Peter Ruben

Philosophie und Mathematik

1979 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 98
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ohne die Mathematik dringt man niemals auf den Grund der Philosophie. Ohne die Philosophie dringt man niemals auf den Grund der Mathematik. Ohne beide kommt man auf den Grund von gar nichts.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Seit der Entstehung der wissenschaftlichen Weltanschauung der internationalen Arbeiterklasse in der Mitte des 19. Jahrhunderts ist die Frage, wie diese Weltanschauung mit der Mathematik verbunden ist, selbstverständlicher Bestandteil ihres Problembestandes.
Es ist bekannt, dass Marx mathematische Methoden in der Ökonomie verwendet hat (26.9; 88):

"Ich habe verschiednemal versucht - zur Analyse der Krisen -, diese ups and downs als unregelmäßige Kurven zu berechnen und geglaubt (ich glaube noch, dass es mit hinreichend gesichtetem Material möglich ist), daraus die Hauptgesetze der Krisen mathematisch zu bestimmen."

Damit ist der Gebrauch des mathematischen Funktionsbegriffs zur Formulierung, wie man heute sagen würde, "mathematischer Modelle" ökonomischer Zusammenhänge erklärtes Programm der marxistischen Gesellschaftstheorie! Man weiß ebenso, dass Marx zur Information von Engels wie sicher auch zur Bildung des eigenen philosophischen Begreifens der Mathematik umfangreiche Manuskripte verfasst hat, die in den letzten Jahren einer größeren Öffentlichkeit zur Verfügung gestellt werden sind (26.7).

Engels' Überlegungen zu den weltanschaulichen Grundlagen der Mathematik sind so bekannt, dass man sie in der Gegenwart wohl als gegebenen Bestandteil des philosophischen Bildungsgutes der sozialistischen Gesellschaft rechnen kann. Die Kenntnis der entsprechenden Passagen im berühmten "Anti-Dühring" (10.2; 35-38, 46-48, 81) und in der "Dialektik der Natur" (10.3; 521 bis 534) darf man daher sicher voraussetzen.

Diese Ausdrücke der Beziehung der Begründer des wissenschaftlichen Sozialismus zur Mathematik versteht man ohne Schwierigkeiten, bedenkt man nur, dass eben die Mathematik ein theoretisches Herrschaftsmittel erster Ordnung ist und der historische Sinn des Emanzipationskampfes der Arbeiterklasse gerade darin, besteht, an die Stelle der bewusstlosen, spontanen Realisierung des gesellschaftlichen Zusammenhangs auf der Basis des kapitalistischen Privateigentums vielmehr die planmäßige, wissenschaftlich bewusste Determination dieses Zusammenhangs als Ausdruck der vereinigten Macht der assoziierten Produzenten auf der Basis des universellen Gemeineigentums zu setzen.

Da es dabei bereits rein ökonomisch um die Regelung der Produktion durch das aktuell verfügbare gesellschaftliche Arbeitsvermögen geht, genau das Regelungsproblem aber unmissverständlich mathematische Potenzen des Gemeinwesens zu seiner Lösung erfordert, so muss der wissenschaftliche Sozialismus von vornherein die Mathematik als einen fundamentalen Ausdruck der wissenschaftlichen Fähigkeit unterstellen und anerkennen. Marx sagt (26.8; 12):

"In der Tat, keine Gesellschaftsform kann verhindern, dass one way or another die disponible Arbeitszeit der Gesellschaft die Produktion regelt. Aber, solange sich diese Reglung nicht durch direkte bewusste Kontrolle der Gesellschaft über ihre Arbeitszeit - was nur möglich bei Gemeineigentum - vollzieht, sondern durch die Bewegung der Preise der Waren, bleibt es bei"

den Tatsachen, die Engels bereits 1844 in seinen "Umrissen zu einer Kritik der Nationalökonomie" (10.1; 499-524) über die Natur des Privateigentums festgestellt hat.
Es versteht sich, dass das marxistisch-leninistische Ziel der "direkten bewussten Kontrolle der Gesellschaft über ihre Arbeitszeit" nur mit der Mathematik, aber niemals gegen sie verwirklicht werden kann. Daher ist es einsichtig, dass die wissenschaftliche Weltanschauung der Arbeiterklasse selbstredend auch die Mathematik als unverzichtbare Bedingung ihrer eigenen Existenz einschließt.

Natürlich muss man bei der Kenntnisnahme der Beziehung von Marx und Engels zur Mathematik berücksichtigen, dass beide in der englischen Emigration auf Grund der speziellen Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert wesentlich das mathematische Wissen der klassischen Aufklärung gemäß der damaligen akademischen Allgemeinbildung zur Verfügung gehabt haben.
Die um das Jahr 1830 auf dem europäischen Kontinent einsetzende stürmische Entfaltung des mathematischen Denkens (Begründung der klassischen Analysis, Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, Beginn der modernen Algebra und Topologie) ist von den Klassikern des Marxismus nicht mehr wahrgenommen worden, wie es auch gar nicht in ihren unmittelbaren Absichten lag, Arbeiten zu den philosophischen Problemen speziell der Mathematik in extenso auszuführen.

Dieser Umstand bedeutet selbstverständlich, dass die Klärung der philosophischen Grundlagen der Mathematik auf dem Standpunkt des dialektischen und historischen Materialismus - unter Beachtung der modernen Entwicklung der Mathematik - eine Aufgabe ist, welche die Feststellungen der Klassiker des Marxismus-Leninismus allein als Grundorientierungen für ihre Bewältigung voraussetzen kann.
Nicht jedes Urteil, das etwa Engels über mathematische Sachverhalte gefällt hat, kann in seiner Geltung unberührt bestehen bleiben.

Gegenwärtig kann man in der DDR erfreut feststellen, dass eine Reihe von Arbeiten zu den philosophischen Fragen der Mathematik vorgelegt worden ist, in der die Monographien von W. Heitsch (15), W. N. Molodschi (28) und G. I. Ruzavin (32) gewiss die bedeutendsten sind.
Besonders Ruzavin bietet mit seiner Darstellung ein gutes Bild vom allgemeinen Problembestand der philosophischen Fragen der Mathematik (die beiden anderen Arbeiten tragen einen spezielleren Charakter). Angesichts dieser erfreulichen Entwicklung versteht es sich, dass die hier vorgelegte kleine Schrift im Rahmen der kollektiven Leistung marxistisch-leninistischer Philosophen die Frage nach dem Zusammenhang der Philosophie mit der Mathematik auf dem Standpunkt des wissenschaftlichen Sozialismus unter besonderen Voraussetzungen und mit speziellen Zielen zu beantworten sucht:

Wir setzen die theoretischen Grundlagen der marxistisch-leninistischen Philosophie voraus und verfolgen unter solcher Bedingung die Absicht, die Mathematik als eigentümliche Äußerung des wissenschaftlichen Verhaltens, d.h. der allgemeinen Arbeit, zu begreifen.
Es geht uns also nicht darum, Probleme der mathematischen Fundierung der Mathematik, die nicht selten auch unter dem Terminus "Philosophie der Mathematik" figurieren (aber tatsächlich ein Teilgebiet der Mathematik sind), in philosophischer Absicht aufzugreifen.

Nicht Spezialfragen fixieren unseren Gegenstand, sondern die allgemeine, jeden weltanschaulich Interessierten berührende Frage nach dem philosophischen Fundament der Mathematik im Rahmen der Weltanschauung der Arbeiterklasse. In diesem Sinne blicken wir mit dieser kleinen Schrift sozusagen vom dialektischen und historischen Materialismus hinüber zur Mathematik -

und nicht umgekehrt vom unterstellten mathematischen Wissen auf die in diesem erscheinenden philosophischen Probleme!

Natürlich wird mit solcher Sicht in gar keiner Weise ausgeschlossen, dass unter Annahme speziell mathematischer Interessen die philosophischen Fragen der Mathematik um viele Aspekte bereichert und detaillierter beantwortet werden können. Dies aber erzwingt spezifischen Einsatz von Fachwissen, der hier nicht erfolgen kann und generell überhaupt nur als Resultat der kollektiven wissenschaftlichen Leistung denkbar ist.
Da die philosophischen Probleme beliebiger Fachwissenschaften natürlich immer auf fachwissenschaftliche Weise erscheinen und alle Erkenntnis mit der Wahrnehmung von Erscheinungen anhebt, so ist eben für die Erkenntnis der philosophischen Grundlagen spezieller Wissenschaftsdisziplinen das entsprechende Fachwissen unerlässliche Bedingung.

Da zugleich dieselben philosophischen Probleme im wesentlichen weltanschauliche Feststellungen betreffen, ist ebenso für dieselbe Erkenntnis philosophisches Wissen unerlässliche Voraussetzung.
Damit aber ist die Kooperation der Träger des Fachwissens einerseits wie des philosophischen Wissens andererseits notwendig, um ein umfassendes Bild des philosophischen Fundaments einer beliebigen Fachwissenschaft zu gewinnen. Dass solche Kooperation nichts mit einer Hierarchisierung im Verhältnis der Wissenschaftsdisziplinen untereinander zu tun hat, versteht sich von selbst.

Die Philosophie insbesondere kann mit Genuss auf den feudalen Titel einer "Königin der Wissenschaften" verzichten; sie ist ja nur wirklich Philosophie, wenn nicht Titel, sondern Sachverhalte ihr Interesse bestimmen. Darin weiß sie sich einig: mit aller Wissenschaft.

2 Vom Sinn der philosophischen Fragen der Mathematik

Wer eine wie immer geartete "Philosophie der Mathematik" betreibt, setzt beide Wissenschaften, die Philosophie wie die Mathematik, als gegeben voraus.
Es ist jedoch einsichtig, dass die mit; dem Studium der philosophischen Probleme der Mathematik unterstellte Existenz beider Disziplinen noch keine Auskunft darüber enthält, worin man das Wesen der Philosophie einerseits und der Mathematik andererseits erblickt. Solche Voraussetzung über die artspezifische Beschaffenheit von Sachverhalten ist aber wichtig, sofern man ihren Zusammenhang bestimmen will.

Je nachdem wie die Bedeutung der Termini "Philosophie" und "Mathematik" festgelegt wird, hat man auch möglicherweise durchaus unterschiedliche Konzepte zur Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik angenommen bzw. gesetzt.

Sicher dürfen wir akzeptieren, dass Philosophie und Mathematik wesentlich verschiedene Wissenschaften sind. Jeder weiß auf Grund seiner Allgemeinbildung, dass er Mathematik betrieben hat, als er sich mit Zahlen, Funktionen, Beziehungen zwischen geometrischen Figuren usw. beschäftigte. Jeder weiß im Rahmen derselben Allgemeinbildung, dass er Philosophie betrieb, als er Fragen zu beantworten hatte,

"die sich auf das Verständnis der Welt als Ganzes, auf das Verhältnis von Materie und Bewusstsein, auf die Quelle unseres Wissens, auf die Stellung des Menschen in der Welt, in der menschlichen Gesellschaft" (4; 25)

bezogen. Mit solchem Wissen vermag man gewiss einzusehen, dass z.B. die Welt als Ganzes sicher kein mathematisches Objekt ist.
Ebenso wenig wird man sich das Verhältnis des Bewusstseins zur Materie als Exempel einer mathematischen Funktion vorstellen können. Mathematik und Philosophie sind unter dem Gesichtspunkt dieses Allgemeinwissens wirklich nicht aufeinander reduzierbare Wissenschaften, also voneinander wesentlich verschieden.

Diese Feststellung von der wesentlichen Verschiedenheit der beiden uns interessierenden Disziplinen ist jedoch noch keineswegs eine positive Bestimmung eben des Wesens jeder dieser Wissenschaften. Dass nun von einer solchen Definition sehr deutlich abhängt, welche Fragen man unter dem Titel der "philosophischen Probleme der Mathematik" zur Debatte stellt, mag uns die folgende Auffassung zeigen:
In seiner Darstellung über den Zusammenhang von Mathematik und Gesellschaft notiert K. Schröter, dass mittels der mathematischen Grundlagenforschung "bedeutende philosophische Resultate erarbeitet worden" seien.

"Im Mittelpunkt stehen hierbei die wissenschaftstheoretischen Begriffe wie Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Axiomatisierbarkeit, Entscheidbarkeit, Beweisbarkeit, Unabhängigkeit einer Theorie. Alle diese Begriffe lassen sich ebenso streng wie alle übrigen mathematischen Begriffe . . . formulieren." (36; 8)

Mit dieser Sicht der "philosophischen Resultate" der mathematischen Grundlagenforschung ist Philosophie unausgesprochen als metatheoretisches Wissen angenommen, als - wie wir auch sagen können - Methodologie der deduktiven Wissenschaften.
Eine solche "Philosophie" muss die Existenz zumindest mathematisierter Theorien unterstellen und positiv als metatheoretische Analyse ausgebildet werden. Da nun aber solche Analyse im Sinne eines korrekten Begriffs der Metatheorie gar nichts anderes als eine mathematische Un-

tersuchung ist, so haben wir in Wahrheit durch die Auffassung K. Schröters nur einen Schein von Philosophie vorgestellt, der sich als besondere Erscheinung neuartiger mathematischer Probleme erweist.

Statt mit der Philosophie haben wir es so tatsächlich nur mit der Mathematik zu tun! Es ist daher auch durchaus inakzeptabel, wenn Schröter schreibt:

"Das wichtigste Ergebnis der gesamten Untersuchungen scheint zu sein, dass die Mathematik einen solchen Reifegrad erreicht hat, dass sie imstande ist, ihre eigenen philosophischen Probleme mit den Hilfsmitteln der Mathematik selbst zu behandeln." (36; 10)

Gewiss ist es für Philosophen nicht. unangenehm zu hören, dass eine Fachwissenschaft einen besonderen Reifegrad erreicht habe, wenn sie ihre philosophischen Probleme mit eigenen Hilfsmitteln zu lösen gelernt haben soll. Allein, die Philosophie muss darauf verzichten, in der Erfassung ihrer Probleme durch fachwissenschaftliche Erkenntnisse hindurch den Maßstab des Reifegrads eben dieser Disziplinen zu bilden.
Solche Ehrerbietung ist nämlich in Wahrheit Liquidation der Philosophie, indem sie ja mit der Feststellung verbunden ist, philosophische Fragen mit außerphilosophischen Mitteln, also auf nichtphilosophische Weise zu beantworten. Wer würde wohl der Physik zumuten, physikalische Fragen außerphysikalisch zu formulieren und zu entscheiden?
Was man aber jeder Fachwissenschaft billigerweise nicht zumuten wird, sollte man auch der Philosophie nicht unterstellen.

Selbstverständlich ist klar, dass die von K. Schröter genannten metatheoretischen bzw. wissenschaftstheoretischen Fragestellungen legitime Probleme der logisch-mathematischen Grundlagenforschung darstellen. Und natürlich kann eine Untersuchung der philosophischen Basis der Mathematik an den Resultaten dieser Grundlagenforschung nicht vorbeigehen. Dennoch muss nachdrücklich festgehalten werden, dass diese Fragestellungen originär nicht philosophischen Charakters sind.
Das ist deshalb der Fall, weil sie sich unter der Voraussetzung der Existenz mathematischer Theorien auf besondere Gegenstände mit speziellen Eigenschaften beziehen. Die Philosophie aber bezieht sich nicht auf besondere Objekte (gleichgültig ob Produkte der Natur der menschlichen Gesellschaft oder der Erkenntnis); sie versucht nicht, deren spezielle Eigenschaften zu bestimmen - also etwa im Sinne der von Schröter gemeinten Problemstellung die Frage zu beantworten, ob eine vorgelegte mathematische Theorie z.B. widerspruchsfrei oder axiomatisierbar sei. Vielmehr handelt es sich darum:

Wenn wir in der Entwicklung unserer Erkenntnis gewisse Gegenstände als gegeben voraussetzen, um bestimmte Eigenschaften dieser Objekte festzustellen, so verhalten wir uns als Fachwissenschaftler, d.h. als Teilarbeiter des wissenschaftlichen Gesamtarbeiters. Forscht ein als Philosoph ausgebildeter Wissenschaftler in dieser Weise, so ist nicht sein Gegenstand philosophisch geworden, sondern der Philosoph umgekehrt zum Fachwissenschaftler!

Unter welchen Bedingungen wird die Erkenntnisarbeit definitiv philosophisch?

2.1 Was ist Philosophie ?

Der qualitative Sprung von der Fachwissenschaft zur Philosophie tritt ein, wenn unter Voraussetzung schon erzeugter Facherkenntnis die damit gegebenen Bewusstseinsprodukte der objektiven Realität gegenübergestellt werden.
In diesem Augenblick entsteht genau das Problem, welches Engels die "große Grundfrage aller

... Philosophie" (10.4; 274) genannt hat, die Frage "nach dem Verhältnis von Denken und Sein", die Frage nach dem Verhältnis der Erkenntnis zur objektiven Realität, des Bewusstseins zur Materie. Die Philosophie als Wissenschaft ist die jeweils historisch bestimmte Antwort auf diese Frage.

2.1.1 Zur Genesis der philosophischen Grundfrage

Da für eine vernünftige "Philosophie der Mathematik" zum Anfang ihrer Herausbildung alles darauf ankommt, die originäre Natur des Philosophischen zu verstehen, so verweilen Wir noch einen Augenblick beim Phänomen der gewöhnlichen Genesis der philosophischen Grundfrage. Wieso kommt sie zustande?
Ist sie nichts weiter als eine Versicherung der Philosophen - erfunden gar zum Zwecke des Nachweises für die soziale Existenzberechtigung der Philosophie?
Ist sie nicht durch den einfachen Satz erledigt, dass die Materie das Bewusstsein bestimmt (vorausgesetzt, wir stehen auf dem Standpunkt des Materialismus)?

Um diese und ähnliche Fragen zu beantworten, hat man folgendes zu bedenken:
Die Erkenntnis ist offenkundig eine notwendige Bedingung der materiellen Produktion, dieser fundamentalen Äußerung des menschlichen Wesens. Wenn also materielle Produktion stattfindet, dann erfolgt auch Erkenntnisarbeit (gleichgültig welcher Entwicklungsstand im besonderen vorliegen mag). Nun sind aber die Produkte der Erkenntnis, Modelle einschließlich der sie beschreibenden Theorien, durchaus von den Produkten der physischen Arbeit im Interesse der Erhaltung der menschlichen Gattung, Gebrauchsgegenstände für produktive und unproduktive Konsumtion, sehr verschieden.

Eine Sache ist nur solange Modell für einen Zusammenhang von Eigenschaften, solange sie nicht physisch verbraucht wird. Umgekehrt ist eine Sache nur solange Gebrauchsgegenstand (im Sinne der marxistisch-leninistischen Ökonomie), solange sie wirklich verbraucht wird.
Während Modelle also, wie wir sagen können, etwas Allgemeines widerspiegeln, sind Gebrauchsgegenstände gerade in einzelnen Konsumtionsvorgängen verschwindende Objekte. Mithin stehen sich Erkenntnisprodukte (Modelle) und Produkte der physischen Arbeit (Gebrauchswerte) in der Tat als Träger unterschiedlicher Bestimmungen gegenüber. Der Gegensatz zwischen der Materie und dem Bewusstsein ist daher nicht eingebildet, sondern ein wirkliches Resultat der Entwicklung der menschlichen Arbeit, in der das Bewusstsein ja erst hervorgebracht wird.

Nun handelt es sich weiter darum, dass wir im Verlauf der Entwicklung der Erkenntnis zugleich ihre Produkte als Originale in der materiellen Produktion voraussetzen, um in dieser dann in gewünschter Anzahl Kopien solcher Originale zu erzeugen.

Das besagt, dass wir in der materiellen Produktion zunehmend Gebrauchsgegenstände unter der Voraussetzung von Erkenntnisprodukten in der Weise herstellen, dass letztere als die Vorbilder der ersteren gelten, diese also als Abbilder, als bloße Kopien der durch die Erkenntnis erzeugten Originale auftreten. Damit tritt der für die Herausbildung der Philosophie entscheidende Umstand ein, dass materielle Gegenstände als durch ideelle Objekte bestimmt erscheinen, während gleichzeitig ganz klar ist, dass man niemals Produkte aus nichts erzeugen kann, dass also materielle Gegenstände ebensosehr als Determinationsbedingungen für unsere Arbeitsprodukte gelten müssen.
Indem wir mithin unsere Erkenntnis einsetzen, um außermenschliche Naturgegenstände nach dem Vorbilde der Erkenntnisprodukte umzuformen, umzuwandeln, tritt der Schein auf, nach dem das Bewusstsein die bewusstlose Realität bestimmt, formt oder gar schafft.

Dieser Schein verfestigt sich zu einem handfesten Vorurteil, wenn die Erkenntnis unter der Bedingung der Existenz der Klassengesellschaft im Interesse der herrschenden Klasse gesellschaftlich realisiert und gegen die Interessen der ausgebeuteten Produzenten gerichtet wird.
Dann ist die berühmte Trennung von Hand- und Kopfarbeit gegeben, die Handarbeit Inhalt des Lebens der Ausgebeuteten und die Kopfarbeit Mittel der Erhaltung der Herrschaft der Ausbeuter.

Indem nun der Schein der Bestimmtheit der materiellen Produkte durch die ideellen zugleich auf das Interesse der Ausbeuter stößt, jene Trennung namens der Erhaltung der eigenen Herrschaft aufrechtzuerhalten, gewinnt die philosophische Grundfrage ihre politische Dimension.
Der Schein der Determination der materiellen Produkte durch die ideellen wird zur Erscheinung der Herrschaft der nichtarbeitenden Eigentümer über die eigentumslosen Produzenten, wobei eben die Herrschaft gerade auch vermittels der Wissenschaft ausgeübt wird. Und in diesem Zusammenhang verwandelt sich die Grundfrage der Philosophie in den Ausdruck des unabgeschlossenen Kampfs der Klassen, in dem es stets um die Entscheidung der berühmten Frage Lenins geht: Wer - Wen?

Nun könnte man aus den formulierten Überlegungen zu dem Schluss gelangen:
Wenn die Determination der materiellen Produkte durch die ideellen als Schein durch die entwickelte Philosophie nachgewiesen ist, und wenn der Klassenkampf mit der universellen Herstellung des kommunistischen Gemeineigentums verschwunden sein wird, so müsste auch die philosophische Grundfrage gegenstandslos und mithin die Philosophie überflüssig werden.

In der Bildung eines solchen Schlusses übersieht man erstens die Realität jenes Scheins und zweitens den Umstand, dass der Klassenkampf nur eine historisch bestimmte Erscheinungsweise des Zusammenhangs zwischen den besonderen Eigenschaften bzw. Arbeitsfähigkeiten der individuellen Menschen und den allgemeinen Eigenschaften bzw. Arbeitsfähigkeiten der menschlichen Gattung (der Menschheit) ist, dass daher die Liquidation des Klassenkampfs keineswegs identisch mit der Liquidation dieses Zusammenhangs und der aus ihm entstehenden Probleme ist.

Bezüglich der behaupteten Realität des Scheins der Determination materieller Produkte durch ideelle hat man zu bedenken, dass wir ja in jeder planvollen Aktion mit einer idealen Antizipation des gewollten Zustands operieren, und dass wir anders gar nicht operieren können, falls unser Verhalten nicht auf das Niveau des Tierischen zurückfallen soll.
Wir brauchen diese ideale Antizipation, um unsere Arbeitsfähigkeiten zu determinieren, die Kooperation derselben im Interesse der gemeinsamen Erhaltung zu organisieren, den Vergleich unseres Arbeitsaufwands mit den erreichten Ergebnissen zu realisieren.
Mit einem Wort: wir brauchen die ideale Antizipation als Mittel zur einfachen und erweiterten Reproduktion unserer menschlichen Existenz.

Zwar ist es nicht so, wie Hegel sagt, dass "alles Menschliche dadurch und allein dadurch menschlich" ist, "dass es durch das Denken bewirkt wird" (14.4; 32); nichtsdestoweniger aber ist das Denken, ist die Erkenntnis eine notwendige Bedingung eben der Menschlichkeit.

Daher ist die ideale Antizipation gewollter Zustände unabdingbares Moment unserer geschichtlichen Tat, ist also die Bildung der Idealität Bedingung für die Bildung der menschlichen Realität. Im wirklichen Gebrauch also der Idealität tritt das philosophische Grundproblem ein - wir mögen es wissen oder nicht!

Wenn wir den philosophischen Zusammenhang von Idealität und Realität nicht verstehen, kann

der Fall eintreten, dass wir angesichts der notwendigen Differenz beider das "heilige" Ideal gegen die "unheilige" Realität kehren (oder positivistisch umgekehrt verfahren), um die erzeugte Wirklichkeit als "Abfall" von der idealen Antizipation zu denunzieren.
Dann mag ein munterer Protest eintreten, womit jedoch nur in Erscheinung tritt, dass die Idealität im genauen philosophischen Sinne idealistisch für die "wahre Realität" gehalten wird, von welcher die wirkliche Realität nur eine "schlechte Kopie" sei.
So wird man vom philosophischen Grundproblem beherrscht, statt es zu beherrschen!
Will man es aber beherrschen, so muss man sich auf die Philosophie einlassen. d.h. den konkreten Zusammenhang von Idealität und Realität denken.

Bezüglich der ebenso konkreten Einheit der besonderen individuellen Fähigkeiten mit denen des Gemeinwesens hat man zu bedenken, dass sie ein Evolutionsprozess ist.
Das bedeutet, dass jede beliebige Determination dieser Einheit durch ihre geschichtlichen Umstände bedingt ist und gerade durch die Ver- und Bearbeitung dieser Umstände aufgehoben wird. Also ist die Setzung und Aufhebung solcher Determinationen Inhalt der gesellschaftlichen Entwicklung. Diesen Inhalt zu denken, d.h. das Konkrete zu denken, ist philosophische Aufgabe.

Die Philosophie ist daher unter gar keinen Umständen Versammlung eines Wissens, das unter irgendwelchen Umständen überflüssig wird, "in positive Wissenschaft aufgeht" , also in der Erzeugung speziellen Fachwissens bzw. Wissens von Teilarbeitern endet. Im Gegenteil, eben die fortwährende und zunehmende Konstituierung von Fachwissen in besonderen Fächern erfordert auch die fortwährende und zunehmende Kenntnis dessen, wovon jene denn die Fächer sind!

Die Vorstellung, nach der die Philosophie, der wissenschaftlich aufgehobene Gemeinsinn, jemals in Fachwissenschaften aufgelöst wird, d.h. in wissenschaftlich aufgehobene Kenntnisse der Teilarbeiter des gesellschaftlichen Gesamtarbeiters, ist gleichbedeutend mit der Annahme, es könnten Teilarbeiter ohne ihren wechselseitigen Zusammenhang, Individuen ohne ihre Gattung usw. real existieren.
Diese Vorstellung ist undialektisch und ist in der Philosophie als Illusion nachzuweisen. Der Nachweis selbst ist die - unauflösbare - Philosophie.

Halten wir also fest: Die Philosophie hat einen autonomen Ursprung, dargestellt in ihrer Grundfrage, die ihrerseits in geschichtlich verschiedenen Formen auf der Basis des wirklichen Gegensatzes zwischen Realität und Idealität, entwickelt in der Arbeit, tatsächlich formuliert wird - und zwar ganz unabhängig davon, ob Philosophen vom Fach existieren oder nicht.
Indem uns in der Mathematik ein spezieller und überaus bedeutsamer Ausdruck der Existenz des menschlichen Bewusstseins entgegentritt, so ist die Formulierung der philosophischen Grundfrage mit Bezug auf diesen Ausdruck die eigentliche Setzung der "Philosophie der Mathematik", die definitive Annahme des Bestehens philosophischer Probleme der Mathematik.

Dabei ist es nicht erforderlich, dass die Formulierung der Grundfrage der Philosophie mit Bezug auf die Mathematik auch unter der Voraussetzung entsprechenden philosophischen Wissens erfolgt. Sie kann daher in den verschiedensten Ausdrücken zu den unterschiedlichsten Anlässen gestellt werden. G. Asser z.B. bemerkt über die Differenz der mathematischen Begriffsbildung zu derjenigen der empirischen Wissenschaften (3; IV:):

"Der Unterschied zu den 'Realwissenschaften' besteht vor allem darin, dass wir in der Mathematik keine unmittelbare Möglichkeit haben, unser Begriffssystem an der realen Außenwelt zu prüfen, da wir nun einmal die in der Mathematik auftretenden Objekte dort nicht als unmittelbar gegebene Realitäten vorfinden.
Es ergeben sich daher zwangsläufig die folgenden allgemeinen Fragen:

Welcher Natur sind denn nun eigentlich die in der Mathematik untersuchten Begriffe, was ist ihr konkreter Inhalt, in welchem Maße sind sie uns durch die Außenwelt nahegelegt und woher stammt unser Wissen über ihre Eigenschaften?"

Wir sehen, dass in dieser Feststellung in der Tat die philosophische Grundfrage formuliert wird, wobei der spezielle Anlass die Wahrnehmung der Differenz im Verhältnis empirischer und mathematischer Begriffsbildungen zur außermenschlichen Realität ist. Und sehr zutreffend erklärt Asser denn auch (3; ebd.):

"Ich möchte ... behaupten, dass es sich hierbei um eine zutiefst philosophische Frage handelt, deren exakte Beantwortung mir nur im Rahmen eines umfassenden philosophischen Systems möglich erscheint, obwohl es in der Geschichte der Grundlagen der Mathematik nicht an Versuchen gefehlt hat, diese Frage innermathematisch zu beantworten."

Die "Philosophie der Mathematik", also die jeweils bestimmte Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik, ist Bestandteil der Philosophie und als solcher an die Voraussetzung des gegebenen Entwicklungsstands der Mathematik gebunden.
S. Körner sagt mit Recht (20; 10):

"Wie die Rechtsphilosophie nicht Gesetze erlässt und die Philosophie der Naturwissenschaften nicht wissenschaftliche Hypothesen entwirft oder prüft, so vermehrt die Philosophie der Mathematik nicht die Anzahl der mathematischen Theoreme und Theorien. Sie ist nicht Mathematik. Sie ist eine Reflexion über die Mathematik, stellt ihre eigenen Fragen und gibt Antworten."

2.1.2 Einheit der philosophischen Wissenschaft oder Vielheit der philosophischen Meinungen?

Man muss die Existenz des realen Scheins zugeben, durch den die konsistente Ausbildung einer Theorie der philosophischen Basis der Mathematik auf Grund des Umstands problematisch ist, dass der "gesunde Menschenverstand", der gegebene Gemeinsinn, mit einer Vielzahl philosophischer Standpunkte, Meinungen usw. konfrontiert wird.
P. Lorenzen, auf der Suche nach einem verbindlichen Kern der Philosophie als Wissenschaft, konstatiert (24.4; 150):

"Das, was etwa in den letzten 100 Jahren unter dem Titel 'Philosophie' aufgetreten ist, zeigt sich uns - auch bei wohlwollendster Betrachtung - durchaus nicht als ein zusammenhängender Komplex, und nirgendwo ist ohne eigene Stellungnahme des Betrachters ein Kern zu entdecken."

Diese Beurteilung werden sicher viele Fachwissenschaftler - angesichts der Wahrnehmung des unzweifelhaften Kerns der eigenen Wissenschaftsdisziplinen - durchaus teilen.
Natürlich wissen wir im 20. Jahrhundert sehr genau, dass auch die Wissenschaftsentwicklung ihre Revolutionen kennt, dass sie also keineswegs als rein kontinuierliche Akkumulation praktikabler Detailkenntnisse verstanden werden kann.

Wir wissen aber auch, dass theoretische Revolutionen eben diese Kenntnisse nicht entwerten, sondern vielmehr im Rahmen des neuen Konzepts umwerten. In diesem Sinne ist "der sichere Gang einer Wissenschaft" (Kant) durch keine wissenschaftliche Revolution in Frage gestellt. Aber genau in diesem Sinne liegt angesichts der vielen philosophischen "Systeme" der Schein vor, dass eben die Philosophie noch immer nicht dahingekommen ist, jenen "sicheren Gang einer Wissenschaft" anzunehmen.

Es versteht sich, dass dieser Schein für die Analyse der philosophischen Probleme der Mathematik von gravierender Bedeutung ist. Je nachdem was man unter dem Terminus "Philosophie" versteht, wird man diese oder jene Fragen bezüglich der Mathematik als "philosophische" zulassen oder nicht. Hat man z.B. wie R. Carnap die Meinung (7; III):

"Was an der Arbeit des Philosophen wissenschaftlich haltbar ist, besteht ... in logischer Analyse",

so wird man die "Philosophie der Mathematik" als Methodologie der deduktiven Wissenschaften ausbilden, d.h. Metamathematik betreiben. Über die philosophischen Probleme der Mathematik wie aller anderen Fachwissenschaften wird man dann dem Publikum suggerieren,

"dass diese Fragen Fragen der Syntax sind. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, muss gezeigt werden, dass die in der Wissenschaftslogik vorkommenden Objektfragen (z.B. über die Zahlen, die Dinge, über Raum und Zeit, über die Beziehungen zwischen Psychischem und Physischem u. dgl.) nur Pseudo-Objektfragen sind, Fragen, die sich infolge irreführender Formulierung auf Objekte zu beziehen scheinen, während sie sich in Wirklichkeit auf Sätze, Begriffe, Satzgebäude u. dgl. beziehen, also eigentlich logische Fragen sind.

Und zweitens müssen wir zeigen, dass alle logischen Fragen formal erfassbar sind und sich daher als syntaktische Fragen formulieren lassen." (7; 207)

Abgesehen von der recht willkürlichen Festsetzung, alle Fragen, die sich auf Sätze, Begriffe, Satzsysteme usw. beziehen, als "logische Fragen" anzusehen, und abgesehen von der Illusion, Logik auf logische Syntax reduzieren zu können, ist klar, dass mit der von Carnap proklamierten Position des sogenannten logischen Positivismus die klassischen Fragen philosophischer Natur als "metaphysische Pseudoprobleme" gelten, d.h. als Fragestellungen ohne wissenschaftliche Bedeutung.
Nach dieser Position wäre eine "Philosophie der Mathematik", eine Erforschung und Darstellung der philosophischen Probleme der Mathematik, die von der Aufgabe ausginge, die Grundfrage der Philosophie mit Bezug auf die Existenz mathematischen Wissens zu beantworten, vollständig überflüssig.

Ist man andererseits wie T.W. Adorno der Meinung, dass "überschwengliche Synthesen zwischen der philosophischen Entwicklung und der naturwissenschaftlichen anrüchig" seien, so wird man wohl den Sinn philosophischer Problemstellungen zugeben, aber dennoch auf die Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik verzichten, eben weil sie ein Ausdruck jener "anrüchigen" Synthesen sein müssen. Man wird dann dem Publikum suggerieren:

Diese Synthesen "ignorieren die Verselbständigung der physikalisch-mathematischen Formelsprache, welche längst nicht mehr in Anschauung, überhaupt in keinen dem menschlichen Bewusstsein unmittelbar kommensurablen Kategorien sich heimholen lässt." (1; 75)

Der Schein eines Beweises für solch eine Behauptung kann durch den einfachen Umstand erzeugt werden, dass man in der Tat keine Formulierung und Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik unter der Voraussetzung dieses Standpunkts, des Standpunkts der sogenannten "Kritischen Theorie" der Frankfurter Schule, der intellektuellen Öffentlichkeit zur Beurteilung verlegt. Und man muss der Kritischen Theorie bestätigen, dass sie diesen "Beweis" in der Tat geliefert hat.

In diesem Zusammenhang ist unbedingt angesichts des Gegensatzes zwischen dem logischen Positivismus und der Kritischen Theorie hervorzuheben, dass beide in trauter Eintracht den

effektiven Verzicht auf die Formulierung und systematische Beantwortung der philosophischen Fragen der Mathematik proklamieren, wenngleich die Begründung für solchen Verzicht sicher wesentlich verschieden ist.
Und gewiss ist die Liquidation dieser Problemstellung ein deutlicher Ausdruck für die Reduktion des "Anspruchs der Vernunft" (6), wie er in der Weltanschauung der Bourgeoisie gegenwärtig vorgenommen ist.

Aber diese Weltanschauung ist nicht eine positive Basis für die Bestimmung dessen, was Lorenzen als den Kern der Wissenschaft Philosophie zu erfassen sucht. Seit der weltgeschichtlichen Durchsetzung der politischen Herrschaft der Bourgeoisie in der Epoche der Großen Französischen Revolution, d.h. in der Zeit von 1789 bis 1830, ist dieser Kern in der Weltanschauung der modernen Arbeiterklasse aufgehoben.
Die Liquidation des politischen Erbes der Jakobiner als "Pariser Verrücktheit", die von der nun herrschenden Kapitalistenklasse vollzogen worden ist, hat sich zugleich als Liquidation des theoretischen Kerns der Philosophie geäußert, als Behauptung von der "metaphysischen Verrücktheit" der Ideologen jener großen Epoche, als Denunziation ihrer "metaphysischen Spekulation", die angeblich den "gesunden Menschenverstand" wie die "positive Wissenschaft" außer Kraft gesetzt habe.

Positivismus und Lebensphilosophie in dieser oder jener Machart als Ersatzstücke für die Leistung der klassischen deutschen Philosophie, dem Höhepunkt der progressiven bürgerlichen Philosophie überhaupt, verdunkeln den Kern philosophischen Erkennens, weil sie auf das fundamentale Moment desselben, auf die Kritik des bestehenden Gemeinsinns ("Kritik" im Sinne von Kant und von Marx), unvermeidlich verzichten müssen und in Apologie der bestehenden Diktatur der Bourgeoisie entarten.

Daher ist die spätbürgerliche Philosophie ganz und gar ungeeignet, als eine vorgegebene Basis für die Feststellung der invarianten Natur philosophischen Erkennens zu dienen. Nun könnte man sagen:
Gut, akzeptieren wir die Feststellung von der Unangemessenheit der spätbürgerlichen Weltanschauung und ihrer philosophischen Reflexion mit Bezug auf das Problem der Determination des Wesens philosophischer Leistung!

Aber kann man nicht feststellen, dass die Philosophie auch vor 1830 das Bild einer inkonsistenten Vielheit von Meinungen liefert? Hinsichtlich solcher Frage ist es wichtig, Hegels Kommentar zu diesem Phänomen zur Kenntnis zu nehmen (14.5; 94):

"Wir wollen zuerst den Totalanblick eines Waldes haben, um dann erst die einzelnen Bäume zu erkennen. Wer diese zuerst betrachtet und bloß an sie sich hängt, übersieht nicht den ganzen Wald, verirrt und verwirrt sich in ihm.
So ist es auch bei den Philosophien, ..., welche einander bekämpfen und entgegenstehen. Man würde sich daher verwirren, wenn man die einzelnen Philosophien zuerst kennenlernen wollte. Man würde vor lauter Bäumen den Wald nicht sehen, vor lauter Philosophien nicht die Philosophie. ...

