4)} + x^3y''' - 2x^2y'' + 6y' - 8y = 0$
Die charakteristische Gleichung bei dem Ansatz $y = x^\lambda$ ist

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 8 = 0$$

oder geordnet

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ und $\lambda_4 = -1$.
Unter Berücksichtigung der mehrfachen Wurzel erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1|x|^2 + c_2|x|^2\ln|x| + c_3|x|^2\ln^2|x| + \frac{c_4}{|x|}$$

oder

$$y(c) = C_1x^2 + C_2x^2\ln|x| + C_3x^2\ln^2|x| + \frac{C_4}{x}$$

3. $x^4y^{(4)} + 2x^3y''' + x^2y'' - xy' + 5y = 0$
Wir erhalten die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - \lambda + 5 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

Die Wurzeln sind $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$, $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i$. Daher erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1|x|^2\cos\ln|x| + c_2|x|^2\sin\ln|x| + c_3\cos\ln|x| + c_4\sin\ln|x|$$

oder einfacher:

$$y(x) = C_1^2\cos\ln|x| + C_2x^2\sin\ln|x| + C_3\cos\ln|x| + C_4\sin\ln|x|$$

Da bei der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine Produktzerlegung möglich war, liegt es nahe, dies bei der Eulerschen Differentialgleichung ebenfalls zu versuchen.
Bei der Substitution $x = e^t$ mit $y(x) = \eta(t)$ würden wir analog erhalten

$$[\eta e^{-\lambda_1 t}]^{(m_1)} \cdot ... \cdot [\eta e^{-\lambda_r t}]^{(m_r)} \equiv 0$$

(mit $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$). Bei der Resubstitution werden die Faktoren etwas komplizierter. Wir betrachten nur einen einfachen Sonderfall. Es sei $\lambda_1 = \lambda$ und $m_2 = 2$ mit $x > 0$. Dann schreiben wir für

$$[\eta e^{-\lambda t}]'' = \frac{\mathrm{d}^2(\eta e^{-\lambda t})}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{(beide Ableitungen nach t)}$$

zunächst

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yx^{-\lambda})'x \qquad \text{(innere Ableitung nach x)}$$

und schließlich

$$[(yx^{-\lambda})'x]'x \qquad \text{(beide Ableitungen nach x)}$$

Setzen wir diesen Faktor gleich Null und integrieren unbestimmt, dann erhalten wir (für $x > 0$)

$$\begin{aligned}
((yx^{-\lambda})'x)' &= 0 \\
(yx^{-\lambda})'x &= c_1 \\
(yx^{-\lambda})' &= \frac{c_1}{x} \\
yx^{-\lambda} &= c_1 \ln x + c_2 \\
y &= c_1 x^\lambda \ln x + c_2 x^\lambda
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit unseren bisherigen Ergebnissen.

Die Analogie zwischen Differentialgleichungen n-ter Ordnung und algebraischen Gleichungen n-ten Grades zeigt sich auch in einem anderen Fall. In der Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + s_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kann durch die Tschirnhaus-Transformation

$$x = z - \frac{a_n - 1}{n}$$

das Glied mit der zweithöchsten Potenz beseitigt werden.
Das entsprechende gelingt bei einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 3$. Gegeben sei

$$y'''(x) + ay''(x) + by'(x) + cy(x)?0$$

(a, b, c reell, konstant). Dann substituieren wir

$$y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{3}x}$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= z'(x)e^{-\frac{a}{3}x} + z(x)\left(-\frac{a}{3}\right)e^{-\frac{a}{3}x} \\
y''(x) &= z''(x)e^{-\frac{a}{3}x} + 2\left(-\frac{a}{3}\right)z'(x)e^{-\frac{a}{3}x} + + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 z(x)e^{-\frac{a}{3}x} \\
y'''(x) &= z'''(x)e^{-\frac{a}{3}x} + 3\left(-\frac{a}{3}\right)z''(x)e^{-\frac{a}{3}x} + +3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 z'(x)e^{-\frac{a}{3}x} + + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 z(x)e^{-\frac{a}{3}x}
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{a}{3}x}\Bigg[&z'''(x) - az''(x) + 3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 z'(x) + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 z(x) + az''(x) + 2a\left(-\frac{a}{3}\right)z'(x) \\
&+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 z(x) + bz'(x) + b\left(-\frac{a}{3}\right)z(x) + cz(x)\Bigg] = 0
\end{aligned}
$$

Wegen $e^{-\frac{a}{3}x} > 0$ erhält man hieraus die neue Differentialgleichung für $z(x)$

$$z'''(x) + Bz'(x) + Cz(x) = 0$$

mit entsprechender Bedeutung für die neuen Konstanten B und C.
Aus dem Fehlen der zweithöchsten Ableitung ergibt sich eine interessante Konsequenz.
Für die Wronski-Determinante gilt, wie wir nicht zeigen wollen, allgemein

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}\mathrm{d}x}$$

Ist $a_{n-1} = 0$, so folgt daraus

$$W(x) = W(x_0)$$

d. h., die Wronski-Determinante ist dann eine Konstante.

Zusammenfassend können wir sagen, dass es für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung allgemeine Lösungen in geschlossener Form gibt, soweit diese Differentialgleichungen konstante Koeffizienten besitzen oder vom Eulerschen Typ sind. In den übrigen Fällen kann man sich noch mit Substitutionen helfen, man ist im übrigen aber vornehmlich auf unendliche Reihen angewiesen, deren Kenntnis wir nicht voraussetzen können.

16.4 Aufgaben

1. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}$

2. $y''' + 2y'' + y' = 0$
Lösung: $y(x) + c_1 = e^{-x}(c_2 + c_3x)$

3. $y''' + y' = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$

4. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$

5. $y''' - 2y'' - 5y' 6y = 36x$
Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + 5 + 6x$

6. $y''' - y'' = \sin x$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

7. $y''' + 4y' = -8 \cos 2x$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + x \cos 2x$, (Resonanzfall)

8. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

9. $x^3 y''' + x^2 y'' = 0$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x \ln |x|$

10. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = \frac{21}{\sqrt[4]{x^3}}$
Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{c_3}{x} + \frac{64}{\sqrt[4]{x^3}}$

11. Zu lösen ist das Anfangswertproblem $y'' - 4y'' + 4y' = 0$ mit $(x_0, y_0, y_0', y_0'') = (0, 1, 2, 4)$
Lösung: $y(x) = e^{2x}$

12. Zu lösen ist das Anfangswertproblem $y''' - y' = 2 \sin x$ mit $(x_0, y_0, y_0', y_0'') = (0; 4; 0; 1)$
Lösung: $y(x) = 1 + e^x + e^{-x} + \cos x$

13. Welche Funktionen sind identisch mit ihrer 8. Ableitung?
Lösung:
$y_1(x) = c_1 e^x; \quad y_2(x) = c_2 e^{-2x}; \quad y_3(x) = c_3 \cos x;$
$y_4(x) = c_4 \sin x; \quad y_5(x) = c_5 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}; \quad y_6(x) = c_6 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}};$
$y_7(x) = c_7 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}; \quad y_8(x) = c_8 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$

