# I.P. Natanson

# Summierung unendlich kleiner Größen

Übersetzung: Bernhard Göres
1969 Verlag der Wissenschaften Berlin
MSB: Nr. 16
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

# Vorwort

Das Studium der Integralrechnung ist ziemlich schwierig, weil sie in ihrer heutigen Form das Ergebnis der gegenseitigen Durchdringung einer großen Zahl äußerst verschiedenartiger Ideen ist.
Jedoch ist der Grundbegriff der Integralrechnung, der Begriff des Grenzwertes der Summe einer unbegrenzt wachsenden Anzahl unbegrenzt abnehmender Summanden, einfach und leicht zu verstehen. Er war im Grunde bereits im Altertum bekannt.

Es ist ohne große Vorkenntnisse möglich, sich diesen Begriff anzueignen. Übrigens ist dies sehr nützlich, weil man dadurch eine große Anzahl verschiedener Aufgaben aus Geometrie und Physik lösen kann. Außerdem ermöglicht die Kenntnis dieses Begriffes ein tieferes Eindringen in den allgemeinen Grenzwertbegriff und dient als hübsche Einführung in das systematische Studium der höheren Mathematik.

In diesem Büchlein beschäftigen wir uns mit diesem Begriff und einigen Anwendungen bei der Lösung verschiedenartiger konkreter Aufgaben. Der hier dargestellte Stoff ist eine ergänzte und erweiterte Überarbeitung eines Vortrages, den ich mehrmals vor Leningrader Schülern der 9. und 10. Klasse gehalten habe.

Der Stoff kann in mathematischen Arbeitsgemeinschaften an Schulen benutzt werden.

Leningrad, 13. April 1953

I. Natanson

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einige algebraische Formeln

**1.** Wir werden in den folgenden Darlegungen einige Formeln anwenden, die zwar zum Stoff des Algebra-Unterrichts der Schule gehören, aber nicht immer dort behandelt werden. Es handelt sich dabei um Formeln für Summen der Form

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$$

wobei $p$ eine ganze Zahl bezeichnet. Wir brauchen diese Summenformeln nur für kleine Werte von $p$: $p = 1, 2, 3$.
Wir beginnen mit der Ableitung der Formeln.

**2. Die Summenformel für die Reihe der natürlichen Zahlen.**
Wir wollen zunächst die Summe

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

bestimmen.
Da dies die Summe einer arithmetischen Reihe mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und der Differenz $d = 1$ ist, kann sie mit Hilfe der bekannten algebraischen Formel

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

bestimmt werden.
Wir wollen aber hier diese Formel auf eine andere Art ableiten.
Das Verfahren ist zwar etwas komplizierter, kann dafür aber mit Erfolg zur Bestimmung beliebiger Summen $S_p$ verwendet werden.

In der bekannten Gleichung

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

setzen wir nacheinander $k = n$, $k = n - 1$, $k = n - 2$ usw., bis wir zur 1 gelangen. Wir erhalten so das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} (n+1)^2 &=& n^2 + 2n + 1 \\ n^2 &=& (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ (n-1)^2 &=& (n-2)^2 + 2(n-2) + 1 \\ ... && \\ 2^2 &=& 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Nun addieren wir alle diese Gleichungen. Dabei beachten wir, dass die Spalte der Glieder auf der linken Seite fast aus den gleichen Summanden besteht wie die erste Spalte der rechten Seite. Der Unterschied zwischen diesen Spalten besteht darin, dass auf der linken Seite das Glied $1^2$ fehlt, welches als letztes auf der rechten Seite auftritt, dafür das Glied $(n+1)^2$ vorkommt, das auf der rechten Seite fehlt.

Auf Grund dieser Bemerkung ist klar, dass wir durch Subtraktion der gleichen Summanden auf beiden Seiten

$$(n+1)^2 = 1^2 + \{2n + 2(n-1) + ... + 2 \cdot 1\} + \{1 + 1 + ... + 1\}$$

erhalten. Die Anzahl der Summanden in der zweiten geschweiften Klammer ist gleich der Zahl der Zeilen im Gleichungssystem (2), d.h. gleich $n$, so dass auch die ganze Klammer den Wert $n$ hat.

Weiter ist zu bemerken, dass in der ersten geschweiften Klammer genau die Summe $S_1$ stehen bleibt, wenn wir den gemeinsamen Faktor 2 ausklammern. Wenn wir jetzt noch $1^2$ durch 1 ersetzen, so erhalten Wir

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n$$

Daraus folgt

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)[(n+1)-1] = n(n+1)$$

und somit schließlich

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir haben so aufs neue Formel (1) erhalten.

**3. Die Summe der Quadrate.**
Wir wenden jetzt unser Verfahren zur Bestimmung der Summe der Quadrate der ersten $n$ natürlichen Zahlen, d.h. der Summe

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

an. Dazu setzen wir in der Gleichung

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

nacheinander $k = n$, $n-1$, $n-2$ usw., bis wir zur 1 gelangen. Das führt uns zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} (n+1)^3 &=& n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 &=& (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n-1)^3 &=& (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ ... && \\ 2^3 &=& 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Jetzt addieren wir diese Gleichungen. Wie im vorigen Fall können wir verschiedenes streichen, nämlich aus der linken Spalte alle Summanden außer dem ersten, d.h. außer $(n+1)^3$, und aus der Spalte der ersten Summanden der rechten Seite alle bis auf den letzten, d.h. bis auf $1^3$.
Wenn wir jetzt aus der Spalte der zweiten Summanden der rechten Seite den gemeinsamen Faktor 3 ausklammern, so bleibt die gesuchte Summe $S_2$ stehen. Genau so ergibt die Spalte der dritten Summanden der rechten Seite die dreifache Summe $S_1$, die uns schon bekannt ist.
Wenn wir noch beachten, dass die Anzahl der Zeilen in (3) gleich $n$ ist, so erhalten wir

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

Ersetzen wir jetzt $1^3$ durch 1 und $S_1$ durch den Ausdruck (1), so ergibt sich

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

hieraus folgt

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

oder

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right] = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

also gilt

$$3S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Schließlich erhalten wir

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

**4. Die Summe der Kubikzahlen.**
Genau so wie oben gehen wir von der Gleichung

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

aus und gelangen zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} (n+1)^4 & = & n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ n^4 & = & (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n+1) + 1 \\ (n-1)^4 & = & (n-2)^4 + 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1 \\ \ldots & & \\ 2^4 & = & 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \end{array}\right\}$$

Durch Addition der Gleichungen und Subtrahieren der gleichen Summanden auf beiden Seiten finden wir

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

Ersetzen wir nun die Summen $S_1$ und $S_2$ durch die schon bekannten Ausdrücke (1) und (4) und lösen die Gleichung nach $S_3$ auf, was wir ohne Zweifel dem Leser überlassen können, so erhalten wir

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{5}$$

Auf gleiche Art können wir die Summen $S_4$, $S_5$ usw. finden.

5. Obwohl er keine direkte Beziehung zum Thema unseres Büchleins hat, wollen wir doch einen interessanten Zusammenhang zwischen den Formeln (1) und (5) nicht unerwähnt lassen.
Wenn wir nämlich die Formeln gegenüberstellen, so finden wir

$$S_3 = S_1^2$$

oder ausführlicher,

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 \tag{6}$$

So ist z.B. $1^3 + 2^3 = 9$ und $(1+2)^2 = 9$ oder $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ und $(1+2+3)^2 = 36$ oder $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ und $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$.
Die Gleichung (6) ist deshalb so interessant, weil die Gleichung

$$a^3 + b^3 + ... + k^3 = (a + b + .. + k)^2$$

für beliebige Zahlen $a, b, .., k$ gar nicht gilt, wovon man sich durch Gegenbeispiele leicht überzeugt.

**6. Das Summenzeichen.**
Die Formeln (1), (4) und (5) können in einer anderen Form geschrieben werden, wenn man das in der Mathematik sehr oft gebrauchte Zeichen $\Sigma$ benutzt. Ist eine Reihe von Summanden gegeben, die alle durch ein und denselben Buchstaben, z. B. $a$, bezeichnet und durch verschiedene Indizes voneinander unterschieden sind, $a_1 + a_2 + ... + a_n$, so wird die Summe dieser Glieder durch das Symbol

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{7}$$

angegeben; dabei bedeutet $a_k$, dass der allgemeine Summand der Summe die Zahl $a$ mit Index ist. Die Zahlen über und unter dem Summenzeichen $\sum$ zeigen an, dass der Index (auch "Zeiger") $k$ von $a$ alle ganzen Zahlen von $1$ bis $n$ durchlaufen soll. Das Zeichen $\sum$ ist dem griechischen Alphabet entnommen, es ist der Großbuchstabe "Sigma".

Mit Hilfe des Zeichens $\sum$ können die Summen $s_1, S_2, S_3$ durch

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

ausgedrückt werden, und die Formeln (1), (4) und (5) erhalten die Gestalt[1]

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{und} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{10}$$

**7. Einige Eigenschaften des Summenzeichens.**
Wir wollen noch einige Eigenschaften des Summenzeichens erwähnen.

[1] Wir erwarten, dass der Leser dieses Büchlein mit dem "Bleistift in der Hand" liest. Wir empfehlen, die Formeln (8), (9) und (10) auf ein besonderes Blatt Papier zu schreiben, damit man sie im folgenden stets vor Augen hat.

1. Wenn jeder Summand selbst Summe zweier Summanden ist, so lässt sich auch die ganze Summe in zwei Summen zerlegen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{11}$$

Zum Beweis der Gleichung (11) genügt es, ihre linke Seite in der Form

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)$$

zu schreiben, die offenbar in

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

umgeschrieben werden kann; dies ist aber gerade die rechte Seite der Gleichung (11).

2. Wenn alle Summanden einen gemeinsamen Faktor enthalten, so kann man diesen vor das Summenzeichen ziehen:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{12}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

3. Wenn alle Summanden $a_k$ den Wert $a$ haben, so ist die Summe gleich dem Produkt aus diesem Wert und der Anzahl der Summanden:

$$\sum_{k=1}^{n} a = na \tag{13}$$

Auch diese Eigenschaft kann der Leser leicht selbst beweisen.
Diese Eigenschaften des Summenzeichens sind so außerordentlich einfach, dass wir nicht mehr besonders darauf hinweisen, wenn wir sie im folgenden verwenden.

# 2 Bestimmung des Druckes einer Flüssigkeit auf eine senkrechte Wand

**8. Der Druck auf die Wände eines Reservoirs.**
Nehmen wir an, es sei uns ein mit Wasser gefülltes Reservoir in Form eines Quaders gegeben, dessen Maße der Abb. 1 entnommen werden können. Wir stellen uns die Aufgabe, den Druck[2] $P$ des Wassers auf die vordere Wand des Reservoirs zu bestimmen. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir an einige Gesetze der Hydrostatik erinnern.

[2] Wenn wir hier und auch im folgenden von Druck sprechen, so meinen wir die gesamte Kraft, mit der das Wasser auf die Wand drückt, nicht aber die auf die Einheit des Flächeninhalts bezogene Kraft (d.h. nicht den spezifischen Druck).

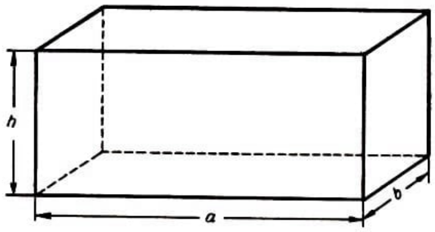



Abb. 1

**9.** Wenn sich im Wasser ein horizontales Flächenstück befindet, so ist der darauf lastende Druck gleich dem Gewicht der über dem Flächenstück liegenden Wassersäule, d.h. der zylinderförmigen Säule, deren Grundfläche gleich der Zylindergrundfläche und deren Höhe gleich der Tiefe des Flächenstückes unter der Wasseroberfläche ist.
Da es sich um Wasser handelt, dessen spezifisches Gewicht gleich 1 ist, ist das Gewicht der genannten Säule zahlenmäßig (in Gramm) gleich ihrem Volumen (in Kubikzentimetern), d.h. gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt des Stückes und seiner Tiefe. Dieses Produkt gibt uns also den Druck auf das horizontale Flächenstück an.