Die Vielheit der Philosophien macht oft, dass man die Philosophie selbst nicht bemerkt und verachtet. - Hierauf baut sich auch jener seichte Beweis, welcher mit Kennermiene behauptet, es käme bei der Geschichte der Philosophie nichts heraus; eine widerlege die andere; schon die Menge der Philosophien sei ein Beweis der Nichtigkeit des Unternehmens der Philosophie."

Wie man sieht, ist in der wirklichen Philosophie das Phänomen der Vielheit philosophischer

Meinungen keineswegs als bedauerlicher Übelstand. sondern vielmehr als ein Umstand betrachtet worden, der mit Bezug auf den Kern philosophischen Wissens selbst als Gegenstand der Erkenntnis vorauszusetzen ist, also als Ausdruck der bestimmten Natur der Philosophie selbst begriffen werden muss.
Hegel fasst ihn zusammen unter dem Begriff des Widerspruchs "der Einheit der Wahrheit und der Vielheit der Philosophien" (14.5; 95), und er fragt nach dem Grund dieses Widerspruchs. Seine Antwort lautet, dass die Geschichte der Philosophie "die Geschichte des ... konkreten Gedankens oder der Vernunft" (ebd.) sei. Der konkrete Gedanke aber ist der sich entwickelnde Gedanke.

"Folglich ist die Geschichte der Philosophie identisch mit dem System der Philosophie." (14,5; 119)

Folglich ist der systematische Kern der Philosophie das Wissen von der allgemeinen Natur der Geschichtlichkeit, d.h. die Dialektik. Und dieses Wissen wird in dem Maße angeeignet, in dem wirklich Geschichte gemacht wird. Engels sagt (10.3; 491):

"Alle Verstandstätigkeit: Induzieren, Deduzieren, also auch Abstrahieren ..., Analysieren ..., Synthesieren ... und, als Vereinigung beider, Experimentieren, haben wir mit dem Tier gemein. Der Art nach sind diese sämtlichen Verfahrungsweisen - also alle Mittel der wissenschaftlichen Forschung, die die ordinäre Logik anerkennt - vollkommen gleich beim Menschen und den höheren Tieren. Nur dem Grade ... nach sind sie verschieden. ... Dagegen das dialektische Denken ... ist nur dem Menschen möglich, und auch diesem erst auf einer verhältnismäßig hohen Entwicklungsstufe ..."

Man hat in diesem Zusammenhang gut zu beachten, dass die Feststellung von der Besonderheit der Menschen, ihre Geschichte zu machen, keineswegs die Annahme der Ungeschichtlichkeit der Natur impliziert.
Natürliche, außermenschliche Populationen unterscheiden sich nicht dadurch von der menschlichen Gattung, dass sie keine Geschichte haben, sondern allein dadurch, dass sie diese nicht als Gegenstand ihrer Lebenstätigkeit unterstellen können; sie haben also Geschichte, aber sie machen sie nicht!

Der Grund dieses Umstands liegt in der einfachen Tatsache, dass menschliche Geschichte durch die Erzeugung von Produktionsmitteln ausgezeichnet ist. Das Machen der Geschichte ist wesentlich das Machen der Arbeitsmittel und ihre Überlieferung an die nachfolgenden Generationen. An ihren Arbeitsmitteln (Werkzeugen, Maschinen, Bauten, Transportmitteln usw.) gewinnen die Menschen die Möglichkeit, ihre unmittelbare Bindung an die gegebene natürliche Umwelt aufzuheben, von den Besonderheiten verschiedener geographischer Milieus also weitgehend unabhängig zu werden.

Mit ihren Arbeitsmitteln schaffen sie sich aus der vorgegebenen natürlichen Umwelt eine neuartige, in der durch Produktion vermittelte menschliche Bedürfnisse auch real befriedigt werden können (wobei eben diese Bedürfnisse natürlich erst in jenem Schaffensprozess hervorgebracht werden). Und in der Humanisierung der sie umgebenden Natur, in der Unterwerfung der Erde verwirklichen die Menschen, biologisch in unterschiedlichen Stämmen oder ursprünglichen Gemeinwesen vorgegeben, zugleich ihre Natur als menschliche Gattung überhaupt.

Diese Herausbildung der menschlichen Gattungsnatur ist es, die den eigentlichen Gegenstand des philosophischen Erkennens liefert. Und da die Gattungsexistenz kein an sich determiniertes und singulär vorstellbares Phänomen ist, sondern genau im Prozess der historischen

Entwicklung gegenständlich wird, so sind die Gedanken von der Gattung, die philosophischen Äußerungen, unvermeidlich historisch bestimmt.
Sie sind es, weil sie nichts anderes sein können als die ideellen Reflexionen des jeweils erreichten wirklichen Entwicklungsstands der Gattung - einschließlich natürlich der darin liegenden künftigen Evolutionsmöglichkeiten, ausgedrückt als ideelle Antizipationen realisierbarer Zukunft.

Die großartige Erkenntnis Hegels vom System der Philosophie als der Geschichte der Philosophie ist der erste Ausdruck der Erkenntnis, dass die menschliche Gattung durch keinen besonderen historischen Zustand in ihrer Wirklichkeit erfasst wird, sondern in der Notwendigkeit der genetischen Folge dieser Zustände.
In der marxistisch-leninistischen Philosophie, der Erbin der progressiven vormarxistischen Philosophie, wird diese Erkenntnis auch dadurch ausgesprochen, dass Marx und Engels feststellen (27; 35):

"Der Kommunismus ist für uns nicht ein Zustand, der hergestellt werden soll, ein Ideal, wonach die Wirklichkeit sich zu richten haben [wird]. Wir nennen Kommunismus die wirkliche Bewegung, welche den jetzigen Zustand aufhebt. Die Bedingungen dieser Bewegung ergeben sich aus der jetzt bestehenden Voraussetzung."

Hat man erfasst, dass die Bestimmung der menschlichen Gattungsnatur die invariante Aufgabe philosophischen Erkennens ist, wobei eben diese Natur in einem fortwährenden Entwicklungsprozess wirklich ist, so versteht sich die Erscheinung der Philosophie als historischer Vorgang einander ablösender theoretischer Konzepte fast von selbst.
Sie ist dann kein Grund mehr für die Nichtachtung oder gar Verachtung philosophischen Denkens, sondern im genauen Gegenteil vielmehr die wesentliche Erscheinung des konkreten, d.h. sich entwickelnden Charakters der Philosophie.

Ist überdies klar, dass unter den Bedingungen der Ausbeutung, d.h. der Aneignung der Mehrarbeit durch eine exklusive Klasse von Eigentümern der objektiven Arbeitsbedingungen im Gegensatz zu den eigentumslosen Produzenten, die menschliche Gattung nicht real besteht, sondern lediglich in idealer Setzung über den Privataustausch erscheint (während darin zugleich die ursprünglichen Gemeinwesen zugrunde gehen), so ist auch begreiflich, dass die vormarxistische Philosophie das Problem der Gattungsexistenz niemals anders denn als Problem der Klassenexistenz formulieren und lösen könnte, dass daher erst auf dem Standpunkt der Arbeiterklasse die Philosophie zum wissenschaftlichen Bewusstsein ihrer selbst gelangen kann - und muss, dass also die Philosophie als dialektischer und historischer Materialismus eigentlich entwickelte wissenschaftliche Philosophie ist.

Sie ist es deshalb, weil genau die Arbeiterklasse heute bereits die historische Darstellung der morgen universell emanzipierten menschlichen Gattung ist. Dies ist sie, weil sie das Wesen der menschlichen Existenz, die Arbeit, als ihren originären, unmittelbaren Lebensinhalt besitzt.
Die Arbeiterklasse ist die subjektive Wirklichkeit der Arbeit. Indem sie im geschichtlichen Gang ihrer Emanzipation vermittels der Errichtung ihrer politischen Macht die Entwicklung der Arbeit zur Sache aller Menschen macht, hebt sie zugleich ihr Dasein als Klasse auf, verwirklicht also die Identität von Arbeit und Humanität und bildet darin die Realität der menschlichen Gattung.

"Erst in der Gemeinschaft [mit Andern hat jedes] Individuum die Mittel, seine Anlagen nach allen Seiten hin auszubilden; erst in der Gemeinschaft wird also die persönliche Freiheit möglich. In den bisherigen Surrogaten der Gemeinschaft, im Staat usw. existierte die persönliche Freiheit nur für die in den Verhältnissen der herrschenden Klasse entwickelten Individuen und nur, insofern sie Individuen dieser Klasse waren.

Die scheinbare Gemeinschaft, zu der sich bisher die Individuen vereinigten, verselbständigte sich stets ihnen gegenüber und war zugleich, da sie eine Vereinigung einer Klasse gegenüber einer andern war, für die beherrschte Klasse nicht nur eine ganz illusorische Gemeinschaft, sondern auch eine neue Fessel. In der wirklichen Gemeinschaft erlangen die Individuen in und durch ihre Assoziation zugleich ihre Freiheit." (27; 74)

Mit dieser Feststellung über die Natur der wirklichen im Gegensatz zur scheinbaren Gemeinschaft, zu den bisherigen Surrogaten (Ersatzmitteln) der Gemeinschaft, erklären Marx und Engels zugleich die Aufgabe der entwickelten Philosophie: Verteidigung eben der wirklichen Gemeinschaft, d.h. der um ihre Emanzipation kämpfenden internationalen Arbeiterklasse!
In diesem Kampfe ist die Philosophie der Arbeiterklasse zugleich der sich entwickelnde Ausdruck der wissenschaftlichen Fundierung des Gemeinbewusstseins der wirklichen Gemeinschaft.

Wir werden später sehen, wie die hier vorgestellte Natur der Philosophie in den Lösungen der philosophischen Probleme der Mathematik in Erscheinung tritt. Zunächst aber sei noch notiert, dass im Konzept der Erlanger Schule in der Gegenwart deutlich Tendenzen der Überwindung sowohl des Positivismus wie der Kritischen Theorie artikuliert werden.

Indem nämlich Lorenzen nach dem invarianten Kern philosophischen Erkennens fahndet, um den Sinn und die Bedeutung des Terminus "Philosophie der Mathematik" zu präzisieren, stellt er fest, dass das Konzept einer "Philosophie der Mathematik" als der "Lehre von den logischen Prinzipien der Mathematik" keine gute Lösung des Problems der philosophischen Probleme der Mathematik darstellen könne:

"Diese Philosophie wäre eine Einzelwissenschaft; denn es lässt sich nicht leugnen, dass sich die Logik in der Gegenwart zu einer Einzelwissenschaft verselbständigt hat." (24.4; 150)

Ebensowenig könne - so Lorenzen - die Tatsache des Auftretens "prinzipieller Schwierigkeiten" in der Mathematik (oder in anderen Fachwissenschaften) als ein Ausdruck der Notwendigkeit des Einsatzes von Philosophie aufgefasst werden. Die Philosophie bekäme so nur

"die ehrenvolle Aufgabe, gewissermaßen als Kuriositätenkabinett der Einzelwissenschaften dienen zu dürfen .... Demgegenüber möchte ich ... die Bitte aussprechen, die Einzelwissenschaften möchten sich um ihre Kuriositäten, und seien sie noch so prinzipiell, selbst kümmern.
Wenn z.B. die Mathematiker wissen wollen, was die sog. natürlichen Zahlen sind, ... - woher soll das denn der Philosoph wissen, wenn es die Mathematiker, die sich dauernd mit den Zahlen beschäftigen, nicht selber wissen?" (24.4; 151)

Mit diesen Auffassungen ist für Lorenzen klar:

"1. Die Logik soll keine Philosophie der Mathematik heißen und 2. soll die Philosophie keine Fragen der Einzelwissenschaft behandeln." (24.4; ebd.)

Was aber soll dann als Inhalt der philosophischen Probleme der Mathematik bestimmt werden? Lorenzen bemerkt:

"Wir können nicht leben, ohne ein ... vorgängiges Verständnis von Menschen und Welt. ... Nach dem scheinbaren Ende aller Philosophie können wir die Aufgabe der Philosophie also neu bestimmen als das Nachdenken über diese Vormeinungen.
Die Philosophie hat keine Vormeinungen zu vertreten, sondern sie hat die Vormeinungen als ihren Gegenstand." (24.4; 155)

Wenn wir unterstellen, dass Lorenzen unter dem Terminus "vorgängiges Verständnis" bzw.

"Vormeinung" (man kann auch von Vor-Urteilen sprechen) keineswegs individuell willkürliche Äußerungen über "Menschen und Welt" meint, sondern die Ausdrücke geschichtlich bestimmter gemeinschaftlicher Auffassungen, so können wir die von ihm erklärte Position akzeptieren und sogar feststellen, dass sie eine bemerkenswerte Reproduktion des Standpunkts der klassischen deutschen Philosophie darstellt.
Es war nämlich Hegel, der festgestellt hat (14.1; 28):

"Das Bekannte überhaupt ist darum, weil es bekannt ist, nicht erkannt."

Das Erkennen des Bekannten also ist die von Hegel für die Philosophie gesehene Aufgabe; ob sie auch als "Nachdenken über Vormeinungen" charakterisiert wird, bedeutet keine wesentliche Änderung der Sicht. Selbst wenn Lorenzen überdies von der "Kritik der Vormeinungen" als dem eigentlichen Kern der Philosophie spricht, kann seine Feststellung von unserem Standpunkt akzeptiert werden, falls nur keine subjektivistische Sicht der Kritik intendiert, sondern die Sicht einer "Kritik der reinen Vernunft" oder schließlich die Sicht der "Kritik der politischen Ökonomie"!

Es versteht sich, dass wir unter den genannten Bedingungen Lorenzen zustimmen können, wenn er die folgende Feststellung formuliert (24.4; 156):

"Der Philosophie der Mathematik wird ... die Aufgabe zugewiesen, die Vorentscheidungen, die schon im Ansatz mathematischer Theorienbildung verborgen liegen, dadurch aus Licht zu ziehen, dass sie in den größeren Zusammenhang der Geschichte unserer vorwissenschaftlichen Meinungen hineingestellt werden."

Vervollständigen wir diese rein ideengeschichtliche Sicht durch die Forderung, den Zusammenhang des mathematisch Bekannten (der Vorentscheidungsresultate im Ansatz mathematischer Theorienbildung) mit der Geschichte der Produktionsweisen zu erfassen, so haben wir in der Tat das Programm einer "Philosophie der Mathematik", einer Theorie der philosophischen Basis der Mathematik, wie es als Grundlage einer selbständigen philosophischen Leistung gegenüber der Mathematik wie gegenüber dem Gemeinwesen auch vertretbar ist.

Damit wird ausgeschlossen, dass unter dem Titel "Philosophische Probleme der Mathematik" entweder die Liquidation der Philosophie oder die Liquidation der Fachwissenschaft unter dem Verweis billiger "Popularmathematik" erfolgt.

Wir bemerken noch, dass diese Auffassung über die Natur der "Philosophie der Mathematik", über die Theorie der philosophischen Probleme der Mathematik und ihrer Lösungen, bei Unterstellung der prinzipiellen Einheit der Philosophie als besonderer Wissenschaft durchaus die Möglichkeit des wissenschaftlichen Meinungsstreits im gewöhnlichen Sinne einschließt, also sehr wohl unterstellt, dass sich die eine Philosophie in der Vorstellung und Kritik vieler unterschiedlicher individueller Beiträge entwickelt.
Diese Eigenschaft hat aber die Philosophie mit jeder anderen Wissenschaft gemeinsam. Und sie ist überhaupt kein Grund, an der Realisierbarkeit einer konsistenten Theorie der philosophischen Basis der Mathematik zu zweifeln.

2.2 Was ist Mathematik?

Mit Bezug auf die Bestimmung des Problems der philosophischen Probleme der Mathematik haben wir uns bisher mit der Bedeutung des in der Charakterisierung dieses Wissensbereichs verwendeten Terminus "philosophisch" befasst.

Um ein volles Verständnis des Ausdrucks "philosophische Probleme der Mathematik" zu gewinnen, müssen wir uns nun mit der Bedeutung des Terminus "Mathematik" befassen. Was also bezeichnet dieses Wort?

Man könnte meinen, dass solche Frage angesichts etwa der in der Deutschen Demokratischen Republik erreichten und sicher beispielhaften mathematischen Allgemeinbildung überflüssig ist. Wem in 10 Jahren wöchentlich fortlaufend ein großzügiges Quantum an Arbeitszeit zur Aneignung mathematischer Kenntnisse zur Verfügung steht, der wird nach dieser Ausbildung keine Schwierigkeiten haben, gewisse Feststellungen als mathematische zu erkennen. Allein, die Sache kompliziert sich sofort, wenn wir positiv eine bestimmte Antwort auf die vorgelegte Frage formulieren und sie Mathematikern vertragen.

2.2.1 Standpunkte in der Mathematik

Gegenwärtig ist von sehr vielem Mathematikern die Auffassung akzeptiert,

"dass sich alle derzeitigen mathematischen Begriffe als mengentheoretische Begriffe erklären lassen und man damit jedes derzeitige Teilgebiet der Mathematik als Teilgebiet der Mengenlehre ansehen darf.
Die Wissenschaft Mathematik ... fällt also beim heutigen Entwicklungsstand von Mathematik und Mengenlehre mit der Mengenlehre zusammen.""Damit", so erklärt D. Klaua im zitierten Zusammenhang weiter, "werden wir ... 'Mathematik' und 'Mengenlehre' als synonyme Begriffe verwenden." (19; 1)

Bedenkt man, dass die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, ...$ im Rahmen der Mengenlehre mittels der Identitäten $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ... definiert werden können, dass weiter Relationen und mithin Funktionen (als eindeutige Relationen) über den Begriff des geordneten Paars, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, als Mengen, geordnete Paare als Elemente haben, einführbar sind, so ist die Rekonstruktion mathematischer Begriffe vermittels mengentheoretischer durchaus einsichtig. Denn eben die Zahlen und ihre Funktionen sind fundierende Gegenstände mathematischen Erkennens.

A. Kertész erklärt im Sinne dieser Rekonstruierbarkeit der Mathematik in der Mengentheorie über G. Cantor, dass dieser

"der gesamten Mathematik eine ihrem Wesen nach völlig neue Anschauung aufgeprägt hat. Dies ist die mengentheoretische Betrachtungsweise, der heute kein Mathematiker entraten kann. Sie hat die Entwicklung der Mathematik unseres Jahrhunderts vollständig bestimmt." (18; 9)

Das mengentheoretische Konzept der Mathematik hat den Versuch ihrer vollen Durchbildung im berühmten Werk von Bourbaki (5) gefunden, in dem die mathematischen Grundstrukturen (algebraische, Ordnungs- und topologische Strukturen) auf der Basis der Mengenlehre entwickelt werden. Mit der Annahme der Vorstellung, dass die Mengenlehre das Fundament der Mathematik sei, und mit der Unterstellung des Bourbakismus, der strukturtheoretischen Orientierung des mathematischen Denkens, ist unsere Frage nach dem Wesen der Mathematik durchaus beantwortet: Mathematik ist das Studium sowie die Lehre der Eigenschaften und Beziehungen von Mengen.

Letztere sind ihrerseits die grundlegenden mathematischen Objekte. Die Beschreibung ihrer Eigenschaften und Beziehungen erfolgt dabei entweder "naiv" (16) oder axiomatisch.

In diesem Zusammenhang bemerkt W. Kummer in einem beachtenswerten Hinweis (21; 278):

"Man kann die Mathematik nicht in einem naiven Sinne als Lehre von den Mengen bezeichnen, nämlich nicht in dem Sinne, dass die Mathematik beliebige Eigenschaften beliebiger Mengen untersuche."

Warum ist solche Auffassung nicht akzeptabel? Kummer antwortet mit einem Beispiel (ebd.; 279): "Die Gesamtheit der Blütenblätter einer bestimmten Pflanze bildet sicher eine Menge, und die Aussage, dass diese Pflanze fünf Blütenblätter hat, ist eine Aussage über diese Menge. Sie ist aber keine mathematische, sondern eine biologische Aussage: Sie ist nicht aus den Axiomen der Mengenlehre ableitbar."

In der Tat darf man die Gesamtheit der Blütenblätter einer bestimmten Pflanze als eine Menge betrachten:
1. nämlich sind diese Blütenblätter gewiss als voneinander wohlunterschiedene Individuen anzusehen, und
2. ist ihre Gesamtheit eindeutig durch die Zugehörigkeit eben dieser Individuen determiniert und mithin selbst ein mögliches Objekt für die (mengentheoretische) Kalkulation.

Es ist weiter zutreffend, dass die hier unterstellte Eigenschaft, Blütenblatt einer bestimmten Pflanze zu sein, keine durch die Mathematik feststellbare Eigenschaft ist. Die mathematische Determination - oder das mathematische Moment an der biologischen Bestimmung - besteht vielmehr in der Feststellung, dass gewisse Glieder der Pflanze als wohlunterschiedene Individuen Elemente der Menge der Blütenblätter dieser Pflanze sind.

Es ist aber falsch, vom Satze "diese Pflanze hat fünf Blütenblätter" zu behaupten, dass er eine Aussage über eine Menge darstelle! Um dies einzusehen, haben wir im Sinne unserer traditionellen Grammatik zu beachten:
Jeder Satz - als Sinneinheit der Umgangssprache - tritt in der bekannten Subjekt-Prädikat-Gliederung auf, die wir symbolisch kurz durch S/P notieren. Das Subjekt S eines Satzes S/P bezeichnet, wie man sagt, den Gegenstand der Aussage des Satzes; das Prädikat P liefert die sprachliche Darstellung der Aussage vom Gegenstand.

Mit dieser normierenden Sicht über Syntax und Semantik des elementaren umgangssprachlichen Ausdrucks bzw. Satzes ist klar, dass im Satze "diese Pflanze hat fünf Blütenblätter" keine Aussage über eine Menge, sondern eine Aussage über eine bestimmte Pflanze vorliegt:
"diese Pflanze" ist ja Subjekt des Satzes, und "hat fünf Blütenblätter" ist Prädikat desselben!

Um eine Aussage über eine Menge zu sein, muss sich das Prädikat auf einen Gegenstand beziehen, der eine Menge ist. Sätze, die Aussagen über Mengen darstellen, müssen als Subjekte eben Mengenbezeichnungen enthalten. Und da "diese Pflanze" keine Mengenbezeichnung ist, so ist der Satz "diese Pflanze hat fünf Blütenblätter" auch kein Ausdruck für eine Aussage über eine Menge.

Sagen wir aber "die Menge der Blütenblätter dieser Pflanze ist anzahlgleich der Menge der Musiker des Quintetts N", so haben wir in der Tat eine Aussage über eine Menge, nämlich die Behauptung von ihrer Gleichwertigkeit mit einer anderen Menge.
Mit Bezug auf derartige Aussagen trifft nun Kummers Hinweis gewiss zu: Sie sind keine Konsequenzen der Mengenlehre und daher, falls die Identifikation der Mathematik mit der Mengenlehre vorausgesetzt wird, keine mathematischen Aussagen. Diese Situation besteht ganz entsprechend auch für Messurteile:
Haben wir irgendeine Größe g_i für einen vorgelegten Gegenstand mittels des Gebrauchs der

zugehörigen Größeneinheit g_0 determiniert (gemessen), so ist das gebildete Messurteil

$$g_i = \gamma \cdot g_0$$

ebenfalls keine mathematische Behauptung, wenngleich mit ihr das mathematische Objekt γ (praktisch eine rationale, theoretisch eine reelle Zahl) auftritt.

Wir müssen daher unsere obige Bemerkung über die Mathematik als Lehre von den Eigenschaften und Beziehungen der Mengen in folgender Weise einschränken:
Wenn wir uns mathematisch für Mengen interessieren, so unterstellen wir dabei eine Abstraktion, nämlich die Abstraktion von der empirisch bestimmten Unterschiedenheit vorgelegter Mengen.
Die Mengen der Blütenblätter einer Pflanze und der Musiker des Quintetts N sind empirisch bestimmte Mengen und als solche artverschieden.

Durch Abstraktion von der Artverschiedenheit behandeln wir sie als Exemplare für Mengen von 5 Elementen. Und als solche Exemplare sind sie uns Zeichen der im eigentlichen Sinne mathematischen Objekte, d.h. derjenigen Objekte, über welche das mathematische Erkennen Feststellungen trifft. Mit jener Abstraktion können wir auch sagen, dass die Mathematik - bei Annahme der Mengenlehre als ihrem Fundament - die nicht-empirische Lehre von den Eigenschaften und Beziehungen der Mengen ist.

Der Terminus "nicht-empirisch" bezieht sich hierbei auf die unterstellte Voraussetzung der Abstraktion von den empirischen Besonderheiten bei Mengendeterminationen. Er wird nicht selten auch synonym mit dem Terminus "a priori" verwendet, so dass man eine nicht-empirische Theorie auch eine "Theorie a priori" nennt.
Damit ist also keineswegs die Auffassung gemeint, nach welcher eine solche Theorie Erkenntnisse liefert, die Sachverhalte erfassen, welche den empirisch erfassten vorangehen oder diese gar beherrschen bzw. aus sich "erschaffen", sondern lediglich die (durch Kant formulierte) Sicht, dass mit allen empirischen Erkenntnissen zugleich nicht-empirische realisiert werden.

Wer ein elementares Verständnis der Dialektik besitzt, wird sofort zugeben, dass die Erkenntnisentwicklung als Einheit empirischem und nicht-empirischem Erkennens für die Dialektik von fundierender Bedeutung ist. Denn eben so ist eine Erscheinung dessen vorgestellt, was in der Dialektik "Widerspruch" genannt wird.
Die Annahme der Existenz von Theorien a priori im erklärten Sinne ist daher unter der philosophischen Voraussetzung der Dialektik absolut legitim.

Es ist nun einsichtig, dass die entschiedene Fixierung des Wesens der Mathematik als der nicht-empirischen Lehre von den Eigenschaften und Beziehungen der Mengen für den Philosophen sehr erfreulich ist. Denn auf diese Weise erlaubt das Studium der philosophischen Probleme der Mathematik eine ökonomische Konzentration der wissenschaftlichen Arbeitskraft:
Wer diese Probleme kennenlernen will, setze vor allem das Studium der Mengentheorie in ihrer "naiven" wie in ihren axiomatischen Formen voraus.

Das erste philosophische Problem, das dann in diesem Zusammenhang zu lösen ist, besteht in der Frage nach der objektiv-realen Grundlage der mathematischen Annahme von der Existenz von Mengen.

Um zu bemerken, dass hier ein echtes Problem vorliegt, hat man sich nur von der Illusion freizumachen, nach der über die empirische Mengendetermination der Schein als wirkliche Erscheinung gilt, dass so fixierte Mengen sogenannte "konkrete" Gegenstände seien, die man doch zeigen und beobachten könne.

Betrachten wir zur Klärung des Problems nochmals die oben zitierte Menge der Blütenblätter einer gewissen Pflanze. Um die fragliche Gesamtheit als Menge zu behandeln, forderten wir, dass die entsprechenden Blütenblätter "wohlunterschiedene Individuen" und ihre Gesamtheit als kalkulierbares Objekt zur Verfügung stehen sollten.
Was aber wird so gefordert? Ein Gegenstand ist ein "wohlunterschiedenes Individuum",wenn sein Zusammenhang mit seiner Umwelt unmissverständlich aufgelöst ist, er also beliebig verlagert werden kann, aber dabei nichts von der Eigenschaft einbüßt, nach der er überhaupt determiniert worden ist.

Literarisch gesprochen: Ein "wohlunterschiedenes Individuum" ist ein Robinson - ohne Freitag und ohne Umwelt, in der er sich betätigen kann. Ein solches Objekt ist ein wirkungsloser, unbewegter Gegenstand mit der einzigen Auflage, mit sich selbst identisch zu bleiben.

Es ist vom Standpunkt unserer praktischen Erfahrung klar, dass solche Gegenstände in der rauen Wirklichkeit in Wahrheit niemals auftreten, dass vielmehr wirkliche Gegenstände nur näherungsweise jenen entsprechen können - und zwar dann, wenn wir es auf uns nehmen, sie durch allerlei Erhaltungsmaßnahmen daran zu hindern, ihren fixierten Zustand irreversibel zu ändern.
Die Existenz "wohlunterschiedener Individuen" ist also keineswegs ein bares Faktum, wie der Empirismus meint, sondern durch die Tätigkeit des Ausschließens aller Wechselwirkungen gesetzt. Sie ist mithin eine ideale Existenz, d.h. ein Ideal, das als Norm jener Ausschlusshandlung fungiert.

Und genau mit der wirklichen Existenz solcher Ideale tritt denn auch wirklich die philosophische Grundfrage ein! Es entsteht so der Gegensatz zwischen den idealen Gegenständen (den "wohlunterschiedenen Individuen") und den realen Gegenständen, die stets mit anderen Gegenständen wechselwirken und nur in dieser Wechselwirkung konkrete Gegenstände sind.

Und wenn wir nun die Mengenbildung bezüglich unserer fünf Blütenblätter der fraglichen Pflanze vollziehen, so unterstellen wir darin stillschweigend - als eine unbewusste Vorentscheidung - genau diese Blütenblätter, die doch wirklich im Stoffwechselprozess mit allen anderen Gliedern der Pflanze stehen, also gerade nicht "wohlunterschiedene Individuen" sind, eben als genügend treffende Exemplare für jene idealen Objekte.
Dies muss man bemerken, wenn man den Sinn der philosophischen Frage nach dem Zusammenhang der mathematischen Objekte, hier der Mengen, mit der objektiven Realität erfassen will. Es gibt keine Mathematik - gleichgültig, ob mengentheoretisch fundiert oder nicht - ohne die stillschweigende Unterstellung des Gegensatzes von Realität und Idealität!
Eben deshalb gibt es keine Mathematik ohne die Existenz ihrer philosophischen Probleme.

Wir müssen aber nun feststellen, dass unsere philosophische Freude über die Entschiedenheit der großen Mehrheit der heute arbeitenden Mathematiker, ihre Wissenschaft wesentlich als Mengenlehre (bzw. auf dieser Basis als Theorie der genannten Strukturen) zu betrachten, durch höchst bedeutsame Argumente getrübt wird.
Gehen wir mit philosophisch friedlichem Gemüte zum nächsten Fachmann der Mathematik, um uns bestätigen zu lassen, dass auch er den Satz "Mathematik ist Mengenlehre" für sich als Inhalt eines positiven Urteils akzeptiert, so kann es geschehen, dass wir vielmehr die folgende Antwort erhalten:

"Das ist eine einseitige, typische Stellungnahme von Grundlagenfachleuten, die die Form (genauer: die temporäre Form) für den Inhalt nehmen. Dieser Standpunkt führt, konsequent angewandt, zu Auswüchsen und zur Loslösung von der Realität. Man sollte besser die konträre Formulierung annehmen: Mathematik fängt da an, wo die Mengenlehre aufhört!"

Es versteht sich, dass solche Sicht von Fachleuten den Philosophen immerhin in Skrupel stürzen muss. Denn wenigstens die Übereinstimmung der Fachleute hinsichtlich der wesentlichen Natur eben des wissenschaftlichen Fachgebiets, dessen philosophische Basis er zu erkunden trachtet, ist eine doch erwünschte Voraussetzung des philosophischen Bemühens. Ist nun solche Übereinstimmung nicht gegeben, so kann sich die Gefahr einstellen, dass die Formulierung und Lösung philosophischer Probleme einer Disziplin gleichsam als "Einmischung in die inneren Angelegenheiten" derselben erscheint.

Dass dies eine reale Gefahr ist, zeigt die Wissenschaftsgeschichte zur Genüge. Sie auszuschließen, erfordert theoretisch die präzise Angabe der Natur der philosophischen Probleme, die eben keine fachwissenschaftlichen sind, und macht die Übereinstimmung der Fachleute über das, was sie in ihrem Fach machen, sehr wünschenswert.
Es ist aber sicher eine Illusion anzunehmen, die Philosophie könnte solche Übereinstimmung erzwingen oder gar dekretieren.

Vom Standpunkt dieser Wissenschaft kann das Fehlen der einheitlichen Auffassung einer Fachdisziplin durch die entsprechenden Fachleute nur festgestellt und hinsichtlich seines möglichen philosophischen Hintergrunds untersucht werden.

Jedenfalls haben wir zu notieren, dass die Annahme von der Natur der Mengentheorie, ihrerseits das Fundament der Mathematik bzw. - philosophisch gesprochen - die wesentliche Erscheinung oder Vorstellung der Mathematik zu sein, keineswegs die allgemein akzeptierte Auffassung aller Mathematiker ist.
Im Gegenteil müssen wir feststellen, dass etwa seit Mitte der sechziger Jahre unseres Jahrhunderts der vormals glänzende Stern des Bourbakismus sinkt. In diesem Zusammenhang ist man denn auch mit der respektlosen Bemerkung über die Reduzierbarkeit der Mathematik auf Mengenlehre konfrontiert, die solche Vorstellung vielmehr als "Litanei" charakterisiert, "die von allen Beweihräucherern der sogenannten modernen Mathematik ständig angestimmt wird" (38; 384).

R. Thom, der dies Urteil angenommen hat und dessen fachliche Kompetenz außer jedem Zweifel ist, sagt weiter (ebd.; 385):

"Wägt man alle Argumente ab, so kommt man zu dem Schluss, dass der durch den Gebrauch der Mengensymbolik entstandene übertriebene Optimismus seine Wurzel in einem philosophischen Irrtum hat.
Man hat geglaubt, dass durch die Unterweisung im Gebrauch der Symbole $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ die Mechanismen deutlich gemacht werden können, die aller Beweisführung und Deduktion zugrundeliegen. Der Mensch des 20. Jahrhundert hat begeistert die Syllogismen Darapti und Celarent der mittelalterlichen Scholastik wiederentdeckt."

Man muss zugeben, dass solch vernichtendes Urteil bei der vorauszusetzenden fachlichen Kompetenz des Urteilenden die Frage nach der Natur der philosophischen Probleme der Mathematik erheblich beeinträchtigt.
Sollten wir die Mengenlehre in der Tat als eine moderne Reproduktion der mittelalterlichen Scholastik betrachten? Thorn jedenfalls erklärt unmissverständlich (ebd.; 389):

"Bourbakis alle Hoffnung, mathematische Strukturen würden sich auf natürliche Art und Weise aus einer Hierarchie von Mengen, ihren Teilmengen und ihrer Kombination ergeben, ist zweifellos nur eine Illusion."

Und an anderer Stelle heißt es (ebd.; 383): "Es ist charakteristisch, dass bei den immensen Anstrengungen von Nicolas Bourbaki zur Systematisierung ... nicht ein einziges neues Theorem von Bedeutung herausgekommen ist."

J. Dieudonné, Mitarbeiter an der Ausbildung des Konzepts der Bourbaki-Gruppe, verteidigt gegen Thom die Notwendigkeit der Systematisierung der Mathematik, die er "gewiss keine sehr aufregende Arbeit" nennt und erklärt (8; 405):

"Ich bezweifle, dass Thom es ernst meint, wenn er sagt, die Bourbaki- Gruppe hätte jemals geglaubt, dass die "Eléments" zu neuen Erkenntnissen führen würden oder gehofft, die grundlegenden Strukturen der Mathematik würden sich "auf natürliche Weise aus einer Hierarchie von Mengen ergeben".
Wenn auch die Mitarbeiter von Bourbaki nicht notwendigerweise Thoms Meinung teilen, dass mathematischen Strukturen "durch die Außenwelt bestimmt" werden, so glauben sie jedoch, wie Hilbert, dass sich Strukturen auf unvorhersehbare Weise aus "Problemen" ergeben, und dass die "Hierarchie der Mengen" zweifellos nur einen passenden leeren Rahmen darstellt, in den Strukturen im Zuge ihrer Entdeckung nach und nach eingefügt werden."

So also wird Thoms Attacke gegen die Welt der Mengen und für die geometrische Anschauung (Intuition) der realen Welt durch einen Repräsentanten des Bourbakismus in der Weise aufgefangen, dass die zuvor im naiven Bewusstsein inhaltlich angeschaute Welt der Mengen nun als ein "leerer Rahmen" gelten soll, in den die Strukturen (deren Existenz beide Opponenten nicht bestreiten) quasi eingehängt werden. Man wird zugeben, dass die angedeutete Kontroverse, die zu Beginn der siebziger Jahre wenigstens definitiv die Reduktion des Bourbakismus auf die Rolle einer nachträglichen Systematisierung mathematischen Wissens angezeigt hat, philosophische Probleme der Mathematik ganz unmissverständlich impliziert.

Das ist nicht deshalb der Fall, weil Thom von einem "philosophischen Irrtum" spricht, sondern deshalb, weil das Problem zugrundeliegt, welches Verhältnis die Welt der Mengen zur wirklichen Welt und welche Beziehung der Mathematiker in seiner effektiven Forschung zur wirklichen Welt einnimmt.

Wird nun mit den bisher diskutierten Standpunkten immerhin die Welt der Mengen als ein "leerer Rahmen" und die Mengenlehre als ein mathematisches Teilgebiet betrachtet, in dem die theoretische Rekonstruktion bzw. Systematisierung mathematischen Wissens erfolgen kann, so haben wir es im Bereich des mathematischen Erkennens doch weiterhin mit einem Konzept zu tun, das selbst diese Sicht nicht mehr teilt und das unter dem Namen "konstruktive Mathematik" bekannt ist.

Derjenige Grund, der von Anhängern der konstruktiven Entwicklung der Mathematik am häufigsten im Zusammenhang mit der Problematisierung der Mengentheorie angegeben wird, besteht in der Tatsache, dass verschiedenen Lösungsmöglichkeiten für das Problem der Determination der mathematischen Unendlichkeit formuliert werden können.
Man muss nämlich zugeben, dass die Mengentheorie - in welcher naiven oder axiomatischen Fassung auch immer - strikt an die Annahme der Existenz einer unendlichen Menge gebunden ist.

Diese Annahme (unbeweisbarer Grundsatz in jeder axiomatischen Mengentheorie) drückt die Entscheidung des Unendlichkeitsproblems in der Weise aus, dass die Existenz einer Menge mit -

wie man sagen kann - unendlich vielen Elementen als gegeben gilt, d.h., dass die Unendlichkeit in der sogenannten aktualen Fassung akzeptiert ist.
Speziell mit Bezug auf die Gesamtheit der natürlichen Zahlen haben wir uns in diesem Sinne vorzustellen, dass sie als besonderes Objekt, eben als Menge N, für die mengentheoretische Kalkulation zur Verfügung steht.

