Gerhard Kleinfeld

Übungen für Junge Mathematiker 3
Ungleichungen

1973 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 38
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Dieser 3. Teil der "Übungen für Junge Mathematiker" entstand ebenso wie die Teile "Zahlentheorie" und "Geometrie" aus Aufgabenmaterial, das für Schülerzirkel und Spezialistenlager Junger Mathematiker zusammengestellt und mit einem Schülerkreis ab Klassenstufe 7 behandelt wurde.

Um auch dem Leser, der mit dem Gebiet der Ungleichungen noch nicht so vertraut ist, ein möglichst rasches Eindringen zu ermöglichen, haben wir hier den bewährten Aufbau beibehalten, von den in der Schule erworbenen Kenntnissen auszugehen und dann die Ungleichungen systematisch anhand von Aufgaben einzuführen.
Dabei sind einerseits Ungleichheitsaussagen (auch goniometrische) zu beweisen und andererseits Lösungsmengen von Ungleichungen mit und ohne Parameter zu bestimmen. Um das Rechnen mit absoluten Beträgen zu festigen und entsprechende Vorstellungen zu vermitteln, wurden einige wenige Aufgaben mit hinzugenommen, in denen die graphische Darstellung von Funktionen bzw. Zuordnungen verlangt wird, in deren analytischen Ausdrücken absolute Beträge auftreten.

Bei der Bestimmung von Lösungsmengen wurde auch darauf Wert gelegt, diese durch graphische Veranschaulichungen zu interpretieren. Daher ist dieses Büchlein vor allem für die Schüler, Lehrer und Arbeitsgemeinschaftsleiter geeignet, die in irgendeiner Form an den Olympiaden Junger Mathematiker beteiligt sind.

Die mit einem "•" versehenen Aufgaben sind wie auch in den Teilen 1 und 2 wieder Übungsaufgaben, deren Lösung am Schluss des Buches angegeben ist. Es empfiehlt sich aber, jede Aufgabe zunächst erst einmal selbst zu lösen, bevor die angegebene Lösung durchgearbeitet wird. Dabei kann die Lösung, die der Leser selbständig gefunden hat, mitunter aus den verschiedensten Gründen von der angegebenen abweichen.

Die Aufgaben selbst sind so zusammengestellt, dass der Schwierigkeitsgrad allmählich ansteigt. Gerade für den noch nicht mit dem Stoff vertrauten Leser wird daher empfohlen, zunächst immer mit den ersten Aufgaben jedes Kapitels zu beginnen. Dabei können Aufgaben auch übersprungen werden, ohne dass der Zusammenhang verloren geht, obwohl bei manchen Lösungen teilweise auf vorhergehende zurückgegriffen wird.

Im Anhang sind einige Bücher angeführt, die als Zusatzliteratur von allen, die den Wunsch haben, noch tiefer in das hier behandelte Stoffgebiet einzudringen, genutzt werden können.

Mein besonderer Dank gilt vor allem Herrn P. Borneleit und allen, die durch manchen Ratschlag und Hinweis bei der Abfassung des Buches mitgeholfen haben.

Leipzig, Herbst 1967 Gerhard Kleinfeld

Vorwort zur zweiten Auflage

Schon nach relativ kurzer Zeit war die erste Auflage vergriffen, so dass sich die Herausgabe einer Nachauflage erforderlich machte, die bis auf einige Korrekturen ein Nachdruck der ersten ist.

Dabei sei allen Lesern für die freundlichen Hinweise und Einschätzungen gedankt, die das Anliegen dieser Aufgabensammlung bestätigen. Wir hoffen, dass auch die zweite Auflage weiterhin dazu beitragen wird die im Vorwort zur ersten Auflage genannten Ziele zu verwirklichen.

Leipzig, Frühjahr 1971 Gerhard Kleinfeld

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **2**

1 Einleitung **4**

2 Beweis von Ungleichungen **8**
2.1 Aufgaben, die sich auf elementare Ungleichungen zurückführen lassen 8
2.2 Beweise mittels Fallunterscheidung 11
2.3 Beweise mit Hilfe des arithmetischen und geometrischen Mittels 12
2.4 Gemischte Aufgaben 13

3 Bestimmung der Lösungsmenge von Ungleichungen **19**
3.1 Ungleichungen mit einer Variablen 19
3.2 Ungleichungssysteme mit einer Variablen 20
3.3 Ungleichungen höheren Grades 24
3.4 Wurzelungleichungen 25

4 Das Rechnen mit absoluten Beträgen **30**
4.1 Graphische Darstellungen 30
4.2 Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen mit absoluten Beträgen 31
4.3 Beweise von Ungleichungen mit absoluten Beträgen 35

5 Ungleichungen mit Parametern **37**
5.1 Bestimmung der Lösungsmenge 37
5.2 Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungssystemen 39
5.3 Gemischte Aufgaben 40

6 Goniometrische Ungleichungen **42**
6.1 Beweise für goniometrische Ungleichungen 42
6.2 Bestimmung der Lösungsmenge 47

7 Lösungen und Lösungshinweise **49**

8 Literaturhinweise **72**

1 Einleitung

1.1. Im folgenden sollen kurz und ohne Beweis die zum Verständnis der einzelnen Kapitel notwendigen Voraussetzungen angeführt werden. Dabei wird, wenn geeignete Literatur vorliegt, auf diese verwiesen.

Unter einer Aussage verstehen wir einen sinnvollen Satz, der die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein (I). Enthält der Satz Leerstellen (Variable), so wird er als Aussageform bezeichnet, wenn er bei Ersetzen der Variablen durch Objekte eines bestimmten, vorher festgelegten Grundbereiches[1] in eine wahre oder falsche Aussage übergeht.

"Eine Variable ist nichts anderes als ein Zeichen (oder eine Bezeichnung) für ein beliebiges Element aus einem fest vorgegebenen Bereich, dem Variabilitätsbereich dieser Variablen." (Mathematisches Wörterbuch, Leipzig 1961, Seite 796.)

Wird die Aussageform $H(x)$ durch die Verwendung von "es gibt ein x" bzw. "für alle x" quantifiziert, so bezeichnen wir die Variable x als gebundene Variable.
Gebunden wird sie auch durch den bestimmten Artikel "dasjenige". In allen anderen Fällen nennen wir die Variable freie Variable.

Beispielsweise sind die Variablen a und b in folgender Allaussage gebunden:
Für alle reellen a, b gilt $(a-b)^2 \geq 0$, während x in der Aussageform $x+7 < 5-2x$ als freie Variable bezeichnet wird (I).

Beispiele für Aussagen bzw. Aussageformen sind Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen bzw. Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen und einem Grundbereich, der Teilmenge der reellen Zahlen ist. Dabei ist natürlich die Existenz von Gleichheitsaussagen über anderen Grundbereichen nicht ausgeschlossen.

Somit ist jede Gleichheits- bzw. Ungleichheitsaussage auch eine Gleichung bzw. Ungleichung (die in diesem Falle jedoch keine Variablen enthält), aber nicht umgekehrt.

Sollen die Zahlen eines vorgegebenen Grundbereiches bestimmt werden, die an Stelle der Variablen in die Ungleichung eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage machen, so heißt es, dass die Ungleichung gelöst werden soll. Die Zahlen, die dieser Bedingung genügen, bezeichnet man als Lösungen der betreffenden Ungleichung.

Die Menge der Lösungen einer Ungleichung wird kurz als Lösungsmenge oder Erfüllungsmenge der betreffenden Ungleichung bezeichnet. Es ist unmittelbar klar, dass die Lösungsmenge Teilmenge des Grundbereiches ist, wobei unter gewissen Bedingungen Lösungsmenge und Grundbereich zusammenfallen können, wie zum Beispiel in der Aufgabe:
Gesucht ist die Menge aller der Zahlen des Grundbereiches A, die an Stelle der Variablen x in die Ungleichung $x^2 \geq 0$ eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage machen.

(Der Leser möge für A nacheinander als Grundbereiche die Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen einsetzen und sich davon überzeugen, dass in diesen Fällen die jeweiligen Lösungsmengen mit den jeweiligen Grundbereichen zusammenfallen).

Andererseits kann sich durchaus auch als Lösungsmenge die leere Menge ergeben. In diesem Falle existiert also kein Element des Grundbereiches, das an Stelle der Variablen in die Ungleichung eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage macht. Das trifft beispielsweise in der

[1] Der Grundbereich ist dabei so zu bestimmen, dass alle in der Ungleichung auftretenden Zahlen in ihm enthalten und die vorgeschriebenen Operationen in ihm ausführbar sind ((II) Seite 257).

Aufgabe zu:
Gesucht ist die Menge aller der positiven ganzen Zahlen, die an Stelle der Variablen x in die Ungleichung $x^2 + x - 1 < 0$ eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage machen.

Eine Ungleichung mit Variablen hat als Aussageform keinen Wahrheitswert. Man nimmt an, dass es eine Zahl des Grundbereiches gibt, die Lösung der Ungleichung ist und bezeichnet diese mit x_0. Indem man in der Aussageform die Variable an allen Stellen durch x_0 ersetzt, erhält man eine Aussage, die nach bekannten Regeln umgeformt werden kann.
Man erhält für die Lösungsmenge eine notwendige Bedingung und prüft durch die Probe, ob diese Bedingung auch hinreichend ist.

Treten in Ungleichungen außer den Variablen, die durch Elemente des Grundbereiches ersetzt, diese zu Aussagen machen, noch zusätzliche Buchstaben auf, die an Stelle beliebiger aber fester reeller Zahlen stehen, so bezeichnet man diese als Parameter.

Bei jeder Aufgabe muss also explizit angegeben sein, welche Buchstaben Variable und welche Parameter darstellen sollen (II). Zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Ungleichung zu einem vorgegebenen Grundbereich gehören also die Auflösung der betreffenden Ungleichung (d.h., die Umformung der durch die Annahme "angenommen, es existiert eine Zahl des Grundbereiches, die Lösung der betreffenden Ungleichung ist" gewonnenen Aussage) und der Nachweis, ob die Zahlen des Grundbereiches, die durch die Auflösung gefunden wurden, die Ungleichung erfüllen.

Aus Platzgründen wird oft auf die Probe verzichtet, der Leser möge sich aber auch immer bewusst sein, dass die Probe Bestandteil des vollständigen Lösungsweges ist.

Wir unterscheiden zwischen zwei Aufgabenstellungen.

1. Die Menge der Lösungen einer Ungleichung mit vorgegebenem Grundbereich ist zu bestimmen.

2. Es ist zu beweisen, dass eine bestimmte Ungleichung für alle Elemente eines vorgegebenen Grundbereiches gilt.

Während also im ersten Fall diejenigen Elemente des vorgegebenen Grundbereiches gesucht werden, die an Stelle der Variablen in die Ungleichung eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage machen, wird im 2. Fall der Beweis einer Allaussage gefordert.

Weitere Voraussetzungen für diesen Teil der Aufgabensammlung sind die elementare Kenntnis der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen, wie sie etwa ab Klassenstufe 7 unserer polytechnischen Oberschulen vermittelt wird, sowie für einige Aufgaben elementare Kenntnisse über Folgen, Reihen und Grenzwerte, über Binomialkoeffizienten und über einige Begriffe der Mengenlehre, die in (I) und (II) ausführlich behandelt werden.

Eine wesentliche Voraussetzung ist die Kenntnis der Regeln und Gesetze für das Rechnen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Der Charakter dieses Büchleins als Aufgabensammlung verbietet es von selbst, auf den Aufbau des Systems der reellen Zahlen näher einzugehen. Wir verweisen den interessierten Leser auf (II).

Nur die für diesen Teil der Aufgabensammlung wichtigsten Begriffe und Gesetze der reellen Zahlen seien kurz angeführt.[2]

[2] Diese Gesetze und Regeln gelten bekanntlich auch in den übrigen oben angeführten Zahlsystemen, sofern die auszuführenden Operationen in diesen definiert sind und aus diesen Zahlsystemen nicht herausführen.

Sind a und b zwei beliebige reelle Zahlen, so gilt stets genau eine der folgenden drei Aussagen:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b \tag{1}$$

Für die angeführten Relationen gelten folgende Gesetze:
a) Es ist stets $a = a$ (Reflexivität).
b) Aus $a = b$ folgt $b = a$ (Symmetrie).
c) Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$ (Transitivität).
d) $a < b$ und $b < a$ schließen einander aus (Asymmetrie)
e) Aus $a < b$ und $b < 0$ folgt $a < c$ (Transitivität)

Aus d) und e) folgt insbesondere, dass die Menge der reellen Zahlen hinsichtlich der Relation $<$ geordnet ist.
Die Relation $<$ wird als "Kleiner-Relation" bezeichnet, und man liest $a < b$ als "a ist kleiner als b" oder "b ist größer als a". Für die Negation (Verneinung) der drei Aussagen (1) schreibt man:

$a \geq b$ ("a größer oder gleich b"), wenn nicht $a < b$ gilt.
$a \neq b$ ("a ungleich b"), wenn nicht $a = b$ gilt.
$a \leq b$ ("a kleiner oder gleich b"), wenn nicht $a > b$ gilt.

Damit folgt:

Aus $a \leq b$ und $b < c$ oder aus $a < b$ und $b \leq c$ folgt $a < c$.

1.2. Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten folgende Regeln:

1. Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$, das schon angeführte Gesetz der Transitivität.

2. Wenn a, b, c beliebige reelle Zahlen sind und $a > b$ ist, dann gilt $a + c > b + a$.

3. Wenn $a > b$ und $c > 0$ gilt (a, b, c reelle Zahlen), dann gilt $ac > bc$ bzw. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

4. Wenn $a > b$ und $c < 0$ gilt (a, b, c reelle Zahlen), dann gilt $ac < bc$ bzw. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

5. Wenn a, b, c, d beliebige reelle Zahlen sind und $a > b$ und $c > d$ gilt, dann gilt $a+c > b+d$.

6. Wenn a, b, c, d beliebige positive reelle Zahlen sind, und wenn $a > b$ und $c > d$ gilt, dann gilt $ac > bd$.

7. Wenn a, b beliebige positive reelle Zahlen sind, und wenn $a > b$ ist, dann gilt $a^n > b^n$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl > 0 ist.

8. Wenn a, b beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind, und wenn $a > b$ ist, dann gilt $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl > 1 ist.

Weiterhin gilt:

9. Unter dem absoluten Betrag einer reellen Zahl a (geschrieben $|a|$) verstehen wir:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

10. Sind a und b beliebige reelle Zahlen, so gelten für das Rechnen mit absoluten Beträgen folgende Gesetze: $|a| = |-a|$,

11. $|a - b| = |b - a|$,

12. $|ab| = |a||b|$

13. Für beliebige reelle $a \neq 0$ gilt $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$.

14. Für beliebige reelle Zahlen a und b ($b \neq 0$) gilt $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

1.3. Es ist weiterhin zweckmäßig, folgende Festlegungen zu treffen:

1. Zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Ungleichung muss der Grundbereich, aus dem die Lösungen entnommen werden sollen, vorgegeben sein. In den Fällen, wo das nicht der Fall ist, wollen wir als Grundbereich die Menge der reellen Zahlen annehmen.

2. Die Menge der natürlichen Zahlen wollen wir mit $\mathbb{N}$, die der ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$, die der rationalen mit $\mathbb{Q}$ und die der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Der Buchstabe A sei allgemein das Zeichen für den Grundbereich (II).

3. Ist die Lösungsmenge als Teilmenge eines Grundbereiches A zu einer vorgegebenen Ungleichung zu bestimmen, so lautet die Aufgabenstellung: $L = \{x; x \in A$ und $H(x)\}$, wobei $H(x)$ die betreffende vorgegebene Ungleichung darstelle.
(Gelesen: Gesucht ist die Menge L aller Zahlen aus A, die an Stelle der Variablen x in die Ungleichung $H(x)$ eingesetzt, diese zu einer wahren Aussage machen.) Wir wollen kürzer folgendes schreiben:

Man bestimme alle und nur die reellen (rationalen, ganzen, natürlichen) x, die die Ungleichung $H(x)$ erfüllen.

Bei dieser Aufgabenstellung ist der Grundbereich A durch die Formulierung "reelle (rationale, ganze, natürliche) x" als Menge $P(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N})$ gegeben.

4. Um die stets wiederkehrende Formulierung, "angenommen, es gibt ein $x \in A$, das Lösung der vorgegebenen Ungleichung $H(x)$ ist, ein solches x sei x_0 zu vermeiden, schreiben wir kürzer vor jede Auflösung:
"Angenommen: $\exists x \in A$ und $H(x)) : x_0$."

5. Die Ungleichheitsaussage $H(x)$ wird nach bekannten Regeln in die letzte Aussage $H^*(x_0)$ umgeformt. Da über x_0 nichts weiter angenommen wurde, als dass es eine Lösung der Ungleichung $H(x)$ sei, muss jede solche Lösung x_0 Element der Menge $L_A = \{x \in A : H^*(x)\}$ sein, wobei L_A das Symbol für die Menge der möglichen Lösungen sei.
Deshalb werden wir in jede dieser Aufgaben die Menge L_A oder, wenn es erforderlich ist, L mit einem anderen Index zu versehen, dieses L mit dem entsprechenden Index sofort nach $H^*(x_0)$ angeben.

6. Die Schreibweise $L = L_A$ bedeutet, dass die durch die entsprechenden Umformungen gefundene Menge der möglichen Lösungen L_A identisch ist mit der Lösungsmenge L der betreffenden Ungleichung.

7. Die Allaussagen werden nicht in jedem Falle (z.B. Aufgabe 2.1.1.) als solche besonders gekennzeichnet.

2 Beweis von Ungleichungen

2.1 Aufgaben, die sich auf elementare Ungleichungen zurückführen lassen

2.1.1. Wenn $a \geq 0$ und $b \geq 0$ beliebig reell, dann gilt die Ungleichung

$$(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$$

Analyse 1. Teil:
Aus $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ folgt nach Auflösung

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

und daraus $2ab = 0$, $ab = 0$.
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, wenn also $a = 0$ oder $b = 0$. Damit ist aber auch der Fall $a = b = 0$ zugelassen, denn das "oder" wird (wenn nicht ausdrücklich anders gesagt oder wenn eine andere Bedeutung nicht unmittelbar aus dem Inhalt folgt) im nichtausschließenden Sinne gebraucht.
Wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann, ist damit auch gezeigt, dass das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b = 0$.

Analyse 2. Teil:
Aus $$(a+b)^2 > a^2 + b^2 \qquad \text{und} \qquad a > 0; b > 0 \tag{1}$$

folgt nacheinander $$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2, \qquad 2ab > 0, \qquad ab > 0 \tag{2,3,4}$$

Da a und b nach Voraussetzung beide positiv sind, ist auch das Produkt positiv, also ist die Aussage (4) wahr.
Jetzt kann die Aussage der Aufgabe 2.1.1. bewiesen werden, indem man die Schlüsse (1) bis (4) rückwärts verfolgt. Dabei kann der Beweis auf Grund der Analogie der Analysen mit dem Größer- und Gleichheitszeichen gleichzeitig geführt werden, indem man von der letzten als wahr erkannten Schlussfolgerung ausgeht und prüft, ob die Schlusskette umkehrbar ist.

Lösung:
Voraussetzung: $a \geq 0$, $b \geq 0$.
Behauptung $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2$.
Beweis:
Aus $ab \geq 0$ folgt $2ab \geq 0$ und daraus

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \qquad \text{und letztlich} \qquad (a+b)^2 \geq a^2 + b^2 \qquad (q.e.d.)$$ [3]

Dass man aus der Richtigkeit der letzten Schlussfolgerung bei einer durchgeführten Schlusskette nicht notwendig auf die Wahrheit der Ausgangsbeziehung schließen kann, verdeutlicht folgendes Beispiel:

Behauptung: Es gilt $4 = 5$.
"Beweis":

[3] Ist ein Beweis vollständig geführt und damit die Wahrheit einer Aussage nachgewiesen, so wird der Beweis durch die Abkürzung q.e.d. (lat. quod erat demonstrandum, d.h., was zu beweisen war) abgeschlossen. Im folgenden wird dieser Abschluss nicht mehr mit angegeben.

Aus $4 = 5$ folgt nach Subtraktion von $\frac{9}{2}$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

und daraus

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

und nach Auflösung

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$

Nach Subtraktion von $\frac{81}{4}$ folgt $16 - 36 = 25 - 45$ und daraus $-20 = -20$.

Bei diesem Beispiel sind wir von einer falschen Aussage ausgegangen und gelangten zu einer wahren Aussage. Die einzelnen Schritte der Schlusskette sind aber nicht sämtlich umkehrbar, daher gilt nicht $4 = 5$.

2.1.2. Man beweise, dass für $a > 0$ beliebig reell und $b > 0$ beliebig reell $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ gilt.

Analyse 1. Teil:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \quad , \quad a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \quad , \quad (a-b)^2 = 0$$

und daraus folgt $a = b$.

Analyse 2. Tell:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad , \quad a^2 + b^2 > 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad , \quad (a-b)^2 > 0$$

Das ist eine wahre Aussage für $a \neq b$.

Lösung:
Voraussetzung: $a > 0$ bel. reell, $b > 0$ bel. reell.
Behauptung: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
Beweis:
Aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Da $ab > 0$, ist Division durch ab möglich, also folgt

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $a = b$. Aus diesem Grund wurde die Analyse getrennt, denn Teil 1 der Analyse ist als Beweis für folgende Aussage anzusehen:

Wenn $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ gilt, dann gilt $a = b$.
Es ist noch zu zeigen: Wenn $a = b$, dann gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$.
Dies kann leicht durch Einsetzen von $a = b$ in der Behauptung gezeigt werden.