Befindet sich die Fläche im Wasser aber in nichthorizontaler Lage, so haben verschiedene Punkte eine unterschiedliche Tiefe, und man kann nicht von der Tiefe des Flächenstückes sprechen. Ist aber das Flächenstück sehr klein, so kann man in Annäherung annehmen, alle Punkte seien gleich tief eingetaucht; man nennt dann diese Tiefe die "Tauchtiefe" des ganzen Flächenstücks.

Wir nehmen an, es sei uns ein solches sehr kleines Flächenstück im Wasser gegeben, und bestimmen den Druck. Zu diesem Zweck stellen wir uns vor, dass wir dieses Flächenstück um einen seiner Punkte in die horizontale Lage drehen. Da der Druck im Innern einer Flüssigkeit in jedem Punkt in jeder Richtung derselbe und das Flächenstück sehr klein ist, ändert sich bei dieser Drehung der Druck auf das Flächenstück fast nicht, auf das horizontale Flächenstück ist aber die obige Regel zur Bestimmung des Druckes anwendbar.
Da die Drehung weder den Flächeninhalt noch, weil das Flächenstück klein sein sollte, die Tiefe ändert, können wir sagen:
Der Druck auf ein kleines Flächenstück, das sich unter Wasser befindet, ist zahlenmäßig gleich dem Produkt aus dem Inhalt dieses Flächenstückes und seiner Tauchtiefe.

Diese Regel ist nicht völlig genau, sie gilt nur annähernd. Der durch sie angegebene Wert ist um so genauer, je kleiner das betrachtete Flächenstück ist.

**10.** Nachdem dieses Gesetz aufgestellt ist, wenden wir uns wieder unserer Aufgabe zu. Da die vordere Wand des Reservoirs nicht sehr klein ist, kämen wir das oben gefundene Gesetz nicht unmittelbar anwenden. Um es benutzen zu können, gehen wir folgendermaßen vor:

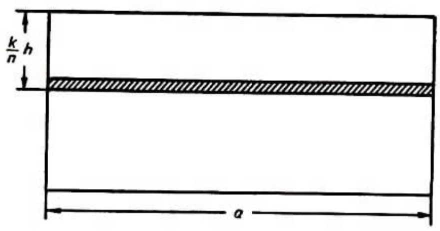



Abb. 2

Wir wählen eine sehr große Zahl $n$ und zerlegen die Wand in $n$ gleiche horizontale Streifen (Abb. 2) der Breite $\frac{1}{n}h$.

Wir betrachten jetzt einen dieser "elementaren" Streifen, z.B. den $k$-ten von oben; er ist sehr schmal, und wir können annehmen, dass alle seine Punkte in gleicher Tiefe liegen. Jetzt[3] finden wir den Druck auf den Streifen mit Hilfe des Gesetzes aus Nr. 9.

Der Flächeninhalt des Streifens ist gleich dem Produkt aus seiner Länge $a$ und seiner Breite $\frac{1}{n}h$, d.h. gleich $\frac{ah}{n}$. Um den Druck zu erhalten, müssen wir diese Zahl mit der Tiefe des eingetauchten Streifens multiplizieren. Für den $k$-ten Streifen von oben ist die Tiefe $\frac{k}{n}h$.[4] Daher gilt für den Druck $Pk$ auf den $k$-ten Streifen (den "elementaren" Druck)

$$P_k = \frac{ah^2}{n^2}k$$

Um jetzt den Druck $P$ auf die ganze Wand zu bestimmen, müssen wir die Drucke auf die einzelnen Streifen addieren; das gibt

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}k \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Wenn wir Formel (8) anwenden, können wir den Druck $P$ durch

$$P = \frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{oder durch} \qquad P = \frac{ah^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

darstellen; somit ist

$$P = \frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n} \tag{14}$$

Allerdings ist dieser Ausdruck für den Druck nicht ganz genau; obgleich die Streifen sehr schmal sind, liegen die verschiedenen Punkte innerhalb eines Streifens doch in verschiedener Tiefe. Je schmaler der Streifen angenommen wird, desto genauer wird das Resultat.

Daher werden wir, wenn wir die Zahl $n$ mehr und mehr vergrößern, aus (14) immer genauere Ausdrücke für den Druck $P$ erhalten. Somit ist der genaue Wert des Druckes der Grenzwert,[5] dem sich die Größe

$$\frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

[3]Betrachten wir die Herleitung des Druckgesetzes, so sehen wir, dass für ihre Richtigkeit nur notwendig ist, dass alle Punkte der Fläche (wenigstens annähernd) in gleicher Tiefe liegen. Daher können wir dieses Gesetz auf den schmalen horizontalen Streifen anwenden, ohne dass seine Länge "klein" zu sein braucht.

[4]Die Größe $\frac{k}{n}h$ ist die Tiefe des unteren Bandes des $k$-ten Streifens. Da wir aber von der unterschiedlichen Tiefe einzelner Punkte absehen, dürfen wir gerade diese Größe als die Tiefe aller Punkte des Streifens ansehen. Im folgenden werden wir es oft mit ähnlichen Sachverhalten zu tun haben.

[5]Wir erinnern an folgendes: Unter dem Grenzwert einer veränderlichen Größe $x_n$ versteht man die konstante Zahl $l$, die so beschaffen ist, dass der absolute Betrag der Differenz $x_n - l$ für alle hinreichend großen Werte von $n$ kleiner wird als jede vorgegebene positive Zahl.

nähert, wenn $n$ über alle Grenzen strebt. Es ist aber unmittelbar klar, dass für wachsendes $n$ die Zahl $\frac{1}{n}$ und mit ihr auch $\frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}$ kleiner und kleiner wird, d.h. gegen Null strebt. Daher ist der Grenzwert der Größe $\frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}$ gleich dem ersten Summanden $\frac{ah^2}{2}$. Dies ist somit der genaue Ausdruck für den Druck:

$$P = \frac{ah^2}{2}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

**11. Der Druck auf ein dreieckiges Gatter.**

Wir stellen uns jetzt eine ähnliche Aufgabe.

Wir wollen nämlich den Druck des Wassers auf ein dreieckiges Gatter bestimmen, das senkrecht ins Wasser gesenkt ist [und zwar Abb. 3 so, dass sich die Grundlinie des Dreiecks auf gleicher Höhe mit der Wasseroberfläche befindet (Abb. 3)].

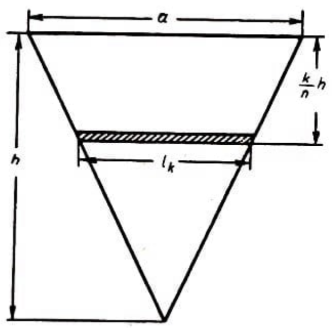


Abb. 3

Zur Lösung dieser Aufgabe zerlegen wir, ausgehend von den in der vorigen Nummer ausführlich angestellten Überlegungen, auch hier unser Gatter in $n$ hinreichend kleine horizontale Streifen - in "elementare" Streifen - der Breite $\frac{1}{n}h$ und bestimmen den Gesamtdruck als Summe der Drücke auf die einzelnen Teilstreifen.

Wir betrachten jetzt den $k$-ten Streifen von oben und berechnen den Druck auf ihn. Wenn wir die Breite des Streifens vernachlässigen, können wir annehmen, dass sich alle seine Punkte in ein und derselben Tiefe befinden, die gleich $\frac{k}{n}h$ ist.

Den "elementaren" Druck, d.h. den Druck $P_k$ auf den Streifen mit der Nummer $k$ erhalten wir, wenn wir dessen Tiefe mit seinem Flächeninhalt multiplizieren. Den Flächeninhalt können wir als Inhalt eines Trapezes bestimmen, aber offenbar kann man mit einem großen Grad von Genauigkeit den schmalen Streifen als Rechteck ansehen. Dies vereinfacht die Bestimmung des Flächeninhalts.

Dabei entsteht zwar ein Fehler, aber dieser ist um so weniger zu merken, je schmaler die Streifen sind; wir wissen aber schon aus dem vorigen Beispiel, dass wir die Breite des Streifens unbegrenzt verkleinern, so dass der Fehler im Resultat nicht zum Ausdruck kommt.

Wir haben es hier mit einem sehr allgemeinen Prinzip zu tun, das zur Lösung der verschiedensten Aufgaben angewendet Wird: Bei der Berechnung der elementaren Summanden richten wir unsere Aufmerksamkeit in der Hauptsache darauf, dass der Ausdruck möglichst einfach wird. Zu diesem Zweck vernachlässigen wir diejenigen Teile der Summanden, die im Vergleich zu den anderen sehr klein sind. Mit Hilfe der Theorie der Grenzwerte kann man dieses Prinzip genauer und strenger formulieren. Wir wollen dies hier jedoch nicht tun, da in den weiteren Beispielen das Wesen der Sache hinreichend deutlich wird.

Nehmen wir an, der $k$-te Streifen sei ein Rechteck, so erhalten wir seinen Flächeninhalt als Produkt seiner Länge und seiner Breite. Die Breite ist offenbar $\frac{1}{n}h$, und für die Länge $l_k$ (der Index $k$ zeigt an, dass wir den $k$-ten Streifen betrachten) finden wir, wie aus Abb. 3 zu ersehen ist, aus der Ähnlichkeit der Dreiecke die Proportion

$$l_k : a = \left(h - \frac{k}{n}h\right) : h \qquad \text{woraus} \qquad l_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) a$$

folgt.
Somit ist der Flächeninhalt des Streifens gleich

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) a \cdot \frac{1}{n}h$$

und der Druck auf ihn

$$P_k = \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right) k$$

Den Gesamtdruck findet man durch Summierung dieser Werte zu

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right) k \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Benutzen wir die Formeln (8) und (9), so können wir unserem Ausdruck die Form

$$P = \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

geben, oder auch

$$P = \frac{ah^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Dieser Ausdruck für den Druck gilt nur annähernd. Er ist um so genauer, je größer die Zahl $n$ ist; also muss man zur genauen Bestimmung des Wertes des Drucks auf der rechten Seite dieser Gleichung $n$ unbegrenzt wachsen lassen und den Grenzwert dieser rechten Seite bestimmen.
Da bei wachsendem $n$ der Bruch $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt und die Faktoren $1+\frac{1}{n}$ bzw. $2+\frac{1}{n}$ gegen 1 bzw. 2 streben, besitzt der ganze Ausdruck also (nach einem grundlegenden Satz über die Grenzwerte von Produkt und Differenz) den Grenzwert $\frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{6} \cdot 2$. Daher ist

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^3}{3} \qquad \text{und schließlich} \qquad P = \frac{ah^2}{6}$$

Dies ist der genaue Wert für den Druck.

**12.** Wir suchen nun den Druck auf ein senkrecht stehendes Gatter gleicher Form; nur sei es jetzt so ins Wasser getaucht, dass sich seine Spitze an der Wasseroberfläche befindet und die Grundlinie parallel zur Oberfläche verläuft (Abb. 4).

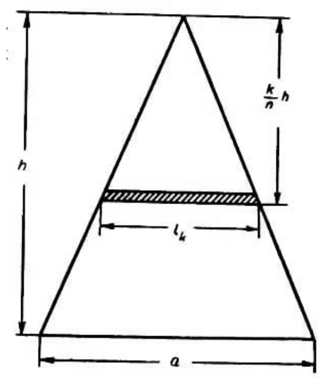



Abb. 4

Wenn wir das Gatter in horizontale Streifen der Breite $\frac{1}{n}h$ zerlegen und jeden Streifen als Rechteck ansehen, finden wir die Länge des $k$-ten Streifens aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$l_k : a = \frac{k}{n}h : h \qquad , \qquad l_k = \frac{k}{n}a$$

Hieraus ergibt sich der Flächeninhalt des Streifens zu $\frac{k}{n^2}ah$. Da die Tiefe gleich $\frac{k}{n}h$ ist, wird der elementare Druck gleich

$$P_k = \frac{k^2}{n^3}ah^2$$

Den Gesamtdruck erhält man durch Summierung der elementaren Drücke:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}ah^2 = \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Mit Hilfe der Formel (9) können wir

$$P = \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{ah^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

schreiben.