Wir sollen uns also vorstellen, dass wir mit einer unendlichen Menge in mancherlei Hinsicht - besonders in logischer - in der gleichen Weise operieren dürfen wie mit Gesamtheiten endlich vieler Objekte - wie mit Körben voll von Obst, mit Säcken voll von Getreidekörnern, mit Populationen voll von Individuen!

Gegen diese Vorstellung rebelliert man namens der Verteidigung des Konzepts einer konstruktiven Grundlegung und Ausbildung der Mathematik, das wir - der Kürze halber - auch den mathematischen Konstruktivismus nennen wollen, der nicht mit dem wissenschaftstheoretischen Konstruktivismus verwechselt werden darf, wenngleich beide Positionen natürlich gewisse Zusammenhänge aufweisen.
Über die Idee von der Aktualität des mathematischen Unendlichen bemerkt A. A. Markow jun. mit freundlicher Ironie (25; 33):

"Das Unglück ist nur, dass diese Idee selbst viel zu phantastisch ist. In der Tat, sich einen unendlichen, d.h. niemals abgeschlossenen Prozess als vollendet zu denken, gelingt nicht ohne grobe Vergewaltigung des Verstandes, der solche widersprüchlichen Phantasien ablehnt. Dem Wesen nach wollten wir hier unendliche Prozesse als endliche betrachten, d.h. gerade von ihrer Unendlichkeit abstrahieren."

Man bemerkt, dass hier ein sehr schweres Geschütz aufgefahren werden ist: Es wird nämlich behauptet, dass die Annahme der Aktualität der Unendlichkeit gleichbedeutend mit der positiven Behauptung eines logischen Widerspruchs ist!
Aktuale Unendlichkeit soll bestehen, wenn eine unvollendbare Entität eine vollendete Entität ist, wenn wir also eine Entität haben, die sowohl die Unvollendetheit wie die Vollendetheit darstellt.

Da dies eine für die Mathematik inakzeptable Kontradiktion bedeutet, so muss ihr Grund, die Annahme der Aktualität der Unendlichkeit, beseitigt werden. Und dies leistet die konstruktive Mathematik, indem sie das Unendliche - wie man sagt - potentiell fasst.
Mit solcher Fassung kann von der Menge der natürlichen Zahlen nicht mehr im Sinne Cantors gesprochen werden. Vielmehr ist die Gesamtheit der natürlichen Zahlen als unvollendbar anwachsend zu betrachten; zu jeder gegebenen natürlichen Zahl lässt sich eine weitere, ihr Nachfolger, bilden.
Markow jun. sagt (ebd.; 32):

"Die potentielle Unendlichkeit ist ein unbedingtes Anwachsen irgendeiner Größe. ... Der Gedanke des potentiellen Unendlichen beschäftigt sich mit dem Streben nach unendlich in dem Sinne, dass die von uns betrachtete sich ändernde Größe letzten Endes größer als jede beliebige vorausgegebene natürliche Zahl wird."

Indem nun aber mit der potentiellen Fassung der Unendlichkeit natürlich von unendlichen Mengen gemäß der Mengentheorie nicht mehr gesprochen werden kann, wird die Voraussetzung der Mengen als der fundierenden Objekte der Mathematik überhaupt sinnlos.
Denn im eigentlichen Sinne ist Cantors Entdeckung von der Vergleichbarkeit unendlicher Mengen mit dem Resultat der Feststellung unterschiedener Mächtigkeiten die innermathematische

Basis für die Ausbildung der Mengenlehre. Die verblüffende Feststellung, dass es "ebensoviel" rationale Zahlen gibt wie natürliche (dass die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig der Menge der rationalen Zahlen ist), obwohl doch augenscheinlich auf dem Zahlenstrahl zwischen zwei natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen, und die erwartete Feststellung, dass es "mehr" reelle Zahlen als natürliche gibt, dass es also unterscheidbare aktuale Unendlichkeiten gibt bzw. transfinite Kardinalzahlen, beide Feststellungen sind Legitimationen für den mathematischen Sinn der Mengenlehre!

Diese Legitimationen entfallen mit der Annahme, dass die mathematische Unendlichkeit allein potentiell bestimmt sei. Transfinite Kardinalzahlen können so nur noch als Objekte der "reinen Spekulation" betrachtet werden, die mit sachlicher mathematischer Forschung nichts zu tun haben.

Von Verteidigern des konstruktiven Standpunkts wird denn auch gern behauptet, dass die Annahme der aktualen Unendlichkeit mancherlei Ähnlichkeit mit der religiösen Annahme von der Existenz des lieben Gottes habe. In materialistischer Sicht ist natürlich klar, dass eine Theorie, die diesen metaphysischen Throninhaber im Visier hat, nicht mehr als Ausdruck ernsthafter Wissenschaft betrachtet werden kann.

Gehen wir auf den Standpunkt der konstruktiven Mathematik über, so geben wir damit auch unsere ursprüngliche Annahme über das Wesen der Mathematik, nämlich Mengenlehre zu sein, ganz auf.
Nun handelt es sich nicht mehr um die Beschreibung der Eigenschaften und Beziehungen nicht-empirisch fixierter Mengen (oder Klassen), um die Deskription also einer Welt idealer Objekte, um die Entdeckung von Strukturen in solcher Welt, sondern um die Erzeugung von Eigenschaften und Beziehungen vermittels der Konstruktion der mathematischen Objekte, um die Erfindung von Regelsystemen, deren Befolgung gerade die (konstruktive) Existenz dieser Objekte als Produkte mathematischen Handelns sichert.

Das mathematische Erkennen basiert hier nicht auf der Betrachtung von an sich gegebenen Dingen, sondern auf dem realen mathematischen Tun und seinen Produkten. Und das mathematische Tun beginnt mit der Bildung der Progression der natürlichen Zahlen. Die konstruktive Mathematik gewinnt damit mathematische Einsichten, indem sie das, was eingesehen werden soll, selbst hervorbringt.

Es ist empfehlenswert, den zur konstruktiven Mathematik entgegengesetzten Standpunkt "deskriptive Mathematik" zu nennen.
Die Deskription (Beschreibung) kann dabei im naiven oder axiomatischen Sinne verstanden werden. Jedenfalls unterstellt sie, um mit K. Gödel zu sprechen, dass

"Klassen und Begriffe ... wie reale Objekte vorgestellt werden können ..., die unabhängig von unseren Definitionen und Konstruktionen existieren (12; 137)."

Indem diese Vorstellung für die konstruktive Mathematik indiskutabel ist, haben wir in der Philosophie zur Kenntnis zu nehmen, dass die Mathematik in der Erscheinung des Gegensatzes von Deskription und Konstruktion realisiert wird. Man erkennt natürlich, dass solche Erscheinung für die materialistische Dialektik sozusagen höchst erfreulich ist.
Denn eben in der Erklärung eines erscheinenden Gegensatzes aus dem entsprechenden wesentlichen Widerspruch bewährt sie ja ihre eigentliche theoretische Potenz.

Eine gegensatzfreie Welt hätte keinen Platz für die Dialektik; eine gegensatzfreie Mathematik hätte keine dialektisch bestimmte philosophische Basis. Indem also die Mathematik im Gegensatz von Deskriptionismus und Konstruktivismus, der offensichtlich nicht mit mathematischen Mitteln lösbar ist, sich wirklich entwickelt, zeigt sie zugleich, wo wirklich ihr Zusammenhang mit der materialistischen Dialektik zu suchen ist.

2.2.2 Deskriptive und konstruktive Mathematik

Um einen ersten Eindruck von der Natur des Gegensatzes zwischen der deskriptiven und der konstruktiven Darstellung des mathematischen Erkennens zu vermitteln, betrachten wir zunächst die Art und Weise, wie im Rahmen beider Standpunkte die Theorie der natürlichen Zahlen in ihren Grundannahmen vorgestellt wird.
Diese Annahmen sind bekanntlich erst von G. Peano um die Wende zum 20. Jahrhundert explizit formuliert werden (sehr im Gegensatz zur Darstellung der Grundannahmen der euklidischen Geometrie):

(1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(2) Jede natürliche Zahl hat genau eine natürliche Zahl als ihren Nachfolger.
(3) 1 ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.
(4) Verschiedene natürliche Zahlen haben stets verschiedene natürliche Zahlen als ihre Nachfolger.
(5) Kommt eine Eigenschaft der natürlichen Zahl 1 zu und mit jeder natürlichen Zahl auch ihrem Nachfolger, so kommt sie allen natürlichen Zahlen zu.

In dieser umgangssprachlichen Charakterisierung der wesentlichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen werden die Begriffe der natürlichen Zahl eins (1) und der Nachfolgerschaft undefiniert unterstellt, wobei die Frage nach der deskriptiven oder konstruktiven Fassung der natürlichen Zahlen unmittelbar durchaus unentschieden ist.

Es bleibt offen, ob wir die natürlichen Zahlen als unabhängig von den Bestimmungen (1) bis (5) an sich gegeben betrachten, oder aber ob wir sie als Produkte eines Erzeugungsprozesses ansehen sollen, der eben durch jene Bestimmungen geregelt wird.

Setzen wir nun den Standpunkt der deskriptiven Mathematik voraus, so betrachten wir die natürlichen Zahlen als die Elemente einer Menge, deren Struktur gerade durch Peanos Axiome ausgedrückt wird:

(1) $1 \in \mathbb{N}$; 1 ist Element der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

(2) $\bigwedge_n \bigvee_m (m = n')$; zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m, die Nachfolger n' von n ist.

(3) $\neg \bigvee_n (n' = 1)$; es gibt keine natürliche Zahl n, deren Nachfolger 1 ist.

(4) $\bigvee_m \bigvee_n (m' = n' \to m = n)$; sind die Nachfolger zweier natürlicher Zahlen untereinander gleich, so auch diese Zahlen selbst.

(5) $\bigwedge_M (M \subseteq N \wedge 1 \in M \wedge \bigwedge_n (n \in M \to n' \in M) \to M = n)$; für jede Menge M gilt: wenn M Teilmenge der Menge N ist und die 1 als Element enthält und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält, dann ist M der Menge N gleich.

Man erkennt, dass der Übergang von der umgangssprachlichen Charakterisierung der natürlichen Zahlen zu ihrer deskriptiven Bestimmung auf der Basis der Mengentheorie und formalen

Logik die Objektivierung oder Verdinglichung der Eigenschaft, natürliche Zahl zu sein, einschließt.
Indem wir vom Satze "1 ist eine natürliche Zahl" zum Satze "$1 \in N$" übergehen, gehen wir von einem Satz ohne Satzobjekt zu einem Satz mit Satzobjekt über.

Solcher Übergang kann nur als Ausdruck der neuen Voraussetzung verstanden werden, dass das Satzobjekt "N" im Ausdruck "$1 \in N$"einen vorgegebenen Gegenstand bezeichnet.

Zum Verständnis dieses Hinweises haben wir grammatisch zu beachten, dass der Satz "1 ist eine natürliche Zahl" ein - wie man sagt - prädikativ-verbaler Ausdruck ist, d.h. die Satzform $S/\varepsilon p$ mit ε als Zeichen für "ist", der gebeugten Verbform von "sein", und mit p als Zeichen des Prädikativums bzw. der Prädikatergänzung realisiert.
Das Prädikat dieses Satzes ist also selbst gegliedert in "ist" und "eine natürliche Zahl", allgemein in das Prädikat i.e.S. und die Prädikatergänzung. Klarerweise tritt in $S/\varepsilon p$ kein Satzobjekt auf!

Das Prädikat "ist eine natürliche Zahl" notiert eine Eigenschaft, aber keinen Gegenstand. Vielmehr drückt erst der Satz "1/ ist eine natürliche Zahl" den Sachverhalt aus, dass die Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, dem "1" genannten Gegenstand zukommt.
Im Falle des Satzes "$1 \in N$" fungiert das Zeichen $\in$ als Prädikat und das Zeichen N als Satzobjekt.
Das Prädikat $\in$ ist selbst wieder in "ist" und "Element" gegliedert, also in "Kopula" und Prädikativ, so dass ganz deutlich das Zeichen $\in$ nicht als eine adäquate Übersetzung von "ist" gedeutet werden kann!

In "$1 \in N$" haben wir mithin statt des gegliederten Prädikats "ist eine natürliche Zahl" vielmehr den Prädikatverband "ist Element der Menge N", in dem der Term "der Menge A" als Dativobjekt auftritt. "$1 \in N$" stellt daher nicht eine Eigenschaft über einen Gegenstand fest, sondern eine Eigenschaft (eine binäre Relation) über zwei verschiedene Gegenstände.
Die Sätze "$1/\varepsilon$ eine natürliche Zahl" und "$1 \in N$" sind daher Ausdrücke für verschiedene Sachverhalte; die Prädikate "ist eine natürliche Zahl" und "ist Element" sind Mittel unterschiedlicher Aussagen.

Setzen wir nun den Standpunkt der konstruktiven Mathematik voraus, so können wir die Existenz des Objekts N nicht unterstellen und daher Peanos Grundsätze nicht als Ausdruck einer gewissen Struktur betrachten, die durch dieses Objekt vorgestellt wird.

Wir stellen uns hier vielmehr auf den Standpunkt, dass die Menschen die praktische Fähigkeit haben, nacheinander die Figuren I, II, III, IIII, ... zu erzeugen. Betrachten wir die Verwirklichungen dieser Fähigkeit, so können wir sagen, dass sie offenbar nach den Regeln (1) $\Rightarrow$ I und (2) $n \Rightarrow n$I erfolgen. Das Zeichen $\Rightarrow$ meint hier die Aufforderung "man bilde" oder "man gehe über zu"; das Zeichen I ist Produkt der Grundhandlung und stellt daher die Grundfigur dar; das Zeichen n dient zur Notation der Leerstelle für - wie wir mit P. Lorenzen (24.1; 133) sagen - "abgeleitete Figuren".

Setzen wir etwa in (2) für n die Grundfigur I ein, so haben wir den Übergang I $\Rightarrow$ II und damit auch weiter die Übergänge II $\Rightarrow$ III, III $\Rightarrow$ IIII usw.; man nimmt so wahr, dass die angegebenen Regeln in der Tat dem Bildungsprozess zugrunde liegen, der die aktive Basis für die Erzeugung der natürlichen Zahlen ist.

Wir können nun - nach Lorenzen (24.3; 6-7) - feststellen, dass die gemäß der Regeln (1) und (2) erzeugbaren Figuren die Eigenschaft haben, Ziffern zu sein, d.h. Darstellungen von Zahlen zu liefern. Damit können wir beide Regeln als Voraussetzungen für die Sätze: (1) I/ε Ziffer, (2) n/ε Ziffer $\to nI/\varepsilon$ Ziffer, betrachten.

Diese Ausdrücke stellen Aussagen über Gegenstände dar, die nicht an sich existieren, sondern als Produkte des Tuns gegeben sind. Indem wir uns nun auf Aussagen beschränken, deren Gültigkeit beim Ersatz gleichwertiger Ziffern untereinander nicht verändert wird, betrachten wir die Ziffern abstrakt als Zahlen und können daher die Sätze

(1) I/ε Zahl,
(2) n/ε Zahl $\to nI/\varepsilon$ Zahl

formulieren. Auf diese Weise erhalten wir also vermittels der Konstruktion der Ziffern und der Abstraktion der Zahlen eine Formulierung, die den Inhalt der beiden ersten Grundsätze Peanos wiedergibt.
Die fragliche Abstraktion basiert dabei auf der Voraussetzung, dass wir die Regeln $\Rightarrow I = I$ und $m = n \Rightarrow mI = nI$ für die Bildung von Gleichwertigkeiten zwischen Ziffern fixiert haben. Mit diesen Regeln ist zugleich einsichtig, dass $I \neq nI$ behauptet werden kann.
Die konstruktive Wiedergabe der weiteren Grundsätze Peanos liefert dann die folgenden Ausdrücke:

(3) $\bigwedge_n (nI \neq I)$; jede Zahl nI ist von I verschieden.

(4) $\bigwedge_m \bigwedge_n (mI = nI \to m = n)$; alle Zahlen m und n sind untereinander unter der Bedingung gleich, dass ihre Nachfolger gleich sind.

(5) $H(I) \wedge \bigwedge_m [H(m) \to H(mI)] \to \bigwedge_n H(n)$; gilt eine Behauptung H über I und unter der Bedingung, dass sie für jede Zahl m gilt, auch für jede Zahl mI, so gilt sie für jede Zahl n.

Es versteht sich, dass diese Aussagen auf Grund der Konstruktion gelten und keine Deskription eines Objekts N (der Menge der natürlichen Zahlen) liefern. Nichtsdestoweniger erfassen sie technisch eben die Eigenschaften, die wir auch in der deskriptiven Darstellung der Struktur der Menge N zum Ausdruck bringen.

Es zeigt sich damit eine für die Beurteilung der philosophischen Fragen der Fachwissenschaften charakteristische Eigentümlichkeit:
Ob wir nun die natürlichen Zahlen als Elemente einer an sich existierenden Menge oder als Produkte einer geregelten Konstruktion betrachten, in beiden Fällen werden wir auf dieselbe Weise mit ihnen rechnen. Die philosophische Problemlage stellt diesen technischen Charakter des fachwissenschaftlichen Erkennens nicht in Frage!
Das bedeutet aber umgekehrt auch: Wenn der Fachwissenschaftler allein den technischen Charakter seiner Erkenntnisarbeit im Auge hat, so ist er darin von der Philosophie unabhängig. Die Philosophie kann weder die Probleme der Determination dieses Charakters stellen, noch kann sie dieselben lösen.

Wir können daher in diesem Umstand einen wesentlichen Gesichtspunkt für die Erfassung der Verschiedenheit von Philosophie einerseits und Fachwissenschaft andererseits erblicken.

Unsere Darstellung besagt daher insbesondere auch, dass der Gegensatz von deskriptiver und konstruktiver Bestimmung der natürlichen Zahlen keineswegs ein fachwissenschaftliches Beispiel für den philosophischen Gegensatz von Materialismus und Idealismus ist. Die deskriptive Mathematik kann ebensosehr materialistisch wie idealistisch in ihrem philosophischen Fundament gedeutet werden; das gilt auch für die konstruktive Mathematik.

Die bekannteste idealistische Deutung der deskriptiven Mathematik ist der Platonismus, ein objektiver Idealismus; die konstruktive Mathematik dagegen ist häufig in ihrer philosophischen Basis subjektiv idealistisch gedeutet werden (z.B. durch Brouwer).
Was der Gegensatz von deskriptiver und konstruktiver Fassung der natürlichen Zahlen zum Vorschein bringt, ist nicht eine bestimmte philosophische Auffassung, sondern ein philosophisches Problem. Er ist nicht eine Antwort auf die Grundfrage der Philosophie in der Mathematik, sondern Ausdruck der spezifisch mathematischen Erscheinungsform eben dieser Frage.

Der Gegensatz von Deskriptionismus und Konstruktivismus zeigt uns also definitiv, dass die Mathematik in der Tat philosophische Fragen einschließt, dass mithin das Bemühen um die Ausbildung einer "Philosophie der Mathematik" keinen eingebildeten, sondern einen wirklichen Grund hat.

Dass wir mit diesem Gegensatz keine rein mathematisch entscheidbare Alternative vor uns haben, wird ganz deutlich, wenn wir ihn auf seinen philosophischen Ausdruck reduzieren: Das berühmte Hegelsche Problem des "Anfangs" einer Wissenschaftsdarstellung wird hier so vorgestellt, dass die deskriptive Mathematik die Vorentscheidung für die An-sich-Existenz von Mengen (oder Klassen) enthält, während die konstruktive Mathematik erklärt: Im Anfang war die Tat!

Es handelt sich also um eine Alternative von Ding und Tat, die wir philosophisch nicht so entscheiden können, dass wir behaupten: Wenn das Ding gegeben ist, so besteht keine Tat, oder: Wenn die Tat besteht, so ist kein Ding gegeben!

In der Mathematik wird gegenwärtig durchaus zugestanden, dass beide Standpunkte nicht aufeinander reduzierbar sind, So erklären H. Scholz und G. Hasenjaeger (35; 12):

"Absolute Krisenfestigkeit ist ein Idol. ... Hieraus folgt, dass es eine objektive, allgemeinverbindliche Rangordnung der Auffassungen ... ein für allemal nicht gibt. Über einen Wettbewerb der Möglichkeiten. ... ist grundsätzlich nicht hinauszukommen."

Die Autoren, die dies feststellen, stehen selbst auf dem Standpunkt der deskriptiven Mathematik. Ihn erklären sie mit Bezug auf die Darstellung ihres Gegenstands wie folgt (35; 1):

"Die Logik, die in diesem Lehrbuch entwickelt wird, ... fußt auf derselben Ontologie wie die von erkennbaren Widersprüchen befreite und in diesem Sinne vertretbare klassische Mathematik. Für diese Ontologie ist charakteristisch ..., dass die Objekte der Mathematik ... an sich existieren, wie die platonischen Ideen. Mit Bezug auf diesen an sich Charakter sprechen wir von einer platonischen Ontologie."

P. Lorenzen, der seinerseits auf dem Standpunkt der konstruktiven Mathematik steht und für die Ausbildung dieses Standpunkts mit dem Konzept seiner operativen Fassung der Logik und Mathematik einen wesentlichen Beitrag geleistet hat, erklärt über den fraglichen Gegensatz (24.2; 9):

"Es ist .... heute leicht einzusehen, warum der Kampf nicht entschieden werden konnte: Zwischen konstruktiver und axiomatischer Mengenlehre besteht gar kein Widerspruch. Man kann ja beides tun."

Natürlich ist hier der logische Widerspruch gemeint; und die konstruktive Mengenlehre basiert auf der Voraussetzung, Mengen als Abstrakta äquivalenter Formeln einzuführen, wobei die Abstraktion nicht mehr - wie in der deskriptiven Mathematik - als Äquivalenzklassenbildung, sondern als Einschränkung des Sprachgebrauchs verstanden wird.

Der mögliche Wunsch nach einer "allgemeinverbindlichen Rangordnung der Auffassungen" ist also in der zeitgenössischen Mathematik zu Grabe getragen. Dies bedeutet sicher auch, dass die Aufnahmebereitschaft für die dialektische Lösung des philosophischen Grundlagenproblems der Mathematik gewachsen ist.

Indem man nämlich den "Wettbewerb der Möglichkeiten" anerkennt, erkennt man den - philosophisch gesprochen - erscheinenden Widerspruch von Deskription und Konstruktion an. Und das Faktum des Gegensatzes ist allemal die erste Bedingung für den theoretischen Zugriff im Sinne der materialistischen Dialektik. Dieser ist durch folgenden Ansatz bestimmt:

(1) Der Gegensatz von Ding und Tat ist nicht logischer Art.

Daher ist es nicht so, dass wenigstens einer der theoretischen Opponenten ein falsches Konzept vertreten muss. Betrachtet man Tätigkeiten als die Gegenstände seiner Untersuchung, so wird dadurch die Existenz von Dingen, von Objekten oder Subjekten keineswegs ausgeschlossen, sondern vielmehr als sekundär betrachtet, d.h., dass die fraglichen Objekte als Produkte des Tuns gelten.

Setzt man umgekehrt Objekte im Sinne des deskriptiven Zugriffs als an sich bestehend voraus, so wird ebenfalls nicht die Tätigkeit ausgeschlossen, sondern als sekundäre Erscheinungsform betrachtet. So etwa werden mengentheoretisch die mathematischen Operationen als spezielle Relationen rekonstruiert und diese wieder als spezielle Mengen. Dadurch erscheinen die Tätigkeiten als Dinge von besonderer Art.
Während so der deskriptive Standpunkt die Tat verdinglicht, fasst der konstruktive Standpunkt die Dinge als Erzeugnisse der Tat auf. Man kann also sagen, dass beide Standpunkte den Zusammenhang von Ding und Tat auf entgegengesetzte Weisen ordnen.

(2) Der Gegensatz von Ding und Tat ist als solcher kein mathematisches Phänomen, weil Dinge und Tätigkeiten an sich nicht mathematische Gegenstände sind.

Originär ist dieser Gegensatz vielmehr kategorialer Natur, d.h. ein Phänomen, dessen Bestimmung eigene Sache der Dialektik, also der philosophischen Methode ist. Wir finden ihn vor, wenn wir mit Bezug auf elementare Ausdrücke der Umgangssprache ("Fritz / läuft", "Luise / schwimmt" usw.) die Frage nach der Bedeutung der darin verwendeten Subjekte und Prädikate beantworten.

Es liegt also dem Gegensatz von konstruktiver und deskriptiver Fassung des mathematischen Erkennens ein philosophischer Sachverhalt zugrunde. Demnach ist die Frage nach den philosophischen Problemen der Mathematik objektiv begründet, also der Versuch zur Bestimmung der philosophischen Basis der Mathematik der Versuch zur Aufklärung eines realen Sachverhalts.

(3) Der Gegensatz von Ding und Tat, sofern er in der Philosophie selbst nicht durch die Einführung der materialistischen Dialektik aufgehoben wird, zeigt sich im vormarxistischen Denken als ein typischer metaphysischer Gegensatz, der von Marx in der folgenden Weise charakterisiert werden ist (26.3; 5):

"Der Hauptmangel alles bisherigen Materialismus ... ist, dass der Gegenstand, die Wirklichkeit, Sinnlichkeit nur unter der Form des Objekts oder der Anschauung gefasst wird; nicht aber als sinnlich menschliche Tätigkeit, Praxis; nicht subjektiv.
Daher die tätige Seite abstrakt im Gegensatz zu dem Materialismus von dem Idealismus - der natürlich die wirkliche, sinnliche Tätigkeit als solche nicht kennt - entwickelt."

Bei dieser Charakterisierung in der 1. Feuerbach-These hat Marx für den Materialismus vor-

nehmlich Feuerbach und die französische Aufklärung, für den Idealismus speziell die klassische deutsche Philosophie in der Version Fichtes, Schellings und Hegels im Auge.
Ungeachtet dieses besonderen Blickwinkels können wir jedoch sagen, dass der Inhalt der 1. Feuerbach-These genau die hier formulierte Sicht im Streit um die Grundlegung der Mathematik zum Ausdruck bringt. Sie ist daher auch für das auszubildende Konzept der philosophischen Begründung der Mathematik auf dem Standpunkt der marxistisch-leninistischen Philosophie - nach Auffassung des Autors - von fundamentaler Bedeutung.

Das nämlich, was Marx als "Hauptmangel" des alten Materialismus - Fassung der Wirklichkeit allein unter der Form bzw. Kategorie des Objekts - und als Hauptmangel des entgegengesetzten Idealismus - Fassung der Wirklichkeit allein unter der Form bzw. Kategorie der Tätigkeit - ausspricht, haben wir als wesentlichen Grund des Streits um die wesentliche Erscheinung mathematischen Erkennens angegeben.
Der "Hauptmangel" der vormarxistischen Philosophie ist damit als unvermeidlicher Ausdruck der Selbstdetermination der Mathematik erklärt!

(4) Die Legitimation dieser Erklärung, die hier als, wie man sagen kann, hypothetisches Fundament zur Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik angenommen wird (als das besondere Vor-Urteil, die spezielle Vorentscheidung unserer Darstellung), kann nur über eine ausgebildete Theorie der philosophischen Basis der Mathematik gegeben werden.
Hypothetische Annahmen können sich nicht selbst begründen, sondern allein über die Erklärungspotenz der auf ihrer Grundlage ausgebildeten Theorien. Wer also unsere Annahme nicht akzeptieren will, muss eine andere Vorentscheidung annehmen und zeigen, dass auf solcher Basis die philosophischen Fragen der Mathematik besser gelöst werden können.

Wir schließen diese Möglichkeit durch unsere Annahme keineswegs aus. sondern betrachten sie als eine andere Art, die Frage nach den philosophischen Grundlagen der Mathematik zu beantworten. Und da jeder besondere Entwurf niemals etwas anderes sein kann als eben eine solche Art (in der Gattung philosophischen Arbeitens), so versteht es sich, dass die Existenz verschiedener Arten (derselben Gattung) eine indiskutable Voraussetzung für das hier darzustellende Konzept ist.
Es versteht sich aber ebenso, dass unser Konzept, angedeutet in (30.1; 167-188) und in (30.2; 25-46), möglichst konsistent auszubilden ist und daher in sich logisch entgegengesetzte hypothetische Grundannahmen ausschließen muss.

(5) Wenn wir von der Voraussetzung ausgehen, dass der kategoriale Gegensatz von Ding und Tat mathematisch nicht auflösbar ist, dass also die Mathematik deskriptiv das Tun als spezielles Ding oder konstruktiv das Ding als spezielles Produkt vorstellen muss, so kann man natürlich schlicht mit der Frage entgegnen:
Wer eigentlich zwingt die Mathematik, mit jenem Gegensatz zu leben?

Ist es nicht denkbar, dass der Gegensatz von konstruktiver und deskriptiver Mathematik irgendwann mathematisch aufgehoben wird, so dass wir dann doch mit genau einer wesentlichen Erscheinung dieser Wissenschaft, mit genau einer mathematischen Grundlegung der Mathematik versehen sind?

Ich halte diese Denkmöglichkeit für unrealisierbar aus dem einfachen Grunde, weil die Mathematik wesentlich an die Bedingung der Eindeutigkeit der Begriffsbildung gebunden ist. Die Einheit von Ding und Tat ist aber, wie physikalisch auch das Komplementaritätsprinzip Bohrs zum Ausdruck bringt, nicht eindeutig bestimmbar:

Fixieren wir einen Gegenstand i.e.S. (z.B. in der Zuschreibung eines gewissen Lagewerts), so ist sein Verhalten im wesentlichen unbestimmt; determinieren wir umgekehrt sein Verhalten (z.B. in der Zuschreibung eines gewissen Impulswerts), so ist er selbst nicht mehr bestimmt angebbar. Allgemein gesprochen:
Ein Gegenstand i.e.S. wird eindeutig bestimmt, indem sein Verhalten, seine Wechselwirkung mit der Umgebung ausgeschlossen und also nicht mehr eindeutig bestimmbar wird; das Verhalten eines Gegenstands wird eindeutig bestimmt, indem seine Wechselwirkung mit der Umgebung fixiert wird, worin gerade der Zusammenhang mit anderen Gegenständen unterstellt ist und daher die eindeutige Determination eines Individuums nicht mehr gegeben werden kann.

Wollte man also den theoretisch erscheinenden Gegensatz von Ding und Tat auflösen, müsste man auf das Prinzip der Eindeutigkeit der Determination verzichten. Damit aber verzichtete man auf eine notwendige Bedingung mathematischen Erkennens!

(6) Es ist wohl ohne Schwierigkeiten einsichtig, dass die Annahme von der mathematischen Unauflösbarkeit des kategorialen Gegensatzes zwischen Ding und Tat einen einfachen Zusammenhang zwischen der materialistischen Dialektik und der Mathematik einschließt, den nämlich, dass die Dialektik methodisch genau dort einsetzt, wo die Mathematik aufhört, dass umgekehrt die Mathematik genau dort einsetzt, wo die Aufhebung des dialektischen Widerspruchs zum erscheinenden oder äußerlichen Gegensatz fortgeschritten ist. (Wir kommen auf diesen wichtigen Sachverhalt zurück.)

Mit anderen Worten: der Übergang von der Philosophie zur Mathematik wird durch einen qualitativen Sprung des Erkennens vermittelt, in dem die, mit Marx zu sprechen (26.5; 109), in der Dialektik unterstellten Widersprüche eine "Form" gefunden haben, "worin sie sich bewegen können", in dem also die Widersprüche zur Erscheinungsform äußerlicher Gegensätze aufgehoben sind.
Ist dieser Punkt der Widerspruchsentwicklung erreicht, kann Mathematik beginnen. Der dialektische Widerspruch aber selbst ist kein mathematischer Gegenstand!

Alle gegenteiligen Behauptungen operieren nur mit Versicherungen und bemerkenswert diffusen Vorstellungen über die Natur der Dialektik. Wenn wir z.B. lesen (11; 129):

"Gäbe es Widersprüche, die prinzipiell nicht mit Hilfe mathematischer Begriffe widerzuspiegeln wären, würde man ... eine unüberschreitbare Grenze zwischen naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Methoden postulieren und letztlich den 'Bruch' zwischen Philosophie und Naturwissenschaften theoretisch begründen. Damit ist ... die Behauptung unsinnig, mit Hilfe mathematischer Methoden ließe sich die Dialektik ... nicht widerspiegeln"

so werden wir vergebens im fraglichen Kontext auch nur ein einziges Beispiel vorgeführt finden, in dem uns die mathematische Darstellung des dialektischen Widerspruchs - in welcher Spezialisierung auch immer - beweiskräftig vorgestellt wird. Statt dessen lesen wir 28 Seiten zuvor (ebd.; 101):

"Dialektische Widersprüche ... machen sich durch das Auftreten logischer Antinomien innerhalb der Theorien bemerkbar."

An logischen Antinomien also, d.h. an Ausdrücken der Form $H(x) \Leftrightarrow \neg H(x)$, sollen wir eben die Widersprüche "bemerken", die 28 Seiten später als mit mathematischen Begriffen widerspiegelungsfähig behauptet werden!

Angesichts solcher Konfusion bemerken wir vielmehr keinerlei Grund, von unserer Annahme

Abstand zu nehmen, dass dialektische Widersprüche keine mathematischen Gegenstände seien, Dialektik daher nicht mathematisiert werden könne. Damit wird keine "unüberschreitbare Grenze zwischen naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Methoden"postuliert, sondern lediglich behauptet: Es gibt wenigstens einen nichtmathematischen Gegenstand!

Und im übrigen wird angenommen, dass logische Antinomien nicht dialektische Widersprüche bemerkbar machen, sondern den Umstand, dass in den fraglichen Theorien wenigstens eine falsche Annahme enthalten sein muss.

Ist es nun richtig, dass der kategoriale Gegensatz von Ding und Tat, von Objekt und Prozess, von Sache und Verhalten dem Gegensatz von deskriptiver und konstruktiver Mathematik zugrunde liegt, so müssen sich auch die klassischen philosophischen Probleme der Mathematik unter Voraussetzung dieser Grundannahme lösen lassen.
Dass sie gegeben sind, wird uns ja eben durch den Gegensatz von Deskription und Konstruktion bestätigt; und - so Hegel (14.5; 101) -

"das Wesen der Philosophie besteht darin, die Gegensätze des Verstandes zu lösen."

Die Tatsache, dass der deskriptive Standpunkt in der Mathematik von der übergroßen Mehrheit der Mathematiker gegenwärtig geteilt wird, spielt für die philosophische Problemlage als solche gar keine Rolle. In der Wissenschaft wird Wahrheit nicht durch Mehrheitsentscheidungen sozusagen "demokratisch" fundiert.

Vielmehr stellen solche Entscheidungen nichts sonst als das aktuelle Kräfteverhältnis zwischen den Vertretern verschiedener Konzeptionen dar. Man kann sich daher in der Philosophie nicht durch den Umstand beunruhigen lassen, dass die konstruktive Mathematik in der Gegenwart nur von relativ wenigen Mathematikern betrieben wird - hauptsächlich in der bekannten Moskauer Schule (A. A. Markow jun., B. A. Kuschner, I. D. Saslawski, N. A. Shanin, G. S. Zeitin u. a.), in der Holländischen Schule (L. E. J. Brouwer, A. Heyting, B. van Rootselaar, G. F. C. Griss u. a.) und in der Erlanger Schule (P. Lorenzen), aber auch in Beiträgen anderer bekannter Fachleute der Mathematik.

Soviel jedenfalls ist sicher, dass die Klärung der Probleme einer konstruktiven Fundierung der Mathematik in der Gegenwart in schneller Entwicklung begriffen ist, und dass man in der Untersuchung des philosophischen Fundaments der Mathematik den Deskriptionismus ebenso wie den Konstruktivismus als gegebene Erscheinungsweisen der mathematischen Erkenntnis vorauszusetzen hat.

3 Von der philosophischen Basis der Mathematik

Mit der für unsere Darstellung wesentlichen Feststellung des polaren Gegensatzes von axiomatischer (deskriptiver) und konstruktiver Mathematik haben wir dasjenige Phänomen angegeben, das - nach Auffassung des Verfassers - entscheidender Ausdruck für die reale Existenz der philosophischen Probleme der Mathematik ist.
Wir erfahren damit nämlich, dass die Philosophie nicht äußerlich in die Mathematik hineingetragen wird, sondern als eigentümliches Problem aus der Entwicklung des mathematischen Erkennens selbst hervorgeht. Genauer gesagt: indem die Entwicklung der Mathematik das Phänomen des Gegensatzes von Axiomatizismus und Konstruktivismus erzeugt, stellt sie das dar, was man in der klassischen deutschen Philosophie einen "Gegensatz des Verstandes" (im Unterschied zur Vernunft!) genannt hat, den zu lösen als Aufgabe des "begreifenden Denkens" bzw. der dialektisch bestimmten Vernunft seit dieser Epoche der philosophischen Entwicklung zu betrachten ist.

Die Lösung selbst besteht dann natürlich nicht darin, jenen Gegensatz als reinen Schein nachzuweisen, d.h. als eine subjektive Illusion, der gewisse Mathematiker unterliegen. Sie besteht also nicht darin, das eine Extrem gegen das andere für die "einzig wahre" Erscheinung der Mathematik auszugeben.
Sie besteht vielmehr darin, den fraglichen Gegensatz selbst als eine bestimmte Lösung des immanenten Widerspruchs der lebendigen, sich entwickelnden Mathematik zu begreifen. Der Gegensatz von Axiomatizismus und Konstruktivismus wird mithin durch die Philosophie nicht aus der Welt geschafft, sondern als Erscheinungsform des wesentlichen Widerspruchs der Mathematik erklärt.

Indem wir nun den Gegensatz von deskriptiver und konstruktiver Mathematik als Phänomen der Lösung des Widerspruchs von Objekt und Prozess, von Sache und Verhalten ausgesprochen haben, ist zugleich unterstellt, dass die Theorie der philosophischen Probleme der Mathematik wesentlich darin bestehen muss, jene Lösung im einzelnen zu demonstrieren, womit die Notwendigkeit des Gegensatzes von Axiomatizismus und Konstruktivismus deutlich gemacht wird.

Im Rahmen einer solchen Theorie müssen auch die klassischen philosophischen Fragen der Mathematik ihre Beantwortung linden. Im folgenden werden wir zunächst diese Fragen vorstellen.