Die Lösungen der Aufgaben 2.1.1. und 2.1.2. zeigten, dass die Analyse benutzt werden kann, um entscheidende Aussagen über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens zu erhalten. Bei weiteren Aufgaben wird diese Trennung nicht mehr durchgeführt. Es wird nur noch angegeben, wann das Gleichheitszeichen gilt; der Leser möge den Beweis in diesen Fällen selbst führen.

Ab Aufgabe 2.1.2. soll auch aus Platzgründen auf ein gesondertes Formulieren von Voraussetzung und Behauptung verzichtet werden, es wird aber empfohlen, sich jeweils Voraussetzung

und Behauptung zu überlegen.

2.1.3.• Man beweise, dass für alle positiven reellen x folgende Ungleichung gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2.1.4. Es ist zu zeigen, dass für jedes reelle x die Ungleichung gilt:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$$

Wie bereits festgestellt, darf zum Beweis einer Aussage nicht von der Behauptung ausgegangen werden, es sei denn, man untersucht jede einzelne Schlussfolgerung auf Umkehrbarkeit. Man kann aber die Seiten einer Ungleichung für sich betrachten und nach bekannten Regeln abschätzen oder umformen. Letzteres soll beim Beweis der Behauptung der Aufgabe 2.1.4. durchgeführt werden.

Lösung:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{(a^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{1}$$
$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

Beweis:
Da Aufgabe 2.1.3. zeigt (unter der Annahme, dass die Behauptung stimmt), dass unter den entsprechenden Voraussetzungen $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gilt, fällt die jetzige Behauptung mit der der Aufgabe 2.1.3. zusammen, wenn man $x = \sqrt{a^2+1}$ setzt.
Da $\sqrt{a^2+1}$ für jedes reelle a positiv ist, ist die Voraussetzung der Aufgabe 2.1.3. erfüllt; demnach gilt auch die Behauptung der Aufgabe 2.1.4.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = 0$.

2.1.5. Es ist zu beweisen, dass für $a > 0$ bel. reell und $b > 0$ bel. reell gilt:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

Analyse:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \qquad , \qquad a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

Da $a + b > 0$, folgt nach Division durch $a + b$

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \qquad \text{und daraus} \qquad (a-b)^2 \geq 0$$

Das ist eine wahre Aussage. Um die Richtigkeit der Behauptung zu beweisen, muss die Schlusskette rückwärts verfolgt werden.

Beweis:

$$(a-b)^2 \geq 0, \qquad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, \qquad a^2 - ab + b^2 \geq ab$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \qquad , \qquad a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$.

2.2 Beweise mittels Fallunterscheidung

2.2.1. Man beweise, dass für $a > 0$ beliebig reell und $b > 0$ bel. reell gilt:

$$a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$$

Analyse:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 &\geq 0 && (1)\\ a^4(a-b) + b^4(b-a) &\geq 0 && (2)\\ a^4(a-b) - b^4(a-b) &\geq 0 && (3)\\ (a^4 - b^4)(a-b) &\geq 0 && (4) \end{aligned}$$

Es ist zu untersuchen, ob (4) eine wahre Aussage ist. Dazu ist notwendig festzustellen, ob unter der Voraussetzung $a > 0$ und $b > 0$ bel. reell (4) gilt. Um diese Untersuchung durchzuführen, ist eine Fallunterscheidung notwendig. Es muss also festgestellt werden, ob die Ungleichung (4) gilt für
1. Fall: $a > b$, 2. Fall: $a < b$, 3. Fall: $a = b$

Beweis:
Zum 1. Fall: Es sei $a > b$, dann ist $a - b > 0$.
Aus $a^4 > b^4$ folgt $a^4 - b^4 > 0$, also gilt auch $(a^4 - b^4)(a - b) > 0$.

Zum 2. Fall: Es sei $a < b$, dann ist $a - b < 0$. Aus $a^4 < b^4$ folgt $a^4 - b^4 < 0$. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist aber positiv, also gilt $(a^4 - b^4)(a - b) > 0$.

Zum 3. Fall: Es sei $a = b$, dann ist $a - b = 0$. Da ein Produkt gleich Null ist, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, gilt $(a^4 - b^4)(a - b) = 0$.

Damit ist nachgewiesen, dass $(a^4 - b^4)(a - b) \geq 0$ eine wahre Aussage ist.
Aus $(a^4 - b^4)(a - b) \geq 0$ folgt $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$.
Die Fälle 1. und 2. zeigten, dass das Gleichheitszeichen höchstens im Fall 3. gelten kann, und Fall 3 zeigt, dass das Gleichheitszeichen in diesem Fall auch wirklich gilt.

2.2.2. Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung $a^4 - 4ab^3 + 3b^4 \geq 0$ gilt!

Analyse:
Es sei $a = b + p$ (p geeignet reell). Damit sind die 3 Fälle $a < b$, $a > b$ und $a = b$ je nach Wahl von p erfasst.

$$\begin{aligned} a^4 - 4ab^3 + 3b^4 &\geq 0 && (1)\\ (b+p)^4 - 4b^3(b+p)3b^4 &\geq 0 && (2)\\ b^4 + 4b^3p + 6b^2p2 + 4bp^3 + p^4 - 4b^4 - 4b^3p + 3b^4 &\geq 0 && (3) \end{aligned}$$

Da sowohl $b^4 - 4b^4 + 3b^4 = 0$ als auch $4b^3p - 4b^3p = 0$, folgt aus (3):

$$\begin{aligned} 6b^2p^2 + 4bp^3 + p^4 &\geq 0 && (4)\\ 4b^2p^2 + 4bp^3 + p^4 + 2b^2p^2 &\geq 0 && (5)\\ p^2(4b^2 + 4bp + p^2) + 2b^2p^2 &\geq 0 && (6)\\ p^2(2b+p)^2 + 2b^2p^2 &\geq 0 && (7) \end{aligned}$$

Die linke Seite von (7) ist als Summe von Quadraten für jedes reelle b und für jedes reelle p nichtnegativ und (7) folglich eine wahre Aussage.

Beweis:
Da alle Schlüsse in der Schlusskette umkehrbar sind, d.h., dass also aus (7) die Ungleichung (1) folgt, ist die Behauptung bewiesen. Für $p = 0$ gilt in (7) das Gleichheitszeichen. Für $p = 0$ gilt $a = b$ und somit das Gleichheitszeichen dann, wenn $a = b$ ist.

2.2.3.• Es ist zu beweisen:
Sind $x_1 \leq 1$ und $x_2 \leq 1$ beliebige reelle Zahlen, dann gilt $x_1 + x_2 \geq x_1x_1 + 1$.

2.2.4. Es seien x_1, x_2 und x_3 beliebige positive reelle Zahlen und es gelte $x_1x_2x_3 = 1$, dann gilt die Ungleichung $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$.

Lösung:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Alle Faktoren sind gleich 1, dann ist ihre Summe gleich 3. Das Gleichheitszeichen gilt also dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

2. Mindestens ein Faktor sei ungleich 1, dann gibt es sicher einen Faktor, der kleiner und einen, der größer als 1 ist.

O.B.d.A.[4] sei $x_1 < 1$ und $x_2 > 1$. Nach Aufgabe 2.1.2. gilt, dass die Summe zweier beliebiger positiver reeller Zahlen nicht kleiner als 2 ist, falls deren Produkt 1 beträgt. Setzt man $x_1x_2 = y$, so gilt, da $yx_3 = 1$, die Ungleichung $y + x_3 \geq 2$.

$$\begin{aligned} y + x_3 &\geq 2 \\ y - y + x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 + x_1 + x_2 - y \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 + x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1 \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 2.2.3. ist aber $x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1$ unter denselben Voraussetzungen über x_1 und x_2 positiv.
Damit ist gezeigt, dass $x - 1 + x_2 + x_3$ nicht kleiner als 3 vermehrt um eine positive Zahl ist. Folglich gilt erst recht $x_1 + x_2 + x_3 > 3$ und wegen 1. damit die Behauptung: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$.

2.2.5.• Die Aufgabe 2.2.4. ist ein Spezialfall der folgenden Ungleichung, die zu beweisen ist:
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ beliebige positive Zahlen und es gelte $x_1x_2...x_n = 1$, dann gilt $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

2.3 Beweise mit Hilfe des arithmetischen und geometrischen Mittels

2.3.1.• Es seien a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen, dann gilt die Ungleichung[5]

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

Man nennt $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ das arithmetische Mittel dieser Zahlen und $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}}$ das geometrische Mittel aus diesen Zahlen a_i.

a) Es ist unter Benutzung der Aussage von Aufgabe 2.2.5. zu beweisen, dass das arithmetische

[4] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit.
[5] Erklärung dieser Zeichen s. Teil 1.

Mittel größer oder gleich dem geometrischen Mittel aus n beliebigen nichtnegativen reellen Zahlen ist!

b) Dieselbe Aussage ist mit Hilfe der Methode der Vollständigen Induktion zu beweisen!

2.3.2. Man beweise, dass für alle positiven ganzen reellen Zahlen a und b stets gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b b^a}$$

Beweis: O. B. d. A. sei $a \geq b > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a^{b-b} &\geq b^{a-b} &&, \quad a^{a-b}b^{b-a} \geq 1 \\ a^{a+b}b^{b+1} &\geq a^{2b}b^{2a} &&, \quad \sqrt{a^{a+b}b^{a+b}} \geq a^b b^a \\ (\sqrt{ab})^{a+b} &\geq a^b b^a &&, \quad \sqrt{ab} \geq \sqrt[a+b]{a^b b^a} \end{aligned}$$

Da $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ nach Aufgabe 2.3.1. und $\sqrt{ab} \geq \sqrt[a+b]{a^b b^a}$ gilt, so folgt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b b^a}$.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$.

2.3.3.• Es seien a und b zwei beliebige positive reelle Zahlen und n und m zwei beliebige nichtnegative ganze reelle Zahlen mit $m < n$. Es ist zu zeigen, dass

$$n^n(a^m b^{n-m}) \leq [am + b(n-m)]^n$$

2.3.4. Es seien x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen. Es ist zu zeigen, dass dann gilt:

$$\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + ... + \sqrt{x_{n-1}x_n} \leq \frac{n-1}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

Beweis:
Unter denselben Voraussetzungen gilt nach Aufgabe 2.3.1.

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad \sqrt{x_1x_3} \leq \frac{x_1+x_3}{2}, \qquad ... \qquad \sqrt{x_{n-1}x_n} \leq \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3} + ... + \sqrt{x_{n-1}x_n} &\leq \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_3}{2} + ... + \frac{x_{n-1}+x_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{2}[(n-1)x_1 + (n-1)x_2 + ... + (n-1)x_n] \\ \sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3} + ... + \sqrt{x_{n-1}x_n} &\leq \frac{n-1}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2.4 Gemischte Aufgaben

2.4.1.• Es ist nachzuweisen, dass für beliebige positive reelle Zahlen x und y die Ungleichung gilt:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}\right)^2$$

2.4.2. Es seien x_1, x_2, y_1 und y_2 beliebige reelle Zahlen. Man beweise, dass dann gilt:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

Beweis:
Annahme: Es gelte das Gegenteil der Aussage, also

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}<\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \tag{1}$$

Durch Quadrieren der Ungleichung (1) erhält man:

$$\begin{aligned}
x_1^2+y_1^2+2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)}x_2^2+y_2^2 &< x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2\\
\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} &< x_1x_2+y_1y_2\\
(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) &< (x_1x_2+y_1y_2)^2\\
x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2 &< x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2\\
(x_1y_2-y_1x_2)^2 &< 0
\end{aligned}$$

Das ist aber eine falsche Aussage, da das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl stets größer oder gleich Null ist. Damit ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$.

2.4.3.• Der Beweis der Aussage von Aufgabe 2.4.2. ist direkt zu führen!

2.4.4. Es ist zu beweisen, dass für beliebige reelle Zahlen a, b, c, x, y und z die Ungleichung gilt:

$$ax+by+cz\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1}$$

Analyse:
Durch Quadrieren beider Seiten von (1) erhält man:[6]

$$(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2}$$

Jede Seite der Ungleichung wird durch Ausrechnung der Klammerausdrücke umgeformt:

$$\begin{aligned}
a^2x^2+2abxy+2acxz+2bcyz+b^2y^2+c^2z^2 &\le\\
a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 &
\end{aligned} \tag{3}$$

Durch Subtraktion der Ausdrücke a^2x^2, b^2y^2 und c^2z^2 erhält man

$$2axby+2acxz+2bcyz\le a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2 \tag{4}$$

$$0\le(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(cy-bz)^2 \tag{5}$$

1. Beweis:
Zum Beweis der Ungleichung (1) wird von folgenden gesicherten Aussagen ausgegangen :

$$0\le(ay-bx)^2,\qquad 0\le(az-cx)^2,\qquad 0\le(cy-bz)^2 \tag{6}$$

Aus (6) folgt durch Addition der einzelnen Ungleichungen die Ungleichung (5). Aus (5) folgt die Ungleichung (4) und aus dieser durch Addition von a^2x^2, b^2y^2 und c^2z^2 die Ungleichung (8) und daraus (2). Da beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ sind, kann die Wurzel gezogen werden, also

$$\sqrt{(ax+by+cz)^2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

[6]Dabei braucht der Fall $ax+by+cz<0$ nicht extra betrachtet zu werden.

Der Ausdruck $ax + by + cz$ ist entweder negativ oder nichtnegativ, man erhält

1. $ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. $-(ax + by + cz) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Damit gilt $ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und es ist gezeigt, dass unter den geltenden Voraussetzungen die Ungleichung (1) gilt. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a : b : c = x : y : z$.

2. Beweis:
Zum Beweis gehen wir von folgender Gleichung[7] aus:

$$(ax + by + cz)^2 = (a^2 + b2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2] \quad (1)$$

Da der Subtrahend als Summe von Quadraten stets größer oder gleich Null und andererseits nur kleiner oder gleich dem Minuenden ist, folgt

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

und daraus[8]

$$ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.4.5. Es ist zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl ungleich Null die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$$

Beweis:
1. Für $n_0 = 1$ erhält man $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ und daraus $\frac{13}{12} > 1$.

2. Wir nehmen an, die Behauptung sei richtig für $n = k$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{3k+1} > 1 \quad (1)$$

und zeigen, dass dann die Ungleichung auch für $n = k + 1$ gilt, also

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{3(k+1)+1} > 1 \quad (2)$$

Es gilt für jedes reelle $k > 0$ die Ungleichung (siehe Aufgabe 2.4.6.)

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > \frac{1}{k+1} \quad (3)$$

Durch Addition von (1) und (3) erhält man:

$$\frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1 + \frac{1}{k+1}$$

[7] Diese Gleichung ist ein Spezialfall der Lagrangeschen Identität:
$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) - (a_11b_2 - a_2b_1)^2 - ... - (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2$

[8] Diese Ungleichung ist ein Spezialfall der Ungleichung von Cauchy auch Cauchy-Schwarzsche Ungleichung genannt: Sind a_i, b_i beliebige reelle Zahlen, dann gilt:
$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$

und daraus

$$\frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{3(k+1)+1} > 1$$

Die Ungleichung $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$ gilt also für jede natürliche Zahl $n \neq 0$.

2.4.6.• a) Wie findet man die in Aufgabe 2.4.5. im Beweis benutzte Ungleichung (3)?
b) Die Ungleichung (3) ist zu beweisen!

2.4.7. Wenn $a, b, ..., n$ die voneinander verschiedenen ganzen positiven ‘ reellen Zahlen sind, die nicht durch eine Primzahl größer als 3 teilbar sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ... + \frac{1}{n} < 3$$

Beweis:
Da es Zahlen sind, die durch keine Primzahl größer als 3 teilbar sein sollen, müssen sie die Form $2^i \cdot 3^j$ haben, wobei $i, j = 0, 1, 2, ..., m$ ist.
Die Behauptung ist also äquivalent folgender Aussage: Bei obiger Voraussetzung gilt die Ungleichung

$$\sum_{\substack{i=0,1,...,m \\ j=0,1,...,m}} \frac{1}{2^i \cdot 3^j} < 3$$

Durch Umformung erhält man:

$$\sum_{\substack{i=0,1,...,m \\ j=0,1,...,m}} \frac{1}{2^i \cdot 3^j} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^i \cdot 3^j} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{3^j}$$

Bildet man die Folgen der Partialsummen für beide Reihen, so erhält man für die Folge der Teilsummen der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i}$:

$$s_1 = 1; \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \quad ...; \quad s_m = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^m}$$

Analog ist die m-te Teilsumme der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{3^j}$: $s'_m = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3^m}$

Da sich die Folgen der s_m und s'_m monoton wachsend ihren Grenzwerten nähern, ist also jedes der s_m kleiner als der entsprechende Grenzwert. Es ist daher zweckmäßig, die Summe der Reihen als Summen unendlicher Reihen zu bestimmen.

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{und} \qquad s' = \lim_{m\to\infty} s'_m = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

und demnach als Summe für die Doppelreihe:

$$s = 2 \cdot \frac{2}{3} = 3$$

Also gilt für alle positiven ganzen reellen Zahlen $a, b, ..., n$, von denen keine durch eine Primzahl größer als 3 teilbar sein soll, die Ungleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ... + \frac{1}{n} < 3$.

2.4.8. Es ist zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n} \tag{1}$$

Beweis:
1. Für $n_0 = 2$ ist die Ungleichung (1) richtig, denn

$$\frac{4^2}{2+1} < \binom{2\cdot 2}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} \qquad , \qquad \frac{16}{3} < 6$$

2. Die Ungleichung (1) sei für eine beliebige natürliche Zahl $n = k > n_0$ richtig, das heißt es gelte

$$\frac{4^k}{k+1} < \binom{2k}{k} \tag{2}$$

Durch Umformung der rechten Seite von (2) erhält man:

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

Damit erhält man für (2) folgende äquivalente Aussage:

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \tag{3}$$

Es ist zu zeigen, dass dann die Ungleichung gilt für $n = k+1$, also

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2} \tag{4}$$

Ungleichung (3) muss mit einer Ungleichung $x < y$ multipliziert werden, so dass dann Ungleichung (4) erhalten wird. Es ist daher zweckmäßig, eine Analyse von (3) und (4) durchzuführen.

Analyse:
Die rechte Seite der Ungleichung (3) hat die Form

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k\cdot (k+1)\cdot (k+2)\cdot \ldots \cdot 2k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$$

Die rechte Seite von (4) hat die Form ‘

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k\cdot \ldots \cdot 2k\cdot (2k+1)(2k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k(k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k(k+1)} = \frac{1\cdot \ldots \cdot 2k(2k+1)(2k+2)}{(k!)^2\cdot (k+1)^2}$$

Wie man sieht, hat die rechte Seite der gesuchten Ungleichung $x < y$ die Form

$$y = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

Aus der linken Seite von (3) soll die linke Seite von (4) durch Multiplizieren mit der linken Seite der gesuchten Ungleichung entstehen, das heißt

$$\frac{4k}{k+1}\cdot x = \frac{4^{k+1}}{k+2}$$

Man erhält für x den Ausdruck:

$$x = \frac{4^{k+1}(k+1)}{4^k(k+2)} = \frac{4(k+1)}{k+2}$$

Damit ist die Ungleichung, mit der (3) multipliziert werden muss, gefunden. Sie müsste wie folgt lauten:

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \tag{5}$$

Ob aber diese Ungleichung nun richtig ist und für welche k sie richtig ist, muss als nächstes gezeigt werden.

Behauptung: Für alle reellen $k > 0$ gilt die Ungleichung (5).
Beweis:
Nach Voraussetzung ist $k > 0$, daraus folgt dann $0 < k$, $0 < 2k$

$$\begin{aligned} 4k^2 + 8k + 4 &< 4k^2 + 10k + 4 \\ 4(k+1)^2 &< 2(2k^2 + 4k + k + 2) = 2(2k+1)(k+2) \\ \frac{4(k+1)}{k+2} &< \frac{2(2k+1)}{k+1} = \frac{2(2k+1)(k+1)}{(k+1)^2} = \frac{(2k+1)(2k+21)}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung (5) für alle reellen Zahlen $k > 0$ richtig, und es kann nun gezeigt werden, dass die Ungleichung (4) unter der Annahme, dass (3) richtig ist, gilt. Aus

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

folgt nach Multiplikation

$$\begin{aligned} \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} &< \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \\ \frac{4^{k+1}}{k+2} &< \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2} \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die Ungleichung (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

2.4.9.• Es ist zu beweisen, dass die Ungleichung $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt!

2.4.10.• Es seien x und y beliebige natürliche Zahlen mit $x > y$. Man beweise, dass dann die Ungleichung $\binom{x}{y}^2 \leq \binom{2x}{2y}$ gilt.[9]

2.4.11.• a) Es ist zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{n+2}{2} > \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{x+1}$$

b) Man zeige, dass diese Ungleichung ein Spezialfall der folgenden ist, die bewiesen werden soll!

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) > 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$n \geq 2$, a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ positiv.

[9]Man benutze beim Beweis folgende Beziehung: Wenn a, b, n natürliche Zahlen sind, dann gilt

$$\binom{a}{0} + \binom{n}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + ... + \binom{a}{n-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$$

(Kleine Enzyklopädie "Mathematik", Leipzig 1965, Seite 497).

3 Bestimmung der Lösungsmenge von Ungleichungen

3.1 Ungleichungen mit einer Variablen

3.1.1. Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, die die Ungleichung $8x + 2 > 4x + 1$ erfüllen!

