

---

**N.J. Wilenkin**

**Unterhaltsame Mengenlehre**

Übersetzung: Reinhard Hofmann  
1973 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft  
MSB: Nr. 64  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematikalpha.de>

## Vorwort zur russischen Ausgabe

Als ich zum ersten Male etwas von der Theorie der Mengen hörte, war ich ein Schüler der achten Klasse. Ich geriet nämlich eines Tages in eine Vorlesung, welche I.M.Gelfand - damals ein junger Dozent, heute korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR - vor Moskauer Schülern hielt.

Im Verlauf von zwei Stunden berichtete er uns von den unwahrscheinlichsten Dingen. Er behauptete, dass es genauso viele natürliche Zahlen wie gerade, ebenso viele rationale wie natürliche Zahlen gäbe und dass auf einer Strecke genauso viele Punkte wie in einem Quadrat liegen.

Die Bekanntschaft mit der Mengenlehre wurde in den Jahren des Studiums an der Mathematisch-mechanischen Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität fortgesetzt. Neben den Vorlesungen und Seminaren gab es dort eine originelle Form des Studiums, von der die Professoren und Dozenten möglicherweise keine Ahnung hatten.

Nach den Lehrveranstaltungen (manchmal aber auch - es wäre eine Sünde, es zu verheimlichen - während einer nicht gerade interessanten Vorlesung) schlenderten die Studenten durch die Korridore des alten Gebäudes und stellten sich gegenseitig interessante Aufgaben, erläuterten einander ungewöhnliche Beispiele und scharfsinnige Beweise.

Gerade in diesen Unterhaltungen erfuhren die Anfänger von ihren älteren Kommilitonen, wie man eine Kurve konstruiert, die durch alle Punkte eines Quadrates geht, oder wie man eine Funktion erzeugt, die nirgends eine Ableitung besitzt und so weiter. Natürlich wurden auch Hinweise, wie man so sagt, "unter der Hand" gegeben, und es war ein unverzeihlicher Fehler, wenn man das Examen ablegen wollte, ohne diese Hinweise beachtet zu haben.

Aber auch wenn von der Prüfung noch keine Rede war, musste doch der Kurs "Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen" mehrere Jahre lang belegt werden, und dann war es gut, wenn man einige zusätzlichen Hinweise bekommen konnte. Aber wie dem auch sei, der "Korridorkurs" stellte für Vorlesung wie für Examen eine nicht zu unterschätzende Hilfe dar! Bei der Behandlung vieler Sätze erinnerte man sich an interessante Aufgaben, die man bereits früher zu lösen versucht hatte, als sie von Kommilitonen gestellt wurden, an tief sinnige Vergleiche oder brillante Beispiele.

Ich möchte dem Leser gern im gleichen Stil von der Mengenlehre erzählen, in dem ich sie selbst im "Korridorlehrgang" kennengelernt habe. Das Schwergewicht liegt demgemäß auf der Behandlung von Problemen und auf der Darstellung merkwürdiger- und überraschender Beispiele, die den naiven Vorstellungen meist vollkommen zuwiderlaufen und an denen die Theorie der reellen Funktionen so überaus reich ist.

Wenn ein Schüler einer höheren Klasse oder ein Student in den Anfangssemestern des Universitätsstudiums nach der Lektüre dieses kleinen Buches den Wunsch verspürt, die Theorie der Mengen, die Theorie der reellen Funktionen ernsthafter und eingehender zu studieren, dann wäre mein Ziel in schönster Weise erfüllt.

Über einige Fragen, die hier nur gestreift werden können, sind in dem Buch "Was ist eine Kurve" von A.S. Parchomenko interessante Ausführungen enthalten.

Am Schluss des vorliegenden Buches werden Aufgaben aus der Theorie der reellen Funktionen vorgelegt, deren Lösung für den Leser sehr von Nutzen sein wird. Wir bemerken noch, dass einige schwierigere Teile beim ersten Lesen übergangen werden können, ohne dass das weitere Verständnis darunter leidet. Wir haben diese Stellen durch das Zeichen (+) kenntlich gemacht.

## Vorbemerkungen

In den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts schuf der deutsche Mathematiker G. Cantor einen neuen Zweig der Mathematik - die Theorie der unendlichen Mengen.

In den darauffolgenden Jahrzehnten wurde fast die gesamte Mathematik auf das Fundament dieser Theorie gestellt. Die Begriffe der Mengenlehre erfassen die allgemeinsten Eigenschaften mathematischer Objekte.

Die allgemeine Mengenlehre wird an den Universitäten und Hochschulen gelehrt. Im vorliegenden Buch werden die wesentlichen Begriffe und Hauptresultate der Theorie unendlicher Mengen in populärwissenschaftlicher Form dargestellt. Einiges vor allem aus dem ersten Kapitel wird im Unterricht an den allgemeinbildenden Schulen der DDR behandelt.

Ein wesentlicher Teil des Buches besteht aus Erzählungen eines bekannten Helden des polnischen utopischen Schriftstellers Stanislaw Lem, des Sternenwanderers John Tichy, über ein ungewöhnliches kosmisches Hotel, das unendlich viele Zimmer hat.

Das Buch ist bestimmt für Schüler der oberen Klassen der polytechnischen Oberschulen, Schüler der erweiterten Oberschulen und Abiturklassen der Berufsschulen, die sich besonders für Mathematik interessieren, richtet sich aber auch an den großen Kreis von Lesern, die etwas mehr über die Mengenlehre erfahren möchten, als in den Mathematiklehrbüchern ihrer Kinder steht.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>Vorbemerkungen</b>	<b>3</b>
<b>1 Mengen und Mengenoperationen</b>	<b>6</b>
1.1 Was ist eigentlich eine Menge ?	6
1.2 Wie werden Mengen dargestellt?	7
1.3 Rasieren oder nicht ?	11
1.4 Die leere Menge	13
1.5 Mengenlehre in der Schule	15
1.6 Untermengen - Teilmengen	18
1.7 Mengenlehre und Kombinatorik	20
1.8 Der Begriff der Grundmenge	21
1.9 Der Durchschnitt von Mengen	22
1.10 Die Vereinigung von Mengen	25
1.11 Die Zerlegung einer Menge in elementfremde Klassen	28
1.12 Das Rechnen mit Restklassen	29
1.13 Differenzmengen	30
1.14 Mengenalgebra	31
1.15 Der Planet der Ungeheuer	36
1.16 Boolesche Algebren	39
<b>2 Die Wunderwelt des Unendlichen</b>	<b>41</b>
2.1 Die Geheimnisse der Unendlichkeit	41
2.2 Das ungewöhnliche Hotel oder die eintausendunderste Reise des John Tichy	43
2.3 Eine Bemerkung des Autors	48
2.4 Wie man Mengen vergleicht	49
2.5 Auf dem Tanzsaal	49
2.6 Der Schlüssel zum Erfolg	50
2.7 Ist ein Teil dem Ganzen gleich?	51
2.8 Abzählbare Mengen	53
2.9 Algebraische Zahlen	54
2.10 Brezeln in der Ebene	57
2.11 Nicht gleichmächtige Mengen	59
2.12 Die abzählbare Menge - die kleinste Menge mit unendlich vielen Elementen	60
2.13 Überabzählbare Mengen	61
2.14 Die undurchführbare Anweisung	61
2.15 Das Kontinuum ist überabzählbar	63
2.16 Die Existenz transzendenter Zahlen	64
2.17 Strecke und Quadrat	66
2.18 Bei einer Aufgabe kommt aus irgendeinem Grunde nichts heraus!	69
2.19 Gibt es eine Menge größter Mächtigkeit?	70
2.20 Arithmetik des Unendlichen	71
2.21 Potenzen mit unendlichen Exponenten	73
2.22 Über die Reihenfolge der Zahlen ...	74
2.23 Wohlgeordnete Mengen	75
2.24 Das unbegreifliche Axiom	77

2.25	Der große Zaubertrick . . . . .	78
2.26	Endliche Zerlegungen . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Von merkwürdigen Funktionen und Linien oder Spaziergänge durch das mathematische Kunstkabinett</b>	<b>80</b>
3.1	Wie sich der Funktionsbegriff entwickelt hat . . . . .	80
3.2	Der Geist aus der Flasche . . . . .	83
3.3	Nasse Punkte . . . . .	84
3.4	Eine verteufelte Treppe! . . . . .	86
3.5	Die stachlige Linie . . . . .	87
3.6	Eine geschlossene Linie unendlicher Länge . . . . .	90
3.7	Der mathematische Teppich . . . . .	91
3.8	Euklid kann uns nicht helfen . . . . .	94
3.9	Sind strenge Definitionen notwendig ? . . . . .	94
3.10	Der Satz liegt auf der Hand - aber nicht sein Beweis! . . . . .	98
3.11	Eine Kurve, die durch alle Punkte eines Quadrates geht . . . . .	98
3.12	Alles lag in Trümmern . . . . .	100
3.13	Wie man eine Statue formt . . . . .	101
3.14	Kontinua . . . . .	102
3.15	Cantorsche Linien . . . . .	103
3.16	Gebiete ohne Flächeninhalt . . . . .	106
3.17	Überraschende Beispiele . . . . .	108
3.18	Gebiete und Ränder . . . . .	109
3.19	Ein grandioses Bewässerungsvorhaben . . . . .	110
3.20	Das unsichere Dissertationsthema . . . . .	111
3.21	Die induktive Definition der Dimension . . . . .	112
3.22	Diese Arbeit soll gedruckt und nicht rezensiert werden! . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>116</b>
<b>5</b>	<b>Beispiele und Übungen</b>	<b>117</b>
<b>6</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>120</b>

# 1 Mengen und Mengenoperationen

## 1.1 Was ist eigentlich eine Menge ?

Wir beginnen unsere Unterhaltung über Mengen damit, dass wir uns darüber klar werden, was Mengen eigentlich sind und wie man sie untereinander in Beziehung setzen kann. Eine strenge Definition kann man für den Grundbegriff der ganzen Theorie, den Begriff der Menge, nicht angeben. Das heißt folgendes:

Man kann zwar sagen, dass eine Menge eine "Gesamtheit", eine "Sammlung", ein "Ensemble", eine "Kollektion", ein "System", eine "Familie", eine "Klasse" ... von Dingen ist, wir haben aber damit keine mathematische Definition gegeben, sondern höchstens den Wortreichtum der deutschen Sprache missbraucht!

Um irgend einen Begriff zu definieren, muss man vor allem sagen, von welchem umfassenderen Begriff er durch Spezialisierung gewonnen werden kann. Für den Begriff der Menge ist das aber unmöglich, weil es einen allgemeineren Begriff als den der Menge in der Mathematik überhaupt nicht gibt.

Das ist der Grund dafür, dass wir den Mengenbegriff nur durch Beispiele illustrieren wollen und keine Definition angeben.

Sehr häufig kommt es vor, dass man über gewisse Dinge sprechen muss, die ein gemeinsames Merkmal besitzen. So kann man etwa von der Menge aller Stühle in einem Zimmer, von der Menge der Atome auf dem Jupiter, von der Menge aller Zellen des menschlichen Körpers, von der Menge der Fische im Ozean, von der Menge aller Quadrate in einer Ebene oder von der Menge aller Punkte auf einer gegebenen Kreislinie sprechen, um nur einige Beispiele willkürlich herauszugreifen.

Die Dinge, welche eine gegebene Menge bilden, heißen ihre Elemente.

Gewöhnlich schreibt man

$$A = \{x, y, \dots, z\}$$

wenn die betrachtete Menge  $A$  aus den Elementen  $x, y, \dots$  und  $z$  besteht.

So wird beispielsweise die Menge der Wochentage durch {Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag}; die Menge der Monate des Jahres durch {Januar, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November, Dezember} und die Menge der arithmetischen Grundoperationen durch {Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division} symbolisiert.

Die Menge der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

besteht aus den beiden Zahlen -4 und 6, es handelt sich also um die Lösungsmenge  $\{-4, 6\}$ .

Die geschweiften Klammern in der Darstellung der Mengen weisen darauf hin, dass die einzelnen Elemente zu einer Einheit - eben gerade der Menge  $A$  - zusammengefasst werden.

Wenn ein Element  $x$  zu einer Menge  $A$  gehört, dann schreibt man  $x \in A$  und liest " $x$  (ist) Element von  $A$ ". Gehört ein bestimmtes Element  $y$  dagegen gerade nicht zur Menge, dann drücken wir das durch die Schreibweise  $y \notin A$  aus, die " $y$  ist nicht Element von  $A$ " gelesen wird. Wenn also zum Beispiel  $A$  die Menge aller geraden natürlichen Zahlen bezeichnet, dann ist

$$6 \in A \quad \text{und} \quad 3 \notin A$$

Ist  $A$  das Symbol für die Menge aller Monate, so gilt  $\text{Mai} \in A$ , aber  $\text{Mittwoch} \notin A$ .

Wenn wir demnach von einer Menge sprechen, so fassen wir stets einige Dinge zu einer Einheit - der Menge - zusammen und nennen dieselben dann Elemente der Menge. Der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, umschrieb das mit den folgenden Worten:

"Eine Menge ist eine Vielheit, die von uns als eine Einheit gedacht wird".

Auch Dinge ohne materielle Existenz, wie Gedanken und Begriffe oder auch Geister und Dämonen, können ohne weiteres Elemente gewisser Mengen sein. So pflegt beispielsweise ein indianischer Medizinmann ganz ernsthaft Umgang mit der Menge der Stammesgeister.

Um ein anschauliches Bild für den Begriff der Menge zu geben, gebrauchte N. N. Lusin den folgenden Vergleich. Wir stellen uns einen durchsichtigen, undurchdringlichen Behälter etwa in der Art einer fest verschlossenen Plasttüte vor.

Wir setzen voraus, dass alle Elemente einer gegebenen Menge sich im Inneren dieser Haut befinden und dass es dort keine weiteren Gegenstände gibt.

Diese Hülle mit den in ihrem Inneren befindlichen Elementen  $x$  kann als Modell einer Menge  $A$  aufgefasst werden, die sich aus den Elementen  $x$  zusammensetzt. Der durchsichtige Sack selbst ist dabei als Darstellung des Aktes der Vereinigung der Elemente  $x$  zur Menge  $A$  aufzufassen, indem er alle Elemente (aber auch keine weiteren Dinge) umschließt.

Besteht eine Menge aus einer endlichen Zahl von Elementen, dann sprechen wir von einer endlichen Menge, gibt es in ihr aber unendlich viele Elemente, dann bezeichnen wir sie als unendliche Menge.

So ist die Menge der Bäume eines Waldes endlich, während die Menge der Punkte einer Kreislinie ganz sicher unendlich ist.

## 1.2 Wie werden Mengen dargestellt?

Es gibt viele Möglichkeiten zur Beschreibung einer bestimmten Menge. Die einfachste besteht darin, alle in der Menge enthaltenen Elemente aufzuzählen.

Zum Beispiel wird die Menge der Schüler einer Klasse durch die Liste ihrer Namen im Klassenbuch beschrieben, die Menge aller Länder der Erde durch ihre Liste in einem Atlas, die Menge aller Knochen des menschlichen Skeletts wird durch eine Tabelle im Anatomiebuch festgehalten.

Diese Form der Darstellung können wir jedoch nur bei endlichen Mengen verwenden, und auch hier gebrauchen wir sie nicht in allen Fällen. Die Menge aller Fische im Ozean ist ja auch endlich, ich glaube aber nicht, dass jemand diese Menge listenmäßig erfassen möchte.

Unendliche Mengen können niemals mit Hilfe einer Liste definiert werden. - Oder will irgend jemand versuchen, eine Liste aller natürlichen Zahlen oder eine Aufstellung aller Punkte einer bestimmten Kreislinie anzufertigen? Es ist ja klar, dass man mit der Aufstellung einer solchen Liste niemals zum Ende kommen würde.

Als zweite Darstellungsmöglichkeit bietet sich die Charakterisierung durch die Eigenschaft an, die gerade alle Elemente der betrachteten Menge vor allen anderen Dingen auszeichnet. Man spricht dann von einer charakterisierenden Eigenschaft.



Bild 1

Beispielsweise können wir von der Menge aller natürlichen Zahlen sprechen, und es ist dann klar, dass die Zahl 73 dieser Menge angehört, die Zahl  $3/4$  oder ein Krokodil jedoch nicht. Ebenso gehören etwa  $\sqrt{2}$  und der Planet Saturn nicht zur Menge der rationalen Zahlen, während die Zahl  $7/15$  sehr wohl Element dieser Menge ist.

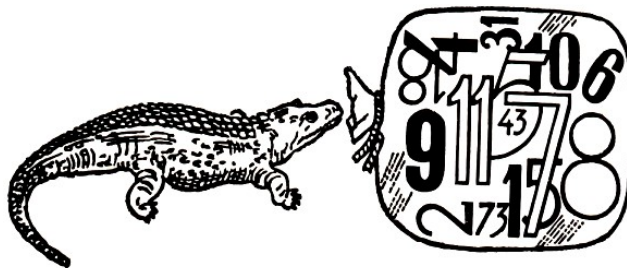


Bild 2

Sehr häufig hat man es in der Geometrie mit Punktmenge zu tun, deren Elemente durch die eine oder andere Eigenschaft bestimmt sind. Eine solche Punktmenge mit einer gegebenen charakterisierenden Eigenschaft nennt man seit alters her in der Geometrie geometrischer Ort.

Man sagt zum Beispiel: "Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem gegebenen festen Punkt dieser Ebene die gleiche Entfernung haben".

Das soll heißen, dass die Menge aller Punkte der Ebene, die gleich weit von einem gegebenen festen Punkt der Ebene entfernt sind, mit der Menge der Punkte einer bestimmten Kreislinie identisch ist.

Manchmal führt aber auch die Definition von Mengen durch ihre charakterisierende Eigenschaft zu Schwierigkeiten. Zunächst kann es vorkommen, dass zwei verschiedene Eigenschaften ein und dieselbe Menge charakterisieren, d. h., dass jedes Element mit der einen Eigenschaft auch die andere besitzt und umgekehrt.

So definiert etwa die Eigenschaft der Punkt  $M$  ist von den Schenkeln des Winkels  $AOB$  gleichweit entfernt die gleiche Menge wie die Eigenschaft der Winkel  $AOM$  ist gleich dem Winkel  $MOB$  (vgl. Abb. 3. Hier werden nur innerhalb des Winkels liegende Punkte  $M$  berücksichtigt).

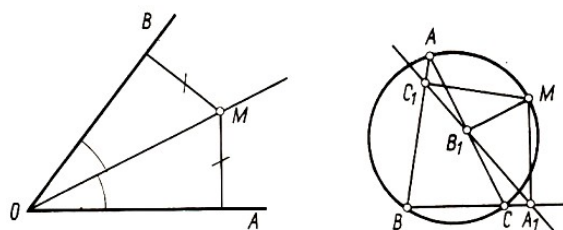


Bild 3,4



Die Eigenschaft ganze, durch 2 teilbare Zahl bestimmt die gleiche Menge wie ganze Zahl, deren letzte Ziffer im Dezimalsystem durch zwei teilbar ist, um auch ein Beispiel aus der Arithmetik zu nennen.

Häufig fällt es gar nicht leicht, die Gleichwertigkeit (Äquivalenz) zweier charakterisierender Eigenschaften zu beweisen.

Man versuche zu zeigen, dass die folgenden Eigenschaften dieselbe Punktmenge bestimmen, die mit dem Dreieck  $ABC$  in einer Ebene liegt:

a) die Fußpunkte der Lote, die man von  $M$  aus auf die Seiten des Dreiecks  $ABC$  fällt, liegen auf einer Geraden.

b) Der Punkt  $M$  liegt auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  (Abb.4) (Die Identität der durch a) bzw. b) bestimmten Punktmenge ist der Inhalt des Satzes von Simson und seiner Umkehrung [auch Satz über die Wallace-Gerade genannt, vgl. Lietzmann "Wo steckt der Fehler", Leipzig 1969, S. 88]).

Überhaupt beinhalten viele mathematischen Sätze Aussagen über die Gleichheit zweier Mengen, z. B. der Menge der gleichseitigen Dreiecke mit der Menge der gleichwinkligen Dreiecke, der Menge der Tangentenvierecke mit der Menge der konvexen Vierecke mit jeweils gleicher Summe der Gegenseitenpaare usw.

In einigen Fällen ist die Frage nach der Übereinstimmung oder Verschiedenheit zweier durch ihre charakterisierenden Eigenschaften gegebenen Mengen noch immer ungeklärt. So ist bis heute noch unbekannt, ob die Menge  $\{1093, 3511\}$  mit der Menge derjenigen natürlichen Zahlen  $n$  identisch ist, für die  $2^n - 2$  durch  $n^2$  teilbar ist.

Weit größere Schwierigkeiten für die Darstellung von Mengen durch ihre charakterisierenden Eigenschaften erwachsen jedoch aus der unzureichenden Exaktheit der Umgangssprache, aus der Vieldeutigkeit menschlicher Rede. Auch die große Zahl von Übergangsformen erschwert häufig die Abgrenzung von Objekten einer bestimmten Eigenart von den Dingen, die diese Eigenschaft nicht besitzen.

Sprechen wir beispielsweise von der Menge aller Bäume auf der Erde, so ist zunächst wohl einmal klarzustellen, ob alle Bäume gemeint sein sollen, die je auf der Erde wuchsen und zukünftig wachsen werden, oder nur die Bäume, die innerhalb eines gewissen wohlbestimmten Zeitabschnittes existierten.

Wenn das entschieden ist, dann bleibt aber immer noch die Frage, was mit den innerhalb dieses Zeitabschnittes abgesägten Bäumen geschehen soll. Ferner gibt es bekanntlich eine ganze Reihe von Übergangsformen zwischen Bäumen und anderen Pflanzen, und es bleibt die Frage zu beantworten, welche von ihnen zur Menge der Bäume gezählt werden sollen und welche nicht.

Auch eine solche Menge, wie die der Planeten unseres Sonnensystems, ist nicht vollkommen eindeutig bestimmt!

Zusammen mit den großen Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto) kreisen noch ungefähr 1600 kleine Planeten, die sogenannten Planetoiden, um die Sonne.

Die Durchmesser einiger dieser Planeten messen nach hunderten von Kilometern, es gibt aber auch solche, deren Durchmesser 1 km nicht übersteigen. Mit der Verbesserung der Beobachtungsmethoden werden die Astronomen immer neue und noch kleinere Planeten entdecken, und man muss sich schließlich fragen, wo die Grenze zwischen Planeten, Meteoriten und kos-

mischem Staub zu ziehen ist.

In einer ähnlich schwierigen Lage befand sich ein Mann, der die Kriminalität in Chicago studieren sollte und nach einiger Zeit verzweifelt ausrief: "Wo beginnt hier die Polizei, und wo enden die Gangster?"

Er erhielt hierauf von einem Kenner der Verhältnisse die weise Antwort, "dass die Polizei genau dort endet, wo die Verbrecher-Gangs anfangen."

Unter Verwendung der entsprechenden Feststellung: "Planeten hören auf, wo die Meteoriten beginnen" könnte man allerdings jede beliebige Menge kosmischer Materie als Planetensystem der Sonne exakt "definieren".

Der Unterschied zwischen Planet und Meteorit wird möglicherweise nur die Astronomen interessieren.

Die Frage nach dem Unterschied zwischen Haus und Hütte kann aber für jeden Inhaber einer Wohnung recht interessant werden. Man kann sich unschwer vorstellen, dass ein und dasselbe Gebäude von dem einen Menschen voller Stolz Haus genannt und von einem anderen geringschätzig als Hütte abgetan wird.

Selbstverständlich hängt also auch die Tatsache, ob das eine oder andere Gebäude zur Menge der Paläste gezählt wird, notwendigerweise davon ab, wem die Aufstellung der Liste dieser Menge übertragen würde.

Auch die Menge der Gedichte, die in russischer Sprache erschienen sind, lässt sich wegen der Existenz der unzähligen Übergangsformen zwischen Lyrik und Prosa (rhythmische Prosa, reimlose Verse usw.) unmöglich definieren.

Unmöglich kann auch die Menge der Personen, die berechtigterweise einen Zug der Eisenbahn ohne Fahrkarte benutzen, genau definiert werden. Zu dieser Menge gehören ja bekanntlich die Kinder unter vier Jahren. Sicher kann es aber vorkommen, dass ein solcher kleiner Fahrgast gerade unterwegs sein viertes Lebensjahr vollendet, und dann ist es unklar, ob er noch zur Menge gehört oder nicht. (Man erzählt, dass ein pedantischer Vater genau in dem Augenblick die Notbremse bedient hat, in dem sein Sohn vier Jahre alt geworden war, um so die genaue Strecke bestimmen zu können, für die er nun eine Fahrkarte nachlösen musste.)

Schon in recht einfachen Fällen ergeben sich gewisse Feinheiten im Zusammenhang mit Ungenauigkeiten und Unvollkommenheiten der Umgangssprache. Es soll beispielsweise  $A$  die Menge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen sein

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

wobei  $n$  die Zahl der Buchstaben der ersten Zeile des Urtextes von "Eugen Onegin" von Puschkin sei. Eine solche Definition kann man indessen verschieden auslegen. Einmal kann man unter der Zahl  $n$  die Anzahl sämtlicher Buchstaben als Zeichen (d.h. also die Zahl der Typen des Drucksatzes) verstehen. Wir schreiben einmal die erste Zeile auf und geben durch einen Index an, zum wievielten Mal die Buchstaben in der Folge vorkommen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{M}_1 & \mathbf{O}_1 & \mathbf{Й}_1 & & \mathbf{Д}_1 & \mathbf{Я}_1 & \mathbf{Д}_2 & \mathbf{Я}_2 & & \mathbf{С}_1 & \mathbf{А}_1 & \mathbf{М}_2 & \mathbf{Б}_1 & \mathbf{Х}_1 \\ & & & & & & & & & \mathbf{Ч}_1 & \mathbf{Е}_1 & \mathbf{С}_2 & \mathbf{Т}_1 & \mathbf{Н}_1 & \mathbf{Б}_2 & \mathbf{Х}_2 & & \mathbf{П}_1 & \mathbf{Р}_1 & \mathbf{А}_2 & \mathbf{В}_1 & \mathbf{И}_1 & \mathbf{Л}_1 \end{array}$$

Wir sehen, dass  $n = 25$  und  $A = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$  ist.

Fasst man dagegen  $n$  als Anzahl der verschiedenen Buchstaben des russischen Alphabets auf, zählt man also jeden Buchstaben nur, wenn er zum ersten Mal auftritt, dann wird  $n = 18$  und

$A = \{1,2,3,\dots,18\}$ . (Man zähle die Buchstaben mit dem Index 1!)

Dieses Beispiel zeigt uns, wie sorgfältig die Definition einer Menge formuliert werden muss, wenn man den Unklarheiten und Mehrdeutigkeiten entgehen will, die unserer, Umgangssprache eigen sind.

### 1.3 Rasieren oder nicht ?

Nicht immer hängen die mit der Definition einer bestimmten Menge verbundenen Probleme nur mit Ungenauigkeiten unserer Sprache zusammen. Manchmal liegt der Grund viel tiefer. Wir wollen uns dazu das folgende Beispiel anschauen.

Eine Menge gehört in der Regel nicht selbst zu ihren Elementen (z.B. ist die Menge aller natürlichen Zahlen selbst keine natürliche Zahl, die Menge aller Dreiecke ist kein Dreieck usw.).

Es kommen jedoch auch Mengen vor, die sich selbst als eines ihrer Elemente enthalten. So ist etwa die Menge aller abstrakten Begriffe selbst ein abstrakter Begriff (oder stimmt das etwa nicht?).

Weil solche Mengen selten betrachtet werden, nennen wir sie außerordentliche Mengen im Gegensatz zu allen anderen ordentlichen Mengen. Nun bilden wir die Menge  $A$  aller ordentlichen Mengen.

Auf den ersten Blick scheint die so definierte Menge vollkommen vernünftig zu sein. Warum sollte der Satz "die Menge aller ordentlichen Mengen" schlechter sein, als der Satz "die Menge aller natürlichen Zahlen"? In Wahrheit entsteht hier aber ein ganz entscheidender logischer Widerspruch.

Wir wollen einmal zu entscheiden versuchen, ob die soeben definierte Menge  $A$  eine ordentliche oder eine außerordentliche Menge ist.

Nehmen wir zuerst an, sie sei ordentlich, dann enthält sie sich selbst als eines ihrer Elemente (wir fassen doch alle ordentlichen Mengen zur Menge  $A$  zusammen!) und wäre damit laut Definition außerordentlich.

Nehmen wir nun aber an, dass es sich um eine außerordentliche Menge handelt, dann muss sie sich selbst als Element enthalten, unter den Elementen von  $A$  kommen aber nur ordentliche Mengen vor, die außerordentlichen hatten wir doch eben gerade nicht zu  $A$  hinzugenommen!

Der logische Widerspruch ist damit offenbar geworden: die Menge  $A$  ist weder ordentlich, noch außerordentlich!



Solche logischen Widersprüche treten übrigens auch in noch viel einfacheren Fällen auf. So wurde einmal einem Soldaten der Befehl erteilt, alle die Soldaten seiner Kompanie zu rasieren, die sich nicht selbst rasierten, und nur diese. Da aber entstand die Frage, was mit ihm selbst geschehen sollte!

Rasierte er sich, dann gehörte er zu den Soldaten seiner Kompanie, die sich selbst rasierten und durfte sich laut Befehl nicht rasieren. Rasierte er sich aber nicht, dann sollte er sich befehlsgemäß rasieren, weil er sich nicht selbst rasierte.

Es sind auch noch andere Beispiele dafür bekannt, dass eine Menge, die auf den ersten Blick vollkommen definiert zu sein scheint, sich als sehr schlecht - besser gesagt als überhaupt nicht - bestimmt erweist.

Als Beispiel dafür betrachten wir die Menge  $A$ , die aus allen rationalen Zahlen besteht, die man mit Hilfe von nicht mehr als zweihundert Worten der deutschen Sprache definieren kann (einschließlich der Zahlworte null, eins, zwei usw.). Weil die Menge aller deutschen Worte endlich ist (zur Vereinfachung wollen wir sogar annehmen, dass nur Worte aus dem Duden und ihre grammatikalischen Formen verwendet werden sollen), ist auch die Menge der so bestimmten Zahlen endlich.

Wir wollen die Zahlen mit  $r_1, r_2, \dots, r_N$  bezeichnen. Nun definieren wir eine rationale Zahl  $r$

$$r = 0, n_1 n_2 n_3 \dots n_N$$

so, dass  $n_i$  (die  $i$ -te Ziffer in der Dezimalbruchdarstellung von  $r$ ) gleich 1 ist, wenn die  $i$ -te Ziffer der Dezimalbruchdarstellung der Zahl  $r_i$  von eins verschieden ist. Anderenfalls setzen wir  $n_i = 2$ .

Die so bestimmte Zahl  $r$  ist nicht gleich  $r_i$ , weil die erste Dezimalziffer nicht übereinstimmt, sie ist nicht gleich  $r_2$ , weil ihre zweite Dezimalziffer nicht mit der von  $r$ , übereinstimmt usw. Die Zahl  $r$  kommt also in der Menge  $A$  nicht vor. Und doch haben wir zu ihrer Definition weniger als 200 Worte benötigt!

Mit diesem Paradoxon hängt das folgende sehr eng zusammen:

Welches ist die kleinste ganze Zahl, zu deren Definition weniger als 100 Worte nicht ausreichen?

Eine solche Zahl gibt es sicher, weil die Zahl der Worte in der deutschen Sprache endlich ist, die Menge der ganzen Zahlen dagegen unendlich und es folglich Zahlen geben wird, die man mit weniger als 100 Worten nicht definieren kann. Unter diesen Zahlen gibt es dann aber auch sicher eine kleinste.

Andererseits kann aber eine solche Zahl nicht existieren, weil es sehr wohl einen Satz mit weniger als 100 Worten gibt, der diese Zahl definiert, nämlich den oben kursiv gedruckten!

(+) Es folgt noch ein komplizierteres Beispiel einer endlichen Menge, bei deren Betrachtung man nicht entscheiden kann, ob sie ein bestimmtes Element enthält.

Wir teilen alle Adjektive der deutschen Sprache in zwei Klassen ein. Zur ersten Klasse zählen wir alle die Adjektive, die die durch sie beschriebene Eigenschaft als Wort selbst haben. Alle übrigen Adjektive zählen wir zur zweiten Klasse.

Das Adjektiv deutsch gehört beispielsweise zur ersten Klasse, weil es selbst ein deutsches Wort ist. Ebenso gehört das Adjektiv dreisilbig zur ersten Klasse, da es drei Silben hat. Dagegen ist einsilbig ein Adjektiv der zweiten Klasse, denn es hat mehr als eine Silbe. Das Wort russisch ist kein russisches, sondern ein deutsches Wort und gehört demnach ebenfalls zur zweiten Klasse, genauso wie das Wort grün, welches selbst nicht grün ist (wenn nicht in unserem Buch die

Lettern gerade an dieser Stelle grün ausgedruckt sind!).

Es scheint einleuchtend, dass jedes Adjektiv in einer der beiden Klassen seinen Platz finden muss. Um die Klassen beim Sprechen kurz voneinander unterscheiden zu können, führen wir noch zwei neue Adjektive ein.

Wir geben allen Adjektiven der ersten Klasse die Eigenschaft autologisch, während wir die der zweiten Klasse heterologisch nennen wollen.

Beide Worte sind als Adjektive definiert, und wir müssen sie deshalb in eine der beiden Klassen einordnen. Hier beginnen aber die Schwierigkeiten.

Das Wort autologisch können wir nämlich zu jeder der beiden Klassen zählen; denn rechnen wir es zur ersten Klasse, dann ist es nach Definition autologisch und beschreibt seine eigene Eigenschaft.

Zählen wir es aber zur zweiten Klasse, dann ist es eben heterologisch und beschreibt seine Eigenschaft damit nicht selbst. Dagegen gehört das zweite Wort zu keiner der beiden Klassen.

Rechneten wir es nämlich zur ersten Klasse, dann müsste es seine eigene Eigenschaft beschreiben und damit zur zweiten Klasse gehören. Zählen wir es zur zweiten Klasse, dann würde es aber gerade die von ihm beschriebene Eigenschaft haben und müsste zur ersten Klasse gehören. (+)

In der naiven Mengenlehre wurden sehr viele solcher Fälle gefunden, in denen die Definition der Menge in sich widersprüchlich war. Die Untersuchung der Frage nach den Bedingungen, unter denen das vorkommen kann, führte zu tiefgehenden Untersuchungen auf dem Gebiete der Logik, die das Gesicht dieses Zweiges der Mathematik entscheidend verändert haben.

Viele dieser Untersuchungen sind in der Folgezeit für den Ausbau der Theorie der elektronischen Rechenmaschinen, für die Theorie der Automaten usw. angewendet worden. Die Untersuchungen betreffen jedoch nur die mathematische Logik, und wir werden sie deshalb in diesem Rahmen nicht weiter behandeln.

Von Jetzt an befassen wir uns nur mit solchen Mengen, die eindeutig und ohne Widersprüche definiert sind und an deren Zusammensetzung keine Zweifel bestehen (die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge aller Quadrate der Ebene, die Menge der Punkte einer gegebenen Strecke - um einige Beispiele zu nennen).

## 1.4 Die leere Menge

Die Bezeichnung Menge bringt uns naturgemäß auf den Gedanken, dass eine jede Menge viele (mindestens aber zwei) Elemente enthalten muss. Aber das ist nicht so.

In der Mathematik ist auch die Betrachtung von Mengen notwendig, die nur ein Element enthalten, ja sogar die Einführung einer Menge, die nicht ein einziges Element enthält und leere Menge genannt wird. Als Symbol verwenden wir das Zeichen  $\emptyset$ !

Als Beispiel für die leere Menge kann man etwa die Menge der auf dem Mond lebenden Pferde, die Menge der zehnbeinigen Säugetiere, die Menge der dreijährigen Schachgroßmeister, die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$x^4 + 16 = 0$$

oder die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$$

angeben.

Womit wird aber die Einführung der leeren Menge begründet?

Zum ersten bemerken wir, dass nicht immer von vornherein klar ist, ob es überhaupt ein Ding mit derjenigen Eigenschaft gibt, die zur charakterisierenden Eigenschaft einer Menge gewählt worden ist. Als Beispiel hierfür betrachten wir die Menge  $A$  aller konvexen Vierecke, deren sämtliche Winkel rechte sind und die Diagonalen verschiedener Länge haben.

Für einen Menschen, der in der Geometrie nicht beschlagen ist, ist in den beiden Forderungen nichts Widersprechendes zu bemerken.

Indessen folgt aus dem Satz über die Gleichheit der Diagonalen jedes Rechteckes, dass die Menge  $A$  die leere Menge sein muss:  $A = \emptyset$ .

Leer sind z.B. auch die Menge der ebenen Dreiecke, deren Winkelsumme von  $180^\circ$  verschieden ist, und die Menge der quadratischen Polynome mit mehr als zwei Nullstellen. Überhaupt kann man viele mathematischen Sätze so formulieren, dass von einer gewissen Menge behauptet wird, dass sie leer ist. (Versuchen Sie einmal den Satz von Pythagoras so zu schreiben!)

Ist die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 7x^2 - 6x + 26 = 0$$

leer oder nicht? - Die Beantwortung dieser Frage scheint ohne längere Rechnung recht schwierig zu sein. Schreibt man aber das Polynom auf der linken Seite in folgender Form:

$$(x^2 - 4)^2 + (x - 3)^2 + 1 = 0$$

dann können wir sofort ablesen, dass die Gleichung keine reelle Wurzel besitzt.

Auch von Mengen nichtmathematischer Natur kann man nicht immer sofort feststellen, ob sie leer sind oder nicht. Wenn einer etwa in der Zoologie schlecht Bescheid weiß, dann wird er nicht sagen können, ob die Menge der Haifische im Baikalsee oder die Menge der in Australien wild lebenden Tiger leer ist oder nicht.

Von einigen Mengen ist bis heute unbekannt, ob sie leer sind oder nicht. So weiß man das beispielsweise bis jetzt noch nicht von der Menge der natürlichen Zahlen, für die

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2$$

gilt.  $x, y, z$  sind hierbei positive ganze Zahlen (Inhalt des Großen Fermatschen Satzes).

Unbekannt ist weiter, ob die Menge der Ziffern, die in der unendlichen Dezimalbruchdarstellung von  $\pi$  nur endlich oft vorkommen, leer ist oder nicht (obwohl diese Zahl bis auf mehrere tausend Dezimalstellen berechnet worden ist, weiß man bis heute noch nicht, ob alle Ziffern unendlich oft vorkommen, oder ob es Ziffern gibt, die von einer gewissen Stelle an nicht mehr auftreten). Man kann bis jetzt auch noch nicht entscheiden, ob die Menge der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30$$

leer ist oder nicht. (Dabei werden positive und negative ganze Zahlen zugelassen. Dass die Menge der positiv-ganzzahligen Lösungen leer ist, sieht man sofort!)

Um ein letztes Beispiel zu nennen: Bis zum heutigen Tag streitet man sich, ob die Menge der auf der Erde lebenden Plesiosaurier leer ist! Wenn auf dem Grunde des Loch-Ness tatsächlich ein Plesiosaurus lebt - dann ist diese Menge eben nicht leer!

## 1.5 Mengenlehre in der Schule

Mengen können die verschiedensten Dinge als Elemente haben - Fische, Häuser, Quadrate, Zahlen, Punkte usw. Das ist auch die Erklärung für die außerordentliche Breite der Mengenlehre und ihrer Anwendungen in den verschiedensten Wissenschaftszweigen (Mathematik, Mechanik, Physik, Biologie, Linguistik u. a.).

Für die Mathematik spielen solche Mengen eine besondere Rolle, die aus "mathematischen Objekten" bestehen, aus geometrischen Figuren, Zahlen, algebraischen Ausdrücken, Funktionen usw.

Auch in der Schule haben wir es häufig genug mit solchen Mengen zu tun, ohne das Wort Menge immer dabei zu gebrauchen.<sup>1</sup> Besonders häufig trifft man Zahlenmengen, das sind Mengen, deren Elemente Zahlen sind. Als Beispiele solcher Mengen seien erwähnt:

- a) die Menge der natürlichen Zahlen,
- b) die Menge der ganzen Zahlen,
- c) die Menge aller rationalen Zahlen,
- d) die Menge der reellen Zahlen,
- e) die Menge aller komplexen Zahlen,
- f) die Menge der Maßzahlen für den Flächeninhalt der regulären Vielecke, die einem gegebenen Kreis einbeschrieben sind.

Diese Aufzählung könnte man beinahe beliebig fortsetzen.

(+) Mit jeder Gleichung in einer Unbekannten hängen zwei Zahlenmengen eng zusammen. Die erste von ihnen ist die Menge derjenigen reellen Zahlen, für die die in der Gleichung vorkommenden algebraischen Ausdrücke gebildet werden können.

Diese Menge heißt zulässiger Bereich für die Variable oder Definitionsbereich der Gleichung. Beispielsweise besteht dieser zulässige Bereich für die Variable  $x$  in der Gleichung

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{x - 1}{x^2 - 9} = -\frac{1}{3}$$

(der Definitionsbereich dieser Gleichung also) aus allen Zahlen  $x$ , für die  $x^2 - 4 \neq 0$  und  $x^2 - 9 \neq 0$  ist, das heißt aus allen Zahlen außer denen der Menge  $\{2, -2, 3, -3\}$ .

Für die Gleichung

$$\sqrt{-x^2 + x + 12} + x = 2 + \sqrt{10}$$

besteht der Definitionsbereich aus allen reellen Zahlen, für die  $-x^2 + x + 12 \geq 0$  wird. Diese Ungleichung ist aber genau dann erfüllt, wenn  $-3 \leq x \leq 4$  ist.

Die zweite im Zusammenhang mit jeder Gleichung vorkommende Menge ist die ihrer Lösungen

---

<sup>1</sup>Die an den Schulen der DDR gültigen Lehrpläne sehen die Stoffvermittlung im Fach Mathematik auf der Grundlage der Mengenlehre vor. Dennoch treffen die auf die sowjetischen Schulen von 1969 bezogenen Bemerkungen dieses Kapitels auch auf unsere Schulpraxis noch teilweise zu (Anm. d. Übersetzers).

(Lösungsmenge). So besteht etwa die Menge der Lösungen (Wurzeln) der Gleichung  $x^2 - 7x + 12 = 0$  aus den beiden Zahlen 3 und 4.

Die Lösungsmenge der Gleichung  $\sin x = 0$  enthält unendlich viele reelle Zahlen, ja sie ist mit der Menge der ganzen Zahlen identisch.

Die Lösungsmenge  $M$  einer gegebenen Gleichung wird durch die folgende Eigenschaft definiert: Ihre Elemente gehören zum Definitionsbereich und befriedigen die Gleichung.

Eine Gleichung zu lösen heißt deshalb nichts anderes, als ihre Lösungsmenge  $M$  in der Form einer Aufzählung ihrer Elemente (im endlichen Fall) oder durch eine andere charakterisierende Eigenschaft (wenn die Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt) zu bestimmen. Im letzten Beispiel war dies die Eigenschaft, eine ganze Zahl zu sein.

Während die Lösungsmengen von Gleichungen im allgemeinen aus einigen Zahlen oder, wie in der Mehrzahl der goniometrischen Gleichungen, aus gewissen Zahlenfolgen bestehen, setzt sich die Lösungsmenge einer Ungleichung in der Regel aus einigen Intervallen der Menge der reellen Zahlen zusammen. So wird die Ungleichung

$$4 - x^2 \geq 0$$

von allen Zahlen des Intervalls  $-2 \leq x \leq 2$  erfüllt, während sich die Lösungsmenge der Ungleichung

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) \geq 0$$

aus den Intervallen  $2 \leq x \leq 2$  und  $3 \leq x \leq 5$  zusammensetzt. Stehen anstelle der  $\leq$ -Zeichen die schärferen  $<$ -Zeichen, dann handelt es sich um Intervalle ohne Einschluss der Endpunkte, um sogenannte offene Intervalle.

Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) > 0$$

besteht zum Beispiel aus den offenen Intervallen  $-2 < x < 2$  und  $3 < x < 5$ . Die Endpunkte  $-2, 2, 3, 5$  dieser Intervalle erfüllen die Ungleichung nicht.

Als Lösungsmenge von Ungleichungen treten aber auch noch kompliziertere Mengen auf. Die Lösungsmenge von

$$\frac{x - 1}{4 - x} \geq 0$$

ist beispielsweise die Menge aller Zahlen  $x$  mit der Eigenschaft  $1 \leq x < 4$ . Hier gehört der eine Endpunkt des Intervalls zur Lösungsmenge, der andere aber nicht.

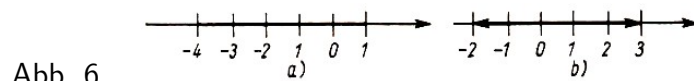


Abb. 6

Weil sich jede reelle Zahl auf einen Punkt der Zahlengeraden abbilden lässt, können Zahlenmengen auf gewisse Punktfolgen auf einer Geraden abgebildet werden. In Abb. 6a haben wir beispielsweise das Abbild der durch  $-4 \leq x \leq 1$  definierten Zahlenmenge vor uns, während in Abb. 6b die Menge der Zahlen  $x$  mit  $-2 < x < 3$  dargestellt sein soll.

Besonders anschaulich sind die geometrischen Bilder von Mengen, die aus Zahlenpaaren oder Zahlentripeln bestehen. Die Gleichung  $x^2 + y^2 = 25$  bestimmt als Lösungsmenge eine Menge  $M$  von Zahlenpaaren  $(x, y)$ , die beim Einsetzen in die Gleichung eine Identität ergeben.

Die Zahlenpaare  $(-5, 0)$  und  $(3, -4)$  gehören dieser Menge  $M$  an, denn  $(-5)^2 + 0^2 = 25$  und  $3^2 + (-4)^2 = 25$ , während das Paar  $(1, 6)$  nicht zu  $M$  gehört, da  $1^2 + 6^2 = 37 \neq 25$  ist.



Eine solche Beschreibung der Menge  $M$  ist natürlich nicht sehr anschaulich, und wir verwenden deshalb die Darstellung als Punktmenge in einem Koordinatensystem.

Wir wählen in der Ebene ein cartesisches Koordinatensystem (wie es aus der Schule bekannt ist). Dann entspricht jedem Zahlenpaar  $(x,y)$  der Punkt der Ebene mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ , und jedem Punkt der Ebene entspricht ebenso eindeutig das Paar seiner Koordinaten in diesem System (Abb. 7).

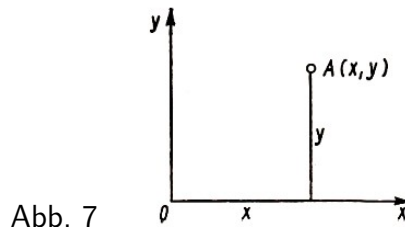


Abb. 7

Wenn wir alle die Zahlenpaare  $(x,y)$  als Punkte in die Ebene abbilden, für die  $x^2 + y^2 = 25$  ist, so kann man leicht feststellen, dass sie auf ein und derselben Linie liegen, nämlich auf dem Kreis mit dem Radius 5 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt (Abb. 8).

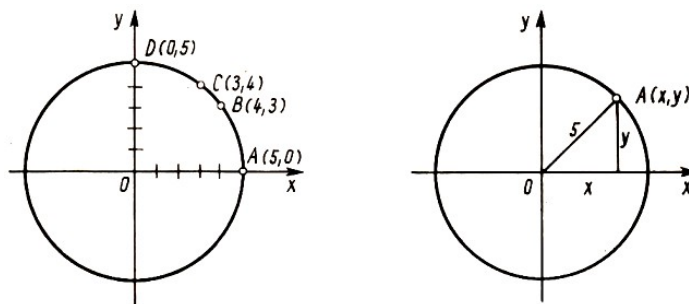


Abb. 8,9

Unter Verwendung des Lehrsatzes von Pythagoras wird sofort klar, dass die Menge aller Punkte  $A(x,y)$ , für deren Koordinaten die genannte Gleichung gilt, mit der Menge der Punkte dieser Kreislinie identisch ist (Abb. 9).

Eine Ungleichung mit zwei Variablen bestimmt als Lösungsmenge im allgemeinen keine Linie, sondern ein ganzes Gebiet in der Ebene. So hat die Lösungsmenge der Ungleichung  $x^2 + y^2 < 25$  als Bild die Menge derjenigen Punkte der Ebene, die vom Koordinatenanfang nicht weiter als 5 Längeneinheiten entfernt sind, das heißt die Punkte der Kreisfläche vom Radius 5 um den Punkt  $(0,0)$ .

Dabei gehört die Kreisperipherie selbst zur Menge, weil das Gleichheitszeichen zugelassen ist.

Die Ungleichung  $x^2 + y^2 < 25$  hingegen bestimmt dieselbe Punktmenge unter Ausschluss der Peripherie. (+)

In der Geometrie begegnen wir ebenfalls zwei Typen von Mengen am häufigsten.

Erstens sprechen wir in Sätzen der Geometrie gewöhnlich von Eigenschaften einer gewissen Menge von geometrischen Figuren. Beispielsweise macht der Satz, dass die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbieren, eine Aussage, welche die Menge aller Parallelogramme betrifft.

