
Ju. A. Šaškin

**Ecken, Flächen, Kanten
Die Eulersche Charakteristik**

1989 Deutscher Verlag der Wissenschaften

Übersetzung: H.-D. Hecker, U. Ahlfeld, M. Firchau, D. Herwig, R. Möller, E. Probst

MSB: Nr. 136

Abschrift und LaTex-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Einer der bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts war Leonhard Euler (1707-1783). Er wurde in Basel in der Schweiz geboren, lebte seit 1727 in Petersburg, danach in Berlin und anschließend wieder in Petersburg. Euler spielte eine hervorragende Rolle in der Entwicklung von Mathematik, Mechanik, Physik und Technik. Er war ein Pionier wissenschaftlicher Forschungen zur Mathematik in Russland.

Im Jahre 1758 publizierte L. Euler in den "Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften" einen Beweis der Formel

$$e - k + f = 2 \quad (0.1)$$

die die Anzahl e der Ecken, die Anzahl k der Kanten und die Anzahl f der Flächen eines beliebigen konvexen Polyeders in Beziehung zueinander setzt.

In der vorliegenden Broschüre werden die Eulersche Formel (0.1), zu ihr analoge Beziehungen und Anwendungen behandelt. Wir nehmen beispielsweise an; dass endlich viele Geraden in der Ebene gegeben seien, die sich in e Punkten (den "Ecken") schneiden, die die Ebene in f "Flächen" zerlegen und selbst von den Ecken in k "Kanten" zerlegt werden. Dann erhält man die Beziehung

$$e - k + f = 1 \quad (0.2)$$

So wie die Formel (0.1) auch für beliebige konvexe Polyeder richtig ist, gilt die Formel (0.2) für eine beliebige Familie von Geraden in der Ebene. Sie hängt weder von deren Anzahl noch von ihrer gegenseitigen Lage ab.

Allgemein gilt folgender bemerkenswerter Satz: Ist irgendeine Figur einer bestimmten Klasse gegeben, die wir in Teile (Flächen, Ecken und Kanten) zerlegen, die auf bestimmte Weise aneinander "angrenzen", so ist die Summe $e - k + f$, die die Eulersche Charakteristik der Figur genannt wird, eine konstante Größe.

Im ersten Teil des Bändchens (§§ 1-7) werden die Eulerschen Charakteristiken für Gerade, Ebene und den dreidimensionalen Raum, für Polygone (Vielecke) verschiedener Klassen (und für den Rand konvexer Polyeder berechnet. In den §§ 4 und 5 wird die Eulersche Charakteristik auf die Berechnung der Oberfläche eines Polyeders und die Summe seiner Außenwinkel angewendet.

Im zweiten Teil (§§ 8-12) wird die Eulersche Charakteristik einer Figur (beispielsweise eines Polygons) axiomatisch als "additive Funktion" dieser Figur definiert. Hinsichtlich dieser Additivität ähnelt sie dem Flächeninhalt eines Polygons.

Um den Flächeninhalt der Vereinigung zweier Polygone zu finden, muss man bekanntlich von der Summe ihrer Flächeninhalte den Flächeninhalt ihres Durchschnitts subtrahieren. Das ist die Additivitätseigenschaft des Flächeninhalts.

Für die Eulersche Charakteristik wird eine analoge Eigenschaft axiomatisch gefordert. Das zweite Axiom (Normierungsaxiom) unterscheidet sich jedoch für Flächeninhalt und Charakteristik. Während für den Flächeninhalt gefordert wird, dass er für das Einheitsquadrat gleich 1 ist, wird die Eulersche Charakteristik so normiert, dass sie für jedes

konvexe Polyeder gleich 1 ist.

In § 9 wird die Existenz einer den Axiomen genügenden Eulerschen Charakteristik nachgewiesen, während in § 10 die Äquivalenz beider Definitionen gezeigt wird.

Der abschließende § 12 enthält Anwendungen der Eulerschen Charakteristik auf gewisse Aufgaben der kombinatorischen Geometrie, einer neuen Richtung der Mathematik, mit der sich der Leser beispielsweise mit Hilfe der Bücher [2], [5] und [6] bekannt machen kann (vgl. das Literaturverzeichnis am Schluss des Buches).

Es wird hier weder etwas über die topologische Invarianz der Eulerschen Charakteristik noch etwas über ihre Rolle in der Topologie ausgesagt.

Wir verweisen den Leser in diesem Zusammenhang auf das Buch von V. G. Boltjanskij und V. A. Efremovič. Der Autor dankt I. Ja. Gusak und A. G. Netrebin für die Unterstützung bei der Anfertigung des Büchleins.

Ju. A. Šaškin

Inhaltsverzeichnis

1 Die Eulerschen Formeln für Gerade und Ebene	5
2 Was versteht man unter der Eulerschen Charakteristik?	11
3 Die Eulersche Charakteristik für Polygone	18
4 Die Eulersche Charakteristik und die Summe der Außenwinkel eines Polygons	27
5 Die Anwendung der Eulerschen Charakteristik auf die Berechnung von Flächeninhalten	31
6 Die Eulersche Formel für den Raum	37
7 Die Eulersche Formel für konvexe Polyeder und Folgerungen daraus	41
8 Axiome für die Eulersche Charakteristik	48
9 Ein Existenzbeweis für die Eulersche Charakteristik	55
10 Die Äquivalenz der beiden Definitionen für die Eulersche Charakteristik	60
11 Elementare Figuren auf der Sphäre und ihre Eulerschen Charakteristiken	69
12 Weitere Anwendungen der Eulerschen Charakteristik	73
13 Lösungen, Antworten, Hinweise	79

1 Die Eulerschen Formeln für Gerade und Ebene

Der einfachsten Variante der Eulerschen Formel begegnet man bei der Zerlegung einer Geraden g mittels einer endlichen Menge von Punkten. Wählt man e Punkte auf einer solchen Geraden aus, so zerlegen diese die Gerade in $e - 1$ Strecken und zwei Strahlen, also insgesamt in $e + 1$ Teile. Wir bezeichnen die Anzahl dieser Teile mit k und erhalten

$$e - k = -1 \quad (1.1)$$

Das ist die Eulersche Formel für die Gerade. Sie zeigt, dass die Differenz $e - k$ konstant ist, also weder von der Anzahl der ausgewählten Punkte noch von deren Lage abhängt. Diese Differenz ist folglich eine Eigenschaft der Geraden.

Wir betrachten nun Ebenen e und versuchen, für diese eine der Formel (1.1) analoge Formel zu erhalten. Für die Ebene ist diese Frage komplizierter und interessanter. Eine entsprechende Zerlegung wird hier von endlich vielen Geraden realisiert, wobei diese Geraden in der Ebene verschiedene Lagen einnehmen können. Sie können sich z.B. schneiden oder zueinander parallel sein. Für drei Geraden gibt es bereits vier Möglichkeiten:

Es können alle drei Geraden parallel sein, es können zwei parallel sein und von der dritten geschnitten werden, je zwei können sich schneiden, ohne dass alle drei einen gemeinsamen Punkt haben, und schließlich können alle drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

In Abb. 1 sind die verschiedenen Möglichkeiten dargestellt, wie je vier Geraden zueinander liegen können.

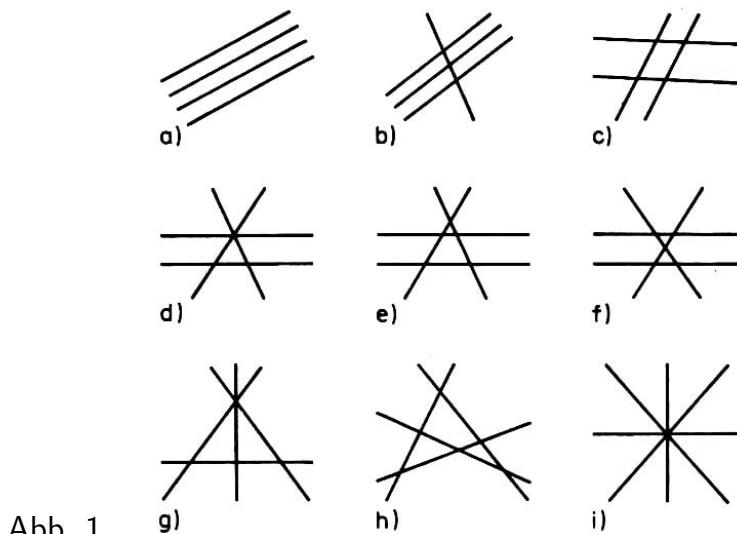


Abb. 1

Man könnte nun je fünf, sechs bzw. noch mehr Geraden und die Möglichkeiten ihrer gegenseitigen Lage betrachten, wobei die Zahl dieser Möglichkeiten natürlich mit der Anzahl der betrachteten Geraden wächst.

Jede Geradenfamilie zerlegt die Ebene in Teile, die man Flächen der Zerlegung nennt. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit f . Die Schnittpunkte der gegebenen Geraden heißen

Ecken und die Teile, in die die Geraden von diesen Ecken zerlegt werden, Kanten der Zerlegung.

Die Ecken- und die Kantenzahl der Zerlegung bezeichnen wir mit e bzw. mit k . Es kann vorkommen, dass eine Zerlegung keine Ecken hat, dass also $e = 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn je zwei der betrachteten Geraden zueinander parallel sind.

Es stellt sich nun heraus, dass zwischen den Größen e , k und f die Beziehung

$$e - k + f = 1 \quad (1.2)$$

besteht. Das ist die Eulersche Formel für die Ebene. Sie zeigt, dass die Summe $e - k + f$ konstant ist, also weder von der Anzahl noch von der gegenseitigen Lage der betrachteten Geraden abhängt. Folglich drückt die Eulersche Formel eine Eigenschaft der Ebene φ aus.

Wir beweisen jetzt die Formel (1.2) für eine Zerlegung, die durch n Geraden in einer Ebene φ gegeben ist. Als erstes bemerken wir folgendes:

Falls die Zerlegung keine Ecken hat, ist (1.2) offensichtlich richtig, weil dann $e = 0$, $k = n$ und $f = n + 1$ ist.

Zweitens beweisen wir ein Lemma, das auch in anderen Fällen nützlich sein wird.

Lemma 1. Sind in einer Ebene endlich viele Geraden gegeben, so kann man eine Gerade angeben, die zu keiner der gegebenen Geraden parallel ist.

Beweis. Gegeben seien die Geraden g_1, \dots, g_m , und O sei irgendein Punkt auf der Geraden g_1 . Wir legen durch den Punkt O die zur Geraden g_i parallele Gerade g'_i (für $i = 2, \dots, m$). Mit φ_i bezeichnen wir den Winkel zwischen den Geraden g_1 und g'_i , wobei wir annehmen wollen, dass $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ gilt.

Im Fall $\varphi_i = 0$ ($i = 2, \dots, m$), wenn also alle gegebenen Geraden zueinander parallel sind, ist die gesuchte Gerade eine beliebige nicht zu g_1 parallele Gerade. Sind nicht alle gegebenen Geraden zueinander parallel, so schließen sie auch von 0 verschiedene Winkel ein.

Wir wählen unter diesen einen kleinsten aus. Dieser sei etwa der Winkel φ_2 . Dann ist die gesuchte Gerade eine beliebige durch O gehende Gerade, die mit g_1 einen positiven Winkel einschließt, der kleiner als φ_2 ist. Damit ist das Lemma 1 bewiesen.

Um schließlich die Formel (1.2) zu beweisen, müssen wir zwei der Größen e , k und f durch die dritte Größe, die wir als bekannt voraussetzen, ausdrücken. Es sei die Zahl e der Ecken bekannt (und natürlich die Anzahl n der Geraden).

Nun sind aber die Zahlen k und f durch n und e nicht eindeutig bestimmt. In Abb. 1 haben die Zerlegungen c) und g) die gleiche Eckenzahl $e = 4$, jedoch verschiedene Flächen- und Kantenzahlen.

Wenn wir uns diese Zerlegungen ansehen, stellen wir fest, dass sie sich in der "Konstruktion" der Ecken unterscheiden. In der Zerlegung c) gehen durch jede Ecke zwei Geraden; in der Zerlegung g) gibt es eine Ecke, durch die drei Geraden gehen.

Um diesen Unterschied zu erfassen, geben wir die folgende Definition. Wir nennen die Anzahl der durch eine Ecke der Zerlegung gehenden Geraden der gegebenen Familie

die Vielfachheit der Ecke.

Die Vielfachheit einer beliebigen Ecke ist also eine natürliche Zahl, die nicht kleiner als 2 ist. Man vermutet nun natürlich, dass die Zahlen k und f festgelegt sind, wenn außer für n und e noch die Werte für die Vielfachheit aller Ecken gegeben sind. Wir werden sehen, dass diese Vermutung richtig ist.

Die Aufzählung der Kanten und Flächen führen wir mit der Gleitebenenmethode (sweep plane, Gleitgeradenmethode) durch.

Es seien g_1, \dots, g_n die gegebenen Geraden und A_1, \dots, A_e die Ecken der Zerlegung (Abb. 2; dort ist $n = 5$ und $e = 7$).

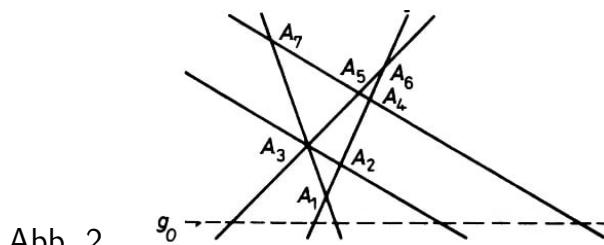


Abb. 2

Wir legen durch jedes Eckenpaar eine Hilfsgerade und bezeichnen diese Geraden mit m_1, \dots, m_p . Natürlich sind auch alle Geraden g_1, \dots, g_n hierbei mit erfasst.

(In Abb. 2 sind die "freien" Hilfsgeraden, die von g_1, \dots, g_n verschieden sind, nicht gezeichnet, damit die Skizze übersichtlich bleibt. Der Leser stellt fest, dass man solche Hilfsgeraden noch durch die Punktpaare $A_1A_5, A_2A_5, A_2A_7, A_3A_4$ und A_6A_7 ziehen müsste.)

Wir zeichnen jetzt unter Ausnutzung von Lemma 1 eine Hilfsgerade g_0 , die zu keiner der Geraden m_1, \dots, m_p parallel ist. Wir nehmen an, dass die Gerade g_0 horizontal liegt und "unterhalb" aller Ecken A_i, A_j verläuft.

Hieraus folgt, dass für jedes Punktpaar A_iA_j die Abstände der Ecken A_i, A_j von der Geraden g_0 verschieden sind.¹

Im folgenden werden wir diesen Sachverhalt mit den Worten "alle Ecken liegen auf unterschiedlicher Höhe" beschreiben, wobei wir an ihre Höhe über dem Niveau der Geraden g_0 denken.

Wir setzen voraus, dass die Ecken in der Reihenfolge wachsender Höhe nummeriert wurden, dass also A_1 die niedrigste Ecke ist (d.h. die Ecke mit dem kleinsten Abstand von g_0), A_2 liege höher als A_1 , aber niedriger als A_3 usw., schließlich sei A_e die höchste Ecke (d.h. die Ecke mit dem größten Abstand von g_0).

Die Gleitgerade g liege horizontal; zu Beginn legen wir sie in die Lage der Geraden g_0 , und danach bewege sich diese Gerade innerhalb der Ebene horizontal "nach oben". Die Gerade g lässt sich nun wie folgt zum Abzählen der Kanten der Zerlegung benutzen: Da sie alle Geraden g_1, \dots, g_n schneidet, jede in "ihrem" speziellen Punkt, trifft sie zu Beginn n Kanten.

¹Wenn nämlich die Ecken A_i und A_j den gleichen Abstand von der Geraden g_0 haben, dann ist die durch A_i und A_j gehende Gerade zu g_0 parallel. Dieser Fall darf aber nach der Konstruktion von g_0 nicht eintreten.

Nun lassen wir die Gerade g parallel zu sich selbst nach oben wandern. Solange sie die niedrigste Ecke A_1 nicht trifft, bleibt die Anzahl der von ihr getroffenen Kanten unverändert gleich n . Diese Zahl ändert sich jedoch nach dem Durchgang durch die Ecke A_1 :

Es erscheinen neue Kanten, deren Anzahl mit der Vielfachheit α_1 der Ecke A_1 übereinstimmt. Die Gesamtzahl der von der Geraden g getroffenen Kanten ist somit gleich $n + \alpha_1$ und bleibt es solange, bis die nächste Ecke A_2 getroffen wird.

Hat diese Ecke die Vielfachheit α_2 , so ist die Anzahl der getroffenen Kanten nach dem Durchgang durch A_2 gleich $n + \alpha_1 + \alpha_2$ usw.

Nach dem Durchgang durch die letzte und die höchste Ecke A_e mit der Vielfachheit α_e wird diese Zahl gleich $n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_e$. Die Gesamtzahl der Kanten der Zerlegung ist also gleich

$$k = n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_e \quad \text{oder kürzer} \quad k = n + \sum_{i=1}^e \alpha_i \quad (1.3)$$

Die Anzahl der Flächen der Zerlegung finden wir nun auf folgende Weise. In der Anfangslage wird die Gerade g von den Geraden g_1, \dots, g_n in $n + 1$ Teile zerlegt. Jeder dieser Teile liegt in der ihm entsprechenden Fläche der Zerlegung und erfasst sie damit. In der Anfangslage trifft die Gerade g also $n + 1$ Flächen.

Daran ändert sich nichts, bis die Gerade g zur Ecke A_1 gelangt. Nach dem Durchgang durch A_1 kommen, wie wir sahen, α_1 Kanten dazu. Offenbar ist dann die Anzahl der von der Geraden g getroffenen Flächen gleich $\alpha_1 - 1$. (Diese neuen Flächen werden zwischen α_1 neuen Kanten eingeschlossen.)

Also ist die Anzahl der bis zu diesem Moment getroffenen Flächen gleich $1 + n + \alpha_1 - 1$. Nach dem Passieren der Ecke A_2 vergrößert sich diese Anzahl um $\alpha_2 - 1$ usw. Wenn schließlich g die letzte und höchste Ecke überstreicht, vergrößert sich die Gesamtzahl der Flächen noch um $\alpha_e - 1$. Daher gilt

$$f = n + 1 + (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \dots + (\alpha_e - 1)$$

oder

$$f = 1 + n + \sum_{i=1}^e (\alpha_i - 1) = 1 + n + \sum_{i=1}^e \alpha_i - \sum_{i=1}^e 1 = 1 + n - e + \sum_{i=1}^e \alpha_i \quad (1.4)$$

Wir haben auf diese Weise die Anzahl der Kanten und die Anzahl der Flächen mit Hilfe der Anzahl der Ecken und ihren Vielfachheiten ausgedrückt. Aus den Formeln (1.3) und (1.4) ist übrigens ersichtlich, dass die Zahlen k und f nur von der Summe der Vielfachheiten abhängen und z.B. nicht von der Reihenfolge, in der sie auftreten. Aus (1.3) und (1.4) erhalten wir jetzt sofort die Eulersche Formel

$$e - k + f = e - n - \sum_{i=1}^e \alpha_i + 1 + n - e + \sum_{i=1}^e \alpha_i = 1$$

Wenn wir nicht unbedingt die Zahlen k und f durch Formeln ausdrücken wollen, lässt sich der Beweis der Eulerschen Formel vereinfachen. Es mögen etwa alle Ecken der Zerlegung innerhalb eines horizontalen Streifens der Breite H liegen (Abb. 3).

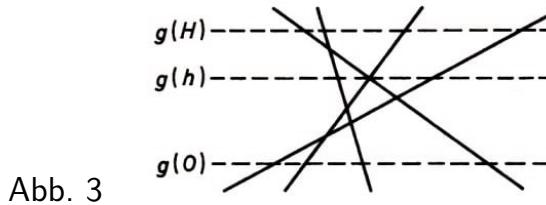


Abb. 3

Mit $g(0)$ bezeichnen wir die untere Grenze dieses Streifens, also die Gerade g in ihrer Anfangslage, mit $g(H)$ die obere Grenze des Streifens, also die Gerade g in ihrer Endlage, und mit $g(h)$ die Gerade g , die sich im Abstand h von $g(0)$ befindet.

Es sei $k(h)$ die Anzahl der Kanten, die von der Gleitgeraden g schon getroffen wurden, wenn diese die Lage $g(h)$ einnimmt. Analog seien $e(h)$ und $f(h)$ definiert.

Die Größen $k(h)$, $e(h)$ und $f(h)$ ändern sich in Abhängigkeit von h . Wir haben zu zeigen, dass ihre Summe $S(h) = e(h) - k(h) + f(h)$ für $h = H$ den Wert 1 annimmt. Für $h = 0$ gilt, wie wir gesehen haben, $e(h) = e(0) = 0$, $k(0) = n$, $f(0) = 1 + n$ und daher $S(0) = 1$.

Beim Durchgang der Geraden g durch die Ecke A_i vergrößert sich die Zahl $k(h)$ um α_i , die von $f(h)$ um $\alpha_i - 1$ und die von $e(h)$ um 1. Also verändert $S(h)$ dabei nicht den Wert. Speziell ist $S(H) = 1$, was zu zeigen war.

Aufgaben

1. Man beweise, dass die Summe $e + k$ für jede Zerlegung einer Geraden mit Hilfe von e Punkten ungerade ist.
2. Man beweise, dass die Summe $e + k + f$ für jede Zerlegung der Ebene durch endlich viele Geraden ungerade ist.
3. Man sagt, dass sich Geraden in der Ebene in allgemeiner Lage befinden, wenn keine zwei von ihnen parallel sind und keine drei von ihnen gemeinsame Punkte haben. Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl n in der Ebene n Geraden in allgemeiner Lage gibt.
4. Man beweise, dass für eine Zerlegung durch n Geraden in allgemeiner Lage die Formeln

$$k = n^2 \quad \text{und} \quad f = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

gelten.

5. Man beweise die Eulersche Formel (1.2) mit der Gleitgeradenmethode unter der Voraussetzung, dass die Gleitgerade zu einer oder zu mehreren Geraden der Familie parallel ist.
6. Man beweise die Eulersche Formel für eine Familie von Geraden in allgemeiner Lage induktiv über die Anzahl der Geraden.
7. Eine ebene Figur heißt beschränkt, wenn sie innerhalb eines Kreises (von eventuell sehr großem Radius) liegt. Sonst heißt sie unbeschränkt. Man bestimme die Anzahl k , der beschränkten Kanten (d.h. Segmente), die Anzahl k_2 der unbeschränkten Kanten

(d.h. Strahlen), die Anzahl f_1 der beschränkten und die Anzahl f_2 der unbeschränkten Flächen für eine Zerlegung der Ebene mit Ecken. Man beweise, dass $e - k_1 + f_1 = 1$ gilt.

8. Offenbar besitzt jede Zerlegung der Ebene unbeschränkte Flächen und unbeschränkte Kanten. Wann hat sie beschränkte Flächen (Kanten)?

2 Was versteht man unter der Eulerschen Charakteristik?

Die in § 1 bewiesenen Eulerschen Formeln ordnen sich in die folgenden bemerkenswerten allgemeinen Erörterungen ein. Es sei Φ eine Figur, die irgendwie in Teile zerlegt ist, die wir Ecken, Kanten bzw. Flächen nennen. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Zerlegung bezeichnen wir mit e , k bzw. f .

Für die Teile der Zerlegung verwenden wir noch eine gemeinsame Bezeichnung: Wir sprechen statt von "Ecken, Kanten und Flächen" der Zerlegung auch von "Zellen der Zerlegung".

Es zeigt sich, dass die alternierende Summe $e - k + f$ für eine beliebige Zerlegung der Figur Φ einen konstanten, von der Art der Zerlegung in Zellen unabhängigen Wert hat. Dieser Wert ist, wie man auch sagt, invariant (d.h. unveränderlich) bezüglich der Zerlegungsart. Die Summe $e - k + f$ heißt Eulersche Charakteristik der Figur und wird mit dem griechischen Buchstaben χ bezeichnet. Nach dieser Definition gilt also

$$\chi(\Phi) = e - k + f$$

Oben wurde gezeigt, dass die Eulersche Charakteristik für die Gerade den Wert -1 und für die Ebene den Wert 1 hat.

In der alternierenden Summe $e - k + f$, die die Eulersche Charakteristik definiert, ist die Anordnung der Summanden nicht willkürlich. Sie entspricht der Dimension der Zellen, die diesen Summanden zugeordnet sind.

Es bezeichnet e die Anzahl der nulldimensionalen, k die Anzahl der eindimensionalen und f die Anzahl der zweidimensionalen Zellen der Zerlegung. Wir bemerken, dass die nulldimensionalen Zellen (oder Ecken) Punkte, die eindimensionalen Zellen (oder Kanten) meistens Strecken und die zweidimensionalen Zellen (oder Flächen) konvexe Polygone sind.

Die hier angegebene Definition für die Eulersche Charakteristik muss noch präzisiert werden. Wir müssen nämlich noch festlegen, welche Figurenklassen wir betrachten, was wir im konkreten Fall unter Zellen verstehen wollen und wie schließlich die Zerlegung einer Figur zu erfolgen hat. Dieser Frage ist fast der gesamte § 2 gewidmet.

Wir betrachten jetzt verschiedene Figurenklassen, für die wir die Eulersche Charakteristik definieren können.

Es seien A_1, \dots, A_n verschiedene Punkte der Ebene. Eine Vereinigung der geradlinigen Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n_1}A_n$ nennt man einen nichtgeschlossenen Streckenzug mit Ecken in diesen Punkten. Die Strecken heißen die Kanten des Streckenzuges.

Ist $n \geq 3$, fällt die erste Ecke mit der letzten zusammen ($A_1 = A_n$) und sind alle anderen Ecken voneinander verschieden, so heißt der Streckenzug geschlossen. Zwei Kanten des Streckenzuges, die eine gemeinsame Ecke haben, heißen benachbart. Ein Streckenzug (geschlossen oder nicht) heißt einfach, wenn keine zwei Kanten, die nicht benachbart sind, gemeinsame Punkte haben. Einen einfachen geschlossenen Streckenzug nennen wir auch eine Kontur.

Offenbar ist die Eulersche Charakteristik $\chi(L) = e - k$ für einen nichtgeschlossenen Streckenzug L gleich 1 und für einen geschlossenen Streckenzug gleich 0. Man zeigt auch leicht, dass sich die Zahl $\chi(L)$ nicht ändert, wenn man innerhalb einer Kante eine beliebige Anzahl m neuer Ecken einfügt und diese so in $m + 1$ neue Kanten zerlegt. Das gilt analog, wenn man umgekehrt mehrere auf einer Geraden liegende aufeinanderfolgende Kanten durch eine Kante ersetzt.

Eine Figur G , die aus endlich vielen Ecken (in der Ebene oder im Raum) und Paaren von Ecken verbindenden Strecken besteht, heißt Graph. Die Strecken heißen die Kanten des Graphen. Jeder Streckenzug ist ein spezieller Graph.

Die Eulersche Charakteristik eines Graphen ist die Differenz $e - k$, sie ist wie bei den Streckenzügen eine Invariante. Es kann der Fall eintreten, dass ein Graph G nur aus n Ecken besteht, also überhaupt keine Kanten hat. Dann ist $\chi(G) = n$.

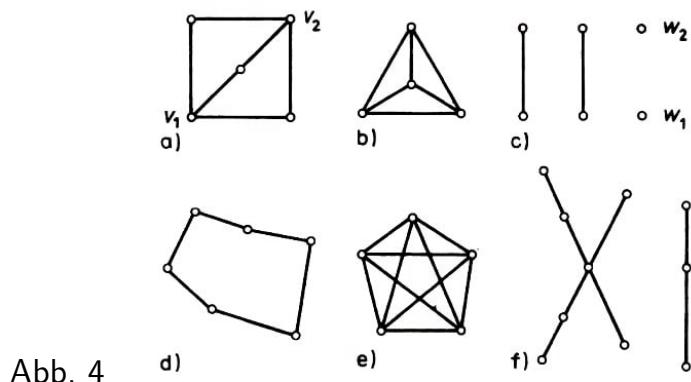


Abb. 4

In Abb. 4 sind Beispiele für Graphen angegeben.

Die Ecken sind als kleine helle Kreise gekennzeichnet. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass einige Kanten auch "freie" Schnittpunkte haben können, die keine Ecken sind. Der Leser wird feststellen, dass die Eulerschen Charakteristiken der Graphen a), b), c), d), e) und f) in dieser Reihenfolge gleich $-1, -2, 4, 0, -5$ bzw. 2 sind.

Die Anzahl der Kanten, die eine Ecke mit anderen Ecken dieses Graphen verbinden, heißt Valenz dieser Ecke. Beispielsweise haben in Abb. 4a die Ecken v_1 und v_2 die Valenz 3, die übrigen Ecken haben die Valenz 2. Der Graph c) hat mit w_1 und w_2 zwei Ecken der Valenz 0 und vier Ecken der Valenz 1. Die Valenz der Ecken des Graphen b) ist 3, die der Ecken des Graphen e) ist 4. Ecken der Valenz 0 nennt man auch isolierte Ecken.