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $8x + 2 > 4x + 1) : x_0$.
Aus

$$8x_0 + 2 > 4x_0 + 1 \tag{1}$$

erhält man nacheinander

$$8x_0 > 4x_0 - 1, \qquad 4x_0 > -1, \qquad x_0 > -\frac{1}{4} \tag{2,3,4}$$

$L_A = \{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{4}\}$.

Probe: Aus $x_0 > -\frac{1}{4}$ folgt $x_0 = -\frac{1}{4} + p$, wobei $p > 0$ geeignet reell. Durch Einsetzen von $-\frac{1}{4} + p$ in die linke Seite der Ungleichung, $8x + 2$, erhält man

$$8(-\frac{1}{4} + p) = 8p$$

in die rechte Seite der Ungleichung, $4x + 1$, erhält man

$$4(-\frac{1}{4} + p) + 1 = 4p$$

Durch Vergleich folgt, da $p > 0$, $8p > 4p$. Damit ist gezeigt, dass für alle reellen $x > -\frac{1}{4}$ die Ungleichung $8x+2 > 4x+1$ gilt. Man kann die Probe auch so führen, dass man entweder bei jeder der Umformungen (1) bis (4) prüft, dass es sich um äquivalente Umformungen handelt oder von (4) ausgehend die Schlusskette (1) bis (4) rückwärts verfolgt und prüft, ob aus (4) auch (1) folgt.

Geometrische Veranschaulichung: Fasst man $8x + 2 = y_1$ und $4x + 1 = y_2$ als analytische Ausdrücke von Funktionen auf, so sind deren graphische Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem folgende Geraden:[10]

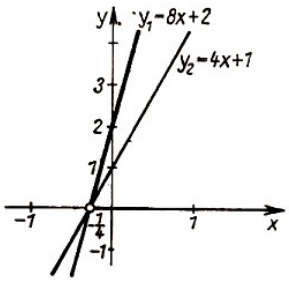


Bild 1

Für $x > -\frac{1}{4}$ ist $y1 > y_2$
Wie man sieht, gilt $y_1 > y_2$ für $-\frac{1}{4} < x < +\infty$. Wegen $y_1 = 8x + 2$ und $y_2 = 4x + 1$ ist mit dem Intervall $-\frac{1}{4} < x < +\infty$ die Lösungsmenge der Ungleichung $8x + 2 > 4x + 1$ veranschaulicht werden.

[10] Kleine Enzyklopädie "Mathematik", Leipzig 1965, Seite 343.

Das Intervall bezeichnen wir wie folgt:

$$\{x \in A : a < x < b\} = (a, b) \quad , \quad \{x \in A : a \leq x < b\} = [a, b)$$
$$\{x \in A : a \leq x \leq b\} = [a, b] \quad , \quad \{x \in A : a < x \leq b\} = (a, b]$$

Dabei soll A nur durch $P(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N})$ ersetzt werden.

In Aufgabe 3.1.1. erhielten wir $x > -\frac{1}{4}$. Diese Ungleichung ist äquivalent der Ungleichung $-\frac{1}{4} < x < +\infty$. Damit kann für die Lösungsmenge L der Aufgabe 3.1.1. auch geschrieben werden:

$$L = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{4} < x < +\infty\} \qquad \text{oder} \qquad L = \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

3.1.2.• Es ist die Lösungsmenge von $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + 6x > 4(x + 2)$ zu bestimmen!

3.2 Ungleichungssysteme mit einer Variablen

3.2.1. Es ist die Menge L aller reellen x zu finden, für die folgendes System von Ungleichungen gilt:

$$4(x - 3 + 6 > 2x + 1 \quad , \quad \frac{x}{2} - 1 < 5 - x \tag{1,2}$$

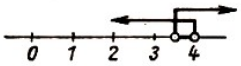
Lösung:
Angenommen: $\exists x : (x \in \mathbb{R}$ und $4(x - 3) + 6 > 2x + 1) : x_0$
Aus $4(x_0 - 3) + 6 > 2x_0 + 1$ folgt $x_0 \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$, $L_{A1} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{7}{2}\right\}$ (3).
Angenommen: $\exists x : \left(x \in \mathbb{R}\right.$ und $\left.\frac{x}{2} - 1 < 5 - x\right) : y_0$
Aus $\frac{y_0}{2} - 1 < 5 - y_0$ erhält man $y_0 \in (-\infty, 4)$; $L_{A2} = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$. (4)

Als Lösung der Ungleichung (1) kommen wegen (3) nur die reellen $x > \frac{7}{2}$ in Frage, als Lösungen von (2) wegen (4) nur die reellen $x < 4$.
Beide Ungleichungen gemeinsam werden also nur von solchen reellen x erfüllt, die größer als $\frac{7}{2}$ und kleiner als 4 sind. Die Menge aller dieser ist aber gerade der Durchschnitt von L_{A1} und L_{A2}.

$$L_A = L_{A1} \cap L_{A2} = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 4) = \left(\frac{7}{2}, 4\right)$$

Auf die Durchführung der Probe sei hier verzichtet, sie wird analog wie bei Aufgabe 3.1.1. durchgeführt.

Geometrische Veranschaulichung der Lösungsmenge auf der Zahlengeraden:

Bild 2 

Die folgenden 5 Systeme von Ungleichungen sind zu lösen!

3.2.2.• $\quad 6 - 3x < 5 - 6x, \quad \frac{x+3}{2} < \frac{x+1}{4}, \quad x > 2x + 1$

3.2.3.• $\quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} > 4x + 1, \quad x + 3 < 4(x + 6)$

3.2.4.• $\quad 2(x + 5) > 7x + 3, \quad 5x - 7 < \frac{3}{4}x + 10, \quad x - 1 > \frac{1}{2}(x + 5)$

3.2.5.• $\quad 15x + 3 > 12x - 1, \quad 10x + 6 > 4(x - 3)$

3.2.6.• $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}, \quad \frac{5}{2}(x - 3) \leq x - 3$

3.2.7. Es ist die Lösungsmenge L der Ungleichung $\frac{x+1}{x-1} > 3$ zu bestimmen!

1. Lösung:
Es ist $A = \mathbb{R}$. Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{x+1}{x-1} > 3\right) : x_0$
Dann gilt $x_0 \neq 1$, da die linke Seite der Ungleichung für $x = 1$ nicht erklärt ist. Um diese Ungleichung aufzulösen, müssen beide Seiten mit der Zahl $x_0 - 1$ multipliziert werden.
Angenommen $x_0 - 1 > 0$ (1), dann erhält man aus $\frac{x_0+1}{x_0-1} > 3$, $x_0 + 1 > 3x_0 - 3$ und $x_0 < 2$.
Wegen (1) gilt auch $x_0 > 1$. Damit gilt $x_0 \in (1, 2)$.

Sei jedoch $x_0 - 1 < 0$ (2), dann folgt aus $\frac{x_0+1}{x_0-1} > 3$, $x_0 + 1 < 3x_0 - 3$ und $x_0 > 2$.
Wegen (2) gilt jedoch $x_0 < 1$. Wegen dieses Widerspruches ist die Annahme $x_0 - 1 < 0$ falsch.
Damit gilt also $L_A = (1, 2)$.

Geometrische Veranschaulichung der Lösungsmenge auf der Zahlengeraden:

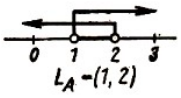


Bild 3

Probe:
Aus $1 < x_0 < 2$ folgt $x_0` = 1 + p$, wobei $0 < p < 1$ geeignet reell. Setzt man $x_0 = 1 + p$ in die linke Seite der Ungleichung an Stelle der Variablen ein, so erhält man

$$\frac{1+p+1}{1+p-1} = \frac{2+p}{p} = 1 + \frac{2}{p} = 3 + \frac{2(1-p)}{p}$$

Der Ausdruck $\frac{2(1-p)}{p}$ ist aber wegen $0 < p < 1$ positiv, also gilt $3 + \frac{2(1-p)}{p} > 3$ und damit auch $\frac{x+1}{x-1} > 3$ für alle reellen $x \in (1, 2)$.

2. Lösung:
Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{x+1}{x-1} > 3\right) : x_0$.
Aus $\frac{x_0+1}{x_0-1} > 3$ folgt

$$\frac{x_0+1}{x_0-1} - 3 > 0 \qquad \text{und daraus} \qquad \frac{2x_0+4}{x_0-1} > 0$$

Ein Bruch ist positiv genau dann, wenn Zähler und Nenner jeweils das gleiche Vorzeichen haben. Es gilt demnach

$$-2x_0 + 4 > 0 \qquad , \qquad x_0 - 1 > 0 \tag{1}$$

oder

$$-2x_0 + 4 < 0 \qquad , \qquad x_0 - 1 < 0 \tag{2}$$

Damit hat die vorgegebene Ungleichung die Lösungsmenge $L = (1, 2)$, da (2) auf einen Widerspruch führt. Die Probe wird analog wie nach der 1. Lösung durchgeführt.

3.2.8. Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, für die gilt

$$-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$$

Es ist also ein System von Ungleichungen zu lösen, nämlich

$$1. \quad \frac{7x-3}{8x-5} < 1 \qquad , \qquad 2. \quad \frac{7x-3}{8x-5} > -1 \tag{1,2}$$

Lösung:
$\frac{5}{8}$ kann keine Lösung sein, da dann die linke Seite von (1) und (2) nicht definiert ist.

1. Bestimmung der Lösungsmenge von $\frac{7x-3}{8x-5} < 1$
Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{7x-3}{8x-5} < 1\right) : x_0$.
Da zur Lösung beide Seiten der Ungleichung $\frac{7x_0-3}{8x_0-5} < 1$ mit $8x_0 - 5$ multipliziert werden müssen, sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $8x_0 - 5 > 0$ b) $8x_0 - 5 < 0$.

Fall a): Es sei $8x_0 - 5 > 0$, dann folgt aus

$$\frac{7x_0 - 3}{8x_0 - 5} < 1 \qquad , \qquad 7x_0 - 3 < 8x_0 - 5$$

Damit gilt also

$$8x_0 - 5 > 0 \qquad \text{und} \qquad 7x_0 - 3 < 8x_0 - 5$$

Aus $8x_0 - 5 > 0$ folgt $x_0 > \frac{5}{8}$ und aus $7x_0 - 3 < 8x_0 - 5$ folgt $x_0 > 2$. Wie die Probe (hier nicht angegeben) zeigt, genügen alle reellen $x \in (2, +\infty)$ den Bedingungen.

Fall b): Wie man leicht sieht, gilt $8x_0 - 5 < 0$ und $7x_0 - 3 > 8x_0 - 5$, woraus sich die Menge aller reellen $x \in (-\infty, \frac{5}{8})$ ergibt. Der Leser möge die Probe selbst durchführen.
Für die Ungleichung $\frac{7x-3}{8x-5} < 1$ erhält man folglich

$$L_{A1} = (2, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{5}{8}\right)$$

Geometrische Veranschaulichung:
Setzt man $y_1 = \frac{7x-3}{8x-5}$ und $y_2 = 1$, so erhält man folgende Bilder:

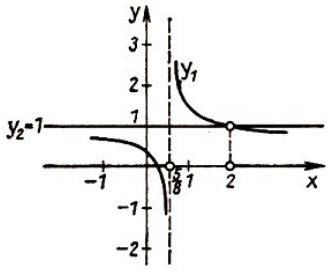


Bild 4

Wie die Darstellung zeigt, gilt für alle reellen x aus $(2, +\infty)$ bzw. $(-\infty, \frac{5}{8})$: $y_1 < y_2$.

2. Bestimmung der Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{7x-3}{8x-5} > -1$. (2)
Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{7x-3}{8x-5} > -1\right) : x_0$.
Da auch hier wieder 2 Fälle zu unterscheiden sind, wird analog wie bei der Lösung von 1. vorgegangen.

Fall a) Es sei $8x_0 - 5 > 0$. Aus $\frac{7x_0-3}{8x_0-5} > -1$ folgt $7x_0 - 3 > 5 - 8x_0$.
Es gilt $8x_0 - 5 > 0$ und $7x_0 - 3 > 5 - 8x_0$. Damit folgt, $x_0 \in (\frac{5}{8}, +\infty)$.

Probe: $x_0 > \frac{5}{8}$ bzw. $x_0 = \frac{5}{8} + p$ ($p > 0$, geeignet reell) in (2) eingesetzt ergibt:

$$\frac{7\left(\frac{5}{8} + p\right) - 3}{8\left(\frac{5}{8} + p\right) - 5} = \frac{\frac{11}{8} + 7p}{8p} > 1$$

Fall b) Für $8x_0 - 5 < 0$ ergibt sich nach Multiplikation mit $8x_0 - 5$ $7x_0 - 3 < 5 - 8x_0$ und damit $x_0 \in (-\infty, \frac{8}{15})$.
Die Probe (in diesem Fall hier nicht durchgeführt) zeigt, dass alle reellen $x \in \left(-\infty, \frac{8}{15}\right)$ auch Lösungen sind.
Als Menge der möglichen Lösungen für Ungleichung (2) erhält man

$$L_{A2} = \left(\frac{5}{8}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{8}{15}\right)$$

3. Bestimmung der Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$$

Dieses hat alle die reellen x als Lösung, die Elemente von L_{A1} und L_{A2} sind, also

$$L_A = L_{A1} \cap L_{A2} = \left(-\infty, \frac{8}{15}\right) \cup (2, +\infty)$$

Probe: $x_0 = \frac{8}{15} - p$ ($p > 0$ geeignet reell) in $\frac{7x-3}{8x-5}$ für x eingesetzt, ergibt:

$$\frac{7\left(\frac{8}{15} - p\right) - 3}{8\left(\frac{8}{15} - p\right) - 5} = \frac{-105p + 11}{-120p - 11} = \frac{120p + 11}{120p + 11} - \frac{15p + 22}{120p + 11} = b_1$$

Der Vergleich liefert $- < b_1 < 1$.[11]
Analog erhält man für $x_0 > 2$ bzw. $x_0 = 2 + q$ ($q > 0$, geeignet reell):

$$\frac{7(2+q) - 3}{8(2+q) - 5} = 1 - \frac{q}{8q + 11} = b_2$$

und der Vergleich ergibt $-1 < b_2 < 1$.
Damit ist gezeigt, dass $L_A = L = \left(-\infty, \frac{8}{15}\right) \cup (2, +\infty)$.

Geometrische Veranschaulichung: Darstellung von $-1 < \frac{7x-3}{8x-5}$: Setzt man $y_1 = -1$ und $y_2 = \frac{7x-3}{8x-5}$, so erhält man folgende Bilder:

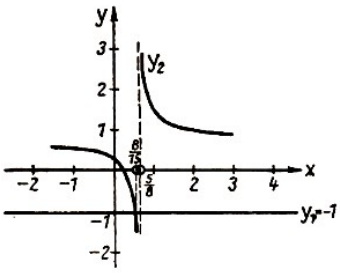


Bild 5

Für alle x aus $\left(\frac{5}{8}, +\infty\right)$ bzw. $\left(-\infty, \frac{8}{15}\right)$ gilt $y1 < y_2$.
1.5ex] Darstellung von $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$.
Setzt man $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{7x-3}{8x-5}$ und $y_3 = 1$, so erhält man die Bilder:

[11] Die Abschätzung $-1 < b_1$ ($b_1 < 1$ ist unmittelbar klar) verlangt den Beweis folgender Allaussage: Für alle reellen $p > 0$ gilt $\frac{15p+22}{120p+11} < 2$.

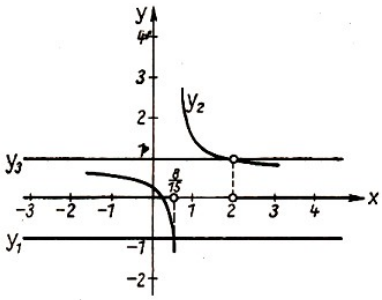


Bild 6

Wie man sieht, gilt für alle reellen x aus $\left(-\infty, \frac{8}{15}\right)$ bzw. $(2, +\infty)$: $y_1 < y_2 < y_3$.

3.3 Ungleichungen höheren Grades

3.3.1. Es sind alle reellen x zu bestimmen, für die gilt:

$$x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{2}x + 1 \tag{1}$$

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{2}x + 1) : x_0$.
Aus $x_0^2 - 4x_0 + 3 > \frac{1}{2}x_0 + 1$ folgt $x_0^2 - 4\frac{1}{2}x_0 > -2$ und daraus, nach Addition der quadratischen Ergänzung,

$$x_0^2 - \frac{9}{2}x_0 + \frac{81}{16} > \frac{81}{16} - 2 \qquad , \qquad \left(x_0 - \frac{9}{4}\right)^2 > \frac{49}{16}$$

Da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind, kann die Wurzel aus beiden Seiten gezogen werden:

$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{9}{4}\right)^2} > \sqrt{\frac{49}{16}}$$

woraus $\left|x_0 - \frac{9}{4}\right| > \frac{7}{4}$ folgt.

1. Ist $x_0 - \frac{9}{4} \geq 0$, so folgt weiter

$$x_0 - \frac{9}{4} > \frac{7}{4} \qquad \text{und daraus} \qquad x_0 > 4$$

Da $x_0 > 4$ und aus $x_0 - \frac{9}{4} \geq 0$ $x_0 \geq \frac{9}{4}$ folgt, erhält man im ersten Fall alle reellen $x \in (4, +\infty)$ als Lösung.

2. Ist $x_0 - \frac{9}{4} < 0$, so folgt aus $|x_0 - \frac{9}{4}| > \frac{7}{4}$

$$-x_0 + \frac{9}{4} > \frac{7}{4} \qquad \text{und daraus} \qquad x_0 < \frac{1}{2}$$

Wegen $x_0 - \frac{9}{4} < 0$ ist aber auch $x_0 < \frac{9}{4}$.
Also erhält man im 2. Fall alle reellen $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
Für die Ungleichung (1) erhält man demnach

$$L_A = (4, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

Probe:

$x_0 > 4$ bzw. $x_0 = 4 + p$ ($p > 0$, geeignet reell) in $x^2 - 4x + 3$ für x eingesetzt, ergibt

$$(4+p)^2 - 4(4+p) + 3 = p^2 + 4p + 3 = b_1$$

und für x in $\frac{1}{2}x + 1$ eingesetzt

$$\frac{1}{2}(4+p) + 1 = \frac{p}{2} + 3 = b_2$$

Der Vergleich ergibt: $b_1 > b_2$. Die Probe für $x_0 < \frac{1}{2}$ (hier nicht angeführt) zeigt, dass auch alle reellen $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ der Ungleichung (1) genügen, also ist $L_A = L$.

Geometrische Veranschaulichung: Wird $x^2 - 4x + 3 = y_1$ und $\frac{1}{2}x + 1 = y_2$ gesetzt, so erhält man folgende Bilder:

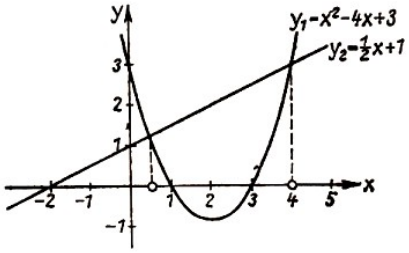


Bild 7

Für alle x aus $(4, +\infty)$ bzw. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ gilt $y_1 > y_2$.

3.3.2.• Man bestimme die Menge aller reellen x, für die gilt

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 < 0$$

Hinweis: Die Ungleichung hat die Gestalt $P_4 < 0$; man betrachte zunächst $P_4 = 0$ und suche unter der Annahme, dass diese Gleichung ganzzahlige Wurzeln hat, diese nach Vieta zu bestimmen!

3.4 Wurzelungleichungen

3.4.1. Für welche reellen x gilt $\sqrt{x+2} < 2$?
Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{x+2} < 2) : x_0$.
Da eine Wurzel nur für nichtnegative Radikanden erklärt ist, enthält die Lösungsmenge nur reelle Zahlen, die der Ungleichung $x + 2 \geq 0$ genügen.
Aus $x_0 + 2 \geq 0$ folgt $x_0 \geq -2$. Durch Quadrieren beider Seiten der Ungleichung $\sqrt{x_0 + 2} < 2$ folgt

$$x_0 + 2 < 4 \qquad \text{und daraus} \qquad x_0 < 2$$

Für L_A erhält man folglich $L_A = [-2, 2)$.

Probe: Aus $-2 \leq x_0 < 2$ folgt $x_0 = -2 + p$, wobei $0 \geq p < 4$ geeignet reell. Durch Einsetzen von $-2 + p$ an Stelle der Variablen in die Aussageform erhält man

$$\sqrt{-2 + p + 2} = \sqrt{p} < 2$$

da $p < 4$. Also gilt für alle $x \in [-2, 2)$ die Ungleichung $\sqrt{x+2} < 2$.

Geometrische Veranschaulichung: Setzt man $\sqrt{x+2} = y_1$ und $2 = y_2$, so erhält man folgende Bilder:

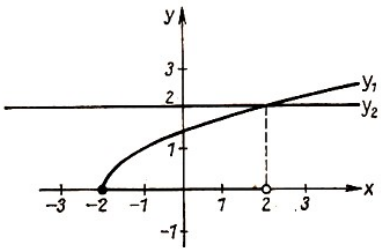


Bild 8

3.4.2.• Man bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-\sqrt{x-\sqrt{x+2}}} > 1$$

3.4.3. Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{x+\sqrt{\frac{3}{2}}}{x+\sqrt{x-\sqrt{x+\frac{29}{4}}}} > 1 \qquad (*)$$

zu bestimmen!