Zweitens sind die geometrischen Figuren selbst Mengen, die aus bestimmten Punkten gebildet sind. Deshalb können wir von der Menge aller Punkte des betrachteten Kreises oder von der Menge der Punkte eines gegebenen Kegels sprechen.

In der Algebra haben wir es mit solchen Mengen, wie der Menge aller Polynome von zwei

Veränderlichen, der Menge aller quadratischen Gleichungen, der Menge aller algebraischen Gleichungen u.ä. zu tun.

Jedes Teilgebiet der Schulmathematik, hängt mehr oder weniger eng mit der Theorie der Mengen zusammen.

## 1.6 Untermengen - Teilmengen

Die Einführung des Begriffs der Menge in die Mathematik hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Eine einzige Aussage über Mengen schlechthin kann sowohl als Aussage über Punkte geometrischer Figuren, als auch als Aussage über natürliche Zahlen, über Tiere oder Pflanzen, über Mengen von Atomen oder Molekülen angesehen werden, da der Natur der Elemente einer Menge fast keine Beschränkungen auferlegt sind. Die Begriffe und Sätze der Mengenlehre besitzen deshalb eine große Allgemeinheit.

Jetzt ist der Zeitpunkt gekommen, wo wir mit der Behandlung einiger von ihnen beginnen.

Zuallererst wollen wir den Begriff der Untermenge kennenlernen.

Wir geben einer Menge immer dann diesen Namen, wenn wir sie nicht allein betrachten, sondern als Teil einer umfassenderen Menge ansehen. Man sagt, dass eine Menge  $B$  Untermenge einer anderen Menge  $A$  ist, wenn jedes Element  $x$  aus  $B$  gleichzeitig auch Element von  $A$  ist, und man schreibt dann  $B \subseteq A$ .

Wir wollen uns nun einige Beispiele überlegen.

In einer bestimmten Polytechnischen Oberschule ist die Menge der Schüler der Klasse 10a eine Untermenge der Menge aller Schüler dieser Schule. Die Menge der Schüler dieser Schule wiederum ist Teilmenge der Menge aller Schüler in der DDR.

Die Menge aller Füchse ist Untermenge der Menge der Säugetiere. Die Menge der Säuger ist wiederum Teilmenge der Menge der Wirbeltiere.

Ist die geometrische Figur  $X$  Teil einer geometrischen Figur  $Y$ , dann ist die Menge der Punkte von  $X$  Untermenge der Punkte von  $Y$  (Abb. 10).

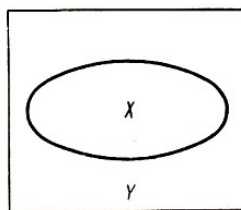


Abb. 10

Häufig hat man es in der Geometrie auch mit Teilmengen von Mengen geometrischer Figuren zu tun. Wir schauen uns beispielsweise die nachfolgenden Mengen an:

- a)  $A$  sei die Menge aller Vierecke.
- b) Die Menge  $B$  enthalte als Elemente sämtliche Trapeze.
- c) Die Menge  $C$  besteht aus allen Parallelogrammen.
- d)  $D$  ist die Menge aller Rechtecke und
- e) mit  $E$  bezeichnen wir die Menge der Quadrate.

In dieser Aufstellung sind die Figuren jedes Typs jeweils Sonderfälle der vorhergehenden Sorte (Trapeze sind spezielle Vierecke, Parallelogramme sind spezielle Trapeze, Rechtecke sind Sonderfälle von Parallelogrammen und Quadrate schließlich sind besondere Rechtecke).

Das bedeutet nun aber auch, dass jede Menge Untermenge aller vorangehenden Mengen ist. Es gilt also

$$E \subseteq D \subseteq C \subseteq B \subseteq A$$

was entsprechend der Definition auch gleichzeitig etwa  $E \subseteq B$ ,  $D \subseteq B$ ,  $C \subseteq A$  usw. bedeutet. Genauso verhält es sich übrigens mit den Mengen in der folgenden Aufstellung:

$K$  ist die Menge aller komplexen Zahlen,

$P$  ist die Menge der reellen Zahlen,

$R$  ist die Menge der rationalen Zahlen,

$G$  ist die Menge aller ganzen Zahlen und

$N$  ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Es gilt hier die Teilmengenbeziehung:

$$N \subseteq G \subseteq R \subseteq P \subseteq K$$

In vielen Fällen fügt man zur charakterisierenden Eigenschaft einer bestimmten Menge noch diese oder jene Ergänzungsforderung hinzu, um eine gewisse Untermenge herauszulösen.

So wird die Teilmenge  $N$  aus der Menge aller ganzen Zahlen  $G$  durch die Zusatzforderung  $x \geq 0$  herausgehoben, die Menge der gleichseitigen Dreiecke wird durch die Zusatzbedingung  $a = b = c$  als Untermenge der Menge aller Dreiecke charakterisiert usw.

(+) Wir haben bereits gesagt, dass viele Sätze sich als Sätze über die Identität zweier Mengen formulieren lassen. Daneben trifft man auch solche Sätze an, in denen nur davon die Rede ist, dass eine Menge Teil einer bestimmten anderen ist. Wir betrachten als Beispiel den Satz:

"Die Diagonalen eines Vierecks mit gleich langen Seiten (Rhombus) stehen senkrecht aufeinander."

Hier kommt die Menge  $A$  aller Rhomben und die Menge  $B$  aller Vierecke mit sich rechtwinklig schneidenden Diagonalen vor. Die Aussage des Satzes aber lautet ganz kurz:  $A \subseteq B$ .

Nun wollen wir eine weitere Sprechweise kennenlernen, die in der Mathematik sehr häufig benutzt wird.

Wir setzen voraus, dass  $A$  Untermenge von  $B$ ,  $A \subseteq B$ , ist. Dann sagen wir, dass die Bedingung  $x \in A$  eine hinreichende Bedingung für  $x \in B$  und umgekehrt  $x \in B$  eine notwendige Bedingung für  $x \in A$  ist.

Nehmen wir als Menge  $B$  beispielsweise die Menge aller positiven geraden Zahlen, und  $A$  sei die Menge aller natürlichen Zahlen, deren letzte Dezimalziffer eine 4 ist, dann ist offenbar  $A \subseteq B$ , aber nicht  $A = B$ .

Folglich ist dafür, dass eine natürliche Zahl  $n$  gerade ist, hinreichend, dass ihre letzte Dezimalziffer eine 4 ist. Andererseits ist die Bedingung " $n$  ist gerade" notwendig dafür, dass die letzte Dezimalziffer eine 4 ist.

Wenn die Mengen  $A$  und  $B$  identisch sind, so gilt offenbar sowohl  $A \subseteq B$  als auch  $B \subseteq A$ , und die Bedingung  $x \in A$  ist notwendig und hinreichend für  $x \in B$  (und umgekehrt).

Mit anderen Worten ist jeder Satz, der besagt, dass eine gewisse Bedingung notwendig und hinreichend für eine Eigenschaft ist, eine Aussage über die Identität zweier Mengen.

Beispiel: Für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl  $n \neq 0$  durch 10 ist notwendig und hinreichend, dass ihre letzte Dezimalziffer eine 0 ist.

In der Sprache der Mengenlehre heißt das: Die Menge  $A$  der durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen ist identisch mit der Menge  $B$  aller natürlichen Zahlen, deren letzte Ziffer eine Null ist.

Die Menge aller Rhomben ist wiederum identisch mit der Menge aller Parallelogramme mit zueinander senkrechten Diagonalen. Also ist das Senkrechtstehen der beiden Diagonalen notwendig und hinreichend dafür, dass ein Parallelogramm ein Rhombus ist. (+)

## 1.7 Mengenlehre und Kombinatorik

(+) Wir zählen jetzt, wieviele Untermengen eine endliche Menge besitzt, wobei wir die leere Menge und die gegebene Menge selbst mitzählen wollen.

Eine Menge, die nur ein Element enthält (eine sogenannte Einermenge), besitzt dann genau zwei Untermengen, nämlich  $\emptyset$  und  $\{a\}$ .

Eine zweielementige Menge  $A = \{a, b\}$  hat bereits vier Teilmengen:  $\emptyset$ ,  $\{a\}$  und zusätzlich  $\{b\}$  und  $\{a, b\}$ .

Fügen wir zur Menge ein drittes Element  $c$  hinzu, dann gibt es außer den bereits gezählten Untermengen  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{a, b\}$  noch vier weitere, nämlich

$$\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

die aus den vorher vorhandenen Untermengen durch Hinzunahme des neuen Elementes  $c$  entstehen. Es ist somit klar geworden, dass sich bei Hinzunahme eines weiteren Elementes zur Grundmenge die Zahl der Untermengen jedesmal verdoppeln muss.

Folglich besitzt eine Menge von  $n$  Elementen gerade  $2^n$  Untermengen.

Alle Untermengen einer endlichen Menge kann man wiederum nach der Zahl ihrer Elemente klassifizieren. Enthält die Grundmenge  $n$  Elemente, so nennen wir ihre aus  $k$  Elementen bestehenden Teilmengen Kombinationen aus  $n$  zu je  $k$  und bezeichnen ihre Anzahl mit  $C_n^k$ . Dann ist offenbar die Beziehung

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

richtig, weil die Gesamtzahl der Untermengen immer  $2^n$  ist.

Für die Zahlen  $C_n^k$  existieren eine Reihe von interessanten Beziehungen, von denen man einige durch Betrachtung gewisser Untermengen mit bestimmten Eigenschaften gewinnen kann.

Als Beispiel hierfür behandeln wir die Beziehung

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{1}$$

die wir unter der Voraussetzung  $1 \leq k < n$  beweisen wollen.

Zu diesem Zwecke wählen wir aus allen Kombinationen von  $n$  Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zu je  $k$  diejenigen aus, die das Element  $a_n$  enthalten. Die Anzahl dieser Kombinationen beträgt gerade  $C_{n-1}^{k-1}$ , weil die  $k-1$  nicht von  $a_n$  besetzten Plätze in diesen Kombinationen von jedem der Elemente  $a_1, \dots, a_{n-1}$  besetzt sein können. Nunmehr zählen wir diejenigen Kombinationen aus  $n$  Elementen zu je  $k$ , die das Element  $a_n$  nicht enthalten.

Da in diesen Kombinationen immer  $k$  Elemente aus der Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  vereinigt sind, handelt es sich genau um die Kombinationen aus  $n-1$  Elementen zu je  $k$ , deren Anzahl wir mit  $C_{n-1}^k$  bezeichnet hatten.

Die Beziehung (1) folgt nun einfach daraus, dass jede der  $C_n^k$  Kombinationen entweder  $a_n$  enthält oder nicht.

Wir bemerken noch, dass  $C_n^0 = 1$  für alle  $n > 0$  ist, weil jede Menge genau eine leere Untermenge hat. Ebenso ist  $C_n^n = 1$  sofort einzusehen.

Wenn wir die obigen Bemerkungen anschauen, dann erkennen wir eine Möglichkeit, die Zahlen  $C_n^k$  mit  $n = 0$  beginnend für alle  $n$  und  $k$  nacheinander durch einfache Addition zu berechnen. Wir ordnen diese Zahlen dazu in Form einer Tabelle an:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_0^0 & & \\
 & & & & & C_1^0 & C_1^1 \\
 & & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
 & & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
 \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

dem sogenannten Pascalschen Dreieck.

Wegen  $C_n^0 = C_n^n = 1$  für alle  $n$  stehen an den Seiten des Dreiecks nur Einsen. Alle anderen Zahlen der Tabelle ergeben sich entsprechend Formel (1) als Summe der in der vorhergehenden Zeile links und rechts benachbarten Zahlen. Das Pascalsche Dreieck sieht demnach so aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Es gibt aber auch eine Formel, nach der man  $C_n^k$  direkt aus den Zahlen  $n$  und  $k$  berechnen kann. Sie lautet

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (2)$$

wo  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ ,  $0! = 1$  ist.

Wir empfehlen dem Leser zu überprüfen, ob die nach Formel (2) berechneten Zahlen der Beziehung (1) und den Gleichungen  $C_n^0 = C_n^n = 1$  genügen und damit tatsächlich mit den früher bestimmten Zahlen übereinstimmen (Lit.: Flachsmeier, Kombinatorik).

## 1.8 Der Begriff der Grundmenge

Es kann ohne weiteres vorkommen, dass ein und dieselbe Untersuchung oder Abhandlung sowohl Aussagen über die Menge aller rationalen Zahlen als auch solche über die Menge der Wale im Ozean enthält.

Gewöhnlich sind aber alle Mengen, mit denen man es innerhalb eines gewissen Zusammenhangs zu tun hat, Untermengen einer bestimmten festen Menge  $I$ , die wir dann Grundmenge nennen werden.

Alle von uns betrachteten Zahlenmengen sind etwa Untermengen der Menge der komplexen Zahlen, die Menge der Punkte gewisser geometrischer Konfigurationen sind Untermengen der Menge aller Punkte des geometrischen Raumes, die Menge der Seiten eines beliebigen ebenen Polygons ist Untermenge der Menge der Strecken der Ebene usw.

## 1.9 Der Durchschnitt von Mengen

Im September des Jahres 1887 musste der berühmte Detektiv Sherlock Holmes den Namen eines ganz bestimmten Segelschiffes herausbekommen.<sup>2</sup>

Er wusste nicht gerade viel über dieses Schiff:

Im Januar oder Februar 1883 war es in Pondichery (Indien) gewesen, im Januar 1885 hatte es in Dundee Anker geworfen, und im Moment lag es im Londoner Hafen.

Und doch fand er den Namen des Schiffes heraus, und er verwendete dazu nicht einmal weitere Angaben. Er brauchte nur drei Mengen miteinander zu vergleichen: die Menge der Segler, die im angegebenen Zeitraum in Pondichery lagen, die Menge der im Januar 1885 in Dundee vor Anker gegangenen Segelschiffe und die Menge der Schiffe, die gerade im Londoner Hafen lagen.

Es ergab sich, dass nur ein Segler in allen drei Mengen vorkam, nämlich das amerikanische Schiff "Einsamer Stern".

Weil Sherlock Holmes außerdem annehmen konnte, dass die gesuchten Verbrecher Amerikaner waren, hatte sich der Kreis geschlossen, und das Verbrechen war aufgeklärt.

Nicht nur ein Detektiv sucht gemeinsame Elemente verschiedener Mengen!

Wenn beispielsweise ein Bakteriologe den Erreger einer bestimmten Krankheit sucht, dann wird er an dem einen Kranken eine gewisse Menge von Mikroben beobachten, bei einem zweiten findet er eine andere und beim dritten Kranken eine weitere Menge von Erregern.

Die bei den einzelnen Kranken gefundenen Mengen von Mikroben sind sicher verschieden, zwei oder drei Sorten von Bakterien werden aber im allgemeinen bei allen untersuchten Kranken vorkommen. Auf sie konzentriert sich dann der Verdacht, Erreger der betrachteten Krankheit zu sein.

Weitere Auswahl zeigt dann endlich mit Sicherheit, welcher Mikroorganismus der Urheber der Erkrankung ist, sofern es überhaupt einen solchen Erreger gibt.

Die Menge, die aus den gemeinsamen Elementen gewisser Mengen  $A, B, C, \dots$  besteht, heißt Durchschnitt dieser Mengen und wird manchmal auch als deren Produkt bezeichnet.

Die Bildung des Produktes zweier Mengen  $A$  und  $B$  symbolisiert man durch  $AB$  oder  $A \cap B$ . Die genaue Definition des Durchschnittes lautet:

Der Durchschnitt der Mengen  $A, B, C, \dots$  ist die Menge, die genau aus den Elementen besteht, die in jeder der Mengen  $A, B, C, \dots$  enthalten sind.

Als Beispiel nehmen wir an, dass die Schüler einer bestimmten Schule die Möglichkeit haben, in vier verschiedenen Sektionen der Schulsportgemeinschaft mitzuarbeiten: in den Sektionen Fußball, Schwimmen, Leichtathletik und Boxen.

Der Durchschnitt der Mengen der Mitglieder jeder Sektion besteht aus den Universalsportlern, die sowohl dem runden Leder nachjagen als auch einen breiten Fluss durchschwimmen können, die schnelle Läufer sind und notfalls einen Gegner mit der Faust "auf die Bretter legen" können.

Selbstverständlich findet der Begriff des Durchschnittes von Mengen auch in der Mathematik selbst vielfältige Anwendung.

Eine der Hauptmethoden der Lösung ebener geometrischer Konstruktionsaufgaben ist die Methode der geometrischen Örter.

---

<sup>2</sup>Die ganze Geschichte kann man in Sir Arthur Conan Doyles Buch "Fünf Apfelsinenkerne" nachlesen.

Wenn ein Punkt zu konstruieren ist, der irgend zwei Bedingungen genügen soll, so erhält man zunächst nur eine von ihnen aufrecht und unterdrückt die andere. Die Punktmenge, deren Elemente diese eine Bedingung befriedigen, ist im allgemeinen eine bestimmte Kurve (der geometrische Ort dieser Punkte).

Ebenso bildet die Punktmenge, die durch die zweite Eigenschaft allein bestimmt ist, eine andere Linie (einen anderen geometrischen Ort). Es kann sich natürlich ergeben, dass sich diese Linien nicht nur in einem, sondern in mehreren Punkten schneiden. Dann besitzt die Aufgabe eben mehrere Lösungen. Schneiden sich die Linien hingegen nicht, dann ist die Aufgabe unlösbar.

Im folgenden Beispiel ist ein Punkt gesucht, der von einem gegebenen Punkt  $O$  den Abstand  $a$  hat und von den beiden Punkten  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt ist. Der gesuchte Punkt muss zum ersten auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius  $a$  um den Punkt  $O$  liegen.

Wegen der zweiten Bedingung muss er auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $AB$  liegen. Ein Punkt, der beiden Bedingungen genügt, muss Schnittpunkt der Kreislinie und der Mittelsenkrechten sein. Je nach der Ausgangslage kann es hierbei zwei, einen oder aber auch keinen Schnittpunkt geben, wie man in Abb. 11 erkennt.

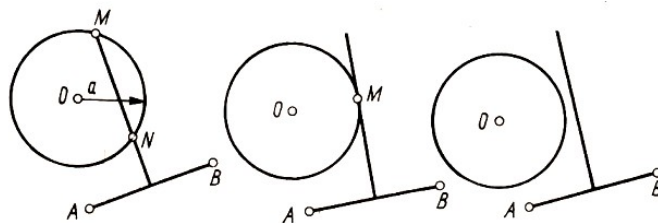


Abb. 11

Manchmal ist es auch nötig, Mengen geometrischer Figuren oder Zahlenmengen zum Schnitt zu bringen.

Die Menge aller Quadrate ist beispielsweise Durchschnitt der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Rhomben. Die Menge der gleichseitigen Dreiecke ist Durchschnitt der Menge aller Dreiecke mit der Menge der regulären Vielecke.

Als Durchschnitt der Menge der geraden Zahlen und der Menge der durch 3 teilbaren Zahlen erhalten wir die Menge der Zahlen, die durch 6 teilbar sind.

Genau betrachtet ist auch die Lösung eines Systems von Gleichungen oder Ungleichungen nichts weiter als die Ermittlung des Durchschnitts gewisser Mengen (man kann übrigens auch umgekehrt sagen: der Durchschnitt gewisser Mengen kann durch Lösung eines Gleichungs- oder Ungleichungssystems gewonnen werden).

Es sei beispielsweise die Lösung von

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (1)$$

gesucht. Vom Standpunkt der Algebra werden in unserer Aufgabe alle Zahlenpaare  $(x, y)$  gesucht, die beim Einsetzen in die Gleichungen von (1) jeweils eine Identität ergeben. Wir können jedoch die Gleichungen des Systems einzeln untersuchen.

Mit  $M$  wollen wir die Menge aller Paare  $(x, y)$  bezeichnen, die die erste Gleichung befriedigen, während  $N$  die Lösungsmenge der zweiten Gleichung des Systems (1) sein soll. Lösung von (1) ist dann jedes Zahlenpaar  $(x, y)$ , das sowohl in  $M$  als auch in  $N$  enthalten ist. Mit einem Wort: die Lösungsmenge von (1) ist der Durchschnitt der beiden Mengen  $M$  und  $N$ .

Diese Bemerkung bildet den Ausgangspunkt für die geometrische Lösungsmethode. Man konstruiert die Kurven, deren Gleichungen im System vorkommen, und ermittelt deren Schnittpunkte.

In unserem Beispiel handelt es sich, wie wir bereits wissen, um die Gleichung der Kreislinie mit dem Radius 5 um den Nullpunkt des Koordinatensystems und um die Gerade, die durch die Punkte  $(7,0)$  und  $(0,7)$  auf den beiden Koordinatenachsen hindurchgeht. Wenn wir diese beiden Kurven zeichnen, dann zeigt sich, dass sie die beiden Punkte  $A(4,3)$  und  $B(3,4)$  gemeinsam haben (Abb. 12).

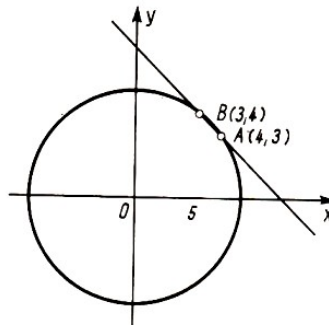


Abb. 12

Unser System besitzt folglich die beiden Lösungen  $x_1 = 3; y_1 = 4$  und  $x_2 = 4; y_2 = 3$ .

Jetzt betrachten wir das System von Ungleichungen

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 8 - x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Die Lösungsmenge  $M$  der ersten Ungleichung besteht aus allen Punkten  $A(x, y)$ , die auf oder oberhalb der Parabel  $y = x^2$  liegen. Die Lösungsmenge  $N$  der zweiten Ungleichung besteht aus den Punkten der Ebene, die auf oder unterhalb der Parabel  $y = 8 - x^2$  liegen (Abb. 13).

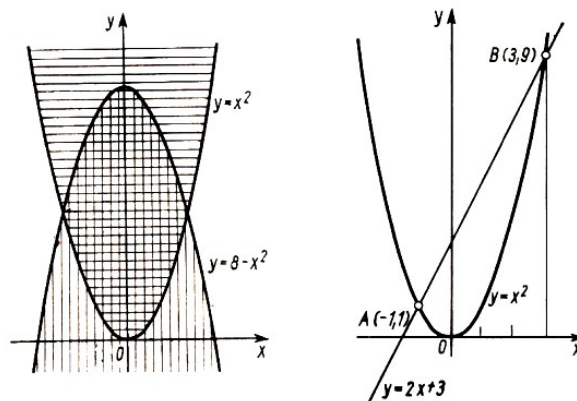


Abb. 13, 14

Die Menge  $M$  ist in Abb. 13 durch horizontale, die Menge  $N$  durch vertikale Schraffur kenntlich gemacht. Lösungsmenge  $P$  von (2) ist der Durchschnitt von  $M$  und  $N$ , der in der Abbildung sofort durch die doppelte Schraffur auffällt. Dabei gehören die Punkte des Randes von  $P$  zur Menge hinzu.

Genauso finden wir, dass die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \quad (3)$$



der Teil der Geraden  $y = 2x + 3$  ist, der oberhalb der Parabel  $y = x^2$  liegt. Die Gerade hat mit dieser Parabel die Schnittpunkte  $A(-1,1)$  und  $B(3,9)$  gemeinsam, und oberhalb des Parabelbogens zwischen diesen Punkten liegt die Strecke  $AB$  auf der Geraden. Die Endpunkte der Strecke selbst gehören in diesem Fall nicht zur Lösungsmenge des Systems (3) (Abb. 14).

(+) Jetzt wollen wir durch das Studium des Durchschnitts von Mengen die Unlösbarkeit der folgenden Gleichung beweisen:

$$\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{8x-x^2-15} = 7 \quad (4)$$

Freilich kann man auch nach dem allgemeinen Lösungsschema beginnen, die Wurzeln auf die beiden Seiten der Gleichung zu bringen und durch zweimaliges Quadrieren zu beseitigen. Wir würden so nach entsprechenden Rechnungen beim Versuch der Lösung der erhaltenen algebraischen Gleichung die Unlösbarkeit feststellen.

Wir gehen aber anders vor. Zuerst klären wir, für welche Werte der Veränderlichen  $x$  die Wurzeln überhaupt definiert sind, die in Gleichung (4) vorkommen.

Die Wurzel  $\sqrt{2+x-x^2}$  ist für  $2+x-x^2 \geq 0$ , d.h. für  $-1 \leq x \leq 2$  definiert. Analog stellen wir fest, dass  $\sqrt{8x-x^2-15}$  nur für  $3 \leq x \leq 5$  einen Sinn hat.

Die Intervalle  $-1 \leq x \leq 2$  und  $3 \leq x \leq 5$  haben aber einen leeren Durchschnitt, denn sie enthalten keine gemeinsamen Zahlen. Folglich kann keine Zahl  $x$  die Gleichung (4) erfüllen.

(+)

## 1.10 Die Vereinigung von Mengen

Wir haben schon viele Beispiele für die Bildung des Durchschnittes von Mengen kennengelernt. Oft ist es aber auch notwendig, gewisse Mengen miteinander zu verschmelzen.

Bereits ein Schulanfänger vereinigt zwei Mengen, wenn er drei Stäbchen und zwei Stäbchen auf einen Haufen legt. Überhaupt hängt die Addition von natürlichen Zahlen mit der Bestimmung der Zahl der Elemente der Vereinigung von Mengen zusammen. Dabei müssen wir aber das Augenmerk auf eine Feinheit richten.

Wir betrachten zwei Legierungen. Die eine Legierung enthält Eisen, Kohlenstoff, Vanadium und Mangan, während die andere aus Eisen, Kohlenstoff, Chrom und Nickel besteht. Jede Legierung enthält 4 chemische Elemente; wenn wir sie aber zu einer neuen Legierung zusammenschmelzen, dann enthält diese nur 6 und nicht etwa 8 Elemente, nämlich Eisen, Kohlenstoff, Vanadium, Mangan, Chrom und Nickel.

Die Tatsache, dass je zwei Legierungen die Stoffe Eisen und Kohlenstoff gemeinsam haben, heißt in der Sprache der Mathematik, dass der Durchschnitt der Mengen der Elemente beider Legierungen nicht leer ist.

Demnach wird besser zu sagen sein, dass die Addition natürlicher Zahlen mit der Vereinigung durchschnittsfremder Mengen zusammenhängt. Ist der Durchschnitt der Mengen nicht leer, dann rechnet man die Elemente dieses Durchschnitts nur einmal zur Vereinigungsmenge hinzu. Die genaue Definition lautet:

Als Vereinigung oder Summe von Mengen  $A, B, C, \dots$  bezeichnet man die Menge, die aus allen und nur den Elementen besteht, die mindestens in einer der Mengen  $A, B, C, \dots$  vorkommen.

Die Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  bezeichnet man gewöhnlich mit  $A \cup B$ , gelegentlich kommt die ältere Bezeichnungsweise  $A + B$  noch vor. In Abb. 15 ist die gesamte schraffierte

Punktmenge die Vereinigung der Menge  $A$  der Punkte der Kreisfläche  $\Gamma_1$  und  $B$  der Punkte der Kreisscheibe  $\Gamma_2$ .

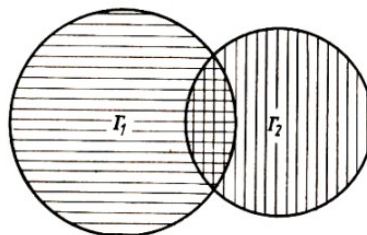


Abb. 15

Wenn einige Elemente nicht nur in einer, sondern in mehreren beteiligten Mengen vorkommen, dann werden sie in der Vereinigung stets nur einmal gezählt. Deshalb kann die Summe der Elemente zweier Mengen im endlichen Falle durchaus größer sein, als die Zahl der Elemente der Summe (Vereinigung) der beiden Mengen.

Wir schauen uns wieder ein Beispiel an. Als erste Menge wählen wir die Menge der Buchstaben des deutschen Alphabets, die in der ersten Verszeile des "Osterspaziergang" aus "Faust I" von Johann Wolfgang v. Goethe vorkommen. Sie besteht aus sechzehn Buchstaben:

$$M = \{V, O, M, E, I, S, B, F, R, T, N, D, U, \ddot{A}, C, H\}$$

Als zweite Menge nehmen wir die entsprechende Menge hinsichtlich der zweiten Zeile:

$$N = \{D, U, R, C, H, E, S, F, \ddot{U}, L, I, N, G, O, B, K\}$$

die ebenfalls 16 Buchstaben enthält.

Die Vereinigungsmenge  $M \cup N$  enthält die folgenden 20 Buchstaben:

$$M \cup N = \{V, O, M, E, I, S, B, F, R, T, N, D, U, \ddot{A}, C, H, \ddot{U}, L, G, K\}$$

Die 12 Buchstaben  $D, U, R, C, H, E, S, F, I, N, O, B$  kommen im Durchschnitt  $M \cap N$  vor, sie werden in der Vereinigung nur einmal gezählt, und wir haben deshalb nur 20 Elemente in  $M \cup N$ , während  $16 + 16 = 32$  ist.

Wir nehmen noch ein Beispiel, in dem die beteiligten Mengen gemeinsame Elemente haben. Die Menge aller Schüler einer Klasse ist sicher die Vereinigung der folgenden drei Mengen:

- a) der Menge der fleißigen Schüler,
- b) der Menge der Mädchen der Klasse und
- c) der Menge der nicht sehr fleißigen Knaben.

Es ist klar, dass jeder Schüler der Klasse in einer dieser drei Mengen enthalten ist. Die Mengen können aber dennoch gemeinsame Elemente haben. Ein fleißiges Mädchen gehört nämlich zur ersten und zur zweiten Menge!

Manchmal entsteht eine Vereinigungsmenge aus einer unbegrenzten Zahl von Teilmengen. Wenn wir beispielsweise mit  $A_n$  die Menge der positiven Brüche mit dem Nenner  $n$  bezeichnen:

$$A_1 = \{m/1\}; \quad A_2 = \{m/2\}, \quad \dots, \quad A_m = \{m/n\}, \quad \dots$$

so ergibt die Vereinigungsmenge der  $A_1, A_2, A_3, \dots$  die Menge aller positiven Brüche, das heißt die Menge aller Brüche  $m/n$  mit beliebigen natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$ .

Auch hier sind übrigens die einzelnen Mengen  $A_i$  nicht durchschnittsfremd.

Oder ein anderes Beispiel:  $A_3$  sei die Menge der gleichseitigen Dreiecke,  $A_4$  die Menge der Quadrate,  $A_5$  die Menge der regulären Fünfecke usw. Die Vereinigung aller dieser Mengen ist dann die Menge der regulären Polygone.

(+) Jetzt wenden wir uns Vereinigungsmengen in der Algebra zu.

Der bekannte amerikanische Schriftsteller Edgar Allan Poe schreibt in einer seiner Erzählungen:

"Ich bin niemals einem Mathematiker begegnet, der nicht wie an einen Glaubenssatz daran festgehalten hätte, dass  $x^2 + px + q$  absolut und ohne Ausnahme gleich Null ist.

Zeigt, wenn Ihr dazu Lust verspürt, einem dieser Gentlemen, dass Ihr der Meinung seid, dass der Fall eintreten kann, wo  $x^2 + px + q$  nicht identisch Null ist, dann begeben Euch aber möglichst rasch aus seiner Reichweite, weil er ganz ohne Zweifel versuchen wird, Euch zu verprügeln."

Es steht natürlich für mich außer allem Zweifel, dass jeder meiner Leser ganz genau weiß, dass  $x^2 + px + q$  für einzelne Werte  $x$  gleich Null und für andere von Null verschieden sein kann. Uns interessiert aber in diesem Zusammenhang auch eine ganz andere Frage:

Warum bemühen sich die Mathematiker stets darum, eine Gleichung so zu schreiben, dass auf einer Seite der Wert Null steht?

Um diese Frage zu klären, betrachten wir die folgende Gleichung:

$$x^2(x^2 - 7) = -12$$

Daraus, dass das Produkt zweier Ausdrücke gleich -12 ist, lässt sich unmöglich eine Aussage über die Größe jedes dieser Ausdrücke ableiten. Es ist deshalb schwierig, die Gleichung in dieser Form zu lösen. Addieren wir aber auf beiden Seiten der Gleichung 12 und zerlegen den Ausdruck auf der linken Seite dann wieder in Faktoren, dann erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0 \tag{1}$$

zu deren Lösung man einen bekannten Satz anwenden kann:

Ein Produkt ist dann und nur dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Deshalb wird die Auflösung der Gleichung (1) auf die Lösung der zwei Gleichungen

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 3 = 0$$

zurückgeführt. Im Unterschied zur Lösung eines Gleichungssystems geht es hierbei aber nicht darum, eine Zahl zu finden, die beide Gleichungen befriedigt, sondern wir suchen die Zahlen, die mindestens eine von beiden erfüllen.

Es geht mit anderen Worten hier nicht um die Ermittlung des Durchschnitts der Lösungsmengen der beiden Teilgleichungen, sondern um das Auffinden der Vereinigungsmenge. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist  $M_1 = \{-2, 2\}$ , die der zweiten  $M_2 = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ . Die Vereinigungsmenge

$$M_1 \cup M_2 = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$$

stellt demnach die Lösungsmenge der Gleichung (1) dar.

Ebenso findet man, dass die Koordinaten aller der Punkte, die auf der Kreislinie mit der Gleichung  $x^2 + y^2 - 37 = 0$  oder der Geraden mit der Gleichung  $y - x - 7 = 0$  liegen, der Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 37)(y - x - 7) = 0 \tag{2}$$

genügen (Abb. 16).

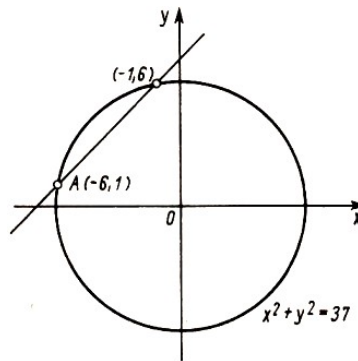


Abb. 16

Im Unterschied dazu besteht die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 37 = 0 \\ y - x - 7 = 0 \end{cases}$$

nur aus den Koordinaten der beiden Schnittpunkte  $A(-6,1)$  und  $B(-1,6)$  und nicht aus den Koordinaten aller Punkte der beiden Figuren von Abb. 16. (+)

### 1.11 Die Zerlegung einer Menge in elementfremde Klassen

Im allgemeinen können die Teilmengen, aus denen man eine umfassende Menge zusammensetzt, gemeinsame Elemente haben.

Es kann aber natürlich auch passieren, dass eine Menge als Summe von elementfremden Untermengen dargestellt ist. Das soll heißen, dass die beteiligten Untermengen paarweise elementfremd sind, dass zwei beliebige unter ihnen einen leeren Durchschnitt haben.

In diesem besonderen Falle sagt man, die Menge  $A$  sei in durchschnittsfremde Unterklassen zerlegt.

Die Zerlegung in durchschnittsfremde Untermengen wird häufig zur Klassifikation von Objekten benutzt. Wenn man zum Beispiel den Gesamtkatalog einer Bibliothek aufbaut, dann teilt man die Menge aller Bücher in Bücher der Belletristik, der gesellschaftspolitischen Wissenschaften, der Naturwissenschaften usw. auf.

In der Biologie wird die Menge aller Lebewesen in Stämme, diese in Ordnungen, die Ordnungen in Familien, die Familien in Klassen, die Klassen in Unterklassen, diese in Arten, Unterarten und Rassen eingeteilt.

Es ist natürlich klar, dass man eine Menge nach ganz verschiedenen Gesichtspunkten in Klassen zerlegen kann. Im alphabetischen Katalog einer Bücherei zum Beispiel richten sich die Klassen nach der Buchstabenfolge des Autornamens und nicht nach dem Inhalt der Bücher.

(+) Bei der Zerlegung von Mengen in Klassen verwendet man häufig den Begriff der Äquivalenz von Elementen. Man definiert dabei zunächst eine Äquivalenzrelation zwischen Elementen  $x$  und  $y$  der Menge und gibt dann alle zueinander äquivalenten Elemente je in eine Untermenge. Natürlich kann der Äquivalenzbegriff nicht willkürlich definiert werden, wenn er zu einer Klasseneinteilung führen soll.

Würden wir etwa zwei Personen äquivalent nennen, wenn sie einander bekannt sind, so wäre eine solche Definition für unsere Zwecke nicht zu verwenden. Wenn die Person  $X$  der Person  $Y$  und diese wiederum einer dritten Person  $Z$  bekannt ist, dann braucht  $X$  die Person  $Z$  nicht zu kennen, und wir könnten die Personen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  nicht in eine Klasse geben, da  $X$  zu  $Z$  nicht äquivalent wäre.

Damit so etwas nicht vorkommen kann, muss eine Äquivalenzrelation die folgenden drei Forderungen erfüllen:

- a) jedes Element muss zu sich selbst äquivalent sein (Reflexivität),
- b) wenn  $x$  zu  $y$  äquivalent ist, dann muss umgekehrt auch  $y$  zu  $x$  äquivalent sein (Symmetrie),
- c) wenn  $x$  zu  $y$  und  $y$  zu  $z$  äquivalent sind, dann soll auch stets  $x$  zu  $z$  äquivalent sein (Transitivität).

Man kann beweisen, dass diese drei Eigenschaften der Relation notwendig und hinreichend dafür sind, dass die Untermengen zueinander äquivalenter Elemente von  $A$  paarweise elementfremd sind und in ihrer Gesamtheit alle Elemente von  $A$  enthalten, dass es sich damit tatsächlich um eine Klasseneinteilung in durchschnittsfremde Mengen handelt.

Bezeichnen wir zum Beispiel zwei ganze Zahlen  $x$  und  $y$  als äquivalent, wenn ihre Differenz eine gerade Zahl ist, dann können wir leicht zeigen, dass hierbei die Eigenschaften a) bis c) erfüllt sind. Fassen wir alle zueinander äquivalenten ganzen Zahlen zu Untermengen zusammen, so zerlegen wir die Menge  $G$  in zwei durchschnittsfremde Klassen, in die Menge der geraden und die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. (+)

## 1.12 Das Rechnen mit Restklassen

(+)  $m > 1$  sei eine beliebige natürliche Zahl, dann kann mit ihrer Hilfe eine Klasseneinteilung der Menge der ganzen Zahlen nach dem folgenden Schema vorgenommen werden.

Wir nennen zwei Zahlen  $x$  und  $y$  kongruent modulo  $m$ , wenn ihre Differenz durch  $m$  teilbar ist, und schreiben

$$x \equiv y \pmod{m}$$

Demnach ist  $7 \equiv 19 \pmod{4}$ , aber nicht  $7 \equiv 19 \pmod{5}$ , weil  $7 - 19 = -12$  zwar durch 4 aber nicht durch 5 ohne Rest teilbar ist.

Man zeigt leicht, dass die so eingeführte Relation der Kongruenz zweier ganzer Zahlen immer eine Äquivalenzrelation ist und die Eigenschaften a) bis c) besitzt.

Folglich wird die Menge der ganzen Zahlen in Klassen von untereinander modulo  $m$  kongruenten Zahlen zerlegt. Die Anzahl dieser Klassen ist gleich  $m$ , und alle Zahlen der gleichen Klasse liefern bei Division durch  $m$  den gleichen Rest. Wir sprechen deshalb von Restklassen modulo  $m$ .

Ist etwa  $m = 3$ , so erhalten wir die Klassen

- $K_1 = \{ \text{Menge aller ganzen Zahlen, die Vielfache von 3 sind} \}$ ,
- $K_2 = \{ \text{Menge der ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen} \}$  und
- $K_3 = \{ \text{Menge aller Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen} \}$

Jetzt bilden wir eine neue Menge, deren Elemente die Restklassen modulo  $m$  sind. Diese Menge  $M$  enthält demnach genau  $m$  Elemente, die  $m$  Kongruenzklassen modulo  $m$ .

In dieser Menge kann man leicht eine Addition und eine Multiplikation definieren.

Als Beispiel betrachten wir den Fall  $m = 5$ .  $A$  sei die Klasse der Zahlen mit dem Rest 2 bei Division durch 5 und  $B$  die Klasse mit dem Rest 4. Addieren wir nun eine beliebige Zahl aus  $A$  und eine andere aus  $B$ , so ergibt sich stets eine Zahl, die bei Division durch 5 den Rest 1 lässt, denn es ist ja  $(5a + 2) + (5b + 4) = 5(a + b + 1) + 1$ .

Demnach kann man sagen, dass die Summe der Klassen  $A$  und  $B$  die Klasse  $C$  der Zahlen mit dem Rest 1 ist.

Multiplizieren wir eine beliebige Zahl der Klasse  $A$  mit einer Zahl der Klassen  $B$ , dann bekommen wir stets eine Zahl, die bei Division durch 5 den Rest 3 lässt, denn

$$(5a + 2)(5b + 4) = 5(5ab + 4a + 2b + 1) + 3$$

Wir haben eine interessante Arithmetik erhalten, in der wir nicht mit der unendlichen Menge der ganzen Zahlen, sondern nur mit 5 Elementen, den Restklassen modulo 5, rechnen. Bezeichnen wir die Restklassen durch ihre primitiven Reste, z.B.

$$\mathbf{1} = \{\dots, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$$

dann können wir für die neuen "Zahlen"  $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$  eine Additions- und eine Multiplikationstabelle aufstellen (Abb. 17).

Abb. 17 Additionstabelle	Multiplikationstabelle																																																																								
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">+</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> </table>	+	0	1	2	3	4	0	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4	0	2	2	3	4	0	1	3	3	4	0	1	2	4	4	0	1	2	3	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">×</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	×	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	3	4	2	0	2	4	1	3	3	0	3	1	4	2	4	0	4	3	2	1
+	0	1	2	3	4																																																																				
0	0	1	2	3	4																																																																				
1	1	2	3	4	0																																																																				
2	2	3	4	0	1																																																																				
3	3	4	0	1	2																																																																				
4	4	0	1	2	3																																																																				
×	0	1	2	3	4																																																																				
0	0	0	0	0	0																																																																				
1	0	1	2	3	4																																																																				
2	0	2	4	1	3																																																																				
3	0	3	1	4	2																																																																				
4	0	4	3	2	1																																																																				

Ein besonders einfaches Aussehen haben diese Tabellen im Falle von  $m = 2$  (Abb. 18).

Abb. 18 Additionstabelle	Multiplikationstabelle																		
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">+</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table>	+	0	1	0	0	1	1	1	0	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">×</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	×	0	1	0	0	0	1	0	1
+	0	1																	
0	0	1																	
1	1	0																	
×	0	1																	
0	0	0																	
1	0	1																	

Die erste Tafel zeigt, dass die Summe zweier gerader Zahlen ebenso wie die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist, während die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl stets ungerade ausfällt.

Die zweite Tafel zeigt, dass das Produkt zweier ganzer Zahlen genau dann ungerade ist, wenn beide Faktoren ungerade Zahlen sind.

Mit der Arithmetik der Kongruenzklassen modulo  $m$  beschäftigt sich die Zahlentheorie. (+)

### 1.13 Differenzmengen

Polizeiinspektor Wernicke betrachtete sinnend den Safe, der erbrochen im Büro eines größeren Werkes stand, zog an seiner Pfeife und sagte:

"Nur fünf uns bekannte Einbrecher verwenden zum Knacken eines Tresors einen Schweißapparat, nämlich Alex Kunze, Fritz Schmidt, Gustav Heuer, Heinrich Kuntzmann und Tomas Müller. Alex, Fritz und Gustav befinden sich zur Zeit im Gefängnis. Demnach ist die Frage zu klären, wo Heinrich und Tomas in der vergangenen Nacht waren ..."

Die Methode, die Inspektor Wernicke anwandte, beruht auf der Subtraktion von Mengen. Er hatte es doch mit zwei Mengen zu tun. Zur Menge  $A$  gehörten alle ihm bekannten Einbrecher, die ein Schweißgerät benutzten, zur Menge  $B$  alle Insassen des betreffenden Gefängnisses. Indem er alle Elemente aus der Menge  $A$  herausnahm, die zur Menge  $B$  gehörten, erhielt er die Menge der verdächtigen Personen.

Man nennt die Menge, die aus allen Elementen einer Menge  $A$  besteht, die nicht zur Menge  $B$  gehören, die Differenzmenge von  $A$  und  $B$  und schreibt dafür  $A - B$ .

Wir sehen, dass bei der Bildung der Differenzmenge nicht unbedingt vorausgesetzt zu werden braucht, dass  $B$  eine Teilmenge von  $A$  ist. Bei der Differenzbildung werden alle Elemente aus  $A$  entfernt, die zu  $A$  und zu  $B$  gehören, d.h.

$$A - B = A - (A \cap B)$$

Beispielsweise brauchte Inspektor Wernicke aus der Menge der fünf "alten Bekannten" nur die drei auszuschließen, die ein Schweißgerät benutzten und gleichzeitig zur Zeit im Gefängnis saßen.

$A$  sei die Menge der Punkte des ersten Kreises von Abb. 19 und  $B$  die Menge der Punkte des zweiten Kreises, dann ist ihre Differenzmenge die in der Abbildung schraffierte mondsichelförmige Figur (mit Ausnahme des Bogens  $\widehat{MN}$ ).

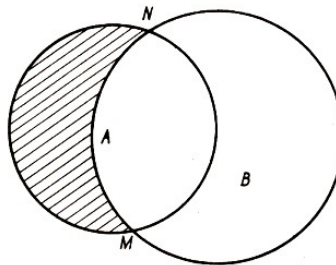


Abb. 19

Wenn  $A$  die Menge der Schüler einer bestimmten Schulklasse und  $B$  die Menge aller Schülerinnen der betrachteten Schule sind, dann ist  $A - B$  die Menge aller Knaben, die in die betreffende Klasse gehen.

Falls  $B$  eine Teilmenge von  $A$  ist, dann nennen wir die Menge  $A - B$  das Komplement von  $B$  in  $A$  und schreiben  $B'_A$ .

(Es versteht sich, dass die gleiche Menge  $B$  verschiedene Komplemente besitzt, je nachdem, in welcher Menge  $A$  sie enthalten ist.)

So ist beispielsweise das Komplement der Menge der geraden Zahlen in der Menge der ganzen Zahlen die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Das Komplement der Menge aller Quadrate in der Menge aller Rechtecke ist die Menge der Rechtecke mit unterschiedlich langen Seiten, das Komplement derselben Menge in der Menge aller Rhomben ist dagegen die Menge der Rhomben mit Diagonalen unterschiedlicher Länge.

Werden alle in Rede stehenden Mengen als Teilmengen einer bestimmten Grundmenge  $I$  aufgefasst, dann verstehen wir gewöhnlich unter ihrem Komplement das Komplement in  $I$  und schreiben einfach  $B'$  an Stelle von  $B'_I$ .

## 1.14 Mengenalgebra

(+) Wir haben jetzt die Grundrechenarten für Mengen kennengelernt: die Addition (Vereinigung), Subtraktion (Differenz) und Multiplikation (Durchschnitt) von Mengen.

Diese Operationen weisen eine Reihe von Eigenschaften auf, die uns an Eigenschaften der Grundrechenarten für Zahlen erinnern.

Bekanntlich baut sich das Rechnen mit rationalen Zahlen (Addition, Subtraktion, Multiplikation) auf Gesetzen auf, die sich in den folgenden Gleichungen ausdrücken:

- a)  $a + b = b + a$  (Kommutativgesetz der Addition)
- b)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (Assoziativgesetz der Addition)
- c)  $a + 0 = a$  (Eigenschaft der Null bezüglich der Addition)
- d)  $a + (-a) = a - a = 0$  (Eigenschaft des entgegengesetzten Elements)
- e)  $ab = ba$  (Kommutativgesetz der Multiplikation)
- f)  $(ab)c = a(bc)$  (Assoziativgesetz der Multiplikation)
- g)  $a(b + c) = ab + ac$  (Distributivgesetz)
- h)  $a \cdot 1 = a$  (Eigenschaft der Eins).

Für die Mengenoperationen können ziemlich analoge Gesetze hergeleitet werden. So ist beispielsweise sofort klar, dass für zwei beliebige Mengen  $A \cup B = B \cup A$  gilt, denn definitionsgemäß bestehen die Mengen  $A \cup B$  und  $B \cup A$  aus denselben Elementen, nämlich allen, die in  $A$  oder  $B$  enthalten sind.

Genauso leicht sieht man

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

denn beide Mengen enthalten genau die Elemente, die in  $A$  oder  $B$  oder  $C$  enthalten sind. Man beweist auch leicht, dass

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ist.

Ein wenig komplizierter gestaltet sich schon der Beweis des Distributivgesetzes in der Form

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1}$$

Der strenge logische Beweis dieser Gleichung ist nicht schwierig, aber ein wenig langwierig. Wir begnügen uns deshalb mit zwei Skizzen, die uns die Regel verdeutlichen sollen (Abb. 20).

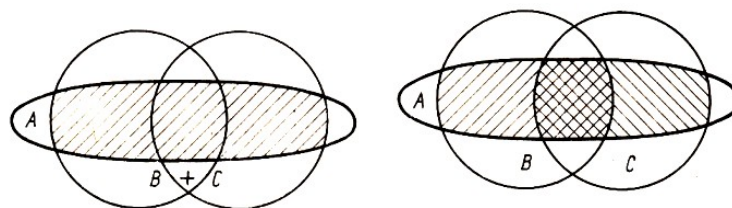


Abb. 20

In der ersten ist der Durchschnitt der Mengen  $A$  und  $B \cup C$  schraffiert dargestellt, in der zweiten die Durchschnitte von  $A$  und  $B$  sowie von  $A$  und  $C$ .