Den genauen Wert erhält man durch Grenzübergang für unbegrenzt wachsendes $n$. Um diesen Grenzwert zu finden, wiederholen wir die Überlegungen, die am Schluss von Nr. 11 ausgeführt wurden. Wir wollen hier nicht auf Einzelheiten eingehen, sondern nur bemerken, dass wir, um den gesuchten Grenzwert zu finden, in den Klammern den Summanden $\frac{1}{n}$ vernachlässigen; so erhalten wir schließlich

$$P = \frac{ah^2}{3}$$

**13.** Der Druck auf einen Halbkreis. Offenbar wurde in den verschiedenen Beispielen immer die gleiche Idee angewandt. Sie besteht darin, dass man den gesuchten Druck $P$ in elementare Summanden $P_k$ zerlegt. Die Berechnung der einzelnen Summanden gelingt auf einfache Art (nämlich durch Vernachlässigung des Tiefenunterschieds der einzelnen Punkte eines Streifens und dadurch, dass wir den Streifen rechteckig annehmen); so finden wir $P_k$ ohne Mühe.

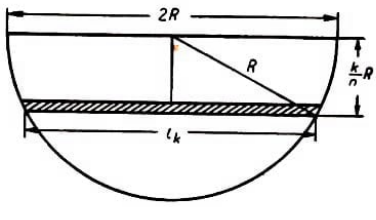



Abb. 5

Danach summieren wir die elementaren Drücke und gehen in der Summe zum Grenzwert für unbegrenzt wachsendes $n$ über. Zur Bestimmung der Grenzwerte benutzten wir die

Formeln (8) und (9) aus § 1.

Jedoch darf man nicht annehmen, dass die Lösung von Aufgaben der beschriebenen Art immer zu so einfachen Summen führt, wie sie in § 1 behandelt wurden. Ganz im Gegenteil, sehr oft gelangt man zu viel komplizierteren Summen:
Wir zeigen dies nun an einem Beispiel. Wir wollen den Druck auf ein halbkreisförmiges Gatter bestimmen. Es möge senkrecht ins Wasser gestellt sein, wobei der Durchmesser des Halbkreises in der Wasseroberfläche liegen soll.

Wir wenden die obige Überlegung an und teilen das Gatter in Streifen der Breite $\frac{1}{n}R$, wobei $R$ der Radius des Halbkreises ist. Auch hier sehen wir jeden Streifen als Rechteck an. Seine Länge bestimmen wir mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2} = \frac{2R}{n}\sqrt{n^2 - k^2}$$

In diesem Fall ist der Flächeninhalt des Streifens gleich

$$\frac{2R^2}{n^2}\sqrt{n^2 - k^2}$$

und der elementare Druck

$$P_k = \frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2}$$

Der Näherungswert für den gesamten Druck ist die Summe

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2} \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{2R^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}$$

Sein genauer Wert ist der Grenzwert dieser Summen bei unbegrenzt wachsendem $n$. Wir bemerken noch, dass uns im Grunde genommen nicht die Summe an sich, sondern nur der Grenzwert interessiert. Es ist also

$$P = 2R^3 \lim \left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right] \tag{15}$$

wobei das Symbol $\lim$ den Grenzwert bezeichnet. Unsere Aufgabe wäre gelöst, wenn wir den Grenzwert

$$\lim \left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right] \tag{16}$$

bestimmen könnten.
Das können wir aber noch nicht, und daher können wir die gestellte Aufgabe auch noch nicht lösen. In Nr. 23 werden wir eine Methode angeben, wie man diesen Grenzwert (16) findet, und damit die hier gestellte Aufgabe lösen.

# 3 Bestimmung der Arbeit beim Auspumpen einer Flüssigkeit aus einem Gefäß

### 14. Auspumpen von Wasser aus einem zylindrischen Kessel.

In diesem Paragraphen betrachten wir Aufgaben, die im ganzen zu einem anderen Gebiet der Physik gehören, aber mit Hilfe der gleichen Methode gelöst werden können, nämlich durch Zerlegung der gesuchten Größe in eine unbegrenzt wachsende Zahl unbegrenzt abnehmender sogenannter unendlich kleiner Summanden.

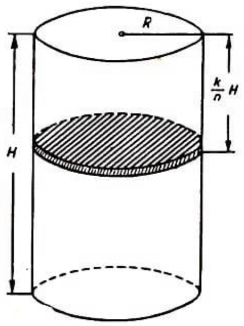


Abb. 6

Als typisches Beispiel betrachten wir die folgende Aufgabe. In einem zylindrischen Kessel (Abb. 6) möge sich Wasser befinden. Wir wollen dieses Wasser ganz auspumpen. Es soll die dabei aufzuwendende Arbeit bestimmt werden.

Wir erinnern daran, dass als die zur Bewegung eines materiellen Teilchens notwendige Arbeit das Produkt der Kraft, die auf das Teilchen wirkt, mit dem von diesem Teilchen beschriebenen Weg bezeichnet wird.
Wenden wir uns nun unserer Aufgabe zu.

Wir stellen fest, dass es zum Auspumpen eines Flüssigkeitsteilchens aus dem Kessel notwendig ist, dieses Teilchen bis zum Rand zu heben, so dass es dann unter Einwirkung der Schwerkraft von allein herausfließt.
Gleichbedeutend mit unserer Aufgabe ist also die Bestimmung der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um alle Flüssigkeitsteilchen auf die Höhe des Kesselrandes zu heben.

Dabei beschreibt offenbar jedes Teilchen einen Weg, dessen Länge gleich seiner Tiefe im Kessel ist. Da die Kraft, die zum Heben aufgewendet werden muss, gleich dem Gewicht des Teilchens ist, wird die Hubarbeit gleich dem Produkt aus Gewicht und Tiefe des Teilchens.
Solange es sich um Wasser handelt, dessen spezifisches Gewicht 1 ist, ist das Gewicht eines Teilchens (zahlenmäßig) gleich seinem Volumen, und folglich ist die Arbeit beim Heben eines Wasserteilchens gleich dem Produkt aus seinem Volumen und seiner Tiefe.

Da sich im Kessel die einzelnen Flüssigkeitsteilchen auf verschiedener Höhe befinden, können wir unsere Regel nicht unmittelbar zur Bestimmung der Arbeit benutzen.

Um die Regel anwenden zu können, gehen wir bei der Lösung analog zu den Aufgaben im vorangegangenen Paragraphen vor.
Wir zerlegen nämlich die Höhe $H$ des Zylinders (Abb. 6) in $n$ Teile der Länge $\frac{1}{n}H$ und legen durch jeden Teilpunkt eine zur Grundfläche parallele Ebene. Diese Ebenen zerlegen die ganze Wassermenge in $n$ "elementare" Schichten. Es kann wieder angenommen werden, dass sich innerhalb einer Schicht alle Teilchen in gleicher Tiefe befinden. Jetzt können wir die oben ausgesprochene Regel benutzen und die Arbeit bestimmen, die zum Heben einer Schicht notwendig ist.

Das Volumen der Schicht ist gleich dem Volumen des Zylinders mit dem Radius $R$ (wobei $R$ der Radius des Kessels ist) und der Höhe $\frac{1}{n}H$, also gleich

$$\pi R^2 \frac{H}{n}$$

Wenn es sich um die $k$-te Schicht von oben handelt, so ist offenbar ihre Tiefe $\frac{k}{n}H$ und die elementare Arbeit zum Heben der $k$-ten Schicht

$$T_k = \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2}$$

Die Gesamtarbeit $T$ bestimmt man durch Addition dieser Ausdrücke, d.h.

$$T_k = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2} \qquad \text{oder} \qquad T_k = \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

Auf Grund von Formel (8) erhält man

$$T_k = \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{oder} \qquad T_k = \frac{\pi R^2 H^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{17}$$

Diese Gleichung gilt nur annähernd, weil selbst innerhalb einer Schicht einzelne Punkte verschiedene Tiefe haben. Es ist aber klar, dass mit wachsendem $n$ die Genauigkeit dieser Gleichung immer besser wird. Den genauen Ausdruck für die Arbeit erhalten wir, wenn wir den Grenzwert der rechten Seite der Gleichung (17) für unbegrenzt wachsendes $n$ nehmen.

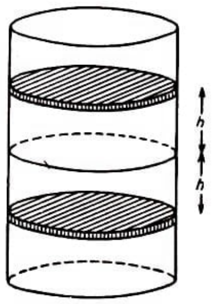


Abb. 6a

Man erhält diesen Grenzwert, wenn man den Bruch $\frac{1}{n}$ vernachlässigt. Das ergibt schließlich

$$T = \frac{\pi R^2 H^2}{2}$$

Benutzen wir die Formel für das Volumen des Zylinders, $V = \pi R^2 H$, so kann diese Größe durch

$$T = V \frac{H}{2}$$

ausgedrückt werden.

Mit anderen Worten: Die uns interessierende Arbeit ist gleich der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um das Gewicht des Kessels um seine halbe Höhe zu heben.

Das errechnete Ergebnis hätte auch ohne Rechnung gewonnen werden können (Abb. 6a). Für die mittlere elementare Schicht ist es selbstverständlich. Zu jeder anderen elementaren Schicht gibt es eine gleichweit von der mittleren entfernte elementare Schicht, so dass beide zusammen um denselben Weg gehoben werden müssten, als wenn beide an der Stelle der mittleren Schicht liegen würden.

Folglich ist die zum Heben des ganzen Flüssigkeitsvolumens notwendige Arbeit genau so groß, als wenn es in der halben Höhe vereinigt wäre (Anm. des Herausgebers)

**15. Auspumpen von Wasser aus einem Trichter.**
Als zweites Beispiel betrachten wir eine ähnliche Aufgabe. Es ist die Arbeit zu bestimmen, die notwendig ist, um einen kegelförmigen Trichter (Abb. 7) leerzupumpen.

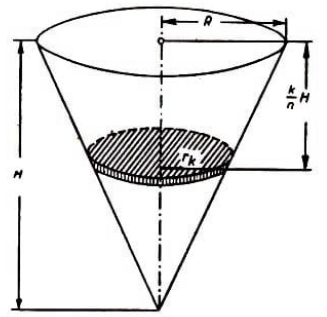


Abb. 7

Wie oben zerlegen wir die ganze Wassermenge in $n$ Schichten der Dicke $\frac{1}{n}H$. Die elementare Arbeit ist gleich dem Produkt aus der Tiefe einer Schicht und ihrem Volumen. Dieses Volumen ist gleich dem Volumen eines Kegelstumpfes. Aber es ist bei weitem bequemer, die Schicht als Zylinder anzusehen. Wir wissen, dass dies nicht ganz genau ist, doch es erleichtert die Rechnung.
Analog zu dem in Nr. 11 Dargelegten überzeugen wir uns davon, dass bei wachsendem $n$ der durch diese Annahme entstehende Fehler verschwindet.

Bezeichnen wir den Radius der $k$-ten Schicht mit $r_k$, so finden wir das Volumen zu

$$\pi r_k^2 \frac{1}{n} H$$

Da die Schicht in der Tiefe $\frac{k}{n}H$ liegt, ist die elementare Arbeit

$$T_k = \pi r_k^2 H^2 \frac{k}{n^2}$$

In diesen Ausdruck geht $r_k$ ein. Wir wollen $r_k$ durch Größen des Kegels ersetzen. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Abb. 7 folgt

$$r_k : R = \left(H - \frac{k}{n}H\right) : H \qquad \text{also} \qquad r_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) R$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für die elementare Arbeit ein, so erhalten wir

$$T_k = \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2}$$

Die ganze uns interessierende Arbeit ist gleich der Summe der elementaren Arbeiten, d.h.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2} \qquad \text{oder}$$

$$T = \pi R^2 H^2 \left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3\right]$$

Benutzen wir die Formeln (8), (9) und (10), so erhält dieser Ausdruck die Gestalt

$$T = \pi R^2 H^2 \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right]$$

Dieser Ausdruck gilt nur annähernd, da die Schichten nicht zylindrisch und die Tiefen der einzelnen Punkte einer Schicht unterschiedlich sind. Lassen wir $n$ unbegrenzt wachsen und nehmen wir den Grenzwert der rechten Seite, so finden wir den genauen Wert der Arbeit:

$$T = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \qquad \text{und schließlich} \qquad T = \frac{1}{12}\pi R^2 H^2$$

Wenn wir uns erinnern[6], dass das Volumen des Kegels

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

ist, so können wir diese Formel in der Gestalt

$$T = V \cdot \frac{H}{4}$$

schreiben; die gesuchte Arbeit ist gleich der Arbeit, die notwendig ist, um den ganzen Trichterinhalt um $1/4$ seiner Höhe zu heben.