Lösung:

Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{x+\sqrt{\frac{3}{2}}}{x+\sqrt{x-\sqrt{x+\frac{29}{4}}}} > 1 \right) : x_0.$

Da eine Wurzel nur für nichtnegative Radikanden erklärt ist, enthält die Lösungsmenge nur reelle Zahlen, die den beiden folgenden Ungleichungen genügen:

$$1. \quad x_0 + \frac{29}{4} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad 2. \quad x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}} \geq 0$$

Aus $x_0 + \frac{29}{4} \geq 0$ folgt $x_0 \geq -\frac{29}{4}$ also

$$x_0 \in \left[-\frac{29}{4}, +\infty\right) = T_1 \qquad (1)$$

Aus $x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}} \geq 0$ folgt $x_0 \geq \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}}$ (2).

Da $\sqrt{x_0 + \frac{29}{4}}$ nicht negativ ist, folgt für x_0: $x_0 \geq 0$ und, da $x_0 = 0$ zum Widerspruch führt,

$$x_0 \in (0, +\infty) = T_2 \qquad (3)$$

Man kann daher beide Seiten von (2) quadrieren, woraus dann

$$x_0^2 \geq x_0 + \frac{29}{4} \qquad (4)$$

folgt. Aus (4) erhält man:

$$x_0^2 - x_0 \geq \frac{29}{4}$$

und nach Addition der quadratischen Ergänzung

$$x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \geq \frac{30}{4}$$

und daraus

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{30}{4} \tag{5}$$

Da beide Seiten von (5) nichtnegativ sind, kann aus beiden Seiten die Wurzel gezogen werden:

$$\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{30}}{2} \tag{6}$$

1. Fall: Es sei $x_0 - \frac{1}{2} \geq 0$, dann folgt aus (6)

$$x_0 \geq \frac{1+\sqrt{30}}{2} \qquad \text{also} \qquad x_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{30}}{2}, +\infty\right) = T_3$$

Andererseits folgt aus $x_0 - \frac{1}{2} \geq 0$: $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = T_4$.

2. Fall: Es sei $x_0 - \frac{1}{2} < 0$, dann folgt daraus $x_0 < \frac{1}{2}$ und aus (6)

$$x_0 \leq \frac{1-\sqrt{30}}{2}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (3), also scheidet dieser Fall aus. Man erhält als Teilbereich damit die Menge aller der reellen Zahlen, die sowohl Element von T_1, T_2, T_3 als auch T_4 sind. Das ist aber gerade der Durchschnitt dieser 4 Mengen.

$$T = [T_1 \cap T_2 \cap T_3] \cap T_4 = \left[\frac{1+\sqrt{30}}{2}, +\infty\right)$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass kein $x \notin T$ Lösung sein kann. Auch die Nullstellen des Nenners von (*) können keinesfalls Lösungen von (*) sein. Wegen

$$x + \sqrt{x - \sqrt{x + \frac{29}{4}}} = 0 \qquad \text{also} \qquad -x = \sqrt{x - \sqrt{x + \frac{29}{4}}}$$

müssen die Nullstellen, falls sie reell sind, negativ sein. Damit sind sie dann auch nicht im Teilbereich T enthalten, also brauchen die Nullstellen in diesem Fall nicht bestimmt zu werden.

Bestimmung der Lösungsmenge: Wegen

$$x_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{30}}{2}, +\infty\right) \qquad \text{gilt} \qquad x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}}} > 0$$

Somit erhält man aus

$$\frac{x_0 + \sqrt{\frac{3}{2}}}{x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}}}} > 1 \qquad , \qquad x_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} > x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}}} \tag{7}$$

Da beide Seiten von (7) positiv sind, folgt, nachdem man beide Seiten quadriert hat,

$$\frac{3}{2} > x_0 - \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}} \qquad \text{und daraus} \qquad \sqrt{x_0 + \frac{29}{4}} > x_0 - \frac{3}{2} \tag{8}$$

Wegen $x_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{30}}{2}, +\infty\right)$ ist $x_0 - \frac{3}{2}$ positiv, also können beide Seiten von (8) quadriert werden, ohne dass sich das Ungleichheitszeichen ändert. Aus (8) folgt dann

$$x_0 + \frac{29}{4} > \left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_0^2 - 4x_0 - 5 < 0, \qquad (x_0 - 2)^2 < 9$$

Wegen $x_0 \in T$ ist $x_0 - 2$ positiv, also folgt weiter

$$x_0 - 2 < 3 \qquad , \qquad x_0 < 5 \tag{9}$$

Für L_A erhält man demnach $L_A = \left[\frac{1+\sqrt{30}}{2}, 5\right)$.

Probe: Wie man nachweisen kann, sind für alle $x \in T$ die vorgenommenen Umformungen von (7) bis (9) umkehrbar, also ist L_A tatsächlich auch die Lösungsmenge der vorgegebenen Ungleichung.

3.4.4.• Man bestimme die Menge aller reellen x, für die die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x-2}+3}{1-\sqrt{x-3}} < -2$$

3.4.5. Man bestimme die Menge aller reellen x, für die die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

Lösung:
Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq \frac{1}{2}\right) : x_0$.
a) Die Lösungsmenge kann nur reelle x zu Elementen haben, die der Ungleichung $2 - x^2 \geq 0$ genügen, da die Wurzel nur für nichtnegative Radikanden definiert ist. Aus

$$2 - x_0^2 \geq 0 \qquad \text{folgt} \qquad x_0^2 \leq 2$$

Da beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ sind, kann aus beiden Seiten die Wurzel gezogen werden. Man erhält $|x_0| \leq \sqrt{2}$. (2)

Ist $x_0 \geq 0$, so folgt aus (2) $x_0 \geq \sqrt{2}$, mithin $x_0 \in [0, \sqrt{2})$-

Ist dagegen $x_0 < 0$, so folgt aus (2) $-x_0 \leq \sqrt{2}$ und weiter $x_0 \geq 2$, also $x_0 \in [-\sqrt{2}, 0)$.
Die Lösungsmenge kann also nur reelle x zu Elementen haben, die ihrerseits Elemente sind von

$$[-\sqrt{2}, 0) \cup [0, \sqrt{2}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

b) Zur Lösungsmenge können weiterhin die x nicht gezählt werden, für die der Nenner gleich Null ist. Es ist also zu untersuchen, für welche reellen x die beiden Ausdrücke $x + \sqrt{2-x^2}$ und $x - \sqrt{2-x^2}$ den Wert Null annehmen.

Aus $x + \sqrt{2-x^2} = 0$ folgt $x = \pm 1$.
Ebenfalls aus $x - \sqrt{2-x^2} = 0$ folgt $x = \pm 1$
Man erhält somit als Teilbereich

$$T = \{x \in : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\} \setminus \{-1, +1\}$$

c) Bestimmung der Lösungsmenge:

Durch Umformung der linken Seite von (1) folgt

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=\frac{2x}{2(x^2-1)}=\frac{x}{x^2-2}$$

Für x_0 muss also gelten

$$\frac{x_0}{x_0^2-1}\geq\frac{1}{2}$$

Da zur weiteren Lösung beide Seiten von (3) mit der Zahl x_0^2-1 multipliziert werden müssen und wegen b) der Fall $x_0 2^2-1=0$ ausscheidet, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $x^2-1>0$. 2. Fall: $x_0^2-1<0$.

Zum 1. Fall: Es sei $x_0^2-1>0$, dann ist $x_0^2>1$ und $|x_0|>1$. (4)
Ist $x_0\geq 0$, dann folgt aus (4) $x_0>1$, also $x_0\in(1,+\infty)$.

Andererseits erhält man aus (3) $2x_0\geq x_2^2-1$ und daraus $(x_0-1)^2\leq 2$, woraus $|x_0-1|\leq\sqrt{2}$ folgt.
Für $x_0-1\geq 0$ ist $x_0>1$ ($x-0=1$ muss wegen b) ausgeschlossen werden). Aus (6) folgt dann $x_0\leq 1+\sqrt{2}$, also $x_0\in(1,1+\sqrt{2}]$.

Für $x_0-1<0$ ist $x_0<1$, Widerspruch zu (5).
Ist $x_0<0$, dann folgt aus (4), $-x_0>1$ bzw. $x_0<-1$, also $x_0\in(-\infty,-1)$. (7)
Für diesen Fall erhält man aus (3) $|x_0-1|\leq\sqrt{2}$.

Für $x_0-1\geq 0$ ist $x_0\geq 1$, Widerspruch zu (7).
Ist $x_0-1<0$, dann ist $x_0<1$ und aus (6) folgt $-(x_0-1)\leq\sqrt{2}$, woraus man dann $x_0\geq 1-\sqrt{2}$ erhält, Widerspruch zu (7).

Man erhält somit für den 1. Fall als Menge der möglichen Lösungen

$$L_{A1}=T\cap(1,1+\sqrt{2}]=(1,\sqrt{2}]$$

Zum 2. Fall: Es sei $x_0^2-1<0$, dann erhält man analog wie beim 1. Fall

$$L_{A2}=T\cap(-1,1-\sqrt{2}]=(-1,1-\sqrt{2}]$$

Die Ungleichung (1) hat als Menge der möglichen Lösungen die Vereinigungsmenge von L_{A1} und L_{A2}, also

$$L_A=L_{A1}\cup L_{A2}=(1,\sqrt{2}]\cup(-1,1-\sqrt{2})$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_0=1-\sqrt{2}$.

3.4.6.• Der Leser führe die Probe, indem er folgende Allaussage beweist:
Für alle reellen $x\in(1,\sqrt{2}]\cup(-1,1-\sqrt{2})$ gilt $\frac{x}{x^2-1}\geq\frac{1}{2}$.
Hinweis: Der Beweis dieser Allaussage erfordert eine genaue Analyse ähnlich der der Aufgaben 2.1.1. bis 2.4.9.

3.4.7.• Es ist die Menge aller reelle x zu bestimmen, für die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

4 Das Rechnen mit absoluten Beträgen

4.1 Graphische Darstellungen

4.1.1. Es ist die Funktion f, gegeben durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = |x|$, graphisch darzustellen!

Lösung:
Nach Definition ist $y = |x| \geq 0$. Der Definitionsbereich ist das Intervall[12] $-\infty < x + \infty$ und der Wertevorrat $0 \leq y < +\infty$.
Es ergeben sich die beiden Halbgeraden mit den analytischen Ausdrücken $y = -x$ für $x \leq 0$ und $y = x$ für $x \geq 0$ als graphische Darstellung.

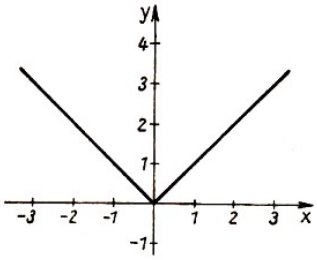


Bild 9

4.1.2.• Es ist die Funktion f, die durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = |x - |x - 1||$ gegeben ist, graphisch darzustellen.

4.1.3. Es ist die durch den analytischen Ausdruck $|y - 1| = 1 - |x|$ vermittelte Zuordnung im kartesischen Koordinatensystem graphisch darzustellen.

Lösung:
Wegen $|y-1| \geq 0$ sind nur den $x \in [-1; 1]$ reelle y zugeordnet. Für $y < 1$ ist $-(y-1) = 1-|x|$ und damit $y = |x|$.

Für $y > 1$ ist $y - 1 = 1 - |x|$, also $y = 2 - |x|$.
Für $y = 1$ ist $x = \pm 1$.
Damit erhält man

$y = |x|$ mit dem Definitionsbereich $-1 \leq x \leq 1$ und dem Wertevorrat $0 \leq y \leq 1$
$y = 2 - |x|$ mit dem Definitionsbereich $-1 \leq x \leq 1$ und dem Wertevorrat $1 \leq y \leq 2$.
Es ergibt sich damit folgendes Bild:

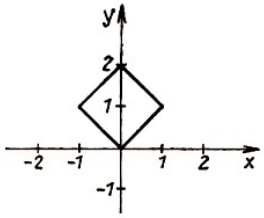


Bild 10

4.1.4.• Es ist die Funktion f, gegeben durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = ||x| - 2|$, graphisch darzustellen!

[12] Unter dem Definitionsbereich wollen wir im folgenden immer die größte Menge verstehen, für die der analytische Ausdruck $f(x)$ noch sinnvoll ist.

4.2 Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen mit absoluten Beträgen

4.2.1. Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, für die gilt:

$$|x - |x-1|| = -2x + 1 \tag{1}$$

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $|x - |x-1|| = -2x+1) : x_0$.
Nach Definition gilt $|x_0 - |x_0 - 1|| \geq 0$, also ist auch $-2x_0 + 1 \geq 0$.
Aus $-2x_0 + 1 \geq 0$ folgt $1 \geq 2x_0$ oder $x_0 \leq \frac{1}{2}$. Man erhält $T = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

Für alle $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ gilt wegen (1)

$$|x + x - 1| = |2x - 1| = -(2x-1) \qquad \text{also gilt} - (2x-1) \equiv -2x+1$$

Wegen dieser Identität ist $L_A = T$.

Probe: Alle reellen x, die der Bedingung $-\infty < x \leq \frac{1}{2}$ genügen, sind Lösung der Gleichung (1).
$x_0 = \frac{1}{2} - p$ mit $0 \leq p < +\infty$ in die linke Seite der Ausgangsgleichung eingesetzt, ergibt

$$\left|\frac{1}{2} - p - |\frac{1}{2} - p - 1|\right| = \left|\frac{1}{2} - p - p - \frac{1}{2}\right| = |-2p| = 2p$$

Setzt man für x den Ausdruck $\frac{1}{2} - p$ in die rechte Seite der Gleichung ein, so folgt

$$-2\left(\frac{1}{2} - p\right) + 1 = -1 + 2p + 1 = 2p$$

Der Vergleich liefert $2p = 2p$. Also ist $L = L_A = T$.

4.2.2. Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, für die die Ungleichung $|x| < 5$ gilt!

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 5) : x_0$.
Da für alle reellen x gilt $|x| = |-x|$, ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Fall: Für $x_0 < 0$ ist $|x_0| = -x_0$, also gilt $-x_0 < 5$ bzw. $x_0 > -5$.
2. Fall: Für $x_0 = 0$ ist $|x_0| = 0$, es gilt $0 < 5$.
3. Fall: Für $x_0 > 0$ ist $|x_0| = x_0$, also gilt $x_0 < 5$;

Man erhält: $L_A = (-5, 5)$.

Geometrische Veranschaulichung: Setzt man $|x| = y_1$ und $5 = y_2$, so erhält man folgende Bilder:

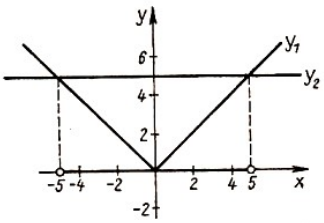


Bild 11

4.2.3.• Es ist zu zeigen, dass die Ungleichung $|x| < a$ für alle reellen $x \in (-a, +a)$ und für alle positiven reellen a gilt!

4.2.4.• Es ist die Lösungsmenge L für folgende Ungleichung zu bestimmen: $|x - 3| < 4$.

4.2.5. Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| > x$ zu bestimmen!

Lösung:
Es sei $A = \mathbb{R}$. Nach Definition des absoluten Betrages gilt für alle $x \geq 0$

$$|x| = x$$

Als Lösungen kämen damit nur alle reellen $x < 0$ in Frage. Wegen $|x| > 0$ für alle reellen $x < 0$ sind diese offensichtlich auch Lösungen. Als Menge der Lösungen erhält man $L = (-\infty, 0)$.

Geometrische Veranschaulichung: Setzt man $|x| = y_1$ und $x = y_2$, so erhält man folgende Bilder:

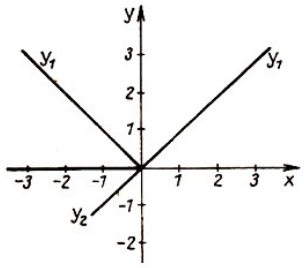


Bild 12

Wie man sieht, gilt für alle reellen $x < 0$ die Ungleichung $y_1 > y_2$.

4.2.6.• Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, für die gilt:

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}$$

4.2.7. Für welche reellen $x \neq \pm 1$ gilt folgende Ungleichung

$$\frac{|x| - 1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{2}$$

1. Lösung:
1. Bestimmung der Lösungsmenge L:
Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \text{ und } \frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}\right) : x_0$.
Da beide Seiten der vorgegebenen Ungleichung mit $x_0^2 - 1$ zu multiplizieren sind, ist eine Fallunterscheidung durchzuführen.

1. Fall: $x_0^2 - 1 > 0$. 2. Fall: $x_0^2 - 1 < 0$.

Zum 1. Fall: Es sei $x_0^2 - 1 > 0$, dann ist $x_0^2 > 1$ und daraus folgt, $\sqrt{x_0^2} > \sqrt{1}$, mithin $|x_0| > 1$. Diese Ungleichung wird von allen reellen x erfüllt, für die $x \in (-\infty, -1)$ oder $x \in (1, +\infty)$ gilt.

Für $x_0^2 - 1 > 0$ folgt aus $\frac{|x_0|-1}{x_0^2-1} \geq \frac{1}{2}$ nacheinander:

$$2(|x_0| - 1) \geq x_0^2 - 1 \qquad , \qquad |x_0| \geq \frac{x_0^2 + 1}{2}$$

Für $x_0 > 0$ folgt:

$$x_0 \geq \frac{x_0^2+1}{2}, \qquad 2x_0 \geq x_0^2+1, \qquad 0 \geq (x_0-1)^2$$

Das ist aber für $x_0 \neq 1$ eine falsche Aussage, also gilt nicht $x_0 > 0$. Für $x_0 < 0$ folgt:

$$-x_0 \geq \frac{x_0^2+1}{2}, \qquad x_0 \leq -\frac{x_0^2+1}{2}, \qquad 2x_0 \leq -x_0^2-1, \qquad (x_0+1)^2 \leq 0$$

Diese Aussage ist aber für $x_0 \neq -1$ ebenfalls falsch, also gilt nicht $x_0 < 0$. Da sowohl $x_0 > 0$ als auch $x_0 < 0$ nicht gelten und auch $x_0 = 0$ zum Widerspruch führt, kann der 1. Fall insgesamt nicht eintreten, ist also auszuschließen.

Zum 2. Fall: Es sei $x_0^2 - 1 < 0$, dann ist $x_0^2 < 1$ und daraus folgt $-1 < x_0 < 1$, also $T_1 = (-1, 1)$.

Für $x_0^2 - 1 < 0$ folgt aus

$$\frac{|x_0|-1}{x_0^2-1} \geq \frac{1}{2}, \qquad |x_0|-1 \leq \frac{1}{2}(x_0^2-1), \qquad |x_0| \leq \frac{x_0^2+1}{2} \tag{1}$$

Da nach Definition für $x_0 > 0$ gilt: $|x_0| = x_0$, folgt aus (1)

$$x_0 \leq \frac{x_0^2+1}{2} \qquad \text{und daraus}$$

$$2x_0 \leq x_0^2+1 \qquad , \qquad 0 \leq (x_0-1)^2$$

Da beide Ausdrücke nichtnegativ sind, folgt weiter $0 \leq |x_0 - 1|$ und daraus

a) $x_0 \geq 1$, $x_0 \in [1, +\infty) = T_2$ und
b) $x_0 \leq 1$, $x_0 \in (-\infty, -1] = T_3$.

Der Durchschnitt von T_1 und T_2 ist leer und $T_1 \cap T_3 = T_1$, da nach Voraussetzung $x \neq 1$ ist. Andererseits ist nach Definition $|x_0| = -x_0$ für $x_0 < 0$, also folgt aus (1)

$$-x_0 \leq \frac{x_0^2+1}{2} \qquad \text{und daraus} \qquad x_0 \geq -\frac{x_0^2+1}{2}$$

und weiter $(x_0+1)^2 \geq 0$. Da beide Seiten nichtnegativ sind, kann die Wurzel gezogen werden $|x_0+1| \geq 0$ und daraus folgt

c) $x_0 \leq -1$, $x_0 \in (-\infty, -1] = T_4$
d) $x_0 \geq -1$, $x_0 \in [-1, +\infty) = T_5$

Der Durchschnitt von T_1 und T_4 ist leer und $T_1 \cap T_5 = T_1$, da nach Voraussetzung $x \neq -1$ ist. Man erhält letztlich als Menge der möglichen Lösungen der Ungleichung $\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$: $L_A = (-1, 1)$.

2. Bestimmung der reellen x, für die $\frac{|x|-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ (1)

Aus (1) folgt $|x_0| = \frac{x_0^2+1}{2}$ und daraus würde $x_0 = \pm 1$ folgen. Diese Werte sind aber nach Voraussetzung auszuschließen, so dass die Gleichung (1) für kein reelles x gilt.
Damit ist rückschließend die Ungleichung zu verändern, und zwar gilt $\frac{|x|-1}{x^2+1} > \frac{1}{2}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Probe: $-1 < x_0 < +1$ bzw. $x_0 = -1+p$ mit $0 < p < 2$ wird in die linke Seite der Ungleichung $\frac{|x|-1}{x^2-1} > \frac{1}{2}$ eingesetzt und man erhält

$$\frac{|-1+p|-1}{(-1+p)^2-1} \tag{2}$$

a) Für $0 < p < 1$ folgt aus (1)

$$\frac{1-p-1}{p^2-2p} = \frac{-1}{p-2}$$

Da $p < 1$, ist $p-2 < 0$. Durch Erweitern mit -1 erhält man

$$\frac{-1}{p-2} = \frac{1}{2-p}$$

Der Vergleich zeigt in diesem Falle $\frac{1}{2-p} > \frac{1}{2}$.

b) (1) ergibt für $1 \leq p < 2$

$$\frac{-1+p-1}{p(p-2)} = \frac{1}{p}$$

Da $1 \leq p < 2$, ergibt der Vergleich $\frac{1}{p} > \frac{1}{2}$.