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn man je zwei seiner Ecken durch einen nichtgeschlossenen Streckenzug aus seinen Kanten verbinden kann.

Man nennt einen Graphen planar, wenn man ihn so in einer Ebene darstellen kann, dass sich seine Kanten nur in Ecken überschneiden. Ein solcher Graph ist beispielsweise der sogenannte vollständige Graph mit vier Ecken, der in der Abb. 5a zu sehen ist, denn er lässt sich so "umzeichnen", dass freie Schnittpunkte vermieden werden (Abb. 5b).

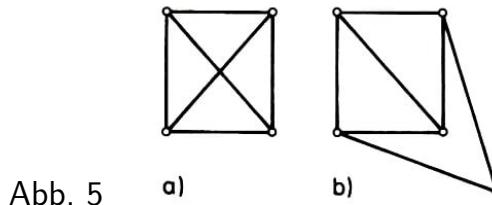


Abb. 5 a)

b)

Allerdings haben wir bei dieser Änderung eine Kante des Graphen durch zwei andere ersetzt und auf diese Weise eine neue Ecke eingefügt. Üblicherweise nimmt man an, dass sich der Graph dabei nicht "verändert", auf jeden Fall hat aber die Eulersche Charakteristik den gleichen Wert.

Wir betrachten außerdem den Graphen der Abb. 4b, der kein anderer als der Graph der Abb. 5a ist, und zwar ohne freie Kantenüberschneidungen und ohne eine neue Ecke. Es sind übrigens alle Graphen der Abb. 4 außer dem Graphen e) planar.

Der sogenannte vollständige Graph mit fünf Ecken der Abb. 4e lässt sich auch nicht nach Einfügen zusätzlicher Ecken ohne "freie" Kantenüberschneidungen in der Ebene zeichnen (vgl. Aufgabe 13).

Es ist interessant, dass sich im Raum jeder Graph ohne freie Kantenüberschneidungen zeichnen lässt. Wir beweisen diese Behauptung.

Der Graph habe e Ecken und k Kanten. Wir betrachten im Raum ein "Buch mit k Blättern" (Abb. 6, $k = 4$) und markieren auf dem "Buchrücken" e Punkte (die Ecken des Graphen). Jeder Kante ordnen wir "ihr" Blatt des Buches zu und zeichnen diese Kante in Form eines aus zwei Strecken bestehenden Streckenzuges.

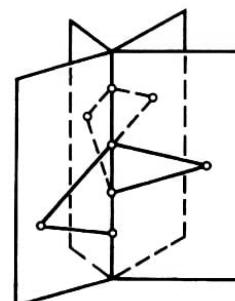


Abb. 6

Offenbar treten dabei keine freien Kantenüberschneidungen auf. Wir haben hier jede Kante durch zwei Kanten und eine neue Ecke ersetzt. Wir teilen ohne Beweis mit, dass man jeden Graphen im Raum ohne Einführung neuer Ecken und ohne Kantenverbindungen darstellen kann.

Wir gehen nun zur nächsten Figurenklasse über. Zunächst betrachten wir mit den konvexen Polygonen die einfachsten ebenen Polygone.

Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Gerade selbst soll dabei beiden Halbebenen zugerechnet werden. Mit anderen Worten, wir nehmen an, dass die beiden Halbebenen abgeschlossen sind. Der Durchschnitt endlich vieler Halbebenen heißt konvexes Polygon (Abb. 7), falls er beschränkt (d.h. in einem Kreis von endlichem Radius enthalten) und zweidimensional ist (d.h., dass er einen Kreis mit von 0 verschiedenen Radius enthält).

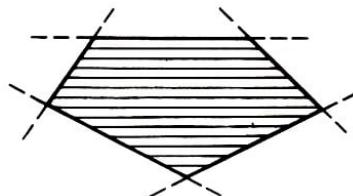


Abb. 7

Die letzte Forderung ist dazu äquivalent, dass ein konvexes Polygon in keiner Geraden enthalten ist.

Wir definieren jetzt beliebige (nicht notwendig konvexe) Polygone.

Eine ebene Figur heißt ein Polygon, wenn sie Vereinigung endlich vieler konvexer Polygone ist und dabei die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Zwei konvexe Polygone haben entweder keine gemeinsamen Punkte, nur einen gemeinsamen Punkt oder eine gemeinsame Seite.
2. Die Figur ist zusammenhängend, d.h., zwei beliebige Punkte lassen sich durch einen einfachen nichtgeschlossenen Streckenzug verbinden, der ganz in der Figur enthalten ist.

Die letzte Bedingung besagt, dass das Polygon nicht aus getrennt liegenden Teilen besteht.

Aus der Definition wird bereits ersichtlich, was wir unter einer Zerlegung eines Polygons in Zellen verstehen wollen. Diejenigen konvexen Polygone, aus denen ein Polygon M zusammengesetzt ist, heißen die Flächen der Zerlegung, die Seiten dieser konvexen Polygone heißen die Kanten der Zerlegung, und ihre Eckpunkte heißen die Ecken der Zerlegung des Polygons M .

Abb. 8 gibt Beispiele für Polygone und ihre Zerlegungen an. Offenbar erlaubt jedes Polygon verschiedene Darstellungen als Vereinigung konvexer Polygone und hat damit verschiedene Zerlegungen.

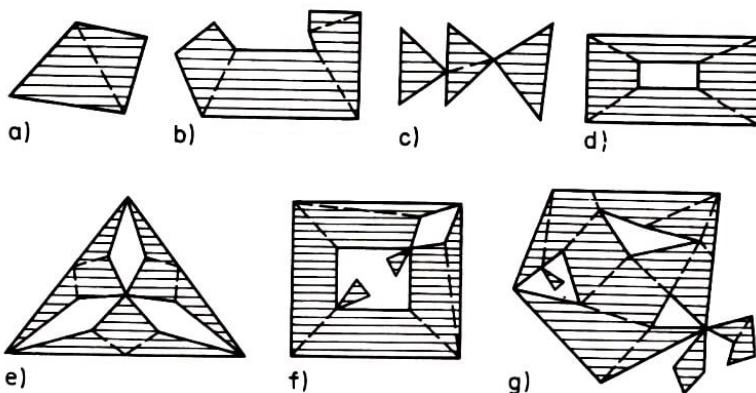


Abb. 8

Damit ist der Begriff der Eulerschen Charakteristik eines Polygons genau erklärt. Wir beweisen im folgenden Paragraphen, dass die Definition der Eulerschen Charakteristik von der gewählten Zerlegung des Polygons unabhängig ist.

Man unterscheidet in einem Polygon auf natürliche Weise zwischen inneren Punkten

und Randpunkten. Dabei heißt ein Punkt eines Polygons innerer Punkt, wenn man um ihn einen ganz im Polygon enthaltenen (eventuell sehr kleinen) Kreis angeben kann. Er heißt Randpunkt des Polygons, wenn jeder Kreis um ihn von noch so kleinem Radius sowohl Punkte des Polygons als auch Punkte seines Komplements bezüglich der Ebene (also Punkte der Ebene, die nicht zum Polygon gehören) enthält.

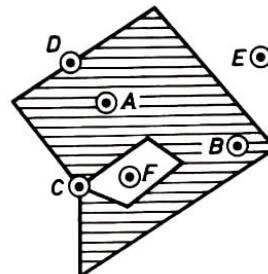


Abb. 9

In Abb. 9 sind die Punkte A und B innere Punkte des Polygons, C und D Randpunkte und E und F Punkte des Komplements. Die Menge der Randpunkte des Polygons heißt Rand des Polygons.

Wir beweisen, dass der Rand eines Polygons M Vereinigung endlich vieler Konturen ist. Dieser Rand ist ein Graph G .

Wir zeigen zunächst, dass jede Ecke dieses Graphen eine gerade Valenz hat.

Es sei dazu A eine Ecke des Graphen. Um A legen wir einen Kreis von so kleinem Radius, dass er nur die Kanten des Graphen schneidet, die von der Ecke A ausgehen. Es seien A_1, A_2, \dots, A_n die aufeinander folgenden Punkte des Durchschnitts des Kreises mit diesen Kanten (Abb. 10).

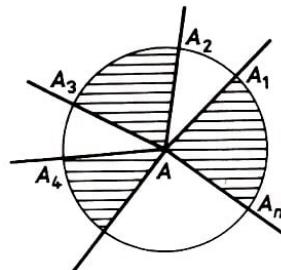


Abb. 10

Wir bewegen uns entlang des Kreises vom Punkt A_1 zum Punkt A_2 , danach zum Punkt A_3 usw. Verlassen wir den Punkt A_1 , so verlassen wir gleichzeitig das Polygon. Beim Durchlaufen des Punktes A_2 begeben wir uns umgekehrt wieder in das Innere des Polygons. Durchlaufen wir den letzten Punkt A_n , so gelangen wir ebenfalls in das Polygon M .

Da immer abwechselnd das Polygon verlassen und wieder betreten wird, muss die Anzahl n offenbar gerade sein.

Jetzt bewegen wir uns entlang der Kante des Graphen, indem wir bei irgendeiner Ecke beginnen und keine Kante zweifach durchlaufen. Da alle Ecken gerade Valenzen haben, können wir jede erreichte Ecke auch wieder verlassen.

Da andererseits die Anzahl der Kanten und Ecken eines Graphen G endlich ist, müssen wir irgendwann zu einer Ecke kommen, bei der wir schon vorher einmal waren. Damit haben wir eine Kontur erhalten.

Wir entfernen die erhaltene Kontur aus dem Graphen G . Der neue Graph hat wieder nur Ecken gerader Valenz. Wenn wir folglich den beschriebenen Prozess mehrmals wiederholen, erhalten wir den gesamten Graphen und damit den Rand des Polygons M als Vereinigung endlich vieler Konturen, was zu zeigen war.

Ein Polygon heißt einfach, wenn sein Rand aus einer Kontur besteht. Beispielsweise sind alle konvexen Polygone einfach, das Polygon b) der Abb. 8 ist ebenfalls einfach. Man könnte zeigen, dass das Komplement eines einfachen Polygons (relativ zur Ebene) zusammenhängend ist. Diese Eigenschaft haben aber nicht nur die einfachen Polygone (vgl. etwa Abb. 8c).

Wenn das Komplement eines Polygons nicht zusammenhängend ist, besteht es aus mehreren zusammenhängenden Teilen, die Komponenten heißen (Abb. 8d, e, f, g). Eine Komponente ist dabei stets unbeschränkt, alle anderen sind beschränkt. Diese beschränkten Komponenten nennen wir Löcher.

Wir beweisen, dass jedes Loch F gemeinsam mit seinem Rand ein Polygon ist. Dazu genügt der Nachweis, dass man es als Vereinigung konvexer Polygone darstellen kann. Wir legen Geraden durch alle Strecken, die zum Rand eines Loches F gehören (Abb. 11).

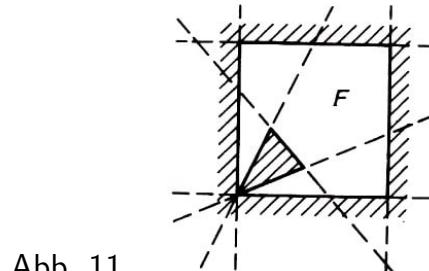


Abb. 11

Dann erhalten wir eine gewisse Zerlegung der gesamten Ebene. Alle beschränkten Flächen dieser Zerlegung sind konvexe Polygone. Es bleibt nur noch zu bemerken, dass alle inneren Punkte jedes dieser Polygone entweder ganz innerhalb eines Loches F oder in seinem Komplement liegen.

Folglich ist das Loch F (zusammen mit seinem Rand) eine Vereinigung von Polygonen der ersten dieser beiden Klassen, was zu zeigen war.

Ein Loch eines Polygons heißt einfach, wenn sein Rand eine Kontur ist. Wir betrachten in den folgenden Paragraphen (§§ 3, 4 und 5) nur einfache Polygone und solche, die man aus einfachen Polygone nach dem "Herausschneiden" endlich vieler einfacher Löcher erhält. Damit schließen wir aus unseren Betrachtungen speziell die Polygone c), f) und g) der Abb. 8 aus.

Wir bemerken noch folgendes zur Zerlegung eines Polygons M in Komponenten. Es ist gelegentlich vorteilhaft anzunehmen, dass die Flächen einer Zerlegung offene konvexe Mengen sind, aus denen das Polygon M (d.h. ohne seinen Rand) zusammengesetzt ist,

und dass die Kanten einer Zerlegung offene Seiten dieser konvexen Polygone (ohne ihre Konturen) sind. Bei einer solchen Auffassung haben verschiedene Zellen einer Zerlegung keine gemeinsamen Punkte. Eine Zerlegung in diesem Sinne werden wir nur einmal in § 7 benutzen.

Aufgabe

9. Es sei eine beliebige Zerlegung der Ebene durch endlich viele Geraden gegeben, und M sei die Vereinigung aller durch sie beschränkten Flächen. Man zeige, dass die Figur zusammenhängend und somit ein Polygon ist.

Man beweise, dass dieses Polygon entweder einfach oder Vereinigung zweier einfacher Polygone mit einem einzigen gemeinsamen Punkt ist.

3 Die Eulersche Charakteristik für Polygone

Wir berechnen nun unter Benutzung der Gleitebenenmethode die Eulersche Charakteristik für Polygone und nehmen dazu im gesamten § 3 an, dass sich alle Ecken der Polygone auf unterschiedlichen Höhen befinden. Mit Hilfe von Lemma 1 lässt sich dies stets erreichen.

Zunächst betrachten wir einfache Polygone und klassifizieren deren Ecken wie folgt. Eine Ecke heiße eine nach oben heraustretende Ecke oder Ecke erster Art, wenn der Innenwinkel des Polygons in dieser Ecke v kleiner als π ist (im weiteren werden alle Winkel im Bogenmaß angegeben) und beide benachbarten Ecken niedriger als v liegen. Eine Ecke w heiße nach unten hineingehend oder Ecke zweiter Art, wenn der Innenwinkel des Polygons in dieser Ecke größer als π ist und beide benachbarten Ecken höher als w liegen.

Die Ecken erster und zweiter Art nennen wir besondere Ecken. Alle anderen Ecken des Polygons heißen gewöhnliche Ecken. Der Grund für diese Benennungen wird im folgenden klar werden.

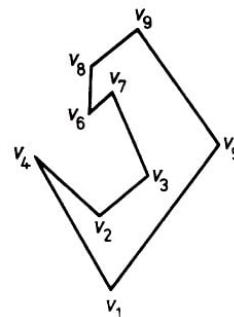


Abb. 12

In Abb. 12 sind die Ecken v_4 und v_9 Ecken erster Art, die Ecke v_2 ist Ecke zweiter Art. Die übrigen sechs Ecken sind gewöhnliche Ecken. Es sei nun α die Anzahl der Ecken erster Art und β die Anzahl der Ecken zweiter Art.

Lemma 2. Für jedes einfache Polygon, dessen Ecken unterschiedlich hoch liegen, gilt die Beziehung

$$\alpha - \beta = 1 \quad (3.1)$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Anzahl der Seiten des Polygons. Für Dreiecke ist die Gleichung (3.1) offensichtlich, da jedes Dreieck genau eine Ecke erster Art und keine anderen besonderen Ecken besitzt. (Wir erinnern daran, dass die Ecken auf unterschiedlichen Höhen liegen sollen.)

Wir stellen weiter fest, dass das auch für alle konvexen Polygone zutrifft.

Wir beweisen die Beziehung (3.1) für ein einfaches Polygon M mit n Seiten, wobei wir annehmen, dass diese Beziehung bereits für alle einfachen Polygone mit weniger als n Seiten bewiesen wurde.

Wir bemerken zunächst, dass man jedes einfache Polygon M mit Hilfe einer Diagonalen in zwei einfache Polygone zerlegen kann, wobei jedes dieser beiden Polygone weniger

Seiten als das Polygon M enthält. Es sei A die niedrigste Ecke des Polygons M , die Ecken B und C seien die beiden benachbarten Ecken (Abb. 13).

Wir verbinden die Punkte B und C durch eine Diagonale. Liegen weder auf der Strecke BC noch im Innern des Dreiecks ABC andere Ecken des Polygons M , dann liefert diese Diagonale die gesuchte Zerlegung. Existieren jedoch solche Ecken, dann wählen wir unter ihnen die niedrigste aus. Diese Ecke sei der Punkt D .

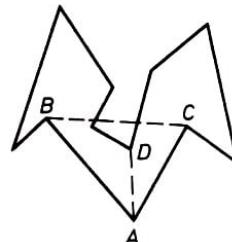


Abb. 13

Mit Hilfe der Diagonalen AD erhalten wir dann die gewünschte Zerlegung des Polygons M .

Wir wenden uns nun wieder dem Beweis von (3.1) zu. Die Diagonale AB zerlegt M in zwei einfache Polygone M_1 und M_2 und ist demzufolge ihre gemeinsame Seite (Abb. 14).

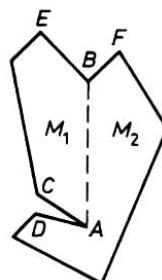


Abb. 14

Wir nehmen zunächst der Einfachheit halber an, dass die Strecke AB mit dem unteren Ende A und dem oberen Ende B vertikal liege. Danach geben wir an, wie der Beweis abzuändern ist, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist. Weiterhin berühre das Polygon M_1 die Strecke AB von links, das Polygon M_2 berühre AB von rechts.

Wenn die Punkte A und B benachbarte Ecken der beiden Polygone M_1 und M_2 sind, dann bezeichnen wir die zweite zu A benachbarte Ecke des Polygons M_1 mit C und die zweite zu B benachbarte Ecke von M_1 mit E .

Analog bezeichnen wir mit D und F die entsprechenden Ecken des Polygons M_2 (Abb. 14).

Es sind jedoch auch "Ausnahmefälle" möglich, in denen die Punkte A und B (oder einer von ihnen) keine Ecken eines der beiden Polygone sind (beispielsweise beim Polygon d) in Abb. 15 und beim Polygon e) in Abb. 16). Die entsprechenden Bezeichnungen sind für diese Fälle in den Abbildungen eingezeichnet. Es kann außerdem vorkommen, dass $C = E$ oder $D = F$ ist.

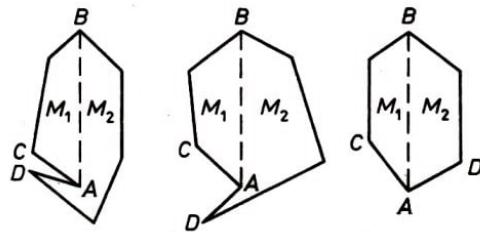


Abb. 15

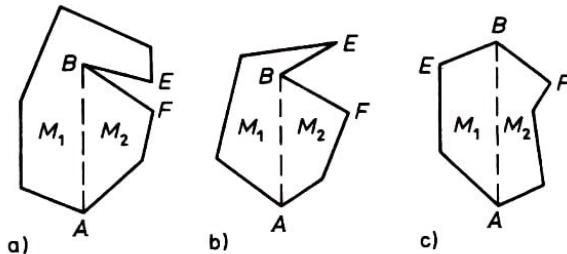


Abb. 16

Wir ordnen nach folgender Regel jeder Ecke v eines Polygons M eine Zahl $f(v)$ zu:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } v \text{ Ecke erster Art ist,} \\ -1, & \text{wenn } v \text{ Ecke zweiter Art ist,} \\ 0, & \text{wenn } v \text{ eine gewöhnliche Ecke ist.} \end{cases}$$

Damit ist eine Funktion f für die Ecken des Polygons M definiert.

Diese Funktion nimmt in dem in Abb. 14 dargestellten Polygon z.B. in den Ecken D , E und F , den Wert 1, in den Ecken A und B den Wert -1 und in allen übrigen Ecken den Wert 0 an.

Für die Ecken der Polygone M_1 und M_2 definieren wir Funktionen f_1 und f_2 nach genau derselben Vorschrift, wie wir die Funktion f für die Ecken von M definiert haben. Die Indizes 1 und 2 bei f_1 und f_2 weisen darauf hin, dass diese Funktionen den Polygonen M_1 und M_2 entsprechen.

Für den Fall, dass beispielsweise der Punkt A keine Ecke des Polygons M_1 ist, setzen wir trotzdem definitionsgemäß $f_1(A) = 0$. Also sind die Funktionen f_1 und f_2 auch für die Punkte A und B definiert. Es ist leicht zu sehen, dass für eine Ecke v des Polygons M_1 , die von den Punkten A und B verschieden ist, die Beziehung $f_1(v) = f(v)$ gilt.

Analog gilt $f_2(v) = f(v)$ für alle Ecken des Polygons M_2 , die von A und B verschieden sind.

Die zu beweisende Gleichung (3.1) lässt sich auf die Form

$$\sum f(v) = 1 \quad (3.2)$$

bringen, wobei über alle Ecken v des Polygons M summiert wird. Da jedes der Polygone M_1 und M_2 weniger als n Ecken hat, ergibt sich nach der Induktionsvoraussetzung für das erste von ihnen die Gleichung

$$\sum f_1(v) = 1 \quad (3.3)$$

und für das zweite analog

$$\sum f_2(v) = 1 \quad (3.4)$$

wobei über alle Ecken von M_1 bzw. M_2 zu summieren ist. Wir addieren die Gleichungen (3.3) und (3.4) gliedweise und ergänzen auf beiden Seiten gleiche Summanden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum f_1(v) - f_1(A) - f_1(B) + \sum f_2(v) - f_2(A) - f_2(B) + f(A) + f(B) \\ = 2 - f_1(A) - f_1(B) - f_2(A) - f_2(B) + f(A) + f(B) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die linke Seite der Gleichung (3.5) ist gleich $\sum f(v)$, d.h. gleich der Summe der Werte der Funktion f über alle Ecken des Polygons M . Daher genügt für den Nachweis der Gleichung (3.2) der Beweis der Beziehung

$$f_1(A) + f_1(B) + f_2(A) + f_2(B) - f(A) - f(B) = 1 \quad (3.6)$$

Wir beweisen, dass

$$f_1(A) + f_2(A) - f(A) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f_1(B) + f_2(B) - f(B) = 1 \quad (3.7, 3.8)$$

ist. Hieraus folgt sofort die Beziehung (3.6) und damit auch das Lemma 2.

Es bezeichne φ_1 die Größe des Winkels BAC und φ_2 die Größe des Winkels BAD (Abb. 14, 15). Wir vereinbaren, dass diese beiden Winkel von der Strecke AB aus in positiver Richtung gemessen werden (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn).

Dann gilt $\varphi_1 < \varphi_2$. Da die Strecke AB (außer ihren Endpunkten) innerhalb des Polygons M liegt, sind die Werte 0 und 2π für die Winkel φ_1 und φ_2 "verboten".

Solange alle Ecken des Polygons auf unterschiedlicher Höhe liegen, sind auch die Werte $\pi/2$ und $3\pi/2$ für diese Ecken "verboten". Für den Beweis der Gleichung (3.7) müssen also sechs Fälle betrachtet werden, die in Tabelle 1 angegeben und in Abb. 15 dargestellt sind.

Fall Nr.	Ungleichungen	$f(A)$	$f_1(A)$	$f_2(A)$
1	$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$	-1	0	-1
2	$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \frac{3\pi}{2}$	0	0	0
3	$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} < \varphi_2 < 2\pi$	0	0	0
4	$\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{3\pi}{2}$	0	0	0
5	$\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2} < \varphi_2 < 2\pi$	0	0	0
6	$\frac{3\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$	-1	-1	0

Wir betrachten den ersten dieser Fälle genauer. Es gelte also $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$. Dabei liegen beide Punkte C und D höher als der Punkt A , und der Innenwinkel CAD des Polygons M ist größer als π (seine Größe ist $2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$).

Daher ist die Ecke A des angegebenen Polygons eine Ecke zweiter Art. Somit gilt $f(A) = -1$. Analog dazu liegen beide Punkte B und D höher als A , und der Innenwinkel BAD des Polygons M_2 ist größer als π (seine Größe ist $2\pi - \varphi_2$). Daher ist die Ecke A des Polygons M_2 eine Ecke zweiter Art, und es gilt $f_2(A) = -1$.

Andererseits liegen die Ecken B und C des Polygons M_1 höher als dessen Ecke A , und folglich ist der Innenwinkel BAC kleiner als π (seine Größe ist gleich φ_1). Also ist die Ecke A eine gewöhnliche Ecke für M_1 , und wir erhalten $f_1(A) = 0$. Die Gleichung (3.7) gilt also für den ersten Fall.

Die Werte $f(A)$, $f_1(A)$ und $f_2(A)$ für die anderen fünf Fälle sind in Tabelle 1 angegeben. Wir sehen, dass die Gleichung (3.7) in allen Fällen gilt.

Es bezeichne ψ_1 die Größe des Winkels ABF und ψ_2 die Größe des Winkels ABE (Abb. 14 bzw. 16). Diese Winkel mit dem Scheitelpunkt B werden von der Strecke BA aus in positiver Richtung gemessen.

Daher gilt $\psi_1 < \psi_2$. Die Werte 0 , $\pi/2$, $3\pi/2$ und 2π sind wie oben für diese Winkel verboten. Folglich müssen für den Beweis der Gleichung (3.8) die sechs Fälle betrachtet werden, die in Abb. 16 dargestellt sind.

Die Ungleichungen, die für die Winkel ψ_1 und ψ_2 gelten, und die Werte der Funktionen f , f_1 und f_2 im Punkt B sind in Tabelle 2 angegeben. Aus der Tabelle ist wieder ersichtlich, dass die Gleichung (3.8) immer richtig ist.

	Fall Nr.	Ungleichungen	$f(B)$	$f_1(B)$	$f_2(B)$
Tabelle 2	1	$0 < \psi_1 < \psi_2 < \frac{\pi}{2}$	0	0	1
	2	$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2} < \psi_2 < \frac{3\pi}{2}$	0	0	1
	3	$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} < \psi_2 < 2\pi$	1	1	1
	4	$\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \psi_2 < \frac{3\pi}{2}$	-1	0	0
	5	$\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \frac{3\pi}{2} < \psi_2 < 2\pi$	0	1	0
	6	$\frac{3\pi}{2} < \psi_1 < \psi_2 < 2\pi$	0	1	0

Damit ist das Lemma 2 für den Fall der vertikalen Lage der Strecke AB bewiesen. Diese Strecke bilde jetzt mit einer vertikalen Geraden den Winkel ω , $0 \leq \omega < \pi/2$. In diesem Fall ist es jedem der Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ "verboten", die Werte 0 , 2π , $\pi/2 + \omega$, $3\pi/2 + \omega$ anzunehmen. Damit kann der Beweis analog wie oben geführt werden.

Satz 1. Die Eulersche Charakteristik eines einfachen Polygons ist gleich 1.

Beweis. Gegeben sei ein einfaches Polygon mit einer beliebigen Zerlegung. Wir legen es so, dass sich alle Ecken der Zerlegung auf unterschiedlicher Höhe befinden. Diese Annahme ist übrigens für die Gültigkeit der Aussage des Satzes unwesentlich.

Wir nummerieren die Ecken der Zerlegung mit v_1, \dots, v_e in der Reihenfolge wachsender Höhen, d.h. so, dass die Ecke v_1 die niedrigste ist, die Ecke v_2 höher als v_1 liegt usw. Wenn also eine Kante der Zerlegung die Ecken v_i und v_j verbindet, dann ist eine dieser

Ecken das obere und die andere Ecke das untere Ende der Kante.

Analog hat jede Fläche der Zerlegung eine niedrigste Ecke. Es bezeichne k_i ($i = 1, \dots, e$) die Anzahl der Kanten, für die der Punkt v_i das untere Ende ist, und f_i die Anzahl der Flächen, für die v_i die niedrigste Ecke ist. Die Gesamtzahl der Kanten der Zerlegung ist damit offenbar gleich

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_e \quad (3.9)$$

die Gesamtzahl der Flächen ist gleich

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_e \quad (3.10)$$

Für jede Ecke suchen wir jetzt eine Beziehung zwischen den Zahlen k_i und f_i .

Es sei M_i das Polygon, das aus allen Flächen (und Kanten) gebildet wird, die den Punkt v_i als untere Ecke haben (in den Abb. 17 und 18 ist das Polygon M_i schraffiert).

