J.I. Perelman

Unterhaltsame Algebra

Übersetzung: Ludwig Müller
1965 Volk und Wissen Berlin
MSB: Nr. 29
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Aus dem Vorwort des Autors zur dritten Auflage

Die Unterhaltsame Algebra ist, ähnlich wie die anderen Werke dieser Serie, ein Buch zum ungezwungenen Lesen, also keine Lernanleitung und kein leichtverständliches Algebralehrbuch.
Das Buch wird für den Leser, der über einige Kenntnisse aus der Algebra verfügt und Freude an der Mathematik, an kniffligen Fragen und überraschenden Lösungen hat, zur Unterhaltung.

Auch solche Leser, deren Kenntnisse auf dem Gebiet der Algebra noch nicht ganz sicher oder schon wieder halb vergessen sind, werden die teils lustigen, teils erstaunlichen Aufgaben dieses Buches mit Gewinn lesen, denn die Unterhaltsame Algebra stellt sich das Ziel, die Kenntnisse zu präzisieren, wiederzubeleben und zu erhärten, und darüber hinaus, die gelegentliche Beschäftigung mit der Algebra zu einer häufig ausgeübten Tätigkeit werden zu lassen.

Um dieser Beschäftigung Anziehungskraft zu verleihen,und den Eifer anzufachen, werden auch ungewöhnliche Themen, die die Neugier wecken, berührt.
Unterhaltsame Ausflüge in die Geschichte der Mathematik und unerwartete Anwendungen der Algebra im täglichen Leben dienen demselben Zweck. Die Stoffauswahl übersteigt nicht die Anforderungen im Rahmen des Schulunterrichts und berührt dabei fast alle Zweige der Algebra.
Schwierige theoretische Fragen werden entsprechend der Aufgabenstellung der Unterhaltsamen Algebra vermieden.

J. I. Perelman

Inhaltsverzeichnis

1 Die fünfte Grundrechenoperation

Die Algebra wird nicht selten "Arithmetik der sieben Grundrechenoperationen" genannt, womit man unterstreichen will, dass sie den vier bekannten mathematischen Operationen - Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren - drei weitere hinzufügt: das Potenzieren und zwei ihm entgegengesetzte Rechenoperationen.

Unsere Unterhaltung soll mit der fünften Operation, dem Potenzieren, beginnen.
Die Frage, ob das Bedürfnis nach einer neuen Rechenoperation durch die Praxis hervorgerufen wurde, kann man zweifellos bejahen. Wir begegnen dem Potenzieren oft im täglichen Leben. Erinnern wir uns der vielen Fälle, in denen Flächeninhalte oder Volumina zu berechnen sind. Gewöhnlich stößt man hierbei auf Zahlen, die in die zweite oder dritte Potenz erhoben werden müssen. Auch bei Berechnungen der Schwerkraft der Erde, der elektrostatischen und magnetischen Wechselwirkungen, der Beleuchtungsstärke, der Schallstärke treten Potenzen auf, denn alle diese Größen vermindern sich proportional der zweiten Potenz der Entfernung.

Die Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne (und die der Trabanten um die Planeten) stehen mit der Entfernung vom Drehzentrum ebenfalls in Verhältnissen, die Potenzen enthalten: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich untereinander wie die dritten Potenzen der Entfernungen.

Man darf aber nicht glauben, dass uns die Praxis nur mit zweiten und dritten Potenzen bekannt macht und die höheren Exponenten nur in Übungen algebraischer Aufgabensammlungen existieren.
Ein Ingenieur, der ständig Berechnungen durchführt, hat auf Schritt und Tritt mit vierten Potenzen zu tun. Bei manchen Berechnungen, z. B. bei der Ermittlung des Durchmessers einer Dampfleitung, treten sogar sechste Potenzen auf.
Erforscht ein Hydrotechniker die Kraft, mit der fließendes Wasser Steine fortreißt, so trifft auch er auf sechste Potenzen. Ist z.B. die Strömung in einem Fluss viermal so stark wie in einem anderen, so ist der schnellere Fluss fähig, in seinem Bett $4^6 = 4096$ mal so schwere Steine fortzubewegen wie der langsamere Fluss.

Noch höheren Potenzen begegnen wir, wenn wir uns mit der Abhängigkeit der Helligkeit erwärmter Körper von ihrer Temperatur beschäftigen, etwa bei Glühfäden in elektrischen Glühlampen.
Die allgemeine Helligkeit wächst bei Weißglut mit der zwölften Potenz der Temperatur und bei Rotglut mit der dreizehnten Potenz der Temperatur (der absoluten, d. h. von $-273°$C an gerechnet). So wächst beispielsweise die Helligkeit eines Körpers um das 2^{12}fache, wenn seine Temperatur von 2000 K auf 4000 K steigt, d. h., wenn sie verdoppelt wird.

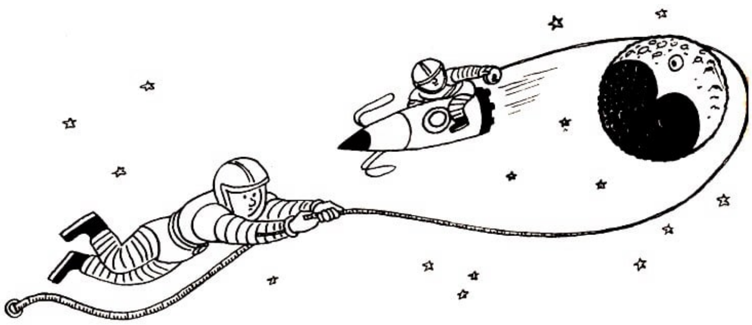
Astronomische Zahlen

Wir sahen, dass in vielen Wissenschaften mit höheren Potenzen gerechnet wird, aber niemand rechnet wohl so häufig mit Potenzen wie die Astronomen. Die Erforscher des Alle haben auf Schritt und Tritt mit gewaltigen Zahlen zu tun, die aus ein- oder zweistelligen Ziffern und einer langen Reihe Nullen bestehen.

Würde man nicht eine andere Schreibweise einführen, so würden diese sehr großen Zahlen, man kann schon sagen "astronomische" Zahlen, unweigerlich zu großen Unbequemlichkeiten führen, besonders bei Berechnungen. Die Entfernung zum Andromedanebel beträgt beispielsweise in üblicher Schreibweise 9 500 000 000 000 000 000 km.

Bei astronomischen Berechnungen muss man nun häufig noch die Entfernungen in Zentimetern angeben. Die Entfernung zum Andromedanebel wird in diesem Falle durch eine Zahl dargestellt, die fünf Nullen mehr aufweist:

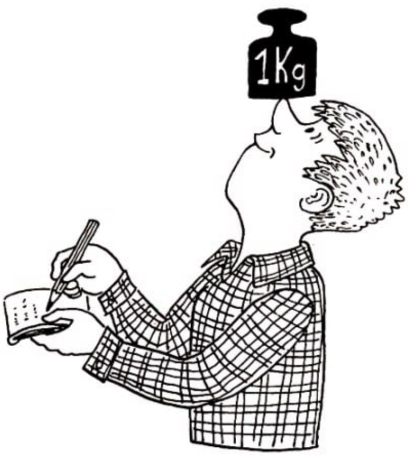
950 000 000 000 000 000 000 000 cm.



Die Angabe der Masse eines Sterne führt auf noch größere Zahlen, besonders wenn man sie, wie es für viele Berechnungen verlangt wird, in Gramm ausdrücken muss. Die Masse unserer Sonne beträgt beispielsweise

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 g.

Man kann sich leicht vorstellen, wie erschwerend es wäre, Berechnungen mit solchen gewaltigen Zahlen durchzuführen, und wie leicht man sich dabei verrechnen könnte.
Dabei sind ja eben bei weitem nicht die größten astronomischen Zahlen angeführt worden. Mit Hilfe der fünften mathematischen Grundrechenoperation bietet sich aber ein einfacher Ausweg aus dieser Schwierigkeit an. Jede Eins, verbunden mit einer Anzahl von Nullen, stellt eine Potenz der 10 dar.
Zum Beispiel $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $10000 = 10^4$.



Die vorher angeführten sehr großen Zahlen kann man deshalb folgendermaßen darstellen:
die Entfernung Andromedanebel-Erde: $950 \cdot 10^{21}$ cm,
die Masse der Sonne: $1983 \cdot 10^{30}$ g.

Dies macht man nicht nur, um Raum zu sparen, sondern auch zur Erleichterung der Berechnungen. Wenn beispielsweise beide Zahlen miteinander multipliziert werden sollen, so genügt es, das Produkt $950 \cdot 1983$ zu berechnen und es vor den Faktor $10^{21+30} = 10^{51}$ zu stellen:

$$950 \cdot 10^{21} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188385 \cdot 10^{52}$$

Das ist natürlich viel bequemer, als zuerst die Zahl mit 21 Nullen auszuschreiben, dann mit 30 und endlich mit 52 Nullen; nicht nur bequemer, sondern auch sicherer, da man beim Schreiben dieser vielen Nullen eine oder zwei übersehen kann und ein falsches Resultat erhält.

Welche Masse hat die gesamte Luft unserer Erde?
Um uns zu vergewissern, wie sehr der Gebrauch der Potenzschreibweise großer Zahlen die praktischen Berechnungen erleichtert, führen wir gleich einmal eine solche Berechnung durch: Wir wollen ermitteln, um wieviel Mal die Masse der Erdkugel größer ist als die Masse der gesamten sie umgebenden Luft.
Der durchschnittliche Luftdruck in Meeresspiegelhöhe beträgt 760 Torr. Der Druck schwankt natürlich mit dem Wettergeschehen, und er ist auch je nach den verschiedenen klimatischen Zonen der Erde unterschiedlich.

Dem Luftdruck von 760 Torr entspricht nun ungefähr eine Kraft je Quadratzentimeter Bodenfläche, die ein Körper mit der Masse von 1 kg infolge der Schwerkraft erhält. Der Körper ist in diesem Fall die Luftsäule mit der Grundfläche 1 cm^2.
Die Lufthülle der Erde besteht aus sehr vielen Luftsäulen dieser Art. Ihre Anzahl entspricht der Anzahl der Quadratzentimeter, die die Oberfläche unseres Planeten ausmachen.

Sehen wir in ein Nachschlagewerk, so erfahren wir, dass der Flächeninhalt der Erdoberfläche rund 510 Millionen km^2 beträgt, also $51 \cdot 10^7$ km^2. Rechnen wir nun den Flächeninhalt in Quadratzentimeter um:

$$1 \text{ km } = 1000 \cdot 100 \text{ cm } = 10^5 \text{ km} \qquad , \qquad 1 \text{ km}^2 = (10^5)^2 \text{ cm }^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt der Erdoberfläche beträgt also:

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$$

Die Masse der Lufthülle beträgt demnach $51 \cdot 10^{17}$ kg. Wandeln wir in Tonnen um, so erhalten wir:

$$(51 \cdot 10^{17} : 1000) \text{ t } = (51 \cdot 10^{17} : 10^3) \text{ t } = 51 \cdot 10^{17-3} \text{ t } = 51 \cdot 10^{14} \text{ t}$$

Die Masse der Erde beträgt $6 \cdot 10^{21}$ t. Um festzustellen, wievielmal unser Planet schwerer ist als seine Lufthülle, dividieren wir:

$$(6 \cdot 10^{21} \text{ t }) : (51 \cdot 10^{14} \text{ t }) \approx 10^6$$

d. h., die Masse der Atmosphäre stellt ungefähr den millionsten Teil der Erdkugelmasse dar.

Brennen ohne Flamme und Hitze

Wenn man einen Chemiker fragt, warum Holz und Kohle nur bei einer verhältnismäßig hohen Temperatur brennen, so wird er antworten, dass eine Verbindung von Kohlenstoff und Sauerstoff, strenggenommen, bei beliebiger Temperatur vor sich geht.

Bei niedrigen Temperaturen verläuft dieser Prozess außerordentlich langsam (d. h. in Reaktion tritt nur eine unbedeutende Anzahl von Molekülen) und entgeht deshalb unserer Beobachtung.

Das Gesetz, das die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen ermittelt, besagt, dass mit Verringerung der Temperatur um 10 grd sich die Reaktionsgeschwindigkeit (die Anzahl der an ihr beteiligten Moleküle) auf die Hälfte verringert.
Wenden wir das Gesagte auf die Reaktion der Verbindung von Holz und Sauerstoff an, d. h. auf den Verbrennungsprozess von Holz. Es möge bei einer Flammentemperatur von 600°C in jeder Sekunde 1 g Holz verbrennen. In welcher Zeit verbrennt 1 g Holz bei 20°?

Wir wissen schon, dass bei einer Temperatur, die um 580 grd $= 58 \cdot 10$ grd niedriger ist, die Reaktionsgeschwindigkeit den 2^{58}ten Teil beträgt, d.h., 1 g Holz verbrennt in 2^{58} s. Wieviel Jahren entspricht ein solcher Zeitunterschied?

Wir können diese Potenz annähernd berechnen, ohne 57 wiederholende Multiplikationen mit 2 durchzuführen und ohne die Logarithmentafeln zu benutzen.
Da $2^10 = 1024 \approx 10^3$ ist, folgt:

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4}(2^{10})^6 = \frac{1}{4}10^{18}$$

d. h. annähernd ein Viertel Trillionen Sekunden. Da ein Jahr ungefähr 30 Millionen Sekunden sind, erhält man bei der Umrechnung dieser Zeitspanne:

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}$$

Das ist ungefähr die Anzahl der Jahre, in denen 1 g Holz bei Zimmertemperatur verbrennen würde. Also, Holz und Kohle "brennen" auch bei niedrigen Temperaturen, ohne überhaupt angezündet worden zu sein. Die Erwärmung und Entzündung beschleunigte diesen schrecklich langsamen Prozess milliardenfach.

Die Vielfältigkeit des Wetters

Im folgenden sollen die Tage nach dem herrschenden Wetter beurteilt werden. Und zwar soll unterschieden werden in Tage mit trübem Wetter und in solche mit heiterem

Wetter. Wenn wir den Wetterablauf jeweils einer Woche in dieser Weise verfolgen, ergibt sich eine gewisse Anzahl von Möglichkeiten.

Es steht nun die Frage, wieviel Wochen mit unterschiedlichem Wetterverlauf möglich sind. Wann also würde, wenn sich jede Woche durch eine andere Wetterfolge (nur in trübe und heitere Tage wird unterschieden) auszeichnete, die erste Woche sein, in der sich die Wetterfolge wiederholt?

Vielleicht denken Sie, es werden zwei Monate vergeben, und alle Kombinationen von heiteren und trüben Tagen in der Woche werden erschöpft sein, so dass sich unweigerlich eine der Kombinationen, die schon vorher beobachtet wurden, wiederholt.

Wir wollen versuchen, genau zu errechnen, wieviel verschiedene Kombinationen unter solchen Bedingungen möglich sind. Wir haben damit eine der Aufgaben vor uns, die unerwartet zur fünften Grundrechenoperation führen.
Also: Wie viele Kombinationen von heiteren und trüben Tagen einer Woche sind möglich?

Lösung: Der erste Tag der Woche kann entweder heiter oder trüb sein; d. h., wir haben vorläufig zwei Kombinationen. Während einer zweitägigen Periode sind folgende Wechsel von heiteren und trüben Tagen möglich:

	1. Tag	2. Tag
1. Möglichkeit	heiter	heiter
2. Möglichkeit	heiter	trüb
3. Möglichkeit	trüb	heiter
4. Möglichkeit	trüb	trüb

Infolgedessen gibt es im Laufe zweier Tage 2^2 verschiedenartige Wetterfolgen.
Für die Zeit von drei Tagen wird jede der vier Kombinationen der ersten beiden Tage mit den beiden Kombinationen des dritten Tages in Verbindung gebracht.
Dann gibt es $2^2 \cdot 2 = 2^3$ Möglichkeiten. Im Verlauf von vier Tagen erreicht die Anzahl der Wetterfolgen $2^3 \cdot 2 = 2^4$. In fünf Tagen gibt es 2^5, in sechs Tagen 2^6 und, schließlich und endlich, in einer Woche $2^7 = 128$ verschiedene Kombinationen.

Daraus folgt, dass es 128 Wochen mit verschiedener Reihenfolge heiterer oder trüber Tage gibt. Nach $128 \cdot 7 = 896$ Tagen muss sich unbedingt eine der vorherigen Kombinationen wiederholen.
Die Wiederholung kann sich natürlich auch vorher ereignen, aber 896 Tage sind die Zeit, nach deren Ablauf eine solche Wiederholung unvermeidlich ist. Und umgekehrt: Es können zwei Jahre vergehen, sogar mehr (zwei Jahre und 166 Tage), in deren Verlauf nicht eine Woche dem Wetter nach der anderen gleicht.

Ein Schloss mit einem Geheimnis

In einem Amt fand man nach der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution einen Schrank, der dort schon seit geraumer Zeit gestanden hatte. Man fand zwar den Schrankschlüssel, aber um den Schrank damit öffnen zu können, musste man das Geheimnis des Schlosses kennen.

Die Tür des Schrankes öffnete sich nämlich nur, wenn man die an der Tür befindlichen, mit Buchstaben versehenen fünf Ringe auf ein bestimmtes Wort einstellte.

Da niemand dieses Wort kannte, beschloss man, alle Buchstabenkombinationen auszuprobieren, denn man wollte den Schrank nicht aufbrechen. Für die Einstellung einer Kombination wurden 3 s Zeit benötigt.
Kann man hoffen, dass der Schrank innerhalb der nächsten 10 Arbeitstage geöffnet wird? Die Ringe trugen auf ihrem äußeren Rand 36 Buchstaben. (Es handelte sich um das alte russische Alphabet.)

Wir müssen also herausbekommen, wieviel Buchstabenkombinationen man ausprobieren müsste.
Jeder der 36 Buchstaben des ersten Ringes kann mit jedem der 36 Buchstaben des zweiten Rings kombiniert werden. Das bedeutet, dass $36 \cdot 36 = 36^2$ zweibuchstabige Kombinationen möglich sind.
Zu jeder dieser Kombinationen kann man jeden beliebigen der 36 Buchstaben des dritten Ringes hinzufügen. Deshalb ergeben sich $36^2 \cdot 36 = 36^3$ dreibuchstabige Kombinationen.
Nach dem gleichen Verfahren ermitteln wir, dass es 36^4 vierbuchstabige Kombinationen und $36^5 = 60466176$ fünfbuchstabige geben kann.

Um diese rund 60 Millionen Kombinationen zusammenzustellen, brauchte man bei einer Einstellzeit von jeweils 3 s insgesamt $3 \cdot 60466176$ s $= 181398528$ s. Das sind mehr als 50000 Stunden oder fast 6300 achtstündige Arbeitstage, was einer Zeit von mehr als 20 Jahren entspricht.
Das bedeutet, die Chancen, dass der Schrank im Laufe der nächsten 10 Arbeitstage geöffnet wird, stehen 10 zu 6300 oder 1 zu 630. Das ist eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit.

Der abergläubische Radfahrer

Ein überaus abergläubischer Mensch kaufte sich ein Fahrrad und wollte fahren lernen. Als er jedoch von einem Fahrradschaden erfuhr, der landläufig "Acht" genannt wird, befürchtete er, dass es Unglück brächte, wenn die in den Rahmen eingestanzte Fahrradnummer (sie sei 6stellig) eine oder gar mehrere Ziffern 8 enthielte.
Bevor er jedoch in den Keller ging, um nachzusehen, welche Fahrradnummer sein Rahmen trägt, beruhigte er sich durch folgende Überlegung:

Beim Schreiben jeder Zahl können 10 Ziffern beteiligt sein, nämlich 0, 1, ..., 9. Unter ihnen erscheint als "unglückliche Ziffer" nur die 8. Deshalb gibt es nur einen Fall von zehn, der als "unglücklich" bezeichnet werden muss. Ist diese Überlegung richtig?

Lösung: Insgesamt gibt es 999999 Nummern, und zwar läuft die Nummerierung von 000001, 000002 usw. bis 999999. Ermitteln wir zunächst die Anzahl der "glücklichen" Nummern.
Auf dem ersten Platz kann jede beliebige der neun "glücklichen" Ziffern stehen, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 9. Auf dem zweiten Platz ebenfalls jede beliebige dieser neun Ziffern. Deshalb gibt es $9 \cdot 9 = 9^2$ "glückliche" zweistellige Zahlen. Zu jeder dieser Kombinationen aus zwei "glücklichen" Ziffern kann man (auf dem dritten Platz) jede

beliebige der neun Ziffern hinzuschreiben, so dass $9^2 \cdot 9 = 9^3$ dreistellige "glückliche" Zahlen möglich sind.

Auf gleiche Art ermitteln wir, dass die Anzahl der 6stelligen "glücklichen" Zahlen gleich 9^6 ist. Man muss aber beachten, dass in dieser Anzahl von Kombinationen auch 000000 enthalten ist, die als Fahrradnummer nicht brauchbar ist. Somit beträgt die Anzahl der "glücklichen" Fahrradnummern nur $9^6 - 1 = 531440$, was etwas mehr als 53 % aller Nummern ausmacht und nicht 90 %, wie unser Radfahrer annahm.

Interessant ist nur die Klärung der Frage, wie das Verhältnis "glücklicher" und "unglücklicher" Zahlen im Falle einer Nummerierung mit siebenstelligen Zahlen ausfällt ...
Überzeugen Sie sich doch bitte selbst, dass in diesem Fall mehr "unglückliche" als "glückliche" Nummern existieren!

Die Ergebnisse einer wiederholten Verdoppelung

Ein eindrucksvolles Beispiel für das außerordentlich schnelle Anwachsen von Zahlen im Falle ihrer wiederholten Verdoppelung stellt die bekannte Legende von der Belohnung des Schöpfers des Schachspiels dar.[1] Im folgenden sollen interessante Beispiele hierzu angeführt werden, die sicherlich weniger bekannt sind.

Aufgabe: Das Pantoffeltierchen teilt sich durchschnittlich alle 27 Stunden. Für diese Aufgabe werde nun vorausgesetzt, dass alle Nachkommen eines Pantoffeltierchens am Leben bleiben. Wie lange würde es dauern, bis die Nachkommenschaft eines Pantoffeltierchens das Volumen einnimmt, das gleich dem Volumen der Sonne ist?

Für die Berechnung sei noch bekannt, dass die Pantoffeltierchen nach der vierzigsten Teilung ein Volumen von 1 m^3 einnehmen. Das Volumen der Sonne werde mit 10^{27} m^3 in Rechnung gestellt.

Lösung: Die Aufgabe läuft darauf hinaus, zu ermitteln, wie oft man 1 m^3 verdoppeln muss, um ein Volumen von 10^{37} m^3 zu erhalten. Formen wir um:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}, \quad \text{denn} \quad 2^{10} \approx 1000$$

Das bedeutet, dass sich die Pantoffeltierchen noch 90 mal teilen müssen, um auf das Volumen der Sonne anzuwachsen. Die Gesamtzahl der Teilungen ist dann gleich 40 + 90 = 130. Es ist leicht zu errechnen, dass die Kultur am 147sten Tag das Volumen der Sonne erreichen würde.

Das Problem, das in dieser Aufgabe behandelt wird, kann man sozusagen auch umkehren:
Stellen wir uns vor, unsere Sonne teilte sich, die Hälfte würde sich ebenfalls wieder teilen usw. Wieviel Teilungen wären notwendig, damit ein Teilchen von der Größe eines Pantoffeltierchens herauskäme? Obwohl die Antwort (130) den Lesern schon bekannt ist, verblüfft sie doch durch ihre unbeschreibliche Einfachheit.

[1] Hierzu sei verwiesen auf: A. A. Kolossow: Kreuz und quer durch die Mathematik. Erschienen im volkseigenen Verlag Volk und Wissen Berlin.

Mir stellte man die gleiche Aufgabe in der folgenden Form: Ein Blatt Papier wird halbiert, eine der Hälften wird wieder halbiert usw. Wieviel Teilungen sind notwendig, um Teilchen von atomaren Maßen zu erhalten?

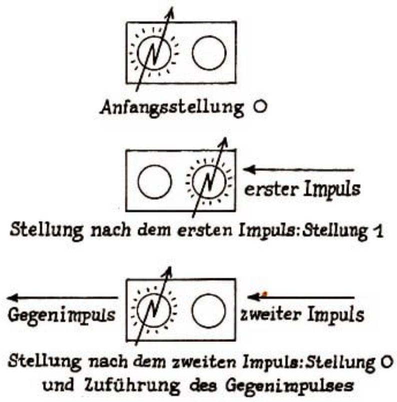
Nehmen wir an, das Blatt Papier wiege I g, und nehmen wir für die Masse eines Atoms $\frac{1}{10^{24}}$ g an. Da $10^{24} \approx 2^{80}$ ist, sind insgesamt 80 Teilungen erforderlich, nicht Millionen, wie man des öfteren als Antwort auf diese Frage erhält.

100000 mal so schnell

Ein elektrisches Gerät, Trigger genannt, enthält zwei Röhren. Der Strom kann im Trigger jeweils nur über eine Röhre fließen: entweder durch die "linke" oder durch die "rechte". Das Gerät hat zwei Kontakte, denen von außen ein kurzzeitiges elektrisches Signal (ein Impuls) zugeführt werden kann, und zwei Kontakte, über die vom Kipprelais her ein Gegenimpuls erfolgt.

Sobald der elektrische Impuls von außen gegeben wird, schaltet sich der Trigger um: die Röhre, durch die der Strom zuerst floss, schaltet sich aus, und der Strom beginnt schon durch die zweite Röhre zu fließen. Der Gegenimpuls des Triggers wird in dem Moment ausgelöst, in dem sich die rechte Röhre ausschaltet und die linke sich einschaltet.

Verfolgen wir, wie der Trigger arbeiten wird, wenn ihm nacheinander einige elektrische Impulse zugeführt werden. Wir werden den Zustand des Triggers an Hand der rechten Röhre charakterisieren: fließt der Strom nicht durch die rechte Röhre, so soll sich der Trigger in der "Nullstellung" befinden, fließt der Strom aber durch die rechte Röhre, so befinde sich der Trigger in der "Stellung 1".

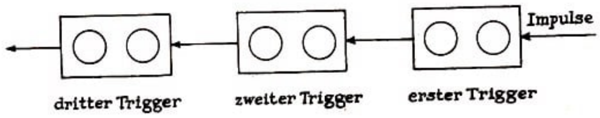


Als Anfangsstellung werde die Nullstellung gewählt. (Vergleichen Sie mit der vorstehenden Abbildung!) Der Strom fließt also durch die linke Röhre. Nach dem ersten Impuls wird der Strom durch die rechte Röhre fließen, d. h., der Trigger geht in die Stellung 1 über. Dabei geht vom Trigger kein Gegenimpuls aus, da der Gegenimpuls im Moment des Ausschaltens der rechten Röhre (und nicht der linken) ausgelöst wird.

Nach dem zweiten Impuls wird der Strom schon durch die linke Röhre fließen, d. h., der Trigger nimmt von neuem die Nullstellung ein. Jedoch gibt der Trigger dabei ein Gegensignal ab.

Nach zwei Impulsen befindet sich also der Trigger wieder im Anfangszustand. Nach dem dritten Impuls nimmt der Trigger genauso wie nach dem ersten wieder die Stellung 1 ein und nach dem vierten Impuls so wie nach dem zweiten die Nullstellung mit gleichzeitiger Abgabe des Gegenimpulses usw. Nach jeweils zwei Impulsen wiederholen sich die Zustände im Trigger.

Stellen wir uns jetzt vor, dass mehrere Trigger vorhanden sind und dass die Impulse von außen dem ersten Trigger zugeführt werden, die Gegenimpulse des ersten Triggers werden dem zweiten zugeführt, die Gegenimpulse des zweiten dem dritten usw. (In der Abbildung sind die Trigger hintereinander von rechts nach links dargestellt.) Verfolgen wir, wie eine solche Triggerkette arbeiten wird.



Mögen sich anfangs alle Trigger in der Nullstellung befunden haben. Für eine Kette, die beispielsweise aus fünf Triggern besteht, würden wir die Kombination 00000 haben. Nach dem ersten Impuls gerät das erste Kipprelais (das rechte) in die Stellung 1. Da hierbei kein Gegenimpuls gegeben wird, bleiben alle übrigen Kipprelais in der Nullstellung, d. h., die Kette wird durch die Kombination 00001 gekennzeichnet.
Nach dem zweiten Impuls schaltet sich der erste Trigger aus (gerät in die Nullstellung), gibt aber dabei einen Gegenimpuls ab, durch den der zweite Trigger eingeschaltet wird. Die übrigen Trigger bleiben in der Nullstellung, d. h., es wird die Kombination 00010 hergestellt.

Nach dem dritten Impuls schaltet sich der erste Trigger ein, die übrigen aber verändern ihre Stellung nicht. Wir erhalten so die Kombination 00011. Nach dem vierten Impuls schaltet sich der erste Trigger aus, nachdem er einen Gegenimpuls ausgelöst hat. Durch diesen Gegenimpuls schaltet sich der zweite Trigger aus und löst ebenfalls einen Gegenimpuls aus. Durch diesen letzten Impuls schaltet sich schließlich der dritte Trigger ein. Es ergibt sich die Kombination 00100.

Führt man die Überlegungen in dieser Weise weiter, so gelangt man zu dem folgenden Ergebnis:

	Kombination
1. Impuls:	00001
2. Impuls:	00010
3. Impuls:	00011
4. Impuls:	00100
5. Impuls:	00101
6. Impuls:	00110
7. Impuls:	00111
8. Impuls:	01000
...	...

Wir sehen, dass die Triggerkette die von außen kommenden Signale zählt und die Anzahl dieser Signale auf ungewöhnliche Art "festhält". Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese "Aufzeichnung" der Anzahl der gegebenen Impulse nicht in dem uns gewohnten Dezimalsystem erfolgt, sondern im Dualsystem.

Im Dualsystem werden die Zahlen mit Hilfe der Ziffern 0 und 1 aufgezeichnet. Die 1 der jeweils folgenden Stelle ist nicht zehnmal so groß wie eine 1 der vorhergehenden Stelle (so ist es im dekadischen System), sondern nur doppelt so groß. Eine Ziffer 1, die in der dualen Schreibweise ganzer Zahlen auf der äußersten rechten Stelle steht, stellt die gleiche Zahl dar, die eine 1 an dieser Stelle in dezimaler Schreibweise darstellen würde. Eine 1 auf der nächstfolgenden Stelle (auf dem zweiten Platz von rechts) stellt im dualen System einen Zweier dar, an der nächstfolgenden Stelle einen Vierer, dann einen Achter usw.

Die im dekadischen System durch die Ziffer 19 dargestellte Zahl wird im dualen System als 10011 geschrieben. 19 besteht nämlich aus 1 Sechzehner, 0 Achtern, 0 Vierern, I Zweier und 1 Einer.

Also, die Triggerkette zählt die Anzahl der gegebenen Signale und fixiert sie in dualer Weise. Das Umschalten des Triggers, d. h. die Registrierung eines ankommenden Impulses, dauert nur den zehnmillionsten Teil einer Sekunde. Die modernen Triggerzähler können bis zu 1000000 Impulse und mehr in der Sekunde zählen.

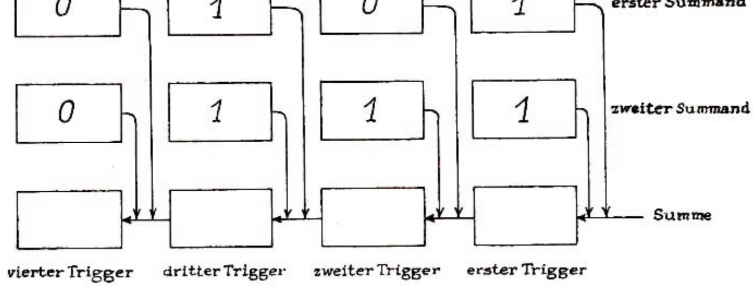
Das ist beispielsweise 100000 mal so schnell wie ein Mensch es ohne jegliche Hilfsmittel kann. Das menschliche Auge vermag nur dann Signale genau zu unterscheiden, wenn sie mindestens einen Abstand von 0,1 s haben.

Stellt man eine Kette aus 20 Triggern zusammen, d. h., die Anzahl der Signale wird auf zwanzig Ziffern des Dualsystems beschränkt, so kann man bis $2^{20} - 1$ zählen. Das ist eine Zahl, die größer als eine Million ist. Stellt man eine Kette aus 64 Triggern auf, so kann mit ihrer Hilfe die berühmte "Schachzahl" aufgezeichnet werden.

Die Möglichkeit, Hunderttausende von Signalen in einer Sekunde aufzuschreiben, ist sehr wichtig für experimentelle Arbeiten auf dem Gebiet der Kernphysik. So kann man z. B. die Anzahl der Teilchen dieser oder jener Art zählen, die bei einem Atomzerfall herausgeschleudert werden.

10000 und mehr Operationen in einer Sekunde

Es ist bemerkenswert, dass Triggerschemata es ebenfalls ermöglichen, Operationen mit Zahlen durchzuführen. Sehen wir uns z. B. an, wie man die Addition zweier Zahlen verwirklichen kann.



Drei Triggerketten seien so verbunden, wie es in der vorstehenden Abbildung angeführt ist. Die obere Triggerkette dient der Aufzeichnung des ersten Summanden, die zweite Kette der Aufzeichnung des zweiten Summanden, die untere Kette aber der Ermittlung der Summe.
Im Augenblick des Einschaltens des Gerätes wirken auf die Trigger der unteren Kette die Impulse der oberen und mittleren Kette, die sich in der Stellung 1 befinden. Mögen z. B., wie das in der obigen Abbildung dargestellt ist, in den ersten beiden Ketten die Summanden 101 und 111 (im Dualsystem) aufgezeichnet sein.
Dann wirken auf den ersten (rechten) Trigger der unteren Kette im Moment des Einschaltens des Gerätes zwei Impulse, und zwar je einer von den ersten Triggern jedes Summanden. Wir wissen schon, dass im Ergebnis nach Empfang zweier Impulse der erste Trigger in der Nullstellung bleibt, aber einen Gegenimpuls an den zweiten Trigger abgibt. Außerdem wirkt auf den zweiten Trigger das Signal des zweiten Summanden.
Somit wirken auf den zweiten Trigger zwei Impulse, weshalb sich der zweite Trigger in der Nullstellung befindet und einen Gegenimpuls an den dritten Trigger abgibt.

Außerdem wirken auf den dritten Trigger noch zwei Impulse ein (ein Impuls von jedem der Summanden). Als Ergebnis dreier erhaltener Signale geht der dritte Trigger in die Stellung 1 über und gibt einen Gegenimpuls ab. Dieser Gegenimpuls führt den vierten Trigger in die Stellung 1 (andere Signale wirken auf den vierten Trigger nicht ein). Somit führte das in der Abbildung dargestellte Gerät folgende Addition zweier Zahlen (im Dualsystem) aus:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Das entspricht im Dezimalsystem der Rechnung $5 + 7 = 12$. Die Gegenimpulse in der unteren Triggerkette entsprechen dem Vorgang, den der Mensch als "merken" beim Überschreiten des Zehners ausführt.

Wären in jeder Kette nicht vier, sondern, sagen wir, zwanzig Trigger, so könnte man Additionen im Bereich einer Million durchführen, und bei einer größeren Anzahl von Triggern kann man noch größere Zahlen zusammenstellen.
Das Additionsgerät besitzt natürlich in Wirklichkeit ein etwas komplizierteres Schema als das, das in der Abbildung auf Seite 18 dargestellt ist. Insbesondere muss das Gerät Einrichtungen enthalten, die eine Impulsverzögerung zur Folge haben, sonst könnten die Signale der beiden Summanden auf den ersten Trigger der unteren Kette gleichzeitig (im Moment des Einschaltens des Gerätes) einwirken.

In diesem Fall würden sich beide Impulse vereinigen, und der Trigger würde sie als ein Signal wahrnehmen. Um das zu vermeiden, ist es notwendig, dass die Signale der Summanden nicht gleichzeitig ankommen, sondern mit etwas "Verspätung"einer nach dem anderen. Das Vorhandensein solcher "Verspätungen" führt dazu, dass die Addition zweier Zahlen mehr Zeit in Anspruch nimmt als die Registrierung eines Signals im Trigger.

Wenn man die Schaltung in gewisser Weise verändert, kann man das Gerät zur Subtraktion verwenden. Man kann auch Multiplikationen (sie führt zu aufeinanderfolgender Addition und. braucht deshalb um einiges mehr Zeit als eine Addition), Divisionen und andere Operationen realisieren. In modernen Rechenmaschinen werden solche Triggerketten verwendet. Sie sind in der Lage, 200000 und mehr Operationen in einer Sekunde auszuführen.

Die Zahl der möglichen Schachpartien

Beschäftigen wir uns nun mit der ungefähren Berechnung der Anzahl der verschiedenen Schachpartien, die überhaupt auf einem Schachbrett gespielt werden können.
Eine genaue Berechnung ist in diesem Falle undenkbar, aber man kann versuchen, die Anzahl der möglichen Schachpartien annähernd zu ermitteln. In dem Buch des belgischen Mathematikers Maurice Kraitchik, Mathematik der Spiele und mathematische Zerstreuungen[2], ist eine solche Berechnung enthalten. Es heißt dort:

Beim ersten Zug hat der Spieler mit den weißen Figuren die Auswahl unter 20 möglichen Zügen (16 Züge der acht Bauern, jeder von ihnen kann sich ein oder zwei Felder vorwärts bewegen, und je zwei Züge jedes Springers). Auf jeden Zug von Weiß kann Schwarz ebenfalls unter den entsprechenden 20 Zügen auswählen.
Kombinieren wir jeden solchen Zug von Weiß mit jedem Zug von Schwarz, so sind $20 \cdot 20 = 400$ verschiedene Partien bereits nach dem ersten Zug jeder Seite vorhanden.

Beim nächsten Zug erhöht sich die Anzahl der möglichen Züge. Hat Weiß zuerst den Zug e 2-e 4 getan, so stehen ihm beispielsweise für den zweiten Zug 29 verschiedene Züge zur Auswahl. Bei den weiteren Zügen wächst die Anzahl der möglichen Züge immer mehr. Allein mit der Dame kann man, wenn diese z. B. auf Feld d 5 steht, 27 verschiedene Züge ausführen. (Dabei wurde angenommen, dass alle Felder, die sie besetzen könnte, frei sind.)

Zur Vereinfachung der Berechnung werden wir uns an folgende Durchschnittswerte halten:

Je 20 mögliche Züge für beide Seiten bei den ersten fünf Zügen;
je 30 mögliche Züge für beide Seiten bei den folgenden Zügen.

Nehmen wir außerdem an, dass bei einer normalen Partie durchschnittlich 40 Züge gespielt werden, so finden wir für die Anzahl der möglichen Partien den Ausdruck

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}$$

Soweit die Ausführungen des belgischen Mathematikers Maurice Kraitschik.
Wir wollen nun diesen Ausdruck näherungsweise errechnen. Wir formen zunächst folgendermaßen um und vereinfachen:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}$$

Wir ersetzen 2^{10} durch die annähernd gleich große Zahl $1000 = 10^3$; Dann formen wir

[2] Mathématique des jeux ou récréations mathématiques (1930).

3^{70} um

$$3^{70} = 3^{68} \cdot 3^3 \approx 10(3^4)^{17} \approx 10 \cdot 80^{17} = 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} = 2^{51} \cdot 10^{18}$$
$$= 2(2^{10})^5 \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{33}$$

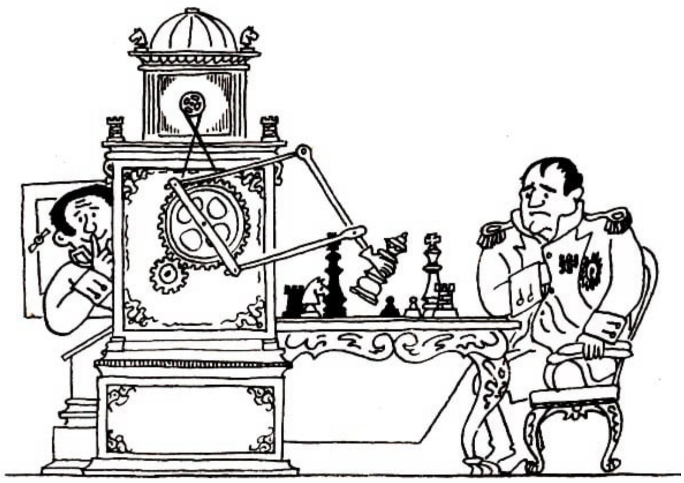
Folglich ist:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}$$

Diese Zahl lässt die ungeheure Anzahl von Weizenkörnern $2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$, die als Belohnung für die Erfindung des Schachspiels erbeten wurden, weit hinter sich zurück. Wenn die gesamte Bevölkerung des Erdballs einen vollen Tag Schach spielen und jede Sekunde je einen Zug ausführen würde, so müsste, um alle möglichen Schachpartien zu erfassen, ein solches allgemeines ununterbrochenes Spiel nicht weniger als 10^{100} Jahrhunderte dauern.

Das Geheimnis des Schachautomaten

Sicherlich werden Sie verwundert sein, wenn man Ihnen nun sagt, dass es bereits vor 150 Jahren Schachautomaten gegeben hat. Sie werden sich fragen, wie das wohl möglich ist, wenn man den Stand der Technik der damaligen Zeit mit der Anzahl der Figurenkombinationen auf dem Schachbrett vergleicht.
Die Sache klärt sich aber so auf, dass der angebliche "Schachautomat" in Wirklichkeit ein Bluff war. Im Innern des "Automaten" saß nämlich, geschickt versteckt, ein guter Schachspieler, der über mechanische Vorrichtungen die Figuren bewegte.



Besonderer Popularität erfreute sich die Maschine des ungarischen Mechanikers Wolfgang von Kempelen (1734-1804), die am österreichischen und auch am russischen Hof gezeigt wurde. Später wurde sie in Paris und London öffentlich vorgeführt.
Napoleon I. spielte mit diesem Automaten, überzeugt, dass er seine Kräfte mit der Maschine messen kann. In der Mitte des vorigen Jahrhunderts kam der berühmte "Automat" nach Amerika, wo er in Philadelphia durch einen Brand zerstört wurde.

Die anderen Schachspielautomaten wurden schon nicht mehr in solchem Maße bewundert. Nichtsdestoweniger ist der Glaube an ähnliche automatisch arbeitende Maschinen auch in späterer Zeit nicht versiegt.