17 Systeme von linearen Differentialgleichungen

17.1 Begriff

Im vorigen Abschnitt hatte sich für die linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung eine Produktdarstellung angeben lassen. So könnten wir die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$$

auf die Form

$$[y(x)e^{-x}]'[y(x)e^{x}]'[y(x)e^{2x}]' = 0$$

bringen. Damit ist die Lösung der einen Differentialgleichung 3. Ordnung auf die Lösung von drei Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt worden. Diese drei Differentialgleichungen bilden ein System.
Es lautet:

$$[y(x)e^{-x}]' = 0, \qquad [y(x)e^{x}]' = 0, \qquad [y(x)e^{2x}]' = 0$$

und besitzt entsprechend drei Lösungen:

$$y_1(x) = c_1 e^{x}, \qquad y_2(x) = c_1 e^{-x}, \qquad y_3(x) = c_1 e^{-2x}$$

In ihrer Gesamtheit bilden diese drei Lösungen ein Fundamentalsystem und ihre Summe ist die allgemeine Lösung der einen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

Die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen macht von dem Prinzip, eine Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung zu verwandeln, häufig Gebrauch - allerdings noch in ganz anderer Weise.

Wir zeigen das an unserem Beispiel. Wir setzen

$$y(x) = u(x), \qquad y'(x) = u'(x) = v(x), \qquad y''(x) = v'(x) = w(x)$$

Dann ist $y''(x) = w'(x)$, und wir erhalten mit Benutzung der gegebenen Differentialgleichung das folgende System

$$u'(x) = v(x), \qquad v'(x) = w(x), \qquad w'(x) = -2w(x) + v(x) + 2u(x)$$

oder

$$u'(x) - v(x) = 0, \qquad v'(x) - w(x) = 0, \qquad w'(x) + 2w(x) - v(x) - 2u(x) = 0$$

Das erhaltene Differentialgleichungssystem ist von der 1. Ordnung und linear, denn die Funktionen $u(x)$, $v(x)$ und $w(x)$ treten mit ihren Ableitungen in jedem Summanden nur einmal, und zwar in der 1. Potenz, auf. Das System ist außerdem homogen.
Es wäre inhomogen, wenn auf der rechten Seite noch Funktionen von x oder eine Konstante stünden. Im Gegensatz zu dem 1. Beispiel stehen hier die 3 Differentialgleichungen nicht unabhängig nebeneinander, sondern sind "gekoppelt".

Dieser Fall ist für die Theorie vor allem wichtig. Allgemein formuliert hat ein inhomogenes lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung die Gestalt

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= l_1(y_1{,}y_2{,}...{,}y_n) + h_1(x) \\ y_2'(x) &= l_2(y_1{,}y_2{,}...{,}y_n) + h_2(x) \\ &... \\ y_n'(x) &= l_n(y_1{,}y_2{,}...{,}y_n) + h_n(x) \end{aligned}$$

wobei die $l\nu(y_1, y_2, ..., y_n)$ lineare Funktionen der y_i bedeuten sollen; die $h\nu(x)$ heißen auch hier Störfunktionen.
Diese Systeme sind unter bestimmten Voraussetzungen, die die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen betreffen, und in ihrer Form den bisher mitgeteilten entsprechen, lösbar.

Die rechnerische Durchführung stützt sich dabei auf Begriffe und Sätze der linearen Algebra. Das System gilt als gelöst, wenn ein System von n Funktionen $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ bestimmt worden ist, durch die alle Gleichungen des Systems zu Identitäten werden.

Bei der Integration fällt bei jeder einzelnen Differentialgleichung eine Integrationskonstante an, im ganzen System also n Konstanten.
Diese Konstanten entsprechen den n Konstanten in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, aus der wir uns das System entstanden denken können.
Die Konstanten können durch Anfangsbedingungen wie

$$y_1(x_0) = y_{10}; \quad y_2(x_0) = y_{20}; \quad ..., \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

festgelegt werden.

17.2 Beispiele und Lösungsmethoden

Im folgenden wollen wir im Interesse einer später erfolgenden geometrischen Deutung und gewisser physikalischer Anwendungsmöglichkeiten t als unabhängige Variable benutzen und die zu bestimmenden Funktionen mit $x(t)$, $y(t)$ usw. bezeichnen.

1. Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &x'(t) = -y(t) \\ &y'(t) = x(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

Wir benutzen dieses Beispiel, um zu zeigen, dass wir aus dem vorliegenden System eine einzige Differentialgleichung 2. Ordnung herstellen können.
Es ist nämlich $x''(t) = -y'(t)$ und unter Verwendung der 2. Differentialgleichung

$$x''(t) = -x(t)$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten

$$x''(t) + x(t) = 0$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Wir erhalten demnach als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Wegen $y(t) = -x'(t)$ (1. Gleichung des Systems) ergibt sich dann

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

Wir berücksichtigen nun die Anfangsbedingungen. Es soll für $t = 0$ gelten

$$x(0) = 1 = c_1 \qquad , \qquad y(0) = 0 = -c_2$$

Damit erhalten wir als mögliche Lösung unseres Anfangswertproblems

$$x(t) = \cos t \qquad , \qquad y(t) = \sin t$$

Der Leser überzeuge sich durch die "Probe" selbst davon, dass die erhaltenen Funktionen wirklich die Lösungen des Systems sind. Wollen wir das System auf direktem Weg lösen, so berücksichtigen wir, dass die Glieder der Differentialgleichungen nur konstante Koeffizienten besitzen.
Daher setzen wir, wie in den vorangegangenen Abschnitten versuchsweise an

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad , \qquad y(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$$

Haben die Lösungen diese Form, dann muss gelten

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = -c_3 e^{\lambda_1 t} - c_4 e^{\lambda_2 t} = -y(t) \quad \text{und} \\ y'(t) &= c_3\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_4\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t} = x(t) \end{aligned}$$

Geordnet ergibt das

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}(c_1\lambda_1 + c_3) + e^{\lambda_2 t}(c_2\lambda_2 + c_4) = 0 \\ e^{\lambda_1 t}(c_3\lambda_1 - c_1) + e^{\lambda_2 t}(c_4\lambda_2 - c_2) = 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen für alle t - also identisch - erfüllt sein müssen, ergeben sich die Gleichungen

$$c_1\lambda_1 + c_3 = 0, \quad c_2\lambda_2 + c_4 = 0, \quad -c_1 + c_3\lambda_1 = 0, \quad -c_2 + c_4\lambda_2 = 0$$

Damit haben wir zwei lineare und homogene Gleichungssysteme erhalten. Die sofort zu erkennende - triviale - Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ ist für uns wertlos.

Leser, die mit der linearen Algebra vertraut sind, wissen, dass es mindestens eine nichttriviale Lösung gibt, wenn die Koeffizientendeterminante des Systems verschwindet. In beiden vorliegenden Systemen führt dies auf die Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$.