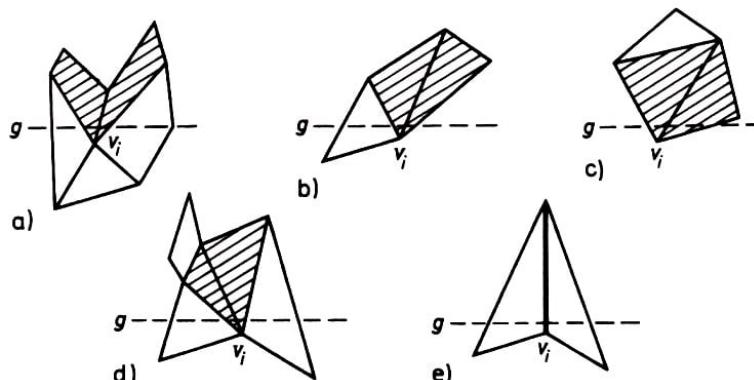


Abb. 17

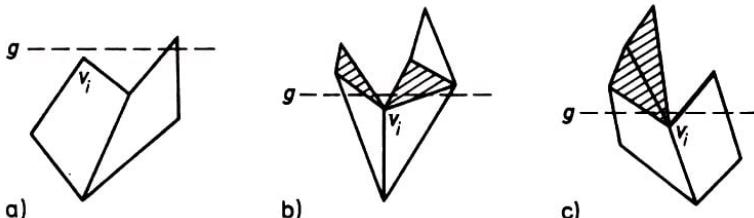


Abb. 18

Das Polygon M_i kann auch "ausgeartet" sein, d.h. nicht nur Flächen und deren Seiten enthalten, sondern auch Kanten, die nicht zum Rand irgendeiner Fläche gehören (in Abb. 17 und 18 sind diese Kanten als dicke Strecken gekennzeichnet). Wir betrachten die folgenden drei Fälle.

1. Der Punkt v_i ist eine gewöhnliche Ecke des Polygons M oder einer seiner inneren Punkte (der Einfachheit halber sagen wir, dass v_i eine gewöhnliche Ecke der Zerlegung ist). Da jede Fläche der Zerlegung konvex ist, schneidet in diesem Fall eine horizontale Gerade g , die ein wenig höher als die Ecke v_i verläuft (die "Gleitlinie"), das Polygon M_i in einer Strecke (Abb. 17). Deshalb ist

$$k_i - f_i = 1 \quad (3.11)$$

2. Die Ecke v_i des Polygons M ist eine Ecke erster Art (Abb. 18a). In diesem Fall ist offenbar

$$k_i = f_i = 0 \quad (3.12)$$

3. Die Ecke v_i des Polygons M ist eine Ecke zweiter Art (Abb. 18b, c). In diesem Fall schneidet die Gerade g das Polygon M_i in zwei einzelnen Strecken (die auch in einen Punkt ausarten können). Folglich ist

$$k_i - f_i = 2 \quad (3.13)$$

Wegen der Gleichungen (3.11) bis (3.13) ist es notwendig, zwischen gewöhnlichen und besonderen Ecken der Zerlegung zu unterscheiden.

Zur Berechnung der Eulerschen Charakteristik zerlegen wir die alternierende Summe $e - k + f$, indem wir die Gleichungen (3.9) und (3.10) benutzen:

$$\chi(M) = e - k + f = (1 - k_1 + f_1) + (1 - k_2 + f_2) + \dots + (1 - k_e + f_e)$$

Wegen der Gleichungen (3.11) bis (3.13) ist der Ausdruck $1 - k_i - f_i$ für jede gewöhnliche Ecke gleich 0, für jede Ecke erster Art gleich 1 und für jede Ecke zweiter Art gleich -1 . Daher ist $\chi(M) = \alpha - \beta$, und wegen Lemma 2 gilt $\chi(M) = 1$. Satz 1 ist damit bewiesen.

Folgerung. Die Eulersche Charakteristik für einfache offene Polygone (d.h. für solche, deren Randecken und Randkanten entfernt worden sind) ist gleich 1.

Der Beweis der Folgerung ergibt sich aus Satz 1 und der Tatsache, dass die Eulersche Charakteristik des Randes eines einfachen Polygons gleich 0 ist.

Satz 2. Die Eulersche Charakteristik eines Polygons M mit n Löchern ist gleich $1 - n$.

Wir werden später einen Spezialfall dieses Satzes beweisen. Den allgemeinen Fall behandeln wir in § 12. Zunächst geben wir einige Definitionen und beweisen anschließend ein Lemma.

Es sei M ein einfaches Polygon. Wir nennen eine Ecke v nach unten heraustretend (oder Ecke dritter Art), wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke kleiner als π ist und die beiden angrenzenden Ecken höher als die Ecke v liegen. In Abb. 12 sind v_1 und v_6 derartige Ecken.

Die Ecke w nennen wir nach oben hineingehend (oder Ecke vierter Art), wenn der Innenwinkel des Polygons bei dieser Ecke größer als π ist und die beiden angrenzenden Ecken niedriger als die Ecke w liegen. In Abb. 12 ist v_7 eine Ecke vierter Art. Wir bezeichnen die Anzahl der Ecken dritter Art eines einfachen Polygons mit γ und die Anzahl der Ecken vierter Art mit δ .

Lemma 3. Für jedes einfache Polygon, dessen Ecken alle auf unterschiedlicher Höhe liegen, gilt

$$\gamma - \delta = 1 \quad (3.14)$$

Beweis. Die Gleichung (3.14) könnte man analog dem Beweis von Gleichung (3.1) zeigen.² Es ist aber viel einfacher, die Gleichung (3.14) aus (3.1) abzuleiten.

²Man müsste dazu lediglich die Richtungen "nach oben" und "nach unten" vertauschen. Dann werden beispielsweise aus Ecken erster Art Ecken dritter Art usw. Man erhält so den Beweis für die Gleichung (3.14) direkt aus dem Lemma 2.

Wir nehmen dazu an, ein Punkt bewege sich auf den Rand des Polygons in eine bestimmte Richtung, wobei die Bewegung in der niedrigsten Ecke beginnen soll.

Diese Ecke bezeichnen wir mit v . Er durchlufe den Rand genau einmal und keine in die Ecke v zurück. Dabei wird sich der Punkt einige Male nach oben bzw. nach unten bewegen. Es ist klar, dass die Anzahl der Abschnitte, in denen sich der Punkt nach oben bewegt ("Aufstiege") mit der Anzahl der nach unten gehenden Abschnitte ("Abstiege") übereinstimmt.

Andererseits beginnt jeder "Aufstieg" in einer Ecke dritter oder zweiter Art und jeder Abstieg in einer Ecke erster oder vierter Art. Daher ist die Anzahl der "Aufstiegsabschnitte" gleich $\gamma + \beta$ und die Anzahl der "Abstiegsabschnitte" gleich $\delta + \alpha$.

Wir erhalten $\gamma + \beta = \delta + \alpha$ und wegen (3.1) die Beziehung (3.14). Lemma 3 ist damit bewiesen.

Beweis von Satz 2. Wir setzen voraus, dass der Rand jedes Loches weder mit dem Außenrand des Polygons M noch mit den Rändern der anderen Löcher Punkte gemeinsam hat. Wir nummerieren die e Ecken der Zerlegung wie beim Beweis von Satz 1 in der Reihenfolge wachsender Höhen und schreiben den Ausdruck $\chi(M) = e - k + f$ für die Eulersche Charakteristik in der Form

$$e - k + f = (1 - k_1 + f_1) + \dots + (1 - k_e + f_e) \quad (3.15)$$

Die folgenden Tatsachen lassen sich wie oben leicht prüfen:

1. Wenn eine Ecke v_i der Zerlegung ein innerer Punkt des Polygons ist, dann gilt für den entsprechenden Summanden $1 - k_i + f_i = 0$.
2. Die Summe aller Summanden des rechten Teils der Gleichung (3.15), die denjenigen Ecken der Zerlegung entsprechen, die auf dem Rand des Polygons M liegen, ist gleich 1.

Wir betrachten nun irgendein Loch S und alle Ecken der Zerlegung, die auf seinem Rand liegen. Das Loch S ist zusammen mit seinem Rand ein einfaches Polygon.

Es sei v_i eine Ecke dritter Art des Polygons S . Die Ecke v_i ist - als Ecke des Polygons M aufgefasst - eine Ecke zweiter Art. Deshalb gilt wie beim Beweis von Satz 1 die Beziehung $1 - k_i + f_i = -1$.

Ist die Ecke v_i eine Ecke vierter Art des Polygons S , so ist sie als Ecke des Polygons M eine Ecke erster Art, und es gilt $1 - k_i + f_i = 1$. Für alle übrigen Ecken des Polygons S gilt $1 - k_i + f_i = 0$.

Die Summe aller Summanden der rechten Seite der Gleichung (3.15), die dem Loch S entsprechen, ist also gleich $\delta - \gamma$. Wegen Lemma 3 erhalten wir $\delta - \gamma = -1$. Wenn wir diese Überlegung für alle Löcher einzeln wiederholen, erhalten wir $\chi(M) = 1 - n$. Damit ist Satz 2 für unseren Spezialfall bewiesen.

Eine Figur A sei nun Vereinigung endlich vieler Polygone, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben sollen. Diese Polygone heißen dann Komponenten der Figur A . Wir bezeichnen ihre Anzahl mit $c(A)$ und die Anzahl der Komponenten des Komplementes der Figur A bezüglich der Ebene mit $c^*(A)$.

Eine Komponente des Komplements ist unbeschränkt. Alle übrigen Komponenten sind Löcher, die zu dem einen oder anderen Polygon gehören. Wir erhalten aus unserem Satz 2 unmittelbar die

Folgerung. Die Eulersche Charakteristik einer Figur A ist gleich

$$\chi(A) = c(A) - c^*(A) + 1 \quad (3.16)$$

Aufgabe

10. Man beweise, dass bei einer beliebigen Zerlegung eines Polygons mit n Löchern die Summe $e + k + f + n$ ungerade ist.

4 Die Eulersche Charakteristik und die Summe der Außenwinkel eines Polygons

Wir zeigen in diesem Paragraphen, dass sich die Eulersche Charakteristik eines Polygons recht einfach durch die Summe seiner Außenwinkel ausdrücken lässt. Damit erhalten wir speziell für Satz 1 einen neuen Beweis. Wie oben beginnen wir mit der Betrachtung einfacher Polygone.

Es sei M ein einfaches Polygon. Unter einer Orientierung des Polygons verstehen wir die Auszeichnung einer der beiden möglichen Durchlaufrichtungen seines Randes als positiv. Gewöhnlich entscheidet man sich dabei für diejenige Richtung, bei der sich die inneren Punkte des Polygons links vom Rand befinden (Abb. 19). Die dazu entgegengesetzte Richtung heißt dann negativ.

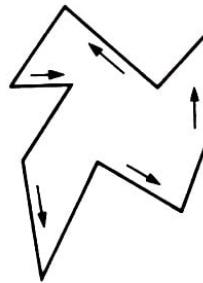


Abb. 19

Man sagt auch, dass die positive Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist. Das hängt mit der oben getroffenen Vereinbarung über die positive Winkelorientierung zusammen.

Es sei M ein einfaches orientiertes Polygon. Wir bewegen uns auf seinem Rand in positiver Richtung. Der Winkel zwischen der Verlängerung einer Seite des Polygons (in positiver Richtung), die im Eckpunkt A des Polygons endet, und der Seite selbst, die im Punkt A beginnt, heißt Außenwinkel des Polygons in seiner Ecke A (Abb. 20).

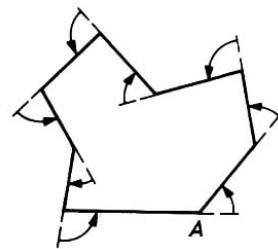


Abb. 20

Der Außenwinkel kann natürlich als Maß einer Drehung der Figur im Punkt A in positiver Richtung angesehen werden. Wenn sich beispielsweise der Innenwinkel an der Ecke A dem Wert π nähert, dann nähert sich der Außenwinkel dem Wert 0, und die Figur verändert sich wenig. Man kann leicht feststellen, dass zwischen dem Innenwinkel φ eines Polygons an der Ecke A und dem Außenwinkel ψ an derselben Ecke die Beziehung

$$\varphi + \psi = \pi \quad (4.1)$$

besteht (mit Berücksichtigung des Vorzeichens des Winkels π). Wir merken an, dass die Innenwinkel eines Polygons immer positiv genommen werden. Aus (4.1) folgt insbesondere, dass ein Außenwinkel eines Polygons genau dann positiv ist, wenn der ihm

entsprechende Innenwinkel kleiner als π ist.

Lemma 4. Es sei M ein beliebiges einfaches Polygon mit n Seiten. Dann ist die Summe Φ aller seiner Innenwinkel gleich $(n - 2)\pi$ und die Summe Ψ aller seiner Außenwinkel unabhängig von der Anzahl der Seiten gleich 2π .

Der Leser wird den Spezialfall dieses Lemmas für konvexe Polygone sicherlich schon kennen.

Die erste Behauptung des Lemmas kann durch vollständige Induktion über die Seitenanzahl des Polygons bewiesen werden. Für Dreiecke gilt sie bekanntlich. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für alle Polygone, die weniger als n Seiten haben, und weisen dann ihre Gültigkeit für Polygone mit n Seiten nach.

Wir suchen im Polygon M eine Diagonale, die M in zwei einfache Polygone M_1 und M_2 zerlegt (vgl. den Beweis von Lemma 2). Es seien Φ_1 und Φ_2 die Summen der Innenwinkel von M_1 bzw. M_2 und n_1 und n_2 die Seitenzahlen von M_1 bzw. M_2 .

Wegen der Induktionsvoraussetzung gelten die Beziehungen $\Phi_1 = (n_1 - 2)\pi$ und $\Phi_2 = (n_2 - 2)\pi$. Außerdem gilt offenbar $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ und $n_1 + n_2 = n + 2$. Damit ist

$$\Phi = (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi = (n_1 + n_2 - 4)\pi = (n - 2)\pi$$

Die erste Behauptung des Lemmas ist also bewiesen.

Ist φ_i ein Innenwinkel des Polygons und ψ der entsprechende Außenwinkel ($i = 1, 2, \dots, n$), dann gilt $\varphi_i + \psi_i = \pi$. Also ist

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \psi_i = \sum_{i=1}^n (\pi - \varphi_i) = n\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i = n\pi - n\pi + 2\pi = 2\pi$$

Damit ist das Lemma 4 vollständig bewiesen.

Wir beweisen jetzt die Gültigkeit der Formel

$$\Psi = 2\pi(e - k + f) \quad (4.2)$$

die die Außenwinkel eines einfachen Polygons mit seiner Eulerschen Charakteristik in Beziehung setzt. Dabei benutzen wir die Bezeichnungen von Lemma 4.

Es sei M ein einfaches Polygon, das in Flächen zerlegt wurde, α ein beliebiger Innenwinkel einer beliebigen Teilfläche und $\sum \alpha$ die Summe aller solcher Winkel. Dann ist $\sum \alpha = \sum_1 \alpha + \sum_2 \alpha$, wobei $\sum_1 \alpha$ die Summe aller Winkel α ist, deren Scheitelpunkte auf dem Rand des Polygons M liegen, und $\sum_2 \alpha$ die Summe aller übrigen Winkel (also solcher Winkel, deren Scheitelpunkte im Innern von M liegen).

Es sei e_1 die Anzahl der Eckpunkte der Zerlegung, die auf dem Rand von M liegen, und entsprechend e_2 die Zahl der inneren Eckpunkte. Dann ist $e = e_1 + e_2$. Die Summe aller Winkel α um jeden einzelnen inneren Punkt ist 2π , folglich gilt $\sum_2 \alpha = 2e_2\pi$.

Hieraus erhalten wir unter Berücksichtigung von (4.1) folgenden Ausdruck für die Sum-

me der Außenwinkel des Polygons M :

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_{i=1}^{e_1} \psi_i = \sum_{i=1}^{e_1} (\pi - \varphi_i) = e_1 \pi - \sum_{i=1}^{e_1} \varphi_i = e_1 \pi - \sum_1 \alpha \\ &= e_1 \pi - \sum \alpha + \sum_2 \alpha = (e_1 + 2e_2) \pi - \sum \alpha\end{aligned}\quad (4.3)$$

Es sei m die Anzahl der Seiten (oder der Winkel) der Fläche, für die diese Zahl am größten ist. Wegen Lemma 4 gilt

$$\sum \alpha = (f_3 + 2f_4 + \dots + (m-2)f_m) \pi \quad (4.4)$$

wobei f_3 die Zahl der dreieckigen, f_4 die Zahl der viereckigen, ..., f_m die Zahl der m -eckigen Flächen ist. Aus (4.3) und (4.4) folgt

$$\Psi = (e_1 + 2e_2 - f_3 - 2f_4 - \dots - (m-2)f_m) \pi \quad (4.5)$$

Es sei k_1 die Anzahl der Kanten der Zerlegung, die auf dem Rand des Polygons M liegen, und k_2 die Anzahl der inneren Kanten; dann ist $k = k_1 + k_2$. Weil jede innere Kante zu zwei Flächen gehört und jede Randkante zu einer Fläche, erhalten wir nach einer entsprechenden Summierung der Kanten aller Flächen

$$3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m = k_1 + 2k_2 \quad (4.6)$$

Aus der offensichtlichen Gleichung

$$f = f_3 + f_4 + \dots + f_m$$

folgt

$$\begin{aligned}f_3 + 2f_4 + \dots + (m-2)f_m &= (3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m) - 2(f_3 + f_4 + \dots + f_m) \\ &= (3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m) - 2f\end{aligned}\quad (4.7)$$

Aus den Beziehungen (4.5), (4.7), (4.6), $e_1 = k_1$ und $k = k_1 + k_2$ erhalten wir

$$\Psi = (e_1 + 2e_2 - k_1 - 2k_2 + 2f + e_1 - k_1) \pi$$

oder auch

$$\Psi = 2\pi(e - k + f) \quad (4.2)$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es ist klar, dass aus dem Lemma 4 und der Beziehung (4.2) abermals die Behauptung von Satz 1 folgt.

Es sei M jetzt ein Polygon mit Löchern. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass der Rand jedes Loches, der eine Kontur ist, weder mit den Rändern anderer Löcher noch mit der äußeren Kontur des Polygons M gemeinsame Punkte hat. Das Polygon orientieren wir so, wie es oben beschrieben wurde.

Als positiv gilt also die Durchlaufrichtung des Randes, bei der alle inneren Punkte von M links liegen. Das bedeutet, dass die äußere Kontur entgegen dem Uhrzeigersinn, dagegen der Rand eines Loches im Uhrzeigersinn durchlaufen wird (Abb. 21).

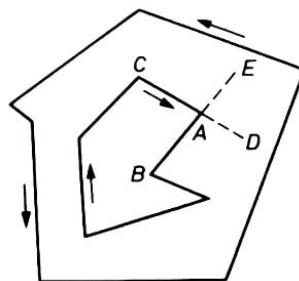


Abb. 21

Die Definition der Außenwinkel übernehmen wir ebenfalls von oben. Die folgende Aussage lässt sich dann leicht überprüfen.

Ist A ein Eckpunkt eines Polygons M , der auf dem Rand des Loches F liegt, ist ψ der Außenwinkel von M im Punkt A und ω der Außenwinkel des einfachen Polygons F im selben Punkt, dann gilt $\psi = -\omega$.

In Abb. 21 ist beispielsweise der Außenwinkel des Polygons M im Punkt A der Winkel DAB , der Außenwinkel des Polygons F im Punkt A ist dagegen der Winkel EAC . Die beiden Winkel sind dem Betrag nach gleich, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen. Folglich ist die Summe der Außenwinkel des Polygons, die über alle Eckpunkte irgendeines seiner Löcher gebildet wird, gleich -2π . Das bedeutet, dass für ein Polygon M mit n Löchern die Beziehung $\Psi = 2\pi(1 - n)$ erfüllt ist. Wegen Satz 2 gilt $\Psi = 2\pi\chi(M)$. Diese letzte Beziehung kann man auch unabhängig von Satz 2 beweisen.

Aufgaben

11. Ein einfaches Fünfeck sei so in konvexe Polygonflächen zerlegt, dass jede Seite des Fünfecks Seite irgendeiner Fläche ist. Man zeige, dass wenigstens eine der Flächen einen Winkel $\geq 2\pi/5$ enthält, falls die Anzahl der Flächen mindestens 5 ist.

12. Es sei M ein einfaches Polygon, das in einfache Polygone M_1, \dots, M_n so zerlegt wurde, dass jeweils zwei Polygone M_i und M_j entweder keine gemeinsamen Punkte haben oder ihr Durchschnitt aus einem nicht geschlossenen Streckenzug besteht, der auf dem Rand der beiden Polygone liegt.

Die Streckenzüge können dabei entarten, d.h., sie können Punkte sein. Die Polygone heißen Flächen der Zerlegung von M .

Unter einem inneren Eckpunkt verstehen wir einen solchen inneren Punkt des Polygons M , der zu drei oder mehr Flächen gehört. Ein Punkt des Randes von M , der zu zwei oder mehr Flächen gehört, wird Randeckpunkt der Zerlegung genannt. Die einfachen nicht geschlossenen Streckenzüge, die auf den Rändern der Flächen liegen und Eckpunkte der Zerlegung verbinden, heißen Kanten der Zerlegung.

Man zeige ähnlich wie beim Beweis der Formel (4.2), dass für eine solche Auffassung von einer Zerlegung die Beziehung $\chi(M) = e - k + f = 1$ gilt.

13. Man zeige mit Hilfe des Resultates der Aufgabe 12, dass der vollständige Graph mit fünf Ecken nicht in die Ebene einbettbar ist.

5 Die Anwendung der Eulerschen Charakteristik auf die Berechnung von Flächeninhalten

Es seien in der Ebene horizontale und analog auch vertikale parallele Geraden so gegeben, dass die Entfernung zwischen jedem Paar paralleler Geraden jeweils gleich 1 ist (Abb. 22).

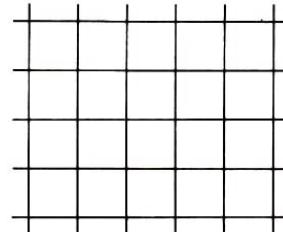


Abb. 22

Solche Geraden zerlegen die Ebene in Quadrate mit dem Flächeninhalt 1.

Die Menge der Eckpunkte dieser Quadrate wird Punktgitter genannt, die Eckpunkte der Quadrate heißen Knotenpunkte dieses Gitters oder einfach Gitterpunkte.

Wir benutzen die Eulersche Charakteristik zur Berechnung von Flächeninhalten von Polygonen, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind. Solche Polygone nennen wir Gitterpunktpolygone (kurz: Gitterpolygone). Wir betrachten in diesem Paragraphen nur Gitterpolygone.

Wenn M ein einfaches Gitterpolygon ist, dann gilt für seinen Flächeninhalt $F(M)$ die Beziehung

$$F(M) = i + \frac{b}{2} - 1 \quad (5.1)$$

wobei i (bzw. b) die Anzahl der Knoten ist, die sich im Inneren (bzw. auf dem Rand) von M befinden. Wir erhalten beispielsweise für das Polygon M (Abb. 23) mit $i = 13$ und $b = 16$ die Beziehung $F(M) = 13 + 16/2 - 1 = 20$.

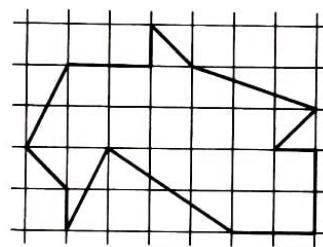


Abb. 23

Auf diese Weise lässt sich hier die Berechnung des Flächeninhalts auf die Bestimmung der Anzahl der Gitterpunkte der beiden Arten zurückführen. Die Formel (5.1) wurde von dem österreichischen Mathematiker G. Pick (1859 in Wien-1942 im KZ Theresienstadt)³ im Jahre 1899 gefunden.

Wir führen den Beweis der Formel von Pick in drei Etappen.

³Daten in der Abschrift ergänzt

1. Ein Gitterdreieck heißt primitiv, wenn sich weder in seinem Inneren noch auf seinen Seiten (außer in den Eckpunkten) Gitterpunkte befinden. In Abb. 24 sind Beispiele solcher Dreiecke angegeben. Wir zeigen im ersten Beweisteil, dass der Flächeninhalt eines beliebigen primitiven Gitterdreiecks A gleich $1/2$ ist:

$$F(\triangle) = \frac{1}{2} \quad (5.2)$$

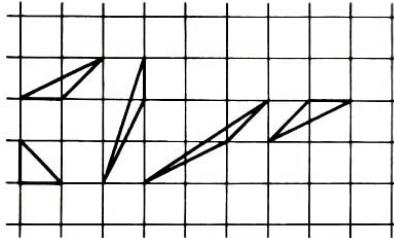


Abb. 24

Es sei ABC ein primitives Gitterdreieck (Abb. 25), $F(ABC)$ sein Flächeninhalt und $AGCE$ das kleinste Gitterrechteck, das das Dreieck ABC enthält.

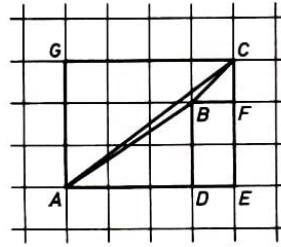


Abb. 25

Es seien weiter D und F die Lotfußpunkte der von B auf die Geraden AE bzw. CE gefällten Lote. Wir führen Bezeichnungen für die Längen folgender Strecken ein:

$$|AD| = p, \quad |AE| = q, \quad |EF| = r, \quad |EC| = s$$

Offensichtlich sind p, q, r und s ganze Zahlen. Wir bestimmen die Flächeninhalte der Dreiecke ACE , ABD , BCF und des Rechtecks $BDEF$. Wir erhalten

$$F(ACE) = \frac{qs}{2}, \quad F(ABD) = \frac{pr}{2}, \quad F(BCF) = \frac{(q-p)(s-r)}{2} \quad \text{und}$$

$$F(BDEF) = (q-p)r$$

Hieraus folgt

$$F(ABC) = \frac{qs}{2} - \frac{pr}{2} - \frac{(q-p)(s-r)}{2} - (q-p)r$$

oder nach Vereinfachung

$$F(ABC) = \frac{1}{2}(ps - qr) \quad (5.3)$$

Bis jetzt haben wir noch nicht ausgenutzt, dass das Dreieck ABC primitiv ist. Wir zeigen, dass in (5.3) unter dieser Voraussetzung $ps - qr = 1$ gilt, folglich ist die Beziehung (5.2) erfüllt.

Wir bezeichnen die Anzahl der Gitterpunkte, die im Inneren (nicht auf dem Rand !) des Polygons M liegen, mit $N(M)$ und mit $N(PQ)$ die Anzahl der auf der Strecke PQ liegenden Gitterpunkte, die von den Endpunkten P, Q verschieden sind. Dann gilt beispielsweise $N(ABC) = N(AB) = N(AC) = N(BC) = 0$ (Abb. 25).

Wir bestimmen zuerst die Zahl $N(AGCE)$. Weil die Beziehungen $|AE| = |GC| = q$ und $|AG| = |CE| = s$ gelten, enthält das Rechteck $AGCE$ insgesamt $(q+1)(s+1)$ Gitterpunkte.

Von diesen liegen $2(q+1) + 2(s+1) - 4$ Punkte auf dem Rand des Rechtecks, die übrigen in seinem Innern. Damit erhalten wir die Beziehung

$$N(AGCE) = (q+1)(s+1) - 2(q+1) - 2(s+1) + 4 = (q-1)(s-1)$$

Weil weiter die Diagonale AC das Rechteck $AGCE$ in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt und $N(AC) = 0$ gilt, folgt

$$N(ACE) = \frac{1}{2}N(AGCE) = \frac{1}{2}(q-1)(s-1)$$

Analog gelten die Beziehungen

$$N(ABD) = \frac{1}{2}(p-1)(r-1) \quad , \quad N(BCF) = \frac{1}{2}(q-p-1)(s-r-1)$$

$$N(BDEF) = (q-p-1)(r-1) \quad , \quad N(BD) = r-1 \quad , \quad N(BF) = q-p-1$$

Aus Abb. 25 ist ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} N(ACE) &= N(ABC) + N(ABD) + N(BCF) + N(BDEF) + N(AB) \\ &\quad + N(BC) + N(BD) + N(BF) + 1 \end{aligned}$$

gilt, wobei die Zahl 1 auf der rechten Seite dem Punkt B entspricht. Wenn wir in diese Formel die gefundenen Werte $N(M)$ für die verschiedenen Polygone M einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q-1)(s-1) &= \frac{1}{2}(p-1)(r-1) + \frac{1}{2}(q-p-1)(s-r-1) \\ &\quad + (q-p-1)(r-1) + (r-1) + (q-p-1) + 1 \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhalten wir $ps - qr = 1$ und damit die behauptete Formel (5.2).

2. Es sei M ein einfaches Gitterpolygon. Wir zeigen, dass man M in primitive Dreiecke zerlegen kann.

Weil angenommen wird, dass ein Polygon in konvexe Polygone zerlegt vorliegt, und da außerdem jedes konvexe Gitterpolygon in Gitterdreiecke zerlegbar ist, bleibt nur noch der Nachweis, dass alle Gitterdreiecke in primitive Gitterdreiecke zerlegbar sind.

Das Dreieck \triangle habe im Inneren oder auf seinem Rand Gitterpunkte. Wir verbinden

irgendeinen inneren Gitterpunkt mit allen Eckpunkten des Dreiecks \triangle oder irgendeinen Gitterpunkt, der auf einer Seite liegt, mit seinem gegenüberliegenden Eckpunkt.