Die Rolle der Null und Eins beim Rechnen mit Mengen spielen die leere Menge  $\emptyset$  und die Grundmenge  $I$ . In der Tat entsprechen die Gleichungen

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap I = A$$

genau den Beziehungen

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a$$

für Zahlen.



Wir haben uns also davon überzeugt, dass die Addition und Multiplikation von Mengen in dem von uns angegebenen Sinne denselben Gesetzen genügt, wie die Addition und Multiplikation der Zahlen. Infolgedessen gelten alle Formeln der Zahlenalgebra, die nur Addition und Multiplikation enthalten, sinngemäß auch für die Mengenalgebra.

Die Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

für Zahlen hat beispielsweise in der Formel

$$(A \cup B) \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B \cap B) \quad (2)$$

ihre Entsprechung für Mengen.

Die Mengenalgebra zeigt aber natürlich auch einige Eigenheiten.

Die Hauptbesonderheit besteht zunächst einmal darin, dass man Formeln wesentlich vereinfachen kann, wenn die beteiligten Mengen Teilmengen voneinander sind. Für  $A \subseteq B$  erhalten wir beispielsweise  $A \cup B = B$  und  $A \cap B = A$ . Das wird sofort bei einer Betrachtung von Abb. 21 klar.

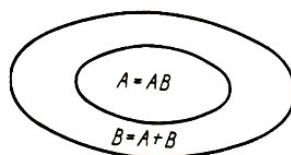


Abb. 21

Insbesondere ist wegen  $A \subseteq A$  immer  $A \cup A = A \cap A = A$  und wegen  $A \subseteq I$  gilt  $A \cup I = I$ . Wenn wir das beachten, dann vereinfacht sich zum Beispiel unsere Formel (2) wegen  $A \cap A = A$ ,  $B \cap B = B$  und  $A \cap B \subseteq A$  und damit  $A \cap A \cup 2(A \cap B) = A \cup 2(A \cap B) = A$  ganz wesentlich zu

$$(A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B \quad (2a)$$

Ganz allgemein hat die Potenz in der Mengenalgebra keinen Sinn, weil  $A^n = A$  gilt.

Wir zeigen jetzt, dass in der Mengenalgebra noch ein zweites Distributivgesetz gilt, für das es in der Algebra der Zahlen keine Entsprechung gibt. Es drückt sich in der Formel

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (3)$$

aus. Zum Beweis wenden wir die Formel (1) zweimal auf die rechte Seite von (3) an:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C] \\ &= [(A \cap A) \cup (A \cap B)] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \end{aligned}$$

woraus wegen  $A \cap C \subseteq A$ ,  $A \cap B \subseteq A$  und  $A \cap A = A$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

das heißt die Formel (3) folgt.

Weiterhin bemerken wir, dass die Operation der Subtraktion von Mengen nicht alle Eigenschaften der Subtraktion von Zahlen besitzt. Für drei beliebige Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt immer

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$

Für drei beliebige Mengen  $A, B, C$  kann jedoch

$$A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - C$$

gelten. Dieser Fall tritt zum Beispiel schon ein, wenn  $A = B = C$  gewählt wird. Dann ist  $A \cup (B - C) = A \cup \emptyset = A$ , aber  $(A \cup B) - C = A - A = \emptyset$ .

In der Mengenlehre gibt es ferner Operationen, die beim Rechnen mit rationalen Zahlen fehlen, und zwar ist das die Bildung des Komplementes  $A' = I - A$  einer gegebenen Menge  $A \subseteq I$ . Offenbar ist hier immer  $A \cap A' = \emptyset$  und  $A \cup A' = I$  und damit  $\emptyset' = I$  sowie  $I' = \emptyset$ .

Schließlich gilt noch die Beziehung  $(A')' = A$  (vgl. Abb. 22).

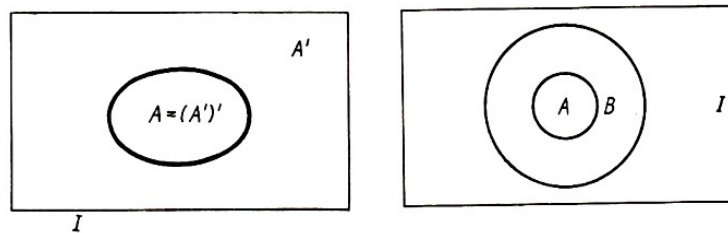


Abb. 22,23

Nunmehr zeigen wir, dass aus  $A \subseteq B$  stets  $B' \subseteq A'$  folgt.

Das wird plausibel gemacht durch die Bemerkung, dass natürlich für das Komplement um so weniger Elemente zur Verfügung bleiben, je größer die Menge selbst ist. In der Abb. 23 ist die universelle Menge  $I$  als Rechteck dargestellt, während die Mengen  $A$  und  $B$  durch Kreisflächen innerhalb des Rechtecks symbolisiert werden.

Das Komplement von  $A$  besteht aus den Punkten des Rechtecks, die außerhalb des kleineren Kreises liegen, das Komplement von  $B$  ist die Teilmenge von  $I$  außerhalb des größeren Kreises. Offenbar ist  $B' \subseteq A'$ .

Nur wenig schwieriger ist der Beweis der folgenden Formeln:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{und} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

In Abb. 24 ist  $A'$  waagrecht schraffiert,  $B'$  ist durch senkrechte Schraffur hervorgehoben.  $A' \cap B'$  hat beide Schraffuren und besteht aus allen Punkten von  $I$ , die nicht zu  $A \cup B$  gehören, ist also die Menge  $(A \cup B)'$ , womit die erste Formel bewiesen ist. Ganz entsprechend illustriert Abb. 25 die zweite Formel.

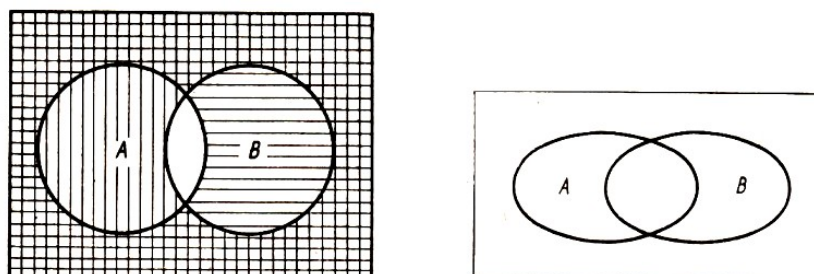


Abb. 24,25

Jetzt wollen wir die Liste der Eigenschaften der Rechenoperationen mit Mengen zusammenstellen. Damit wir uns auch an die anderen Bezeichnungen gewöhnen, schreiben wir von jetzt an immer  $AB$  für den Durchschnitt und  $A + B$  für die Vereinigung. Damit kann man außerdem die Formeln besser mit den bekannten Beziehungen der gewöhnlichen Zahlenalgebra vergleichen.

- 1)  $A \subseteq A$
- 2) Wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ , so  $A = B$ .
- 3) Wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq C$ , so  $A \subseteq C$ .
- 4)  $\emptyset \subseteq A$ .
- 5)  $A \subseteq I$ .
- 6)  $A + B = B + A$ .
- 7)  $AB = BA$ .
- 8)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- 9)  $A(BC) = (AB)C$ .
- 10)  $A + A = A$ .
- 11)  $AA = A$ .
- 12)  $A(B + C) = AB + AC$ .
- 13)  $A + BC = (A + B)(A + C)$ .
- 14)  $A + \emptyset = A$ .
- 15)  $AI = A$ .
- 16)  $A + I = I$ .
- 17)  $A\emptyset = \emptyset$ .
- 18) Die Beziehung  $A \subseteq B$  ist zu  $A + B = B$  und auch zu  $AB = A$  äquivalent.
- 19)  $A + A' = I$ .
- 20)  $AA' = \emptyset$ .
- 21)  $\emptyset' = I$ .
- 22)  $I' = \emptyset$ .
- 23)  $(A')' = A$ .
- 24)  $A \subseteq B$  ist äquivalent zu  $B' \subseteq A'$ .
- 25)  $(A + B)' = A'B'$ .
- 26)  $(AB)' = A' + B'$ .

Nun können wir die folgenden Dualitätsbeziehungen erkennen:

Vertauscht man in, jeder der Formeln 1) bis 26) jeweils die beiden Symbole  $\subseteq$  und  $\supseteq$ ,  $\emptyset$  und  $I$ ,  $+$  und  $\cdot$ , dann geht der ganze Formelsatz in sich über, indem jede der Formeln sich in eine andere Formel aus der ursprünglichen Reihe verwandelt.

So wird beispielsweise aus 6)  $A + B = B + A$  die Formel  $AB = BA$ , und das ist unsere frühere Formel Nr. 7. Ebenso geht Formel 12) in Formel 13) über und so weiter ...

Daraus folgt, dass jeder Satz, der aus den Formeln 1) bis 26) hergeleitet werden kann, einen anderen richtigen Satz liefern muss, wenn wir die oben angegebenen Vertauschungen von Symbolen vornehmen. Die entsprechenden beiden Sätze werden dann zueinander dual genannt.

Nun dürfte es aber nicht gerade einfach sein, wenn man sich alle diese 26 Formeln merken wollte! Das ist aber auch nicht nötig.

Man kann sie nämlich alle aus den folgenden sechs Beziehungen ableiten:

- a)  $A + B = B + A$ ,
- b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- c)  $(A' + B') + (A' + B)' = A$ ,

d)  $AB = (A' + B)'$ ,

e)  $A \subseteq B$  bedeutet definitionsgemäß  $A + B = B$  und f)  $I = A + A'$ ,  $\emptyset = I'$ .

### 1.15 Der Planet der Ungeheuer

Während eines Plauderstündchens bei einer Tasse Kaffee im "Klub der Intergalaktischen Reisenden" erzählte sein prominentestes Mitglied, der Münchhausen des kosmischen Zeitalters, John Tichy<sup>3</sup> die folgende Geschichte:

"Die Landung auf dem Planeten Hesiod war sehr schwierig. Als ich mich jedoch seiner Oberfläche näherte, da bedauerte ich sehr, den Abstieg überhaupt eingeleitet zu haben. Ich konnte dort Wesen beobachten, die noch weit schauerlicher anzusehen waren als die in der griechischen Mythologie beschriebenen Ungeheuer.

Bald näherte sich mir eine Delegation von 1000 Bewohnern des Planeten. 811 von ihnen besaßen nur ein Auge mitten auf der Stirn wie vormals der Riese Polyphem, 752 von ihnen trugen an Stelle der Haare Schlangen wie Medusa, 418 hatten einen Fischschwanz wie die Nereiden.

Im Gegensatz zu den als Vergleich genannten Ungeheuern der griechischen Sagen waren verschiedene Bewohner dieses Planeten gleichzeitig durch verschiedene Merkmale verunstaltet. So waren 570 von ihnen einäugig und schlangenhäuptig, 356 Einäugige besaßen Fischschwänze, 348 fischgeschwänzte Ungeheuer hatten Schlangenhäupter und 297 waren einäugig, hatten Schlangen an Stelle von Haaren und besaßen dazu noch einen Fischschwanz. Der Älteste wandte sich an mich und sagte ..."

Aber die Mitglieder des Klubs erfuhren genausowenig wie wir, was John Tichy auf dem Planeten der Ungeheuer weiter erlebt hatte, denn kaum war er mit seiner Erzählung bis hierher gekommen, da schaute ihn Professor Tarantoga mit einem feinen Lächeln an und warf ein:

"Lieber John! Ich will Dir gern glauben, dass es auf jenem Planeten Wesen mit einem Auge, mit Fischschwänzen und Medusenhäuptern gibt. Du musst sogar noch viel schrecklichere Ungeheuer getroffen haben - erinnere Dich nur ganz genau! Aber eines weiß ich ganz sicher: dass auch auf jenem Planeten, wenn er wirklich existiert, die Gesetze der Mathematik nicht in Sagen verwandelt worden sein können."

Und der Professor nahm eine Papierserviette vom Tisch und skizzierte das folgende Schema (Abb. 26), wobei er sagte:

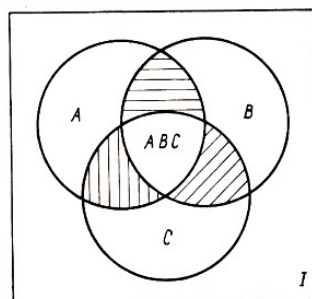


Abb. 26

<sup>3</sup>Die Reisen John Tichys sind von dem bekannten polnischen Schriftsteller Stanislaw Lem in seinem Buch "Die Stern-Tagebücher des John Tichy" beschrieben worden. Der Autor der "Erzählungen über Mengen" hofft, dass S. Lem ihm seine ungeschickte Imitation verzeiht und dass die Leser dieses Buches seine literarischen Mängel nicht S. Lem zur Last legen werden.

"Mit  $I$  wollen wir die Menge aller Wesen der Delegation bezeichnen.  $A$  sei die Menge der Einäugigen,  $B$  die mit den Schlangen auf dem Kopf und  $C$  sei die Menge der fischgeschwänzten Ungeheuer. Alle drei Mengen stellen wir als Kreisflächen dar. Die drei Kreise zerlegen das Rechteck in 8 Gebiete. Wir wollen zusammenzählen, wieviele Ungeheuer jedem Teil angehören.

570 Elemente hat die Menge  $AB$  (einäugig und schlangenhäutig), 297 gehören zu  $ABC$ . Demnach verbleiben in  $AB - ABC$  273 Elemente. Das ist die in Abb. 26 waagrecht schraffierte Menge.

Genauso bekommen wir heraus, dass die Menge  $AC - ABC$  aus 59 und dass  $BC - ABC$  aus 51 Elementen besteht. Nun ist es ein Leichtes, die Anzahl der Ungeheuer anzugeben, die nur einäugig waren, aber weder ein Medusenhaupt, noch einen Fischschwanz hatten.

Die Menge  $A$  enthält  $811 - 570 - 59 = 182$  Elemente! Ebenso erkennen wir, dass  $B - (A + C)$  131 und  $C - (A + B)$  11 Elemente enthalten. Die Ergebnisse sind in Abb. 27 eingetragen.

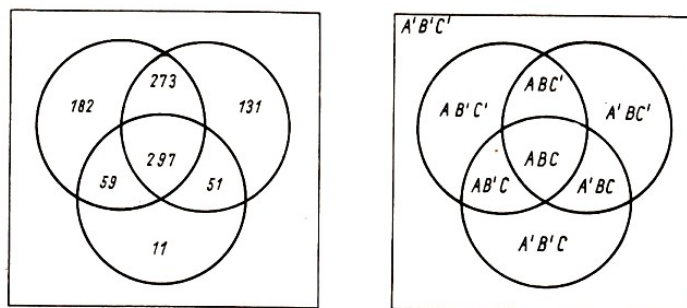


Abb. 27,28

Nun wollen wir aber auch noch ausrechnen, wieviele Ungeheuer der Abordnung weder einäugig, noch medusenhäutig oder fischgeschwänzt gewesen sind, d.h., wieviele Elemente die Menge  $I - A - B - C$  enthält.

Dazu brauchen wir von der Zahl 1000 lediglich die Summe  $297 + 273 + 59 + 51 + 182 + 131 + 11 = 1004$  zu subtrahieren. Die Menge  $I - A - B - C$  hat also  $-4$  Elemente!

Nun, mein lieber John, wirst Du mir wohl zugeben, dass auch auf Deinem Planeten der Ungeheuer keine Menge eine negative Anzahl von Elementen haben kann. Ich glaube, dass eine solche Annahme selbst Dir sehr unwahrscheinlich erscheinen wird."

(+) Wir lassen nun für kurze Zeit John Tichy mit seinem Professor allein (wir werden unserem Münchhausen bald noch einmal begegnen) und machen einige Bemerkungen.

Wir hatten die ganze Menge  $I$  in acht Teile zerlegt und die Anzahl der Elemente bestimmt. Der Sinn dieser Zerlegung bestand darin, dass wir Teilmengen erhielten, die paarweise einen leeren Durchschnitt hatten.

Die gleiche Zerlegung hätte man aber auch auf einem anderen Wege herstellen können.

Wir wissen, dass

$$I = A + A' = B + B' = C + C'$$

und deshalb

$$\begin{aligned} I &= (A + A')(B + B')(C + C') \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C' \end{aligned}$$

ist.

Auch hier handelt es sich um eine Zerlegung von  $I$  in acht Teilmengen, und es stellt sich heraus, dass diese Zerlegung mit der von Professor Tarantoga dargelegten (Abb. 28) identisch ist.

Aus der vorstehenden Formel folgt sofort, dass

$$N(A'B'C') = N(I) - N(ABC) - N(ABC') - N(AB'C) - N(AB'C') \\ - N(A'BC) - N(A'B'C) - N(A'B'C')$$

ist, wobei wir mit  $N(D)$  die Zahl der Elemente einer Menge  $D$  bezeichnet haben. Diese Formel kann noch so umgeformt werden, dass in ihr die Komplemente  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  auf der rechten Seite nicht mehr vorkommen. Dazu schreiben wir  $C' = I - C$  und bekommen

$$ABC' = AB(I - C) = AB - ABC \quad \text{und somit} \quad N(ABC') = N(AB) - N(ABC)$$

Ebenso

$$N(AB'C') = N(AB') - N(AB'C) \quad \text{usw.}$$

Fahren wir auf diese Weise fort, dann bekommen wir zum Schluss die wichtige Gleichung:

$$N(A'B'C') = N(I) - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(AC) + N(BC) - N(ABC)$$

Sie wird Formel des Ein- und Ausschlusses genannt und dient der Lösung vieler Aufgaben, die der oben dargestellten analog sind. Beispielsweise hätte der Professor mit dieser Formel sofort ausrechnen können, dass nach der Erzählung Johns hätte

$$N(A'B'C') = -4$$

sein müssen. (+)

Hier ist eine weitere Aufgabe, die mit dem Abzählen der Elemente endlicher Mengen zusammenhängt. Sie stammt von dem bekannten Kinderbuchautor Lewis Carroll, dessen Buch "Alice im Wunderland" sehr bekannt ist. Vielleicht interessiert es, dass Lewis Carroll das Pseudonym des Mathematikers C. L. Dodgson ist.

In einer der Erzählungen finden wir die folgende Aufgabe:

"In einem besonders hartnäckigen Kampf verloren 70 von 100 Piraten ein Auge, 75 ein Ohr, 80 eine Hand und gar 85 ein Bein. Wieviele Piraten mindestens verloren in diesem Gefecht sowohl Auge wie Ohr, Hand und Bein?"

Wir bezeichnen mit  $A$  die Menge der Piraten, die ein Auge verloren, mit  $B$  die Menge derer, die ein Ohr einbüßten.  $C$  sei die Menge mit nur noch einer Hand und  $D$  die Menge der einbeinigen Piraten. In der Aufgabe wird nach der Anzahl der Elemente der Menge  $ABCD$  gefragt.

Die Grundmenge  $I$  besteht offensichtlich aus allen Piraten der Menge  $ABCD$  und allen, die beide Augen oder beide Ohren, beide Hände oder beide Beine behalten haben. Das heißt

$$I = A' + B' + C' + D' + ABCD$$

Daraus ist zu ersehen, dass die Anzahl der Elemente von  $I$  nicht kleiner als die Summe der Zahlen  $N(A')$ ,  $N(B')$ ,  $N(C')$ ,  $N(D')$  und  $N(ABCD)$  sein kann. (Sie wäre gleich dieser Summe, wenn alle diese Mengen paarweise elementfremd wären.)

Aus den in der Aufgabe gemachten Angaben folgt demnach

$$100 \leq 30 + 25 + 20 + 15 + N(ABCD)$$

das heißt aber

$$N(ABCD) = 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10$$

Also verloren nicht weniger als 10 Piraten in diesem Gemetzel sowohl ein Auge als auch ein Ohr, eine Hand und ein Bein.

## 1.16 Boolesche Algebren

(+) In der Mathematik kommen auch Objekte vor, die keine Mengen sind, zwischen denen aber eine Addition und eine Multiplikation so definiert werden kann, dass sie den Regeln 1) bis 26) genügen. Solche Systeme von Objekten studierte um 1847 der englische Mathematiker Boole.

Deshalb heißen solche Strukturen Boolesche Algebren.

Später fand man allerdings heraus, dass Boole Vorgänger hatte. Bereits um 1685 hatten die Brüder Bernoulli Algebren mit eben diesen Eigenschaften untersucht.

Dennoch hat sich der Name fest eingebürgert. Sowohl die Brüder Bernoulli als auch Boole wurden auf diese Strukturen bei dem Versuch geführt, eine Algebra der Logik aufzubauen, das heißt das logische Schließen zu formalisieren. Die Boolesche Algebra ist dieser Aufgabe besonders gut angepasst.

Als Aussage bezeichnet man in der mathematischen Logik einen Satz, der entweder wahr oder falsch sein kann. Dabei interessiert man sich nicht dafür, ob eine bestimmte Aussage tatsächlich wahr oder falsch ist, sondern nur dafür, nach welchen Regeln man aus gegebenen Aussagen kompliziertere Aussagen gewinnen kann und wie man aus der Kenntnis des Wahrheitswertes der Ausgangsaussagen die Wahrheit oder Falschheit der zusammengesetzten Aussage erschließen kann.

Für so formalisierte Aussagen kann man folgende Operationen einführen;

1) Die Negation  $\bar{X}$  einer gegebenen Aussage  $X$ .

Sie wird so definiert, dass sie genau dann wahr ist, wenn  $X$  selbst falsch und genau dann falsch, wenn  $X$  wahr ist.

2) Die Konjunktion  $X \wedge Y$  zweier Aussagen  $X$  und  $Y$ .

Sie soll genau dann wahr sein, wenn sowohl  $X$  als auch  $Y$  wahre Aussagen sind.

3) Die Disjunktion  $X \vee Y$  zweier Aussagen  $X$  und  $Y$ .

Sie soll genau dann falsch sein, wenn sowohl  $X$  als auch  $Y$  falsch ist.

4) Die Implikation  $X \rightarrow Y$  zweier Aussagen  $X$  und  $Y$ .

Diese aus den beiden gegebenen Aussagen gebildete neue Aussage soll genau dann falsch sein, wenn  $X$  wahr und  $Y$  falsch ist.

(Siehe auch Hasse, Mengenlehre und Logik, S.5-7; Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik, S. 11-14.)

In vielen Fällen drückt eine Aussage lediglich aus, ob ein gewisses Element  $x$  einer bestimmten Teilmenge  $A$  irgendeiner Grundmenge  $I$  angehört oder nicht. In diesem Fall entsprechen die Operationen 1) bis 4) zwischen den Aussagen vollkommen unseren wohlbekannten Mengenoperationen.

Die Negation der Aussage " $x \in A$ " ist beispielsweise die Aussage " $x \in A'$ ". Demnach entspricht die Bildung des Komplementes von  $A$  vollkommen der Negation der Aussage " $x \in A$ ". Ebenso entspricht die Konjunktion der beiden Aussagen " $x \in A$  und  $x \in B$ " vollkommen der Bildung des Durchschnitts von  $A$  und  $B$ , die Disjunktion der Bildung der Summe und die Eigenschaft  $A \subseteq B$  entspricht genau der Implikation von " $x \in A$ " und  $x \in B$ .

Dabei ist die Aussage " $x \in I$ " immer wahr, während " $x \in \emptyset$ " eine stets falsche Aussage ist.

Dieser offenbare Zusammenhang lässt die Annahme natürlich erscheinen, dass die Regeln 1) bis 26) nicht nur für Mengen, sondern sinngemäß übertragen auch für Aussagen gelten. Wir

brauchen nur unter  $A, B, C, \dots$  jetzt Aussagen zu verstehen und die Symbole entsprechend zu deuten:

$A \cap B \dots A \wedge B$	Konjunktion,
$A \cup B \dots A \vee B$	Disjunktion,
$A \subseteq B \dots A \rightarrow B$	Implikation,
$A' \dots \bar{A}$	Negation,
$I \dots I$	die immer wahre Aussage,
$\emptyset \dots 0$	die immer falsche Aussage.

Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung beweisen - die Aussagen bilden mit den Operationen 1) bis 4) zusammen eine Boolesche Algebra. Boolesche Algebren können nicht nur aus Aussagenmengen aufgebaut werden.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die Menge der geordneten  $n$ -Tupel, deren Ziffern nur 0 oder 1 sein können. Die Addition und Multiplikation zweier solcher  $n$ -Tupel definieren wir koordinatenweise, indem wir nur für die Ziffern 0 und 1 eine Additions- und eine Multiplikationstabelle aufschreiben:

Addition			Multiplikation		
$+$	$0$	$1$	$\times$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$1$	$1$	$0$	$1$

Die Anwendung wird in folgenden Beispielen deutlich:

$$(1,0,0,1) + (1,1,0,1) = (1,1,0,1) \quad \text{und} \quad (1,0,0,1) \cdot (1,1,0,1) = (1,0,0,1)$$

Weiterhin definieren wir  $x \subset y$  für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , wenn  $x_k \leq y_k$  für alle  $k = 1, 2, \dots, n$  gilt. Vertauschen wir im  $n$ -Tupel  $x$  jeweils jede 0 mit einer 1 und jede 1 mit einer 0, so nennen wir das Ergebnis  $x'$ . Mit 0 bezeichnen wir jetzt das  $n$ -Tupel  $(0, 0, \dots, 0)$ , und das  $n$ -Tupel  $(1, 1, \dots, 1)$  soll  $I$  heißen.

Wir stellen dem Leser die Aufgabe, für die so definierten Operationen die Eigenschaften 1) bis 26) nachzuweisen.

Ein weiteres interessantes Beispiel einer Booleschen Algebra ergibt sich, wenn alle natürlichen Teiler einer festen natürlichen Zahl  $N$  betrachtet werden, die das Produkt von verschiedenen Primzahlen ist. Als Addition zweier Teiler definieren wir die Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der beiden "Summanden" und als Multiplikation die Bildung des größten gemeinsamen Teilers der beiden Zahlen.

Das Komplement des Teilers  $n$  nennen wir  $n' = N/n$ .

Wir sagen  $n \subset m$ , wenn  $n$  Teiler von  $m$  ist. Es kann unschwer gezeigt werden, dass auch für die so definierte Struktur die Formeln 1) bis 26) sinngemäß gelten, wobei wir unter  $I$  jetzt die Zahl  $N$  und unter  $\emptyset$  die Zahl 1 verstehen.

Als Beispiel betrachten wir die Teiler der Zahl  $N = 30$ , das heißt, unsere Boolesche Algebra besteht aus den Zahlen

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Die "Summe" von 2 und 5 ist nach unserer Definition gleich 10, das "Produkt" ist 1. Das "Komplement" von 3 ist 10, d.h.  $3 = 10$ , und es ist  $3 \subset 15$ , weil 3 ein Teiler von 15 ist.



## 2 Die Wunderwelt des Unendlichen

### 2.1 Die Geheimnisse der Unendlichkeit

Es ist sicher keine Übertreibung, wenn man sagt, dass die Idee des Unendlichen die gesamte Mathematik durchdringt. In der Regel interessiert man sich in der Mathematik nicht für einzelne Objekte, wie Zahlen oder geometrische Figuren, sondern für ganze Klassen solcher Dinge: für die Menge aller natürlichen Zahlen, aller Dreiecke usw.

Diese Mengen bestehen jedoch aus unzählbar vielen verschiedenen Elementen. Deshalb haben sich Mathematiker und Philosophen schon immer für den Begriff des Unendlichen interessiert. Dieses Interesse entstand genau in dem Moment, als klar wurde, dass auf jede natürliche Zahl eine weitere folgt, dass die Reihe der natürlichen Zahlen ohne Ende ist.

Jedoch führten die ersten Bemühungen um das Studium des Unendlichen auf viele Unklarheiten.

So bewies beispielsweise der griechische Philosoph Zenon die Unmöglichkeit einer Bewegung, indem er den Begriff des Unendlichen zu verwenden versuchte. Damit ein Pfeil eine bestimmte Strecke durchfliegen kann, so sagte er, muss er zunächst die Hälfte des Weges zurücklegen. Dazu aber muss er erst die Hälfte der Hälfte, d. h. ein Viertel des Weges, durchfliegen, dazu aber wiederum  $1/8$  usw.

Weil der Prozess der Teilung des Weges niemals endet (da haben wir sie, die Unendlichkeit!), kann sich der Pfeil gar nicht vom Fleck bewegen.

Mit einer verwandten Schlussweise zeigte Zenon auch, dass der schnelle Läufer Achilles niemals die langsame Schildkröte einholen kann.

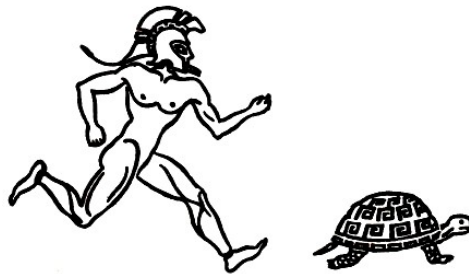


Abb. 29

Wegen solcher Paradoxien und Sophismen wollten die altgriechischen Mathematiker der Unendlichkeit keinen Platz in ihrer Lehre einräumen, und sie verbannten sie aus den mathematischen Überlegungen. Gewisse Philosophen behaupteten, dass alle geometrischen Figuren aus einer endlichen Anzahl kleinster unteilbarer Teile (Atome) bestehen.

Die atomistische Theorie vermied das Paradoxon von Zenon leicht, weil in ihr die unendlich fortgesetzte Teilung nicht vorkam - geteilt konnte höchstens bis zu den kleinsten Atomen werden und weiter nicht. Jedoch tauchten dabei neue Schwierigkeiten auf.

Niemals ist z. B. eine Strecke durch fortgesetzte Halbierung zu teilen, wenn sie aus einer ungeraden Zahl von "Atomen" besteht (Abb. 30).

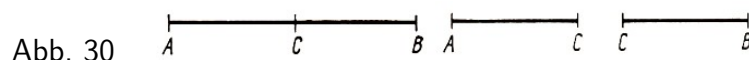


Abb. 30

Auch eine Kreisfläche kann niemals in zwei gleiche Teile zerlegt werden denn der Mittelpunkt wird sicher nur einem Teil angehören können, und das widerspricht der Gleichheit der beiden Hälften.

Der Kampf um das Unendliche wurde übrigens mit ziemlicher Schärfe ausgetragen:

So ging etwa der bekannte griechische Philosoph Platon mit einer solchen Unversöhnlichkeit gegen die atomistische Theorie Demokrits vor, dass er überall die Handschriften des Autors suchte und sie vernichtete - und diese Methode des Ideenkampfes war vor der Erfindung des Buchdruckes ziemlich wirksam.

Die Methoden, in denen der Begriff des Unendlichen verwendet wurde, führten griechische Gelehrte zu einigen-bedeutsamen Ergebnissen, besonders in der Geometrie. Jedoch hatten die Paradoxa von Zenon sie zur Vorsicht gemahnt, und so drückt sich etwa Euklid bei der Formulierung seines wichtigen Satzes von der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen folgendermaßen aus:

"Der Primzahlen gibt es mehr, als jede gegebene Menge von Primzahlen enthält."

Ob aber "mehr als jede gegebene Menge" soviel wie "unendlich viele" bedeutet - darüber schweigt Euklid sich aus!

Im allgemeinen haben es die alten Griechen so gut verstanden, die Verwendung des Unendlichen zu verschleiern, dass es erst den europäischen Mathematikern des 16.-17. Jahrhunderts gelang, dies aufzudecken.

Im Mittelalter interessierten sich gewisse Scholastiker hauptsächlich im Zusammenhang mit der Frage, ob die Menge der Engel, die auf einer Nadelspitze Platz nehmen können, endlich ist oder nicht, für das Problem des Unendlichen.

Die breite Anwendung des Unendlichen in der Mathematik begann mit dem 17. Jahrhundert, als die mathematische Analysis entwickelt wurde. Solche Begriffe wie unendlich große Größe und unendlich kleine Größe bildeten nun die Grundlage vieler mathematischer Untersuchungen.

Man studierte in jener Zeit jedoch nicht Mengen, die unendlich viele Elemente enthielten, sondern Größen, die im Prozess immer größer und größer wurden, so dass sie schließlich jeden beliebig großen festgehaltenen Wert übertrafen. Solche Größen wurden potentiell unendlich groß genannt, was darauf hindeuten sollte, dass sie jeden beliebig großen Wert annehmen können (lat. *potentia* - Kraft, Wirksamkeit).

Erst um die Mitte des 19. Jahrhunderts wurde mit dem Studium von Mengen begonnen, die unendlich viele Elemente enthalten; erst jetzt führte man den Begriff des Unendlichen wirklich in die Analysis ein.

Die Schöpfer der mathematischen Theorie unendlicher Mengen waren der tschechische Gelehrte Bernhard Bolzano (dessen Hauptarbeiten erst viele Jahre nach seinem Tode publiziert worden sind) und der deutsche Mathematiker Georg Cantor.

Diesen bedeutenden Gelehrten gelang es endlich, die Scholastik zu überwinden und die Theorie der Mengen zu einem wichtigen Teil der Mathematik zu machen. Das Hauptverdienst Bolzanos und Cantors war dabei das Studium der Eigenschaften unendlicher Mengen, da die Eigenschaften endlicher Mengen auch vor ihnen bereits hinreichend bekannt waren. Es zeigte sich, dass die Eigenschaften endlicher und unendlicher Mengen einander vollkommen unähnlich sind. Viele Erscheinungen, die für endliche Mengen unmöglich sind, können sich für unendliche Mengen ganz leicht ergeben.

Man versuche doch beispielsweise, in einem Hotel, dessen sämtliche Zimmer belegt sind, noch einen Gast unterzubringen, ohne eines der Zimmer doppelt zu belegen. Das geht nicht? Nun, das geht nur deshalb nicht, weil die Zahl der Zimmer endlich ist! Wenn es in diesem Hotel

dagegen unendlich viele Zimmer gäbe ... Aber einem solchen Hotel können wir höchstens in den Erzählungen unseres wohlvertrauten Sternenreisenden John Tichy begegnen. Also erteilen wir ihm doch noch einmal das Wort.

## 2.2 Das ungewöhnliche Hotel oder die eintausendunderste Reise des John Tichy

Ich war ziemlich spät nach Hause gekommen, denn der Abend im Klub Andromedanebel hatte sich bis weit nach Mitternacht hingezogen. Während der ganzen Nacht quälten mich Alpträume.

Bald glaubte ich mich von einem gewaltigen Drachen verschlungen; bald schien es mir, als würde ich wieder auf dem Planeten Durtiotow landen und wüsste nicht, wie ich den dortigen grausigen Maschinen entgehen sollte, die Menschen in Sechsecke verwandeln; dann wiederum träumte mir ...

Mit seinem schrillen Ton rief mich das Telefon in die Wirklichkeit zurück. Am Apparat war mein guter alter Freund, mein Weggenosse vieler Fahrten im interstellaren Raum, Professor Tarantoga.

"Eine wichtige Aufgabe, lieber John", so hörte ich seine Stimme, "die Astronomen haben im Kosmos ein geheimnisvolles Objekt entdeckt. Von einer Galaxis zur anderen erstreckt sich eine unbekannte dunkle Linie. Die besten Fernrohre, Radioteleskope, Neutrinoskope und Gravitoskope können nicht helfen.

Du bist unsere letzte Hoffnung. Starte unverzüglich in Richtung des Nebels AZD - 1587!"

Am nächsten Morgen holte ich meine gute alte Photonenrakete aus der Reparatur, montierte noch den Zeitbeschleuniger und den Elektronenroboter, der alle kosmischen Sprachen beherrscht und zur Vertreibung der Langeweile alle Erzählungen über die Welt der Sterne kennt, und begab mich auf die Reise.



Abb. 31

Als der Roboter das Repertoire seiner Unterhaltung erschöpft hatte und gerade von vorn beginnen wollte (und ich kann Euch sagen, dass es nichts fürchterlicheres gibt, als einen Roboter,

der eine dieser abgewetzten Geschichten zehnmal erzählt), näherte ich mich meinem Ziel. Ich ließ die letzten Nebel, die die dunkle Linie verhüllt hatten, hinter mir und sah vor mir das Hotel Kosmos.

Um all den vielen Weltenwanderern endlich eine Heimat zu geben, wenn sie von Planet zu Planet fahren und nirgends eine Bleibe vorfinden, hatte das Volk der Wygont beschlossen, ein Hotel für alle Sternenreisenden zu bauen. Dasselbe erstreckte sich fast durch alle Milchstraßen und wies so vieles Wunderbare auf, dass ich fürchte, ein Lügner zu heißen, wenn ich es alles berichten würde.

Das Wesentliche muss ich aber doch noch sagen: das Hotel hatte unendlich viele Zimmer. So hofften die Erbauer, unbedingt zu erreichen, dass keiner je verärgert wieder aus dem Tor gehen müsste, nachdem ihm der Portier gesagt hatte: "Es ist nichts mehr frei."

Und doch hatte ich kein Glück. Kaum hatte ich das Foyer betreten, als mir auch schon ein Plakat in die Augen stach:

"Tagungsbüro der Kosmoszoologentagung in der 127. Etage".

Weil von allen Galaxien die Kosmoszoologen herbeigekommen waren, die Menge aller Milchstraßensysteme aber unendlich ist, mussten alle Zimmer belegt sein und für mich war doch kein Platz mehr zu finden. Und tatsächlich schlug mir der Portier zunächst auch vor, mit irgendeinem Kosmoszoologen zusammen zu übernachten.

Als ich ihm jedoch klarmachte, dass der eine mir vorgeschlagene Nachbar  $-271^{\circ}\text{C}$  und der andere  $+587^{\circ}\text{C}$  als angenehme Zimmertemperatur empfinden würde, war er mit seinem Latein am Ende.

Zum Glück war der Direktor des Hotels ein Wygont und erinnerte sich recht gut an die Dienste, welche ich seinem Stamm einst erwiesen hatte. Er versprach, mich unbedingt im Hotel unterzubringen, konnte man sich doch beim Übernachten im interstellaren Raum eine ziemliche Erkältung zuziehen. Nach kurzem Besinnen wandte er sich an den Portier und sagte: "Gib ihm Nr. 1."

"Wohin soll ich aber dann den Gast aus Nr. 1 legen?" fragte ziemlich erstaunt der Portier. "Nun dem weisen wir Nr. 2 zu, der Herr aus Nr. 2 zieht nach Nr. 3 und so weiter!" So lernte ich die ungewöhnlichen Eigenschaften des Hotels zum ersten Male kennen.

Hätte es nur endlich viele Zimmer gehabt, dann hätte der Direktor diese "Lösung" nicht vorschlagen können, dann hätte ein Gast - vielleicht wäre nicht ich der Unglückliche gewesen - im Kosmos übernachten müssen. Da das Hotel jedoch unendlich viele Zimmer hatte, bekam ich mein Zimmer allein und hatte dennoch ein ruhiges Gewissen, denn alle anderen Gäste wohnten noch immer im Hotel.

Nun staunte ich auch nicht, als man mich am nächsten Morgen ersuchte, in Nr. 1000000 überzusiedeln. In der Nacht waren nämlich die Zoologen von der Galaxis WSK-3472 eingetroffen, so dass nochmals 999999 Gäste untergebracht werden mussten.

Als ich aber am dritten Tag in die Halle kam, gingen mir fast die Augen über. An der Rezeption stand eine Schlange neuer Gäste, deren Ende sich irgendwo in der Nähe der Magellan-Wolke zu befinden schien.

Auf meine erstaunte Frage hin ergab sich folgendes Gespräch mit dem Portier:

- "Das ist die intergalaktische Philatelistenvereinigung."
- "Sind es viele?"

- "Eine unendliche Menge - mindestens ein Mitglied aus jedem Milchstraßensystem."
- "Wo sollen sie denn aber alle untergebracht werden? Der Zoologenkongress endet doch erst morgen!"
- "Ich weiß nicht. In etwa fünf Minuten wird es der Direktor anordnen."

Nun - die Frage war offenbar doch komplizierter, als man angenommen hatte, und es ging allen Wartenden genauso wie auf der Erde. Aus fünf Minuten war eine Stunde geworden, als der Portier endlich vom Direktor kam und verkündete, dass der Gast aus Nr. 1 bitte nach Nr. 2 umziehen möchte. Mir erschien das recht sinnlos, denn ich wusste ja aus eigener Erfahrung, dass man auf diese Weise nur einen neuen Gast unterbringen konnte.

Es sollten aber nicht mehr und nicht weniger als unendlich viele Philatelisten untergebracht werden! Aber der Portier gab bereits seine nächsten Anweisungen: "Der Gast von Nr.2 möge nach 4, dieser nach 8, der Gast von 3 nach 6 und so weiter übersiedeln."

Jeder Gast, der im Zimmer Nr. $n$  wohnte, sollte nach Nr.  $2n$  umziehen! Jetzt wurde mir sein Plan klar. Auf diese Weise bekam er die unendliche Menge der Zimmer mit ungerader Nummer frei und konnte sie mit den Philatelisten belegen.

So wohnten denn schließlich in den Zimmern mit ungerader Nummer die Briefmarkenfreunde und die Zoologen in denen mit gerader Nummer.

Am anderen Tag wurde die Hälfte der Zimmer frei, denn der Zoologenkongress war zu Ende gegangen und alle Kosmoszoologen waren wieder abgereist. Ich selbst zog in ein leerstehendes Zimmer der Wohnung des Hoteldirektors. Während neu ankommende Gäste sich gefreut hätten, so viele leere Zimmer vorzufinden, bereitete die Lage meinem Direktor Sorgen und nach einigen Tagen wurde mein freundlicher Gastgeber ganz niedergeschlagen.

"Worüber denkst Du nach?" fragte ich ihn.

"Die Hälfte meiner Zimmer steht leer. Ich kann meinen Finanzplan nicht erfüllen", antwortete er.

Ich verstand zwar wirklich nicht, wieso hier ein Finanzplan gefährdet sein sollte, wo doch nach wie vor unendlich viele Gäste pünktlich zahlten, gab aber dennoch den Rat, die verbliebenen Gäste wieder so "umzuordnen", dass alle Zimmer belegt werden. Das war doch ganz einfach zu machen.

Zur Zeit bewohnten die Philatelisten nur die ungeraden Nummern 1, 3, 5, 7, 9 usw. Der Gast aus Nr. 1 kann dort bleiben, der Herr von Nr. 3 muss aber nach 2 ziehen usw. Schließlich sind alle Nummern wieder besetzt, obwohl kein einziger neuer Gast eingetroffen ist!

Die Unannehmlichkeiten des Direktors waren damit aber noch nicht zu Ende. Es stellte sich nämlich heraus, dass die Wygont die Errichtung des Hotels Kosmos nicht als Ende ihrer Tätigkeit ansahen. Die rastlosen Bauleute errichteten noch eine unendliche Menge von Hotels, von denen ein jedes unendlich viele Zimmer hatte.

Zur Beschaffung des Baumaterials demontierten sie so viele Sternensysteme, dass das kosmische Gleichgewicht gestört wurde, was wiederum die schlimmsten Folgen nach sich ziehen konnte. Deshalb bekamen sie den Auftrag, alle Hotels außer unserem wieder zu schließen und das verwendete Material zurückzubringen.

Die Ausführung dieses Befehls war allerdings nicht so einfach, denn alle Hotels (darunter auch unseres) waren inzwischen besetzt. Es hieß also, die Gäste aus unendlich vielen Hotels mit jeweils unendlich vielen Zimmern in ein einziges Hotel mit unendlich vielen Zimmern unterzubringen, das zu allem Überfluss auch noch besetzt war!

"Mich trifft der Schlag!" rief der Direktor aus. Am Anfang habe ich einen neuen Gast in mein ausverkauftes Hotel aufgenommen, dann 999999 und schließlich sogar unendlich viele! Jetzt fordert man von mir, dass ich in diesem ausverkauften Hotel noch eine unendliche Menge von unendlichen Mengen von Gästen anderer Hotels unterbringen soll. Nein, mein Hotel ist schließlich nicht aus Gummi. Sollen sie nur bleiben, wo der Pfeffer wächst!"

Aber Anordnung ist Anordnung, und in fünf Tagen sollte alles für den Empfang der neuen Gäste gerüstet sein. In diesen Tagen arbeitete niemand im Hotel, alle dachten darüber nach, wie das Problem zu lösen sei. Auch ein öffentliches, kosmosweites Preisausschreiben war ausgeschrieben worden.

Alle zunächst vorgelegten Lösungsvorschläge erwiesen sich als falsch. So hatte z. B. der jüngste Koch den Vorschlag gemacht, die Gäste unseres Hotels zunächst aus der jeweiligen Nummer  $n$  in die Nr.  $1000(n - 1) + 1$ , d.h.  $1 \rightarrow 1$ ,  $2 \rightarrow 1001$ ,  $3 \rightarrow 2001$ , ziehen zu lassen.

Dann würden die Gäste des zweiten Hotels in die Nummern 2, 1002, 2002 usw., die des dritten nach 3, 1003, 2033, ... ziehen und so weiter.

Das Projekt war aber unzureichend, weil schon die Gäste aus 1000 Hotels sämtliche Nummern des Hotels "Kosmos" aufbrauchen würden.

Ich erinnerte mich in diesem Zusammenhang daran, dass der römische Kaiser Tiberius einst auf den Vorschlag seiner schmeichlerischen Senatoren, seinen Geburtsmonat September in "Tiberius" umzubenennen (die Vormonate trugen bereits die Namen römischer Herrscher: Julius und Augustus), antwortete:

"Was aber werdet ihr dem dreizehnten Cäsar vorschlagen?"

Die vom Buchhalter des Hotels vorgeschlagene Variante schien zunächst ganz gut zu sein. Er wollte eine Verteilung nach geometrischen Folgen durchführen. Die Gäste des ersten Hotels sollten in die Zimmer mit den Nummern 2, 4, 8, 16, 32 ... ziehen (die Zahlen bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten 2). Die Bewohner des zweiten Hotels sollten in die Zimmer Nr. 3, 9, 27, 81 usw. kommen (geometrische Folge mit dem Quotienten 3). Genauso wollte er alle anderen Fälle behandeln.

Der Direktor aber fragte ihn: "Für das dritte Hotel nehmen wir also die geometrische Folge mit dem Quotienten 4?"

"Natürlich", antwortet der Buchhalter.

"Dann nützt uns die Sache nichts, denn in der Nr. 4 wohnt bereits ein Gast aus dem ersten Hotel!"

Nun war es aber an mir zu beweisen, dass ich nicht umsonst an der Sternenakademie fünf Jahre Mathematik studiert hatte.

"Nehmen Sie als Quotienten immer nur die Primzahlen! Das erste Hotel bekommt die Nummern 2, 4, 8, 16..., das zweite erhält 3, 9, 27..., das dritte 5, 25, 125..., das vierte 7, 49, 343... zugewiesen und so weiter."

"Und es kann dann tatsächlich nicht vorkommen, dass zwei Gäste das gleiche Zimmer zugewiesen bekommen?" fragte der Direktor.

"Nein", antwortete ich, "denn nehmen Sie doch zwei verschiedene Primzahlen, dann kann keine Potenz mit natürlichem Exponenten der einen Zahl jemals einer Potenz der anderen gleich sein.

Wenn  $p, q$  Primzahlen sind, dann folgt aus  $p \neq q$  auch  $p^m \neq q^n$  für alle natürlichen Exponenten  $m$  und  $n$ ."

Der Direktor schaute mich eine Weile an und machte dann einen neuen Vorschlag, bei dem man nur zwei Primzahlen benötigte.

Er schlug nämlich vor, den Gast aus dem Hotel Nr.  $n$  mit der Zimmernummer  $m$  in die Nr.  $2^n \cdot 3^m$  unseres Hotels ziehen zu lassen. Es ist doch so, dass  $2^n 3^m \neq 2^p 3^q$  sicher gilt, wenn  $n \neq p$  oder  $m \neq q$  ist. Wir würden demnach auch hierbei keine Doppelbelegung haben.

Diese Lösung versetzte uns alle in Begeisterung, und die Aufgabe schien vollkommen gelöst zu sein. Aber die Prämie bekam ich doch nicht und auch nicht der Direktor, denn man rechnete uns vor, dass bei unserer Lösung viele Zimmer nicht besetzt würden, was ökonomisch nicht vertretbar wäre. (Welche Nummern beträfe das?)

Die beste Lösung legte schließlich einer der Briefmarkensammler vor - er war Präsident der Galaktischen Akademie der Wissenschaften. Er empfahl zunächst die Aufstellung einer Tabelle aller Hotelgäste. In einer Zeile sollten jeweils die Gäste ein und desselben Hotels stehen, während die Spalten den Zimmernummern entsprechen sollten. So würde also der Gast aus dem 6. Hotel, Zimmer 11 an der Kreuzungsstelle der 6. Zeile mit der 11. Spalte eingetragen.

Der Anfang dieser Tabelle sah so aus:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...	(1,n)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...	(2,n)	...
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...	(3,n)	...
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...	(4,n)	...
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...	(5,n)	...
...							
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	...	(m,n)	...
...							

- "Und nun ordnen wir sie alle nach Quadratseiten", sagte der Philatelist.

- "Wie?", der Direktor verstand nicht.