2. Lösung:
Es gilt $(|x|-1)(|x|+1) = |x|^2 - 1 = x^2 - 1$ für alle reellen x. Daraus folgt, da $x \neq \pm 1$ ist,

$$\frac{|x_0|-1}{x_0^2-1} = \frac{1}{|x_0|+1} > \frac{1}{2}$$

Da $|x_0|+1 > 0$, erhält man weiter

$$1 > \frac{1}{2}(|x_0|+1), \qquad 2 > |x_0|+1, \qquad 1 > |x_0|$$

Diese Ungleichung ist nach Aufgabe 4.2.3. der Ungleichung $11 < x_0 < 1$ äquivalent. Man erhält als Lösungsmenge das Intervall $(-1, 1)$.

4.2.8. Es ist die Menge aller reellen x zu bestimmen, für die gilt:

$$3 - |2-x| \geq 1 + \frac{1}{2}x \tag{1}$$

Lösung:
Angenommen: $\exists x : (x \in \mathbb{R}$ und $3 - |2-x| \geq 1 + \frac{1}{2}x) : x_0$.
Dann folgt aus (1) $|2-x_0| \leq 2 - \frac{1}{2}x_0$.
Zur weiteren Lösung ist eine Fallunterscheidung erforderlich:

1. Fall: $2 - x_0 \geq 0$ und $2 - x_0 \leq 2 - \frac{1}{2}x_0$.
2. Fall: $2 - x_0 < 0$ und $x_0 - 2 \leq 2 - \frac{1}{2}x_0$.

Der 1. Fall liefert dann $0 \leq x_0 \leq 2$, und der 2. Fall ergibt dann $2 < x_0 \leq \frac{8}{3}$. Somit erhält man für L_A: $L_A = \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

Geometrische Veranschaulichung : Setzt man $y_1 = 3 - |2-x|$ und $y_2 = 1 + \frac{1}{2}x$, so erhält man folgende Bilder:

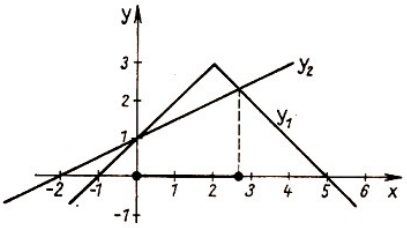


Bild 13

Wie man sieht, gilt $y_1 \geq y_2$ im Intervall $\left[0, \frac{8}{3}\right]$.

4.2.9.• Es ist die Lösungsmenge von folgendem Ungleichungssystem mit einer Variablen zu bestimmen!

$$1 - |1 - x| < 2x \qquad , \qquad \frac{1}{2}x + 2 > |x + 1|$$

4.3 Beweise von Ungleichungen mit absoluten Beträgen

4.3.1. Es ist zu beweisen, dass für 2 beliebige reelle Zahlen x und y die Ungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ gilt!

Beweis:
Lässt man in Aufgabe 4.2.5. das Gleichheitszeichen zu, so gilt nach dieser Aufgabe folgende Abschätzung:

$$|x| \geq \pm x \qquad \text{und} \qquad |y| \geq \pm y$$

Damit gilt auch

$$|x| + |y| \geq \pm(x + y) \qquad \text{mithin} \qquad |x| + |y| \geq \pm|x + y|$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x und y das gleiche Vorzeichen haben.

4.3.2.• Man beweise, dass für 2 beliebige reelle Zahlen x und y $|x + y| \geq |x| - |y|$ gilt!

4.3.3. Für alle reellen a, b, c, x, y, z mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gilt $|ax + by + cz| \leq 1$.

1. Lösung:
Voraussetzung: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$; a, b, c, x, y, z geeignet reell.

Behauptung: $|ax + by + cz| \leq 1$.
Beweis:
Nach Aufgabe 2.4.4. gilt für beliebige reelle a, b, c, x, y, z

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind, kann die Wurzel gezogen werden. Man erhält

$$\sqrt{(ax - by - cz)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und daraus

$$|ax - by - cz| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Da nun insbesondere

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

erhält man $|ax + by + cz| \leq 1$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $a = x$, $b = y$, $z = c$ oder $a = -x$, $b = -y$ und $c = -z$.

2. Lösung:
Wir betrachten die Vektoren $\mathfrak{a} = a\mathfrak{i} + b\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$. Aus $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ bzw. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgt

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |\mathfrak{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind also Einheitsvektoren.
Aus der Definition des skalaren Produkts zweier Vektoren,

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos\rho$$

folgt für Einheitsvektoren, wegen $|\cos\rho| \leq 1$,

$$-1 \leq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leq 1 \tag{1}$$

Da $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = ax + by + cz$, folgt aus (1) unmittelbar $|ax + by + cz| \leq 1$.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $|\cos\rho| = 1$, das heißt, wenn die Vektoren gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, wenn also entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$ gilt.

5 Ungleichungen mit Parametern

5.1 Bestimmung der Lösungsmenge

5.1.1. Für welche reellen x gilt $2px + 3 < 7$, wobei p eine reelle Zahl (Parameter) ist? (1)

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $2px + 3 < 7) : x_0$.
Dann folgt aus $2px_0 + 3 < 7$: $px_0 < 2$. (2)
Da über p keine weiteren Voraussetzungen gegeben sind, ist eine Fallunterscheidung durchzuführen.

1. Fall: $p = 0$.
Für $p = 0$ ist jedes reelle x Lösung der Ungleichung (1), das heißt, die Lösungsmenge fällt mit dem Grundbereich zusammen, also mit der Menge der reellen Zahlen. Es ist in diesem Fall $L_{A1} = \mathbb{R}$.

2. Fall: $p > 0$.
Für $p > 0$ folgt aus (2) $x_0 < \frac{2}{p}$ und man erhält für diesen Fall $L_{A2} = \left(-\infty, \frac{2}{p}\right)$.

3. Fall: $p < 0$.
Für $p < 0$ folgt aus (2) $x_0 > \frac{2}{p}$ also $L_{A3} = \left(\frac{2}{p}, +\infty\right)$.

Probe:
1. Fall: Für $p = 0$ gilt $0 \cdot x < 2$ für jedes reelle x.
2. Fall: $\frac{2}{p}$ in die linke Seite der Ungleichung (1) an Stelle der Variablen x eingesetzt, ergibt, da $x < \frac{p}{2}$

$$2px + 3 < 2p\frac{2}{p} + 3 \qquad , \qquad 2px + 3 < 7$$

3. Fall: $\frac{2}{p} + q$ mit $0 < q < \infty$ in (1) an Stelle der Variablen x eingesetzt, ergibt

$$2p\left(\frac{2}{p} + q\right) + 3 = 4 + 2pq + 3 = 7 + 2pq$$

Da $2pq$ wegen $p < 0$ negativ ist, ergibt der Vergleich $7 + 2pq < 7$.

5.1.2. Man bestimme alle reellen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2 \tag{1}$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

1. Lösung:
Angenommen: $\exists x\left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2\right) : x_0$.
Aus (1) folgt dann

$$\frac{x_0^2 - 2p^2}{px_0} < 2 \tag{2}$$

Da für $x_0 = 0$ die linke Seite von (2) nicht erklärt ist, sind bei der weiteren Lösung nur noch zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $x_0 > 0$.

Für $x_0 > 0$ folgt aus (2) nacheinander

$$x_0^2 - 2p^2 < 2px_0, \qquad x_0^2 - 2px_0 + p^2 < 3p^2, \qquad (x_0 - p)^2 < 3p^2$$

und daraus

$$|x_0 - p| < |p|\sqrt{3} \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung $p > 0$, folgt für $x_0 - p > 0$ aus (3) $x_0 < p(1 + \sqrt{3})$.
Für $x_0 - p = 0$ folgt $x_0 = p$ und für $x_0 - p < 0$ folgt aus (3) $x_0 > p(1 - \sqrt{3})$.
Man erhält wegen $x_0 > 0$ schließlich $L_{A1} = (0, p(1 + \sqrt{3}))$.

2. Fall: $x_0 < 0$.
Für $x_0 < 0$ folgt aus (2) nacheinander

$$x_0^2 - 2p^2 > 2px_0, \qquad (x_0 - p)^2 > 3p^2, \qquad |x_0 - p| > |p|\sqrt{3}$$

Da nach Voraussetzung $p > 0$ und $x_0 < 0$ ist, gilt nur $p - x_0 > p\sqrt{3}$ und damit $x_0 < p(1 - \sqrt{3})$.
Man erhält also $L_{A2} = (-\infty, p(1 - \sqrt{3}))$.

Als Menge der möglichen Lösungen von (1) erhält man letztlich

$$L_A = L_{A1} \cup L_{A2} = (0, p(1 + \sqrt{3})) \cup (-\infty, p(1 - \sqrt{3}))$$

Probe: Setzt man $p(1 + \sqrt{3})$ für x: in (1) ein, so folgt, da $x < p(1 + \sqrt{3})$,

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < \frac{p(1 + \sqrt{3})}{p} - \frac{2p}{p(1 + \sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 - 2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 2$$

$p(1 - \sqrt{3})$ in (1) an Stelle der Variablen x eingesetzt, ergibt

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < \frac{p(1 - \sqrt{3})}{p} - \frac{2p}{p(1 - \sqrt{3})} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} = 2$$

2. Lösung:
Setzt man $\frac{x_0}{p} = z$, mit $x_0 > 0$ in $\frac{x_0}{p} - \frac{2p}{x_0} < 2$ ein, so erhält man $z - \frac{2}{z} < 2$ und daraus nacheinander

$$z^2 - 2z - 2 < 0, \qquad z^2 - 2z + 1 < 3, \qquad (z - 1)^2 < 3, \qquad |z - 1| < \sqrt{3}$$

Diese Ungleichung ist nach Aufgabe 4.2.3. der Ungleichung $-\sqrt{3} < z - 1 < \sqrt{3}$ äquivalent, woraus dann $1 - \sqrt{3} < z < 1 + \sqrt{3}$ folgt.

Wegen $z = \frac{x_0}{p}$ gilt

$$p(1 - \sqrt{3}) < x_0 < p(1 + \sqrt{3})$$

Da $x_0 > 0$ vorausgesetzt wurde, hat das Ungleichungssystem (4) die Lösungsmenge $L_{(1)} = (0, +(1 + \sqrt{3}))$.

Für $x_0 < 0$ ist $\frac{x_0}{p} = z < 0$, mithin gilt

$$z^2 - 2z - 2 > 0 \qquad , \qquad |z - 1| > \sqrt{3}$$

und daraus folgt $z < 1 - \sqrt{3}$ bzw. $x < p(1 - \sqrt{3})$. Als Lösung erhält man $L_{(2)} = (-\infty, p(1 - \sqrt{3}))$ und letztlich als Lösungsmenge von (1):

$$L = (-\infty, p(1 - \sqrt{3})) \cup (0, p(1 + \sqrt{3}))$$

5.1.3.• Es ist zu untersuchen, für welche x und unter welchen Voraussetzungen für p die Ungleichung $\frac{x}{p} - \frac{3p}{x} < 7$ gilt!

5.2 Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungssystemen

5.2.1. Es ist folgendes Ungleichungssystem zu lösen, in dem p eine beliebige reelle Zahl (Parameter) ist!

$$px - 2 > x + 1 \tag{I}$$
$$\frac{3-x}{5} < \frac{p}{2} \tag{II}$$

Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $px - 2 > x + 1) : x_0$.
Aus I erhält man $px_0 - x_0 > 3$ und daraus $x_0(p-1) > 3$. Zur weiteren Lösung ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1.Fall: $p - 1 = 0$.
Aus $p - 1 = 0$ folgt $0 > 3$, also ist dieser Fall auszuschließen.

2.Fall: $p - 1 > 0$.
Aus $p - 1 > 0$ folgt $p > 1$, und damit erhält man alle die x_0 als Lösung, die der Ungleichung $x > \frac{3}{p-1}$ genügen.

3.Fall: $p - 1 < 0$.
Aus $p - 1 < 0$ folgt $p < 1$, und man erhält alle die x_0 als Lösung, die der Ungleichung $x < \frac{3}{p-1}$ genügen.

Angenommen: $\exists x \left(x \in \mathbb{R} \text{ und } \frac{3-x}{5} < \frac{p}{2}\right) : y_0$.
Aus II erhält man dann $3 - y_0 < \frac{5}{2}p$ und daraus $y_0 > 3 - \frac{5}{2}p$.
Damit sind alle reellen x des Intervalls $(3 - \frac{5}{2}p, +\infty)$ Lösung von II, wobei p jede reelle Zahl sein kann.

Es ist zu untersuchen, welches die Lösungsmenge des Ungleichungssystems für $p > 1$ ist.
Für $p > 1$ ist die Menge der möglichen Lösungen von I $L_{A1} = \left(\frac{3}{p-1}, \infty\right)$.
und die der Ungleichung II $L_{A2} = \left(3 - \frac{5}{2}p, \infty\right)$.
Lösung des Ungleichungssystems sind alle die reellen x, die Elemente von L_{A1} und L_{A2} sind, die also Elemente des Durchschnitts von L_{A1} und L_{A2} sind.

$$L_A = \left(\frac{3}{p-1}, \infty\right) \cap \left(3 - \frac{5}{2}p, \infty\right) = \left(\frac{3}{p-1}, \infty\right)$$

Weiterhin ist die Lösungsmenge für $p < 1$ zu untersuchen. Man erhält analog

$$L_A = \left(-\infty, \frac{3}{p-1}\right) \cap \left(3 - \frac{5}{2}p, \infty\right) = \varnothing$$

Die Probe möge vom Leser selbst durchgeführt werden.

5.2.2.• Es ist das Ungleichungssystem

$$I. \quad p(x-3) > x - 3 \qquad , \qquad II. \quad (2p+3)(x-1) > (p-1)(x+2)$$

zu lösen, wobei p eine reelle Zahl ist!

5.3 Gemischte Aufgaben

5.3.1. Es ist die Lösungsmenge L der Ungleichung $px(3-x) > 7p-5$ zu bestimmen, in der p eine reelle Zahl ist!

Lösung:

Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $px(3-x) > 7p-5) : x_0$.
Aus $px_0(3-x_0) > 7p-5$ folgt nacheinander

$$3px_0 - px_0^2 < 7p-5, \qquad -px_0^2 + 3px_0 - 7p + 5 > 0, \qquad px_0^2 - 3px_0 + 7p - 5 < 0 \quad (1)$$

Zur weiteren Lösung ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Fall: $p = 0$.
Für $p = 0$ ist jedes reelle x Lösung, d.h., die Lösungsmenge fällt mit dem Grundbereich (Menge der reellen Zahlen) zusammen.

2. Fall: $p > 0$.
Für $p > 0$ folgt aus (1) nacheinander:

$$x_0^2 - 3x_0 + 7 - \frac{5}{p} < 0, \qquad x_0^2 - 3x_0 + \frac{9}{4} < \frac{5}{p} - \frac{19}{4}, \qquad \left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{5}{p} - \frac{19}{4}$$

Da $x_0 - \frac{3}{2}$ entweder nichtnegativ oder negativ ist, ist eine weitere Fallunterscheidung durchzuführen.
a) Ist $x_0 - \frac{3}{2} \geq 0$, dann ist $x_0 < \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}$.

b) Ist $x_0 - \frac{3}{2} < 0$, dann ist $x_0 < \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}$.

Da eine Wurzel nur für nichtnegative Radikanden erklärt ist, gilt $\frac{5}{p} - \frac{19}{4} \geq 0$. Daraus folgt für p: $p \leq \frac{20}{19}$.
Für $p = \frac{20}{19}$ ist $x_0 = \frac{3}{2}$. Damit erhält man im 2. Fall

$$L_{A2} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}\right) \qquad \text{wobei} \qquad p \in \left(0, \frac{20}{19}\right]$$

3. Fall: $p < 0$.
Für $p < 0$ folgt aus (1) nacheinander

$$x_0^2 - 3x_0 + 7 - \frac{5}{p} > 0, \qquad x_0^2 - 3x_0 + \frac{9}{4} > \frac{5}{p} - \frac{19}{4}, \qquad \left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{5}{p} - \frac{19}{4}$$

Da $p < 0$, ist auch $\frac{5}{p} < 0$, mithin wäre beim Radizieren die Diskriminante $D = \frac{5}{9} - \frac{19}{4} < 0$ und die Wurzel nicht erklärt. Also ist die Aufgabe für $p < 0$ nicht lösbar.

Die Menge der möglichen Lösungen der vorgegebenen Ungleichung ist demnach für den Fall $p = 0$

$$L_{A1} = \mathbb{R}$$

für den Fall $p \in \left[0, \frac{20}{19}\right]$

$$L_{A2} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{19}{4}}\right)$$

5.3.2. Man bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung: $|1-px| < p+x$. (p beliebige reelle Zahl.)

Lösung:
Nach Aufgabe 4.2.3. ist diese Ungleichung der Ungleichung

$$-(p+x) < 1-px < p+x$$

äquivalent.
Es ist also die Lösungsmenge von folgendem Ungleichungssystem zu bestimmen:

$$I. \quad -p-x :< 1-px \qquad , \qquad II. \quad p+x > 1-px$$

Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $-p-x < 1-px; p+x > 1-px) : x_0$.
Formt man I. und II. um, so erhält man

$$px_0 - x_0 < 1+p \qquad , \qquad px_0 + x_0 > 1-p$$

Die Lösung erfolgt weiter analog der Aufgabe 5.1.3. Man erhält, ähnlich wie dort, nachstehende Fälle:

Für Ungleichung I:
1. $p = 1$ und damit $L_{A1} = \mathbb{R}$.
2. $p > 1$ und damit $L_{A2} = \left(-\infty, \frac{1+p}{p-1}\right)$.
3. $p < 1$ und damit $L_{A3} = \left(\frac{1+p}{p-1}, \infty\right)$.

Für Ungleichung II:
1. $p = -1$ (dieser Fall ist auszuschließen).
2. $p > -1$ und damit $L_{A4} = \left(\frac{1-p}{1+p}, \infty\right)$.
3. $p < -1$ und damit $L_{A5} = \left(-\infty, \frac{1-p}{1+p}\right)$.

Als Menge der möglichen Lösungen für das Ungleichungssystem erhält man dann:
Für $p = 1$, $L_A = L_{A4}$.
Für $-1 < p < +1$, $L_A = L_{A3} \cap L_{A4}$.
Für $p > 1$, $L_A = L_{A2} \cap L_{A4}$.
Für $p < -1$, $L_A = L_{A3} \cap L_{A5}$.
Für $p = -1$ ist die Aufgabe nicht lösbar.

6 Goniometrische Ungleichungen

6.1 Beweise für goniometrische Ungleichungen

6.1.1. Es ist zu beweisen, dass stets $\sin x + \cos x \neq 1,5$ ist!

1. Lösung:
Angenommen, es sei $\sin x + \cos x = 1,5$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\sin x \pm \sqrt{1 - \sin^1 x} = 1,5$$

Durch Ordnen und beiderseitiges Quadrieren erhält man

$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1,25}{2} = 0$$

und daraus

$$\sin x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{16}}$$

Da der Radikand negativ ist, ist die Wurzel nicht erklärt, die Aussage $\sin x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{16}}$ ist also sinnlos. Demnach ist die Annahme falsch, und es gilt $\sin x + \cos x \neq 1,5$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Lösung:
Mit $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \cos x$ ist auch $f(x) = y = y_1 + y_2$ stetig[13] und periodisch mit derselben Periodenlänge wie y_1 und y_2.
Wegen der Periodizität von y (Periodenlänge 2π) kann die Untersuchung auf das Intervall $[0, 2\pi)$ beschränkt werden. In einem abgeschlossenen Intervall nehmen stetige Funktionen ihr absolutes Maximum bzw. Minimum an, welches bei dieser Lösung ermittelt werden soll.

Diese absoluten Extrema können auch am Rand des Intervalls liegen, was allerdings in diesem Fall nicht untersucht zu werden braucht. Aus $y' = -\sin x + \cos x = 0$ folgt $\cos x = \sin x$ und damit $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Es gilt $f''(x_1) < 0$, also liegt an der Stelle x_1 ein Maximum vor. Mithin gilt für alle $x \in [9, 2\pi)$ $f(x) \leq f(x_1)$.
Wegen $f(x_1) = \sqrt{2} < 1,5$ folgt damit für alle $x \in [0, 2\pi)$ $f(x) \neq 1,5$ und, da $y = y_1 + y_2$ periodisch ist, letztlich für alle reellen $x \in (-\infty, \infty)$.

Geometrische Veranschaulichung:
Setzt man $sinx = y_1$ und $\cos x = y_2$, so ist $y = y_1 + y_2$ der analytische Ausdruck, durch den die Funktion dargestellt wird, deren Bild man durch Superposition der grafischen Darstellungen der Funktionen y_1 und y_2 erhält. Man erhält folgende Bilder:

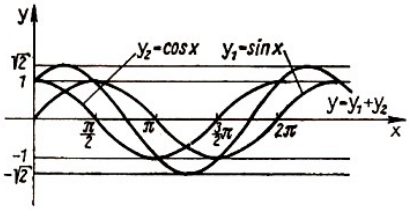


Bild 14

[13] "Enzyklopädie der Elementarmathematik", Band III, Analysis; Berlin 1958 Seite 1795.