Damit ist einmal die Bestimmung der fraglichen λ-Werte gelungen. Andererseits ist nun je eine der Gleichungen der Systeme überflüssig geworden und es ergibt sich

$$c_3 = -ic_1 \qquad \text{und} \qquad c_4 = ic_2$$

Wir erhalten damit als Lösungen

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \qquad , \qquad y(t) = -ic_1 e^{it} + ic_2 e^{-it}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ stellen wir die reelle Form der Lösungen her:

$$x(t) = c_1(\cos t + i\sin t) + c_2(\cos t - i\sin i) = (c_1 + c_2)\cos t + i(c_1 - c_2)\sin t$$
$$y(t) = -ic_1(\cos t + i\sin t) + ic_2(\cos t - i\sin i) = i(c_2 - c_1)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t$$

Wir setzen

$$c_1 = \alpha + \beta i \qquad , \qquad c_2 = \alpha - \beta i$$

und erhalten

$$c_1 + c_2 = 2\alpha \qquad ; \qquad c_1 - c_2 = 2\beta i, \qquad \text{d.h.} \quad i(c_1 - c_2) = 2\beta$$

So ergibt sich schließlich

$$x(t) = 2\alpha\cos t + 2\beta\sin t$$
$$y(t) = 2\beta\cos t + 2\alpha\sin t$$

und mit $2\alpha = c_1^*$ und $-2\beta = c_2^*$

$$x(t) = c_1^*\cos t + c_2 * \sin t$$
$$y(t) = c_1^*\sin t - c_2 * \cos t$$

in Übereinstimmung mit der oben erhaltenen allgemeinen Lösung.

2. $y'(t) = x(t); \quad x'(t) = 1$
Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ (und $x'(t) = 1$). Wir können wieder versuchen, eine einzige Differentialgleichung - hier 3. Ordnung - herzustellen, indem wir die 1. Gleichung noch einmal ableiten

$$y'''(t) = x'(t)$$

so dass wir erhalten

$$y'''(t) = 1$$

Durch dreimalige Integration ergibt sich

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{1}{t}t^3$$

Wegen $y''(t) = x(t)$ erhalten wir dann

$$x(t) = 2c_3 + t$$

und mit Berücksichtigung der vorgeschriebenen Anfangswerte

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3 \qquad , \qquad x(t) = t$$

Natürlich ist dieses System auch auf einfache Weise lösbar. Aus

$$x'(t) = 1 \qquad \text{folgt} \qquad x(t) = t + c_1^*$$

und aus

$$y''(t) = x(t) = t + c_1^* \qquad \text{folgt} \qquad y'(t) = \frac{t^2}{2} + c_1^* t + c_2^* \qquad \text{und}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{6} + c_1^* \frac{t^2}{2} + c_2^* t + c_3^*$$

Mit $c_3^* = c_1$, $c_2^* = c_2$, $c_1^* = 2c_3$ haben wir die obige allgemeine Lösung wieder erhalten.

Wir betrachten noch den dritten Lösungsweg über ein lineares System 1. Ordnung. Wenn wir

$$y'(t) = z(t) \qquad \text{setzen, dann ist} \qquad z'(t) = x(t)$$

und wir erhalten das lineare inhomogene Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$x'(t) = 1, \qquad y'(t) = z(t), \qquad z'(t) = x(t)$$

Wie bereits mitgeteilt wurde, ist ein solches System prinzipiell lösbar. Wir werden versuchen, ohne die Mittel der linearen Algebra zu der Lösung zu gelangen.

Wenn die Inhomogenität des Systems darin besteht, dass konstante Glieder auf der rechten Seite auftreten, so kann man mit Hilfe einer geeigneten Substitution das System zu einem homogenen machen. Durch Probieren finden wir etwa

$$x = \overline{x} + t, \qquad y = \overline{y} + \frac{t^3}{6}, \qquad z = \overline{z} + \frac{t^2}{2}$$

Wir überzeugen uns von der Brauchbarkeit unserer Substitution:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \overline{x}'(t) + 1 = 1 \\ y'(t) &= \overline{y}'(t) + \frac{t^2}{2} = z(t) = \overline{z}(t) + \frac{t^2}{2} \\ z'(t) &= \overline{z}'(t) + t = x(t) = \overline{x}(t) + t \end{aligned}$$

Es ergibt sich das neue System

$$\overline{x}'(t) = 0, \qquad \overline{y}'(t) = \overline{z}(t), \qquad \overline{z}'(t) = \overline{x}(t)$$

Es ist homogen, und wir versuchen es nun nach unseren obigen Erfahrungen gleich mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 t^2\\ \overline{y}(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 t^2\\ \overline{z}(t) &= A_3 + B_3 t + C_3 t^2\end{aligned}$$

Ist er richtig, dann müssen laut System die folgenden Identitäten erfüllt sein:

$$\begin{aligned}&B_1 + 2C_1 t \equiv 0\\ &B_2 + 2C_2 t \equiv A_3 + B_3 t + C_3 t^2\\ &B_3 + 2C_3 t \equiv A_1 + B_1 t + C_1 t^2\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich:

$$B_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = 0, \quad B_2 = A_3, \quad 2C_2 = B_3 \quad \text{und} \quad C_3 = 0$$

$$B_3 = A_1, \quad 2C_3 = B_1 \quad \text{und} \quad C_1 = 0$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{x}(t) = A_1 \qquad , \qquad \overline{y}(t) = A_2 + A_3 t + \frac{A_1}{2} t^2$$

also, wie zu erwarten, 3 frei verfügbare Konstanten A_1, A_2 und A_3. Wir führen die früheren Bezeichnungen wieder ein, setzen

$$A_1 = 2c_3, \qquad A_2 = c_1, \qquad A_3 = c_2$$

und erhalten

$$\overline{x}(t) = 2c_3 \qquad , \qquad \overline{y}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$

Zum Schluss machen wir die Substitution rückgängig und stellen fest, dass wir wieder das frühere Ergebnis erhalten haben.

$$x(t) = \overline{x}(t) + t = 2c_3 + t \qquad , \qquad y(t) = \overline{y}(t) + \frac{t^2}{6} = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{t^3}{6}$$

3. $x'(t) = 2x(t) + y(t); \quad y'(t) = -3x(t) - 2y(t)$
Zunächst versuchen wir wieder, aus dem System eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung für eine der zu bestimmenden Funktionen, etwa $x(t)$, zu machen.
Die erste Gleichung wird nach t abgeleitet und ergibt

$$x''(t) = 2x'(t) + y'(t)$$

Dann errechnen wir $x(t)$ aus dem gegebenen System und erhalten

$$x(t) = 2x'(t) + y'(t)$$

Hieraus folgt, dass dann auch $x''(t) = x(t)$ sein muss, d.h., wir haben die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) - x(t) = 0$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Aus der 1. Gleichung des gegebenen Systems folgt

$$y(t) = x'(t) - 2x(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{-t} = -c_1 e^t - 3c^2 e^{-t}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des vorgelegten Systems

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \qquad , \qquad y(t) = -c_1 e^t - 3c^2 e^{-t}$$

Nun zeigen wir den zweiten Weg zur Lösung. Das zu lösende lineare Differentialgleichungssystem besitzt konstante Koeffizienten. Wir setzen daher an

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad , \qquad y(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$$