- "Nach Quadratseiten! (1,1) kommt nach Nr. 1, (1,2) zieht in Nr. 2, (2,2) in Nr. 3, (2,1) in Nr. 4. Dann geht es weiter längs der Seiten des nächst größeren Quadrates: (1,3) nach Nr. 5, (2,3) nach 6, (3,3) nach 7 usw. Verstehen Sie nun, dass wir immer längs der beiden Seiten eines Quadrates abzählen?"

Und er nahm einen Bleistift zur Hand und ergänzte die Tabelle durch Pfeile:

(1,1)		(1,2)		(1,3)		(1,4)		(1,5)	...	(1,n)	...	
		↓		↓		↓		↓		↓		
(2,1)	←	(2,2)		(2,3)		(2,4)		(2,5)	...	(2,n)	...	
				↓		↓		↓		↓		
(3,1)	←	(3,2)	←	(3,3)		(3,4)		(3,5)	...	(3,n)	...	
						↓		↓		↓		
(4,1)	←	(4,2)	←	(4,3)	←	(4,4)		(4,5)	...	(4,n)	...	
								↓		↓		
(5,1)	←	(5,2)	←	(5,3)	←	(5,4)	←	(5,5)	...	(5,n)	...	
										↓		
...												
(n,1)	←	(n,2)	←	(n,3)	←	(n,4)	←	(n,5)	←	...	(n,n)	...
...												

- "Wird der Platz in meinem Hotel aber auch für alle reichen?" zweifelte der Direktor noch immer.

- "Natürlich! Die ersten  $n^2$  Zimmer vergeben wir dabei an die Bewohner der ersten  $n$  Zimmer der ersten  $n$  Hotels. So bekommt früher oder später jeder Bewohner der Hotels seinen Platz in unserem Hotel. Wenn der Gast zum Beispiel im Zimmer 217 des 136. Hotels wohnt, dann kommt er im 217. Schritt sicher an die Reihe und erhält - das können Sie sich selbst leicht überlegen - in unserem Hotel die Zimmernummer  $N = 217^2 - 136 + 1$ .

Ganz allgemein erhält ein Bewohner des  $n$ -ten Zimmers im  $m$ -ten Hotel bei uns das Zimmer mit der Nummer

$$N = \begin{cases} (n-1)^2 + m & \text{falls } n \geq m \\ m^2 - n + 1 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Dieser Vorschlag wurde schließlich angenommen, denn er sicherte gleichzeitig die volle Belegung unseres Hotels. Der Mathematiker und Briefmarkenfreund erhielt als Preis - eine Touristenreise zum Sternensystem LZR-287.

Nach der erfolgreichen Beendigung des Umzugunternehmens gab der Direktor des Hotels einen Empfang, zu dem alle seine Gäste geladen waren. Auch dieser Empfang verlief nicht ohne Komplikationen. Die Bewohner der Zimmer mit geraden Nummern verspäteten sich um eine halbe Stunde, und als sie schließlich erschienen, mussten sie feststellen, dass alle Stühle besetzt waren, obwohl der Gastgeber für jeden seiner unendlich vielen Gäste einen Stuhl bereitgestellt hatte.

Der Gastgeber löste aber auch dieses Problem. Er bat lediglich darum, dass alle bereits sitzenden Gäste sich noch einmal von ihren Plätzen erheben möchten und forderte dann alle Anwesenden wieder zum Platznehmen auf. Und siehe da, alle fanden jetzt einen Stuhl (ohne dass auch nur ein neuer Stuhl herbeigebracht worden wäre)!

Als dann später das Eis gereicht wurde, erhielt jeder Gast zwei Portionen, obwohl der Konditor ganz sicher nur eine Portion für jeden Gast bereitet hatte. Ich hoffe, dass der Leser jetzt selbst herausbekommt, wie das alles möglich war.

Als der Empfang vorüber war, stieg ich in meine Photonenrakete und flog zurück zur Erde, um zunächst allen meinen Kosmonautenkollegen von der neuen Übernachtungsmöglichkeit im Weltraum zu berichten. Dann wollte ich mich aber vor allem auch mit den berühmtesten Mathematikern der Erde und insbesondere mit meinem Freund Tarantoga über die Eigenschaften der unendlichen Mengen unterhalten.

### 2.3 Eine Bemerkung des Autors

Damit trennen wir uns eine Zeitlang von unserem Helden.

Vieles in seinen Erzählungen ruft unseren Zweifel hervor. So wissen wir, dass nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie die Übertragung von Signalen höchstens mit einer Geschwindigkeit von 300000 km/s erfolgen kann. Deshalb würde bereits die Ausführung der ersten Anweisung des Portiers eine unendlich lange Zeit beansprucht haben.

Aber wir werden ja auch nicht zu viel von John Tichy erwarten - auf seinen Reisen ereigneten sich noch weit unwahrscheinlichere Abenteuer.

Der folgende Teil unseres Büchleins wird den Leser mit einigen Eigenschaften unendlicher Mengen bekannt machen. Und obwohl es sich um Dinge handeln wird, die sich nicht im interstellaren Raum, sondern im Intervall  $[0,1]$  oder beispielsweise im Quadrat mit der Seitenlänge eins abspielen, werden viele Erscheinungen nicht weniger ungewöhnlich sein!



## 2.4 Wie man Mengen vergleicht

Während wir im Kapitel 1 Eigenschaften betrachtet haben, die sowohl für endliche, als auch für unendliche Mengen Bedeutung haben, werden wir nunmehr vor allem solche Eigenschaften untersuchen, die für unendliche Mengen charakteristisch sind. Bereits aus der Erzählung Johns wissen wir, dass diese sich oft recht stark von den Eigenschaften endlicher Mengen unterscheiden, ja dass sogar manches für unendliche Mengen möglich ist, was es bei endlichen Mengen nicht gibt.

Zuallererst wollen wir uns der Frage des Vergleichs zweier unendlicher Mengen zuwenden. Bei endlichen Mengen konnten wir stets leicht feststellen, welche von zwei Mengen mehr Elemente enthält. Für unendliche Mengen ist die Beantwortung dieser Frage weit schwieriger.

Gibt es beispielsweise mehr natürliche Zahlen als rationale? Ist die Anzahl der reellen Zahlen größer als die der rationalen Zahlen?

Oder: Wo liegen mehr Punkte, auf der Strecke oder auf der ganzen Zahlengeraden? Hat ein Quadrat mehr Punkte als die Zahlengerade?

Auf den ersten Blick scheint die Beantwortung dieser Fragen völlig klar zu sein. Ist doch die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen und eine Strecke ein Teil der ganzen Zahlengeraden. Ist es dann nicht eigentlich klar, dass es weniger natürliche als rationale Zahlen gibt und dass eine Strecke weniger Punkte enthält als die ganze Gerade? Es zeigt sich, dass das eben nicht klar ist!

In Wahrheit gibt es aber auch keinen Grund zu der Annahme, dass ein aus der Untersuchung endlicher Mengen abgeleitetes Gesetz beim Übergang zu unendlichen Mengen noch richtig bleibt. Das trifft insbesondere auch auf das Gesetz zu, dass ein innerer Teil kleiner als das Ganze ist. Es war gerade die Annahme der Gültigkeit dieses Gesetzes, die frühere Versuche des Vergleichs unendlicher Mengen scheitern ließ.

Wo soll es denn nun eigentlich mehr Punkte geben, in einem Quadrat oder auf einer unendlichen Geraden? Es kann doch ein Quadrat niemals als Teil einer Geraden auftreten, genausowenig wie eine Gerade in einem Quadrat Platz hat, wenn man sie nicht zerlegen will.

Selbstverständlich kann man die Gerade in Strecken zerschneiden, deren Längen gleich der Seitenlänge des Quadrates ist, und diese Stückchen dann so in das Quadrat legen, dass sie einander nicht schneiden. Aber dann kann man doch auch umgekehrt das Quadrat in Teile zerlegen, die man auf der Geraden unterbringt, ohne dass sie sich überlappen? Und wieviele unendliche Mengen gibt es, die nicht ineinander enthalten sind!

Die Menge der Quadrate einer Ebene und die Menge der Kreise dieser Ebene besitzen nicht ein einziges gemeinsames Element.

Wie sollen wir sie miteinander vergleichen?

Die Aufgabe ist also gestellt! In erster Linie müssen wir herausfinden, in welchem Sinne man davon sprechen kann, dass eine unendliche Menge genauso viele Elemente wie eine andere enthält, wann zwei Mengen gleichmächtig sind.

## 2.5 Auf dem Tanzsaal

Für endliche Mengen wird die Aufgabe des Vergleichs ganz einfach gelöst. Um zu erfahren, ob zwei Mengen gleich viele Elemente enthalten, werden die Elemente einfach abgezählt.

Wenn man dabei gleiche Zahlen erhält, dann sind eben in beiden Mengen gleich viele Elemente.

Dieses Verfahren können wir bei unendlichen Mengen natürlich nicht anwenden, denn wir könnten bis an unser Lebensende zählen und würden doch kein Ergebnis erhalten. Jedoch ist auch für endliche Mengen die Methode des Abzählens nicht immer bequem.

Schauen wir doch beispielsweise einmal in einen Tanzsaal. Wie stellen wir fest, ob hier ebenso viele Mädchen wie Jungen sind?

Natürlich könnten wir die Jungen bitten, sich auf der einen Seite des Saales zu versammeln, während die Mädchen sich auf die andere Seite begeben, und dann könnten wir beide Mengen abzählen. Erstens bekämen wir aber auf diese Weise viel mehr Informationen, als wir benötigen: wir wollten nur wissen, ob gleich viele Jungen und Mädchen im Saal sind, und haben nun sogar die genauen Zahlen erhalten.

Zweitens aber gehen junge Leute gewöhnlich nicht in einen Tanzsaal, um sich in Gruppen aufzustellen, sondern um zu tanzen. Nun denn! Gönnen wir ihnen doch das Vergnügen und bitten das Orchester, einen recht beliebten Tanz aufzuspielen, den alle tanzen möchten! Dann holt sich jeder Junge eine Partnerin ..., und schon ist unsere Aufgabe gelöst, wobei natürlich angenommen werden muss, dass immer ein Junge mit einem Mädchen tanzt!

Es sind doch sicher gleich viele Jungen und Mädchen anwesend, wenn alle sich zu Paaren finden und keine Mädchen als Mauerblümchen übrigbleiben.

Mit der gleichen Methode kann man herausbekommen, ob die Zahl der Besucher eines Theaters mit der Zahl der Plätze übereinstimmt: Wenn während der Vorstellung alle Plätze besetzt sind, keine Besucher im Foyer stehen und auf jedem Platz nur ein Besucher sitzt, dann können wir sicher sein, dass die Zahl der Besucher mit der Zahl der Sitzplätze identisch ist, wie groß sie auch immer sein mag.

Sie können nun sicher selbst viele weitere Beispiele angeben, die zeigen, dass wir auch bei endlichen Mengen die Anzahl der Elemente oft nicht zählen, sondern nur vergleichen.

## 2.6 Der Schlüssel zum Erfolg

Wir haben also herausgefunden, wie wir erfahren können, ob zwei endliche Mengen gleich viele Elemente besitzen, ohne diese Mengen einzeln abzuzählen. Das Verfahren kann man aber nun ohne weiteres auch auf unendliche Mengen anwenden.

Nur können wir uns im allgemeinen nicht der Hilfe eines Orchesters bedienen, sondern müssen die Elemente zweier Mengen schon selbst zu Tanzpaaren zusammenfassen.

Es seien also zwei Mengen  $A$  und  $B$  gegeben, dann sagt man, dass zwischen ihnen eine eindeutige Zuordnung (oder Abbildung) besteht, wenn die Elemente der beiden Mengen so zu Paaren  $(a,b)$  zusammengestellt werden können, dass jedem Element  $a$  aus  $A$  genau ein Element  $b$  aus  $B$  zugeordnet wird und jedem Element  $b$  aus  $B$  genau ein Element  $a$  aus  $A$  entspricht.

Auf unserem Tanzsaal ist beispielsweise  $A$  die Menge der Jungen und  $B$  die der Mädchen, die Paare  $(a,b)$  sind dann gerade die Tanzpaare.

Ist  $A$  die Menge der Theaterbesucher und  $B$  die Menge der Sitzplätze, dann sind  $(a,b)$  die "Paare" Besucher-Sitzplatz ...

s versteht sich, dass keinesfalls jede Abbildung zweier Mengen ineinander eindeutig ist. Wenn etwa  $A$  aus allen Bäumen der Erde und  $B$  aus allen auf ihnen wachsenden Früchten besteht, dann können wir eine Abbildung herstellen, indem wir jeder Frucht den Baum zuordnen, auf

dem sie wächst. Die Abbildung ist zwar eindeutig, aber sicher nicht eineindeutig: Auf vielen Bäumen wachsen mehrere Früchte, andere dagegen tragen gerade keine Früchte. Gewisse Elemente der Menge  $A$  (Bäume) werden also in mehreren Paaren  $(a, b)$  vorkommen, andere dagegen in überhaupt keinem. Die Voraussetzung der eineindeutigen Zuordnung zweier Mengen entspricht bei endlichen Mengen vollkommen der Annahme, dass beide Mengen die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Die entscheidende Wende in der Entwicklung der Theorie der Mengen trat ein, als Cantor die Idee der eineindeutigen Zuordnung für den Vergleich unendlicher Mengen anzuwenden begann. Kurz gesagt haben bei Cantor zwei Mengen  $A$  und  $B$  (seien sie auch unendlich) gleich viele Elemente, wenn man zwischen beiden Mengen eine eineindeutige Abbildung herstellen kann. Gewöhnlich sagen die Mathematiker aber nicht, dass die Mengen gleich viele Elemente haben, sondern nennen die beiden Mengen dann gleichmächtig oder von gleicher Mächtigkeit oder äquivalent.

Die Mächtigkeit hat somit für unendliche Mengen dieselbe Bedeutung wie die Anzahl der Elemente für endliche Mengen.

Noch vor Cantor war der tschechische Mathematiker Bernhard Bolzano in diesem Zusammenhang zum Begriff der eineindeutigen Abbildung gelangt. Er scheute sich jedoch vor den Schwierigkeiten, die sich aus der konsequenten Anwendung bzw. aus den Folgerungen ergeben würden. Wie wir bald sehen werden, musste man nämlich bei der Verwendung der neuen Betrachtungsweise mit einer ganzen Reihe von Dogmen des bisherigen Wissens brechen.

## 2.7 Ist ein Teil dem Ganzen gleich?

Das Hauptdogma, welches es zu überwinden galt, war der Satz:

Der Teil ist weniger als das Ganze.

Dieser Satz bildete bisher die Grundlage für viele Aussagen der Mathematik. Er ist sicherlich für endliche Mengen wahr, aber für unendliche Mengen verliert er seine Gültigkeit.

Erinnern Sie sich noch einmal daran, wie der Direktor des ungewöhnlichen Hotels die Kosmonauten in die Zimmer mit geradzahligen Nummern umsiedelte: Er veranlasste, dass ein Bewohner des Zimmers Nr.  $n$  in das Zimmer mit der Nr.  $2n$  umzog. Kurz gesagt, ging der Umzug nach folgendem Schema vor sich:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots & \end{array}$$

Dieses Schema aber beschreibt eine eineindeutige Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

und einer ihrer Teilmengen, der Menge der geraden Zahlen

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

Wir hatten aber vereinbart, dass zwei Mengen als gleichmächtig zu bezeichnen sind, wenn eine eineindeutige Abbildung zwischen ihnen hergestellt werden kann. Demnach enthält die Menge aller natürlicher Zahlen genauso viele Elemente, wie die Teilmenge der geraden Zahlen.

Genauso können wir eine eineindeutige Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen

und der Menge der Zahlen der Form 10, 100, 1000, 10000, ... herstellen. Wir brauchen dazu nur jeder natürlichen Zahl  $n$  die Zahl  $10^n$  zuzuordnen:

$$n \leftrightarrow 10^n$$

Auch bei diesem Beispiel ist die Eineindeutigkeit der Abbildung sofort klar.

Von vielen ähnlichen Beispielen wollen wir nur noch die Gleichmächtigkeit der Menge der Quadratzahlen und der Kubikzahlen mit der Menge der natürlichen Zahlen erwähnen. Die eineindeutigen Abbildungen sind hierbei:

$$n \leftrightarrow n^2 \quad \text{und} \quad n \leftrightarrow n^3$$

Ganz allgemein kann man jede beliebige unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen eineindeutig auf die ganze Menge abbilden. Alle diese Mengen sind also untereinander gleichmächtig. Zur Verwirklichung der Abbildung braucht man nur die Elemente der Teilmengen mit natürlichen Zahlen zu nummerieren.

(+) Übrigens sagt man nicht umsonst, dass nichts unter der Sonne neu ist, sondern dass das Neue immer nur besser erkanntes Altes ist.

Bereits zu Anfang des 17. Jahrhunderts hatte Galilei über die Widersprüche des Unendlichen nachgedacht und die Möglichkeit der eineindeutigen Zuordnung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge ihrer Quadrate entdeckt. In seinem Buch "Gespräche und mathematische Beweise, die Mechanik der Ortsbewegung betreffend" (1638) ist ein Dialog enthalten, in dem Salviati, der die Gedanken Galileis selbst vorträgt, ausführt:

"Das von uns Gesagte betrifft die Schwierigkeiten, die eine Folge unserer begrenzten Kenntnisse über das Unendliche sind, und es veranlasst uns, die folgende Eigenschaft aufzuschreiben, die uns zur Frage des Endlichen und Unendlichen bekannt ist.

Zwischen beiden besteht der wesentliche Unterschied, dass solche Eigenschaften wie die größere und kleinere Mächtigkeit und die Gleichheit auf das Unendliche nicht anwendbar sind, indem man niemals sagen kann, dass eine Unendlichkeit größer, kleiner oder gleich einer anderen sei."

In Fortsetzung seiner Gedanken bemerkt Salviati, dass es auf der einen Seite "der Quadrate ebenso viele gibt, wie der Wurzeln, weil jedes Quadrat seine Wurzel hat und jede Wurzel ihr Quadrat; nicht ein Quadrat wird mehr als eine Wurzel haben und nicht eine Wurzel hat mehr als ein Quadrat... Demnach ist die Zahl der Wurzeln der Gesamtheit aller Zahlen überhaupt gleich, weil es keine einzige Zahl gibt, die nicht Wurzel irgendeines Quadrates wäre; indem wir dies feststellen, werden wir aber gleichzeitig darauf geführt, zu sagen, dass die Zahl der Quadrate auch der Gesamtheit aller Zahlen gleich sei ..."

Auf der anderen Seite sagt Salviati, dass "die Gesamtheit aller Zahlen zusammen - Quadrate und Nichtquadrate - größer ist, als allein die der Quadrate, indem die Quadratzahlen dauernd und mit zunehmender Proportion voneinander abrücken, wenn wir zu größeren Zahlen übergehen."

Als einzig möglichen Ausweg aus dem aufgezeigten Widerspruch schlägt Salviati vor:

"Ich sehe keine Möglichkeit irgendeiner anderen Lösung, als dass wir annehmen, dass die Gesamtheit der Zahlen unendlich ist, genauso wie die Zahl der Quadrate und auch die Zahl der Wurzeln. Niemals kann man sagen, dass die Zahl der Quadrate kleiner sei als die Gesamtheit der Zahlen und die letztere größer: Letzten Endes haben die Eigenschaften der Gleichheit und ebenso die der größeren oder kleineren Größe dort keinen Platz, wo es sich um das Unendliche

handelt und sind nur auf endliche Gesamtheiten anwendbar."

Wir sehen, dass Galilei den Kern der Sache, die Einführung der Idee der eindeutigen Abbildung, erfasste. Er sah, dass man eine solche Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der Quadratzahlen herstellen kann, so dass man sie als gleichmächtige Menge ansehen muss.

Er verstand auch, dass für unendliche Mengen der Teil gleich dem Ganzen sein kann. Davon ausgehend zog er allerdings den in dieser Allgemeinheit falschen Schluss, dass alles Unendliche gleich sei.

Er hatte es jedoch nur mit unendlichen Untermengen der natürlichen Zahlenreihe zu tun, und diese kann man tatsächlich stets abzählen. Galilei konnte sich noch nicht vorstellen, dass die Menge aller Punkte einer Strecke niemals durchnummeriert werden kann (wir werden das aber bald erfahren). Ähnlich wie die Atomisten des Altertums setzte er voraus, dass eine Strecke sich aus der Aneinanderreihung einer unendlichen Kette von Atomen ergibt. (+)

## 2.8 Abzählbare Mengen

Alle Mengen, die der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig (äquivalent) sind, heißen abzählbare Mengen.

Anders ausgedrückt: Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie unendlich ist und man ihre Elemente mit natürlichen Zahlen durchnummerieren kann.

Beispiele solcher Mengen sind die geraden Zahlen, die ungeraden Zahlen, ja ganz allgemein jede unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen.

Manchmal braucht man Erfindungsgabe, um die Abzählbarkeit der einen oder anderen Menge nachzuweisen. Nehmen wir zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen:

$$\{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Wenn wir versuchen, diese Menge so abzuzählen, dass wir mit einer bestimmten Zahl beginnend der Größe nach vorgehen, dann kommen wir damit zu keinem Ende. Immer werden dabei Zahlen ohne Nummer bleiben. Um bei der Nummerierung keine Zahlen auszulassen, müssen wir diese Menge in der Form zweier Folgen aufschreiben:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \dots \end{array}$$

und sie dann spaltenweise nummerieren. Dabei bekommt die Zahl 0 die Nr. 1, -1 erhält Nr. 2, 1 bekommt die Nr. 3,  $-2 \leftrightarrow$  Nr. 4,  $2 \leftrightarrow$  Nr. 5 usw.

Kurz gesagt erhalten alle nichtnegativen Zahlen die ungeraden Nummern, während die negativen Zahlen die geraden Zahlen als Nummern erhalten. Das erinnert uns an das Verfahren, mit dem der Direktor des Hotels die Philatelisten so im Hotel unterbrachte, dass sie zwischen den Kosmoszoologen wohnten.

Wenn die Entscheidung über die Abzählbarkeit der ganzen Zahlen noch relativ einfach war, so ist der Beweis der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen schon schwieriger. Die rationalen Zahlen liegen doch sehr dicht. Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen befinden sich noch unendlich viele weitere rationale Zahlen.

Deshalb ist es zunächst unvorstellbar, wie wir sie durchnummerieren wollen, denn zwischen zwei beliebigen Zahlen müssten noch unendlich viele weitere Zahlen eine Nummer bekommen,

und dieser Prozess endet nie.

Tatsächlich ist eine Nummerierung der rationalen Zahlen, der Größe nach geordnet, nicht möglich. Wenn wir uns jedoch von der Anordnung der rationalen Zahlen nach ihrer Größe lösen, dann ergibt sich eine Möglichkeit ihrer Abzählung. Wir machen das so: Zunächst schreiben wir alle positiven Brüche mit dem Nenner 1, dann alle positiven Brüche mit dem Nenner 2, danach die mit dem Nenner 3 usw.

Wir erhalten eine Tabelle der folgenden Form

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, & \dots \\
 \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, & \dots \\
 \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, & \dots \\
 \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, & \dots \\
 \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{5}, & \dots \\
 \dots & & & & & 
 \end{array}$$

Es ist klar, dass wir in dieser Tabelle jede beliebige positive rationale Zahl vorfinden und zwar nicht nur einmal. Die Zahl 3 finden wir beispielsweise in der Form  $3/1, 6/2, 9/3, \dots$  usw.

Nun gehen wir zur Abzählung über. Dazu erinnern wir uns einer anderen Heldentat des Direktors des ungewöhnlichen Hotels, die er bei der Übersiedlung der Gäste aus der unendlichen Menge solcher Hotels in sein eigenes vollbrachte. Er verwendete damals die Nummerierung nach Quadratseiten.

Genauso werden wir auch vorgehen, mit dem einzigen Unterschied, dass wir gewisse Brüche unberücksichtigt lassen. (Wenn beispielsweise der Bruch  $1/1$  bereits die Nr. 1 erhalten hat, so werden alle weiteren Brüche, die dieselbe rationale Zahl darstellen, die gleiche Nummer erhalten, also  $2/2 \leftrightarrow$  Nr. 1,  $3/3 \leftrightarrow$  Nr.1 usw.).

So erhalten wir schließlich die folgende Anordnung der positiven rationalen Zahlen:

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots$$

Jetzt ist aber leicht zu ersehen, wie alle rationalen Zahlen abgezählt werden. Man gibt - wie bei den ganzen Zahlen - den positiven rationalen Zahlen und der Null in der oben aufgestellten Reihenfolge die ungeraden Nummern und den entsprechenden negativen Zahlen immer die folgenden geraden.

Allgemein erhalten wir immer eine abzählbare Menge, wenn wir eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen vereinigen. Der Beweis erfolgt nach dem oben dargestellten Muster der Zuordnung nach Quadratseiten.

## 2.9 Algebraische Zahlen

(+) Die rationalen Zahlen konnten wir also durchnummerieren oder abzählen. Man gewinnt diese Zahlen aus den ganzen Zahlen mittels einer einzigen Operation - der Division. Jetzt nehmen wir noch die Operation des Wurzelziehens hinzu und betrachten alle Zahlen, die man durch Anwendung dieser Operation und der arithmetischen Grundrechenarten auf natürliche Zahlen erhält und nennen sie Zahlen vom Radikaltypus.

Dazu gehören solche Zahlen wie  $\sqrt[3]{2} + 1, \sqrt[4]{3} - \sqrt{5}$  und natürlich auch solche Zahlenungeheuer

wie

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[15]{147 + \sqrt{3}} - \sqrt[14]{6 + \sqrt{2}}}{\sqrt[21]{289 - \sqrt[5]{4 + \sqrt{2}} + 1}}}$$

Wieder legen wir uns die Frage vor, ob man die Menge dieser Zahlen etwa auch abzählen kann. Die Beantwortung ist hier noch schwieriger als bei der Menge der rationalen Zahlen. Wonach soll man auch entscheiden, ob  $\sqrt[3]{2}$  oder  $\sqrt{3}$  die kleinere Nummer bekommen soll?

Und doch lässt sich beweisen, dass diese Menge abzählbar ist, dass sich ihre Elemente nummerieren lassen!

Dazu bemerken wir zu Anfang, dass jede Zahl des angegebenen Typs Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{1}$$

ist, worin  $a_0 \neq 0$  und  $a_0, \dots, a_n$  ganze Zahlen sind.  $3/7$  ist beispielsweise Wurzel der Gleichung  $7x - 3 = 0$ ,  $\sqrt[3]{5}$  ist Wurzel der Gleichung  $x^3 - 5 = 0$  und  $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3}}$  ist Wurzel z.B. von  $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11 = 0$ .

Manchmal kann es sehr schwer sein, eine Gleichung anzugeben, der eine bestimmte Zahl des oben erläuterten Typs genügt, es ist aber doch stets möglich. Versuchen wir doch selbst einmal, eine Gleichung anzugeben, der die Zahl  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  genügt.

Umgekehrt stellen wir fest, dass längst nicht alle Lösungen von Gleichungen des Typs (1) sich mittels der arithmetischen Grundoperationen und Radizieren aus natürlichen Zahlen gewinnen lassen. So sind beispielsweise die Lösungen der Gleichung

$$x^5 - 3 + 3 = 0$$

niemals von diesem Typ. In diesen Fällen sagt man, die Gleichung sei nicht durch Radikale auflösbar.

Jede Lösung einer algebraischen Gleichung vom Typ (1) mit ganzzahligen Koeffizienten heißt algebraische Zahl. Die Menge der Zahlen vom Radikaltypus ist somit Teilmenge der Menge aller algebraischen Zahlen.

Können wir die letzte Menge abzählen, so ist auch unsere oben formulierte Aufgabe gelöst.

Vor der Nummerierung der algebraischen Zahlen wollen wir zunächst die algebraischen Gleichungen vom Typ (1) nummerieren.

Damit wird die Aufgabe aber auch schon gelöst sein, denn jede algebraische Gleichung vom Grade  $n$  besitzt nicht mehr als  $n$  Wurzeln. Demnach können wir alle algebraischen Zahlen theoretisch in einer Liste erfassen, indem wir jeweils in eine Zeile alle verschiedenen Wurzeln der Gleichung mit der Nummer der Zeile schreiben. In der ersten Zeile stehen also die verschiedenen Wurzeln der Gleichung Nummer 1, in der zweiten Zeile stehen die Wurzeln der 2. Gleichung, sofern sie nicht schon in der ersten Zeile stehen, und so weiter.

Wir erhalten eine Tabelle in der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & a_k & \rightarrow \\ \rightarrow b_1 & \rightarrow & b_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & b_l & \rightarrow \\ & & & & \dots & & & \\ \rightarrow c_1 & \rightarrow & c_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & c_m & \rightarrow \\ & & & & \dots & & & \end{array}$$

Nun ist wohl jedem klar, wie wir alle Wurzeln nummerieren können. Die Pfeile in der Tabelle deuten das Vorgehen an.

Wir werden nun, sogar nach zwei Methoden, die Abzählung der algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten verwirklichen. Die erste Methode verläuft so, dass wir jeder algebraischen Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten eine natürliche Zahl  $h$  zuordnen, die wir als Höhe der Gleichung bezeichnen wollen, und zwar sei

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Die Höhe der Gleichung  $2x^4 - 3x + 5 = 0$  ist nach dieser Definition beispielsweise gleich  $4 + 2 + 3 + 5 = 14$ .

Man sieht leicht ein, dass die Zahl der Gleichungen mit einer gegebenen Höhe endlich sein muss. Genau zwei Gleichungen haben die Höhe zwei:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad -x = 0$$

6 Gleichungen haben die Höhe  $h = 3$ , nämlich

$$x^2 = 0, \quad -x^2 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad -x + 1 = 0, \quad -x - 1 = 0$$

Nun aber nummerieren wir alle Gleichungen, indem wir zuerst alle Gleichungen der Höhe 2 mit Nummern versehen, danach die Gleichungen mit der Höhe 3, die Gleichungen mit der Höhe 4 und so weiter. Wir wollen den Anfang dieser Abzählung in der folgenden Tabelle darstellen:

$N$	1	2	3	4	5	6
	$x = 0$	$-x = 0$	$x^2 = 0$	$-x^2 = 0$	$x + 1 = 0$	$x - 1 = 0$
$N$	7	8	9	10		
	$-x + 1 = 0$	$-x - 1 = 0$	$x^3 = 0$	$-x^3 = 0$		

Auf diese Weise wird schließlich jede Gleichung ihre Nummer haben, so dass uns die Abzählung aller algebraischen Zahlen auch keine Schwierigkeiten mehr bereitet, wie wir weiter oben erläutert hatten.

Die soeben beschriebene Art der Nummerierung der Gleichungen hat den Mangel, dass man nur sehr schwer sagen kann, welche Nummer eine gegebene Gleichung erhalten wird (obwohl diese Aufgabe natürlich auch gelöst ist).

Die zweite Art der Nummerierung beruht auf der gleichen Idee, wie sie der Hoteldirektor zur Lösung seiner schwersten Aufgabe verwenden wollte. Wir erinnern uns, dass er sein Problem unter Verwendung der Zahlen der Form  $2^n \cdot 3^m$  löste.

Um nun unsere Aufgabe zu lösen, müssen wir alle Primzahlen verwenden.

Sicher weiß der Leser, dass sich eine beliebige natürliche Zahl eindeutig in ein Produkt von Primzahlpotenzen zerlegen lässt.

Wir gehen nun folgendermaßen vor. Zunächst nummerieren wir alle ganzen Zahlen entsprechend dem Vorgehen auf Seite 52.

Die Nummer einer ganzen Zahl  $a$  bezeichnen wir mit  $\langle a \rangle$ . Danach ordnen wir jeder Gleichung der Form

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$



(wo die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ganze Zahlen sind) die folgende natürliche Zahl zu:

$$2^{\langle a_n \rangle} \cdot 3^{\langle a_{n-1} \rangle} \cdot \dots \cdot p_{n+1}^{\langle a_0 \rangle}$$

Dabei bedeutet  $p_{n+1}$  die  $(n+1)$ -te Primzahl in der natürlichen Anordnung. Die Gleichung  $3x^2 - 2 = 0$  bekommt nach diesem Verfahren die Nummer

$$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^5 = 150000$$

weil die ganze Zahl  $(-2)$  die Nummer 4, die Null die Nummer 1 und die Zahl 3 die Nummer 5 erhalten hatte. So bekommt jede Gleichung ihre Nummer, wobei verschiedene Gleichungen auch unterschiedliche Nummern erhalten, denn jede natürliche Zahl  $N$  lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen, womit die Exponenten  $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle$  ebenfalls eindeutig festgelegt sind und damit auch die entsprechenden Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  sowie schließlich die Gleichung  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ .

## 2.10 Brezeln in der Ebene

(+) Die Methode, die wir zur Nummerierung aller algebraischen Zahlen benutzt haben, kann auch in anderen Fällen angewandt werden. Die allgemeine Situation ist dabei folgende. Es sei eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  gegeben. Wir bilden alle möglichen endlichen Folgen aus Elementen dieser Mengen, wobei aus jeder der Mengen  $A_n$  nicht mehr als ein Element in einer Folge vorkommen soll.

Jede Folge hat kurz gesagt die Form  $(a_m; \dots, a_t)$ , wo  $a_m \in A_m, \dots, a_t \in A_t$  ist. (Die Zahl der Elemente der einzelnen Sätze kann durchaus verschieden sein, wenn sie nur endlich ist!) Dann ist die Menge aller Folgen abzählbar.

Um diese Behauptung zu beweisen, braucht man nur jeder Folge  $(a_m, \dots, a_t)$  die Zahl

$$N := p_m^{\langle a_m \rangle} \cdot \dots \cdot p_t^{\langle a_t \rangle}$$

als Nummer zuzuordnen, wobei wiederum  $p_k$  die  $k$ -te Primzahl in der natürlichen Reihenfolge bedeutet und  $\langle a_k \rangle$  jetzt die Nummer des Elementes  $a_k$  in der Menge  $A_k$  angibt. (Wir wollen noch betonen, dass der Index  $k$  bei  $a_k$  hier nur andeuten soll, dass  $a_k \in A_k$  ist, und dass er nicht die Nummer dieses Elementes in  $A_k$  ist.)

Man zeigt genau wie im Spezialfall der algebraischen Gleichungen, dass damit jeder Folge eine natürliche Zahl  $N$  als Nummer eindeutig zugeordnet wird.

Wenn man Lust hat, kann man es aber auch noch anders machen:

Jeder Folge  $(a_m, \dots, a_t)$  ordnet man ihre Höhe  $h = n + \langle a_m \rangle + \dots + \langle a_t \rangle$  zu und nummeriert damit zuerst die Folgen mit der Höhe  $h = 2$ , danach die mit  $h = 3$  usw.

Aus dem bewiesenen Satz folgt nun, dass jede Menge  $A$ , deren Elemente in der Form von Folgen (oder Tupeln) der Form  $(a_1 \dots a_n)$  darstellbar sind, wobei jedes Element eines  $n$ -Tupels genau aus einer abzählbaren Menge  $A$ , stammt, sicher eine abzählbare Menge ist, sie kann natürlich auch endlich sein.

Nehmen wir etwa die Menge aller rationalen Punkte der Ebene, so lässt sie sich darstellen als Menge der Koordinatenpaare  $(a_1, a_2)$ , wo  $a_1$  und  $a_2$  rationale Zahlen sind. Die Menge der rationalen Zahlen ist aber abzählbar, und folglich ist auch die in Rede stehende Punktmenge abzählbar.

Wir führen noch ein schwierigeres Beispiel eines Abzählbarkeitsbeweises für eine Menge vor. In einer Ebene seien Buchstaben T so verteilt, dass nie zwei von ihnen einen Punkt gemeinsam haben. Die Größe kann ganz beliebig sein (Abb. 32).

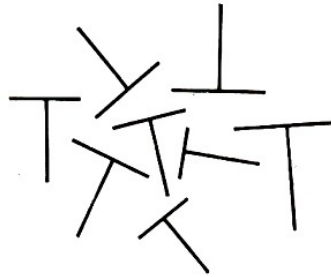


Abb. 32

Wir werden beweisen, dass diese Menge entweder abzählbar oder endlich sein muss. Dazu legen wir in die Ebene ein cartesisches Koordinatensystem und ordnen jedem T ein Dreieck mit rationalen Eckpunktkoordinaten zu, welches so gewählt wird, dass eine Seite den Stamm des T, die anderen beiden den Querbalken schneiden (Abb. 33).

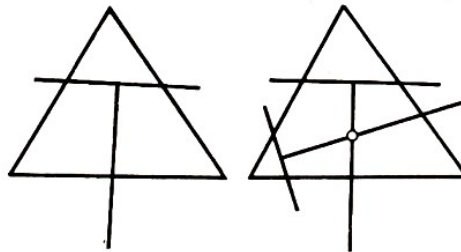


Abb. 33, 34

Anschaulich leuchtet ein, dass zwei T genau dann dem gleichen Dreieck zugeordnet werden können, wenn sie einander schneiden (Abb. 34).

(Wie so oft in der Mathematik ist der strenge Beweis dieses Sachverhaltes aber keineswegs so einfach.)

Wir hatten jedoch vorausgesetzt, dass sich die Lettern eben nicht schneiden sollten, so dass jedem der Dreiecke eindeutig ein T unserer Menge zugeordnet ist. Wir brauchen demnach nur die Abzählbarkeit der Menge dieser Dreiecke zu zeigen, wenn wir die Menge unserer Lettern T als endliche oder abzählbare Mengen nachweisen wollen. Das ist aber nach dem Gesagten ganz leicht, denn jedes solche Dreieck kann durch ein 6-Tupel rationaler Zahlen repräsentiert werden, nämlich die  $3 \times 2$  rationalen Koordinaten der Eckpunkte.

Die gesamte Menge der rationalen 6-Tupel ist aber endlich oder abzählbar. Ganz genauso beweist man, dass jede Menge von in einer Ebene gezeichneten, sich nicht schneidenden Brezeln entweder abzählbar oder sogar endlich ist (Abb. 35).

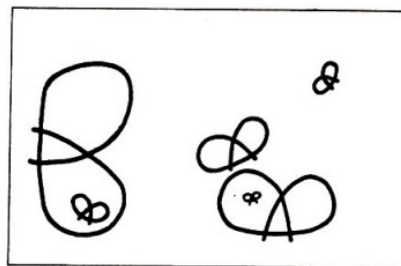


Abb. 35

## 2.11 Nicht gleichmächtige Mengen

Wir haben nun eine klare Vorstellung davon, was eine Aussage wie: "Zwei Mengen haben gleichviele Elemente" im allgemeinen Falle bedeuten soll. Jetzt werden wir klären, was es bedeutet, wenn "eine Menge mehr Elemente als eine zweite hat". Man kann diesen Sachverhalt auch für endliche Mengen erfassen, ohne die Mengen abzuzählen.

Wir erinnern uns des Beispiels vom Tanzboden. Wenn dort einige etwas langsamere Herren den Anschluss verpasst hatten, als das Orchester zu spielen begann und jeder Junge sich seine Tänzerin suchte, so sitzen sie nun an ihren Tischen und müssen zusehen. Damit ist klar, dass die Menge der Jungen größer ist als die der Mädchen.

Andererseits sieht jedermann, dass die Menge der Mädchen größer ist, wenn einige Mädchen mit ihren Freundinnen tanzen und keine Jungen mehr an den Tischen sitzen.



Abb. 36

Die Schlussweise war hier folgende: wenn wir eine eindeutige Abbildung der ersten Menge auf eine echte Teilmenge der zweiten angeben können, dann ist die zweite Menge "größer" als die erste, d. h., sie enthält mehr Elemente.

Unter Verwendung dieser Schlussweise zeigen wir zum Beispiel leicht, dass die Menge der Fische in den Weltmeeren kleiner ist als die Menge aller Atome. Sind auch beide Mengen endlich, so bilden doch die Atome, aus denen die Fische zusammengesetzt sind, nur einen Bruchteil aller Atome auf der Erde.

Die Zuordnung Fisch  $\leftrightarrow$  Atome des Fisches ist aber eine eineindeutige Abbildung der Menge der Fische auf eine Teilmenge der Menge aller Atome.

Zu unserem Bedauern kann man bei unendlichen Mengen diesen einfachen Schluss nicht verwenden, haben wir doch gerade in einigen früheren Kapiteln erkannt, dass eine Teilmenge und die ganze Menge gleichmächtig sein können.

Deshalb können wir allein aus der Tatsache, dass eine Menge  $A$  mit einer Teilmenge einer anderen Menge  $B$  gleichmächtig ist, nicht folgern, dass sie "kleiner" als  $B$  ist. Wir werden also in unseren Ansprüchen bescheidener sein und sagen, dass die Menge  $B$  nicht weniger Elemente als die Menge  $A$  hat, wenn eine eineindeutige Zuordnung zwischen  $A$  und einer echten Teilmenge  $B_1 \subset B$  angegeben werden kann.

Man kann zeigen, dass die Relation " $B$  hat nicht weniger Elemente als  $A$ " mit den bekannten Eigenschaften der Ungleichung bei Zahlen ( $a \leq b$ ) versehen ist:

- 1) Jede Menge  $A$  hat nicht weniger Elemente, als sie selbst (Reflexivität).
- 2) Wenn  $A$  nicht weniger Elemente als  $B$  und  $B$  nicht weniger Elemente als  $C$  hat, dann hat

$A$  auch nicht weniger Elemente als  $C$  (Transitivität).

3) Hat die Menge  $A$  nicht weniger Elemente als die Menge  $B$ , aber auch  $B$  nicht weniger Elemente als  $A$ , dann sind beide Mengen gleichmächtig (Antisymmetrie).

Natürlich kann auch der Fall eintreten, dass  $B$  nicht weniger Elemente als  $A$  hat, die Mengen aber sicher nicht äquivalent sind. Mit anderen Worten kann wohl eine eindeutige Abbildung der Menge  $A$  auf eine echte Untermenge  $B_1$  von  $B$  existieren, aber nicht von  $A$  auf  $B$  selbst. In diesem Fall können wir dann auch davon sprechen, dass  $B$  mächtiger als  $A$  ist.

## 2.12 Die abzählbare Menge - die kleinste Menge mit unendlich vielen Elementen

(+) Wir hatten bereits gesagt, dass eine beliebige unendliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen abzählbar ist. Das bedeutet, dass keine unendliche Menge existieren kann, deren Mächtigkeit kleiner als die Mächtigkeit der abzählbaren Menge ist.

Jetzt beweisen wir, dass jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält. Daraus kann man schließen, dass die Mächtigkeit der abzählbaren Menge nicht größer als die Mächtigkeit einer beliebigen unendlichen Menge ist. Beides zusammen besagt, dass die Abzählbarkeit die kleinstmögliche Mächtigkeit unendlicher Mengen ist.

Um eine solche abzählbare Teilmenge aus einer unendlichen Menge  $A$  auszuwählen, gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst nehmen wir ein Element  $x_1$  aus  $A$  heraus, was immer möglich ist, da  $A$  eine unendliche Menge, also sicher nicht leer ist. Natürlich ist  $A - \{x_1\}$  ebenfalls eine unendliche Menge, und wir können aus ihr ein Element  $x_2$  aussondern. Danach wählen wir ein drittes Element  $x_3$  aus und so weiter. Schließlich erhalten wir eine abzählbare Menge

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

deren Elemente sämtlich aus  $A$  stammen, so dass  $X \subseteq A$  ist.

Indem wir den Beweis ein wenig abwandeln, können wir sogar zeigen, dass die Auswahl von  $X$  stets so erfolgen kann, dass die Differenzmenge immer noch unendlich ist. Dazu brauchen wir nur nachträglich aus der Menge  $X$  die Menge  $X_1$  aller Elemente mit ungeraden Nummern herauszunehmen und alle übrigen Elemente wieder in die Menge  $A$  zurückzugeben.

Dann haben wir folgenden Sachverhalt:

$$X = \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2k+1}, \dots\}$$

ist eine abzählbare Teilmenge von  $A$ . Die Differenz  $A - X_1$  ist sicher eine unendliche Menge, denn sie enthält bestimmt die unendlich vielen Elemente  $x_2, x_4, x_6, \dots$  (und natürlich möglicherweise noch beliebig viele andere Elemente!).

Die folgenden Lehrsätze sind leicht zu beweisen:

Die Mächtigkeit einer unendlichen Menge ändert sich bei Hinzunahme einer abzählbaren Menge nicht.

Die Mächtigkeit einer überabzählbaren Menge ändert sich bei Entfernung einer abzählbaren Menge von Elementen nicht.

Diese Sätze unterstreichen erneut, dass abzählbare Mengen die kleinsten unter den unendlichen Mengen sind.

## 2.13 Überabzählbare Mengen

Alle bisher konstruierten Mengen waren höchstens abzählbar. Sollte es etwa überhaupt nur abzählbare unendliche Mengen geben? Wenn sich diese Vermutung bewahrheiten würde, dann hätten es die Mathematiker leicht: alle unendlichen Mengen hätten gleichviele Elemente, und man brauchte sich keine weiteren Gedanken über das Unendliche zu machen.

Demgegenüber wurde festgestellt, dass die Sache weitaus schwieriger ist, dass es überabzählbare Mengen gibt, die sogar ganz verschiedene Mächtigkeiten haben können. Eine überabzählbare Menge ist uns allen wohlbekannt, nämlich die Menge aller Punkte einer Geraden.

Bevor wir aber über diese Menge sprechen, unterhalten wir uns über eine andere, ihr verwandte Menge, nämlich über die Menge  $A$  aller Belegungsmöglichkeiten des ungewöhnlichen Hotels.

Wir bemerken, dass der Beweis der Überabzählbarkeit irgendeiner Menge im allgemeinen nicht so einfach ist. Will man die Abzählbarkeit einer Menge beweisen, so braucht man lediglich ein Verfahren zu erfinden, nach welchem man alle Elemente der Menge mit einer Nummer versehen kann.

Will man dagegen die Überabzählbarkeit beweisen, so ist zu zeigen, dass es kein solches Verfahren geben kann. Anders ausgedrückt besagt die Überabzählbarkeit, dass es immer noch Elemente ohne Nummer gibt, wenn man eine Abzählregel gefunden zu haben glaubt.

Zum Beweis der Überabzählbarkeit von Mengen erdachte Cantor eine geistreiche Methode, das Diagonalverfahren, dessen wir uns bereits auf Seite 53 bedient haben. Die Cantorsche Beweisidee wird uns vielleicht aus folgender Erzählung John Tichys deutlich.

## 2.14 Die undurchführbare Anweisung

Bisher habe ich immer von großen Erfolgen des Direktors des ungewöhnlichen Hotels erzählt. Was war das doch für eine Sache, als es ihm gelang, in dem ausverkauften Hotel noch unendlich viele Gäste unterzubringen oder dann sogar die Bewohner der unendlichen Menge ebenso vieler ungewöhnlicher Hotels. Aber es kam der Tag, da selbst unser Direktor völlig machtlos blieb und keinen Erfolg hatte.

Von der Zentralverwaltung kosmischer Hotels kam der Auftrag, alle möglichen Varianten der Zimmerbelegung listenmäßig zu erfassen: Jede Zeile der Liste sollte eine mögliche Variante darstellen. Dazu wurde folgendes vereinbart:

Eine 1 an der  $k$ -ten Stelle einer Zeile sollte bedeuten, dass das Zimmer mit der Nummer  $k$  belegt ist, eine 0 sollte ein freies Zimmer andeuten. Beispielsweise würde die Variante

10101010...

besagen, dass alle ungeraden Nummern belegt sind, während die geraden Nummern frei sind. Die Variante

11111111...

bedeutet dann ein ausverkauftes Hotel, und

00000000...

würde den finanziellen Ruin anzeigen, weil kein Zimmer belegt wäre.

Der Direktor war mit Arbeit überlastet und überlegte sich einen schnellen Ausweg aus seiner

Lage. Jeder Etagen-Portier wurde beauftragt, so viele Besetzungsvarianten auszuarbeiten, wie er Nummern auf seiner Etage hatte.

Dabei wurden Maßnahmen ergriffen, um eine Wiederholung von Varianten auszuschließen. Nach wenigen Tagen waren die Listen angefertigt und dem Direktor übergeben worden, so dass er eine einzige Liste daraus zusammenstellen konnte.

"Sind Sie überzeugt, dass ihre Liste vollständig ist?" fragte ich den Direktor. "Wurde nicht vielleicht doch eine Variante vergessen?"

"Das weiß ich nicht", antwortete er, "die Liste enthält unendlich viele Varianten, und ich kann mir nicht denken, wie man feststellen will, ob nicht doch eine Variante fehlt."

Da kam mir plötzlich eine Idee. (Übrigens kann es sein, dass ich meine Genialität ein wenig übertrieben darstelle. Sicher waren die Gespräche mit Professor Tarantoga nicht spurlos an mir vorübergegangen.)

"Ich kann garantieren, dass die Liste unvollständig ist. Es ist mir möglich, eine Variante anzugeben, die ganz sicher fehlt."

"Mit der Behauptung, dass meine Liste unvollständig ist", sagte der Direktor, "bin ich schon einverstanden. Aber eine fehlende Variante aufzuspüren, scheint mir ausgeschlossen zu sein. Wir haben doch bereits unendlich viele Varianten angegeben!"