Man erhält dann eine Zerlegung des Dreiecks in drei oder zwei Dreiecke, die innerhalb und auf ihrem Rand weniger Gitterpunkte als das Dreieck \triangle enthalten. Wenden wir dieses Verfahren auf alle erhaltenen Dreiecke an, die nicht primitiv sind, so erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Zerlegung von \triangle in primitive Dreiecke.

3. Wir zeigen, dass bei einer beliebigen Zerlegung eines einfachen Gitterpolygons M in primitive Dreiecke die Anzahl dieser Dreiecke gleich $2i + b - 2$ ist, wobei i die Zahl der inneren und b die Zahl der Randgitterpunkte ist.

Zusammen mit der Beziehung (5.2) erhält man hieraus die Formel von Pick.

Wir bezeichnen mit e , k und f die Anzahl der Eckpunkte, Kanten bzw. (dreieckigen) Flächen der Zerlegung. Da die Eckpunkte der Zerlegung mit den Gitterpunkten, die in M (und auf seinem Rand) liegen, zusammenfallen, gilt die Beziehung $e = i + b$.

Bezeichnet k_i die Anzahl der inneren und k_b die Anzahl der Randkanten der Zerlegung, dann gilt außerdem $k = k_i + k_b$. Es gilt weiter

$$k_b = b \quad \text{und} \quad 3f = 2k_i + k_b \quad (5.4,5.5)$$

Die Beziehung (5.5) erhalten wir nach der Summierung über alle Kanten der (dreieckigen) Flächen, wobei berücksichtigt werden muss, dass jede Randkante zu einer Fläche und jede innere Kante zu genau zwei Flächen gehört. Die Beziehung (5.5) formen wir um und erhalten

$$3f = 2(k - k_b) + k_b = 2(k - b) + b \quad \text{und damit} \quad k = \frac{1}{2}(3f + b)$$

Wenn wir die gefundenen Werte von k und e in die Eulersche Formel

$$e - k + f = 1 \quad (5.6)$$

einsetzen, erhalten wir $i + b - \frac{1}{2}(3f + b) + f = 1$ oder, wie behauptet, $f = 2i + b - 2$. Die Formel von Pick ist damit bewiesen.

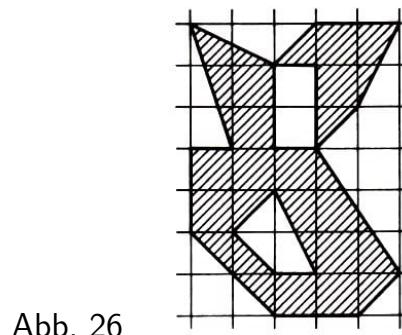


Abb. 26

Es ist interessant, dass es zur Formel (5.1) von Pick ein Analogon für Gitterpolygone mit Löchern gibt (Abb. 26). Es gilt nämlich

$$F(M) = i + \frac{b}{2} - \chi(M) + \frac{1}{2}\chi(\partial M) \quad (5.7)$$

wobei der Rand des Polygons M mit ∂M bezeichnet wird. Weil für ein einfaches Polygon

$$\chi(M) = 1 \quad \text{und} \quad \chi(\partial M) = 0$$

gilt, verallgemeinert (5.7) die Beziehung (5.1).

Die Behauptung (5.7) wird zunächst wie (5.1) bewiesen. Doch statt der Gleichung (5.4) wählen wir jetzt die nach der Definition der Eulerschen Charakteristik für den Rand geltende Beziehung

$$b - k_b = \chi(\partial M) \quad (5.8)$$

und an Stelle von (5.6) verwenden wir die Gleichung

$$e - k + f = \chi(M) \quad (5.9)$$

Daher folgt aus (5.5) unter Verwendung von (5.8)

$$3f = 2k - b + \chi(\partial M) \quad \text{oder} \quad k = \frac{1}{2}(3f + b - \chi(\partial M))$$

Wenn wir in der Gleichung (5.9) den gefundenen Wert für k und auch $e = i + b$ einsetzen, erhalten wir

$$i + b - \frac{1}{2}(3f + b - \chi(\partial M)) + f = \chi(M)$$

Für die Zahl f erhalten wir damit den Wert

$$f = 2i + b - 2\chi(M) + \chi(\partial M)$$

Da alle Flächen der Zerlegung Dreiecke mit dem Inhalt $1/2$ sind, ist die Beziehung (5.7) bewiesen.

Zu den anderen Analoga zur Formel von Pick vergleiche man etwa [3].

Aufgaben

14. Man beweise, dass für den Inhalt $F(M)$ eines einfachen Gitterpolygons M die Ungleichung

$$F(M) \geq G - \frac{L}{2} - 1 \quad (5.10)$$

gilt. Dabei bezeichnet G die Anzahl der Knoten des Gitters, die in M liegen (d. h. $G = i + b$), und L den Umfang des Polygons (d.h. die Länge seines Randes).

Wenn dabei das Polygon in Einheitsquadrate zerfällt, deren Ecken in den Knotenpunkten des Gitters liegen, wird (5.10) zu einer Gleichung.

15. In der Ebene sei wie oben ein Punktgitter gegeben, dass wir 1-Gitter nennen wollen. Wir legen in das Gitter zusätzlich Parallelen zu den Gittergeraden so, dass sich eine Zerlegung der Ebene in Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ ergibt.

Die Ecken dieser Quadrate nennen wir die Knoten des $\frac{1}{2}$ -Gitters.

Es sei M ein Polygon (entweder ein einfaches oder eines mit Löchern), dessen Ecken auf

den Gitterpunkten des $\frac{1}{2}$ -Gitters liegen. Mit i_2 und b_2 werden die Anzahlen der Knoten des $\frac{1}{2}$ -Gitters bezeichnet, die innerhalb bzw. auf dem Rand des Polygons liegen (die analogen Anzahlen für das 1-Gitter werden mit i_1 bzw. b_1 bezeichnet). Man beweise, dass für den Inhalt $F(M)$ des Polygons M

$$F(M) = \frac{1}{4} \left[t_2 + \frac{b_2}{2} - \chi(M) + \frac{1}{2} \chi(\partial M) \right]$$

gilt. Wenn die Ecken des Polygons auf Gitterpunkten des 1-Gitters (und somit auch auf Gitterpunkten des $\frac{1}{2}$ -Gitters) liegen, ist

$$F(M) = \frac{1}{3} \left[(i_2 - i_1) + \frac{1}{2} (b_2 - b_1) \right]$$

d.h., die Summanden, die die Eulersche Charakteristik enthalten, fallen weg.

6 Die Eulersche Formel für den Raum

Wir betrachten nun die Eulersche Charakteristik für räumliche Figuren. Bei der Zerlegung solcher Figuren treten neben Ecken, Kanten und Flächen auch noch dreidimensionale⁴ Zellen auf. Die ganze Zahl

$$\chi(\Phi) = e - k + f - r$$

wobei r die Anzahl der dreidimensionalen Zellen von Φ ist, wird Eulersche Charakteristik der Figur Φ genannt.

Es soll jetzt die Eulersche Charakteristik des dreidimensionalen euklidischen Raumes R berechnet werden.

Dazu sei im Raum eine endliche Familie von Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gegeben, die den Raum in r Zellen zerlegt. Es sei s , irgendeine Ebene dieser Familie.

Ihr Durchschnitt mit den übrigen Ebenen der Familie liefert in ε_i eine endliche Menge von Geraden, die folglich diese Ebene zerlegen. Die auf diese Weise in allen Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gebildeten Ecken, Kanten und Flächen werden Ecken, Kanten bzw. Flächen der Zerlegung des Raumes genannt. Es kann jedoch der Fall eintreten, dass eine solche Zerlegung weder Ecken noch Kanten hat.

Das tritt genau dann ein, wenn alle Ebenen der Familie parallel sind. Jede dieser Ebenen wird dann als Fläche der Zerlegung aufgefasst. Weiterhin lässt sich leicht beweisen, dass bei einer Zerlegung durch n Ebenen genau dann keine Ecken auftreten, wenn die zerlegenden Ebenen zu einer Geraden g im Raum parallel sind (Abb. 27).

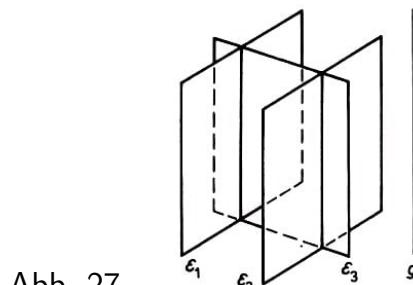


Abb. 27

Ist nämlich ε eine beliebige zur Geraden g senkrechte Ebene, so ist die Anzahl der dreidimensionalen Zellen, der Flächen und der Kanten der betrachteten Zerlegung des Raumes gleich der Anzahl der Flächen, der Kanten bzw. der Ecken der Zerlegung der Ebene ε , die sich beim Schnitt von ε mit den n zur Geraden g parallelen Ebenen ergibt. Für diesen Spezialfall gilt somit $e - k + f - r = -1$. Wir werden sehen, dass diese Gleichung stets gilt, d.h., die Eulersche Charakteristik des Raumes ist gleich -1 (vgl. (6.1)).

Die Schnittgeraden der Ebenen der gegebenen Familie nennen wir Zerlegungslinien. Zur Berechnung der Eulerschen Charakteristik ist die Einführung der Begriffe Vielfachheit von Ecken der Zerlegung und Vielfachheit der Zerlegungslinien nötig.

⁴Eine Zelle ist dreidimensional, wenn sie eine (auch noch so kleine) Kugel enthält oder, was dasselbe bedeutet, in keiner Ebene ganz enthalten ist.

Sie werden völlig analog definiert, nämlich als Anzahl der Ebenen der Familie, die durch diese Ecke bzw. diese Zerlegungslinie gehen.

Lemma 5. Zu gegebenen Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ und Geraden g_1, g_2, \dots, g_n des Raumes gibt es eine Ebene ε , die zu keiner dieser Ebenen und zu keiner dieser Geraden parallel ist.

Beweis. Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene ε_1 legen wir die zu den Ebenen $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ parallelen Ebenen $\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_m$ und die zu den Geraden g_1, \dots, g_n parallelen Geraden g'_1, \dots, g'_n .

Es seien für $i = 2, \dots, m$ die Winkel φ_i die Schnittwinkel der Ebenen ε_1 und ε'_i und für $j = 1, \dots, n$ die Winkel ψ_j die Schnittwinkel zwischen der Ebene ε_1 und der Geraden g'_j , wobei die Winkel φ_i und ψ_j so gewählt werden, dass $0 \leq \varphi_i < \pi/2$ und $0 \leq \psi_j < \pi/2$ gilt.

Falls die Winkel $\varphi_2, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_n$ Nullwinkel sind, genügt jede Ebene, die nicht zu ε_1 parallel ist, den geforderten Bedingungen.

Andernfalls wählen wir unter den auftretenden positiven Schnittwinkeln einen minimalen aus. Das sei beispielsweise der Winkel ψ_1 .

In der Ebene ε_1 gibt es durch P eine Gerade g , die sowohl von den Geraden g'_1, \dots, g'_n als auch von den Schnittgeraden der Ebenen $\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_m$ mit der Ebene ε_1 verschieden ist. (Man vergleiche dazu den Beweis von Lemma 1.)

Weiterhin existiert durch die Gerade g eine Ebene ε , deren Schnittwinkel mit der Ebene ε_1 kleiner als der Winkel φ_1 ist. Es ist klar, dass ε weder mit einer der Ebenen $\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_m$ übereinstimmt noch eine der Geraden g'_1, \dots, g'_n enthält. Somit ist ε eine Ebene, die die in Lemma 5 geforderten Eigenschaften besitzt.

Wir beweisen nun die Eulersche Formel für den Raum R . Wir haben dazu zu zeigen, dass bei einer beliebigen Zerlegung des Raumes durch n Ebenen die Beziehung

$$\chi(R) = e - k + f - r = -1 \quad (6.1)$$

gilt.

Wir beschränken uns beim Beweis von (6.1) auf den Fall, dass die betrachtete Zerlegung \mathcal{Z}_R des Raumes Ecken und folglich auch Kanten hat. Der Beweis für den Fall, dass keine Ecken auftreten, sei dem Leser überlassen.

Wir beweisen die Formel (6.1) mit dem Gleitebenenverfahren.

Zur Beschreibung der gleitenden Ebene benötigen wir neben den Ecken und Geraden der Zerlegung noch Hilfsgeraden. Das sind die Geraden, die durch Paare von Ecken der Zerlegung bestimmt sind, die auf keiner Zerlegungslinie liegen.

Wenn beispielsweise eine Zerlegung des Raumes durch die sechs Ebenen erfolgt, in denen die Begrenzungsflächen eines Würfels liegen, benötigen wir 16 Hilfsgeraden. Das sind die vier Diagonalen des Würfels und die zwölf Diagonalen seiner Seitenflächen.

Es existiert nun nach Lemma 5 eine Ebene ε , die weder zu einer der Ebenen noch zu einer der Geraden noch zu einer der Hilfsgeraden der Zerlegung parallel ist. Eine solche Ebene ε dient uns im Beweis als Gleitebene.

Wir stellen an sie noch zwei Forderungen. Sie soll erstens horizontal liegen (notfalls drehe man den gesamten Raum in geeigneter Weise), und zweitens soll sie zu Beginn unterhalb aller Ecken liegen. Aus der ersten Voraussetzung folgt speziell, dass alle Zerlegungsecken auf unterschiedlicher Höhe liegen. Wir nummerieren sie in der Reihenfolge wachsender Höhen. Es bezeichne also v_1 die niedrigste Ecke, v_2 die nächsthöhere, ... und schließlich v_e die höchste Ecke.

Für den Beweis der Beziehung (6.1) kann man beispielsweise die Zahlen f , k und r durch e und n ausdrücken. Dabei muss man analog zum Beweis der Formel (1.2) die Vielfachheit aller Ecken, die Anzahl m der Zerlegungsgeraden mit ihrer Vielfachheit und die Anzahl der Zerlegungsgeraden, die durch jede Ecke gehen, berücksichtigen. Zur Vereinfachung führen wir den Beweis nur für solche Zerlegungen, bei denen die Vielfachheit jeder Ecke gleich 3 und die Vielfachheit jeder Geraden gleich 2 ist. Übrigens kann man die im folgenden benutzte Überlegung auch auf den allgemeinen Fall anwenden, weil der Unterschied zwischen dem Spezialfall und dem allgemeinen Fall nur in den Formeln für k , f und r zum Ausdruck kommt.

Zunächst betrachten wir die Gleitebene ε in ihrer Ausgangslage. Der Schnitt von ε mit der Ebenenfamilie ist eine Menge von n Geraden, die in ε die Zerlegung \mathcal{Z}_ε , bilden. Jeder Geraden der Zerlegung \mathcal{Z}_R des Raumes entspricht genau eine Ecke der Zerlegung \mathcal{Z}_ε der Ebene ε , nämlich der Durchstoßpunkt dieser Geraden durch ε .

Analog entsprechen den Flächen und den dreidimensionalen Zellen der Zerlegung \mathcal{Z}_R bei deren Schnitt mit ε die Kanten und die Flächen der Zerlegung \mathcal{Z}_ε . Die Zerlegung \mathcal{Z}_ε habe m Ecken von der Vielfachheit 2. Wegen der Beziehungen (1.3) und (1.4) hat die Zerlegung \mathcal{Z}_ε demzufolge $n + 2m$ Kanten und $1 + n + m$ Flächen. Daher schneidet s in ihrer Anfangslage

m Kanten,
 $n + 2m$ Flächen und
 $1 + n + m$ dreidimensionale Zellen

der Zerlegung \mathcal{Z}_R .

Jetzt gleite die Ebene ε in horizontaler Lage nach oben. Aus der horizontalen Lage von ε und aus Lemma 5 folgt, dass jede Kante der Zerlegung \mathcal{Z}_R (wie auch jede ihrer Flächen und jede ihrer dreidimensionalen Zellen) bis auf diejenigen, die von ε in ihrer Anfangslage geschnitten werden, genau eine unterste Ecke hat.

Daraus ergeben sich zwei Folgerungen. Erstens folgt, dass neue Zellen der Zerlegung nur dann entstehen, wenn die Gleitebene Ecken der Zerlegung überstreicht. Zweitens ist die Anzahl der nach Durchgang von ε durch die Ecke v_i entstehenden neuen Kanten, Flächen und dreidimensionalen Zellen gleich der Anzahl der Ecken, beschränkten Kanten und beschränkten Flächen der Zerlegung von ε , die durch die Schnittgeraden der Ebenen der Familie mit ε gebildet werden (die neuen Zellen der Zerlegung \mathcal{Z}_R werden in der Ecke v_i "geboren", vgl. Abb. 28).

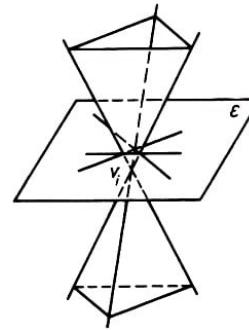


Abb. 28

Wegen der Voraussetzung über die Vielfachheit der Ecken und der Geraden wird diese Zerlegung von ε durch drei Geraden in allgemeiner Lage realisiert (vgl. Aufgabe 3). Folglich entstehen drei neue Kanten, drei neue Flächen und eine neue dreidimensionale Zelle. Da dies beim Durchgang von ε durch jede Ecke auftritt, gilt

$$k = m + 3e \quad , \quad f = n + 2m + 3e \quad , \quad r = 1 + n + m + e \quad (6.2)$$

Hieraus folgt

$$\chi(R) = e - k + f - r = e - m - 3e + n + 2m + 3e - 1 - m - n - e = -1$$

Somit ist die Eulersche Formel (6.1) unter der Voraussetzung bewiesen, dass jede Ecke der Zerlegung die Vielfachheit 3 und jede Gerade der Zerlegung die Vielfachheit 2 hat.

Für den allgemeinen Fall werden wir keine Formeln herleiten, die k , f und r durch e , n und andere Größen ausdrücken, sondern wir benutzen eine schon für die Ebene benutzte Methode. Die alternierende Summe $e - k + f - r$ schreiben wir nämlich, zerlegt nach Ecken, in folgender Form auf:

$$\begin{aligned} \chi(R) = & (-k_0 + f_0 - r_0) + (1 - k_1 + f_1 - r_1) + (1 - k_2 + f_2 - r_2) \\ & + \dots + (1 - k_e + f_e - r_e) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dabei sind k_0, f_0 und r_0 die Anzahlen der Zellen der Zerlegung des Raumes, die die Ebene ε in ihrer Anfangslage trifft, k_1, f_1 und r_1 die Anzahlen der Zellen der Zerlegung, die nach dem Durchgang von ε durch die erste Ecke auftreten, usw. Wir haben oben ausgeführt, dass die Summe

$$s_0 = k_0 - f_0 + r_0$$

gleich der Eulerschen Charakteristik der Ebene ist. Die Summe

$$s_i = k_i - f_i + r_i \quad (i = 1, \dots, e)$$

ist gleich der Eulerschen Charakteristik derjenigen Figur, die aus den beschränkten Zellen der Zerlegung der Ebene entsteht, die von den Schnittgeraden mit den betrachteten Ebenen gebildet werden, die durch die Ecke v_i gehen.

Nach dem Resultat von Aufgabe 7 gilt $s_i = 1$. Wenn wir diese Werte in (6.3) einsetzen, erhalten wir die Beziehung $\chi(R) = -1$.

7 Die Eulersche Formel für konvexe Polyeder und Folgerungen daraus

Der Durchschnitt endlich vieler Halbräume heißt genau dann ein konvexes Polyeder, wenn er beschränkt und dreidimensional ist. (Eine Menge von Punkten des Raumes nennen wir beschränkt, wenn sie in einer Kugel enthalten ist, und dreidimensional, wenn sie eine Kugel enthält.)

Jeder Punkt eines konvexen Polyeders ist entweder innerer Punkt oder Randpunkt. Man sagt, dass ein Punkt des Polyeders P innerer Punkt ist, wenn es um diesen Punkt als Mittelpunkt eine Kugel gibt, die ganz in P liegt.

Ein Punkt des Polyeders heißt Randpunkt, wenn eine beliebige Kugel mit Mittelpunkt in diesem Punkt sowohl Punkte von P als auch solche Punkte enthält, die nicht zu P gehören. Die Randpunkte bilden den Rand des Polyeders. Der Rand besteht aus endlich vielen konvexen Polygonen, deren Seiten und Ecken Kanten bzw. Ecken des Polyeders heißen.

Wir beweisen nun für beliebige konvexe Polyeder die bekannte Eulersche Polyederformel

$$e - k + f = 2 \quad (7.1)$$

Wir setzen voraus, dass alle Ecken des Polyeders in unterschiedlicher Höhe liegen und in der Reihenfolge v_1, \dots, v_n wachsender Höhe nummeriert sind. Wir bezeichnen mit f_i ($i = 1, \dots, e - 1$) die Anzahl der Flächen des Polyeders, für die der Punkt v_i die niedrigste Ecke ist, und mit k_i ($i = 1, \dots, e - 1$) die Anzahl der Kanten des Polyeders, die von der Ecke v_i nach oben gehen.

Es ist klar, dass für die Ecke $v_n = v_{\max}$ solche Flächen und solche Kanten nicht existieren. Da in der Ecke v_1 die Anzahl der Kanten und die der Flächen übereinstimmen und alle "nach oben gehen", folgt

$$f_1 = k_1 \quad (7.2)$$

Wir zerlegen jetzt das Polyeder P durch eine Horizontalebene ε_i , die ein wenig höher als die Ecke v_i ($i = 1, \dots, e - 1$) liegt. Als Durchschnitt von P und ε_i erhalten wir das konvexe Polygon M_i . Jeder der k_i Kanten des Polyeders, die vom Punkt v_i nach oben führen, entspricht genau eine Ecke des Polygons M_i .

Analog entspricht jeder der f_i Flächen, die von ebendiesem Punkt nach oben gehen, genau eine Seite des Polygons M_i . Die genannten Ecken und Seiten des Polygons bilden ein einfaches (nicht geschlossenes) Polygon, das möglicherweise nur aus einer Ecke besteht. Da die Eulersche Charakteristik eines solchen Polygons gleich 1 ist, gilt

$$e_i - k_i = 1 \quad (i = 2, \dots, e - 1) \quad (7.3)$$

(In Abb. 29 wird einer der einfachsten Fälle demonstriert: P sei ein Tetraeder und das Polygon besteht aus einer Strecke).

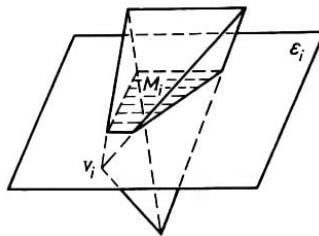


Abb. 29

Für die Gesamtzahl der Kanten des Polyeders und die Gesamtzahl seiner Flächen gelten die Beziehungen $k = k_1 + \dots + k_{e-1}$ und $f = f_1 + \dots + f_{e-1}$. Unter Verwendung der Gleichungen (7.2) und (7.3) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} e - k + f &= e - (k_1 + \dots + k_{e-1}) + (f_1 + \dots + f_{e-1}) \\ &= e - (k_1 + \dots + k_{e-1}) + k_1 + (k_2 - 1) + \dots + (k_{e-1} - 1) \\ &= e - (k_1 + \dots + k_{e-1}) + (k_1 + \dots + k_{e-1}) - (e - 2) = 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Eulersche Formel (7.1) bewiesen.

Wir bemerken, dass diese Formel eine Eigenschaft des Randes eines Polyeders ausdrückt. Durch die geführte Überlegung ist jedoch noch nicht bewiesen, dass die Eulersche Charakteristik des Randes gleich 2 ist. Es war nur die "natürliche" Zerlegung des Randes betrachtet worden. (Das sind die "vorliegenden" Ecken, Flächen und Kanten von P .) Um zu beweisen, dass

$$\chi(\partial P) = 2 \quad (7.4)$$

ist, muss die Beziehung (7.1) für eine beliebige Zerlegung gelten.

Wir nehmen also an, dass es neben der natürlichen Zerlegung noch eine andere (eine "neue") Zerlegung des Randes ∂P in Ecken, Kanten und Flächen, also in konvexe Zellen der Dimension 0, 1 und 2 gibt. Wir nehmen einen zweiten Standpunkt zu beiden Zerlegungen ein.

Wir gehen dabei davon aus, dass alle Zellen offen sind und deshalb verschiedene Zellen einer Zerlegung keine gemeinsamen Punkte haben.

Es seien \bar{e} , \bar{k} und \bar{f} die Anzahlen der Ecken, der Kanten bzw. der Flächen der neuen Zerlegung. Es ist jetzt zu beweisen, dass $\bar{e} - \bar{k} + \bar{f} = 2$ ist.

Da alle Zellen konvex sind, ist jede neue Zelle in genau einer Zelle der ursprünglichen Zerlegung enthalten. Außerdem erzeugen alle Zellen der neuen Zerlegung, die mit einer Zelle der ursprünglichen Zerlegung gemeinsame Punkte haben, in dieser eine Zerlegung. Wenn also F eine alte zweidimensionale Zelle, also eine Fläche des Polyeders ohne ihren Rand ist und \bar{e}_1 , \bar{k}_1 und \bar{f}_1 die Anzahlen der neuen Ecken, Kanten bzw. Flächen sind, die F enthält, so gilt

$$\chi(F) = \bar{e}_1 - \bar{k}_1 + \bar{f}_1 = 1 \quad (7.5)$$

Analog erhalten wir

$$\chi(E) = \bar{e}_2 - \bar{k}_2 = -1 \quad (7.6)$$

falls E eine alte offene Kante, also eine natürliche Kante des Polyeders ohne Eckpunkte ist und \bar{e}_2 und \bar{k}_2 , die Anzahlen der neuen, E enthaltenden Zellen sind. Da alle neuen

Zellen auf ∂P liegen, können wir die Summe $\bar{e} - \bar{k} + \bar{f}$ mittels der ursprünglichen Zellen bilden und erhalten aus den Beziehungen (7.5) und (7.6)

$$\chi(\partial P) = \bar{e} - \bar{k} + \bar{f} = e - k + f = 2$$

Damit ist die Gleichung (7.4) bewiesen.

Aus der zweiten Zerlegung ergibt sich unter anderem, dass die Eulersche Charakteristik des Randes eines Polyeders gleich der Summe der Eulerschen Charakteristiken seiner offenen Zellen ist. Diese Eigenschaft nennt man Additivität der Eulerschen Charakteristik. Wir werden weiter unten in allgemeinerer Form darauf eingehen.

Bevor wir aus der Eulerschen Formel (7.1) Folgerungen ziehen, stellen wir einige einfache, aber nützliche Beziehungen auf. Zur Vereinfachung der Darstellung wollen wir in diesem Paragraphen unter einem Polyeder immer ein konkaves Polyeder verstehen.

Unter der Valenz einer Polyederecke verstehen wir die Anzahl der von ihr ausgehenden Kanten. Es ist klar, dass die Valenz einer jeden Ecke nicht kleiner als 3 ist. Mit e_3 bezeichnen wir die Anzahl der Ecken der Valenz 3, mit e_4 die Anzahl der Ecken der Valenz 4 usw. Damit gilt

$$e = e_3 + e_4 + \dots + e_m = \sum_{i=3}^m e_i \quad (7.7)$$

Hierbei ist m die Maximalvalenz der Ecken, und es gilt $e_1 = e_2 = 0$. Oftmals interessiert die Zahl m selbst nicht. Wir schreiben deshalb (7.7) in der Kurzform

$$e = e_3 + e_4 + \dots = \sum_{i \geq 3} e_i \quad (7.7)$$

Jede Fläche eines Polyeders ist ein konkaves Vieleck mit wenigstens drei Seiten und drei Winkeln. Mit f_i ($i = 3, 4, \dots$) bezeichnen wir die Anzahl der Flächen des Polyeders, die genau i Ecken haben. Dann gilt

$$f = f_3 + f_4 + \dots = \sum_{i \geq 3} f_i \quad (7.8)$$

Bei Einbeziehung der Valenz der Ecken und unter Berücksichtigung, dass jede Kante genau zwei Ecken hat, ergibt sich

$$2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots = \sum_{i \geq 3} ie_i \quad (7.9)$$

Analog können wir die Anzahl der Kanten auch über die Valenzen der Flächen ausdrücken, wobei zu beachten ist, dass jede Kante zu genau zwei Flächen gehört:

$$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots = \sum_{i \geq 3} if_i \quad (7.10)$$

Da die Valenz jeder Ecke mindestens gleich 3 ist, was gleichbedeutend damit ist, dass an jeder Ecke mindestens drei Flächen zusammentreffen, gilt

$$3f \leq 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots = \sum_{i \geq 3} ie_i \quad (7.11)$$

Weiterhin gilt

$$3e \leq 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots = \sum_{i \geq 3} if_i \quad (7.12)$$

In den Beziehungen (7.7) bis (7.12) wie auch in der Eulerschen Formel (7.1) treten die Zahlen e und f (ja sogar die Zahlen e_3 und f_3 , e_4 und f_4 usw.) symmetrisch auf, d.h., diese Beziehungen bleiben richtig, wenn man in ihnen die Zahl e durch die Zahl f sowie die Zahlen e_i durch die Zahlen f_i ($i = 3, \dots, m$) ersetzt und umgekehrt.