3.1 Klassische philosophische Probleme der Mathematik

Angesichts der vorliegenden Literatur ist es nicht ganz einfach, diejenigen Fragen der Mathematik, die man mit Recht ihre "philosophischen Probleme" nennen kann, erschöpfend anzugeben. Das ist natürlich schlicht deshalb der Fall, weil die Subsumtion einer Frage unter den Begriff des philosophischen Problems eben davon abhängt, welche Auffassung ein bestimmter Autor über die Natur der Philosophie hat. Immer ist dies auch davon abhängig, unter welcher philosophischen Sicht er die Mathematik sieht.

Ist z.B. jemand der Meinung, dass die Mathematik ein Produkt des "freien schöpferischen Denkens" sei und keine Verbindung zur objektiven Realität habe, so wird ihm unweigerlich das sogenannte Anwendungsproblem als wichtige philosophische Frage erscheinen, also das Problem, wie es zu erklären sei, dass ein von der objektiven Realität voraussetzungsgemäß unabhängiges Denkprodukt so ausgezeichnet in der physikalischen und sonstigen empirischen Erkenntnis seine Angepasstheit an die objektive Realität demonstriert.

Ist man umgekehrt der Meinung, dass die Mathematik in irgendeiner Weise als Reflexion,

als Widerspiegelung der objektiven Realität zu verstehen sei, so wird jenes Anwendungsproblem philosophisch erheblich an Bedeutung verlieren. Denn die Existenz von Spiegeln bzw. von Bildern begründet jedenfalls die Anwendbarkeit derselben auf das, was sie spiegeln bzw. abbilden.
Die Anwendung erscheint real in der Präparation der wirklichen Gegenstände so, dass sie nach den fraglichen Eigenschaften näherungsweise mit den Bildern übereinstimmen, dass also beide im wesentlichen als Modelle derselben Theorie gelten können. Die einfachste Art der Präparation ist dabei die Aneignung natürlicher Sachverhalte, die zugleich Trennung derselben von ihrer Umwelt ist.
Nur in solchen Determinationen können Sachverhalte Bildern gleich sein oder selbst als Bilder fungieren.

Man kann nun feststellen, dass unabhängig von den besonderen Positionen der verschiedenen Autoren wenigstens drei klassische Probleme invariant zum Bestand der philosophischen Basis der Mathematik gehören. Es sind dies das Existenzproblem, das Unendlichkeitsproblem und das Wahrheitsproblem. Betrachten wir sie ein wenig genauer.

3.1.1 Das Existenzproblem

Zum Verständnis des Existenzproblems ist zunächst daran zu erinnern, dass wir bei der Bildung wissenschaftlicher Theorien generelle Urteile gebrauchen. Sie sind es, die den Theorien die Fähigkeit verleihen, Voraussagen zu formulieren. Und Voraussagen, Prognosen wiederum sind es, die unser praktisches Handeln theoretisch zu orientieren vermögen.

Wir gehen von der Erzeugung singulärer zur Bildung genereller Urteile über, indem wir nicht mehr von vereinzelten Gegenständen, sondern von Gegenstandsgesamtheiten als von den Subjekten unseres Urteilens Gebrauch machen. Sie nennt man Gattungen.
In der organischen Natur werden Gattungen auch "biologische Arten" genannt; sie werden durch Populationen dargestellt. Individuen, die derselben Gattung angehören, sind untereinander durch gemeinsame Eigenschaften verbunden. Finden wir Eigenschaften, durch die sich Individuen derselben Gattung voneinander unterscheiden, so sprechen wir von "artspezifischen Besonderheiten", kurz von Arten.

Betrachten wir Gattungen allein extensional, d.h. nach ihrem Umfang, so nennen wir sie Klassen und stellen fest:
Arten können als Teile von Gattungen betrachtet werden, stellen extensional also Teil- oder Unterklassen von Klassen dar. Eine Gattung hat höchstens so viele Arten wie Individuen; sie hat mindestens zwei Arten, weil wenigstens zwei Individuen erforderlich sind, um eine Gattung zu konstituieren.

Die Bestimmung der Arten einer Gattung nennt man auch "Klassifikation" der Individuen dieser Gattung. Ist diese Klassifikation erschöpfend, d.h. liefert sie eine Zerlegung der Gattung in Arten so, dass für jedes Individuum der Gattung entschieden ist, zu welcher Art es gehört, und kein Individuum zugleich unterschiedlichen Arten angehört, sind also die Arten paarweise disjunkt und wenigstens durch ein Individuum real vertreten, so heißt die Klassifikation eine "Zerlegung" der Gattung.
Der Übergang von der Betrachtung der Individuen der Gattung zur Betrachtung ihrer Arten heißt "Abstraktion".

Die abstrakte Betrachtung einer Art bedeutet also, dass wir die Unterschiede der Individuen derselben Art als unwesentlich beiseite lassen bzw. beim Austausch von artgleichen Individuen

nur das in Rechnung stellen, was darin invariant bleibt.
Auf solche Weise liefert uns die Abstraktion stets eine Reduktion der in einer Gattung zu untersuchenden Fälle. Marx nennt sie auch "verständig",

"sofern sie wirklich das Gemeinsame hervorhebt, fixiert und uns dabei die Wiederholung erspart." (26.4; 617)

Das durch die Abstraktion hervorgehobene Gemeinsame heißt auch das "Abstrakt-Allgemeine". Es ist nicht identisch mit dem Allgemeinen schlechthin, sondern stellt das "durch Vergleichung herausgesonderte Gemeinsame" (ebd.) dar, also das unter der Bedingung seiner Heraussonderung bestimmte Allgemeine.

Unter Voraussetzung von Gattungen bilden wir nun generelle Urteile der bekannten Art "alle Löwen sind Raubtiere", "alle Metalle sind elektrische Leiter" usw.; die Subjektterme in diesen Sätzen, "alle Löwen", "alle Metalle", sind offenbar als Zeichen für Gattungen zu verstehen; die Prädikatterme beziehen sich auf jedes Individuum solcher Gattungen.

Urteile dieser Form heißen "Universalurteile". Man drückt sie symbolisch kurz durch Formeln der Gestalt $\bigwedge_x P(x)$ aus, worin der Alloperator $\bigwedge_x$ daran erinnert, dass er für Gattungen mit endlich vielen Mitgliedern als Resultat der Generalisierung der logischen Konjunktion gedeutet werden kann:

$$\bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a2) \wedge ... \wedge P(a_n)$$

In dieser Schreibweise ist die besondere Kennzeichnung der Gattung unterlassen, auf deren Individuenzeichen sich die Variable x bezieht.

Man wird nun aus logischen Gründen anerkennen, dass etwa das Universalurteil "alle Metalle sind elektrische Leiter" mit dem Urteil "es gibt kein Metall, das nicht elektrischer Leiter ist" gleichwertig ist - sofern man überhaupt Urteile als wertbestimmt voraussetzt, wie das in der deskriptiven oder sogenannten "klassischen" Logik der Fall ist.

Die gültige Behauptung, dass kein Metall nicht ein elektrischer Leiter ist, stellt ein negatives Existenzurteil dar. Ein positives Existenzurteil liefert der Ausdruck, "es gibt ein Metall, das die Eigenschaft hat, Kupfer zu sein". Existenzurteile drückt man symbolisch kurz durch Formeln der Gestalt $\bigvee_x P(x)$ aus, worin der Existenzoperator $\bigvee_x$ daran erinnert, dass er für Gattungen mit endlich vielen Angehörigen als Produkt der Generalisierung der logischen Adjunktion gedeutet werden kann:

$$\bigvee_x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$$

Universal- und Existenzurteile sind die beiden Arten genereller Urteile, deren logischer Zusammenhang zuerst von Aristoteles untersucht worden ist - eine Leistung, die überhaupt die theoretische Logik als Wissenschaft begründet hat.
Unter Voraussetzung der deskriptiven ("klassischen") Logik wird dieser Zusammenhang heute wie folgt ausgedrückt:

$$\bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow \neg \bigvee_x \neg P(x) \qquad , \qquad \neg \bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg P(x) \tag{1}$$

$$\bigwedge_x \neg P(x) \Leftrightarrow \neg \bigvee_x P(x) \qquad , \qquad \neg \bigwedge_x \neg P(x) \Leftrightarrow \bigvee_x P(x) \tag{2}$$

Positive Universalurteile sind also demgemäß die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Annahme negativer Existenzurteile; negative Universalurteile sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Annahme positiver Existenzurteile.

Demgemäß ist die Existenz einer Art in einer Gattung begründet, wenn die Annahme widerlegt ist, dass alle Gattungsmitglieder die fragliche Beschaffenheit haben bzw. nicht haben.

Seine spezifisch mathematische Natur nimmt das Existenzproblem nun mit Bezug auf den Umstand an, dass wir mit der einfachsten mathematischen Gattung, der der natürlichen Zahlen, eine Gesamtheit von unendlich vielen Individuen vor uns haben. Es erscheint dann in der Frage: Können wir aus der Voraussetzung der Widerlegung eines Universalurteils mit Recht auf die Existenz eines entsprechenden Individuums mit der fraglichen Artbestimmtheit schließen?

Vom Standpunkt der deskriptiven Auffassung des mathematischen Erkennens ist die gestellte Frage positiv zu beantworten.
Da mit diesem Standpunkt nämlich jene Gattung von Dingen, auf die man sich bei der Untersuchung bezieht, als vollständig vorgegebenes Objekt betrachtet wird, als ein, wie man sagen kann, abgeschlossenes System (mit unendlich vielen Elementen), so muss die Negation eines Universalurteils als hinreichende Bedingung für die Position des entsprechenden Existenzurteils betrachtet werden.

Daher gelten die quantorenlogischen Feststellungen

$$\neg \bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x \neg P(x) \qquad \text{und} \qquad \neg \bigwedge_x \neg P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x) \tag{1a,2a}$$

als logische Gesetze der Theorienproduktion in der deskriptiven Mathematik. Die ontologische Rechtfertigung dieser Geltung besteht in dem einfachen Hinweis darauf, dass unter Voraussetzung der Widerlegung der Annahme, dass eine gewisse Eigenschaft allen Gattungsmitgliedern zukommt, die Existenz von Gattungsmitgliedern gesichert ist, welche das (klassische) Negat der fraglichen Eigenschaft besitzen.

Vom Standpunkt der konstruktiven Auffassung des mathematischen Erkennens ist die gestellte Frage negativ zu beantworten.
Da mit diesem Standpunkt nämlich jene Gattung von Dingen, auf die man sich bei der Untersuchung bezieht, als unvollständig vorgegebenes Objekt betrachtet wird, als ein, wie man sagen kann, offenes System (mit aktuell endlich vielen Elementen), so kann man aus der Negation eines Universalurteils nicht auf die Position des fraglichen Existenzurteils schließen.

Daher können die quantorenlogischen Feststellungen (1a) und (2a) nicht als logische Gesetze der Theorienproduktion in der konstruktiven Mathematik gelten; sie müssen vielmehr als nichtkonstruktive Existenzbeweise aus der konstruktiven Logik ausgeschlossen werden. Als eigentlich konstruktiver Existenzbeweis muss vielmehr die logische Feststellung

$$P(a) \Rightarrow \bigvee_x P(x)$$

gelten. Die ontologische Rechtfertigung für den Ausschluss der logischen Implikationen (1a) und (2a) aus der konstruktiven Logik besteht in dem einfachen Hinweis darauf, dass unter der Voraussetzung der Gattung als eines offenen Systems die Gesamtheit ihrer Arten ja genau nicht als vorgegeben unterstellt ist, mithin aus der Widerlegung der Annahme, dass eine gewisse Eigenschaft allen Gattungsmitgliedern zukommt, noch keineswegs auf die gültige Behauptung geschlossen werden kann, dass damit auch positiv eine Art von der Beschaffenheit gegeben ist, dass sie das entsprechende Negat darstellt.

Was ist der philosophische und dialektische Hintergrund dieser Entgegensetzung von deskriptiver und konstruktiver Existenzauffassung?

Zunächst bemerkt man wohl deutlich, dass das mathematische Existenzproblem keineswegs unmittelbar mit der philosophischen Grundfrage identisch ist: Sowohl die deskriptive wie die konstruktive Mathematik setzen unmissverständlich die objektive Existenz von Gattungen voraus.
Insofern stimmen beide mit der elementaren materialistischen Position überein, dass Erkennen nur an Erkenntnisgegenständen realisierbar ist, dass mithin der Tätigkeit des Erkennens unabhängig vom Erkenntnissubjekt Objekte vorgegeben sind, auf die sich das Erkennen richtet.

Für die Mathematik ist - im Unterschied zu den empirischen Wissenschaften - charakteristisch, dass ihre Objekte Gattungen als solche sind. Nicht eine spezielle Gattung steht für die Mathematik zur Debatte, sondern jede Gattung - und zwar insofern sie von jeder anderen Gattung nicht unterschieden wird.
Mit anderen Worten: die Mathematik ist reine Gattungswissenschaft, liefert Wissen der abstrakten Gattung (des abstrakten Allgemeinen), also Wissen unter der Bedingung der Abstraktion von der Verschiedenheit der natürlichen Gattungen.

Wir bemerken, dass diese Feststellung auch über den Zusammenhang von Mathematik und Ideologie von fundierender Bedeutung ist:
Ist nämlich der Gegenstand, das Objekt der Mathematik, das, was an Gattungen invariant bleibt, wenn wir sie für das Erkennen gegeneinander ersetzen, so ist umgekehrt der Träger, das Subjekt der Mathematik, der Mensch, unabhängig von der Besonderheit seiner Artbestimmtheit, also der Mensch allein als Repräsentant der abstrakten menschlichen Gattung.
Dies heißt insbesondere: mathematische Erkenntnisse hängen in ihrer Geltung nicht von den empirischen Besonderheiten der historisch auftretenden Klassen ab!

In diesem Sinne sind sie klassenunabhängig. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass die wirkliche mathematische Produktion im strengen Sinne klassenunabhängig ist. Hier ist im Gegenteil anzunehmen, dass Klassen, deren Existenz von der Ausbildung mathematischer Fähigkeiten abhängt, für die Entwicklung der mathematischen Arbeitsfähigkeit einen weit größeren Aufwand betreiben werden, als Klassen, deren Existenz von solcher Potenz nur peripher tangiert wird.

Man hat hierfür die beste Anschauung, wenn man den feudalen Lehnsherrn mit dem handelskapitalistischen Kaufmann vergleicht: Während ersterer sein Einkommen vermittels politischer, juristischer usw. Gewalt und in Abhängigkeit von der zufälligen Gunst der Natur in der Landwirtschaft erlangt, gewinnt es letzterer über den Austausch von Mobiliareigentum.

Während ersterer daher auf Gott und sein Schwert vertraut, muss letzterer rechnen, um zu leben. Es ist demgemäß auch kein Zufall, dass es gerade die oberitalienischen Kaufleute des 13. Jahrhunderts waren, die in Europa erneut die Algebra ins Leben riefen (derartiges ist von den Kreuzrittern nicht zu berichten).
Man verwechsle also nicht die Klassenunabhängigkeit der Geltung mathematischen Wissens mit einer vermeintlichen Klassenunabhängigkeit der Produktion mathematischen Wissens (die ernsthaft nicht behauptet werden kann).

Wir halten fest: Unabhängig von der Unterschiedenheit zwischen konstruktiver und deskriptiver Mathematik wird durch beide (polar entgegengesetzten) Arten des mathematischen Erkennens die materialistische Voraussetzung von der objektiv-realen Existenz mathematischer Gegenstände gemacht. Die wirklichen Naturdinge sind dabei mathematischer Natur, insofern sie einfach gattungsbestimmte Individuen, Individuen einer Gattung sind. Der Unterschied zwischen der deskriptiven und der konstruktiven Auffassung tritt ein, sobald die Frage nach der

Bestimmtheit der Gattungsexistenz gestellt wird: Sind Gattungen vollständig oder unvollständig gegeben?

Man könnte zunächst meinen, dass solche Alternative eine etwas scholastische Fragestellung reflektiere. Allein, sobald wir bedenken, dass Gattungen ja die Subjekte von Evolutionen sind, dass mithin die Gesamtheit ihrer Individuen im empirischen Sinne in der Tat nicht vorgegeben sein kann, wird der Sinn jener Alternative deutlich:
Stellen wir uns nämlich auf den Standpunkt, gattungsbestimmte Individuen nur als "wirklich gegeben" anzusehen, wenn wir sie zeigen können, so nehmen wir auch - mit der konstruktiven Auffassung - an, dass die Gattungen selbst allein im Sinne der potentiellen Realisierbarkeit bestehen.

Gehen wir umgekehrt von der Gattungsbestimmtheit aus, die wir ja beschreiben können, und unterstellen wir die plausible Annahme, dass jedes mögliche (künftige) Gattungsmitglied im Rahmen jener Gattungsbestimmtheit verbleibt, so können wir durchaus - mit der deskriptiven Auffassung - unterstellen, über alle Individuen einer Gattung zu reden, für das Denken also von der aktualen Realisiertheit einer Gattung Gebrauch zu machen.

Man kann diesen Gegensatz in den Auffassungen auch anders zum Ausdruck bringen: Während wir deskriptiv die Gattung dominant als fertiges Objekt voraussetzen, unterstellen wir konstruktiv dieselbe Gattung dominant als unvollendbaren Prozess einer fortlaufenden Erzeugung neuer Arten. (Die kleinste Art wird dabei durch die Eigenschaften genau eines Individuums der Gattung dargestellt, die größte durch jene Eigenschaften, die alle Individuen der Gattung gemeinsam haben.)

Während wir also deskriptiv die Gattung gegenständlich oder dinglich auffassen, behandeln wir sie konstruktiv wesentlich als Verhalten, als Tätigkeit zur Erzeugung neuer Gattungsmitglieder!
In diesem Gegensatz ist - nach der Auffassung des Autors - der Unterschied von deskriptiver (axiomatischer) und konstruktiver Mathematik letzten Endes begründet - und daher im eigentlichen Sinne unaufhebbar.

Die im Sinne der Dialektik konkrete oder wirkliche Gattung ist stets beides, Objekt wie Prozess, Gegenstand wie Verhalten, Sache wie Tun. So ist sie Widerspruch gemäß der Widerspruchsauffassung der Dialektik. Indem aber die Mathematik auf der Eindeutigkeit ihrer Determinationen bestehen muss, kann sie nicht umhin, diesen Widerspruch (Marx würde ihn den "wesentlichen Widerspruch" nennen) zur Erscheinung der polaren Entgegensetzung von konstruktiv bestimmbarem Gattungsprozess und deskriptiv bestimmbarer Gattungsstruktur aufzuheben.
Daher entsteht das mathematische Existenzproblem. Es ist also die Reflexion des aufgehobenen dialektischen Widerspruchs, der der Mathematik zugrundeliegt.

3.1.2 Das Unendlichkeitsproblem

Wir haben im Zusammenhang mit der Darstellung der gegenwärtigen Problematisierung der Mengenlehre bereits auf den Umstand aufmerksam gemacht, dass es vornehmlich die Anerkennung der aktualen Unendlichkeit ist, welche die (klassische) Mengenlehre in den Augen ihrer konstruktiven Kritiker verdächtig macht.
Sie können sich zu einer so weitgehenden Annahme nicht entschließen und verstehen daher konstruktiv das Unendliche allein potentiell. Die Annahme der Unendlichkeit als solcher wiederum steht zwischen beiden Parteien nicht zur Debatte; man ist sich durchaus einig, dass die Mathematik ganz wesentlich auf der Voraussetzung des Unendlichen basiert.

Manche Mathematiker haben sogar die Mathematik überhaupt als die Wissenschaft des Unendlichen betrachtet. Was zur Debatte steht, ist also wieder - wie im Falle des Existenzproblems - die Frage nach der Bestimmtheit, aber nun eben des Unendlichen:
Ist es mit der deskriptiven Auffassung als aktuales Unendliches oder mit der konstruktiven vielmehr als potentielles Unendliches zu denken?

Wieder sieht man, dass diese Alternative nicht mathematisch entscheidbar ist, sehr wohl aber in die Konstitutionsbedingungen des mathematischen Erkennens eingeht. Sie reflektiert daher im strikten Sinne ein philosophisches Problem der Mathematik.
Warum stellt diese Alternative ein echtes, für die Mathematik unvermeidliches philosophisches Problem dar?

1. Zunächst ist einsichtig, dass der Begriff der Unendlichkeit unmittelbar als (philosophische) Kategorie in den Erkenntnisprozess eintritt - und zwar als Gegenbestimmung zur Kategorie der Endlichkeit. Der Eintritt dieses Kategorienpaars (und alle Kategorien erscheinen in der Philosophie als solche Gegensatz- paare) erfolgt im Zusammenhang mit dem qualitativen Vergleich unter Voraussetzung der Verwendung eines Vergleichsstandards, eines sogenannten Tertium comparationis.

In Bezug auf solchen Standard wird die Akkumulation von ihm gleichartigen Gegenständen gewiss zu jedem bestimmten Zeitpunkt zu einer Gesamtheit, zu einer Klasse geführt haben, deren Mitglieder man vollkommen übersehen kann. Zugleich liefert die Gattungserfahrung die Erwartung, dass jener Akkumulationsprozess fortgesetzt werden kann, dass mithin die Bestimmtheit der Anzahleigenschaft der darin gebildeten Klasse veränderbar ist.
Diese Erwartung tritt insbesondere in dem Augenblick ein, in dem es gar nicht mehr auf die artspezifischen Besonderheiten der akkumulierten Gegenstände ankommt, also z.B. in dem Augenblick, in dem man nicht mehr nur gewisse Gebrauchsobjekte ansammelt, sondern Objekte, die deren Werte darstellen.
Das ist dann der Fall, wenn die Arbeitsprodukte den Charakter von Waren annehmen, wenn sie also Gegenstände des Privataustauschs werden.

"Es gibt", sagt Aristoteles (2; 16), "eine ... Gattung von Erwerbskunst, die man vorzugsweise und mit Recht die Kunst des Gelderwerbes oder der Bereicherung bezeichnet. Sie ist schuld daran, dass man meint, es gebe für Reichtum und Besitz keinerlei Grenze."

Mit Bezug also auf die praktisch begründete Erwartung, gegebene Klassen von Objekten ohne Ende erweitern zu können, tritt die Kategorie der Unendlichkeit als Negation der Kategorie der Endlichkeit im Denken auf, wie umgekehrt die Endlichkeit gerade mit der Wahrnehmung ihrer Negation erst bewusst wird.

2. Bei der Konstituierung der elementaren mathematischen Objekte, der natürlichen Zahlen, wird die Unendlichkeit als wesentliche Eigenschaft des Erzeugungsprozesses dieser Objekte erfahren. Es handelt sich hier nicht mehr darum, dass, wie bei der Akkumulation irgendwelcher Werte (Größen), vorgegebene Bestimmtheiten überschritten werden können, sondern vielmehr darum, dass im Bildungsakt der natürlichen Zahlen prinzipiell jede vorgegebene Bestimmtheit, jedes Maß, überschreitbar ist.

Die Unendlichkeit wird nun von der bloßen Unbestimmtheit - die ionischen Griechen fassten beides noch unter dem Terminus "Apeiron" zusammen - definitiv verschieden und als positive Eigenschaft des Bildungsvorgangs erfasst, durch den die natürlichen Zahlen erzeugt werden. Dies gilt in einem solchen Maße, dass man mit H. Weyl über "den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik" durchaus sagen kann: "sie ist die Wissenschaft vom Unendlichen". (39; 89)

3. Bezüglich der Klärung des Zusammenhangs der Philosophie mit der Mathematik ist es außerordentlich wichtig zu bemerken, dass die Mathematik im Unterschied zur Philosophie die Unendlichkeit nicht kategorial, sondern - wie wir sagen wollen - analytisch fasst.
Die kategoriale Bestimmung der Unendlichkeit besteht darin, sie als Gegensatz der Endlichkeit zu fixieren. Die analytische Bestimmung der Unendlichkeit besteht darin, sie als Eigenschaft eines Vorgangs oder eines Objekts darzustellen. In solcher analytischen oder, mit Hegel zu sprechen, verständigen Fassung der Unendlichkeit, steht nicht mehr das Gegensatzverhältnis zur Endlichkeit, sondern das prädikative Verhältnis zu einem speziellen Gegenstand (Prozess oder Objekt) zur Debatte!

Das bedeutet insbesondere, dass auf diese Weise die Selbständigkeit der Unendlichkeit in Erscheinung tritt - eine Selbständigkeit, die in der kategorialen Fassung gerade ausgeschlossen ist.

4. Betrachten wir nun den grundlagentheoretischen Streit in der Mathematik über die Frage, ob wir die Unendlichkeit nun potentiell oder aktual annehmen sollen, so bemerken wir folgendes: Der mengentheoretisch denkende Mathematiker versteht seine aktuale Unendlichkeit genau genommen als Eigenschaft eines Objekts, nicht aber als Eigenschaft eines Prozesses. Um dies wahrzunehmen, haben wir nichts weiter zu beachten als die Fassungen, die in der Mengenlehre vorgestellt werden. K. Kuratowski und A. Mostowski z.B. geben folgende Formulierung des Unendlichkeitsaxioms (22; 52):

"Es existiert eine Mengenfamilie $\mathcal{A}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt: $O \in \mathcal{A}$; wenn $X \in \mathcal{A}$, so gibt es ein Element $Y \in \mathcal{A}$ derart, dass Y alle Elemente von X und die Menge X selbst enthält."

Mit dieser Existenzbehauptung ist angenommen, dass die Mengenfamilie $\mathcal{A}$ die Eigenschaft der Unendlichkeit besitzt, ist also angenommen, dass die aktuale Unendlichkeit Bestimmtheit eines Objekts ist. Im Gegensatz zu dieser mengentheoretischen Fassung der Unendlichkeit bezieht sich die konstruktive auf Prozesse. Markows oben zitierte Argumentation macht dies ganz deutlich.

Auch die sonstigen Begründungen der Ablehnung der aktualen Fassung der Unendlichkeit beziehen sich stets auf die stillschweigende Voraussetzung, mit Lorenzen zu sprechen, auf die unausgesprochene Vorentscheidung, Vorgänge als Träger der Unendlichkeit zu betrachten. Wenn H. Weyl etwa im Zusammenhang mit der Diskussion der berühmten Zenonschen Paradoxien bemerkt (39; 61):

"Wenn aber die Strecke von der Länge 1 wirklich aus unendlich vielen Teilstrecken von der Länge 1/2, 1/4, 1/8, ... als 'abgehackten' Ganzen besteht, so widerstreitet es dem Wesen des Unendlichen, des 'Unvollendbaren', dass Achilleus sie alle schließlich durchlaufen hat", so ist unmissverständlich der Lauf des Achill, also ein Prozess, als Träger der Unendlichkeit vorausgesetzt.

5. Indem wir aber feststellen, dass die aktuale Unendlichkeit als Objektbestimmung und die potentielle Unendlichkeit als Prozessbestimmung im Streit der Mathematiker unterstellt wird, so erkennen wir, dass jene Kontroverse in der Mathematik eine Reflexion, eine Widerspiegelung des im eigentlichen Sinne dialektischen Gegensatzes zwischen Produkt und Produktion, zwischen Ding und Tat, zwischen Gegenstand i.e.S. und Verhalten ist.

Wir erkennen also, dass sie wirklich einen philosophischen Grund hat. Denn der genannte Gegensatz ist als solcher unmittelbar kein mathematisches Phänomen, sondern originär von dialektischer Art und damit Gegenstand der Philosophie. Wir erfassen mithin zugleich, dass die Mathematik in der Tat von der Philosophie nicht schlechthin in analytischer Trennung gedacht werden kann, dass es also einen wirklichen Zusammenhang zwischen beiden Wissenschaften gibt, den man seinerseits zum Gegenstand der wissenschaftlichen Untersuchung machen kann.

Indem dies geschieht, wird die Theorie der philosophischen Basis der Mathematik zu erarbeiten versucht, wird die "Philosophie der Mathematik" konstituiert. Denn wenn es so ist, dass mit der jeweiligen Entscheidung für die potentielle oder aktuale Fassung der Unendlichkeit die konstruktive oder mengentheoretische Verstellung der mathematischen Erkenntnis verbunden ist, und wenn es so ist, dass diese Entscheidung auf der Vorentscheidung basiert, entweder die mathematische Tätigkeit oder das mathematische Objekt dominant als vorgegeben zu betrachten, dann ist klar, dass die Verwirklichung von Mathematik in einem auch philosophische Problemstellung ist.

6. Indem wir als den philosophischen Hintergrund der mathematischen Kontroverse um die Determination ihres Unendlichkeitsbegriffs das Verhältnis von Produktion und Produkt, von Ding und Tat identifizieren, wird deutlich, dass hier ein Gegensatz vorliegt, der unaufhebbar ist.
Aus unserer alltäglichen Arbeitserfahrung wissen wir nämlich sehr genau, dass das Vorliegen irgendeines Produkts das Ende, den Abschluss seiner Produktion bedeutet. Umgekehrt ist ganz einsichtig, dass man solange nicht vom Bestehen eines qualitativ und quantitativ bestimmbaren (vergleichbaren) Produkts sprechen kann, solange sich die Produktion desselben im Zustand der Existenz befindet.

Mit anderen Worten: das Bestehen einerseits der Produktion (der Tat) und andererseits des entsprechenden Produkts (des Dinges) schließen einander wechselseitig aus! Zugleich ist aber ebenso klar, dass beide einander auch bedingen:
Es gibt kein Produkt ohne vorgängige Produktion; und es gibt keine Produktion, die sich nicht in ihrem Produkt vergegenständlicht, verdinglicht. Ein Vorgang, der nicht zu einem gewissen Produkt führt, der sozusagen Ausschuss hervorbringt oder gar nichts Bestimmtes, ist kein Produktionsakt.

Wenngleich also die Produktion genau dann nicht existiert, wenn ihr Produkt gegeben ist, so ist doch ganz unmissverständlich das Produkt, wie man in der Philosophie seit Fichte sagt, durch die Produktion gesetzt. Die Produktion ist das Setzen ihres Produkts - oder keine Produktion! Umgekehrt ist, in der Sprache Hegels, die Produktion im Produkt aufgehoben. Das Produkt ist die Aufhebung der Produktion - oder kein Produkt!

Betrachten wir den Zusammenhang beider, d.h. die konkrete Einheit von Produktion und Produkt, von Tat und Ding, so haben wir etwas vor uns, das nicht mehr eindeutig determinierbar, bestimmbar ist, die wirkliche oder konkrete Bewegung, die gegenständliche Tätigkeit.
Indem aber die Mathematik in ihrer Realisierung von der Möglichkeit, eindeutige Determinationen auszuführen. abhängt, so ist einsichtig, dass die Trennung von Produktion und Produkt im Sinne der Entscheidung einer Alternative der Konstituierung der Mathematik zugrunde liegt. Heben wir die Produktion hervor, entscheiden wir uns für den konstruktiven Zugriff in der Mathematik. Heben wir das Produkt hervor, entscheiden wir uns, wie wir sagen müssen, für den deskriptiven Zugriff, eben für denjenigen, der mittels der axiomatischen Beschreibung Mengen in ihren Zusammenhängen mathematisch darstellt.

Die Entscheidung dieser Alternative kann nicht umgangen werden. Der Streit um die potentielle oder aktuale Fassung des Unendlichen ist daher wesentliche Erscheinung der Konstituierung mathematischen Erkennens und kein Schein auf Grund bisher noch unzureichender mathematischer Kenntnisse.
Demnach ist die Auffassung der Mathematik vom konstruktiven Gesichtspunkt einerseits, vorgestellt in den verschiedenen konstruktiven Systemen (Brouwer, Lorenzen, Markow), und vom deskriptiven Gesichtspunkt andererseits, vorgestellt in den verschiedenen axiomatischen Systemen (Zermelo-Fraenkel, v. Neumann-Bernays, Klaua), eine unvermeidliche Erscheinungsform des der Mathematik zugrundeliegenden dialektischen Widerspruchs, d.h. der konkreten Einheit des mathematischen Verhaltens mit seinen, mit den mathematischen Gegenständen.

Mit Bezug auf die weiter oben diskutierte Existenzproblematik sei noch bemerkt: Offenbar ist die Unendlichkeit klarerweise als Gattungsbestimmtheit zu betrachten. Und wenn wir Gattungen als abgeschlossene Systeme unterstellen, so unterstellen wir auch die aktuale Unendlichkeit. Setzen wir umgekehrt Gattungen als offene Systeme, als aktual unvollendete Gesamtheiten von Individuen voraus, so nehmen wir auch die potentielle Unendlichkeit als gegeben an. Damit ist einsichtig, dass Existenz- und Unendlichkeitsproblem unterschiedliche Aspekte desselben philosophischen Sachverhalts sind.

Was übrigens Hegels berühmte "wahrhafte Unendlichkeit" betrifft, so sei hier nur notiert, dass damit die Unendlichkeit eben als Gattungsbestimmtheit gemeint ist; Individuen unterliegen der Endlichkeit!

3.1.3 Das Wahrheitsproblem

Mit dem mathematischen Wahrheitsproblem treten wir in den eigentlich erkenntnistheoretischen Bereich der philosophischen Basis der Mathematik ein.
Wie nämlich das Schöne den Inbegriff des Werts der künstlerischen Produktion ausmacht und das Gute den Inbegriff des Werts sozialen Verhaltens in bestimmten Gemeinschaften, so ist das Wahre Inbegriff des Werts der Erkenntnisarbeit. Im Wahrheitsproblem kulminiert daher alle philosophische Erkenntnislehre.

Um die Spezifik des mathematischen Wahrheitsproblems zu erfassen, erinnern wir zunächst an die aristotelische Wahrheitskonzeption:
Nach dieser ist ein Satz wahr, wenn der vom ihm ausgedrückte Sachverhalt in der objektiven Realität besteht, wenn also der durch den Satz vorgestellte Sachverhalt mit dem realen Sachverhalt übereinstimmt.

Beschränken wir uns nun in der Betrachtung realer Sachverhalte (die man häufig auch "Tatsachen" nennt) auf solche, die durch empirische Bestimmungsleistungen - durch Experiment - aufgewiesen werden, so ist einleuchtend, dass mit solcher Reduktion die Anwendung des Wahrheitsbegriffs auf mathematische Sätze problematisch wird.
Denn nach Voraussetzung gilt uns die Mathematik gerade als nicht- empirische Wissenschaft, als eine Disziplin, deren Sätze nicht durch Experimente auf ihre Gültigkeit oder Wahrheit entschieden werden.

Es war zuerst Platon, der diesen Umstand erkannte, indem er von den Mathematikern erklärte (29; 267),

"dass sie sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer von diesen reden, während den eigentlichen Gegenstand ihres Denkens nicht diese bilden, sondern jene, deren bloße Abbilder diese sind. Denn das Quadrat an sich ist es und die Diagonale an sich, um derentwillen sie ihre Erörterungen anstellen, nicht aber dasjenige, welches sie durch Zeichnung entwerfen, ...; eben die Figuren selbst, die sie bildend oder zeichnend herstellen, ..., dienen ihnen als Bilder, mit deren Hilfe sie eben das zu erkennen suchen, was niemand auf andere Weise erkennen kann als durch den denkenden Verstand."

Die geometrischen Objekte, auf die sich Platon in dieser entscheidenden Argumentation bezieht, gelten also mit solcher Sicht als Bilder, als Kopien von Originalen, die selbst keine reale, sondern ausschließlich eine ideale Existenz besitzen. Die etwa an eine Tafel gezeichneten Kreise, Dreiecke usw. müssen so als Realisationen von Idealen betrachtet werden, die ihrerseits die eigentlich theoretischen Gegenstände der Geometrie sind.
Indem diese Sicht des Zusammenhangs zwischen den theoretischen und den sinnlich-gegenständlichen Objekten der Mathematik als erkenntnistheoretische Auffassung der Philosophie überhaupt angenommen wird, wird auch der objektive Idealismus proklamiert: Die materielle Realität gilt als Kopie der idealen Welt, die ihrerseits an sich existiert und als solche Objekt des rationalen Verstands ist.

Es sei hervorgehoben, dass der objektive Idealismus, insofern seine erkenntnistheoretischen Wurzeln zur Debatte stehen, ganz wesentlich durch die Natur der mathematischen Erkenntnis veranlasst worden ist.
Es waren die Griechen, die in der klassischen Antike die reine oder theoretische Mathematik hervorbrachten und genau damit theoretische Gegenstände konstituierten, die unmittelbar nicht mehr durch empirische Wahrnehmung aufgewiesen werden konnten.

Die naive empiristische Erkenntnisauffassung war damit philosophisch ausgeschlossen. Die reine Mathematik zeigte und zeigt, dass wir über Gegenstände denken, die nicht mehr sinnlich-gegenständlich vorgestellt werden können. Sie bilden vielmehr das Denkbare; und die sinnlich-objektive Realität ist eben nicht dasselbe wie das Denkbare!

Die Tatsache, dass sinnlich-gegenständliche Realitäten, z.B. technische Konstruktionen nach geometrischen Normen, als annähernde Modelle oder - wie Platon sagt - als Bilder des Denkbaren erzeugt werden können, kann deshalb nicht als Grund für die Übertragung der aristotelischen Wahrheitskonzeption auf die Bestimmung der mathematischen Wahrheit angenommen werden, weil voraussetzungsgemäß solche Modelle die fraglichen mathematischen Sachverhalte nur ungenau wiedergeben.

Es ist bekannt, dass das Problem der mathematischen Wahrheit seit den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts mit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien in verschärfter Weise zur Debatte steht. Zwar ist auch zuvor klar gewesen, dass die Punkte und Geraden der euklidischen Geometrie mathematische Gegenstände darstellen, die man in der sinnlich-gegenständlichen Natur nicht auffinden kann.
Aber immerhin haben alle Vermessungsarbeiten niemals Hinweise ergeben, dass die räumliche Struktur von der in der euklidischen Geometrie beschriebenen abweichen könne.

So war bis zur Entstehung der nichteuklidischen Geometrie wenigstens die empiristische Illusion möglich, dass die Urteile der Geometrie Euklids die räumlichen Verhältnisse der wahrnehmbaren Realität richtig darstellen, also wahr auf Grund ihrer Übereinstimmung mit den entsprechenden Sachverhalten in der Natur seien. Mit der Existenz der hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Geometrien aber ist solche Illusion ausgeschlossen. Die Frage also, ob die Winkelsumme im Dreieck kleiner, gleich oder größer als $180°$ ist bzw. ob zu einer Geraden in einer Ebene durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt unendlich viele, genau eine oder gar keine

Parallele besteht, ist durch Messung nicht entscheidbar.