Wir schlossen eine Wette ab. Nun schlug ich vor, jede Variante, auf einen Papierstreifen notiert, an die Tür des Zimmers zu heften, dem sie zugeordnet war (der Leser wird sich erinnern, dass genau so viele verschiedene Varianten aufgeschrieben worden waren, wie es Zimmernummern im Hotel gab).

Danach aber handelte ich ganz sicher.

Als ich mich an die Tür des ersten Zimmers begeben hatte, sah ich, dass die entsprechende Variante mit der Ziffer 0 anfang. Schnell war im Notizblock die Ziffer 1 notiert, das sollte die erste Ziffer der Variante sein, die ich aufstellen wollte.

Als ich zur Tür des zweiten Zimmers kam, interessierte mich nicht mehr die erste Ziffer der angehefteten Variante, denn ich hatte mir die erste Ziffer meiner Variante ja bereits notiert. Hier schaute ich mir die zweite Ziffer an und stellte fest, dass es eine 1 war.

Also notierte ich mir in meinem Notizblock hinter der 1 als zweite Ziffer "meiner" Variante eine 0.

An der dritten Zimmertür hing eine Variante, deren 3. Ziffer ebenfalls eine 1 war - also notierte ich mir als 3. Ziffer wieder eine 0.

Mein Prinzip war demnach folgendes: Wenn die  $n$ -te Ziffer an der Zimmertür mit der Nummer  $n$  eine 0 war, dann notierte ich mir als  $n$ -te Ziffer meiner Variante gerade eine 1, war es dagegen eine 1, dann kam eine 0 in meinen Notizblock.

Nachdem ich alle Türen des Hotels kontrolliert hatte (- na, na, hier übertreibt Herr Tichy aber wieder! Wie lange mag er wohl dazu gebraucht haben?), stand in meinem Notizblock eine Folge von Nullen und Einsen. Ich ging in das Zimmer des Direktors und sagte:

"So, da haben wir eine nicht erfasste Variante!"

"Woher wollen Sie wissen, dass sie nicht auf meiner Liste steht?"

"Es kann nicht die erste Variante sein, denn ihre erste Ziffer ist anders. Es kann nicht die zweite sein, denn mit dieser stimmt sie in der zweiten Ziffer gewiss nicht überein. Es ist aber auch nicht die dritte Variante, weil deren dritte Ziffer eine Eins ist, während hier eine Null an dritter Stelle steht. Ganz allgemein kann meine Variante nicht die  $n$ -te sein, weil die  $n$ -te Ziffer

immer gerade anders ist, als deren  $n$ -te Ziffer."

Die Wette war gewonnen, und ich durfte eine Nacht gratis im Hotel wohnen.

Gleichzeitig war mir aber klar geworden, dass es zu jeder abzählbaren Menge von Varianten immer wenigstens eine Variante gibt, die nicht darin enthalten ist, wie man die Menge auch bilden mag (immer könnte man die Varianten an die Tür heften, deren Nummer sie haben, und dann so wie oben vorgehen).

Das bedeutet aber, dass die Menge aller Belegungsvarianten des ungewöhnlichen Hotels überabzählbar ist, die dem Direktor gestellte Aufgabe somit tatsächlich unlösbar war.

In einem Telegramm wollte ich meinem Freund davon berichten. Natürlich war auch das Telegrafieren in diesem ungewöhnlichen Hotel ungewöhnlich. Ein Telegramm bestand nicht immer aus endlichen vielen Strichen und Punkten, sondern konnte auch unendlich viele enthalten (genauer gesagt abzählbar viele).

Während ich zum Hotelservice ging, überlegte ich mir, dass die Menge aller Telegramme, die man von diesem Hotel abschicken konnte, ebenfalls überabzählbar sein musste. Ich brauchte ja nur statt eines Striches die Ziffer 1 und an Stelle eines Punktes eine 0 geschrieben denken, dann würde sich die Menge aller Telegramme in nichts von der Menge aller Belegungsvarianten unterscheiden.

Nachdem ich das Telegramm abgeschickt hatte, verabschiedete ich mich von meinem freundlichen Hoteldirektor und fuhr herüber zur Milchstraße RGZ-8067, wo ich einen Astronautenclub besuchen wollte ...

## 2.15 Das Kontinuum ist überabzählbar

Jetzt macht es uns schon weniger Schwierigkeiten, zu beweisen, dass die Punkte einer Geraden eine überabzählbare Menge bilden.

Anstelle dieser Menge können wir bekanntlich auch die Menge aller reellen Zahlen studieren, weil zwischen beiden eine eindeutige Zuordnung hergestellt werden kann, beide Mengen somit gleichmächtig sind.

Jede reelle Zahl lässt sich nun aber in der Form eines unendlichen Dezimalbruches

$$a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots$$

darstellen. Gewisse reelle Zahlen besitzen sogar zwei solche Darstellungen. Zum Beispiel wird durch die Dezimalbrüche  $0,50000\dots$  und  $0,49999\dots$  die gleiche reelle Zahl  $1/2$  dargestellt.

Wegen der Eindeutigkeit vereinbaren wir, dass wir in solchen Fällen stets die Darstellung mit den Nullen benutzen wollen.

Nun nehmen wir an, es sei uns auf irgendeine Weise gelungen, die Menge der reellen Zahlen zu nummerieren. Wir brauchen dann nur eine reelle Zahl anzugeben, die auf keinen Fall mit nummeriert worden sein kann, um die Überabzählbarkeit zu beweisen!

Dazu folgen wir dem Beispiel von John Tichy.

Zunächst notieren wir eine Null und das Komma. Dann schauen wir uns die erste reelle Zahl der angenommenen Liste an:

Ist ihre erste Ziffer nach dem Komma eine 1, dann nehmen wir als erste Ziffer nach dem Komma eine 2, ist es aber keine 1, dann wählen wir eine 1. Die zweite Stelle unserer Zahl wird ebenfalls mit 2 oder 1 besetzt, je nachdem, ob an der zweiten Stelle der zweiten reellen Zahl eine 1 oder keine 1 steht. Und so geht das immer weiter. Die  $n$ -te Stelle der  $n$ -ten Zahl

bestimmt uns die  $n$ -te Ziffer unserer neuen Zahl zu 2 oder 1, je nachdem, ob dort eine 1 oder keine 1 steht.

So immer fortschreitend erhalten wir schließlich einen Dezimalbruch

$$0,121121222\dots$$

dessen sämtliche Ziffern 1 oder 2 sind. Er stellt damit auf jeden Fall eine reelle Zahl dar. Und doch kommt diese in unserer angenommenen Liste aller reellen Zahlen ganz gewiss nicht vor. Von der ersten Zahl unterscheidet sie sich durch die erste Ziffer der Dezimaldarstellung, von der zweiten Zahl durch die zweite. Die  $n$ -te Zahl ist es auch nicht, denn die  $n$ -te Ziffer des zugehörigen Dezimalbruches ist ganz sicher eine andere als bei dieser Zahl usw.

Um die Konstruktion der neuen Zahl ganz klar zu machen, wollen wir sie noch einmal an einem Beispiel verdeutlichen.

Wir nehmen an, dass die ersten fünf reellen Zahlen in der angenommenen Liste die folgenden seien:

$$\begin{aligned} &4,27364\dots \\ &-1,31226\dots \\ &7,95471\dots \\ &0,62419\dots \\ &8,56280\dots \end{aligned}$$

Dann beginnt die von uns konstruierte Zahl so, dass sie in der ganzen Liste nicht erfasst sein kann:

$$0,12121\dots$$

Es versteht sich, dass nicht nur diese, sondern noch viele andere Zahlen angegeben werden können, die nicht in der angenommenen Reihe vorkommen. Wir brauchen ja nur eine andere Regel aufzustellen, etwa die folgende:

Ist die  $n$ -te Ziffer der  $n$ -ten Zahl eine 2, dann ist die  $n$ -te Ziffer unserer Zahl eine 1, sonst eine 2.

Uns genügt jedoch die Existenz einer einzigen Zahl, die keine Nummer erhalten hat, um die Annahme der Abzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen als falsch zu erkennen.

## 2.16 Die Existenz transzendenter Zahlen

(+) Die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten hatten wir algebraische Zahlen genannt. Sollte es reelle Zahlen geben, die nicht Lösungen solcher Gleichungen sind, dann werden wir sie als transzendente Zahlen bezeichnen.

Während sich die Mathematiker lange Zeit immer nur mit algebraischen Zahlen wie  $7/15$ ,  $\sqrt[8]{10}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  usw. beschäftigten, gelang es im Jahre 1844 dem französischen Mathematiker Liouville, einige transzendente Zahlen zu finden. Der Beweis der Transzendenz von  $\pi$ , den Lindemann 1882 erbrachte, war damals von großer wissenschaftlicher Bedeutung, konnte doch daraus die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises gefolgert werden.



Und nun stellte sich plötzlich heraus, dass die algebraischen Zahlen, denen man auf Schritt und Tritt begegnet, in Wahrheit von größter Seltenheit sind, während die so schwer zu konstruierenden transzendenten Zahlen die Regel darstellen. Und doch ist es so.

Wir hatten doch bereits gesehen, dass die Menge der algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge ist, während wir eben bewiesen haben, dass die Menge aller reellen Zahlen überabzählbar ist. Demzufolge ist auch die Differenzmenge der Menge der reellen Zahlen und der Menge der algebraischen Zahlen überabzählbar - das ist aber gerade die Menge der transzendenten Zahlen.

Der in dieser Form 1873 von G. Cantor gegebene Beweis der Existenz transzendenter Zahlen machte einen großen Eindruck auf die Mathematiker. War es ihm doch gelungen, die Existenz transzendenter Zahlen zu beweisen, ohne auch nur ein einziges konkretes Beispiel angeben zu müssen.

Heute wissen wir allerdings auch, dass diese Stärke des Cantorsche Beweises gleichzeitig seine Grenzen bestimmt.

Aus einem Satz von Liouville folgt nämlich ein einfaches Verfahren zur Konstruktion konkreter Beispiele transzendenter Zahlen.

So erweist sich z.B. die Zahl  $0,1010010000001\dots$ , in welcher auf die erste 1 eine 0, auf die nächste 1 zwei Nullen, auf die folgende 6 Nullen ... auf die  $n$ -te 1  $n!$  Nullen folgen, als transzendente Zahl.

Unmittelbar aus dem Beweis von Cantor kann man keine einzige transzendente Zahl gewinnen, der Beweis ist, wie die Mathematiker sagen, nicht konstruktiv, sondern ein reiner Existenzbeweis, durchgeführt zum Zwecke der Widerlegung der Vermutung von der Nichtexistenz transzendenter Zahlen und nur dazu.

Ob lang oder kurz - alle Strecken enthalten gleich viele Punkte Solange man noch nicht mit den Merkwürdigkeiten unendlicher Mengen in Berührung gekommen war, hätte jeder sicherlich auf die Frage: "Enthält eine Strecke von 1 m Länge mehr Punkte, als eine 1 mm lange Strecke?" - ohne große Überlegung geantwortet, dass eine solche Frage ziemlich unsinnig ist und die Antwort völlig klar sei:

Natürlich haben auf einer Strecke von 1 m Länge weit mehr Punkte Platz, als auf einer 1000 mal kürzeren Strecke. Jetzt aber, vorsichtig geworden durch schlechte Erfahrungen mit dem "gesunden Menschenverstand" in Zusammenhang mit unendlichen Mengen, wird der Leser sicher nicht mehr so leichtfertig kategorische Behauptungen aufstellen. Und tatsächlich besitzen auch alle Strecken - seien sie nun lang oder sehr kurz - gleich viele Punkte!

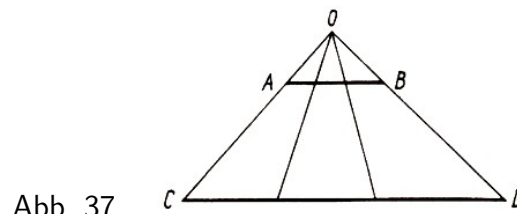


Abb. 37

Um es genauer zu formulieren: Es ist stets möglich, eine eindeutige Abbildung zwischen den Punktmengen, welche diese Strecken bilden, herzustellen.

Ein Blick auf die Abb. 37 zeigt wohl besser als viele Erläuterungen, wie eine solche Abbildung zu definieren ist. Und wenn man sich auch nur schwer mit dem Gedanken anfreunden kann, dass die Strecke bis zu einem fernen Milchstraßensystem keinen einzigen Punkt mehr enthält, als eine Strecke von der Länge des Atomdurchmessers - es ist so!

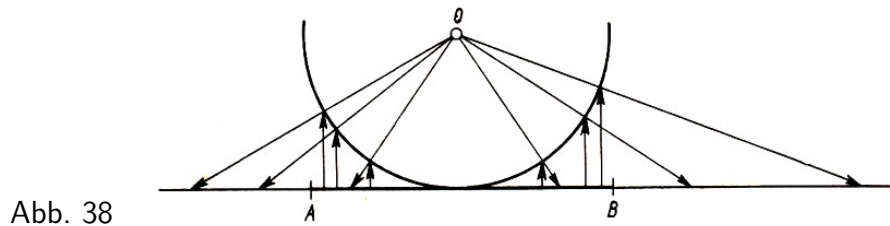


Abb. 38

Noch überraschender ist aber die Erkenntnis, dass sogar eine ganze Gerade nicht mehr Punkte enthält, als eine solche Strecke. Tatsächlich kann man auch zwischen der Menge der Punkte der Geraden und der Menge der Punkte einer endlichen Strecke eine eindeutige Abbildung definieren (s. Abb. 38).

Wir nehmen nicht einmal die ganze Strecke, sondern entfernen ihre beiden Endpunkte (wir sprechen dann nicht mehr von einer Strecke, sondern von einem offenen Intervall).

Die Konstruktion einer eindeutigen Abbildung zwischen Strecke und Gerade ist in Abb. 38 veranschaulicht. Zunächst werden die Punkte des offenen Intervalls auf die Halbkreisperipheriepunkte eindeutig bezogen, danach wird dann dieser Halbkreis punktweise auf die Gerade projiziert.

Die Eindeutigkeit der zusammengesetzten Abbildung ist offensichtlich.

Jedem Punkt des offenen Intervalls entspricht ein und nur ein Punkt der Halbkreisperipherie, jedem Punkt derselben wird durch den Projektionsstrahl eindeutig ein Bildpunkt auf der Geraden und umgekehrt jedem Geradenpunkt ein Punkt der Halbkreislinie eindeutig zugeordnet.

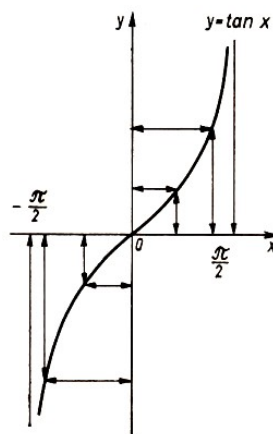


Abb. 39

Eine andere Möglichkeit für die Angabe einer solchen Abbildung mit Hilfe der grafischen Darstellung der Funktion  $y = \tan x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) ist in Abb. 39 angedeutet.

## 2.17 Strecke und Quadrat

Damit, dass die unendliche Gerade ebenso viele Punkte enthält wie eine Strecke, haben sich die Mathematiker, wenn auch teilweise schweren Herzens, bald abgefunden. Das folgende Resultat Cantors aber erwies sich als noch weitaus überraschender.

Auf der Suche nach einer Menge, die mehr Punkte als eine Strecke enthält, wandte er sich der Punktmenge eines Quadrates zu, und es gab für ihn zunächst keinen Zweifel am Ergebnis der Untersuchung. Man konnte ja die Strecke zu einer Seite des Quadrates machen, und folglich hat die Menge aller Strecken, in die man das Quadrat zerlegen kann, dieselbe Mächtigkeit wie die Punktmenge der Strecke selbst.

Im Verlaufe von drei Jahren (1871-1874) suchte Cantor einen Beweis für die Unmöglichkeit der Konstruktion einer eindeutigen Abbildung der Punkte eines Quadrates auf die Punkte einer Strecke.

Die Jahre gingen dahin, und es hatte sich kein positives Resultat ergeben. Und plötzlich, auch für ihn selbst vollkommen überraschend, gelang ihm die Konstruktion einer Zuordnung, deren Unmöglichkeit er gerade beweisen wollte!

Anfangs traute er dem Ergebnis nicht. Dem Mathematiker Dedekind schrieb er: "Ich sehe es und kann es doch nicht glauben!"

Aber das Ganze lief doch nur darauf hinaus, dass die Anschauung wieder einmal versagt hatte:

Es gibt im Quadrat ebenso viele Punkte wie auf einer Strecke!

Der strenge Beweis dieser Behauptung gestaltet sich durch die Nichteindeutigkeit der Dezimaldarstellung reeller Zahlen ein wenig unübersichtlich, und wir geben deshalb hier lediglich eine Skizze des Cantorschen Beweises an.

Wir nehmen die Strecke  $[0,1]$  und das Quadrat mit der Seitenlänge 1 und legen das Quadrat in das Koordinatensystem, wie es die Abb. 40 zeigt.

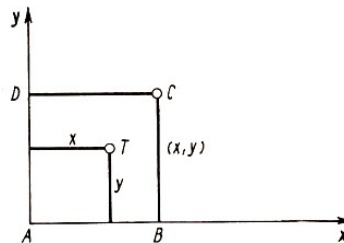


Abb. 40

Wir suchen eine eindeutige Abbildung der Punkte des Quadrates auf die Punkte der Strecke  $[0,1]$ . Projektion der Punkte wie früher nutzt uns nichts, weil jedem Punkt der Strecke dann unendlich viele Quadratpunkte zugeordnet wären. Die Lösung ergibt sich auf einem ganz anderen Weg.

Jedem Punkt  $T$  des Quadrates  $ABCD$  sind eindeutig zwei reelle Zahlen  $x$  und  $y$  (seine Koordinaten) zugeordnet. Diese Zahlen können als unendliche Dezimalbrüche geschrieben werden, welche wegen  $x, y < 1$  die Form

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots \quad , \quad y = 0,\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots \quad (1,2)$$

haben. (Zur Vereinfachung nehmen wir nur innere Punkte des Quadrates, d.h. Punkte, die nicht auf einer der Seiten liegen.)

Die Symbole  $\alpha_n, \beta_n$  sind dabei die Ziffern der Dezimaldarstellung von  $x$  und  $y$ . Für  $x = 0,63205\dots$  und  $y = 0,21357\dots$  ist beispielsweise

$$\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2\dots \quad \text{und} \quad \beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 3\dots \quad \text{usw.}$$

Jetzt werden wir einen Punkt  $Q$  der Strecke  $AB$  angeben, der dem Punkte  $T$  eindeutig zugeordnet wird.

Wir nehmen dazu den Punkt  $Q(Z, 0)$  mit einer Koordinate  $Z$ , die wir durch "Mischung" aus den Dezimaldarstellungen von  $x$  und  $y$  gewinnen. Das geschieht so, dass wir aus den beiden Folgen (1) und (2) eine dritte bilden, indem wir die Dezimalziffern jeweils im Wechsel aufschreiben:

$$Z := 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\dots\alpha_n\beta_n\dots$$

Ein Beispiel:  $x = 0,515623\dots$ ,  $y = 0,734856\dots$

$$Z := 0,571354682536\dots$$

Sicher gilt  $0 < Z < 1$  und  $Q$  liegt damit immer auf der Strecke  $[0,1]$  und ist durch  $T$  eindeutig bestimmt. Umgekehrt entspricht aber nicht jedem Punkt  $Q$  (d. h. nicht jeder Dezimalzahl  $0 < Z < 1$ ) auch ein Punkt des Quadrates!

Sei etwa  $Z = 0,19191919\dots$ , dann wäre  $x = 0,1111\dots$  und  $y = 0,999\dots$

Der Punkt  $T(x,y)$  liegt in diesem Falle auf der Quadratseite, und diese Punkte hatten wir weggelassen. Also gibt es eine eindeutige Abbildung der Menge aller inneren Punkte des Quadrates auf eine Teilmenge der Strecke  $[0,1]$ . Die Mächtigkeit dieser Punktmenge ist also keinesfalls größer als die der Strecke!

Kleiner ist sie aber auch nicht, denn man kann die Strecke immer als Teilmenge in das Quadrat einbetten. Daraus folgt aber die Gleichmächtigkeit beider Mengen.

(+) Wenn wir unsere Überlegungen ein wenig abändern, können wir sogar eine eindeutige Abbildung aller Punkte des Quadrates auf alle Punkte der Strecke angeben. Dazu müssen wir die Ziffern nur etwas vorsichtiger "mischen".

Wir benutzen wiederum nicht das ganze Quadrat  $ABCD$ , sondern nur die Punkte, welche nicht auf den Seiten  $BC$  oder  $CD$  liegen. Die Koordinaten der nun betrachteten Punkte genügen demnach den Ungleichungen  $0 \leq x < 1$  und  $0 \leq y < 1$  und lassen sich als unendliche Dezimalbrüche schreiben, wobei die Ziffern niemals nur "9" sein können.

Dann zerlegen wir die Ziffernfolge der Dezimalbrüche von  $x$  und  $y$  dadurch in Abschnitte, dass wir nach jeder Ziffer, die keine 9 ist, einen Strich anbringen. Wenn etwa

$$x = 0,3994599967\dots \quad , \quad y = 0,959978090\dots$$

ist, dann sieht diese Zerlegung so aus:

$$x \sim 3|994|5|9996|7|\dots \quad , \quad y \sim 95|997|8|0|90|\dots$$

Jetzt mischen wir die so entstandenen Zifferngruppen in der gleichen Weise wie früher die einzelnen Ziffern:

$$3|95|994|997|5|8|9996|0|7|90|\dots$$

d.h., wir schreiben abwechselnd eine Gruppe aus der Darstellung von  $x$  und eine aus derjenigen von  $y$  auf und erhalten wieder die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl

$$z = 0,3959949975899960790\dots$$

die dem Punkt  $T(x,y)$  des Quadrates eindeutig zugeordnet ist. Man kann nun zeigen, dass die so definierte Abbildung der Punkte  $T(x,y)$  des Quadrates ( $0 \leq x < 1$ ,  $0 \leq y < 1$ ) auf die Punkte  $Q(x,0)$  des halboffenen Intervalls  $(0,1)$  ( $0 \leq z < 1$ ) sogar eindeutig ist.

Eine eindeutige Abbildung des ganzen Quadrates auf irgendeine Strecke lässt sich nun schon ganz einfach angeben. Sei die Strecke etwa  $[0,a]$ , dann bilden wir wie oben gezeigt den Teil eines Quadrates mit  $0 \leq x < 1$  und  $0 \leq y < 1$  auf die Strecke  $0 \leq z < 1$  und die Seiten  $BC$  und  $CD$  nach früheren einfachen Verfahren auf die Strecken  $1 \leq z < 2$  und  $2 \leq z < a$  eindeutig ab. (+)

Wenn wir dem Beweis Cantors bis hierher folgen konnten wundert es uns schon nicht mehr, dass

auch der Würfel nicht mehr Punkte enthält, als das Quadrat oder die Strecke. Allgemein hat eine geometrische Figur, die wenigstens eine geometrische Linie enthält, ebenso viele Punkte wie die Strecke.

Solche Mengen heißen Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Auch die Menge der unendlichen Telegramme hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

## 2.18 Bei einer Aufgabe kommt aus irgendeinem Grunde nichts heraus!

Vorläufig haben wir nur zwei Typen unendlicher Mengen kennengelernt. Eine unendliche Menge war entweder zur Menge der natürlichen Zahlen oder aber zur Menge der Punkte einer Geraden gleichmächtig.

Es wurde auch gezeigt, dass jede Menge der zweiten Sorte von größerer Mächtigkeit ist als die Menge des ersten Typs.

Natürlich erhebt sich sofort die Frage, ob es dazwischen liegende Mengen gibt, deren Mächtigkeit zwar größer als die der natürlichen Zahlen, aber kleiner als die Mächtigkeit des Kontinuums ist.

Diese Frage ist unter dem Namen Kontinuumproblem bekannt geworden, und es haben viele hervorragende Mathematiker darüber nachgedacht, ohne dass sie eine Antwort geben konnten, angefangen bei G. Cantor selbst bis in die jüngste Vergangenheit.

Auch einer der hervorragendsten sowjetischen Mathematiker, der Begründer der sowjetischen wissenschaftlichen Schule der reellen Funktionentheorie N. N. Lusin, suchte viele Jahre hindurch nach einer Lösung des Problems.

Aber die Lösung entschlüpfte ihm immer wieder, wie eine Fata Morgana in der Wüste. (Tatsächlich hat N. N. Lusin eine Reihe schwieriger Aufgaben der Mengenlehre gelöst, ja er schuf sogar einen wichtigen neuen Zweig der Mathematik, die sogenannte deskriptive Mengenlehre.)

Eines Tages schickte man den 15jährigen Lew Schnirelman, der eine außerordentliche mathematische Begabung haben sollte, zu N. N. Lusin. (Später wurde Schnirelman einer der bedeutendsten sowjetischen Mathematiker und korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.)

Um die Begabung des jungen Mathematikers zu prüfen, gab Lusin ihm 30 sehr schwierige Aufgaben. Von 29 Aufgaben kannte er die Lösung, aber eine Aufgabe war ... das Kontinuumproblem.

Und siehe da, nach einer Woche kam der junge Mathematiker zu Lusin und sagte traurig:

"Bei dieser Aufgabe kommt aus irgendeinem Grunde nichts heraus."

Die Misserfolge bei allen Lösungsversuchen des Kontinuumproblems waren nicht zufällig. Die Situation erinnert in diesem Falle stark an die Geschichte des Parallelenaxioms. Man hatte fast zwei Jahrtausende hindurch versucht, dieses Axiom aus den anderen geometrischen Axiomen abzuleiten.

Erst durch die Arbeiten von Lobatschewski, Bolyai, Gauß, Hilbert und anderen wurde aufgeklärt, dass der Satz über die eindeutige Bestimmtheit der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden weder aus den anderen Axiomen hergeleitet werden kann, noch zu ihnen im Widerspruch steht.

Die Aussage wurde als neues Axiom hinzugenommen, wodurch das betreffende Modell der Geometrie, nämlich der Euklidischen Geometrie, wesentlich bestimmt ist.

In analoger Weise zeigte sich, dass bei geeigneter Axiomatik der Mengenlehre die Behauptung der Existenz von Mächtigkeiten zwischen der Abzählbarkeit und der Mächtigkeit des Kontinuums den übrigen Axiomen nicht widerspricht.

Dieses Ergebnis stammt von dem deutschen Mathematiker Gödel (1938). Es kann aber auch nicht aus ihnen hergeleitet werden (das haben fast gleichzeitig und unabhängig voneinander der Amerikaner Cohen (1963-1964) und der Tscheche Wopenka (1964) bewiesen).

## 2.19 Gibt es eine Menge größter Mächtigkeit?

(+) Die größte Mächtigkeit, die wir bisher kennengelernt haben, war die Mächtigkeit des Kontinuums, d.h. die Mächtigkeit der Menge der Punkte einer Geraden. Weder die Menge der Punkte eines Quadrates noch die Menge der Punkte eines Würfels hatte eine größere Mächtigkeit! Sollte vielleicht die Mächtigkeit des Kontinuums überhaupt die größte sein?

Das ist, wie sich gezeigt hat, nicht der Fall. Noch viel mehr: Es gibt überhaupt keine Menge mit einer größten Mächtigkeit!

Zu jeder beliebigen Menge  $A$  gibt es eine Menge, deren Mächtigkeit größer ist als die von  $A$  selbst. Eine solche Menge ist beispielsweise stets die Menge  $B(A)$  aller Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge  $A$  und deren Wertevorrat die Menge  $[0,1]$  ist.

Zuerst beweisen wir, dass die Mächtigkeit von  $B(A)$  nicht kleiner als die von  $A$  sein kann. Wir müssen dazu eine eindeutige Abbildung von  $A$  in  $B(A)$  konstruieren, was uns folgendermaßen gelingt:

Jedem Element  $a \in A$  ordnen wir gerade die Funktion  $f^a(x) \in B(A)$  zu, die im Punkte  $a$  den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat (diese Funktion muss in  $B(A)$  vorkommen!). Verschiedenen Elementen aus  $A$  entsprechen verschiedene Elemente  $f^a(x) \in B(A)$ , wie sofort klar ist.

Wenn  $A$  beispielsweise aus den Elementen 2, 3 und 4 besteht, dann wird dem Element 2 die Funktion  $f^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 2 \\ 0 & \text{für } x = 3,4 \end{cases}$  dem Element 3 aber die Funktion  $f^3(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 3 \\ 0 & \text{für } x = 2,4 \end{cases}$  zugeordnet, die verschieden sind, weil  $f^2(3) = 0$  und  $f^3(3) = 1$  ist.

Folglich ist die Mächtigkeit von  $B(A)$  nicht kleiner als die von  $A$ .

Jetzt zeigen wir, dass die Mächtigkeiten von  $A$  und  $B(A)$  nicht gleich sein können, dass man also keine eineindeutige Abbildung der Elemente von  $A$  auf die Elemente von  $B(A)$  konstruieren kann. Wir führen wieder einen indirekten Beweis und nehmen an, dass wir eine solche Abbildung gefunden hätten.

Jedem Element  $a$  aus  $A$  sei also eine Funktion  $f^a(x) \in B(A)$  zugeordnet, und umgekehrt sei jeder solchen Funktion  $f^a(x)$  genau ein Element  $a \in A$  zugeordnet.

Jetzt bilden wir die neue Funktion  $\varphi(x)$  entsprechend der Vorschrift

$$\varphi(x) = 1 - f^x(x)$$

$f^a(x)$  ist entweder gleich 0 oder gleich 1, so dass  $\varphi(x)$  sicher ebenfalls nur 0 oder 1 sein kann. Also gehört  $\varphi(x)$  zu  $B(A)$ , und es muss nach unserer Voraussetzung ein Element  $b \in A$  geben, so dass  $\varphi(x) = f^b(x)$  ist.

Dann gilt aber

$$f^b(x) = 1 - f^x(x)$$

für alle  $x \in A$ , also speziell

$$f^b(b) = 1 - f^b(b) \quad \text{und} \quad f^b(b) = \frac{1}{2}$$

Das aber widerspricht der Definition jeder Funktion  $f^b(x) \in B(A)$ , die ja nur die Werte 0 oder 1 annehmen sollte. Damit ist bewiesen, dass es keine solche eindeutige Zuordnung geben kann.

Folglich sind die Mengen  $A$  und  $B(A)$  niemals gleichmächtig, und man kann zu jeder Menge  $A$  eine Menge mit größerer Mächtigkeit konstruieren. Es gibt somit keine Menge von größter Mächtigkeit.

Wir bemerken noch, dass man eine solche Menge  $B$  auch auf andere Weise konstruieren kann. Dazu betrachten wir zu einer gegebenen Menge  $A$  die Menge  $B^A$  aller Teilmengen von  $A$ .

Es sei  $C$  eine Untermenge von  $A$ , so kann man ihr eindeutig eine Funktion  $f_C(x) \in B(A)$  zuordnen. Man nimmt dazu die Funktion, welche gleich 1 ist, wenn  $x \in C$ , und 0, wenn  $x \notin C$  ist. Auf diese Weise kann man  $B^A$  eindeutig auf  $B(A)$  abbilden, und die Mächtigkeit von  $B^A$  ist nicht kleiner als die von  $B(A)$ . Das heißt, die Menge  $B^A$  aller Untermengen von  $A$  besitzt auch größere Mächtigkeit als  $A$  selbst.

## 2.20 Arithmetik des Unendlichen

(+) Wir haben Mächtigkeiten der verschiedenen Mengen kennengelernt. Wie wir bereits sagten, ist der Begriff der Mächtigkeit die Verallgemeinerung des Begriffs der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge, d.h. des Begriffes der natürlichen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen lassen sich aber durch arithmetische Operationen verknüpfen, man kann sie addieren, subtrahieren, multiplizieren usw. Diesen Verknüpfungen entsprechen dabei immer gewisse Operationen zwischen endlichen Mengen.

Der Addition natürlicher Zahlen entspricht beispielsweise die Bildung der Vereinigungsmenge zweier durchschnittsfremder Mengen. Wenn die eine Menge  $n$  und die andere Menge  $m$  Elemente enthält, dann hat ihre Vereinigungsmenge  $m + n$  Elemente.

Auf analoge Weise werden die Operationen zwischen Mächtigkeiten erklärt. Zu dem Zweck führen wir auch für Mächtigkeiten gewisse Symbole ein.

Beispielsweise wird die Mächtigkeit der abzählbaren Menge mit  $\aleph_0$  bezeichnet. ( $\aleph$  ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets und heißt "Aleph".) Die Mächtigkeit des Kontinuums bezeichnen wir mit  $\mathfrak{c}$ , die Mächtigkeit der Menge aller Funktionen, die auf der reellen Achse definiert sind, bezeichnet man mit  $\mathfrak{f}$  usw.

Mächtigkeiten kann man genauso addieren wie natürliche Zahlen. Wenn nämlich die Mächtigkeit der Menge  $A$  gleich  $\mathfrak{m}$  und die Mächtigkeit der Menge  $B$  gleich  $\mathfrak{n}$  ist, dann bezeichnet man die Mächtigkeit von  $B \cup A$  mit  $\mathfrak{m} * \mathfrak{n}$ , vorausgesetzt, dass  $B \cap A = \emptyset$  ist. Aus den Eigenschaften der Vereinigung von Mengen folgen die Gleichungen:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \quad , \quad \mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p}$$

Indessen haben viele Regeln der Addition unendlicher Mächtigkeiten in der gewöhnlichen Arithmetik keine Gültigkeit. Das ist aber nicht weiter verwunderlich, wenn wir uns an die vielen

Eigenschaften unendlicher Mengen erinnern, die keine Entsprechung im Bereich der endlichen Mengen hatten.

Beispielsweise gelten in der Arithmetik unendlicher Mächtigkeiten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} 1) & n + \aleph_0 = \aleph_0 & 2) \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 & 3) \quad \aleph_0 + \mathfrak{c} = \aleph_0 \\ 4) & \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} & 5) \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \end{array}$$

Die erste Gleichung besagt, dass die Summe einer endlichen und einer abzählbaren Menge wieder eine abzählbare Menge ist. Die zweite drückt aus, dass die Summe zweier abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar ist, während die dritte Gleichung besagt, dass die Vereinigung einer abzählbaren Menge mit einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ergibt. Der Leser wird selbst leicht die übrigen Gleichungen deuten können.

Jetzt untersuchen wir, wie man unendliche Mächtigkeiten miteinander multipliziert. Dazu müssen wir zunächst wissen, welche Operation zwischen endlichen Mengen der Multiplikation natürlicher Zahlen analog ist.

$A$  sei eine aus  $m$  Elementen bestehende endliche Menge und  $B$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Nun bilden wir eine neue Menge  $A \times B$ , deren Elemente alle möglichen Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  sind. Werden die Elemente von  $A$  mit  $a_1, a_2, \dots, a_m$  und die von  $B$  mit  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bezeichnet, dann kann man alle Paare in Tabellenform erfassen:

$$\begin{array}{ccc} (a_1, b_1) & \dots & (a_1, b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_m, b_1) & \dots & (a_m, b_n) \end{array}$$

Man sieht sofort, dass die Menge  $A \times B$  genau  $n \cdot m$  Elemente (Paare) enthält.

Wir übertragen diese Operation auf unendliche Mengen. Seien  $A$  und  $B$  unendliche Mengen, so bezeichnen wir als ihr cartesisches Produkt  $A \times B$  die Menge, deren Elemente alle möglichen Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  sind.

Ist beispielsweise  $A$  die Menge der Punkte des Intervalls  $[0,1]$  und  $B$  die Menge der Punkte von  $[1,3]$ , so kann  $A \times B$  als Menge der Punkte des Rechtecks gedeutet werden, das in Abb. 41 dargestellt ist.

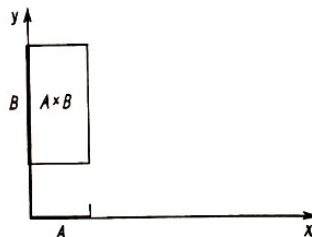


Abb. 41

In der Tat entspricht jedem Punkt das Paar der Projektionen auf die beiden Achsen.

Es seien  $m$  die Mächtigkeit von  $A$  und  $B$  die Mächtigkeit von  $n$ , dann wollen wir unter dem Produkt  $m \cdot n$  die Mächtigkeit der Menge  $A \times B$  verstehen. Folgende Gesetze sind für die so definierte Multiplikation gültig:

$$mn = nm, \quad (mn)p = m(np), \quad m(n + p) = mn + mp$$

Außerdem gelten die Gleichungen:

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$



Die erste Gleichung besagt, dass die Menge aller Paare  $(a, b)$ ,  $a \in A$  und  $b \in B$  abzählbar ist, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  abzählbare Mengen sind. Das ist eine andere Formulierung für:

Die Vereinigung einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Ein Beispiel für die Gültigkeit der Gleichung  $\aleph \aleph = \aleph$  ist die bewiesene Gleichmächtigkeit der Mengen der Punkte einer Strecke und der Punkte eines Quadrates, denn  $\aleph$  ist die Mächtigkeit der Punkte einer Strecke und  $\aleph \aleph$  nach Definition die Mächtigkeit der Menge der Paare  $(P, Q)$ , die man als Punkte eines Quadrates deuten kann.

## 2.21 Potenzen mit unendlichen Exponenten

(+) Nachdem wir Mächtigkeiten nunmehr miteinander multiplizieren können, ist es auch möglich, sie mit natürlichen Exponenten zu potenzieren. Jetzt möchten wir aber gern auch Potenzen mit beliebigen unendlichen Exponenten definieren. Wir wollen also den Ausdrücken der Form  $\aleph^m$  einen Sinn beilegen.

Um das zu tun, müssen wir uns wiederum darauf besinnen, mit welcher Operation im Bereich der endlichen Mengen eine Potenz  $n^m$  zusammenhängt, oder welche aus zwei Mengen von  $m$  bzw.  $n$  Elementen gebildete Menge besitzt  $n^m$  Elemente.

Es seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen mit  $m$  bzw.  $n$  Elementen. Mit  $B^A$  wollen wir die Menge aller Funktionen bezeichnen, deren Definitionsbereich  $A$  ist und deren Wertevorrat in  $B$  liegt. Mit anderen Worten ist jedes Element von  $B^A$  eine Regel, nach welcher jedem Element  $a \in A$  ein Element  $b = f(a)$  aus  $B$  eindeutig zugeordnet wird.

Sei beispielsweise  $A$  die Menge  $\{1,2,3\}$  und  $B$  die Menge, die aus den beiden Elementen Strich und Punkt besteht, dann besteht die Menge  $B^A$  aus allen möglichen Zuordnungen der Zahlen 1, 2, 3 zu Strichen oder Punkten, d.h. aus folgenden Funktionen:

$$\left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} 123 \\ \dots \end{matrix} \right)$$

Man sieht, dass die Zahl dieser Funktionen gleich  $2^3 = 8$  ist. Das ist nicht zufällig. Wenn  $A$  aus  $m$  Elementen und  $B$  aus  $n$  Elementen besteht, dann besteht  $B^A$  aus genau  $n^m$  Elementen, was man durch vollständige Induktion nach  $m$  und  $n$  leicht beweisen kann. Der Beweis soll dem Leser überlassen und empfohlen sein.

Nach dieser Vorbereitung können wir erklären, welche Bedeutung das Symbol  $\aleph^m$  haben soll, wobei  $m$  und  $n$  auch unendliche Mächtigkeiten sein können.

Es sei  $A$  eine Menge der Mächtigkeit  $\aleph$  und  $B$  eine solche der Mächtigkeit  $\aleph$ , und es werde mit  $B^A$  wieder die Menge aller eindeutigen Abbildungen (Funktionen) von  $A$  in  $B$  verstanden, dann soll  $\aleph^m$  die Mächtigkeit dieser neuen Menge sein.

Weiter oben hatten wir gezeigt, dass für eine beliebige Menge  $A$  die Mächtigkeit der Menge der Funktionen mit Definitionsbereich  $A$  und Werten aus der Zweiermenge  $B = \{0,1\}$  größer ist als die Mächtigkeit von  $A$  selbst. In unserer neuen Schreibweise wird dies in der Ungleichung

$$\aleph < 2^\aleph$$

ausgedrückt.

Wir wollen noch aufschreiben, dass  $\aleph = 2^{\aleph_0}$  ist.

In der Tat sahen wir weiter vorn, dass die Menge aller unendlichen Telegramme die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Jedes solche Telegramm ist aber nichts weiter als eine auf der Menge der natürlichen Zahlen definierte Funktion mit den Werten Strich oder Punkt.

Die Menge aller unendlichen Telegramme hat also in der Tat die Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$ , und die Gleichung ist bewiesen.

## 2.22 Über die Reihenfolge der Zahlen ...

Die Mächtigkeiten von Mengen (oder die Kardinalzahlen, wie sie auch genannt werden) leisten jedoch nur die Hälfte der Arbeit der natürlichen Zahlen. Natürliche Zahlen ergeben sich nicht nur als Antwort auf die Frage wie viele? sondern auch auf die Frage der wieviele in der Reihe?

Anders ausgedrückt sagen wir nicht nur zwei, fünf, zwanzig, hundert, sondern auch die zweite, fünfte, zwanzigste, hundertste usw. Mächtigkeiten unendlicher Mengen sind dagegen noch nicht geordnet und können nichts über die Reihenfolge aussagen:

Die zum Beweis der Gleichmächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen mit der Menge der ganzen Zahlen verwendeten Reihenfolgen sind doch nach völlig verschiedenen Prinzipien aufgebaut.

Während die Menge der natürlichen Zahlen bei Anordnung nach der Größe ein erstes Element besitzt, trifft dies auf die Menge aller ganzen Zahlen nicht zu. Um die Anordnung der Elemente in einer Menge studieren zu können, reicht demnach der Begriff der Kardinalzahl (Mächtigkeit) nicht aus, und wir benötigen neue Begriffe.

Als erstes führen wir den Begriff der geordneten Menge ein.

Man nennt eine Menge  $A$  geordnet, wenn für je zwei ihrer Elemente eine Relation (Ordnungsrelation)  $a \prec b$  besteht mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Wenn  $a \prec b$ , so ist  $a \neq b$ ;
- 2) Wenn  $a \prec b$  und  $b \prec c$ , dann  $a \prec c$ .

Sehr leicht lassen sich die Menge der reellen Zahlen, die Menge der rationalen Zahlen, der natürlichen Zahlen und andere Mengen anordnen.

Auch in der Menge der komplexen Zahlen kann man eine solche Ordnungsrelation definieren. Wir definieren  $a + ib \prec c + id$  genau dann, wenn entweder  $a \prec c$  oder  $a = c$  aber  $b \prec d$  (mit der üblichen Bedeutung des Zeichens  $<$  für reelle Zahlen) ist und sehen leicht, dass die Eigenschaften 1) und 2) gelten.

In dieser Ordnung gilt also beispielsweise  $2 + 15i \prec 3 + 10i$  oder  $2 + 4i \prec 2 + 5i$ . In ähnlicher Weise kann man die Menge der Polynome (mehrgliedrige Ausdrücke) eines bestimmten Grades ordnen.

Man beachte aber, dass man in ein und derselben Menge völlig verschiedene Ordnungsrelationen einführen kann. Betrachten wir als Beispiel einmal die Menge aller verschiedenen Worte, die in diesem Buch vorkommen. Sie kann zum Beispiel so geordnet werden:

Man nimmt das Buch und notiert beim fortlaufenden Lesen alle Wörter in der Reihenfolge, wie sie zum ersten Mal im Buch vorkommen. Die Regel für die Anordnung lässt sich dann so aussprechen:

das Wort  $A$  kommt vor dem Wort  $B$  ( $A \prec B$ ), wenn es beim Lesen des Buches in normaler Reihenfolge früher als  $B$  vorkommt.

Man kann sich aber auch eine andere Anordnung dieser Menge ausdenken, beispielsweise so, wie

sie in einem Lexikon angeordnet werden müsste (d.h. nach dem Alphabet). Beide Anordnungen erfüllen unsere Bedingungen und stellen demnach grundverschiedene Ordnungsmöglichkeiten unserer Menge dar.

Jetzt können wir einen weiteren Begriff definieren.

Man sagt, zwei Mengen  $A$  und  $B$  haben den gleichen Ordnungstypus, wenn es eine ordnungstreue, eineindeutige Abbildung beider Mengen aufeinander gibt.

Dabei bedeutet Ordnungstreue:

Es seien  $a_1 \leftrightarrow b_1$  und  $a_2 \leftrightarrow b_2$  je zwei Elemente aus  $A$  und  $B$ , die aufeinander abgebildet werden, und es gelte  $a_1 \overset{A}{\prec} a_2$  vermöge der in  $A$  geltenden Ordnungsrelation, dann soll auch  $b_1 \overset{B}{\prec} b_2$  nach der in  $B$  gültigen Ordnungsrelation sein.

So besitzen beispielsweise zwei beliebige Strecken als Punktmenge mit der üblichen Anordnung den gleichen Ordnungstypus, denn die zum Beweis der Gleichmächtigkeit eingeführte Abbildung der Strecken durch Zentralprojektion lässt die Anordnung offensichtlich ungeändert.

Dagegen haben Strecke und Gerade zwar gleiche Mächtigkeit, aber hinsichtlich der gewöhnlichen Anordnung der Punkte unterschiedlichen Ordnungstyp; welche eineindeutige Abbildung beider Punktmenge aufeinander man auch ins Auge fassen mag, keine kann die Ordnungsbeziehungen für alle Punktpaare ungeändert lassen, denn die Strecke hat sowohl einen ersten als auch einen letzten Punkt, eine Gerade aber nicht.

## 2.23 Wohlgeordnete Mengen

Sogar eine abzählbare Menge kann man auf die verschiedensten Weisen anordnen. Abzählbar waren ja sowohl die natürlichen, als auch die ganzen oder rationalen Zahlen, aber sie waren dabei von recht unterschiedlichem Ordnungstypus.

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält beispielsweise ein kleinstes Element (die Zahl 0), während weder unter den ganzen, noch unter den rationalen Zahlen ein solches kleinstes Element existiert.

Auf der anderen Seite kann man in der Menge der natürlichen wie auch in der der ganzen Zahlen Zahlenpaare angeben, zwischen denen keine weiteren Elemente der Menge liegen, während in der Menge der rationalen Zahlen zwischen je zwei Elementen noch unendlich viele andere Zahlen derselben Menge liegen.

Um in dieser Hinsicht die verschiedenen Anordnungen irgendwie vergleichen zu können, hob G. Cantor eine gewisse Klasse von geordneten Mengen hervor, die der Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der Ordnung ähnlich sind, wie die abzählbaren hinsichtlich der Anzahl. Wenn man eine beliebige nichtleere Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen betrachtet, so kann man unter ihren Elementen stets ein kleinstes, ein "am weitesten links stehendes" finden.

Mengen mit dieser Eigenschaft nannte G. Cantor wohlgeordnete Mengen.

Die genauere Definition ist:

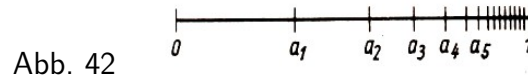
Eine geordnete Menge  $A$  heißt wohlgeordnet, wenn sie selbst und jede beliebige, nichtleere Teilmenge bezüglich der betrachteten Ordnungsrelation ein erstes Element hat.

Wir hatten bereits gesagt, dass die einfachste wohlgeordnete Menge die Menge der natürlichen Zahlen ist. Sie kann auf die Punkte 0, 1, 2, 3, ... des Strahls  $[0, \infty)$  abgebildet werden. Die Abbildung einer Geraden auf ein offenes Intervall, wie wir sie in Abb. 38 beziehungsweise Abb.

39 angedeutet hatten, ist aber ordnungstreu.

Der Strahl  $[0, \infty)$  wird dabei in das Intervall  $[0, 1]$  überführt, und man kann an Stelle der Punkte  $0, 1, 2, \dots$  die Bildpunkte innerhalb des halboffenen Intervalls  $[0, 1)$  betrachten.

Wir erhalten eine unendliche Folge von Punkten  $a_0 (= 0), a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , deren Glieder sich dem Punkte 1 beliebig nähern.



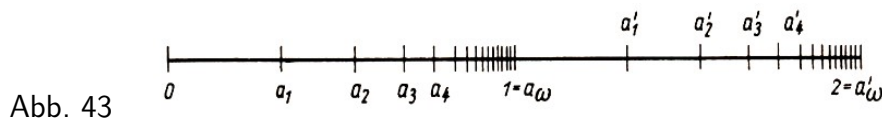
Nun betrachten wir den Punkt 1. Ihm können wir bereits keine gewöhnliche Ordnungszahl mehr zuordnen, die wir schon zur Nummerierung der Punkte  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  verwendet haben.

Um auch diesen Punkt mit einer Ordnungszahl versehen zu können, benötigen wir nun Zahlen, die keine natürlichen Zahlen sind. Weil der Punkt 1 jenseits aller Punkte  $a_0, a_1, \dots$  liegt, die wir bereits mit natürlichen Ordnungszahlen versehen haben, nennen wir diese neuen Zahlen transfinite Ordnungszahlen (vom lat. trans = jenseit und finis = Grenze, Ende).