Daher entspricht beispielsweise einer Beziehung über die Flächen eines Polyeders, die aus (7.1) und (7.7) bis (7.12) herleitbar ist, eine analoge (man sagt dazu "duale") Beziehung über seine Ecken. Das ist der Inhalt des sogenannten Dualitätsprinzips für Polyeder. Die Beziehungen (7.9) und (7.10) sowie (7.11) und (7.12) sind zueinander dual. Die Eulersche Formel ist zu sich selbst dual.

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus den Beziehungen (7.1) und (7.7) bis (7.12).

Aus der Ungleichung (7.12) und der Gleichung (7.10) erhalten wir

$$e \leq \frac{1}{3} \sum_{i \geq 3} if_i \quad \text{und} \quad k = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 3} if_i$$

Durch Einsetzen in (7.1) folgt

$$\frac{1}{3} \sum_{i \geq 3} if_i - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 3} if_i + \sum_{i \geq 3} f_i \geq 2 \quad \text{oder} \quad 6 \sum_{i \geq 3} f_i - \sum_{i \geq 3} if_i \geq 12$$

Durch Abtrennen der Summanden in beiden Summen, die f_3 , f_4 , und f_5 enthalten, kommt man zu

$$6(f_3 + f_4 + f_5) + 6 \sum_{i \geq 6} f_i - (3f_3 + 4f_4 + 5f_5) - \sum_{i \geq 6} if_i \geq 12$$

oder zu

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12 + \sum_{i \geq 6} (i - 6)f_i$$

Weil

$$\sum_{i \geq 6} (i - 6)f_i \geq 0 \quad \text{ist, folgt} \quad 3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12 \quad (7.13)$$

Aus (7.13) ergeben sich interessante geometrische Folgerungen.

Diese Formel zeigt, dass jedes konvexe Polyeder Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke haben muss. Insbesondere existiert kein Polyeder, dessen Flächen sämtlich Sechsecke sind.

Unter der Voraussetzung $f_4 = 0$ und $f_5 = 0$ erhalten wir aus (7.13) $f_3 \geq 4$.

Es gibt ein Polyeder, für das $f_4 = 0$, $f_5 = 0$ und $f_3 = 4$ ist. Das ist das Tetraeder.

Für $f_3 = 0$ und $f_5 = 0$ folgt $f_4 \geq 6$. Ist $f_4 = 6$, so erhält man den Würfel. Wenn $f_3 = 0$ und $f_4 = 0$ ist, ergibt sich $f_5 \geq 12$. Für $f_5 = 12$ haben wir das Dodekaeder (vgl. Tabelle 3).

Bezeichnung des Polyeders	m	n	e	k	f
Tetraeder	3	3	4	6	4
Hexaeder	4	3	8	12	6
Oktaeder	3	4	6	12	8
Dodekaeder	5	3	20	30	12
Ikosaeder	3	5	12	30	20

Die zu (7.13) duale Gleichung lautet

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 \geq 12 \quad (7.14)$$

Ihr Beweis erübrigt sich wegen der Gültigkeit des Dualitätsprinzips. Aus (7.14) ergibt sich insbesondere, dass kein konvexes Polyeder existiert, bei dem alle Ecken die Valenz 6 haben. Weiterhin gilt:

Aus $e_4 = 0$ und $e_5 = 0$ folgt $e_3 \geq 4$,
aus $e_3 = 0$ und $e_5 = 0$ folgt $e_4 \geq 6$,
aus $e_3 = 0$ und $e_4 = 0$ folgt $e_5 \geq 12$

Dass in allen drei Fällen das Gleichheitszeichen möglich ist, ist aus Tabelle 3 zu ersehen.

Ein konvexes Polyeder heißt kombinatorisch regelmäßig, wenn alle seine Flächen dieselbe Anzahl von Seiten (sagen wir m) und alle seine Ecken dieselbe Valenz (sagen wir n) haben. In dieser Definition wird weder gefordert, dass die Flächen kongruente regelmäßige Polygone sind noch dass die Polyederwinkel gleich sind.

Darin unterscheiden sich die kombinatorisch regelmäßigen Polyeder von den aus der Schule bekannten metrisch regelmäßigen Polyedern. (Es ist sofort klar, dass metrisch regelmäßige Polyeder auch kombinatorisch regelmäßig sind).

Wir sagen, dass wir einem (kombinatorisch regelmäßigen) Polyeder den Typ (m, n) zuordnen, wenn jede seiner Flächen ein m -Eck ist und jede Ecke die Valenz n hat.

Wir beweisen nun, dass es genau fünf verschiedene Typen kombinatorisch regelmäßiger Polyeder gibt. Wir wissen bereits, dass bei einem regelmäßigen Polyeder jede der Zahlen m und n nur gleich 3 oder 4 oder 5 sein kann. Hieraus kann man neun verschiedene Paare (m, n) bilden. Es muss nur noch überprüft werden, für welche dieser Paare Polyeder existieren.

Für ein regelmäßiges Polyeder vom Typ (m, n) ist $e = e_m$, und wegen (7.9) $2k = mf$. Für das Gleichungssystem $e - k + f = 2$, $2k = mf$, $2k = ne$ mit den Unbekannten e , f und k erhalten wir

$$e = \frac{4m}{2m + 2n - mn}; \quad k = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}; \quad f = \frac{4n}{2m + 2n - mn}$$

Weil diese Zahlen positiv sind, ist

$$2m + 2n - mn > 0 \quad \text{bzw.} \quad (m - 2)(n - 2) < 4 \quad (7.15)$$

Damit ist klar, dass von den neun Zahlenpaaren (m, n) nur die fünf Paare $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$ und $(3, 5)$ der Ungleichung (7.15) genügen. Wir erhalten das Tetraeder, das Hexaeder (oder den Würfel), das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.

In Tabelle 3 sind die Zahlen m , n , e , k und f für diese Polyeder angegeben.

Die folgende Bemerkung richtet sich an den Leser, der den Begriff n -dimensionaler euklidischer Raum kennt. In diesem Raum besteht der Rand jedes Polyeders, das nicht in einer Hyperebene liegt, aus Zellen der Dimensionen $0, 1, \dots, n-1$. Es bezeichne α_i die Anzahl seiner i -dimensionalen Zellen ($i = 0, 1, \dots, n_1$). Dann gilt folgendes Analogon zur Eulerschen Formel (7.1):

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

Aufgaben

16. Man beweise, dass für beliebige konvexe Polyeder die Zahl $e + k + f$ gerade ist.
17. Man beweise die Eulersche Formel (7.1) mit dem Gleitebenenverfahren, ohne vorzusetzen, dass die Polyederecken auf unterschiedlicher Höhe liegen.
18. Es ist zu beweisen, dass ein konvexes Polyeder ein Tetraeder ist, wenn jedes Eckenpaar genau eine Kante bestimmt.

Die Konvexität des Polyeders muss hierbei vorausgesetzt werden. Das Beispiel eines Körpers, der aus den drei Tetraedern $ADCF$, $ADBE$ und $BECF$ zusammengesetzt ist, wobei je zwei dieser Tetraeder eine gemeinsame Kante haben, zeigt das (Abb. 30).

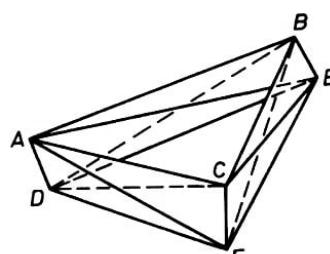


Abb. 30

In höherdimensionalen Räumen gilt übrigens eine analoge Behauptung nicht. Beispielsweise existieren im vierdimensionalen Raum außer vierdimensionalen Simplexen (im dreidimensionalen Raum sind die Simplexe die Tetraeder) konvexe Polyeder mit beliebiger Eckenzahl, die aber mindestens gleich 5 ist, wobei jedes Eckenpaar durch eine gemeinsame Kante verbunden ist.

19. Man formuliere die zur Aufgabe 18 duale Aussage und beweise diese.

20. (Lemma von Cauchy). Jede Kante eines konvexen Polyeders habe entweder positives oder negatives Vorzeichen. Beim Durchlaufen der von einer beliebigen Ecke ausgehenden Kanten kann beim Übergang von einer Kante zur nächsten das Vorzeichen wechseln. Es ist klar, dass die Anzahl solcher Wechsel gerade (möglicherweise gleich 0) ist.

Lemma von Cauchy: Es existiert eine solche Polyederecke, dass beim Durchlaufen der von ihr ausgehenden Kanten die Anzahl der Vorzeichenänderungen höchstens gleich 2 ist. Man beweise dieses Lemma.

Die dazu duale Behauptung ist zu formulieren und zu beweisen.

Der französische Mathematiker A. L. Cauchy (1789-1857) benutzte dieses Lemma 1813, um zu beweisen, dass der Rand konvexer Polyeder starr ist (Ausführlicheres dazu in [4]).

21. Ein konvexes Polyeder habe fünf Flächen. Wie viele Ecken und wie viele Kanten kann es dann haben? Man formuliere die dazu duale Aussage und beweise sie.

22. Unter Verwendung der Beziehungen (7.1) und (7.7) bis (7.10) ist folgendes zu beweisen: Für beliebige natürliche Zahlen n gilt

$$\sum_{i \geq 3} (2i + 2n - ni)e_i + 2 \sum_{i \geq 3} (n - i)f_i = 4n \quad (7.16)$$

In dieser Formel wird also f_n aus der Betrachtung ausgeschlossen.

Man schreibe die zu (7.16) duale Beziehung auf und beweise sie.

23. Man beweise den folgenden Satz unter Benutzung der Formel (7.16) für $n = 7$: Die Valenz jeder Ecke eines konvexen Polyeders sei gleich 3. Weiterhin habe das Polyeder weder Dreiecke noch Vierecke als Flächen. Dann besitzt es eine fünfeckige Fläche, die ein anderes Fünfeck oder Sechseck als Nachbarfläche hat.

(Benachbarte Flächen haben eine gemeinsame Kante.)

Man formuliere und beweise die dazu duale Aussage.

8 Axiome für die Eulersche Charakteristik

Wir geben zunächst die Hauptergebnisse an, die wir bisher erhalten haben, und legen das weitere Programm kurz dar. Wir haben gezeigt, dass man jeder Figur M (beispielsweise irgendeinem Polygon) über eine Zerlegung der Figur in Zellen verschiedener Dimension ihre Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ zuordnen kann.

Mit anderen Worten: Auf der Menge der Figuren war eine Funktion χ mit $\chi(M) = e - k + f$ definiert worden, und unsere Hauptaufgabe war, zu zeigen, dass diese Funktion von der speziellen Art der Zerlegung der Figur M nicht abhängt. Üblicherweise nennt man eine Definition dieser Art konstruktiv, weil mit ihr eine Regel (Vorschrift) angegeben ist, nach der die definierten Funktionswerte errechnet werden können.

Wir geben jetzt für die Eulersche Charakteristik eine andere, nämlich eine axiomatische Definition. Zunächst wird eine gewisse Menge von Figuren definiert, die wir elementar nennen wollen.

Dann definieren wir die Eulersche Charakteristik als eine Funktion χ auf dieser Klasse so, dass sie von vornherein einfachen natürlichen Forderungen, den Axiomen, genügt. Als Axiome werden Eigenschaften der Eulerschen Charakteristik gewählt, die dem Leser bereits bekannt sind. Unsere Hauptaufgabe ist jetzt der Nachweis der Existenz und der Einzigkeit einer solchen Funktion χ .

Weiterhin ist zu zeigen, dass die konstruktive Definition mit der axiomatischen Definition der Eulerschen Charakteristik äquivalent ist, d.h., dass die beiden Definitionen ein und dieselbe auf der Menge der elementaren Figuren definierte Funktion χ liefern.

Die axiomatische Definition der Eulerschen Charakteristik hat gegenüber der konstruktiven gewisse Vorteile. Der Hauptvorteil besteht darin, dass man den Funktionswert einer Figur M über die Funktionswerte einfachster Teilfiguren, aus denen sich M zusammensetzt (in der Regel sind das konvexe Polygone), ermitteln kann. Es muss noch bemerkt werden, dass diese Teilfiguren nicht unbedingt Kanten, Flächen oder überhaupt Zellen einer Zerlegung sein müssen.

Die axiomatische Begründung der Eulerschen Charakteristik wurde 1950 von dem Schweizer Mathematiker H. Hadwiger (1908-1981) eingeführt.

Wir gehen jetzt zur (ebenfalls axiomatischen !) Beschreibung der Menge \mathcal{M} der Elementarfiguren über. Diese Menge von ebenen Elementarfiguren wird durch die beiden folgenden Axiome definiert:

1. Jedes konvexe Polygon C ist in \mathcal{M} enthalten (in einer anderen Sprechweise: C ist Element von \mathcal{M} ; oder symbolisch: $C \in \mathcal{M}$).
2. Wenn die Figuren A und B in \mathcal{M} enthalten sind, dann sind in \mathcal{M} auch ihre Vereinigung $A \cup B$ und ihr Durchschnitt $A \cap B$ enthalten (wenn $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{M}$, dann $A \cup B \in \mathcal{M}$ und $A \cap B \in \mathcal{M}$).

Wir ziehen nun einfachste Folgerungen aus diesen Axiomen. Der Durchschnitt zweier konvexer Polygone kann ein konvexes Polygon, eine Strecke oder ein Punkt sein oder

gar keinen Punkt enthalten (d.h. die leere Figur sein) (Abb. 31).

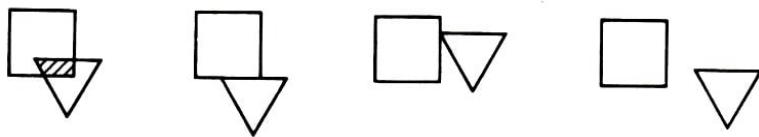


Abb. 31

Strecken und Punkte werden künftig ausgeartete (konvexe) Vielecke genannt. Die leere Figur wird mit \emptyset bezeichnet. Aus den Axiomen folgt damit, dass zur Menge der Elementarfiguren auch die entarteten Polygone und das leere Polygon (die leere Menge) gehören.

Aus Axiom 2 folgt durch Induktion, dass die Menge \mathcal{M} die Vereinigung und den Durchschnitt von beliebig vielen ihrer Elemente A_i ($i = 1, \dots, n$) enthalten muss, d.h., mit A_i sind auch die Figuren $\bigcup_{i=1}^n A_i$ und $\bigcap_{i=1}^n A_i$ in \mathcal{M} enthalten.

Wir beweisen jetzt, dass in der Ebene eine Menge von Figuren existiert, die den Axiomen 1 und 2 genügt. Diese Menge besteht aus allen endlichen Vereinigungen konvexer Vielecke, die auch ausgeartet sein können. Wir bezeichnen diese Menge künftig mit \mathcal{M} . Ihre Elemente nennen wir Elementarfiguren (oder kurz: Figuren).

Es seien A und B Figuren, d.h., es sei

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i \quad , \quad B = \bigcup_{j=1}^m D_j \quad (8.1)$$

wobei die C_i und die D_j konvexe Polygone sind. Da in (8.1) die Anzahl der zu A bzw. B gehörenden Elementarfiguren gleich 1 sein kann, ist Axiom 1 erfüllt. Es ist auch klar, dass die Vereinigung $A \cup B$ in \mathcal{M} liegt, da sie die gleiche Gestalt wie die Mengen A und B hat.

Es bleibt noch zu beweisen, dass $A \cap B$ als Vereinigung von endlich vielen konvexen Polygonen dargestellt werden kann. Das folgt aber sogleich aus der Formel

$$\left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m D_j \right) = \bigcup_{i,j} C_i \cap D_j \quad (8.2)$$

("dem Distributivgesetz"), wobei die Indizes i und j auf der rechten Seite dieselbe Bedeutung wie auf der linken Seite haben.

Es sei bemerkt, dass es neben der betrachteten Menge \mathcal{M} in der Ebene noch andere Mengen von Figuren gibt, die den Axiomen 1 und 2 genügen. Wir werden aber solche Mengen nicht betrachten.

Man prüft leicht nach, dass z.B. Polygone, die nicht unbedingt konvex sein müssen, entsprechend den Festlegungen von § 2 zu Elementarfiguren werden.

Andererseits ist eine zusammenhängende Elementarfigur, die sich als Vereinigung nicht-ausgearteter konvexer Polygone ergibt, ein Polygon. Das wird auf die Art nachgeprüft, mit der man auch zeigt, dass ein einfaches Loch ein einfaches Polygon ist. (Man vergleiche dazu 5.2.)

Neben Polygonen gehören zur Menge \mathcal{M} natürlich auch ebene Graphen. Man überzeugt sich leicht davon, dass jede beliebige Elementarfigur als Vereinigung einiger Polygone und eines (möglicherweise nicht zusammenhängenden) ebenen Graphen dargestellt werden kann, wobei einige dieser "Summanden"? auch fehlen können.

In Analogie zur Menge \mathcal{M} der ebenen Elementarfiguren wird die Menge $\mathcal{M}(g)$ der Elementarfiguren auf einer Geraden g definiert. Jedes Element von $\mathcal{M}(g)$ entsteht durch Vereinigung endlich vieler Strecken, die zu Punkten entarten können. Man beweist ohne Mühe, dass die Menge $\mathcal{M}(g)$ den Axiomen 1 und 2 genügt. (Man macht das ebenso wie für die Menge \mathcal{M}).

Im Raum R werden wir nun die Menge von Elementarfiguren $\mathcal{M}(R)$ betrachten, von denen jede durch Vereinigung endlich vieler konvexer Polygone, die möglicherweise ausgeartet sind, entsteht. Die Trägerebenen verschiedener Polygone müssen dabei nicht zusammenfallen. Zur obigen Menge gehören beispielsweise die Ränder konvexer Polyeder.

Wir kommen nun zur Definition der Eulerschen Charakteristik etwa für eine Figurenmenge \mathcal{M} . Wir sagen, dass auf \mathcal{M} die Eulersche Charakteristik χ gegeben ist, wenn jeder Elementarfigur $A \in \mathcal{M}$ genau eine Zahl $\chi(A)$ so zugeordnet ist, dass folgende Axiome erfüllt sind:

$\alpha)$ Die Eulersche Charakteristik der leeren Menge ist gleich 0, d.h.

$$\chi(\emptyset) = 0$$

$\beta)$ Für jedes nichtleere konvexe Polygon C , das auch ausgeartet sein kann, gilt

$$\chi(C) = 1$$

$\gamma)$ Für beliebige Elementarfiguren A und B gilt

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

Die Eigenschaft γ heißt Additivität der Eulerschen Charakteristik. Deshalb kann man auch kürzer sagen, dass die Eulersche Charakteristik eine additive Funktion auf der Menge der Elementarfiguren ist, die durch die Bedingung β "normiert" ist. Mit der Additivität von χ haben wir uns bereits früher befasst.

Wir hatten uns jedoch dabei darauf beschränkt, dass die Polygone A und B disjunkt sind. Sicherlich kennt der Leser auch andere additive Funktionen auf der Menge der Polygone.

Die Inhaltsfunktion ist eine solche. Man muss nämlich für die Bestimmung des Inhalts der Vereinigung von zwei Polygonen die Summe ihrer Inhalte bilden und davon den Inhalt ihres Durchschnitts subtrahieren, weil dieser in der Summe doppelt berechnet worden ist.

Jetzt ziehen wir aus den Axiomen der Eulerschen Charakteristik einige Folgerungen.

Es seien n Elementarfiguren A_1, \dots, A_n oder, wie wir auch sagen, ein n -elementiger Teil

der Menge \mathcal{M} gegeben. Wir schreiben dafür $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Es sei $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ die Vereinigung aller gegebenen Figuren.

Wenn nun die Eulersche Charakteristik der Figur A existiert, wird sie durch die Eulerschen Charakteristiken der Figuren A_1, \dots, A_n wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \chi(A) = & \sum^{(1)} \chi(A_1) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum^{(3)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\ & - \sum^{(4)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) + \dots + (-1)^{n-2} \sum^{(n-1)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}) \\ & + (-1)^{n-1} \sum^{(n)} \chi(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Wir wollen diese Formel erläutern. $\sum^{(1)}$ ist die Summe, die über alle Figuren A_i (oder, was gleichbedeutend ist, aus den einelementigen Teilen von \mathfrak{A}) gebildet wird.

$\sum^{(2)}$ ist die aus allen Paaren von Figuren $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$ mit $i_1 \neq i_2$ (oder aus allen zweielementigen Teilen von \mathfrak{A}) gebildete Summe.

$\sum^{(3)}$ ist die aus allen Tripeln von Figuren $\{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\}$, i_1, i_2, i_3 paarweise verschieden (oder aus allen dreielementigen Teilen von \mathfrak{A} gebildete Summe usw.

Wenn $n = 2$ ist, stellt (8.3) das Axiom γ) dar. Daher braucht (8.3) nur für $n \geq 3$ bewiesen zu werden.

Für $n = 3$ folgt mit dem Axiom γ)

$$\chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \chi[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] = \chi(A_1 \cup A_2) + \chi(A_3) - \chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \quad (8.4)$$

Unter Nutzung des Spezialfalls

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

des Distributivgesetzes (8.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] &= \chi[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \\ &= \chi(A_1 \cap A_3) + \chi(A_2 \cap A_3) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung ersetzen wir in (8.4) $\chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$ und wenden danach auf $\chi(A_1 \cup A_2)$ Axiom γ) an. Dann erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \chi(A_1) + \chi(A_2) + \chi(A_3) - \chi(A_1 \cap A_2) - \chi(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - \chi(A_2 \cap A_3) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Somit ist (8.3) für $n = 3$ bewiesen. Durch vollständige Induktion beweisen wir nun den allgemeinen Fall, indem wir voraussetzen, dass die Beziehung (8.3) für $n = k - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \chi\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) &= \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum^{(3)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots \\ &\quad + (-1)^{k-3} \sum^{(k-2)} \chi(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-2}}) + (-1)^{k-2} \sum^{(k-2)} \chi(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Mit Axiom γ) ergibt sich

$$\chi \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \chi \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) + \chi(A_k) - \chi \left[\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \cap A_k \right] \quad (8.7)$$

Bei Benutzung des Distributivgesetzes in der Form

$$\left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^m (A_i \cap B)$$

und der Induktionsvoraussetzung (8.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi \left[\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \cap A_k \right] &= \chi \left[\bigcup_{i=1}^{k-1} (A_i \cap A_k) \right] = \sum^{(1)} \chi(A_i \cap A_k) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_k) + \dots \\ &+ (-1)^{k-3} \sum^{(k-2)} \chi(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-2}} \cap A_k) \\ &+ (-1)^{k-2} \chi(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k) \end{aligned} \quad (8.8)$$

worin in jeder dieser Summen die Indizes paarweise verschieden sind und die natürlichen Zahlen von 1 bis $k - 1$ laufen.

Wir setzen nun die Beziehungen (8.6) und (8.8) in (8.7) ein. In (8.6) wird die Summe $\sum^{(1)}$ aus allen Figuren A_i außer der Figur A_k gebildet.

In (8.7) tritt dann der Summand $\chi(A_k)$ auf. Durch Addition aller dieser Summanden erhalten wir bereits die Summe $\sum^{(1)}$ der zu beweisenden Formel (8.3) für alle Figuren ohne Einschränkung.

Weiterhin wird auf der rechten Seite von (8.6) die Summe $\sum^{(2)}$ aus allen Paaren von Figuren $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$ gebildet, die die Figur A_k nicht enthalten. Um alle Paare von Figuren mit verschiedenen Indizes zu erhalten, müssen zu den bereits genannten Paaren noch die Paare $\{A_1, A_k\}, \dots, \{A_{k-1}, A_k\}$ hinzugefügt werden. Die Summe $\sum^{(1)}$ gehört gerade zu den letztgenannten Paaren in der Beziehung (8.8).

Deshalb erhalten wir, wenn wir zur Summe $\sum^{(2)}$ von (8.6) die Summe $\sum^{(1)}$ aus (8.8) hinzufügen, die Summe $\sum^{(2)}$ in der zu beweisenden Gleichung (8.3), in der alle Summanden negativ sind. Analog ergibt sich $\sum^{(3)}$ der zu beweisenden Formel durch Addition der Summen $\sum^{(3)}$ aus (8.6) und $\sum^{(2)}$ aus (8.8) usw. Damit ist die Gleichung (8.3) bewiesen.

Wir wenden uns nun noch einem Spezialfall dieser Gleichung zu, der für die weiteren Betrachtungen wichtig ist:

$$\begin{aligned} \chi \left(\bigcup_{i=1}^4 A_i \right) &= \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &+ \sum^{(3)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Es sei bemerkt, dass in der Beziehung (8.3) nicht gefordert wird, dass die Figuren A_1, \dots, A_n verschieden sind. Einige der Figuren A_i können also etliche Male in \mathcal{A} vorkommen. Insbesondere kann \mathcal{A} allein aus einer n -fach zu zählenden Figur bestehen.

Der Beweis der Beziehung (8.3) stützt sich nur auf das Axiom γ) und das Distributivgesetz. Daher gilt sie für beliebige additive Funktionen des Polygons, z.B. für den Inhalt (vgl. [7]). Ein anderes Beispiel für eine additive Funktion, die aber nicht mit Polygonen zusammenhängt, ist die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge oder, wie man auch sagt, ihre Mächtigkeit. Es sei darauf hingewiesen, dass die Lösung der Aufgaben 24 und 25 auf der Beziehung (8.3) für dieses Beispiel beruht.

Jetzt seien alle Figuren in (8.3) nichtleere konvexe Polygone.

Dann ist nach Axiom β) jeder Summand der Summe $\sum^{(1)}$ gleich 1. Aus den Axiomen α) und β) folgt, dass jeder Summand der Summe $\sum^{(2)}$ gleich 0 oder 1 ist, falls der Durchschnitt des Paares der konvexen Polygone, die zu diesem Summanden gehören, leer bzw. nicht leer ist.

Analog ist jeder Summand der Summe $\sum^{(3)}$ gleich 0, wenn der Durchschnitt des Tripels der konvexen Polygone, die diesen Summanden entsprechen, leer ist. Andernfalls ist der entsprechende Summand gleich 1 usw.

So erhält man die folgende Beziehung zur Berechnung der Eulerschen Charakteristik einer Figur A , die durch Vereinigung von n konvexen, nichtleeren Polygonen A_i , gebildet wird:

$$\chi(A) = q_1 - q_2 + q_3 - \dots + (-1)^{n-1} q_n \quad (8.10)$$

Hierbei ist q_i ($i = 1, \dots, n$) die Anzahl der i -elementigen Teile der Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ mit der Eigenschaft, dass die Polygone dieser i -elementigen Teile einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Wenn also auf der Menge \mathcal{M} aller Elementarfiguren die Eulersche Charakteristik χ , die den Axiomen α) bis γ) genügt, existiert, ist sie eindeutig definiert. Ihr Funktionswert ergibt sich mit (8.10). Insbesondere ist die Eulersche Charakteristik einer beliebigen Elementarfigur eine ganze Zahl.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel. Die Menge \mathcal{A} möge aus vier Strecken bestehen, und die Figur A sei die Vereinigung dieser Strecken (Abb. 32).

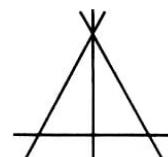


Abb. 32

Es gibt dann sechs Streckenpaare mit nichtleerem Durchschnitt und ein Tripel von Strecken mit nichtleerem Durchschnitt. Der Durchschnitt aller vier Strecken ist leer. Daher erhalten wir $\chi(A) = 4 - 6 + 1 - 0 = 1$.

Aufgaben

24. In einem wissenschaftlichen Institut arbeiten 67 Personen. Von ihnen sprechen 47

die englische Sprache, 35 sprechen deutsch und 20 französisch. Außerdem ist bekannt, dass 23 gleichzeitig die englische und die deutsche Sprache beherrschen, 12 beherrschen die englische und die französische Sprache, 11 sprechen deutsch und französisch, und schließlich beherrschen 5 Personen alle drei Sprachen.

Wie viele Institutsangehörige sprechen keine der drei Sprachen?

25. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1000 gibt es, die durch keine der Zahlen 2, 3 oder 5 teilbar sind?

26. Eine Figur bestehe aus fünf konvexen Polygonen, die alle einen nichtleeren Durchschnitt haben. Man bestimme die Eulersche Charakteristik dieser Figur.

9 Ein Existenzbeweis für die Eulersche Charakteristik

Wir beweisen für die Klassen der Elementarfiguren auf der Geraden, in der Ebene und im Raum die Existenz der Eulerschen Charakteristik.

Es sei $A = \bigcup_{j=1}^m B_j$ eine Elementarfigur der Klasse $\mathcal{M}(g)$, also eine Vereinigung (auch ausgearteter) Strecken, die auf einer Geraden g liegen. Wir beweisen, dass die Figur A Vereinigung ihrer Komponenten (d. h. paarweise disjunkter Strecken) ist. Dazu betrachten wir die Strecke B_1 . Es sind zwei Fälle möglich:

Entweder gehört B_1 schon zu den Komponenten der Figur A (und dann nennen wir diese Strecke C_1) oder es ist nicht so. Im zweiten Fall gibt es unter den Strecken B_2, B_3, \dots, B_m solche (etwa die Strecken B_2, \dots, B_k), von denen jede wenigstens einen gemeinsamen Punkt mit der Strecke B_1 hat.