**16. Auspumpen von Wasser aus einer Halbkugel.**
Wir lösen noch eine Aufgabe der gleichen Art. Wir wollen die Arbeit bestimmen, die notwendig ist, um Wasser aus einem halbkugelförmigen Gefäß zu pumpen (Abb. 8).

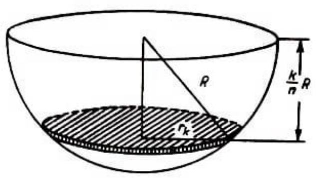


Abb. 8

Wir beginnen genau wie oben, indem wir die ganze Wassermenge in $n$ horizontale Schichten der Dicke $\frac{1}{n}R$ zerlegen. Wir nehmen an, jede dieser Schichten sei ein Zylinder vom Radius $r_k$ (wenn es sich um die $k$-te Schicht handelt). Wir sehen, dass ihr Volumen

$$V_k = \pi r_k^2 \frac{1}{n} R$$

und daher die elementare Arbeit

$$T_k = \pi r_k^2 \frac{k}{n^2} R^2$$

ist.
Wir drücken jetzt den Radius $r_k$ der $k$-ten Schicht durch den Kugelradius $R$ aus. Wie aus Abb. 8 ersichtlich, kann dazu der Satz des Pythagoras benutzt werden, was

$$r_k^2 = R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2$$

[6] Diese Formel wird übrigens in Nr. 18 abgeleitet.

ergibt. Daraus folgt

$$T_k = \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2}$$

Die Gesamtarbeit ist die Summe der elementaren Arbeiten:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2} \qquad \text{oder} \qquad T = \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right]$$

woraus man auf Grund der Formeln des § 1

$$T = \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \qquad \text{oder}$$

$$T = \pi R^4 \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right]$$

erhält.
Dieser Näherungswert für die Arbeit geht in den genauen Wert über, wenn wir $\frac{1}{n}$ durch den Grenzwert Null ersetzen, was

$$T = \pi R^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \qquad \text{und schließlich} \qquad T = \frac{1}{4}\pi R^4$$

ergibt.

**17. Auspumpen von Wasser aus einem Trog.**
Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir die Arbeit bestimmen, die notwendig ist, um alles Wasser aus einem Trog, d.h. einem Gefäß der Form eines Halbzylinders (Abb. 9), zu pumpen.

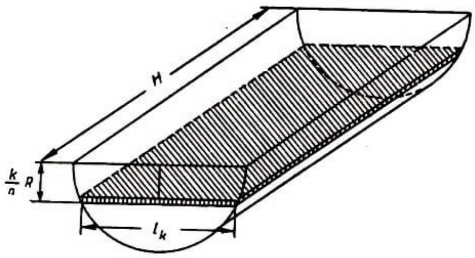



Abb. 9

Wir wenden wieder die Methode der Zerlegung in unendlich klein werdende Summanden an. Wir zerlegen die ganze Wassermenge in $n$ schmale horizontale Schichten, welche die Form rechteckiger Tafeln haben (Abb. 9). Das Volumen einer solchen Tafel ist

$$V_k = H l_k \frac{R}{n}$$

wenn wir mit $l_k$ ihre Breite bezeichnen. Diese Breite $l_k$ ist (als Sehne des Kreises im Abstand $\frac{k}{n}R$ vom Mittelpunkt) nach dem Satz des Pythagoras gleich

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}$$

Das Volumen einer Tafel ist somit

$$V_k = 2R^2H\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$$

hieraus folgt, dass die elementare Arbeit

$$T_k = 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}$$

und die Gesamtarbeit

$$T = \sum_{k=1}^{n} 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2} \qquad \text{oder} \qquad T = 2R^3H\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2} \tag{18}$$

ist.
Dieser Ausdruck gilt jedoch nur annähernd. Um den genauen Wert der Arbeit zu finden, lassen wir $n$ unbegrenzt wachsen und nehmen den Grenzwert der rechten Seite der Gleichung (18):

$$T = 2R^3H\lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right] \tag{19}$$

Somit ist die Aufgabe auf die Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right] \tag{20}$$

für unbegrenzt wachsendes $n$ zurückgeführt. Wir wenden uns noch einmal Nr. 13 zu und sehen, dass dieser Grenzwert mit dem Grenzwert (16) übereinstimmt. Wir können diesen Grenzwert auch jetzt noch nicht bestimmen, so dass die Lösung von zwei verschiedenen physikalischen Aufgaben nicht zu Ende geführt werden kann. Wie schon in Nr. 13 gesagt, werden wir später in Nr. 23 den Grenzwert (20) bestimmen und damit beide Aufgaben lösen.

# 4 Volumenbestimmungen

### 18. Das Volumen des Kegels.

Die oben entwickelten Methoden können zur Lösung einer ganzen Reihe von geometrischen Aufgaben dienen. In diesem Paragraphen wollen wir diese Methoden zur Bestimmung des Volumens verschiedener Körper anwenden.[7]

Zunächst soll das Volumen des Kegels bestimmt werden. Zur Lösung dieser Aufgabe teilen wir die Höhe des Kegels (Abb. 10) in $n$ Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}H$ und legen durch die Teilpunkte Ebenen parallel zur Grundfläche des Kegels. Diese Ebenen zerlegen den Kegel in $n$ Schichten.

[7] Da uns in der Hauptsache die rechnerische Seite interessiert, wollen wir hier nicht über die genaue Definition des Begriffs Volumen sprechen. Zu einer solchen Definition muss man bekanntlich bereits den Grenzwertbegriff benutzen.

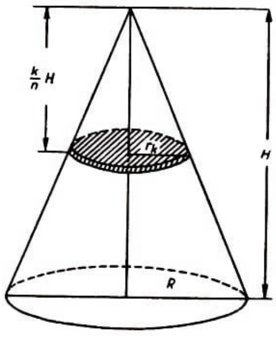


Abb. 10

Wir sehen jede dieser Schichten (die in Wirklichkeit Kegelstümpfe sind) als Zylinder an. Dies ist natürlich nicht genau, aber bei wachsendem $n$ wird der Fehler beliebig klein.

Wir bezeichnen den Radius des $k$-ten "elementaren" Zylinders mit $r_k$ und finden, dass der Inhalt dieses Zylinders gleich

$$V_k = \pi r_k^2 \frac{H}{n}$$

ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke erhält man

$$r_k : R = \frac{k}{n} H : H$$

und somit

$$r_k = \frac{k}{n} R$$

Der Ausdruck für das elementare Volumen erhält die Form

$$V_k = \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3}$$

und das ganze Volumen wird

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3} \qquad \text{oder} \qquad V = \pi R^2 H \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

was auf Grund von Formel (9) gleich

$$V = \pi R^2 H \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \qquad \text{oder} \qquad V = \pi R^2 H \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} \tag{21}$$

ist.
Dieser Wert für das Volumen ist nur annähernd richtig, da wie schon gesagt, die einzelnen Schichten keine Zylinder sind.
Je größer aber die Zahl $n$ ist, desto genauer wird dieser Ausdruck. Das bedeutet, dass der wirkliche Wert für $V$ der Grenzwert der rechten Seite der Gleichung (21) für unbegrenzt wachsendes $n$ ist. Diesen Grenzwert erhält man offensichtlich aus (21), indem man den Bruch $\frac{1}{n}$ durch den Grenzwert Null ersetzt, so dass

$$V = \pi R^2 H \cdot \frac{1 \cdot 2}{6} \qquad \text{und schließlich} \qquad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Also ist das Volumen des Kegels gleich einem Drittel des Produkts aus Grundfläche und Höhe.

**19. Das Volumen der Pyramide.**

Ähnliche Überlegungen lassen uns das Volumen der Pyramide bestimmen. Wir betrachten eine Pyramide der Höhe $H$ und der Grundfläche $F$ (Abb. 11).

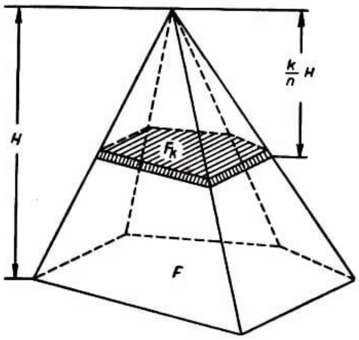


Abb. 11

Wir zerlegen die Pyramide in $n$ prismatische Tafeln der Höhe $\frac{1}{n}H$, indem wir die Höhe in $n$ gleiche Abschnitte teilen und durch die Teilpunkte Ebenen legen, die parallel zur Grundfläche sind. (Genau genommen sind diese Tafeln keine Prismen, sondern Pyramidenstümpfe, aber man kann sie wieder als Prismen ansehen).

Ist der Flächeninhalt der $k$-ten Tafel $F_k$, so folgt leicht die Proportion

$$F_k : F = k^2 : n^2 \qquad \text{so dass} \qquad F_k = \frac{k^2}{n^2}F$$

und das Volumen einer Tafel gleich

$$V_k = F_k \cdot \frac{H}{n} = \frac{k^2}{n^3}FH$$

ist. Das Volumen der ganzen Pyramide ist gleich der Summe der elementaren Volumina:

$$V = \frac{FH}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

oder (auf Grund von Formel (9))

$$V = \frac{FH}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Wir lassen nun $n$ unbegrenzt wachsen und gehen auf der rechten Seite zum Grenzwert über. So erhalten wir die genaue Gleichung

$$V = \frac{1}{3}FH$$

Analog zum Volumen des Kegels ist das Volumen der Pyramide gleich einem Drittel des Produktes von Grundfläche und Höhe.

**20. Das Volumen der Kugel.**

Wir wollen nun das Volumen der Kugel bestimmen. Offenbar ist die Aufgabe gelöst, wenn wir unsere Betrachtungen auf die Halbkugel beschränken und dann das Resultat verdoppeln. Wir zerlegen die Halbkugel durch Ebenen in Schichten der Höhe $\frac{1}{n}R$ (Abb. 12) und sehen diese Schichten als Zylinder an.

Ist $r_k$ der Radius der $k$-ten Schicht, so ist ihr Volumen

$$V_k = \pi r_k \frac{R}{n}$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$r_k^2 = R^2 - \frac{k^2}{n^2} R^2$$

so dass der Ausdruck für das elementare Volumen die Form

$$V_k = \pi R^3 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{1}{n}$$

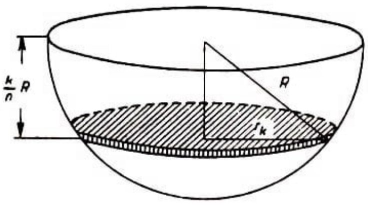


Abb. 12

erhält. Das Volumen $V^*$ der Halbkugel ist die Summe dieser $Vk$:

$$V^* = \pi R^3 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right]$$

und dies ist auf Grund der Formeln des 5 1 gleich

$$V^* = \pi R^3 \frac{6 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für unbegrenzt wachsendes $n$ gibt den genauen Wert des Volumens der Halbkugel:

$$V^* = \frac{2}{3} \pi R^3$$

woraus folgt, dass das Volumen der ganzen Kugel

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ist.

**21. Das Volumen des gemeinsamen Teiles zweier Zylinder.**

Jetzt wollen wir eine schwierigere Aufgabe lösen. Wir betrachten zwei Zylinder mit gleichen Radien, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen (Abb. 13).