Sollen diese Funktionen Lösungen sein, dann müssen sie die Gleichungen

$$x'(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 2c_1 e^{\lambda_1 t} + 2c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t} = 2x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = c_3\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_4\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = -3c_1 e^{\lambda_1 t} - 3c_2 e^{\lambda_2 t} - 2c_3 e^{\lambda_1 t} - 2c_4 e^{\lambda_2 t} = -3x(t) - 2y(t)$$

identisch erfüllen. Das ergibt durch Koeffizientenvergleich die beiden linearen homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} c_1(2-\lambda_1) + c_3 &= 0 \qquad , \qquad & c_2(2-\lambda_2) + c_4 &= 0 \\ -3c_1 + (-2-\lambda_1)c_3 &= 0 \qquad , \qquad & -3c_2 + (-2-\lambda_2)c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Da sie sich nur im Index der λ_ν unterscheiden, fassen wir sie zusammen

$$A(2-\lambda) + B = 0 \qquad , \qquad -3A + (-2-\lambda)B = 0$$

($A = c_1$ bzw. c_2; $B = c_3$ bzw. c_4).
Sie sollen uns einmal die Bestimmung der λ_ν ermöglichen, zum anderen die Zahl der 4 frei verfügbaren Konstanten auf 2 reduzieren. Soll die für uns wertlose triviale Lösung $A = B = 0$ vermieden werden, so muss wieder die Koeffizientendeterminante verschwinden

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = 0$$

Damit ergeben sich für die λ_ν die notwendigen Bedingungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.
Dann können wir etwa die jeweils ersten Gleichungen der Systeme benutzen, um $c_3 = -c_1$ und $c_4 = -3c_2$ festzulegen, womit wir aus dem versuchsweisen Ansatz die Lösungen

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \qquad , \qquad y(t) = -c_1 e^t - 3c_2 e^{-t}$$

4. Wir lösen jetzt ein allgemeines homogenes System von zwei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y(t) \qquad , \qquad y'(t) = a_2 x(t) + b_2 y(t)$$

Wir setzen wie oben an

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad , \qquad y(x) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$$

Nach dem Einsetzen in das gegebene System mit nachfolgendem Koeffizientenvergleich erhalten wir wieder zwei homogene lineare Gleichungssysteme, die wir wie oben gleich zu einem zusammenfassen.

$$A(a_1 - \lambda) + Bb_1 = 0 \qquad , \qquad Aa_2 + B(b_2 - \lambda) = 0$$

($A = c_1$ bzw. c_2; $B = c_3$ bzw. c_4).
Die Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Sie ist in charakteristischer Weise aus der Koeffizientenmatrix des vorgelegten Systems

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

durch Subtraktion von λ bei den Elementen der Hauptdiagonale hervorgegangen.
Zur Vermeidung der trivialen Lösung $A = B = 0$ des homogenen Gleichungssystems muss die Determinante aus der Koeffizientenmatrix verschwinden:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

=. Wir erhalten eine quadratische Gleichung für λ mit den Wurzeln λ_1 und λ_2.
Mit ihrer Hilfe reduzieren wir jetzt die Anzahl der c_ν und erhalten

$$c_3 = -\frac{a_1 - \lambda_1}{b_1} c_1 \qquad , \qquad c_4 = -\frac{a_1 - \lambda_2}{b_1} c_2 \qquad (b_1 \neq 0)$$

oder auch

$$c_1 = -\frac{b_2 - \lambda_1}{a_2} c_3 \qquad , \qquad c_2 = -\frac{b_2 - \lambda_2}{a_2} c_4 \qquad \text{falls } (a_2 \neq 0)$$

Damit sind die Lösungen gemäß dem Ansatz bis auf die frei verfügbaren c_1 und c_2 eindeutig bestimmt:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad , \qquad y(t) = -\frac{a_1 - \lambda_1}{b_1} c_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{a_1 - \lambda_2}{b_1} c_2 e^{\lambda_2 t}$$

oder

$$x(t) = -\frac{b_2 - \lambda_1}{a_2} c_3 e^{\lambda_1 t} - \frac{b_2 - \lambda_2}{a_2} c_4 e^{\lambda_2 t} \quad , \quad y(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$$

Sie erfüllen das Differentialgleichungssystem, was der Leser selbst nachprüfen möge.

Wie aus der vorgetragenen Überlegung hervorgeht, kann die Determinante, die zur Bestimmung der λ_ν führt, sofort hingeschrieben werden. Das ist insofern von Bedeutung, als der Ansatz entsprechend der Art der Wurzeln gleich modifiziert werden kann.

1. Fall: Sind beide Lösungen reell, so bleibt es bei dem angegebenen Ansatz.

2. Fall: Liegt eine Doppelwurzel vor, so setzen wir an

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad , \quad y(t) = c_3 e^{\lambda t} + c_4 t e^{\lambda t}$$

3. Fall: Sind die Wurzeln konjugiert komplex $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, so setzen wir gleich, die reelle Form an

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad , \quad y(t) = e^{\alpha t}(c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t)$$

5. $x'(t) = 2x(t) - 3y(t); \quad y'(t) = 3x(t) - 4y(t)$
Wir bilden sofort

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -8 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

Wir erhalten also die Doppelwurzel $\lambda_0 = -1$. Nun setzen wir an

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad , \quad y(t) = c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$$

Durch Einsetzen in die 1. Gleichung des Systems erhalten wir

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} = 2c_1 e^{-t} + 2c_2 t e^{-t} - 3c_3 t e^{-t} - 3c_4 t e^{-t} = 2x(t) - 3y(t)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$-c_1 + c_2 = 2c_1 - 3c_3 \quad , \quad -c_2 = c_2 - 3c_4$$

woraus folgt $c_3 = c_1 - \frac{c_2}{3}$, $c_4 = c_2$.
Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die 2. Gleichung benutzen. Die allgemeine Lösung des Systems lautet daher

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad , \quad y(t) = \left(c_1 + \frac{c_2}{3}\right) e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

6. $x'(t) = x(t) - 4y(t); \quad y'(t) = x(t) + y(t)$
Wir bilden wieder

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Die Wurzeln sind jetzt $\lambda_1 = 1 + 2i$ und $\lambda_2 = 1 - 2i$. Daher setzen wir die Lösung in der Gestalt

$$x(t) = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \qquad , \qquad y(t) = e^t(c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$$

an. Zur Bestimmung von c_3 und c_4 können wir auch die 2. Gleichung des Systems benutzen:

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t(c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t) \\ &= e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t) \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle t gelten muss, erhalten wir aus

$$e^t[(c_3 + 2c_4 - c_1 - c_3) \cos 2t + (c_4 - 2c_3 - c_2 - c_4) \sin 2t] = 0$$

$$2c_4 - c_1 = 0 \qquad , \qquad -2c_3 - c_2 = 0$$

also $c_4 = \frac{c_1}{2}$ und $c_3 = -\frac{c_2}{2}$.
Die allgemeine Lösung des Systems ist also

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \\ y(t) &= e^t\left(\frac{c_1}{2} \sin 2t - \frac{c_2}{2} \cos 2t\right) \end{aligned}$$

Bemerkungen:
Die mitgeteilte Lösungsmethode lässt sich mühelos auf lineare homogene Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und $n \geq 2$ übertragen. Bei inhomogenen Systemen wendet man sinngemäß die Methode der Variation der Konstanten an.