Ein solcher Schachautomat stellte einen geräumigen Kasten dar, der einen komplizierten Mechanismus enthielt, aber, wie bereits erwähnt, auch Raum für einen Spieler bot. Auf dem Kasten befand sich ein Schachbrett mit Figuren, die durch die Hand einer großen Puppe bewegt wurden.

Der Mechanismus hatte überhaupt keine Bedeutung für die Aufgabe des Apparates, sondern verdeckte lediglich den lebenden Spieler;
Wie steht es nun um Schachautomaten in der heutigen Zeit?

Da die Anzahl der möglichen Schachpartien praktisch unendlich groß ist, kann man keine Maschine bauen, die alle nur denkbaren Züge auf ihre Zweckmäßigkeit hin untersucht. Es gibt aber bereits Maschinen, die nach einem vorher in die Maschine eingegebenen Operationsschema Berechnungen ausführen können, die eine Bewertung der verschiedenen Möglichkeiten bei den nächsten drei Zügen vornehmen.

Ein solches "Schachprogramm" wird von Mathematikern auf der Grundlage einer bestimmten Spieltaktik zusammengestellt, wobei unter Taktik ein System von Regeln verstanden wird, das es ermöglicht, für jede Position einen einzigen Zug (den "besten" im Sinne dieser Taktik) herauszufinden.
Wir wollen uns an dieser Stelle nur einmal ein Beispiel für eine solche Taktik ansehen. Jeder Figur wird eine bestimmte Punktzahl (Wert) zugeschrieben:

König:	+ 200 Punkte	Bauer	+ 1 Punkt
Dame:	+ 9 Punkte	zurückgebliebener Bauer	- 0,5 Punkte
Turm:	+ 5 Punkte	isoliert stehender Bauer	- 0,5 Punkte
Läufer:	+ 3 Punkte	doppelt stehender Bauer	- 0,5 Punkte
Springer:	+ 3 Punkte		

Außerdem werden nach einem bestimmten Verfahren die Positionsvorteile (die Bewegungsfähigkeit der Figuren, die Lage der Figuren nach der Entfernung vom Zentrum oder vom Rand usw.) bewertet, die in Zehntelteilen eines Punktes ausgedrückt werden.

Wir subtrahieren von der Gesamtsumme der weißen Figuren die Punktsumme der schwarzen Figuren. Die erhaltene Differenz charakterisiert bis zu einem gewissen Grad die Situation, und zwar die vorhandenen Figuren und die momentane Position der Weißen im Vergleich mit den Schwarzen.
Ist diese Differenz positiv, so befinden sich die Weißen in einer günstigeren Situation als die Schwarzen, ist sie negativ, so sind die Weißen im Nachteil. Die Rechenmaschine berechnet, wie sich diese Differenz im Laufe der nächsten drei Züge verändern kann, sie wählt die beste Variante aller möglichen Kombinationen von drei Zügen aus und druckt sie auf eine spezielle Karte. Damit ist seitens der Maschine der Zug getan. Für einen Zug benötigt die Maschine sehr wenig Zeit, was natürlich noch vom Programm und von der Rechengeschwindigkeit des Rechenautomaten abhängt.[3]

Da die eben beschriebene Maschine nur drei Züge im voraus beurteilen kann, ist sie ein

[3] Es existieren auch andere Arten von "Schachtaktiken". So kann man z. B. bei Berechnungen nicht alle möglichen Gegenzüge des Gegners voraussehen, sondern nur die "starken" Züge (Schach, Fi-

relativ schwacher "Spieler".[4]

Aber man kann nicht daran zweifeln, dass bei der ständigen Vervollkommnung der Rechentechnik und der Rechenautomaten bald Maschinen entwickelt werden, die weit bessere "Schachspieler" sind. Einige einfache Arten von Programmen werden wir uns schematisch im nächsten Kapitel ansehen.

Zahlen mit drei Zweien

Allen ist wahrscheinlich bekannt, wie man drei Ziffern schreiben muss, um durch sie die möglichst größte Zahl darzustellen. Drei Nennen muss man beispielsweise folgendermaßen anordnen 9^{9^9}.
Diese Zahl ist so ungeheuerlich groß, dass man sie auch durch Vergleiche nicht ausreichend verständlich machen kann. Die Anzahl der Elektronen des sichtbaren Universums ist im Vergleich mit ihr winzig.
Wir wollen uns aber zunächst einmal mit drei Zweien beschäftigen.

Aufgabe: Ohne Rechenzeichen zu verwenden, ist die möglichst größte Zahl mit drei Zweien zu schreiben.

Lösung: Unter dem frischen Eindruck der dreischichtigen Anordnung der Neunen sind Sie wahrscheinlich bereit, auch den Zweien eine solche Anordnung zu geben: 2^{2^2}.
Aber diesmal erhalten wir auf diese Weise nicht die gewünschte größte Zahl mit drei Zweien. Die Zahl 2^{2^2} ist nämlich gar nicht groß, kleiner sogar als 222. Mit 2^{2^2} haben wir nur 2^4, d. h. 16, erhalten.
Die tatsächlich größte Zahl aus drei Zweien ist aber auch nicht 222 und nicht 22^2 (d. h. 484), sondern $2^{22} = 4194304$.

Das Beispiel ist sehr lehrreich. Es zeigt, dass es in der Mathematik gefährlich ist, nach Analogien zu verfahren. Analogien führten nämlich schon häufig zu falschen Schlussfolgerungen.

Zahlen mit drei Dreien

Aufgabe: An die Lösung der nächsten Aufgabe gehen Sie jetzt sicherlich umsichtiger heran: Es ist die größte Zahl mit drei Dreien niederzuschreiben, ohne dass irgendwelche mathematischen Operationszeichen verwendet werden.

Lösung: Auch hier führt die dreischichtige Anordnung nicht zur größten Zahl, da 3^{3^3}, d.h. 3^{27}, kleiner als 3^{33} ist. Die größte Zahl mit drei Dreien ist also 3^{33}.

Zahlen mit drei Vieren

Aufgabe: Es ist die größte Zahl mit drei Vieren zu schreiben, ohne dass mathematische

gurenraub, Angriff, Verteidigung usw.). Ferner kann man bei besonders starken Zügen des Gegners die Berechnungen nicht nur auf drei, sondern auch auf eine größere Anzahl von Zügen im voraus ausdehnen. Man kann auch eine andere Figurenwertskale verwenden. In Abhängigkeit von der Auswahl dieser oder jener Taktik ändert sich der "Stil des Spiels" der Maschine.

[4] In den Partien der besten Schachmeister trifft man auf Kombinationen, die auf 10 und mehr Züge im voraus "berechnet" sind.

Operationszeichen verwendet werden.

Lösung: Wenn Sie die Lösung entsprechend den Lösungen der beiden vorangegangenen Aufgaben angeben, also 4^{44} schreiben, so haben Sie eine zu kleine Zahl ermittelt; denn dieses Mal führt gerade die dreischichtige Anordnung 4^{4^4} auf die größte Zahl. Da nämlich $4^4 = 256$ ist, führt die Zahl 4^{4^4} auf die Zahl 4^{256}, die größer ist als 4^{44}.

Zahlen mit drei gleichen Ziffern

Wir wollen uns nun allgemeiner mit Zahlen, die aus drei gleichen Ziffern gebildet werden, beschäftigen. Wie kommt es wohl, dass einige Zahlen bei einer dreischichtigen Anordnung Zahlenungeheuer darstellen und andere nicht?
Bezeichnen wir die Ziffer mit dem Buchstaben a, so entspricht der Anordnung 2^{22}, 3^{33}, 4^{44} der Ausdruck a^{10a+a}, also a^{11a}. Dagegen führt die dreischichtige Anordnung in allgemeiner Form auf a^{a^a}.

Wir wollen nun untersuchen, für welche Werte von a die erste Anordnung und für welche die zweite die größere Zahl darstellt. Da es sich bei beiden Anordnungen um Potenzen mit den gleichen ganzzahligen Basen handelt, hängt die Größe der Zahl offenbar nur von den Exponenten ab. Die Aufgabe beschränkt sich also auf die Lösung der Frage, wann a^a größer als $11a$ ist. Dividieren wir beide Zahlen durch a, und stellen wir eine Ungleichung auf, so erhalten wir:

$$a^{a-1} > 11$$

Damit nun a^{a-1} größer als 11 ist, muss a größer als 3 sein; denn $4^{4-1} > 11$.
Dagegen sind die Potenzen 3^2 and 2^1 kleiner als 11. Aus diesem Grunde also mussten wir für die Zweien und Dreien die Anordnung a^{10a+a} nehmen und für die Vieren und die größeren Zahlen die Anordnung a^{a^a}.

Zahlen mit vier Einsen

Aufgabe: Es ist die größte Zahl mit vier Einsen zu schreiben, ohne dass mathematische Operationszeichen verwendet werden.

Lösung: Die Zahl 1111, auf die man wohl zuerst kommt, ist nicht die gesuchte Zahl, da die Potenz 11^{11} um viele Male größer ist. Wenn man diese Potenz durch eine zehnfache Multiplikation mit elf ausrechnen Will, braucht man viel Geduld.
Man kann aber die Größenordnung dieser Zahl bedeutend schneller mit Hilfe logarithmischer Tafeln ermitteln. Man erhält dabei eine Zahl, die größer als 285 Milliarden ist. Die Potenz 11^{11} ist also größer als die Zahl 1111.

Zahlen mit vier Zweien

Aufgabe: Gehen wir nun zum nächsten Schritt in der Reihe solcher Aufgaben über, indem wir die Frage nach der größten Zahl mit vier Zweien stellen. Welche Anordnung ist hierfür zu wählen?

Lösung: Beim Schreiben einer Zahl mit vier Zweien sind acht Kombinationen möglich:

$$2222; 222^2; 22^{22}; 2^{222}; 22^{2^2}; 2^{22^2}; 2^{2^{22}}; 2^{2^{2^2}}$$

Welche dieser Zahlen ist nun die größte?
Beschäftigen wir uns zunächst mit den ersten vier, d. h. mit den Zahlen in zweischichtiger Anordnung. Die erste, 2222, ist offensichtlich kleiner als die drei anderen. Um die beiden folgenden, 222^2 und 22^{22}, zu vergleichen, wandeln wir die zweite von ihnen um:

$$22^{22} = 22^{2 \cdot 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}$$

Mit dieser Potenz erhalten wir eine Zahl, die größer als 222^2 ist, da sowohl die Basis als auch der Exponent der Potenz 484^{11} größer sind als bei der Potenz 222^2.
Vergleichen wir jetzt 22^{22} mit der vierten Zahl der ersten Zeile, mit 2^{222}. Ersetzen wir 22^{22} durch die größere Zahl 32^{22} und zeigen wir, dass sogar diese größere Zahl der Größe nach hinter der Zahl 2^{222} zurücksteht. Es ist nämlich

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

Die Potenz 2^{222} ist also erheblich kleiner als 2^{222}. Also, die größte Zahl der ersten vier Zahlen ist 2^{222}. Jetzt brauchen wir also nur noch fünf Zahlen miteinander zu vergleichen, die eben erhaltene und die folgenden vier:

$$22^{2^2}; 2^{22^2}; 2^{2^{22}}; 2^{2^{2^2}}$$

Die letzte Zahl, die man in 2^{16} umformen kann, scheidet sogleich aus. Desgleichen auch die Zahl 22^{2^2}, die nach der Umformung 22^4 ergibt und kleiner als 32^4, also kleiner als 2^{20} ist. Die drei übrigen Zahlen sind sämtlich Potenzen von 2. Wir müssen also wieder die Exponenten vergleichen.
Von den drei Exponenten 222, 484 und 2^{20+2} $(= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4)$ ist der letzte wohl der größte. Deshalb ist die größte Zahl, die man mit vier Zweien darstellen kann, die Potenz $2^{2^{22}}$.

Ohne die Logarithmentafeln in Anspruch nehmen Zu müssen, können wir uns doch eine annähernde Vorstellung über die Größe dieser Zahl machen, wenn wir folgende Näherung zugrunde legen: $2^{10} \approx 1000$.
Dann erhalten wir nämlich:

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6 \qquad , \qquad 2^{2^{22}} \approx 2^{4000000} > 10^{1200000}$$

Diese Zahl enthält also über eine Million Ziffern.

2 Die Sprache der Algebra

"Um eine Frage zu lösen, die sich auf Zahlen und auf abstrakte Verhältnisse von Größen bezieht, muss man lediglich die Aufgabe aus der Muttersprache in die , Sprache der Algebra übersetzen", schrieb der berühmte Newton in seinem Algebralehrbuch, der Arithmetika universalis.
Wie wird nun eine solche Übersetzung aus der Muttersprache in die Sprache der Algebra durchgeführt? Newton zeigt es an dem folgenden Beispiel:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.	x
Im ersten Jahr verbrauchte er 100 Pfund.	$x - 100$
Zur restlichen Summe legt er ihren dritten Teil hinzu.	$(x-100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-100}{3}$
Im nächsten Jahr verbrauchte er wieder 100 Pfund	$\frac{4x-100}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
und vergrößerte die restliche Summe um ihren dritten Teil.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
Im dritten Jahr verbrauchte er wieder 100 Pfund.	$\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
Er fügte nun dem Rest den dritten Teil des Restes zu	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$
und verdoppelte auf diese Weise sein Anfangskapital.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x$

Um das Anfangskapital des Kaufmanns zu ermitteln, bleibt nur übrig, die letzte Gleichung zu lösen. Die Lösung von Gleichungen ist häufig eine leichte Sache; das Aufstellen von Gleichungen nach Angaben der Aufgabe ist weitaus schwerer.
Die Kunst, Gleichungen aufzustellen, setzt das Verständnis für Übersetzungen aus der Muttersprache in die Sprache der Algebra voraus.

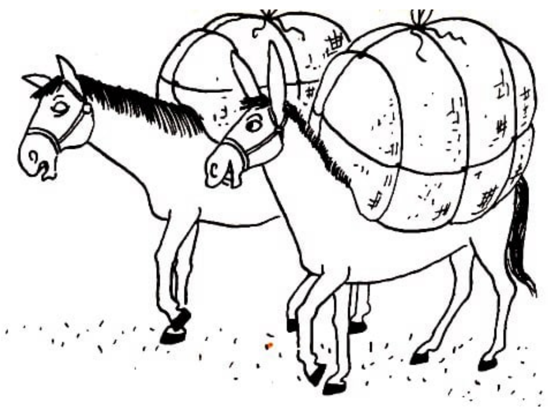
Aber die Sprache der Algebra ist äußerst wortarm. Deshalb ist es oftmals recht mühsam, jede Redewendung der Muttersprache zu übersetzen. Die folgenden Beispiele sollen auf so manche der beim Aufstellen von Gleichungen ersten Grades auftretenden Schwierigkeiten hinweisen.

Das Leben des Diophantos

Aufgabe: Die Geschichtsschreibung überlieferte uns nur wenige Einzelheiten aus dem Leben des recht bedeutenden antiken Mathematikers Diophantos. Alles, was über ihn bekannt ist, ist einer Grabinschrift entnommen, einer Inschrift, die in Form einer mathematischen Aufgabe verfasst ist.

Wanderer! Hier ruht die sterbliche Hülle des Diophantos.
Die Zahlen können Auskunft geben, o Wunder, wie lang seine Lebenszeit war. x
Ihren sechsten Teil bildete eine herrliche Kindheit. $\frac{x}{6}$
Es verrann noch ein Zwölftel des Lebens, dann bedeckte sich das Kinn mit Flaum. $\frac{x}{12}$
Ein Siebentel verbrachte Diophantos in kinderloser Ehe. $\frac{x}{7}$
Es vergingen fünf Jahre.
Dann wurde er mit einem schönen Erstlingssohn beglückt, dem das Schicksal
im Vergleich zum Vater nur die Hälfte eines herrlichen und hellen Lebens 5
auf der Erde beschied.
Und in großer Trauer nahm der Greis des irdischen Schicksals Ende wahr, $\frac{x}{2}$
nachdem er vier Jahre den Tod des Sohnes überlebte.
Sage, wie alt war Diophantos, als er starb?
Gleichung $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Lösung: Die Lösung dieser Gleichung ergibt $x = 84$.
Man kann auch die Einzelheiten der Grabinschrift in Jahren angeben. Diophantos heiratete mit 21 Jahren, er wurde Vater im 38. Lebensjahr, verlor den Sohn, als er 80 Jahre alt war, und starb mit 84 Jahren.



Das Pferd und das Maultier

Aufgabe: "Ein Pferd und ein Maultier gingen Seite an Seite mit einer schweren Last auf dem Rücken. Das Pferd beklagte sich über seine übermäßig schwere Bürde.
'Was beklagst du dich?', antwortete ihm das Maultier. 'Wenn ich von dir einen Sack nehme, wird meine Last doppelt so schwer wie deine. Würdest du von meinem Rücken einen Sack abnehmen, würde deine Last meiner gleich sein.'
Sagt nun, weise Mathematiker, wieviel Säcke trug das Pferd und wieviel trug das Maultier?

Lösung: Nehme ich von dir einen Sack,	$x-1$
wird meine Last	$y+1$
doppelt so schwer wie deine.	$y+1=2(x-1)$
Würdest du von meinem Rücken einen Sack abnehmen,	$y-1$
würde deine Last	$x+1$
meiner gleich sein.	$y-1=x+1$

Wir erhalten demnach ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$y+1 = 2(x-1) \quad \text{bzw.} \quad 2x - y = 3 \qquad \text{(I)}$$
$$y-1 = x+1 \quad \text{bzw.} \quad y - x = 2 \qquad \text{(II)}$$

Die Lösung lautet: Das Pferd trug 5 Säcke und das Maultier 7 Säcke.

Die vier Brüder

Aufgabe: Vier Brüder besitzen zusammen 45 Rubel. Damit alle vier gleich viel Geld besitzen, müsste der Betrag des ersten Bruders um 2 Rubel vergrößert werden, der Betrag des zweiten Bruders um 2 Rubel verringert, der Betrag des dritten Bruders verdoppelt und der des vierten Bruders halbiert werden.
Wieviel Rubel besitzt dann jeder?

Lösung: Vier Brüder besitzen 45 Rubel.	$x+y+z+t=45$
Vermehrt man den Betrag des ersten um 2 Rubel,	$x+2$
verringert man den Betrag des zweiten um 2 Rubel,	$y-2$
verdoppelt man den Betrag des dritten,	$2z$
halbiert man den Betrag des vierten,	$0,5t$
so haben alle das gleiche.	$x+2=y-2=2z=0,5t$

Gliedern wir die letzte Gleichungskette in drei einzelne Gleichungen auf, so erhalten wir:

$$x+2=y-2 \tag{I}$$
$$x+2=2z \tag{II}$$
$$x+2=\frac{t}{2} \tag{III}$$

Aus diesem Gleichungssystem kann man nach Umformung gewinnen:

$$y=x+4, \qquad z=\frac{1}{2}(x+2), \qquad t=2x+4$$

Wenn wir nun in die erste Gleichung einsetzen, so erhalten wir:

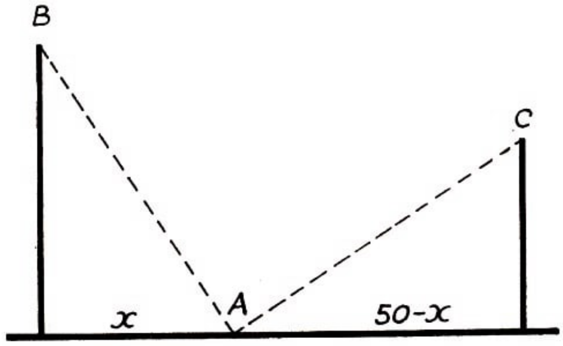
$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45$$

woraus $x=8$ folgt. Für die anderen Unbekannten erhält man dann: $y=12$, $z=5$ und $t=20$. Der erste Bruder besitzt also 8 Rubel, der zweite 12 Rubel, der dritte 5 Rubel und der vierte 20 Rubel.

Die Vögel am Fluss

Von einem arabischen Mathematiker des 11. Jahrhunderts stammt die folgende Aufgabe:
An den beiden Ufern eines Flusses stehen sich zwei Palmen gegenüber. Die Höhe der einen ist 30 Ellen, die der anderen 20 Ellen; der Abstand zwischen ihnen beträgt 50 Ellen. Im Wipfel jeder Palme sitzt ein Vogel.

Plötzlich bemerken beide Vögel einen bestimmten Fisch, der an die Oberfläche des Wassers zwischen den Palmen geschwommen war. Beide Vögel stürzen sich gleichzeitig auf ihn und erreichen ihn zum gleichen Zeitpunkt. In welcher Entfernung vom Standort der größeren Palme zeigte sich der Fisch?



Lösung: Aus der schematischen Zeichnung wird ersichtlich, dass nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2 \qquad \text{und} \qquad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

Da für die Aufgabe $\overline{AB} = \overline{AC}$ gesetzt wird (beide Vögel legen die Strecken in der gleichen Zeit zurück), erhält man

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

Nach Umformung ergibt sich daraus:

$$100x = 2000 \qquad , \qquad x = 20$$

Der Fisch zeigte sich also 20 Ellen weit von der größeren Palme entfernt. Diese Palme ist 30 Ellen hoch.

Der Spaziergang

Aufgabe: "Kommen Sie morgen bei mir vorbei!", sprach ein alter Doktor zu einem jungen Bekannten. Dieser antwortete: "Ich danke Ihnen für Ihre Einladung. Ich gehe um 15.00 Uhr los. Sollten auch Sie gedenken, einen Spaziergang zu machen, so gehen Sie zur gleichen Zeit los, so dass wir uns auf dem halben Wege treffen können!"
Darauf wandte der Doktor ein: "Sie vergessen, dass ich ein alter Mann bin. Ich bringe es in der Stunde höchstens auf 3 km, aber Sie, ein junger Mensch, legen selbst bei langsamstem Schritt 4 km in der Stunde zurück. Es wäre besser, wenn Sie mir eine kleine Vergünstigung einräumen würden."

"Das lässt sich einrichten", entgegnete der andere. "Da ich 1 km in der Stunde mehr gehe als Sie, übernehme ich zusätzlich, um uns gleichzustellen, einen Kilometer, d. h., ich gehe eine Viertelstunde früher los. Genügt das?"
"Das ist sehr liebenswürdig von Ihnen", sagte der Doktor und war einverstanden.

Der junge Mensch verließ also sein Haus um 14.45 Uhr und ging mit einer Geschwindigkeit von 4 km in der Stunde dem Doktor entgegen. Dagegen ging dieser genau um 15.00 Uhr los, und zwar mit einer Geschwindigkeit von 3 km $\cdot$ h^{-1}. Sie trafen sich und gingen nun gemeinsam zur Wohnung des Doktors zurück.

Als der junge Mann wieder zu Hause war, überlegte er sich noch einmal die Geschichte mit der Zeitvorgabe und stellte fest, dass er wegen der Viertelstunde Vorgabe schließlich nicht doppelt, sondern viermal so weit wie der Doktor gehen musste.
Wie weit ist es vom Haus des Doktors bis zum Haus seines jungen Bekannten?

Lösung: Die Entfernung zwischen den Häusern sei x km. Dann hatte der junge Mann insgesamt die Strecke $2x$ km zurückzulegen. Da der Doktor nur $\frac{1}{4}$ dieser Strecke zu laufen hatte, entfallen auf ihn $\frac{x}{2}$ km.
Als sich beide trafen, hatte der Doktor die Hälfte seines Spazierganges hinter sich, und zwar die Strecke $\frac{x}{4}$ km. Da er mit der Geschwindigkeit 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lief, benötigte er also für 1 km $\frac{1}{3}$ h und für $\frac{x}{4}$ km die Zeit $\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{3}$ h $= \frac{x}{12}$ h.

Der junge Mann legte bis zum Treffpunkt den übrigen Teil der x km, also x km - $\frac{x}{4}$ km $= \frac{3}{4}x$ km zurück. Er benötigte hierzu $\frac{3}{16}x$ h.
Berücksichtigt man nun, dass der junge Mann eine Viertelstunde länger als der Doktor unterwegs war, so kann man folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$$

Daraus ergibt sich $x = 2,4$. Von Haus zu Haus sind also 2,4 km zurückzulegen.

Der Schnitter

Der sowjetische Physiker A. W. Zinger berichtet in seinen 'Erinnerungen an L. N. Tolstoi' über die folgende Aufgabe, die er dem großen Schriftsteller einst vortrug und die diesem sehr gefiel:

"Eine Gruppe von Schnittern sollte zwei Wiesen mähen, eine doppelt so groß wie die andere. Einen halben Tag arbeiteten die Schnitter zusammen auf der großen Wiese. Den übrigen Teil des Arbeitstages arbeitete eine Hälfte der Gruppe auf der großen Wiese und mähte bis zum Abend noch den verbliebenen Rest.
Die andere Hälfte arbeitete auf der kleinen Wiese und schaffte bis zum Abend alles bis auf eine kleine Fläche, die am anderen Tag von einem Schnitter in einem Arbeitstag gemäht wurde."
Wieviel Schnitter gehörten zu dieser Arbeitsgruppe?

Lösung: In diesem Falle ist es bequemer, mit zwei Variablen zu rechnen. Die Anzahl der Schnitter, nach der eigentlich gefragt wurde, sei x. Die Fläche, die ein Schnitter an einem Arbeitstag mäht, werde mit y bezeichnet. Obwohl die Aufgabe nicht die Bestimmung der Leistung je Tag verlangt, erleichtert diese Hilfsunbekannte das Auffinden der Hauptunbekannten.
Stellen wir durch x und y die Fläche der großen Wiese dar. Auf dieser Wiese mähten an einem halben Tag zu Schnitter, sie mähten

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$$

Während der zweiten Hälfte des Arbeitstages mähte die Hälfte aller Schnitter auf dieser Wiese, d. h. $\frac{x}{2}$ Schnitter. Sie mähten in dieser Zeit:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$$

Da zum Abend die ganze Wiese gemäht war, ist ihre Fläche gleich

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

Drücken wir jetzt die Fläche der kleineren Wiese durch x und y aus. Also $\frac{x}{2}$ Schnitter mähten auf dieser kleineren Wiese einen halben Tag, und zwar mähten sie die Fläche:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} y = \frac{xy}{4}$$

Das noch fehlende Stück auf dieser Wiese entspricht gerade der Größe y. Fügen wir dieses Stück hinzu, so erhalten wir für die kleinere Wiese: ,

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

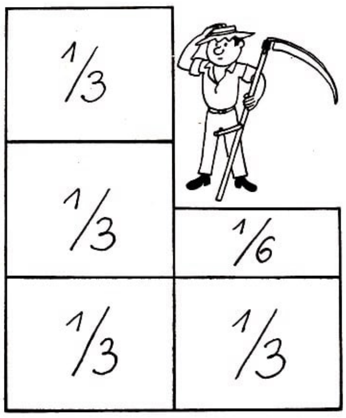
Wir müssen nun noch den Satz:
"Die erste Wiese ist doppelt so groß wie die zweite" in die Sprache der Algebra übersetzen und können dann die Gleichung aufstellen:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

Kürzen wir den Bruch auf der linken Seite der Gleichung mit y, so wird die Hilfsunbekannte y eliminiert:

$$\frac{3x}{x + 4} = 2; \qquad 3x = 2x + 8; \qquad x = 8$$

Der Arbeitsgruppe gehörten demnach 8 Schnitter an.



Nachdem die erste sowjetische Auflage der 'Unterhaltsamen Algebra' erschienen war, erhielt J. I. Perelman ein Schreiben von A. W. Zinger, das eine interessante Mitteilung über diese Aufgabe enthielt. Zinger schrieb, dass es sich eigentlich um eine recht einfache Aufgabe handle, die nur durch ihre nicht schablonenhafte Form erschwerend wirkt.
A. W. Zinger zeigte in seinem Schreiben die folgende Möglichkeit für einen Lösungsweg, der die zweite Unbekannte überflüssig macht und dabei recht einfach ist.

Wenn einen halben Tag lang die ganze Gruppe und einen halben Tag lang die Hälfte der Gruppe die große Wiese mähte, so ist klar, dass an einem halben Tag die Hälfte

der Gruppe $\frac{1}{3}$ der Wiese abmäht. Folglich blieb auf der kleinen Wiese eine ungemähte Fläche von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Wenn ein Schnitter an einem Tag $\frac{1}{6}$ der großen Wiese mäht, aber $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$ gemäht wurden, so waren es acht Schnitter.

Tolstoi, der scharfe, jedoch nicht besonders listige Aufgaben liebte, war begeistert, dass diese Aufgabe viel klarer und überschaubarer wird, wenn man sich bei der Lösung einer einfachen Zeichnung bedient.

Kühe auf der Wiese

Aufgabe: "Beim Studium erweisen sich die Aufgaben oft nützlicher als die Regeln", schrieb Newton in seiner Arithmetica universalis und führte hierfür eine Reihe von Beispielen an. Unter diesen Übungen finden wir die Aufgabe von den Ochsen, die auf einer Wiese weiden.
Diese Aufgabe ist ein Repräsentant für einen ganz besonderen Typ von Aufgaben, mit dem wir uns zunächst durch eine andere Aufgabe bekannt machen wollen.

Das Gras wächst auf der ganzen Wiese gleich dicht und schnell. Es ist bekannt, dass 70 Kühe es in 24 Tagen auffressen würden, und 30 Kühe in 60 Tagen. Wieviel Kühe würden das ganze Gras in 96 Tagen auffressen? Diese Aufgabe ist nicht so einfach, wie man auf den ersten Blick meint. Überlegen wir:

"Wenn 70 Kühe das gesamte Gras der Wiese in 24 Tagen auffressen, dann müssten 96 Kühe das Gras in einem Viertel der Zeit, also in 70 Tagen : 4 = 17,5 Tagen, auffressen." Das wäre aber schon die erste Dummheit. Wir werden gleich sehen, weshalb das so dumm ist.

Auch die folgende Überlegung ist töricht:
"Wenn 30 Kühe das Gras in 60 Tagen auffressen, so wird in 96 Tagen das Gras von $18\frac{3}{4}$ Kühen gefressen." Ja, wenn man weiter nach diesem Verfahren überlegt, dann werden einem auch die beiden Voraussetzungen der Aufgabe falsch vorkommen.
Denn man denkt: "Wenn 70 Kühe das Gras in 24 Tagen fressen, so benötigen 30 Kühe 56 Tage dazu und nicht 60, wie die Aufgabe behauptet."

Der Fehler liegt darin, dass nicht berücksichtigt wurde, dass das Gras in der Zeit, in der die Kühe weiden, weiterwächst. Wie wird die Aufgabe nun gelöst?

Lösung: Wir führen auch in diesem Fall eine Hilfsunbekannte ein, die den täglichen Graszuwachs auf der Wiese in Teilen seines Vorrates bezeichnet. An einem Tag wächst y hinzu, in 24 Tagen demnach $24y$. Setzt man für den ursprünglichen Vorrat 1, so fressen die Kühe in 24 Tagen $1 + 24y$.
An einem Tag frisst die ganze Herde von 70 Kühen $\frac{1+24y}{24}$, und eine Kuh frisst $\frac{1+24y}{70 \cdot 24}$.
Auf gleiche Weise leiten wir aus der zweiten Voraussetzung, dass nämlich 30 Kühe das

Gras der gleichen Wiese in 60 Tagen fressen würden, her, dass eine Kuh an einem Tag $\frac{1+60y}{30 \cdot 60}$ frisst.

Da nun die Grasmenge, die je Kuh in beiden Herden gefressen wird, als gleich angenommen werden kann, gilt:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+60y}{30 \cdot 60}$$

woraus $y = \frac{1}{480}$ folgt.
Da wir nun y ermittelt haben, fällt es nicht mehr schwer, den Teil des anfänglichen Grasvorrats zu ermitteln, den eine Kuh je Tag verzehrt. Wir erhalten:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+24 \cdot \frac{1}{180}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}$$

Zum Schluss stellen wir die Gleichung für die endgültige Lösung der Aufgabe zusammen: Ist die gesuchte Anzahl x Kühen zu, dann gilt:

$$\frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}$$

Für x ergibt sich daraus 20.
Ergebnis: Es würden 20 Kühe in 96 Tagen das gesamte Gras fressen.

Eine Aufgabe des großen englischen Mathematikers Newton

Beschäftigen wir uns jetzt mit der schon erwähnten Aufgabe von Isaac Newton über die Ochsen, nach deren Beispiel die eben betrachtete gebildet wurde. Die Aufgabe ist übrigens nicht von Newton selbst erdacht werden.

"Drei Wiesen haben die Größen $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha und 24 ha. Auf allen drei Wiesen seien die Wachstumsbedingungen gleich. Das Gras wachse in gleicher Dichte, und auch der Zuwachs sei gleich.
Auf der ersten Wiese werden 12 Ochsen für die Dauer von vier Wochen gehalten, auf der zweiten Wiese 21 Ochsen für die Dauer von 9 Wochen.
Dann ist das Gras so weit abgefressen, dass die Weide ruhen muss.

Wieviel Ochsen können auf der dritten für die Dauer von 18 Wochen gehalten werden?

Lösung: Mit der Hilfsunbekannten y bezeichnen wir den Teil des anfänglichen Grasvorrates auf 1 ha, der im Laufe einer Woche hinzuwächst. Auf der ersten Wiese wächst in einer Woche $3\frac{1}{3}y$ hinzu und in 4 Wochen $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ des Vorrates, der anfänglich auf 1 ha vorhanden war. Das ist gleichbedeutend mit einer Vergrößerung der Anfangsfläche der Wiese auf

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) \text{ Hektar}$$

Mit anderen Worten, die Ochsen fraßen so viel Gras, wie auf einer Wiese mit der Fläche $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ ha vorhanden ist. In einer Woche fraßen 12 Ochsen den vierten Teil dieser Menge, und 1 Ochse in der Woche $\frac{1}{48}$, d. h. den Vorrat, der auf einer Fläche von $\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10+40y}{144}$ ha vorhanden ist.

Auf die gleiche Weise ermitteln wir den Flächeninhalt einer Wiese, die ein Ochse in einer Woche leer frisst, aus den Angaben für die zweite Wiese:

Wochenzuwachs auf 1 ha:	y
neunwöchiger Zuwachs auf 1 ha:	$9y$
neunwöchiger Zuwachs auf 10 ha:	$90y$

Die Fläche des Stücks, das den Grasvorrat zur Fütterung von 21 Ochsen in 9 Wochen bringt, ist gleich $10 + 90y$.
Die Fläche, die für die Fütterung eines Ochsen in einer Woche ausreicht, ist

$$\frac{10+90y}{9 \cdot 21} \text{ ha } = \frac{10+90y}{189} \text{ ha}$$

groß. Da, die Fütterung der Ochsen konstant angenommen wird, gilt:

$$\frac{10+40y}{144} \text{ ha } = \frac{10+90y}{189} \text{ ha}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $y = \frac{1}{12}$ ha.
Bestimmen wir jetzt die Wiesenfläche, die für die Haltung eines Ochsen für die Dauer einer Woche ausreicht:

$$\frac{10+40y}{144} \text{ ha } = \frac{10+40 \cdot \frac{1}{12}}{144} \text{ ha } = \frac{5}{54} \text{ ha}$$

Nun können wir an die ursprüngliche Fragestellung anknüpfen. Die gesuchte Anzahl Ochsen wurde mit x bezeichnet. Es gilt also:

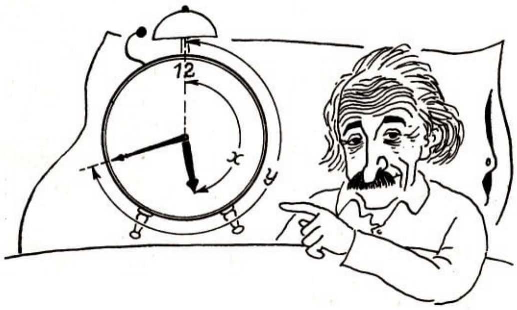
$$\frac{24 + 24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54}$$

woraus sich $x = 36$ ergibt. Auf der dritten Wiese können in 18 Wochen 36 Ochsen gehalten werden.

Über das Vertauschen der Uhrzeiger

Als der bekannte Physiker Albert Einstein einmal krank war, stellte ihm sein Freund A. Moschkowski eine mathematische Aufgabe zur Unterhaltung.
"Nehmen wir an", sagte Moschkowski, "die Zeiger einer Uhr zeigen 12 Uhr an. Bei dieser Zeigerstellung könnte man die beiden Zeiger vertauschen, ohne dass die Uhr eine falsche Zeit anzeigte. Dagegen wäre dieses Vertauschen zu anderen Zeiten, z. B. um 6 Uhr, nicht möglich, denn man würde Zeigerstellungen erhalten, die bei richtiggehenden Uhren nicht vorkomme können:
Der Minutenzeiger kann nicht auf 6 stehen, wenn der Stundenzeiger 12 anzeigt. Es entsteht die Frage: Wann und wie oft stehen die Uhrzeiger so, dass sich bei einem Austausch der Zeiger Stellungen ergeben, die tatsächlich möglich sind?"

"Ja", antwortete Einstein, "das ist eine passende Aufgabe für einen Menschen, der wegen einer leichten Erkrankung das Bett hüten muss. Die Aufgabe ist genügend interessant und nicht sehr leicht. Ich fürchte nur, dass das Vergnügen nicht lange anhält. Ich bin schon auf den Lösungsweg gestoßen."



Einstein richtete sich auf, skizzierte in einem Heft mit einigen Strichen ein Schema, das die Bedingungen der Aufgabe darstellte, und nach kurzer Zeit hatte er die Lösung gefunden. Wir werden wahrscheinlich etwas mehr Zeit für die Lösung dieser Aufgabe benötigen.

Lösung: Zunächst teilen wir den Umfang des Ziffernblattes in Sechzigstel. Den Ausgangspunkt stellt die 12 dar. Der rückläufige Abstand eines Zeigers zur 12 wird dann in Sechzigsteln angegeben.
So soll z.B. bei einer Zeigerstellung der Stundenzeiger von der Ziffer 12 um x Teilstriche entfernt sein und der Minutenzeiger von der 12 um y Teilstriche.

Da der Stundenzeiger in 12 Stunden 60 Teilstriche durchläuft, d. h. 5 Teilstriche in einer Stunde, so legt er x Teilstriche in $\frac{x}{5}$ Stunden zurück. Mit anderen Worten: Seitdem es 12 Uhr war, sind $\frac{x}{5}$ Stunden vergangen.

Der Minutenzeiger durchliefe y Teilstriche in y Minuten, d. h. in $\frac{y}{60}$ Stunden. Mit anderen Worten: An der 12 befand sich der Minutenzeiger vor $\frac{y}{60}$ Stunden. Beide Zeiger standen demnach vor $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{60}\right)$ Stunden auf 12. Diese Zahl ist eine ganze Zahl zwischen 0 und 11 einschließlich; denn sie zeigt an, wieviel volle Stunden nach 12 vergangen sind.

Wenn die Zeiger ihre Plätze wechseln, finden wir analog, dass von zwölf Uhr bis zu der Zeit, die von den Zeigern angezeigt wird, $\left(\frac{y}{5} - \frac{x}{60}\right)$ volle Stunden vergangen sind. Diese Zahl ist ebenfalls eine ganze Zahl zwischen 0 und 11.
Wir erhalten somit das Gleichungssystem:

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m$$
$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n$$

Hierin stellen m und n ganze Zahlen zwischen 0 und 11 einschließlich dar. Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet:

$$x = \frac{60(12m + n)}{143} \quad , \quad y = \frac{60(12n + m)}{143}$$

Setzen wir für m und n die Werte von 0 bis 11 ein, so erhalten wir alle Zeigerstellungen, für die das Auswechseln der Zeiger möglich ist.

Da jeder der 12 Werte m zusammen mit je einem der 12 Werte n ein Lösungspaar ergibt, so liegt der Gedanke nahe, dass $12 \cdot 12 = 144$ Lösungen möglich sind. Es gibt aber nur 143 Lösungspaare, weil sich bei $m = 0$ und $n = 0$ sowie bei $m = 11$ und $n = 11$ ein und dieselbe Zeigerstellung ergibt.

Bei $m = 11$, $n = 11$ erhalten wir $x = 60$, $y = 60$, d. h., die Uhr zeigt 12 Uhr wie auch im Falle von $m = 0$, $n = 0$.
Zur Überprüfung der Lösungsformel wollen wir nun für zwei beliebig ausgewählte Zeigerstellungen die Vertauschung vornehmen.

a) $m = 1$; $n = 1$

$$x = \frac{60 \cdot 13}{143} = 5\frac{5}{11} \qquad , \qquad y = 5\frac{5}{11}$$

Das bedeutet, dass die ursprüngliche Zeigerstellung 1 h $5\frac{5}{11}$ min anzeigt. In diesem Moment stehen die beiden Zeiger übereinander, und ein Vertauschen führt natürlich nicht zu einer unmöglichen Zeigerstellung.

b) $m = 8$; $n = 5$

$$x = \frac{60(5 + 12 \cdot 8)}{143} \approx 42,38 \qquad , \qquad y = \frac{90(8 + 12 \cdot 5)}{143} \approx 28,53$$

Das entspricht der Uhrzeit 8 h $28,53$ min. Nach der Vertauschung der Uhrzeiger erhält man die Zeit 5 h $42,38$ min.

Unsere Überlegung ergab 143 Zeigerstellungen mit Vertauschungsmöglichkeit. Man kann alle Punkte auf dem Rand des Ziffernblattes markieren, die für Zeigerstellungen mit Vertauschungsmöglichkeit in Frage kommen, indem man den Kreis in 143 Teile teilt. Wenn ein Zeiger oder gar beide Zeiger sich zwischen diesen Punkten befinden, ist ein Vertauschen nicht möglich.

Wie oft stehen die Zeiger einer Uhr übereinander?

Aufgabe: Bei gewissen Uhrzeiten nehmen die Zeiger der Uhren eine Stellung ein, bei der die beiden Zeiger übereinanderstehen. Wieviel verschiedene Zeigerstellungen dieser Art gibt es?

Lösung: Wir können uns der Gleichung bedienen, die bei der Lösung der vorangegangenen Aufgabe hergeleitet wurde: Denn, wenn Stunden- und Minutenzeiger übereinanderstehen, kann man sie austauschen, ohne dass sich die Zeitangabe ändert. Dabei durchlaufen beide Zeiger von der Zahl 12 ab die gleiche Anzahl von Teilstrichen, also ist $x = y$.
Somit leiten wir aus den Schlussfolgerungen, die sich auf die vorangegangene Aufgabe beziehen, die Gleichung

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = m$$

her, in der m eine ganze Zahl von 0 bis 11 ist. Aus dieser Gleichung ermitteln wir

$$x = \frac{60m}{11}$$

Aus 12 möglichen Werten für m (von 0 bis 11) erhalten wir nicht 12, sondern nur 11 verschiedene Zeigerstellungen, da wir bei $m = 11$ den Wert $x = 60$ ermitteln, d. h., beide Zeiger legten 60 Teilabschnitte zurück und befinden sich auf der Ziffer 12. Diese Zeigerstellung ergibt sich aber auch bei $m = 0$.