3. Lösung:
Es gilt

$$(1-\sin x)^2 \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (1-\cos x)^2 \geq 0$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ nicht beide gleichzeitig gleich 1 sein können, ist wenigstens einer der Summanden ungleich Null, folglich erhält man nach Addition beider Ungleichungen

$$(1-\sin x)^2 + (1-\cos x)^2 > 0$$

und daraus

$$12\sin x + \sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x > 0$$

Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, folgt weiter

$$3 - 2\sin x - 2\cos x > 0, \qquad 2(\sin x + \cos x) < 3, \qquad \sin x + \cos x < \frac{3}{2}$$

4. Lösung:
Annahme, es gelte $\sin x + \cos x = 1,5$ für ein $x \in \mathbb{R}$. (1)
Durch beiderseitiges Quadrieren folgt aus (1)

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 2,25 \tag{2}$$

Da

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{und} \qquad 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

folgt aus (2) $\sin 2x = 1,25$.
Das ist aber für jedes reelle x eine falsche Aussage, also ist die Annahme falsch, und es gilt die Behauptung:

$$\sin x + \cos x \neq 1,5$$

6.1.2. Es ist zu beweisen, dass für jedes reelle x die Ungleichung gilt:

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

Beweis

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \tag{1}$$

Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, folgt aus (1)

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \tag{2}$$

Wegen $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, folgt aus (2)

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \tag{3}$$

Da beide Seiten der Gleichung nicht negativ sind, kann aus (3) die Wurzel gezogen werden, und man erhält

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{1 + \sin 2x}$$

Nun ist aber $\sin 2x$ für jedes reelle x kleiner oder gleich 1, also gilt

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oder $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ ist, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

6.1.3. Es ist zu zeigen, dass für beliebige, von Null verschiedene, reelle x gilt:

$$|\tan x| + |\cot x| \geq 2$$

Beweis:
Nach Aufgabe 2.1.2. gilt: Ist das Produkt zweier positiver reeller Zahlen gleich 1, so ist die Summe dieser Zahlen nicht kleiner als 2. Da $\tan x \cot x = 1$, gilt

$$|\tan x| + |\cot x| \geq 2$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ ist, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

6.1.4. Folgende Aussage ist zu beweisen:
Für alle reellen x und y aus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt: $\tan x \cot y$ ist größer oder gleich 1 genau dann, wenn $sin(x-y) \geq 0$.

Voraussetzung: $\sin(x-y) \geq 0$; $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Behauptung: $\tan x \cot y \geq 1$.
Beweis:
Aus $\sin(x-y) \geq 0$ folgt

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y \geq 0 \qquad \text{und daraus} \qquad \sin x \cos y \geq \cos x \sin y$$

Dividiert man beide Seiten durch $\cos x \sin y$, dann folgt, da $\cos x \sin y > 0$,

$$\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} \geq 1 \qquad \text{und folglich} \qquad \tan x \cot y \leq 1$$

Umkehrung:
Aus $\tan x \cot y \geq 1$ folgt $\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} \geq 1$ und daraus

$$\sin x \cos y \geq \cos x \sin y \qquad , \qquad \sin x \cos y - \cos x \sin y \geq 0$$

und letztlich $\sin(x-y) \geq 0$.. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = y = \frac{\pi}{4}$.

6.1.5. Es ist zu beweisen, dass für alle reellen $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ gilt:

$$\tan^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \leq 1 + \sin^2 x \tan^2 x$$

Beweis:
Nach Voraussetzung ist $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daraus folgt nacheinander:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x \cos x}{\cos x} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} & , & \tan x \cos x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan^2 x \cos^2 x \leq 1 & , & \tan^2 x(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \leq 1 \end{array}$$

woraus dann sofort die Behauptung folgt. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{4}$.

6.1.6. Es ist zu zeigen, dass für alle reellen $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2}\sqrt[4]{2 \sin x}\sqrt[4]{\cos x} \tag{1}$$

Analyse:
Wegen $2\sin x\cos x = \sin 2x$, folgt aus (1)

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt[4]{4\sin 2x}$$

und daraus wegen $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(\sin x + \cos x)^4 \geq 4\sin 2x \qquad \text{oder} \qquad [(\sin x + \cos x)^2]^2 \geq 4\sin 2x \tag{2}$$

Wie in Aufgabe 6.1.2. unter anderem gezeigt wurde, gilt

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

daher erhält man aus (2) weiter

$$(1 + \sin 2x)^2 \geq 4\sin 2x$$

und daraus

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 \geq 0 \qquad \text{mithin} \qquad (\sin 2x - 1)^2 \geq 0 \tag{3}$$

Die Ungleichung (3) ist für jedes reelle x eine wahre Aussage, sie kann daher als Grundlage für den Beweis von (1) genommen werden.

Beweis:
Es gilt $(\sin 2x - 1)^2 \geq 0$. Man erhält daraus $\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 \geq 0$ und weiter

$$\sin^2 2x + 2\sin 2x + 1 \geq 4\sin 2x \qquad , \qquad (\sin 2x + 1)^2 \geq 4\sin 2x$$

Da $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$ folgt weiter

$$[(\sin x + \cos x)^2]^2 \geq 4\sin 2x \qquad \text{oder} \qquad (\sin x + \cos x)^4 \geq 4\sin 2x \tag{4}$$

Nach Voraussetzung ist $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, daher kann aus beiden Seiten von (4) die Wurzel gezogen werden:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt[4]{4\sin 2x}$$

Aus dieser letzten Ungleichung folgt dann sofort die Behauptung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{4}$.

6.1.7. Man beweise, dass für beliebige reelle x gilt:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

Beweis:
Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, folgt $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$. Daraus erhält man

$$\sin^4 x + cos^4 x = 1 - 2sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{(2\sin x\cos x)^2}{2} \tag{2}$$

Wegen $2\sin x\cos x = \sin 2x$, folgt aus (2)

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Für jedes reelle x gilt $\sin^2 2x \leq 1$, daher folgt aus $\sin^2 2x \leq 1$ nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad -\frac{1}{2}\sin^2 2x \geq -\frac{1}{2}$$

und nach Addition von 1

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geq \frac{1}{2}$$

Mithin gilt letztlich

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geq \frac{1}{2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ist, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

6.1.8. Es ist zu beweisen, dass für beliebige reelle x und y folgende Ungleichung gilt:

$$\sin^2 x + \sin^2 y \geq \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1 \tag{1}$$

Analyse: Aus (1) folgt nacheinander

$$\begin{aligned}
\sin^2 x - \sin x \sin y + \sin^2 y &\geq \sin x + \sin y - 1 \\
\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y &\geq \sin x + \sin y - 1 - \sin x \sin y \\
(\sin x - \sin y)^2 &\geq \sin x + \sin y - 1 - \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Untersucht man die rechte Seite der letzten Ungleichung für sich, so erhält man aus $\sin x + \sin y - 1 - \sin x \sin y$

$$\sin x + \sin y - 1 - \sin x \sin y = \sin x(1 - \sin y) - (1 - \sin y) = (1 - \sin y)(\sin x - 1)$$

Da $1 - \sin y$ für alle reellen y stets nichtnegativ und $\sin x - 1$ für alle reellen x stets nichtpositiv ist, folgt,

$$(1 - \sin y)(\sin x - 1) \leq 0$$

Da $(\sin x - \sin y)^2 \geq 0$ für alle reellen x und y ist, kann beim Beweis von folgenden gesicherten Aussagen ausgegangen werden:

$$(\sin x - \sin y)^2 \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (1 - \sin y)(\sin x - 1) \leq 0$$

Beweis:
Man geht aus von

$$(\sin x - \sin y)^2 \geq 0 \qquad \text{und} \qquad -(1 - \sin y)(\sin x - 1) \geq 0$$

Durch Addition beider Ungleichungen erhält man:

$$(\sin x - \sin y)^2 - (1 - \sin y)(\sin x - 1) \geq 0$$

und daraus folgt

$$\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y - \sin x + 1 + \sin x \sin y \geq 0$$

woraus sofort

$$\sin^2 x + \sin^2 y \geq \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1$$

folgt. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ist, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

6.2 Bestimmung der Lösungsmenge

6.2.1. Man bestimme alle reellen x, für die $\sin x + \cos x \geq 1$ gilt!

1. Lösung:
Da bei goniometrischen Ungleichungen die Variablen auch für Argumente trigonometrischer Funktionen stehen und diese periodisch sind, gestattet es deren Periodizität, unsere Betrachtung zunächst auf das entsprechende Periodenintervall zu beschränken.

Angenommen: $\exists x(x \in [0, 2\pi]$ und $\sin x + \cos x \geq 1) : x_0$.
Aus

$$\sin x_0 + \cos x_0 \geq 1 \qquad \text{folgt} \qquad \sin x_0 \pm \sqrt{1 - \sin^2 x_0} \geq 1$$

Durch Ordnen und beiderseitiges Quadrieren erhält man

$$1 - \sin^2 x_0 \geq 1 - 2\sin x_0 + \sin^2 x_0$$

und daraus

$$\sin^2 x_0 - \sin x_0 \leq 0 \qquad \text{oder} \qquad \sin x_0(\sin x_0 - 1) \leq 0$$

Zur weiteren Lösung ist eine Fallunterscheidung notwendig:

1. Fall: $\sin x_0 \geq 0$ und $\sin x_0 - 1 \leq 0$.
2. Fall: $\sin x_0 \leq 0$ und $\sin x_0 - 1 \geq 0$.

Der 2. Fall ist auszuschließen, da $\sin x_0 - 1$ stets negativ oder Null für jedes reelle x ist.
Zum 1. Fall: Im Periodenintervall $[0, 2\pi)$ folgt aus $\sin x_0 \geq 0$: $0 \leq x_0 \leq \pi$.

Für alle reellen x gilt stets $\sin x - 1 \leq 0$, deshalb ist die Lösungsmenge enthalten in $L_{A1} = [0, \pi]$.

Die Probe zeigt, dass aber nur alle reellen $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Lösungen sind, da für alle reellen $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $\cos x \leq 0$ ist.[14]

Bei der Bestimmung der allgemeinen Lösungsmenge muss die Periodizität beachtet werden. So sind nicht nur alle reellen $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Lösung der vorgegebenen Ungleichung, sondern auch alle reellen $x \in \left[2\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ und weiterhin alle die Intervalle, die man erhält, wenn man zu jedem reellen $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $2k\pi$ addiert.
Allgemein erhält man:

$$L_A = \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \qquad (k \text{ beliebig ganze Zahl})$$

2. Lösung:
Angenommen: $\exists x(x \in \mathbb{R}$ und $\sin x + \cos x \geq 1) : x_0$.
Aus $\sin x_0 + \cos x_0 \geq 1$ folgt

$$\sin^2 x_0 + 2\sin x_0 \cos x_0 + \cos^2 x_0 \geq 1$$

und daraus $1 + \sin 2x_0 \geq 1$, mithin $\sin 2x_0 \geq 0$. Im Periodenintervall $[0, 2\pi)$ folgt aus $\sin 2x_0 \geq 0$

$$0 \leq 2x_0 \leq \pi \qquad \text{und daraus} \qquad 0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

[14] Siehe auch die graphische Darstellung der Aufgabe 6.1.1.

also $L_{A1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und allgemein

$$L_A = \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \qquad (k \text{ beliebig ganz})$$

6.2.2. Für welche reellen x gilt $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geq \sqrt{2}$? (1)

Lösung:
Da die linke Seite von (1) größer als $\sqrt{2}$ sein soll, sind nur reelle x Lösung, die der Bedingung $0 \leq x \leq \pi$ genügen, wobei also zunächst nur die Untersuchung im Intervall $[0, \pi]$ durchgeführt wird.

Angenommen: $\exists x(x \in [0, \pi]$ und $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geq \sqrt{2}) : x_0$.
Aus (1) folgt dann

$$\sin x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x_0 > \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

Man führt nun die reelle Zahl φ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ und $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ein, also folgt aus (2)

$$\sin x_0 + \tan\varphi \cos x_0 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Nach Multiplikation mit $\cos\varphi$ folgt wegen $\cos\varphi > 0$

$$\sin x_0 \cos\varphi + \sin\varphi \cos x_0 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\varphi$$

Da $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, erhält man für $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und deshalb für

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

also ist

$$\sin x_0 \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x_0 > \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Nach Anwendung des entsprechenden Additionstheorems folgt

$$\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Aus $\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$ folgt wegen $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} < x_0 + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{4}\pi$$

und daraus

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} < x_0 < \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{6} \qquad \text{und letztlich} \qquad \frac{\pi}{12} < x_0 < \frac{7}{12}\pi$$

Wegen der Periodizität folgt, dass die vorgegebene Ungleichung für alle reellen $x \in \left(\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7}{12}\pi + 2k\pi\right)$ gilt, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

6.2.3.• Man bestimme alle reellen x, für die folgende Ungleichung gilt:

$$\cos x \cos 3x \geq \cos 5x \cos 7x$$

7 Lösungen und Lösungshinweise

Im folgenden findet der Leser die Lösungen der in den einzelnen Kapiteln gestellten Übungsaufgaben. Dabei ist die Mehrzahl ausführlich gelöst.
Bei Aufgaben, die sich in ihrer Problematik kaum von den in den einzelnen Kapiteln behandelten unterscheiden, ist nur der Lösungsweg skizziert und die Lösung angegeben.

Bei der Bestimmung der Lösungsmenge wird die Annahme, dass eine Lösung existiert nicht mehr gesondert formuliert. Um aber dem Leser diese wichtige Annahme bewusst zu machen, werden stets die Ungleichheitsaussagen mit der angenommenen Lösung (x_0, y_0 oder z_0) umgeformt.

Zu 2.1.3.
Voraussetzung: $x > 0$ beliebig reell.
Behauptung: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
Beweis: Es gilt

$$(x-1)^2 \geq 0 \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \qquad \text{und daraus} \qquad x^2 + 1 \geq 2x$$

und nach Division durch x, da $x > 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = 1$.

zu 2.2.3.
Voraussetzung: $x_1 \leq 1$, $x_2 \geq 1$ mit x_1, x_2 bel. reell.
Behauptung: $x_1 + x_2 \geq x_1 x_2 + 1$
Beweis: Aus $x_1 \leq 1$ folgt $x_1 - 1 \leq 0$ oder

$$1 - x_1 \geq 0 \tag{1}$$

Aus $x_2 \geq 0$ folgt

$$x_2 - 1 \geq 0 \tag{2}$$

Das Produkt zweier nichtnegativer Zahlen ist ebenfalls nichtnegativ, also gilt: $(1-x_1)(x_2-1) \geq 0$ und daraus

$$x_2 - 1 - x_1 x_2 + x_1 \geq 0 \qquad \text{oder} \qquad x_1 + x_2 \geq x_1 x_2 + 1$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 = 1$ oder $x_2 = 1$ oder $x_1 =_x 2_= 1$,

Zu 2.2.5.
Voraussetzung: $x_1 x_2 ... x_n = 1$, $x1, x_2, ..., x_n$ bel. positive reelle Zahlen.
Behauptung: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$
Beweis:
1. Die Ungleichung ist richtig für $n = 3$ (nach Aufgabe 2.2.4.) und wie man leicht nachweisen kann auch für $n = 2$.
2. Die Ungleichung gelte für eine beliebige natürliche Zahl $k > 3$. Es ist zu zeigen, dass sie dann auch für den Nachfolger $k + 1$ richtig ist,

Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1. Es seien alle Faktoren gleich 1. Dann ist ihre Summe sicher gleich n.
2. Mindestens ein Faktor sei ungleich 1, dann gibt es sicher einen Faktor, der kleiner und einen der größer als 1 ist.

O.B.d.A. sei $x_1 < 1$ und $x_{k+1} > 1$, dann ist $x_1 \cdot x_{k+1} \cdot x_2 ... x_k = 1$. Setzt man $x_1 x_{k+1} = y$, so folgt

$$y \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k = 1$$

und es gilt

$$y + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k$$

Da $x_1 + ... + x_{k+1} = y + x_2 + ... + x_k - y + x_1 + x_{k+1}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} y + x_2 + ... + x_k - y + x_1 + x_{k+1} &\geq k + x_{k+1} - y + x_1 \geq k + 1 + x_{k+1} - y + x_1 - 1 \\ &\geq k + 1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 \\ &\geq k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) \end{aligned}$$

Da $x_1 < 1$ und $x_{k+1} > 1$, ist $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$. Es gilt also '

$$x_1 + ... + x_{k+1} \geq k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) \geq k + 1$$

Das Gleichheitszeichen gilt also genau dann, wenn alle Faktoren gleich 1 sind.

Zu 2.3.1.
Voraussetzung: $a_1, a_2, ..., a_n$ beliebige positive reelle Zahlen;
Behauptung: $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$

In der Aufgabenstellung wird gefordert, den Beweis für nichtnegative reelle Zahlen zu führen. Wegen der anschließenden Division durch $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ müssen die a_i aber sämtlich positiv sein. Es wäre also die Untersuchung für den Fall, dass mindestens eines der a_i gleich Null ist, gesondert zu führen. Das ist aber trivial, da dann der Radikand in der Behauptung Null ist und damit die Behauptung erst recht gilt.

Beweis a)
Es sei $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = g$ dann ist

$$\sqrt{\frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{g}} = 1 \qquad \text{mithin} \qquad \frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{g} = 1$$

Nach Aufgabe 2.2.5. gilt dann

$$\frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{g} \geq n$$

und daraus folgt

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \cdot g \qquad \text{oder} \qquad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq g$$

und letztlich

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Beweis b):
1. Die Behauptung gilt für $n = n_0 = 2$: $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Beweis: Aus $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ folgt

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \qquad , \qquad a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$$

und daraus nach Addition von $2a_1a_2$

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2$$

und weiter

$$a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2, \qquad a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2}, \qquad \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

2. Die Behauptung gilt für beliebige natürliche Zahlen $n > n-0$. Wir nehmen an, die Behauptung sei für $n = m$ wahr und zeigen, dass dann die Richtigkeit für die nachfolgende natürliche Zahl $m + 1$ gilt.
Es wird zuerst folgender Hilfssatz bewiesen:

Ist die Behauptung für $n = m$ gültig, so gilt sie auch für $n = 2m$.
Beweis:

$$\begin{aligned} \sqrt[2m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{2m}} &= \sqrt[m]{\sqrt{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{2m}}} \\ &= \sqrt[m]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}} \end{aligned}$$

Da die Behauptung für $n = m$ gültig sein soll, gilt

$$\sqrt[m]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}} \leq \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_3} + \ldots + \sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}}{m}$$

folglich

$$\sqrt[2m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2m}} \leq \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_3} + \ldots + \sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}}{m}$$

Wie gezeigt, gilt die Behauptung für $n = 2$, daher ist eine weitere Abschätzung möglich:

$$\sqrt[2m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2m}} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}}{m}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt[2m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2m}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_{2m}}{2m}$$

Da die Richtigkeit der Ungleichung für $n = 2$ nachgewiesen wurde, kann der Hilfssatz für $m = 2$ angewandt werden. Dann gilt die Behauptung auch für $n = 4$. Weiterhin wird der Hilfssatz für $m = 4$ angewandt, also gilt die Behauptung für $n = 8$ usw.

Es ist also zu zeigen, dass die Ungleichung allgemein für 2^p gilt, wobei p eine beliebige natürliche Zahl ≥ 1 ist.

1. Die Richtigkeit der Behauptung für $p = 1$ wurde gezeigt:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

2. Die Ungleichung sei richtig für ein beliebiges $p = k$. Durch die Anwendung des Hilfssatzes folgt dann sofort

$$n = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$$

Damit gilt die Ungleichung für alle Zahlen der Folge

$$2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^p$$

Es gilt nur noch zu zeigen, dass die Ungleichung auch für alle natürlichen Zahlen gilt, die nicht in dieser Folge vorkommen. Um das zu zeigen, wird eine natürliche Zahl k so bestimmt, dass $n < 2^k = r$ gilt. (Diese Ungleichung gilt sicher für $k = n$).

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} &= \sqrt[n \cdot r]{(a_1 \cdot ... \cdot a_n)^r} = \sqrt[r]{(a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[r]{(a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{1+\frac{r-n}{n}}} \\ &= \sqrt[r]{a_1 ... a_n \cdot (a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{\frac{r-n}{n}}}\end{aligned}$$

Da für $r = 2^k$ die Ungleichung gilt, erhält man folgende Abschätzung:

$$\sqrt[r]{a_1 ... a_n \cdot (a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{\frac{r-n}{n}}} \leq \frac{a_1 + ... + a_n + (r-n)\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}}{r}$$

Also gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} =\leq \frac{a_1 + ... + a_n + (r-n)\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}}{r}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} r\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} &\leq a_1 + ... + a_n + (r-n)\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \\ n\sqrt{a_1 \cdot ... \cdot a_n} &\leq a_1 + ... + a_n \\ \sqrt{a_1 \cdot ... \cdot a_n} &\leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}\end{aligned}$$

Zu 2.3.3.
Voraussetzung: a, b beliebige positive reelle Zahlen, n, m beliebige nichtnegative ganze reelle Zahlen, $m < n$.

Behauptung: $n^n(a^m b^{n-m}) \leq [am + b(n-m)]^n$
Analyse:

$$\begin{aligned} n\sqrt[n]{a^m b^{n-m}} &\leq am + b(n-m) \\ \sqrt[n]{a^m b^{n-m}} &\leq \frac{am + b(n-m)}{n} \\ \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{m \text{ Faktoren}} \underbrace{b \cdot ... \cdot b}_{n-m \text{ Faktoren}}} &\leq \frac{\overbrace{a + a + ... + a + b + ... + b}^{n \text{ Summanden}}}{n}\end{aligned}$$

Beweis:
Nach Aufgabe 2.3.1. gilt: Das geometrische Mittel beliebiger nichtnegativer reeller Zahlen ist kleiner oder höchstens gleich dem arithmetischen Mittel aus diesen Zahlen.
Also gilt:

$$\sqrt[n]{a^m b^{n-m}} \leq \frac{am + b(n-m)}{n} \qquad , \qquad n\sqrt[n]{a^m b^{n-m}} \leq am + b(n-m)$$

und weiter

$$n^n(a^m b^{n-m}) \leq [am + b(n-m)]^n$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$ ist.