Besitzt das System keine konstanten Koeffizienten, so kann ein Iterationsverfahren angewendet werden, das die Lösungen in schrittweiser Annäherung mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen gestattet.

17.3 Einiges über die Parameterdarstellung von Funktionen zur geometrischen Deutung der Lösungen

Bisher wurde das Wort Parameter ausschließlich im Sinne von Scharparametern gebraucht. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung etwa 2. Ordnung besitzt zwei derartige Scharparameter wie in

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

wobei c_1 und c_2 im allgemeinen beliebige Werte annehmen können, die uns gestatten, die allgemeine Lösung irgendwelchen gewünschten Anfangs- oder Randbedingungen anzupassen.
Im Zusammenhang mit Funktionen kommt die Bezeichnung Parameter aber auch noch im Sinne von Hilfsveränderliche vor.

Betrachten wir die Punktmenge, die den Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt der x,y-Ebene bildet. Es lässt sich ein analytischer Ausdruck angeben, dessen Bild eben diese Punktmenge ist:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Wir können auch explizite Ausdrücke angeben, deren Bild die gleiche Punktmenge ist:

$$y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

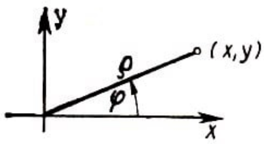
oder auch

$$x_1(x) = \sqrt{r^2 - y^2} \qquad \text{und} \qquad x_2(x) = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

Die Bildung von Zahlenpaaren (x, y), deren Bilder die Punkte des Gesamtbildes darstellen, geschieht meist in der Art, dass den Elementen x irgendeines Intervalles, z.B. $[a,b]$, durch die Vorschrift $y = f(x)$ bestimmte y eindeutig zugeordnet werden, wie oben geschah mit

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{(Halbkreis mit } y \geq 0) \quad \text{und} \\ y_2(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{(Halbkreis mit } y \leq 0) \end{aligned}$$

Bekannt ist auch die Darstellung von Punktmengen mit Hilfe der Polarkoordinaten, wo jeder Punkt (Zahlenpaar) durch ein bestimmtes Argument (φ) und einen bestimmten Abstand vom Nullpunkt (ρ) festgelegt wird (Bild 27).



Der Zusammenhang zwischen den (kartesischen) Koordinaten x und y und den Polarkoordinaten wird durch die Gleichungen

$$x = \rho \cos \varphi \qquad , \qquad y = \rho \sin \varphi$$

beschrieben. In Polarkoordinaten lautet die Gleichung unseres Kreises besonders einfach $\rho = r$.
Dasselbe Ziel kann nun mit Verwendung einer Hilfsveränderlichen, die wir t nennen, erreicht werden. Wir behaupten, das Gleichungssystem

$$x = r \cos t \qquad , \qquad y = r \sin t$$

stellt uns für $0 \leq t \leq 2\pi$ den gleichen Kreis dar, wie die obigen Gleichungen in kartesischen und Polar-Koordinaten. Dazu werden wir beide Gleichungen zunächst quadrieren und dann addieren:

$$x^2 = r^2 \cos^2 t, \qquad y^2 = r^2 \sin^2 t \qquad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$$

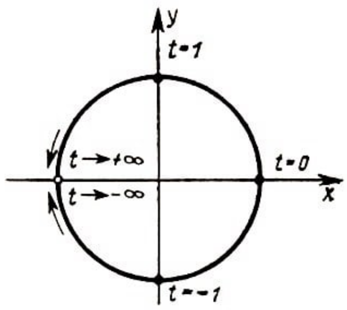
Lassen wir die Hilfsveränderliche t nacheinander alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, so durchläuft der Bildpunkt offenbar unendlich oft die Kreislinie. Es genügt daher, den Parameter t auf das Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ zu beschränken, damit jeder Punkt des Kreises genau einmal Bild ist.

Ein und dieselbe Kurve lässt sich auf viele Arten durch Parametergleichungen darstellen. Der Leser überzeuge sich, dass die Parametergleichungen

$$x = r\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y = r\frac{2t}{1+t^2}$$

den gleichen Kreis zum Bild haben wie die obigen Ausdrücke. Der Punkt $(-r;0)$ ist dabei das Bild von (x,y) für $t \to \pm\infty$ wegen (Bild 28)

$$\lim_{t\to\pm\infty} r\frac{1-t^2}{1+t^2} = -r \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} r\frac{2t}{1+t^2} = 0$$



Im übrigen kann jede explizit gegebene Funktion $y = f(x)$ in die Parameterform übergeführt werden. Man braucht nur $x = t$ zu setzen, dann ergibt sich als Parameterdarstellung

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = f(t)$$

Wir betrachten jetzt das Gleichungssystem

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

Zu jedem t gehört ein Zahlenpaar (x,y). Sind die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetig (wenigstens in einem gewissen Intervall $\alpha \leq t \leq \beta$) und nicht beide konstant, so bilden, wie wir wieder nur mitteilen können, alle Bilder der (x,y) eine zusammenhängende Kurve.
Setzen wir weiterhin die Ableitbarkeit der Funktionen $x(t)$ und $y(f)$ voraus, so besteht die Möglichkeit, Systeme von Differentialgleichungen zu bilden.

Gehen wir von der Funktion $y = x^2$ aus und setzen $x(t) = t$, so ist $y(x) = t^2$. Die Ableitungen beider Funktionen nach t sind

$$x'(t) = 1 \quad , \quad y'(t) = 2t$$

Daraus bilden wir das System

$$x'(t) = 1 \quad , \quad y'(t) = 2x(t)$$

Aus der 1. Gleichung folgt durch unbestimmte Integration

$$x(t) = 1 + c_1$$

Dann wird die 2. Gleichung zu $y'(t) = 2t + 2c_1$, woraus folgt

$$y(t) = t^2 + 2c_1 t + c_2$$

Setzen wir als Anfangswerte $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$ fest, so erhalten wir

$$x = t \qquad , \qquad y = t^2$$

was nach Elimination von t wieder zu $y = x^2$ führt.
Damit können wir die bisher behandelten (einfachen) Systeme von Differentialgleichungen geometrisch deuten.

Das erste Beispiel von 17.2 war demnach ein System, das sich auf die Parameterdarstellung des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ bezog.
Das zweite Beispiel befasste sich mit der Funktion $y = \frac{1}{6}x^3$, wobei einfach $x = t$ eingeführt wurde.

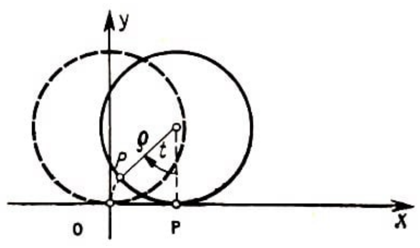
Die geometrische Deutung der übrigen Beispiele ist schwieriger, führt aber, wie man leicht erkennt, grundsätzlich auf Kurvenscharen in der x,y-Ebene und auf eine bestimmte Kurve, wenn entsprechende Anfangsbedingungen gestellt werden.