In diesem Zusammenhang macht übrigens H. Wussing neben anderen mit Recht darauf aufmerksam, dass die von Gauß geleitete Triangulation im Königreich Hannover mit Bezug auf die Vermessung des Dreiecks zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohen Hagen sicher nicht darauf abzielte, eine Entscheidung bezüglich der natürlichen Geltung der euklidischen Geometrie zu erreichen (41; 70-71):

"Gauß' erster Biograph, Sartorius von Waltershausen, hat die Sache so hingestellt, als habe Gauß insgeheim diese Triangulation als großangelegtes Experiment auf die Existenz der nichteuklidischen Geometrie aufgefasst; nach neueren Forschungen erscheint jedoch diese von einem Nichtmathematiker vorgebrachte Deutung als ziemlich unwahrscheinlich: Gauß benutzte zum Fehlerausgleich gerade eben den Satz von der Winkelsumme im Dreieck und wusste vermutlich überdies genau, dass sich eventuelle Abweichungen erst bei Dreiecken in astronomischen Dimensionen finden lassen könnten."

Mit Bezug auf den Umstand, dass die mathematischen Objekte nicht sinnlich-gegenständlicher Natur sind und daher mathematische Wahrheiten nicht experimentell fundiert sein können, wird das Wahrheitsproblem der Mathematik noch komplettiert durch den anderen Umstand, dass die mathematisierten Erkenntnissysteme ihre Sicherheit hinsichtlich der Gültigkeit der in ihnen formulierten Feststellungen nicht unwesentlich eben der Mathematik verdanken. In diesem Zusammenhang stellt A. Einstein denn auch fest (9; 119):

"An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so viel beunruhigt hat. Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt.
Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?"

Und Einstein antwortet:

"Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."

Natürlich bezieht sich der Physiker Einstein hierbei auf die physikalische Verwendung des Terminus "Wirklichkeit", d.h. auf die Voraussetzung, empirisch bestimmbare Sachverhalte "wirklich" zu nennen. Unterstellen wir daher die mathematischen Sätze als nicht-empirische Ausdrücke, so reduziert sich Einsteins Urteil auf die Feststellung, dass nicht-empirische Sätze empirische Sachverhalte nicht sicher darstellen, während das, was sie sicher darstellen, nicht-empirische Sachverhalte sind.
In dieser Formulierung erscheint Einsteins Auffassung gewiss weit weniger pessimistisch als in ihrer originären Fassung.

Man kann nun das mathematische Wahrheitsproblem in der Manier Alexanders lösen, der den gordischen Knoten bekanntlich mit dem Schwerte zerhieb. Dies tut man etwa, wenn man kurz entschlossen das sogenannte Zweiwertigkeitsprinzip für die Sprachlichen Ausdrücke von Sachverhalten akzeptiert.
Für die Mathematik ist dann angenommen:

Jede mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch! Oder: es gibt keine mathematische Aussage, die sowohl wahr wie falsch ist. Man erkennt in dieser Annahme natürlich sofort, dass das klassische Tertium non datur der formalen Logik als geltendes logisches Urteil ak-

zeptiert werden ist bzw; der logische Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch in klassischer (deskriptiver) Version.
Und wie Alexander grundlos gehandelt hat, so wird hier durchaus grundlos eine axiomatische Anforderung unterstellt. Fragt man nämlich jene, die das Zweiwertigkeitsprinzip als geltendes Urteil betrachten, warum sie dies wohl tun, so erhält man in der Regel nichts als Versicherungen etwa in der Art, dass dies Prinzip halt "für uns alle verbindlich ist" (36; 10). Denn die Begründung einer Verbindlichkeit mit der Versicherung, sie sei verbindlich, ist allemal nichtssagend.

Die mit der Voraussetzung der Existenz von Wahrheitswerten operierende Annahme des Zweiwertigkeitsprinzips ist nun charakteristisch für die logische Auffassung des Denkens, das der deskriptiven Mathematik zugrunde liegt. Werden deren Theorien axiomatisch formuliert, so werden die entsprechenden Grundsätze (Axiome) ohne Beweis als wahr unterstellt.
Die Wahrheit der übrigen Sätze (Theoreme) solcher Theorien wird dann mit den Mitteln des logischen Schließens gesichert: Sie sind wahr, wenn sie logische Folgerungen aus den Axiomen sind.

Für die logische Folgebeziehung (Implikation) wird angenommen:
Eine Ausdrucksform H_1 impliziert eine Ausdrucksform H_2 genau dann, wenn die Subjunktion $H_1 \to H_2$ bei jeder Interpretation der zugrunde liegenden Sprache eine allgemeingültige Ausdrucksverknüpfung liefert.
Ist also der logische Wert von $H_1 \to H_2$ bei jeder Belegung der in H_1 und H_2 auftretenden freien Variablen dem Werte "wahr" gleich, so folgt H_2 logisch aus $H_1 : H_1 \Rightarrow H_2$ genau dann, wenn $v(H_1 \to H_2) = 1$.

Entsprechend gilt für die logische Äquivalenz: $H_1 \Leftrightarrow H_2$ genau dann, wenn $v(H_1 \leftrightarrow H_2) = 1$, wobei die Verknüpfung $H_1 \leftrightarrow H_2$ "Interjunktion" genannt sei.

Man beachte in diesem Zusammenhang die Unterschiede zwischen Subjunktion und Implikation sowie zwischen Interjunktion und Äquivalenz: Subjunktion und Interjunktion sind logische Operationen; Implikation und Äquivalenz sind dagegen Relationen. Mit den Operationen bilden wir zusammengesetzte logische Terme; die fraglichen Relationen werden durch die Prädikate in logischen Ausdrücken bezeichnet.

Die deskriptive Mathematik unterstellt logisch, wie bemerkt, die Wertemenge $\{0, 1\}$. Betrachten wir nun die konstruktive Mathematik, so bemerken wir eine wesentlich andere Lösung des Wahrheitsproblems.
Vom konstruktiven Standpunkt aus wird nämlich genaue jene "Verbindlichkeit" bestritten, die im Rahmen des deskriptiven Ansatzes dem Zweiwertigkeitsprinzip zugeschrieben wird. Zum Verständnis dieser kritischen Haltung betrachten wir die berühmte Goldbachsche Vermutung:

Es gibt keine gerade Zahl, die größer als 2 ist und nicht als Summe zweier Primzahlen darstellbar!

Da wir unendlich viele gerade Zahlen berücksichtigen müssen, so ist ausgeschlossen, dass wir sie faktisch alle daraufhin prüfen können, ob unter ihnen nicht vielleicht doch ein Individuum auftritt, das sich nicht als Summe zweier Primzahlen zeigen lässt.
Experimentieren wir, so können wir etwa fortlaufend notieren: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11, ...; doch ist es bisher nicht gelungen, aus diesen und weiteren Gleichungen ein Gesetz abzulesen, nach dem die Ersetzung von geraden Zahlen durch additive Terme zweier Primzahlen generell realisiert werden kann.

Wir haben somit weder einen Beweis noch eine Widerlegung der Goldbachschen Vermutung. Was aber soll es unter dieser Bedingung heißen, von ihr zu behaupten, sie sei entweder wahr oder falsch? Ist es nicht zutreffender, festzustellen, dass wir nicht wissen, ob diese Vermutung wahr oder falsch ist?

Mit solcher Fragestellung aber wird die Wahrheit nicht mehr als an sich gegebene Wertemenge unterstellt, sondern als Eigenschaft von Sätzen, die bewiesen sind. Die Beweise selbst erfolgen gemäß einem vorgegebenen System von Ableitungsregeln, dessen Annahme von der Erfahrung in der mathematischen Theorienbildung abhängig ist.
Die logische Implikation bedeutet damit für das konstruktive Denken den Umstand, dass eine Konsequenz aus ihrem Antezedens relativ zu einer unterstellten Gesamtheit von Ableitungsregeln in der Tat ableitbar ist. Weil konstruktiv die logischen Operationen, die Satzverknüpfungen, wegen der Nichtannahme der Voraussetzung, dass die Menge $\{0, 1\}$ existiert, nicht auf Wahrheitsfunktionen reduziert werden können, eben deswegen kann konstruktiv eine Implikation $A \Rightarrow B$ nicht als Ausdruck verstanden werden, der durch die Wertgleichung $v(A) \rightarrow v(B) = 1$ äquivalent wiedergegeben wird.

Als Beispiel einer Realisation des Ableitbarkeitsbegriffs, wie er durch die konstruktive Denkweise akzeptiert werden kann, stellen wir den Kalkül des "natürlichen Schließens" vor, der 1934 von Gentzen zuerst formuliert werden ist.
In ihm bedeutet das Zeichen "$\Rightarrow$" nun dasselbe wie "ist ableitbar aus".

$$X_n \Rightarrow X_1, X_2, ..., X_n \quad \text{mit} \quad n \geq 1 \tag{1}$$
$$X \wedge Y \Rightarrow X, Y \tag{2}$$
$$X \Rightarrow X \wedge Y \tag{3}$$
$$X \vee Y \Rightarrow X \tag{4}$$
$$X \vee Y \Rightarrow Y \tag{5}$$
$$Y \Rightarrow X, X \rightarrow Y \tag{6}$$
$$Y \Rightarrow X, \neg X \tag{7}$$

Mit diesen sieben Regeln hat man ein spezielles System zur Ableitung von Theoremen aus akzeptierten Feststellungen, von dem gewiss zu sagen ist, dass es von einiger Plausibilität sei. Man ist aber keineswegs in irgendeiner Art von Notwendigkeit gerade an dieses System gebunden.

Zum Beispiel kann man sich durchaus entschließen, etwa die Regel (7) zu streichen, die besagt, dass man aus der Behauptung logischer Gegensätze im selben Satzsystem eine beliebige Behauptung ableiten kann. Man erhält dann den sogenannten Minimalkalkül, der 1936 von I. Johannson in der Tat aufgestellt worden ist.
Man kann sich aber ebenso entschließen, als zusätzliche Regel $X \Rightarrow \neg\neg X$ aufzunehmen, um so beim klassischen Kalkül zu landen.

Wie man sieht, ist die konstruktive Orientierung auf die Ableitbarkeit von Theoremen vermittels eines vorgegebenen Regelsystems nicht eindeutig bestimmt.
Wenn also die Schwäche der deskriptiven Position darin besteht, für Behauptungen, die weder bewiesen noch widerlegt sind, dennoch anzunehmen, dass sie "an sich" wahr oder falsch seien, so besteht die Schwäche der konstruktiven Position darin, über die akzeptablen Ableitungsregeln keine vollständige oder abschließende Auskunft geben zu können.

Das schließt zugleich ein, dass sich im Konstruktivismus unterschiedliche Varianten je nachdem ergeben, welche Ableitungsregeln als annehmbar betrachtet werden. Diese Varianten reichen bis zu der Unterstellung hin, nur negationsfreie Behauptungen als echte mathematische Sachverhaltsausdrücke anzunehmen.

Will man den Gegensatz zwischen der deskriptiven und der konstruktiven Denkweise in der Wahrheitsfrage auf einen Nenner bringen, so dürfte beider Verhältnis zur Kontradiktion dafür bedeutungsvoll sein.
Konstruktivismus wie Deskriptionismus sind einig in der Feststellung, dass der arithmetische Ausdruck $1 = 2$ eine Kontradiktion oder Absurdität ist. Er stellt über voraussetzungsgemäß verschiedene (diverse) Werte fest, dass sie gleichwertig seien, womit er falsch ist.

Man bemerkt wohl, dass der Satz $1 = 2$ durchaus keinen logischen Widerspruch darstellt. Einen solchen haben wir erst mit der Satzverbindung $1 = 2 \wedge 1 \neq 2$, in welcher "$1 \neq 2$"voraussetzungsgemäß wahr ist. Die Kontradiktion $1 = 2$ ist vielmehr ein elementarer (analytischer) Satz; und Elementarsätze stellen als solche keine logischen Eigenschaften dar. Man hat also eine Kontradiktion von einem logischen Widerspruch gut zu unterscheiden!

Da nun der Konstruktivismus wesentlich durch die Ablehnung der logischen Wertabstraktion in der Wahrheitsfrage charakterisiert ist, so muss er Kontradiktionen als singuläre Fälle in Bezug auf die von ihm gebildeten Theorien betrachten, sie - wie man sagt - als Standardabsurditäten behandeln.
Er kann daher mit einer Subjunktion $X \rightarrow 1 = 2$ die Feststellung verbinden, dass sie dasselbe wie die Negation $\neg X$ besagt. Insbesondere kann mit einer beliebigen Kontradiktion Kt auch festgestellt werden, dass $(X \rightarrow Kt) \rightarrow Kt \Rightarrow X$ eine konstruktiv akzeptable Ableitungsregel ist.

Es ist aber einsichtig, dass man nicht umgekehrt X aus $(X \rightarrow Kt) \rightarrow Kt$ ableiten kann. Denn haben wir aus einer Annahme X eine Kontradiktion abgeleitet, mithin die Gültigkeit von $\neg X$ bewiesen, so würde die Möglichkeit der Ableitung erneut einer Kontradiktion aus diesem Resultat eben dies Resultat als Absurdität erweisen.
Man kann daher konstruktiv die logische Negation der Negation nur als notwendige, nicht aber als hinreichende Bedingung einer Position betrachten.

Vom Standpunkt der deskriptiven Denkweise ist eine Kontradiktion nichts anderes als ein Repräsentant des Wertes 0. Damit ist aber einsichtig, dass für sie vielmehr $(X \rightarrow 0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow X$ gelten muss, also die logische Negation der Negation notwendig und hinreichend die entsprechende Position bedingt.
Denn, wie man sich einfach überzeugt, die Ausdrücke auf beiden Seiten der logischen Äquivalenz sind in der Tat wertverlaufsgleich. Offensichtlich besteht also der wesentliche Unterschied der deskriptiven Denkweise gegenüber der konstruktiven bezüglich des Wahrheitsproblems in dem Umstand, dass der Deskriptionismus Kontradiktionen als Elemente einer gegebenen Menge betrachtet, in der die Abstraktion nach der Totalrelation als realisiert gilt und mithin die Falschheit als das durch beliebige Kontradiktionen repräsentierte Abstraktum.

Gleiches ist mit Bezug auf den Wert der Wahrheit zu sagen, nur dass an die Stelle der Kontradiktionen hier vielmehr die (analytischen) Identitäten treten, d.h. jene Ausdrücke, in denen über voraussetzungsgemäß gleiche Werte die Gleichwertigkeit und über voraussetzungsgemäß verschiedene Werte die Ungleichwertigkeit ausgesagt wird.
Diese Auffassung ist plausibel, wenn man bedenkt, dass die Mathematik ja in der Tat niemals etwas anderes ausdrückt als Wertverhältnisse - wie einfach oder kompliziert sie immer gestaltet sein mögen. Sie nimmt daher - im Unterschied zur faktischen Wahrheit in den empirischen

Wissenschaften - ihren Ausgang, wie Engels zutreffend erkannt hat, von der "abstrakten Identität" (10.3; 484), die sie konstruktiv als wahren Ausdruck und deskriptiv als Repräsentanten des Wahrheitswerts 1 betrachtet.

Nicht insofern überhaupt Wertverhältnisse betrachtet werden, tritt der Unterschied zwischen konstruktiver und deskriptiver Mathematik in der Wahrheitsfrage ein, sondern insofern die Frage strittig ist, ob solche Verhältnisse Konstruktionsprodukte oder an sich existierende Gesetze in einer (idealen) Welt sind. Sind sie Konstruktionsresultate, so hängt ihre Existenz von den effektiv realisierten Konstruktionen ab, und von einer gegebenen Menge etwa aller Kontradiktionen kann nicht gesprochen werden.
Sind sie umgekehrt Objekte verständiger Deskription, so müssen sie gegenständlich vorgegeben sein, und mithin ist der Gebrauch der Wahrheitswerte sinnvoll.

Die philosophische Basis des mathematischen Wahrheitsproblems ist daher mit der Beantwortung der Frage zu bestimmen, wie denn die von der Mathematik charakterisierten Werte zustande kommen. Diese Frage hat natürlich außerhalb mathematischer Konstruktionsleistung nur einen Sinn, wenn man philosophisch die Wissenschaft überhaupt als spezielle Produktion, als "allgemeine Arbeit" (Marx) voraussetzt.

3.2 Mathematik und Arbeit

Nachdem wir den klassischen Bestand der philosophischen Probleme der Mathematik vorgestellt haben, wollen wir uns nunmehr der Frage zuwenden, unter welchen theoretischen Voraussetzungen sie in der marxistisch-leninistischen Philosophie lösbar werden.
Zu diesem Zweck heben wir nochmals hervor, dass die Probleme der Existenz, der Unendlichkeit und der Wahrheit erst mit Bezug auf den Gegensatz der deskriptiven und konstruktiven Denkweise wirklich auch Probleme sind.
Stellen wir uns auf den Standpunkt allein einer Denkweise, so sind natürlich die eigenen Annahmen im Rahmen des eigenen Konzepts durchaus problemlos.

Erst wenn wir die Mathematik unter positiver Anerkennung beider Denkweisen betrachten, entsteht der eigentlich problematische Charakter der Annahmen über die Existenz, Unendlichkeit und Wahrheit. Denn nun haben wir es mit polaren Extremen in diesen Annahmen zu tun. Die klassischen philosophischen Fragen der Mathematik verweisen mithin auf den polaren Gegensatz von Axiomatizismus und Konstruktivismus als das Grundproblem der "Philosophie der Mathematik".

Einen Gegensatz in der Erscheinung aber als Problem zu betrachten, heißt, seine Existenz als fragwürdig, wenigstens als erklärungsbedürftig anzusehen. Gerade solches Bedürfnis hat die Philosophie zu befriedigen. Um wieder zu zitieren:

Das "Wesen der Philosophie besteht darin", sagt Hegel (14.5; 101), "die Gegensätze des Verstandes zu lösen".

Doch, wie schon bemerkt, entsteht die entsprechende Lösung nicht dadurch, dass man das eine der polaren Extreme gegen das andere als die "wahre" Erscheinungsweise des mathematischen Erkennens behauptet.
Denn offensichtlich sind Deskriptionismus und Konstruktivismus nicht logische Extreme, also Gegensätze innerhalb derselben Theorie. Indem sie sich als Setzungen verschiedener Grundannahmen darstellen, demonstrieren sie vielmehr eine Art von Gegensätzlichkeit, die etwas anderes ausdrückt als rein subjektive Fehler in der Prämissenannahme für ein und dieselbe

Theorie.

Die fragliche Lösung der "Gegensätze des Verstandes"kann daher nicht in der Liquidation eines der polaren Extreme zugunsten des anderen bestehen (solche Vorgehensweise wäre das Gegenteil von Dialektik, wäre beste Metaphysik!).

Sie kann aber auch nicht - im Sinne der Philosophie Hegels - darin bestehen, die beiden Gegensätze des Axiomatizismus und des Konstruktivismus als "Entzweiung" allein in der Sphäre der Erscheinung zu deuten, gegen die die "wahre Einheit" in der Sphäre des Wesens bestehe.

"Hegels Hauptfehler", sagt Marx (26.1; 295), "besteht darin, dass er den Widerspruch der Erscheinung als Einheit im Wesen, in der Idee fasst, während er allerdings ein Tieferes zu seinem Wesen hat, nämlich einen wesentlichen Widerspruch, ..."

Was würde zu geschehen haben, wenn wir das philosophische Grundproblem der Mathematik im Sinne Hegels beantworten wollten?
Wir müssten die kontradiktorische Annahme der Identität von Produktion und Produkt theoretisch voraussetzen, also unterstellen, dass die Regeln mathematischen Konstruierens genau dasselbe seien wie die Struktureigenschaften deskriptiv charakterisierter mathematischer Systeme.
Wir müssten, kurz gesagt, die Identität von Regel- und Axiomensystemen behaupten.

Tatsächlich wird solche Annahme durchaus suggeriert, wenn man die konstruktiven Regelsysteme als "verschleierte Axiomensysteme" angibt oder auch umgekehrt verfährt. Allein, wir haben gesehen, dass gewisse deskriptive Annahmen konstruktiv inakzeptabel sein müssen, wenn die konstruktive Denkweise konsistent erhalten bleiben soll.
Hegels Weg ist daher nicht gangbar.

Der "Widerspruch der Erscheinung" lässt sich nicht dadurch lösen, dass man ihn auf eine mystische (und kontradiktorische) "Einheit im Wesen" zu reduzieren versucht.
Er ist nur lösbar, insofern er selbst als die Lösung des ihm zugrunde liegenden "wesentlichen Widerspruchs" begriffen wird.

Diesen wesentlichen oder dialektischen Widerspruch haben wir weiter oben bereits als die konkrete Einheit einer Sache mit ihrem Verhalten allgemein charakterisiert. Sie ist wirklich in jeder gegenständlichen Bewegung; die Bewegung ist die Existenz des so gemeinten Widerspruchs, wie er selbst das Wesen der Bewegung ist.
Für die Mathematik bedeutet dieser Ansatz insbesondere, dass die Erklärung (Begründung) des polaren Gegensatzes von Konstruktivismus und Deskriptionismus die theoretische Voraussetzung erfordert, die Mathematik selbst als einen speziellen Arbeitsprozess zu unterstellen.

Für die marxistisch-leninistische Philosophie wird also die Mathematik zum philosophischen Gegenstand, wenn sie als Produktionsvorgang gedacht wird! Weder die im mathematischen Tun befolgten Konstruktionsregeln allein noch allein die in der mathematischen Fachsprache formulierten Theorien als solche liefern uns die Mathematik als philosophischen Vorwurf.
Es ist vielmehr ihr lebendiges Dasein als Erzeugungsakt der mathematischen Erkenntnisse, das wir voraussetzen, wenn wir marxistisch-leninistisch die philosophische Basis der Mathematik zu bestimmen versuchen.

In einem anderen Zusammenhang hat Marx diese Sicht mit Bezug auf die klassische bürgerliche Nationalökonomie wie folgt deutlich gemacht (26.2; 513):

"Die Nationalökonomie verbirgt die Entfremdung in dem Wesen der Arbeit dadurch, dass sie nicht das unmittelbare Verhältnis zwischen dem Arbeiter (der Arbeit) und der Produktion betrachtet. ... Das unmittelbare Verhältnis der Arbeit zu ihren Produkten ist das Verhältnis des Arbeiters zu den Gegenständen seiner Produktion. Der Verhältnis des Vermögenden zu den Gegenständen der Produktion und zu ihr selbst ist nur eine Konsequenz dieses ersten Verhältnisses. Und bestätigt es."

Ersetzen wir die Nationalökonomie in diesem Zusammenhang - durch die Mathematik, so besagt die formulierte Sicht eben, dass wir die Mathematik philosophisch im Sinne des Marxismus-Leninismus betrachten, wenn wir sie als konkrete Einheit der Mathematiker mit den Gegenständen ihrer Erkenntnisproduktion betrachten.
Darin verhalten wir uns in erster Linie nicht als Vermögende, d.h. als Besitzer einer Gesamtheit mathematischer Theorien, als Eigentümer mathematischer Fähigkeiten und Erkenntnisse, sondern als Betrachter eben des mathematischen Produktionsprozesses.

Genau mit dieser Sicht aber wird deutlich, dass der Gegensatz von Axiomatizismus und Konstruktivismus eine Realisation des ursprünglicheren Gegensatzes von subjektiver mathematischer Fähigkeit und objektiver mathematischer Beschaffenheit der Realität sein muss. Indem nämlich alle Produktion mit der Verwirklichung der Produktionsfähigkeiten des Subjekts zugleich die Vergegenständlichung objektiver Möglichkeiten durch Umbildung der unabhängig vom Subjekt vorgegebenen äußeren Sachverhalte beinhaltet, so schließt jede Produktion die konkrete Einheit des Verhaltens und der Sache ein, wodurch umgekehrt eben die Unterscheidung beider Momente realisierbar wird.

Und es ist diese Unterscheidung, die bezügliche der mathematischen Produktion als Gegensatz von Konstruktivismus und Deskriptionismus in Erscheinung tritt. Während wir vermittels des Konstruktivismus wesentlich die effektiv realisierte mathematische Arbeitsfähigkeit bestimmen, charakterisieren wir vermittels des Axiomatizismus vielmehr die (ideale) Welt der Produkte des mathematischen Erkennens.

Um diesen Ansatz genauer zu begründen, müssen wir zunächst kurz auf den marxistisch-leninistischen Begriff der Wissenschaft eingehen. Es ist nämlich logisch einsichtig, dass die Auffassung der Mathematik als einer besonderen Art von Arbeit legitimiert ist, wenn die Wissenschaft überhaupt als Arbeit aufgefasst wird.
Genau dies ist für den Marxismus-Leninismus der Fall.

3.2.1 Wissenschaft als allgemeine Arbeit

Im dritten Band seines "Kapital" erklärt Marx sozusagen im Vorbeigehen anlässlich der Analyse der Ökonomie durch Erfindungen den Unterschied zwischen allgemeiner und gemeinschaftlicher Arbeit (26.6; 125-126):

"Allgemeine Arbeit ist alle wissenschaftliche Arbeit, alle Entdeckung, alle Erfindung. Sie ist bedingt teils durch Kooperation mit Lebenden, teils durch Benutzung der Arbeiten früherer. Gemeinschaftliche Arbeit unterstellt die unmittelbare Kooperation der Individuen."

Interessieren wir uns hierbei nur für Marx' Feststellung über die Wissenschaft, so wird zunächst zu bemerken sein, dass mit ihr jede wissenschaftliche Tätigkeit als "allgemeine Arbeit" charakterisiert wird.
Es bleibt darin unmittelbar offen, ob umgekehrt auch die allgemeine Arbeit als Wissenschaft zu verstehen sei oder aber ob es Arten der allgemeinen Arbeit geben möge, die nicht auch die Natur der Wissenschaft besitzen.

Die Interpretation der zitierten Marxschen Feststellung ist also zugegebenermaßen strittig: Behaupten wir, dass jede Art der allgemeinen Arbeit auch Wissenschaft ist, so liefert uns Marx' Charakterisierung im genauen Sinne der klassischen Definitionslehre eine Definition des Begriffs der Wissenschaft, nämlich "Wissenschaft $=_{\text{df}}$ allgemeine Arbeit".
Nehmen wir umgekehrt an, dass nicht jede Art der allgemeinen Arbeit auch Wissenschaft ist, so haben wir natürlich mit jener Charakterisierung keine Definition, sicher aber ein wichtiges Merkmal der wissenschaftlichen Tätigkeit.
Diese Sicht der Marxschen Auffassung ist neuerdings von H. Laitko einer ausführlichen Untersuchung zugeführt worden (23). Wir halten uns im folgenden an die Deutung des Marxschen Satzes als Definition des Wissenschaftsbegriffs.

Eine Definition ist in dem Maße verständlich und handhabbar, in dem ihr Definiens verstanden wird. Was also besagt der Terminus "allgemeine Arbeit"?
Im Sinne der klassischen Definitionslehre wird mit dem Worte "Arbeit" die Gattungsbestimmtheit der Wissenschaft, mit dem Worte "allgemein" die artspezifische Besonderheit derselben zum Ausdruck gebracht.

Zum Verständnis des Gebrauchs des Terminus "Arbeit" ist zu bemerken, dass er hier die konkrete Arbeit bezeichnet, d.h. den aktuellen Prozess, in dem die subjektiven Arbeitsbedingungen (die Arbeitsfähigkeiten der Subjekte) effektiv auf die objektiven Arbeitsbedingungen (Arbeitsmittel und -gegenstände) angewandt werden.
Arbeitssubjekte sind dabei stets Gemeinschaften; der Träger der Arbeitsfähigkeit ist also immer ein kollektives Subjekt (ein arbeitender Robinson ist ein Phantasiegebilde). Wird nicht aktuell die Umbildung von Naturgegenständen mit Hilfe von Arbeitsmitteln zu Gebrauchswerten vorgenommen, so existiert keine konkrete Arbeit. Es existieren dann nur - voneinander getrennt - Arbeitsfähigkeiten der Subjekte einerseits, vergegenständlichte Arbeitsfähigkeiten in Gestalt der Arbeitsprodukte andererseits.

Vergleicht man beide miteinander in Bezug auf die Frage, ob die Arbeitsprodukte ebensoviel (oder mehr oder weniger) konsumierbare, vergegenständlichte Arbeitsfähigkeit darstellen wie von den Arbeitenden aufgewandt worden ist, so gelangt man zur Bildung des Begriffs der abstrakten Arbeit.
Sie ist das verdinglichte und dadurch determinierte gesellschaftliche Arbeitsvermögen, das im Zyklus von Produktion und Konsumtion ausgegeben (entäußert) und wieder aufgenommen (zurückgenommen) wird, sich also in diesem Zyklus erhält.

Marx nennt es nach der philosophischen Tradition die "Substanz" der ökonomischen Werte (26.5; 42), wobei die Werte selbst Teile dieser Substanz sind, die man addieren kann und deren Summe gerade die Größe der Wertsubstanz darstellt.

Die abstrakte Arbeit ist also nicht einfach das Arbeitsvermögen an sich, sondern das realisierte und damit seine Reproduktion sichernde gesellschaftliche Arbeitsvermögen. Arbeitsvermögen, das ausgegeben worden ist, ohne zu konsumierbaren Produkten geführt zu haben, geht nicht in die Bestimmung der abstrakten Arbeit ein. Es stellt Arbeitsverschleiß dar.
In diesem Zusammenhang ist einsichtig, dass das ökonomische Interesse i darauf gerichtet sein muss, den Arbeitsverschleiß (realisiert etwa im Ausschuss) so gering wie möglich zu halten. Demzufolge ist die ökonomische Tätigkeit unabdingbar an die Kalkulation der abstrakten Arbeit gebunden - gleichgültig welche speziellen gesellschaftlichen Verhältnisse vorliegen. Und man versteht, dass diese Kalkulationsleistung eine der vornehmlichen Quellen für die Entfaltung des mathematischen Erkennens ist.

Die Berechnung des Gesamtwerts einer Produktion aus ihren elementaren Werten ist schon eine Setzung des mathematischen Tuns.

Fragen wir nun nach der Bedeutung des Terminus "allgemein"- im Definiens "allgemeine Arbeit": Wann ist konkrete Arbeit allgemeine Arbeit?
Das ist der Fall, wenn Produkte erzeugt werden, die durch Theorien bestimmte Modelle sind. Unter dem Terminus "Theorie" sei hierbei die denkbar schwächste Anforderung verstanden, die man machen kann, nämlich eine Gesamtheit von Sätzen, von denen wenigstens einige wahr sein mögen, also Urteile bilden.
Diejenigen Gegenstände (oder Systeme), in bezug auf die die Urteile der Theorien gelten, heißen deren "Modelle".

Bei solcher Begriffsbildung können wir sagen: allgemeine Arbeit ist Modellproduktion! Sie ist demnach jene Arbeit, die das objektive Allgemeine unserem Zugriff verfügbar macht. Modelle sind stets Darstellungen von Allgemeinem; oder ein Gegenstand fungiert als Modell, wenn er etwas Allgemeines darstellt (dasselbe modelliert), das durch eine zugehörige Theorie bestimmt wird.
Naturgegenstände sind nicht als solche Modelle, sondern werden dies vermittels ihres Gebrauchs als Vertreter interessierender Eigenschaften oder Eigenschaftszusammenhänge. In solchem Gebrauch erfolgt eine Reduktion der unerschöpflich vielen Beschaffenheiten natürlicher Sachverhalte auf genau jene, die uns im wissenschaftlichen Zugriff interessieren. Es ist diese Reduktion, durch die aus dem wirklichen Gegenstand das Modell wird.

Als Modell ist der Gegenstand sozusagen zum Vertreter allein eines Ausschnitts aus der Mannigfaltigkeit seiner eigenen Eigenschaften geworden.
Indem wir die materielle Produktion als Gebrauchswerterzeugung und die allgemeine Arbeit als Modellerzeugung betrachten, ist beider Zusammenhang einfach zu fixieren: Sobald wir Gebrauchswerte gerade nicht verbrauchen, sondern - z.B. wegen ihrer besonders gelungenen Beschaffenheit - als Exempel und Lehrbeispiele für die heranwachsende Generation von neuen Produzenten verwenden, setzen wir die allgemeine Arbeit. Sobald wir solche Exempel zur Untersuchung weiterer Zusammenhänge nutzen, realisieren wir allgemeine Arbeit.

Umgekehrt ist die materielle Produktion auch als Reproduktion derjenigen Modelle zu verstehen, die von der Wissenschaft erzeugt worden sind, d.h. als massenweise Anfertigung von Kopien, die ihrerseits nun als Gebrauchswerte im ökonomischen Sinne fungieren. Mit Bezug auf eine gegebene Kopie heißt das vorausgesetzte Modell auch "Original"; ein Original ist also ein ursprüngliches Modell, eine Kopie ist eine Reproduktion oder Reduplikation eines Originals. Originale und ihre Kopien sind gemeinsam Modelle der zugehörigen Theorie. Demgemäß besteht wissenschaftstheoretisch das Problem der Überführung von Erkenntnissen (Erfindungen und Entdeckungen) in die materielle Produktion darin, Originale auf ökonomische Weise durch entsprechende Kopien zu reproduzieren.

Es ist erkenntnistheoretisch äußerst wichtig, die natürlichen Sachverhalte nicht an sich als Originale zu betrachten. Indem sie nämlich in ihre Umgebung eingebettet sind und mit dieser wechselwirken, so realisieren sie einen unerschöpflichen Zusammenhang. Ein Original aber repräsentiert eine bestimmte Eigenschaft bzw. eine endliche Mannigfaltigkeit von Eigenschaften. Es ist ein Bild ausgewählter Eigenschaften und kann dies nur sein als isolierter Sachverhalt. Die Nichtisoliertheit des natürlichen Sachverhalts unterscheidet diesen vom Original als dem isolierten Sachverhalt. Das Original ist so der erzeugte Spiegel, das gebildete Abbild für gewisse Eigenschaften, die im wirklichen Verhalten auftreten, dieses aber nicht erschöpfen.

Erst im Verhältnis der Kopie zum Original tritt der bekannte Umstand ein, in dem ein bestimmter Sachverhalt durch einfache Reproduktion wiedergegeben wird, und der jenes Verhältnis darstellt, das in der Metaphysik überhaupt als Widerspiegelungsbeziehung vorgestellt wird.
Hier hat man aber gut zu beachten, dass die Kopie als Abbild des Originals als des "Urbilds" einen bereits determinierten Sachverhalt wiedergibt. Da nun, wie Spinoza sagt, alle Determination (Bestimmung) Negation (Verneinung) ist, so stellt der determinierte Sachverhalt, das Original, eben nicht dasselbe dar, was der indeterminierte, der nicht bestimmte oder natürliche Sachverhalt wirklich ist.
Er stellt aber auch nicht das reine Gegenteil desselben dar, sondern fungiert, wie bemerkt, als Vorstellungsmittel einer Auswahl von Eigenschaften des natürlichen Sachverhalts. Dieser unterscheidet sich von seinem Original in letzter Instanz immer durch einen Rest von unbestimmt bleibender Verhaltensweise.

Wollten wir die natürlichen Sachverhalte selbst als Originale ansehen, so würden wir damit den Akt der Aneignung derselben durch den wissenschaftlichen Arbeiter, den Vorgang der Isolierung und Eigenschaftsdetermination für bedeutungslos erachten. Wir würden also die natürlichen Sachverhalte als Arbeitsgegenstände mit den Originalen als Arbeitsprodukten identifizieren; wir würden die genetische Voraussetzung der allgemeinen Arbeit von ihrem zeitlich nachfolgenden Resultat als ununterscheidbar ausgeben und eben genau dadurch den Arbeitsvorgang selbst als nichtig ansehen. Mit einem Wort: wir würden in die Metaphysik abgleiten. Wir würden die objektive Realität für eine Gesamtheit von determinierten Sachverhalten im Sinne Wittgensteins "Tractatus logico-philosophicus" ausgeben (41; 15-16):

"Im Sachverhalt verhalten sich die Gegenstände in bestimmter Art und Weise zueinander. ...
Die Gesamtheit der bestehenden Sachverhalte ist die Welt."

Man hat eine gute Vorstellung für die Beziehung eines Originals zu den vorausgesetzten wirklichen Sachverhalten, wenn man die elementare taxonomische Arbeit betrachtet: Durch die Auswahl eines Organismus aus der Umwelt wird hier eine biologische Art (eine Gattung im methodologischen Sinne) individuell vorgestellt oder repräsentiert.
Dabei ist klar, dass der repräsentierende Organismus das wirkliche Verhalten seiner biologischen Artgenossen gerade nicht mehr vollziehen kann. Er dient vielmehr als Tertium comparationis, als Vergleichsmittel, d.h. als Werkzeug, als Arbeitsmittel im Rahmen der allgemeinen Arbeit. Es ist dieser Werkzeugcharakter, den wir im Auge haben müssen, wenn wir die Originale in ihrer Unterschiedenheit von den entsprechenden natürlichen Sachverhalten erfassen wollen.

Sobald wir ihn in Rechnung stellen, versteht sich die Differenz von Original und konkreter Realität von selbst. Was wir dann mit dem Original in der Hand haben, ist nicht die konkrete Realität, sondern eine Abstraktion davon, also eine abstrakte Realität.

Es ist zu unterstreichen, dass mit dieser Sicht auch angenommen ist, das Abstrakte nicht als schlechthin Ideelles gegen das Konkrete als Reales zu halten, sondern es vielmehr als reduzierte Realität aufzufassen. Das Wesen der Reduktion selbst ist dabei der Ausschluss der wirklichen Bewegung, d.h. die Aufhebung des dialektischen Widerspruchs.
Die in einem Herbarium eingeordnete Pflanze wirkt nicht mehr auf die ihr im Leben eigentümliche Umwelt und wird ebensowenig von dieser bewirkt. In diesem Sinne ist sie "unwirklich", d.h. nicht als Subjekt aktiv.
Gleichwohl ist sie höchst wirklich als Vergleichsmittel zur Identifikation gleichartiger Pflanzen oder mindestens wirklich als Objekt zur Repräsentation ihrer (biologischen) Art. Die in diesem

Zusammenhang gemeinte Wirklichkeit ist aber die der allgemeinen Arbeit, in der erkennende Menschen die eigentlichen Subjekte sind.

Man bemerkt, dass die Frage nach dem Zusammenhang des Originals mit den vorausgesetzten natürlichen Sachverhalten keineswegs mit der einfachen Entgegensetzung von "realem Gegenstand" und "idealem Abbild" entschieden ist. Vielmehr sind die empirischen Originale sehr wohl reale Gegenstände bzw. materielle Dinge und zugleich Bilder. Dies aber können sie nur sein, insofern sie in den Zusammenhang der allgemeinen Arbeit als die Arbeitsmittel derselben eintreten, insofern sie also in der Widerspiegelungstätigkeit als jene Werkzeuge auftreten, mit deren Hilfe die Identifikation natürlicher Sachverhalte sicher gemacht wird.