Die sieben Spieler

Aufgabe: Sieben Spieler vereinbarten, dass jeder Verlierer jedem der übrigen sechs Partner so viel Geld bezahlt, wie dieser besitzt, mit anderen Worten, dessen Geld verdoppelt. Sie spielten 7 Partien. Es verloren alle, nämlich jeder einmal.
Nach Abschluss des Spieles zählte man, wieviel Geld jeder hatte. Es zeigte sich, dass alle gleich viel hatten - 12 Rubel 80 Kopeken. Wieviel Geld hatte jeder vor Beginn des Spieles?

Lösung: Ungeachtet der scheinbaren Schwierigkeiten, findet man die Lösung ziemlich leicht, wenn man sich vorstellt, dass während des Spiels die Summe des Geldes aller Spieler unverändert blieb. Das Geld wechselte nur aus der Tasche des einen in die Tasche des anderen. Daraus folgt, dass die gesamte Geldmenge zu Beginn des Spiels dieselbe war wie am Ende, d. h. $7 \cdot 12,8$ Rubel.
Untersuchen wir, wie sich die Geldmenge des Spielers änderte, der als erster verlor.

Vor dem ersten Spiel besaß er x Rubel. Nach der ersten Partie, die er ja verloren hatte, zahlte er an die sechs Partner so viel wie sie besaßen, d. h. $7 \cdot 12,8 - x$. Er behielt nach der ersten Partie

$$x - (7 \cdot 12,8 - x) \text{ Rubel } = 2x - 7 \cdot 12,8 \text{ Rubel}$$

Nach dem zweiten Spiel verdoppelte sich sein Geld. Er hatte dann also

$$2(2x - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

Nach dem dritten Spiel verdoppelte sich sein Geld wieder und betrug

$$2^2(2x - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

Nach dem vierten Spiel hatte er

$$2^3(2x - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

und nach dem siebenten Spiel schließlich 12,8 Rubel. Folglich gilt die Gleichung

$$2^6(2x - 7 \cdot 12,8) = 12,8$$

Bei der Lösung dieser Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} 64(2x - 7 \cdot 12,8) &= 12,8 \\ 2x - 7 \cdot 12,8 &= 0,2 \\ 2x - 89,6 &= 0,2 \\ x &= 44,9 \end{aligned}$$

Vor den Spielen besaß dieser Mann also 44 Rubel und 90 Kopeken.

Auf die gleiche Weise können wir nun den Betrag ermitteln, den der Spieler, der als zweiter verlor, mitbrachte. Wir bezeichnen diesen Betrag zunächst mit y Rubel.
Nach dem ersten Spiel erhöhte sich sein Betrag auf $2y$. Das zweite Spiel verlor er und zahlte $7 \cdot 12,8 - 2y$ aus; es blieben ihm

$$2y - (7 \cdot 12,8 - 2y) \text{ Rubel } = 4y - 7 \cdot 12,8 \text{ Rubel}$$

Nach dem dritten Spiel vermehrte sich sein Geld wieder, und zwar auf

$$2(4y - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

Diese Verdopplung seines Spielgeldes ging so fort, bis das Spielen nach der siebenten Partie abgebrochen wurde. Nach dem vierten Spiel hatte er also

$$2^2(4y - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

und nach dem siebenten Spiel schließlich

$$2^5(4y - 7 \cdot 12,8) \text{ Rubel}$$

Die Gleichung lautet dieses Mal

$$2^5(4y - 7 \cdot 12,8) = 12,8$$

und die Lösung $y = 22,5$. Der Spieler, der als zweiter verlor, brachte also 22 Rubel und 50 Kopeken mit zum Spiel.

Der Spieler, der als dritter verlor, brachte 1 Rubel und 30 Kopeken mit. Wenn man auf diese Weise die Einsatzbeträge aller sieben Spieler berechnet hat, kann man sich leicht durch eine Probe überzeugen, ob die Rechnung keine Fehler enthält. Die Summe aller Einsatzbeträge muss nämlich mit der Summe der Beträge der einzelnen Spieler am Ende des Spiels übereinstimmen.

Ein mathematisches Problem für den Archivar

Beim Ordnen längst vergessener mathematischer Handschriften stieß ein Archivar auf die folgende Aufgabe, die ihm zunächst sinnlos erschien:
"Welche Zahl ist gleich 84,wenn $8 \cdot 8 = 54$ gilt?"

Nach längerem Überlegen erkannte der Archivar jedoch den Sinn dieser Aufgabe, die ihm dann ganz und gar nicht mehr seltsam erschien. Die Aufgabe kann mit Hilfe von Gleichungen gelöst werden. Versuchen Sie es!

Lösung: Sie errieten wahrscheinlich, dass die Zahlen, die in der Aufgabe enthalten sind, nicht nach dem Dezimalsystem geschrieben sind. Anderenfalls wäre die Fragestellung in der Aufgabe tatsächlich unverständlich.
Möge die Basis des unbekannten Zahlensystems x sein. Die Zahl "84" bedeutet dann, dass 8 Einheiten der zweiten Stufe und 4 Einheiten der ersten Stufe vorhanden sind. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\text{"84"} = 8x + 4$$

Die Zahl "54" dieses Systems führt analog zur Gleichung:

$$"54" = 5x + 4$$

Die Voraussetzung in der Aufgabenstellung ergibt dann die Gleichung:

$$8 \cdot 8 = 5x + 4$$

Geht man nun ins Dezimalsystem über, so erhält man:

$$64 = 5x + 4$$

woraus $x = 12$ folgt.
Die Zahlen wurden also im Zwölfersystem geschrieben, und "84" entspricht der Zahl $8 \cdot 12 + 4 = 100$ im dekadischen System.
Ergebnis: Wenn $8 \cdot 8 = "54"$ ist, so ist $"84" = 100$.

Auf gleiche Weise wird auch die folgende Aufgabe dieser Art gelöst: "Welche Zahl ist gleich 100, wenn $5 \cdot 6 = 33$ gilt?"
Ergebnis: 81 (Die Zahlen sind nach dem Neunersystem niedergeschrieben.)

Die Gleichung denkt für uns

Wenn Sie daran zweifeln, dass eine Gleichung manchmal weitsichtiger ist als wir selbst, lösen Sie die folgende Aufgabe. Der Vater ist 32 Jahre alt, sein Sohn 5 Jahre.

In wieviel Jahren wird der Vater 10 mal so alt sein wie der Sohn?

Lösung: Bezeichnen wir die gesuchte Zeit mit x. Nach x Jahren wird der Vater $(32+x)$ Jahre alt sein, der Sohn $(5 + x)$. Da der Vater dann 10 mal so alt wie sein Sohn sein soll, gilt die Gleichung $32 + x = 10(5 + x)$.
Als Lösung erhalten wir $x = -2$.

Das Ergebnis, bringt zum Ausdruck, dass dieses Ereignis vor zwei Jahren eingetreten ist, als nämlich der Vater 30 und der Sohn 3 Jahre alt waren.
Als wir die Gleichung aufstellten, dachten wir nicht daran, dass das Alter des Vaters in Zukunft niemals das 10fache Alter des Sohnes sein wird. Solch ein Verhältnis der Jahresangaben konnte es nur in der Vergangenheit geben. Die Gleichung erwies sich als kritischer und ermahnt uns zu erhöhter Gründlichkeit bei der Vorbereitung eines

Lösungsweges.

Kuriositäten und Überraschungen

Bei der Lösung von Gleichungen erhält man zuweilen mathematische Ausdrücke, die einen weniger erfahrenen Rechner stutzen lassen oder in eine Sackgasse führen.

1. Es ist eine zweistellige Zahl zu suchen, die über folgende Eigenschaften verfügt:
Die Zehnerziffer ist um 4 kleiner als die Einerziffer. Wechselt man die Ziffern dieser Zahl, so dass also die Einerziffer um 4 kleiner als die Zehnerziffer ist, und subtrahiert die gesuchte Zahl, so erhält man 27. Wie heißt diese Zahl?

Lösung: Bezeichnet man die Zehnerziffer mit x und die Einerziffer mit y, so erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= y - 4 \\ (10y + x) - (10x + y) &= 27 \end{aligned}$$

Wir setzen in die zweite Gleichung den Wert für x ein und erhalten:

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27$$

und nach Auflösung der Klammern sowie nach dem Zusammenfassen der Glieder:

$$36 = 27$$

Wir haben dabei nicht die Werte der unbekannten Ziffern der gesuchten Zahlen ermittelt. Dafür erfuhren wir, dass $36 = 27$ ist. Was bedeutet das?
Das bedeutet lediglich, dass es eine zweistellige Zahl, die den gestellten Bedingungen gerecht wird, nicht gibt und dass die aufgestellten Gleichungen einander widersprechen.
Das wird deutlich, wenn wir beide Seiten der ersten Gleichung mit 9 multiplizieren und eine Umordnung vornehmen, also:

$$9y - 9x = 36$$

Aus der zweiten Gleichung gewinnt man aber

$$9y - 9x = 27$$

Ein und dieselbe Differenz, nämlich $9y - 9x$, soll entsprechend der ersten Gleichung gleich 36 und entsprechend der zweiten gleich 27 sein. Das ist natürlich unmöglich, da $36 \neq 27$ ist.

Eine ähnliche Aussage ermittelt der, der folgendes Gleichungssystem löst:

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= 8 \\ xy &= 4 \end{aligned}$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir $xy = 2$. Stellen wir aber diese Gleichung der zweiten gegebenen Gleichung gegenüber, so erhält man das System:

$$xy = 4$$
$$xy = 2$$

Das bedeutet aber, dass 2 = 4 ist. Es gibt keine Zahlen, die dieses Gleichungssystem erfüllen.

2. Einer Überraschung anderer Art begegnen wir, wenn wir die Bedingung der vorangegangenen Aufgabe ein wenig verändern. Wir nehmen an, dass die Zehnerziffer nicht um 4, sondern um 3 kleiner ist als die Ziffer der Einer. Im übrigen aber belassen wir die gleichen Aufgabenbedingungen. Was ist das für eine Zahl?

Lösung: Stellen wir die Gleichung auf. Bezeichnen wir die Zehnerziffer mit x, so wird die Anzahl der Einer durch $x+3$ dargestellt. Wir übersetzen die Aufgabe in die Sprache der Algebra und erhalten

$$10(x+3) + x - [10x + (x+3)] = 27$$

Nachdem wir eine Vereinfachung durchgeführt haben, gelangen wir zur Gleichheit $27 = 27$. Diese Gleichheit ist unbestreitbar richtig, aber sie sagt uns nichts über den Wert von x. Bedeutet das etwa, dass es Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe gerecht werden, nicht gibt?

Im Gegenteil, das bedeutet, dass die von uns aufgestellte Gleichung eine Identität ist, d. h., sie ist richtig für jeden Wert der Unbekannten x. Man kann sich tatsächlich leicht davon überzeugen, dass über die in der Aufgabe gezeigten Eigenschaften jede zweistellige Zahl verfügt, deren Einerziffer um 3 größer ist als die Zehnerziffer:

$$\begin{array}{lll} 14 + 27 = 41, & 47 + 27 = 74, & 25 + 27 = 52, \\ 58 + 27 = 85, & 36 + 27 = 63, & 69 + 27 = 96. \end{array}$$

3. Es ist eine dreistellige Zahl zu suchen, die über folgende Eigenschaften verfügt:
a) die Zehnerziffer ist 7;
b) die Hunderterziffer ist um 4 kleiner als die Einerziffer;
c) werden die Ziffern dieser Zahl in umgekehrter Reihenfolge angeordnet, so wird die neue Zahl um 396 größer als die gesuchte sein.
Wie heißt diese Zahl?

Lösung: Wir stellen die Gleichung auf und bezeichnen die Einerziffer mit x

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x-4) + 70 + x] = 396$$

Diese Gleichung führt nach Vereinfachung zur Gleichheit $396 = 396$.
Wir Wissen nun schon, wie man ein solches Resultat erklärt. Es bedeutet, dass jede dreistellige Zahl, bei der die erste Ziffer um 4 geringer ist als die dritte, sich auf

396 vergrößert, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge niederschreibt. Die Zehnerziffer ist dafür nicht von Bedeutung.

Bis jetzt betrachteten wir Aufgaben, die einen mehr oder weniger gekünstelten Eindruck machten. Sie trugen aber dazu bei, Fertigkeiten beim Aufstellen von Gleichungen und bei ihrer Lösung zu erwerben.
Wir wollen uns nun mit einigen praktischen Aufgaben aus dem Gebiet der Produktion, des täglichen Lebens, des Militärwesens und des Sports beschäftigen.

Im Frisiersalon

Aufgabe: Wird die Algebra auch beim Friseur gebraucht? Es zeigt sich, dass es solche Fälle gibt. Ich musste mich davon überzeugen, als einmal im Frisiersalon der Meister mit einer unerwarteten Bitte an mich herantrat:

"Würden Sie uns nicht eine Aufgabe lösen helfen, mit der wir nicht fertig werden?"
"Wieviel Lösung haben wir deshalb schon verderben!" ergänzte ein Geselle.
"Worin besteht die Aufgabe?" erkundigte ich mich.
"Wir haben zwei Wasserstoffperoxidlösungen, eine 30 prozentige und eine 3 prozentige, und wollen sie so mischen, dass eine 12 prozentige Lösung entsteht. Wir können aber nicht herausbekommen, in welchem Verhältnis wir die Lösungen mischen müssen."

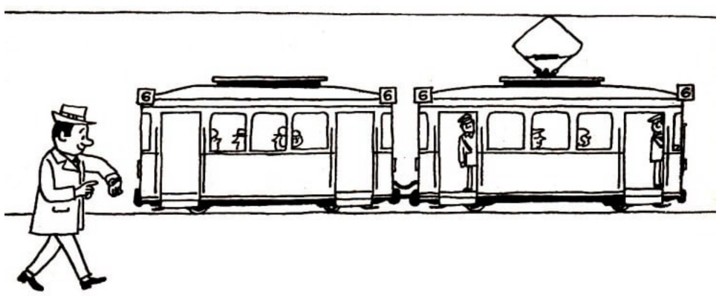
Man gab mir Papier und Bleistift, und in kurzer Zeit war das gesuchte Verhältnis gefunden. Es war ein sehr einfaches Verhältnis. Welches nämlich?

Lösung: Mögen für das Entstehen eines 12 prozentigen Gemisches x g der 3 prozentigen Lösung und y g der 30 prozentigen gefordert sein. Dann sind in dem ersten Anteil $0,03x$ g reinen Wasserstoffperoxids enthalten, im zweiten $0,3y$ und insgesamt $0,03x + 0,3y$. Nach dem Mischen erhält man $(x + y)$ g Lösung, in der $0,12(x + y)$ g reinen Wasserstoffperoxids sein sollen. Wir erhalten die Gleichung:

$$0,03x + 0,3y = 0,12(x + y)$$

Nach Vereinfachung erhält man $x = 2y$. Das bedeutet, dass man doppelt soviel 3 prozentige wie 30 prozentige Lösung nehmen muss.

Die Straßenbahn und der Fußgänger



Aufgabe: Ein Fußgänger spazierte eine Straße entlang, durch die auch eine Straßenbahnlinie führt. Ihm fiel auf, dass ihn regelmäßig alle 12 Minuten eine Bahn überholte und dass ihm alle 4 Minuten eine Bahn entgegenkam. Der Fußgänger spazierte mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, aber auch die Straßenbahn fuhr auf diesem Streckenabschnitt mit konstanter Geschwindigkeit. In welchem Abstand verkehren die Wagen auf dieser Linie?

Lösung: Angenommen, die Wagen fahren in einem Abstand von x Minuten. Das würde bedeuten, dass an einem festen Punkt der Strecke jeweils nach x Minuten die nächste Bahn kommt. Der Fußgänger geht jedoch weiter in Fahrtrichtung und wird nach 12 Minuten von der nächsten Bahn eingeholt.
Das bedeutet, dass die Straßenbahn diese Strecke in $12-x$ Minuten zurücklegt. Für den Weg, für den der Fußgänger 1 Minute benötigt, braucht die Straßenbahn $\frac{12-x}{12}$ Minuten.
Die entgegenkommenden Bahnen fahren alle vier Minuten am Fußgänger vorbei.

Die Strecke, für die der Fußgänger vier Minuten benötigt, legt die Bahn also in $x-4$ Minuten zurück. Für den Weg, für den der Fußgänger 1 Minute benötigt, braucht die entgegenkommende Bahn $\frac{x-4}{4}$ Minuten.
Man erhält die Gleichung:

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}$$

Daraus ergibt sich als Lösung $x = 6$. Die Wagen fahren im Abstand von 6 Minuten.

Man kann auch folgenden Lösungsweg einschlagen. Man bezeichnet die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Straßenbahnen mit a. Dann verringert sich der Abstand zwischen dem Fußgänger und der Straßenbahn, die entgegenkommt, um $\frac{a}{4}$ in der Minute; denn der Fußgänger legt den Abstand a in 4 Minuten zurück.
Der Abstand, der zwischen der überholenden Bahn und dem Fußgänger besteht, verringert sich um $\frac{a}{12}$ in der Minute. Nimmt man nun an, dass der Fußgänger nur 1 Minute lang vorwärtslief, sich dann umdrehte und 1 Minute lang zurückging, also den Ausgangspunkt wieder erreichte.
Dann hat sich zwischen dem Fußgänger und dem zuerst entgegenkommenden Wagen in der ersten Minute die Entfernung um $\frac{a}{4}$ und in der zweiten Minute, als ihn die Bahn schon eingeholt hatte, um $\frac{a}{12}$ verringert.

Der Abstand verringert sich demnach insgesamt um $\frac{a}{4} + \frac{a}{12} = \frac{a}{3}$. Die gleiche Verringerung der Entfernung zur Bahn wäre allerdings auch erreicht, wenn der Fußgänger an der gleichen Stelle stehengeblieben wäre; denn er ist ja wieder an seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt.
In diesem Fall hätte sich die Straßenbahn also in zwei Minuten um $\frac{a}{3}$ oder in einer Minute um $\frac{a}{3} : 2 = \frac{a}{6}$ genähert und hätte die gesamte Entfernung in 6 Minuten zurückgelegt. Das bedeutet aber, dass die Bahnen in einem zeitlichen Abstand von 6 Minuten an einem stehenden Beobachter vorbeifahren.

Der Dampfer und die Flöße

Aufgabe: Ein Dampfer legte die Entfernung zwischen den Orten A und B, beide an einem Fluss gelegen, stromab in 5 Stunden zurück. Für die Rückfahrt stromauf benötigte er bei gleicher Motorleistung ebenfalls ohne Halt 7 Stunden.
In wieviel Stunden schwimmen Flöße von A nach B (die Flöße bewegen sich mit der Strömungsgeschwindigkeit des Flusses)?

Lösung: Wir bezeichnen die Zeit, die ein Dampfer dafür benötigt, um die Entfernung von A nach B im stehenden Wasser, d. h. bei einer Fahrt mit eigener Geschwindigkeit, zurückzulegen, mit x Stunden. Die Fahrzeit der Flöße werde mit y Stunden angenommen.
Dann legt der Dampfer in einer Stunde $\frac{1}{x}$ der Entfernung AB zurück, die Flöße (Strömung) aber $\frac{1}{y}$ dieser Entfernung. Deshalb legt der Dampfer den Fluss stromab in der Stunde $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ der Entfernung AB zurück, den Fluss stromauf aber $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ der Entfernung.

Laut Aufgabenstellung legt der Dampfer stromabwärts in der Stunde $\frac{1}{5}$ der Entfernung zurück, stromauf aber $\frac{1}{7}$. Wir erhalten das Gleichungssystem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$$

Bei der Lösung dieses Gleichungssystems braucht man nur die zweite Gleichung von der ersten zu subtrahieren. Man erhält dann

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35} \qquad \text{woraus} \qquad y=35$$

folgt. Die Flöße benötigen 35 Stunden von A nach B.

Zwei Büchsen Kaffee

Aufgabe: Zwei Büchsen, mit Kaffee gefüllt, haben die gleiche Form und sind aus gleichem Blech hergestellt. Die erste wiegt 2 kg und hat eine Höhe von 12,0 cm; die zweite wiegt 1 kg und hat eine Höhe von 9,5 cm. Wieviel Kaffee haben wir in beiden Büchsen !

Lösung: Wir bezeichnen die Masse des Inhalts der größeren Büchse mit x kg, die der kleineren Büchse mit y kg. Die Masse der Büchsen selbst bezeichnen wir entsprechend mit z kg bzw. t kg.
Wir erhalten die Gleichungen:

$$x+z=2 \qquad , \qquad y+t=1$$

Da sich die Massen des Inhalts der vollen Büchsen wie ihre Volumina verhalten, d. h. wie die Kuben ihrer Höhen[5], so ist

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9,5^3}\approx 2,02 \qquad \text{und} \qquad x=2,02y$$

Die Massen der leeren Büchsen verhalten sich jedoch wie ihre vollen Oberflächen, d. h. wie die Quadrate ihrer Höhen. Deshalb ist

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9,5^2}\approx 1,60 \qquad \text{oder} \qquad z=1,60t$$

[5] Dieser Proportion darf man sich nur in dem Falle bedienen, wenn die Büchsenwände nicht sehr dick sind, da die äußere und innere Oberfläche der Büchse, strenggenommen, nicht gleich sind, und außerdem unterscheidet sich die Höhe des Büchseninnenraumes, strenggenommen von der Höhe der Büchse selbst.

Nachdem wir die Werte von x und z in die erste Gleichung eingesetzt haben, erhalten wir das Gleichungssystem

$$2,02y + 1,60t = 2 \qquad , \qquad y + t = 1$$

Daraus ermitteln wir $y = \frac{20}{21} = 0,95$ und $t = 0,05$. Durch Einsetzen in die obigen Gleichungen erhalten wir auch $x = 1,92$ und $z = 0,08$. In der größeren Büchse sind 1,92 kg und in der kleineren 0,94 kg Kaffee enthalten.

Der Tanzabend

Aufgabe : Bei einem Tanzabend im Jugendklub tanzten insgesamt 20 Jungen und Mädchen.
Maria tanzte mit 7 jungen Männern, Olga mit acht, Vera mit neun usw. bis zu Nina, die mit allen Tänzern tanzte. Wieviel Jungen tanzten an diesem Abend im Klub?

Lösung: Die Aufgabe lässt sich sehr einfach lösen, wenn man die Unbekannte günstig wählt. Wir werden nicht die Anzahl der Tänzer ermitteln, sondern die der Tänzerinnen, die wir mit zu bezeichnen:

die erste, Maria, tanzte mit 6 + 1 jungen Männern,
die zweite, Olga, tanzte mit 6 + 2 jungen Männern,
die dritte, Vera, tanzte mit 6 + 3 jungen Männern,
...
die x-te, Nina, tanzte mit 6 + x jungen Männern.

Wir erhalten die Gleichung $x + (6 + x) = 20$, woraus sich $x = 7$ ergibt. Folglich waren 20 - 7 = 13 junge Männer anwesend.

Meeresaufklärung

Erste Aufgabe: Einem Aufklärungsboot, das zu einem Flottenverband gehört. wird der Auftrag gegeben, ein Meeresgebiet von 70 Seemeilen in Fahrtrichtung des Verbandes zu erkunden. Die Geschwindigkeit des Flottenverbandes beträgt 15 Knoten[6], die Geschwindigkeit des Aufklärungsbootes ist 28 Knoten. Nach welcher Zeit kann der Aufklärer beim Verband zurückerwartet werden?

Lösung: Wir bezeichnen die gesuchte Zeit mit x Stunden. In dieser Zeit legte der Flottenverband $15x$ Seemeilen zurück, das Aufklärungsschiff jedoch $28x$ Seemeilen.

[6] 1 Knoten = 1 Seemeile je Stunde.

Der Aufklärer fuhr 70 Seemeilen in Fahrtrichtung der Flotte, brauchte aber auf der Rückfahrt nur einen Teil zurückzulegen, den übrigen Teil des gleichen Weges legte der Flottenverband zurück.
Zusammen legten sie einen Weg von $28x+15x$ Seemeilen zurück, was $2\cdot 70$ Seemeilen entspricht. Wir erhalten die Gleichung

$$28x + 15x = 140 \qquad \text{woraus} \qquad x = \frac{140}{43} = 3\frac{11}{43}$$

folgt.
Der Aufklärer kehrt zum Geschwader in ungefähr 3 Stunden 15 Minuten zurück.

Zweite Aufgabe: Ein Aufklärungsboot erhielt den Befehl, eine Erkundung in Fahrtrichtung des Flottenverbandes durchzuführen. Nach 3 Stunden soll dieses Schiff zum Verband zurückkehren. Nach welcher Zeit, gerechnet vom Zeitpunkt des Beginns der Aufklärungsfahrt, muss das Aufklärungsschiff wenden, wenn seine Geschwindigkeit 25 Knoten und die Geschwindigkeit des Flottenverbandes 15 Knoten betragen?

Lösung: Der Aufklärer muss nach x Stunden umkehren; das bedeutet, er entfernte sich x Stunden lang vom Flottenverband und fuhr ihm anschließend $3-x$ Stunden entgegen. Solange alle Schiffe in einer Richtung fuhren, konnte sich der Aufklärer in x Stunden vom Verband um die Differenz der von ihnen zurückgelegten Wege, d. h. um $25x - 15x = 10x$ Seemeilen, entfernen.
Bei der Rückkehr des Aufklärers legte dieser dem Flottenverband entgegen einen Weg von $25(3-x)$ Seemeilen zurück. Der Verband selbst fuhr $15(3-x)$ Seemeilen. Beide zusammen legten $10x$ Seemeilen zurück. Folglich erhält man die Gleichung

$$25(3-x) + 15(3-x) = 10x$$

woraus $x = 2\frac{2}{5}$ folgt.
Das Aufklärungsboot muss nach 2 Stunden 24 Minuten wenden.

Auf der Radrennbahn

Aufgabe: Auf der Radrennbahn trainieren zwei Fahrer. Sie fahren mit konstanten Geschwindigkeiten. Fahren sie in entgegengesetzten Richtungen, so treffen sie sich alle 10 Sekunden; fahren sie jedoch in einer Richtung, so überholt einer den anderen alle 170 Sekunden.
Wie groß ist die Geschwindigkeit eines jeden Radfahrers, wenn die Länge der Bahn 170 m ist? Auf der Radrennbahn

Lösung: Ist die Geschwindigkeit des ersten Radfahren x Meter je Sekunde, so fährt er in 10 Sekunden $10x$ m. Fährt ihm der zweite entgegen, so legt dieser Fahrer in dieser Zeit den Rest der Rennbahn, nämlich $170-10x$ m, zurück. Ist die Geschwindigkeit des zweiten y, so sind das $10y$ m; also

$$170 - 10x = 10y$$

Fahren die Radfahrer hintereinander her, so legt der erste in 170 Sekunden $170x$ m zurück und der zweite $170y$ m. Fährt der erste schneller als der zweite, so legt er von einer Begegnung bis zur anderen bei einer Runde mehr zurück als der zweite, d. h.

$$170x - 170y = 170$$

Nach Vereinfachung dieser Gleichungen erhalten wir $x + y = 17$ und $x - y = 1$, woraus $x = 9$ Meter je Sekunde und $y = 8$ Meter je Sekunde folgen.

Der Motorradwettkampf

Aufgabe: Bei Motorradwettbewerben kam eine der drei gleichzeitig gestarteten Maschinen, die 15 km $\cdot$ h^{-1} weniger als die erste fuhr und 3 km $\cdot$ h^{-1} mehr als die dritte, am Ziel 12 Minuten später als die erste und 3 Minuten früher als die dritte an. Auf dem Wege wurde nicht gehalten.
Es soll ermittelt werden, wie lang die Strecke ist und wie groß die Geschwindigkeit jeder Maschine ist.

Lösung: Obwohl verlangt wird, sieben unbekannte Größen zu ermitteln, kommen wir bei der Lösung der Aufgabe mit nur zwei Unbekannten aus. Wir stellen ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf.

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der zweiten Maschine mit x km $\cdot$ h^{-1}. Dann wird die Geschwindigkeit der ersten durch $(x+15)$ km $\cdot$ h^{-1} ausgedrückt, und die der dritten durch $(x - 3)$ km $\cdot$ h^{-1}. Die Länge des Streckenabschnitts bezeichnen wir mit y km. Dann wird die Renndauer für die erste Maschine mit $\frac{y}{x+15}$ h, die für die zweite Maschine mit $\frac{y}{x}$ h und die für die dritte Maschine mit $\frac{y}{x-3}$ h bezeichnet.

Wir wissen, dass die zweite Maschine 12 min länger als die erste unterwegs war, d. h. $\frac{1}{5}$ h. Deshalb ist $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}$. Die dritte Maschine war 3 min länger, d. h. $\frac{1}{20}$ h, als die zweite unterwegs. Folglich gilt:

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}$$

Die zweite dieser Gleichungen multiplizieren wir mit 4 und subtrahieren sie von der ersten:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4\left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x}\right) = 0$$

Wir dividieren alle Glieder dieser Gleichung durch y (diese Größe ist, wie wir wissen, nicht gleich Null) und befreien dann die Gleichung von den Nennern. Wir erhalten

$$(x + 15)(x - 3) - x(x - 3) - 4x(x + 15) + 4(x + 15)(x - 3) = 0$$

und nach Beseitigung der Klammern und Zusammenfassen gleichartiger Glieder

$$3x - 225 = 0 \qquad \text{woraus} \qquad x = 75$$

folgt.
Wir kennen nun x und ermitteln y aus der ersten Gleichung:

$$\frac{y}{75} - \frac{y}{90} = \frac{1}{5} \qquad , \qquad y = 90$$

Damit sind die Geschwindigkeiten der Maschinen ermittelt: 90 km · h^{-1}, 75 km · h^{-1} und 72 km · h^{-1}. Die Länge der gesamten Strecke beträgt 90 km.

Nachdem wir die Streckenlänge durch die Geschwindigkeit jeder Maschine dividiert haben, finden wir die Fahrzeit einer jeden Maschine:
Die erste Maschine benötigte 1 Stunde, die zweite Maschine benötigte 1 Stunde 12 Minuten, die dritte Maschine benötigte 1 Stunde 15 Minuten.
Somit sind alle sieben Unbekannten ermittelt.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit einer Fahrt

Aufgabe: Mit einem Kraftwagen wurde die Entfernung zwischen zwei Städten mit einer Geschwindigkeit von 60 km · h^{-1} zurückgelegt. Auf der Rückfahrt wurde mit einer Geschwindigkeit von 40 km · h^{-1} gefahren.
Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit?

Lösung: Die trügerische Einfachheit der Aufgabe führt viele irre. Ohne die Fragestellung zu ergründen, wird das arithmetische Mittel zwischen 60 und 40 berechnet. Übereilige finden dann: $\frac{60+40}{2} = 50$.

Diese "einfache" Lösung wäre richtig, wenn für zwei Streckenabschnitte die gleiche Zeit benötigt worden wäre. In diesem Fall handelt es sich aber um gleiche Strecken, und die Zeiten sind gerade unterschiedlich, denn die Rückfahrt muss bei der geringeren Geschwindigkeit länger gedauert haben.
Aus diesem Grunde ist die "Lösung" 50 km · h^{-1} falsch.

Eine Gleichung für die Berechnung dieser Aufgabe aufzustellen, ist nicht schwer, wenn man eine Hilfsunbekannte, nämlich die Entfernung l zwischen den Städten, einführt. Nachdem wir die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit mit x km · h^{-1} bezeichnet haben, stellen wir die Gleichung auf:

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{60} + \frac{l}{40}$$

Da l nicht gleich Null ist, können wir die Gleichung durch l dividieren; wir erhalten:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

Diese Gleichung führt auf

$$x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48$$

Also ist die richtige Antwort nicht 50 km $\cdot$ h^{-1}, sondern 48 km $\cdot$ h^{-1}. Wenn wir die Aufgabe allgemein lösen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b}$$

worin a die Maßzahl der Geschwindigkeit des Kraftfahrzeuges in km $\cdot$ h^{-1} auf der Einfahrt ist und b die Maßzahl der Geschwindigkeit auf der Rückfahrt.
Für x ergibt sich der Wert $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, der das harmonische Mittel für die Größen a und b ist.

Also wird die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht durch das arithmetische Mittel, sondern durch das harmonische Mittel der beiden betreffenden Geschwindigkeiten dargestellt. Für die positiven Zahlen a und b, wobei $a \neq b$ ist, ist das harmonische Mittel immer kleiner als ihr arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$, was wir auch am Zahlenbeispiel sahen (48 ist kleiner als 50).

Schnellarbeitende Rechenmaschinen

Die Arbeit mit Gleichungen wird in Fällen, in denen die hohe Anzahl der Unbekannten umfangreiche Systeme von Gleichungen erforderlich macht, mühsam und zeitraubend. Wissenschaftler und Techniker haben deshalb auch Rechenmaschinen für die Bewältigung solcher Probleme geschaffen und eingesetzt.

Die Anwendungsgebiete für Rechenautomaten sind sehr verzweigt. Wir hörten schon davon, dass Rechenmaschinen Schach oder Dame spielen können. Die mathematischen Maschinen können auch andere Aufgaben ausführen, so z. B. die Übersetzung aus einer Sprache in eine andere, die Orchestrierung einer Melodie usw. Man muss nur ein entsprechendes "Programm" ausarbeiten, nach dem die Maschine arbeiten soll.
Natürlich werden wir hier nicht "Programme" für die Übersetzung von einer Sprache in die andere aufstellen. Solche "Programme" sind äußerst kompliziert. Wir werden uns lediglich zwei sehr einfache "Programme" genauer besehen. Zunächst jedoch wollen wir uns ein wenig über den Aufbau von Rechenmaschinen informieren.

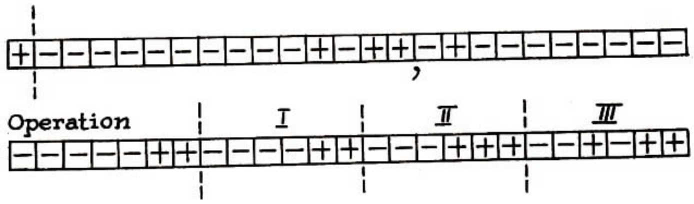
Es wurde schon über Anlagen berichtet, die es ermöglichen, Tausende und Zehntausende von Rechnungen je Sekunde durchzuführen. Dieser Teil einer Rechenmaschine, der der unmittelbaren Durchführung von Operationen dient, ist das sogenannte Rechenwerk.
Außerdem enthält die Maschine eine Steuereinrichtung, die die Arbeit der gesamten Maschine reguliert, und den sogenannten Speicher. Der Speicher ist eine Merkvorrichtung für Zahlen und bedingte Signale. Schließlich ist die Maschine noch mit einer besonderen Einrichtung für die Zuleitung neuer Zahlen und für die Herausgabe fertiger Ergebnisse versehen. Diese fertigen Resultate druckt die Maschine, schon im Dezimalsystem, auf Spezialkarten.

Sicher ist jedem bekannt, dass man Töne auf eine Platte oder auf ein Band aufnehmen und danach reproduzieren kann. Aber die Aufnahme eines Tones auf eine Platte kann nur einmal durchgeführt werden, für eine neue Aufnahme braucht man eine neue Platte. Etwas anders wird die Aufzeichnung des Tones bei einem Tonband verwirklicht, nämlich mit Hilfe der Magnetisierung eines besonderen Bandes. Den aufgenommenen Ton kann man beliebig oft reproduzieren, und wird die Aufnahme nicht mehr gebraucht, so kann man das Band "entmagnetisieren" und auf ihm einen neuen Ton aufnehmen. Bei jeder neuen Aufnahme auf ein schon bespieltes Band wird die alte Aufnahme "gelöscht".

Auf dem gleichen Prinzip beruht die Arbeit der Merkvorrichtungen. Die Zahlen und bedingten Signale werden mit Hilfe elektrischer, magnetischer oder mechanischer Signale auf einer Spezialtrommel, auf einem Band oder einer anderen Einrichtung aufgenommen. Im richtigen Augenblick kann die aufgezeichnete Zahl "vorgelesen" werden, und wird sie nicht mehr gebraucht, so kann man sie löschen und an ihrer Stelle eine andere Zahl aufschreiben.

Das "Einprägen" und das "Lesen" von Zahlen oder bedingten Signalen dauert insgesamt nur millionstel Teile einer Sekunde. Das "Gedächtnis" kann einige Tausend Zellen enthalten, jede Zelle einige zehn Elemente, z. B. magnetische Elemente.
Bei der Aufzeichnung von Zahlen im Dualsystem verfährt man im allgemeinen so, dass jedes magnetisierte Element die Ziffer 1 und jedes nicht magnetisierte die Ziffer 0 darstellt. Mag z. B. jede Zelle des Gedächtnisses 25 Elemente oder, wie es heißt, 25 "Binärzahlen" enthalten, wobei das erste Element der Zelle die Vorzeichen (+ oder -) bezeichnet, die nächsten 14 Elemente dienen der Aufzeichnung des ganzen Teils der Zahl und die letzten 10 der Aufzeichnung der Bruchteile.

Die untenstehende Abbildung stellt schematisch zwei Speicherzellen dar, jede mit 25 Elementen. Die magnetisierten Elemente sind mit dem Zeichen + bezeichnet; die nichtmagnetisierten sind mit dem Zeichen - bezeichnet.



Schauen wir uns die obere der dargestellten Zellen an, das Komma zeigt an, wo die Dezimalstellen der Zahl beginnen, und die gestrichelte Linie trennt das erste Element, das das Vorzeichen enthält, von den übrigen. In dieser Zelle wurde die Zahl + 1011,01 im dualen System festgehalten. In dezimaler Schreibweise lautet diese Zahl 11,25.

Außer den Zahlen werden in den Speicherzellen die Befehle, aus denen ein Programm besteht, notiert. Schauen wir uns an, wie die Befehle für die sogenannte Triadressiermaschine aussehen. In diesem Falle zerfällt die Gedächtniszelle bei der Aufnahme von Befehlen in vier Teile. (Die gestrichelten Linien in der unteren Zelle der Abbildung deuten das an.) Der erste Teil dient der Bezeichnung von Operationen, wobei die Operationen als Zahlen (Nummern) notiert werden.

Addition - Operation 1,
Subtraktion - Operation 2
Multiplikation - Operation 3 usw.

Die Befehle werden so dechiffriert: Der erste Teil der Zelle ist die Operationsnummer,

der zweite und dritte Teil sind die Zellennummern (Adressen), denen man die Zahlen für die Durchführung dieser Operation entnehmen muss, der vierte Teil ist die Zellennummer (Adresse), wohin man das erhaltene Resultat schicken muss.
In der unteren Zeile der Abbildung sind die Zahlen 11, 11, 111, 1011 im Dualsystem eingegeben. Das entspricht den Zahlen 3, 3, 7, 11 im Dezimalsystem. Diese Zahlen stellen folgende Befehle dar:

Es ist die Operation 3, d. h. die Multiplikation, mit Zahlen durchzuführen, die sich in der dritten und siebenten Speicherzelle befinden.
Das erhaltene Resultat ist in der elften Zelle "einzuprägen" , d. h. zu notieren.
Wir werden im folgenden die Zahlen und Befehle nicht durch vereinbarte Zeichen notieren, sondern direkt im Dezimalsystem. Der Befehl, der beispielsweise in der unteren Zeile der Abbildung dargestellt ist, würde bei der nun folgenden Beschreibung von Programmen mit 3 7 11 niedergelegt werden.
Betrachten wir jetzt zwei einfache Programme.

Programm 1	
1. Addition	4 5 4
2. Multiplikation	4 4 $\rightarrow$
3. Steuerungsübergabe	1
4.	0
5.	1

Wie würde ein Rechenautomat arbeiten, wenn ihm über das Eingabewerk dieses Programm übermittelt würde?

1. Befehl: Es sind Zahlen zu addieren, die in der vierten und fünften Zelle eingetragen sind. Anschließend ist das Resultat wieder in die vierte Zelle weiterzuleiten (an Stelle dessen, was dort vorher eingetragen war).
Somit schreibt die Maschine in die vierte Zelle die Zahl $0 + 1 = 1$. Nach Ausführung des ersten Befehle werden in der vierten eine 1 und in der fünften Zelle auch eine 1 gespeichert sein.

2. Befehl: Es ist die Zahl der vierten Zelle mit sich selbst zu multiplizieren, d. h. ins Quadrat zu erheben.
Das Ergebnis, also 1^2, soll auf eine Karte gedruckt werden. (Der Pfeil bezeichnet die Aushändigung des fertigen Resultate.)

3. Befehl: Steuerungsübergabe an die erste Zelle. Der Befehl "Steuerungsübergabe" bedeutet, dass alle bisherigen Befehle von neuem der Reihe nach ausgeführt werden sollen. Es folgt also noch einmal der 1. Befehl.

1. Befehl: Es sind die Zahlen in der vierten und fünften Zelle zu addieren, und das Resultat ist nochmals in die vierte Zelle einzutragen. Als Resultat wird in der vierten Zelle die Zahl $1 + 1 = 2$ stehen. In der fünften Zelle steht weiterhin die 1.

2. Befehl: Die Zahl der vierten Zelle ist zu quadrieren. Das Resultat, d. h. 2^2, soll wieder auf eine Karte gedruckt werden.

3. Befehl: Steuerungsübergabe an die erste Zelle; also wieder Übergang zum ersten

Befehl.

I. Befehl: Die Zahl $2 + 1 = 3$ wird an die vierte Zelle gegeben. In der fünften Zelle bleibt die 1 erhalten.

2. Befehl: Die Zahl 3^2 wird auf eine Karte gedruckt.

3. Befehl: Steuerungsübergabe zur wiederholten Ausführung des ersten Befehls. So geht es weiter.

Wir sehen, dass die Maschine nacheinander die Quadrate ganzer Zahlen ausrechnet und sie auf eine Karte druckt und ausgibt. Beachten Sie, dass man nicht jedesmal eine neue Zahl manuell wählen muss, die Maschine wählt nacheinander ganze Zahlen und quadriert sie. Ein Automat, der nach diesem Programm operiert, berechnet in einigen zehn Sekunden die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000.