Liegt ein Anfangswertproblem mit 3 Differentialgleichungen 1. Ordnung vor

$$x'(t) = l_1(x,y,z), \qquad y'(t) = l_2(x,y,z), \qquad z'(t) = l_3(x,y,z)$$

so lässt sich die allgemeine Lösung als Schar von Raumkurven deuten.

Es gibt Kurven, die sich analytisch nur in Parameterdarstelluug befriedigend angeben lassen.
Ein Kreis mit dem Radius ρ möge auf einer Geraden abrollen. Wir wollen einen Punkt auf der Peripherie markieren und seine Bahn mit Hilfe analytischer Ausdrücke beschreiben.
Die Gerade sei die x-Achse. Die Anfangslage des Kreises sei die in Bild 29 durch den gestrichelten Kreis angegebene.



Der markierte Punkt befindet sich im Nullpunkt. Rollt jetzt der Kreis in Richtung der positiven x-Achse ab, so bewegt sich der Punkt irgendwie nach oben, erreicht einen höchsten Punkt $(\pi\rho; 2\rho)$ und erreicht abwärts wandernd wieder die x-Achse (in $2\pi\rho, 0)$. Dann wiederholt sich das ganze jeweils um $2\pi\rho$ (nach rechts oder nach links) verschoben.
Für die analytische Darstellung der Kurve wählen wir den Winkel, um den sich der Kreis gedreht hat, als Parameter und bezeichnen sein Bogenmaß mit t.

Die Strecke OF ist diejenige, auf der der Kreis gerollt ist. Ihre Länge beträgt ρt entsprechend dem Bogen $\widehat{PF}$ des Kreises, der auf der x-Achse gerollt ist. Die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ lassen sich dann aus der Zeichnung ohne besondere Mühe entnehmen:

$$x = \rho t - \rho \sin t = \rho(t - \sin t) \qquad , \qquad y = \rho - \rho \cos t = \rho(1 - \cos t)$$

Die erhaltene Kurve trägt den Namen "gewöhnlich Zykloide".
Man erhält eine gestreckte bzw. eine verschlungene Zykloide, wenn man den markierten Punkt auf dem Radius bzw. außerhalb des Kreises auf dem verlängerten Radius annimmt. Weitere interessante Kurven erhält man, wenn man den Kreis auf einem anderen Kreis (innen oder außen) abrollen lässt.

Wollte man den Parameter eliminieren, um zu einer (möglichst expliziten) Darstellung zu kommen, so würde man höchstens einen analytischen Ausdruck der Form

$$x = f(y)$$

aufstellen können, der wegen seiner komplizierten Form unzweckmäßig ist, so dass man Gleichungen von Zykloiden analytisch immer in der Parameterform angibt.

17.4 Physikalische Anwendungen

1. Wir wollen die Bewegung eines Massenpunktes studieren, der unter der Einwirkung einer Kraft $\mathfrak{F}$ steht, die ihrerseits gewissen Bedingungen (Kraftgesetz) unterworfen ist. Das Kraftgesetz möge

$$\mathfrak{F} = -k^2\mathfrak{r}$$

lauten. Die Bewegung soll sich in der x,y-Ebene abspielen. $\mathfrak{r}$ ist dabei der Ortsvektor des Punktes $(x(t); y(t))$, in dem sich die Masse m (Massenpunkt) zur Zeit t befindet. Die auftretenden Geschwindigkeiten mögen so weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen, dass das Newtonsche Gesetz $\mathfrak{F} = m\mathfrak{a}$ ohne Bedenken angewendet werden kann.

Wir erinnern daran, dass die Beschleunigung sich aus der zweiten Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt $\left(\mathfrak{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathfrak{s}}{\mathrm{d}t^2}\right)$.
Wie in der Physik üblich, sollen Ableitungen nach der Zeit durch über das Funktionssymbol gesetzte Punkte angegeben werden.

Nun zerlegen wir die Kraft in Komponenten parallel zu den Achsen und erhalten

$$\mathfrak{F} = m\mathfrak{a} = m(\ddot{x}\mathfrak{i} + \ddot{y}\mathfrak{j}) = -k^2(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j})$$

Hieraus ergibt sich ein System von Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = -\frac{k^2}{m}x = -\omega^2 x \qquad , \qquad \ddot{y} = -\frac{k^2}{m}y = -\omega^2 y \qquad \left(\frac{k^2}{m} = \omega\right)$$

Beide Gleichungen haben denselben Aufbau. Wir lösen etwa

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Die Lösung lautet

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

Entsprechend ergibt sich

$$y(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t$$

Gleichzeitig muss also gelten

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad , \quad y(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t$$

Die Bestimmung der frei verfügbaren Konstanten nehmen wir mit Hilfe von Anfangsbedingungen vor.

1.1. Zur Zeit $t = 0$ sei $x = k \cos \alpha_0$, $y = k \sin \alpha_0$, (vgl. Bild 30).

$$\dot{x} = 0 \qquad \dot{y} = 0$$

Dann ergeben sich die c_ν aus den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x(0) = c_1 = k \cos \alpha_0 \quad &; \quad y(0) = c_3 = k \sin \alpha_0 \\ \dot{x}(0) = \omega c_2 = 0 \quad &; \quad \dot{y}(0) = \omega c_4 = 0 \end{aligned}$$

Damit wird die Bewegung des Massenpunktes durch die Gleichungen

$$x(t) = k \cos \alpha_0 \cos \omega t \quad , \quad y(t) = k \sin \alpha_0 \sin \omega t$$

beschrieben. Die Elimination des Parameters t geschieht am besten durch Division

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha_0 \quad , \quad y = x \tan \alpha_0$$

Die Bahn des Punktes ist also die Gerade durch den Nullpunkt mit dem Neigungswinkel α_0. Wegen

$$-1 \leq \cos \omega t \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sin \omega t \leq 1$$

vollführt der Punkt pendelnde Bewegungen zwischen den Punkten A und A' (vgl. Bild 30). Dabei ist die sogenannte Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$; d.h. $f = \frac{\omega}{2\pi}$ gibt an, wieviel vollständige Hin- und Herbewegungen in der Zeiteinheit ausgeführt werden. Die Bewegung ist eine harmonische Schwingung.

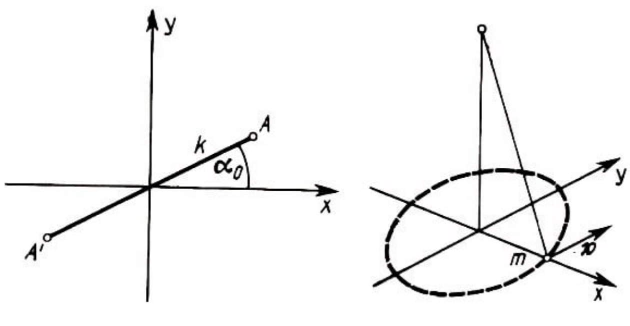


Bild 30, 31

1.2. Zur Zeit $t = 0$ sei $x = a$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v$.
Die Bestimmung der c_ν erfolgt dann aus den Gleichungen

$$x(0) = c_1 = a \quad , \quad y(0) = c_3 = 0$$
$$\dot{x}(0) = c_2\omega = 0 \quad , \quad \dot{y}(0) = c_4\omega = v$$

Damit lauten die Gleichungen, die diese Bewegung beschreiben

$$x(t) = k\cos\omega t \quad , \quad y(t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

Wenn $\frac{v}{\omega} = k$ ist, dann bewegt sich der Massenpunkt auf einem Kreis mit dem Radius k. Dieser Fall lässt sich durch ein Kegelpendel realisieren (Bild 31).
Ist $\frac{v}{\omega} \neq k$, so ist die Bahn des Massenpunktes eine Ellipse.