Original oder ursprüngliches Modell oder "Urbild" zu sein, ist daher unmittelbar nicht an den Gegensatz von Materie und Bewusstsein gebunden, sondern an die Stellung im wissenschaftlichen Arbeitsprozess:
Ein realer Sachverhalt ist Original oder ursprüngliches Modell oder "Urbild", wenn er als Tertium comparationis zur Identifikation von Gattungen und Arten verwendet wird. Diese Verwendungsweise ist es, die aus realen Sachverhalten Originale macht. Es ist eine Tätigkeit, die in ihrer Realisation keineswegs den materiellen Zusammenhang durchbricht, wohl aber mit der Erzeugung des Reflexionsmittels, des Originals, die Möglichkeit hervorbringt, nunmehr auch ideelle Bilder zu gebrauchen.

Dass sie als gegeben betrachtet werden können, wird man daran feststellen, ob jemand ohne aktuellen Gebrauch des materiellen Originals Identifikationsleistungen zu vollziehen imstande ist. Ebenso kann man das Abzeichnen eines realen Originals als den Erzeugungsakt eines ideellen Bilds betrachten. Und gewiss werden Psychologen genauere Angaben über diesen Zusammenhang machen können.

Erkenntnistheoretisch ist die Frage, wie wir vom reellen zum ideellen Bild kommen, weit weniger wichtig als das Problem, wie wir überhaupt zu Bildern kommen. Und dies Problem wird in seiner dialektischen Lösbarkeit verzerrt, wenn man Bilder überhaupt stets als ideelle Bilder versteht, wenn man also die Gattung der Bilder mit einer ihren Arten identifiziert.
Wir halten fest:

Allgemeine Arbeit oder Widerspiegelungstätigkeit tritt auf, wenn natürliche Sachverhalte in Originale umgebildet werden und als Vergleichsmittel, als Werkzeuge zur Identifikation von art- oder gattungsgleichen Sachverhalten dienen. Darin sind die Originale materielle Bilder, die durch psychologisch bestimmbare Wahrnehmungsleistung auch in ideelle Bilder umgesetzt werden.

Mit der Auffassung der Wissenschaft als allgemeiner Arbeit ist bereits logisch einsichtig, dass auch die Mathematik als Arbeit, eben als besondere Art der allgemeinen Arbeit zu verstehen ist. Es bleibt daher zu fragen: Um welche Art der allgemeinen Arbeit handelt es sich, wenn Mathematik betrieben wird?

Zur Beantwortung dieser Frage dürfen wir nun die Existenz empirischer Modelle voraussetzen, also die Existenz von theoretisch bestimmten Sachverhalten. Wir bemerken nur noch, dass die im Gefolge der von v. Bertalanffy konzipierten "Allgemeinen Systemtheorie" heute vielfach übliche Redeweise von den sogenannten "mathematischen Modellen" empirischer Sachverhalte im Rahmen der hier verwendeten Terminologie nichts anderes als mathematisch formulierte Theorien der fraglichen Sachverhalte meint.
Unter solchen "mathematischen Modellen" versteht man nämlich gewöhnlich Systeme von

Gleichungen oder Ungleichungen. Und da Gleichungen wie Ungleichungen spezielle sprachliche Ausdrücke sind, so sind sie klar als Elemente einer Theorie zu betrachten, die sich ungeachtet ihrer mathematischen Ausdrucksmittel auf eben dieselben empirischen Sachverhalte bezieht, die in der ursprünglich umgangssprachlich formulierten Theorie intendiert sind.

Offenbar reflektiert die Redeweise vom "mathematischen Modell" in diesem Zusammenhang den Umstand, dass der Übergang von der umgangssprachlich ausgedrückten Theorie zur fachsprachlich unter Verwendung mathematischer Mittel dargestellten Theorie in der Regel eine Einschränkung des Feststellungsbestands der ursprünglichen Theorie einschließt.
So liegt der Gedanke nahe, die reduzierte Theorie ein "Modell" zu nennen. Denn in der Tat ist Modellierung immer mit Inhaltsreduktion verbunden.

Es ist gegen solchen Sprachgebrauch auch gar nichts einzuwenden. Er hat nur das Missliche an sich, den Unterschied von "Modell" und "Theorie", den wir hier erkenntnistheoretisch als wesentlich fixiert haben, aufzugeben. Es müsste daher in seinem Rahmen für unser Wort "Modell" ein anderes Wort verwendet werden. Das ist aber nicht der Fall.
Dadurch kommt der gravierende Umstand zustande, dass zwischen Bewusstseinsprodukt, d.h. der Theorie, und dem durch das Bewusstsein bestimmten, aber außer dem Bewusstsein bestehenden Sachverhalt, d.h. dem Modell im hier verstandenen Sinne, gerade nicht mehr korrekt unterschieden wird.

Diesen Mangel erkennt man sofort, wenn im Rahmen der systemtheoretischen Sprechweise die natürlichen Sachverhalte auch "Originale" genannt werden, welche vermeintlich vermittels der "mathematischen Modellierung" wiedergegeben werden. So kommt die metaphysische Nichtachtung der Produktion des Originals zustande, d.h., es erscheint die Einbildung, gemäß der natürliche Sachverhalte an sich Originale seien.
Bemerkt man aber, dass jedes Original in Wahrheit ein angeeigneter und unter kontrollierbare Bedingungen gezwungener Gegenstand ist, der uns als Vertreter einer bestimmten Eigenschaftsauswahl gilt, so muss die Unterschiedenheit des Originals von den entsprechenden Sachverhalten als reale Beziehung festgestellt werden. Dann aber modelliert das Original die theoretisch fixierten Eigenschaften, also die gewussten Verhältnisse, ist daher selbst Modell eben der unterstellten Theorie!

Der Kernpunkt im Verständnis des Modellbegriffs liegt wohl in der Frage: Was ist es, das modelliert wird? Wird ein vorliegender Gegenstand modelliert, oder wird ein vorliegender Gegenstand nach den durch ihn repräsentierten Eigenschaften modelliert?
Wird also ein nicht bestimmter oder wird ein determinierter Sachverhalt modelliert?

Entschließt man sich für die Annahme der Auffassung, dass determinierte Sachverhalte modelliert werden, so akzeptiert man auch die Feststellung, dass eine Determination des zu modellierenden Sachverhalts vorliegt, d.h. eine Theorie, und dass das erzeugte Modell den modellierten Sachverhalt äquivalent ersetzt, mithin denselben selbst als Modell des Modells bestimmt. Damit aber ist einsichtig, dass das Original selbst Modellcharakter besitzt - wie die Kopie auch, und dass beide zusammen als Modelle der invarianten Theorie fixiert sind.
Demgemäß kann man die folgende Modelldefinition annehmen (31; 1229):

"Es sei ω ein Original (das schon vorhanden ist oder erst erzeugt werden soll) und $M(\omega)$ eine (nicht leere) Menge von Aussagen über ω. [$M(\omega)$ ist also eine Menge von Informationen über ω.] Dann heißt μ Modell für die Menge $M(\omega)$ genau dann, wenn μ ein System ist, in dem alle Aussagen aus $M(\mu)$ gültig sind, wobei man $M(\mu)$ aus $M(\omega)$ dadurch erhält, dass man in jeder Aussage aus $M(\omega)$ ω durch μ ersetzt."

Demgemäß ist jedes System, in dem die Aussagen aus $M(\omega)$ gültig sind, ein Modell der Theorie $M(\omega)$, speziell ist ω selbst ein Modell von $M(\omega)$.

Indem wir die Redeweise vom "Modell einer Theorie" festhalten, versteht es sich, dass man von "mathematischen Modellen" sinnvoll nur mit Bezug auf mathematische Systeme sprechen kann. Mathematisch formulierte Theorien empirischer Sachverhalte bestimmen daher empirische (physikalische, biologische, soziologische usw.) Modelle.

Man muss zugeben, dass die Modellerzeugung als Produktion von Originalen eine eigentümliche Schwierigkeit für ihr Verständnis einschließt: Einerseits können wir uns das Original nur als Resultat eines Vergleichs mit anschließender Normierung vorstellen; andererseits ist klar, dass das Original vielmehr die Voraussetzung für den streng analytischen Vergleich ist, d.h. für jenen Vergleich, der ausschließlich die Kopien des Originals betrifft und eben das Original als Tertium comparationis unterstellt.
Wollte man annehmen, dass wir Originale nicht erzeugen, sondern unmittelbar von der Natur geliefert erhalten oder kraft des "natürlichen Lichts der Vernunft", das man auch das "göttliche Licht der Vernunft" nennen kann (wie Spinoza lehrte), empfangen, so müsste man zugleich einen gewissen Realitäts- oder Idealitätsbereich in der Wirklichkeit anerkennen, der sich zum Rest der objektiven Realität wie die Schatzkammer zu den übrigen Aktivitäten des Geldbesitzers verhält.

Dieser Bereich wäre die Gesamtheit aller Originale und durch absolute Unbeweglichkeit charakterisiert, wodurch er sich eben von der sonstigen Wirklichkeit strikt unterschiede. Natürlich ist solche Annahme reine Metaphysik.

Wollen wir nun nicht die Absurdität behaupten, dass die Originale ebensosehr Resultate wie Voraussetzungen derselben Vergleichsleistungen seien, so müssen wir das Vergleichen selbst unterscheiden:
Wir nennen Vergleiche, die ohne determinierte Sachverhalte ausgeführt werden, also ohne Originalverwendung, Beispiele für den "protoanalytischen Vergleich"; er führt bei positiver Entscheidung zur Analogiebildung.
Vergleiche dagegen, die unter Voraussetzung von Originalen erfolgen, mögen "analytische Vergleiche"heißen. Enden sie mit einer positiven Entscheidung, so stellen sie eine abstrakte Gleichheit oder Äquivalenz (Gleichwertigkeit) fest, d.h. eine Beziehung, die die Eigenschaften der Selbstgleichheit des Originals o einer Theorie $T(o) : o = o$, und der Drittengleichheit für beliebige Kopien x und y:

$$x = o \wedge y = o \Rightarrow x = y$$

besitzt. Der Übergang von der Analogiebildung oder Ähnlichkeitsfeststellung zur Erkenntnis von Äquivalenzen ist offensichtlich durch die Einführung von Originalen vermittelt.
Wie es scheint, muss man sagen, dass eine Ähnlichkeitsfeststellung ein Original setzt (im Sinne Fichtes und Hegels), während die normierende Auswahl, der wertbestimmende Zugriff diese Setzung aufhebt (im Sinne Hegels), also das Original wirklich herstellt.

Demgemäß ist der Übergang von der Ähnlichkeit zur Äquivalenz mit einer Verkehrung behaftet: Ist für den protoanalytischen Vergleich das Original sekundär oder "abgeleitet", so ist es für den analytischen Vergleich vielmehr primär oder "ursprünglich" - das "Urbild", dessen Abbilder gerade die Kopien des Originals sind.

Im Interesse der materialistischen Auffassung ist an dieser Stelle unbedingt zu betonen, dass selbstverständlich jeder natürliche Sachverhalt die Potenz besitzt, ein Original zu sein. Er wird es aber erst im Rahmen der allgemeinen Arbeit. Erst durch seine Stellung als Arbeitsmittel in dieser ist er wirklich Original!

Es geht ihm dabei nicht anders als allen übrigen Werkzeugen: Außerhalb des Arbeitsprozesses hören die Werkzeuge auf, Produktionsmittel zu sein, sehen sie vielmehr dem Schicksal aller außermenschlichen Naturgegenstände entgegen.
Des weiteren muss noch betont werden, dass mit der Originalerzeugung zugleich der theoretische Zugriff realisiert wird: Mit der Determination eines Sachverhalts als Original erfolgt auch die Festlegung der Sprache der zugehörigen Theorie.

Man kann sich unser Problem in jeder mathematisierten Wissenschaft an der Frage nach der Definition des Größenbegriffs verdeutlichen:
Zunächst wird man versucht sein zu sagen, dass g_i eine Größe ist, wenn sie durch eine γ-fache Kopie $\gamma \cdot g_0$ der Größeneinheit g_0 darstellbar ist. Damit bezieht man sich auf den Standard eines jeden Messurteils, auf die Größengleichung $g_i = \gamma \cdot g_0$. Aber man definiert so nicht den Größenbegriff, denn die vorausgesetzte Größeneinheit ist natürlich selbst eine Größe. Man erkennt also, dass die Bildung von Etalons für die Messung nicht anders verstanden werden kann als die Bildung von Originalen überhaupt.

Wir stellen schließlich fest, dass die Bildung von Klassen, also die Erzeugung der Grundobjekte der deskriptiven Mathematik, nach dem gleichen Schema erfolgt: Was wir in der Natur besitzen, sind reale Kollektive (Populationen, Gravitationssysteme, Tiergemeinschaften usw.). Aber deren Umfangsbestimmtheit ist nicht an sich gegeben, denn sie wechseln ihrer Glieder unter Einfluss ihrer Wechselwirkung mit der Umwelt.
Was wir also im Rahmen der axiomatischen Mathematik unter dem Terminus "Klasse" als gegeben voraussetzen, ist daher ebenso ein Erzeugnis der allgemeinen Arbeit wie das Original eines beliebigen empirischen Zugriffs. Wir gewinnen aus einem realen Kollektiv eine Klasse, wenn wir seine Mitglieder festhalten.

Mit der Feststellung nun, dass wir die Wissenschaft überhaupt als allgemeine Arbeit verstehen können, ist bereits logisch einsichtig, dass auch die Mathematik als Arbeit zu betrachten ist und zwar als besondere Art der allgemeinen Arbeit. Die Frage, die wir nun zu beantworten haben, ist leicht gestellt: Um welche Art der allgemeinen Arbeit handelt es sich, wenn Mathematik betrieben wird?

3.2.2 Produktion und Kalkulation abstrakter Werte

Wenn wir die Mathematik als besondere Art der allgemeinen Arbeit bestimmen wollen, so liegt es nahe, die bekannten Handlungen des Zählens und Messens genauer zu betrachten. Denn jederman wird zugeben, dass Zählen und Messen in der Tat Aktionen sind, nicht rein passive Wahrnehmungen determinierter Anzahlen und Größen, dass sie weiter zumindest im allgemeinen das Moment mathematischen Verhaltens in sich haben, also in der Tat Realisationsweisen der Mathematik sind, und dass sie schließlich so geläufig sind, dass jeder sie als Gegenstand seiner Reflexion unterstellen kann.
Mit dem Zählen und Messen setzen wir also keine höchst spezialisierten mathematischen Tätigkeiten voraus, sondern solche, die in der Evolution der menschlichen Gattung auf sehr früher Stufe entfaltet werden.

Was also tun wir eigentlich, wenn wir zählen? Folgt man einer moderneren Auffassung, so besteht das Zählen darin, ein Prozess des Korrelierens der gezählten Objekte mit den natürlichen Zahlen" (13; 54) zu sein. Mit solcher Sicht sind klarerweise die natürlichen Zahlen als gegeben vorausgesetzt.

Zählen gilt somit als Gebrauch, nicht als Erzeugung der natürlichen Zahlen. Es hat in diesem Sinne keinen produktiven Charakter, sondern fungiert nur als Determination, als Bestimmung von etwas, das als solches schon gegeben ist. Dies ist selbstverständlich auch der Fall, wenn wir das Zählen, um R. L. Goodstein weiter zu folgen, als die sukzessive Anwendung der Definitionen $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$ usw. betrachten.

Sollte es wirklich so sein, dass wir im Zählen keinen produktiven Charakter feststellen können, gerieten wir mit unserer Auffassung der Wissenschaft als allgemeine Arbeit in ernsthafte Schwierigkeiten.
Denn natürlich ist die Existenz der Mathematik die notwendige Bedingung für die Existenz einer theoretisch entwickelten Wissenschaft. Die Frage nach dem Charakter der Mathematik, allgemeine Arbeit zu sein, ist daher in wenigstens erkenntnistheoretischer Sicht sozusagen das Gretchenproblem der Auffassung der Wissenschaft als allgemeine Arbeit schlechthin. Ist solche Auffassung bezüglich der Mathematik nicht plausibel durchführbar, so steht sie auch mit Bezug auf die anderen Wissenschaften auf schwachen Füßen. Lässt sie sich dagegen relativ zur Mathematik bewähren, so besitzt sie gewiss eine gute Legitimation.

Es versteht sich mit der Voraussetzung des Zählens als einer mathematischen Elementarhandlung, dass eben diese Handlung als Arbeit nachzuweisen ist, wenn überhaupt die Mathematik als Art der allgemeinen Arbeit verstanden werden soll. Worin also besteht der produktive Charakter des Zählens?

Um diese entscheidende Frage positiv zu beantworten, ist es von höchster Bedeutung, reale Zählvorgänge genau zu untersuchen. Betrachten wir nun einen beliebigen Zählakt, so bemerken wir folgende Umstände:

1. Wir können nur wirklich zählen, wenn wir etwas zählen. Die Realisierung einer Peano-Progression ist im eigentlichen Sinne kein Zählen, sondern die Bildung einer Folge von Objekten gemäß des Kalküls, der durch die Regeln $(a) \Rightarrow I$ und $(b) n \Rightarrow nI$ gegeben ist. Wir unterscheiden also das Zählen vom Gebrauch des Kalküls der natürlichen Zahlen dadurch, dass wir festhalten:
Zählen ist ein Tun, in dem ein nicht gezählter Gegenstand vorausgesetzt wird, in dem also - im Sinne des Marxschen Begriffs ein Arbeitsgegenstand vorliegt.

2. Wie nun alle Arbeit in der Umbildung ihrer Arbeitsgegenstände niemals etwas anderes hervorbringen kann als das, was als Möglichkeit im Arbeitsgegenstand angelegt ist, so kann auch das Zählen nur verwirklicht werden, wenn sein Gegenstand zählbar ist. Diese Eigenschaft der Zählbarkeit muss der Arbeitsgegenstand objektiv mitbringen, wenn der Zählende subjektiv das Zählen verwirklichen soll. Anders gesagt: der zu zählende Gegenstand muss eine Anzahl darstellen, also die Anzahleigenschaft besitzen.

Er muss mithin selbst in einer Vielheit von Elementargegenständen bestehen. Insofern sie Vielheiten sind, werden also Naturgegenstände zu Arbeitsobjekten des Zählens. Sie sind Vielheiten, wenn sie Anzahlen besitzen. Anzahlgleiche Vielheiten stellen dabei dieselbe Anzahl dar. Die Anzahlgleichheit wird durch eineindeutige Zuordnung der Einheiten beider Vielheiten festgestellt (im Sinne des Cantorschen Verfahrens zur Feststellung der Gleichmächtigkeit von Mengen).

Indem wir als objektive Bedingung des Zählens die Anzahleigenschaft der Zählgegenstände annehmen, kann der Schein eintreten, als sei auf diese Weise bereits die Existenz der finiten Kardinalzahlen (der natürlichen Zahlen) vorausgesetzt. Das ist ebensowenig der Fall wie mit der Voraussetzung der Werteigenschaft der Waren bereits die reale Existenz des Geldes

gegeben ist.
Der Terminus "Anzahl" bedeutet nicht dasselbe wie der Terminus "Grundzahl"! Anzahlen sind Eigenschaften realer Kollektive, die ja Einheiten vieler Individuen sind. Das Zählen, das die Existenz von Anzahlen unterstellt, besteht nicht darin, diese Existenz festzustellen, sondern darin, Anzahlen zu determinieren oder, wie wir auch sagen können, zu bewerten. Die Anzahleigenschaft ist also demgemäß so zu verstehen wie Größenarten überhaupt.

3. Realisieren wir nun den Zählvorgang an einem realen Kollektiv, so geschieht dies offenbar auf folgende Weise: Wir teilen vom Kollektiv sukzessive ein Individuum unter der Bedingung ab, es als Einheit ansehen zu können. Wie uns das Kollektiv eine Anzahl darstellt, so betrachten wir jetzt seine Mitglieder in der Eigenschaft, Einheiten zu sein.
Das Abteilen wird sozusagen komplettiert dadurch, dass wir die abgeteilten und darin als Einheiten gesetzten Kollektivmitglieder an einer anderen Stelle wieder zum Kollektiv vereinigen. Der Vorgang ist abgeschlossen, wenn das abzuzählende Kollektiv verschwunden ist und als abgezähltes gewissermaßen seine Wiederauferstehung erlebt hat.

Der Zählvorgang ist demgemäß eine Transformation. An seinem Anfang steht das nicht gezählte Kollektiv mit seiner gegebenen, aber nicht determinierten Anzahleigenschaft. An seinem Ende haben wir das Kollektiv wieder beisammen, nun aber als gezähltes, in seiner Anzahl bewertetes Kollektiv. Zwischen beiden Zuständen vermittelt die Vereinzelung der Kollektivmitglieder und ihre Wiedervereinigung. So gesehen erscheint das Zählen als identische Reproduktion des vorausgesetzten Zählobjekts. Und es ist wohl diese Erscheinung, welche den produktiven Charakter des Zählens nicht zum Ausdruck bringt.
Denn wo eine Tat nichts anderes erzeugt als die identische Reproduktion ihres unterstellten Gegenstands, da hat sie dieselbe Bedeutung wie ihre Unterlassung, ist sie so gut als sei sie nicht geschehen.

Allein, unsere bisherige Beschreibung des Zählens hat die vermittelnden Momente jener identischen Reproduktion, nämlich die Trennung der Kollektivmitglieder vom vorgegebenen Kollektiv und ihre Vereinigung zum reproduzierten Kollektiv nur genannt, aber nicht beschrieben. Diese beiden Tätigkeiten, die Grundtätigkeiten der analytischen Methode, die wir auch kurz "Analytik" nennen wollen, setzen nun im eigentlichen Sinne das, was man auch "Zahl" nennt.

Das Trennen der Kollektivmitglieder vom Kollektiv enthält als sein allgemeines Moment die elementaren Operationen der Subtraktion und der Division. Das Wiedervereinigen der getrennten Kollektivmitglieder enthält ebenso die elementaren Operationen der Addition und der Multiplikation. Im Trennen haben wir es mit negativen, im Vereinigen mit affirmativen Operationen zu tun. Im Rahmen unserer Beschreibung ist einsichtig, dass die affirmativen Operationen die negativen voraussetzen, dass man also erst analysiert (zerlegt, trennt, teilt) und danach synthetisiert (vereinigt, zusammensetzt).

Es versteht sich dabei, dass die fraglichen Operationen durchaus empirischen Charakter besitzen, handwerkliche Tätigkeiten sind. Sie sind nicht an sich mathematische Operationen, sondern setzen diese nur als ihr allgemeines Moment. Solche empirischen Handlungen kennt man z. B. mit der Längenaddition und der Massenaddition, die beide natürlich unterschiedliche Verfahren sind:
Längen addiert man, indem man ihre Repräsentanten im Winkel von 180° nacheinander auslegt; Massen addiert man, indem man ihre Repräsentanten auf möglichst engem Raume vereinigt.

Betrachten wir nun den Zählvorgang nochmals in seiner Gesamtheit, so bemerken wir, dass der entscheidende Unterschied zwischen dem im Zählen vorausgesetzten Kollektiv k als Zählgegenstand und dem in dieser Handlung erzeugten Kollektiv k' als Zählprodukt darin besteht, dass das Zählprodukt dem Zählobjekt als additiv verknüpfte Einheitengesamtheit gegenübertritt. Natürlich ist dabei das Gegenübertreten selbst nicht mehr ein empirisch wahrnehmbares Faktum. Denn solange k existiert, besteht k' gerade nicht; sobald aber k' erzeugt ist, ist k verbraucht.

Verstehen wir k' als das Modell der determinierten Anzahl von k, so realisiert k' ein Ideal, das k setzt! Das Gegenübertreten von k gegen k' ist mithin die Einstellung eines Verhältnisses von Realität und Idealität.
Unterstellen wir nun die Anzahl von k' als Gegenstand unseres Aussagens, so können wir nach Abschluss der Zählung das analytische Urteil

$$"a_{k'} = e + e + ... + e"$$

fällen, in dem das Satzsubjekt "$a_{k'}$" die Anzahl von k' bezeichnet, während das Satzobjekt "$e + e + ... + e$" die additiv verknüpfte Einheitengesamtheit notiert und das Prädikat "$=$" die Gleichwertigkeit (Anzahlgleichheit) beider Kollektive ausdrückt.
Unsere Behauptung ist so ein Musterexemplar für die Realisierung der klassischen Maxime der Analytik: Das Ganze ist die Summe seiner Teile. Man beachte dabei genau, dass das gezählte Kollektiv k' nicht analytisch identisch ist; mit der additiv verknüpften Einheitengesamtheit. Letztere ist die Erscheinungsform des Kollektivs im Augenblick der Zählung, während ersteres diesen Akt hinter sich hat!

Um sich dies in der Anschauung vorstellen zu können, ist es nützlich, an die Aktion jenes Hirten zu denken, der vermittels eines Durchlaufgatters seine Schafe zählt und in jeder Darstellung auftritt, die dem Verständnis der Geburt oder der Anwendung des Zahlbegriffs gewidmet ist. Im Zählakt werden die Schafe mittels des Gatters in eine Ordnung gezwungen, die sie nach dem Zählen wieder aufgeben dürfen. Es ist dieser ordinale Aspekt, der die aktuelle Zählung von ihrem Resultat unterscheidet und der die Erzeugung der natürlichen Zahlen notwendig bedingt.

Betrachten wir nun allein unsere additiv verknüpfte Einheitengesamtheit, so wissen wir, dass sie als Gesamtheit eine Anzahl darstellt und darüber hinaus eine aus Einheiten komponierte Gesamtheit ist. Die Komposition selbst ist das Resultat elementarer Hinzufügungen, die nun ihrerseits als definite Vorgänge eine Gesamtheit bilden, welche selbst eine Anzahl darstellt.
Diese Anzahl, das ist sehr wichtig, ist nicht als Eigenschaft eines Kollektivs von Gegenständen gegeben, sondern als Eigenschaft einer Gesamtheit von Elementarhandlungen des zählenden Subjekts.
Sie entsteht, wird erzeugt, indem der Zählende Einheiten als Objekte für die Addition aufweist. Sie reflektiert also, wie oft das zählende Subjekt ein Mitglied des vorgegebenen Kollektivs als Einheit gesetzt und aufgehoben hat. Diese Anzahl ist die finite Kardinalzahl oder natürliche Zahl.

Indem wir sie mit "z" als Kurzzeichen für "Zahl" bezeichnen, können wir behaupten, dass

$$"z \cdot e = e + e + ... + e"$$

gilt und mithin auch "$a_{k'} = z \cdot e$". Das besagt speziell, dass z das Verhältnis $a_{k'} : e$ gleichwertig ausdrückt - oder wie Hegel sagt (14.2; 197):

"Anzahl und Einheit machen die Momente der Zahl aus."

Mit der gegebenen Beschreibung des Zählens besteht der produktive Charakter dieses Tuns also darin, auf Grund der objektiven Basis der Anzahleigenschaft gegenständlicher Kollektive vermittels der Setzung und Aufhebung der Kollektivmitglieder als Einheiten sowie der additiven Rekonstruktion die Zahlen selbst als Ausdrücke für die Anzahlen der Gesamtheiten von verwendeten Einheiten hervorzubringen.
Während die Einheiten selbst die gegenständliche Natur des Zählens vorstellen, zeigen die Zahlen dagegen seine Handlungsnatur. In diesem Sinne meint der Term "$z \cdot e$" auch die Aufforderung, am Gegenstand e die Operation $z\cdot$ vorzunehmen, also e gerade z-mal zu setzen und aufzuheben.
Indem das wirklich getan wird, wird z in der Tat hervorgebracht oder produziert. In diesem Sinne hat daher das Zählen produktiven Charakter, ist es wirklich Arbeit.

Akzeptiert man die gegebene Interpretation, so kann man die Existenz der Einheit e als Produkt der Realisation jener Aufforderung verstehen und mithin analytisch behaupten, dass das Urteil "$e = 1 \cdot e$" gilt. Das Symbol 1 fungiert darin als Zeichen der arithmetischen Eigenschaft, eins zu sein, welche ihrerseits einer gelungenen Herstellung einer Einheit zukommt. Mit dieser Bezeichnung geht

$$"z \cdot e = e + e + ... + e"$$

in den analytischen Ausdruck

$$"z \cdot e = 1 \cdot e + 1 \cdot e + ... + 1 \cdot e"$$

über. Unter Voraussetzung des distributiven Charakters des Zusammenhangs von Addition und Multiplikation erlangen wir weiter den analytischen Ausdruck

$$"z \cdot e = (1 + 1 + ... + 1) \cdot e"$$

womit schließlich klar wird, dass eine Zahl z entweder 1 oder eine additive Verknüpfung von Reproduktionen der 1 ist.

Den Übergang vom Gebrauch der empirisch vorgestellten Einheiten als Additionsobjekte zum Gebrauch Zahl 1 realisiert das eigentlich mathematische Tun. Mit ihm gelten nun die Zahlen, die Verhältnisse von Anzahlen zu ihren Einheiten darstellen, als mathematische Objekte, als Dinge. Dieser Übergang wird in der formalen Logik ganz ähnlich vollzogen, wenn wir an Stelle der Urteile vielmehr deren Wahrheitswerte verknüpfen, d.h. den sogenannten "wahrheitsfunktionalen Aufbau" der Logik realisieren.
Verdinglichte Verhältnisse kann man im Rahmen des Marxschen Sprachgebrauchs überhaupt "Werte" nennen. Und da wir mit dem Übergang zum mathematischen Tun, mit dem Zählen, wie Hegel sagt (14.2; 202), "auf dem Boden des abstrakten Anschauens" stehen, so nennen wir die Zahlen auch "abstrakte Werte".

Demnach geht die allgemeine Arbeit zum mathematischen Tun über, wenn abstrakte Werte erzeugt und mittels bestimmter Operationen verknüpft werden. Da solche Verknüpfung in der Regel der Kalkulation von Gesamtwerten aus Elementarwerten dient, so kann man sagen: Wird die allgemeine Arbeit Produktion und Kalkulation abstrakter Werte, so wird sie Mathematik.

Es versteht sich, dass wir mit der angegebenen Beschreibung des produktiven Charakters des Zählens nichts weiter als eine höchst elementare Evolutionsstufe der Mathematik charakterisiert haben, wobei auch die Charakterisierung selbst weiter zu vertiefen ist. Diese Aufgabe ist noch zu lösen.

Dennoch kommt es für das marxistisch-leninistische philosophische Verständnis der Mathematik ganz wesentlich darauf an, die produktive Natur des mathematischen Verhaltens unverrückbar als Grundlage des theoretischen Ansatzes einer Philosophie der Mathematik im Auge zu behalten.
Daher ist hier die vorgestellte Charakterisierung sozusagen als propädeutische Einführung gegeben werden.

Wenn sie zeigt, dass die Natur der Mathematik, Produktion zu sein, wohlbegründet ist, so hat sie ihre Aufgabe erfüllt.
Es versteht sich weiter, dass die Bildung der natürlichen Zahlen selbstverständlich nicht die einzige Art der Erzeugung abstrakter Werte ist. Der Übergang zu neuartigen Zahlen, ganzen, rationalen, reellen, komplexen, gehört ebenfalls hinsichtlich der Frage nach seinem produktiven Charakter zum Bestand der philosophischen Probleme der Mathematik.
Ebenso ist die Einführung z.B. von Vektoren und Tensoren in diesem Sinne auch ein philosophisches Problem. Doch wird man solche Probleme nicht wirklich lösen können, solange man nicht die Pseudoerklärung aus der Welt geschaffen hat, dass die natürlichen Zahlen ein Geschenk Gottes seien - wie einst L. Kronecker proklamierte.

Wir müssen noch bemerken, wie der Zusammenhang der weiter oben diskutierten Natur der Wissenschaft, Modellproduktion zu sein, mit dem Übergang in die Mathematik beschaffen ist. Man versteht nun sicher, dass Originale für die Mathematik aus dem einfachen Grunde von existentieller Bedeutung sind, weil sie als mögliche Einheiten dienen können. Wo wir natürliche Gegenstände nicht auf die Bedeutung, Einheiten zu sein, reduzieren können, ist auch der mathematische Zugriff unmittelbar nicht möglich.
Diesen Umstand zeigt N. Wiener durch seinen Hinweis auf den Unterschied zwischen Sternen und Wolken:

"Ein Stern ist ein bestimmter Gegenstand, ausgezeichnet geeignet, gezählt und katalogisiert zu werden, ... Wenn wir ... von einem Meteorologen verlangten, uns eine ähnliche Durchmusterung der Wolken zu geben, würde er uns ... nachsichtig erklären, dass es in der gesamten Sprache der Meteorologie keinen Gegenstand wie eine Wolke gibt, definiert als ein Objekt mit einer quasipermanenten Identität, ...
Ein topografisch veranlagter Meteorologe würde eine Wolke vielleicht als einen bestimmten Raum definieren, in dem der Wasseranteil in festem oder flüssigen Zustand einen gewissen Betrag überschreitet."(40; 53-54)

Es ist eben diese "quasipermanente Identität", unter die wir natürliche Gegenstände mit mehr oder weniger Aufwand zwingen müssen, um sie endlich als Einheiten im Zählakt verfügbar zu haben. Dass uns dies gelingt, gehört zu den Momenten des analytischen Tuns.
Denn "von Natur aus" sind die Gegenstände unmittelbar nicht. in dieser der Analytik gefälligen Stellung - aus dem einfachen Grunde, weil sie untereinander wechselwirken und eben darin mit ihrer Selbsterhaltung zugleich auch ihre Veränderung betreiben. Wollen wir nur mit sich identische Objekte, so müssen wir die Veränderung ausschließen, also den Widerspruch auf die Identität reduzieren. Genau das aber ist der allgemeine Inhalt der Originalproduktion und diese daher die Setzung von Einheiten.

Der dialektische Zugang zu den philosophischen Problemen der Mathematik wird verschüttet, wenn man die natürlichen Sachverhalte als solche für Originale, also den Begriff des Originals, des Standards einer Eigenschaft für überflüssig hält. Dann ist auch klar, dass die Naturgegenstände als solche Einheiten sind.

Und was schlimmer ist, es wird somit zugleich suggeriert, dass das was keine Einheit ist, gar nichts ist. Diese Suggestion ergibt sich ganz naiv aus der folgenden analytischen Beurteilung: Haben wir die Mitglieder eines Grundbereichs von Objekten im Auge, die wir für die mathematische Erkenntnis voraussetzen, so ist einsichtig, dass wir mit Bezug auf ihren Einheitencharakter das Universalurteil $\bigwedge\limits_{x}(x = x)$ formulieren können, das im Rahmen der deskriptiven Logik mit dem negativen Existenzurteil $\neg \bigvee\limits_{x}(x \neq x)$ gleichwertig ist.

Natürlich beziehen sich solche Urteile im Rahmen allein des mathematischen Erkennens auf fest vorgegebene Gattungen. Aber in der metaphysischen Entartung werden sie überhaupt als Urteile von den Gegenständen der Welt ausgegeben, womit denn suggeriert ist, die reale Welt sei eine Gesamtheit von Gegenständen, die an sich individualisierte Einheiten seien.

Die Metaphysik stolpert in solche Sicht, weil sie keinen dialektischen Begriff der Erkenntnis hat. Sie versteht daher insbesondere nicht die Verdinglichung von Verhältnissen und unterstellt daher für die sprachlichen Ausdrücke jener "Dinge", dass sie "wahre Abbilder" der "eigentlich wirklichen Dinge" seien, die jenseits des misslichen sinnlichen Scheins entweder realiter oder wenigstens idealiter angetroffen werden können.
So sucht sie jenseits der menschlichen Arbeit Dinge, die in Wahrheit doch niemals etwas anderes als eben die Erzeugnisse dieser Arbeit sind. Indem sie sich dann noch auf den "gesunden Menschenverstand" der Ausbeutergesellschaft verlassen kann, der in der Arbeit nichts sonst als Realisation von Zwecken, als Verwirklichung von bewusst vorgestellten Idealen zu sehen imstande ist, gewinnt ihre Deutung die Bedeutung einer Selbstverständlichkeit.

Denn wie sollte solche Arbeit auch als Produktion abstrakter Werte verständlich sein?
Um an einem Beispiel zu zeigen, wie bei auch bedeutenden Vertretern der logisch-mathematischen Grundlagenforschung die hier angezeigte Metaphysik auftritt, verweisen wir auf eine Bemerkung von H. Scholz aus seiner - man genieße den Ausdruck - "Metaphysik als strenge Wissenschaft".
Natürlich will der Begründer der Münsteraner Schule der mathematischen Logik mit der Dialektik abrechnen, vor allem mit Hegel und "denen, die nicht den Mut haben, mit den unverantwortlichen Anmaßungen dieser Dialektik ein für allemal zu brechen". Solche Abrechnung wird dann wie folgt realisiert (34; 181):

"Auf eine musterhaft einfache Art lösen sich alle Aporien, an denen irgendein Dialektiker ... seine Freude haben kann, wenn man Gebrauch macht von einem Vorschlag, der auf Bolzano zurückgeht."
Nimmt man nämlich nach diesem Vorschlag die Zeitbestimmung vom Prädikat in das Subjekt eines sprachlichen Ausdrucks, so ist jeder "dialektisehe Geisterspuk verschwunden; denn es ist unantastbar, dass jedes der wirklichen Welt angehörige Individuum im Zeitpunkt t für diesen Zeitpunkt mit sich selbst identisch ist".

Somit ist die Metaphysik genau dadurch ausgesprochen, dass die analytische Identität und damit die Widerspruchsfreiheit Charakteristikum der wirklichen Individuen sein soll.
Nun ist natürlich klar, dass wir von einem wirklichen Individuum nur unter der Bedingung seines Wirkens sprechen können. Das Wirken aber konstituiert eine zeitliche Dauer, während ein Zeitpunkt die Grenze einer Dauer ist. Somit ist Scholz' "streng wissenschaftliche Metaphysik" mit dem absurden Monstrum eines nicht wirklichen Individuums garniert, das gleichwohl wirklich sein soll.

Es bleibt philosophisch merkwürdig, wie ein bedeutender Grundlagenforscher, der ohne Zwei-

fel in mathematischen Überlegungen gegebenenfalls vorhandene Kontradiktionen zu erkennen vermag, gleiche Absurditäten in philosophischen Räsonnements ungescheut proklamiert.
Das ist nur verständlich, wenn man den Umstand im Auge behält, dass Dialektik und Metaphysik reale Extreme sind, also nichts miteinander gemein haben, sondern einen Gegensatz bilden, in dem die Existenz des einen die Nichtexistenz des anderen bedeutet. H. Scholz bringt diesen Gegensatz auch mit seinem Tonfall zum Ausdruck, den er sich bei der Anzeige der "unverantwortlichen Anmaßungen" der Dialektik genehmigt, den er aber gegenüber Fachkollegen niemals verwendet.
Es dürfte verständlich sein, wenn namens der Dialektik gegen solche Artikulation von Feindschaft nicht unbedingt die Sprache der noblen Zurückhaltung gebraucht wird.