In der Praxis sieht das Programm zur Berechnung der Quadrate ganzer Zahlen allerdings nicht ganz so einfach aus, aber ein Bild von der Arbeitsweise eines Rechenautomaten können wir uns vielleicht schon machen. Der zweite Befehl würde z. B. in der Praxis anders gewählt werden.
Das Drucken des fertigen Resultate auf eine Karte würde nämlich viel mehr Zeit in Anspruch nehmen als die Durchführung einer Rechenoperation durch die Maschine.
Deshalb werden die fertigen Resultate anfangs in freien Zellen des Speichers gespeichert und erst anschließend, ohne den weiteren Ablauf des Rechenwerks zu hemmen, auf eine Karte gedruckt. So muss das erste endgültige Resultat in der ersten freien Zelle des Speichers festgehalten werden, das zweite Resultat in der zweiten freien Zelle, das dritte in der dritten usw. In dem oben angeführten vereinfachten Programm wurde das überhaupt nicht berücksichtigt.

Außerdem kann man eine Maschine nicht lange mit der Berechnung von Quadraten beschäftigen, denn die Zellen des Speichers würden nicht ausreichen, um die in großer Geschwindigkeit anfallenden Ergebnisse zu speichern. Außerdem müsste die Maschine nach kurzer Zeit wieder abgeschaltet werden, wenn man "nur" die Quadrate der Zahlen 1 bis 10000 benötigt, denn sie führt ja Tausende von Operationen in einer Sekunde aus.

Deshalb sind besondere Befehle zum Anhalten der Maschine im notwendigen Augenblick vorgesehen. Das Programm kann z.B. so aufgestellt sein, dass die Maschine die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 ausrechnet und sich dann automatisch abschaltet.
Unter Berücksichtigung dieser Momente würde das Programm, das hier als erstes Beispiel angeführt wurde, folgendermaßen aussehen:

1. Addition	8 9 8	7.	10000
2. Multiplikation	8 8 10	8.	0
3. Addition	2 6 2	9.	1
4. Bedingte Steuerungsübergabe	8 7 1	10.	0
5. Halt!		11.	0
6.	0 0 1	12.	0

Die ersten beiden Befehle unterscheiden sich wenig von denen, die im vorangegangenen vereinfachten Programm enthalten waren. Nach Ausführung dieser beiden Befehle werden in der achten Zelle eine 1, in der neunten Zelle eine 1 und in der zehnten Zelle 12 gespeichert.

Der dritte Befehl ist sehr interessant: Es sollen die Zahlen, die in der zweiten und sechsten Zelle stehen, addiert und von neuem in die zweite Zelle eingetragen werden. Nach Ausführung dieser Operation hat die zweite Zelle die Form

2. Multiplikation 8 8 11

Wie Sie sehen, ändert sich nach Ausführung des dritten Befehls der zweite Befehl, genauer, es ändert sich eine der Adressen des zweiten Befehls. Später wird erklärt, weshalb das geschieht.
Vierter Befehl: Bedingte Steuerungsübergabe (an Stelle des dritten Befehls im früher betrachteten Programm). Dieser Befehl wird so ausgeführt:
Ist die in der achten Zelle stehende Zahl kleiner als die in der siebenten Zelle stehende Zahl, so wird die Steuerung an die erste Zelle abgegeben; andernfalls wird der nächstfolgende, d. h. der fünfte Befehl, ausgeführt. Im vorliegenden Falle ist die in der achten Zelle stehende Zahl kleiner, nämlich $1 < 10000$, so dass eine Steuerungsübergabe an die erste Zelle stattfindet. Also wieder der erste Befehl.

Nach Ausführung des ersten Befehls wird in der achten Zelle die Zahl 2 stehen. Der zweite Befehl, der jetzt die Form

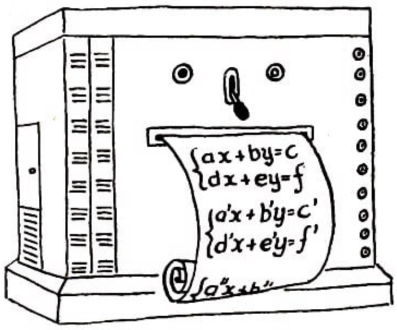
2. Multiplikation 8 8 11

hat, besteht darin, dass die Zahl 2^2 in die elfte Zelle geschickt wird. Jetzt ist klar, warum vorher der dritte Befehl ausgeführt wurde: Die Zahl 2^2 soll nicht in die zehnte Zelle gelangen, denn die ist schon besetzt. Vielmehr soll diese Zahl in die nächste gelangen.
Nach Ausführung des ersten und zweiten Befehle besitzen wir folgende Zahlen: 8. 2; 9. 1; 10. 1^2; 11. 2^2.
Nach Ausführung des dritten Befehle nimmt die zweite Zelle die Form

2. Multiplikation 8 8 12

an.
Da in der achten Zelle immer noch eine kleinere Zahl steht als in der neunten Zelle, so bedeutet der vierte Befehl wieder Steuerungsübergabe an die erste Zelle. Jetzt erhalten wir nach Ausführung des ersten und zweiten Befehle: 8. 3; 9. 1; 10. 1^2; 11. 2^2; 12. 3^2.

Wie lange wird die Maschine nun nach diesem Programm Quadrate berechnen?
Die Maschine wird so lange arbeiten, bis in der achten Zelle die Zahl 10000 erreicht wird. Erst dann wird der vierte Befehl nicht mehr die Steuerung an die erste Zelle übertragen; denn in der achten Zelle steht dann eine Zahl, die nicht kleiner, sondern gleich der Zahl, die in der siebenten Zelle steht, ist. Nach dem vierten Befehl führt also die Maschine den fünften Befehl aus; sie schaltet sich aus.



Betrachten wir jetzt ein weit komplizierteres Programm, die Lösung eines Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$$

mit den Lösungen:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad , \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Ein Mensch benötigt für die Lösung eines Systems der angegebenen Art (in dem also für die Konstanten a, b, c, d, e, f irgendwelche Zahlenwerte gegeben sind) bei nicht allzu schwieriger Wahl der Konstanten vielleicht einige zehn Sekunden. Ein Rechenautomat kann aber in einer Sekunde Hunderte solcher Systeme lösen.

Wie muss nun das Programm für einen Rechenautomaten aufgebaut sein, wenn der Automat Gleichungssysteme dieser Art lösen soll? Zum besseren Verständnis betrachten wir wieder ein vereinfachtes Programm.
Nehmen wir an, dass gleich mehrere Gleichungssysteme angegeben werden:

$$\begin{array}{lll} ax + by = c & a'x + b'y = c' & a''x +'' by = c'' \\ dx + ey = f & d'x + e'y = f' & d''x + e''y = f'' \end{array}$$

Die Zahlenwerte der Koeffizienten a, b, c, d, e, f, a', b', ... seien bekannt.

Programm 2

1.	· 28 30 20	14.	+ 3 19 3	27.	b
2.	· 27 31 21	15.	+ 4 19 4	28.	c
3.	· 26 30 22	16.	+ 5 19 5	29.	d
4.	· 27 29 23	17.	+ 6 19 6	30.	e
5.	· 26 31 24	18.	Steuerungsübergabe 1	31.	f
6.	· 28 29 25	19.	6 6 0	32.	a'
7.	- 20 21 20	20.	0	33.	b'
8.	- 22 23 21	21.	0	34.	c'
9.	- 24 25 22	22.	0	35.	d'
10.	: 20 21 →	23.	0	36.	e'
11.	: 22 21 →	24.	0	37.	f'
12.	+ 1 19 1	25.	0	38.	a"
13.	+ 2 19 2	26.	a	...	

Erster Befehl: Das Produkt der Zahlen, die in der 28. und 30. Zelle stehen, ist zu ermitteln und das Resultat in der 20. Zelle zu speichern. Das bedeutet, dass in der 20. Zelle die Zahl ce gespeichert ist. (Vgl. dieses Produkt mit der Angabe der allgemeinen Lösung)

Analog werden die Befehle 2 und 3 ausgeführt. Dann befinden sich in den Zellen 21 bis 25 die folgenden Zahlen: 20. ce; 21. bf; 22. ae; 23. bd; 24. af; 25. cd.
7. Befehl: Von der in der 20. Zelle stehenden Zahl ist die in der 21. Zelle stehende Zahl zu subtrahieren und das Resultat, d. h. $ce - bf$, von neuem in die 20. Zelle einzutragen.

Analog werden die Befehle 8 und 9 durchgeführt.
Im Endergebnis befinden sich in den Zellen 20 bis 22 die folgenden Zahlen: 20. $ce-bf$, 21. $ae-bd$, 22. $af-cd$. 10. und 11. Befehl: Die Brüche

$$\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{und} \quad \frac{af-cd}{ae-bd}$$

werden addiert und auf eine Karte gedruckt. Damit sind die Unbekannten aus dem ersten Gleichungssystem ermittelt.
Der weitere Programmteil, der die Befehle umfasst, die in den Zellen 12 bis 19 enthalten sind, ist für die Berechnung des nächstfolgenden Gleichungssystems vorgesehen.
Wie geht das nun vor sich?

Die Befehle 10 bis 17 bestehen darin, den Zahlen in den Zellen 1 bis 6 eine Aufzeichnung hinzuzufügen, die sich in Zelle 19 befindet. Die Resultate bleiben aber in den Zellen 1 bis 6. Somit werden die ersten sechs Zellen nach Ausführung des 17. Befehls folgendes Aussehen haben:

1. · 34 36 20
2. · 33 37 21
3. · 32 36 22
4. · 33 35 23
5. · 32 37 24
6. · 34 35 25

18. Befehl: Steuerungsübergabe an die erste Zelle. Wodurch unterscheiden sich nun die neuen Aufzeichnungen in den ersten sechs Zellen von den vorherigen Aufzeichnungen? Sie unterscheiden sich dadurch, dass die ersten beiden Adressen in diesen Zellen nicht Zahlen von 26 bis 31 besitzen wie vorher, sondern Zahlen von 32 bis 37.
Mit anderen Worten, die Maschine führt von neuem die gleichen Operationen durch, wird die Zahlen aber nicht den Zellen 26 bis 31, sondern den Zellen 32 bis 37 entnehmen, in denen die Koeffizienten des zweiten Gleichungssystems stehen.

Schließlich löst die Maschine das zweite Gleichungssystem. Diese Darlegungen lassen erkennen, wie wichtig es ist, ein richtiges "Programm" aufzustellen. Die Maschine selbst führt ja nur die Befehle aus, die ihr durch das Programm vorgeschrieben sind, selbst "überlegen" kann die Maschine nicht.
Es gibt Programme zur Berechnung von Wurzeln, Logarithmen, Sinusfunktionen, zur Lösung von Gleichungen, höherer Potenzen u. a. Dass es Programme für das Schachspiel, für die Übersetzung aus einer Sprache in eine andere und vieles mehr gibt, wurde bereits erwähnt. Je schwieriger natürlich die jeweilige Aufgabe ist, desto komplizierter ist das erforderliche Programm.

Zum Schluss wollen wir noch die sogenannten "programmierenden Programme" anführen. Das, sind Programme, mit deren Hilfe die Maschine selbst das für die Aufgabenlösung geforderte Programm aufstellen kann. Das erleichtert natürlich wesentlich das Programmieren, das mitunter sehr kraftraubend ist.

3 Der Arithmetik zu Hilfe

Augenblicksmultiplikationen

Rechenkünstler erleichtern sich in vielen Fällen die Arbeit, indem sie zu einfachen algebraischen Umwandlungen Zuflucht nehmen. Die Berechnung der Potenz 988^2 wird beispielsweise folgendermaßen ausgeführt:

$$988 \cdot 988 = (988 + 12)(988 - 12) + 12^2 = 1000 \cdot 976 + 144 = 976144$$

Es handelt sich in diesem Fall um die Anwendung der algebraischen Umformung:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

Diese Formel kann man für mündliche Berechnungen mit Erfolg anwenden. Sehen wir uns die folgenden Beispiele an:

$$\begin{aligned}
27^2 &= (27 + 3)(27 = 3) + 3^2 = 729 \\
63^2 &= 66 \cdot 60 + 3^2 = 3969 \\
18^2 &= 20 \cdot 16 + 2^2 = 324 \\
37^2 &= 40 \cdot 34 + 3^2 = 1369 \\
48^2 &= 50 \cdot 46 + 2^2 = 2304 \\
54^2 &= 58 \cdot 50 + 4^2 = 2916
\end{aligned}$$

Eine andere Form der Erleichterung beim mündlichen Rechnen wird im folgenden Beispiel gezeigt. Es soll das Produkt $986 \cdot 997$ berechnet werden. Man wandelt folgendermaßen um:

$$986 \cdot 997 = (986 - 3) \cdot 1000 + 3 \cdot 14 = 983042$$

Um dieses Verfahren zu erläutern, stellen wir die Faktoren in der Form

$$(1000 - 14)(1000 - 3)$$

dar und multiplizieren aus:

$$1000 \cdot 1000 - 1000 \cdot 14 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3$$

Wir wandeln um:

$$1000(1000 - 14) - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 = 1000 \cdot 986 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 = 1000(986 - 3) + 14 \cdot 3$$

Die letzte Zeile stellt das oben angewandte Verfahren dar. Interessant ist das Multiplikationsverfahren zweier dreistelliger Zahlen, deren Zehnerzahl gleich ist und deren Einerziffern die Summe 10 bilden. Die Multiplikation $783 \cdot 787$ wird beispielsweise folgendermaßen durchgeführt:

$$78 \cdot 79 = 6162 \qquad ; \qquad 3 \cdot 7 = 21$$

Ergebnis: 616221.
Die Begründung dieses Verfahrens wird klar durch folgende Umwandlungen:

$$\begin{aligned}(780+3)(780+7) &= 780\cdot 780+780\cdot 3+780\cdot 7+3\cdot 7 = 780\cdot 780+780\cdot 10+3\cdot 7\\ &= 780(780+10)+3\cdot 7 = 780\cdot 790+21 = 616200+21.\end{aligned}$$

Ein anderes Verfahren zur Durchführung ähnlicher Multiplikationen ist noch einfacher:

$$783\cdot 787 = (785-2)(785+2) = 785^2-4 = 616225-4 = 616221$$

In diesem Beispiel mussten wir die Zahl 785 quadrieren. Es wäre also auch ein Verfahren zum bequemen, schnellen Quadrieren zu wünschen. Machen wir uns mit dem folgenden Verfahren vertraut, das die Quadrate der auf 5 endenden Zahlen umfasst.

$$\begin{array}{lll} 35^2: & 3\cdot 4=12 & \text{Lösung: } 1225\\ 65^2: & 6\cdot 7=42 & \text{Lösung: } 4225\\ 75^2: & 7\cdot 8=56 & \text{Lösung: } 5625\end{array}$$

Die Regel besteht darin, dass man die Zehnerziffer mit einer Zahl multipliziert, die um 1 größer ist, und dann diesem Produkt die Ziffern 2 und 5 anhängt.
Das Verfahren kann folgendermaßen analysiert werden. Ist die Zahl, die die Anzahl der Zehner angibt, a, so kann man die Basis der Quadrate durch $10a+5$ beschreiben. Das Quadrat dieser Zahl ist als Quadrat eines Binoms gleich

$$100a^2+100a+25 = 100a(a+1)+25$$

Darin ist $a(a+1)$ das Produkt einer ganzen Zahl (die die Anzahl der Zehner darstellt) mit der um 1 größeren Zahl.
Die Multiplikation einer Zahl mit 100 und die anschließende Addition von 25 führt auf dasselbe Resultat, das man durch das Anhängen der Ziffern 2 und 5 an die betreffende Zahl erhält. Auf demselben Verfahren beruht die Rechenregel, die man anwenden kann, wenn das Quadrat aus einer ganzen Zahl vermehrt um $\frac{1}{2}$ berechnet werden soll.

Beispiele:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12\frac{1}{4}, \qquad \left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\tfrac{1}{4}, \qquad \left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\tfrac{1}{4}$$

Die Ziffern 1, 5 und 6

Wahrscheinlich haben alle bemerkt, dass bei der Multiplikation einer Reihe von Zahlen, die auf 1 oder 5 enden, sich eine Zahl ergibt, die auf die gleiche Ziffer endet. Weniger bekannt ist, dass sich dieses merkwürdige Verhalten auch auf die 6 bezieht. Deshalb endet jede Potenz einer Zahl, die auf eine 6 ausläuft, ebenfalls mit einer 6.

Beispiele: $46^2 = 2116; 46^3 = 97336$.

Diese interessante Besonderheit der Ziffern 1, 5 und 6 kann man folgendermaßen begründen. Beschäftigen wir uns in diesem Zusammenhang mit der 6.

Die Zahlen, die auf eine 6 enden, kann man darstellen als $10a+6$; $10b+6$; usw., wobei a und b ganze Zahlen sind. Das Produkt zweier solcher Zahlen ist gleich

$$100ab + 60b + 60a + 36 = 10(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 = 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6$$

Wie wir sehen, besteht das Produkt aus einer gewissen Anzahl von Zehnern und aus der Ziffer 6, die sich natürlich am Ende dieser Zahl befinden muss. Dasselbe Beweisverfahren kann man bei den Ziffern 1 und 5 anwenden.
Das Gesagte, gibt uns das Recht zu behaupten, dass z. B.

386^{2567} auf 6 endet, 815^{723} auf 5 endet, 491^{1732} auf 1 endet.

Die Zahlen 25 und 76

Es gibt auch zweistellige Zahlen, die über die eben für die Endziffern 1, 5 und 6 dargelegte Eigenschaft verfügen. Das sind die Zahlen, die auf 25 oder auf 76 enden.
Die Ziffern 7, 6 werden wohl für viele Leser unerwartet sein, aber es ist schon so: Das Produkt zweier Zahlen, die beide auf 76 enden, ist eine Zahl, die wieder auf 76 endet. Beweisen wir das.

Der allgemeine Ausdruck für solche Zahlen lautet: $100a + 76$ oder $100b + 76$ usw. Wir multiplizieren zwei Zahlen dieser Art und erhalten

$$\begin{aligned} 10000ab + 7600b + 7600a + 5776 &= 10000ab + 7600b + 7600a + 5700 + 76 \\ &= 100(100ab + 76b + 76a + 57) + 76 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist bewiesen: Das Produkt wird auf die Zahl 76 enden. Daraus folgt, dass jede Potenz einer Zahl, die auf 76 endet, eine Zahl ist, die wieder auf 76 endet.
$376^2 = 141376$; $576^3 = 191102976$.

Der Zuschlag

Vor langer Zeit begab sich folgendes: Zwei Viehhändler verkauften eine ihnen gehörende Ochsenherde, wobei sie für jeden Ochsen so viel Rubel erhielten, wie die Herde Ochsen zählte. Für das ausgehändigte Geld kauften sie sich eine Schafherde, je 10 Rubel für ein Schaf, und ein Lamm.
Beim Aufteilen in gleiche Teile erhielt einer ein übriges Schaf, der andere nahm dafür das Lamm und erhielt von seinem Kameraden den entsprechenden Zuschlag. Wie groß war der Zuschlag? (Es wird vorausgesetzt, dass der Zuschlag durch eine ganze Anzahl von Rubeln ausgedrückt wird.)

Lösung: Die Aufgabe lässt sich nicht direkt in die algebraische Sprache übersetzen, denn man kann keine Gleichung aufstellen. Man muss sie auf besonderem Wege lösen, sozusagen nach freier mathematischer Überlegung. Aber auch hier erweist die Algebra der Arithmetik wirksame Hilfe.

Der Preis der ganzen Herde Schafe (in Rubeln) ist ein vollständiges Quadrat, da die Herde Schafe vom Geld des Verkaufs von n Ochsen zu je n Rubel für jeden Ochsen erworben wurde. Einer der Teilhaber erhielt das übrige Schaf, folglich ist die Anzahl der Schafe eine ungerade Zahl.

Das bedeutet, dass auch die Anzahl an Zehnern der Zahl n^2 ungerade ist. Wie lautet nun die Ziffer für die Einer?
Hier hilft uns der folgende Satz weiter: Wenn bei einem vollständigen Quadrat die Zehnerziffer eine ungerade Zahl ist, so ist die Einerziffer auf jeden Fall 6. Das Quadrat jeder Zahl aus a Zehnern und b Einern, also $(10a+b)^2$ ergibt:

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab)10 + b^2$$

Darin sind (10^2+2ab) auf jeden Fall Zehner, aber auch in b^2 sind noch Zehner enthalten. $(10a^2+2ab)$ ist durch 2 teilbar, d. h., es ist eine gerade Zahl. Deshalb wird die Anzahl der Zehner, die in b^2 enthalten sind, eine ungerade Zahl sein. Erinnern wir uns daran, was $(10a+b)^2$ ist.
Das ist das Quadrat einer einstelligen Zahl, d. h., eine der folgenden 10 Zahlen: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Unter ihnen haben nur 16 und 36, beide enden auf 6, eine ungerade Anzahl von Zehnern. Das bedeutet, das vollständige Quadrat

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

kann nur in dem Fall eine ungerade Anzahl von Zehnern haben, wenn es auf 6 endet.
Jetzt ist die Antwort auf die Frage unserer Aufgabe leicht zu finden. Es ist klar, dass das Lamm für 6 Rubel wegging. Der Teilhaber, der es erhielt, bekam folglich 4 Rubel weniger als der andere. Um die Teile anzugleichen, musste der Besitzer des Lamms von seinem Kameraden 2 Rubel hinzubekommen.

Die Teilbarkeit durch 11

Die Algebra erleichtert überaus die Suche nach Kriterien, nach denen man vor der Ausführung einer Division entscheiden kann, ob eine gegebene Zahl durch diesen oder jenen Divisor teilbar ist oder nicht. Die Kriterien der Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 sind allgemein bekannt. Leiten wir jetzt das Kriterium für die Teilbarkeit durch 11 her.

Es möge sich die vielstellige Zahl N aus a Einern, b Zehnern, c Hundertern, d Tausendern usw. zusammensetzen:

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + ... = a + 10(b + 10c + 100d + ...)$$

Wir subtrahieren von N die Zahl $11(b + 10c + 100d + ...)$, also ein Vielfaches von 11. Dann ist die erhaltene Differenz, wie leicht einzusehen ist, gleich

$$a - b - 10(c + 10d + ...)$$

Diese Differenz ergibt bei der Division durch 11 den gleichen Rest wie die Zahl N bei der Division durch 11.
Nun addieren wir zu dieser Differenz wieder ein Vielfaches von 11, nämlich $11(c+10d+ ...)$. Auf diese Weise erhalten wir wieder eine Zahl, die bei der Division durch 11 den gleichen Rest ergibt. Diese Zahl ist

$$a - b + c + 10(d + ...)$$

Wir können nun folgendes Kriterium für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 gewinnen:

Man muss von der Summe aller Ziffern, die an ungeraden Stellen stehen, die Summe aller Ziffern, die gerade Stellen einnehmen, subtrahieren. Erhält man als Differenz 0 oder eine Zahl (positiv oder negativ), die ein Vielfaches von 11 ist, so ist auch die untersuchte Zahl ein Vielfaches von 11; andernfalls ist die gegebene Zahl nicht durch 11 teilbar.

Prüfen wir auf diese Weise die Zahl 87635064:

$$8+6+5+6=25; \qquad 7+3+0+4=14; \qquad 25-14=11$$

Das bedeutet, die gegebene Zahl ist durch 11 teilbar.

Es gibt noch ein anderes Merkmal für die Teilbarkeit durch 11, das für die Überprüfung nicht sehr großer Zahlen günstig ist. Es besteht darin, dass man die zu prüfende Zahl von rechts nach links in Teile zu je zwei Ziffern zergliedert und diese Teile addiert. Lässt sich die erhaltene Zahl ohne Rest durch 11 teilen, so ist die gegebene Zahl ein Vielfaches von 11, anderenfalls nicht.

Es soll auf diese Weise die Zahl 528 überprüft werden. Wir zergliedern die Zahl in Teile (5 28) und addieren beide Teile: 5 + 28 = 33. Da sich 33 ohne Rest durch 11 teilen lässt, so ist auch die Zahl 528 ein Vielfaches von 11: 528 : 11 = 48.

Beweisen wir dieses Teilbarkeitskriterium. Wir teilen die vielstellige Zahl N. Dann erhalten wir zweistellige (oder einstellige)[7] Zahlen, die wir mit a, b, c usw. (von rechts nach links) bezeichnen. Wir erhalten also die Zahl N in der Form

$$N = a + 100b + 10000c + ... = a + 100(b + 100c + ...)$$

Wir subtrahieren von N die Zahl $99(b + 100c + ...)$, die ein Vielfaches von 11 ist. Wir erhalten die Zahl

$$a + (b + 100c + ...) = a + b + 100(c + ...)$$

Diese Zahl ergibt bei der Division durch 11 den gleichen Rest wie die Zahl N bei der Division durch 11. Von dieser Zahl subtrahieren wir die Zahl $99(c + ...)$, die ein Vielfaches von 11 ist, usw. Als Ergebnis finden wir, dass die Zahl N bei der Division durch 11 den gleichen Rest ergibt wie auch die Zahl $a + b + c + ...$.

Die Autonummer

Aufgabe: Drei Mathematikstudenten kamen an einer Straßenkreuzung vorbei, als sich gerade ein Verkehrsunfall ereignete. Der schuldige Kraftfahrer verübte Fahrerflucht.
Bei der polizeilichen Aufnahme des Unfalls konnte keiner der Studenten die vierstellige Autonummer des flüchtigen Wagens nennen. Da sie aber Mathematiker waren, bemerkte jeder von ihnen eine gewisse Besonderheit dieser vierstelligen Zahl.

[7] Wenn die Zahl N eine ungerade Anzahl von Ziffern hat, so ist der letzte Teil (ganz links) einstellig. In diesem Fall würde man beispielsweise die Zahl 03 als einstellige Zahl 3 ansehen.

Einer der Studenten erinnerte sich daran, dass die ersten beiden Ziffern der Zahl gleich waren. Der zweite erinnerte sich, dass die beiden letzten Ziffern ebenfalls miteinander übereinstimmten. Der dritte schließlich behauptete, dass die gesamte vierstellige Zahl ein vollständiges Quadrat darstellt.
Kann man nach diesen Angaben die Autonummer herausbekommen?

Lösung: Wir bezeichnen die erste (und die zweite) Ziffer der gesuchten Zahl mit a und die dritte (und vierte) mit b. Dann hat die ganze Zahl die folgende Form:

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$$

Diese Zahl ist durch 11 teilbar. Da sie aber ein vollständiges Quadrat darstellt, ist sie sogar durch 11^2 teilbar. Mit anderen Worten, die Zahl $100a + b$ lässt sich durch 11 teilen.
Wir wenden nun eine der beiden oben angeführten Teilbarkeitsregeln durch 11 an und finden, dass sich die Zahl $a+b$ durch 11 teilen lässt. Das aber bedeutet, dass $a+b = 11$ ist, da jede der Ziffern a und b kleiner als zehn ist.

Die letzte Ziffer b der Zahl, die ein vollständiges Quadrat sein soll, kann nur folgende Werte annehmen: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deshalb ermitteln wir für die Ziffer a, die gleich $11 - b$ ist, die folgenden möglichen Werte: 11, 10, 7, 6, 5, 2.
Die ersten beiden Werte sind ungeeignet. Bleiben also folgende Möglichkeiten:

$$b = 4, a = 7; \quad b = 5, a = 6; \quad b = 6, a = 5; \quad b = 9, a = 2$$

Wir sehen, dass man die Autonummer unter folgenden vier Zahlen suchen muss: 7744, 6655, 5566, 2299.
Aber die letzten drei dieser Zahlen sind keine vollständigen Quadrate: die Zahl 6655 ist durch 5 teilbar, nicht aber durch 25; die Zahl 5566 ist durch 2 teilbar, nicht aber durch 4; die Zahl 2299 = 121 · 19 ist ebenfalls kein vollständiges Quadrat.
Es bleibt nur die eine Zahl $7744 = 88^2$ übrig, sie liefert auch die Lösung der Aufgabe.

Die Teilbarkeit durch 19

Es ist folgendes Merkmal für durch 19 teilbare Zahlen zu begründen:

"Eine Zahl ist durch 19 dann und nur dann teilbar, wenn die Zahl ihrer Zehner vermehrt um die verdoppelte Zahl der Einer ein Vielfaches von 19 ist."

Lösung: Jede Zahl N kann man in der Form $N = 10x + y$ darstellen, wobei x die Anzahl der Zehner angibt und y die Anzahl der Einer. (Hierbei ist zu beachten, dass x nicht die Ziffer an der Stelle der Zehner in der Zahl N ist. Vielmehr handelt es sich um die Zahl, die sich nach der Subtraktion der Einer von der Zahl N und anschließende Division durch 10 ergibt.)

Wir müssen zeigen, dass N dann und nur dann ein Vielfaches von 19 ist, wenn $N' = x + 2y$ ein Vielfaches von 19 ist. Dafür multiplizieren wir N' mit 10 und subtrahieren von diesem Produkt N.
Wir erhalten:

$$10N' - N = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y$$

Daraus geht folgendes hervor:
Wenn N' ein Vielfaches von 19 ist, so ist auch $N = 10N' - 19y$ durch 19 teilbar.

umgekehrt gilt auch: Wenn N durch 19 teilbar ist, so ist $10N' = N - 19y$ ein Vielfaches von 19 und dann ist N' durch 19 teilbar.
Untersuchen wir beispielsweise, ob die Zahl 47045881 durch 19 teilbar ist. Wir wenden die Teilbarkeitsregel an: $47045881; x = 4704588; y = 1$ (siehe Rechnung rechts)

$$\begin{array}{l}
47045881 \\
+ \qquad\quad 2 \\
\hline
4704590 \\
470459 \\
+ \quad 18 \\
\hline
47063 \\
+ \quad 6 \\
\hline
4712 \\
+ \quad 4 \\
\hline
475 \\
+10 \\
\hline
57 \\
+14 \\
\hline
19
\end{array}$$

Ergebnis: Die Zahl 19 lässt sich natürlich ohne Rest durch 19 dividieren. Damit sind aber auch die Zahlen 57, 475, 4712, 47063, 470459, 4704590, 47045881 Vielfache von 19. Die Zahl 47045881 ist also durch 19 teilbar.

Der Satz der Sophie Germain

Die folgende Aufgabe stellte die französische Mathematikerin Sophie Germain (1776-1831):
Es ist zu beweisen, dass keine Zahl der Form $a^4 + 4$ mit $a \neq 1$ eine Primzahl ist.

Lösung: Für den Beweis werden folgende Umwandlungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 \\ &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) \end{aligned}$$

Die Zahl $a^4 + 4$ kann also in Form eines Produkts zweier Faktoren, die sich selbst und Eins[8] nicht gleich sind, dargestellt werden. Die Zahl $a^4 + 4$ ist demnach keine Primzahl.

Zusammengesetzte Zahlen

Es gibt unendlich viele ganze Zahlen größer als 1, die durch keine ganze Zahl ohne Rest

[8] Es ist $a \neq 1$, also $a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) + 1 = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$.

teilbar sind, ausgenommen durch 1 oder durch sich selbst. Man nennt diese Zahlen Primzahlen.
Unter den Zahlen bis 30 findet man die folgenden Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 , 19, 23, 29.
Sie liegen zwischen den zusammengesetzten Zahlen und zergliedern die Folge der natürlichen Zahlen in mehr oder minder lange Intervalle zusammengesetzter Zahlen. Welche Länge haben diese Intervalle? Gibt es beispielsweise irgendwo tausend zusammengesetzte Zahlen, die nicht durch eine Primzahl unterbrochen werden? -

Man kann beweisen, obwohl das auch unglaubwürdig erscheinen kann, dass solche Intervalle von zusammengesetzten Zahlen zwischen Primzahlen in beliebiger Länge vorkommen. Es gibt keine Grenzen für die Länge solcher Intervalle: Sie können aus Tausenden, aus Millionen, aus Trillionen zusammengesetzter Zahlen bestehen.

Der Bequemlichkeit halber verwenden wir das vereinbarte Symbol $n!$, das das Produkt aller Zahlen von 1 bis einschließlich n bezeichnet. So ist z. B. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Wir wollen nun beweisen, dass die Folge

$$[(n+1)!+2], \quad [(n+1)!+3], \quad [(n+1)!+4], \quad ..., \quad [(n+1)!+n+1]$$

aus n aufeinanderfolgenden zusammengesetzten Zahlen besteht. Diese Zahlen laufen unmittelbar hintereinander in einer natürlichen Zahlenfolge, da jede folgende Zahl um 1 größer ist als die vorangegangene. Es bleibt zu beweisen, dass sie alle zusammengesetzte Zahlen sind.

Die erste Zahl

$$(n+1)!+2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n+1)+2$$

ist eine gerade Zahl, da ihre beiden Summanden den Faktor 2 enthalten. Und jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist eine zusammengesetzte Zahl.
Die zweite Zahl

$$(n+1)!+3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n+1)+3$$

besteht aus zwei Summanden, von denen jeder ein Vielfaches von 3 ist. Das bedeutet, dass auch diese Zahl eine zusammengesetzte Zahl ist. Die dritte Zahl

$$(n+1)!+4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n+1)+4$$

lässt sich ohne Rest durch 4 dividieren, da sie aus Summanden besteht, die ein Vielfaches von 4 sind.

Auf gleiche Weise stellen wir fest, dass die folgende Zahl $(n+1)!+5$ ein Vielfaches von 5 ist usw. Mit anderen Worten, jedes Glied unserer Folge enthält einen Multiplikator, der verschieden von 1 und verschieden von sich selbst ist. Es sind folglich zusammengesetzte Zahlen.
Wünschen Sie, z. B., fünf aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen zu schreiben, so genügt es, in die oben angeführte Folge an Stelle von n die Zahl 5 einzusetzen. Sie erhalten die Zahlen 722, 723, 724, 725, 726. Das ist aber nicht die einzige Möglichkeit für fünf aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen. Es gibt auch andere, z. B. 62,

63, 64, 65, 66. Oder noch kleinere Zahlen: 24, 25, 26, 27, 28.

Versuchen wir jetzt, die folgende Aufgabe zu lösen:
Es sind zehn aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen zu schreiben.

Lösung: Auf Grund des früher Gesagten stellen wir fest, dass man als erste der gesuchten zehn Zahlen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39816802$$

wählen kann. Als gesuchte Zahlen erhält man dann 39816802, 39816803, 39816804 usw.

Aber es existieren Serien von zehn wesentlich kleineren aufeinanderfolgenden zusammengesetzte Zahlen. So kann man sogar auf eine Serie nicht nur von zehn, sondern sogar von dreizehn aufeinanderfolgenden zusammengesetzten Zahlen schon im zweiten Hunderter hinweisen: 114, 115, 116, 117 usw. bis 126 einschließlich.

Die Menge der Primzahlen

Die Existenz so beliebig langer Folgen aufeinanderfolgender zusammengesetzter Zahlen kann Zweifel darin wecken, ob die Menge der Primzahlen tatsächlich beliebig groß ist. Deshalb wird es sicher interessant sein, hier den Beweis für diese Behauptung zu erbringen. Dieser Beweis stammt von dem antiken griechischen Mathematiker Euklid. In seinem umfangreichen Werk Elemente ist dieser Beweis enthalten. Es handelt sich um einen indirekten Beweis.

Wir nehmen nämlich an, dass die Anzahl der Primzahlen endlich ist, und bezeichnen die letzte Primzahl mit N. Wir stellen das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot N = N!$ auf und addieren I hinzu. Wir erhalten $N! + 1$.
Diese Zahl muss, falls es eine ganze Zahl ist, wenigstens einen Primfaktor enthalten, d. h., sie muss wenigstens durch eine Primzahl teilbar sein. Aber alle Primzahlen übersteigen, nach Voraussetzung, nicht N, die Zahl $N! + 1$ jedoch ist durch keine Zahl, die kleiner oder gleich N ist, ohne Rest zu dividieren - es ergibt sich jedesmal der Rest 1.

Also durfte man nicht voraussetzen, dass die Menge der Primzahlen endlich ist. Diese Voraussetzung führte nämlich zu einem Widerspruch.

Wie lang wir also auch das Intervall aufeinanderfolgender zusammengesetzter Zahlen wählen wollen, wir können stets überzeugt sein, dass sich hinter ihr noch unendlich viele Primzahlen befinden.

Die größte bekannte Primzahl

Überzeugt zu sein, dass beliebig große Primzahlen existieren, ist eine Sache, die Primzahlen aus der Folge der natürlichen Zahlen herauszufinden, eine andere. Je größer eine natürliche Zahl ist, um so mehr Rechnungen muss man durchführen, um zu erkunden, ob es sich um eine Primzahl oder um eine zusammengesetzte Zahl handelt. Die größte Zahl, von der man heute weiß, dass es eine Primzahl ist, lautet $2^{2281} - 1$.

Es handelt sich dabei um eine Zahl mit nahezu siebenhundert Stellen. Die Rechnungen, mit deren Hilfe festgestellt wurde, dass diese Zahl eine Primzahl ist, wurden mit modernen Rechenautomaten durchgeführt.

Eine verantwortungsvolle Berechnung

Bei der Lösung von Aufgaben sind manchmal Berechnungen erforderlich, die ohne erleichternde Methoden überaus umständlich sind.
Um eine solche Aufgabe handelt es sich beispielsweise bei der Vereinfachung des Ausdrucks

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}$$

Auf diesen Ausdruck kann man stoßen, wenn man Berechnungen über Bahngeschwindigkeiten von Teilchen unter dem Aspekt der Relativitätstheorie vornimmt.
Wir wollen diese Berechnung auf zweifache Weise vornehmen, zuerst rein rechnerisch, dann unter Benutzung vereinfachender Verfahren.

Ein Blick auf die langen Zahlenkolonnen, die man beim ersten Weg erhält, wird Sie überzeugen, dass der zweite Weg bequemer ist.
Zunächst wandeln wir unseren "vieletagigen" Bruch um:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}} = \frac{180000000000}{90000000001}$$

Jetzt führen wir die Division des Zählers durch den Nenner aus:

```
180000000000 :90000000001=1 ,999999999977...
90000000001
 899999999990
 810000000009
  899999999810
  810000000009
   899999998010              899800000010
   810000000009              810000000009
    899999980010              898000000010
    810000000009              810000000009
     899999800010              880000000010
     810000000009              810000000009
      899998000010              700000000010
      810000000009              700000000010
       899980000010              70000000003
       810000000009
```

Die Berechnung ist, wie Sie sehen, sehr ermüdend. Außerdem kann man sich leicht verrechnen. Indessen will man gerade wissen, an welcher Stelle der Lösung die Folge der Neunen abbricht und eine Folge anderer Ziffern beginnt.

Sehen wir uns nun die zweite Methode an. Sie bedient sich folgender annähernden

Gleichheit:

Ist a ein sehr kleiner Bruch, so ist $\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$. Es ist sehr einfach, sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Wir vergleichen den Dividenden 1 mit dem Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten

$$1 = (1+a)(1-a) \qquad \text{also} \qquad 1 = 1 - a^2$$

Da a ein sehr kleiner Bruch ist (z. B. 0,001), so ist a^2 ein noch kleinerer Bruch (0,000001), und ihn kann man vernachlässigen. Wenden wir diese Feststellung auf unsere Berechnung[9] an:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot 10^10}} \approx 2(1-0,111...\cdot 10^{-10}) = 2 - 0,0000000000222...$$
$$= 1,9999999999777...$$

Wir gelangen zu dem gleichen Resultat wie vorher, aber auf kürzerem Wege.

Wann ist es ohne Algebra einfacher?

Neben den Fällen, in denen man mit etwas Überlegung ein bequemeres Verfahren findet, gibt es auch solche, bei denen das rein rechnerische Verfahren doch das günstigste Verfahren ist.
Das echte Wissen in der Mathematik besteht in der Fähigkeit, so über die mathematischen Mittel zu verfügen, dass immer der geradeste und zuverlässigste Weg für die Lösung ausgewählt wird.

Aufgabe: Welches ist die kleinste Zahl, die bei der Division
durch 2 den Rest 1 ergibt,
durch 3 den Rest 2 ergibt,
durch 4 den Rest 3 ergibt,
durch 5 den Rest 4 ergibt,
durch 6 den Rest 5 ergibt,
durch 7 den Rest 6 ergibt,
durch 8 den Rest 7 ergibt,
durch 9 den Rest 8 ergibt.

Lösung: Diese Aufgabe legte man mir mit folgenden Worten vor: "Wie würden Sie diese Aufgabe lösen? Sie enthält verhältnismäßig viele Gleichungen, bei denen es schwierig ist, einen Lösungsweg aufzuspüren."
Und dennoch ist es gar nicht so schwer, einen Weg zu finden. Es werden hierbei keine Gleichungen, keine algebraischen Umformungen benötigt, sondern nur einfache Überlegungen.

Wir addieren zur gesuchten Zahl eine Eins. Welchen Rest liefert sie dann bei einer Division durch 2?

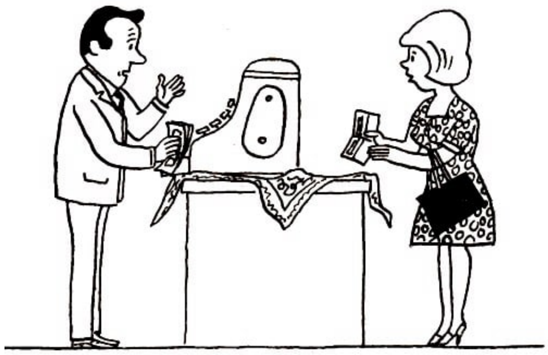
[9] Wir verwenden dabei weiterhin die Näherungsformel $\frac{A}{1+a} \approx A(1-a)$.

Der Rest ist $1 + 1 = 2$; mit anderen Worten, die Zahl lässt sich durch 2 ohne Rest dividieren. Genauso lässt sie sich auch ohne Rest durch 3, durch 4, durch 5, durch 6, durch 7, durch 8 und schließlich durch 9 dividieren. Die kleinste dieser Zahlen ist $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$, die gesuchte Zahl aber ist gleich 2519, was unschwer durch eine Probe zu überprüfen ist.

4 Diophantische Gleichungen

Der Kauf eines Halstuches

Aufgabe: Angenommen, Sie wollen in einer Verkaufsstelle ein Halstuch für 19 Rubel kaufen. Sie besitzen lediglich Dreirubelscheine, der Kassierer nur Fünfrubelscheine. Gibt es eine Möglichkeit, die in diesem Falle eine sofortige Bezahlung der Ware mit Dreirubelscheinen und das Herausgeben von Fünfrubelscheinen ermöglicht?