2. Jetzt soll die Kraft in Richtung der negativen y-Achse mit konstanter Stärke wirken.

$$\mathfrak{F} = -mg\mathfrak{j} \qquad (g \text{ die Erdbeschleunigung})$$

Wir nehmen wieder eine Zerlegung in Komponenten vor

$$\mathfrak{F} = m\mathfrak{a} = m(\ddot{x}\mathfrak{i} + \ddot{y}\mathfrak{j}) = -mg\mathfrak{j}$$

und erhalten das System von Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad , \quad \ddot{y}(t) = -g$$

Die Integration ist für jede Gleichung getrennt durchführbar und ergibt

$$x(t) = c_1 + c_2 t \quad , \quad y(t) = c_3 + c_4 t - \frac{g}{2}t^2$$

Die Bestimmung der Konstanten erfolgt aus den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha_0, \quad \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha_0$$

Die letzten beiden Gleichungen bedeuten, dass der Körper (von der Masse m) zur Zeit $t = 0$ den Nullpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, die mit der positiven x-Achse den Winkel α_0 bildet, verlässt.
Die Anfangsbedingungen führen zu den Gleichungen

$$0 = c_1, \quad 0 = c_3, \quad v_0\cos\alpha_0 = c_2, \quad v_0\sin\alpha_0 = c_4$$

Die Bewegung des Körpers wird also durch die Gleichungen

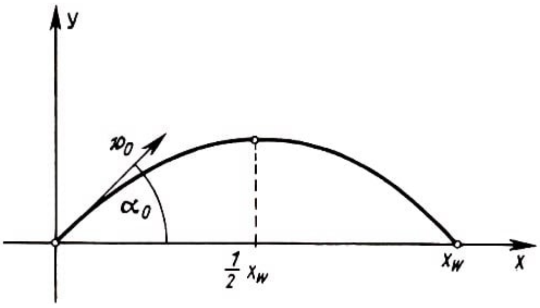
$$x(t) = v_0\cos\alpha_0 t \quad , \quad y(t) = v_0\sin\alpha_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

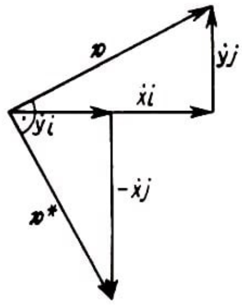
beschrieben. Wenn wir t aus der ersten Gleichung eliminieren, erhalten wir wegen $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}$

$$y(x) = x\tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 2\cos^2\alpha_0}x^2$$

Die Bahn des Körpers ist also eine Parabel. Es ist die bekannte Wurfparabel. Die nach "unten" wirkende Kraft ist die Schwerkraft.
Der Körper wurde mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α_0 gegen die Horizontale abgeworfen. Der Luftwiderstand blieb unberücksichtigt (Bild 32).

Bild 32, 33





Die Funktion $y(x)$ hat zwei Nullstellen. Die erste liegt im Nullpunkt, der Abwurfstelle; die zweite gibt mit ihrem Wert

$$x_w = \frac{\tan \alpha_0 2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0$$

die Wurfweite an. Die größte Wurfweite wird erzielt, wenn bei gleichbleibendem v_0 der Faktor $\sin 2\alpha_0$ seinen größten Wert annimmt, also für $2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ woraus folgt, dass

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

der günstigste Abwurfwinkel ist. (Beim Kugelstoßen ist die Höhe h der Abwurfstelle über dem Erdboden zu berücksichtigen, wodurch der günstigste Abwurfwinkel etwas kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ausfällt.)

Die größte Wurfhöhe ergibt sich aus Symmetriegründen bei $x = \frac{1}{2} x_W$ und beträgt

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0$$

3. Das Kraftgesetz unseres letzten Beispiels ist komplizierter.
Es soll einmal eine konstante Kraftkomponente in Richtung der positiven y-Achse wirken. Zum anderen soll die Kraft noch eine zweite Komponente besitzen, die in jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit des Massenpunktes wirkt und deren Betrag dem Betrag der Geschwindigkeit proportional ist.
Ist also

$$\mathfrak{v} = \dot{x}(t)\mathfrak{i} + \dot{y}(t)\mathfrak{j}$$

die Geschwindigkeit zur Zeit t, so wäre z.B.

$$\mathfrak{v}^* = \dot{y}(t)\mathfrak{t} - \dot{x}(t)\mathfrak{j}$$

ein Vektor, der senkrecht auf $\mathfrak{w}$ steht, wie man mit Hilfe des Skalarprodukts sofort feststellt (Bild 33).
Unser Kraftgesetz soll dann folgendermaßen lauten:

$$\mathfrak{F} = m\rho\mathfrak{j} + m(\dot{y}(t)\mathfrak{i} - \dot{x}(t)\mathfrak{j}) \qquad (\rho > 0)$$

Die Komponentenzerlegung ergibt

$$\mathfrak{F} = m\mathfrak{a} = m(\ddot{x}(t)\mathfrak{i} + \ddot{y}(t)\mathfrak{j}) = m(\rho\mathfrak{j} + \dot{y}(t)\mathfrak{i} + \dot{x}(t)\mathfrak{j})$$

und führt auf das System

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}(t) \qquad , \qquad \ddot{y}(t) = -\dot{x}(t) + \rho$$

Durch Ableiten der 1. Gleichung nach t ergibt sich

$$\dddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = -\dot{x}(t) + \rho$$

Damit haben wir das System auf eine inhomogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt:

$$\dddot{x}(t) + \dot{x}(t) = \rho$$

(Der Leser möge das Problem auch als System lösen, vgl. Aufgabe 10.)
Die charakteristische Gleichung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\lambda^3 + \lambda = 0$ besitzt die Wurzeln $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ und $\lambda_3 = -i$. Wir erhalten also

$$x_H(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzen wir an $x_p(t) = At$ (Resonanzfall) und erhalten $A = \rho$, so dass die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \rho t$$

ist. Zur Bestimmung von $y(t)$ berücksichtigen wir

$$\dot{y}(t) = \ddot{x}(t) = -c_2 \cos t - c_3 \sin t$$

und erhalten

$$y(t) = -c_2 \sin t + c_3 \cos t + c_4$$

Wir setzen nun die folgenden Anfangsbedingungen fest: Zur Zeit $t = 0$ sei $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Das ergibt zur Bestimmung der Konstanten c_ν die Gleichungen

$$0 = c_1 + c_2, \quad 0 = c_3 + c_4, \quad 0 = c_3 + \rho, \quad 0 = -c_2$$

mit den Lösungen $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = -\rho$ und $c_4 = \rho$.
Die Bewegung unseres Massenpunktes vollzieht sich demnach nach den Gleichungen

$$x(t) = -\rho \sin t + \rho t = \rho(t - \sin t) \qquad , \qquad y(t) = -\rho \cos t + \rho = \rho(1 - \cos t)$$

Der Leser wird bereits gemerkt haben, dass das die Gleichung einer (gewöhnlichen) Zykloide ist.