Wenden wir uns zum Schluss dieses Abschnitts noch kurz der Geometrie zu. Da sie neben der Arithmetik und Algebra ebenfalls zu den fundierenden Disziplinen des mathematischen Erkennens gehört, so ist es im Sinne des hier entwickelten Ansatzes natürlich erforderlich, den produktiven Charakter auch des geometrischen Verhaltens zu verdeutlichen. Diese Aufgabe kann hier jedoch nicht bewältigt werden. Wir beschränken uns daher auf einige Andeutungen.

Der offenbar entscheidende Schritt zur Verwirklichung des geometrischen Tuns ist sicher darin zu sehen, die Originale der empirischen Erkenntnis, also die wissenschaftlichen Arbeitsmittel, nun ihrerseits als Arbeitsgegenstände für das geometrische Verhalten zu setzen. Solche Setzung erfolgt, wenn wir die Originale als Vertreter für gewisse Raumteile betrachten.

Diese Art von Betrachtung ist jene Sicht, die einst Descartes, der Begründer der analytischen Geometrie, relativ zur Materie überhaupt realisierte, als er sie die "res extensa" nannte, also die "ausgedehnte Sache".

Mit solcher universellen Sicht nahm Descartes natürlich den Standpunkt der Metaphysik ein, der in der Identifikation der räumlich determinierten Körper mit den natürlichen Gegenständen überhaupt in Erscheinung tritt. Nichtsdestoweniger aber ist die Relativierung der cartesischen Sicht auf erzeugte Originale vertretbar.
Indem wir von der Besonderheit ihres empirischen Inhalts abstrahieren, d.h. jeden Inhalt für gleich geltend annehmen, ist es die räumliche Form, die zu bestimmen unser Anliegen wird. Es versteht sich, dass solches Interesse durch die Aufgabe der Verteilung des kulturfähigen Bodens eines Gemeinwesens auf seine Mitglieder stimuliert wird. Ebenso darf die menschliche Bautätigkeit, aber auch die künstlerische Leistung z.B. bei der Gestaltung von Bauten vor allem der Gemeinwesen in Rechnung gestellt werden, wenn von der Genesis der Geometrie die Rede ist.

In solchen Arbeiten ist das geometrische Verhalten schon immer als allgemeines Moment enthalten. Werden seine Produkte als Raumteile gesetzt und in dieser Bestimmung untersucht, so ist der Übergang in die Geometrie als Wissenschaft vollzogen. An die Stelle der empirisch bestimmten Gegenstände treten die geometrischen Körper.

Die geometrische Analyse führt nun zu dem Resultat, dass die Körper durch Flächen, die Flächen durch Linien und die Linien durch Punkte begrenzt bzw. von anderen Körpern, Flächen und Linien abgeteilt werden. Der synthetische Rückgang aus dieser Analyse kann durch die Vorstellung von der Bewegung der analytisch fixierten Elemente gedacht werden: Ein Punkt führt in der Bewegung zur Realisierung einer Geraden, sofern seine Bewegung nicht gehemmt und mit gleichbleibender Richtung erfolgt.
Im gleichen Sinne ergibt die Bewegung einer Geraden eine Ebene. Punkte, Geraden und Ebenen sind dann die eigentlichen theoretischen Objekte der euklidischen Geometrie. Wie also die

arithmetische Analyse und Synthese zur Bildung der Zahlen führt, so erzeugt die geometrische Analyse und Synthese die geometrischen Figuren.

Und wie mit dem Axiomensystem Peanos die finiten Kardinalzahlen als an sich gegeben vorausgesetzt werden, so unterstellt die Axiomatik der euklidischen Geometrie Punkte, Geraden und Ebenen als die bekannten Objekte ihrer Deskription.

Es ist einsichtig, dass die Umfangs- und Inhaltskalkulation bezüglich geometrischer Figuren wieder im Sinne der Produktion und Kalkulation abstrakter Werte aufzufassen ist. Natürlich sind dabei die Bestimmungen der Anzahl und der Einheit auf geometrische Figuren relativiert. Ein beliebiges Rechteck z.B. stellt seinen Inhalt als Kollektiv von Einheitsquadraten dar; eine beliebige Strecke realisiert ihre Länge als Kollektiv von Einheitslängen. Mit diesem Umstand bringt die Geometrie ein neues Element in den mathematischen Problemkomplex ein, nämlich die Frage nach der Bestimmung des Kontinuums, das bereits durch eine Strecke vorgestellt wird.

Im Versuch, diese Frage zu beantworten, wird das mathematische Verhalten über die Erzeugung und Verwendung rationaler Werte hinausgetrieben. Ebenso erfährt es darin die Bedeutung der logischen Konsistenz für die Theorienbildung. Dass z.B. Diagonalen und Seiten eines Quadrats tatsächlich Wertträger sind, also Längen besitzen, sichert die Geometrie.

Dass aber beide Längen wegen $d^2 = 2 \cdot a^2$ kein rationales Verhältnis zueinander besitzen können, also $\sqrt{2} = d : a$ keine rationale Zahl ist, sichert die Logik - und kein noch so genaues Experiment.
Das Objekt $\sqrt{2}$ dennoch als Zahl einzuführen, ist eine Leistung des mathematischen Erkennens, das die Analysis "als Synthese von Geometrie und Algebra" (37) hervorbringt und so die mathematische Bestimmung des Kontinuums ermöglicht.

4 Von der Genesis der Werte und dem Gegensatz zwischen Konstruktion und Deskription

In unserer Vorstellung der Evolution der natürlichen Zahl haben wir von einer Idee Gebrauch gemacht, die zum ersten Male in der Geschichte der Erkenntnis durch Marx gefasst und verwirklicht worden ist - nämlich in Gestalt der berühmten Analyse und Entwicklung der Wertform, also in einem unmittelbar Ökonomischen Zusammenhang.
Das Problem, das Marx in diesem Zusammenhang gestellt sah, formulierte er wie folgt (26.5; 52-53):

"Jedermann weiß, wenn er auch sonst nichts weiß, dass die Waren eine mit den bunten Naturalformen ihrer Gebrauchswerte höchst frappant kontrastierende, gemeinsame Wertform besitzen - die Geldform. Hier gilt es jedoch zu leisten, was von der bürgerlichen Ökonomie nicht einmal versucht ward, nämlich die Genesis dieser Geldform nachzuweisen, also die Entwicklung des im Wertverhältnis der Waren enthaltenen Wertausdrucks von seiner einfachsten unscheinbarsten Gestalt bis zur blendenden Geldform zu verfolgen. Damit verschwindet zugleich das Geldrätsel".

In unserer Darstellung der Herausbildung der natürlichen Zahl sind wir genau von dieser Problemstellung ausgegangen - mit der Besonderheit, dass uns nun nicht der Geburtsakt des Geldes, sondern der Geburtsakt der finiten Kardinalzahl interessierte.
Natürlich ist mit solcher Generalisierung der Marxschen Theorie der Wertformanalyse und -genese unterstellt, dass die methodischen Gesichtspunkte in beiden Fällen dieselben seien. Diesen Standpunkt darf man selbstverständlich eine "hypothetische Annahme" nennen.

Sie besteht also darin, den ökonomischen Inhalt der Marxschen Überlegungen für ein spezielles Beispiel einer systematischen Art der Widerspruchslösung im Sinne der materialistischen Dialektik anzusehen, mithin anzunehmen, dass weitere, aber inhaltsverschiedene Beispiele vorstellbar seien. Generell gesprochen, nach Ansicht des Verfassers liefert die Marxsche Wertformanalyse und -entwicklung überhaupt den Musterfall aller Bildungen von abstrakten Werten, wie sie im Rahmen der Dialektik zu erklären sind.

Es ist daher zum tieferen Verständnis unserer propädeutischen Vorstellung der philosophischen Probleme der Mathematik und ihrer möglichen Lösungen auf dem Standpunkt des Marxismus-Leninismus von grundsätzlicher theoretischer Bedeutung, die Marxsche Theorie der Wertformanalyse und -genese so genau wie möglich zu verstehen.
Ist es wahr, dass diese Theorie potentiell auch Mittel zur Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik bereithält, und das ist ja unsere Annahme, so muss man sie so rekapitulieren, dass jene Potenz zweifelsfrei sichtbar wird.

Solche Rekapitulation soll im folgenden betrieben werden. Dabei versteht es sich, dass wir sie stets mit dem Blick auf den Zusammenhang von Philosophie und Mathematik realisieren werden. Ökonomische Begriffe werden nur beachtet, wenn es sozusagen unvermeidlich wird.

4.1 Wertformanalyse und -entwicklung

Um unsere Annahme des wesentlichen Zusammenhangs der Marxschen Analyse und Entwicklung der ökonomischen Wertform mit dem Problem der Klärung der Gründe für den Gebrauch von abstrakten Werten zu verdeutlichen, erinnern wir zunächst daran, dass wir den Ausdruck für die Reflexion (Widerspiegelung) der Anzahleigenschaft realer Kollektive durch die erzeugte

Anzahleigenschaft der Einheitenproduktion mit dem analytischen Urteil "$a_{k'} = z \cdot e$" vorliegen hatten.
Denken wir nun an die Angaben von Werten für Waren unter Voraussetzung der Existenz des Geldes, so werden wir Ausdrücke der Gestalt "$v_{w'} = z \cdot e$" erwarten, in denen "$v_{w'}$" für "Wert der Ware w'" und "e" für eine beliebige Geldeinheit steht (z.B. Mark oder Rubel oder Forint usw.).

Man sieht sofort, dass beide Ausdrucksgestalten Exempel für die allgemeine Form eines Messurteils sind: $g_i = \gamma \cdot g_0$. Diese Form gilt im Rahmen der Marxschen Theorie als ein historisches Produkt, dessen Erzeugung zu erklären ist.

Man muss diese Problemstellung genau im Auge behalten, wenn man den Sinn der Theorie der Wertformanalyse und -genese wirklich verstehen will. Es wird also nicht danach gefragt, welche Gesetze die Bildung eines Messurteils bestimmen, falls Maßeinheiten und reelle Zahlen als gegeben betrachtet werden.
Es liegt vielmehr eine historische bzw. evolutionstheoretische Fragestellung vor, nämlich die nach dem Zustandekommen des Messmittels $\gamma \cdot g_0$ unter der Voraussetzung, dass weder Einheiten noch Zahlen vorliegen.

Das ist insbesondere eine Problemstellung, die in der bekannten sogenannten analytischen Wissenschaftstheorie gar nicht formulierbar ist. Da diese Theorie nämlich einerseits die klassische (deskriptive) formale Logik als Voraussetzung für jedes wissenschaftliche Urteilen und andererseits die Mathematik in der Regel in der mengentheoretischen Interpretation unterstellt, so ist für sie die Frage nach der Genesis der abstrakten Werte eben deshalb kein Problem, weil deren Existenz bereits vorausgesetzt ist, ehe die analytische Wissenschaftstheorie selbst überhaupt realisiert wird.
Man könnte auch sagen: Die analytische Wissenschaftstheorie stellt sich schlicht "auf den Boden der Tatsachen", d.. auf den Standpunkt, die Existenz des Geldes in all ihrem Räsonnement jederzeit vorauszusetzen.

Dieser Tatsachenfetischismus wird natürlich irritiert, sofern seine Tatsachen problematisiert werden, d.h. sobald ihre Erzeugung untersucht werden soll. Und genau diese Aufgabe liegt der Marxschen Wertformanalyse und -entwicklung zugrunde.

4.1.1 Die Wertform und ihre Analyse

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $g_i = \gamma \cdot g_0$ vom Standpunkt der deskriptiven Grundlagenforschung, so werden wir methodologisch feststellen:
Der Name g_i bezeichnet denselben Gegenstand, dasselbe Objekt wie der Name $\gamma \cdot g_0$; der letztere unterscheidet sich vom ersteren nur dadurch, dass er ein zusammengesetzter Term ist. Das Prädikat $=$ des vorliegenden Ausdrucks bezeichnet die Identität. Der Satz reflektiert demgemäß, dass zwei verschiedene Namen für dieselbe Sache verwendet worden sind. Die Sache selbst ist eine gewisse Größe.

Solche Auskunft würde uns übrigens auch die analytische Wissenschaftstheorie geben.

Da nun der fragliche Ausdruck offenbar als sprachliche Wiedergabe des Resultats einer Messung zu verstehen ist, so können wir eine sehr andere Deutung methodologischer Natur für denselben bieten. Wir können nämlich sagen: Das Satzsubjekt g_i ist Zeichen der gemessenen Größe, die irgendein objektiv-realer Gegenstand darstellt; das Satzobjekt $\gamma \cdot g_0$ ist Zeichen des Messmittels, das verwendet worden ist, um die Bewertung der objektiv vorgestellten Größenart subjektiv wirklich zu realisieren.

Demgemäß muss das Prädikat eine Äquivalenz ausdrücken. Denn wir haben es nicht, wie oben angenommen, mit einem Gegenstand, wir haben es vielmehr mit zweien zu tun, wovon der eine ein objektiv gegebener, der andere aber ein subjektiv konstruierter ist - konstruiert aus Einheiten g_0 in γ-facher Reduplikation vermittels der entsprechenden Addition. Indem beide Gegenstände als äquivalent festgestellt sind, so stellen beide denselben Wert dar.

Es ist offenbar dieser Wert, der im Falle der angeführten Identitätsdeutung jener Gegenstand sein soll, den die Namen g_i und $\gamma \cdot g_0$ bezeichnen. Mit der Äquivalenzdeutung ist klar, dass der Wert vielmehr kein Gegenstand, sondern eine Eigenschaft ist, die beide (äquivalenten) Gegenstände besitzen und im Verhältnis der Gleichheit zum Ausdruck bringen. Marx nennt den Gleichheitsausdruck auch "Wertausdruck" (versteht sich, für Waren).

Das ist eine Benennung, die wir in jedem Fall übernehmen können, ob wir nun "g_i" und "$\gamma \cdot g_0$" als Namen für dasselbe Objekt (den Wert) oder als Namen für verschiedene Objekte (die beiden Wertträger) unterstellen. Mit dieser Voraussetzung beginnt die Wertformanalyse mit der Feststellung der Existenz von Wertausdrücken.

Wir können den logischen Zusammenhang der beiden Deutungen als Ausdruck des Abstraktionsprinzips für die unterstellte Äquivalenz darstellen, indem wir

$$g_i = \gamma \cdot g_0 \Rightarrow [g_i] = [\gamma \cdot g_0]$$

behaupten, womit beide Deutungen füreinander notwendige bzw. hinreichende Bedingungen sind, die fraglichen Terme tatsächlich verschiedene Sachverhalte bezeichnen und die Klammern verwendet sind, um den Wert als solchen zu benennen.

Betrachten wir nun weiter ausschließlich den links in der logischen Implikation stehenden Ausdruck, so ist für die Wertformanalyse von wesentlicher Bedeutung, seine kategoriale Beschaffenheit im Sinne der Grammatik im Auge zu behalten. Diese kategoriale Beschaffenheit hat offensichtlich semantische Bedeutung:
Das Subjekt "g_i" bezeichnet den Messgegenstand, das Satzobjekt "$\gamma \cdot g_0$" bezeichnet das Messmittel. Beide Objekte befinden sich, wie Marx sagt, in der Stellung "polarer Extreme". In dieser Stellung nennt er g_i die "relative Wertform" und $\gamma \cdot g_0$ die "Äquivalentform". Damit ist der Wertausdruck als Einheit polar entgegengesetzter Wertformen festgestellt.

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese "Analyse" etwas anderes leistet als die von uns "Analytik" genannte analytische Methode.
Es handelt sich nämlich darum, dass wir mit der Wertformanalyse keinerlei Trennung der Satzglieder bzw. Trennung von Gegenstand und Mittel der Messung ausführen, sondern lediglich eine Unterscheidung des voraussetzungsgemäß Zusammengehörigen vorstellen.

Man kann das Unterscheiden vom Trennen gewiss unterscheiden: In einer Ehe z.B. lassen sich Ehemann und Ehefrau unterscheiden. Trennten wir beide, oder ließen sie sich scheiden, so hätten wir zwar noch immer einen Mann und eine Frau, aber eben keinen Ehemann und keine Ehefrau. Ebenso kann man im Atom die Elektronen vom Kern unterscheiden. Die Trennung aber vernichtete das Atom. In diesem Sinne ist es empfehlenswert, statt von der "Wertformanalyse" vielmehr von der "Wertformunterscheidung" zu sprechen.

Mit solcher Sprachfestlegung bleibt die Verschiedenheit dieses Unternehmens von der gewöhnlichen Analytik im Blick und insbesondere der Umstand, dass die Unterscheidung der Wertformen auf der Grundlage der Einheit des Wertausdrucks erfolgt.

Weiter ist nun folgende Feststellung der Wertformunterscheidung von Bedeutung: Angenommen, wir wechseln die Objekte in ihrer Stellung zueinander aus, schreiben also statt "$g_i = \gamma \cdot g_0$" vielmehr "$\gamma \cdot g_0 = g_i$". Dann ist aus rein grammatischen Gründen klar, dass wir es nunmehr mit dem Subjekt "$\gamma \cdot g_0$" und dem Objekt "g_i" zu tun haben. Die Stellung der Kategorien gegeneinander ist nämlich unabhängig vom Wechsel der sie darstellenden Objekte.

Dieser zunächst sprachliche Sachverhalt scheint angesichts der hier verwendeten gegenständlichen Größe g_i und der additiven Verknüpfung der entsprechenden Größeneinheiten g_0 bedeutungslos zu sein. Es scheint also, dass die Kategorialunterscheidung eine Art Glasperlenspiel ist. Denn was soll durch solchen Wechsel der fraglichen Gegenstände zum Ausdruck gebracht werden, das man zuvor nicht auch schon gewusst hat?

Allein, beachten wir nun die weiter oben charakterisierten Zusammenhänge im Zählen, so können wir folgendes bemerken: Tritt "g_i" als Subjekt im Wertausdruck auf, so bildet dies Zeichen den Namen des zu bewertenden Gegenstands, notiert es also den Gegenstand, wie er in den Messvorgang eintritt. Erscheint dagegen "$\gamma \cdot g_0$" als Subjekt, so ist - genau gesprochen - die Handlung der γ-fachen Vervielfältigung der Einheit g_0 der Gegenstand des Urteilens, und mithin notiert der entsprechende Wertausdruck g_i nun als Produkt der Lösung dieser Aufgabe, also den Gegenstand, wie er die Messung verlässt, als jenen Gegenstand, der zweifelsfrei die gemeinte Größe besitzt und mithin auch als Mittel der Prüfung der Adäquatheit der Einheitenkopien verwendbar ist.
Damit ist deutlich, dass der Objektwechsel bei unveränderter Stellung der Kategorien in der Tat eine Änderung der Stellung der Objekte im Arbeitsprozess des Messens bedeutet.

Es ist einsichtig, dass dieser Umstand solange bedeutungslos ist, solange nicht die Produktion, sondern allein die schon als vollzogen unterstellte Wertdetermination im wissenschaftstheoretischen Blickfeld steht.
Denn dann stehen sich g_i und $\gamma \cdot g_0$ ja nicht als Gegenstand und Mittel bzw. als Produkt und Handlung gegenüber, sondern vielmehr als Individuen zweier Klassen, deren Identität mit der Messung festgestellt ist, also als gegeneinander austauschbare Objekte. Genau diese Austauschbarkeit ist mit Bezug auf die kategoriale Stellung ausgeschlossen. Marx sagt dazu mit Bezug auf das ökonomische Phänomen:

"Dieselbe Ware kann ... in demselben Wertausdruck nicht gleichzeitig in beiden Formen auftreten. Diese schließen sich vielmehr polarisch aus."(26.5; 54)

Mit der Beachtung nun der in der Wertformunterscheidung zum Ausdruck kommenden kategorialen Beschaffenheit des Wertausdrucks ist klar, dass wir sein Prädikat nicht mehr als Zeichen für eine Äquivalenzrelation im Sinne ihres mathematischen Begriffs betrachten können.
Denn mit den kategorialen Unterschieden ist ja eben die Symmetrie, die eine Eigenschaft der Äquivalenz ist, aufgehoben. Und es ist logisch zwingend, mit der Unterscheidung von Gegenstand und Mittel bzw. von Produkt und Handlung zugleich zu erklären: Der Gegenstand ist nicht das Mittel; das Produkt ist nicht die Produktion!

Wir stehen daher vor der Alternative, entweder die kategoriale Unterscheidung und damit den Arbeitscharakter der Wertung als bedeutungslos oder nichtig zu betrachten, oder aber mit der Annahme der kategorialen Unterscheidung zugleich eine Änderung in der Bedeutung des Prädikats im Ausdruck "$g_i = \gamma \cdot g_0$" zu akzeptieren.
Wir stehen also vor der Alternative, das Zeichen $=$ entweder bedingungslos als Symbol für die abstrakte Gleichheit zu betrachten (wie in der Mathematik üblich), oder aber mit diesem Zeichen einen neuen Begriff, den Begriff der konkreten Gleichheit zu verbinden.

Der Leser wird bemerken, dass an dieser Stelle eine fundamentale Entscheidung über die lange diskutierte Frage zur Debatte steht, ob die Mathematik unmittelbar Dialektik auszudrücken imstande sei. Wer zugibt, dass die Dialektik ganz wesentlich die Theorie kategorialer Verhältnisse ist, und dass die Mathematik keine andere als die abstrakte Gleichheit kennt, der muss jene Frage negativ entscheiden. Es sei denn, er ist imstande zu zeigen, wie man eine mathematische Theorie der konkreten Gleichheit aufbaut!

Da Äquivalenz- und Ordnungsbeziehungen die fundamentalen Verhältnisse sind, mit Bezug auf die mathematisches Erkennen verwirklicht wird, so besteht gute Hoffnung darauf, dass ein solcher "Aufbau" im Reiche der Illusion verbleiben wird. Soweit die Dialektik in der Mathematik enthalten ist - und sie ist in der mathematischen Arbeit enthalten -, wird sie im Rahmen der Lösung der philosophischen Probleme der Mathematik vorgestellt.

Aber eben ihre philosophischen Probleme sind keineswegs die Mathematik als fertiges Resultat! Die Feststellung der konkreten Gleichheit ist nun ohne Schwierigkeit realisierbar, wenn man erneut den grammatischen Zusammenhang des Wertausdrucks in Rechnung stellt. Nach diesem ist nämlich das Satzobjekt Glied im Prädikatverband. Das bedeutet, dass im Ausdruck "$g_i = \gamma \cdot g_0$" das vollständige Prädikat der Term "$= \gamma \cdot g_0$" ist, ein Term, der in der Sprache der Mathematik gar nicht auftritt!
Die konkrete Natur der so bezeichneten Gleichheit ist syntaktisch gut wahrnehmbar, nämlich als Einheit der Gleichheitseigenschaft mit dem Vergleichsmittel, das ein Gegenstand ist.

Und eben die Einheit von Eigenschaft und Gegenstand (von Verhalten und Sache) nannten wir ja den allgemeinen Inhalt des dialektischen Widerspruchs, der zugleich auch das Konkrete ist. Es wird somit in der konkreten Auffassung des Wertausdrucks von der Größe eines zu bewertenden Gegenstands erklärt, dass sie der Größe der Standardverknüpfung gleich sei und nicht umgekehrt! Dies kann man auch in der Weise zum Ausdruck bringen, dass man umgangssprachlich feststellt: "g_i ist γḑotg_0 wert".

Es ist zu empfehlen, die konkrete Auffassung der Gleichheit von der abstrakten im Symbolgebrauch dadurch zu unterscheiden, dass man das technische Zeichen / verwendet, um im Ausdruck das Subjekt vom Prädikat zu unterscheiden.
Wir schreiben also für die konkrete Gleichheit des Gegenstands a nach dem Gegenstande b allgemein "$a/ = b$"; für die abstrakte Gleichheit verbleiben wir beim Gebrauch von "$a = b$", der auch durch "$= (a, b)$" ersetzt werden kann.

Wir wissen nun, dass für die abstrakte Gleichheit $= (x, y)$ die Eigenschaften

$$= (x, x) \quad \text{und} \quad = (x, z) \wedge = (y, z) \Rightarrow = (x, y)$$

bestimmend sind. Mit Blick auf diesen Umstand stellt sich das Problem, ob man auch für die konkrete Gleichheit in analoger Weise eine Bestimmung angeben kann. Die Antwort ist positiv und von Marx speziell in der Gestalt der Entwicklung der Wertform gegeben werden.

4.1.2 Die Entwicklung der Wertform

Mit Bezug auf unseren Ausdruck "$g_i = \gamma \cdot g_0$" müssen wir nun davon ausgehen, dass er ein vollendetes Entwicklungsresultat ist.
Wir haben somit ein Evolutionsprodukt. Was wir aber brauchen, ist eine Evolutionsvoraussetzung, d.h. den denkbar einfachsten Wertausdruck. Man bemerkt wohl, dass wir mit solcher Sicht keineswegs die Absicht haben, unser Entwicklungsprodukt aus einer genetischen Voraussetzung zu erklären, die gar nichts mit Wertausdrücken zu tun hat.

Wir machen uns also nicht anheischig, eine gewisse Sache evolutiv zu erklären aus der Voraussetzung ihres Nichtseins, sondern halten uns an die gute alte materialistische Einsicht: Aus nichts wird nichts.
Demgemäß besteht das Problem der Wertformgenese nicht darin, dass überhaupt Wertformen existieren, sondern darin, wie aus der einfachen die vollendete Wertform wird. Wer von der Wertformentwicklung erwartete, sie würde uns erklären; wie Wertformen überhaupt zustande kommen, der ginge an der Marxschen Intention vorbei. Wer überhaupt ein Sein aus der Voraussetzung seines Nichtseins erklärt haben wollte, verlangte die Realisation einer Absurdität. Solche Erklärung kann niemals Inhalt irgendeiner Evolutionslehre sein.

Die Marxsche Antwort auf die Frage, was der Wertformentwicklung gegenständlich vorauszusetzen sei, besteht schlicht in der Angabe des einfachsten Wertverhältnisses. Es ist
"offenbar das Wertverhältnis einer Ware zu einer einzigen verschiedenartigen Ware, gleichgültig welcher. Das Wertverhältnis zweier Waren liefert daher den einfachsten Wertausdruck für eine Ware." (26.5; 53)

Betrachten wir diese Feststellung unter unserem generellen Gesichtspunkt, so besagt sie, dass der einfachste Wertausdruck durch zwei verschiedenartige, aber gattungsgleiche Gegenstände so gebildet wird, dass in "$a/=b$" der Gegenstand b den Wert des Gegenstands a reflektiert oder widerspiegelt.
Nehmen wir z.B. einen Holzstab und stellen wir mit diesem Mittel fest, dass es die Länge eines Menschen wiedergibt (um etwa zu wissen, wie lang wir seinen Mantel machen sollen), so haben wir genau die Situation hergestellt, die im Ausdruck "$a/=b$" in allgemeiner Form erscheint. Eine ähnliche Lage haben wir, wenn wir eine Sanduhr verwenden, um die Dauer des Kochens von Eiern zu reflektieren.
Dass wir dies überhaupt machen können, ist unsere Erfahrung auf Grund der Determination unserer Arbeit.

Wir halten fest: Die genetische Voraussetzung für die Entwicklung der Wertform ist die "einfache, einzelne oder zufällige Wertform" (26.5; 53), deren sprachlicher Ausdruck durch den Satz "$a/=b$" wiedergegeben wird. In ihm bezeichnet das Subjekt "a" den Gegenstand der Wertdetermination, das Objekt "b" das Mittel der Wertdetermination und das Prädikat "$=b$" die Eigenschaft des zu wertenden Gegenstands a.
Die beiden Objekte a und b stehen einander kategorial als "relative Wertform" und "Äquivalentform" gegenüber und bilden in dieser Gegenüberstellung polare Extreme, einander ausschließende und sich wechselseitig bedingende Gegensätze des Wertausdrucks. Als polare Extreme erscheinen sie in verschiedenen Objekten, deren konkreter Zusammenhang durch das Gleichheitsverhältnis gegeben ist. Und nur in diesem Verhältnis nehmen die Objekte die Stellung polarer Extreme ein. Unabhängig voneinander stellen sie keinen polaren Gegensatz dar!

Und unabhängig voneinander bringen die Objekte ihre Werte nicht zur Erscheinung; diese treten nur hervor in der Realisation des Wertverhältnisses. Die einzelne Wertform ist damit der Ausdruck, d.h. die Erscheinung des Werts, der seinerseits als Gattungsbestimmung den konkreten individuellen Sachverhalten selbst eigen ist. Der Wert ist das Allgemeine, das die konkreten (sich verhaltenden) Individuen enthalten und das im Wertverhältnis erscheint, wahrnehmbar auftritt, offenbar wird.
Es ist daher auch das geschichtlich sich entwickelnde Geschick in der allgemeinen Arbeit, Wertverhältnisse konstruktiv zu konstituieren. Die Tatsache der Evolution dieser Fähigkeit kann man ausgezeichnet studieren, wenn man z.B. die Geschichte der Technologie des Wägens verfolgt (33).

Haben wir mit der einzelnen Wertform die genetische Basis einer Wertformentwicklung, so besteht der erste Entwicklungsschritt in der Erzeugung der besonderen oder "totalen oder entfalteten Wertform" (26.5; 68). Dieser Schritt wird dadurch realisiert, dass wir mit Bezug auf den Gebrauch des Mittels b zur Bewertung des Gegenstands a angesichts der vielen möglicherweise eintauschbaren fremden Arbeitsprodukte Alternativen erfahren, nämlich statt b gegebenenfalls c oder d oder ... gegen a eintauschen zu können.
Im sprachlichen Ausdruck formulieren wir diese Erfahrung als logische Summe bzw. Adjunktion:

$$"a/ = b \vee a/ = c \vee a/ = d \vee ..."$$

Dieser Ausdruck liefert, wie wir meinen, eine logisch adäquate Rekonstruktion der Marxschen Angabe der besonderen Wertform: (26.5; 68)

$$"z \text{ Ware } A = u \text{ Ware } B \text{ oder } = v \text{ Ware } C \text{ oder} = w \text{ Ware } D \text{ oder } = x \text{ Ware } E \text{ oder} = \text{usw.}"$$

Marx' Ausdruck stellt einen im Prädikat erweiterten Elementarsatz dar (das "oder" fungiert hier also als Satzgliedverknüpfung, nicht als Satzverknüpfung!), während die hier formulierte Rekonstruktion einen komplexen Satz bzw. eine Satzverbindung bildet.
Die Annahme ist, dass jener erweiterte Elementarsatz und diese Satzverknüpfung denselben Sinn, die entsprechenden Urteile also dieselbe Bedeutung haben.

Der Übergang von der einzelnen zur besonderen Wertform ist offenbar vermittelt durch die Vorstellung einer Totalität möglicher Wertungsmittel, die ihrerseits den Tauschenden Wahlfreiheit in der Verwendung von Äquivalenten garantiert. Das mathematisch Interessante ist dabei die durch jene Totalität gesetzte potentielle Unendlichkeit. Das logisch Interessante ist, dass der Ausdruck der besonderen Wertform den Gebrauch des logischen Operierens einschließt.
Im Rahmen der Wertformentwicklung treten also Mathematik und Logik als Erkenntnismöglichkeiten in der zweiten Evolutionsstufe auf.

Es muss ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass die potentiell unendliche Adjunktion der besonderen Wertform nicht als generelles Urteil im Sinne einer Existenzbehauptung reformuliert werden kann.
Da nämlich der Ausdruck $\bigvee_x (a/ = x)$ die Voraussetzung eines definiten Bereichs von Wertungsmitteln x unterstellt, von der Existenz eines solchen Bereichs aber im Rahmen der Bestimmung der totalen Wertform nicht gesprochen werden kann, so müssen wir es bei der potentiell unendlichen Adjunktion $a/ = b \vee a/ = c \vee ...$ belassen. (Die Möglichkeit des Gebrauchs indefiniter Quantifikation können wir hier nicht diskutieren.)

Damit ist der Übergang von der einfachen zur entfalteten Wertform dominant konstruktiven Charakters. Er setzt genau jene Sicht des Unendlichen, die in der konstruktiven Mathematik theoretische Voraussetzung ist. Wohlgemerkt wird diese Sicht durch den ersten Evolutionsschritt in der Entwicklung der Wertform gesetzt, d.h. als Möglichkeit erzeugt, nicht als Realität gegeben.
Denn es ist klar, dass die Totalität der Wertungsmittel noch keineswegs eine Totalität mathematischer Objekte sui generis ist. Es ist aber ebenso deutlich, dass genau die Mittel die Möglichkeit konstituieren, Einheiten zu setzen und aufzuheben. Eben damit bereiten sie genetisch die Verwirklichung mathematischen Verhaltens vor.

Wenn nun das konstruktive Denken an der besonderen Wertform seinen protomathematischen Ausgang nehmen kann, so führt der zweite und abschließende Evolutionsschritt, die dialektische Negation der Negation der Position $a/ = b$, zur Etablierung der protomathematischen

Voraussetzung des deskriptiven Denkens, zur universellen oder "allgemeinen Wertform" (26,5; 70).
Die Erzeugung dieser Wertform erklärt Marx als Realisation einer Rückbeziehung (26.5; 70):

"Wenn ein Mann seine Leinwand mit vielen anderen Waren austauscht und daher ihren Wert in einer Reihe von andren Waren ausdrückt, so müssen notwendig auch die vielen andren Warenbesitzer ihre Waren mit Leinwand austauschen und daher die Werte ihrer verschiednen Waren in derselben dritten Ware ausdrücken, in Leinwand."

Indem wir diesen Umstand in Rechnung stellen, kehren wir die Stellung der Objekte im Wertausdruck so um, dass a nunmehr zum einzigen Reflexionsmittel wird, während die Objekte b, c, d, ... zu den vielen Gegenständen werden, deren Werte durch a widerzuspiegeln sind.
Wir gewinnen also "$b/ = a \wedge c/ = a \wedge d/ = a \wedge ...$" als den sprachlichen Ausdruck der universellen oder allgemeinen Wortform. An die Stelle der Totalität der Wertungsmittel tritt ein bestimmtes Universum von bewerteten Gegenständen, die alle auf genau ein Wertungsmittel bezogen sind.

Dieses Universum bildet ein Beispiel für den Sinn des Mengenbegriffs der Mathematik. Es ist also der zweite Evolutionsschritt in der Entwicklung der Wertform, der die protomathematische Voraussetzung für die Realisation des deskriptiven Denkens liefert.

Man kann gegen unsere Interpretation der Marxschen Wertformentwicklung einwenden, dass wir es doch außerhalb des Marktes, außerhalb des Warenaustauschs nicht mit "Besitzern" von Objekten zu tun haben, die relativ zu anderen als Wertungsmittel auftreten und daher in der Rückbeziehung auch als Wertungsgegenstände zu denken sind.
Wägt jemand, so gebraucht er als eine Person den Gegenstand a und das Mittel b; das Mittel tritt mithin nicht als Eigentum einer anderen Person ins Spiel!
Wo also soll außerhalb des Warenaustauschs der plausible Grund für den Sinn der Rückbeziehung zu suchen sein?

Diese Frage kann nicht positiv beantwortet werden, solange man auf dem Standpunkt steht, die Erkenntnisarbeit als individuelle Tätigkeit vorauszusetzen. Sie wird aber sofort positiv entscheidbar, wenn wir die Erkenntnis - wie die Arbeit überhaupt - als kollektive Tätigkeit unterstellen. Wenn wir ausschließen, dass sozusagen Robinsons arbeiten und mithin erkennen können, also positiv behaupten, dass Subjekte der Arbeit wie des Erkennens niemals etwas anderes als wirkliche Kollektive, wirkliche Gemeinschaften sind, so wird die von Marx erkannte Rückbeziehung im Warenaustausch als allgemeines Phänomen der Wertbildung überhaupt erkennbar.

Solch positive Behauptung besitzt eine höchst einfache Legitimation: Ist es nämlich richtig, dass alles realisierte Erkennen, weil theoretisch bestimmte Modellerzeugung, notwendig in Sprache erscheinen muss, dass weiter keine Individualsprache existiert (als Kommunikationsmittel ist sie wenigstens durch die Existenz eines Senders und eines Empfängers bedingt!), so ist klar, dass sich alles Erkennen als Gattungs- oder Gemeinschaftsleistung ausweist.
Demnach gibt es individuelle nur als Momente der gemeinschaftlichen Erkenntnisse, wird das Produkt eines individuellen Denkens wirkliches Erkennen wenn es vergesellschaftet wird. Marx sagt (26.1; 267)

"Zum Beispiel in der Wissenschaft kann ein 'Einzelner' die allgemeine Angelegenheit vollbringen, und es sind immer Einzelne, die sie vollbringen. Aber wirklich allgemein wird sie erst, wenn sie nicht mehr die Sache des Einzelnen, sondern die der Gesellschaft ist. Das verändert nicht nur die Form, sondern auch den Inhalt."

Wie also ist die Realisation der Rückbeziehung außerhalb des , Warenaustauschs (i.e. außerhalb des Standpunkts des Privateigentums!) zu erklären?
Offensichtlich durch den einfachen Umstand, dass eine Totalität von Wertungsmitteln in einem Gemeinwesen die Wertung selbst höchst kompliziert macht, sie nicht als genuin kollektive Leistung zur Erscheinung bringt. Demzufolge müssen wir die Rückbeziehung als kollektive Leistung per se ansehen. Es ist das Gemeinwesen im Unterschied (nicht in analytischer Trennung!) zu seinen Individuen, die ihre eigenen Wertungsmittel im Rahmen der Totalität der besonderen Wertform verwenden, welches durch einen Akt der sozialen Normierung (z.B. durch einen Erlass) genau ein Wertungsmittel festsetzt.

Verwendet die Person A z.B. ihre Elle als Mittel der Längenwertung, die Person B ihren Fuß, so wird das Gemeinwesen in Gestalt seiner Repräsentanten dekretieren: Das allgemein verbindliche Wertungsmittel für Längen ist das Meter!
Dabei ist klar, dass solche Einschränkung der Gesamtheit der Wertungsmittel auf genau ein Objekt keine Rückkehr zur einfachen Wertform schlechthin ist. Die Ellen und Füße sind im Meter ausdrückbar, also im Hegelschen Sinne aufgehoben! Die wirklichen Ausdrücke dafür zu finden, ist bereits gesetztes mathematisches Verhalten. Es besteht ja in der Lösung der Aufgabe anzugeben, wie oft z.B. ein Fuß in einem Meter enthalten ist. Und eben in der Lösung dieser Aufgabe werden - nach unseren schon gemachten Bemerkungen - die natürlichen Zahlen als Reflexionsmittel gegenständlicher Anzahlen geboren.