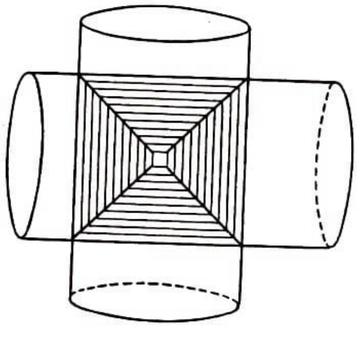


Abb. 13

Es sei die Aufgabe gestellt, das Volumen des Körpers zu bestimmen, den die beiden Zylinder gemeinsam haben. Das Problem besteht in der komplizierten Form des gesuchten Körpers und in der damit zusammenhängenden Schwierigkeit, sich ihn anschaulich vorzustellen.
Aber man kann diese Aufgabe auch ohne diese Vorstellung des ganzen Körpers lösen.

Wir betrachten die Ebene, die durch die Achsen der beiden Zylinder hindurchgeht; wir wollen sie "Achsenebene" nennen. Diese Ebene (sie möge mit der Zeichenebene zusammenfallen) teilt den Körper in zwei gleiche Teile, einen "vorderen" und einen "hinteren". Wir beschränken unsere Berechnung auf eine, etwa die vordere Hälfte, was offenbar zur Lösung ausreicht.

Wir stellen uns jetzt irgendeine Ebene vor, die parallel zur Achsenebene liegt. Sie schneidet jeden Zylinder in einem Streifen, Wobei offenbar beide Streifen gleich breit sind. Daher ist der Schnitt dieser Ebene mit dem Körper ein Quadrat.
Jetzt ist es nicht mehr schwer, die Aufgabe zu lösen. Wir errichten im Schnittpunkt der Zylinderachsen eine Senkrechte. Die Länge der Senkrechten in der vorderen Hälfte des uns interessierenden Körpers ist gleich $R$. Wir teilen diese Strecke in $n$ Abschnitte und legen durch die Teilpunkte Ebenen parallel zur Achsenebene.

Sie zerschneiden die vordere Hälfte des gesuchten Körpers in $n$ quadratische Tafeln der Höhe $\frac{1}{n}R$.

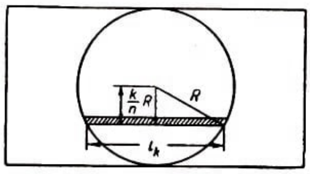


Abb. 14

Wie man aus Abb. 14 entnimmt, in der der gesuchte Körper in Aufsicht dargestellt ist, ist die Seite des $k$-ten Quadrates

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}$$

Sein Flächeninhalt ist

$$l_k^2 = 4R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

und das Volumen der $k$-ten Tafel

$$V_k = l_k^2 \cdot \frac{R}{n} = 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

Das Volumen $V^*$ der vorderen Hälfte des Körpers ist die Summer aller $V_k$, d.h.

$$V^* = \sum_{k=1}^{n} 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

woraus man

$$V^* = 4R^3 \left[ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right] \qquad \text{oder} \qquad V^* = 4R^3 \left[ 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

erhält.
Diese Näherungsgleichung geht bei unbegrenzt wachsendem $n$ in eine genaue Gleichung über.
Das Volumen der vorderen Hälfte des Körpers ist dann gleich

$$V^* = \frac{8}{3} R^3$$

Wir erhalten das ganze Volumen, indem wir den gefundenen Wert verdoppeln:

$$V = \frac{16}{3} R^3$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Es ist interessant, dass das Volumen dieses komplizierten Körpers ein rationaler Ausdruck in $R$ ist.

**22. Das Volumen des Zylinderabschnitts.**
Wir betrachten einen sogenannten "Zylinderabschnitt" - einen Körper, der mittels einer Ebene durch einen Durchmesser der Zylindergrundfläche vom Zylinder abgeschnitten wird (Abb. 15). Es sei $AB = H$ und $OA = R$ (in den Bezeichnungen der Abb. 15). Wir wollen das Volumen des Abschnitts durch $H$ und $R$ ausdrücken.

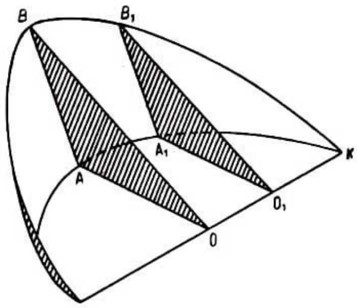



Abb. 15

Zu diesem Zweck teilen wir den Radius $OK$ in $n$ Teile und legen durch die Teilpunkte Ebenen parallel zur Ebene des Dreiecks $OAB$. Diese Ebenen zerlegen den halben Zylinderabschnitt in $n$ dreieckige Tafeln der Dicke $\frac{1}{n}R$. Eine dieser Tafeln $O_1A_1B_1$ ist in der Skizze dargestellt. Wir suchen jetzt das Volumen der $k$-ten Tafel, wobei wir sie als Prisma ansehen.
Es sei $O_1A_1B_1$, die $k$-te Tafel, so dass $OO_1 = \frac{k}{n}R$.
Nach dem Satz des Pythagoras findet man leicht

$$O_1A_1 = \sqrt{OA_1^2 - OO_1^2} \qquad \text{also} \qquad O_1A_1 = R\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $OAB$ und $O_1A_1B_1$ folgt

$$A_1B_1 : AB = O_1A_1 : OA \qquad \text{oder} \qquad A_1B_1 : H = R\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} : R$$

woraus man

$$A_1B_1 = H\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

erhält.
Der Flächeninhalt des Dreiecks $O_1A_1B_1$ ist gleich $\frac{1}{2} \cdot O_1A_1 \cdot A_1B_1$ oder gleich

$$\frac{1}{2}RH\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

Das Volumen der $k$-ten Tafel erhält man, wenn man diesen Flächeninhalt mit der Dicke der Tafel, d.h. mit $\frac{1}{n}R$ multipliziert. Für dieses Teilvolumen gilt also

$$V_k = \frac{1}{2}R^2H\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

und das Volumen $V^*$ des halben Abschnitts ist (angenähert)

$$V^* = \frac{1}{2}R^2H\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\right] \qquad \text{oder} \qquad V^* = \frac{1}{2}R^2H\left[1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{6}\right]$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks gibt uns den genauen Wert für das Volumen des halben Abschnitts:

$$V^* = \frac{1}{3}R^2H$$

woraus man das Volumen des ganzen Abschnitts erhält:

$$V = \frac{2}{3}R^2H \tag{22}$$

**23. Eine andere Lösungsmethode.**
Wir versuchen, unsere Aufgabe auf eine andere Art zu lösen. Wir teilen den Radius $OA$ in $n$ Teile (Abb. 16) und legen durch die Teilpunkte Ebenen senkrecht zu diesem Radius.

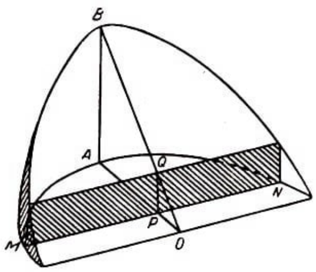


Abb. 16

Sie zerschneiden den ganzen Zylinderabschnitt in $n$ rechteckige Tafeln der in der Abbildung schraffierten Art.
Wir untersuchen nun, wie groß das Volumen der $k$-ten Tafel ist. (Wir nehmen an, sie sei ein Prisma.) Ihre Dicke ist gleich $\frac{1}{n}R$, so dass sich die Aufgabe auf die Bestimmung des Flächeninhalts der Abb. 16 einzelnen Tafel reduziert.

Wenn wir annehmen, der schraffierte Streifen sei etwa der $k$-te, so ist

$$OP = \frac{k}{n}R$$

In diesem Fall gilt nach dem Satz des Pythagoras für die Sehne

$$MN = 2\sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $OPQ$ und $OAB$ folgt

$$PQ : OP = AB : OA \qquad \text{oder} \qquad PQ : \frac{k}{n}R = H : R$$

so dass $PQ = \frac{k}{n}H$ ist, und der Inhalt des Rechtecks, der gleich $PQ \cdot MN$ ist, ergibt sich zu

$$2RH\frac{k}{n}\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

Daher ist das elementare Volumen

$$V_k = 2R^2H \cdot \frac{k}{n^3}\sqrt{n^2 - k^2}$$

Das ganze Volumen ist dann die Summe:

$$V = 2R^2H \cdot \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}$$

Jedoch gilt diese Gleichung nur annähernd, und wir erhalten aus ihr die genaue Gleichung, wenn wir die rechte Seite durch ihren Grenzwert für unbegrenzt wachsendes $n$ ersetzen. Das ergibt

$$V = 2R^2H \lim \left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right] \tag{23}$$

Hier gelangen wir zum dritten Male zum Grenzwert

$$\lim \left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right]$$

Wir wissen noch nicht, mit Hilfe welcher Rechenoperationen wir diesen Grenzwert finden können, und die Aufgabe kann auf diese Art nicht gelöst Werden. Dagegen können wir durch Vergleich der Ausdrücke (22) und (23) diesen uns interessierenden Grenzwert bestimmen. Wir dividieren beide durch $2R^2H$ und erhalten

$$\lim \left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right] = \frac{1}{3} \tag{24}$$

Damit haben wir den Grenzwert bestimmt.

Wir kehren zurück zu Nr. 13, setzen den gefundenen Grenzwert in die Gleichung (15) ein und finden den gesuchten Druck

$$P = \frac{2}{3}R^3$$

Genauso finden wir in Nr. 17 für die uns interessierende Arbeit, wenn wir den Grenzwert in die Gleichung (19) einsetzen,

$$T = \frac{2}{3}R^3 H$$

**24. Allgemeine Bemerkungen.**
Alle hier behandelten Aufgaben wurden im Grunde genommen nach der gleichen Methode gelöst. Diese Methode besteht in folgendem:
Die zu bestimmende Größe wird in eine Summe von sehr vielen, sehr kleinen, gleichartigen Summanden zerlegt. Diese kleinen "elementaren" Summanden lassen sich angenähert berechnen, mit der Maßgabe, dass bei wachsender Anzahl der Summanden die Genauigkeit dieser Ausdrücke zunimmt. Den ganzen uns interessierenden Wert finden wir durch die Summierung der elementaren Summanden.
Der so erhaltene Wert für die gesuchte Größe in Form einer Summe ist jedoch ungenau. Um den genauen Wert zu bestimmen, müssen wir zum Grenzwert übergeben, indem wir die elementaren Summanden unbegrenzt verkleinern.

Wir können zusammenfassen: Die geschilderte Methode besteht darin, die gesuchte Größe als Grenzwert einer Summe einer unbegrenzt wachsenden Anzahl unbegrenzt abnehmender Summanden oder, wie man auch sagt, als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Summanden darzustellen.

Dies ist eine der wichtigsten Methoden der höheren Mathematik. Sie gehört in das Gebiet, das man Integralrechnung nennt. Hier werden gerade solche Grenzwerte von Summen einer unbegrenzt wachsenden Anzahl von unbegrenzt abnehmenden Summanden betrachtet. Diese Grenzwerte nennt man Integrale.
Wenn wir jetzt die in den vorhergehenden Paragraphen gelösten Aufgaben betrachten, können wir sagen, dass wir in jeder ein Integral zu berechnen hatten.

Die von uns betrachteten Summen hatten eine sehr einfache Form. Es waren nur Summen folgender drei Typen:

$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Bei der Bestimmung dieser Summen stützen wir uns auf die Formeln des Paragraphen 1. Als wir jedoch auf Summen der komplizierten Form

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}$$

stießen, konnten wir nur mit Hilfe eines Kunstgriffs den Grenzwert bestimmen. Wären wir hier nicht auf die Idee gekommen, die Aufgabe Nr. 22 auf zwei Arten zu lösen, so hätten wir den Grenzwert nicht bestimmen und die Aufgaben aus Nr. 13 und Nr. 17 nicht lösen können. In der Integralrechnung werden allgemeine Methoden zur Bestimmung der Grenzwerte von Summen sehr komplizierter Art behandelt, so dass die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben außerordentlich erleichtert, sozusagen "mechanisiert" wird.

Die Mathematiker fanden diese allgemeinen Methoden nicht auf einmal. Ganz im Gegenteil, sie sind das Resultat der gemeinsamen Arbeit vieler Generationen. Ihre heutige Form erhielten diese Methoden in den Arbeiten von Leibniz (1646-1716) und Newton (1942-1727), wenn auch das Prinzip der Summierung unendlich vieler unendlich kleiner Größen lange vorher bekannt war. Im Grunde genommen war diese Idee bereits den Mathematikern des antiken Griechenlands bekannt. Insbesondere kannte Archimedes (287-212 v.u.Z.) bereits das Volumen der Kugel, des Kegels und sogar das Volumen des Zylinderabschnitts.