Der Käufer gibt also dem Kassierer eine bestimmte Anzahl von Dreirubelscheinen, und zwar in einem Gesamtwert, der natürlich höher als 19 Rubel ist, und erhält eine bestimmte Anzahl von Fünfrubelscheinen zurück, so dass der Käufer letztlich 19 Rubel bezahlt hat. Die Anzahl der Dreirubelscheine bezeichnen wir mit x, die der Fünfrubelscheine mit y.
Man kann nun die folgende Gleichung aufstellen:

$$3x - 5y = 19$$

Nun lässt eine Gleichung mit zwei Unbekannten im allgemeinen unendlich viele Lösungen zu. Wir suchen aber eine Lösung, die positive ganzzahlige Werte für x und y liefert. Eine solche Gleichung nennt man Diophantische Gleichung. Das Verdienst ihrer Einführung in die Algebra gebührt dem bekannten Mathematiker der Antike Diophantos, weshalb ihm zu Ehren diese Art von Gleichungen seinen Namen tragen.

Lösung: Wir wollen nun die Werte von x und y in der Gleichung $3x - 5y = 19$ finden, wobei wir wissen, dass x und y ganze positive Zahlen sind.
Wir isolieren zunächst diejenige Unbekannte, deren Koeffizient kleiner ist, also $3x$, und erhalten $3x = 19 + 5y$, woraus folgt:

$$x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}$$

Da x, 6 und y ganze Zahlen sind, kann die Gleichheit nur unter der Bedingung gewährleistet sein, dass $\frac{1+2y}{3}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist. Wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben t. Dann ist

$$x = 6 + y + t \qquad \text{wobei} \qquad t = \frac{1 + 2y}{3}$$

ist. Daraus folgt

$$3t = 1 + 2y \qquad , \qquad 2y = 3t - 1$$

Aus der letzten Gleichung ermitteln wir y zu:

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}$$

Da y und t ganze Zahlen sind, so muss auch $\frac{t-1}{2}$ eine gewisse ganze Zahl t_1 sein. Folglich ist $y = t + t_1$, wobei $t_1 = \frac{t-1}{2}$ ist, woraus $2t_1 = t - 1$ und $t = 2t_1 + 1$ folgen. Den Wert $t = 2t_1 + 1$ setzen wir in die vorangegangenen Gleichungen ein:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1$$

Für die beiden Unbekannten x und y fanden wir also die Gleichungen[10]

$$x = 8 + 5t_1 \qquad , \qquad y = 1 + 3t_1$$

Da x und y positive ganze Zahlen sind, also Zahlen größer als 0, muss gelten:

$$8 + 5t_1 > 0 \qquad , \qquad 1 + 3t_1 > 0$$

Aus diesen Ungleichungen ermitteln wir

$$5t_1 > -8 \quad \text{und} \quad t_1 > -\frac{8}{5} \qquad \text{sowie} \qquad 3t_1 > -1 \quad \text{und} \quad t_1 > -\frac{1}{3}$$

Damit ist die Größe t_1 abgegrenzt; sie ist größer als $-\frac{1}{3}$ (und also weit größer als $-\frac{8}{5}$). Aber da t_1 eine ganze Zahl ist, kommen wir zu dem Schluss, dass für sie nur folgende Werte möglich sind: $t_1 = 0; 1; 2; 3; 4; ...$
Entsprechende Werte für x und y; sind diese:

$$x = 8 + 5t_1 = 8; 13; 18; 23; ... \qquad , \qquad y = 1 + 3t_1 = 1; 4; 7; 10; ...$$

Jetzt haben wir festgestellt, wie die Bezahlung durchgeführt werden kann: Entweder der Kunde bezahlt acht Dreirubelscheine und erhält einen Fünfrubelschein zurück:

$$8 \cdot 3 - 5 = 19$$

oder er bezahlt 13 Dreirubelscheine und erhält 4 Fünfrubelscheine zurück:

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19 \qquad \text{usw.}$$

[10] Strenggenommen haben wir nur bewiesen, dass jede ganzzahlige Lösung der Gleichung $3x - 5y = 19$ die Forma $x = 8 + 5t_1$; $y = 1 + 3t_1$ hat, wobei t_1 eine gewisse ganze Zahl ist. Das Umgekehrte, d. h. das, dass wir bei beliebigem ganzen t_1 eine gewisse ganzzahlige Lösung der uns gestellten Aufgabe erhalten, war nicht bewiesen. Trotzdem kann man sich leicht davon überzeugen, stellt man die Betrachtung in umgekehrter Reihenfolge an oder setzt man die gefundenen Werte x und y in die Ausgangsgleichung ein.

Theoretisch hat die Aufgabe unbegrenzt viele Lösungen, aber praktisch ist die Anzahl der Lösungen natürlich begrenzt,da sowohl der Käufer als auch der Kassierer nur eine beschränkte Anzahl von Banknoten haben.
Hat beispielsweise jeder nur je 10 Banknoten, so kann die Zahlung nur in einer Art durchgeführt werden: nämlich durch die Zahlung von 8 Dreirubelscheinen und die Rückgabe von einem Fünfrubelschein.

Wie wir sehen, kann die eine diophantische Gleichung gegebenenfalls auch ein eindeutig bestimmtes Lösungspaar ergeben.
Welche Möglichkeiten ergeben sich nun aber, wenn der Käufer nur Fünfrubelscheine und der Kassierer nur Dreirubelscheine hat? Wir schlagen dem Leser diese Aufgabe zur Übung vor. Als Ergebnis erhält man die Lösungen

$$x = 5; 8; 11; ... \qquad , \qquad y = 2; 7; 12; ...$$

Beim Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichung $5x - 3y = 19$ erhält man

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19 \qquad \text{bzw.} \qquad 8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19 \qquad \text{bzw.} \qquad 11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19$$

Wir könnten diese Resultate ebenfalls aus der schon fertigen Lösung der ersten Aufgabe erhalten, wenn wir ein einfaches algebraisches Verfahren benutzen. Da es gleich ist, ob man Fünfrubelscheine gibt und Dreirubelscheine erhält oder ob man "negative Fünfrubelscheine bekommt" und "negative Dreirubelscheine erhält", so wird die neue Aufgabenvariante durch dieselbe Gleichung gelöst, die wir für die eigentliche Aufgabe aufstellten: also durch $3x - 5y = 19$, aber unter der Bedingung, dass x und y negative Zahlen sind. Deshalb leiten wir aus den Gleichungen

$$x = 8 + 5t_1 \qquad , \qquad y = 1 + 3t_1$$

wobei wir wissen, dass $x < 0$ und $y < 0$ sind, her

$$8 + 5t_1 < 0 \qquad , \qquad 1 + 3t_1 < 0$$

Folglich ist $t_1 < -\frac{8}{5}$.
Nehmen wir an, dass $t_1 = -2, -3, -4, ...$ ist, so erhalten wir aus den vorigen Formeln folgende Werte für x und y

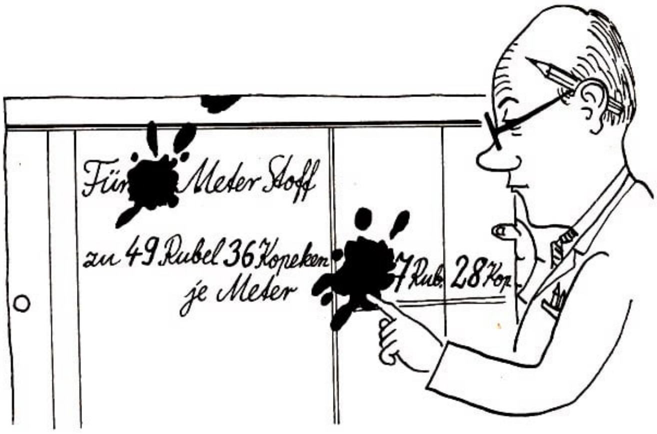
t_1	-2	-3	-4
x	-2	-7	-12
y	-5	-8	-11

Das erste Lösungspaar $x = -2$, $y = -5$ bedeutet, dass der Käufer "minus 2 Dreirubelscheine bezahlt" und "minus 5 Fünfrubelscheine erhält", d.h. in der Übersetzung in die gewöhnliche Sprache, er bezahlt 5 Fünfrubelscheine und erhält 2 Dreirubelscheine zurück. Auf gleiche Weise deuten wir auch die anderen Lösungen.

Revision einer Genossenschaft

Aufgabe: Bei der Revision der Rechnungsführung einer Genossenschaft stellte man fest, dass eine der Eintragungen mit Tinte übergossen war.

Es war nicht möglich, die Anzahl der verkauften Meter Stoff festzustellen, aber es handelte sich bei dieser Zahl keinesfalls um einen Bruch. Von der ausgehändigten Summe konnte man nur die letzten drei Ziffern lesen und dann noch feststellen, dass vor diesen Ziffern irgendwelche drei andere Ziffern gestanden haben mussten.
Kann die Revisionskommision auf Grund dieser Spuren die Eintragungen rekonstruieren?



Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Meter mit x. Die ausgehändigte Summe wird in Kopeken durch $4936x$ ausgedrückt. Die Zahl, die durch die drei übergossenen Ziffern in der Eintragung der Geldsumme zum Ausdruck gebracht wird, bezeichnen wir mit y. Das ist offensichtlich eine Zahl von tausend Kopeken, die gesamte Summe in Kopeken wird also ausgedrückt durch $1000y + 728$. Wir erhalten damit die Gleichung:

$$4936x = 1000y + 728$$

oder nach dem Kürzen durch 8

$$617x - 125y = 91$$

In dieser Gleichung sind x und y ganze Zahlen, und y ist dabei nicht größer als 999, da diese Zahl nicht aus mehr als drei Ziffern bestehen kann. Wir lösen die Gleichung, wie es in der vorigen Aufgabe gezeigt wurde:

$$125y = 617x - 91$$
$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t$$

In dieser Gleichung setzten wir $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, da es für uns vorteilhaft ist, möglichst kleine Reste zu haben. Der Bruch $\frac{2(17-4x)}{125}$ ist eine ganze Zahl, und da 2 nicht durch 125 teilbar ist, so muss $\frac{17-4x}{125}$ eine ganze Zahl sein, die wir auch mit t bezeichneten.

Aus der Gleichung

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

erhalten wir

$$17 - 4x = 125t$$
$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1$$

wobei $t_1 = \frac{1-t}{4}$ ist. Folglich gilt:

$$4t_1 = 1 - t \qquad \text{oder} \qquad t = 1 - 4t_1$$

und[11]

$$x = 125t_1 - 27 \qquad , \qquad y = 617t_1 - 134$$

Wir wissen, dass $100 \leq y < 1000$ ist. Folglich ist $100 \leq 617t_1 - 134 < 1000$, woraus

$$t_1 \geq \frac{234}{617} \qquad \text{und} \qquad t_1 < \frac{1134}{617}$$

folgen.
Es ist offensichtlich, dass für t_1 nur ein ganzer Wert existiert: $t_1 = 1$, und dann gilt $x = 98$; $y = 483$, d. h., es wurden 98 Meter für die Summe von 4837 Rubeln 28 Kopeken verkauft. Die Eintragung wurde also rekonstruiert.

Auf der Post

Piotr soll für 5 Rubel Briefmarken kaufen, und zwar sollen es insgesamt 20 St. sein, und es sollen Wertzeichen zu 40 Kopeken, zu 25 Kopeken und zu 5 Kopeken dabei sein. Wieviel Briefmarken werden von jeder Sorte gekauft?

Lösung: In diesem Falle haben wir zwei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$40x + 25y + 5z = 500 \qquad , \qquad x + y + z = 20$$

wobei x die Anzahl der 40-Kopeken-Marken, y die Anzahl der 25-Kopeken-Marken und z die der 5-Kopeken-Marken ist. Dividiert man die erste Gleichung durch 5 und subtrahiert dann die zweite, so erhält man eine Gleichung mit zwei Unbekannten:

$$7x + 4y = 80$$

Wir finden für y:

$$y = 20 - 7\frac{7}{4}$$

Offensichtlich ist $\frac{x}{4}$ eine ganze Zahl. Wir bezeichnen sie mit t. Wir erhalten dann:

$$y = 20 - 7t \qquad \text{und} \qquad x = 4t$$

Wir setzen die Ausdrücke für x und y in die zweite der Ausgangsgleichungen ein:

$$4t + 20 - 7t + z = 20 \qquad , \qquad z = 3t$$

Da $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$ ist, fällt es nicht schwer, die Grenzen für t festzulegen: $0 < t < 2\frac{6}{7}$, woraus wir schließen, dass für t nur zwei ganzzahlige Werte möglich sind: $t = 1$ und $t = 2$.
Beim Einsetzen dieser Werte erhalten wir die folgende Tabelle:

[11] Richten Sie Ihre Aufmerksamkeit darauf, dass die Koeffizienten von t_1 gleich den Koeffizienten von x und y in der Ausgangsgleichung $617x - 125y = 91$ sind, wobei einer der Koeffizienten von t_1 ein umgekehrtes Vorzeichen hat. Das ist kein Zufall. Man kann beweisen, dass es immer so sein muss, wenn die Koeffizienten von x und y gegenseitig nicht teilbar sind.

t	1	2
x	4	8
y	13	6
z	3	6

Probe:

$$4 \cdot 40 + 13 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 500 \qquad , \qquad 8 \cdot 40 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 500$$

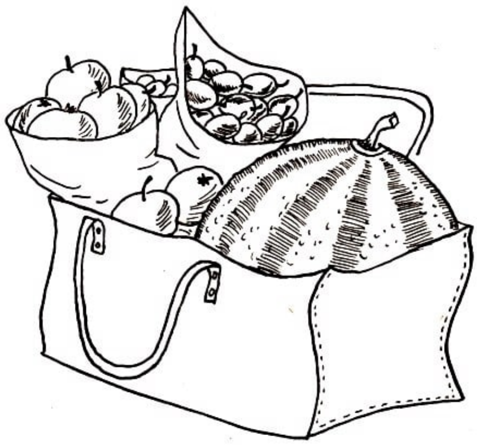
Für den Briefmarkenkauf sind also unter den genannten Voraussetzungen nur zwei Möglichkeiten gegeben.

Der Kauf von Früchten

Aufgabe: Für 50 Rubel wurden 100 verschiedene Früchte gekauft. Dabei wurden die folgenden Preise verlangt: Melonen, das Stück zu 5 Rubel, Äpfel, das Stück zu 1 Rubel, Pflaumen, das Stück zu 10 Kopeken.
Wieviel Früchte von jeder Art wurden gekauft?

Lösung: Haben wir die Anzahl der Melonen mit x, die Anzahl der Äpfel mit y und die Anzahl der Pflaumen mit z bezeichnet, so stellen wir zwei Gleichungen auf:

$$500x + 100y + 10z = 5000 \qquad , \qquad x + y + z = 100$$



Wir dividieren die erste Gleichung durch 10, subtrahieren dann die zweite und erhalten eine Gleichung mit zwei Unbekannten:

$$49x + 9y = 400$$

Der weitere Verlauf der Lösung ist folgender:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44 - 5x + 4t; \qquad t = \frac{1-x}{9}; \qquad x = 1 - 9t$$
$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t$$

Aus den Ungleichungen

$$1 - 9t > 0 \qquad \text{und} \qquad 39 + 49t > 0$$

stellen wir fest, dass

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49}$$

ist. Folglich ist $t = 0$. Deshalb ergeben sich $x = 1$ und $y = 39$.
Nachdem wir die Werte x und y in die zweite Gleichung eingesetzt haben, erhalten wir $z = 60$. Es wurden also 1 Melone, 39 Äpfel und 60 Pflaumen gekauft. Andere Kombinationen kann es nicht geben.

Das Erraten des Geburtstages

Aufgabe: Die Fertigkeit, diophantische Gleichungen zu lösen, gibt uns die Möglichkeit, folgenden Spaß durchzuführen.
Sie schlagen einem Bekannten vor, seinen Geburtstag (also nur den Tag) mit 12 und die Monatszahl mit 31 zu multiplizieren. Er teilt Ihnen die Summe beider Produkte mit, und Sie errechnen danach das Geburtsdatum.
Wurde z. B. Ihr Bekannter am 9. Februar geboren, so führt er folgende Berechnungen durch:

$$9 \cdot 12 = 108, \qquad 2 \cdot 31 = 62, \qquad 108 + 62 = 170$$

Diese letzte Zahl 170 teilt er Ihnen mit, und Sie ermitteln das Datum. Wie kann man das machen?

Lösung: Die Aufgabe führt zur Lösung der diophantischen Gleichung

$$12x + 31y = 170$$

wobei x und y positive ganze Zahlen sein sollen. Außerdem soll x als Anzahl der Tage des betreffenden Monats nicht größer als 31 sein und y nicht größer als 12.

$$\begin{aligned} x &= \frac{170 - 31y}{12} = 14 - 3y + \frac{2 + 5y}{12} = 14 - 3y + t \\ 2 + 5y &= 12t \\ y &= \frac{-2 + 12t}{5} = 2t - 2 \cdot \frac{1 - t}{5} = 2t - 2t_1 \\ t &= 1 - 5t_1 \\ y &= 2(1 - 5t_1) - 2t_1 = 2 - 12t_1 \\ x &= 14 - 3(2 - 12t_1) + 1 - 5t_1 = 9 + 31t_1 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $31 \geq x > 0$ und $12 \geq y > 0$ sind, und finden nunmehr die Grenzen von t_1:

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{6}$$

Folglich sind $t_1 = 0, x = 9, y = 2$.

Das Geburtsdatum ist der neunte Tag des zweiten Monats, d. h. der 9. Februar.
Wir beweisen, dass der Spaß immer ohne Fehlschlag gelingt, d. h., dass die Gleichung immer nur eine Lösung mit ganzen positiven Zahlen hat. Wir bezeichnen die Zahl, die Ihr Bekannter mitteilte, mit a, so dass das Suchen seines Geburtsdatums zur Lösung

der Gleichung $12x + 31y = a$ führt.

Wir führen unsere Untersuchung indirekt und setzen voraus, dass diese Gleichung zwei verschiedene Lösungen mit ganzen positiven Zahlen hat, nämlich die Lösung x_1, y_1 und die Lösung x_2, y_2, wobei x_1 und x_2 den Wert 31 nicht und y_1 und y_2 den Wert 12 nicht übersteigen.
Wir erhalten:

$$12x_1 + 31y_1 = a \qquad , \qquad 12x_2 + 31y_2 = a$$

Von der ersten Gleichung subtrahieren wir die zweite und erhalten

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0$$

Aus dieser Gleichheit ergibt sich, dass die Zahl $12(x_1 - x_2)$ durch 31 teilbar ist. Da x_1 und x_2 positive Zahlen sind, die 31 nicht übersteigen, so ist ihre Differenz $x_1 - x_2$ kleiner als 31. Deshalb kann die Zahl $12(x_1 - x_2)$ durch 31 nur in dem Falle teilbar sein, wenn $x_1 = x_2$ ist, d. h., wenn die erste Lösung mit der zweiten zusammenfällt.
Somit führt die Voraussetzung der Existenz zweier verschiedener Lösungen zu einem Widerspruch.

Der Kükenverkauf

Drei Schwestern kamen mit Küken auf den Markt. Eine brachte 10 Küken zum Verkauf mit, die andere 16, die dritte 26. Bis Mittag verkauften sie einen Teil ihrer Küken für ein und denselben Preis. Nachmittags senkten sie den Preis, da sie befürchteten, dass nicht alle Küken verkauft werden, und. verkauften die restlichen Küken für einen gesenkten einheitlichen Preis.
Sie kehrten alle drei mit gleichem Erlös nach Hause zurück, jede Schwester erhielt vom Verkauf 35 Rubel.
Für welchen Preis verkauften sie die Küken vormittags und für welchen nachmittags?

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Küken, die von jeder Schwester bis Mittag verkauft wurden, mit x, y bzw. z. In der zweiten Tageshälfte verkauften sie $10 - x$, $16 - x$ bzw. $26 - x$ Küken. Den Preis bis Mittag bezeichnen wir mit m, den gesenkten Preis mit n.
Der Klarheit halber stellen wir diese Bezeichnungen noch einmal in einer Tabelle gegenüber:

Anzahl der verkauften Küken				Preis
vormittags	x	y	z	m
nachmittags	$10 - x$	$16 - y$	$26 - z$	n

Die erste Schwester nahm $mx + n(10 - x)$ Rubel ein. Da das 35 Rubel waren, erhalten wir die Gleichung:

$$mx + n(10 - x) = 35$$

Die zweite Schwester nahm $my + n(16 - y)$ Rubel ein. Wir erhalten die Gleichung:

$$my + n(16 - y) = 35$$

Die Einnahmen der dritten Schwester betrugen $mz + n(26 - z)$ Rubel, so dass sich die Gleichung

$$mz + n(26 - z) = 35$$

ergibt. Wir formen diese drei Gleichungen um:

$$(m - n)x + 10n = 35 \qquad (1)$$
$$(m - n)y + 16n = 35 \qquad (2)$$
$$(m - n)z + 26n = 35 \qquad (3)$$

Subtrahieren wir von der dritten Gleichung die erste und dann die zweite, so erhalten wir nacheinander

$$\begin{matrix} (m-n)(z-x) + 16n = 0 \\ (m-n)(z-y) + 10n = 0 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} (m-n)(x-z) = 16n \\ (m-n)(y-z) = 10n \end{matrix}$$

Wir dividieren die erste dieser Gleichungen durch die zweite. Dann erhalten wir:

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5} \qquad \text{und nach Umformung} \qquad \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

Da x, y, z ganze Zahlen sind, so sind auch die Differenzen $x - z$ und $y - z$ ganze Zahlen. Wegen der Gleichung

$$\frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

müssen nun aber $x - z$ durch 8 und $y - z$ durch 5 teilbar sein. Folglich ist

$$\frac{x-z}{8} = t = \frac{y-z}{5}$$

woraus

$$x = z + 8t \qquad \text{und} \qquad y = z + 5t$$

folgen.
Wir bemerken, dass die Zahl t nicht nur eine ganze Zahl ist, sondern, auch eine positive, da $x > z$ ist. (Im umgekehrten Falle hätte die erste Schwester nicht soviel verdienen können wie die dritte.)

Da $x < 10$ ist, so ist $7 + 8t < 10$. Bei ganzen und positiven z und t wird die letzte Ungleichheit nur in dem Falle erfüllt, wenn $z = 1$ und $t = 1$ sind. Haben wir diese Werte in die Gleichungen

$$x = z + 8t \qquad \text{und} \qquad y = z + 5t$$

eingesetzt, so finden wir $x = 9$ und $y = 6$.
Wir wenden uns jetzt den Gleichungen

$$mx + n(10 - x) = 35my + n(16 - y) \qquad = 35mz + n(26 - z) = 35$$

zu. Setzen wir die ermittelten Werte für x und y ein, so können wir die Preise berechnen:

$$m = 3\frac{3}{4} \text{ Rubel}, \qquad n = 1\frac{1}{4} \text{ Rubel}$$

Die Küken wurden also vormittags für 3 Rubel 75 Kopeken verkauft, nachmittags für 1 Rubel 25 Kopeken.

Zwei Zahlen und vier Rechenoperationen

Die vorherige Aufgabe, die zu drei Gleichungen mit fünf Unbekannten führte, lösten wir nicht nach einer bekannten Rechenregel, sondern nach freier mathematischer Auffassung. Genauso werden wir auch die folgenden Aufgaben lösen, die zu quadratischen diophantischen Gleichungen führen.

Aufgabe: Mit zwei positiven Zahlen wurden folgende vier Rechenoperationen ausgeführt:
1. Die Zahlen wurden addiert;
2. die kleinere Zahl wurde von der größeren subtrahiert;
3. sie wurden miteinander multipliziert;
4. die größere Zahl wurde durch die kleinere dividiert.

Die erhaltenen Ergebnisse wurden addiert, es ergab sich 243. Die beiden Zahlen sind zu ermitteln.

Lösung: Wenn wir die größere Zahl mit x und die kleinere Zahl mit y bezeichnen, so erhalten wir

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit y, lösen dann die Klammern auf und ordnen die Glieder, so erhalten wir

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y$$

Da aber $2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2$ Ist, kann man noch weiter zusammenfassen zu:

$$x = \frac{243}{(y + 1)^2}$$

Damit x eine ganze Zahl ist, muss der Nenner $(y + 1)^2$ ein Teiler der Zahl 243 sein (weil y keinen gemeinsamen Teiler mit $y + 1$ haben kann).
Da $243 = 3^5$ ist, schließen wir darauf, dass 243 sich nur durch folgende Zahlen, die sämtlich vollständige Quadrate sind, ohne Rest teilen lässt: $1, 3^2, 9^2$.
Also muss $(y+1)^2$ gleich 1, gleich 3^2 oder gleich 9^2 sein, woraus wir (wir erinnern uns, dass y eine positive Zahl sein muss) entnehmen, dass y gleich 8 oder 2 ist. Dann ist x gleich $\frac{243 \cdot 8}{81}$ oder $\frac{243 \cdot 2}{9}$. Also sind 24 und 8 oder 54 und 2 die gesuchten Zahlen.

Ein Rechteck besonderer Art

Aufgabe: Die Seiten eines Rechtecks werden durch ganze Zahlen dargestellt, Wie lang müssen die Seiten sein, damit der Umfang des Rechtecks zahlenmäßig gleich dem

Flächeninhalt ist?

Lösung: Haben wir die Seiten des Rechtecks mit x und y bezeichnet, so stellen wir die Gleichung

$$2x + 2y = xy \qquad \text{auf, woraus folgt} \qquad x = \frac{2y}{y-2}$$

Da x und y positive Zahlen sein sollen, muss auch die Zahl $y - 2$ positiv sein, d. h., y muss größer als 2 sein. Wir stellen jetzt fest, dass

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$$

gilt.
Da x eine ganze Zahl sein muss; so muss der Ausdruck $\frac{4}{y-2}$ eine ganze Zahl sein. Bei $y > 2$ ist das aber nur möglich, wenn y gleich 3, 4 oder 6 ist. Entsprechende Werte von x werden 6, 4 und 3 sein.
Also ist die gesuchte Figur entweder ein Rechteck mit den Seiten 3 und 6 oder ein Quadrat mit der Seite 4.

Zwei zweistellige Zahlen

Aufgabe: Die Zahlen 46 und 96 weisen eine interessante Besonderheit auf: Ihr Produkt ändert seine Größe nicht, wenn man ihre Ziffern umstellt.
Es ist nämlich $46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69$.
Es entsteht nun die Frage, ob es noch andere Paare zweistelliger Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt. Wie kann man alle diese Paare herausfinden?

Nachdem wir die Ziffern der gesuchten Zahlen mit x und y bzw. z und t bezeichnet haben, stellen wir die Gleichung

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z)$$

auf. Wir multiplizieren aus und vereinfachen:

$$xz = yt$$

wobei x, y, z, t ganze Zahlen kleiner als 10 sind. Um die Lösung zu finden, stellen wir aus 9 Ziffern alle Paare mit gleichen Produkten zusammen:

$$\begin{array}{lllll} 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2, & 1 \cdot 5 = 2 \cdot 3, & 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4, & 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3, & 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4, \\ 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4, & 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6, & 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6, & 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 & \end{array}$$

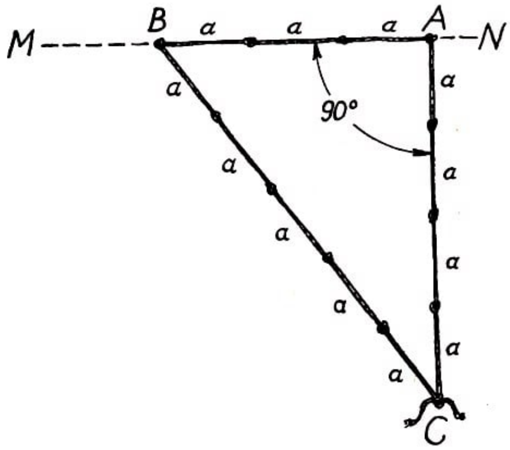
Es gibt insgesamt 9 Gleichungen. Von jeder kann man eine oder zwei gesuchte Zahlengruppen aufstellen. Aus der Gleichung $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ stellen wir beispielsweise das Paar 12 und 42 auf.
Die Überprüfung ergibt $12 \cdot 42 = 504 = 21 \cdot 24$.
Aus der Gleichung $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ ermitteln wir die Paare 12 und 63 sowie 13 und 62. Man erhält damit $12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$ und $13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$.

Auf diese Art und Weise können wir insgesamt 14 Zahlenpaare ermitteln, die auf folgende 14 Gleichungen führen:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24, \quad 12 \cdot 63 = 21 \cdot 36, \quad 12 \cdot 84 = 21 \cdot 48, \quad 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26,$$
$$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39, \quad 14 \cdot 82 = 41 \cdot 28, \quad 23 \cdot 64 = 32 \cdot 46, \quad 23 \cdot 96 = 32 \cdot 69,$$
$$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36, \quad 24 \cdot 84 = 42 \cdot 48, \quad 26 \cdot 93 = 62 \cdot 39, \quad 34 \cdot 86 = 43 \cdot 68,$$
$$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48, \quad 46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$$

Pythagoreische Zahlen

Ein bequemes und sehr genaues Verfahren, das von Landvermessern zur Absteckung senkrechter Linien im Gelände benutzt wird, besteht in folgendem.
Es soll beispielsweise im Punkt A, der auf der Geraden MN liegt, eine Senkrechte errichtet werden.



Man steckt von A aus längs der gegebenen Geraden irgendeine Entfernung a dreimal hintereinander ab und bezeichnet den gefundenen Punkt mit B. Dann knüpft man in eine Schnur regelmäßig Knoten, die jeweils den Abstand a voneinander haben.
Die ganze Leine muss 3 + 4 + 5 = 12 solcher Längeneinheiten enthalten. Legt man dann die Leine so um die Pflöcke in A und B, wie es die Abbildung zeigt, so bildet die Leine ein Dreieck, in dem der Winkel bei A rechtwinklig ist.

Dieses antike Verfahren, das schon vor Jahrtausenden von den Erbauern der ägyptischen Pyramiden angewendet wurde, beruht darauf, dass jedes Dreieck, dessen Seiten sich wie 3 : 4 : 5 verhalten, entsprechend dem bekannten Satz des Pythagoras rechtwinklig ist, da $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist.
Außer den Zahlen 3, 4, 5 existiert bekanntlich eine unzählige Vielfalt ganzer positiver Zahlen a, b, c, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Sie werden pythagoreische Zahlen genannt. Entsprechend dem Satz des Pythagoras können solche Zahlen als Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen; deshalb nennt man die Seiten a und b Katheten und die Seite c Hypotenuse.

Nun ist leicht einzusehen, dass, wenn a, b und c drei pythagoreische Zahlen sind, auch pa, pb, pc, wobei p ein ganzzahliger Faktor ist, pythagoreische Zahlen sind.

Umgekehrt gilt: Haben die pythagoreischen Zahlen einen gemeinsamen Faktor, so kann man sie alle durch diesen gemeinsamen Faktor kürzen. Es ergeben sich dann wieder drei pythagoreische Zahlen.

Aus diesem Grunde werden wir anfangs nur solche Dreiergruppen untersuchen, die untereinander teilerfremd sind, d. h. Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben. (Die übrigen pythagoreischen Zahlen ergeben sich ja durch Multiplikation mit einem ganzzahligen Faktor p.)

Wir wollen nun zeigen, dass in jeder solchen Dreiergruppe von Zahlen jeweils eine Zahl, die einer Kathete entspricht, geradzahlig sein muss, während die Zahl, die der anderen Kathete entspricht, ungeradzahlig sein muss.
Wir führen diese Untersuchung indirekt. Wären die Zahlen a und b, die den Katheten entsprechen, beide geradzahlig, so wäre auch die Zahl $a^2 + b^2$ geradzahlig. Dann ist aber auch die Zahl c geradzahlig, was hier nicht bewiesen werden soll. Das widerspricht jedoch dem, dass die Zahlen a, b, c keine gemeinsamen Teiler haben, da drei gerade Zahlen den gemeinsamen Teiler 2 haben. Somit muss wenigstens eine der Zahlen a, b und c eine ungerade Zahl sein.

Die Annahme, dass die Zahlen a und b, die den Katheten entsprechen, beide ungeradzahlig sind, und die Zahl c, die der Hypotenuse entspricht, geradzahlig ist, führt ebenfalls auf einen Widerspruch.
Die Zahlen a und b haben dann nämlich die Form $2x + 1$ bzw. $2y + 1$, und für die Summe der Quadrate ergibt sich:

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2$$

Das Quadrat stellt eine Zahl dar, die bei der Division durch 4 den Rest 2 ergibt, während das Quadrat einer geraden Zahl doch durch 4 teilbar ist. Die Zahl c ist also nicht gerade. Also ist von den Zahlen, die den "Katheten" a und b entsprechen, eine gerade, und die andere ungerade. Deshalb ist auch die Zahl $(a^2 + b^2)$ ungerade und folglich auch die Zahl c, die der Hypotenuse entspricht. Für die weiteren Erörterungen wollen wir nun festlegen, dass die Zahl a ungeradzahlig und die Zahl b geradzahlig ist.

Aus der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erhalten wir

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

Die Faktoren $(c + b)$ und $(c - b)$, die auf der rechten Seite stehen, sind teilerfremd.
Ja, wenn diese Faktoren einen gemeinsamen Primteiler hätten, so würde sich auch die Summe

$$(c + b) + (c - b) = 2c$$

durch diesen Teiler teilen lassen. Dann hätten aber auch die Differenz

$$(c + b) - (c - b) = 2b \qquad \text{und das Produkt} \qquad (c + b)(c - b) = a^2$$

einen gemeinsamen Teiler.

Da er ungeradzahlig ist, ist dieser Teiler ungleich 2, und deshalb haben die Zahlen a, b, c diesen gemeinsamen Teiler, was aber nicht sein kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Zahlen $(c+b)$ und $(c-b)$ teilerfremd sind.

Ist aber das Produkt gegenseitig teilerfremder Zahlen ein vollständiges Quadrat, so ist jede dieser Zahlen ein Quadrat, d. h.

$$c+b=m^2 \qquad , \qquad c-b=n^2$$

Dieses Gleichungssystem führt auf:

$$c=\frac{m^2+n^2}{2} \qquad \text{und} \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2}$$

$$a^2=(c+b)(c-b)=m^2n^2 \qquad , \qquad a=mn$$

Also haben die betrachteten pythagoreischen Zahlen die Form

$$a=m\cdot n, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2}, \qquad c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

wobei m und n gegenseitig teilerfremde ungerade Zahlen sind. Umgekehrt kann man nun sagen:
Sind m und n zwei teilerfremde ungerade Zahlen, so erhält man beim Einsetzen in die oben angeführten Formeln drei pythagoreische Zahlen a, b und c.

Als Beispiel werden wir einige Dreiergruppen von pythagoreischen Zahlen durch Einsetzen ermitteln.

für $m=3, n=1$:	$3^2+4^2=5^2$,	für $m=5, n=1$:	$5^2+12^2=13^2$,
für $m=7, n=1$:	$7^2+24^2=25^2$,	für $m=9, n=1$:	$9^2+40^2=41^2$,
für $m=11, n=1$:	$11^2+60^2=61^2$,	für $m=13, n=1$:	$13^2+84^2=85^2$,
für $m=5, n=3$:	$15^2+8^2=17^2$,	für $m=7, n=3$:	$21^2+20^2=29^2$,
für $m=11, n=3$:	$33^2+56^2=65^2$,	für $m=13, n=3$:	$39^2+80^2=89^2$,
für $m=7, n=5$:	$35^2+12^2=37^2$,	für $m=9, n=5$:	$45^2+28^2=53^2$,
für $m=11, n=5$:	$55^2+48^2=73^2$,	für $m=13, n=5$:	$65^2+72^2=97^2$,
für $m=9, n=7$:	$63^2+16^2=65^2$,	für $m=11, n=7$:	$72^2+36^2=85^2$.

(Alle übrigen Dreiergruppen pythagoreischer Zahlen haben entweder gemeinsame Faktoren oder enthalten Zahlen, die größer als 100 sind.)

Die pythagoreischen Zahlen weisen überhaupt eine Reihe interessanter Besonderheiten auf, die wir im folgenden ohne Beweise nur erwähnen wollen:

1. Eine der Zahlen, die den Katheten entsprechen, ist ein Vielfaches von 3.

2. Eine der Zahlen, die den Katheten entsprechen, ist ein Vielfaches von 4.

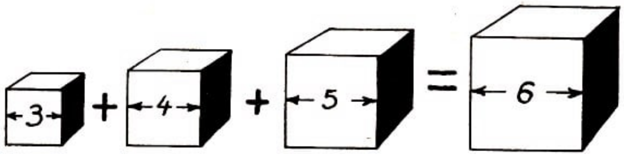
3. Eine der pythagoreischen Zahlen ist ein Vielfaches von 5.

Die Richtigkeit dieser Aussagen kann man an den oben angeführten Beispielen von

Dreiergruppen pythagoreischer Zahlen überprüfen.

Diophantische Gleichungen dritten Grades

Die Summe der dritten Potenzen dreier ganzer Zahlen kann die dritte Potenz einer vierten Zahl sein, z. B.: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Das bedeutet unter anderem, dass ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm das gleiche Volumen hat wie drei Würfel, von denen je einer die Kantenlänge 3 cm, 4 cm bzw. 5 cm hat.



Mit diesem Ergebnis soll sich nach einer Überlieferung bereits der griechische Philosoph Platon beschäftigt haben.

Versuchen wir auch in diesem Fall weitere Zahlengruppen mit dieser Eigenschaft zu finden.
Wir stellen uns also die Aufgabe, Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ zu ermitteln. Bequemer aber ist es, die Unbekannte u mit $-t$ zu bezeichnen. Dann erhält die Gleichung die einfachere Form $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$.

Beschäftigen wir uns mit dem Verfahren, mit dessen Hilfe wir die vielen Lösungen dieser Gleichung finden können. Für die Werte sollen ganze (positive und negative) Zahlen in Frage kommen. Mögen a, b, c, d und α, β, γ, δ zwei Vierergruppen von Zahlen sein, die die Gleichung erfüllen.
Wir fügen den Zahlen der ersten Vierergruppe die Zahlen der zweiten Vierergruppe hinzu, multipliziert mit einer gewissen Zahl k, und bemühen uns, die Zahl k so zu wählen, dass die entstandenen Zahlen $a+k\alpha$, $b+k\beta$, $c+k\gamma$, $d+k\delta$ ebenfalls unsere Gleichung erfüllen. Mit anderen Worten, wir wählen k so, dass die Gleichung

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\gamma)^3 + (d + k\delta)^3 = 0$$

entsteht.
Wir multiplizieren die Klammern aus. Bedenken wir nun, dass die Vierergruppen a, b, c, d und α, β, γ, δ diese Gleichung erfüllen, d.h. also, dass gilt

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0 \qquad ; \qquad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0$$

so erhalten wir:

$$3a^2k\alpha + 3ak^2\alpha^2 + 3b^2k\beta + 3bk^2\beta^2 + 3c^2k\gamma + 3ck^2\gamma^2 + 3d^2k\delta + 3dk^2\delta^2 = 0$$

oder

$$3k[(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta) + k(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2)] = 0$$

Ein Produkt kann nur in dem Fall gleich Null sein, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Wir setzen nacheinander jeweils einen Faktor gleich Null und erhalten zwei Werte für k. Der erste Wert, $k = 0$, interessiert uns nicht.

Er besagt: Wenn man den Zahlen a, b, c, d nichts hinzufügt, so genügen die entstandenen Zahlen unserer Gleichung.
Deshalb nehmen wir nur den zweiten Wert für k:

$$k = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}$$

Kennt man also zwei Vierergruppen von Zahlen, die die Ausgangsgleichung erfüllen, so kann man eine neue Vierergruppe ermitteln. Dabei muss man den Zahlen der ersten Vierergruppe die Zahlen der zweiten Vierergruppe hinzufügen, die mit k multipliziert wurden, wobei k den oben erwähnten Wert hat.

Um dieses Verfahren anwenden zu können, muss man zwei Vierergruppen von Zahlen kennen, die die Ausgangsgleichung erfüllen. Eine solche Vierergruppe $(3, 4, 5, -6)$ kennen wir schon. Woher noch eine Vierergruppe nehmen?
Es ist einfach, den Ausweg aus dieser Lage zu finden: Als zweite Vierergruppe kann man die Zahlen $r, -r, s, -s$ nehmen, die die Ausgangsgleichung offensichtlich erfüllen. Das heißt also, das uns folgende Werte zur Verfügung stehen:

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = -6; \qquad \alpha = r, \quad \beta = -r, \quad \gamma = s, \quad \delta = -s$$

Dann erhalten wir für k, wie leicht zu ersehen ist, den Wert

$$k = -\frac{-7r - 11s}{7r^2 - s^2} = \frac{7r + 11s}{7r^2 - s^2}$$

und für die Zahlen $a + k\alpha$, $b + k\beta$, $c + k\gamma$, $d + k\delta$ erhalten wir die Werte:

$$\frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{7r^2 - s^2} \quad ; \quad \frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{7r^2 - s^2}$$
$$\frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{7r^2 - s^2} \quad ; \quad \frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{7r^2 - s^2}$$

Gemäß dem vorher Gesagten erfüllen diese vier Ausdrücke die Ausgangsgleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$$

Da alle diese Werte den gleichen Nenner besitzen, so kann man ihn beseitigen (d.h., die Zähler dieser Brüche erfüllen ebenfalls die betrachtete Gleichung). Die aufgeschriebenen Gleichungen erfüllen somit (bei beliebigem r und s) folgende Zahlen:

$$x = 28r^2 + 11rs - 3s^2$$
$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2$$
$$z = 35r^2 + 7rs + 6s^2$$
$$t = -42r^2 - 7rs - 5s^2$$

Indem man diese Zahlen in die dritte Potenz erhebt und die Glieder addiert, kann man sich von der Richtigkeit dieser Aussage überzeugen. Geben wir r und s verschiedene ganze Werte, können wir eine ganze Reihe ganzzahliger Lösungen unserer Gleichung erhalten. Haben die entstehenden Zahlen einen gemeinsamen Faktor, so kann man diese Zahlen durch diesen Faktor dividieren.

Im Falle $r = 1$, $s = 1$ erhalten wir beispielsweise für x, y, z und t folgende Werte: 36, 6, 48, -54, oder, wenn man durch 6 kürzt: 6, 1, 8, -9.
Somit ist $6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3$.