Dann ist die Vereinigung $C'_1 = \bigcup_{j=1}^k B_j$ offensichtlich eine Strecke.

Es sind wieder zwei Fälle möglich: Entweder gehört die Vereinigung C'_1 schon zu den Komponenten der Figur A (dann nennen wir sie C_1) oder es ist nicht so. Im zweiten Fall gibt es unter den Strecken B_{k+1}, \dots, B_m solche (etwa B_{k+1}, \dots, B_p), von denen jede mindestens einen gemeinsamen Punkt mit der Strecke C'_1 hat.

Dann ist die Vereinigung $C''_1 = \bigcup_{j=1}^p B_j$ eine Strecke.

Es sind wieder zwei Fälle möglich: Entweder gehört C''_1 schon zu den Komponenten der Figur A oder nicht. Weil es nur eine endliche Anzahl von Strecken B_j gibt, muss dieser Prozess abbrechen, d.h., wir erhalten mit der Strecke C_1 eine Komponente der Figur A .

Anschließend erhalten wir eine weitere Komponente C_2 , indem wir diejenigen Strecken der Menge B_1, \dots, B_m streichen, die in der Komponente C_1 enthalten sind, und den beschriebenen Prozess für die restlichen Strecken durchführen. Analog erhalten wir die Komponente C_3 und schließlich C_n . Es ergibt sich also

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

wobei C_i eine Komponente der Figur A ist.

Wir setzen jetzt

$$\chi(A) = n$$

d.h., wir nennen die Anzahl der Komponenten einer Figur A ihre Eulersche Charakteristik. Zur Rechtfertigung dieser Definition überprüfen wir, ob für diese Funktion χ die Axiome α) bis γ) gelten. Dabei werden die Axiome α) und β) auftriviale Weise erfüllt.

Es bleibt also die Additivität der Funktion χ zu beweisen.

Es sei $B = \bigcup_{j=1}^m D_j$ eine andere Figur der Klasse $\mathcal{M}(g)$ mit den Komponenten D_j . Wir beweisen die Gültigkeit von γ) in der folgenden Form:

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) \quad (9.1)$$

Wir beweisen diese Behauptung mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Komponenten der Figur A . Wir nehmen zunächst an, dass diese Anzahl $n = 1$ ist, d.h., dass die Figur A aus einer Strecke C_1 besteht.

Dabei besitze die Strecke C_1 mit genau r Strecken, die Komponenten der Figur B sind, gemeinsame Punkte, wobei $0 \leq r \leq m$ gelte und m die Anzahl der Komponenten der Figur B sei.

Dann ist die linke Seite der Formel (9.1) gleich $1 + m$. Der erste Summand der rechten Seite ist gleich $1 + m - r$. Wenn wir nämlich beide Figuren zu einer vereinigen, dann sind r Strecken der Figur B zu einer Strecke "zusammengeklebt" (Abb. 33).

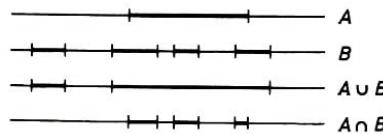


Abb. 33

Der zweite Summand der rechten Seite ist nach Voraussetzung gleich r . Folglich ist die Gleichung (9.1) für diesen Fall richtig.

Wir nehmen nun an, dass die Gleichung (9.1) für alle Figuren A gelte, deren Komponentenzahl (bei fester Figur B) nicht größer als $n - 1$ ist, und beweisen sie für den Fall, dass die Figur A genau n Komponenten hat. Wir setzen

$$A_1 = C_1, A_2 = \bigcup_{i=1}^2 C_i, \dots, A_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i, A = A_n = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\chi(A_{n-1}) + \chi(B) = \chi(A_{n-1} \cup B) + \chi(A_{n-1} \cap B) \quad (9.2)$$

Die Strecke C_n schneide genau r_n Strecken der Figur B und folglich nicht die restlichen $m - r_n$ Strecken dieser Figur.

Wir gehen jetzt von der Figur A_{n-1} zur Figur A_n über und untersuchen, wie sich beide Seiten der Gleichung (9.2) dabei ändern. Offenbar gilt $\chi(A_n) - \chi(A_{n-1}) = 1$. Deshalb vergrößert sich die linke Seite der Gleichung (9.2) bei diesem Übergang um 1. Weiterhin gilt

$$\chi(A_n \cup B) - \chi(A_{n-1} \cup B) = 1 - r_n$$

da die neue Strecke C_n die r_n Strecken der Figur B zu einer neuen Komponente "zusammenklebt". Außerdem ist

$$\chi(A_n \cap B) - \chi(A_{n-1} \cap B) = r_n$$

Deshalb vergrößert sich die rechte Seite der Gleichung (9.2) um $t_n + (1 - r_n) = 1$ und verändert sich damit um den gleichen Betrag wie die linke Seite. Also gilt

$$\chi(A_n) + \chi(B) = \chi(A_n \cup B) + \chi(A_n \cap B)$$

was zu beweisen war.

Damit ist für die Klasse $\mathcal{M}(g)$ die Existenz der Eulerschen Charakteristik bewiesen.

Wir gehen zum Fall der Ebene über. Es sei $\{C_1, \dots, C_n\}$ eine endliche Menge konvexer Polygone und $A = \bigcup_{j_1}^n C_j$ eine elementare Figur der Klasse \mathcal{M} .

Unter diesen Polygonen können mit Strecken und Punkten auch ausgeartete Polygone sein. Wir werden der Kürze halber einen Punkt auch als Strecke (mit zusammenfallenden Endpunkten) auffassen. Wir betrachten die Menge T der Strecken, die entweder Seiten eines Polygons C_j oder selbst (ausgeartete) Polygone sind. Wir nennen die Endpunkte von in der Menge T enthaltenen Strecken und die Schnittpunkte zweier (oder mehrerer) solcher Strecken Ecken der Figur A .

Die Figur in Abb. 34 hat beispielsweise 21 Ecken.

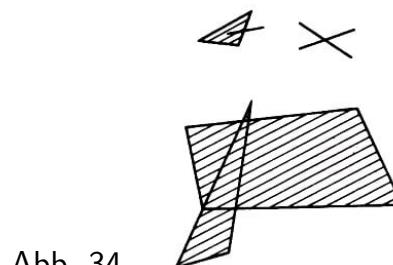


Abb. 34

Wir nehmen an, dass alle Ecken der Figur auf unterschiedlichen Höhen liegen und in der Reihenfolge wachsender Höhen angeordnet sind. Es sei also v_1 die niedrigste Ecke, v_2 liege höher als die Ecke v_1 , aber niedriger als v_3 , und schließlich sei v_m die höchste Ecke.

Wir zeichnen unterhalb der Figur A eine horizontale Gerade g_0 und bezeichnen mit h_i ($i = 1, \dots, m$) den Abstand der Ecke v_i zu dieser Geraden. Nach unserer Annahme gilt $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$.

Es sei g eine horizontale Gerade (Gleitgerade), die sich von der Anfangslage g_0 aus in der Ebene nach oben bewegt. Dabei ist der Durchschnitt $C_j \cap g$ stets eine (möglicherweise entartete oder leere) Strecke. Wir erhalten nach dem Distributivgesetz

$$A \cap g = \bigcup_{j=1}^n (C_j \cap g)$$

das bedeutet, dass dieser Durchschnitt eine endliche Vereinigung von Strecken und damit von Figuren der Klasse $\mathcal{M}(g)$ ist. Folglich existiert die Eulersche Charakteristik $\chi(A \cap g)$ des Durchschnitts der Figur A mit der Gleitgeraden g , die wir mit $\varphi(h)$ bezeichnen, falls die Gerade g von der Geraden g_0 den Abstand h hat.

Wir bezeichnen die Gleitgerade g noch mit g_i , wenn sie gerade durch die Ecke v_i ($i = 1, \dots, m$) geht, und mit g_i^- , wenn sie sich unterhalb der Geraden g_i und oberhalb der Geraden g_{i-1} befindet. Es ist leicht zu sehen (Abb. 35), dass sich der Wert $\varphi(h)$ für die Gleitgerade g bei Änderung ihrer Lage innerhalb zweier Ecken und unterhalb v_4 bzw. oberhalb v_m nicht ändert.

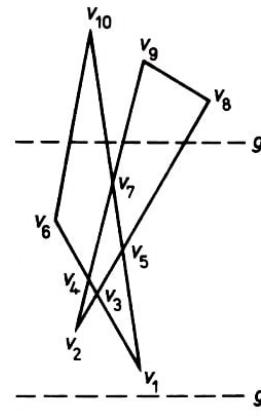


Abb. 35

Er kann sich nur beim "Annähern" der Gleitgeraden an eine Ecke von unten oder beim "Verlassen" einer Ecke nach oben ändern. Wir setzen

$$\varphi(h_i) = \chi(A \cap g_i) \quad \varphi(h_i^-) = \chi(A \cap g_i^-) \quad (9.3)$$

und definieren die Eulersche Charakteristik der Figur $A \in \mathcal{M}$ durch die Gleichung

$$\chi(A) = \sum_{i=1}^m (\varphi(h_i) - \varphi(h_i^-)) \quad (9.4)$$

Die Differenz $\varphi(h_i) - \varphi(h_i^-)$ ist also die Änderung der Zahl $\chi(A \cap g)$ bei der Annäherung der Geraden g an die Ecke v_i von unten (aber nicht beim Verlassen nach oben und auch nicht beim Durchgang durch diese Ecke), und die Eulersche Charakteristik $\chi(A)$ ist die über alle Ecken genommene Summe solcher Änderungen.

Wir bemerken, dass nicht alle Differenzen der Summe (9.4) von 0 verschieden sein müssen. Wir erhalten beispielsweise für die Figur A (Abb. 35)

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_1^-) = \varphi(h_2) - \varphi(h_2^-) = 1, \quad \varphi(h_3) - \varphi(h_3^-) = -1$$

und für alle übrigen Ecken sind die entsprechenden Differenzen gleich 0. Daher gilt $\chi(A) = 1$.

Wir beweisen, dass die mit Hilfe der Gleichung (9.4) definierte Funktion χ den Axiomen α) bis γ) genügt. Damit dürfen wir sie tatsächlich Eulersche Charakteristik nennen.

Offenbar gilt $\chi(\emptyset) = 0$. Es sei A ein konvexes Polygon. Dann ist

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_1^-) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(h_i) - \varphi(h_i^-) = 0$$

für alle von v_1 verschiedenen Ecken v_i . Daher ist $\chi(A) = 1$, und die Axiome α) und β) sind erfüllt.

Wir prüfen die Additivität der Funktion χ . Es seien A und B elementare Figuren. Wir müssen die Gültigkeit der Gleichung

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) \quad (9.5)$$

nachweisen. Es seien v_1, \dots, v_r die nach wachsender Höhe geordneten Ecken der Figur $A \cup B$ (wir bemerken, dass es genügt, die Menge der Ecken der Vereinigung $A \cup B$ zu betrachten, da die Ecken der restlichen drei Figuren darin vorkommen). Wir benutzen die Bezeichnungen g_i und g_i^- ($i = 1, \dots, r$) mit der zu oben analogen Bedeutung. Der Durchschnitt jeder der Geraden g_i und g_i^- mit jeder der Figuren $A, B, A \cup B, A \cap B$ ist eine endliche Vereinigung von Strecken. Wir führen die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\varphi_i(A) = \chi(A \cap g_i) \quad , \quad \varphi_i^-(A) = \chi(A \cap g_i^-)$$

Analoge Bezeichnungen benutzen wir für die drei anderen Figuren. Dann erhalten wir für alle $i = 1, \dots, r$ wegen der Additivität der Eulerschen Charakteristik in der Klasse $\mathcal{M}(g)$

$$\varphi_i(A) + \varphi_i(B) = \varphi_i(A \cup B) + \varphi_i(A \cap B) \quad (9.6)$$

$$\varphi_i^-(A) + \varphi_i^-(B) = \varphi_i^-(A \cup B) + \varphi_i^-(A \cap B) \quad (9.7)$$

Wir subtrahieren die Gleichung (9.7) gliedweise von der Gleichung (9.6) und summieren über $i = 1, \dots, r$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r (\varphi_i(A) - \varphi_i^-(A)) + \sum_{i=1}^r (\varphi_i(B) - \varphi_i^-(B)) = \\ \sum_{i=1}^r (\varphi_i(A \cup B) - \varphi_i^-(A \cup B)) + \sum_{i=1}^r (\varphi_i(A \cap B) - \varphi_i^-(A \cap B)) \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (9.3) und (9.4) folgt daraus die Gültigkeit der zu zeigenden Beziehung (9.5).

Wir haben damit die Existenz der Eulerschen Charakteristik für die Klasse \mathcal{M} der elementaren Figuren in der Ebene bewiesen.

Der entsprechende Beweis für die Klasse $\mathcal{M}(R)$ der elementaren Figuren im Raum verläuft analog. Dabei verwendet man die Gleitebenenmethode (statt einer Geraden lässt man eine Ebene "gleiten") und die für die Klasse \mathcal{M} der elementaren Figuren der Ebene bereits bewiesene Existenz der Eulerschen Charakteristik.

10 Die Äquivalenz der beiden Definitionen für die Eulersche Charakteristik

Der einführende Abschnitt dieses Paragraphen enthält einiges über Binomialkoeffizienten, was wir im weiteren benötigen werden.

Es sei n eine natürliche Zahl und $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine n -elementige Menge. Eine beliebige m -elementige Teilmenge dieser Menge heißt Kombination ohne Wiederholung von Elementen aus der Menge A zur Klasse m . Wir bezeichnen die Anzahl der m -elementigen Teilmengen der Menge A mit $\binom{n}{m}$ oder auch mit C_n^m .

Eine vierelementige Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ hat beispielsweise sechs zweielementige Teilmengen: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$.

Folglich ist $\binom{4}{2} = C_4^2 = 6$.

Der Ausdruck $\binom{m}{n}$ ist nicht nur für $m \leq n$, sondern auch für $m > n$ sinnvoll. Da eine n -elementige Menge für $m > n$ keine m -elementige Teilmenge besitzt, gilt in dem Fall natürlich $\binom{n}{m} = 0$. Wir erkennen weiter die Gleichheit $\binom{n}{0} = 1$, da eine beliebige n -elementige Menge die leere Menge als einzige nullelementige Teilmenge besitzt.

Die Zahlen $\binom{n}{m}$ heißen Binomialkoeffizienten, weil sie in der bekannten Beziehung

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \quad (10.1)$$

vorkommen, die die n -te Potenz des Binoms $1 + x$ als Polynom ausdrückt, das nach wachsenden Potenzen von x geordnet ist.

Wir notieren die folgende ebenfalls bekannte Formel zur Berechnung der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \dots m}$$

Als nächstes beweisen wir die Beziehung

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \quad (10.2)$$

Dazu sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine beliebige n -elementige Menge. Ihre m -elementigen Teilmengen ordnen wir zwei Klassen zu. In die erste Klasse nehmen wir alle diejenigen Teilmengen, der Menge A , die das Element a_n enthalten. In die zweite Klasse kommen alle übrigen Teilmengen der Menge A .

Dann enthält die erste Klasse $\binom{n-1}{m-1}$ Mengen. Wenn wir nämlich aus allen diesen Mengen das Element a_n entfernen, erhalten wir offenbar alle $(m-1)$ -elementigen Teilmengen der $(n-1)$ -elementigen Menge a_1, \dots, a_{n-1} . Andererseits sind die Mengen

der zweiten Klasse die m -elementigen Teilmengen derselben Menge $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Ihre Anzahl ist $\binom{n-1}{m}$.

Da beide Klassen keine Mengen gemeinsam haben (d.h., keine m -elementige Teilmenge der Menge A ist in beiden Klassen enthalten), folgt die Gültigkeit der behaupteten Beziehung (10.2).

Im folgenden wird die Beziehung

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} = (-1)^m \binom{n-1}{m} \quad (10.3)$$

die für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m und n gilt, eine wichtige Rolle spielen. Die Formel

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (10.4)$$

ist der Spezialfall dieser Beziehung für $m = n$.

Wir beweisen die Beziehung (10.3) mit vollständiger Induktion über m . Für $m = 0$ und $m = 1$ gilt sie offensichtlich. Die Beziehung (10.3) gelte nun für $m = j$. Wir zeigen, dass sie dann auch für $m = j + 1$ gilt. Es sei also vorausgesetzt, dass

$$\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^j \binom{n-1}{j}$$

ist. Mit der Beziehung (10.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \binom{n}{i} &= (-1)^j \binom{n-1}{j} + (-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} = (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} - \binom{n}{j+1} \right) \\ &= (-1)^j \left(-\binom{n+1}{j+1} \right) = (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j+1} \end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung (10.3) bewiesen. Wenn wir in der Gleichung (10.1) für x den Wert -1 einsetzen, erhalten wir übrigens unmittelbar die Formel (10.4).

Es ist gelegentlich vorteilhafter, statt der Formeln (10.3) und (10.4) die folgenden Formeln zu benutzen:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{m+1} \binom{n}{m} = 1 + \dots + (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m} \quad (10.5)$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} = 1 \quad (10.6)$$

Wir zeigen jetzt die Äquivalenz der beiden Definitionen für die Eulersche Charakteristik. Wir führen die Beweise für die folgenden drei Figurenklassen:

Graphen, Ränder konvexer Polyeder und Ränder einfacher Polygone der Ebene, die in konvexe Flächen zerlegt sind.

In diesen Beweisen ist es wichtig, dass jede Kante eines Graphen ihre beiden Ecken

und jede Fläche eines Polyeders ihren Rand enthält. Es wäre möglich, die Äquivalenz der konstruktiven und der axiomatischen Definition der Eulerschen Charakteristik für beliebige Figuren nachzuweisen, die eine Zerlegung in Zellen zulassen.

Gegeben sei ein Graph G . Man kann annehmen, dass er keine isolierten Ecken enthält. Er ist also eine Vereinigung endlich vieler Kanten (d.h. Strecken). Der Graph G liegt im allgemeinen nicht in einer Ebene, sondern im Raum. Seine Eulersche Charakteristik ist nach der Beziehung (8.10) gleich

$$\chi(G) = q_1 - q_2 + \dots + (-1)^{n-1} q_n \quad (10.7)$$

Hier bezeichnet q_1 die Anzahl der Kanten des Graphen G , q_2 die Anzahl der Paare seiner Kanten, die einen nichtleeren Durchschnitt (d.h. eine gemeinsame Ecke) haben, und q_3 die Anzahl der Tripel von Kanten mit nichtleerem Durchschnitt. Schließlich bezeichnet q_n die Anzahl der n -elementigen Mengen von Kanten des Graphen, die einen nichtleeren Durchschnitt (also eine gemeinsame Ecke) haben.

Wir müssen die folgende Beziehung beweisen:

$$q_1 - q_2 + \dots + (-1)^{n-1} q_n = e - k \quad (10.8)$$

Wir zeigen zunächst eine Beziehung zwischen der Kantenzahl k und den Anzahlen der Ecken mit verschiedenen Valenzen. Es sei e_1 die Anzahl der Ecken des Graphen mit der Valenz 1, e_2 die Anzahl der Ecken mit der Valenz 2 usw., schließlich sei e_n die Anzahl der Ecken mit der maximalen Valenz n .

Dann gilt

$$e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \dots + ne_n = 2k \quad (10.9)$$

(Man beachte, dass der Buchstabe n in den Beziehungen (10.8) und (10.9) faktisch dieselbe Zahl bezeichnet.) Die Beziehung (10.9) erhalten wir sehr einfach mit Hilfe einer Summierung der Kanten des Graphen über alle seine Ecken unter Berücksichtigung der Tatsache, dass bei einer solchen Summierung jede Kante zweimal gezählt wird.

Zum Beweis der Beziehung (10.8) stellen wir zunächst fest, dass $q_1 = k$ gilt. Wir suchen jetzt einen Ausdruck zur Berechnung von q_2 . Ein Kantenpaar mit nichtleerem Durchschnitt "entsteht" erstens bei jeder Ecke der Valenz 2, wobei jeder solchen Ecke ein solches Paar entspricht. Da sich in jeder Ecke der Valenz 3 genau drei Kanten treffen, entsprechen jeder solchen Ecke soviel Kantenpaare, wie zweielementige Teilmengen aus einer dreielementigen Menge gebildet werden können, also $\binom{3}{2}$.

Analog entsprechen jeder Ecke der Valenz 4 genau $\binom{4}{2}$ Kantenpaare mit nichtleerem Durchschnitt usw. Schließlich entsprechen jeder Ecke mit der Maximalvalenz n gerade $\binom{n}{2}$ solcher Paare. Da sich die Kanten nur in den Ecken schneiden, schließen wir aus dem Gesagten, dass

$$q_2 = \binom{2}{2} e_2 + \binom{3}{2} e_3 + \binom{4}{2} e_4 + \dots + \binom{n}{2} e_n$$

gilt. Mit analogen Überlegungen (unter Berücksichtigung der Tatsache, dass es bei

Ecken der Valenz 2 keine Kantentripel mit nichtleerem Durchschnitt geben kann) erhalten wir

$$q_3 = \binom{3}{3} e_3 + \binom{4}{3} e_4 + \binom{5}{3} e_5 + \dots + \binom{n}{3} e_n$$

Analog gelten die Beziehungen

$$q_4 = \binom{4}{4} e_4 + \binom{5}{4} e_5 + \dots + \binom{n}{4} e_n$$

...

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} e_{n-1} + \binom{n}{n-1} e_n$$

$$q_n = \binom{n}{n} e_n$$

Wenn wir die erhaltenen Werte für q_i in die Formel (10.7) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi(G) &= k - \left(\binom{2}{2} e_2 + \binom{3}{2} e_3 + \binom{4}{2} e_4 + \dots + \binom{n}{2} e_n \right) \\ &\quad + \left(\binom{3}{3} e_3 + \binom{4}{3} e_4 + \binom{5}{3} e_5 + \dots + \binom{n}{3} e_n \right) \\ &\quad - \left(\binom{4}{4} e_4 + \binom{5}{4} e_5 + \dots + \binom{n}{4} e_n \right) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-2} \left(\binom{n-1}{n-1} e_{n-1} + \binom{n}{n-1} e_n \right) + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} e_n \end{aligned}$$

oder nach Umgruppierung

$$\begin{aligned} \chi(G) &= k - \binom{2}{2} e_2 + \left(-\binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right) e_3 + \dots \\ &\quad + \left(-\binom{i}{2} + \binom{i}{3} - \dots + (-1)^i \binom{i}{i-1} + (-1)^{i+1} \binom{i}{i} \right) e_i + \dots \\ &\quad + \left(-\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \right) e_n \end{aligned}$$

Wir formen die rechte Seite weiter um und erhalten

$$\begin{aligned} \chi(G) &= (-k + 2k) + (e_1 - e_1) + (e_2 - 2e_2) + (e_3 - 3e_3) + \dots + (e_n - ne_n) \\ &= -k + (e_1 + e_2 + \dots + e_n) + (2k - e_1 - 2e_2 - 3e_3 - \dots - ne_n) \end{aligned}$$

Wegen der Formel (10.9) und der offensichtlichen Beziehung

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n$$

erhalten wir $\chi(G) = e - k$, was zu zeigen war.

Es sei X ein konvexes Polyeder. Nach der zweiten Definition ist die Eulersche Charakteristik seines Randes ∂X gleich

$$\chi(\partial X) = q_1 - q_2 + q_3 - \dots + (-1)^{n-1} q_n \quad (10.10)$$

wobei q_1 die Anzahl der Flächen des Polyeders X , q_2 die Anzahl der Paare solcher Flächen mit nichtleerem Durchschnitt, q_3 die Anzahl der Tripel und schließlich q_n die Anzahl der n -elementigen Mengen solcher Flächen mit nichtleerem Durchschnitt bezeichnet.

Wir müssen dann die Beziehung

$$q_1 - q_2 + q_3 - \dots + (-1)^{n-1} q_n = e - k + f \quad (10.11)$$

beweisen.

Wir bemerken zunächst, dass stets $q_1 = f$ gilt. Dann betrachten wir den einfachsten Fall, dass die Valenz aller Ecken des Polyeders gleich 3 ist (wie beim Würfel, beim Tetraeder oder beim Dodekaeder). Dann ist $q_2 = f$, denn in diesem Fall ist jeder nichtleere Durchschnitt zweier Flächen notwendigerweise eine Kante des Polyeders, und alle Kanten des Polyeders lassen sich auf diese Weise erhalten.

Außerdem ist jede Ecke des Polyeders nichtleerer Durchschnitt von genau drei Kanten. Umgekehrt bestimmt jeder solcher Durchschnitt eine Ecke. Es folgt $q_3 = e$, $q_4 = q_5 = \dots = 0$ und damit

$$q_1 - q_2 + q_3 = f - k + e$$

Damit ist die Formel (10.11) für diesen Spezialfall bewiesen.

Im allgemeinen Fall ist der nichtleere Durchschnitt zweier Flächen eines Polyeders entweder eine Kante oder eine Ecke. Das bedeutet aber noch lange nicht, dass $q_2 = k + e$ gilt:

Ein und dieselbe Ecke kann nämlich dabei in Abhängigkeit von ihrer Valenz mehrfach auftreten. Ist beispielsweise v eine Ecke der Valenz 4, so gehört sie zu vier verschiedenen Flächen F_1, F_2, F_3 und F_4 des Polyeders X (Abb. 36, wo die Projektionen dieser Flächen auf die Ebene abgebildet sind, was aber an der Situation nichts ändert).

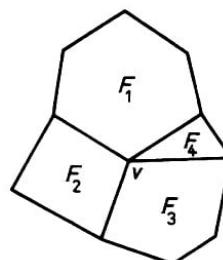


Abb. 36

Diese Flächen bilden $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Flächenpaare mit nichtleerem Durchschnitt. Nur vier von ihnen bilden Kanten: $F_1 \cap F_2, F_2 \cap F_3, F_3 \cap F_4$ und $F_4 \cap F_1$. Die beiden restlichen Paare $\{F_1, F_3\}$ und $\{F_2, F_4\}$ haben als Durchschnitt die Ecke v . Wenn im allgemeinen die Valenz einer Ecke v gleich i ($i \geq 3$) ist, dann bilden i Flächen, die

einen Punkt v als gemeinsame Ecke haben, gerade $\binom{i}{2}$ Flächenpaare mit nichtleerem Durchschnitt.

Davon haben $\binom{i}{1}$ Paare je eine von v ausgehende Kante und die restlichen $\binom{i}{2} - \binom{i}{1}$ Paare genau die Ecke v gemeinsam. Wir erhalten auf diese Weise

$$q_2 = k + \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} \right] e_3 + \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{1} \right] e_4 + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right] e_n \quad (10.12)$$

wobei e_3 die Anzahl der Ecken des Polyeders der Valenz 3, ..., e_n die Anzahl der Ecken der Maximalvalenz n bezeichnet (der Buchstabe n bezeichnet in den Formeln (10.10) und (10.12) dieselbe Zahl).

Aus (10.12) und der offensichtlichen Beziehung

$$e = e_3 + e_4 + \dots + e_n = \binom{3}{0} e_3 + \binom{4}{0} e_4 + \dots + \binom{n}{0} e_n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= f - k - \left\{ \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} \right] e_3 + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right] e_n \right\} + e - \left[\binom{3}{0} e_3 + \dots + \binom{n}{0} e_n \right] \\ &= f - k + e - \left\{ \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} + \binom{3}{0} \right] e_3 + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] e_n \right\} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass für den Beweis der Formel (10.11) der Nachweis der Beziehung

$$\left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} + \binom{3}{0} \right] e_3 + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] e_n - q_3 + q_4 - \dots + (-1)^n q_n = 0 \quad (10.13)$$

ausreicht.

Zum Beweis dieser Formel bemerken wir, dass jeder nichtleere Durchschnitt von drei, vier oder einer noch größeren Anzahl von Flächen notwendigerweise eine Ecke des Polyeders ist. Einen nichtleeren Durchschnitt von i Flächen erhalten wir nur für Ecken der Valenz $\geq i$. Wenn die Valenz einer Ecke gleich m ist, existieren genau $\binom{m}{i}$ verschiedene Möglichkeiten, diese Ecken als Durchschnitt von i Polyederflächen darzustellen. Daher gilt

$$\begin{aligned} q_3 &= \binom{3}{3} e_3 + \binom{4}{3} e_4 + \dots + \binom{n-1}{3} e_{n-1} + \binom{n}{3} e_n \\ q_4 &= \binom{4}{4} e_4 + \dots + \binom{n-1}{4} e_{n-1} + \binom{n}{4} e_n \\ &\dots \\ q_{n-1} &= \binom{n-1}{n-1} e_{n-1} + \binom{n}{n-1} e_n \\ q_n &= \binom{n}{n} e_n \end{aligned}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (10.13) einsetzen und die Reihenfolge der Summanden ändern, sehen wir, dass der linke Teil der Beziehung (10.13) den folgenden Wert an-

nimmt:

$$\begin{aligned} & \left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} \right] e_3 + \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] e_4 + \dots \\ & + \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \right] e_{n-1} \\ & + \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} \right] e_n \end{aligned}$$

Wegen (10.4) sind in diesem Ausdruck die Werte der Faktoren aller e_i ($i = 3, \dots, n$) gleich. Die Beziehungen (10.13) und (10.11) sind damit bewiesen.