Wir halten also fest: Die Marxsche Erklärung des Übergangs in die allgemeine Wertform ist mit Bezug auf außerökonomische Umstände aufrechtzuerhalten, sobald man die Voraussetzung macht, das Subjekt der Erkenntnis als Kollektivum zu unterstellen. Dies ist eine für den Nominalismus und philosophischen Konstruktivismus (z.B. Kantianismus) inakzeptable Annahme. Denn für diesen gibt es "wirklich" nur die sogenannten "konkreten Einzeldinge"; allgemeine Dinge als solche (eben Kollektiva) gelten ihm jederzeit nur als "reine Abstrakta".

Passen wir nun die allgemeine Wertform unter logischen Gesichtspunkten ins Auge, so sehen wir, dass sie sich von der besonderen Wertform dadurch unterscheidet, dass sie eine Konjunktion von Ausdrücken ist, in denen verschiedenen Wertungsgegenständen stets dasselbe Wertungsmittel gegenübersteht. Unterstellen wir nun den Bereich aller möglichen Wertungsgegenstände, deren Werte durch das Wertungsmittel repräsentiert werden können, als gegeben und eben durch dieses Mittel determiniert, so können wir die allgemeine Wertform sprachlich auch durch das Universalurteil $\bigwedge_x (x/ = a)$ zum Ausdruck bringen. Sie impliziert nach den Gesetzen der formalen Logik das Existenzurteil $\bigvee_x (x/ = a)$, besagt also auch, dass es wenigstens einen Wertungsgegenstand gibt, sobald es ein Wertungsmittel gibt. Man beachte aber, dass dieses Existenzurteil keineswegs eine Reformulierung der besonderen Wertform ist.

Wir stellen demnach fest: Die Wertformentwicklung realisiert in der ersten Negation die Verwendung logischer Junktoren und in der zweiten die Verwendung logischer Quantoren, sofern sie unter dem Gesichtspunkt ihres sprachlichen Ausdrucks betrachtet wird (und alle formale Logik bezieht sich auf Sprache).

Es versteht sich, dass diese Feststellung hier nur propädeutischen Charakter haben kann. Was sie also mit Bezug auf die philosophische Fundierung der formalen Logik bedeutet, muss jenseits unserer Überlegungen verbleiben.
Stellen wir nun die Evolutionsstufen der Wertformentwicklung zusammen, so haben wir:

1. Position: $a/=b$.
2. Negation: $a/=b\vee a/=c\vee a/=d\vee ....$
3. Negation der Negation: $\bigwedge_x(x/=a)$.

Diese drei Stufen bestimmen zusammen den dialektischen Begriff der konkreten Gleichheit, den wir gesucht haben. Man beachte, dass sie alle drei ein immanentes zeitliches Verhältnis zueinander besitzen: Zuerst ist die einzelne Wertform $a/=b$, danach ist die besondere Wertform $a/=b\vee a/=c\vee ...$ und anschließend endlich ist die allgemeine Wertform $\bigwedge_x(x/=a)$ gegeben.
Es ist übrigens solche Einheit des Einzelnen, Besonderen und Allgemeinen vernünftigerweise gemeint, wenn Hegel vom konkreten Begriff erklärt (14.3; 239):

"Dieser ... Begriff ... enthält die drei Momente: Allgemeinheit, Besonderheit und Einzelheft."

Zu zeigen was es mit solcher Angabe auf sich hat, dass es also nicht nur Ausdruck "mystischer Wesensschau", sondern Bestimmung eines wirklichen Phänomens ist, das ist die Leistung der Marxschen Wertformentwicklung.
Mit ihr wird daher deutlich, wie die Aufgabe der "materialistischen Umstülpung" der Hegelschen Dialektik rationell zu lösen ist. Dass solche Lösung zugleich die Grundlage für die dialektisch-materialistische Theorie der philosophischen Basis der Mathematik schafft, ist natürlich besonders erfreulich.

Wie können wir nun diese Grundlage wirklich gebrauchen, um zur philosophischen Fundierung des mathematischen Tuns zu gelangen?

4.2 Konstruktion und Deskription von Wertsystemen

Unser formuliertes Problem lässt sich speziell auch wie folgt formulieren:
Wie kommen wir vom dialektischen Begriff der konkreten Gleichheit, der durch die drei Wertformen bestimmt wird, zum mathematischen Begriff der abstrakten Gleichheit, der durch die Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bestimmt ist?

Nach der Auffassung des Verfassers ist dieser Übergang durch die Existenz der allgemeinen Wertform gesetzt, also als Möglichkeit erzeugt (das Setzen ist das Erzeugen von Möglichkeiten, die ihrerseits damit dialektisch nicht als "an sich existierend" verstanden werden!).

Betrachten wir nämlich zwei beliebige Glieder der universellen Wertform in ihrer konjunktiven Verknüpftheit, so fällt sofort auf, dass eine solche Konjunktion, also z.B. das logische Produkt $b/=a\wedge c/=a$, bereits fast wie die hinreichende Bedingung in der bekannten Drittengleichheitseigenschaft der abstrakten Gleichheit gestaltet ist. Diese hat ja die Form

$$b=a\wedge c=a\Rightarrow a=b$$

Demnach muss der Übergang von der konkreten zur abstrakten Gleichheit dadurch vermittelt werden, dass wir von der Artverschiedenheit der Wertungsgegenstände abstrahieren und behaupten, dass ihre so konstituierte abstrakte Gleichheit die notwendige Bedingung dafür ist, das logische Produkt $b/=a\wedge c/=a$ auf das logische Produkt $b=a\wedge c=a$ zu reduzieren.
Wir gehen also von der konkreten Gleichheit zur abstrakten über, wenn wir uns entschließen, die Artverschiedenheit der Wertungsgegenstände zu ignorieren, sie allein als Objekte einer gegebenen Gattung zu betrachten. Dabei ist weiter unterstellt, dass wir das Wertungsmittel a tatsächlich als Einheit bestimmen und mithin die Geltung des Ausdrucks "$a=a$"annehmen.

Unsere Frage nach dem Übergang von der konkreten zur abstrakten Gleichheit wird mit dieser Überlegung sozusagen schlicht dadurch beantwortet, dass gefordert wird: Man abstrahiere!
Angesichts dieser Feststellung tritt erneut ein Schein ein, nämlich der einer tautologischen Antwort: Der Übergang in die abstrakte Gleichheit soll durch Abstraktion erfolgen! Dieser Schein von Tautologie verschwindet aber sofort, wenn wir sorgfältig das Tun des Abstrahierens von seinem Produkt unterscheiden.
Mit solcher Unterscheidung ist selbstverständlich die abstrakte Gleichheit als Resultat des Abstrahierens zu verstehen, dessen gegenständliche Voraussetzung gerade die konkrete Gleichheit ist. Zugleich ist damit das Abstrahieren überhaupt als ein Tun bestimmt, welches von der (qualitativen) Artverschiedenheit der Individuen einer vorausgesetzten Gattung absieht, d.h. alle Arten einer Gattung als gleich geltend setzt.

Die Abstraktion steht daher immer auf dem Standpunkt der Gattung, der sozusagen alle ihre Arten gleich lieb sind. Die Abstraktion, das ist sehr wichtig, besteht also nicht darin, die Arten einer Gattung für nichtig zu setzen, sondern darin, von ihren Unterschieden gegeneinander abzusehen. Die bekannte Zwiebeltheorie der Abstraktion, nach welcher das Abstrahieren angeblich darin bestehen soll, nacheinander alle möglichen Eigenschaften (Arten) "wegzudenken", um sodann den gesuchten Schatz zu finden, ist eine Vorstellung, würdig dem sozialen Bewusstsein von Privateigentümern, welche die objektive Existenz der Gattung nicht zu denken imstande sind.

In Wahrheit ist es so, dass die Abstraktion die Existenz einer Gattung voraussetzt und damit im Gleichsetzen ihrer Arten besteht.
Es ist klar, dass mit der Realisation der allgemeinen Wertform eine Gattung von Wertungsgegenständen gegeben ist, die ihrerseits im Sinne des Begriffs der konkreten Gleichheit genau als artverschieden unterstellt sind. Indem nun von dieser Artverschiedenheit abstrahiert wird, kommt auch der Übergang von der konkreten Gleichheit zur abstrakten zustande.

Diese Abstraktion erscheint auf der Seite des Wertungsmittels a sprachlich durch Behauptung von "$a = a$" und auf der Seite der Wertungsgegenstände durch Behauptung von "$b = c$" als notwendige Bedingung für die Konjunktion "$b = a \wedge c = a$", die selbst damit zur hinreichenden Bedingung eben für "$b = c$" wird.
Was man an diesem Übergang philosophisch zu begreifen hat, das ist der Umstand, dass die konkrete Gleichheit mithin die abstrakte als ihr Moment enthält, dass also das Konkrete das Abstrakte setzt (aber nicht umgekehrt!).

Das bedeutet zugleich, dass die Termini "Konkretes" und "Abstraktes" keine realen Extreme bezeichnen. Das Konkrete schließt das Abstrakte ein; der Entschluss zur Abstraktion besteht daher darin, dieses Eingeschlossene als solches zum Arbeitsgegenstand zu machen, also als Abstraktum zu realisieren.
Ist es realisiert und damit neuer Arbeitsgegenstand, so ist das Konkrete, wie man im Deutschen seit Hegel sehr korrekt sagen kann, "zugrunde" gegangen, zum Grund der realen Existenz des Abstrakten geworden, der selbst im Realabstraktum nicht mehr erscheint. Dies ist der Mechanismus der Aufhebung des dialektischen Widerspruchs durch die Abstraktion, weshalb die Widerspruchsfreiheit im Bereiche der Abstrakta auch Fundamentalgesetz der Erkenntnis ist.

Das durch die moderne Grundlagenforschung seit Gödel konstatierte Phänomen der Nichtbeweisbarkeit der absoluten Widerspruchsfreiheit im Rahmen hinreichend ausdrucksstarker formalisierter Theorien ist daher dadurch zu erklären, dass die fraglichen Beweismittel erst unter der Voraussetzung der realisierten Abstraktion gebildet werden, also allemal sich auf abstrakte

Objekte beziehen. (Man hat schon den Begriff der Kontradiktion nicht wirklich ohne diese Voraussetzung!)

Mit der hier vorgestellten Beschreibung des Übergangs vom Konkreten zum Abstrakten ist auch deutlich, dass das berühmte "Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten" nichts anderes als die erneute Berücksichtigung der Artverschiedenheit sein kann.
Solche Berücksichtigung wird wesentlich, wenn wir uns für die empirische Geschichte der Ausbildung eines Gattungsstandards interessieren. Aus dem konkret-allgemeinen Begriff der Gleichheit folgt nämlich keineswegs, warum es nun gerade das Gold war, welches in normierten Einheiten zum Wertstandard für die Waren wurde.

Es muss also aus der Art des Goldes in der Gattung der Waren erklärt werden, weshalb es zum Reflexionsmittel der Warenwerte werden konnte. Ebenso hat es etwas mit den Persönlichkeitseigenschaften z.B. von Robespierre zu tun, dass er in einer empirisch bestimmten historischen Situation zum Modell des jakobinischen Citoyen wurde Selbstverständlich gehört zu dieser Entwicklung auch die Berücksichtigung der anderen Arten, die von den beteiligten Individuen geäußert werden.
Robespierre z.B. hatte den Kampf mit Danton zu bestehen, nicht mit dem dinglichen Vertreter eines Abstraktums!

Das "Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten" ist also für die wissenschaftliche Bewältigung der faktischen Geschichte von grundsätzlicher methodologischer Bedeutung.
Das aber ist im Rahmen der Konstitution des mathematischen Erkennens nicht der Fall. Ist nämlich unsere propädeutische Vorstellung der Geburt der natürlichen Zahlen richtig, so versteht es sich, dass die Mathematik an der Existenz des Bewertungsmittels der universellen Wertform ihren Ausgang besitzt. Sie wird gesetzt, wenn wir uns 1. zur Kopierung des Wertstandards entschließen und 2. zur operativen Verknüpfung der erzeugten Kopien.

Sie wird aufgehoben, wenn wir die darin erzeugten natürlichen Zahlen nunmehr zu den gegebenen Objekten des Erkennens machen. Mit der allgemeinen Wertform $\bigwedge_x (x/ = o)$ läuft also die Setzung der Mathematik darauf hinaus, 1. die Behauptung $o = 1 \cdot o$ und 2. die Behauptung

$$z \cdot o = \underbrace{o + o + ... + o}_{z-\text{mal}}$$

als geltende Urteile der Analytik des Wertungsmittels anzunehmen. Syntaktisch erscheint diese Setzung so, dass wir nunmehr statt des einen Zeichens o (für "Original") vielmehr das zusammengesetzte Zeichen $1 \cdot o$ haben.

Diese Erscheinungsweise kann man bei Marx anlässlich seiner Darstellung des Übergangs von der allgemeinen Wertform zur "Geldform" (26; 75) nachlesen: "x Ware $A = 2$ Unzen Gold".
Dieser Ausdruck ist in seiner mathematischen Bedeutung sofort zu verstehen, wenn wir ihn inhaltsgleich (sinngleich) ersetzen durch den Ausdruck "x Ware $A = 2$ mal eine Unze Gold". Im Term "2 mal" ist die Mathematik gesetzt!

Der Übergang von der empirischen Wertdetermination zur rein mathematischen kann nun wieder dadurch erklärt werden, dass wir angesichts des Gebrauchs artverschiedener Originale genau von ihrer Artverschiedenheit abstrahieren, d.h. die verschiedenen Originale o_i, o_j, ... auf ihre Gattungsbestimmtheit, Einheiten zu sein, reduzieren.
In dieser Reduktion zeigen sie uns nichts sonst mehr als die arithmetische Eigenschaft, eins zu sein.

Damit gehen die obigen Behauptungen in (1) $1 = 1 \cdot 1$ und (2) $z = 1 + 1 + ... + 1$ (z-mal) über, d.h in arithmetische Feststellungen. Mit dieser Charakterisierung ist offenbar die Sicht der deskriptiven Mathematik getroffen:

Unsere abstrakten Werte 1 und z sind als gegenständliche Eigenschaften der Gattung aller Einheiten und Einheitenverknüpfungen zu verstehen. Setzen wir diese Gattung theoretisch (oder hypothetisch) als gegeben und bestimmt voraus, so reflektieren die mathematischen Objekte objektive, d.h. gegenständliche Verhältnisse.
Dies ist der wirkliche Sinn der sogenannten "realistischen" Auffassung der mathematischen Objekte, die in der bürgerlichen Philosophie sowohl durch den objektiven Idealismus (Platonismus) wie durch den metaphysischen Materialismus zum Ausdruck gebracht wird.
Man kann sich jedoch auch auf den Standpunkt stellen, dass die effektive Aufhebung der durch $o = 1 \cdot o$ und

$$z \cdot o = \underbrace{o + o + ... + o}_{z-\text{mal}}$$

gesetzten mathematischen Objekte nicht anders zu bewerkstelligen ist als dadurch, dass man wirklich ein Alphabet erzeugt, um die Zahleigenschaft für das Erkennen zu realisieren. Denn erst mit dem wirklichen Zeichengebrauch im mathematischen Erkennen ist klar, was gemeint ist.
In diesem Sinne würde die Aufhebung der durch die Einführung von Standardeinheiten gesetzten mathematischen Objekte gerade dadurch geschehen, dass man Grundfiguren der Art I erzeugt und erklärt, dass aus ihnen "abgeleitete" Figuren nach dem Schema $z \Rightarrow zI$ zu bilden sind.

Unter Abstraktion von der Artverschiedenheit in der gestaltlichen Ausführung der Figuren I sind sie dann als Ziffern zu betrachten, die Zahlen darstellen. Mit dieser Charakterisierung ist offenbar die Sicht der konstruktiven Mathematik getroffen:
Unsere abstrakten Werte 1 und z sind als Handlungseigenschaften der Gattung I aller Standardreproduktionen und Kopienzusammensetzungen zu verstehen. Setzen wir die Gattung der elementaren Reproduktionen und Verknüpfungshandlungen als gegeben voraus (d.i. die Existenz des Handelns an sich!), so reflektieren die mathematischen Objekte subjektive, d.h. im Tun der Subjekte realisierte Verhältnisse.

Dies ist der wirkliche Sinn der sogenannten "nominalistischen" Auffassung der mathematischen Objekte, die in der bürgerlichen Philosophie sowohl durch den subjektiven Idealismus (z.B. Intuitionismus) wie durch den philosophischen Konstruktivismus vorgestellt wird.

Betrachten wir diesen Gegensatz von Konstruktion und Deskription (von Erfindung und Entdeckung) am Ende unserer Exkursion noch einmal mit Blick auf die vorgestellte genetische Erklärung der Existenz der natürlichen Zahlen genauer.
Denn er ist die alles bestimmende Situation im Reiche der philosophischen Basis der Mathematik.

Wir hatten festgestellt, dass objektive Anzahlen von Gegenständen in der subjektiven Determinationsleistung durch Anzahlen von Einheitenkopierungen subjektiv widergespiegelt werden: Die Anzahl der Kopierungsakte reflektiert also die Anzahl der Gegenstände, die wir mit einem realen Kollektiv vor uns haben.
Dabei ist klar, dass wir die Anzahl der Gegenstände nicht gemacht, sondern vorgefunden haben. Und es ist ebenso klar, dass wir die Anzahl der Kopierungsakte wirklich machen, also nicht vorgefunden haben. Und schließlich versteht sich, dass die gemachte Anzahl von Elementar-

handlungen (aus denen sich das Zählen zusammensetzt) die nicht gemachte Anzahl von realen Objekten eines Kollektivs im genauen Sinne der materialistischen Widerspiegelungstheorie abbildet.

Aber das eigentümliche Phänomen dieser Widerspiegelung besteht darin, Prozesse als Spiegel von Objekten hervorzubringen. Und ebenso besteht es darin, Dinge als Spiegel von Verhältnissen, Sachen mithin als Spiegel von Verhaltensarten zu gebrauchen (die Zahl als Spiegel von Größenverhältnissen ist hiervon das allgemeine Musterbeispiel).
Indem dies der Fall ist, stehen sich Spiegel und Gespiegeltes also offensichtlich nicht als zwei Objekte gegenüber; das Tun ist notorisch kein Ding, und das Ding löst sich ungeachtet der Meinung Fichtes, Schellings und Hegels nicht (übrigens auch der Strukturalisten, welche die "Substanz" durch die "Struktur" ersetzt sehen) in reines Tun oder Verhältnis (als Schema des Verhaltens) auf.

Sie bleiben für einander Gegensätze, die in der Wirklichkeit konkrete Einheiten bilden, welche jedem bekannt sind, der in der Sprache mit den Satzgliedern des Subjekts und des Prädikats ihre Zeichen zu gebrauchen gelernt hat.
Es ist hier nur das gewöhnliche Unglück des Bekannten, nicht erkannt zu sein, das zur philosophischen Problemstellung führt. Und es ist die Erkenntnisarbeit selbst, welche die konkrete Einheit von Ding und Tat, von Sache und Verhalten, von Gegenstand und Eigenschaft (Relation) nun so umbildet, dass die Tat des Subjekts zum Spiegel der Objekte wird wie die verdinglichte Tat zum Spiegel der Verhältnisse!

Natürlich ist dabei das Subjekt immer als handfest arbeitendes Gemeinwesen vorauszusetzen, also als ebenso materiell wie sein Objekt.
Es wäre für dialektisches Denken verhängnisvoll, Materialität und Objektivität als gleichwertige Bestimmungen zu betrachten.

Mit solcher Gleichsetzung muss die Subjektivität aus logischen Gründen nolens volens außerhalb der Materialität angesiedelt, also positiv als Idealität bestimmt werden. Also muss unter dieser Voraussetzung das philosophische In-Rechnung-Stellen des Subjekts unweigerlich unter dem Verdacht des Idealismus stehen.
Das ist aber nur die Farce auf die vorausgesetzte Tragödie, das Subjekt überhaupt als Existenz der Idealität zu unterstellen. Diese Tragödie ist nichts als die ideelle Reflexion der wirklichen Vernichtung des Gemeinwesens durch die Durchsetzung des Privateigentums. Und das Gemeinwesen ist das wirkliche Subjekt.

Indem es enteignet wird, also das Gemeineigentum in Privateigentum übergeht, muss daher das wirkliche Subjekt als Ideal oder Gesamtheit von Idealen (als eine Welt der Werte!) erscheinen, gegen das die schnöde Wirklichkeit in der Gestalt des Geldes bestimmt ist, welches obendrein der Gegenstand der "materiellen" Interessiertheit sein soll.
Diese absurde Verkehrung aufzuheben, ist der allgemeine Inhalt der sozialistischen Revolution. Indem sie das Gemeineigentum wieder herstellt, also die Realität des Gemeinwesens materiell entfaltet, wird für die Philosophie des Sozialismus auch zunehmend wahrnehmbar, dass die Subjektivität (a) Kollektivität und (b) Materialität einschließt, und dass die (von Platon entdeckte) Idealität im Tun des kollektiven Subjekts hervorgebracht wird.

Mit solcher Wahrnehmung aber hört die Dialektik auf, dasjenige zu sein, auf das man verweist, wenn man weiter nicht mehr imstande ist, einen Sachverhalt zu erklären.
Sie erweist sich dann definitiv als das, was Hegel und die Klassiker des Marxismus-Leninismus von ihr gesagt haben: objektiv das Allgemeine der Entwicklung zu sein und subjektiv die

allgemeine Entwicklungstheorie.

Indem nun Prozesse und Objekte zueinander im Verhältnis der Widerspiegelung stehen, ist einsichtig, dass der Versuch, die Erkenntnisarbeit hinsichtlich ihres Resultats etwa im Sinne der Konstituierung einer Isomorphierelation (oder abgeschwächt einer Homomorphie) zu deuten, unweigerlich scheitern muss.
Es gelingt ganz einfach nicht, die Taten und die Dinge als Elemente zweier zugleich gegebener verschiedener Mengen festzustellen.

Wenn die Tat wirklich ist, ist das sie spiegelnde Produkt noch nicht wirklich; wenn letzteres wirklich ist, hat die sie erzeugende Tat aufgehört, wirklich zu sein! Daher können wir Tat und Ding nicht zur analytischen Äquivalenz bringen; die mutige Proklamation der letzteren (behauptet von Hegel) wäre vielmehr eine Absurdität.
Was bleibt, das ist der veräußerlichte Gegensatz von Tat und Ding. Und dieser ist es, der dem Gegensatz von Konstruktion und Deskription zugrunde liegt. Er ist damit die Erscheinung des dialektischen Widerspruchs, wie er der Mathematik als Grund ihrer Existenz dient. Es ist daher nicht zu erwarten, dass der Gegensatz von konstruktiver und deskriptiver Mathematik im Sinne eines Nachweises gelöst wird, dass das eine der Extreme logisch durch das andere impliziert wird.

Diese Prognose bedeutet natürlich nicht, dass konstruktive und axiomatische Mathematik nicht aufeinander bezogen werden können. Sie besagt nur: Wird die Sprache der Mathematik im Sinne eines universellen Ausdrucksmittels entfaltet, so wird sie immer einerseits als Sprache über identische Dinge und andererseits als Sprache über geregelte Handlungen auftreten. Da beide nicht aufeinander reduzierbar sind (im Sinne der Analytik), so kann es keine Universalsprache geben!
Selbstverständlich aber kann es die subjektiven Meinungen geben, dass "wahre" Mathematik axiomatisch oder konstruktiv sein müsse. Solche Meinungen sind jedoch philosophisch nur als Ausdrücke für das Fehlen dialektischer Kenntnis zu halten. Sie sind Meinungen in einer Situation, in der sich spezielle Arten einer Gattung in der Regel für die Gattung halten.

Zum Abschluss unserer Überlegungen wollen wir noch das offene Problem andeuten, ob und wie die Dialektik in mathematischen Ausdrücken auftritt. Wir hatten weiter oben gesagt, dass mit der Unterscheidung der abstrakten von der konkreten Gleichheit die Sprache der Mathematik nicht die Sprache der Dialektik sein kann, dass mithin die Mathematik in ihren Produkten die Dialektik nicht unmittelbar darstellen kann, d.h. nicht die wesentliche Erscheinung der Dialektik ist.
Insofern ist unser Problem entschieden. Man kann nun aber - im Sinne der Marxschen Theorie der Wertformunterscheidung und -entwicklung - feststellen, dass z.B. der Ausdruck

$$"z = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{z-\text{mal}}"$$

offenbar wieder als ein (mathematischer) Wertausdruck behandelt werden kann, in dem die natürliche Zahl z die Stellung der relativen Wertform und die z-fache Verknüpfung $1+1+...+1$ die Stellung der Äquivalentform hat.
Somit stehen sich die eine natürliche Zahl und die additive Verknüpfung von Reduplikationen der Zahl 1 als polare Extreme gegenüber. Fragen wir nun, welches Wesen der Zahl z diese Äquivalentform reflektiert, so fragen wir auch, was es denn sei, das die Zahl z von der z-fachen Verknüpfung $1 + 1 + ... + 1$ unterscheidet! Hat also z etwas an sich, was diese Verknüpfung nicht an sich hat?

Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass der Unterschied doch offensichtlich sei: z ist eben keine Verknüpfung, aber der Term $1 + 1 + ... + 1$ ist eine! Beachten wir jedoch unsere Feststellung über den Begriff der natürlichen Zahl, so ist klar, dass z esoterisch enthält, was der Term $1 + 1 + ... + 1$ exoterisch deutlich macht. Und weiter ist klar, dass z in allen Zusammenhängen, in denen sein Erscheinen gegeben ist, durch den Term $1+1+...+1$ ersetzt werden kann, ohne dass sich an der Geltung der entsprechenden mathematischen Behauptung irgend etwas ändert. Das bedeutet aber:

Die "Äquivalentform" $1 + 1 + ... + 1$ stellt nicht nur - wie im empirischen Fall - das Wesen der relativen Wertform vor, sondern sie stellt alles vor, was in dem Gegenstande enthalten ist, der die Stellung der relativen Wertform hat. Mit anderen Worten:
der Unterschied von z und $1+1+...+1$, der doch wahrnehmbar und unbestreitbar vorhanden ist, liefert nur einen, allerdings objektiven Schein von Dialektik, d.h. von polarer Entgegensetzung in Äquivalent und relativen Wert. Die Entgegensetzung ist scheinbar gegeben, aber in (mathematischer) Wirklichkeit ist die Äquivalenz bzw. Identität in Erscheinung getreten!

Angesichts des aufgezeigten objektiven Scheins wollen wir an die berühmte Lehre von Kant erinnern, welcher die Dialektik "als eine Logik des Scheins" (16; 232 ff.) angenommen hat, eines Scheins, der nach Kant unweigerlich eintritt, wenn wir die Kategorien nicht nur verständig (mit Blick auf die theoretische Organisation des empirischen Stoffs), sondern überdies auch vernünftig gebrauchen, nämlich als Mittel der Bestimmung des Unbedingten, d.h. - in der hier formulierten Auffassung - als Mittel der Bestimmung des Konkreten.
Was wir nun wahrnehmen, ist vielmehr umgekehrt der objektive Schein oder Widerschein der Dialektik in der Analytik, insbesondere in der Mathematik als dem theoretischen Fundament der Analytik. Wir finden also, um in Kants Sprache zu bleiben, die Analytik als eine Dialektik des Scheins - und zwar eines notwendigen Scheins, der noch immer den Gegensatz von Handlung (Operation) und Ding (mathematisches Objekt als Produkt der Handlung) wiedergibt.

Es dürfte interessant sein, diesem Phänomen genauer nachzugehen, um den Gesamtzusammenhang von Mathematik und Dialektik umfassend zu begreifen. Hypothetisch können wir annehmen:
Während die Dialektik vom Widerspruch ausgeht, um ihn in der Wertformentwicklung durch Veräußerlichung der Gegensätze in polare Extreme zu lösen, geht die Mathematik von der Widerspruchsfreiheit oder Identität aus, um sodann in der Formulierung von Gleichungen den Widerschein der Existenz polarer Extreme zu erzeugen.
Bedeuten also polare Extreme für die Dialektik wirklich verdinglichte Gegensätze, so nehmen die beiden Seiten mathematischer Gleichungen zum Schein den Charakter, polarer Extreme an. Indem dieser Schein objektiv ist und unweigerlich eintritt, liefert die Mathematik die Dialektik des Scheins, nicht aber die wirkliche Dialektik, die die Philosophie entfaltet.

5 Verzeichnis der angeführten Literatur

Die hier angegebenen Ordnungszahlen stehen im Text an der ersten Stelle in der Klammer, die den Nachweis notiert; die an der zweiten Stelle aufgeführten Zahlen geben die entsprechende Seitenzahl an.

(1) Adorno, T. W.: Negative Dialektik. Frankfurt/M.: Suhrkamp Verlag 1975 (stw 113). Erstaufl. 1966

(2) Aristoteles : Politik. Dt. Übers. v. E. Rolfes. Leipzig: F. Meiner 1912 (Phil. Bibl. 7)

(3) Asser, G. : Zum Verhältnis von Mathematik und objektiver Realität. In: Deutsche Zeitschrift für Philosophie (DZfPh) 13 (1965) 2. S. 173-176

(4) Autorenkollektiv : Einführung in den dialektischen und historischen Materialismus. Berlin: Dietz Verlag 1971

(5) Bourbaki, N. : Eléments de mathématique. Paris: Hermann & Cie (erscheint fortlaufend)

(6) Bahr, M./Irrlitz, G.: Der Anspruch der Vernunft. Die klassische bürgerliche deutsche Philosophie als theoretische Quelle des Marxismus. Berlin: Akad.-Verlag 1968 (Köln: Pahl-Rugenstein 1976)

(7) Carnap, B.: Logische Syntax der Sprache. 2. Aufl.; Wien/ New York: Springer-Verlag 1968

(8) Dieudonné, J.: Sollen wir "Moderne Mathematik" lehren? In: Mathematiker über die Mathematik. Hg. von M. Otte. Berlin(W)/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1974. S. 403-416

(9) Einstein, A.: Geometrie und Erfahrung. In: Ders., Mein Weltbild. Hg. v. C. Seelig. Berlin(W): Ullstein 1960 (Erstaufl.: Amsterdam 1934). S. 119-127 .

(10.1) Engels, F.: Umrisse zu einer Kritik der Nationalökonomie. in: Marx/Engels: Werke (MEW), Bd. 1. Berlin: Dietz Verlag 1957. S. 499-524

(10.2) Engels, F.: Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft, In: MEW, Bd. 20. Berlin: Dietz Verlag 1962. S. 5-303).

(10.3) Engels, F.: Dialektik der Natur. In: MEW, Bd. 20. S. 307 bis 568

(10.4) Engels, F.: Ludwig Feuerbach und der Ausgang der klassischen deutschen Philosophie. In: MEW, Bd. 21. Berlin: Dietz Verlag 1962. S. 263-307

(11) Erpenbeck, J./Hörz, H.: Philosophie contra Naturwissenschaft? Berlin: VEB DVW 1977

(12) Gödel, K.: Russell's mathematical logic. In: The philosophy of Bertrand Russell. Ed. by P. Schillp. New York: The Tudor Publ. Comp. 1944

(13) Goodstein, R. L.: Empiricism in mathematics. In: Dialectica 23 (1969) 1. S. 50-57 3

(14.1) Hegel, G. W. F. : Phänomenologie des Geistes. Hg. v. J. Hoffmeister. Berlin: Akad.-Verlag 1964

(14.2) Hegel, G. W. F.: Wissenschaft der Logik. Erster Teil. Hg. v. G. Lassen. Leipzig: F. Meiner 1950

(14.3) Hegel, G. W. F.: Wissenschaft der Logik. Zweiter Teil

(14.4) Hegel, G. W. F.: Encyclopädie der philosophischen Wissenschaften. Hg. v. J. Hoffmeister. Leipzig: F. Meiner 1949

(14.5) Hegel, G. W. F.: Einleitung in die Geschichte der Philosophie. Hg. v. J. Hoffmeister. Berlin: Akademie-Verlag. 1966

(15) Heitsch, W. : Mathematik und Weltanschauung. Berlin: Akademie-Verlag 1976 (2. bearb. Aufl.: 1978)

(16) Kamke, E. : Mengenlehre. 5. Aufl.; Berlin(W) : W. de Gruyter 1965 (Sammlg. Göschen Bd. 999/999a)

(1.7) Kant, I.: Kritik der reinen Vernunft. Hg. v. R. Schmidt. Leipzig: Reclam 1956

(18) Kertesz, A. : Einführung in die transfinite Algebra. Berlin: VEB DVW 1975

(19) Klaua, D. : Allgemeine Mengenlehre I. Ein Fundament der Mathematik. 2. erw. Aufl.; Berlin: Akademie-Verlag 1968

(20) Körner, S.: Philosophie der Mathematik. Eine Einführung. Dt. Übers. v. K. Remmen. München: Nymphenburger Verlagshandlung 1968

(21) Kummer, W. : Gesetze in der Mathematik. In: Gesetz - Erkenntnis - Handeln. Hg. v. A. Griese u. H. Laitko. Berlin: Dietz Verlag 1972. S. 277-312

(22) Kuratowski, K./Mostowski, A.: Set theory. Amsterdam/ Warszawa: North-Holl. Publ. Comp/PWN 1967

(23) Laitko, H.: Wissenschaft als allgemeine Arbeit. Zur begrifflichen Grundlegung der Wissenschaftswissenschaft. Manuskriptdruck des ITW der AdW der DDR. Berlin 1977

(24.1) Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin(W), Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955

(24.2) Lorenzen, P. : Metamathematik. Mannheim: Bibliogr. Institut 1962

(24.3) Lorenzen, P. : Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. Frankfurt/M.: Akademische Verlagsges. 1965

(24.4) Lorenzen, P.: Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? In: Ders., Konstruktive Wissenschaftstheorie. Frankfurt/M.: Suhrkamp Verlag (stw 93) 1974. S. 149-166

(25) Markow, A. A. : Was ist konstruktive Logik? Dt. Übers. v. H. Wiese. Hg. v. Präsidium d. URANIA, Schriftenr. f. d. Referenten, Heft 3/1975

(26.1) Marx, K.: Aus der Kritik der Hegelschen Rechtsphilosophie. In: MEW, Bd. 1. S. 203-333

(26.2) Marx, K. : Ökonomisch-philosophische Manuskripte. In: MEW, Erg.-bd., Erster Teil. Berlin: Dietz Verlag 1968. S. 467-588

(26.3) Marx, K. : Thesen über Feuerbach. In: MEW, Bd. 3. Berlin: Dietz Verlag 1959. S. 5-7

(26.4) Marx, K. : Einleitung zur Kritik der Politischen Ökonomie. In: MEW, Bd. 13. Berlin: Dietz Verlag 1961. S. 615-642

(26.5) Marx, K.: Das Kapital. Erster Band. Berlin: Dietz Verlag 1953

(26.6) Marx, K. : Das Kapital. Dritter Band. Berlin: Dietz Verlag 1953

(26.7) Marx, K. : Mathematische Manuskripte. Hg. v. Inst. f. Marx.-Len. b. ZK d. KPdSU. Moskau: Verlag Nauka 1968. Ders.: Mathematische Manuskripte. Hg. v. W. Endemann. Kronberg Ts.: Scriptor Verlag 1974 (nach der Moskauer Ausgabe)

(26.8) Marx, K.: Brief an F. Engels v. 8. 1.1868. In: MEW, Bd. 32. Berlin: Dietz Verlag 1965. s. 11-14

(26.9) Marx, K.: Brief an F. Engels V. 31. 5. 1873. In: MEW, Bd. 33. Berlin: Dietz Verlag 1966. S. 82-84

(27) Marx, K./Engels, F.: Die deutsche Ideologie. In: MEW, Bd. 3. Berlin: Dietz Verlag 1957

(28) Molodschi, W. N. : Studien zu philosophischen Problemen der Mathematik. Dt. Übers. V. F. Ruben. Berlin: VEB DVW 1977

(29) Platon: Der Staat. Dt. Übers. v. O. Apelt. 5. Aufl.; Leipzig: F. Meiner 1920

(30.1) Ruben, P. : Zum Verhältnis von Philosophie und Mathematik, Dialektik und Logik - dargestellt am Widerspruch. In: DZfPh, Sonderheft 1966. S. 167-188

(30.2) Ruben, P.: Das philosophische Begründungsproblem der Mathematik und die marxistisch-leninistische Philosophie. In: Mitt. d. Math. Ges. d. DDR, Heft 1/1973. S. 25-46

(31) Ruben, P./Wolter, H.: Modell, Modellmethode und Wirklichkeit. In: DZfPh 17 (1969) 10. S. 1225-1239

(32) Ruzavin, G. I. : Die Natur der mathematischen Erkenntnis. Dt. Übers. v. G. Rieske. Berlin: Akad.-Verlag 1977

(33) Sawelski, F. S.: Die Masse und ihre Messung. Dt. Übers. v. H. Sommer. Moskau/Leipzig: Verlag MIR/VEB Fachbuchverlag 1977

(34) Scholz, H.: Metaphysik als strenge Wissenschaft. Köln: Staufen-Verlag 1941

(35) Scholz, H. /Hasenjaeger, G. : Grundzüge der Mathematischen Logik. Berlin(W), Göttingen, Heidelberg: Springer- Verlag 1961

(36) Schröter, K.: Mathematik und Gesellschaft. In: Kleine Enzyklopädie Mathematik. Hg. V. W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich, H. Kästner. Leipzig: VEB Bibliogr. Institut 1965

(37) Sulanke, B. : Analysis als Synthese von Geometrie und Algebra. Hg. V. Präs. d. URANIA, Schriftenr. f. d. Referenten, Heft 6/1975

(38) Thom, R. : "Moderne" Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum? In: Mathematiker über die Mathematik. Hg. v. M. Otte. Berlin(W)/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1974. S. 371-401

(39) Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 3. erw. Aufl.; München/Wien: R. Oldenbourg Verlag 1966

(40) Wiener, N.: Kybernetik. Regelung und Nachrichtenübertragung in Lebewesen und Maschine. Dt. Übers. v. E. H. Serr. Hamburg: Rowohlt 1968 (Econ 1963)

(41) Wittgenstein, L : Tractatus logico-philosophicus. Frankfurt/M. Suhrkamp Verlag 1966

(42) Wussing, H.: Carl Friedrich Gauß. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976