Hier noch eine Reihe von Gleichungen desselben Typs, die nach dem Kürzen durch einen gemeinsamen Faktor entstehen:

$$\begin{array}{ll}
\text{für } r = 1, s = 2, & 38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3, \\
\text{für } r = 1, s = 3, & 173^+55^3 = 24^3 + 54^3, \\
\text{für } r = 1, s = 5, & 4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3, \\
\text{für } r = 1, s = 4, & 8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3, \\
\text{für } r = 1, s = -1, & 7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3, \\
\text{für } r = 1, s = -2, & 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3, \\
\text{für } r = 2, s = -1, & 29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3
\end{array}$$

Wenn wir in der Ausgangsvierergruppe 3, 4, 5, -6 oder in einer der neu entstandenen Vierergruppen die Stellen der Zahlen vertauschen und das gleiche Verfahren anwenden, erhalten wir eine neue Lösungsserie.

Nehmen wir z. B. die Vierergruppe 3, 5, 4, -6 (d. h., wir setzten $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, $d = -6$ voraus), so erhalten wir für x, y, z und t die Werte:

$$\begin{aligned}
x &= 20r^2 + 10rs - 3s^2, \\
y &= 12^2 - 10rs - 5s^2, \\
z &= 16r^2 + 8rs + 6s^2, \\
t &= -24r^22 - 8rs - 4s^2
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir bei verschiedenem r und s eine Reihe neuer Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{für } r = 1, s = 1, & 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3, \\
\text{für } r = 1, s = 3, & 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3, \\
\text{für } r = 1, s = 5, & 5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3, \\
\text{für } r = 1, s = 6, & 7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3, \\
\text{für } r = 2, s = 1, & 23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3, \\
\text{für } r = 1, s = -3, & 3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3
\end{array}$$

Auf diesem Wege kann man eine Vielfalt von Lösungen der betrachteten Gleichung erhalten.

Einhunderttausend für den Beweis eines Satzes

Eine Aufgabe aus dem Gebiet der diophantischen Gleichungen erlangte aufsehenerregende Berühmtheit, da für ihre richtige Lösung ein ganzes Vermögen ausgesetzt war: 100000 Mark!

Die Aufgabe besteht darin, den Beweis für die folgende Behauptung des französischen Mathematikers Pierre Fermat[12] zu erbringen:

Die Summe zweier ganzer Zahlen gleicher Potenz kann nicht die gleiche Potenz irgendeiner dritten ganzen Zahl sein. Eine Ausnahme stellt nur die zweite Potenz dar, für die das möglich ist.

Mit anderen Worten, man muss beweisen, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$, wobei x^n, y^n und z^n ganze Zahlen sind, für $n > 2$ unlösbar ist.
Erläutern wir noch einmal den Sachverhalt:

Wir sahen, dass die Gleichungen $x^2 + y^2 = z^2$ und $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ viele ganzzahlige Lösungen haben. Versuchen Sie aber, drei ganze positive Zahlen zu ermitteln, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ erfüllbar wäre; Ihr Suchen bliebe nutzlos.
Der gleiche Misserfolg erwartet Sie auch bei der Suche nach Beispielen für die vierte, fünfte, sechste und für höhere Potenzen.
Fermat behauptet nun, dass es unmöglich ist, Beispiele zu finden. Allerdings ist diese Aussage noch nicht bewiesen, obwohl inzwischen drei Jahrhunderte vergangen sind, seitdem sie von Fermat formuliert wurde.

Berühmte Mathematiker arbeiteten an diesem Problem. Im besten Falle gelang es ihnen aber nur, die Behauptung für diesen oder jenen einzelnen Exponenten oder für eine Exponentengruppe zu beweisen. Notwendig ist es jedoch, den allgemeinen Beweis für jeden ganzen Exponenten zu finden.
Besonders interessant ist auch der Umstand, dass ein Beweis angeblich schon einmal gefunden war. Und zwar soll Pierre Fermat selbst einen Beweis für seine Vermutung gefunden haben. Fermat schrieb seine mathematischen Entdeckungen häufig nur in Form von Notizen auf die Ränder von Büchern, in denen er gerade las.

Auch die Annahme, dass die Summe zweier ganzer Zahlen gleicher Potenz nicht die gleiche Potenz einer dritten Zahl sein kann, schrieb er auf einen solchen Buchrand, und zwar in einem Werk von Diophantos. Er fügte dann den folgenden Satz hinzu:

"Ich habe hierfür einen Wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen."

Weder in den Papieren des großen Mathematikers noch in seiner Abschrift, überhaupt nirgendwo an anderer Stelle, gelang es, Spuren dieses Beweises zu finden.
Die Nachfolger Fermats mussten einen selbständigen Weg gehen. Hier die Resultate ihrer Anstrengungen:

Euler bewies 1797 den Fermatschen Satz für die dritte und vierte Potenz, für die fünfte Potenz bewies ihn Legendre 1833, für die siebente Lamé und Lebesgue 1840.[13]

[12] Pierre Fermat (1603-1665) war kein Berufsmathematiker. Der Ausbildung nach Jurist und Parlamentsrat, beschäftigte er sich mit mathematischen Forschungen nur nebenbei. Trotzdem verdanken wir ihm eine beträchtliche Anzahl von äußerst wichtigen Erkenntnissen auf dem Gebiet der Mathematik. Er veröffentlichte seine Arbeiten jedoch nicht, sondern teilte sie nach Sitte der damaligen Zeit in Briefen seinen gelehrten Freunden Pascal, Descartes, Huygens, Roberval u. a. mit.

[13] Für zusammengesetzte Exponenten (außer 4) wird kein besonderer Beweis gefordert.

1849 bewies Kummer den Satz für eine weitläufige Gruppe von Potenzen und, unter anderem, für alle Exponenten kleiner als 100. Diese letzten Arbeiten gehen weit über die Grenzen des Gebietes der Mathematik hinaus, das Fermat bekannt war, und es ist rätselhaft, wie letzterer den allgemeinen Beweis seines "großen Satzes" finden konnte.

5 Die sechste Grundrechenoperation

Für die Addition und die Multiplikation gibt es je eine Umkehroperation, die Subtraktion bzw. die Division. Die fünfte Grundrechenoperation, das Potenzieren, hat zwei Umkehroperationen: Das Ermitteln der Basis und das Ermitteln des Exponenten.

Das Suchen der Basis ist die sechste Grundrechenoperation und heißt Radizieren. Das Suchen des Exponenten ist die siebente Grundrechenoperation und wird Logarithmieren genannt. Der Grund dafür, dass das Potenzieren im Gegensatz zur Addition und Multiplikation zwei Umkehroperationen hat, ist unschwer zu verstehen:

Bei der Addition kann man die Summanden vertauschen. Das gilt auch für die Multiplikation. In einer Potenz kann man jedoch nicht die Basis und den Exponenten gegeneinander austauschen. So gilt beispielsweise $3^5 \neq 5^3$.

In einer Summe kann man also jeden Summanden nach dem gleichen Verfahren ermitteln, nämlich durch die Subtraktion. In einem Produkt lässt sich jeder Faktor nach dem gleichen Verfahren, nämlich durch die Division, ermitteln. In einer Potenz wird jedoch der Exponent anders ermittelt als die Basis.

Die sechste Grundrechenoperation, das Radizieren, wird mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ angedeutet. Nicht alle wissen, dass das eine Formveränderung des lateinischen Buchstabens "r" ist, des Anfangsbuchstabens in einem lateinischen Wort, das "Wurzel" bedeutet[14].
Im 16. Jahrhundert wurde als Wurzelzeichen nicht der kleine, sondern der große Buchstabe "R" benutzt. Daneben wurde dann der erste Buchstabe der lateinischen Wörter "quadratisch" (q) oder "kubisch" (c) geschrieben, um anzuzeigen, welche Wurzel gemeint ist, die Quadratwurzel oder die Kubikwurzel.
Man schrieb z.B. R. q. 4352 an Stelle der heutigen Bezeichnung $\sqrt{4352}$.

Berücksichtigt man nun noch, dass in dieser Zeit die heutigen Zeichen für "plus" und "minus" noch nicht in allgemeinen Gebrauch gekommen waren, sondern an ihrer Stelle die Buchstaben p. und m. verwendet wurden, und dass unsere Klammern durch die Zeichen $\lfloor$ und $\rfloor$ ersetzt wurden, so wird klar, welches für das moderne Auge ungewöhnliche Aussehen die algebraischen Ausdrücke damals haben mussten.
Hier ein Beispiel aus dem Buch des italienischen Mathematikers Rafael Bombelli aus dem Jahre 1572:

$$\text{R. c. } \lfloor \text{ R. q. 4352 p. 16 } \rfloor \text{ m. R. c. } \lfloor \text{ R. q. 4352 m. 16 } \rfloor$$

Wir würden diese Zeile heute folgendermaßen schreiben:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}$$

Außer der Bezeichnung $\sqrt[n]{a}$ wird jetzt für die gleiche Operation auch noch eine andere verwendet, $a^{\frac{1}{n}}$, eine im Sinne der Verallgemeinerung äußerst bequeme Bezeichnung:

[14] radix (lat.), Wurzel.

Sie unterstreicht anschaulich, dass jede Wurzel nichts anderes ist als eine Potenz, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist. Sie wurde von dem bedeutenden holländischen Mathematiker des 16. Jahrhunderts Simon Stevin eingeführt.

Was ist größer?

In den folgenden Aufgaben soll jeweils von zwei Wurzeln entschieden werden, welche größer ist, und zwar soll die Frage beantwortet werden, ohne dass die Wurzeln ausgerechnet werden.

1. Aufgabe: Welche Zahl ist größer: $\sqrt[5]{5}$ oder $\sqrt{2}$?

Lösung: Wir erheben beide Wurzeln in die zehnte Potenz und erhalten:

$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10} = 5^2 = 25; \qquad \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32$$

Da $32 > 25$, gilt auch: $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.

2. Aufgabe: Welche Zahl ist größer: $\sqrt[4]{4}$ oder $\sqrt[7]{7}$?

Lösung: Wir erheben beide Wurzeln in die 28. Potenz und erhalten:

$$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \cdot 2^7 = 128^2; \qquad \left(\sqrt[7]{7}\right)^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2$$

Da $128 > 49$ ist, gilt auch $\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}$.

3. Aufgabe: Welche Summe ist größer, $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ oder $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Lösung: Haben wir beide Ausdrücke quadriert, so erhalten wir

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70} \qquad \text{und} \qquad (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}$$

Wir subtrahieren in beiden Werten 17. Dann verbleiben $2\sqrt{70}$ bzw. $5 + 2\sqrt{57}$. Wir quadrieren nun diese Ausdrücke:

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 \qquad ; \qquad (5 + 2\sqrt{57})^2 = 253 + 20\sqrt{57}$$

Wir subtrahieren jeweils 253 und erhalten dann 27 bzw. $20\sqrt{57}$. Da $\sqrt{57}$ größer als 2 ist, so ist $20\sqrt{57} > 40$; folglich ist $\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}$.

Auf einen Blick zu lösen

Aufgabe: Betrachten Sie aufmerksam die Gleichung $x^{x^3} = 3$, und nennen Sie einen gültigen Wert für x!

Lösung: Jeder, der sich gut an die algebraischen Symbole gewöhnt hat, erfasst, dass $x = \sqrt[3]{3}$ ist.
In diesem Fall ist nämlich $x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3$, und folglich ist $x^{x^3} = x^3 = 3$, was auch gefordert war.
Wer dieser "Lösung auf einen Blick" nicht gewachsen ist, kann sich die Suche nach der Unbekannten auf folgende Weise erleichtern.

Möge $x^3 = y$ sein. Dann ist $x = \sqrt[3]{y}$ und die Gleichung erhält die Form $\left(\sqrt[3]{y}\right)^y = 3$. Wenn wir nun die Gleichung in die dritte Potenz erheben, so erhalten wir: $y^y = 3^3$. In diesem Fall ist sicher $y = 3$ und folglich $x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}$.

Wo steckt der Fehler?

Recht interessant sind Aufgaben, die in der Lösung einen getarnten Fehler enthalten und dann zu erstaunlichen Fehlaussagen führen. Auf diese Weise wird dem Unkundigen z. B. "nachgewiesen", dass $2 \cdot 2 = 5$ ist.
Die sechste Grundrechenoperation eignet sich nun ganz besonders gut für solche "getarnten Fehler". Betrachten wir einen solchen Fall, in dem es heißt: Es ist $2 = 3$.

Man beginnt mit der unbestreitbaren Gleichheit:

$$4 - 10 = 9 - 15$$

Wir addieren nun auf beiden Seiten der Gleichung den Bruch $6\frac{1}{4}$:

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$$

Nun soll die Gleichung umgeformt werden:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

Radiziert man auf beiden Seiten der Gleichung, so ergibt sich wohl

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

Nun wird noch auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{5}{2}$ addiert, und die sinnlose Form

$$2 = 3$$

ist erreicht. Worin verbirgt sich nun der Fehler?

Lösung: Der Fehler entstand bei folgendem Schritt: Es sollte in der Gleichung

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

die Quadratwurzel auf beiden Seiten gezogen werden. Man erhielt angeblich:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

Man kann jedoch nicht aus der Gleichheit zweier Quadrate auf die Gleichheit ihrer Quadratwurzeln schließen. Das zeigt schon folgender simpler Fall, dass zwar $(-5)^2$

gleich 5^2 ist, nicht aber -5 gleich 5.

Eine zweite Aufgabe dieser Art zeigt den eingangs erwähnten Fall $2 \cdot 2 = 5$. Wir führen hier nur den Rechengang an, und Sie suchen bitte selbst den Fehler heraus:

$$
\begin{aligned}
16 - 36 &= 25 - 45 \\
16 - 36 - 20\frac{1}{4} &= 25 - 45 + 20\frac{1}{4} \\
\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\
4 &= 5 \\
2 \cdot 2 &= 5
\end{aligned}
$$

Diese Fälle sollen einen unerfahrenen Mathematiker vor unbedachten Operationen mit Gleichungen, die eine Unbekannte unter dem Wurzelzeichen enthalten, warnen.

6 Gleichungen zweiten Grades

Der Händedruck

Aufgabe: Zu Beginn einer Sitzung begrüßten sich die Anwesenden durch Händedruck. Es wurden insgesamt 66 Händedrücke ausgetauscht. Wieviel Personen waren auf der Sitzung?

Lösung: Die Aufgabe wird mit algebraischen Mitteln gelöst. Jeder der x Teilnehmer drückte $x - 1$ Hände. Man müsste demzufolge annehmen, dass $x(x - 1)$ Händedrücke ausgetauscht wurden.
Dabei gilt es aber zu beachten, dass, wenn Iwanow die Hand Petrows drückt, so drückt auch Petrow die Hand Iwanows. Diese beiden Händedrücke muss man als einen rechnen. Deshalb erhalten wir die Hälfte der Händedrücke, die das Produkt $x \cdot (x^-1)$ ergibt. Wir gewinnen so die Gleichung

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

die wir gleich noch etwas vereinfachen:

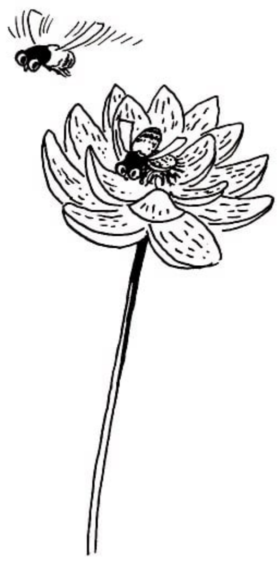
$$x^2 - x - 132 = 0$$

Daraus erhalten wir:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{528}{4}} \qquad \text{mit} \qquad x_1 = 12 \quad \text{und} \quad x_2 = -11$$

Da die negative Lösung (-11 Personen) dieser quadratischen Gleichung im gegebenen Falle keinen Sinn hat, kommt nur die erste in Betracht: An der Sitzung nahmen 12 Menschen teil.

Der Bienenschwarm



Aufgabe: Im alten Indien war eine eigenartige Sportart verbreitet - öffentliche Wettbewerbe in der Lösung komplizierter Aufgaben. Die indischen mathematischen Handbücher hatten teilweise das Ziel, als Unterstützung für solche Wettbewerbe um die Meisterschaft im Denksport zu dienen. Der Verfasser eines dieser Lehrbücher schrieb folgendes:

"Nach den hier angeführten Regeln kann sich der Weise tausend andere Aufgaben ausdenken. Wie die Sonne mit ihrem Schein die Sterne überstrahlt, so stellt auch der gelehrte Mensch den Ruhm eines anderen in den Volksversammlungen in den Schatten, stellt und löst er algebraische Aufgaben."

In der Originalschrift ist das poetischer ausgedrückt, da das ganze Buch in Versen geschrieben ist. Die Aufgaben waren auch in Gedichtform gehalten. Wir führen eine von ihnen in prosaischer Übertragung an.

"Bienen von der Zahl, gleich der Quadratwurzel der Hälfte ihres gesamten Schwarmes, setzten sich auf einen Jasminstrauch und ließen $\frac{8}{9}$ des Schwarmes zurück. Und nur eine Biene desselben Schwarmes kreist um eine Lotosblume, angelockt vom Gesumm einer Freundin, die unvorsichtigerweise in die Falle der süß duftenden Blüte geriet.
Wieviel Bienen waren insgesamt im Schwarm?"

Lösung: Bezeichnet man die Anzahl der Bienen, aus denen der Schwarm bestand, mit x, so hat die Gleichung die Form

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$$

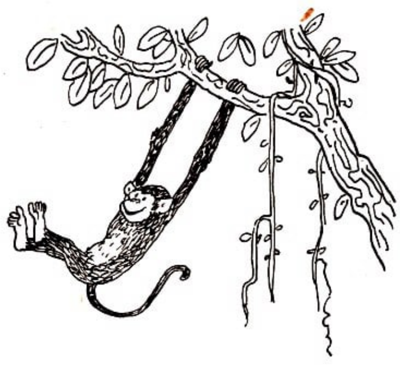
Wir können ihr eine einfachere Form geben, wenn wir die Hilfsunbekannte $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ einführen. Dann ist $x = 2y^2$, und es entsteht die Gleichung:

$$y + \frac{16}{9}y^2 + 2 = 2y^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2y^2 - 9y - 18 = 0$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir die beiden Werte $y_1 = 6$ und $y_2 = -\frac{3}{2}$. Die entsprechenden Werte für x sind dann: $x_1 = 72$ bzw. $x_2 = 4,5$.
Da die Anzahl der Bienen ganzzahlig, positiv sein muss, kann nur die erste Wurzel als Lösung der Aufgabe angesehen werden: Der Schwarm bestand aus 72 Bienen. Überprüfen wir dieses Ergebnis:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \cdot 72 = +2 = 6 + 64 + 2 = 72$$

Eine Affenherde



Eine andere indische Aufgabe, die, in die russische Sprache übersetzt, in dem Büchlein 'Wer erfand die Algebra?' von W. I. Lebedew zu finden ist, lautet folgendermaßen:

"Kurzweil trieben Affen, die in zwei Parteien aufgeteilt waren. Der achte Teil zum Quadrat tummelte sich fröhlich im Gehölz, während 12 Affen die frische Luft mit ihrem Geschrei erfüllten. Sag mir, wieviel Affen dort insgesamt waren!"

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Affen zunächst mit x, dann gilt:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Daraus erhält man als Lösungen $x_1 = 48$ und $x_2 = 16$.
Die Aufgabe hat zwei positive Lösungen: In der Herde könnten entweder 48 oder 16 Affen sein. Beide Antworten werden der Aufgabe gerecht.

Die Voraussicht der Gleichungen

In den drei letzten Aufgaben verfügten wir über die jeweils entstandenen zwei Lösungen der Gleichungen unterschiedlich. Wir machten die Brauchbarkeit der Lösungen von den Bedingungen der Aufgabe abhängig. Im ersten Falle verwerten wir die negative Lösung als dem Inhalt der Aufgabe nicht entsprechend, im zweiten Falle lehnten wir den Bruch ab, in der dritten Aufgabe dagegen erkannten wir beide Lösungen an.
Die Existenz einer zweiten Lösung erweist sich manchmal als echte Überraschung, nicht nur für denjenigen, der die Aufgabe löst, sondern auch für den Verfasser dieser Aufgaben. Wir führen ein Beispiel an, wo sich die Gleichung weitsichtiger als der erweist, der sie aufstellte.

"Ein Ball wurde mit einer Geschwindigkeit von 25 m $\cdot$ s^{-1} senkrecht in die Höhe geworfen. In wieviel Sekunden wird er in einer Höhe von 20 m über der Erde sein?"

Lösung: Für den senkrechten Wurf nach oben lautet die Formel

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}$$

wobei h die erreichte Höhe des Körpers über der Erde ist, v die Anfangsgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung und t die benötigte Zeit zum Steigen. (Der Luftwiderstand wird in dieser Formel nicht berücksichtigt.)
Den Luftwiderstand können wir im gegebenen Falle außer acht lassen, da er bei unbedeutenden Geschwindigkeiten nicht so groß ist. Um die Berechnung zu vereinfachen, setzen wir g nicht gleich 9,8 m $\cdot$ s^{-2}, sondern 10 m $\cdot$ s^{-2} (der Fehler beträgt 2%). Haben wir in die angeführte Formel die Werte h, v und g eingesetzt, so erhalten wir

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2} \qquad \text{und nach Umformung} \qquad t^2 - 5t + 4 = 0$$

Als Lösungen erhalten wir $t_1 = 1$ und $t_2 = 4$.

Der Ball wird demnach zweimal in der Höhe von 20 m sein: 1 Sekunde nach dem Werfen und 4 Sekunden nach dem Werfen.

Kann das möglich sein? Ein voreiliger Rechner würde vielleicht überlegen, welche Lösung er ausschließen soll. Aber es ist nicht an dem, beide Lösungen sind berechtigt.
Der Ball befindet sich tatsächlich an zwei Zeitpunkten in dieser Höhe, einmal beim Aufstieg und das zweite Mal beim Zurückfallen. Es ist leicht zu errechnen, dass der Ball bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 25 m in der Sekunde 2,5 Sekunden lang hoch fliegt und die Höhe 31,25 m erreicht. Hat er nach einer Sekunde die Höhe 20 m erreicht, wird der Ball noch 1,5 Sekunden steigen. Dann fällt er in der gleichen Zeit bis zum Stand von 20 m wieder hinunter und erreicht nach einer weiteren Sekunde die Erde.

Eine Aufgabe von Euler

Zwei Bäuerinnen gingen zusammen auf den Markt, um Eier zu verkaufen. Beide hatten unterschiedliche Mengen mit, zusammen waren es 100 Eier, aber sie nahmen gleiche

Geldbeträge ein. Da sagte die erste zur zweiten: "Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer verdient."
Die zweite antwortete: "Und hätte ich deine Eier verkauft, so hätte ich an ihnen $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verdient."
Wieviel Eier besaß jede?

Lösung: Wenn die erste Bäuerin x Eier verkaufte, dann verkaufte die zweite $100-x$ Eier. Hätte aber die erste $100-x$ Eier verkauft, so hätte sie, wir wissen es, 15 Kreuzer verdient. Also verkaufte die erste Bäuerin Eier für den Preis von $\frac{15}{100-x}$ Kreuzer das Stuck.
Auf gleiche Weise ermitteln wir, dass die zweite Bäuerin die Eier für den Preis von $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$ Kreuzer das Stück verkaufte. Jetzt wird der tatsächliche Erlös jeder Bäuerin ermittelt.

Die erste Bäuerin verdiente: $x \cdot \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x}$ Kreuzer.
Die zweite Bäuerin verdiente: $(100-x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}$ Kreuzer.
Da der Verdienst beider gleich ist, so gilt:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}$$

Nach der Umformung lautet diese Gleichung

$$x^2 + 160x - 8000 = 0 \qquad \text{woraus man} \qquad x_1 = 40 \quad \text{und} x_2 = -200$$

ermittelt.
Die negative Wurzel hat im gegebenen Falle keinen Sinn. Die Aufgabe hat nur eine Lösung: die erste Bäuerin brachte 40 Eier und die zweite also 60.

Die Aufgabe kann noch nach einem anderen, weit kürzeren Verfahren gelöst werden. Dieses Verfahren ist bedeutend scharfsinniger, dafür ist es aber auch bedeutend schwerer zu finden.
Wir nehmen an, dass die zweite Bäuerin k mal soviel Eier besaß wie die erste. Sie verdienten die gleiche Summe; d. h., dass die erste Bäuerin ihre Eier k mal so teuer verkaufte wie die zweite. Hätten sie vor dem Handel die Eier getauscht, so hätte die erste Bäuerin k mal soviel Eier wie die zweite Bäuerin gehabt und sie k mal so teuer verkauft. Das heißt, sie hätte das k^2-fache im Vergleich zur zweiten Bäuerin eingenommen. Auf diese Weise erhalten wir

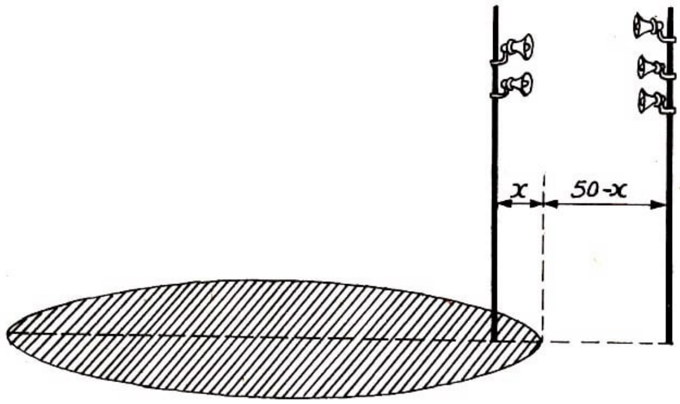
$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$$

woraus $k = \frac{3}{2}$ folgt.
Jetzt muss man noch die 100 Eier im Verhältnis 2 : 3 aufteilen. Wir ermitteln dann wieder, dass die erste Bäuerin 40 Eier besaß und die zweite 60 Eier.

Fünf Lautsprecher

Aufgabe: Auf einem Platz sind fünf Lautsprecher gleicher Leistung angebracht, und zwar befinden sich an einem Mast zwei Lautsprecher und an einem anderen drei Lautsprecher. Die Entfernung zwischen den Masten beträgt 50 m.

Wo muss man sich hinstellen, damit man die Übertragung aus beiden Gruppen von Lautsprechern mit gleicher Stärke hört?



Lösung: Wenn wir die Entfernung des gesuchten Punktes von dem Mast mit zwei Apparaten mit x bezeichnen, so wird dessen Entfernung vom Mast mit drei Lautsprechern durch $(50 - x)$ ausgedrückt. Da die Schallstärke proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt, gilt die Gleichung

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50 - x)^2}$$

und nach Umformung $x^2 + 200x - 5000 = 0$.
Als Lösungen dieser Gleichung finden wir $x_1 = 22,5$ und $x_2 = -222,5$.

Der positive Wurzelwert gibt sofort eine klare Antwort auf die Frage der Aufgabe: Der Punkt gleicher Hörbarkeit befindet sich 22,5 m von dem Mast mit zwei Lautsprechern und folglich 27,5 m von dem Mast mit drei Apparaten entfernt.
Aber was bedeutet der negative Wurzelwert der Gleichung?

Hat er einen Sinn? Ohne Zweifel. Das Minuszeichen bedeutet, dass der zweite Punkt gleicher Hörbarkeit entgegengesetzt der Richtung liegt, die im Falle des ersten Abstands bei Aufstellung der Gleichung angenommen wurde.
Legen wir also vom Standort des Mastes mit den beiden Apparaten in der geforderten Richtung 222,5 m zurück, so finden wir den Punkt, wo beide Lautsprechergruppen mit gleicher Stärke gehört werden. Von der Gruppe mit drei Apparaten ist dieser Punkt 222,5 m + 50 m = 272,5 m entfernt.

Von uns sind also zwei Punkte gleicher Hörbarkeit ermittelt worden. Beide liegen auf einer Geraden, die die Schallquellen verbindet. Andere Punkte dieser Art gibt es in dieser Richtung nicht, aber außerhalb von ihr sind sie vorhanden.
Man kann beweisen, dass der geometrische Ort von Punkten, die der Forderung unserer Aufgabe gerecht werden, ein Kreis ist, der durch beide eben ermittelte Punkte gezogen wird. Dieser Kreis begrenzt, wie wir sehen, eine genügend große Fläche (auf der Zeichnung gestrichelt), innerhalb derer die Hörbarkeit der Gruppe von zwei Lautsprechern stärker ist als die Hörbarkeit der Gruppe der drei Apparate. Außerhalb dieses Kreises wird die umgekehrte Erscheinung beobachtet. (Hierbei werden Lautsprecher zugrunde gelegt, die den Schall in alle Richtungen gleichmäßig ausstrahlen.)

Algebra des Mondfluges

Die eben betrachtete Aufgabe enthält, so unwahrscheinlich das auch klingen mag, gewisse Parallelen zum Problem des Mondflugs. Während es in der letzten Aufgabe Punkte gleicher Intensität des Schalls, der von zwei Erregern ausgeht, gab, gilt es in der folgenden Aufgabe über den Mondflug Punkte zu suchen, an denen die Anziehungskraft der Erde gleich der des Mondes ist.

Nach dem Newtonschen Gesetz ist die Kraft, mit der sich zwei Körper gegenseitig anziehen, direkt proportional dem Produkt der sich anziehenden Massen und indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen ihnen.
Ist die Masse der Erde M und die Entfernung der Rakete von ihr x, so wird die Kraft, mit der die Erde jedes Gramm der Raketenmasse anzieht, durch $\frac{Mk}{x^2}$ ausgedrückt, wobei k die Kraft der gegenseitigen Anziehung eines Gramms durch ein Gramm auf eine Entfernung von 1 cm ist.

Die Kraft, mit der der Mond jedes Gramm der Rakete in dem gleichen Punkt anzieht, ist gleich $\frac{mk}{(l-x)^2}$ wobei m die Mondmasse ist und l ihre Entfernung von der Erde (die Rakete wird als zwischen Erde und Mond, auf einer geraden Linie, die ihre Zentren verbindet, angenommen). Die Aufgabe fordert, dass

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}$$

ist. Aus der Astronomie ist bekannt, dass das Verhältnis $\frac{M}{m}$ annähernd gleich 81,5 ist. Wir setzen diese Zahl in die Gleichung ein:

$$81,5 = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}$$

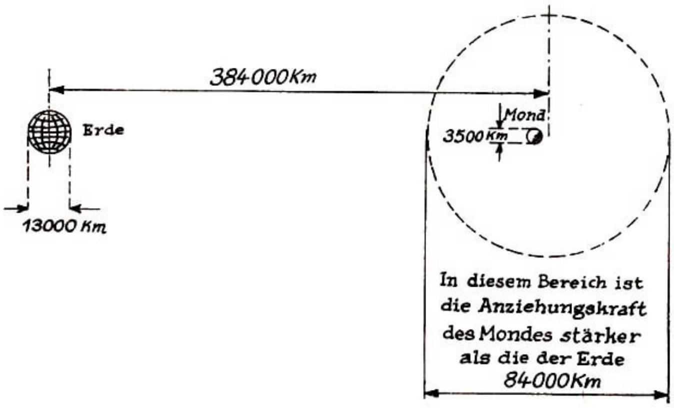
Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = 0,9l$ und $x_2 = 1,12l$.
Wie auch in der Aufgabe über die Lautsprecher, gelangen wir zu dem Schluss, dass auf der Linie Erde-Mond zwei Punkte vorhanden sind, in denen die Rakete von beiden Himmelskörpern mit gleicher Kraft angezogen wird.

Der eine Punkt befindet sich auf dem 0,9ten Teil der Entfernung zwischen ihnen, der andere auf dem 1,12ten Teil der gleichen Entfernung. Da der Abstand l zwischen den Zentren der Erde und des Mondes rund 384000 km beträgt, ist einer der gesuchten Punkte 346000 km vom Zentrum der Erde entfernt, der andere 430000 km.

Aber wir wissen (siehe vorige Aufgabe), dass über dieselben Eigenschaften auch alle Punkte des Kreises, der durch die zwei ermittelten Punkte wie durch die Endpunkte ;eines Durchmessers verläuft, verfügen. Drehen wir diesen Kreis um die Linie, die die Zentren der Erde und des Mondes verbindet, so beschreibt er eine Kugeloberfläche. Alle Punkte auf der Oberfläche werden den Anforderungen der Aufgabe gerecht. Der Durchmesser dieser Kugel ist gleich

$$1,12l - 0,9l = 0,22l \approx 84000 \text{ km}$$

Befindet sich nun die Rakete innerhalb dieser Kugel und verfügt sie nur über eine unbedeutende Geschwindigkeit, so fällt sie auf die Mondoberfläche zu, da die Anziehungskraft des Mondes in diesem Bereich stärker ist als die Anziehungskraft der Erde.



Eine schwierige Aufgabe

Auf einem Gemälde von Bogdanow-Belski mit dem Titel "Eine schwierige Aufgabe" wird ein Klassenzimmer in einer kleinen Landschule dargestellt. Der Lehrer hat eine Aufgabe an die Tafel geschrieben, und die Schüler sind eifrig bemüht, diese Aufgabe im Kopf zu lösen. Die Aufgabe ist tatsächlich recht schwierig. Es soll der Bruch

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^3 + 14^2}{365}$$

vereinfacht werden. Aber die Schüler sind an schwere Aufgaben gewöhnt. Ihr Lehrer ist S. A. Ratschinski, ein Professor der Naturwissenschaften, der seinen Universitätslehrstuhl verließ und an eine einfache Landschule als Lehrer ging.
Unter der geschickten Anleitung Ratschinskis lernten die Schüler auch besondere Eigenschaften von Zahlen kennen. Auch die Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 verfügen über eine interessante Besonderheit.
Es gilt nämlich

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Da außerdem $100+121+144 = 365$ ist, kann man die auf dem Bild geforderte Aufgabe tatsächlich recht schnell im Kopf lösen:

$$\frac{365 + 365}{365} = 2$$

Die Algebra gibt uns die Mittel, darüber hinaus die Frage zu klären, ob es noch andere aufeinanderfolgende Zahlen mit dieser interessanten Eigenschaft gibt oder ob das die einzige Folge von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist, von denen die Quadratsumme der ersten drei gleich der Quadratsumme der beiden letzten ist.

Lösung: Wir bezeichnen die erste der gesuchten Zahlen mit x und stellen die Gleichung

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2$$

auf. Etwas bequemer würden wir verfahren, wenn wir nicht die erste, sondern die zweite der gesuchten Zahlen mit x bezeichneten. Dann erhält die Gleichung die einfachere Form

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2$$

Wir lösen die Klammern auf und vereinfachen: $x^2 - 10x - 11 = 0$. Daraus erhält man

$$x = 5 \pm \sqrt{25+11} \qquad \text{mit den Lösungen} \qquad x_1 = 11 \quad \text{und} \quad x_2 = -1$$

Es existieren folglich zwei Zahlenfolgen, die über die geforderte Eigenschaft verfügen: die Folge 10, 11, 12, 13, 14 Ratschinskis und die Folge -2, -1, O, 1, 2.
Eine Überprüfung der letzten Zahlenfolge ergibt tatsächlich

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$$

Welche Zahlen erfüllen die folgende Bedingung?

Aufgabe: Es sind drei aufeinanderfolgende Zahlen zu finden, die sich dadurch unterscheiden, dass das Quadrat der mittleren um 1 größer ist als das Produkt der beiden übrigen.

Lösung: Ist die erste der gesuchten Zahlen x, so hat die Gleichung die Form

$$(x+1)^2 = x(x+2) + 1$$

Wir multiplizieren die Klammern aus und erhalten die Identität:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Das bedeutet, dass man für x jeden beliebigen Wert wählen kann, dass also jeder Wert x die Gleichung erfüllt.
Also, jegliche drei aufeinanderfolgende Zahlen erfüllen die geforderte Eigenschaft.

Überprüfen wir das an den Zahlen 17, 18 und 19. Es ist tatsächlich

$$18^2 - 17 \cdot 19 = 324 - 323 = 1$$

Man kann sich das Ergebnis unserer Untersuchung auch dadurch veranschaulichen, dass man die zweite Zahl mit x bezeichnet. Dann erhalten wir die Gleichheit:

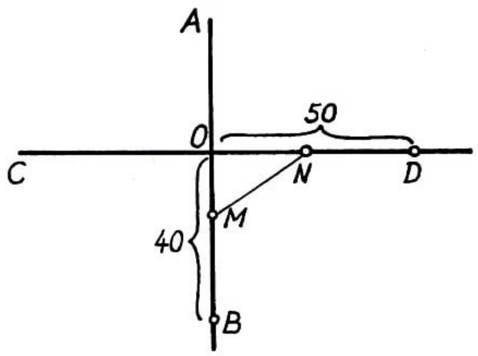
$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

7 Maximum- und Minimumwerte

Die in diesem Teil enthaltenen Aufgaben gehören zu der überaus interessanten Art von Aufgaben zur Untersuchung des Maximum- oder Minimumwertes einer gewissen Größe. Sie können nach verschiedenen Verfahren gelöst werden, von denen wir jetzt eine zeigen werden.

Zwei Züge

Aufgabe: Zwei geradlinig verlaufende Eisenbahnlinien kreuzen einander unter einem rechten Winkel. Dem Knotenpunkt fahren auf diesen Linien zwei Züge entgegen. Beide Züge sind gleichzeitig von Stationen abgefahren, die sich in einer Entfernung von 40 km auf der einen Strecke bzw. 50 km auf der anderen Strecke, gerechnet vom Kreuzungspunkt, befinden.
Der erste Zug legt 800 m in der Minute zurück, der zweite 600 m je Minute. Nach wieviel Minuten, vom Augenblick der Abfahrt an gerechnet, befanden sich die Züge in kleinster gegenseitiger Entfernung? Wie groß ist diese Entfernung?



Lösung: Wir zeichnen ein Schema über die Zugbewegungen in unserer Aufgabe. Mögen die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die einander kreuzenden Eisenbahnstrecken sein. Die Station B befindet sich 40 km vom Kreuzungspunkt O, die Station D sogar 50 km von O entfernt.

Wir setzen voraus, dass sich die Züge nach x Minuten in kürzester Entfernung $\overline{MN} = m$ voneinander befinden. Der Zug, der von B abfuhr, legte bis zu diesem Augenblick den Weg $\overline{BM} = 0,8x$ km zurück, da er mit einer Geschwindigkeit von 800 m · min^{-1} = 0,8 km · min^{-1} fährt.
Folglich ist $\overline{OM} = 40$ km $-0,8x$ km. Genauso finden wir auch, dass $\overline{ON} = 50$ km $-0,6x$ km ist. Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$\overline{MN} = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}$$

Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung und vereinfachen:

$$m^2 = (\sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2})^2$$
$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0$$

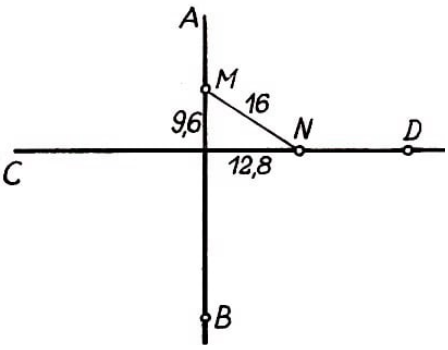
Wir lösen nach x auf und erhalten die Lösungen

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}$$

Da x als Anzahl der vergangenen Minuten nicht imaginär sein kann, so muss $m^2 - 256$ eine positive Größe sein oder im äußersten Falle gleich Null werden. Das letztere entspricht dem kleinsten möglichen Wert von m. In diesem Fall ist $m^2 = 256$ km^2, d. h. $m = 16$ km.

Offenbar kann m nicht kleiner als 16 km sein, sonst wird x eine imaginäre Zahl. Und wenn $m^2 - 256 = 0$ ist, so ist $x = 62$.
Also haben die Züge nach 62 Minuten ihren kürzesten Abstand. Ihre gegenseitige Entfernung beträgt dann 16 km.

Wir wollen nun noch berechnen, wie weit die Züge in diesem Moment noch vom Kreuzungspunkt entfernt sind. Der erste Zug hat zu dieser Zeit noch die Entfernung $\overline{OM} = 40$ km $62 \cdot 0,8$ km $= -9,6$ km vom Kreuzungspunkt.
Das Minuszeichen bedeutet, dass der Zug bereits 9,6 km über die Kreuzung hinaus gefahren ist. Die Entfernung $\overline{ON}$ ist gleich $\overline{ON} = 50$ km $-62 \cdot 0,6$ km $= 12,8$ km.
Der zweite Zug befindet sich also zu diesem Zeitpunkt noch 12,8 km vom Knotenpunkt entfernt. Die Stellung der Züge zum Zeitpunkt, an dem der kürzeste Abstand erreicht wird, veranschaulicht die Abbildung.

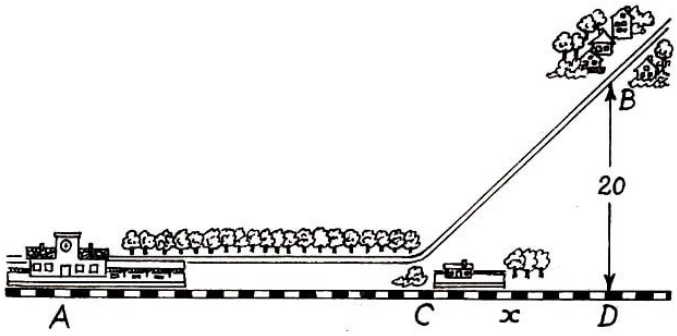


Wie wir sehen, stimmt diese Abbildung nicht mit der vorigen, in der wir zunächst eine Vermutung über den Bewegungsablauf niedergelegt haben, überein. Die Gleichung wurde natürlich nicht von diesem Irrtum beeinflusst, sondern lieferte uns das richtige Ergebnis, wonach wir die erste Darstellung korrigieren konnten.

Wo ist die Zwischenstation zu errichten?

Aufgabe: Abseits eines geradlinigen Streckenabschnitts einer Eisenbahnlinie, und zwar 20 km von ihr entfernt, liegt der Ort B. Zwischen A und D soll eine Station errichtet werden. Weiterhin ist eine Verbindungsstraße von dieser Station C zum Ort B geplant, so dass ein Omnibus die Fahrgäste, die mit dem Zug in C ankommen, zum Ort B bringen kann.
Der Zug fährt von A nach C mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 0,8 km $\cdot$ min^{-1}, der Bus auf der Chaussee von C nach B mit einer Geschwindigkeit von 0,2 km $\cdot$ min^{-1}.

Wo muss man die Station C anlegen, damit für die Reisenden von A nach B der geringste Zeitaufwand erforderlich ist?