Wir können auch diesen Fall realisieren. Die x-Achse sei der Schnitt durch eine positiv geladene Kondensatorplatte, senkrecht zur x,y-Ebene. Die andere liegt parallel dazu in der oberen Halbebene. Zwischen beiden herrsche ein konstantes elektrisches Feld.
Außerdem nehmen wir ein magnetisches Feld senkrecht zur x,y-Ebene an (Richtung der Feldlinien senkrecht in die Tafel hinein) (Bild 34).

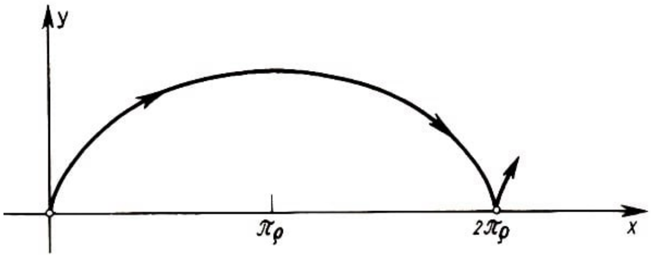


Bild 34

Ein zur Zeit t im Nullpunkt befindliches positiv geladenes Teilchen wird abgestoßen und vom elektrischen Feld mit der (angenommenen) Kraft $m\rho$ in Richtung der positiven y-Achse bewegt. Es stellt dabei einen elektrischen (Konvektions-)Strom dar und wird etwa nach der Dreifingerregel der rechten Hand senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung, d. h. senkrecht zu seiner Geschwindigkeit abgelenkt.
Die ablenkende Kraft wurde gleich $m(\dot{y}\mathfrak{i} - \dot{x}\mathfrak{j})$ angenommen.

Infolge der ablenkenden Wirkung des Magnetfeldes wird das Teilchen schließlich wieder zur x-Achse hingelenkt. Sobald es diese erreicht hat, wiederholt sich der Vorgang mit neuem Anfangspunkt.
Wir werfen noch einen Blick auf die Geschwindigkeit des Teilchens. Es ist

$$|\mathfrak{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\rho^2(1-\cos t)^2 + \rho^2 \sin^2 t} = \rho\sqrt{2(1-\cos t)} = 2\rho \sin\frac{t}{2}$$

$(0 \leq t \leq 2\pi)$
Demnach erreicht das Teilchen seine Höchstgeschwindigkeit für $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}$ also für $t = \pi$, d.h. im höchsten Punkt seiner Bahn im Laufe einer Periode. Dann verringert sich seine Geschwindigkeit und es erreicht die x-Achse bei $x = 2\pi\rho$ mit $v = 0$ wie am Anfang der Bewegung.

17.5 Aufgaben

		Lösung:
1.	$\dot{x} = 2x - 3y$	$x(t) = 3Ae^t + Be^{-t}$
	$\dot{y} = x - 2y$	$y(t) = Ae^t + Be^{-t}$
2.	$\dot{x} = 4x + 2y$	$x(t) = c_1 + c_2e^{8t}$
	$\dot{y} = 8x + 4y$	$y(t) = -2c_1 + 2c_2e^{8t}$

		Lösung:
3.	$\dot{x} = x - y$	$x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$
	$\dot{y} = x + 3y$	$y(t) = -(c_1 + c_2)e^{2t} - c_2te^{2t}$
4.	$\dot{x} = x - 2y$	$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
	$\dot{y} = x - y$	$y(t) = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin t$
5.	$\dot{x} = x + y + t$	$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - t - 2$
	$\dot{y} = -y + 1$	$y(t) = -2c_2e^{-t} + 1$

6. $b\dot{x} = -ay$; $\quad a\dot{y} = bc$, $(a,b > 0)$
Welche Gestalt hat die Lösungskurve bei $x(0) = a$; $y(0) = 0$?
Lösung: $x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$

Die Lösungskurve ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

		Lösung:
7.	$\dot{x} = x + y - z$	$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$
	$\dot{y} = x - y + z$	$y(t) = c_1 e^t - 2c_3 e^{-2t}$
	$\dot{z} = -x + y - z$	$z(t) = c_1 e^t - c_2 e^{2t} + c_3 e{-}2t$
8.	$\dot{x} = y + z$	$x(t) = c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t}$
	$\dot{y} = z + x$	$y(t) = -(c_1 + c_2)e^{-t} + c_3 e^{2t}$
	$\dot{z} = x + y$	$z(t) = c_2 e^{-t} + c_3 e 2t$
9.	$\dot{x} = x + 2y + 1$	$x(t) = 2c_1 + c_2 e^{5t} + \frac{6}{5}t + \frac{1}{25}$
	$\dot{y} = 2x + 4y - 1$	$y(t) = -c_1 + 2c_2 e^{5t} - \frac{3}{5}t + \frac{2}{25}$

10. $\ddot{x} = \dot{y}; \quad \ddot{y} = -\dot{x} + a$; $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$
Lösung: $x(t) = a(t - \sin t)$; $y(t) = a(1 - \cos t)$
Die Lösungskurve ist die gewöhnliche Zykloide.

11. $\ddot{x} = y; \quad \dot{y} = x$
Lösung: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$
$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t$

12. Man löse die Differentialgleichung $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ als System.
Anleitung: Man setze: $y = u$ und $u' = v$, $v' = w$, $w' = -2w + v + 2u$
Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$

18 Literaturverzeichnis

Literatur über Differentialgleichungen

Alkier, H., und Mehner, I., Lehrbriefe für das Fernstudium - Höhere Mathematik 17. und 18. Lehrbrief, II. Ausgabe, Gewöhnliche Differentialgleichungen, VEB Verlag Technik, Berlin 1963

Baule, B., Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band 4: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 9. Auflage, Hirzel, Leipzig 1970

Casanova, G., Mathématiques speciales, Tome II, Algebre et Analyse Libraire Belin, Paris 1964

Collatz, L., Differentialgleichungen für Ingenieure, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart 1960

Goering, H., Elementare Methoden zur Lösung von Differentialgleichungsproblemen, Akademie-Verlag, Berlin 1967

Kamke, E., Differentialgleichungen, I Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1964

Kneschke, A., Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Band 1 Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Aufl., Teubner, Leipzig 1965

Petrowski, I.G., Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Teubner, Leipzig 1954

Piskunow, Differential- und Integralrechnung, Teil 2, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1970

Stepanow, W. W., Lehrbuch der Differentialgleichungen, 3. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

Literatur über Lineare Algebra

Belkner, H., Determinanten, 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1970

Belkner, H., Matrizen, Teubner, Leipzig 4970

Kochendörfer, R., Determinanten und Matrizen, Teubner, Leipzig 1957

Jung, H.W.E., Matrizen und Determinanten, Fachbuchverlag, Leipzig 1951

Nachschlagewerk

Kleine Enzyklopädie Mathematik, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1965