Im Mittelalter befand sich die Wissenschaft im Zustand tiefen Verfalls, und erst mit Beginn des 16. Jahrhunderts begannen die Naturwissenschaften und besonders die Mathematik sich weiter zu entwickeln. Zunächst entdeckten die Gelehrten nur die Ergebnisse des Altertums wieder, aber dann begannen sie allmählich weiter zu gehen als die) Griechen.
Dies gilt auch für die uns hier interessierende Methode der Summierung unendlich kleiner Größen. Diese Methode wurde in den Arbeiten Keplers "Nova stereometria doliorum vinariorum" (Neue Stereometrie der Weinfässer) (1615) und Cavalieris "Geometrie der Indivisiblen" (1635) weiter entwickelt.

Jedoch kannten beide weder allgemeine Methoden zur Grenzwertbestimmung noch Integrale. Somit ähnelt unser Büchlein dem Stoff nach dem Inhalt der Arbeiten Keplers und Cavalieris, wenn auch die Form der Darstellung wesentlich verschieden ist.

In späteren Untersuchungen fand man allmählich allgemeinere Methoden, Integrale zu bestimmen. Wie bereits erwähnt, wurde diese Aufgabe erst von Leibniz und Newton gelöst (der Terminus "Integral" entstammt der Leibnizschen Schule und wurde im Jahre 1690 eingeführt).

**25. Das Cavalierische Prinzip.**
Cavalieri, der noch keine Grenzwerte von Summen komplizierter Form bestimmen konnte, entdeckte ein sehr nützliches Prinzip, das es ihm in einer Reihe von Fällen ermöglichte, die Berechnung dieser Summen zu vermeiden. Dieses Prinzip kann man wie folgt formulieren.

Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen $P$ und $Q$ (Abb. 17) und liefert jeder Schnitt mit einer zu $P$ und $Q$ parallelen Ebene $R$ stets gleich große Schnittflächen, so besitzen beide Körper gleiches Volumen.

Zum Beweis zerschneiden wir mit $n-1$ zu $P$ und $Q$ parallelen Ebenen beide Körper in $n$ Platten.
Wenn wir annehmen, dass diese Platten annähernd zylindrische oder prismatische Formen haben, so finden wir, dass ihre Volumina übereinstimmen. Dann sind auch die

Volumina der Ausgangskörper gleich, da man ja beide durch Summierung der Volumina der Platten erhält.

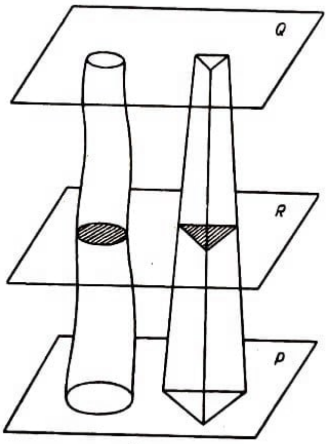


Abb. 17

Diese Gleichheit der Volumina scheint zunächst nur annähernd richtig, da sie aber mit beliebigem Genauigkeitsgrad gelten, schließen wir, dass sie absolut genau gilt.

Man kann dieses Prinzip leicht verallgemeinern. Es lässt sich nämlich folgendes zeigen:

Stehen die Flächeninhalte der Schnittfiguren in einem konstanten Verhältnis zueinander, so stehen auch die Volumina im selben Verhältnis.
Es erfordert keine Mühe, ein ähnliches Prinzip auch für die Ebene aufzustellen, in diesem Fall lautet es:

Liegen zwei ebene Figuren I und II zwischen zwei parallelen Geraden $p$ und $q$ und besitzen sie die Eigenschaft, dass die beim Schnitt mit jeder zwischen $p$ und $q$ zu $p$ und $q$ parallel verlaufenden Geraden $r$ entstehenden Strecken gleich lang sind, so sind die Figuren flächengleich.

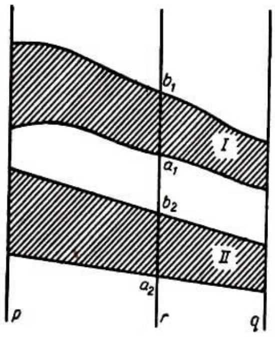


Abb. 18

Ist das Verhältnis der Strecken $a_1b_1$ und $a_2b_2$ (unabhängig von der Lage der Geraden $r$) gleich $k$, so ist, das Verhältnis der Inhalte der Figuren I und II gleich $k$.
Der Beweis dieser Behauptung verläuft nach demselben Schema wie beim Volumen; Wir überlassen ihn dem Leser.

# 5 Parabel und Ellipse

### 26. Der Flächeninhalt der Parabel.

Wir betrachten die Kurve, deren Gleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem

$$y = ax^2 \tag{25}$$

lautet. Diese Kurve heißt Parabel. Sie ist in Abb. 19 dargestellt. (Wir setzen $a > 0$ voraus.)
Wir wählen jetzt auf der Parabel einen beliebigen Punkt $M$ und fällen von ihm das Lot $MP$ auf die $x$-Achse. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Flächeninhalt $F$ des krummlinigen Dreiecks $OMP$ zu bestimmen.

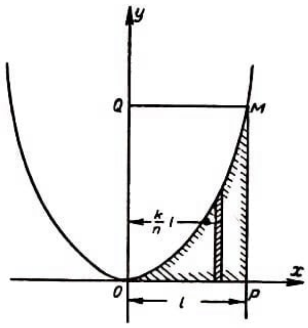



Abb. 19

Zur Lösung dieser Aufgabe zerlegen wir die Strecke $OP$ in $n$ gleiche Teile und errichten in den Teilpunkten Senkrechte bis zum Schnitt mit der Parabel. Diese Senkrechten zerlegen die gesuchte Fläche in $n$ schmale, senkrechte Streifen.

Wir können diese elementaren Streifen als Rechtecke ansehen. Unter dieser Voraussetzung bestimmen wir ihren Flächeninhalt.
Wir bezeichnen die ganze Länge $OP$ mit $l$ und betrachten den $k$-ten Streifen. Seine Breite ist $\frac{1}{n}l$, seine Höhe erhalten wir durch folgende Überlegung: Der Abstand des Streifens von der $y$-Achse ist gleich $\frac{k}{n}l$, und da sein oberer Rand auf der Parabel liegt, ist die Höhe des Streifens gleich der Ordinate des Parabelpunktes, also nach Gleichung (25) gleich

$$a\left(\frac{k}{n}l\right)^2$$

Hieraus ergibt sich der Flächeninhalt des Streifens zu

$$al^3\frac{k^2}{n^3}$$

Der Flächeninhalt des ganzen Dreiecks $OMP$ ist die Summe

$$F=\sum_{k=1}^{n} al^3\frac{k^2}{n^3} \qquad \text{oder} \qquad F=al^3\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

oder schließlich

$$F=\frac{al^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Um hieraus die genaue Gleichung zu erhalten, müssen wir die Zahl $n$ unbegrenzt wachsen lassen. Als Grenzwert finden wir dann

$$F=\frac{al^3}{3}$$

Diesem Resultat kann man eine einfache geometrische Formulierung geben. Dazu betrachten wir das Rechteck $OQMP$. Sein Flächeninhalt ist offenbar gleich $OP\cdot PM$. Nun ist $OP$ aber gleich $l$, während $PM$ die Ordinate des Punktes $M$ mit der Abszisse $l$ ist. Aus der Parabelgleichung folgt dann $PM=al^2$.

Daher ist der Flächeninhalt von $OQMP$ gleich $al^3$ und somit der Flächeninhalt des Dreiecks $OMP$ gleich einem Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks $OQMP$. Daraus folgt, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Dreiecks $OQM$ gleich 2/3 des Flächeninhalts des Rechtecks ist.

Dieses elegante Ergebnis wurde von Archimedes gefunden.
Die Bestimmung des Inhalte einer beliebigen Fläche nennt man gewöhnlich Quadratur dieser Fläche (denn sie besteht im Vergleich mit dem Flächeninhalt des Quadrate). Wir haben also hier die Quadratur der Parabel durchgeführt.

**27. Das Volumen eines Rotations-Paraboloids.**
Wir nehmen an, die eben betrachtete Parabel drehe sich ("rotiere") um die $y$-Achse (Abb. 20). Die so entstehende Figur heißt Rotations-Paraboloid.

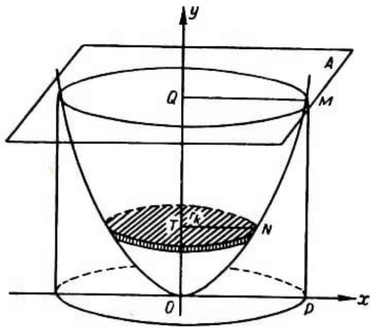


Abb. 20

Wir betrachten nun die Ebene $A$, die senkrecht zur $y$-Achse liegt, und bestimmen das Volumen des vom Paraboloid und dieser Ebene begrenzten Körpers.

Dazu teilen wir die Strecke[8] $OQ$ in $n$ gleiche Teile und legen durch die Teilpunkte zu $A$ parallele Ebenen. Diese Ebenen zerlegen den uns interessierenden Körper in $n$ Schichten, die annähernd die Form eines Zylinders haben.
Wir bezeichnen die Entfernung $OB$ mit $l$ und finden dann genau wie oben, dass $OQ = al^2$ ist. Folglich ist die Höhe eines elementaren Zylinders gleich $\frac{1}{n}al^2$.

Wir bestimmen nun den Radius des $k$-ten Zylinders. Dieser Radius $r_k = NT$ ist offenbar die Abszisse des Parabelpunktes $N$.
Da die Ordinate dieses Punktes gleich

$$\frac{k}{n}OQ = \frac{k}{n}al^2$$

ist, ergibt sich aus der Parabelgleichung

$$\frac{k}{n}al^2 = ar_k^2$$

woraus

$$r_k^2 = \frac{k}{n}l^2$$

folgt. Die Grundfläche des $k$-ten Zylinders ist dann

$$\pi r_k^2 = \pi l^2 \frac{k}{n}$$

[8]Wir benutzen die Bezeichnungen der Abb. 20.

Also ist das elementare Volumen

$$V_k = a\pi l^4 \frac{k}{n^2}$$

Das gesuchte Volumen $V$ ist somit

$$V = a\pi l^4 \cdot \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Nach einfachen Rechnungen erhalten wir

$$V = a\pi l^4 \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Wir lassen jetzt $n$ unbegrenzt wachsen und finden den genauen Wert für das Volumen des Paraboloids:

$$V = \frac{1}{2}\pi a l^4$$

Wir vergleichen noch dieses Volumen mit dem Volumen des Zylinders mit dem Radius $R = OP$ und der Höhe $H = OQ$, dieses Volumen ist gleich

$$\pi R^2 H = \pi (OP)^2 \cdot OQ = \pi l^2 \cdot a l^2 = \pi a l^4$$

Wir können nun den Satz des Archimedes formulieren:

Das Volumen des Rotations-Paraboloids ist gleich dem halben Volumen des Zylinders mit gleicher Höhe und Grundfläche.

### 28. Die Ellipse und ihr Flächeninhalt.

Wir behandeln jetzt eine sehr wichtige Kurve, die Ellipse. Wir definieren sie als abgeplatteten Kreis. Diese "Definition" wollen wir nun näher erläutern.

Wir betrachten den Kreis mit dem Radius $a$, dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems der Ebene zusammenfällt (Abb. 21).