Lösung: Wir bezeichnen die Entfernung $\overline{AD}$ (von A bis zum Fußpunkt des Lotes von B auf die Eisenbahnstrecke) mit a, $\overline{CD}$ mit x. Dann ist

$$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = a - x \qquad \text{und} \qquad \overline{CB} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{x^2 + 20}$$

Die Zeit, in der der Zug den Weg $\overline{AC}$ zurücklegt, ist (in Minuten):

$$\frac{\overline{AC}}{0,8} = \frac{a-x}{0,8}$$

Die Zeit, die der Bus von C nach B benötigt, beträgt (in Minuten):

$$\frac{\overline{CB}}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}$$

Insgesamt werden also für die Fahrt von A nach B (in Minuten) benötigt:

$$\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}$$

Diese Summe, die wir mit m bezeichnen wollen, soll ein Minimum werden. Die Gleichung, die wir damit erhalten,

$$\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2} = t$$

werden wir folgendermaßen umformen:

$$-\frac{x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2} = t - \frac{a}{0,8}$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 0,8:

$$-x + 4\sqrt{x^2+20} = 0,8t - a$$

Nun setzen wir $(0,8t-a) = k$ und quadrieren. Wir erhalten dann die quadratische Gleichung

$$15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0 \qquad , \qquad x^2 - \frac{2}{15}kx + \frac{6400}{15} - \frac{k^2}{15} = 0$$

mit den Lösungen

$$x = \frac{k}{15} \pm \sqrt{\frac{16k^2 - 96000}{15^2}}$$

Da $k = 0,8t - a$ ist, wird auch t am kleinsten, wenn k am kleinsten wird, und umgekehrt.[15]

Damit aber x eine reelle Zahl wird, darf $16k^2$ nicht kleiner als 96000 sein. Das heißt, t nimmt dann seinen kleinsten Wert an, wenn $16k^2 = 96000$ ist, so dass der Radikand Null wird: Daraus folgt für k

$$k = \sqrt{6000}$$

Kehren wir nun zur Lösung unserer quadratischen Gleichung zurück. Wir erhalten:

$$x = \frac{k}{15} \pm 0 = \frac{\sqrt{6000}}{15} \approx 5,16$$

Die Station C muss demnach rund 5 km vor dem Punkt D gebaut werden.
Die Lösung hat natürlich nur für die Fälle einen Sinn, bei denen $x < a$ gilt, da wir, als wir die Gleichung aufstellten, den Ausdruck $a - x$ als eine positive Zahl annehmen.

Ist $x = a \approx 5,16$, so braucht man die Zwischenstation überhaupt nicht zu errichten, da man die Chaussee genau zur Station führen muss. So muss man auch in den Fällen verfahren, wenn die Entfernung a kürzer als 5,16 km ist.
Dieses Mal sind wir weitsichtiger als die Gleichung. Würden wir nämlich blindlings der Gleichung vertrauen, so müssten wir im letzten Falle die Zwischenstation hinter dem Bahnhof errichten, was natürlich Unsinn wäre. In diesem Falle ist $x > a$ und die Zeit $\frac{a-x}{0,8}$ die man auf der Eisenbahnlinie fahren muss, ist deshalb negativ.

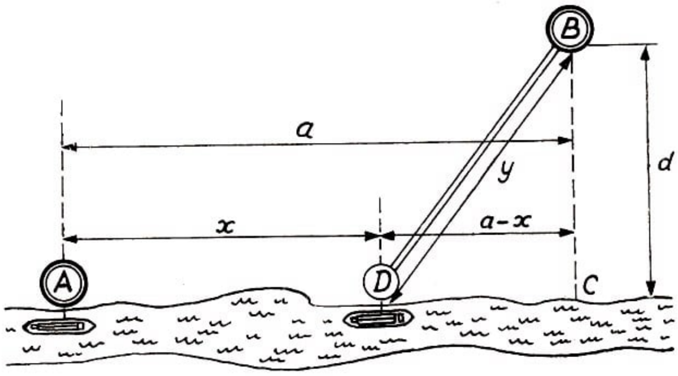
Das ist ein lehrreiches Beispiel, das zeigt, dass man sich bei der Benutzung mathematischer Mittel mit der nötigen Umsicht zu den erhaltenen Resultaten verhalten soll und sich dessen bewusst ist, dass sie den realen Sinn verlieren können, wenn die Voraussetzungen, auf denen die Anwendung des verwendeten mathematischen Mittels beruht, nicht erfüllt sind.

Wie soll man die Chaussee anlegen?

Aufgabe: Am Ufer eines Flusses liegt die Stadt A. Von dort aus sollen Waren nach B gebracht werden, einem Ort, der d km vom Fluss entfernt liegt. Der Transport soll auf dem Wasserwege bis zum Ort D erfolgen und dann auf einer Chaussee bis zum Ort B. Die Transportkosten je Tonnenkilometer sind auf dem Landwege doppelt so hoch wie auf dem Wasserweg. Wie ist die Chaussee von B zum Fluss zu legen, damit die Transportkosten von A nach B insgesamt am niedrigsten sind?

[15] Man muss bedenken, dass $k > 0$ ist, da $0,8t = a - x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} > a - x + x = a$ ist.

Lösung: Wir bezeichnen die Entfernung $\overline{AD}$ mit x und die Länge der Chaussee $\overline{DB}$ mit y. Wir setzen die Länge der Strecke $\overline{AC}$ gleich a voraus und die Länge $\overline{BC}$ gleich d.



Da der Transport auf der Chaussee doppelt so teuer ist wie auf dem Wasserwege, muss die Summe $x + 2y$, entsprechend der Forderung der Aufgabe, ein Minimum sein.
Wir bezeichnen diesen Minimumwert mit m. Wir erhalten somit die Gleichung:

$$x + 2y = m$$

Da aber $x = a - \overline{DC}$ und $\overline{DC} = \sqrt{y^2 - d^2}$ ist, erhält die Gleichung nach dem Einsetzen die Form:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m$$

Nun wird die Wurzel beseitigt:

$$3y^2 - 4(m-a)y + (m-a)^2 + d^2 = 0$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung, so erhalten wir die Lösungen:

$$y = \frac{2}{3}(m-a) \pm \sqrt{\frac{(m-a)^2 - 3d^2}{9}}$$

Damit y eine reelle Zahl ist, darf $(m-a)^2$ nicht kleiner als $3d^2$ sein. Der Minimumwert $(m-a)^2$ ist gleich $3d^2$, und dann sind

$$m - a = d\sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{2(m-a)+0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$$

Da nun $\sin\angle BDC = d : y$ gilt, ergibt sich durch Einsetzen:

$$\sin\angle BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aber der Winkel, dessen Sinus gleich $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, beträgt $60°$. Das heißt, die Chaussee muss man unter einem Winkel von $60°$ zum Fluss anlegen, wie groß die Entfernung $\overline{AC}$ auch sei.

Hier stoßen wir von neuem auf dieselbe Besonderheit, der wir in der vorangegangenen Aufgabe begegneten. Die Lösung hat nur unter einer bestimmten Bedingung einen Sinn.

Ist der Punkt so gelegen, dass die Chaussee, die unter einem Winkel von $60°$ zum Fluss angelegt ist, auf dieser Seite der Stadt A entlangläuft, so ist die Lösung nicht anwendbar; in einem solchen Falle muss man den Punkt B mit der Stadt A durch die Chaussee unmittelbar verbinden, ohne überhaupt den Fluss für den Transport zu berücksichtigen.

Wann ist das Produkt am größten?

Für die Lösung vieler Maxima- und Minimaaufgaben, also für die Ermittlung der Maximum- und Minimumwerte einer Variablen, kann man einen algebraischen Satz verwenden, mit dem wir uns jetzt bekannt machen. Wir betrachten folgende Aufgabe:

In welche zwei Summanden muss man eine gegebene Zahl zerlegen, damit das Produkt der Summanden ein Maximum wird?

Lösung: Die gegebene Zahl mag a sein. Dann kann man die Summanden, in die die Zahl a zerlegt ist, mit $\frac{a}{2}+x$ und $\frac{a}{2}-x$ bezeichnen. Die Zahl x gibt dabei an, wie groß der Unterschied dieser Summanden von der Hälfte der Zahl a ist. Das Produkt beider Summanden ist

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$$

Es ist klar, dass das Produkt der gewählten Summanden bei Verringerung von x größer werden wird, d. h. bei Verringerung der Differenz dieser Summanden.
Das Produkt wird am größten bei $x=0$ sein, also in dem Falle, wenn beide Teile $\frac{a}{2}$ entsprechen.
Demnach muss man die Zahl in zwei Hälften zerlegen: Das Produkt zweier Zahlen, deren Summe konstant ist, wird dann am größten sein, wenn diese Zahlen untereinander gleich sind.

Betrachten wir die gleiche Frage für drei Zahlen: In welche drei Summanden muss man die gegebene Zahl zerlegen, damit ihr Produkt ein Maximum ist?

Lösung: Bei der Lösung dieser Aufgabe können wir uns auf die vorangegangene stützen. Möge die Zahl a in drei Summanden zerlegt sein. Wir setzen zuerst voraus, dass nicht einer der Summanden gleich $\frac{a}{3}$ ist. Dann findet sich unter ihnen ein Summand, der größer als $\frac{a}{3}$ ist (alle drei können nicht kleiner als $\frac{a}{3}$ sein).
Wir bezeichnen diesen Summanden mit $\frac{a}{3}+x$.

Genauso findet sich unter ihnen ein Summand, der kleiner als $\frac{a}{3}$ ist. Diesen Summanden bezeichnen wir mit $\frac{a}{3}-y$.
Die Zahlen x und y sind positiv. Der dritte Summand wird offenbar gleich $\frac{a}{3}+y-x$ sein.

Die Zahlen $\frac{a}{3}$ und $\frac{a}{3}+x-y$ besitzen die gleiche Summe, die auch die ersten beiden Summanden der Zahl a haben. Ihre Differenz, also $x-y$, ist geringer als die Differenz der beiden ersten Summanden, die gleich $x+y$ war. Wie wir aus der Lösung der vorangegangenen Aufgabe wissen, folgt hieraus, dass das Produkt

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

größer ist als das Produkt der beiden ersten Summanden der Zahl a. Vertauscht man also die ersten beiden Summanden der Zahl a mit den Zahlen $\frac{a}{3}$ und $\frac{a}{3} + x - y$ und ändert den dritten Summanden nicht, so vergrößert sich das Produkt. Möge jetzt einer der Summanden schon gleich $\frac{a}{3}$ sein. Dann haben die anderen beiden Summanden die Form $\frac{a}{3} + z$ bzw. $\frac{a}{3} - z$.
Wählen wir für die beiden letzten Summanden die Größe $\frac{a}{3}$ (wodurch sich ihre Summe nicht ändert), so vergrößert sich das Produkt von neuem und wird gleich

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}$$

Ist die Zahl a in drei Summanden zerlegt, die untereinander nicht gleich sind, so ist das Produkt dieser Glieder kleiner als $\frac{a^3}{27}$, also kleiner als das Produkt dreier gleicher Faktoren, die die Summe a bilden. Auf die gleiche Weise kann man diesen Satz auch für vier Faktoren beweisen, auch für fünf usw. Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall.

Es ist zu ermitteln, bei welchen Werten x und y der Ausdruck $x^p y^q$ am größten ist, wenn $x + y = a$ ist.

Lösung: Man muss ermitteln, bei welchem Wert x der Ausdruck $x^p(a-x)^q$ die maximale Größe erreicht. Wir multiplizieren diesen Ausdruck mit der Zahl $\frac{1}{p^p \cdot q^q}$ und erhalten:

$$\frac{x^p}{p^p} \cdot \frac{(a-x)^q}{q^q}$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen maximalen Wert offenbar dann, wenn auch der erste Ausdruck seinen maximalen Wert erreicht. Wir formen diesen Ausdruck nun folgendermaßen um:

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot ...}_{p \text{ mal}} \cdot \underbrace{\frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdot ...}_{q \text{ mal}}$$

Die Summe aller dieser Faktoren ist

$$\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + ...}_{p \text{ mal}} + \underbrace{\frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + ...}_{q \text{ mal}} = \frac{px}{p} + \frac{q(a-x)}{q} = x + a - x = a$$

Es ergibt sich also der konstante Wert a.
Auf Grund des früher Bewiesenen schlussfolgern wir, dass das Produkt

$$\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot ... \cdot \frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdot ...$$

bei Gleichheit aller seiner einzelnen Faktoren ein Maximum erreicht.
Es müsste also

$$\frac{x}{p} = \frac{a-x}{q}$$

sein. Wir wissen, dass $a - x = y$ ist, und erhalten, nachdem wir die Glieder umgestellt haben, die Proportion $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$.
Also, das Produkt $x^p y^q$ erreicht einen maximalen Wert (unter der Voraussetzung, dass die Summe $x + y$ konstant ist), wenn $x : y = p : q$ ist.
Auf gleiche Art und Weise kann man beweisen, dass die Produkte $x^p y^q z^r$, $x^p y^q z^r t^u$ usw. bei konstanten Summen $x + y + z$, $x + y + z + t$ usw. den maximalen Wert dann erreichen, wenn $z : y : z = p : q : r$, $x : y : z : t = p : q : r : u$ usw. sind.

Wann ist die Summe am kleinsten?

Der Leser, der seine Kräfte am Beweis nutzbringender algebraischer Sätze erproben will, mag selbst folgende Behauptungen beweisen:

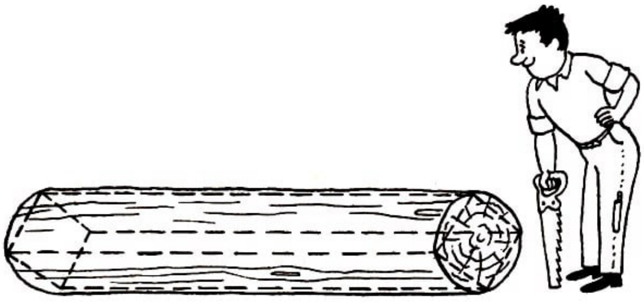
1. Die Summe zweier Zahlen, deren Produkt konstant ist, wird ein Minimum, wenn diese Zahlen gleich sind.
Beispiel für das Produkt 36;
$4 + 9 = 13$; $3 + 12 = 15$; $2 + 18 = 20$; $1 + 36 = 37$; $6 + 6 = 12$.

2. Die Summe mehrerer Zahlen, deren Produkt konstant ist, wird ein Minimum, wenn diese Zahlen gleich sind.
Beispiel für das Produkt 216:
$3 + 12 + 6 = 21$; $2 + 18 + 6 = 26$; $9 + 6 + 4 = 19$; $6 + 6 + 6 = 18$.

An einer Reihe von Beispielen wird nun gezeigt, wie diese Sätze in der Praxis angewendet werden.

Ein Balken von maximalem Volumen

Aufgabe: Aus einem zylindrischen Holzstamm soll man einen rechtwinkligen Balken maximalen Volumens heraussägen. Welche Form muss sein Schnitt haben?



Lösung: Sind die Seiten des rechtwinkligen Schnitts x und y, so gilt nach dem Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = d^2$, wobei d der Durchmesser des Stammes ist.
Das Balkenvolumen ist am größten, wenn seine Schnittfläche am größten ist, wenn also das Produkt xy einen maximalen Wert erreicht. Ist aber xy ein Maximum, so wird auch das Produkt x^2y^2 am größten sein. Da die Summe $x^2 + y^2$ konstant ist, so ist, nach dem oben bewiesenen Satz, das Produkt x^2y^2 am größten, wenn $x^2 = y^2$ oder wenn $x = y$ ist.
Also muss die Schnittfläche des Balkens quadratisch sein.

Zwei Landstücke

Aufgaben:

1. Welche Form muss ein rechtwinkliges Grundstück mit vorgeschriebenem Flächeninhalt haben, damit die Länge des Zaunes, der das Grundstück umschließt, minimal ist!

2. Welche Form muss ein rechtwinkliges Grundstück haben, damit sein Flächeninhalt bei einer vorgegebenen Länge des Zaunes maximal ist?

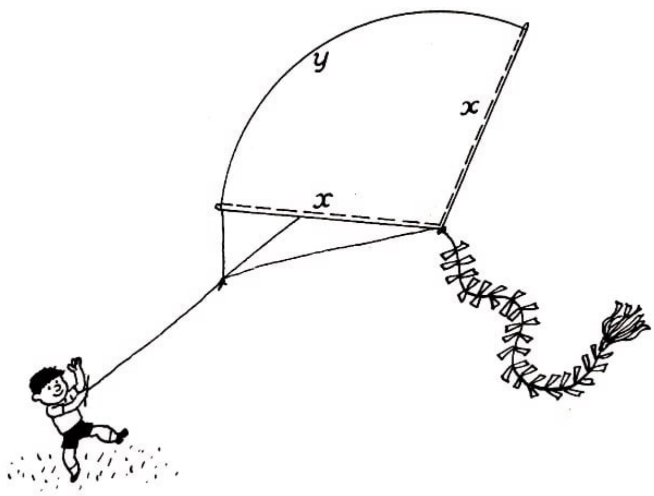
Lösungen:
I. Die Form des rechtwinkligen Grundstücks wird aus dem Verhältnis seiner Seiten x und y ermittelt. Der Flächeninhalt des Stücks mit den Seiten x und y ist gleich xy, und die Länge des Zaunes beträgt $2x \cdot 2y$. Die Länge des Zaunes wird minimal, wenn $x + y$ die kleinste Größe erreicht.
Bei konstantem Produkt xy ist die Summe $x+y$ im Falle der Gleichheit $x = y$ minimal. Folglich ist das gesuchte Rechteck ein Quadrat.

2. Wenn x und y die Seiten des Rechtecks sind, so ist die Länge l des Zaunes $2x + 2y$ und der Flächeninhalt xy. Dieses Produkt wird dann am größten sein, wenn auch das Produkt $4xy$, d. h. $2x \cdot 2y$, am größten ist; das letzte Produkt nun wird bei konstanter Summe seiner Faktoren $2x + 2y$ am größten bei $2x = 2y$ sein, wenn also das Stück die Form eines Quadrates besitzt.

Zu den uns aus der Geometrie bekannten Eigenschaften des Quadrates können wir also noch die folgende hinzufügen: Von allen Rechtecken verfügt das Quadrat über den kleinsten Umfang bei gegebenem Flächeninhalt und über den größten Flächeninhalt bei gegebenem Umfang.

Der Papierdrachen

Aufgabe: Ein Drachen, der die Form eines Kreissektors hat, soll eine solche Form erhalten, dass er innerhalb eines vorgegebenen Umfangs den maximalen Flächeninhalt einnimmt. Wie muss die Form des Sektors sein?



Lösung: Wir wollen die Aufgabenstellung zunächst noch präzisieren: Wir sollen feststellen, bei welchem Verhältnis aus Bogenlänge und zugehörigem Radius der Flächeninhalt bei vorgegebenem Umfang einen maximalen Wert annimmt.

Der Radius des Sektors sei x und der Bogen y. Dann werden sein Umfang u und sein Flächeninhalt A folgendermaßen dargestellt:

$$u = 2x + y \qquad , \qquad A = \frac{xy}{2} = \frac{x(u-2x)}{2}$$

Der Wert für A erreicht beim gleichen Wert zu ein Maximum, bei dem auch $2x(u-2x)$, was ja den vierfachen Flächeninhalt darstellt, ein Maximum erreicht.
Da die Summe der Faktoren $2x$ und $(u-2x)$ den konstanten Wert u besitzt, ist deren Produkt am größten, wenn $2x = u - 2x$ ist, woraus

$$x = \frac{u}{4} \qquad \text{und} \qquad y = u - 2 \cdot \frac{u}{4} = \frac{u}{2}$$

folgen.
Der Sektor hat also bei vorgegebenem Umfang dann einen maximalen Flächeninhalt, wenn der Radius die Hälfte des Bogens darstellt. In diesem Fall ist also die Länge seines Bogens gleich der Summe der Länge der Radien.
Der Zentriwinkel beträgt annähernd $115°$. Wie die Flugeigenschaften eines solchen breiten Drachens sind, ist eine andere Frage, deren Behandlung nicht mit, in unsere Aufgabe einbezogen wird.

Der Bau eines Hauses

Aufgabe: Ein neues Haus soll auf einem Grundstück errichtet werden, auf dem noch ein altes baufälliges Haus steht. Eine Wand des alten Hauses ist noch gut erhalten und kann für den Neubau mit verwendet werden. Sie hat eine Länge von 12 m. Der Flächeninhalt des Grundrisses des neuen Hauses soll 112 m^2 betragen.
Folgende Preise sind für den Neubau zu beachten:

1. Die Ausbesserung eines laufenden Meters Wand beträgt 25% der Kosten für die Errichtung einer neuen;

2. der Abriss eines laufenden Meters der alten Wand und die Errichtung einer neuen Wand aus dem erhaltenen Material erfordert 50% der Kosten, die der Bau eines laufenden Meters Wand aus neuem Material kostet.

Wie kann man unter solchen Bedingungen am günstigsten die erhalten gebliebene Wand verwenden?

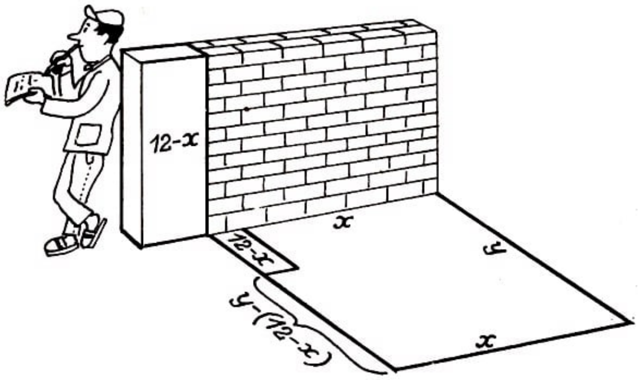
Lösung: Mögen von der ehemaligen Wand x Meter erhalten bleiben, und die übrigen $12 - x$ Meter werden abgetragen, um aus dem erhaltenen Material von neuem einen Teil der Wand des neuen Hauses aufzuführen. Wenn die Errichtung eines laufenden Meters der Wand aus neuem Material den Betrag a kostet, so wird die Ausbesserung von x Metern alter Wand den Betrag $\frac{ax}{4}$ kosten.
Die Errichtung eines Teils der Mauer mit der Länge $12 - x$ Meter wird den Betrag $\frac{a(12-x)}{2}$ erfordern, der übrige Teil dieser Wand den Betrag

$$a[y - (12 - x)] = a(y + x - 12)$$

Die Errichtung der dritten Wand macht schließlich den Betrag ax, und die der vierten Wand ay erforderlich. Die Kosten für die gesamte Arbeit betragen

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y+x-12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a$$

Der letzte Ausdruck erreicht einen minimalen Wert, wenn auch die Summe $7x + 8y$ einen minimalen Wert erreicht.



Wir wissen, dass die Grundfläche des Hauses xy gleich 112 m^2 ist; folglich ist

$$7x \cdot 8y = 56 \cdot 112 \text{ m}^2$$

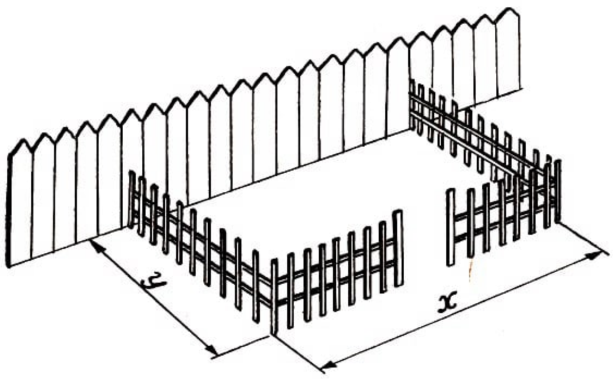
Bei konstantem Produkt erreicht die Summe $7x+8y$ dann ihren minimalen Wert, wenn $7x = 8y$ ist, woraus $y = \frac{7}{8}x$ folgt. Setzen wir diesen Ausdruck für y in die Gleichung $xy = 112$ ein, so erhalten wir

$$\frac{7}{8}x^2 = 112 \qquad , \qquad x = \sqrt{128} \approx 11,3$$

Da die Länge der alten Wand 12 m beträgt, unterliegen also nur 0,7 m dem Abriss.

Das Gartengrundstück

Ein Gartengrundstück sollte eingezäunt werden. Dafür war Material für 1 m Zaun vorhanden. Da sich das Grundstück an ein anderes bereits eingezäuntes anschloss, brauchte eine Seite nicht berücksichtigt zu werden.
Wie kann man unter diesen Bedingungen ein rechtwinkliges Grundstück mit größtem Flächeninhalt einzäunen?



Lösung: Die Länge einer Seite des Grundstückes (längs des vorhandenen Zaunes) sei x Meter, die Länge der anderen Seite sei y Meter. Dann werden für die Einzäunung des Grundstückes $x + 2y$ Meter Zaun benötigt, so dass $x + 2y = u$ ist.
Der Flächeninhalt des Grundstückes beträgt $A = xy$ m$^2 = y(u - 2y)$ m^2.

Diese Größe nimmt ihren Maximalwert gleichzeitig mit der Größe $2y(u - 2y)$ an. Der zweite Ausdruck, der den doppelten Flächeninhalt des Grundstückes darstellt, ist ein Produkt zweier Faktoren mit der konstanten Summe u.

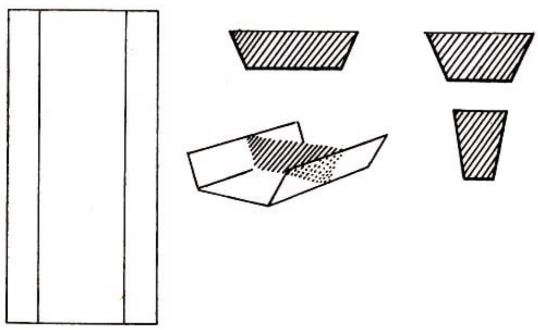
Die größte Fläche erhält man dann, wenn $2y = u - 2y$ ist. Aus dieser Gleichung ermitteln wir

$$y = \frac{u}{4} \qquad \text{und} \qquad x = u - 2y = \frac{u}{2}$$

Das Ergebnis lautet demnach mit anderen Worten, es muss $x = 2y$ sein. Die Seite des Grundstückes, die längs des vorhandenen Zaunes verläuft, muss doppelt solang sein wie die andere Seite.

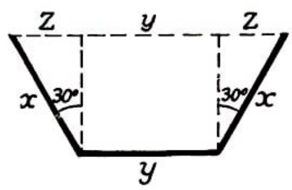
Eine Rinne von maximaler Querschnittsfläche

Aufgabe: Ein rechteckiges Blech soll zu einer Rinne mit einem trapezförmigen Querschnitt gebogen werden. Dabei sollen die Schenkel des Trapezes gleich lang sein. Das kann man auf verschiedene Weise tun, wie aus der untenstehenden Abbildung hervorgeht. Welche Höhe müssen die Seitenfläche haben, und unter welchem Winkel müssen die Seitenflächen abgebogen sein, damit der Querschnitt der Rinne einen maximalen Flächeninhalt besitzt?



Lösung: Mag die Breite des Bleches l sein. Die Höhe der abgebogenen Seitenflächen bezeichnen wir mit x und die Breite des Grundbleches der Rinne mit y. Wir führen noch eine Unbekannte z ein, deren Bedeutung aus der nachfolgenden Abbildung klar wird. Der Flächeninhalt des Trapezes, das den Rinnenquerschnitt darstellt, ist dann

$$A = \frac{(z + y + z) + y}{2}\sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y + z)^2(x^2 - z^2)}$$



Die Aufgabe führt auf die Ermittlung der Werte von x, y und z, bei denen A einen Maximalwert erreicht. Dabei behält die Summe $2x + y$ (d. h. die Blechbreite) den konstanten Wert l bei. Wir wandeln die Gleichung mehrfach um, bis wir

$$A^2 = (y+z)^2(x+z)(x-z)$$

erhalten. Für A^2 erhält man dann das Maximum, wenn x, y und z den gleichen Wert annehmen. In diesem Fall nimmt natürlich auch $3A^2$ seinen maximalen Wert an. $3A^2$ kann man auch in Form des Produktes

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z)$$

darstellen. Die Summe dieser vier Faktoren lautet

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z = 2y+4x = 2l$$

Die Summe ist also eine Konstante. Deshalb ist das Produkt aus diesen vier Faktoren ein Maximum, wenn die Faktoren untereinander gleich sind. Es müssen also gelten:

$$y+z = x+z \qquad \text{und} \qquad x+z = 3x-3z$$

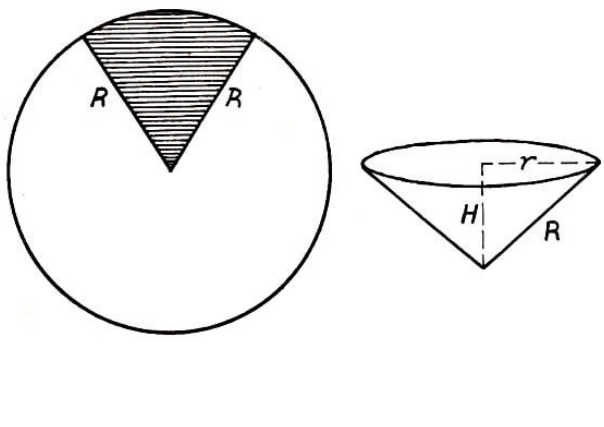
Aus der ersten Gleichung entnehmen wir, dass $y = x$ ist, und da $y + 2x = l$ ist, folgt $x = y = \frac{l}{3}$. Aus der zweiten Gleichung ermitteln wir

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}$$

Ferner ist, da die Kathete z gleich der halben Hypotenuse ist, der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel gleich $30°$, und der Neigungswinkel der Seiten zum Boden ist gleich $90° + 30° = 120°$. Die Rinne wird also den größten Querschnitt haben, wenn die Querschnittseiten in Form dreier angrenzender Seiten eines regelmäßigen Sechsecks gebogen sind.

Ein Trichter maximalen Volumens

Aufgabe: Aus einem kreisförmigen Stück Blech soll der konische Teil eines Trichters angefertigt werden. Dafür wird aus der Kreisfläche ein Sektor ausgeschnitten, und der übrige Teil der Kreisfläche wird zu einem Kegel zusammengerollt.
Wie groß muss der Zentriwinkel des ausgeschnittenen Sektors sein, damit ein Kegel größten Volumens entsteht?



Lösung: Die Bogenlänge des Kreissektors, der zu einem Kegel zusammengerollt wird, bezeichnen wir mit x. Folglich wird der Radius R der Kreisfläche zur Mantelstrecke des Kegels, und der Umfang des Grundkreises des Kegels wird gleich x sein.
Den Radius r des Grundkreises ermitteln wir aus der Gleichung $2\pi r = x$, woraus $r = \frac{x}{2\pi}$ folgt. Die Höhe des Kegels ist nach dem Satz des Pythagoras

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Das Volumen dieses Kegels ist

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Dieser Ausdruck nimmt dann seinen maximalen Wert an, wenn auch der Ausdruck

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

sowie auch das Quadrat dieses Ausdrucks

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]$$

ein Maximum wird. Da

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

eine Konstante ist, nimmt das letztgenannte Produkt, in dem zu Variable ist, dann seinen maximalen Wert an, wenn folgendes gilt:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 : 1$$

(Zu dieser Feststellung gelangt man auf Grund der bewiesenen Herleitung auf den vorhergehenden 117 und 118.) Aus der Proportion erhält man dann weiter:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad 3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich schließlich:

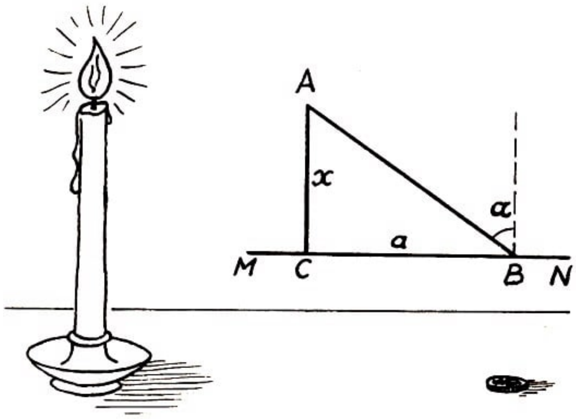
$$x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \approx 5,15R$$

Diese Bogenlänge entspricht beim Radius R einem Winkel von rund $295°$. Der Bogen des ausgeschnittenen Sektors hat demnach einen Zentriwinkel von rund $65°$.

Die hellste Beleuchtung

Aufgabe: In welcher Höhe über dem Tisch muss sich eine Kerzenflamme befinden, damit sie die auf dem Tisch liegende Münze am hellsten beleuchtet?

Lösung: Mancher wird vermuten, dass man die Flamme für eine bestmögliche Beleuchtung der Münze recht niedrig anordnen muss. Das ist nicht richtig: Bei niedrigem Stand der Flamme fallen die Strahlen flach ein. Wenn man aber die Kerze höher stellt, so dass die Strahlen steil einfallen, so entfernt man dadurch die Lichtquelle von der Münze.



Am günstigsten ist die Beleuchtung offenbar dann, wenn eine bestimmte mittlere Flammenhöhe über dem Tisch gewählt wird. Wir bezeichnen sie mit x. Die Entfernung $\overline{BC}$ der Münze B vom Fußpunkt C der Senkrechten $\overline{AC}$ bezeichnen wir mit a.

Ist die Helligkeit der Flamme i, so wird die Beleuchtung der Münze entsprechend den Gesetzen der Optik folgendermaßen dargestellt:

$$\frac{i}{\overline{AB}^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2}$$

wobei der Winkel α der Einfallswinkel des Lichtstrahls $\overline{AB}$ ist. Da

$$\cos\alpha = \cos(\angle CAB) = \frac{x}{\overline{AB}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist; erhält man nach dem Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{i}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{i\cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum bei dem Wert für x, bei dem auch sein Quadrat, also

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}$$

ein Maximum wird.
Den Faktor i^2 können wir nun unberücksichtigt lassen, denn es handelt sich ja um eine Konstante. Den anderen Faktor, nämlich

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}$$

wandeln wir folgendermaßen um:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)$$

Der umgewandelte Ausdruck wird gleichzeitig mit dem Ausdruck

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)$$

zu einem Maximum, da der eingeführte konstante Faktor a^2 keinen Einfluss auf den Wert von x hat, bei dem das Produkt zu einem Maximum wird. Wir stellen fest, dass die Summe der ersten Potenzen dieser Faktoren eine Konstante ist:

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 1$$

Daraus schlussfolgern wir, dass das betrachtete Produkt ein Maximum wird, wenn

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 2:1$$

ist. Wir erhalten auf diese Weise die Gleichung

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2$$

Nachdem wir diese Gleichung gelöst haben, ermitteln wir $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,71a$. Die Münze wird demnach am hellsten beleuchtet, wenn sich die Lichtquelle in einer Höhe befindet, die dem 0,71ten Teil der Entfernung entspricht, die die Münze vom Fußpunkt des Lotes durch die Flamme auf die Tischplatte besitzt.

8 Folgen

Die älteste uns bekannte Aufgabe über Folgen

Aufgabe: Die älteste Aufgabe über Folgen behandelt nicht die Belohnung des Erfinders des Schachspiels, die allerdings auch schon ein zweitausendjähriges Alter aufweist, sondern es handelt sich um das Aufteilen von Korn.
Die Aufgabe ist auf dem berühmten ägyptischen Papyrus Rhind aufgezeichnet. Dieser Papyrus, der von Rhind Ende des vorigen Jahrhunderts aufgefunden wurde, stammt aus der Zeit um das Jahr 2000 v. u. Z. und stellt eine Abschrift eines anderen, noch älteren mathematischen Werkes dar, das wahrscheinlich ins dritte Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung gehört. Unter den arithmetischen, algebraischen und. geometrischen Aufgaben dieses Schriftstücks befindet sich auch die folgende (wir führen sie in freier Übertragung an):

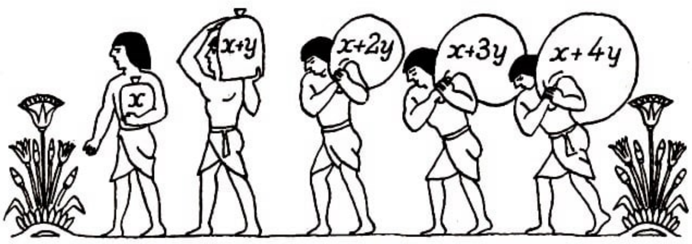
Hundert Maß Getreide sind unter fünf Menschen folgendermaßen zu teilen: Der zweite bekommt etwas mehr als der erste. Der dritte bekommt wieder mehr als der zweite, und zwar so viel mehr, wie der zweite mehr als der erste bekam. Der vierte bekommt im Vergleich zum dritten so viel mehr, wie der dritte mehr als der zweite bekam. Der fünfte bekommt schließlich mehr als der vierte, und zwar wieder um so vielmehr, wie der vierte mehr als der dritte bekam. Dabei soll durch diese Aufteilung erreicht werden, dass die ersten beiden nur ein Siebentel dessen erhalten, was die übrigen drei zugeteilt bekommen.
Wieviel muss man jedem geben?

Lösung: Offenbar stellt die Getreidemenge, die die fünf Personen erhielten, die Summe einer steigenden arithmetischen Folge dar. Ihr erstes Glied sei x und die Differenz y. Dann betragen

der Anteil des ersten x,
der Anteil des zweiten $x + y$,
der Anteil des dritten $x + 2y$,
der Anteil des vierten $x + 3y$,
der Anteil des fünften $x + 4y$.

Auf Grund der Aufgabenbedingungen stellen wir folgende zwei Gleichungen auf:

$$x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100 \qquad \text{(I)}$$
$$7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) \qquad \text{(II)}$$



Nach Vereinfachung erhält die erste Gleichung die Form $x + 2y = 20$, die zweite $11x = 2y$. Nachdem wir dieses System gelöst haben, erhalten wir

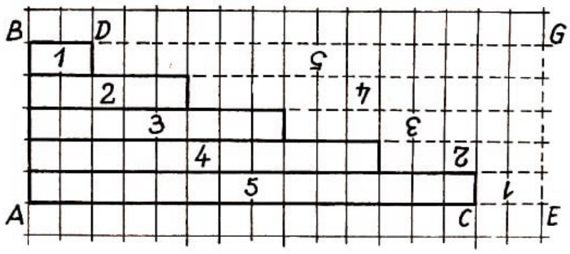
$$x = 1\frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad y = 9\frac{1}{6}$$

Das heißt, das Getreide muss in folgende Anteile aufgeteilt werden:
Der erste erhält $1\frac{2}{3}$ Maß, der zweite $10\frac{5}{6}$ Maß, der dritte 20 Maß, der vierte $29\frac{1}{6}$ Maß und der fünfte $38\frac{1}{3}$ Maß Getreide.

Algebra auf kariertem Papier

Auch die folgende Aufgabe, die auf ein fünfhundertjähriges Alter zurückblicken kann, handelt von einer Folge.
Wie wir sehen, ist das Wissen um Folgen und das Lösen von Aufgaben dieser Art schon recht alt, und doch beschäftigen wir uns in der Schule erst seit verhältnismäßig kurzer Zeit damit.

Indessen kann man die Summenformel von Gliedern einer arithmetischen Folge durch ein einfaches und anschauliches Verfahren mit Hilfe karierten Papiers herleiten.
Auf solchem Papier wird jede beliebige Folge als Stufenfigur dargestellt. Die Figur $ABCD$ in der Abbildung stellt beispielsweise die Folge 2, 5, 8, 11, 14 dar. Um die Summe ihrer Glieder zu ermitteln, ergänzen wir die Figur zu einem Rechteck $AEGB$.



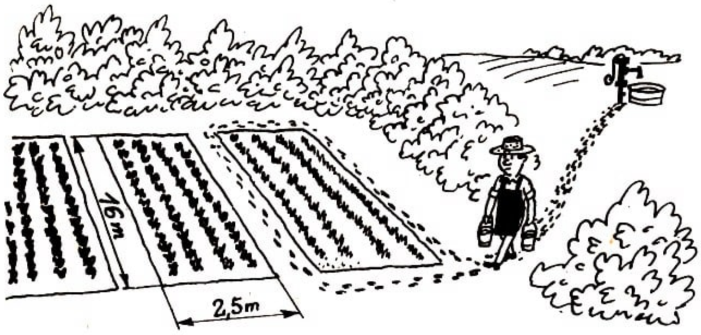
Wir erhalten die beiden gleich großen Figuren $ABDC$ und $CEGD$. Die Fläche einer jeden von ihnen stellt die Summe der Glieder unserer Folge dar. Das heißt, die Doppelsumme der Reihe ist gleich der Fläche des Rechtecks $AEGB$, d.h. $(\overline{AC} + \overline{CE}) \cdot \overline{AB}$. Aber $\overline{AC} + \overline{CE}$ stellt die Summe des 1. und 5. Gliedes der Folge dar; $\overline{AB}$ veranschaulicht die Anzahl der Folgenglieder. Deshalb ist die Doppelsumme

$$2S = (\text{Summe der Außenglieder}) \cdot (\text{Anzahl der Glieder}) \quad \text{oder}$$

$$S = \frac{(\text{erstes + letztes Glied}) \cdot (\text{Anzahl der Glieder})}{2}$$

Gemüsebeete werden gegossen

Aufgabe: Ein Gemüsegarten hat 30 Beete, jedes 16 m lang und 2,5 m breit. Gießt der Gärtner die Beete, so holt er das Wasser aus einem Brunnen, der 14 m vom Garten entfernt gelegen ist. Das Wasser, das er bei einem Gang holt, soll gerade für ein Beet reichen.
Wenn nun alle Beete gegossen werden sollen, muss der Gärtner wiederholt den Weg am Brunnen zurücklegen. Wie lang ist die Wegstrecke, die man erhält, wenn man alle diese Wege addiert?



Die Berechnung soll mit dem ersten Wassertragen vom Brunnen beginnen und mit der Rückkehr zum Brunnen enden.

Lösung: Um das erste Beet zu gießen, muss der Gärtner einen Weg von

$$(14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14) \text{ m} = 65 \text{ m}$$

zurücklegen. Beim Gießen des zweiten geht er

$$(14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14) \text{ m} = (65 + 5) \text{ m} = 70 \text{ m}$$

Jedes folgende Beet verlangt einen um 5 m längeren Weg als das vorangegangene. Wir erhalten die Folge $65; 70; 75; ...; 65 + 5 \cdot 29$.
Die Summe ihrer Glieder ist gleich

$$\frac{(65 + 65 + 29 \cdot 5)30}{2} \text{ m} = 4125 \text{ m}$$

Der Gärtner muss beim Gießen des gesamten Gartens einen Weg von 4,125 km zurücklegen.