Es sei M ein einfaches Polygon in der Ebene, das in konvexe Flächen zerlegt sei. Wir beweisen die Beziehung

$$q_1 - a_2 + q_3 - \dots + (-1)^{n-1} q_n = e - k + f \quad (10.14)$$

wobei die Bezeichnungen die analogen Bedeutungen wie in der Formel (10.11) (bezüglich einer beliebigen Zerlegung von M) haben. Der Beweis wird nach dem gleichen Muster geführt. Wir verweisen jedoch auf einige Unterschiede.

Die Anzahl der von einer Ecke der Zerlegung ausgehenden Kanten nennen wir Valenz der Ecke. Im Unterschied zum Polyeder gibt es jetzt innere Ecken und Randecken (Analoges gilt für Kanten). Es bezeichne e^i die Anzahl der inneren Ecken, e_3^i die Anzahl der inneren Ecken der Valenz 3, ... und e_n^i die Anzahl der inneren Ecken der Maximalvalenz n . Dann gilt

$$e^i = e_3^i + e_4^i + \dots + e_n^i = \binom{3}{0} e_3^i + \binom{4}{0} e_4^i + \dots + \binom{n}{0} e_n^i \quad (10.15)$$

Es bezeichne jetzt e^r die Anzahl der Randecken, k^i und k^r bezeichnen analog die Anzahlen der inneren Kanten bzw. der Randkanten. Dann gilt offensichtlich

$$e = e^i + e^r, \quad k = k^i + k^r, \quad e^r = k^r \quad (10.16)$$

Wir bezeichnen noch mit $e_3^r, e_4^r, \dots, e_n^r$ die Anzahlen der Randecken, die die Valenz 3, 4, bzw. n haben.

Wie im Fall eines Polyeders gilt zunächst $q_1 = f$. Doch schon bei der Berechnung von q_2 gibt es einen Unterschied:

Es sind erstens nur innere Kanten Durchschnitte von Flächen, für Randkanten gilt das nicht. Zweitens gehen von einer Randkante der Valenz j ($j \geq 3$) nur $j-1$ (und nicht j) Flächen aus. Folglich liefert eine solche Ecke $\binom{j-1}{2}$ Paare von Flächen, deren Durchschnitte nicht leer sind. Von ihnen entsprechen $j-2$ Durchschnitte inneren Kanten, die von dieser Ecke ausgehen, die restlichen $\binom{j-1}{2} - (j-2)$ Durchschnitte enthalten genau diese Ecke.

Andererseits liefert jede innere Ecke v der Valenz j gerade $\binom{j}{1}$ nichtleere Durchschnitte je zweier Flächen, die jeweils gleich einer inneren Kante sind, und $\binom{j}{2} - \binom{j}{1}$ solche

Durchschnitte, die nur die Ecke v enthalten. Somit gilt

$$q_1 - q_2 := f - k^i - \left\{ \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} \right] e_3^i + \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{1} \right] e_4^i + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right] e_n^i \right. \\ \left. + \left[\binom{2}{2} - 1 \right] e_3^r + \left[\binom{3}{2} - 2 \right] e_4^r + \dots + \left[\binom{n-1}{2} - (n-2) \right] e_n^r \right\} \quad (10.17)$$

Wir erhalten aus (10.16)

$$f - k^i = (f - k + e) + k^r - e^i - e^r = (f - k + e) - e^i \quad (10.18)$$

Zum Abschluss des Beweises der Formel (10.14) genügt es wegen der Beziehungen (10.17) und (10.18) zu zeigen, dass

$$e^i + \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} \right] e_3^i + \dots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \right] e_n^i + \left[\binom{2}{2} - 1 \right] e_3^r + \dots \\ + \left[\binom{n-1}{2} - (n-2) \right] e_n^r - q_3 + q_4 - \dots + (-1)^n q_n = 0 \quad (10.19)$$

gilt. Wir stellen Formeln zur Berechnung der Zahlen q_3, q_4 usw. zusammen. Da nichtleere Durchschnitte an inneren Ecken der Valenz ≥ 3 und Randecken der Valenz ≥ 4 "entstehen", gilt

$$q_3 = \binom{3}{3} e_3^i + \binom{4}{3} e_4^i + \dots + \binom{n-1}{3} e_{n-1}^i + \binom{n}{3} e_n^i + \binom{3}{3} e_4^r + \dots \\ + \binom{n-2}{3} e_{n-1}^r + \binom{n-1}{3} e_n^r$$

Analog gilt

$$q_4 = \binom{4}{4} e_4^i + \binom{5}{4} e_5^i + \dots + \binom{n-1}{4} e_{n-1}^i \\ + \binom{n}{4} e_n^i + \binom{4}{4} e_5^r + \dots + \binom{n-2}{4} e_{n-1}^r + \binom{n-1}{4} e_n^r \\ \dots \\ q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} e_{n-1}^i + \binom{n}{n-1} e_n^i + \binom{n-1}{n-1} e_n^r \\ q_n = \binom{n}{n} e_n^i$$

Nach Einsetzen dieser Werte für q_3, \dots, q_n in den linken Teil der Gleichung (10.19) und nach einfachen Umformungen erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung (10.15) für diesen linken Teil den Ausdruck

$$\left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} \right] e_3^i + \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] e_4^i + \dots \\ + \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \right] e_n^i + \left[-1 + \binom{2}{2} \right] e_3^r + \left[-2 + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} \right] e_4^r + \dots \\ + \left[-(n-2) + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \right] e_n^r$$

Wegen der Beziehung (10.4) sind alle Koeffizienten der Größen $e_3^i, e_4^i, \dots, e_n^i$ gleich 0. Ebenso sind die Koeffizienten von $e_3r, e_4^r, \dots, e_n^r$ gleich 0. Davon überzeugt man sich am einfachsten mit Hilfe der aus der Beziehung (10.6) folgenden Formel

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \binom{n}{n} - 1 = n - 1$$

Wir haben damit die Gleichung (10.19) und damit auch die Formel (10.14) bewiesen.

Aufgabe 27. Eine Figur sei als Vereinigung von n konvexen Polygonen A_1, \dots, A_n gegeben. Es gelte $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Man bestimme die Eulersche Charakteristik der gegebenen Figur.

11 Elementare Figuren auf der Sphäre und ihre Eulerschen Charakteristiken

Es sei S eine Sphäre. Die Schnittkurve der Sphäre mit einer Ebene durch ihren Mittelpunkt O heißt Großkreis auf S (Abb. 37 a). Ein Großkreis zerlegt die Sphäre in zwei Halbsphären.

Wir nehmen an, dass der Großkreis selbst in beiden Halbsphären enthalten ist. Jeder Durchschnitt endlich vieler Halbsphären heißt konvexes Polygon auf S (Abb. 37 b, c).

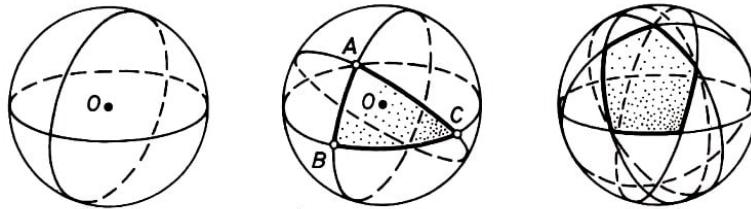


Abb. 37

a)

b)

c)

Konvexe Polygone auf der Sphäre werden also ähnlich wie in der Ebene definiert, die Rolle der Geraden spielen hier die Großkreise und die Rolle der Halbebenen die Halbsphären.

Auf der Sphäre gibt es im Unterschied zur Ebene, wo Dreiecke die Polygone mit der kleinsten Seitenanzahl sind, konvexe Polygone mit nur zwei Ecken - die Zweiecke. Ein Zweieck ist der Durchschnitt zweier Halbsphären, deren begrenzende Großkreise nicht zusammenfallen (Abb. 38).

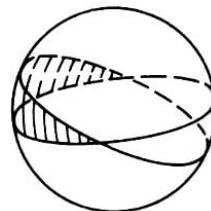


Abb. 38

Ein Großkreis ist als Durchschnitt zweier ihn definierender Halbsphären ebenfalls ein konvexes Polygon. Zu den Polygone auf S gehören schließlich noch die antipodischen Punktpaare, d.h. Punktpaare, die Endpunkte eines Durchmessers der Sphäre sind. Ein solches Punktpaar ist tatsächlich der Durchschnitt zweier Großkreise und damit der Durchschnitt von vier Halbsphären.

Ein konvexes Polygon auf der Sphäre heißt streng konvex, wenn es kein antipodisches Punktpaar enthält. Dieser Bedingung genügen beispielsweise das Dreieck und das Fünfeck der Abb. 37.

Ein Zweieck ist dagegen nicht streng konvex, weil es mit seinen Ecken (genau) ein Paar von Antipoden enthält. Ein Polygon heißt ausgeartet, wenn es in einem Großkreis liegt (bzw. speziell mit ihm zusammenfällt).

Jede Vereinigung endlich vieler streng konvexer (auch ausgearteter) Polygone heißt eine elementare Figur. Die Klasse der elementaren Figuren bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(S)$. Zur Klasse $\mathcal{M}(S)$ gehören offenbar alle konvexen Polygone (beispielsweise Halbsphären,

Zweiecke, Paare von Antipoden), also nicht nur die streng konvexen. Wichtig ist, dass auch S selbst zu dieser Klasse gehört.

Es seien v_1, \dots, v_4 die Eckpunkte eines in S einbeschriebenen Tetraeders (Abb. 39).

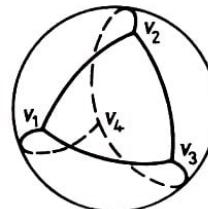


Abb. 39

Wir betrachten dann vier Dreiecke auf der Sphäre: das Dreieck A_1 mit den Ecken v_2, v_3 und v_4 , das Dreieck A_2 mit den Ecken v_1, v_3 und v_4 , das Dreieck A_3 mit den Ecken v_1, v_2 und v_4 und das Dreieck A_4 mit den Ecken v_1, v_2 und v_3 .

Offenbar sind alle diese Dreiecke streng konvex, und es gilt

$$S = \bigcup_{i=1}^4 A_i \quad (11.1)$$

Es sei C ein Großkreis der Sphäre. Jede Vereinigung endlich vieler Bögen auf C , deren Länge kleiner als die Länge des Halbkreises ist, heißt eine elementare Figur auf dem Kreis C . Wir nennen solche Bögen auch kurze Bögen. Der Großkreis C ist damit selbst eine elementare Figur auf C , da er sich als Vereinigung

$$C = \bigcup_{i=1}^4 B_i \quad (11.2)$$

dreier kurzer Bögen B_i darstellen lässt, von denen je zwei einen gemeinsamen Endpunkt haben. Es bezeichne $\mathcal{M}(C)$ die Menge aller elementaren Figuren auf dem Kreis. Die Eulersche Charakteristik wird auf den Mengen $\mathcal{M}(S)$ und $\mathcal{M}(C)$ mit Hilfe der Axiome α), β) und γ) aus § 8 definiert. Das Axiom β) muss im Unterschied zum ebenen Fall jetzt folgendermaßen formuliert werden:

β) Für jedes (auch ausgeartete) nichtleere streng konvexe Polygon A auf der Sphäre S gilt $\chi(A) = 1$.

Für jeden nichtleeren kurzen Bogen B eines Großkreises gilt speziell $\chi(B) = 1$.

Es ist verständlich, dass wir die Gleichheit $\chi(A) = 1$ jetzt nur für streng konvexe (und nicht für alle konvexen) Polygone fordern. Zu den konvexen Polygonen gehören beispielsweise Paare von Antipoden, deren Eulersche Charakteristiken natürlicherweise 2 und nicht 1 sein sollen.

Der Existenzbeweis für die Eulersche Charakteristik auf der Menge $\mathcal{M}(C)$ wird im wesentlichen analog zum entsprechenden Beweis für die Menge der elementaren Figuren auf der Geraden geführt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass offenbar jede elementare Figur M auf dem Kreis C entweder Vereinigung einer endlichen Anzahl von (nicht notwendig kurzen) Bögen dieses Kreises ist, die paarweise keine gemeinsamen

Punkte haben und wie üblich Komponenten der Figur M heißen, oder mit dem Kreis C 100 5 11. Elementare Figuren auf der Sphäre zusammenfällt.

Im ersten Fall setzen wir $\chi(M)$ gleich der Zahl der Komponenten der Figur M . Im zweiten Fall müssen wir $\chi(M) = \chi(C) = 0$ setzen, da diese Beziehung aus den Axiomen für die Eulersche Charakteristik, aus ihrer Einzigkeit und aus der Beziehung (11.2) folgt. Denn es gilt

$$\chi(C) = \sum^{(1)} \chi(B_i) - \sum^{(2)} \chi(B_{i_1} \cap B_{i_2}) + \chi(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 3 - 3 + 0 = 0$$

Man zeigt genau wie in § 9, dass die Axiome $\alpha)$ bis $\gamma)$ erfüllt werden.

Der Existenzbeweis für die Eulersche Charakteristik auf der Menge $\mathcal{M}(S)$ kann analog zum entsprechenden Beweis für die Menge der elementaren Figuren in der Ebene geführt werden. Wir wenden dabei die Methode "gleitender" Großkreise an. Auch hier gibt es jedoch einige Unterschiede. Es sei

$$M = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

eine elementare Figur der Menge $\mathcal{M}(S)$, also die Vereinigung von streng konvexen Polygonen A_j auf der Sphäre. Unter ihnen dürfen wieder ausgeartete Polygone (kurze Bögen oder Punkte) sein.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: $M = S$ und $M \neq S$.

Im ersten Fall müssen wir $\chi(M) = \chi(S) = 2$ setzen, weil das aus den Axiomen für die Eulersche Charakteristik, ihrer Einzigkeit und der Darstellung (11.1) folgt:

$$\begin{aligned} \chi(S) &= \sum^{(1)} \chi(A_j) - \sum^{(2)} \chi(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \sum^{(3)} \chi(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 4 - 6 + 4 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Im zweiten Fall seien N_1 und N_2 zwei Antipoden, die von den Ecken der Figur verschieden seien. Wir nennen sie "Nordpol" bzw. "Südpol". Es sei C_0 ein Großkreis durch die beiden Pole, der durch keine der endlich vielen Ecken der Figur M geht.

Er möge etwa aus dem "Greenwicher Meridian" und der "Datumsgrenze" bestehen. Es sei weiter C ein durch die Pole gehender Großkreis, der von "West" nach "Ost" aus der Anfangslage C_0 in die Endlage C_0 (mit Tausch der Plätze des Greenwicher Meridians und der Datumsgrenze) gleitet.

Wir setzen

$$\chi(M) = \chi(M \cap N_1) + \chi(M \cap N_2) + \sum_{i=1}^m (\chi(M \cap C_i) - \chi(M \cap C_i^-)) \quad (11.3)$$

Hier bezeichnet C_i die Lage des Gleitkreises, wenn er durch eine Ecke v_i der Figur M geht, und C_i^- liege "infinitesimal weiter westlicher" als C_i . Man kann nun wie in § 9 beweisen, dass die durch die Gleichung (11.3) definierte Funktion χ den Axiomen der Eulerschen Charakteristik genügt. Dabei muss man nicht unbedingt verlangen, dass der

Kreis in jeder Lage nur eine Ecke der Figur M trifft.

Aufgaben 28. Ein Fußball setzt sich meist aus fünf- und sechseckigen verschiedenfarbigen Teilen zusammen. Kann man einen Ball auch aus gleichartigen sechseckigen Teilen zusammensetzen?

29. Auf der Sphäre seien n ($n \geq 3$) Großkreise gegeben, die nicht alle durch ein Antipodenpaar gehen. Es ist ein Punkt auf der Sphäre gesucht, der auf genau zwei dieser Großkreise liegt.

12 Weitere Anwendungen der Eulerschen Charakteristik

Wir benutzen in diesem Paragraphen die Beziehung

$$\chi(M) = c(M) - c^*(M) + 1 \quad (12.1)$$

die für Polygone M der Ebene oder Sphäre gilt. Wir erinnern daran, dass $c(M)$ die Anzahl der Komponenten der Figur M und $c^*(M)$ die Anzahl der Komponenten ihres Komplements bezüglich der Ebene bzw. Sphäre bezeichnet.

Wir bemerken zunächst ohne Beweis, dass man jedes Polygon B auf eindeutige Weise als Vereinigung

$$B = \bigcup_{i=1}^m A_i \quad (12.2)$$

von Polygonen A_i darstellen kann, die entweder einfach sind oder nur einfache Löcher haben, und für die die Durchschnitte zweier Mengen $A_i \cap A_j$ nur aus einem Punkt bestehen oder leer sind. Das Polygon c) der Abb. 8 besteht beispielsweise aus drei Dreiecken, das Polygon f) besteht aus zwei Dreiecken und einem Polygon mit zwei einfachen Löchern und das Polygon g) aus drei einfachen Polygonen und einem Polygon mit drei einfachen Löchern.

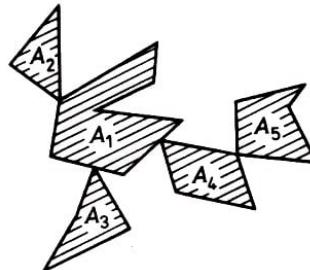


Abb. 40

Die Eindeutigkeit der Darstellung (12.2) wird i. allg. nur wegen der oben genannten Forderung an die Durchschnitte $A_i \cap A_j$ gesichert. So ist das Polygon e) der Abb. 8 einerseits die Vereinigung dreier einfacher Polygone, von denen aber je zwei genau zwei Punkte gemeinsam haben, andererseits kann dieses Polygon e) selbst als einziger "Summand" in der Darstellung (12.2) mit drei einfachen Löchern aufgefasst werden.

Wir beweisen jetzt die Beziehung (12.1). Das Polygon B habe zunächst keine Löcher. Dann ist $\chi(B) = 1$. Die "Summanden" A_i lassen sich in der Darstellung (12.2) nämlich so anordnen, dass alle Figuren

$$B_1 = A_1, B_2 = A_1 \cup A_2, B_3 = \bigcup_{i=1}^3 A_i, \dots, B = B_m = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

zusammenhängend sind (Abb. 40). Dann bestehen die Durchschnitte $B_{i-1} \cap A_i$ je aus einem Punkt, da das Polygon B_i sonst Löcher hätte (Abb. 41).

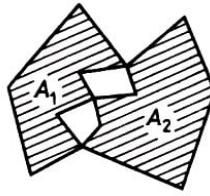


Abb. 41

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\chi(B_1) &= \chi(A_1) = 1 \\ \chi(B_2) &= \chi(A_1) + \chi(A_2) - \chi(A_1 \cap A_2) = 1 + 1 - 1 = 1 \\ &\dots \\ \chi(B) &= \chi(B_{m-1}) + \chi(A_m) - \chi(B_{m-1} \cap A_m) = 1 + 1 - 1 = 1\end{aligned}$$

Für Polygone ohne Löcher ist andererseits $c(B) = c^*(B) = 1$. Damit gilt die Beziehung (12.1).

Das Polygon M habe jetzt n Löcher C_1, \dots, C_n , die alle einfach seien. Wir zeigen die Beziehung (12.1) mit vollständiger Induktion über die Anzahl n der Löcher.

Wir erhalten ein Polygon M_0 , wenn wir im Polygon M alle Löcher "zukleben". Für das Polygon M_0 gilt bekanntlich die Beziehung (12.1). Wir erhalten das Polygon M_1 aus dem Polygon M_0 , indem wir das Loch C_1 wieder "ausschneiden".

Analog erhalten wir das Polygon M_2 aus M_1 , wenn C_2 wieder "ausgeschnitten" wird usw. $M_n = M$ erhalten wir also aus M_{n-1} wenn das Loch C_n ausgeschnitten wird. Offenbar ist

$$\begin{aligned}c(M_1) &= c(M_2) = \dots = c(M_n) = 1 \\ c^*(M_1) &= 2, c^*(M_2) = 3, \dots, c^*(M_n) = c^*(M) = n + 1\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, die Beziehung (12.1) gelte für ein Polygon M_{k-1} ($1 \leq k \leq n$), es sei also

$$\chi(M_{k-1}) = c(M_{k-1}) - c^*(M_{k-1}) + 1 = 1 - k + 1 = 2 - k$$

Wir behaupten dann die Gültigkeit von (12.1) für das Polygon M_k . Es gilt $M_{k-1} = M_k \cup C_k$ und damit $\chi(M_{k-1}) = \chi(M_k) + \chi(C_k)$. Nach der Folgerung 1 aus Satz 1 gilt $\chi(C_k) = 1$. Daher ist

$$\chi(M_k) = \chi(M_{k-1}) - \chi(C_k) = 2 - k - 1 = 1 - k$$

Andererseits ist

$$c(M_k) - c^*(M_k) + 1 = 1 - k - 1 + 1 = 1 - k$$

Damit folgt $\chi(M_n) = c(M_n) - c^*(M_n) + 1$, die Beziehung (12.1) gilt also für beliebige Polygone mit einfachen Löchern.

Im allgemeinen Fall folgt diese Beziehung aus der Additivität der Eulerschen Charakteristik und der Darstellung (12.2). Wir bemerken, dass der Beweis für Sphären analog

geführt werden kann. Dabei muss lediglich berücksichtigt werden, dass beim Zukleben von Löchern im Unterschied zur Ebene die gesamte Sphäre entstehen kann.

Die Benutzung der Eulerschen Charakteristik ist besonders dann sinnvoll, wenn Zusammenhänge zwischen Überdeckungseigenschaften (z.B. der Sphäre) durch eine Familie konvexer Mengen und Durchschnittseigenschaften dieser überdeckenden Familie diskutiert werden.

Man sagt, dass eine Familie $\{A_1, \dots, A_n\}$ konvexer Polygone auf der Sphäre die Sphäre überdeckt, wenn

$$S = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

gilt.

Satz 3. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 nichtausgeartete streng konvexe Polygone auf der Sphäre S . Die Polygone A_1, \dots, A_4 überdecken die Sphäre genau dann, wenn ihr Durchschnitt leer und der Durchschnitt von je drei dieser Mengen nicht leer ist.

Wir formulieren zunächst die analoge Behauptung für Großkreise (anstelle der Sphäre).

Satz 4. Es seien A_1, A_2, A_3 kurze Bögen auf einem Großkreis C . Die Bögen überdecken den Kreis C genau dann, wenn ihr Durchschnitt leer und der Durchschnitt von je zwei dieser Mengen nicht leer ist.

Wir überlassen dem Leser den Beweis dieses Satzes. Er ist mit ähnlichen Methoden wie der von uns angegebene Beweis zu Satz 3 zu führen. Wir setzen allerdings der Einfachheit halber die Gültigkeit von Satz 4 bei unserem Beweis von Satz 3 voraus.

Beweis von Satz 3. Wir nehmen zunächst an, dass unsere vier Polygone die Sphäre überdecken. Dann kann offenbar auf der Sphäre kein Punkt existieren, der zu allen vier Polygonen gehört. Wegen der strengen Konvexität dürfte sonst sein Antipode zu keinem der vier Polygone gehören, was aber der Voraussetzung widerspricht.

Wir zeigen nun, dass je drei der vier Polygone einen gemeinsamen Punkt haben müssen. Wir betrachten dazu das Polygon A_4 und außerdem einen Großkreis C , der zu A_4 disjunkt ist. Wir überzeugen uns zunächst davon, dass ein solcher Kreis existiert.

Das Polygon A_4 ist der Durchschnitt einer gewissen Anzahl von Halbsphären. Nehmen wir nur zwei dieser Halbsphären, so ist ihr Durchschnitt ein Zweiell D . Es sei C' ein Großkreis, der mit dem Zweiell D genau seine beiden Ecken v und v' gemeinsam hat. Um A_4 aus D zu erhalten, müssen von D einige Stücke "abgeschnitten" werden, auf jeden Fall wird eine der beiden Ecken v bzw. v' entfernt. Dann lässt sich der Kreis C' aber so "verschieben", dass er mit A_4 keine Punkte mehr gemeinsam hat.

Es sei C ein solcher Großkreis, es gelte also $C \cap A_4 = \emptyset$. In diesem Fall wird der Kreis C durch die drei Mengen $A_1 \cap C$, $A_2 \cap C$ und $A_3 \cap C$ überdeckt, die kurze Bögen sind. Nach Satz 4 haben je zwei von ihnen einen Punkt gemeinsam. Damit haben auch je zwei der Mengen A_1 , A_2 und A_3 einen gemeinsamen Punkt.

Da bei unseren Überlegungen anstelle des Polygons A_4 ein beliebiges anderes der gegebenen Polygone genommen werden kann, müssen je zwei der vier Polygone A_1 ,

A_2, A_3, A_4 einen nichtleeren Durchschnitt haben. Daher gilt $\chi(A_i \cap A_j) = 1$ für alle $i, j = 1, \dots, 4$. Wir erhalten mit Hilfe der Formel (8.10) wegen $S = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ die Beziehung

$$2 = \chi(S) = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + q_3 - 0$$

woraus $q_3 = 4$ folgt. Das bedeutet aber, dass je drei der Mengen A_1, A_2, A_3, A_4 einen nichtleeren Durchschnitt haben, weil es insgesamt vier solche Tripel gibt. Damit haben wir eine Richtung des Beweises bereits gezeigt.

Es sei jetzt umgekehrt die Durchschnittsbedingung des Satzes für die Polygone A_1, A_2, A_3, A_4 erfüllt. Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$. Dann gilt

$$\chi(S) = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - 0 = 2$$

Die Figur A ist zusammenhängend, also gilt $(A) = 1$. Die auch für Sphären gültige Formel (12.1) liefert die Beziehung $c^*(A) = 0$ und damit die Behauptung, dass A die Sphäre überdeckt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Folgerung. Zur Überdeckung der Sphäre sind mindestens vier streng konvexe Polygone notwendig.

Beweis. Aus der Beziehung (11.1) folgt zunächst, dass es vier streng konvexe Dreiecke gibt, die die Sphäre überdecken. Wenn dagegen schon drei streng konvexe Polygone A_1, A_2, A_3 zur Überdeckung der Sphäre ausreichen, überdecken auch mit einem beliebigen streng konvexen Polygon A_4 die Polygone A_1, A_2, A_3, A_4 die Sphäre. Wegen Satz 3 muss aber $\bigcap_{i=1}^3 A_i$ nichtleer sein. Das widerspricht demselben Satz, da das vierte

Polygon A_4 offenbar so gewählt werden kann, dass auch $\bigcap_{i=1}^4 A_i \neq \emptyset$ gilt.

Satz 5. Es seien A_1, A_2 und A_3 Zweiecke auf einer Sphäre S . Diese Zweiecke überdecken die Sphäre S genau dann, wenn ihr Durchschnitt ein Antipodenpaar und der Durchschnitt je zweier dieser Zweiecke kein Antipodenpaar ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Eulersche Charakteristik jedes Zweiecks und jedes ganz in ihm enthaltenen nichtleeren konvexen Polygons, das kein Antipodenpaar ist, gleich 1 ist (man beweise das!).

Wir setzen nun voraus, dass die Zweiecke A_1, A_2 und A_3 die Sphäre S überdecken, und es gelte $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es seien v und v' die Ecken des Zweiecks A_1 und w und w' die Ecken von A_2 .

Alle vier Ecken sind nach unserer Annahme voneinander verschieden.

Wir legen durch sie den damit eindeutig bestimmten Großkreis C auf S (Abb. 42).

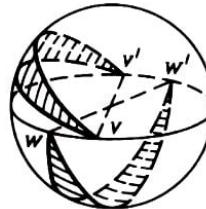


Abb. 42

Der Durchschnitt $A_1 \cap C$ besteht nur aus den beiden Punkten v und v' ; denn sonst würde $A_1 \cap C$ die Hälfte des Kreises C enthalten, diese Hälfte müsste wiederum eine der Ecken w und w' enthalten, die damit zu A_1 gehören müsste. Das ist aber unmöglich. Es folgt $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Ganz analog kann bewiesen werden, dass der Durchschnitt jedes Paares dieser Zweiecke nicht leer ist.

Wir zeigen nun, dass diese Durchschnitte keine Antipodenpaare sind. Es sei nämlich $A_1 \cap A_2 = \{v, v'\} = \{w, w'\}$. Dann ließe sich auf S ein Großkreis ziehen, der die beiden Zweiecke A_1 und A_2 nur in ihren Ecken v und v' schneidet (Abb. 43).