Es ist üblich, diese erste transfinite Zahl, die, unmittelbar auf die natürlichen Ordnungszahlen folgt, mit dem Buchstaben  $\omega$  zu bezeichnen, so dass der Punkt 1 in unserem Falle die Bezeichnung  $a_\omega$  erhalten müsste.

Die Menge  $A$  aller Punkte  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_\omega$  erweist sich dann als wohlgeordnete Menge (man überlege, warum!).

Nun nehmen wir diese Menge  $A$  und verschieben sie um eine Einheit längs der Achse nach rechts. Dabei geht  $a_0$  in  $a'_0 = a_0 + 1$ ,  $a_1$  in  $a'_1 = a_1 + 1$  über usw. Wir erhalten dann eine Menge  $B$ , die aus den Punkten  $a'_0, a'_1, \dots, a'_n, \dots, a'_\omega$  besteht, und sehen ein, dass auch die Menge  $A \cup B$  wohlgeordnet ist. Wir möchten ihre Elemente nun gern nach der Reihenfolge dieser Anordnung nummerieren.



Die Elemente von  $A$  haben bereits ihre Nummern, der Punkt  $a'_1$  folgt, aber unmittelbar auf  $a_\omega$  (vgl. Abb.43), und es ist deshalb nur natürlich, ihm die transfinite Ordnungszahl  $\omega + 1$  zu geben, also  $a'_1 = a_{\omega+1}$  zu schreiben.

Ebenso wird  $a'_2$  mit  $a_{\omega+2}$  bezeichnet usw. Der Punkt  $a'_\omega$  aber, der nach allen Punkten  $a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \dots, a_{\omega+n}, \dots$  kommt, wird sinnvollerweise die transfinite Nummer  $2\omega$  erhalten, so dass  $a'_\omega = a_{2\omega}$  ist.

Der Leser wird wahrscheinlich schon ahnen, wie es jetzt weitergeht. Wir werden  $A$  um zwei Einheiten verschieben und die transfiniten Zahlen  $2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots$  usw. einführen.

Indem wir auf diese Weise fortfahren, erhalten wir eine wohlgeordnete Menge, deren Elemente durch transfinite Zahlen der Form  $k\omega + n$  ( $k$  und  $n$  sind natürliche Zahlen) nummeriert werden können.

Damit ist aber die Konstruktion transfiniter Zahlen keineswegs abgeschlossen. Wir haben nämlich letztlich wieder eine Menge erhalten, die über den ganzen Strahl  $[0, \infty)$  verteilt ist, und zwar so, dass bereits jedes Intervall  $[n, n + 1]$  unendlich viele Elemente enthält. Darum bilden wir den Strahl erneut auf das Intervall  $[0, 1)$  ab und erhalten eine Punktmenge, die sich bei 1 häuft.

Um den Punkt 1 jetzt zu nummerieren, benötigen wir eine weitere transfiniten Zahl, die wir mit  $\omega^2$  bezeichnen wollen. Wie früher konstruieren wir danach die Zahlen  $\omega^2 + 1$ ,  $\omega^2 + 2$ , ..., danach  $\omega^3$ , ...,  $\omega^n$  und schließlich  $\omega^\omega$ . Ja, es gibt sogar die transfiniten Zahl:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}$$

aber wir wollen bei diesen Fragen nicht länger verweilen.

## 2.24 Das unbegreifliche Axiom

Weiter oben hatten wir erwähnt, dass man eine gewisse Menge auf sehr verschiedene Weisen anordnen kann. Wir wissen aber noch nicht, ob man jede beliebige Menge überhaupt ordnen kann. Wenn das möglich ist, fragen wir weiter, ob wir immer eine wohlgeordnete Menge aus ihr machen können.

Mit dieser Frage haben sich ebenfalls sehr viele Mathematiker beschäftigt, denn aus der positiven Beantwortung der Frage würde folgen, dass man jede beliebige Menge mittels transfiniten Zahlen nummerieren kann.

Eine überraschend kurze und einfache Lösung veröffentlichte im Jahre 1904 der Mathematiker Zermelo. Er konnte direkt zeigen, dass man eine beliebige Menge wohlordnen kann (was Cantor bereits 1883 behauptet hatte).

Doch Zermelos Beweis gefiel bei weitem nicht allen Mathematikern.

Er beruhte nämlich auf einer Annahme, die ihm selbst und vielen Fachleuten gar nicht so offensichtlich zu sein schien. Diese Annahme, die in der Folgezeit als Auswahlaxiom oder Axiom von Zermelo bekannt geworden ist, besteht in folgendem.

Stellen wir uns vor, dass vor uns einige Haufen von Äpfeln liegen. Es bedarf dann natürlich keiner Frage, dass wir von jedem Haufen einen Apfel nehmen können, um damit einen neuen Haufen zu bilden. Es scheint auf den ersten Blick offensichtlich zu sein, dass man auch dann so verfahren kann, wenn die Haufen unendlich viele Äpfel enthalten und wenn es darüber hinaus unendlich viele solcher Haufen gibt.

Darin besteht aber gerade das Auswahlaxiom von Zermelo:

Es sei eine unendliche Menge unendlicher Mengen gegeben, dann kann man aus jeder Menge jeweils ein Element auswählen, ohne im Voraus eine Auswahlregel geben zu müssen.

Das Wesen des Axioms offenbart sich in den letzten Worten:

Die Anwendung des Auswahlaxioms führt stets zu reinen Existenzbeweisen und gestattet keinerlei Konstruktion. So ermöglicht es zum Beispiel den Beweis dafür, dass es keine Menge gibt, die man nicht ordnen kann, aber irgendeinen Hinweis auf die Art und Weise der Konstruktion einer solchen Anordnung gestattet es nicht.

Lange Jahre hindurch hatten die Mathematiker unbewusst dieses Axiom bereits verwendet, da sie eine solche Schlussweise, für völlig auf der Hand liegend ansahen. Als man jedoch tiefer darüber nachzudenken begann, wurde es immer schleierhafter.

Viele der nun unter bewusster Verwendung des Axioms bewiesenen Sätze widersprachen der Anschauung vollständig. Deshalb äußerte sich einer der angesehensten Mathematiker seiner Zeit Bertrand Russell, so über dieses rätselhafte Axiom:

"Am Anfang scheint es offenbar zu sein. Denkst Du aber etwas länger darüber nach, dann

kommen Dir die Folgerungen immer wunderlicher vor, und schließlich hörst Du überhaupt auf, zu verstehen, was es möglicherweise bedeuten könnte."

Ungeachtet dessen verwendet die Mehrzahl der Mathematiker das Auswahlaxiom heute mit ruhigem Gewissen.

In jüngster Zeit erst gelang der Beweis, dass es sich mit dem Zermeloschen Axiom genauso verhält wie mit der Kontinuumhypothese.

Man kann es weder aus den übrigen Axiomen der Mengenlehre herleiten, noch steht es zu ihnen im Widerspruch, und es muss deshalb als selbständige Grundannahme behandelt werden.

## 2.25 Der große Zaubertrick

Wir wollen jetzt eine der merkwürdigsten Folgerungen aus dem Auswahlaxiom kennenlernen. Sie alle haben doch wahrscheinlich schon Gelegenheit gehabt, einem Zauberkünstler im Variete bei der Arbeit zuzusehen.

Da zeigt er etwa den staunenden Zuschauern einen leeren Beutel, wirft eine Kugel hinein und ... zieht zwei wieder heraus. Vielleicht verwandelt er die beiden Kugeln dann auch noch schnell in vier und diese wiederum in acht!

Natürlich wissen alle, dass hier keine Wunder geschehen, sondern nur eine große Fingerfertigkeit demonstriert wird.

In der Theorie der Mengen gibt es aber tatsächlich ein solches Wunder! -

Wir nehmen einen ganz gewöhnlichen Apfel und zerlegen ihn irgendwie in vier gleiche Teile, wobei es uns vollkommen klar zu sein scheint, dass man den ganzen Apfel niemals aus nur zwei dieser Teile wieder zusammensetzen kann. Indessen gelang es den Mathematikern, eine Kugel so in vier gleiche Teile zu zerlegen (natürlich nur in Gedanken), dass man aus zweien von ihnen eine ganze Kugel von gleichem Radius allein dadurch herstellen kann, dass man sie wie starre Körper bewegt und nichts hinzufügt. Aus den beiden anderen Teilen kann man eine zweite ebensolche Kugel aufbauen. So bekommt man aus einer Kugel zwei gleichgroße!

Schade, dass dieses Problem nur theoretisch gelöst ist, sonst könnte man aus einem Apfel zunächst zwei machen, daraus dann vier, acht, sechzehn usw. Eine praktische Lösung der Aufgabe ist natürlich auch prinzipiell unmöglich, denn sie würde dem Gesetz von der Erhaltung der Masse widersprechen.

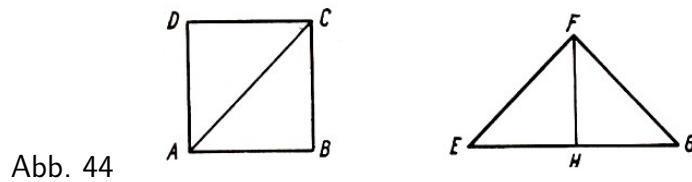
Eine solche Zerlegung der Kugel in vier Teile beruht gerade auf dem Auswahlaxiom.

Über andere, ebenso rätselhafte Folgerungen aus diesem Axiom wollen wir uns jetzt aber nicht weiter unterhalten.

## 2.26 Endliche Zerlegungen

(+) Vielleicht kennt der Leser aus dem Geometrieunterricht den Begriff der zerlegungsgleichen Figuren. Zwei Figuren  $X$  und  $Y$  werden zerlegungsgleich genannt, wenn man sie in Teilfiguren  $X_1, X_2, \dots, X_m$   $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  so zerlegen kann, dass die Teilfiguren  $X_1$  und  $Y_1$ ,  $X_2$  und  $Y_2$ , ...,  $X_n$  und  $Y_n$  jeweils paarweise zueinander kongruent sind.

So sind beispielsweise das Quadrat mit der Seitenlänge  $a$  und das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse  $2a$  zerlegungsgleich (Abb. 44).



Vom Standpunkt der Mengenlehre ist diese Definition nicht exakt. Wenn wir nämlich die Figuren zerlegen, so verdoppeln wir gewissermaßen die Menge der Punkte der Schnittlinien: aus jedem dieser Punkte bekommen wir zwei - einer zu jedem Teilstück.

Und wirklich stimmen die Zerlegungen des Quadrates  $ABCD$  und des Dreiecks  $EFG$  aus Abb. 44 als Punktmengen nicht überein. Nach der Zerlegung des Dreiecks verschmelzen im Quadrat die beiden Katheten  $EF$  und  $FG$  zur Diagonale  $AC$ , während die Höhe  $HF$  verdoppelt werden muss, um die beiden Seiten  $AB$  und  $CD$  zu ergeben.

In der Mengenlehre müssen wir also den Begriff der zerlegungsgleichen Figuren anders definieren. Wir wollen zwei Figuren  $X$  und  $Y$  dann zerlegungsgleich nennen, wenn sie in eine endliche Zahl paarweise durchschnittsfremder Teile zerlegt werden können:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m \quad , \quad Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$$

so dass  $X_1 \cong Y_1, X_2 \cong Y_2, \dots, X_m \cong Y_m$  ist ( $\cong$  bedeutet kongruent).

Es zeigt sich, dass auch nach dieser Definition das Quadrat  $ABCD$  und das Dreieck  $FEG$  (Abb. 44) zerlegungsgleich sind.

Allerdings ist der Beweis jetzt weit schwerer zu führen. (Der Leser, der den Beweis gern kennenlernen möchte, kann ihn im Buche »Über Mengentheorie« von W. Serpinskij (russ. übers. 1966) nachlesen.)

Die polnischen Mathematiker St. Banach und A. Tarski haben dann bewiesen, dass die Gleichheit der Flächeninhalte zweier ebener Vielecke die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Zerlegungsgleichheit ist.

Es schien deshalb nur natürlich zu sein, dass für die Zerlegungsgleichheit von Vielflachen im Raume die Gleichheit des Volumens ausschlaggebend ist. Das ist aber im allgemeinen nicht richtig.

Unter Verwendung des Auswahlaxioms haben Banach und Tarski nämlich gezeigt, dass zwei beliebige (endliche) Vielflache im Sinne der Mengenlehre zerlegungsgleich sind, selbst wenn ihre Volumina verschieden sind.

Darüber hinaus konnten sie zeigen, dass in diesem Sinne die Kugel mit dem Würfel und ganz allgemein je zwei begrenzte Körper zerlegungsgleich sind.

Selbstverständlich wird die Zerlegungsgleichheit von Kugel und Würfel ebenso wie die früher besprochene Zerlegung der Kugel nur mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesen, was zu einem reinen Existenzbeweis führt. Es ist hier unmöglich, eine konkrete Art der Zerlegung anzugeben.

Die nach dem Beweis erhaltenen Teile haben eine ganz erstaunliche Eigenschaft: Sie haben kein Volumen, sie sind nicht messbar, wie die Mathematiker sagen.

## 3 Von merkwürdigen Funktionen und Linien oder Spaziergänge durch das mathematische Kunstkabinett

### 3.1 Wie sich der Funktionsbegriff entwickelt hat

Die meisten mathematischen Begriffe haben einen langen Weg der Entwicklung hinter sich. Zunächst entstanden sie wohl als Verallgemeinerungen irgendwie anschaulicher Begriffe oder alltäglicher Erscheinungen, und erst allmählich kristallisierten sich durch Abstraktion vom Besonderen und Zufälligen die exakten mathematischen Definitionen heraus.

Bald zeigte es sich, dass diese Definitionen nicht nur diejenigen Objekte erfassen, bei deren Studium sie sich eben ergeben hatten, sondern noch viele weitere Dinge, über die man bisher noch nicht nachgedacht hatte.

Nun begann mit dem Studium dieser neuen Objekte der Übergang zu einer höheren Abstraktionsstufe, und auf dieser Grundlage kam es dann zu einer Erweiterung der ursprünglich eingeführten Definition. Dabei wurde den mathematischen Begriffen ein zunehmend weiterer Sinn beigelegt, sie umfassten einen sich mehr und mehr vergrößernden Kreis von Objekten und brachten immer mannigfaltigere Erweiterungen hervor.

Welch lange Geschichte hat - um ein erstes Beispiel zu nennen - beispielsweise der Zahlbegriff, dessen Prägung schon in prähistorischer Zeit begann, als man nur eins, zwei, viele zu zählen verstand!

Heute betrachten wir die natürlichen Zahlen, die rationalen Zahlen, reelle und komplexe Zahlen, die Quaternionen und hyperkomplexen Zahlen und noch weitere Typen.

Man sollte auch stets wissen, dass eine neue Verallgemeinerung dieses oder jenes Begriffes nicht immer von allen Mathematikern mit Begeisterung aufgenommen worden ist. So wurden die komplexen und vorher sogar die reellen Zahlen über längere Zeit von vielen Gelehrten als nicht existent angesehen und ihre Verwendung heftig bekämpft.

Auch der Funktionsbegriff hat eine lange und bewegte Geschichte. Die Idee des Zusammenhangs gewisser Größen entstammt nach unserer Kenntnis der altgriechischen Wissenschaft. Dort waren alle betrachteten Größen noch geometrischer Natur.

Selbst Newton, einer der Begründer der mathematischen Analysis, bediente sich bei der Betrachtung des Zusammenhangs gewisser Größen einer weitgehend geometrischen Sprache.

Obgleich bereits Fermat und Descartes den Funktionsbegriff verwendeten, wurde der Terminus "Funktion" erst seit 1694 in den Arbeiten des deutschen Gelehrten Leibniz verwendet, der sich das Verdienst der Entwicklung der mathematischen Analysis mit Newton teilt.

Indessen hatte der Funktionsbegriff bei Leibniz noch einen sehr eng begrenzten Sinn und bezog sich nur auf einige Dinge, die sich aus der Verteilung der Punkte auf einer Kurve ergaben: die Ordinaten, Subtangente und Subnormalen, Krümmungsradius usw. Deshalb blieb auch Leibniz im Kreis der geometrischen Begriffe befangen.

Erst J. Bernoulli, ein Schüler von Leibniz, gab 1718 eine von der geometrischen Anschauung unabhängige Definition einer Funktion.

Funktion einer veränderlichen Größe heißt die Menge der Größen, die durch eine irgendwie gegebene Regel aus dieser veränderlichen Größe und Konstanten berechnet werden.

Der nächste Schritt in der Entwicklung des Funktionsbegriffs ist mit dem Namen Leonhard Eulers, des Petersburger Akademiemitgliedes und Schülers von Bernoulli, verbunden. In seiner



"Differentialrechnung" hat er die Funktion so definiert:

"Größen, die von anderen so abhängen, dass bei einer Veränderung der zweiten auch die ersten geändert werden, bezeichnet man gewöhnlich als Funktionen."

Jedoch war der Funktionsbegriff bei Euler und seinen Zeitgenossen noch mit der formelmäßigen Darstellbarkeit aufs engste verbunden. Vom Standpunkt der Mathematiker des 18. Jahrhunderts war ein Ausdruck der Form

$$y = \begin{cases} x & \text{wenn } x < 0 \\ x^2 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

niemals als Darstellung einer Funktion aufzufassen, sondern stellte immer zwei Funktionen dar.

Recht bald wurde jedoch sichtbar, dass sich die Sache doch wohl weit komplizierter gestalten würde. Bei der Lösung des Problems der schwingenden Saite erhielt D. Bernoulli seine Lösung in Form einer sogenannten "trigonometrischen Reihe".

Wir werden uns hier nicht mit diesem Begriff beschäftigen, sondern nur soviel sagen, dass die Form der Saite durch eine einzige Formel dargestellt wurde, die allerdings unendlich viele Terme enthält.

Die gleiche Aufgabe hatte auch der französische Mathematiker d'Alembert gelöst. Seine Lösung hatte aber eine ganz andere Form. Bei ihm wurde die Form der schwingenden Saite für die verschiedenen Argumentwerte durch verschiedene Formeln dargestellt.

Für die Mathematiker des 18. Jahrhunderts schien sich hier ein nicht zu überbrückender Widerspruch aufzutun: Auf ein und dieselbe Frage erhielt man zwei Antworten, von denen sich die eine für alle Argumentwerte durch eine einzige Formel, die andere dagegen nur durch mehrere Formeln darstellen ließ.

Man leitete daraus eine völlig unbegründete Abwertung der Leistung Bernoullis her, indem man annahm, dass sie nicht die allgemeine Lösung darstellt, sondern nur eine besondere spezielle, durch eine einzige Formel darstellbare liefert. Es entstand ein äußerst erbitterter Streit um diese Frage, an dem alle führenden Mathematiker des Jahrhunderts - wie etwa Euler, d'Alembert, u. a. - beteiligt waren.

Wenn man es recht betrachtet, so bezog sich der Streit auf den Begriff der Funktion, auf die Beziehungen, die zwischen funktionaler Abhängigkeit und formelmäßiger Darstellung bestehen. Auf die spezielle Frage wurde erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts durch J. Fourier eine abschließende Antwort gegeben.

Er bewies, dass die Summe einer unendlichen Reihe, deren Summanden trigonometrische Funktionen sind, über verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches durch verschiedene Formeln dargestellt werden kann. Davon ausgehend gab er eine Definition des Funktionsbegriffes, in der er die Kenntnis der Abhängigkeit der Funktionswerte von den Argumentwerten in den Vordergrund stellte, während er der Darstellbarkeit durch eine einzige Formel nur untergeordnete Bedeutung beimaß.

Die Ergebnisse Fouriers wurden durch den deutschen Mathematiker Dirichlet präzisiert, der zeigen konnte, dass eine beliebige, willkürlich vorgegebene Linie der Graph einer als Summe einer trigonometrischen Reihe dargestellten Funktion sein kann.

Es muss nur gefordert werden, dass die Zahl der Maxima und Minima auf dieser Linie endlich ist und sich die Linie selbst in keiner Richtung nach Unendlich erstreckt. Dirichlet präzisierte auch die von Fourier gegebene Definition einer Funktion und gab ihr die im wesentlichen noch

heute unverändert gültige Prägung (ähnliche Definitionen hatten noch vor Dirichlet Lacroix, Lobatschewski und einige andere Mathematiker gegeben):

Die veränderliche Größe  $y$  heißt Funktion der veränderlichen Größe  $x$ , wenn jedem Zahlenwert der Größe  $x$  ein eindeutig bestimmter Wert der Größe  $y$  entspricht.

Später wurden die Worte "jedem Wert der Größe  $x$ " noch durch den Zusatz "... aus einer bestimmten vorgegebenen Menge ..." ergänzt, denn eine Funktion muss nicht notwendig für alle Werte von  $x$  definiert sein.

Diese Definition war ziemlich allgemein, und es wurde absolut nichts darüber gesagt, dass eine Funktion im ganzen Definitionsbereich durch eine einzige Formel dargestellt werden müsse. Ja, sie braucht überhaupt nicht durch eine Rechenvorschrift gegeben zu sein, sondern kann auch mit Worten beschrieben werden.

So hat Dirichlet selbst schon eine Funktion wie diese betrachtet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \text{ eine irrationale Zahl} \\ 1 & , \text{ wenn } x \text{ eine rationale Zahl ist.} \end{cases}$$

Vom Standpunkt der Mathematiker des 18. Jahrhunderts konnte eine solche Vorschrift niemals eine Funktion darstellen, da doch keine Formel gegeben war, nach der man die Dirichletsche Funktion ausrechnen konnte. Und doch wird durch die angegebene Vorschrift eine Funktion definiert, denn es ist unmissverständlich und eindeutig festgelegt, welcher Wert  $y$  einem beliebigen Wert  $x$  zugeordnet wird. So weiß jeder ganz genau, dass  $f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ , aber  $f(\sqrt{2}) = 0$  ist.

Ursprünglich wurde die Definition Dirichlets (mit der angegebenen Ergänzung) ausschließlich auf Funktionen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat jeweils eine gewisse Menge reeller Zahlen war, angewendet.

Die weitere Entwicklung verlief nun so, dass man nach und nach auch solche Funktionen betrachten lernte, die auf beliebigen Mengen definiert waren und auch Elemente allgemeiner Mengen als Werte annehmen durften.

Es seien zwei Mengen  $A$  und  $B$  gegeben und möge jedem Element  $a$  aus  $A$  ein Element  $b$  aus  $B$  durch eine Vorschrift eindeutig zugeordnet sein, dann sagt man, dass eine Funktion auf  $A$  mit Werten in  $B$  definiert sei.

In solch allgemeiner Formulierung wird der Begriff einer Funktion mit den Begriffen eindeutige Abbildung, eindeutige Zuordnung oder eindeutige Transformation, häufig auch bei stillschweigender Unterdrückung des Zusatzes "eindeutig", verschmolzen.

(Anmerkung des Herausgebers: In der Schule wird der Funktionsbegriff heute wie folgt definiert: Werden den Elementen einer Menge  $A$  eindeutig die Elemente einer Menge  $B$  zugeordnet, so heißt die dabei entstehende Menge von geordneten Paaren eine Funktion.

Die Menge  $A$  heißt Definitionsbereich, die Menge  $B$  Wertevorrat der Funktion.)

So betrachtet ist beispielsweise die Zuordnung des Flächeninhalts eines Dreiecks zum Dreieck eine Funktion mit der Menge aller Dreiecke als Definitionsbereich. Ordnet man jedem Dreieck einer Ebene seinen Inkreis zu, dann hat man ein weiteres Beispiel für eine solche Funktion.

In den folgenden Abschnitten werden wir diesen ganz allgemeinen Funktionsbegriff nicht verwenden, sondern immer voraussetzen, dass die beiden Mengen  $A$  und  $B$  Zahlenmengen sind.

### 3.2 Der Geist aus der Flasche

Die Definition Dirichlets gestattete nun, Funktionen mit den wunderlichsten Eigenschaften relativ leicht zu konstruieren.

Wenn es früher zur Konstruktion einer Funktion mit irgendwie ungewöhnlichen Eigenschaften notwendig war, die verschiedensten Formeln so lange miteinander zu kombinieren, bis man eine entsprechende Formel gefunden hatte, was in den seltensten Fällen überhaupt möglich war, so war die Sache jetzt recht einfach geworden.

Mussten irgendwelche Funktionen konstruiert oder untersucht werden, dann wurde nicht mehr darüber nachgedacht, ob eine einzige Formel für sie existierte.

Und während der folgenden anderthalb Jahrhunderte sind Funktionen konstruiert worden, deren Eigenschaften sich grundlegend von denen der "anständigen" Funktionen unterschieden. Sicher hat selbst Dirichlet nicht gedacht, dass solche "Missgeburten" geschaffen werden könnten.

Ungewöhnlich ist bereits die Funktion von Dirichlet selbst, wie wir sie weiter oben angegeben haben. In jedem noch so kleinen Intervall der Abszissenachse gibt es unendlich viele rationale und irrationale Zahlen. Die Funktion hat aber für rationale Abszissen den Wert 1, für irrationale den Wert 0.

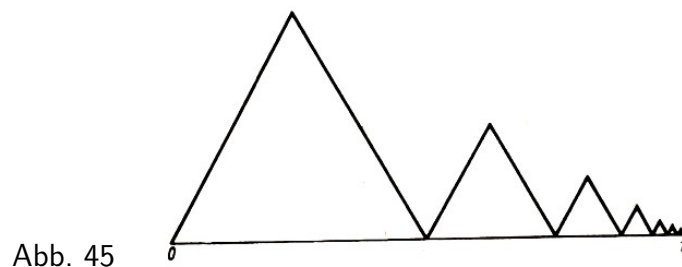
Wenn demzufolge  $x$  die Abszissenachse durchläuft, dann springt die Funktion dauernd zwischen den Werten 0 und 1. Man kann das Bild dieser Funktion nicht zeichnen, da sie an allen Stellen springt. Jedoch gibt es auch schon unter den stetigen Funktionen solche mit recht ungewöhnlichen Eigenschaften.

Legen wir uns zum Beispiel die Frage vor, ob eine stetige Funktion über einem endlichen Intervall unendlich viele Maxima und Minima haben kann, so scheint uns das zunächst unmöglich zu sein. Müsste doch eine solche Funktion von jedem Maximalpunkt innerhalb eines endlichen  $x$ -Intervalls auf den Minimalwert absinken und von dort wiederum stetig zum nächsten Maximum ansteigen und so weiter!

Wie soll sie das in einem endlichen Intervall unendlich oft bewerkstelligen, ohne zu springen?

Und doch zeigt es sich, dass es solche seltsamen Funktionen gibt und man sie ziemlich leicht konstruieren kann. Wir wollen eine solche Konstruktion über dem Intervall  $[0,1]$  vorführen.

Dazu unterteilen wir das Intervall durch fortgesetztes Halbieren der jeweils rechten Hälfte und errichten jedesmal über der linken Hälfte des Intervalls das gleichseitige Dreieck mit der entsprechenden Seitenlänge. Wir erhalten unendlich viele Teilintervalle, über denen jeweils ein gleichseitiges Dreieck steht (vgl. Abb. 45).



Nun deuten wir die so erhaltene "Zick-Zack-Kurve" als graphische Darstellung einer Funktion  $f(x)$ , die in allen Punkten des Intervalls  $[0,1]$  mit Ausnahme des rechten Randpunktes 1 definiert ist.

Zur Vervollständigung setzen wir deshalb  $f(1) = 0$ .

Da die Länge der Dreiecksseiten und damit die Höhen der Dreiecke bei Annäherung an den Punkt  $x = 1$  gegen Null gehen, so ist  $\lim_{x \rightarrow 1} = 0$ , und unsere Funktion ist sogar im ganzen abgeschlossenen Intervall stetig. Die Zahl der Maxima und Minima im gleichen Intervall ist aber unendlich!

Um eine solche seltsame Funktion zu konstruieren, musste ein Mathematiker des 18. Jahrhunderts verschiedene bekannte Funktionen so lange kombinieren, bis er eine Formel erhalten hatte, die eine Funktion mit unendlich vielen Maxima und Minima im Intervall  $[0,1]$  darstellte. Auch hierfür gibt es ein sehr bekanntes Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Sie hat unendlich viele Extremstellen. Ihre graphische Darstellung ist in Abb. 46 skizziert.

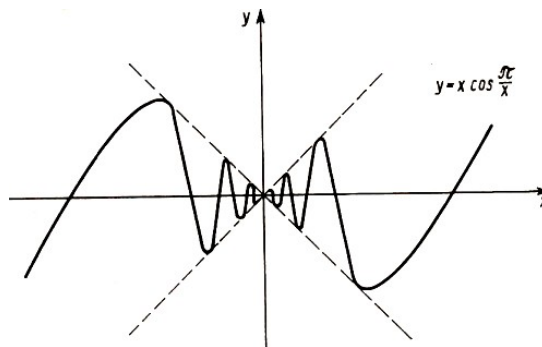


Abb. 46

Stetige Funktionen mit unendlich vielen Extremstellen waren jedoch nur der Anfang für weitere Überraschungen, welche die Mathematiker erwarteten. Der Geist hatte erst begonnen, aus der Flasche zu schlüpfen!

### 3.3 Nasse Punkte

Bei der vorhin konstruierten Funktion gab es genau einen Punkt, in dessen Nachbarschaft sich unendlich viele Maxima und Minima häuften, nämlich den Punkt 1. Jetzt werden wir eine andere Funktion angeben, bei der es weit mehr solcher Punkte gibt.

Über dem Intervall  $[0,1]$  der Abszissenachse regnet es! Wir bauen einen Schutz vor dem Regen, indem wir die Strecke  $[0,1]$  zunächst in drei gleiche Teile zerlegen und über dem mittleren Teil ein Zelt in Form eines gleichseitigen Dreiecks aufstellen (s. Abb. 47).

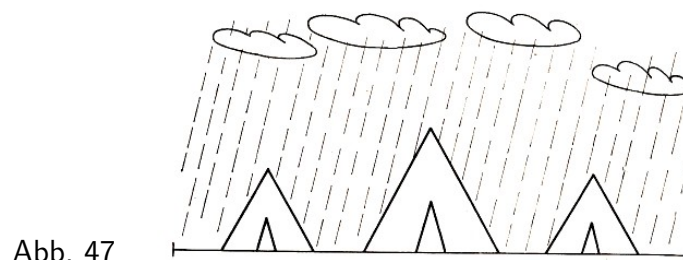


Abb. 47

Damit sind alle Punkte dieses mittleren Teiles (mit Ausnahme der beiden Randpunkte  $1/3$  und  $2/3$ ) vor dem Regen geschützt.

Jetzt dritteln wir jedes der beiden noch nicht geschützten Teilintervalle erneut und schützen jeweils den mittleren Abschnitt durch ein Zelt der gleichen Form. (Die Seitenlängen dieser

neuen Zelte betragen natürlich ein Drittel der des ersten Zeltes.) So bekommen wir eine Linie, die in Abb. 48 dargestellt wurde. Im dritten Schritt bauen wir dann vier neue Zelte, im vierten Schritt acht und so weiter.

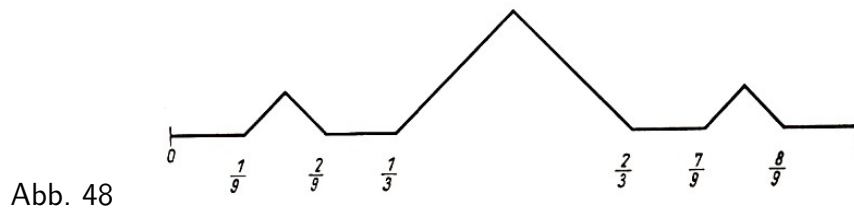


Abb. 48

Nun ergibt sich die Frage, ob am Ende der ganzen Zeltebauerei alle Punkte des Intervalls vor dem Regen geschützt sind oder ob es noch Stellen gibt, die der Regen nass macht.

Einige solche "nassen" Punkte sind leicht anzugeben, die Endpunkte der einzelnen geschützten Teilintervalle, z.B.  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots$

Alle diese Punkte erhielten bei der Überdachung des von ihnen begrenzten Intervalles keinen Schutz, die folgenden Zelte wurden aber dann immer in einem gewissen Abstand aufgestellt, so dass sie auch weiterhin ungeschützt blieben. Es ist leicht zu sehen, dass man schließlich eine unendliche, aber abzählbare Menge solcher Punkte angeben kann. Nun zeigt es sich aber, dass es außer dieser abzählbaren Menge "nasser" Punkte sogar ein ganzes Kontinuum solcher Punkte gibt!

Um diese Menge zu beschreiben, bedienen wir uns vorteilhaft der triadischen Darstellung rationaler Zahlen. Wie wohl bekannt sein dürfte, ist dieses System genauso aufgebaut wie das Dezimalsystem, mit dem einzigen Unterschied, dass die Stelleneinheit hier nicht die Zehn, sondern die Drei ist. Demnach genügen im triadischen Zahlensystem drei Zeichen (0, 1, 2) zur Beschreibung der Zahlen, während man dazu im dekadischen System zehn Ziffern benötigt.

Die Übersetzung einer Zahl aus der Darstellung im Dreiersystem in das Dezimalsystem lernt man leicht. So betrachten, wir die Zahl mit der triadischen Darstellung

$$z = 0,02020202\dots$$

Die Darstellung bedeutet doch eigentlich

$$z = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots$$

ist also eine andere Schreibweise für eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied  $\frac{2}{3^2}$  und dem Quotienten  $\frac{1}{3}$ . Nach der Summenformel für eine solche Reihe,

$$s = \frac{a_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

ergibt sich somit

$$z = \frac{2}{3^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

Im Dezimalsystem hat diese Zahl die Darstellung  $z = 0,25$ .

Jetzt fällt es uns aber ziemlich leicht, genau anzugeben, welche Punkte nach der Errichtung all unserer Zelte noch immer nassgeredet werden. Das erste Zelt bedeckt alle die Punkte, die zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$  liegen. Das sind aber gerade alle Punkte, deren Koordinaten eine triadische Darstellung haben, die mit 0,1... beginnt.

Nach der Eins können dann alle möglichen Ziffernfolgen aus den drei Ziffern 0, 1, 2 stehen. Das ist hier genauso wie beim Dezimalsystem, wo alle Zahlen zwischen  $\frac{1}{10}$  und  $\frac{2}{10}$  eine Darstellung der Form 0,1... haben.

Nach dem ersten Schritt bleiben dann alle Punkte nass, deren triadische Darstellungen die Form

$$0,0\dots \quad \text{oder} \quad 0,2\dots$$

haben. Genauso schließen wir, dass nach der Errichtung der beiden Zelte im zweiten Schritt immer noch alle Punkte nass werden, deren triadische Darstellung mit einer der folgenden vier Kombinationen beginnt:

$$0,00\dots, \quad 0,02\dots, \quad 0,20\dots, \quad 0,22\dots$$

Und so werden Schritt um Schritt immer solche Punkte vor dem Regen geschützt, in deren triadischer Darstellung die Ziffer Eins vorkommt. Schließlich und endlich sind alle die Punkte nass geblieben, deren Koordinaten man im triadischen System allein unter Verwendung der Ziffern 0 und 2 aufschreiben kann. So ist zum Beispiel  $\frac{1}{4} = 0,020202\dots$  ein solcher Punkt, ebenso der Punkt  $\frac{3}{4} = 0,202020\dots$  und so weiter.

Jetzt ist aber auch bewiesen, dass die Menge dieser "nassen" Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums hat, ist sie doch der früher von uns schon betrachteten Menge der "unendlichen Telegramme" äquivalent.

Aus jedem Bruch der betrachteten Form entsteht doch ein "Telegramm", wenn wir die 0 durch einen Strich und die Zwei durch einen Punkt ersetzen, und umgekehrt kann auch jedes Morsetelegramm statt mit Punkten und Strichen mit den Ziffern 0 und 2 als ein solcher unendlicher triadischer Bruch geschrieben werden.

Wir wissen aber bereits, dass die Menge dieser unendlichen Telegramme die Mächtigkeit des Kontinuums hat, so dass die Menge der "nassen" Punkte von gleicher Mächtigkeit sein muss. Die Menge der Punkte, die wir "nasse" Punkte genannt hatten, hat G. Cantor erstmals konstruiert, und sie trägt deshalb den Namen Cantorsches Discontinuum.

Aus der Konstruktion dieser Cantorschen Menge folgt unmittelbar, dass in Nachbarschaft jedes Punktes unendlich viele Maxima und Minima der "bedeckenden Linie" liegen müssen.

### 3.4 Eine verteilte Treppe!

Mit der eben untersuchten Cantorschen Menge hängt eine weitere interessante Funktion zusammen, die wir nun konstruieren wollen.

Wir teilen wiederum das Intervall  $[0,1]$  in drei gleiche Teile und setzen den Wert unserer Funktion über dem gesamten mittleren Intervall konstant gleich  $\frac{1}{2}$ .

Danach zerlegen wir sowohl das rechte als auch das linke Drittel wieder in drei gleiche Teile und setzen die Funktion in  $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$  identisch gleich  $\frac{1}{4}$  und über  $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$  gleich  $\frac{3}{4}$ .

Die Funktion ist jetzt über den vier Intervallen  $[0, \frac{1}{9})$ ,  $(\frac{2}{9}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9})$  und  $(\frac{8}{9}, 1]$  noch nicht definiert.

Jedes von ihnen zerlegen wir wieder in drei gleiche Teile und setzen die Funktion über den jeweils mittleren Teilintervallen gleich  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{8}$  und  $\frac{7}{8}$  (von links nach rechts).

Setzen wir diesen Prozess fort, so bekommen wir eine Funktion, die für alle "trockenen" Punkte, das heißt für alle nicht zur Cantorschen Menge gehörenden Punkte, definiert ist.

Sie kann aber auch in den Punkten dieser Menge leicht so definiert werden, dass die Funktion im

ganzen Intervall  $[0,1]$  stetig und nicht fallend ist. Eine Vorstellung von ihrem Verlauf vermittelt die Abb. 49.

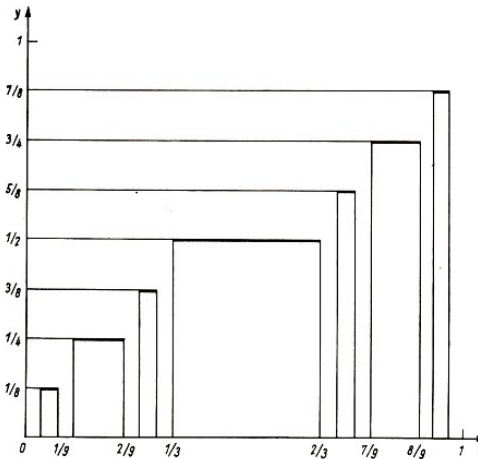


Abb. 49

Die Funktionskurve zeigt den Verlauf einer Treppe mit unendlich vielen Stufen (von denen in der Abbildung natürlich nur einige wenige zu sehen sind). Im übrigen kann uns aber eine Treppe mit unendlich vielen Stufen schon nicht mehr in Erstaunen versetzen, nachdem wir bereits eine stetige Linie mit unendlich vielen Maxima und Minima kennengelernt haben. Hier ist aber auch etwas ganz anderes sehr verwunderlich!

Wir wollen einmal die Gesamtlänge aller Stufen unserer Treppe bestimmen: Die erste Stufe hat die Länge  $\frac{1}{3}$ , die beiden nächsten sind je  $\frac{1}{9}$  lang, während die folgenden vier Stufen jeweils eine Länge von  $\frac{1}{27}$  haben usw. Die Gesamtlänge aller Stufen wird folglich als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

berechnet. Die entsprechende Formel ist

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Somit ist die Gesamtlänge aller Stufen gleich der Länge des ganzen Intervalls, nämlich gleich 1.

Längs der Stufen selbst wachsen die Funktionswerte nicht an, ihr ganzes Wachstum von  $y = 0$  auf  $y = 1$  muss also in den Punkten der Cantorschen Menge stattfinden. Und doch ist der Anteil dieser Menge an der Menge aller Punkte des Intervalls so gering, dass die Länge der Menge gleich Null ist, obschon die Mächtigkeit mit der Mächtigkeit des Gesamtintervalls zusammenfällt.

Die Länge des Intervalls ist 1 und die Gesamtlänge aller Stufen ebenfalls, so dass auf die Cantorsche Menge nur die Länge 0 entfallen kann.

Also bringt es unsere Funktion fertig, von 0 auf 1 zu wachsen, obwohl sie nur auf einer Menge der Länge Null überhaupt wächst und sonst stückweise konstant ist und keinerlei Sprünge macht! Ist das nicht erstaunlich?

### 3.5 Die stachlige Linie

Über mehrere Jahrhunderte hinweg hatten es die Mathematiker nur mit Kurven zu tun, die fast in jedem ihrer Punkte eine Tangente besitzen. Wenn sie auch hin und wieder einigen

Ausnahmen begegneten, dann betrafen diese nur das Verhalten in relativ wenigen Punkten. In solchen Punkten erscheint die Linie geknickt, man nennt sie deshalb Knickpunkte oder Ecken der Kurve. Die in Abb. 50a dargestellte Linie hat zwei Ecken, der in Abb. 50b abgebildete Stern besitzt 10 Ecken.

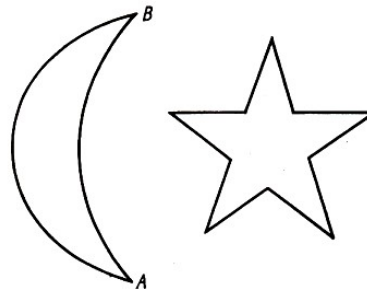


Abb. 50a, b

Wir haben demgegenüber schon Kurven mit unendlich vielen Knicken konstruiert. Die Linie der Abb. 46 hatte abzählbar viele Ecken, die Kurve von Abb. 48 besaß eine Menge von Knickpunkten mit der Mächtigkeit des Kontinuums. Diese Kurve ist in allen Punkten der Cantorschen Menge geknickt und dazu noch an der Spitze des jeweiligen Dreiecks. Immerhin hat selbst diese Kurve eine ziemlich kleine Menge von Knickpunkten, eine Menge von der Gesamtlänge Null nämlich, wie wir soeben gesehen hatten.

Über lange Zeit wäre jedoch keinem Mathematiker je der Gedanke gekommen, dass eine stetige Linie existieren könnte, die vollständig aus Zacken, Ecken und Stacheln besteht. Man staunte nicht schlecht, als die Konstruktion einer solchen Kurve, ja sogar einer Funktion gelang, deren graphische Darstellung ein solcher "Stacheldrahtzaun" war.

Das gelang zum ersten Mal dem tschechischen Gelehrten Bolzano, der seine diesbezügliche Arbeit jedoch nicht veröffentlicht hat. Das erste derartige Beispiel ist von dem deutschen Mathematiker K. Weierstrass veröffentlicht worden. Das Beispiel ist aber recht schwierig wiederzugeben, da hierzu die Theorie der trigonometrischen Reihen erforderlich ist.

Das Beispiel von Bolzano dagegen ist ganz einfach und erinnert stark an die von uns früher konstruierte Kurve.

Wir werden es jetzt mit unwesentlichen Änderungen behandeln.

Zuerst zerlegen wir das Intervall  $[0,1]$  in vier gleiche Teile und errichten über den beiden mittleren Vierteln als Hypotenuse das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck (Abb.51a).

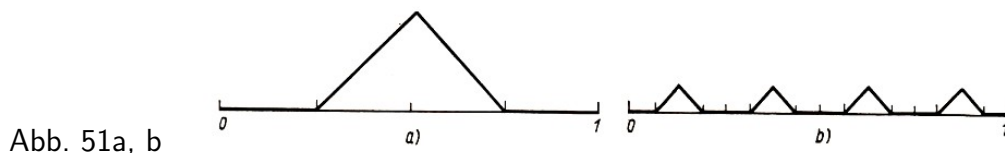


Abb. 51a, b

Die so erhaltene Linie fassen wir als grafische Darstellung einer Funktion  $y = f_1(x)$  auf.

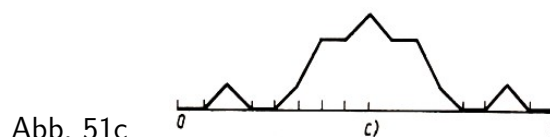


Abb. 51c

Danach zerlegen wir jede der vier Teilstrecken wiederum in vier gleiche Teile, errichten jetzt aber jeweils über den beiden mittleren Teilstücken vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke (Abb. 51b). Wir erhalten die grafische Darstellung einer zweiten Funktion  $y = f_2(x)$ . Die



Funktion  $y = f_1(x) + f_2(x)$  besitzt als Summe der beiden Funktionen eine grafische Darstellung, die als Überlagerung der beiden Kurven zu  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  etwa den in Abb. 51c wiedergegebenen Verlauf hat. Wie man sieht, hat diese Linie schon mehr Ecken, und diese liegen auch dichter.

Im nächsten Schritt zerlegen wir wieder alle Teile in vier Abschnitte, errichten die entsprechenden 16 Dreiecke und addieren die entstandene Funktion  $y = f_3(x)$  zur Funktion  $y = f_1(x) + f_2(x)$ .

Wenn wir diesen Prozess fortsetzen, so werden wir eine immer stärker gebrochene Linie erhalten. Im Grenzfall handelt es sich um eine stetige Kurve, die in jedem Punkt geknickt ist und nicht in einem einzigen Punkt eine Tangente besitzt.

Der holländische Mathematiker B. L. van der Waerden hat ein ähnliches Beispiel angegeben. Er nahm ein gleichseitiges Dreieck, zerlegte jede Seite in drei gleiche Teile und errichtete über dem mittleren Drittel jeweils wieder ein gleichseitiges Dreieck, löschte die Basis aus und setzte das Verfahren mit dem entstandenen Stern fort. Nach dem ersten Schritt bekommt man den regulären sechseckigen Stern (Abb. 52a) und nach dem nächsten Schritt bereits einen recht bizarren "Schneekristall" (Abb. 52).

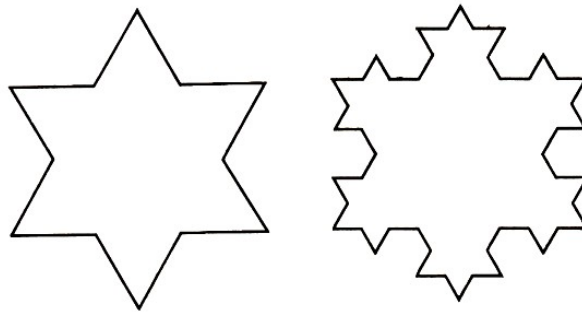


Abb. 52a,b

Nach unendlich vielen Schritten dieser Art ergibt sich eine Linie, die an jedem ihrer Punkte eine Ecke, einen kleinen Stachel, hat.

Später haben viele Mathematiker weitere Funktionen konstruiert, die in keinem Punkt eine Tangente haben, und sie begannen, deren Eigenschaften näher zu studieren. Diese Eigenschaften ähneln nun aber überhaupt nicht denen der "gutartigen" glatten Funktionen, mit denen sie es bisher ausschließlich zu tun hatten.

Deshalb verfolgten die in den klassischen Traditionen fest verwurzelten Mathematiker mit Erstaunen und auch einem gewissen Argwohn die Entwicklung auf diesem Gebiet der Forschung.

Ja, mehr noch. Der angesehene Nestor der mathematischen Analysis, Charles Hermite, schrieb seinem holländischen Freund und Kollegen Stieltjes:

"Ich wende mich voller Abscheu von diesen der Verachtung würdigen Missgeburten von stetigen Funktionen, die in keinem einzigen Punkt eine Ableitung haben." (Gemeint sind natürlich gerade die von uns als überall stachelige Linien bezeichneten Kurven.)

Der bekannte französische Gelehrte H. Poincaré schrieb:

"Einst hatte man bei der Schaffung neuer Funktionen irgend ein praktisches Ziel im Auge. Heute aber werden Funktionen speziell dazu ausgeklügelt, die Unzulänglichkeit der Schlüsse unserer Väter aufzudecken; keine anderen Schlüsse als diese werden jemals aus ihnen gezogen werden."

Die weitere Entwicklung der Wissenschaft hat aber gezeigt, dass Poincaré sich geirrt hat. In

der Physik kommen durchaus Linien vor, die den "stacheligen" Linien van der Waerdens und anderer sehr ähnlich sind. Das sind die Bahnen, welche kleinste Teilchen unter dem Einfluss der Stöße des Gases oder der Flüssigkeit, in denen sie sich befinden, durchlaufen, d.h. die Bahnen der Brownschen Bewegung.

Der französische Physiker Perrin fertigte Zeichnungen der Bewegung solcher Teilchen an. Er beobachtete ihre Stellung im Abstand von einer Minute und verband die entsprechenden Punkte durch gerade Linien. Als Resultat bekam er verschlungene Polygonzüge, wie sie in Abb. 53 dargestellt sind.

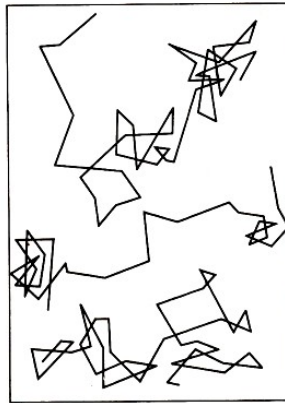


Abb. 53

Daraus darf man aber natürlich nicht den falschen Schluss ziehen, dass sich die Teilchen während des Zeitintervalls zwischen den einzelnen Messungen tatsächlich geradlinig bewegt hätten. Wenn Perrin sie nicht in Abständen von Minuten, sondern zu jeder vollen Sekunde beobachtet hätte, dann müsste jedes gerade Verbindungsstück seinerseits durch ein ähnliches Polygon ersetzt werden.