Das Füttern von Hühnern

Für 31 Hühner ist eine gewisse Menge Futter, ausgehend von je einem Dekaliter in der Woche für jedes Huhn, angeschafft werden. Dabei wurde vorausgesetzt, dass sich die Anzahl der Hühner nicht ändern wird. Da sich aber später herausstellte, dass sich die Anzahl der Hühner jede Woche um 1 verringerte, so reichte das beschaffte Futter für die doppelte Zeit.
Wie groß war der Futtervorrat und für welche Zeit war er anfangs berechnet worden?

Lösung: Mögen x Dekaliter Futter für y Wochen angeschafft werden sein. Da das Futter für 31 Hühner je 1 Dekaliter je Huhn in der Woche berechnet war, so ist $x = 31y$.
In der ersten Woche wurden 31 Dekaliter verbraucht, in der zweiten 30, in der dritten 29 usw., bis in der letzten Woche der gesamten verdoppelten Zeit $(31 - 2y + 1)$ Dekaliter verbraucht waren.[16]

[16]Zur Erklärung sei noch angeführt: Der Futterverbrauch betrug in der 1. Woche 31 Dekaliter, in der 2. Woche $(31 - 1)$ Dekaliter, in der 3. Woche $(31 - 2)$ Dekaliter, in der $2y$-ten Woche $31 - (2y - 1) = (31 - 2y + 1)$ Dekaliter.

Der gesamte Vorrat besteht demnach aus

$$x = 3ly = 31 - 30 + 29 + ... + (31 - 2y + 1) \text{ Dekalitern}$$

Die Summe $2y$ der Glieder der Folge, deren erstes Glied 31 und deren letztes $31-2y+1$ ist, ist gleich

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)2y}{2} = (63 - 2y)y$$

Da y nicht gleich Null sein kann, so sind wir berechtigt, beide Seiten der Gleichung durch diesen Faktor zu kürzen. Wir erhalten $31 = 63-2y$ und $y = 16$, woraus $x = 3ly = 496$ folgt.
Es wurden 496 Dekaliter Futter für 16 Wochen angeschafft.

Ein Graben wird angelegt

Aufgabe: Eine Gruppe von Tiefbauarbeitern erhielt den Auftrag, einen Graben auszuheben. Wegen dringender anderer Arbeiten konnte zum festgesetzten Arbeitsbeginn jedoch nur ein Arbeiter dieser Kolonne mit dem Graben beginnen. Nach einiger Zeit erschien ein zweiter Arbeiter und begann ebenfalls mit der Arbeit.
Nach genau der gleichen Zeit erschien ein dritter, nach ihm im gleichen Zeitabstand ein vierter und so fort bis zum letzten. Bei der Abrechnung zeigte es sich, dass an dieser Baustelle der erste 11 mal solange gearbeitet hatte wie der letzte.
Hätte die Kolonne geschlossen mit dem Grabenbau begonnen, so wäre die Arbeit nach 24 Arbeitsstunden beendet gewesen. Wie lange arbeitete der letzte?

Lösung: Der letzte Tiefbauarbeiter mag x Stunden gearbeitet haben, dann arbeitete der erste $11x$ Stunden. Die Arbeitsstunden der einzelnen Arbeiter bilden eine fallende arithmetische Folge, deren erstes Glied $11x$ und deren letztes x ist. Bezeichnen wir nun noch die Anzahl der Arbeiter mit y, so können wir für die Summe der benötigten Arbeitsstunden folgende Gleichung aufstellen:

$$S = \frac{(11x + x)y}{2} = 6xy$$

Andererseits ist bekannt, dass die Kolonne mit y Mann in voller Besetzung den Graben in 24 Stunden ausgehoben hätte. Es wären also $24y$ Arbeitsstunden erforderlich gewesen. Folglich gilt:

$$6xy = 24y$$

Die Zahl y kann nicht gleich Null werden. Durch diesen Faktor kann man deshalb die Gleichung kürzen, wonach wir $6x = 24$ und $x = 4$ erhalten.
Also arbeitete der Arbeiter, der zuletzt an der Arbeitsstelle eintraf, noch 4 Stunden.

Damit haben wir die Frage beantwortet. Wenn wir jedoch wissen wollen, wieviel Arbeiter zu dieser Kolonne gehören, so könnten wir das nicht ermitteln. Obwohl diese Zahl unter dem Symbol y auftaucht, reichen die Angaben für die Berechnung nicht aus.

Äpfel

Aufgabe: Ein Gärtner verkaufte dem ersten Käufer die Hälfte aller seiner Äpfel und

noch einen halben Apfel, dem zweiten Käufer die Hälfte der restlichen und noch einen halben Apfel, dem dritten die Hälfte der übriggebliebenen und noch einen halben Apfel usw.
Dem siebenten Käufer verkaufte er die Hälfte der übrigen Äpfel und noch einen halben Apfel. Dann hatte er keine Äpfel mehr. Wieviel Äpfel besaß der Gärtner vorher?

Lösung: Wenn die anfängliche Anzahl der Äpfel x ist, so erhielt der erste Käufer

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$$

der zweite Käufer

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$$

der dritte Käufer

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}, \quad ...$$

der siebente Käufer ,

$$\frac{x+1}{2^7}$$

Wir erhalten die Gleichung:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+...+\frac{x+1}{2^7}=x$$
$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^7}\right)=x$$

Die Glieder in der zweiten Klammer bilden eine geometrische Zahlenfolge. Für die Summe dieser Zahlenfolge erhalten wir:

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7} \qquad \text{und} \qquad x=2^7-1=127$$

Insgesamt waren es 127 Äpfel.

Pferdekauf

Aufgabe: In der alten Arithmetik Magnizkis finden wir folgende lustige Aufgabe:
Jemand verkaufte ein Pferd für 156 Rubel. Als der Kauf bereits perfekt war, reute es jedoch den Käufer, und er wollte das Pferd gern zurückgeben. Er ging zum Pferdehändler und sagte:
"Der Preis für dieses Pferd war viel zu hoch. Ich möchte den Kauf rückgängig machen."
Da schlug der Verkäufer mit den folgenden Worten andere Bedingungen für den Kauf vor: "Ist, nach deiner Meinung, der Preis des Pferdes zu hoch, so kaufe nur seine Hufnägel, das Pferd erhältst du dann als Zugabe unentgeltlich. An jedem Hufeisen sind 6 Nägel. Für den ersten Nagel gib mir nur $\frac{1}{4}$ Kopeke, für den zweiten $\frac{1}{2}$ Kopeke, für den dritten 1 Kopeke usw."

Der Käufer, der durch den niedrigen Preis verleitet wurde und umsonst ein Pferd zu bekommen wünschte, nahm die Bedingungen des Verkäufers an. Er schätzte den Kaufpreis auf nicht mehr als 10 Rubel.
Um wieviel verrechnete sich der Käufer?

Lösung: Für 24 Hufnägel mussten

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+^3+...+2^{24-3}\right) \text{ Kopeken}$$

bezahlt werden. Diese Summe ist gleich

$$\frac{2^{21}\cdot 2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4194303\frac{3}{4} \text{ Kopeken}$$

Das sind annähernd 42000 Rubel.
Unter solchen Bedingungen ist es natürlich nicht schade, auch ein Pferd zu den Hufnägeln zuzugeben.

Die Belohnung des Soldaten

Aufgabe: Einem anderen alten russischen Mathematiklehrbuch, das den umfangreichen Titel 'Gesamter Kurs der reinen Mathematik, verfasst vom Stück-Junker der Artillerie und Zivillehrer der Mathematik Jefim Woitiachowski zum Nutzen und zur Verwendung der Jugend und sich in der Mathematik Übender' (1795) trägt, ist die folgende Aufgabe entnommen:

"Einem gedienten Soldaten wurde für die erste Verwundung eine Belohnung von 1 Kopeke gegeben, für die zweite Verwundung 2 Kopeken, für die dritte 4 Kopeken usw. Laut Berechnung wurde ermittelt, dass der Soldat insgesamt 655 Rubel 35 Kopeken Belohnung erhielt.
Gefragt ist nach der Anzahl seiner Wunden.

Lösung: Wir stellen die Gleichung

$$65535=1+2+2^2+2^3+...+2^{x-1}$$

oder die Gleichung

$$65535=\frac{2^{x-1}\cdot 2-1}{2-1}=2^x-1$$

auf. Daraus ergibt sich:

$$65536 = 2^x \qquad \text{und} \qquad x = 16$$

Dieses Ergebnis können wir leicht überprüfen.
Bei einem solch "großzügigen" System der Belohnung muss der Soldat 16 Verwundungen erhalten und dabei am Leben bleiben, um sich der Auszeichnung durch 655 Rubel 35 Kopeken würdig zu erweisen.

9 Siebente Grundrechenoperation

Es wurde schon dargelegt, dass die fünfte Grundrechenoperation, das Potenzieren, zwei Umkehroperationen besitzt. Ist $a^b = c$, so ist die Berechnung von a eine Umkehroperation, das Radizieren, und die Berechnung von b eine andere, nämlich das Logarithmieren. Es wird nun vorausgesetzt, dass der Leser die Grundlagen des Logarithmierens so weit beherrscht, wie sie im Unterricht behandelt werden. Zur Probe wollen wir uns zunächst einmal mit der folgenden Aufgabe beschäftigen:

$$a^{\log_a b}$$

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die Potenz mit der Logarithmenbasis a und einem Logarithmus zu dieser Basis als Exponenten die Zahl b ergibt. An der folgenden Entwicklung wollen wir uns das noch einmal klarmachen.
Wir gehen aus von der obigen Grundgleichung:

$$a^b = c \tag{I}$$

Wenn man nach b auflöst, erhält man:

$$b = \log_a c \tag{II}$$

Setzen wir nun in die Gleichung (I) den neuen Exponenten ein, so ergibt sich:

$$a^{\log_a c} = c \tag{III}$$

Wofür wurden nun Logarithmentafeln aufgestellt?

Natürlich zur Beschleunigung und Vereinfachung der Berechnungen. Der Schöpfer der ersten Logarithmentafeln, der schottische Mathematiker John Neper (1550 bis 1617), spricht folgendermaßen über sein Werk:

"Ich bemühte mich, soweit ich konnte und fähig war, mich von der Schwierigkeit und Langeweile der Berechnungen zu lösen, deren Lästigkeit gewöhnlich überaus viele vom Studium der Mathematik abschreckt."

Tatsächlich erleichtern und beschleunigen die Logarithmen die Berechnungen, ganz zu schweigen davon, dass sie die Durchführung solcher Operationen ermöglichen, die ohne ihre Hilfe nur mühsam zu bewältigen sind. (Hierher gehört beispielsweise das Ziehen einer Wurzel beliebiger Potenz.)
Nicht ohne Grund schrieb Laplace, dass "die Herausgabe der Logarithmentafeln das Leben der Astronomen im wahrsten Sinne des Wortes verdoppelt hat, denn die Berechnungen einiger Monate werden zu einer Arbeit von einigen Tagen verkürzt."

Der große Mathematiker spricht von Astronomen, da sie besonders schwierige und ermüdende Berechnungen durchführen müssen. Aber seine Worte können sich mit vollem Recht überhaupt auf alle beziehen, die mit Zahlenberechnungen zu tun haben.
Wir, die wir uns an den Gebrauch der Logarithmentafeln und an die durch sie geschaffene Erleichterung der Rechnung gewöhnt haben, können uns schwer die Verwunderung

und Begeisterung vorstellen, die sie bei ihrem Erscheinen hervorriefen.

Ein Zeitgenosse Nepers, der Engländer Henry Briggs (1561 bis 1630), der sich später durch die Schaffung der dekadischen Logarithmen einen Namen machte, schrieb, als er das Werk Nepers zum ersten Male sah:
"Mit seinen neuen und bewundernswerten Logarithmen veranlasste mich Neper, verstärkt mit Kopf und Händen zu arbeiten. Ich hoffe, ihn im Sommer zu sehen, da ich niemals ein Buch las, das mir mehr gefiel und in größeres Staunen versetzte."

Briggs verwirklichte seine Absicht und begab sich nach Schottland, um den Schöpfer der Logarithmen zu besuchen. Bei der Begegnung sagte Briggs:

"Ich unternahm diese lange Reise mit dem einzigen Ziel, Sie zu sehen und zu erfahren, mit Hilfe welcher Mittel des Scharfsinns und der Kunst Sie auf den ersten Gedanken über die vorzügliche Eignung der Logarithmen für Berechnungen gebracht wurden. Überhaupt wundere ich mich jetzt mehr darüber, dass niemand sie früher gefunden hat, so einfach erscheinen sie, nachdem man darüber von Ihnen erfährt."

Die Konkurrenten der Logarithmen

Vor der Schaffung von Logarithmentafeln wurden, gedrängt von der Notwendigkeit der Beschleunigung von umfangreichen Berechnungen, Tabellen anderer Art zusammengestellt. Mit ihrer Hilfe war es möglich, das Multiplizieren nicht wie beim Logarithmieren durch die Addition, sondern durch die Subtraktion zu ersetzen. Der Aufbau dieser Tabellen beruht auf der Identität

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Wenn man nämlich jeweils ein Viertel der Quadrate tabellarisch zusammenstellt, so kann man zur Berechnung des Produkts zweier Zahlen eine Differenz berechnen. Man subtrahiert nämlich vom Quadratviertel der Summe dieser beiden Zahlen das Quadratviertel ihrer Differenz.

Diese Tafeln erleichtern auch das Quadrieren und das Radizieren einer Quadratwurzel und vereinfachen in Verbindung mit Tafeln reziproker Zahlen auch die Division. Ihr Vorteil gegenüber Logarithmentafeln besteht darin, dass sich mit ihrer Hilfe genaue Resultate ergeben und nicht gerundete. Dafür stehen sie den logarithmischen Tafeln in einer Reihe anderer Punkte, die wesentlich wichtiger sind, nach.
Während die Quadratvierteltabellen unmittelbar nur die Multiplikation zweier Zahlen ermöglichen, kann man mit Hilfe der Logarithmentafeln gleich das Produkt einer beliebigen Anzahl von Faktoren ermitteln.

Außerdem kann man eine Zahl in jede beliebige Potenz erheben und das Radizieren von Wurzeln mit beliebigem Exponenten (mit ganzen und gebrochenen) durchführen. Schwierige Prozentberechnungen kann man beispielsweise mit Hilfe der Quadratvierteltabellen nicht durchführen.

Nichtsdestoweniger wurden Quadratvierteltafeln auch noch in späterer Zeit herausgegeben, als die Logarithmentafeln bereits in verschiedenen Arten erschienen waren.

Im Jahre 1856 erschienen in Frankreich Tafeln unter dem Titel 'Tabelle der Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000 Millionen, mit deren Hilfe man das Produkt von Zahlen nach einem überaus einfachen Verfahren ermitteln kann, einem Verfahren, das bequemer ist als die Berechnung mit Hilfe der Logarithmen', aufgestellt von Alexander Kossar.

Vorstellungen dieser Art entstehen bei vielen, die nicht vermuten, dass ihre Ideen schon längst verwirklicht sind. Auch an mich wandten sich zweimal Schöpfer ähnlicher Tafeln wie mit einer Neuigkeit und wunderten sich sehr, als sie erfuhren, dass ihre Erfindung schon ein mehr als dreihundertjähriges Alter hat.

Andere, weit jüngere Konkurrenten der Logarithmen sind die Rechentafeln, die in vielen technischen Handbüchern enthalten sind Das sind Tabellen, die folgende Spalten enthalten: Quadrate von Zahlen, Kuben, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, reziproke Zahlen, Kreisumfänge und Kreisflächeninhalte. Für viele technische Berechnungen sind diese Tafeln sehr geeignet, trotzdem sind sie nicht immer ausreichend; die Logarithmentafeln haben ein bedeutend weiteres Anwendungsgebiet

Die Entwicklung der Logarithmentafeln

In unseren Schulen wurden noch vor einigen Jahren 5stellige Logarithmentafeln verwendet. Jetzt verwendet man 4stellige Tafeln, da diese für technische Berechnungen völlig ausreichen. Für die meisten technischen Anforderungen kann man sich sogar 3stelliger Mantissen bedienen, werden doch die gebräuchlichen Ausmessungen selten mit mehr als drei Stellen ausgeführt.

Des Gedankens, dass auch kürzere Mantissen ausreichen, wurde man sich vor verhältnismäßig kurzer Zeit bewusst. Ich erinnere mich noch der Zeit, als in unseren Schulen die schweren Bände 7stelliger Logarithmen in Gebrauch waren, die ihren Platz erst nach beharrlichem Kampf an die 5stelligen abtraten.
Aber auch die 7stelligen Logarithmen erwiesen sich bei ihrem Erscheinen (1794) als unerlaubte Neuerung. Die ersten dekadischen Logarithmen, geschaffen von dem Londoner Mathematiker Henry Briggs (1624), waren 14 stellige Logarithmen. Sie wurden nach einigen Jahren von den 10stelligen Tabellen des holländischen Mathematikers Andrian Valcq abgelöst.

Wie wir sehen, ging die Entwicklung der gebräuchlichen Logarithmentafeln von vielstelligen Mantissen zu kürzeren über und ist bis in unsere Tage nicht abgeschlossen, da auch jetzt vielen der einfache Gedanke nicht bewusst ist, dass die Genauigkeit der Berechnungen nicht die Genauigkeit der Abmessungen übertreffen kann. Die Verkürzung der Mantissen zieht zwei wichtige praktische Schlussfolgerungen nach sich:

1. eine merkliche Verringerung des Tabellenumfanges und

2. eine damit verbundene Vereinfachung ihrer Verwendung, und folglich auch eine Beschleunigung der mit ihrer Hilfe ausgeführten Berechnungen.

Die siebenstelligen Logarithmen von Zahlen nehmen an 200 Seiten ein, die 5stelligen 30 Seiten eines um die Hälfte kleineren Formats, die 4stelligen nehmen nur ein Zehntel an Umfang ein, sie haben auf 2 Seiten Großformat Platz, die 3stelligen haben sogar auf einer Seite Platz.

Darüber hinaus bedeutet das Rechnen mit Logarithmentafeln geringerer Stellenzahl natürlich eine große Zeitersparnis. So wurde beispielsweise festgestellt, dass für eine Berechnung mit Hilfe von fünfstelligen Logarithmen nur ein Drittel der Zeit benötigt wurde, die man bei der entsprechenden Berechnung mit Hilfe von siebenstelligen Logarithmentafeln benötigt.

Logarithmische Raritäten

Werden die Rechnungsanforderungen des praktischen Lebens und des technischen Gebrauchs vollkommen durch 3- und 4stellige Tabellen gewährleistet, so stehen andererseits dem Theoretiker Tabellen mit einer bei weitem größeren Zahl von Stellen zur Verfügung als sogar die 14stelligcn Briggsschen Logarithmen.

Die Logarithmen sind in ihrer Mehrheit irrationale Zahlen. Sie können immer nur durch gerundete Zahlen dargestellt werden. Die Annäherung kann um so genauer werden, je mehr Stellen die gerundete Zahl hat.
Für wissenschaftliche Arbeiten erweist sich manchmal die Genauigkeit 14stelliger Logarithmen als unzureichend.[17] Aus diesem Grunde stehen den Mathematikern noch umfangreichere Logarithmentafeln zur Verfügung. Da gibt es z. B. die 20 stelligen Logarithmen der Zahlen von 2 bis 1200, die in Frankreich 1795 von Callet herausgegeben wurden.

Für eine noch begrenztere Gruppe von Zahlen existieren Logarithmentafeln mit einer gewaltigen Stellenzahl, wahre logarithmische Wunder, deren Existenz, wie ich mich überzeugte, sogar von vielen Mathematikern nicht vermutet wird. Hier diese Logarithmenriesen; sie alle sind keine dekadischen, sondern natürliche Logarithmen:[18]

die 48 stelligen Tabellen Wolframs für die Zahlen bis 10000;
die 61 stelligen Tabellen Parkhursts und
schließlich das logarithmische Superwunder, die 260stelligen Logarithmen von Adams.

Im letzteren Falle besitzen wir übrigens keine Tabelle, sondern nur die natürlichen Logarithmen von fünf Zahlen: 2, 3, 5, 7, 10 und den 260stelligen Umrechnungsfaktor für ihre Umrechnung in dekadische Logarithmen.
Es ist nicht schwer, einzusehen, dass man mit Hilfe der Logarithmen dieser fünf Zahlen durch einfache Addition oder Multiplikation die Logarithmen einer Vielzahl von zusammengesetzten Zahlen erhalten kann. Der Logarithmus der Zahl 12 ist z. B. gleich der Summe der Logarithmen: 2 und 2 und 3.
Zu den logarithmischen Wandern könnte man auch mit vollem Recht den Rechenstab zählen.

[17] 14stellige Briggsche Logarithmen gibt es übrigens nur für die Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 101000.
[18] Natürliche Logarithmen werden die Logarithmen genannt, die nicht die Basis 10, sondern die Basis 2,718... haben. Über diese Logarithmen wird noch später berichtet werden.

Logarithmen auf der Bühne

In Varietés treten manchmal "Rechenkünstler" auf, die das Publikum durch ihre enorme Rechenfertigkeit in Erstaunen setzen. Jemand hörte davon, dass ein Rechenvirtuose im Kopf hohe Wurzeln aus vierstelligen Zahlen zieht. Der junge Mann nahm sich nun fest vor, den Rechenkünstler auf die Probe zu stellen.
Er bereitete zu Hause auf dem Wege umständlicher Berechnungen die 31. Potenz irgendeiner Zahl vor und war gewillt, den Rechner durch einen 35stelligen Zahlenkreuzer niederzuschmettern. Als die Vorstellung lief, konnte der junge Mann auch tatsächlich auf die Bühne kommen und sagte nun zu dem Rechner: "Versuchen Sie, die 31. Wurzel aus der folgenden 35 stelligen Zahl zu ziehen!"
Damit schrieb er die so mühsam eingeprägte Zahl an die Tafel. Aber ehe er noch die Zahl vollständig angeschrieben hatte, nannte der Rechner schon den Wurzelwert, die 13. Ohne die Zahl zu kennen, zog er aus ihr die Wurzel, ja sogar die 31. Wurzel und sogar noch im Kopf und sogar noch mit der Geschwindigkeit eines Blitzes!

Der junge Mann war verblüfft, vernichtet, obwohl es dabei nichts Übernatürliches gibt. Das Geheimnis besteht einfach darin, dass es nur eine Zahl gibt, nämlich die 13, die in der 31. Potenz ein 35 stelliges Resultat ergibt. Zahlen, die kleiner als 13 sind, ergeben weniger als 35 Ziffern, größere mehr.

Jedoch, woher wusste der Rechner das? Wie ermittelte er die Zahl 13? Ihm halfen die Logarithmen, zweistellige Logarithmen, die er für die ersten 15 bis 20 Zahlen kennt. Es ist überhaupt nicht schwer, sie sich einzuprägen. Besonders leicht ist das Einprägen, wenn man sich dessen bedient, dass der Logarithmus einer zusammengesetzten Zahl gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren des Produktes ist.
Wenn Sie die Logarithmen der Zahlen 2, 3 und 7 fest kennen, dann kennen Sie bereits die Logarithmen der ersten zehn natürlichen Zahlen.[19]

Für die Zahlen von 11 bis 19 ist es erforderlich, die Logarithmen von vier weiteren Zahlen zu kennen. Wie es auch sei, der Bühnenrechner verfügte gedanklich über folgende Tabelle zweistelliger Logarithmen:

Zahlen	Logarithmen	Zahlen	Logarithmen
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

Der mathematische Trick, der den jungen Mann verblüffte, bestand in folgendem:

$$\lg \sqrt[31]{\text{(ganze Zahl mit 35 Ziffern)}} = \frac{34,...}{31}$$

[19] Es ist z.B. $\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2$.

Der gesuchte Logarithmus kann sich zwischen $\frac{34}{31}$ und $\frac{34,99}{31}$ oder zwischen 1,09 und 1,13 befinden.

In diesem Zwischenraum gibt es nur den Logarithmus einer ganzen Zahl, nämlich 1,11, der Logarithmus von 13, somit ist auch das verblüffende Resultat ermittelt.
Natürlich muss man, um das alles schnell im Kopf ausrechnen zu können, über die Findigkeit und Fertigkeit eines Berufsrechners verfügen. Die Sache selbst ist aber in Wirklichkeit, wie Sie sehen, äußerst einfach. Sie können jetzt auch selbst ähnliche Späße durchführen, wenn nicht im Kopf, so auf dem Papier.

Möge Ihnen die Aufgabe vorgelegt sein: Es ist die 64. Wurzel aus einer 20stelligen Zahl zu ziehen. Ohne sich darüber zu informieren, was das für eine Zahl sei, können Sie das Resultat des Radizierens bekanntgeben: Die Wurzel ist gleich 2. Tatsächlich ist

$$\lg \sqrt[64]{\text{(ganze Zahl mit 20 Ziffern)}} = \frac{19,..}{64}$$

Der Logarithmus muss sich folglich zwischen $\frac{19}{64}$ und $\frac{19,99}{64}$ befinden, d. h. zwischen 0,29 und 0,32.
Es gibt nur einen Logarithmus für eine ganze Zahl in diesem Intervall, nämlich 0,30. Damit erhalten wir als Numerus die Zahl 2.

Wenn Sie dem Aufgabensteller nun noch die Zahl mitteilen können, die er eigentlich niederschreiben wollte, so wird er noch mehr erstaunt sein. Bei 2^{64} handelt es sich nämlich um die berühmte "Schachzahl":

$$18446744073709551616$$

Logarithmen auf dem Viehhof

Aufgabe: Die Menge des sogenannten "erhaltenden" Futters, d.h. die geringste Futtermenge, die notwendig ist, um die Verluste des Organismus für die Wärmeabgabe, die Arbeit der inneren Organe und den Wiederaufbau der absterbenden Zellen u. ä.[20] zu ersetzen, ist proportional der Oberfläche des Körpers eines Tieres.
Es soll nun der Kaloriengehalt des erhaltenden Futters für einen Ochsen, der 420 kg wiegt, ermittelt werden, wenn unter den gleichen Bedingungen ein Ochse von 630 kg Masse 13500 Kalorien benötigt.

Lösung: Um diese praktische Aufgabe aus dem Gebiet der Viehzucht zu lösen, ist es notwendig, außer der Algebra auch die Geometrie zu Hilfe zu nehmen. Entsprechend der Bedingung der Aufgabe ist der gesuchte Kaloriengehalt x proportional der Oberfläche (A_O) des Ochsen, also $\frac{x}{13500} = \frac{A_{O_1}}{A_{O_2}}$, wobei A_{O_2} die Körperoberfläche des Ochsen ist, der 630 kg wiegt.
Aus der Geometrie wissen wir, dass sich die Oberflächen A_O ähnlicher Körper verhalten wie die Quadrate ihrer linearen Stücke, z.B. der Körperkanten (a). Die Volumina (und

[20] Im Unterschied zum "produktiven" Futter, d.h. des Teils des Futters, das für den Aufbau benötigt wird.

folglich die Massen) verhalten sich dagegen wie die Kuben der linearen Stücke. Deshalb gilt:

$$\frac{A_{O_1}}{A_{O_2}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \qquad ; \qquad \frac{420}{630} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}}$$

und weiter:

$$\frac{x}{13500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}, \qquad x = 13500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Mit Hilfe der Logarithmentafeln ermitteln wir $x = 10300$. Der Ochse benötigt 10300 Kalorien.

Die Sterngrößen

Die Skale der Sterngrößen ist eine logarithmische Skale. Die Astronomen teilen die Sterne nach den Stufen der sichtbaren Helligkeit in Sterne erster Größe, zweiter Größe, dritter Größe usw. ein.
Die aufeinanderfolgenden Sterngrößen stellen dabei die Glieder einer arithmetischen Folge dar.

Ihre physikalische Helligkeit ändert sich aber nach einem anderen Gesetz. Die objektiven Helligkeiten stellen eine geometrische Folge mit dem Quotienten 2,5 dar. Man wird sicher einsehen, dass die "Größe" eines Sterns nichts anderes ist als der Logarithmus seiner physikalischen Helligkeit.
Ein Stern dritter Größe ist z. B. um $2,5^{3-1}$ heller als ein Stern erster Größe, d. h., 6,25 mal.[21] Wenn also ein Astronom die sichtbare Helligkeit von Sternen einschätzt, so arbeitet er eigentlich mit Logarithmen, die auf der Basis 2,5 aufgebaut sind.

Ähnlich verhält es sich mit der Lautstärke. Man bewertet die Lautstärke mit der Einheit Phon. Das leise Rascheln von Blättern hat danach eine Lautstärke von 10 Phon, lautes Sprechen von 60 Phon und ein Motorrad verursacht etwa 100 Phon. Das Ansteigen der Lautstärke nach dieser Skale empfinden wir als ein Ansteigen nach einer arithmetischen Zahlenfolge.

Die Schallstärke jedoch, die die Energie dieser Geräusche darstellt, durchläuft beim Ansteigen in der genannten Weise eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten 10. Das Blättersäuseln hat z. B. die Schallstärke 10^1, lautes Sprechen die Stärke 10^6. Daraus können wir ersehen, dass die Lautstärke wie der Logarithmus der Schallstärke anwächst.

Beide Erscheinungen, die Einschätzung der Sterngröße wie auch der Lautstärke, beruhen darauf, dass die Empfindung des Auges wie auch des Ohres annähernd proportional mit dem Logarithmus der Lichtstärke bzw. der Schallstärke wächst?

[21] Anmerkung: Dem Autor ist hier ein Fehler unterlaufen. Der Stern erster Grüße ist 6.25 mal heller als der Stern 3. Größe.

Dieses sogenannte psychophysikalische Gesetz wird auch folgendermaßen formuliert: Die Größe der Empfindung ist proportional dem Logarithmus der Erregungsgröße.
Wie wir sehen, haben die Logarithmen auch auf dem Gebiet der Psychologie eine Bedeutung.

Vermächtnis auf Hunderte von Jahren

Wer hörte nicht von der legendären Zahl von Weizenkörnern, die der Erfinder des Schachspiels für sich als Belohnung gefordert haben soll? Diese Zahl entstand auf dem Wege der aufeinanderfolgenden Verdoppelung der Eins: Für das erste Feld des Schachbrettes forderte der Erfinder 1 Korn, für das zweite 2 usw., bis zum letzten, dem 64. Feld.

Jedoch wachsen die Zahlen nicht nur bei aufeinanderfolgender Verdoppelung, sondern auch schon bei einer überaus gemäßigteren Vergrößerung erstaunlich schnell an. Kapital, das 5% Zinsen bringt, vergrößert sich in einem Jahr auf das 1,05 fache. Das Anwachsen ist zunächst zwar nicht so augenfällig, liegt es jedoch über einen längeren Zeitraum hinweg auf der Bank, so wächst es zu einer gewaltigen Summe an.

Darauf beruht auch die unerwartet starke Vergrößerung von Beträgen, die eine verhältnismäßig lange Zeit auf dem Konto gestanden haben. Es erscheint merkwürdig, dass zuweilen in Testamenten von Leuten, die gar nicht einmal über große Geldmittel verfügten, Verfügungen über die Zahlung großer Kapitalien gemacht werden.
In diesem Zusammenhang soll das Testament des berühmten amerikanischen Staatsmannes Benjamin Franklin nicht unerwähnt bleiben. Darin steht unter anderem:

"Ich vertraue der Bürgerschaft von Boston tausend Pfund Sterling an. Wenn sie diese tausend Pfund annimmt, so soll sie den Betrag ausgesuchten Bürgern übertragen. Diese Bürger sollen die finanziellen Mittel an Handwerker mit 5% jährlich verleihen.[22]
Die Summe erhöht sich dann nach hundert Jahren auf 131000 Pfund Sterling. Ich wünsche, dass dann 100000 Pfund für den Bau gemeinnütziger Gebäude verwendet werden und die restlichen 31000 Pfund mit Zinsen auf 100 Jahre angelegt werden. Nach Ablauf des zweiten Jahrhunderts wächst die Summe auf 4061000 Pfund Sterling an, von denen ich 1060000 Pfund den Einwohnern Bostons zur Verfügung stelle und 3000000 der Regierung des Staates Massachusetts. Weiter wage ich nicht, meine testamentarischen Bestimmungen auszudehnen."

Indem er nur 1000 Pfund zurücklässt, verteilt Franklin doch Millionen. Hier liegt jedoch überhaupt kein Fehler vor.
Die mathematische Berechnung bestätigt, dass seine Vorstellungen vollkommen real waren. Der Betrag von 1000 Pfund, der sich jährlich auf das 1,05fache vergrößert, muss nach 100 Jahren $1000 \cdot 1,05^{100}$ Pfund ergeben. Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe von Logarithmen ausrechnen:

$$x = 1000 \cdot 1,05^{100} \qquad , \qquad \lg x = \lg 1000 + 100 \lg 1,05 = 5,11893$$

Daraus folgt: $x = 131000$.

[22] In Amerika gab es zu dieser Zeit noch keine Krediteinrichtungen.

Das, entspricht dem Text des Testaments. Ferner erhöht sich der Betrag von 31000 Pfund im Laufe des folgenden Jahrhunderts auf $y = 31000 \cdot 1,05^{100}$, woraus wir mit Hilfe der Logarithmen $y = 4076500$ Pfund ermitteln. Das ist eine Summe, die sich nur wenig von der im Testament angegebenen unterscheidet.

Eine andere Aufgabe dieser Art wurde einem Buch von Saltykow entnommen:
"Porfiri Wladimirytsch hatte sich nach dem Mittagessen bereits ausgeschlafen und saß im Arbeitszimmer mit der Niederschrift endloser Zahlenreihen beschäftigt.
Diesmal interessierte ihn die Frage, wieviel Geld er jetzt besitzen würde, wenn seine Mutter die vom Großvater Piotr Iljitsch bei seiner Geburt geschenkten hundert Papierrubel sich nicht angeeignet, sondern auf den Namen des kleinen Porfiri bei einer Bank eingezahlt hätte. Es wären, wie er feststellte, nur achthundert Papierrubel gewesen."[23]

Nehmen wir an, dass Porfiri im Augenblick der Berechnung 50 Jahre alt war und dass er die Berechnung richtig ausführte (die Annahme ist wenig glaubwürdig, da Golowlew kaum die Logarithmen kannte und sich mit schwierigen Prozenten ab- mühte). Wieviel Prozent zahlte damals die Bank?

Ununterbrochenes Wachsen des Kapitals

In den Sparkassen kommen jährlich zum Grundkapital die Zinsgelder hinzu. Bleibt das Kapital mehrere Jahre auf der Bank, so wächst das Kapital schneller an, da an der Zinsbildung eine größere Summe teilnimmt. Beschäftigen wir uns mit dem folgenden rein theoretischen, überaus vereinfachten Beispiel.

Mögen auf der Sparkasse 100 Rubel mit 100% Jahreszinsen eingebracht worden sein. Kommen die Zinsgelder erst nach Ablauf eines Jahres zum Grundkapital hinzu, so wächst der Betrag von 100 Rubeln zu diesem Zeitpunkt auf 200 Rubel an.
Überlegen wir jetzt, wie der Betrag von 100 Rubeln anwächst, wenn man die Zinsgelder dem Grundkapital jeweils nach Ablauf eines halben Jahres hinzufügt. Nach Ablauf des ersten halben Jahres wachsen 100 Rubel auf 100 Rubel · 1,5 = 150 Rubel an. Nach einem weiteren Halbjahr sind es schon 150 Rubel · = 225 Rubel.

Fügt man die Zinsen jeweils nach $\frac{1}{3}$ Jahr hinzu, so wächst der Betrag von 100 Rubeln nach Ablauf eines Jahres auf 100 Rubel · $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$ ≈ 237 Rubel 3 Kopeken.
Wenn man nun die Zuführung der Zinsen in immer kleineren Bruchteilen eines Jahres durchführt, so dass der Faktor vielleicht zu 1,1; 1,01, 1,001 wird, dann erhält man als Betrag am Ende des Jahres:

100 Rubel $\cdot 1,1^{10}$ ≈ 259 Rubel 37 Kopeken,
100 Rubel $\cdot 1,01^{100}$ ≈ 270 Rubel 48 Kopeken,
100 Rubel $\cdot 1,001^{1000}$ ≈ 271 Rubel 69 Kopeken.

Mit Methoden der höheren Mathematik lässt sich beweisen, dass bei einer unbegrenzten Verkürzung der Angliederungstermine das angewachsene Kapital nicht unbegrenzt ansteigt, sondern sich einer gewissen Grenze nähert, die annähernd gleich 271 Rubel

[23] Entnommen Saltykow-Schtschedrin Die Herren Golowlew. 1. Aufl. Rütten & Loening, Berlin 1952.

83 Kopeken ist.[24]
Um mehr als 2,7183 mal kann sich das Kapital, das mit 100% verzinst ist, nicht vergrößern, auch wenn sich die angewachsenen Zinsen mit dem Grundkapital jeweils nach einer Sekunde vereinigen würden.

Die Zahl e

Die erhaltene Zahl 2,718..., die in der höheren Mathematik eine große Bedeutung hat, eine nicht geringere als zum Beispiel die berühmte Zahl π, hat als besondere Bezeichnung den Buchstaben e. Das ist eine irrationale Zahl.
Sie kann durch eine endliche Anzahl von Ziffern nicht erschöpfend dargestellt werden[25].
Sie wird deshalb mit beliebiger Genauigkeit, mit Hilfe folgender Reihe angenähert:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...$$

Aus dem vorher angeführten Beispiel über die Verzinsung des Kapitals nach kürzerer Zeit ist leicht zu ersehen, dass die Zahl e die Grenze des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei unendlichem Anwachsen von n ist.

Aus vielerlei Gründen, die wir hier nicht erörtern können, kann man die Zahl e sehr zweckentsprechend als Basis eines Logarithmensystems verwenden. Solche Tabellen ("natürlicher Logarithmus") finden breite Anwendung in der Wissenschaft und Technik.
Die Logarithmenriesen aus 48, aus 61, aus 102 und 260 Ziffern, über die wir früher schon sprachen, besitzen als Basis auch die Zahl e.

Die Zahl e erscheint nicht selten dort, wo man sie überhaupt nicht erwartet hat. Stellen wir uns z. B. folgende Aufgabe:
"In welche Teile muss man eine gegebene Zahl zu zerlegen, damit das Produkt aller Teile ein Maximum ist?"

Wir wissen schon, dass die Zahlen das größte Produkt bei einer konstanten Summe dann ergeben, wenn sie untereinander gleich sind. Es ist klar, dass man die Zahl a in gleiche Teile gliedern muss. In wieviel gleiche Teile aber genau?
In zwei, in drei oder in zehn? Mit Methoden der höheren Mathematik kann man feststellen, dass das größte Produkt entsteht, wenn die Teile möglichst nahe an die Zahl 3 herankommen.
Die Zahl 10 z. B. muss man in eine solche Anzahl gleicher Teile zerlegen, dass die Teile möglichst nahe bei 2,718... liegen. Deshalb muss man den Quotienten $\frac{10}{2{,}718...}=3,678...$ ermitteln.

Da es unmöglich ist, in 3,678... gleiche Teile zu zerlegen, muss man als Divisor die nächste ganze Zahl 4 wählen.
Wir erhalten folglich das größte Produkt der Teile von 10, wenn diese Teile gleich $\frac{10}{4}$, also 2,5 sind.

[24] Bruchteile von Kopeken wurden weggelassen.
[25] Außerdem ist sie, wie auch die Zahl π, transzendent, d. h., sie kann nicht als Resultat irgendeiner algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten entstehen.

Das bedeutet, $(2,5)^4 = 39,0625$ ist die größte Zahl, die bei der Multiplikation gleicher Teile von 10 entstehen kann. Das finden wir bestätigt, wenn wir 10 in 3 oder 5 gleiche Teile zerlegen. Dann ergibt sich $\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37$ bzw. $\left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32$.

Die Zahl 20 muss, wenn man das größte Produkt ihrer Teile erhalten will, in 7 gleiche Teile zerlegt werden, da $20 : 2,718... \approx 7,36 \approx 7$ ist.
Die Zahl 50 muss man in 18 Teile zerlegen und 100 in 37, weil $50 : 2,718... \approx 18,4$ und $100 : 2,718... \approx 36,8$ ist.

Die Zahl e spielt eine große Rolle in der Mathematik, der Physik, der Astronomie und in anderen Wissenschaften. Hier einige Fragen, bei deren mathematischer Betrachtung man sich dieser Zahl bedienen muss (die Reihe könnte man unbegrenzt fortsetzen):
die barometrische Höhenformel (Verringerung des Drucks mit der Höhe), die Eulersche Formel[26], das Gesetz der Abkühlung von Körpern, der radioaktive Zerfall und das Alter der Erde, Pendelschwingungen in der Luft, die Formel Ziolkowskis für Raketengeschwindigkeiten, Schwingungserscheinungen im Schwingkreis, Zellenwuchs.

Wo steckt der Fehler?

Als Ergänzung zu den entsprechenden Aufgaben im Teil 5 sei noch ein Beispiel gleicher Art angeführt, in dem der "Beweis" der Ungleichung $2 > 3$ gebracht wird.
Diesmal ist am Beweis das Logarithmieren beteiligt. Die Untersuchung beginnt mit der Ungleichung

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$$

die unzweifelhaft richtig ist. Dann folgt eine Umwandlung:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

die ebenfalls keinen Zweifel zulässt. Der größeren Zahl entspricht der größere Logarithmus, das bedeutet, dass

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 3\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

ist. Wir kürzen nun noch durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten tatsächlich:

$$2 > 3$$

Worin besteht der Fehler dieses Beweises?

Lösung: Der Fehler besteht darin, dass beim Kürzen durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ das Ungleichheitszeichen nicht geändert wurde ($>$ in $<$). Das hätte nämlich unbedingt geschehen müssen, da der $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ eine negative Zahl ist.
Hätten wir nicht mit der Basis 10, sondern einer anderen, kleiner als $\frac{1}{2}$, multipliziert, so wäre $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ positiv; wir hätten dann aber nicht das Recht gehabt zu behaupten, dass der größeren Zahl der größere Logarithmus entspricht.

[26]Siehe: Der Riese von Jules Verne und die Eulersche Formel in Unterhaltsame Physik, Teil Mechanik, S. 35 (Best.Nr. 08 101-1). Volk und Wissen, Volkseigener Verlag Berlin 1962.