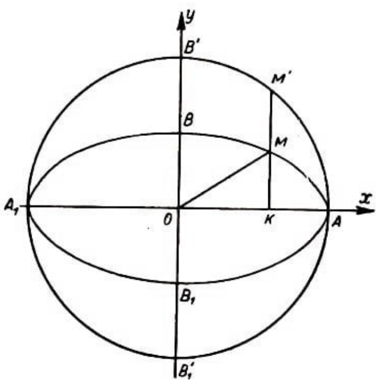



Abb. 21

Die Ordinaten $KM'$ aller Punkte $M'$ des Kreises verkürzen wir im gleichen Verhältnis $q < 1$:

$$KM : KM' = q$$

Diese Operation verwandelt den Kreis $A_1B'AB_1'$ in eine Figur, die wir Ellipse nennen wollen. Wir wollen jetzt ihre Gleichung bestimmen. Wenn wir die Koordinaten des Punktes $M$ der Ellipse mit $x$ und $y$ bezeichnen, so folgt aus der Definition der Ellipse

$$y = q \cdot KM'$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$KM' = \sqrt{(OM')^2 - (OK)^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Somit ist

$$y = q\sqrt{a^2 - x^2}$$

Wenn wir jetzt noch die Strecke $OB$ durch $b$ bezeichnen, so erhalten wir aus der Definition der Ellipse

$$b : a = OB : OB' = q$$

so dass $q = \frac{b}{a}$ ist. Die Ellipsengleichung erhält dann die Form

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad , \qquad \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und schließlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dies ist die sogenannte "kanonische" oder "Mittelpunktsgleichung" der Ellipse.

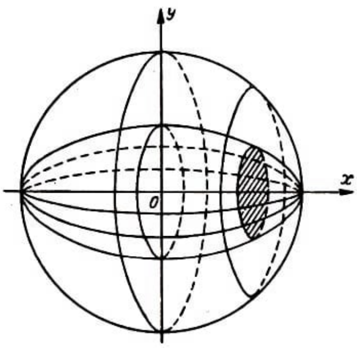



Abb. 22

Wir bestimmen jetzt den Flächeninhalt der Ellipse. Dazu benutzen wir die Bemerkung zum Cavalierischen Prinzip vom Schluss der Nr. 25. Wir können sofort sagen, dass das Verhältnis der Ellipsenfläche zur Kreisfläche gleich $q$ ist, so dass, wenn wir die Fläche der Ellipse mit $F$ bezeichnen,

$$F : \pi a^2 = q \qquad \text{oder} \qquad F = q\pi a^2$$

ist. Wir setzen $q = \frac{b}{a}$ ein und erhalten schließlich

$$F = a\pi ab$$

Nach dem Cavalierischen Prinzip können wir auch leicht das Volumen des Rotations-Ellipsoids, d.h. des Körpers, der bei der Drehung der Ellipse um die $x$-Achse entsteht

(Abb. 22), bestimmen. Das Verhältnis der Radien der Kreise, die man beim Schnitt der Ellipsoidfläche mit zur $x$-Achse senkrechten Ebenen erhält, zu den Radien der Kreise beim Schnitt dieser Ebenen mit der Kugel ist $q$.

Folglich ist das Verhältnis der Flächeninhalte gleich $q^2$. Nach dem Cavalierischen Prinzip haben die Volumina dann das gleiche Verhältnis. Es ist also

$$V : \frac{4}{3}\pi a^3 = q^2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{und} \qquad V = \frac{4}{3}\pi ab$$

# 6 Die Sinuskurve

**29. Eine trigonometrische Summe.**
Wir benötigen in den folgenden Betrachtungen eine Formel für die Summe

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + ... + \sin n\alpha \tag{26}$$

wobei $\alpha$ ein beliebiger fester Winkel ist.
Um diese Summe zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (26) mit $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + ... + 2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

und wenden auf jeden Summanden der rechten Seite das (hier als bekannt vorausgesetzte) Additionstheorem

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

an. Dies liefert

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = \left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3}{2}\alpha\right] + \left[\cos\frac{3}{2}\alpha - \cos\frac{5}{2}\alpha\right] + ... + \left[\cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right]$$

Man sieht unmittelbar, dass der erste Summand jeder Klammer (außer der ersten) durch den zweiten Summanden der vorhergehenden Klammer aufgehoben wird. Daher ist

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha \tag{27}$$

Wenden wir die wohlbekannte Formel

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

an, so geht (27) in die Form

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$$

über, woraus

$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

folgt. Also ist

$$\sum_{k_1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{28}$$

Dies ist die gewünschte Formel.

**30. Eine Ungleichung.**
Es sei $\alpha$ ein beliebiger Winkel[9] zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.
In diesem Fall gelten die Ungleichungen

$$\tan\alpha > \alpha > \sin\alpha \tag{29}$$

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Abb. 23.

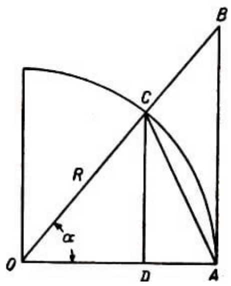



Abb. 23

Daraus ersehen wir unmittelbar, dass das Dreieck $OCA$ ganz im Sektor $OCA$ liegt, der seinerseits im Dreieck $OAB$ enthalten ist.
Daraus folgt für die Flächeninhalte die Ungleichung

$$\text{Flächeninhalt } \triangle OAB > \text{ Flächeninhalt des Sektors } OCA > \text{ Flächeninhalt } \triangle OCA$$

Mit anderen Worten

$$\frac{1}{2}OA \cdot AB > \frac{1}{2}R \cdot \overset{\frown}{CA} > \frac{1}{2}OA \cdot CD$$

Wegen

$$OA = R, \quad AB = R\tan\alpha, \quad \overset{\frown}{CA} = R\alpha, \qquad CD = R\sin\alpha$$

ist

$$\frac{1}{2}R^2\tan\alpha > \frac{1}{2}R^2\alpha > \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

Wir dividieren jetzt diese Ungleichungskette durch den positiven Faktor $\frac{1}{2}R^2$ und erhalten die Ungleichungen (29).

[9]Genauer, $\alpha$ ist der Wert des Winkels im Bogenmaß.

### 31. Der Sinus unendlich kleiner Winkel.

Wir nehmen an, dass der Winkel $\alpha$ gegen Null strebt und dabei die Folge $\alpha_1, \alpha_2$, ... durchläuft. In diesem Fall gilt die Formel

$$\lim \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1$$

Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Formeln.
Es ist zweckmäßig, sich den Wortlaut der Formel (30) zu merken:

Der Grenzwert des Quotienten des Sinus eines unendlich klein werdenden Winkels durch den Wert des Winkels im Bogenmaß ist gleich Eins.

Zum Beweis der Behauptung können wir annehmen, dass $\alpha$ positiv ist; denn der Wert des Quotienten $\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$ ändert sich nicht, wenn wir $\alpha$ durch $-\alpha$ ersetzen.
Außerdem wollen wir voraussetzen, was bei hinreichend großem $n$ immer der Fall ist. Dann ist

$$0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$$

und nach (29)

$$\tan \alpha_n > \alpha_n > \sin \alpha_n$$

Wenn wir alle Ausdrücke in der Ungleichung durch die positive Zahl $\sin \alpha_n$ dividieren, erhalten wir

$$\frac{1}{\cos \alpha_n} > \frac{\alpha_n}{\sin \alpha_n} > 1$$

Für die Kehrwerte gilt die Ungleichung

$$\cos \alpha_n < \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} < 1 \qquad (31)$$

Nach Voraussetzung strebt der Winkel $\alpha_n$ gegen Null. Dann strebt (wie man aus der Abbildung entnehmen kann) der Kosinus dieses Winkels gegen Eins:

$$\lim[\cos \alpha_n] = 1$$

Da der Bruch $\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$ zwischen Eins und $\cos \alpha_n$ liegt, muss auch er gegen Eins streben, was zu beweisen war.

### 32. Quadratur der Sinuskurve.

Wir betrachten die Kurve, die durch die Gleichung

$$y = \sin x \qquad (32)$$

gegeben ist. Sie ist in Abb. 24 wiedergegeben und heißt Sinuskurve.

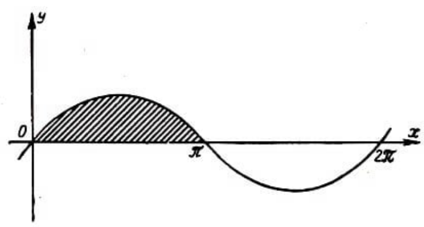



Abb. 24

Wir wollen den Inhalt der Figur, die von dem Teilbogen $x = 0$ bis $x = \pi$ und der Abszissenachse begrenzt wird, bestimmen (die Figur ist in Abb. 24 schraffiert).
Zu diesem Zweck teilen wir die Strecke von $x = 0$ bis $x = \pi$ auf der Abszisse durch die Punkte

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{n}, \quad ..., \quad x_n = \frac{n\pi}{n}$$

in $n$ Teile und errichten in diesen Punkten Senkrechte bis zum Schnitt mit der Kurve. Die Länge dieser Senkrechten erhalten wir aus der Gleichung (32):

$$\sin\frac{\pi}{n}, \quad \sin\frac{2\pi}{n}, \quad \sin\frac{3\pi}{n}, \quad ..., \quad \sin\frac{n\pi}{n}$$

(wobei die letzte gleich Null ist). Diese Senkrechten zerlegen die ganze Figur in $n$ Streifen der Breite $\frac{\pi}{n}$. Wir nehmen an, jeder dieser Streifen sei ein Rechteck mit der Grundlinie $\frac{1}{n}\pi$ und der Höhe $\sin\frac{k\pi}{n}$ (für den $k$-ten Streifen von links). Dann ergibt sich für den Flächeninhalt des $k$-ten Streifens

$$F_k = \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

als Näherungswert. Der Flächeninhalt der ganzen Figur ist dann annähernd gleich

$$F = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

Dieser Ausdruck kann auf Grund der Formel (28) in Nr. 29 in der Gestalt

$$F = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

dargestellt werden, und wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ gilt

$$F = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \tag{33}$$

Der genaue Wert für den Flächeninhalt ist gleich dem Grenzwert der rechten Seite der Gleichung (33) für unbegrenzt wachsendes $n$. Diesen Grenzwert finden wir durch folgende Überlegung. Offenbar ist

$$\frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$$

so dass dieser Winkel gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt, und, wie man leicht aus der Abbildung sieht, strebt dann der Sinus des Winkels gegen Eins:

$$\lim\sin\frac{(n+1)\pi}{2n} = 1 \tag{34}$$

Andererseits strebt der Winkel $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$ gegen Null. Nach Formel (30) in Nr. 31 ist dann

$$\lim\left[\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right] = \lim\left[2\frac{\alpha_n}{\sin\alpha_n}\right] = 2 \tag{35}$$

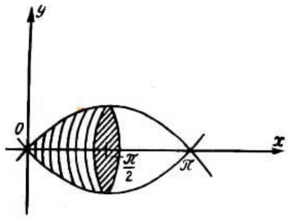
Aus (34) und (35) erhalten wir auf Grund eines Satzes über den Grenzwert eines Produktes die Beziehung

$$F = 2$$

Der Inhalt der Fläche, die vom halben Sinusbogen und der dazugehörigen $x$-Achse begrenzt wird, ist gleich Zwei.

**33. Das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Sinuskurve entsteht.** Wir stellen uns vor, dass die in Abb. 24 dargestellte Sinuskurve sich um die $x$-Achse dreht. Wir wollen das Volumen $V$ des Körpers bestimmen, der von der Fläche begrenzt wird, die bei der Drehung eines halben Bogens der Sinuskurve entsteht.

Abb. 25




Zu diesem Zweck legen wir durch den Punkt $x = 1$ eine Ebene senkrecht zur $x$-Achse; diese Ebene halbiert den Körper (Abb. 25).
Wir wollen das Volumen $V^*$ der linken Hälfte bestimmen. Wir teilen die Strecke von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ auf der $x$-Achse in $n$ Teile durch die Punkte

$$x_k = k\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

und legen durch jeden Punkt eine zur $x$-Achse senkrechte Ebene. Diese Ebenen schneiden unsere Fläche in Kreisen vom Radius

$$r_k = \sin\frac{k\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

Wir betrachten nun die elementare Schicht, die zwischen der $(k-1)$-ten und der $k$-ten Ebene liegt, als Zylinder vom Radius $r_k$ und der Höhe $h = \frac{\pi}{2n}$. Das elementare Volumen ist dann

$$V_k = \pi r_k^2 h = \frac{\pi^2}{2n}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

und das ganze Volumen der linken Hälfte des Körpers angenähert

$$V^* = \frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

Der genaue Wert des Volumens ist der Grenzwert dieses Ausdrucks für unbegrenzt wachsendes $n$:

$$V^* = \lim\left[\frac{\pi^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right] \tag{36}$$

Zur Bestimmung dieses Grenzwertes wenden wir einen Kunstgriff an, der die Rechnung bedeutend vereinfacht (deshalb haben wir uns auf die Betrachtung der linken Hälfte des Körpers beschränkt).