Und je geringer der Zeitabstand zwischen den einzelnen Beobachtungen würde, um so verschlungener und gebrochener wäre das Gesamtpolygon, ja es würde mehr und mehr einer unserer "stacheligen Linien" gleichen.

Der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener hat bewiesen, dass die Brownsche Bewegung der Teilchen entlang von Bahnkurven verläuft, die nirgends eine Tangente besitzen, sofern die Teilchen so klein sind, dass ihre Trägheit vernachlässigt werden kann.

### 3.6 Eine geschlossene Linie unendlicher Länge

Auf Linien unendlicher Länge treffen wir recht häufig. So hat etwa eine Gerade, eine Parabel oder eine Hyperbel keine endliche Länge. Solche Linien beginnen und enden aber in keinem endlichen Punkt, und darum verwundert es uns nicht weiter, dass ihre Länge nicht endlich ist.

Auch Linien unendlicher Länge, die innerhalb eines endlichen Teiles der Ebene verlaufen, kann man sich relativ leicht vorstellen. Man braucht sich beispielsweise nur einen Kreis vorzugeben. Um diesen legt man eine Spirale, die sich der Kreisperipherie immer mehr nähert, unendlich viele Windungen hat und den Kreis nie schneidet (Abb. 54).

Weil die Zahl der Windungen unendlich ist, die Länge jeder einzelnen Windung aber sicher größer als der Kreisumfang ausfällt, muss die Gesamtlänge unendlich sein.

Sollte es aber etwa auch möglich sein, eine geschlossene Linie unendlicher Länge zu konstruieren?

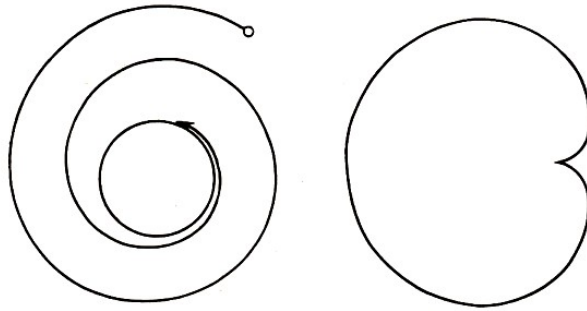


Abb. 54,55

Gewöhnliche geschlossene Linien wie Kreis, Ellipse oder Kardioide (Abb. 55) haben eine endliche Länge. Aber die "Sternkurve" von van der Waerden hat keine endliche Länge!

In der Tat: Wird der Umfang des Ausgangsdreieckes gleich drei angenommen, dann ist leicht nachzurechnen, dass der Umfang des 6-Sternes nach dem ersten Schritt gleich  $4 > 3$  ist!

Im folgenden Schritt wird eine Linie erzeugt, die aus 64 Strecken der Länge  $\frac{1}{9}$  zusammengesetzt ist und folglich die Länge  $\frac{64}{9}$  hat. Danach erhält man eine Linie der Länge  $\frac{256}{27}$  und so weiter.

Allgemein hat man im  $n$ -ten Schritt eine Figur, deren Umfang gleich  $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$  ist. Für wachsendes  $n$  strebt aber diese Folge nach unendlich. Unsere Behauptung ist somit richtig.

Es gibt allerdings auch andere Linien unendlicher Länge. Als Beispiel konstruieren wir noch eine Kurve.

Wir halbieren die Strecke  $[0,1]$  und errichten über der linken Hälfte das gleichschenklige Dreieck der Höhe 1. Dann halbieren wir die Strecke  $[\frac{1}{2}, 1]$  und zeichnen über  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  das gleichschenklige Dreieck der Höhe  $\frac{1}{2}$ . Danach wird über dem Intervall  $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$  ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck von derselben Höhe  $\frac{1}{2}$  konstruiert. Die folgenden vier Dreiecke sollen die Höhe  $\frac{1}{4}$  bekommen und so weiter (Abb. 56).

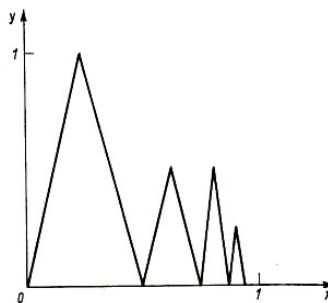


Abb. 56

Wir haben wieder eine uns wohlbekannte "Gebirgskette" erhalten, wie sie ganz ähnlich schon in Abb. 45 abgebildet war. Diesmal werden die "Gipfel" jedoch wesentlich langsamer niedriger. Klar ist, dass die Länge der Schenkel der Dreiecke nicht kleiner sein kann als die Höhe. Demnach ist die Länge der ganzen Linie nicht kleiner als die Summe der unendlichen als

$$2 + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right) + \dots$$

Die Summe in jeder Klammer ist aber gleich 2, während die Anzahl der Klammern nicht endlich ist. Deshalb ist der Wert der unendlichen Reihe nicht endlich, also ist auch die Länge der betrachteten Kurve unendlich.

### 3.7 Der mathematische Teppich

Man erzählt, dass Katharina II. von Russland einst einen ihrer Generale gefragt habe, worin der Unterschied zwischen einem Mörser und einer Haubitze bestehe. Völlig fassungslos ob dieser

unerwarteten Frage antwortete der General:

"Ja, ... siehst Du, Mütterchen Zar, der Mörser, das ist so ein Kapitel für sich, und die Haubitze - ist auch ein Kapitel für sich."

Eine ähnlich geistvolle Antwort kann man möglicherweise bekommen, wenn man einen Menschen, der keine Ahnung von den Begriffen der Mathematik hat, nach dem Unterschied zwischen Linien, Flächen und Körpern fragt.

Ja mehr noch - er würde sich höchst verwundert darüber zeigen, dass man nach etwas fragen kann, was vollkommen klar ist. Es weiß doch wohl jedes Kind, dass Linien, Flächen und Körper ganz handgreiflich verschiedene Dinge sind, und niemand wird die Oberfläche einer Kugel oder einen Würfel als Linie ansehen!

Ein geistreicher Schachgroßmeister hat einmal sehr richtig gesagt, dass der Unterschied zwischen einem Meister und einem Anfänger der Schachkunst darin besteht, dass dem Anfänger jede Position vollkommen klar zu sein scheint, während sie sich dem Meister ziemlich undurchsichtig zeigt. Genauso verhält es sich mit unserer Frage.

Natürlich treten im Zusammenhang mit solchen geometrischen Figuren wie dem Quadrat oder dem Kreis bei niemandem Zweifel darüber auf, ob es sich um Flächen oder Linien handelt. Seit Einführung der Mengenlehre in die Mathematik durch G. Cantor wurden aber viele höchst wunderliche geometrische Figuren ersonnen, bei denen nicht nur ein Schüler oder Student, sondern auch ein hochgelehrter Professor der Mathematik nicht sofort entscheiden kann, ob es sich um eine Linie, eine Fläche oder etwa um einen Körper handelt.

Hier haben wir einige von diesen Figuren:

Wir nehmen das Intervall  $[0,1]$  und errichten das Mittellot mit der Länge  $\frac{1}{2}$ . Jetzt betrachten wir die beiden Hälften des Intervalls und errichten in jedem Teilstück ein Mittellot der Länge  $\frac{1}{4}$ . Danach konstruieren wir die Mittelsenkrechte der Länge  $\frac{1}{8}$  in jedem der vier vorher abgetrennten Teilintervalle und so weiter.

Nach dem fünften Schritt bekommen wir die Figur von Abb. 57.

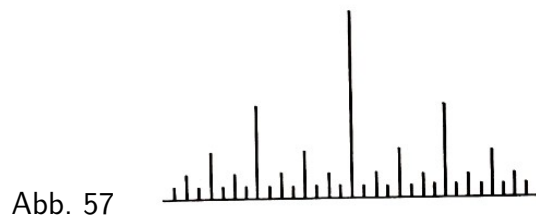


Abb. 57

Wir hören aber nicht nach fünf Schritten auf, sondern denken uns den Prozess beliebig oft wiederholt. Das Ergebnis wird sicher eine gewisse geometrische Figur, das heißt eine ebene Punktmenge sein, nur können wir nicht ohne weiteres sagen, ob es sich nun um eine Linie oder um eine Fläche handelt!

Zwar haben wir unendlich viele Senkrechte errichtet, aber könnten die Punkte der Menge nicht doch einen gewissen Flächenstreifen in der Nachbarschaft des Intervalles vollständig ausfüllen? Die Antwort auf diese Frage ist gar nicht leicht zu finden!

Ein weiteres Beispiel. Wir nehmen ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, zerlegen es in neun gleichgroße Quadrate und entfernen alle inneren Punkte des zentralen Quadrates aus unserer Menge.

Dann verfahren wir mit jedem der verbliebenen acht kleineren Quadrate so wie vorher mit dem Quadrat der Seitenlänge eins und setzen das Verfahren immer weiter fort. Nach drei Schritten

bleibt uns die schon recht löcherige Figur von Abb. 58 (die schraffierten bzw. schwarzen Teile sind Löcher).

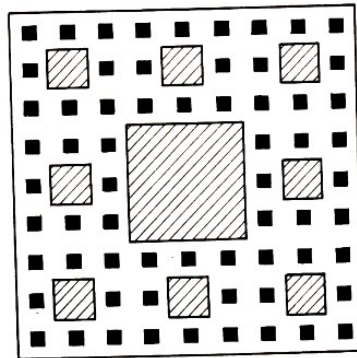


Abb. 58

Auch hier denken wir uns das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt und erhalten eine geometrische Figur, die den Namen "Sierpinski-Teppich" zur Erinnerung an ihren polnischen Schöpfer trägt. Die Figur macht den Eindruck eines Gewebes, das von einem wahnsinnigen Weber hergestellt worden ist.

Kreuz und quer laufen die Fäden von Kette und Schuss, wobei sie sich zu vollkommen symmetrischen und schönen Ornamenten verflechten. Das entstandene Gewebe aber ist gänzlich durchlöchert, es gibt nicht das kleinste heile Fleckchen: Auch das kleinste Quadrat wurde seines zentralen Teiles beraubt. Insgesamt bleibt hier ganz und gar unklar, ob wir es mit einer Fläche oder etwa mit einer Linie zu tun haben.

Der Teppich hat einerseits nicht das kleinste flächenhaft zusammenhängende Teil und kann deshalb schwer als Fläche angesprochen werden, zum anderen haben sich die in ihm verwobenen Fäden zu einem derart komplizierten Muster verflochten, dass schwerlich irgend jemand ohne Zaudern den Sierpinski-Teppich als Linie ansehen wird. Jedenfalls wäre es unmöglich, diese Linie auch nur andeutungsweise zu zeichnen, wie man eine Linie eben zu zeichnen gewöhnt ist.

Der Teppich von Sierpinski ist aber längst nicht die komplizierteste unter den geometrischen Figuren. An Stelle des Quadrates können wir auch einen Würfel nehmen, den wir in 27 gleichgroße Teilwürfel zerlegen, von denen wir den zentralen und die an diesen angrenzenden sechs Würfel entfernen. Dann wird mit jedem der verbleibenden Teilwürfel dieselbe Prozedur wiederholt und so weiter. Die Abbildung 59 zeigt den Zustand nach dem zweiten Schritt.

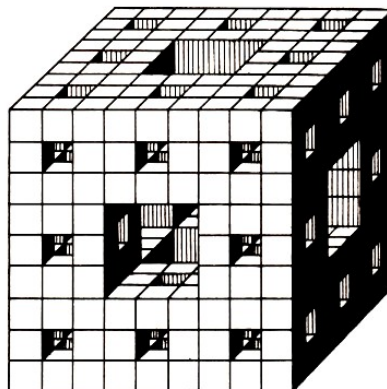


Abb. 59

Was ist die Punktmenge, die vom Würfel schließlich nach unendlich vielen Schritten noch übriggeblieben ist, Linie, Fläche oder Körper?

### 3.8 Euklid kann uns nicht helfen

Wenn unter den Mathematikern früherer Jahre eine schwierige geometrische Frage auftauchte, dann richteten sie ihr ganzes Bemühen zunächst darauf, zu erkunden, was Euklid über den Gegenstand etwa geschrieben haben könnte.

Nahezu 2000 Jahre lang waren die Bücher von Euklid die Grundlage der Geometrie, galten als Muster mathematischer Strenge und als Enzyklopädie des geometrischen Wissens. Nicht von ungefähr bedienten sich Philosophen, die dem Vorwurf entgehen wollten, dass ihre Überlegungen der logischen Strenge entbehrten, der Sprache Euklids und formulierten ihre Behauptungen als Axiome, Lemmata und Theoreme. Aber gerade über die uns im Moment interessierende Frage ist bei Euklid nur vollkommen Unzureichendes aufgeschrieben.

Die ersten Zeilen der "Elemente" von Euklid lauten etwa:

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist Länge ohne Breite.
3. Das äußerste Ende einer Linie ist ein Punkt.
4. Eine Fläche ist etwas, was nur Länge und Breite hat.
5. Das äußerste Ende einer jeden Fläche ist eine Linie.
6. Grenze ist, was äußerstes Ende von irgend etwas ist.
7. Eine Figur ist das, was innerhalb einer oder mehrerer Grenzen liegt.

Man sage nun, was man will, aber das sind alles andere als strenge Definitionen. Ein Mensch, der nicht schon weiß, was man unter einem Punkt, einer Linie oder Fläche versteht, wird sich daraus ungefähr soviel entnehmen können, wie die russische Zarin aus der Antwort ihres Generals:

Eine Linie - das ist eine Sache für sich, aber eine Fläche ist etwas ganz anderes!

Erst recht wird man aus diesen Definitionen auf gar keinen Fall eine Antwort auf die Frage nach der Natur unseres Teppichs ableiten können. Ist es nun eine Fläche - hat er "Länge und Breite", oder hat er "nur Länge" und präsentiert sich damit als Linie?

Zu Zeiten Euklids wusste man noch nichts von solch außerordentlich komplizierten Figuren wie diesem Teppich, und für die gewöhnlichen geometrischen Figuren waren genaue Definitionen geradezu überflüssig. Jedermann konnte auch so sehen, wo auf einer Zeichnung eine Linie und wo eine Fläche war.

Übrigens hatte auch Euklid offenbar Mängel in den Definitionen der Grundbegriffe erkannt.

Jedenfalls hat er in allen seinen Arbeiten nie wieder von ihnen Gebrauch gemacht, nachdem er sie am Anfang seines umfangreichen Werkes notiert hatte. Ja, er scheint sie vollkommen vergessen zu haben.

### 3.9 Sind strenge Definitionen notwendig ?

Durch zwei Jahrtausende stand die Autorität Euklids vollkommen unerschütterlich fest. Man verlor unwiderruflich und unverzüglich seinen mathematischen Ruf, wenn man es wagte, eine seiner Thesen anzuzweifeln.

Einer der größten Mathematiker des 19. Jahrhunderts, Carl Friedrich Gauß, konnte sich nicht entschließen, seine Ergebnisse über die sogenannte nichteuklidische Geometrie zu veröffentlichen, obwohl er schon vor Lobatschewski darauf gestoßen war. Er fürchtete, wie er einem

Freund in einem Brief schrieb, "das Geschrei der Böötier".<sup>4</sup>

So betrachtet muss man von einer wissenschaftlichen Heldentat sprechen, die der große russische Geometer Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski vollbrachte, als er seine Entdeckungen ungeachtet der Verachtung und des Spottes, die er sich von allen Seiten zuzog, veröffentlichte. Erst durch ihn wurde die nichteuklidische Geometrie zum Allgemeingut der Mathematiker. Nach dem Erscheinen der Arbeiten N. I. Lobatschewskis wurde klar, dass zwei Geometrien existieren, die logisch vollkommen einwandfrei und gleichberechtigt sind, aber zu sehr verschiedenen Sätzen führen. Wenn das aber so ist, verliert jeder Beweis seinen Wert, der sich auf geometrische Anschauung stützt. Jede geometrische Behauptung bedarf der Gründung auf einwandfreie Definitionen und der Herleitung mittels einwandfreier logischer Schlüsse.

Auch schon bei den grundlegenden geometrischen Begriffen, wie Punkt, Linie, Figur, Fläche und Körper, mussten genaue Definitionen gegeben werden. Definitionen der Art: "Dies ist eine Sache und jenes eine andere" können uns nicht befriedigen.

Das Streben nach exakten Definitionen charakterisiert nicht nur die Geometrie, sondern auch die Analysis des 19. Jahrhunderts. Unter Verwendung der Differential- und Integralrechnung, die in den Arbeiten von Newton, Leibniz, Euler, Lagrange und anderen großen Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts entwickelt worden war, gelang die Lösung sehr verschiedenartiger Aufgaben, angefangen von der Berechnung der Flugbahnen von Artilleriegeschossen bis zur Vorhersage des Auftauchens von Kometen oder Planeten.

Aber die Grundlagen, die Grundbegriffe, mit deren Hilfe diese bemerkenswerten Ergebnisse erzielt worden sind, waren ausgesprochen ungenau definiert.

Die Grundlage der damaligen mathematischen Analysis - der Begriff der unendlich kleinen Größe, war irgend etwas auf der Grenze zwischen Sein und Nichtsein, etwas in der Art der Null, aber nicht wirklich die Null. Die Mathematiker des 18. Jahrhunderts waren gezwungen, ihren zweifelnden Schülern aufmunternd zuzurufen: "Arbeiten Sie, und der Glaube wird Ihnen kommen!"

Da die Mathematik jedoch keine Religion ist, kann sie schließlich nicht auf dem Glauben begründet werden. Noch wichtiger war aber, dass die Methoden, die in den Händen der Meister die bemerkenswertesten Resultate hervorbrachten, Fehler und paradoxe Ergebnisse lieferten, als sie von den weniger talentierten Schülern voller Fleiß angewendet wurden.

Die Meister wurden durch ihre absolute mathematische Intuition vor Fehlern bewahrt, durch jenes instinktive Gefühl, das oft schneller zu richtigen Ergebnissen führt, als lange logische Schlüsse. Gerade diese Intuition hatten aber die Schüler nicht immer.

Ähnlich wie Kinder, die ein schönes Spiel unterbrechen, um endlich zu erfahren, nach welchen Regeln es eigentlich gespielt wird, unterzogen die Mathematiker des 19. Jahrhunderts alle bis dahin verwendeten Begriffe einer vernichtenden und reinigenden Kritik und begannen damit, die Mathematik auf die sichere Basis exakter Definitionen zu stellen.

Abgelehnt wurde jeder Hinweis auf die Anschauung.

Man verlangte statt dessen die Herleitung nach streng logischen Gesichtspunkten.<sup>5</sup>

Der Forderung strenger Logik genügten aber schon einfachste Voraussetzungen und Redeweisen

---

<sup>4</sup>Böötier heißen die Angehörigen eines Volksstammes im alten Griechenland, die nach der Überlieferung darauf bedacht waren, geistige Begabung nur äußerst sparsam anzuwenden.

<sup>5</sup>Man muss an dieser Stelle bemerken, dass sie dabei freilich das Kind oft genug mit dem Bade ausschütteten, so dass im 20. Jahrhundert viel verworfenes Gedankengut erst wieder Eingang in die Wissenschaft finden musste.

nicht, wie sie allenthalben in den traditionellen Kursen der Analysis vorkamen, z. B.:  
"Wir betrachten ein Gebiet  $G$ , welches durch eine geschlossene Linie berandet wird:"-

Was ist eine geschlossene Linie, warum kann sie Grenze eines Gebietes sein? In wieviele Teile zerlegt eine geschlossene Linie die Ebene, und welches dieser Teile soll als Gebiet  $G$  genommen werden?

Auf solche und ähnliche Fragen gaben die Mathematiker des 18. Jahrhunderts keine eindeutige Antwort, sondern begnügten sich mit dem Verweis auf die Anschauung. Sie zeichneten einfach ein Oval und dachten, dass damit alles gesagt sei. Im 19. Jahrhundert genügte eine solche Zeichnung auf gar keinen Fall, und die Beantwortung der Frage nach dem Wesen einer Linie wurde zu einem der brennendsten Probleme. Es vergingen indessen viele Jahre, bevor eine befriedigende Antwort gegeben werden konnte.

Die Linie als Bahnkurve eines bewegten Punktes Um eine strenge Definition des Begriffs der Linie zu erarbeiten, muss man von denjenigen anschaulichen Dingen ausgehen, die zur Herausbildung dieses mathematischen Begriffes die Veranlassung gegeben hatten: lange und dünne Fäden, Lichtstrahlen, Wege und Straßen.

Gemeinsames Merkmal all dieser Dinge ist die gegenüber der Länge äußerst geringe Breite, die es nahelegt, dass man sie gegenüber der Länge vernachlässigt. Im Ergebnis der Abstraktion gelangt man schließlich zur idealisierten Linie ohne Breitenausdehnung.

Der erste Versuch einer strengen Definition wurde von dem französischen Mathematiker Camille Jordan unternommen. Er ging davon aus, dass die Bahnen der Bewegung kleiner Körper als lange und schmale Röhrchen anzusehen sind. Bei Verkleinerung der Abmessungen des bewegten Körpers wird das Röhrchen zunehmend enger, um im Grenzfall eines bewegten Punktes zu einer Linie ohne Breite zu werden. Dieser Gedanke wurde von Jordan zur Definition der Kurve verwendet.

Er nannte nämlich die Bahnen bewegter Punkte Linien oder Kurven. Dabei wurde vorausgesetzt, dass sich der Punkt stetig bewegte und keine Sprünge vollführte.

Genauer bedeutet dies das Folgende:

Um die Lage eines sich bewegenden Punktes angeben zu können, muss man in jedem Moment der Bewegung seine Koordinaten kennen. Weil die Bewegung innerhalb eines durch Beginn und Ende begrenzten Zeitabschnittes erfolgt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Überlegungen das Zeitintervall  $[0,1]$  zugrundelegen.

Mit anderen Worten soll der Punkt seine Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt, den wir zum Nullpunkt unserer Zeitskala wählen, beginnen und nach einer Zeiteinheit (etwa nach einer Sekunde, einer Minute, einer Stunde, einem Tag, einem Jahr ...) beenden.

Die Koordinaten des Punktes seien zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Bewegung gegeben, das heißt, die Koordinaten seien Funktionen der Zeit, die wir (im Falle einer ebenen Bewegung) mit  $f(t)$  und  $g(t)$  bezeichnen wollen.

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Die Voraussetzung der Stetigkeit der Bewegung des Punktes bedeutet, dass die beiden betrachteten Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsintervalls stetig sind. Grob gesprochen bedeutet das, dass bei kleinen Änderungen von  $t$  die Werte der Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  ebenfalls nur kleine Änderungen erfahren. Genauer gilt:

Es sei  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  eine sich dem beliebigen festen Wert nähernde Folge ( $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ ), dann



gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(t) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = g(t)$$

Die Definition Jordans erwies sich zunächst als ziemlich fruchtbar. Alle Linien, mit denen man es bis dahin zu tun hatte, erwiesen sich als Jordankurven, wie man die so definierten Kurven nennt.

Als Beispiel nehmen wir die Kreislinie vom Radius 1. Die Länge dieser Linie ist gleich  $2\pi$ . Deshalb muss ein Punkt, der den Kreis in der Zeiteinheit einmal umlaufen soll, sich mit der Geschwindigkeit  $2\pi$  bewegen. In der Zeit  $t$  wird er dann den Bogen  $2\pi t$  zurückgelegt haben. Aus der Zeichnung von Abb. 60 kann man ablesen, dass seine Koordinaten im Zeitpunkt  $t$  durch die Formeln

$$x = \cos 2\pi t \quad , \quad y = \sin 2\pi t$$

gegeben werden.

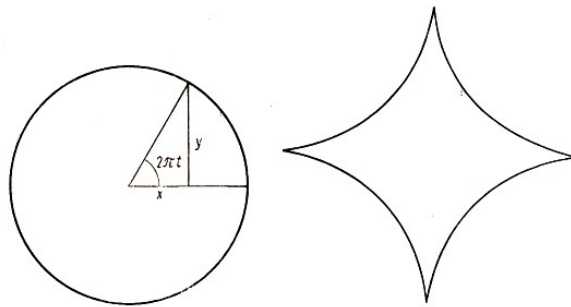


Abb. 60,61

Diese Darstellung heißt Parameterdarstellung des Kreises. Für die in Abb. 61 dargestellte Linie, die sogenannte Astroide, gilt die folgende Parameterdarstellung:

$$x = \cos^3 2\pi t \quad , \quad y = \sin^3 2\pi t$$

Auch eine aus verschiedenen Kurvenstücken zusammengesetzte Linie kann eine Jordankurve sein. Betrachten wir als Beispiel die Kontur des Halbkreises, die aus dem Halbkreisbogen vom Radius 1 und einem Durchmesser gebildet ist (Abb. 62).

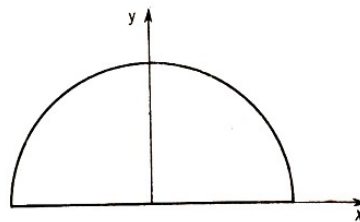


Abb. 62

Während der einen Hälfte der Zeit durchläuft der bewegte Punkt den Halbkreis, um sich in der anderen Hälfte der Zeit längs des Durchmessers zu bewegen. Die Ausdrücke für die Koordinaten längs der Kreislinie kennen wir bereits.

Während der Bewegung entlang dem Durchmesser bleibt  $y$  gleich null und  $x$  ändert sich stetig von  $-1$  bis  $+1$ . Insgesamt ergibt sich die folgende Parameterdarstellung der Kontur:

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 4t - 3 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad , \quad y = \begin{cases} \sin 2\pi t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(Anmerkung: Die Parameterdarstellung einer Jordankurve ist niemals eindeutig bestimmt. Es gibt im Gegenteil stets unendlich viele wesentlich verschiedene Darstellungen. Wir werden darauf noch zu sprechen kommen.)

### 3.10 Der Satz liegt auf der Hand - aber nicht sein Beweis!

Mit der Einführung seines Kurvenbegriffes gelang es Jordan, eben jene von uns schon zitierte Aussage aus den Büchern der Analysis: "Eine geschlossene Linie  $\Gamma$  möge das Gebiet  $G$  begrenzen" zu präzisieren und mit einem eindeutigen Sinn zu versehen.

Eine geschlossene Jordankurve ist eine solche, die einen Punkt enthält, der sowohl zum Zeitpunkt  $t = 1$  als auch zum Punkt  $t = 0$  gehört. Wenn dabei verschiedenen Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$ , die zwischen 0 und 1 liegen, stets verschiedene Kurvenpunkte entsprechen, so schneidet sich die Linie nicht selbst, es gibt keine sogenannten Doppelpunkte.

C. Jordan hat nun den folgenden Satz bewiesen.

Jede geschlossene ebene Jordankurve ohne Doppelpunkte zerlegt die Ebene in genau zwei Teile. Zwei Punkte, die im gleichen Teil der Ebene liegen, lassen sich immer durch einen die gegebene Kurve  $\Gamma$  nicht schneidenden Polygonzug verbinden. Liegt von zwei Punkten je einer in jedem Teilgebiet der Ebene, dann schneidet jeder sie verbindende ebene Polygonzug die Kurve (Abb. 63).

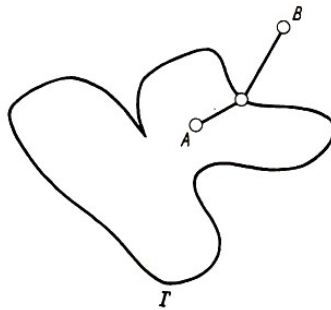


Abb. 63

Dieser Satz scheint vollkommen offenbar zu sein! Der Beweis verlangt jedoch sehr komplizierte Überlegungen und gestaltet sich schon im Falle eines geschlossenen Polygonzuges als Kurve  $\Gamma$  sehr schwierig.

Versuchen wir nur einmal, sofort zu sagen, ob man die beiden Punkte  $A$  und  $B$  der Abb. 64 durch ein Polygon verbinden kann, ohne die Jordankurve  $\Gamma$  zu schneiden.

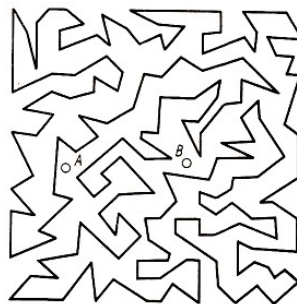


Abb. 64

Die zwei Teile, in die eine geschlossene Jordankurve die Ebene zerlegt, werden als Außen- und Innengebiet bezeichnet. Beide Gebiete werden durch  $\Gamma$  begrenzt.

Damit hat jetzt der Begriff des durch eine geschlossene Linie berandeten Gebietes einen eindeutigen und von der Anschauung unabhängigen Sinn erhalten.

### 3.11 Eine Kurve, die durch alle Punkte eines Quadrates geht

Als Jordan seine Definition einer Kurve gegeben hatte, schien es anfangs so, als sei das Ziel erreicht, als habe man endlich eine strenge Definition dessen, was man seit jeher unter einer Kurve verstanden hatte, ohne auf die Anschauung zurückgreifen zu müssen.

Sehr bald jedoch zeigte es sich, dass diese Hoffnung nicht erfüllt wurde. Die Definition Jordans erfasst nicht nur geometrische Gebilde, die von den Mathematikern als Kurven bezeichnet wurden, sondern auch Figuren, die man bisher niemals als solche angesprochen hätte.

Wenn es sich dabei um die überall stacheligen Linien gehandelt hätte, so hätten sich die Mathematiker mit der Zeit vielleicht noch damit abgefunden.

Aber ein Quadrat als Kurve zu bezeichnen, das wäre keinem von ihnen jemals eingefallen! Und doch zeigte es sich, dass sowohl das Quadrat als auch ein Dreieck oder eine Kreisfläche im Sinne der Jordanschen Definition Kurven sind. Bewiesen hat das dann der italienische Mathematiker Peano.

Wir hatten bereits erzählt, dass Cantor eine eindeutige Abbildung der Punkte einer Strecke auf die Punkte eines Quadrates gefunden hatte, was bedeutete, dass die "Anzahl" der Punkte einer Strecke gleich der der Punkte eines Quadrates ist. Jedoch war diese Abbildung nicht stetig.

Wenn der Punkt das Intervall durchläuft, dann kriecht der Bildpunkt nicht wie ein Käfer durch das Quadrat, sondern springt wie ein Floh darin umher. Wir brauchen uns nur die beiden Punkte  $0,50000 \dots$  und  $0,4999999000\dots$  des Intervalls ansehen, die doch recht nahe beieinanderliegen.

Im Quadrat entsprechen ihnen zwei Punkte, die extrem weit voneinander entfernt liegen. Nach der Konstruktion entspricht dem ersten Punkt des Intervalls der Punkt  $P_1 (0,5000\dots; 0,000\dots)$ , der auf der Basis des Quadrates liegt, während dem zweiten Intervallpunkt der Punkt  $P_2 (0,499900\dots; 0,999900\dots)$  im Quadrat entspricht, der sich in unmittelbarer Nachbarschaft der oberen Quadratseite befindet.

Auch wenn wir die Anzahl der Ziffern 9 in der zweiten Zahl vergrößern und sie sich damit der ersten Zahl mehr und mehr nähert, wird ihr Bildpunkt  $P_2$  sich dem Bildpunkt  $P_1$  nicht nähern.

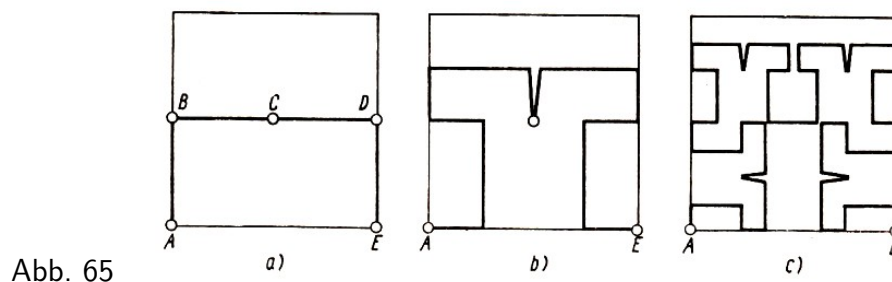
So haben wir am Beispiel gesehen, dass die Abbildung Cantors nicht stetig ist und dass dadurch das Quadrat noch nicht als Jordankurve definiert wird.

Erst Peano gelang die Konstruktion einer stetigen Abbildung der Strecke auf das Quadrat, d.h. die Konstruktion einer Jordankurve, die durch alle Punkte des Quadrates hindurchgeht!

Es ist wohl leicht einzusehen, dass wir die Peanosche Kurve nicht zeichnen können, es sei denn, wir würden wie ein Vertreter der abstrakten Malerei ein schwarzes Quadrat zeichnen.

Da aber in diesem Quadrat alles gleich aussehen würde, wüsste niemand, wo Anfang und Ende der Kurve ist und wie sie sich durch das Quadrat schlängelt.

Wir werden uns aus diesem Grunde in dem nun folgenden Beispiel nicht einen abstrakten Künstler, sondern den Physiker Perrin zum Vorbild nehmen und die in regelmäßigen Abständen fixierten Stellen, an denen sich der Punkt gerade befindet, durch gerade Linien verbinden. Je kleiner die Zeitabschnitte werden, um so genauer wird der sich ergebende Polygonzug der Peano-Kurve entsprechen.



Am Anfang bestimmen wir den Standort des bewegten Punktes in Abständen von je  $\frac{1}{4}$  Sekunde.

Wir markieren die Stellen der Bahn, an denen sich der Punkt zu Beginn der Messung, nach  $\frac{1}{4}$  s, nach  $\frac{1}{2}$  s,  $\frac{3}{4}$  s und nach 1 s befindet. Verbinden wir diese Punkte durch Strecken, dann haben wir die Linie  $ABCDE$ , die in Abb. 65a dargestellt ist.

Es versteht sich natürlich von selbst, dass diese Linie niemals durch alle Punkte des Quadrates hindurchgeht. Wir verkürzen nun die Abstände zwischen den einzelnen Beobachtungen auf  $\frac{1}{6}$  s. Die Linie erscheint schon gewundener, die Zahl der Ecken erhöht sich, und sie nimmt die in Abb. 65b angedeutete Form an.

Bei weiterer Verkürzung des Zeitintervalls erhöht sich die Zahl der Knicke im Linienzug, wir bekommen die Kurve von Abb. 65c.

Es ist wohl zu sehen, dass die Kurve das Quadrat mehr und mehr ausfüllt, sich jedem Punkt desselben zunehmend nähert. Wenn wir den gesamten Weg des bewegten Punktes verfolgen, die Zeitabstände der Ortsmessung beliebig klein machen, bekommen wir schließlich eine Kurve, die durch sämtliche Punkte des Quadrates geht, ohne auch nur einen auszulassen.

Wir müssen unbedingt darauf aufmerksam machen, dass die Abbildung, welche der Peanokurve zugrunde liegt, eine andere Unvollkommenheit als die Cantorsche Abbildung der Strecke auf das Quadrat aufweist. Während diese eineindeutig, aber nicht stetig war, ist jene zwar stetig, aber nicht eineindeutig. Was heißt das? Die Peanokurve läuft durch gewisse Punkte mehr als einmal hindurch!

Es ist später sogar bewiesen worden, dass es unmöglich ist, eine stetige und gleichzeitig eineindeutige Abbildung der betrachteten Art zu konstruieren. Es gibt also keine Jordankurve, die durch jeden Punkt eines Quadrates genau einmal hindurchgeht!

### 3.12 Alles lag in Trümmern

Den Eindruck, den das Ergebnis Peanos auf die Mathematiker machte, kann man nur schwer mit Worten beschreiben.

Es schien, als würde alles zusammenstürzen, als hätten alle bisherigen grundlegenden mathematischen Definitionen ihren Sinn verloren. Es gab keinen Unterschied mehr zwischen Linien und Flächen, zwischen Flächen und Körpern. (Die eben dargestellte Erkenntnis von der Unmöglichkeit einer gleichzeitig stetigen und eineindeutigen Abbildung der Strecke auf das Quadrat war noch nicht bekannt!)

Der bedeutende französische Mathematiker Henry Poincaré rief voller Bitterkeit aus:

"Wie kann uns die Intuition in einem solchen Maße im Stich lassen!"

So hatte sich also herausgestellt, dass Jordans Kurvendefinition nicht ohne Mängel war. Einerseits ist sie zu weit, denn sie erfasst auch die Peanokurve; auf der anderen Seite jedoch ist sie auch wieder zu eng, da nicht alle Gebilde, die wir intuitiv sofort als Kurven ansprechen würden, nach dieser Definition als solche gelten.

So ist beispielsweise die in Abb. 54 wiedergegebene Kurve keine Jordankurve.

Man deckte auch noch einen anderen, etwas versteckter liegenden Mangel der Jordanschen Definition auf. Sie enthielt nicht nur eine Aussage über die Kurve, sondern auch über die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes und die Richtung seiner Bewegung.

Wir betrachten zum Beispiel einen Läufer, der die erste Hälfte einer Runde in  $\frac{1}{4}$  min durchläuft, während er, schon etwas ermüdet, für die zweite Hälfte  $\frac{3}{4}$  min braucht. Es ist klar, dass wir in diesem Fall eine ganz andere Parameterdarstellung erhalten.

Die Menge der Bewegungsmöglichkeiten eines Punktes entlang einer Kreislinie ist aber überabzählbar! Also gibt es für ein und denselben Kreis eine ebenfalls überabzählbare Menge von Parameterdarstellungen. Und es ist gar nicht so einfach, darauf zu kommen, dass die Gleichungen

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

genau denselben Kreis beschreiben wie die früher angegebenen Formeln

$$x = \cos 2\pi t, \quad y = \sin 2\pi t$$

Bei etwas komplizierteren Kurven wird die Sache noch verwickelter.

Als Beispiel wollen wir uns einmal die Lemniskate oder "Achterschleife" ansehen. Diese Kurve kann man so umlaufen, wie es Abb. 66a zeigt, aber auch in der Art von Abb. 66b.

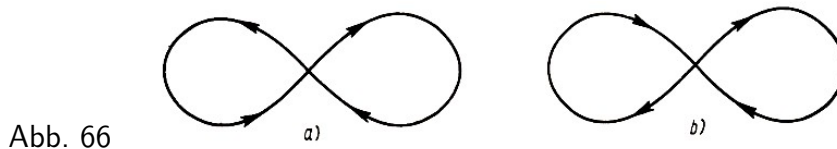


Abb. 66

Betrachtet man dann die zugehörigen Parameterdarstellungen, so ist ziemlich schwer herauszubekommen, dass es sich in Wahrheit um die gleiche geometrische Figur handelt.

Also stand man wieder einmal vor der Frage, was eine Kurve wohl nun tatsächlich von einer Fläche unterscheidet. Die Antwort darauf hängt mit den allgemeinen Ergebnissen Cantors über geometrische Figuren zusammen.

### 3.13 Wie man eine Statue formt

Nachdem Cantor die Theorie der Mengen entwickelt hatte, wandte er sich der Frage zu, was man unter dem Begriff der geometrischen Figur zu verstehen habe. Die allgemeinste Antwort auf diese Frage ist zweifellos die folgende:

Eine geometrische Figur ist eine beliebige Punktmenge des betrachteten geometrischen Raumes. Liegt sie in einer Ebene, dann sprechen wir von einer ebenen Figur.

Eine solche Antwort wäre viel zu allgemein; eine Figur in diesem Sinne hätte nicht eine hinreichend interessante Eigenschaft.

Es ging also beim Studium des Problems in erster Linie darum, die Gesamtheit der betrachteten Punktmenge so einzuschränken, dass sie nur noch solche Mengen umfasste, deren Eigenschaften hinreichend genau denen der gewöhnlichen geometrischen Figuren entsprechen. Um diese Klasse der Figuren herauszukristallisieren, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, welches die charakteristischen Eigenschaften der bekannten Figuren Quadrat, Kreis, Strecke, Astroide u.a. sind.

Es zeigt sich, dass alle diese Figuren durch einen einheitlichen Prozess gewonnen werden können.

Man erzählt sich, dass der berühmte Bildhauer Rodin auf die Frage, wie es ihm möglich sei, seine wundervollen Statuen zu schaffen, geantwortet habe: "Ich nehme einen hinreichend großen Marmorbrocken und schlage alle überflüssigen Stücke ab."

Nach dieser Methode kann man tatsächlich eine beliebig begrenzte, ebene geometrische Figur

erzeugen. Man braucht nur ein hinreichend großes Quadrat zu nehmen, welches die entsprechende Figur umfasst, und dann alles Überflüssige abzuschneiden.

Es versteht sich, dass man nicht alles auf einmal abschneiden muss, sondern nach und nach Stückchen in Form von Kreisen abtrennen kann.

Dabei soll der Kreis selbst entfernt werden, während seine Grenze, die Kreislinie, bei der Figur verbleibt. Auf den ersten Blick scheint es, als könne man damit nur Figuren der in Abb. 67 dargestellten Art erzeugen.

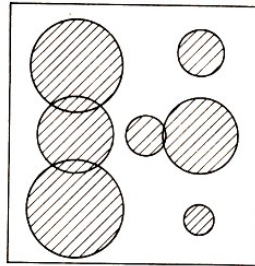


Abb. 67

Der scheinbare Widerspruch klärt sich aber ganz einfach auf, weil wir im allgemeinen nicht einen oder zwei, sondern eine abzählbare Menge von Kreisen entfernen. Mittels einer solchen abzählbaren Menge können wir tatsächlich jede geometrische Figur (im anschaulichen Sinne) erhalten.

Wir betrachten dazu die Menge aller Kreise, deren Mittelpunkte rationale Koordinaten haben und deren Radien ebenfalls rationale Zahlen sind. Aus dem schon bewiesenen Satz folgt, dass diese Menge abzählbar ist.

Jetzt entfernen wir aus der Ebene alle die Kreise unserer Menge, die in ihrem Inneren nicht einen Punkt der betrachteten Figur enthalten. Offenbar bleibt dann allein die betrachtete Figur mit ihrem Rand übrig, die Menge der abgetrennten Kreise ist aber als Teilmenge einer abzählbaren Menge ebenfalls höchstens abzählbar, eventuell sogar endlich.

Übrigens kommt es gar nicht darauf an, dass wir Kreise benutzt haben. Ebenso gut könnten wir Quadrate, Rechtecke, Ellipsen oder andere elementare Figuren verwenden, wenn wir nur immer sichern, dass das Innere jeweils entfernt wird, während die Berandung bei der Figur verbleibt.

### 3.14 Kontinua

Es zeigt sich, dass man mit der Methode der Entfernung einer abzählbaren Menge von Kreisen (Quadraten oder ähnlichen elementaren Figuren) neben den gewöhnlichen geometrischen Figuren auch andere Punktfolgen bekommt, die solchen Figuren recht unähnlich sind.

Einige interessante Eigenschaften sind jedoch allen diesen Punktfolgen gemeinsam.

So ist etwa der Teppich von Sierpinski, von dem wir schon ausführlich gesprochen haben, genau auf diese Weise entstanden:

Aus einem Quadrat der Seitenlänge eins wurden nacheinander kleine Quadrate entfernt, wobei ihre Ränder mit zurückblieben.

Indessen kann man auf diesem Wege auch "Figuren" bekommen, die nicht zusammenhängend sind, das heißt nicht aus einem Stück bestehen.

Entfernt man aus dem Quadrat zum Beispiel statt der Quadrate in jedem Schritt nach dem

Muster von Abb. 68 ganze Kreuze, dann ergibt sich zuguterletzt eine Menge, die nicht ein "heiles" Stück enthält (man nennt eine solche Menge total unzusammenhängend).

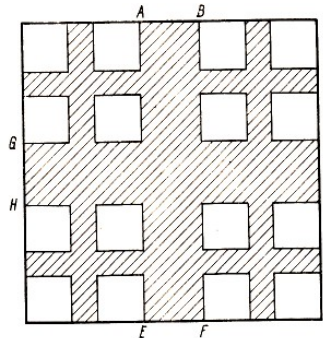


Abb. 68

Deshalb führen wir jetzt eine Beschränkung ein und verlangen, dass das Ergebnis jeder Abtrennung einer Elementarfigur immer wieder eine Menge sein soll, die zusammenhängend ist. Dann sind wir sicher, dass auch das Ergebnis des ganzen Prozesses schließlich eine Menge ist, die aus einem Stück besteht (man nennt solche Mengen zusammenhängend).

Außerdem ist eine so konstruierte Punktmenge stets beschränkt, d.h., sie liegt völlig im Inneren eines gewissen Quadrates.

Nach allem bisher Gesagten erfüllen die von uns betrachteten Punktfolgen die folgenden Bedingungen:

1. Die Menge  $F$  erhält man aus einem Quadrat durch die Abtrennung einer abzählbaren Menge von Kreisen (Quadraten u.a.) ohne Rand.
2. Die Menge  $F$  besteht aus einem Stück, sie ist zusammenhängend.

Mengen  $F$  mit diesen beiden Eigenschaften nannte Cantor Kontinua (wir erinnern daran, dass das lateinische Wort continuum etwa dasselbe bedeutet wie das Ununterbrochene, Stetige).

Diese Kontinua sind es, die mit ihren Eigenschaften denen der bekannten geometrischen Figuren am nächsten kommen und doch noch wesentlich mehr Punktfolgen umfassen.

### 3.15 Cantorsche Linien

Jetzt sind wir auch in der Lage, eine neue Antwort auf die Frage nach der Natur einer ebenen Kurve zu geben. Weil ebene Kurven als geometrische Figuren anzusehen sind, muss man sie naturgemäß unter den Kontinua suchen. Eine Kreisfläche oder ein Quadrat sind auch Kontinua, man wird sie aber nicht als Kurven ansehen wollen. Es muss also wohl eine Eigenschaft geben, die den Unterschied ausmacht.

Wir bemerken, dass sowohl der Kreis als auch ein Quadrat zusammenhängende Stücke der Ebene enthalten. Es gibt also zu jedem Punkt, der z.B. im Inneren eines Quadrates liegt, immer einen kleinen Kreis (oder ein kleines Quadrat ...), der (das) ganz der betrachteten Figur angehört und den ins Auge gefassten Punkt auch enthält.

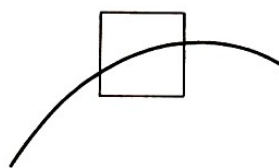
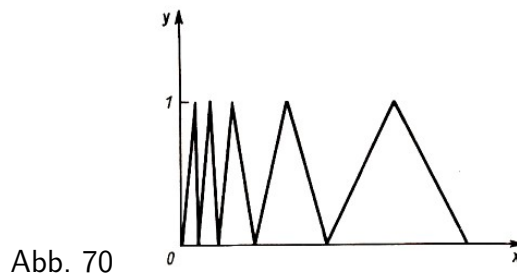


Abb. 69

Eine Kurve enthält dagegen solche ganzen Teile der Ebene nicht. So klein wir auch ein Quadrat wählen, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Kurvenpunkt ist, so wird es immer noch Punkte in ihm geben, die nicht zur Kurve gehören (Abb. 69).

Damit haben wir aber die gesuchte entscheidende Eigenschaft einer Linie gefunden: Eine ebene Kurve im Sinne von Cantor ist ein ebenes Kontinuum, das zu keinem seiner Punkte eine noch so kleine Elementarumgebung (Kreis, Quadrat ...) ganz enthält.

Eine Strecke, die Kontur eines Dreiecks, die Kreislinie u.a. sind demnach Beispiele für Kurven. Es erweist sich aber auch der Sierpinski-Teppich als Cantorsche Kurve. Bei seiner Konstruktion wurde aus jedem beliebigen Quadrat, das sich bei der fortgesetzten Teilung ergab, der mittlere Teil entfernt, so dass das entstandene Kontinuum nicht ein einziges Quadrat vollkommen enthält, was ja eben das Charakteristikum einer Kurve ist.



Auch die Kreislinie mit Spirale von Abb. 54 oder die in Abb. 70 dargestellte Zick-Zack-Linie mitsamt der Strecke  $[0,1]$  der Ordinatenachse sind solche Cantorsche Kurven. Ganz allgemein kann man sagen, dass alle Linien, die man nach der Anschauung als solche ansehen würde, tatsächlich in diese Klasse von Kontinua fallen.

Dagegen sind Figuren, die auch nur ein einziges, winziges Quadrat ganz enthalten, niemals Kurven im Cantorschen Sinn.

Aber auch unter den Cantorschen Kurven gibt es wieder solche, deren Eigenschaften denen gewöhnlicher Kurven ganz und gar nicht ähnlich sind. Wir wollen jetzt von einigen berichten. Ist der Flächeninhalt einer Kurve stets Null?

Ich nehme an, dass mein geschätzter Leser, nachdem er eine Kurve kennengelernt hat, die durch sämtliche Punkte eines Quadrates hindurchgeht, so ziemlich alles für möglich halten wird. Sollte es wohl sogar möglich sein, dass eine Kurve einen positiven Flächeninhalt hat?

Schon Euklid hatte doch gesagt, dass eine Linie "Länge ohne Breite" sei. Kann es aber dort, wo eine Figur keine Breite besitzt, einen Flächeninhalt geben?