Zu 2.4.1.
Voraussetzung: $x, y > 0$ beliebige reelle Zahlen.
Behauptung:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}\right)^2$$

Beweis:
Formt man zunächst jede Seite für sich um, so erhält man

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2 \geq 2\left[\frac{(x+y)^2+4}{2(x+y)}\right]^2$$

und daraus

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^2} + \frac{y^4+2y^2+1}{y^2} \geq \frac{(x+y)^4+8(x+y)^2+16}{2(x+y)^2}$$

Durch Analyse dieser Ungleichung findet man die zum Beweis notwendige wahre Aussage:

$$x^2y^2(x^2-y^2)^2 + 2(x^2-y^2)^2 + 4xy(x-y)^2 \geq 0$$

Durch Umkehrung der bei der Analyse angewandten Schlusskette folgt dann daraus

$$\frac{(x^4+2x^2+1)y^2 + (y^4+2y^2+1)x^2}{x^2y^2} \geq \frac{(x+y)^4+8(x+y)^2+16}{2(x+y)^2}$$

und weiter

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^2} + \frac{y^4+2y^2+1}{y^2} \geq \frac{[(x+y)^2+4]^2}{2(x+y)^2}$$

Durch weitere Umformung erhält man

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{[(x+y)^2+4]^2}{2(x+y)^2}$$

und nach Erweiterung mit 2 letztlich

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}\right)^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = y$ ist.

Zu 2.4.3.
Behauptung: $\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$
Beweis: Es gilt

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$$

Daraus folgt

$$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \geq 2x_1x_2y_1y_2$$

und nach Addition von $x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \geq x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2$$
$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \geq (x_1x_2+y_1y_2)^2$$

Da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind, kann die Wurzel gezogen werden, und man erhält:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq |x_1x_2+y_1y_2|$$

und daraus[15]

$$2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq 2(x_1x_2+y_1y_2)$$

und nach Addition von $x_2^2+y_2^2+x_1^2+y_1^2$

$$x_1^2+y_1^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+x_2^2+y_2^2 \geq x_1^2+y_1^2+2(x_1x_2+y_1y_2)+x_2^2+y_2^2$$

woraus folgt

$$(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2})^2 > (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$

Beide Seiten der Ungleichung sind nichtnegativ, daher kann die Wurzel gezogen werden und man erhält letztlich,

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} > \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$.

Zu 2.4.6. Die für den Beweis der Aufgabe 2.4.5. notwendige Ungleichung.

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} > \frac{1}{k+1}$$

erhält man durch folgende Analyse:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3(k+1)+1} - x &= \frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{3k+1} \\
-x &= \frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{k+2}-...-\frac{1}{3(k+1)+1} \\
-x &= \frac{1}{k+1}-\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{3k+4} \\
x &= \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Es ist weiterhin zu untersuchen, ob für alle positiven reellen Zahlen k gilt: $x > 0$; denn nur dann gilt

$$x = \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1} > 0$$

und damit

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} > \frac{1}{k+1}$$

Es gilt

$$\frac{6k+6}{9k^2+18k+8} > \frac{6k+6}{9k^2++18k+9}$$

für alle reellen $k > 0$. Aus dieser Ungleichung folgt dann:

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4} > \frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+3}$$

[15]Der triviale Fall $x_1x_2+y_1y_2 < 0$ braucht nicht untersucht zu werden.

und daraus nach Addition von $\frac{1}{3k+3}$

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>3\cdot\frac{1}{3k+3}=\frac{1}{k+1}$$

Zu 2.4.9.
Aus $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt{n}$ (1) folgt $n!\geq\sqrt{n^n}$ (2) und daraus

$$(n!)^2\geq n^n \tag{3}$$

Da die Schritte in der Schlusskette umkehrbar, sind die Ungleichungen (1) und (3) äquivalent. Es gilt also zu beweisen, dass (3) gilt, damit gilt dann auch (1).

1. Die Ungleichung $(n!)^2\geq n^n$ gilt für ein spezielles $n=n_0=2$: $(2!)^2=2^2$, $4=4$.

2. Die Ungleichung (3) sei für $n=k$ richtig, das heißt es gelte $(k!)^2\geq k^k$.
Es ist zu zeigen, dass sie dann auch für den Nachfolger von k für $k+1$, richtig ist, also aus

$$(k!)^2\geq k^k \qquad , \qquad [(k+1)!]^2\geq(k+1)^{k+1} \quad \text{folgt.}$$

Beweis:
$(k!)^2\geq k^k$ ist äquivalent der Ungleichung

$$(1\cdot 2\cdot ...\cdot k)^2\geq k\cdot ...\cdot k \tag{4}$$

und $[(k+1)!]^2\geq(k+1)^{k+1}$ ist äquivalent

$$(1\cdot 2\cdot ...\cdot k\cdot(k+1))^2\geq(k+1)^k\cdot(k+1) \tag{5}$$

Multipliziert man (4) mit folgender Ungleichung

$$k^k(k+1)^2\geq(k+1)^k(k+1) \tag{6}$$

so folgt (5).
Es gilt also zu zeigen, dass (6) für jede natürliche Zahl richtig ist, dann kann aus (4) mit Hilfe von (6) die Ungleichung (5) gefolgert werden.

Hilfssatz: Für jede natürliche Zahl $n\geq 1$ gilt

$$n^n(n+1)^2\geq(n+1)^n(n+1) \tag{7}$$

Beweis:
Aus (7) folgt durch äquivalente Umformungen nacheinander

$$n^n(n+1)\geq(n+1)^n \qquad , \qquad n+1\geq\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$n+1\geq\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad , \qquad n+1\geq(1+\frac{1}{n})^n$$

Nun ist aber $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, während $n+1$ für $n\to\infty$ über alle Grenzen wächst, also gilt

$$n+1\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $n=1$ ist.

Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung (6) für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt. Multipliziert man (4) mit (6), so gilt:

$$\begin{aligned}(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k)^2 \cdot k^k \cdot (k+1)^2 &\geq k^k (k+1)^k (k+1) \\ [1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k(k+1)]^2 &\geq (k+1)^{k+1} \\ [(k+1)!]^2 &\geq (k+1)^{k+1}\end{aligned}$$

Damit sind die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, folglich ist die Gültigkeit von (1) wegen Äquivalenz mit (3) für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $n = 2$ ist.

Zu 2.4.10.
Voraussetzung: x, y beliebige natürliche Zahlen mit $x > y$.
Behauptung: $\binom{x}{y}^2 \leq \binom{2x}{2y}$.
Beweis:
Setzt man in $\binom{a}{0}\binom{b}{n} + ... + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$ $a = b = x$ und $n = 2y$, dann erhält man

$$\begin{aligned}\binom{2x}{2y} &= \binom{x}{0}\binom{x}{2y} + \binom{x}{1}\binom{x}{2y-1} + ... + \binom{x}{y}\binom{x}{2y-y} + ... + \binom{x}{2y}\binom{x}{0} \\ &\geq \binom{x}{y}\binom{x}{2y-y} = \binom{x}{y}^2\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $y = 0$ ist.

Zu 2.4.11.
a) Die Ungleichung $\frac{n+2}{2} > \sum\limits_{x=0}^{n} \frac{1}{x+1}$ kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{n+2}{2} > 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

1. Die Ungleichung gilt für ein spezielles $n = n_0 = 2$.

$$2 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

2. Die Ungleichung sei für eine natürliche Zahl $n = k > n_0$ richtig, es gelte also

$$\frac{k+2}{2} > 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+1}$$

Es ist zu zeigen, dass (1) dann auch für den Nachfolger von k gilt, dass also folgt:

$$\frac{k+3}{2} > 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

Da $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{k+2}$ für jede natürliche Zahl k gilt, und da Ungleichungen gliedweise addiert werden können, folgt aus (1):

$$\begin{aligned}\frac{k+2}{2} + \frac{1}{2} &> 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \\ \frac{k+3}{2} &> 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

Damit gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die vorgegebene Ungleichung

b) Setzt man in

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1-a_n) > 1+a_1+...+a_n \tag{2}$$

für $a_i = \frac{1}{i+1}$ $(i = 1, ..., n)$, so folgt

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1}$$

und daraus

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1} > \sum_{x=0}^{n}\frac{1}{x+1}$$

letztlich also '

$$\frac{n+2}{2} > \sum_{x=0}^{n}\frac{1}{x+1}$$

Die Ungleichung (2) beweist man sofort durch Ausmultiplizieren der linken Seite:

$$1+a_1+...+a_n+a_1a_2+...+a_{n-1}a_n+...+a_1...a_n > 1+a_1+a_2+...+a_n$$

Zu 3.1.2.

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + 6x > 4(x+2) \tag{1}$$

Aus $\frac{3}{4}x_0 - \frac{1}{4} + 6x_0 > 4(x_0+2)$ folgt nacheinander

$$3x_0 - 1 + 24x_0 > 16(x_0+2) \qquad , \qquad 27x_0 - 1 > 16x_0 + 32$$

$x_0 \in (3, \infty)$.

Probe: $x_0 = p+3$ mit $p > 0$ in (1) eingesetzt und die beiden Seiten für sich betrachtet, liefert

$$\frac{3}{4}(p+3) - \frac{1}{4} + 6(p-3) = \frac{27}{4}p + 20 = \frac{27p+80}{4}$$

und

$$4(p+3+2) = (p+5)4 = 4p+20 = \frac{16p+80}{4}$$

Vergleich: $\frac{27p+80}{4} > \frac{16p+80}{4}$.

Zu 3.2.2.

$$I.\quad 6-3x < 5-6x, \qquad II.\quad \frac{x+3}{2} < \frac{x+1}{4}, \qquad III.\quad x > 2x+1$$

Der Grundbereich A umfasst alle reellen Zahlen.
Aus I. folgt $x_0 < -\frac{1}{3}$, also $x_0 \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) = T_1$.
Aus I. folgt $y_0 < -5$, also $y_0 \in (-\infty, -5) = T_2$.
Aus III. folgt $z_0 < -1$, also $z_0 \in (-\infty, -1) = T_3$.
Man erhält: $L_A = (T_1 \cap T_2) \cap T_3 = (-\infty, -5)$.

Zu 3.2.3.

$$I.\quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} > 4x - 1, \qquad II.\quad x+3 < 4(x+6)$$

Aus I. folgt $x_0 < \frac{9}{22}$, also $x_0 \in \left(-\infty, \frac{9}{22}\right) = T_1$.

Aus II. folgt $y_0 > -7$, also $y_0 \in (-7, \infty) = T_2$.
$L_A = T_1 \cap T_2 = \left(-7, \frac{9}{22}\right)$.

Zu 3.2.4.

$$I. \quad 2(x+5) > 7x+3, \qquad II. \quad 5x-7 < \frac{3}{4}x+10, \qquad III. \quad x-1 > \frac{1}{2}(x+5)$$

Aus I. folgt $x_0 < \frac{7}{5}$, also $x_0 \in \left(-\infty, \frac{7}{5}\right) = T_1$.
Aus II. folgt $y_0 < 4$, also $y_0 \in (-\infty, 4) = T_2$.
Aus III. folgt $z_0 > 7$, also $z_0 \in (7, \infty) = T_3$.
Daraus folgt für L_A: $L_A = (T_1 \cap T_2) \cap T_3 = \varnothing$.
Man erhält als Durchschnitt die leere Menge, d. h., es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, welches alle 3 Ungleichungen gleichermaßen erfüllt.

Zu 3.2.5.

$$I. \quad 15x+13 > 12x+1, \qquad II. \quad 10x+6 > 4(x-3)$$

Aus I. folgt $x_0 > -4$, also $x_0 \in (-4, \infty) = T_1$.
Aus II. folgt $y_0 > -3$, also $y_0 \in (-3, \infty) = T_2$.
$L_A = T_1 \cap T_2 = (-3, \infty)$

Zu 3.2.6.

$$I. \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}, \qquad II. \quad \frac{5}{2}(x-3) \leq x-3$$

Aus I. folgt $x_0 > 3$, also $x_0 \in [3, \infty) = T_1$.
Aus II. folgt $y_0 \leq 3$, also $y_0 \in (-\infty, 3] = T_2$.

$$L_A = T_1 \cap T_2 = [3, \infty) \cap (-\infty, 3] = \{3\}$$

Der Durchschnitt enthält nur ein Element und, wie die Probe zeigt, genügt dieses auch beiden Ungleichungen.

Zu 3.3.2.
1. Lösung:

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

Es sind also alle reellen x zu bestimmen, für die $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) < 0$ gilt.
Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $(x_0+1)(x_0+2) > 0$, $(x_0+3)(x_0+4) < 0$
2. Fall: $(x_0+1)(x_0+2) < 0$, $(x_0+3)(x_0+4) > 0$

Es sei $(x_0+1)(x_0+2) > 0$, dann sind 2 weitere Fälle zu unterscheiden:

1a) $x_0+1 > 0$, $x_0+2 > 0$
1b) $x_0+1 < 0$, $x_0+2 < 0$

1a) Aus $x_0+1 > 0$ folgt $x_0 > -1$, d.h. $x \in (-1, \infty)$.
Aus $x_0+2 > 0$ folgt $x_0 > -2$, d.h. $x \in (-2, \infty)$.
Aus 1a) erhält man $T_1 = (-1, \infty)$.

1b) Aus $x_0+1 < 0$ folgt $x_0 < -1$, d.h. $x \in (-\infty, -1)$.
Aus $x_0+2 < 0$ folgt $x_0 < -2$, d.h. $x \in (-\infty, -2)$.

Aus 1b) erhält man $T_2 = (-\infty, -2)$.

Für $(x_0 + 3)(x_0 + 4) < 0$ sind ebenfalls 2 weitere Fälle zu unterscheiden:

1c) $x_0 + 3 > 0$, $x_0 + 4 < 0$
1d) $x_0 + 3 < 0$, $x_0 + 4 > 0$

1c) Aus $x_0 + 3 > 0$ folgt $x_0 > -3$, d.h. $x \in (-3, \infty)$.
Aus $x_0 + 4 < 0$ folgt $x_0 < -4$, d.h. $x \in (-\infty, -4)$.
Aus 1c) erhält man $T_3 = \varnothing$.

1d) Aus $x_0 + 3 < 0$ folgt $x_0 < -3$, d.h. $x \in (-\infty, -3)$.
Aus $x_0 + 4 < 0$ folgt $x_0 > -4$, d.h. $x \in (-4, -\infty)$.
Aus 1d) erhält man $T_4 = (-4, -3)$.

Für den 1. Fall erhält man folglich:

$$L_{A1} = (T1 \cup T_2) \cap (T_3 \cup T_4) = (-4, -3)$$

Analog erhält man nach der Untersuchung des 2. Falls:

$$L_{A2} = (-2, -1)$$

Und letztlich

$$L_A = L_{A1} \cup L_{A2} = (-4, -3) \cup (-2, -1)$$

2. Lösung:
Setzt man $y =$ '$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, so erhält man folgendes Bild:

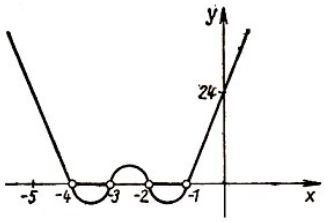


Bild 15

Es sei $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ der analytische Ausdruck, durch den die Funktion f dargestellt wird. Dann ist f eine ganzrationale Funktion 4. Grades und deshalb überall stetig. Daher ergibt die graphische Darstellung dieser Funktion notwendig den skizzierten Kurvenverlauf, und es gilt $x < 0$ für alle $x \in (-4, -3)$ und alle $x \in (-2, -1)$.

Zu 3.4.2.
Bestimmung der Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$\frac{x + 3}{x + \sqrt{x - \sqrt{x + 2}}} > 1$$

Lösung:
a) Da eine Wurzel nur für nichtnegative Radikanden erklärt ist, können nur solche reellen x Elemente der Lösungsmenge sein, die folgendem Ungleichungssystem genügen:

$$I. \quad x + 2 \geq 0 \qquad , \qquad II. \quad x - \sqrt{x + 2} \geq 0$$

Aus I. folgt $x_0 \geq -2$, also $x_0 \in (-2, +\infty) = T_1$. (1)

Aus II. folgt $x_0 \geq \sqrt{x_0+2}$ (2)
Da die rechte Seite von (2) nichtnegativ ist, muss x_0 ebenfalls nichtnegativ sein. Es gilt also $x_0 \geq 0$.
Für $x_0 = 0$ folgt aus (2) aber $0 \geq \sqrt{2}$, also muss $x_0 > 0$ sein, d.h. $x_0 \in (0, +\infty) = T_2$. (3)
Unter dieser Voraussetzung können beide Seiten von (2) quadriert werden, und man erhält

$$x_0^2 \geq x_0 + 2 \qquad \text{und daraus} \qquad \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \tag{4,5}$$

Da beide Seiten von (5) nichtnegativ sind, kann aus beiden Seiten die Wurzel gezogen werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $x_0 - \frac{1}{2} \geq 0$
ergibt $x_0 \geq \frac{1}{2}$ und damit $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = T_3$.
Für $x_0 - \frac{1}{2} \geq 0$ folgt aus (5) $x_0 - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$ und daraus $x_0 \geq 2$, d.h. $x_0 \in [2, +\infty) = T_4$.

2. Fall: $x_0 - \frac{1}{2} < 0$
führt zu $x_0 < \frac{1}{2}$ und aus (5) folgt unter dieser Voraussetzung $x_0 \leq -1$.
Das führt aber mit (3) zum Widerspruch, also scheidet der 2. Fall aus. Man erhält somit:

$$T = [(T_1 \cap T_2) \cap T_3] \cap T_4 = [2, +\infty)$$

Analog wie bei Aufgabe 3.4.3. brauchen die Nullstellen des Nenners nicht bestimmt zu werden.

b) Bestimmung der Lösungsmenge:
Man erhält dann aus

$$\frac{x_0+3}{x_0+\sqrt{x_0-\sqrt{x_0+2}}} > 1 \qquad , \qquad x_0 + 3 > x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0+2}} \tag{6}$$

und daraus $3 > \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0+2}}$.
Da beide Seiten positiv sind, kann quadriert werden, ohne dass sich das Ungleichheitszeichen ändert:

$$9 > x_0 - \sqrt{x_0+2} \qquad , \qquad \sqrt{x_0+2} > x_0 - 9 \tag{7}$$

Zur weiteren Lösung von (7) ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Fall: Aus (7) folge nach dem Quadrieren $x_0 + 2 > (x_0 - 9)^2$ (8a)
2. Fall: Aus (7) folge $x_0 + 2 < (x_0 - 9)^2$ (8b)
3. Fall: Aus (7) folge nach Quadrieren $x_0 + 2 = (x_0 - 9)^2$, dann ist

$$x_0 = \frac{19}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} \tag{8c}$$

1. Fall:
Aus $x_0 + 2 > (x_0 - 9)^2$ folgt nacheinander

$$x_0 + 2 > x_0^2 - 18x_0 + 81, \qquad x_0^2 - 19x_0 + 79 < 0, \qquad \left(x_0 - \frac{19}{2}\right)^2 < \frac{45}{4}$$

Da $x_0 - \frac{19}{2}$ entweder nichtnegativ oder negativ sein kann, ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig.

a) $x_0 - \frac{19}{2} \geq 0$, dann gilt

$$x_0 \geq \frac{19}{2} \qquad , \qquad x_0 \in \left[\frac{19}{2}, +\infty\right) \tag{10}$$

Für $x_0 - \frac{19}{2} \geq 0$ folgt aus (9) nacheinander

$$x_0 - \frac{19}{2} < \frac{3\sqrt{5}}{2} \qquad , \qquad x_0 < \frac{19 + 3\sqrt{5}}{2}$$

und daraus wegen (10) $x_0 \in \left[\frac{19}{2}, \frac{19+3\sqrt{5}}{2}\right)$ (11)

b) Es sei $x_0 - \frac{19}{2} < 0$, dann ist $x_0 < \frac{19}{2}$ also $x_0 \in \left(-\infty, \frac{19}{2}\right)$ (12)
Für $x_0 - \frac{19}{2} < 0$ folgt aus (9) nacheinander

$$-x_0 + \frac{19}{2} < \frac{3\sqrt{5}}{2} \qquad , \qquad x_0 > \frac{19}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

und damit wegen (12) $x_0 \in \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}, \frac{19}{2}\right)$ (13)

Ungleichung (8a) und damit auch (6) wird von allen x erfüllt, die Elemente der Vereinigungsmenge

$$L_{A1} = \left(\frac{19 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{19}{2}\right) \cup \left[\frac{19}{2}, \frac{19 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

sind, da alle Elemente von L_{A1} auch Elemente von T sind und alle vorgenommenen Umformungen umkehrbar waren. Es bleibt noch zu untersuchen, ob sich im 2. und 3. Fall weitere Elemente ergeben, die (6) erfüllen.