Das Verfahren besteht in folgendem: Neben der Sinuskurve betrachten wir die graphische Darstellung der Funktion

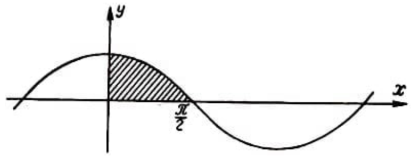
$$y = \cos x \tag{37}$$

Beachten wir

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

so können wir leicht feststellen, dass die Kurve (37) auch eine Sinuskurve (32) ist, die aber längs der $x$-Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ist (Abb. 26).

Abb. 26




Wir nehmen jetzt an, dass sich diese Sinuskurve um die $x$-Achse dreht. Es ist klar, dass das Volumen des Körpers, der von der in Abb. 26 schraffierten Fläche erzeugt wird, gleich dem Volumen $V^*$ der linken Hälfte des ursprünglichen Körpers ist (er fällt genau mit der rechten Hälfte des Ausgangskörpers zusammen). Hätten wir das Volumen des Körpers nach der Summierungsmethode berechnet, so wären wir zu einem der Formel (36) ähnlichen Grenzwert gelangt, wobei natürlich der Sinus durch den Cosinus zu ersetzen ist, nämlich zu

$$V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}\right] \tag{38}$$

Wir können also die Größe $V^*$ auf zwei Arten darstellen:

$$V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right] = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}\right]$$

Wir addieren jetzt beide Ausdrücke (was offensichtlich unter dem $\lim$-Zeichen getan werden kann) und erhalten

$$2V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2n} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n}\right)\right] \tag{39}$$

Aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt, dass jeder Summand der Summe (39) den Wert 1 hat, und da ihre Anzahl gleich $n$ ist, gilt

$$2V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n}\right] = \lim \left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

denn der Grenzwert einer Folge konstanter Glieder ist gleich dem Wert dieser Konstanten.

Wir erhalten das Volumen $V^*$ der linken Hälfte des Körpers, wenn wir die Gleichung durch Zwei dividieren. Da uns aber das ganze Volumen interessiert, ist dies nicht nötig, und unser Resultat

$$V = 2V^* = \frac{\pi^2}{2} \tag{40}$$

Das Volumen des Körpers, der bei der Drehung eines halben Sinusbogens um die $x$-Achse entsteht, ist gleich $\frac{\pi^2}{2}$.

**34. Mittelwerte.**
Die Größe $y$ möge eine endliche Anzahl von Werten

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n$$

annehmen. In diesem Fall nennt man das arithmetische Mittel

$$y_* = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

der Zahlen $y_k$ den Mittelwert der Größe $y$. Die Zweckmäßigkeit gerade dieses Begriffes beruht auf folgenden beiden Eigenschaften:

A. Liegen alle Werte von $y$ zwischen den Zahlen $m$ und $M$, so liegt auch der Mittelwert zwischen diesen Zahlen, d.h. wenn

$$m \leq y_k \leq M \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{41}$$

so ist auch

$$m \leq y_* \leq M$$

B. Sind alle Werte von $y$ gleich einer Zahl $h$, dann ist auch der Mittelwert gleich $h$.

Der Beweis der Eigenschaft B ist trivial. Für den Beweis der Eigenschaft A addieren wir alle Ungleichungen (41):

$$nm \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \leq M$$

und dividieren die ganze Ungleichung durch $n$.
Neben dem Mittelwert $y_*$ der Werte von $y$ betrachtet man oft auch das quadratische Mittel $y^*$ dieser Werte. Das quadratische Mittel ist durch die Gleichung

$$y^* = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}{n}} \tag{42}$$

definiert. Mit anderen Worten, das quadratische Mittel der Werte von $y$ ist gleich der Quadratwurzel aus dem Mittelwert der Größe $y^2$. Wie man leicht sieht, sind für das quadratische Mittel die Eigenschaften A und B ebenfalls erfüllt, wenn die Werte von $y$ nicht negativ sind.
In der Tat, ist

$$0 \leq m \leq y_k \leq M \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

dann ist

$$m^2 \leq y_k^2 \leq M^2 \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

Wir addieren alle diese Ungleichungen, dividieren das Resultat durch $n$ und ziehen die Quadratwurzel. Wir erhalten dann

$$m \leq y^* \leq M$$

womit wir gezeigt haben, dass $y^*$ die Eigenschaft A besitzt. Die Eigenschaft B ist wieder trivial.

In den betrachteten Fällen nahm $y$ nur endlich viele Werte an. Bei vielen praktischen Fragen muss man zum Teil Größen betrachten, die sich stetig ändern. Um den Mittelwert dieser Größen zu berechnen, müssen wir die Methode der Summierung unendlich kleiner Größen anwenden. Wir wollen dies an einem Beispiel aus der Physik zeigen.

**35. Der Effektivwert der Stromstärke.**
Wir betrachten einen sinusförmigen Wechselstrom

$$I = A \sin t \tag{43}$$

wobei $t$ die Zeit und $I$ die Stromstärke ist. In jedem Moment hat die Stromstärke $I$ einen anderen Wert. Ihr größter ist gleich $A$:

$$I_{\max} = A \tag{44}$$

In der Elektrotechnik spielt das quadratische Mittel $I_e$ der Stromstärke während einer Periode, d.h. während der Zeit von $t = 0$ bis $t = 2\pi$, eine große Rolle.
Beim Messen der Stromstärke mit dem Amperemeter wird nämlich die Größe $I_e$ angezeigt. Sie heißt Effektivwert der Stromstärke.
Wir wollen $I_e$ für einen Strom der Form (43) berechnen.

Dazu zerlegen wir die Zeitspanne von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ durch die Zeitpunkte

$$t_k = \frac{2\pi}{n} k \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

in $n$ Zeitabschnitte.
Wenn die Zahl $n$ sehr groß ist, können wir annehmen, dass sich im Zeitintervall von $t_{k-1}$ bis $t_k$ die Stromstärke nicht ändert, also gleich

$$I_k = A \sin \frac{2\pi}{n} k$$

ist. Mit anderen Worten, wir nehmen an, für die elementaren Zeitabschnitte bleibt die Stromstärke gleich: Nach dieser Vereinfachung ergibt sich der Effektivwert der Stromstärke zu

$$I_e = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} I_k^2}{n}} = \sqrt{\frac{A^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k}{n}} \tag{45}$$

Der genaue Wert $I_e$ ist der Grenzwert der rechten Seite der Gleichung (45) für (unbegrenzt wachsendes $n$:

$$I_e = \lim \left[ A \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k} \right]$$

56. Die Sinuskurve 57 Wir suchen zunächst den Grenzwert des Radikanden

$$\lim \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k \right] \tag{46}$$

Dies kann ohne Rechnung durch folgende Überlegung geschehen. Wir bestimmen das Volumen des Körpers, der bei der Drehung der Kurve einer vollen Sinusschwingung um die $x$-Achse entsteht. Wir wenden dazu die Methode der Summierung unendlich kleiner Größen an. Wenn wir die Überlegungen der Nr. 33 wiederholen, können wir dieses Volumen in der Form

$$\lim \left[ \frac{2\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} \right]$$

darstellen. Andererseits ist dieses Volumen gleich dem doppelten Volumen (40) des Körpers, der bei der Drehung des halben Sinusbogens um die $x$-Achse entsteht, d.h., das gesuchte Volumen ist gleich $\pi^2$.

Daher ist

$$\lim \left[ \frac{2\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} \right] = \pi^2 \tag{47}$$

Wie man leicht sieht, erhält man den Grenzwert (46) aus (47), indem man durch $2\pi^2$ dividiert, was

$$\lim \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2k\pi}{n} \right] = \frac{1}{2}$$

ergibt. Es ist also[10]

$$I_e = A\sqrt{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aus den Formeln (48) und (49) folgt

$$I_{\max} = I_e \sqrt{2}$$

d.h., der Maximalwert der Stromstärke ist fast eineinhalb mal so groß wie der vom Amperemeter angezeigte Wert.

[10] Wir benutzen hier den Satz: Streben die veränderlichen nichtnegativen Größen $x_n$ gegen den Grenzwert $a$, so strebt $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{a}$.

# 7 Aufgaben

Wir wollen hier einige Aufgaben stellen, damit der Leser die dargelegten Methoden selbständig anzuwenden lernt. Wir können nur raten, diese Aufgaben durchzurechnen. Bereits Newton sagte, dass "in der Mathematik Beispiele nützlicher als Regeln sind".

1. Man bestimme die Summe

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

Lösung: $S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

2. Man bestimme den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks nach der Summierungsmethode.

3. Man bestimme den Inhalt der Fläche, die von der $x$-Achse, der Kurve $y = x^3$ und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird.

Lösung: $\frac{1}{4}$

4. Man bestimme den Grenzwert

$$\lim \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \right]$$

für unbegrenzt wachsendes $n$.
Hinweis: Man bestimme zunächst den Flächeninhalt eines Kreisquadranten durch Summierung rechteckiger Streifen.

Lösung: $\frac{\pi}{4}$

5. Unter Benutzung der vorigen Aufgabe ist das Volumen des Zylinders zu bestimmen. Der Zylinder soll durch Zerlegen in rechteckige Tafeln bestimmt werden, wie es in Abb. 9 dargestellt ist.

6. Man gebe den Wasserdruck auf die Wand eines zylindrischen Glases an.

Lösung: $P = \pi R H^2$.

7. Man bestimme die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um Wasser aus einem kegelförmigen Gefäß auszupumpen, wenn die Grundfläche horizontal und unterhalb der Spitze liegt.

Lösung: $T = \frac{1}{4}\pi R^2 H^2$.

8. Man bestimme das Volumen eines Ellipsoids durch direkte Berechnung ohne Benutzung des Cavalierischen Prinzips.

9. Man bestimme das Volumen des Ellipsoids, das durch Drehung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die $y$-Achse entsteht.

Lösung: $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

10. Welche Arbeit ist zum Auspumpen von Wasser aus einer Halbkugel nötig, wenn sich die Äquatorebene unten befindet?

Lösung: $T = \frac{5}{12}\pi R^4$

11. Man bestimme den Druck des Wassers auf die Wände eines prismatischen Gefäßes mit der Höhe $4$ und dem Grundflächenumfang $p$.

Lösung: $P = \frac{1}{2}pH^2$.

12. Unter Benutzung des Resultats der Aufgabe 1 bestimme man das Volumen des Körpers, der durch die Fläche, die bei der Drehung der Parabel $y = ax^2$ um die $x$-Achse entsteht, und durch die Ebene, die senkrecht zur $x$-Achse im Abstand $h$ vom Ursprung verläuft, begrenzt ist.

Lösung: $V = \frac{1}{5}\pi a^2 h^5$

13. Man gebe den Grenzwert

$$\lim \left[\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p\right]$$

für unbegrenzt wachsendes $n$ an ($p$ eine natürliche Zahl).

Lösung: $\frac{1}{p+1}$

14. Man bestimme den Grenzwert

$$\lim \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}\right]$$

für unbegrenzt wachsendes $n$.
Hinweis : Man bestimmt zunächst den Flächeninhalt des krummlinigen Dreiecks $OQM$ (Abb. 19), indem man es in zur $x$-Achse parallele Streifen zerlegt.

Lösung: $\frac{2}{3}$

15. Man gebe eine Formel für die Summe

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha$$

an.

Lösung: $S = \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{1}{2}$

16. Unter Benutzung des Resultate der vorigen Aufgabe bestimme man den Flächeninhalt $F$ der Figur, die von der Kurve $y = \cos x$ und den (positiven) Koordinatenachsen begrenzt wird.

Lösung: $F = 1$.