In der Cantorschen Definition heißt es doch ausdrücklich, dass eine Kurve nicht ein einziges flächenhaftes Teilstück der Ebene enthält. Woher sollte dann in solch einem Falle der Flächeninhalt plötzlich kommen? Seien wir aber ja nicht voreilig mit einer entschiedenen Verneinung!

Bevor wir diese Frage untersuchen, müssen wir uns über den exakten Sinn der Worte klar werden. Was bedeutet die Aussage, dass eine Linie den Flächeninhalt Null hat? Was heißt es, wenn wir sagen, dass eine Kurve einen positiven Flächeninhalt hat?

Wir betrachten die einfachste Linie, die gerade Strecke. Jede Strecke kann man in eine Folge ineinandergeschachtelter Rechtecke legen, deren Flächeninhalt gegen Null konvergiert, weil eine Strecke keine Breitenausdehnung hat. (Man wähle Rechtecke, deren eine Seite parallel zur Strecke verläuft und deren Länge hat.)

Auch eine Kreislinie kann man in ein Vieleck mit beliebig kleinem Flächeninhalt legen. Man



braucht dem Kreis nur ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit hinreichend großer Eckenzahl einzubeschreiben und ein entsprechendes umbeschriebenes  $n$ -Eck zu konstruieren. Das zwischen diesen beiden Polygonen liegende Vieleck enthält die Kreislinie im Inneren und hat einen Flächeninhalt, der mit wachsendem  $n$  gegen Null geht: (Abb. 71).

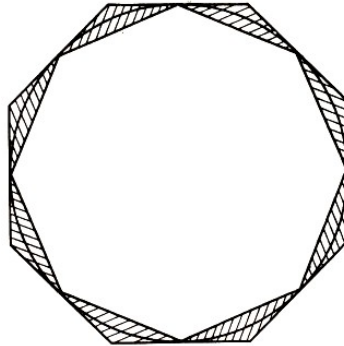


Abb. 71

Damit kommen wir durch Verallgemeinerung auf eine sinnvolle Definition:

Eine Kurve hat den Flächeninhalt null, wenn folgendes gilt: Wie klein wir auch eine positive Zahl  $\varepsilon$  wählen, es gibt immer ein polygonal berandetes Gebiet, das die Kurve enthält und einen Flächeninhalt im elementargeometrischen Sinn hat, der kleiner als  $\varepsilon$  ist.

Ist aber für irgend ein positives  $\varepsilon$  eine solche Einschließung unmöglich, dann existiert ein positiver Flächeninhalt der Figur.

Um diese Definition noch klarer zu machen, wenden wir sie nicht nur auf solche einfache Linien wie den Kreis oder die Strecke an, sondern auch auf kompliziertere. Eine solche Linie ist sicher der Teppich von Sierpinski. Ist sein Flächeninhalt gleich null oder nicht?

Wir setzen zunächst voraus, dass der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates gleich 1 ist. Im ersten Schritt vermindern wir den Flächeninhalt um  $\frac{1}{9}$ . Im zweiten Schritt entfernen wir insgesamt 8 Quadrate, von denen jedes den Inhalt  $\frac{1}{81}$  hat. Es bleibt dann ein polygonales Gebiet mit dem Gesamtinhalt

$$\frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

zurück. Nach dem nächsten Schritt beträgt der Flächeninhalt des Gebietes, das den Teppich als Kurve sicher noch im Inneren enthält  $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ; nach dem vierten Schritt  $\left(\frac{8}{9}\right)^4$  usw., wie man sich leicht überlegt. Wenn wir aber einen beliebigen echten Bruch hernehmen und mit wachsenden Exponenten potenzieren, dann wird der Wert immer kleiner. In Formeln heißt das:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad \text{falls } 0 < q < 1$$

Insbesondere ist somit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Nach unserer Definition bedeutet das aber gerade, dass der Teppich von Sierpinski den Flächeninhalt null hat, denn nach der Limes-Definition gibt es zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine natürliche Zahl  $n_0$ , so dass die Glieder der Folge  $\left(\frac{8}{9}\right)^n$  für  $n \neq n_0$  alle kleiner als  $\varepsilon$  sind. Es gibt also polygonale Gebiete, die unsere Kurve im Inneren enthalten und deren Flächeninhalt kleiner als  $\varepsilon$  ist.

Es könnte scheinen, als handle es sich hier um einen späten Triumph Euklids und seiner Kurvendefinition - traf sie doch auf eine so komplizierte Kurve wie den Sierpinski-Teppich zu! Länge ohne Breite - Flächeninhalt null!

Aber die Freude währte nicht lange.

Niemand zwingt uns doch dazu, bei der Konstruktion des Teppichs, so große Stücke herauszulösen. Handeln wir ökonomischer und zerlegen das Quadrat in 25, statt in 9 Teile und entfernen den mittleren Teil!

Im nächsten Schritt werden wir nicht, wie der Leser sicher zunächst erwarten wird, jedes der verbleibenden Teilquadrate in 25 Teile zerlegen und wie vorher verfahren, weil das nicht ökonomisch genug wäre. Statt dessen verlängern wir die Seiten des mittleren Quadrates bis zum Schnitt mit den äußeren Quadratseiten.

Damit zerschneiden wir die Restfläche in 4 gleichgroße Quadrate (an den Ecken) und 4 ebenfalls gleichgroße Rechtecke. Dann legen wir durch jedes Quadrat und jedes Rechteck Kreuze mit einer Balkenbreite von  $\frac{1}{25}$  und entfernen nun deren mittleren Teil aus der Figur.

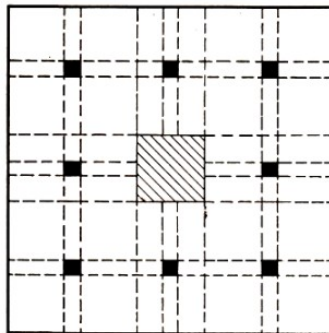


Abb. 72

Der Flächeninhalt jedes dieser kleinen Quadrate ist  $\frac{1}{625}$  die gesamte im zweiten Schritt entfernte Fläche beträgt somit  $\frac{8}{625}$ . Im dritten Schritt, der analog aufgebaut ist, würden wir 64 Quadrate mit einer Gesamtfläche von  $\frac{64}{25^3} = \frac{64}{15625}$  wegnehmen usw.

Die nacheinander entfernten Beträge bilden also in diesem Falle eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{25} + \frac{8}{625} + \frac{64}{15625} + \dots$$

mit dem Quotienten  $q = \frac{8}{25}$ . Die Summe beträgt nach der schon mehrmals verwendeten Formel

$$s = \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{8}{25}} = \frac{1}{17}$$

Was bedeutet das aber?

Das heißt, dass der Flächeninhalt der Restfigur nach beliebig vielen Schritten niemals kleiner als  $\frac{16}{17}$  werden kann.

Es gibt also kein polygonales Gebiet, dessen Flächeninhalt kleiner, als  $\frac{16}{17}$  ist und unsere Figur überdeckt. Es zeigt sich jedoch, dass auch diese Figur eine Cantorsche Kurve ist, da wir ähnlich wie beim Sierpinski-Teppich im Verlauf der Konstruktion jedes Rechteck durchlöchern haben, so dass kein einziges Rechteck völlig zur Figur gehört.

Hieraus folgt also offensichtlich, dass eine Cantorsche Kurve einen positiven Flächeninhalt haben kann!

### 3.16 Gebiete ohne Flächeninhalt

Das ganze soeben betrachtete Beispiel vermag vielleicht noch nicht so recht zu überzeugen, besteht doch die ganze Kurve aus Doppelpunkten und begrenzt kein Gebiet. Es ergibt sich

sofort die Frage, ob es etwa möglich ist, dass auch eine "gutartige" Kurve ohne Doppelpunkte, das heißt eine geschlossene Jordankurve, die ein Gebiet berandet, einen positiven Flächeninhalt haben kann.

Und es wird sich zeigen: Sie kann!

Um eine solche Kurve zu konstruieren, verändern wir die eben durchgeführte Konstruktion ein wenig. Zu Beginn konstruieren wir eine Menge, die weder Flächenstücke, noch Stücke von Linien enthält, deren Flächeninhalt aber dennoch von null verschieden ist.

Zu dem Zweck entfernen wir in jedem Schritt nicht nur die zentralen Quadrate, sondern jeweils das ganze Kreuz, so wie es Abb. 73 zeigt.

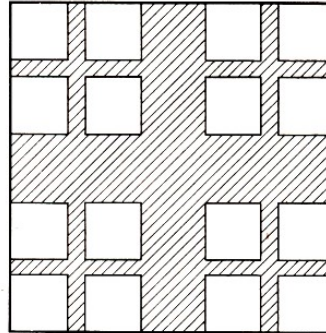


Abb. 73

Dabei wählen wir die Größe der Kreuze so, dass der Flächeninhalt des im ersten Schritt entfernten Kreuzes gleich  $\frac{8}{25}$ , die Summe der im zweiten Schritt herausgenommenen Flächenstücke gleich  $\frac{64}{625} = \left(\frac{8}{25}\right)^2$  der im dritten Schritt herausgelösten gleich  $\left(\frac{8}{25}\right)^3$  ist usw. Dann ist die Summe der Flächeninhalte aller herausgenommenen Kreuze gleich

$$\left(\frac{8}{25}\right) + \left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^3 + \dots = \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{25}} = \frac{8}{17}$$

Das aber ist weniger als die Hälfte der Fläche des ganzen Quadrates. Folglich entfällt auf die Punktmenge, die wir konstruiert haben, noch ein Flächeninhalt von  $\frac{9}{17}$  der Fläche des Quadrates.

Aber bei der Konstruktion der Menge haben wir aus jedem Quadrat ein ganzes Kreuz herausgenommen. Keine zwei Punkte dieser Menge sind durch eine Linie zu verbinden, nicht einmal durch eine Kurve im Cantorschen Sinn; jeder Zusammenhang zwischen ihren Punkten fehlt. Die Mathematiker sprechen von einer total unzusammenhängenden Menge.

Und doch ist der Flächeninhalt dieser Menge, die weder ein zusammenhängendes Stückchen einer Fläche, noch einen Abschnitt einer Kurve enthält, nicht gleich null; kein Vieleck mit einer Fläche, die kleiner als  $\frac{9}{17}$  ist, überdeckt die Menge vollständig.

Jetzt können wir auch leicht eine sich nicht selbst schneidende geschlossene Kurve angeben, die einen positiven Flächeninhalt hat.

Wir brauchen dazu nur alle Punkte der eben konstruierten Menge auf die gleiche Weise miteinander zu verbinden, wie wir das mit allen Punkten des Quadrates bei der Konstruktion der Peanokurve getan hatten.

Weil wir bei jedem Schritt ein ganzes Kreuz entfernt haben, geht diese Kurve durch keinen Punkt der Menge mehrmals. Dadurch unterscheidet sie sich wesentlich von der Peanokurve. Weil sie aber andererseits durch alle Punkte der Menge hindurchläuft, deren Fläche wenigstens gleich  $\frac{9}{17}$  ist, so hat auch die Kurve (da sie doch höchstens mehr Punkte enthalten kann)

mindestens diesen Flächeninhalt.

Jetzt kostet uns aber auch die Konstruktion eines Gebietes ohne Flächeninhalt keine Mühe mehr. Man braucht dazu nur die Punkte  $A$  und  $B$  der erhaltenen Kurve durch eine beliebige Jordankurve zu verbinden, sagen wir durch einen Halbkreis. Die damit gegebene geschlossene Jordankurve  $\Gamma$  begrenzt ein gewisses Gebiet  $G$ . Welchen Flächeninhalt hat  $G$ ?

Die Antwort hängt nun aber offenbar davon ab, ob man die Begrenzungskurve  $\Gamma$  zu  $G$  rechnet oder nicht, weil  $\Gamma$  selbst einen Flächeninhalt von mindestens  $\frac{9}{17}$  hat.

Offenbar hat unser Gebiet also keinen Flächeninhalt im gewöhnlichen Sinn. Solche Gebiete werden in der Mathematik als nichtquadrerbare oder nichtmessbare Gebiete bezeichnet.

### 3.17 Überraschende Beispiele

Wahrscheinlich waren die Mathematiker nach dem Auftauchen der Peanokurve davon überzeugt, dass sie damit bereits alle Ungeheuer aus dem Reich der ungewöhnlichen Funktionen und Kurven kennen würden. Sie wurden aber auch danach noch mehr als einmal von der geometrischen Intuition genarrt.

Wie sehr sich die Eigenschaften der Cantorschen Kurven von denen gewöhnlicher Linien unterscheiden, zeigt besonders deutlich die folgende Begebenheit aus der Geschichte der Mathematik.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts veröffentlichte der bekannte Mathematiker Schoenflies eine Reihe von Arbeiten über die verschiedenen Eigenschaften von Kurven, Gebietsgrenzen usw. Er stützte sich dabei häufig auf die geometrische Evidenz. Bald darauf (1910) erschien eine kurze Arbeit (sie umfasste ganze 12 Seiten) des jungen holländischen Mathematikers Brouwer.

Sie enthielt einige bemerkenswerte Beispiele als Beweise dafür, dass einige Resultate von Schoenflies völlig falsch, andere dagegen zwar richtig, aber nicht streng bewiesen waren. Wahrlich einen schlechten Scherz hatte sich die geometrische Anschauung wieder einmal mit einem Mathematiker erlaubt!

Um zu zeigen, welche "offenbar erfüllten" Voraussetzungen sich als falsch erwiesen, werden wir einige Beispiele Brouwers anführen, wobei wir später gefundenen Vereinfachungen verwenden wollen.

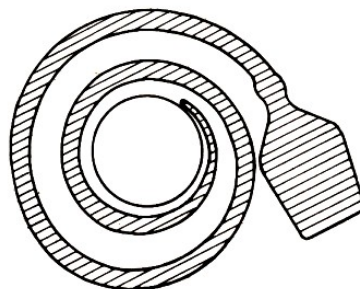


Abb. 74

Zum Beispiel konstruierte Brouwer ein begrenztes Gebiet, dessen Grenze (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) kein Kontinuum ist. Dazu nahm er eine "Flasche" und begann damit, ihren Hals in die Länge zu ziehen, indem er ihn auf einen Kreis "aufwickelte" (Abb. 74).

Es ergab sich ein Gebiet, das durch zwei Spiralen und die "Flasche" begrenzt war. Diese Grenze ist aber kein Kontinuum, wenn man sich den "Hals" beliebig oft herumgewickelt denkt. Ein Kontinuum entsteht erst, wenn man die Kreislinie mit hinzunimmt.

Tut man dies aber, dann ergibt sich die neue Schwierigkeit, dass man gewisse Punkte des Randes mit Punkten des Gebietsinneren niemals durch eine im Gebiet verlaufende Linie endlicher Länge verbinden kann.

### 3.18 Gebiete und Ränder

(+) Wenn wir nun schon angefangen haben, von Gebieten und Rändern zu sprechen, so wollen wir auch die entsprechenden Begriffe verschärfen. Nachdem wir bereits gesehen haben, dass die Jordansche Definition einer Kurve nicht hinreichend erfolgreich war, müssen wir auch die entsprechende Gebietsdefinition neu überdenken.

Als offene Punktmenge in der Ebene bezeichnen wir eine beliebige Menge, die sich als Summe von Kreisen unter Ausschluss der Ränder ergibt.

Insbesondere ist also das Komplement eines Kontinuums eine offene Menge. Sämtliche gewöhnlichen ebenen Gebiete (das Innere eines Kreises, Quadrates oder Dreiecks, um nur einige Beispiele zu nennen) sind offene Mengen (in der Ebene). Darüber hinaus sind sie zusammenhängend:

Zwei beliebige ihrer Punkte können durch eine ganz innerhalb des Gebietes verlaufende Linie miteinander verbunden werden. Diese beiden Eigenschaften definieren nun ganz allgemein ein ebenes Gebiet.

Eine zusammenhängende und offene ebene Punktmenge heißt ebenes Gebiet.

Dabei kann die Zahl der offenen Kreisflächen, aus denen sich das Gebiet nach Definition zusammensetzt, beliebig sein. Man kann jedoch beweisen, dass stets eine abzählbare Menge von Kreisflächen hierzu genügt.

Eine solche offene Kreisfläche wird Umgebung ihres Mittelpunktes  $a$  genannt. Es versteht sich von selbst, dass jeder Punkt unendlich viele Umgebungen besitzt. Ein Punkt  $a$  der Ebene heißt Randpunkt eines Gebietes  $G$ , wenn in jeder beliebigen Umgebung von  $a$  sowohl Punkte aus dem Gebiet  $G$  als auch solche Punkte liegen, die nicht zu  $G$  gehören (Abb. 75).

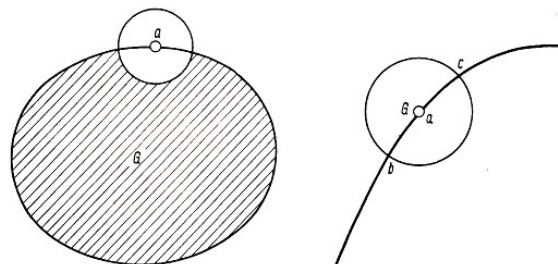


Abb. 75,76

Ganz analog werden offene Mengen, Gebiete und Umgebungen sowie Randpunkte im Raume definiert. Der einzige Unterschied besteht darin, dass an Stelle der Kreise nunmehr offene Kugeln, d.h. Kugeln ohne Oberfläche, verwendet werden. Im Zusammenhang mit dem Begriff der Umgebung eines Punktes (in der Ebene oder im Raume) benötigen wir noch den Begriff der relativen Umgebung eines Punktes bezüglich einer beliebigen Menge  $A$ , der dieser Punkt angehört.

Man versteht darunter die Menge der Punkte einer gewöhnlichen Umgebung, die in  $A$  liegen, das heißt den Durchschnitt einer Umgebung mit der Menge  $A$ . Ist  $A$  zum Beispiel eine Kurve - wie es in Abb. 76 dargestellt ist - und  $G$  eine Umgebung des Punktes  $a \in A$ , dann besteht die Relativumgebung von  $a$  bezüglich  $A$  aus allen Punkten des durch den Kreis  $G$  überdeckten Teilstückes der Kurve, es handelt sich um das Kurvenstück zwischen  $b$  und  $c$  (unter Ausschluss

dieser Punkte selbst, weil die Kreislinie ja nach Definition nicht zur Umgebung  $G$  gerechnet wird).

Besteht  $A$  aus einigen isolierten Punkten, so gehört zu jedem von ihnen eine Umgebung, die keinen weiteren Punkt von  $A$  enthält. Dieselben bestimmen dann Relativumgebungen, die nur aus den Punkten selbst bestehen. Isolierte Punkte sind also dadurch gekennzeichnet, dass sie Relativumgebungen besitzen, die außer ihnen selbst keine weiteren Punkte der Menge  $A$  enthalten (Abb. 77).

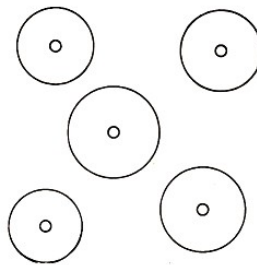


Abb. 77

### 3.19 Ein grandioses Bewässerungsvorhaben

Wir greifen uns nun ein weiteres der überraschenden Beispiele von Brouwer heraus. Wir zeichnen die Karte irgendeines Landes und der Nachbarländer auf. Fast alle Punkte der Ländergrenze gehören zu genau zwei Ländern: zu dem betrachteten und einem seiner Nachbarstaaten. Darum stehen in jedem Punkt dieser Grenze zwei Grenzsoldaten - einer aus diesem Land, der andere aus einem Nachbarland. Sicher wird es auch einige wenige Punkte geben, wo sich drei Länder begegnen (Abb. 78).

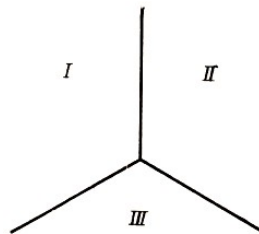


Abb. 78

In diesen Punkten würden dann natürlich drei Grenzsoldaten stehen. Es gibt auf der Karte nur endlich viele solcher Punkte, und es scheint vollkommen evident zu sein, dass nicht die gesamte Grenze eines Landes aus solchen Punkten bestehen kann. Man hält es ganz einfach für unmöglich, dass es drei Länder geben kann, die ein und dieselbe Grenze haben, so dass sich entlang der gesamten Grenze Grenzsoldaten aus drei Ländern gegenüber stehen können.

Aber Brouwer hat drei solche Gebiete konstruiert!

Um sein Beispiel besser zu verstehen, stellen wir uns inmitten des Ozeans eine Insel mit zwei Süßwasserseen vor. Das Wasser des einen Sees ist kalt, das des anderen dagegen warm. Wir sollen jetzt das folgende Bewässerungsvorhaben verwirklichen.

Im ersten Bauabschnitt treiben wir vom Ozean und von den beiden Seen aus jeweils einen blind endenden Kanal in das Innere der Insel vor. Dabei sollen sich die Kanäle nicht kreuzen, damit die drei Wasserarten sich nicht vermischen, und es soll kein Punkt des trockenen Landes weiter als 1 km von jeder der drei Wassersorten entfernt sein (Abb. 79).



Abb. 79

Im nächsten Bauabschnitt sind die Kanäle so weit zu verlängern, bis unter Beibehaltung der anderen Bedingungen jeder Punkt des festen Landes der Insel nur noch 0,5 km von jeder Wassersorte entfernt ist. Dabei müssen natürlich die Kanäle schmaler werden als früher.

Auf diese Weise, die geforderte Maximalentfernung bei jedem Schritt halbierend, erhalten wir immer mehr gewundene, immer schmaler werdende Kanäle, die schließlich die ganze Insel ausfüllen, die sich dabei in eine Cantorsche Kurve verwandelt hat. Wenn man an einem beliebigen Punkt dieser Linie steht, dann kann man je nach Wunsch Salzwasser, warmes oder kaltes Süßwasser schöpfen. Das Wasser ist aber dabei kein bisschen vermischt!

Denken wir uns nun statt des Ozeans und der Seen mit ihren Kanälen drei entsprechend geformte Länder, dann würde die Landkarte genau die oben für unmöglich gehaltene Eigenschaft zeigen: An jeder Stelle der Grenze könnten drei Grenzposten der verschiedenen Länder aufgestellt werden.

### 3.20 Das unsichere Dissertationsthema

Wir haben bereits gesagt, dass eine wesentliche Lücke der Cantorschen Definition darin bestand, dass sie nicht auf Raumkurven anwendbar war. Niemand konnte aber auch sagen, was man unter einer Fläche im Raum genau zu verstehen hätte.

Der ehrwürdige Professor an der Moskauer Universität, Dmitri Fjedorowitsch Jegorow, stellte im Sommer des Jahres 1921 seinem dreiundzwanzigjährigen Schüler Pawel Samuilowitsch Urysohn die Aufgabe, diese Probleme zu lösen.

Man sieht, dass er dabei mehr an die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft dachte als daran, ob der Kandidat mit dem Thema begründete Aussicht auf den termingerechten Abschluss einer Dissertation hatte, denn die Aufgabe war eine der schwierigsten überhaupt.

Bald hatte Urysohn herausgefunden, dass es sich bei Jegorows Problem lediglich um einen Spezialfall der allgemeineren Frage nach der Dimension geometrischer Figuren handelte. Nach welcher Vorschrift lässt sich eigentlich ausrechnen, dass eine Strecke oder eine Kreislinie die Dimension eins, ein Quadrat die Dimension zwei und eine Kugel die Dimension drei hat?

Der engste Freund P. S. Urysohns, das spätere Akademiemitglied und der Ehrenpräsident der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, Pawel Sergejewitsch Alexandroff, damals ein blutjunger Aspirant, erinnert sich an diese Periode im Leben Urysohns:

"... Den ganzen Sommer hindurch (1921) bemühte er sich, eine echte Definition der Dimension zu finden, wobei Urysohn von einer Variante zur anderen überging, indem er Beispiele konstruierte, die die Unhaltbarkeit der vorigen Variante belegten. Das waren zwei Monate gewaltiger



Anstrengungen.

Schließlich, an einem Morgen Ende August, erwachte er mit der endgültigen und fertigen, uns heute allen gut bekannten induktiven Definition der Dimension ... Noch am gleichen Morgen trug mir P. S. Urysohn während eines Bades seine Definition der Dimension vor.

Während der Unterhaltung, die sich einige Stunden hinzog, entstand sofort der Plan für den Aufbau einer Theorie der Dimension mit einer ganzen Reihe von Sätzen, die bisher Hypothesen gewesen waren und von denen man bisher keine Beweise kannte. Sie alle wurden in den folgenden Monaten nacheinander bewiesen.

Seit dieser Zeit war ich nie wieder Teilnehmer oder auch nur Beobachter einer mathematischen Unterhaltung, die einen solchen ungeheuren Strom neuer mathematischer Gedanken enthalten hätte.

Das ganze skizzierte Programm wurde im Winter 1921/22 durchgeführt; zum Frühjahr 1922 lag die Theorie der Dimension abgeschlossen vor ..."

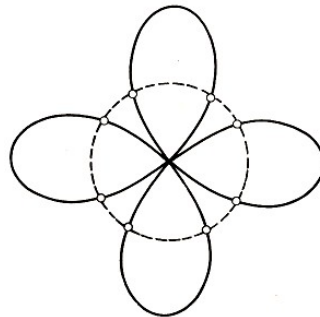


Abb. 80

Die Grundidee der Urysohnschen Definition der Dimension besteht in folgendem. Um einen Teil einer Linie von der gesamten übrigen Kurve abzutrennen, braucht man, gewöhnlich zwei oder einige wenige Punkte (in Abb. 80 wird der das Zentrum enthaltende Teil einer vierblättrigen Rosette von der übrigen Kurve durch acht Punkte getrennt).

Einen bestimmten Teil einer Fläche kann man dagegen von der gesamten Fläche niemals durch endlich viele Punkte abtrennen, dazu benötigt man bereits ganze Linien. Man kann noch so viele einzelne Punkte nehmen und kann sie doch auf der Fläche noch immer umgehen.

Ebenso kann man einen Teil eines Raumkörpers vom gesamten Körper nur durch eine Fläche und nicht durch eine Kurve abtrennen. Das alles musste noch verschärft werden.

Für gewisse Linien braucht man für die Zerlegung in Teile möglicherweise unendlich viele Punkte, deren Gesamtheit aber niemals eine Kurve ist. Es gelang Urysohn, alle notwendigen Definitionen streng und exakt zu geben.

In gewisser Hinsicht entwickelte er mit seinen Definitionen die Definitionen von Euklid weiter (die Enden einer Linie sind Punkte, die Begrenzungen einer Fläche sind Linien ...). Die Ähnlichkeit ist aber etwa dieselbe wie zwischen einem altgriechischen Trierer (einem rudergetriebenen Mittelmeerschiff) und einem modernen Transatlantik-Liner.

### 3.21 Die induktive Definition der Dimension

(+) Nun werden wir genauer angeben, wie die Dimension geometrischer Figuren durch Urysohn definiert wird.

Zuerst klären wir, welchen Figuren wir die Dimension null zuschreiben wollen. Eine typisch nulldimensionale Menge ist die aus einem einzelnen Punkt oder im äußersten Fall aus einer



endlichen Zahl von Punkten bestehende. Jeder Punkt einer solchen Menge hat aber, wie wir schon besprochen hatten (vgl. Abb. 77), Relativumgebungen, deren Grenzen leer sind. Genau diese Eigenschaft benutzte Urysohn für die Definition der Mengen der Dimension null. Sie lautet folgendermaßen.

Eine Punktmenge  $F$  hat genau dann die Dimension null, wenn es zu jedem ihrer Punkte beliebig kleine Relativumgebungen gibt, deren Ränder leer sind.

In der Mehrzahl der Fälle genügt für den Nachweis der Nulldimensionalität einer Menge die Konstruktion beliebig kleiner gewöhnlicher Umgebungen zu jedem ihrer Elemente, deren Ränder keine Punkte aus  $F$  enthalten (dann ist der Rand der zugehörigen Relativumgebungen erst recht leer, da sie Durchschnitt der gewöhnlichen Umgebung mit  $F$  sind).

Es gibt aber auch Mengen der Dimension null, die im Raume liegen, für die man solche gewöhnlichen Umgebungen nicht angeben kann.

Die Worte beliebig kleine Umgebung müssen aus folgendem Grund in die Definition aufgenommen werden: Würde man sie weglassen, dann könnte man zum Beispiel beweisen, dass ein beliebiges Quadrat die Dimension null hat, kann man es doch in einen geeigneten Kreis einschließen, dessen Rand nicht einen Punkt des Quadrates enthält. Unsere Definition muss aber so beschaffen sein, dass sie die gewöhnlichen Dimensionsvorstellungen im einfachen Fall richtig wiedergibt, einem Quadrat also die Dimension zwei und nicht null gibt.

Neben den endlichen Punktmenge gibt es auch viele unendliche Mengen der Dimension null. Als Beispiel nehmen wir die Menge der Punkte der Koordinatenachse mit den Koordinaten  $0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$

Man sieht sofort, dass es um einen beliebigen Punkt der Menge beliebig kleine Umgebungen gibt, deren Ränder keinen Punkt der Menge enthalten. Nur der Punkt 0 erfordert etwas genauere Überlegungen. Wählt man aber die Radien der betrachteten Umgebungen als irrationale Zahlen, dann ist man ebenfalls sicher, dass auf ihren Rändern keine Punkte der Menge liegen können.

Auch die Menge  $Q$  der Punkte auf der Geraden mit rationalen Koordinaten ist übrigens null-dimensional, da man auch hier beliebig kleine Kreise mit irrationalen Radien um jeden Punkt schlagen kann, auf deren Rändern dann kein rationaler Punkt liegen kann. Andere Beispiele sind die Cantorsche Menge, die Menge, die man aus dem Quadrat durch Entfernen ganzer Kreuze gewonnen hatte, und viele andere Mengen.

Auf analogem Wege kann man auch räumliche Punktmenge konstruieren, die die Dimension null haben. Dabei hat man unter der Umgebung eines Punktes jetzt natürlich eine räumliche Umgebung zu verstehen.

Nachdem so die Mengen mit der Dimension null definiert waren, ging Urysohn zur Definition der eindimensionalen Mengen, das heißt zu den Kurven über. Hier gibt es zu keinem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit leeren Grenzen (vgl. Abb. 80).

Jedoch schneidet der Rand jeder Umgebung eine gewöhnliche Linie nur in wenigen Punkten. Die Menge, die aus endlich vielen Punkten besteht, hat aber die Dimension null.

Urysohn verallgemeinerte diese Bemerkung und definierte die Mengen der Dimension eins:

Eine Menge  $F$  hat genau dann die Dimension eins, wenn sie nicht null-dimensional ist, es aber zu jedem ihrer Punkte beliebig kleine Relativumgebungen gibt, deren Grenzen null-dimensional sind.

Es stellte sich heraus, dass nicht nur die gewöhnlichen Kurven (Kreislinie, Strecke, Ellipse usw.), sondern auch alle Cantorsche Kurven die so definierte Dimension eins haben. Es war deshalb möglich geworden, auch eine Raumkurve im Sinne von Cantor zu definieren:

Jedes Kontinuum der Dimension eins heißt Kurve.

Jetzt ist es bereits klar, wie Urysohn Flächen, dreidimensionale Körper und allgemein Mengen beliebiger Dimension definiert hat.

Ausgehend vom Begriff der nulldimensionalen Menge gewinnt er die eindimensionalen, daraus nach demselben Verfahren die zweidimensionalen und dreidimensionalen Mengen usw. Es handelt sich also um eine ganz typische induktive Definition.

### 3.22 Diese Arbeit soll gedruckt und nicht rezensiert werden!

Urysohn hat eine Reihe der interessantesten Sätze bewiesen, die mit dem von ihm eingeführten Dimensionsbegriff zusammenhängen. Es wollte ihm aber lange Zeit nicht gelingen, das Haupttheorem zu beweisen, welches besagt, dass der ganz gewöhnliche Würfel die Dimension drei hat.

Nach langen Bemühungen fand er einen bemerkenswerten Ausweg aus dem Dilemma, indem er eine neue Definition der Dimension ersann. Wir werden diese Definition nicht im Detail erläutern, sondern nur an einfachsten Figuren erklären.

Wenn man eine Strecke oder die Kreislinie nimmt, so kann man sie in beliebig kleine Teile derart zerschneiden, dass jeder Punkt höchstens zwei Stücken angehört (Abb. 81).

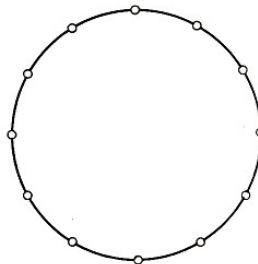


Abb. 81

Dabei versteht man die Stücke einschließlich ihrer Grenzen, d.h. einschließlich der endlich vielen Punkte. Ein Quadrat hingegen kann man niemals so zerschneiden. Auf den ersten Blick scheint es so, als würden bei der Zerlegung eines Quadrates stets Punkte auftreten, die zu vier Stücken gehören (Abb. 82a).

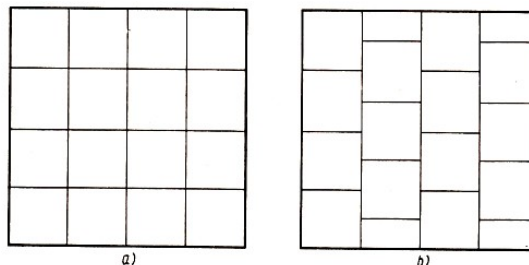


Abb. 82a, b

Ordnet man die Teile so an, wie man Mauerziegel schichtet, so kann man erreichen, dass jeder Punkt höchstens zu drei verschiedenen Stücken gehört. Genauso kann man einen Würfel in kleine Parallelepipede zerschneiden, wobei jeder Punkt zu höchstens vier Teilen gehört.

Gerade die sich hier offenbarende Eigenschaft benutzte Urysohn für seine neue Definition. Man

ordnet einer Figur die Dimension  $n$  zu, wenn sie in beliebig kleine zusammenhängende Teile zerlegt werden kann, so dass kein Punkt zu  $n + 2$  solchen Teilen gehört, es aber bei jeder beliebigen Zerlegung Punkte gibt, die  $n + 2$  verschiedenen Teilen gemeinsam sind.

Unter Verwendung dieser neuen Definition bewies Urysohn nun endlich, dass das Quadrat die Dimension zwei, der Würfel die Dimension drei hat usw. Danach bewies er aber, dass die neue Definition zur früheren äquivalent ist.

Die von Urysohn geschaffene Theorie der Dimension rief in aller Welt große Aufmerksamkeit hervor. Dafür legt die folgende Episode beredtes Zeugnis ab.

Während einer wissenschaftlichen Reise ins Ausland hielt Urysohn in Göttingen einen Vortrag über seine Ergebnisse. Bis zur Machtergreifung Hitlers bestand an der Göttinger Universität eines der mathematischen Zentren der Welt.

Nach dem Vortrag sagte der Nestor der Göttinger mathematischen Schule, der berühmte David Hilbert, dass diese Resultate unbedingt in den Mathematischen Annalen veröffentlicht werden sollten. Diese Zeitschrift gehörte zu den bedeutendsten mathematischen Journalen jener Zeit.

Nach einigen Monaten sprach Urysohn wieder in Göttingen, und Hilbert fragte den Redakteur der Mathematischen Annalen, Richard Courant, ob die Arbeit Urysohns schon gedruckt sei. Jener antwortete, dass die Arbeit zur Zeit rezensiert werde.

"Aber ich habe doch wohl deutlich gesagt, dass sie nicht rezensiert, sondern gedruckt werden soll!" - rief Hilbert aus.

Nach solch unzweideutigem Ersuchen ließ der Druck nicht mehr lange auf sich warten.

Drei Jahre währte die wissenschaftliche Aktivität Urysohns, die an Intensität und Tiefe ihresgleichen sucht (er hat in dieser Zeit mehrere Dutzend wissenschaftliche Arbeiten publiziert). Sein Leben fand ein tragisches Ende. Er ertrank am 17. August 1924, als er während eines Sturmes im Golf von Biskaya badete. Am Tage seines Todes hatte er seine letzte wissenschaftliche Arbeit beendet.

Nach dem Tode dieses Genies fand man unzählige Skizzen und Notizen über unveröffentlichte Resultate. Sein engster Freund und Mitarbeiter Pawel Sergejewitsch Alexandroff unternahm nach einiger Zeit die Herausgabe dieser Resultate und machte sie damit ebenfalls zum Allgemeinut der Mathematiker. Die Theorie der Dimension wurde in der Folgezeit zu einer wichtigen Grundlage der Mathematik.

## 4 Schlusswort

Unendliche Mengen besitzen ungewöhnliche Eigenschaften. Gleichzeitig mit dem Studium dieser Eigenschaften gingen die Mathematiker mehr und mehr dazu über, die Voraussetzungen zu verschärfen und die Beweise eingehender zu analysieren.

Im Verlaufe dieses Prozesses entstand ein neuer, wichtiger Zweig der Mathematik - die mathematische Logik.

Lange Zeit nahm man an, dass die Theorie der Mengen und die mathematische Logik als vollkommen abstrakte Wissenschaften keinerlei Beziehungen zu praktischen Aufgaben haben. Als jedoch die elektronischen Rechenmaschinen konstruiert wurden, zeigte es sich auf einmal, dass die Fragen der Programmierung und auch viele Probleme der Konstruktion dieser Maschinen ganz eng mit den Methoden der mathematischen Logik zusammenhängen.

Es hat sich immer wieder bestätigt, dass scheinbar meilenweit vom Leben entfernte Entdeckungen der Wissenschaften auf einmal eine eminent praktische Bedeutung erlangen können. Zum Beispiel konnte man noch Anfang der dreißiger Jahre in einschlägigen Lehrbüchern lesen, dass das chemische Element Uran keine praktische Bedeutung habe!

Gegenwärtig bildet die Theorie der Mengen eine der Grundlagen solcher Gebiete der Mathematik wie der Funktionalanalysis, der Topologie, der allgemeinen Algebra u. a.

Auch in der Mengentheorie selbst werden noch tiefgründige Untersuchungen gemacht. Sie hängen mit den Grundlagen der Mathematik selbst zusammen, und es hat sich dabei unter anderem gezeigt, dass ein solch "naiver" Standpunkt, wie wir ihn in diesem Büchlein bezogen haben, bei weitem nicht immer ausreicht, dass vielmehr ein axiomatischer Aufbau der Mengentheorie unumgänglich ist.

Solche Untersuchungen gehen aber weit über den Rahmen hinaus, den wir uns zu Beginn des Buches abgesteckt hatten. Sie verlangen wesentlich mehr an Voraussetzungen, als wir bei unserem Leserkreis voraussetzen wollten.

Ist das Buch bis hierher mit Freude und Spannung gelesen worden, dann ist unser Ziel erreicht: Man greife nun zu den wirklichen Lehrbüchern und beginne mit dem Studium der Mengenlehre! Dazu ver helfe auch das Literaturverzeichnis am Ende dieses Buches.

## 5 Beispiele und Übungen

1.  $A$  sei die Menge der durch 4 teilbaren Zahlen.  $B$  enthalte alle durch 10 teilbaren ganzen Zahlen und  $C$  sei die Menge der durch 75 teilbaren Zahlen. Welche ganzen Zahlen gehören zur Menge  $A \cap B \cap C$ ?

2. In einer Bibliothek gibt es Bücher der verschiedensten Gebiete von Wissenschaft und Kunst. Wir bezeichnen die Menge aller Bücher der Bibliothek mit  $A$ , die Menge aller mathematischen Bücher überhaupt (nicht nur in dieser Bücherei) heiße  $B$ . Charakterisiere die Menge  $A - B$ !

3. Vereinfache den folgenden Ausdruck

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) - (A \cup (B - C)) \cap A$$

mit Hilfe der Regeln der Mengenalgebra.

4.  $A$  sei die Menge aller Punkte  $M(x,y)$  der Ebene, die den Bedingungen  $|x| \leq 4$ ,  $|y| \leq 4$  genügen;  $B$  sei die Punktmenge mit  $x^2 + y^2 \leq 25$ , und  $C$  enthalte alle Punkte mit  $x > 0$ . Stelle die Menge  $A \cap B - C$  grafisch dar.

5. Beweise die Richtigkeit der Gleichungen

a)  $(A - B) - C = (A - C)(B - C)$ ,

b)  $(A - B) + (B - C) + (C - A) + ABC = A + B + C$ .

6. Zeige die Gültigkeit der Implikationen

a)  $AC + BD \subseteq (A + B)(C + D)$ ,

b)  $(B - C) - (B - A) \subseteq A - C$ ,

c)  $A - C \subseteq (A - B) + (B - C)$ .

7. Folgt aus  $A - B = C$  die Gleichung  $A = B + C$ ?

8. Wenn  $A = B + C$  ist, gilt dann auch  $A - B = C$ ?

9. Welche Implikationen bestehen zwischen den Mengen

a)  $A - (B + C)$  und  $(A - B) - C$ ,

b)  $A + (B - C)$  und  $(A + B) - C$ ,

c)  $(A - B) + C$  und  $A + (C - B)$ ?

10. Vereinfache den Ausdruck  $[(X - Y)'(X' + Y)']'$  unter Verwendung der Beziehungen 1) bis 26).

11. Es ist eine eindeutige Abbildung des Intervalls  $0 < x < 1$  auf die ganze Zahlengerade anzugeben.

12. Es soll das Intervall  $0 \leq x < 1$  eindeutig auf den Strahl  $0 \leq x < \infty$  abgebildet werden.

13. (+) Zu bestimmen ist eine eindeutige Abbildung des abgeschlossenen Intervalls  $0 \leq x \leq 1$  auf das offene Intervall  $0 < x < 1$ .

14. Zwischen dem Intervall  $0 \leq x < 1$  und der ganzen Zahlengeraden ist eine eindeutige Abbildung zu konstruieren.

15. (+) Man gebe eine eindeutige Abbildung des Intervalls  $0 \leq x \leq 11$  auf die Menge der irrationalen Zahlen dieses Intervalls an.

16. (+) Gesucht ist eine eindeutige Abbildung des Strahls  $0 \leq x < \infty$  auf die ganze Zah-

lengerade.

17. Es ist eine eindeutige Abbildung der Punkte der Ebene auf die Kugeloberfläche, aus der ein Punkt entfernt worden ist, anzugeben.

18. (+) Man gebe eine solche Abbildung der Ebene auf die volle Sphäre an.

19. Es ist eine eindeutige Abbildung des offenen Quadrates  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  auf die ganze Ebene anzugeben.

20. Konstruiere eine eindeutige Abbildung der Menge aller rationalen Zahlen des Intervalls  $0 \leq x \leq 1$  auf die Menge der rationalen Punkte der Ebene.

21. Man gebe eine eindeutige Abbildung der Menge der ganzen Zahlen auf die Menge aller quadratischen Trinome mit ganzzahligen Koeffizienten an.

22. (+) Gesucht ist eine eindeutige Abbildung der Menge aller reellen Zahlen auf die Menge der Punkte einer Ebene.

23. Zu konstruieren ist eine eindeutige Abbildung der Menge der reellen Zahlen auf die Menge aller quadratischen Trinome mit reellen Koeffizienten.

24. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller Vierecke der Ebene, deren Ecken rationale Koordinaten haben?

25. Wie ist die Mächtigkeit der Menge aller Polygone der Ebene, deren Ecken rationale Koordinaten haben?

26. Welche Mächtigkeit besitzt die Menge der rationalen Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten in Zähler und Nenner?

27. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller konvexen Polyeder, deren Ecken rationale Koordinaten haben?

28. Welche Mächtigkeit hat die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten?

29. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen?

30. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen?

31. Welche Mächtigkeit hat die Menge der monoton wachsenden Folgen natürlicher Zahlen?

32. Welche Mächtigkeit besitzt die Menge der Polynome dritten Grades mit reellen Koeffizienten?

33. Welche Mächtigkeit besitzt die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten?

34. Kann man ein ebenes Kontinuum aus paarweise durchschnittsfremden Kreislinien erzeugen?

35. Kann man ein ebenes Kontinuum aus sich paarweise nicht schneidenden Buchstaben  $\Gamma$  oder  $N$  konstruieren? Warum?

36. Kann man dasselbe auch aus den Buchstaben  $A$  oder  $B$  tun?

37. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller reellen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 7 vorkommt?

38. Welche Mächtigkeit hat die Menge aller reellen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 5 nicht vorkommt?
39. Welche Mächtigkeit hat die Menge reeller Zahlen zwischen 0 und 4, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 6 genau an der zweiten Stelle erscheint?
40. Es ist zu beweisen, dass  $A \sim B$  gilt, wenn  $A - B \sim B - A$  erfüllt ist ( $A \sim B$  bedeutet die Gleichmächtigkeit von  $A$  und  $B$ ).
41. Beweise, dass aus  $A \subseteq B$  und  $A \sim A + C$  folgt, dass  $B \sim B + C$  erfüllt ist.
42. Ist die folgende Aussage richtig:  
"Wenn  $A \sim C$ ,  $B \sim D$ , wobei  $A \supseteq B$  und  $C \supseteq D$ , so gilt auch  $A - B \sim C - D$ "?
43. " $A \sim B$ ,  $C \supseteq A$ ,  $C \rightarrow B \sim C - A \sim C - B$ "- ist das eine richtige Aussage?
44. Wir nummerieren alle rationalen Zahlen des Intervalls  $[0, 1]$  und erhalten die Punktfolge  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ . Jetzt konstruieren wir die offene Kreisumgebung von  $r_1$  mit dem Radius  $1/10$ , die Umgebung von  $r_2$  mit  $R = 1/20$ , die von  $r_3$  mit  $R = 1/40$  usw. Dann vereinigen wir alle diese Umgebungen. Enthält die entstandene Menge  $M$  alle Punkte des Intervalls?
45. Schätze die Länge der Menge  $M$  aus der Aufgabe 44 ab!
46. (+) Wir nennen die Menge aller Folgen  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  reeller Zahlen mit  $0 \leq x_n \leq 1$  den unendlichdimensionalen Würfel. Zeige, dass die Menge der Punkte dieses Würfels die Mächtigkeit des Kontinuums hat.
47. (+) Konstruiere eine stetige Funktion, die in jedem Intervall unendlich viele Maxima und Minima besitzt.
48. (+) Die Menge  $M$  besteht aus den Punkten der Strecke  $[0,1]$ , deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 3 und 8 enthält. Beschreibe, wie man diese Menge erhält, indem man fortgesetzt Abschnitte aus dem Intervall entfernt.
49. (+) Es ist dasselbe für die Punkte zu machen, deren Dezimalbruchdarstellung die Kombination 3-8 (in dieser Reihenfolge) nicht enthält.
50. (+) Ein Punkt  $a$  heißt Häufungspunkt einer Menge  $M$ , wenn in jeder beliebigen Umgebung unendlich viele Punkte dieser Menge  $M$  liegen.  
Beweise, dass alle Häufungspunkte der Cantorschen Menge dieser Menge selbst angehören. Zeige außerdem, dass auch umgekehrt jeder Punkt der Menge Häufungspunkt ist. Führe dieselben Beweise auch für die Mengen aus 48.(+) und 49.(+)!
51. Beweise, dass jeder Punkt des Intervalls  $[0,1]$  Häufungspunkt der Menge aller rationalen Zahlen  $r$  mit  $0 \leq r \leq 1$  ist.
52. Besitzt die Menge der ganzen Zahlen Häufungspunkte?
53. Beweise, dass die Abschließung einer beliebigen offenen ebenen Punktmenge alle ihre Häufungspunkte enthält.
54. Beweise, dass jede Menge, die alle ihre Häufungspunkte enthält, die Abschließung einer offenen Menge ist.
55. Man gebe für folgende ebenen Mengen Beispiele an:  
a) ohne Randpunkte,

- b) mit Randpunkten, von denen keiner zur Menge gehört,
- c) mit Randpunkten, die sämtlich zur Menge gehören,
- d) die vollkommen aus Randpunkten bestehen,
- e) die nur einen Teil ihrer Grenzpunkte enthält.

56. Man gebe entsprechende Beispiele für Mengen im Raume an!

## 6 Literaturhinweise

ALEXANDROFF, P. S., Einführung in die Gruppentheorie, 6. Aufl. Berlin 1967, MSB Nr. 1

ALEXANDROFF, P. S., Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, 2. Aufl. Berlin 1964

BITTNER, R., D. ILSE, S. KUBICEK u. W. TIETZ, Kompendium der Mathematik, 2. Aufl. Berlin 1970, MSB Nr. 46

GÖRKE, L., Mengen, Relationen, Funktionen, Berlin 1965

HASSE, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, 5. Aufl. Leipzig 1970, MSB Nr. 2.

KLAUA, D., Elementare Axiome der Mengenlehre, Berlin 1971

KRBEK, F. VON, Über Zahlen und Überzahlen, Leipzig 1964

KRBEK, F. VON, Geometrische Plaudereien, Leipzig 1971

MONJALLON, X., Einführung in die moderne Mathematik, Leipzig 1971

NATANSON, J. P., Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen Berlin 1961 .

STRUIK, D. J., Abriss der Geschichte der Mathematik, 3. Aufl. Berlin 1971

ZICH, O., u. A. KOLMAN, Unterhaltsame Logik, Leipzig 1970, MSB Nr. 51