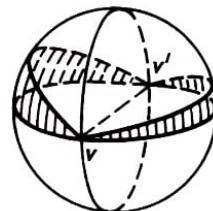


Abb. 43

Es müssten alle Punkte dieses Großkreises bis auf v und v' in A_3 liegen, das ist aber unmöglich.

Wenn also die Zweiecke A_1 , A_2 und A_3 die Sphäre überdecken, dann ist der Durchschnitt je zweier nicht leer und auch kein Antipodenpaar. Folglich ist die Eulersche Charakteristik gleich 1. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 &= \chi(S) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = \sum^{(1)} \chi(A_1) - \sum^{(2)} (A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3 - 3 + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Die Beziehung $\chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$ bedeutet, dass der Durchschnitt der drei Zweiecke ein Antipodenpaar ist. Damit ist eine Beweisrichtung gezeigt.

Es gelte für die drei Zweiecke umgekehrt die Durchschnittsbedingung des Satzes. Wir setzen dann $A = \bigcup_{i=1}^3 A_i$ und erhalten

$$\chi(A) = \sum^{(1)} \chi(A_1) - \sum^{(2)} (A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3 - 3 + 2 = 2$$

Die Figur A ist zusammenhängend, d.h. $c(A) = 1$. Aus (12.1) folgt $c^*(A) = 0$. Damit überdeckt A die Sphäre, und Satz 5 ist bewiesen.

Folgerung. Die kleinste Anzahl die Sphäre überdeckender Zweiecke ist 3.

Aufgaben

30. Man gebe ein Beispiel für eine elementare Figur im Raum an, für die die Formel (12.1) falsch ist.

31. Es seien A_1, A_2, A_3 konvexe Polygone in der Ebene, die paarweise nichtleere Durchschnitte haben. Man beweise, dass der Durchschnitt dieser drei Mengen nichtleer ist, falls ihre Vereinigung konvex ist.

32. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 solche konvexen Polygone der Ebene, dass je drei von ihnen einen Punkt gemeinsam haben. Man beweise mit Hilfe der Beziehung (12.1), dass alle vier Polygone einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Behauptung dieser Aufgabe ist ein Spezialfall eines Theorems, das im Jahre 1913 von dem österreichischen Mathematiker E. Helly (1884-1943) bewiesen wurde.

33. In der Ebene seien vier konvexe Polygone gegeben, der Durchschnitt je zweier sei nicht leer, und die Vereinigung von je dreien dieser Polygone habe ein bezüglich der Ebene zusammenhängendes Komplement. Man beweise für diese Polygone die Existenz eines gemeinsamen Punktes.

34. Man beweise (12.1) für eine ebene Figur, die sich als Vereinigung endlich vieler Strecken darstellen lässt.

35. Es seien A_1, \dots, A_n Strecken der Ebene, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt haben, für die der Durchschnitt je dreier Strecken jedoch leer ist. In wie viele Teile zerlegen sie die Ebene?

36. Es sei A eine ebene Figur, die die Vereinigung von n Strecken ist. Man beweise die Beziehung

$$\frac{n(3-n)}{2} \leq \chi(A) \leq n$$

37. Auf der Sphäre seien fünf streng konvexe Polygone gegeben, von denen je drei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Man beweise, dass es unter ihnen vier Polygone gibt, die ebenfalls einen nichtleeren Durchschnitt haben.

38. Man beweise, dass es unter fünf (oder mehr) beliebigen streng konvexen Polygonen auf der Sphäre stets vier gibt, die die Sphäre nicht überdecken.

39. Es sei eine Strecke A mit "kleinen" Strecken punktweise-ungerade überdeckt, d.h. so, dass jeder Punkt der Strecke A zu einer ungeraden Anzahl kleiner Strecken gehört. Man beweise, dass dann die Zahl n ungerade ist.

Unter Benutzung dieses Ergebnisses beweise man, dass die Differenz $n - \chi(B)$ für eine auf einer Geraden liegende Figur B , die von n Strecken punktweise-ungerade überdeckt wird, gerade ist.

40. Ein Kreis sei von endlich vielen kurzen Bögen punktweise-ungerade überdeckt. Man beweise, dass dann die Anzahl der Bögen gerade ist.

13 Lösungen, Antworten, Hinweise

1. Man addiere auf beiden Seiten der Gleichung $k - e = 1$ den Wert $2e$.
2. Man addiere auf beiden Seiten der Gleichung $e - k + f = 1$ den Wert $2k$.
3. Man lege für alle i ($1 \leq i \leq n$) durch die Punkte der Ebene mit den kartesischen Koordinaten $(i, 0)$ und $(0, n - i)$ eine Gerade mit der Nummer i .
Man bestimme die Schnittpunktkoordinaten jedes Geradenpaares und leite daraus ab, dass diese Schnittpunkte für verschiedene Geradenpaare verschieden sind.
4. Es gilt $e = \frac{n(n-1)}{2}$, da je zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt haben. Die Vielfachheit jeder Ecke ist offenbar gleich 2. Wir erhalten daher aus (1.3) und (1.4) die Beziehungen

$$k = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$$

$$f = 1 + n - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Wir erläutern, welche Änderungen beim Beweis der Formel (1.2) vorzunehmen sind, wenn beispielsweise die Gerade g_1 der Familie horizontal ist.
Wir nehmen an, dass auf dieser Geraden m Ecken A_1, \dots, A_m der Zerlegung mit den Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ liegen, und bestimmen die Anzahl neuer Ecken, Kanten bzw. Flächen, die "neu entstehen", wenn die Gleitgerade die Gerade g_1 passiert. Die Anzahl neuer Ecken (das sind die Punkte A_1, \dots, A_m) ist natürlich gleich m .

Die Anzahl neuer Kanten ist gleich $(m + 1) + (\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_m - 1)$. Unter ihnen befinden sich $m + 1$ Kanten auf der Geraden g_1 , $\alpha_1 - 1$ Kanten haben ihren unteren Endpunkt im Punkt A_1 , $\alpha_2 - 1$ Kanten haben ihren unteren Endpunkt im Punkt A_2 usw. Der Wert der alternierenden Summe $e - k + f$ ändert sich folglich um

$$m - ((m + 1) + (\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_m - 1)) \\ + ((m + 1) + (\alpha_1 - 2) + \dots + (\alpha_m - 2)) = 0$$

Der weitere Teil des Beweises ändert sich nicht.

6. Die Familie enthalte n Geraden. Für $n = 1$ gilt $e = 0$, $k = 1$ und $f = 2$, also $e - k + f = 1$. Dieser Formel sei für beliebige Geradenfamilien mit $n - 1$ Geraden in allgemeiner Lage bewiesen.

Wir fügen eine neue Gerade g hinzu. Die Anzahl der dabei neu entstehenden Ecken ist $n - 1$, da die Gerade g alle Geraden der Familie schneidet. Die Anzahl der neuen Kanten ist $n + (n - 1)$ (davon liegen n Kanten auf der Geraden g , und von den restlichen $n - 1$ liegt je eine auf jeder der übrigen Geraden). Da die Gerade g von den anderen Geraden in n Teile zerlegt wird, schneidet sie n "alte" Flächen und zerlegt jede in zwei Teile. Damit haben wir n neue Flächen. Also ändert sich die Summe $e - k + f$ beim Hinzufügen einer Geraden um den Betrag $(n - 1) - (n + (n - 1)) + n = 0$.

7. Wenn eine Zerlegung der Ebene durch eine Familie von n Geraden entsteht und Ecken hat, so schneidet jede Gerade der Familie irgendeine andere Gerade. Folglich enthält jede Gerade zwei Strahlen (unbeschränkte Kanten). Es gilt also $k_2 = 2n$. Wir zeichnen in der Ebene einen Kreis von so großem Radius, dass er alle beschränkten Flächen und Kanten enthält.

Wenn wir dann die Kreislinie verfolgen, treffen wir abwechselnd unbeschränkte Flächen und unbeschränkte Kanten. Damit erhalten wir $f_2 = 2n$. Aus (1.3) und (1.4) ergeben sich die Beziehungen

$$k_1 = k - k_2 = -n + \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad , \quad f_1 = f - f_2 = 1 - n - e + \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Hieraus folgt unmittelbar die Formel $e - k_1 + f_1 = 1$.

8. Eine durch eine Familie von Geraden gegebene Zerlegung der Ebene hat genau dann beschränkte Flächen, wenn diese Familie ein Tripel von Geraden in allgemeiner Lage oder ein Viertupel von Geraden enthält, die Fortsetzungen von Parallelogrammseiten sind.

Es gibt genau dann beschränkte Kanten, wenn diese Familie ein Tripel von Geraden in allgemeiner Lage oder ein Tripel von Geraden enthält, die Fortsetzungen von drei Seiten eines Parallelogrammes sind.

9. Es seien x und y zwei Punkte aus M , wobei der Punkt x auf der beschränkten Fläche M_1 und der Punkt y auf der beschränkten Fläche M_2 liege.

Beide Flächen sind konvexe Polygone. Weil M_1 und M_2 beschränkt sind, gibt es solche sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 , dass g_1 Fortsetzung einer Seite von M_1 und g_2 Fortsetzung einer Seite von M_2 ist.

Liegt der Punkt x innerhalb von M_1 , so fällen wir von ihm das Lot auf irgendeine Seite von M_1 . Analog verfahren wir mit dem Punkt y . Jetzt lässt sich leicht ein x mit y verbindender Streckenzug konstruieren:

Er besteht aus Strecken der angegebenen Senkrechten, gewisser Teile der Ränder von M_1 und M_2 und zweier Strecken, die auf den Geraden g_1 und g_2 liegen. Also ist die Figur M zusammenhängend und damit ein Polygon.

Der Rand der Figur M ist ein geschlossener Streckenzug N . Nach Wahl eines beliebigen Durchlaufsinnes nummerieren wir in der entsprechenden Reihenfolge die Ecken A_1, \dots, A_n . Es besitze N einen Überschneidungspunkt, d.h., es sei beispielsweise $A_1 = A_m = A_n$ mit $1 < m < n$.

Wir können annehmen, dass $3 < m < n - 2$ und m die kleinste der Zahlen k ($3 < k < n - 2$) ist, für welche $A_k = A_n$ gilt. Dann ist $A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m$ eine Kontur, die ein in M enthaltenes einfaches Polygon M_1 berandet. Wir setzen noch voraus, dass die drei Punkte A_{m-1}, A_m und A_{m+1} auf einer Geraden in der angegebenen Ordnung liegen. Analoges nehmen wir für die Punkte A_{n-1}, A_n und A_1 an.

Wir beweisen indirekt, dass $m = 4 = n - 3$ gilt. Es gelte etwa $m > 4$.

Dann gibt es zwei Geraden der Familie, die nicht durch A_1 gehen: die Gerade g_1 , die durch A_2 geht, und die Gerade g_2 , die durch A_{m-1} geht. Wir betrachten noch

eine Gerade g_3 der Familie, die durch A_{m+1} und nicht durch A_1 geht. Sie schneidet wenigstens eine der Geraden g_1 und g_2 - etwa g_1 - im Punkt A .

Der geschlossene Streckenzug $A_1A_mAA_{m+1}A_1$ berandet ein gewisses in M liegendes Polygon M_2 . Wir betrachten die Winkel $A_2A_1A_{m-1}$ und $A_2A_1A_{m+1}$. Für die Polygone M_1 bzw. M_2 sind sie Innenwinkel und zueinander Nebenwinkel.

Damit verläuft die Strecke A_1A_2 im Inneren des Polygons M , was unmöglich ist. Also ist $m = 4$ und analog $n - 3 = 4$, d.h. $n = 7$. Dabei sind die Geraden A_2A_3 und A_5A_6 parallel, sonst könnte man die obige Überlegung mit diesen Geraden als Geraden g_1 bzw. g_3 wiederholen.

Wenn also der Rand von M eine Selbstüberschneidung enthält, dann hat M die in Abb. 44 dargestellte Form, wobei $A_1 = A_4 = A_7$, ist.

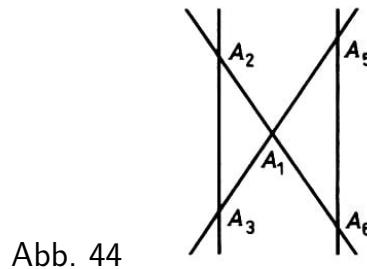


Abb. 44

Wir bemerken, dass die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_5A_6$ nicht notwendig Zerlegungsflächen sind, da es in der Familie Geraden geben kann, die zu A_2A_3 und A_5A_6 parallel sind und zwischen ihnen liegen.

11. Wir führen den Beweis indirekt. Es seien die Winkel aller Flächen kleiner als $\frac{2\pi}{5}$. Dann sind alle Flächen Dreiecke, da nämlich bei $n \geq 4$ der größte Winkel eines n -Ecks nicht kleiner als $\frac{(n-2)\pi}{n} \geq \frac{\pi}{2}$ ist. Es sei f die Gesamtzahl der Flächen und k_1 die Anzahl der inneren Kanten. Da alle Flächen Dreiecke sind, gilt

$$f \leq \frac{2}{3}k_1 \quad (\text{L.1})$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass zu jeder inneren Ecke mindestens sechs Kanten führen. Ist also e_1 die Anzahl der inneren Ecken, so gilt

$$e_1 \leq \frac{2}{6}k_1 = \frac{1}{3}k_1 \quad (\text{L.2})$$

Aus der Eulerschen Formel $(e_1 + 5) - (k_1 + 5) + f = 1$ und den Ungleichungen (L.1) und (L.2) erhalten wir

$$\frac{1}{3}k_1 - k_1 + \frac{2}{3}k_1 \geq 1$$

was unmöglich ist.

13. Wenn der vollständige Graph mit fünf Ecken in die Ebene eingebettet wird, entsteht ein einfaches Polygon M , das in Flächen zerlegt ist, die ebenfalls einfache Polygone sind. Nach der Annahme gibt es 5 Ecken und $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ Kanten der Zerlegung.

Wir wenden die Eulersche Formel in der Form $e - k + f = 2$ an, wobei zur Anzahl der Flächen das Komplement von M bezüglich der Ebene (als eine unbeschränkte "Fläche") hinzugezählt wird. Es folgt $f = 7$. Weil zwei Ecken des Graphen nur mit einer Kante verbunden sind, sind auf dem Rand jeder (auch der unbeschränkten) Fläche wenigstens drei Kanten. Also gilt $3f \leq 2k$ und damit

$$f \leq \frac{2}{3}k = \frac{20}{2} < 7$$

14. Die Ungleichung (5.10) erhält man unter Berücksichtigung der Ungleichung $L \geq b$ aus der Formel (5.1) von Pick. Ist das Polygon in Quadrate zerlegt, dann gilt $L = b$.

15. Die erste Formel wird wie die Formel (5.7) bewiesen, wobei zu berücksichtigen ist, dass jetzt der Flächeninhalt eines primitiven Dreiecks gleich $\frac{1}{8}$ ist.

Die zweite Formel folgt aus der ersten und aus (5.7) unter Ausschluss der Glieder $-\chi(M) + \chi(\partial M)/2$.

17. Wir wählen solche Ecken des Polyeders X , die auf unterschiedlichen Höhen liegen und nach wachsender Höhe derart geordnet seien, dass die Höhe jeder der restlichen Ecken mit der Höhe einer der ausgewählten Ecken v_1, \dots, v_n übereinstimmt. Wir betrachten die Summe $S(h) = e(h) - k(h) + f(h)$, wobei $e(h)$ die Anzahl der Ecken der Polyeders sei, die die Gleitebene ε bei ihrer Bewegung von der Anfangslage bis zur Höhe h von dieser Anfangslage aus schon erfasst hat (eine analoge Bedeutung haben $k(h)$ und $f(h)$). Die Summe $S(h)$ kann sich nur ändern, wenn die Gleitebene ε die Ecken v_1, \dots, v_n durchläuft. Wenn die Ecke v_1 auf ε liegt, dann ist der Durchschnitt $\varepsilon \cap \partial X$ eine Fläche, eine Kante oder eine Ecke. In diesem Moment gilt also $S(h) = 1$.

Dieselbe Gestalt hat der Durchschnitt $\varepsilon \cap \partial X$ in dem Moment, in dem die Ecke v_n auf ε liegt. Es folgt, dass sich die Summe $S(h)$ um 1 erhöht, wenn die Gleitebene die Ecke v_n durchläuft.

Falls für eine Ecke v_i ($2 \leq i \leq n-1$) die Gleitebene durch v_i geht, bilden alle Kanten und Ecken des Polyeders X , die in diesem Moment auf dieser Ebene liegen, entweder eine einfache Kontur oder einen bzw. mehrere einfach geschlossene Streckenzüge (die eventuell zu einer Ecke ausarten können).

Es möge beim Durchlauf der Gleitebene ε durch die Ecke v_2 in der Ebene ε beispielsweise ein nicht geschlossener Streckenzug C mit α Kanten und β Ecken liegen. Dann gilt $\beta = \alpha + 1$. Von diesem Streckenzug aus mögen γ Kanten und δ Flächen nach oben gehen. Dann gilt $\delta = \gamma + 1$.

Also ändert sich die Summe $S(h)$ beim Durchlaufen der Ecke v_2 um den Betrag

$$\beta - (\alpha + \gamma) - \delta = (\alpha + 1) - (\alpha + \gamma) - (\gamma + 1) = 0$$

die Summe bleibt also unverändert. Ist der Streckenzug C geschlossen, so gilt $\beta = \alpha$ und $\delta = \gamma$, und $S(h)$ ändert sich ebenfalls nicht. Für die anderen Ecken v_i ($2 \leq i \leq n-1$) treffen analoge Aussagen zu. Daher gilt $\chi(\partial X) = 2$.

18. Wir erhalten aus den Bedingungen der Aufgabe, der Eulerschen Formel und den

Relationen (7.10) bzw. (7.11) die Beziehungen

$$k = \frac{e(e-1)}{2}, \quad f = 2 - e + k, \quad 3f \leq 2k$$

Hieraus folgt

$$3 \left(2 - e + \frac{e(e+1)}{2} \right) \leq e(e-1) \quad \text{oder} \quad e^2 - 7e + 12 \leq 0$$

Als ganzzahlige Lösungen dieser Ungleichung kommen nur $e = 3$ und $e = 4$ in Frage. Da ein Polyeder nicht nur drei Ecken haben kann, muss $e = 4$ sein, d.h., das Polyeder ist ein Tetraeder.

20. Die Anzahl der Vorzeichenänderungen um jede Ecke sei nicht kleiner als 4. Die über alle Ecken genommene Summe dieser Zahlen bezeichnen wir mit N . Nach unserer Annahme gilt

$$N \geq 4e \quad (\text{L.3})$$

Wir betrachten noch die Anzahl der Vorzeichenänderungen beim Umlaufen des Randes jeder Fläche und die Summe aller dieser Zahlen. Weil eine Vorzeichenänderung nur mit einem Kantenpaar verbunden ist, das eine gemeinsame Ecke und mit verschiedenen Vorzeichen versehene Kanten hat, ist die Gesamtzahl der Änderungen beim Umlaufen aller Flächen gleich der Gesamtzahl der Änderungen beim Umlaufen aller Ecken, also gleich N . Die Anzahl der Vorzeichenänderungen beim Umlaufen einer m -eckigen Fläche ist offenbar gerade und überschreitet m nicht. Daher gilt

$$N \leq 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \dots \quad (\text{L.4})$$

Aus (L.3), (L.4), (7.1) und (7.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} 4e &\leq N \leq 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \dots \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \dots \\ &= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) = 4k - 4f = 4e - 8 \end{aligned}$$

was unmöglich ist.

Die duale Behauptung lautet: Es existiert eine Fläche des Polyeders, bei dem Umlaufen die Zahl der Vorzeichenänderungen nicht größer als 2 ist.

21. Aus der Ungleichung $3f \leq 2k$ folgt $k \geq \frac{15}{2}$, d.h. $k \geq 8$. Wir erhalten aus der Eulerschen Formel $e = k - 3$. Dann ergibt die duale Ungleichung $3e \leq 2k$ die Beziehung $3(k - 3) \leq 2k$ oder $k \leq 9$. Damit sind nur die Werte $k = 8$ oder $k = 9$ möglich.

Im ersten Fall erhalten wir aus der Eulerschen Formel $e = 5$, im zweiten Fall $e = 7$. Für eine viereckige Pyramide gilt tatsächlich $f = 5$, $k = 8$ und $e = 5$. Ein Polyeder, für welches $f = 5$, $k = 9$ und $e = 6$ ist, ist beispielsweise ein dreieckiges Prisma.

Die duale Aufgabe lautet: Ein konvexes Polyeder habe fünf Ecken. Wie groß kann die Anzahl seiner Flächen und die Anzahl seiner Kanten sein?

22. In der Formel $2e - 2k + 2f = 4$ ersetzen wir alle Glieder der linken Seite unter Benutzung der Gleichungen (7.7), (7.9) und (7.8):

$$2 \sum_{i \geq 3} e_i - \sum_{i \geq 3} ie_i + 2 \sum_{i \geq 3} f_i = 4 \quad (\text{L.5})$$

Wir multiplizieren beide Seiten von (L.5) mit n , addieren zur erhaltenen Gleichung seitenweise

$$2 \sum_{i \geq 3} ie_i - 2 \sum_{i \geq 3} if_i = 0$$

und erhalten dann

$$\sum_{i \geq 3} (2n - ni + 2i)e_i + 2 \sum_{i \geq 3} (n - i)f_i = 4n$$

23. Wir ordnen jeder Ecke einer jeden Fläche des Polyeders die Zahl $1/3$ als "Gewicht" zu. Dann ist die über alle Flächen und alle ihre Ecken genommene Summe der Gewichte gleich der Anzahl e der Ecken des Polyeders.

Aus den Bedingungen der Aufgabe und der Ungleichung (7.13) folgt, dass das Polyeder fünfseitige Flächen hat. Wir bestimmen die Summe der über alle Ecken der fünf- und sechseckigen Flächen genommenen Gewichte. Wir nehmen an, dass keine fünfseitige Fläche eine fünf- oder sechseckige Fläche berührt. Wegen dieser Annahme ist die über alle fünfseitigen Flächen genommene angegebene Summe gleich $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5f_5 = 5f_5$. Sechseckige Flächen können einander berühren. Die ihnen entsprechende Summe ist daher gleich $\frac{1}{3} \cdot 6f_6 = 2f_6$. Wir erhalten

$$5f_5 + 2f_6 < e \quad (\text{L.5})$$

wobei die angegebene Ungleichung echt ist, weil hier für $n \geq 7$ nicht alle Gewichte der Ecken der n -Ecke berechnet sind. Andererseits ergibt die Gleichung (7.16) für $n = 7$ und $e = e_3$

$$4f_5 + 2f_6 - 2f_8 - 4f_9 - \dots = 28 + e \quad \text{oder} \quad 4f_4 + 2f_6 \geq 28 + e$$

was (L.6) widerspricht.

24. 6.

25. 166.

26. Die Eulersche Charakteristik der Figur ist gleich 1.

27. Die Eulersche Charakteristik der Figur ist gleich

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} = 1$$

28. Bei einer beliebigen Zerlegung der Sphäre in streng konvexe Polygonflächen sind alle in § 7 angegebenen Bedingungen erfüllt. Daher folgt speziell aus der Ungleichung (7.13), dass ein Ball nicht nur aus sechseckigen Stücken zusammengesetzt werden kann.

29. Ein solcher Punkt existiert. Würde nämlich durch jeden Schnittpunkt zweier Großkreise ein dritter gehen, so erhielten wir (unter Berücksichtigung der Bedingung der Aufgabe) eine Zerlegung der Sphäre in streng konvexe Flächen, wobei jede Ecke dieser Zerlegung eine Valenz ≥ 6 hätte, was der Ungleichung (7.14) widerspricht.

30. Eine solche Figur ist beispielsweise der Rand eines beliebigen konvexen Polyeders.

31. Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^3 A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^3 A_i$. Dann gilt

$$\chi(A) = 3 - 3 + \chi(B) = \chi(B)$$

Aus den Bedingungen folgt $\chi(A) = 1$, also $\chi(B) = 1$ und damit sofort die Behauptung.

32. Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^4 A_i$. Dann gilt

$$\chi(A) = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - \chi(B) = 2 - \chi(B)$$

Wir müssen zeigen, dass $B \neq 0$ ist. Dazu genügt es, die Beziehung $\chi(B) \neq 0$ nachzuweisen. Wir nehmen das Gegenteil $\chi(B) = 0$ an. Es folgt $\chi(A) = 2$.

Da je zwei Polygone einen gemeinsamen Punkt haben, ist die Figur A zusammenhängend. Folglich gilt $c(A) = 1$, und wir erhalten aus der Formel (12.1) direkt $c^*(A) = 0$. Diese Beziehung bedeutet, dass die Figur A mit der Ebene übereinstimmt. Das ist unmöglich, denn die Figur A ist im Gegensatz zur Ebene beschränkt.

33. Gegeben seien die Polygone A_1, A_2, A_3 und A_4 . Wir zeigen, dass der Durchschnitt je dreier Polygone nicht leer ist; damit folgt die Behauptung aus der vorherigen Aufgabe.

Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^3 A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^3 A_i$. Dann gilt $\chi(A) = \chi(B)$ wie in Aufgabe 31. Nach Voraussetzung ist $c(A) = 1$ und $c^*(A) = 1$.

Aus der Formel (12.1) erhalten wir $\chi(A) = 1$ und somit $\chi(B) = 1$. Das ergibt $B \neq 0$. Man zeigt analog, dass der Durchschnitt aller drei Polygone nicht leer ist.

35. Die Ebene wird in $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ Teile zerlegt.

36. Wir setzen $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, wobei die A_i Strecken sind. Da $c(A) \leq n$ und $c^*(A) \leq 1$ ist, erhalten wir aus der Formel (12.1) die Ungleichung $\chi(A) \leq n$.

Die linke Ungleichung der Behauptung wird induktiv über die Anzahl n der Strecken bewiesen. Für $n = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich. Angenommen, sie sei für alle $n \leq m$ schon gezeigt. Wir beweisen sie für $n = m + 1$.

Es sei $B = \bigcup_{i=1}^{m+1} A_i$. Nach der Voraussetzung haben wir

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \geq \frac{m(3-m)}{2}$$

es folgt

$$\begin{aligned}\chi(B)\chi\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + \chi(A_{m+1}) - \chi\left(A_{m+1} \cap \bigcup_{i=1}^m A_i\right) &\geq \\ &\geq \frac{m(3-m)}{2} + 1 + \chi\left(\bigcup_{i=1}^m (A_{m+1} \cap A_i)\right)\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\chi\left(\bigcup_{i=1}^m (A_{m+1} \cap A_i)\right) \leq m$ erhalten wir

$$\chi(B) \geq \frac{m(3-m)}{2} + 1 - m = \frac{(m+1)(3-(m+1))}{2}$$

37. Gegeben seien streng konvexe Polygone A_1, A_2, \dots, A_5 . Wir setzen voraus, dass je vier von ihnen einen leeren Durchschnitt haben. Nach Satz 3 überdecken je vier, also auch alle fünf Polygone die Sphäre S . Dann gilt

$$2 = \chi(S) = \binom{5}{1} - \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 5$$

Der erhaltene Widerspruch zeigt die Behauptung.

38. Je vier Polygone mögen die Sphäre S überdecken. Nach Satz 3 haben je drei von ihnen einen nichtleeren Durchschnitt, der Durchschnitt von je vier Polygonen ist leer. Es seien insgesamt m Polygone vorhanden ($m \geq 5$), dann gilt

$$2 = \chi(S) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} = 1 + \binom{m-1}{3}$$

Es folgt $\binom{m-1}{3} = 1$ oder $m = 4$, was unmöglich ist.

Literatur

- [1] Boltjanski, V. G., und V. A. Efremovic, *Anschauliche kombinatorische Topologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [2] Danzer, L., B. Grünbaum und V. L. Klee, *Helly's theorem and its relatives*, Proc. Symp. Pure Math. 7 (1963), 101-177 (russ. Übers. Mir 1968).
- [3] Kuschnirenko, A. G., *Ganzzahlige Punkt bei Polygonen und Polyedern*, Kwant 1977, Nr. 4, 13-20. (russisch)
- [4] Ljusternik, L. A., *Geschlossenen Figuren auf Polyedern*, Moskau 1956. (russisch)
- [5] Hadwiger, H., und H. Debrunner, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*. Monogr. Enseign. Math. Nr. 2 (1959) (russ. Übers. Nauka 1965).
- [6] Schlarski, D. O., N. N. Tschenzow und M. M. Jaglom, *Aufgaben kombinatorischer Geometrie*, Moskau 1974 (russisch) [7] Jaglom, I. M., *Fleckan auf dem Sofa*, Kwant 1974, Nr. 2, 13-21. (russisch)

Zusatz bei der deutschen Ausgabe

Zur Behandlung der Eulerschen Charakteristik unter dem mengentheoretisch - konvex-geometrischen Aspekt der Bewertungen vgl. die Arbeit von McMullen und Schneider, *Valuations on convex bodies*, in: *Convexity and its Applications*, hrsg. von P. M. Gruber und J. M. Wills, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart 1983.