2. Fall: Aus (7) folgt $x_0 + 2 < (x_0 - 9)^2$ und daraus folgt dann

$$\left(x_0 - \frac{19}{2}\right)^2 > \frac{45}{4} \tag{14}$$

Auch hier ist wieder eine Fallunterscheidung notwendig.

a) $x_0 - \frac{19}{2} \geq 0$, dann ist $x_0 \geq \frac{19}{2}$, $x_0 \in \left[\frac{19}{2}, +\infty\right)$,
Aus (14) folgt dann $x_0 > \frac{19+3\sqrt{5}}{2}$.

Damit wäre aber $x_0 - 9$ positiv, und aus (7) würde 8a statt 8b folgen. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des 2. Falls, da dann beim Quadrieren das Ungleichheitszeichen nicht durch das entgegengesetzte ersetzt zu werden braucht.
Also scheidet dieser Fall aus.

b) $x_0 - \frac{19}{2} < 0$, dann ist $x_0 < \frac{19}{2}$.
Aus (14) folgt unter dieser Annahme dann $x_0 < \frac{19-3\sqrt{5}}{2}$ und damit für den 2. Fall $x_0 \in \left(-\infty, \frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)$.
Wegen $T = [2, +\infty)$ erhält man

$$L_{A2} = \left[2, \frac{19 - 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

Da für den 3. Fall $x_0 = \frac{19}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ebenfalls zur Lösungsmenge gehören, erhält man letztlich:

$$L_A = \left[2, \frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{19-3\sqrt{5}}{2}, \frac{19+3\sqrt{5}}{2}\right] = \left[2, \frac{19+3\sqrt{5}}{2}\right]$$

Zu 3.4.4.

$$\frac{\sqrt{x-2}+3}{1-\sqrt{x-3}} < -2 \tag{1}$$

a) Die Lösungsmenge kann nur reelle x, die den Ungleichungen

$$I. \quad x-2 \geq 0, \qquad II. \quad x-3 \geq 0, \qquad III. \quad 1-\sqrt{x-3} \neq 0$$

genügen, zu Elementen haben.

Aus I. folgt $x_0 \geq 2$, also $x \in (2, +\infty)$.
Aus II. folgt $x_0 \geq 3$, also $x \in (3, +\infty)$.
Aus III. folgt $x_0 \neq 4$

Man erhält somit zunächst als Teilmenge T_1: $T_1 = [3, 4) \cup (4, +\infty)$.

b) Bestimmung der Lösungsmenge:
Da der Zähler von (1) für jedes $x \in T_1$ positiv ist, muss der Nenner von (1) kleiner als Null sein, da die linke Seite von (1) kleiner als -2 sein soll. Es gilt also:

$$\sqrt{x_0-2}+3 > 0 \qquad \text{und} \qquad 1-\sqrt{x_0-3} < 0 \tag{*,**}$$

Aus (*) folgt wegen a): $x_0 \in T_1$.
Aus (**) folgt $x_0 > 4$, also $x_0 \in (4, +\infty)$.
Aus (*) und (**) folgt: $T = (4, +\infty)$. (2)

Da $1-\sqrt{x_0-3} < 0$ ist, erhält man aus (1)

$$10\sqrt{x_0-2} > 3x_0 - 35$$

1.Fall: Aus (3) folge nach dem Quadrieren $100(x_0-2) > 9x_0^2 - 210x_0 + 1225$. Dann erhält man daraus

$$\left(x_0 - \frac{155}{9}\right)^2 < \frac{11200}{81} \tag{4}$$

Ist $x_0 - \frac{155}{9} \geq 0$, dann ist $x_0 \geq \frac{155}{9}$, und aus (4) folgt

$$x_0 < \frac{155+40\sqrt{7}}{9} \qquad \text{also} \qquad x_0 \in \left[\frac{155}{9}, \frac{155+40\sqrt{7}}{9}\right)$$

Ist $x_0 - \frac{155}{9} < 0$, dann ist $x_0 < \frac{155}{9}$, und aus (4) erhält man

$$x_0 < \frac{155-40\sqrt{7}}{9} \qquad \text{also} \qquad x_0 \in \left(\frac{155-40\sqrt{7}}{9}, \frac{155}{9}\right)$$

Aus dem ersten Fall folgt somit als Menge der möglichen Lösungen

$$L_{A1} = \left[\frac{155}{9}, \frac{155+40\sqrt{7}}{9}\right) \cup \left(\frac{155-40\sqrt{7}}{9}, \frac{155}{9}\right) = \left(\frac{155-40\sqrt{7}}{9}, \frac{155+40\sqrt{7}}{9}\right)$$

2. Fall: Aus (3) folge $100(x_0-2) < 9x_0^2 - 210x_0 + 1225$, woraus man

$$\left(x_0 - \frac{155}{9}\right)^2 > \frac{11200}{81}$$

erhält.
Für $x_0 - \frac{155}{9} \geq 0$ folgt aus (5) $x_0 > \frac{155+40\sqrt{7}}{9}$.
Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des 2. Falls, da für alle $x_0 > \frac{155+40\sqrt{7}}{9}$ aus (3) $100(x_9-2) > 9x_0^2 - 210x_0 + 1225$ folgen würde.

Für $x_0 - \frac{155}{9} < 0$ ist $x_0 < \frac{155}{9}$, und aus (5) folgt $x_0 < \frac{155-40\sqrt{7}}{9}$.
Also erhält man im 2. Fall:

$$L_{A2} = T \cap \left(-\infty, \frac{155-40\sqrt{7}}{9}\right) = \left(4, \frac{155-40\sqrt{7}}{9}\right)$$

3. Fall: Aus (3) folge nach dem Quadrieren $100(x_0-2) = 9x_0^2 - 210x_0 + 1225$. Dann erhält man:

$$x_0 = \frac{155}{9} \pm \frac{40\sqrt{7}}{9} \qquad \text{also} \qquad L_{A3} = \left\{\frac{155+40\sqrt{7}}{9}, \frac{155-40\sqrt{7}}{9}\right\}$$

Schließlich folgt für L_A:

$$L_A = (L_{A1} \cup L_{A2}) \cup L_{A3} = \left(4, \frac{155-40\sqrt{7}}{9}\right]$$

Zu 3.4.6.
Das Ergebnis der Auflösung zu Aufgabe 3.4.5. lässt sich durch folgende Allaussage beschreiben:
Für alle reellen x, die der Ungleichung $\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$ genügen, gilt

$$x \in (1, \sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$$

Wie gezeigt wird, ergibt die Probe, dass alle reellen $x \in (1, \sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$ auch Lösung von $\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$ sind.
Wir können die Probe also führen, indem wir die Allaussage
"Für alle reellen $x \in (1, \sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$ gilt, $\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$"
beweisen.
Analyse: Aus $\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$ folgt durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \geq \frac{1}{2}$$

Durch Multiplikation mit 2 erhält man

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \geq 1$$

$x \in (1, \sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$ ist äquivalent mit

$$1 < y \leq \sqrt{2} \qquad \text{oder} \qquad -1 < x <\leq 1-\sqrt{2}$$

1. Fall: Aus $1 < x \leq \sqrt{2}$ folgt $2 < x+1 \leq 1+\sqrt{2}$ und $0 < x-1 \leq -1+\sqrt{2}$.
Offensichtlich sind $(x+)(1+\sqrt{2})$ und $(x-1)(-1+\sqrt{2})$ positiv.

Betrachtet man nur $x+1 \leq 1+\sqrt{2}$, so erhält man nach Division durch $(x+1)(1+\sqrt{2})$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1} \tag{1}$$

Analog erhält man aus $x-1 \leq 1-\sqrt{2}$

$$\frac{1}{-1+\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x-1} \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt also

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}}{2-1} = 2\sqrt{2} > 1$$

2.Fall: Aus $-1 < x \leq 1-\sqrt{2}$ folgt $0 < x+1 \leq 2-\sqrt{2}$ und $-2 < x-1 \leq -\sqrt{2}$.
Das Produkt $(x+1)(2-\sqrt{2})$ ist offensichtlich positiv. Das Produkt $(x-1)(-\sqrt{2})$ ist ebenfalls positiv, da beide Faktoren negativ sind. Analog zum 1. Fall erhalten wir

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x-1} \tag{3,4}$$

Wegen (3) und (4) folgt

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = 1$$

Beweis:
Wegen $x \in (1,\sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$ gilt $1 < x \leq \sqrt{2}$ oder $-1 < x \leq 1-\sqrt{2}$.

1.Fall: Aus $1 < x \leq \sqrt{2}$ folgt (wie in der Analyse gezeigt)

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{1}{x+1} \tag{1,2}$$

Wendet man die bei der Analyse angewandte Schlusskette rückwärts an, so folgt

$$\begin{aligned} 1 < 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2-1} &= \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{-1+\sqrt{2}} \\ &< \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} \end{aligned}$$

Also gilt für alle reellen $x \in (1,\sqrt{2}]$ die Ungleichung $\frac{1}{2} < \frac{x}{x^2-1}$.

2. Fall: Aus $-1 < x \leq 1-\sqrt{2}$ folgt

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1} \tag{3,4}$$

Wegen (3) und (4) folgt

$$1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

Also gilt für alle $x \in (-1, 1-\sqrt{2}]$ die Ungleichung $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2-1}$. Damit gilt auch für alle reellen $x \in (1, \sqrt{2}] \cup (-1, 1-\sqrt{2}]$ die Ungleichung $\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$.

Zu 3.4.7.
Bestimmung der Lösungsmenge von $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$. (1)
Zur Lösungsmenge können nur alle reellen x, die folgenden Ungleichungen genügen, gehören

$$I. \quad 3 - x \geq 0 \qquad , \qquad II. \quad x + 1 \geq 0$$

Aus I. folgt $x_0 \leq 3$. Aus II. folgt $x_0 \geq -1$. Man erhält somit:

$$T = (-\infty, 3] \cap [-1, +\infty) = [-1, 3]$$

Aus (1) folgt $\sqrt{3-x_0} > \frac{1}{2} + \sqrt{x_0+1}$ und daraus nacheinander

$$3 - x_0 > \frac{1}{4} + \sqrt{x_0+1} + x_0 + 1, \qquad \frac{7}{4} - 2x_0 > \sqrt{x_0+1} \tag{2}$$

Da $\sqrt{x_0+1} \geq 0$ ist, muss $\frac{7}{4} - 2x_0 > 0$ sein, woraus $x_0 < \frac{7}{8}$ folgt, also $x_0 \in \left[-1, \frac{7}{8}\right)$. (3)
Aus (2) folgt dann $(x_0 - 1)^2 > \frac{31}{64}$ und daraus

a) $x_0 > \frac{8+\sqrt{31}}{8}$ Widerspruch zu (3), und
b) $x_0 < \frac{8-\sqrt{31}}{8}$.

Als Menge der möglichen Lösungen erhält man folglich: $L_A = \left[-1, \frac{8-\sqrt{31}}{8}\right)$.

Zu 4.1.2.
$y = |x - |x-1||$. Gesucht ist das Bild der Funktion.

Lösung:
Für $x \geq 1$ ist $y = |x - |x-1|| = |x - (x-1)| = 1$. (1)
Für $x \leq 1$ ist $y = |x - |x-1|| = |2x-1|$. (2)
Für $2x - 1 \geq 0$ erhält man $x \geq \frac{1}{2}$. (3)
Für $2x - 1 < 0$ erhält man $x < \frac{1}{2}$. (4)

Zusammenfassend erhält man:
Aus (1): $y = 1$ mit dem Definitionsbereich $1 \leq x < \infty$ und dem Wertevorrat $y = 1$.
Aus (3) und (2): $y = 2x - 1$ mit dem Definitionsbereich $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ und dem Wertevorrat $0 \leq y \leq 1$.
Aus (4) und (2): $y = -2x + 1$ mit dem Definitionsbereich $-\infty < x < \frac{1}{2}$ und dem Wertevorrat $0 < y < +\infty$.

Man erhält folgendes Bild:

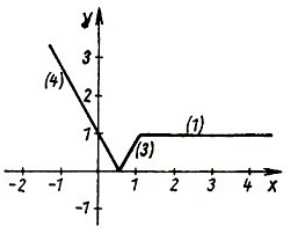


Bild 16

Zu 4.1.4.
$y = ||x| - 2|$.
1. Lösung:
Wegen $||x| - 2| \geq 0$ ist $y \geq 0$.
Für $x > 0$ ist $y = ||x| - 2| = |x - 2|$. (1)
Ist $x - 2 \geq 0$, dann ist $x \geq 2$. Ist $x - 2 < 0$,so ist $x < 2$.

Für $x = 0$ ist $y = 2$.
Für $x < 0$ ist $y = ||x| - 2| = | - x - 2|$. (2)
Ist $-x - 2- \geq 0$, so ist ≤ -2. Ist $-x - 2 < 0$, so ist $x > -2$.
Zusammenfassend erhält man:

Aus (1): $y = x-2$ mit dem Definitionsbereich $2 \leq x < +\infty$ und dem Wertevorrat $0 \leq y < \infty$.
$y = -x + 2$ mit dem Definitionsbereich $0 \leq x < 2$ und dem Wertevorrat $0 < y \leq 2$.
Aus (2): $y = -x - 2$ mit dem Definitionsbereich $-\infty < x \leq -2$ und dem Wertevorrat $0 \leq y < +\infty$,
$y = x + 2$ mit dem Definitionsbereich $-2 < x \leq 0$ und dem Wertevorrat $0 < y \leq 2$.
Man erhält folgendes Bild:

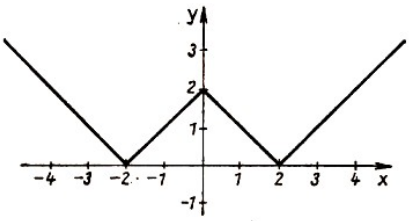


Bild 17

2. Lösung:
Stellt man die Funktion graphisch dar, die durch den analytischen Ausdruck $y = |x| - 2$ gegeben ist, so erhält man die gestrichelt dargestellte Kurve.
Da wegen $||x| - 2| \geq 0$ auch $y \geq 0$ ist, wird die "Spitze" in den 1. und 2. Quadranten hochgeklappt, und man erhält die voll ausgezogen dargestellte Kurve.

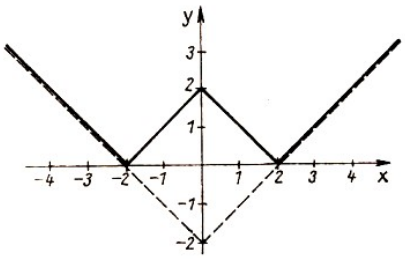


Bild 18

Zu 4.2.3.
Behauptung: Alle reellen $x \in (-a, +a)$ erfüllen die Ungleichung $|x| < a$.
Beweis:
$x = -a + p$ mit $0 < p < 2a$ in $|x|$ eingesetzt, ergibt: $| - a + p|$,
und für $-a + p < 0$ folgt aus $| - a + p| = -(-a + p) = a - p$. Der Vergleich zeigt, dass gilt: $a - p < a$.

Ist $-a + p \geq 0$, so folgt $| - a + p| = -a + p$. Da $p < 2a$ und $p > 0$ ist, zeigt der Vergleich $p - a < a$.

Zu 4.2.4.
Bestimmung der Lösungsmenge von $|x-3|<4$.

1. Lösung:
1. Fall: Für $x_0-3<0$ ist $|x_0-3|=-(x_0-3)$.
Mithin gilt $-x_0+3<4$ oder $x_0>-1$. Aus $x_0-3<0$ folgt andererseits $x_0<3$. Also erhält man $L_{A1}=(-1,3)$.

2. Fall: Für $x_0-3\geq 0$ ist $|x_0-3|=x_0-3$.
Mithin gilt $x_0-3<4$ oder $x_0<7$. Ferner folgt aus $x_0-3\geq 0$ $x_0\geq 3$. Folglich ist $L_{A2}=[3,7)$.

Man erhält L_A als Vereinigungsmenge von L_{A1} und L_{A2}:

$$L_A=L_{A1}\cup L_{A2}=(-1,3)\cup[3,7)=(-1,7)$$

Probe: Setzt man $-1+p$ mit $0<p<8$ in $|x-3|$ ein, so erhält man $|-1+p-3|=|p-4|$.
Für $p-4<0$ ist nach Definition $|p-4|=-(p-4)=4-p$, also kleiner als 4.
Für $p-4\geq 0$ ist nach Definition $|p-4|=p-4$. Da für p in diesem Fall $4\leq p<8$ gilt, ist $p-4<4$.

Damit ist gezeigt, dass alle reellen $x\in(-1,7)$ der Ungleichung $|x-3|<4$ genügen.

2. Lösung:
Nach Aufgabe 4.2.3. gilt die Ungleichung $|x|<a$ für alle reellen $x\in(-a,+a)$. Es gilt also für $|x-3]<4$

$$-4<x-3<4$$

und nach Addition von 3: $-1<x<7$.

Zu 4.2.6.
Bestimmung der Lösungsmenge von $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$, $x\neq -1$.

Lösung:
Es sei $\frac{x_0}{x_0+1}\geq 0$, dann ist $\left|\frac{x_0}{x_0+1}\right|=\frac{x_0}{x_0+1}$, und es müsste $\frac{x_0}{x_0+1}>\frac{x_0}{x_0+1}$ gelten. Das ist aber ein Widerspruch, also ist dieser Fall auszuschließen.

Es sei $\frac{x_0}{x_0+1}<0$, dann ist $\left|\frac{x_0}{x_0+1}\right|=-\frac{x_0}{x_0+1}$, und es gilt

$$-\frac{x_0}{x_0+1}>\frac{x_0}{x_0+1}$$

1. Fall: Für $x_0+1>0$ folgt $x_0>1$ und aus $-\frac{x_0}{x_0+1}>\frac{x_0}{x_0+1}$ folgt $-x_0>x_0$ oder $x_0<0$.
Im ersten Fall ist L_A, der Durchschnitt von $(-\infty,0)$ und $(-1,+\infty)$.

$$L_{A1}=(-\infty,0)\cap(-1,+\infty)=(-1,0)$$

2. Fall: Es sei $x_0+1<0$, dann ist $x_0<-1$, und aus $-\frac{x_0}{x_0+1}>\frac{x_0}{x_0+1}$ folgt $-x_0<x_0$ und daraus $x_0>0$.
Bildet man den Durchschnitt von $(-\infty,-1)$ und $(0,+\infty)$, so ist dieser leer.
Die Menge der möglichen Losungen der Ungleichung $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$ ist also $L_A=L_{A1}=(1,0)$.
Die Probe möge der Leser für diese Behauptung selbst führen.

Geometrische Veranschaulichung: Setzt man $y_1=\left|\frac{x}{x+1}\right|$ und $y_2=\frac{x}{x+1}$, so erhält man folgende Bilder:

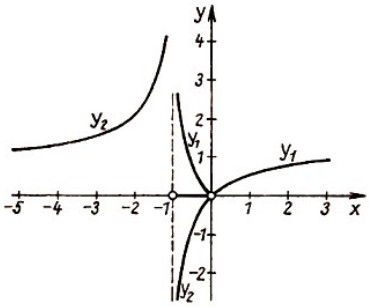


Bild 19

Wie man sieht, gilt im Intervall $(-1, 0)$ offensichtlich $y_1 > y_2$.

Zu 4.2.9.
Bestimmung der Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$I. \quad 1 - |1 - x| < 2x \qquad , \qquad II. \quad \frac{1}{2}x + 2 > |x + 1|$$

Lösung:
Aus I. folgt $|1 - x_0| > 1 - 2x_0$. (1)
1. Fall: $1 - x_0 \geq 0$ ergibt $x_0 \leq 1$, d.h. $x_0 \in (-\infty, 1] = T_1$.
Aus (1) folgt dann $1 - x_0 > 1 - 2x_0$ und daraus $x_0 > 0$, also $x_0 \in (0, +\infty) = T_2$.
Man erhält für diesen Fall:

$$T_{I.1.} = T_1 \cap T_2 = (0, 1]$$

2. Fall: Es sei $1 - x_0 < 0$, dann ist $x_0 > 1$, also $x_0 \in (1, +\infty) = T_3$.
Aus (1) folgt dann, da $|1 - x_0| > -(1 - x_0)$, $x_0 - 1 > 1 - 2x_0$, dann ist $x_0 > \frac{2}{3}$, also $x_0 \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) = T_4$.
Für diesen Fall folgt für die Ungleichung I.:

$$T_{I.2.} = T_3 \cap T_4 = (1, +\infty)$$

Aus II. folgt $|x_0 - 1| < \frac{1}{2}x_0 + 2$. (2)
1. Fall: $x_0 + 1 \geq 0$ ergibt $x_0 \geq -1$, d.h. $x_0 \in [-1, +\infty) = T_5$.
Aus (2) folgt dann $x_0 + 1 < \frac{1}{2}x_0 + 2$, also $x_0 \in (-\infty, 2) = T_6$. Für diesen Fall folgt für Ungleichung II.:

$$T_{II.1.} = T_5 \cap T_6 = [-1, 2)$$

2. Fall: Es sei $x_0 + 1 < 0$, dann ist $x_0 < -1$, also $x_0 \in (-\infty, -1) = T_7$.
Für $x_0 + 1 < 0$ folgt aus (2) $-x_0 - 1 < \frac{1}{2}x_0 + 2$ und daraus $x_0 > -2$, also $x_0 \in (-2, +\infty) = T_8$.
Man erhält somit

$$T_{II.2.} = T_7 \cap T_8 = (-2, -1)$$

Als Menge der möglichen Lösungen für I. erhält man:

$$L_{AI} = T_{I.1.} \cup T_{I.2.} = (0, 1] \cup (1, +\infty) = (0, +\infty)$$

Analog folgt für II.

$$L_{AII} = T_{II.1.} \cup T_{II.2.} = [-1, 2) \cup (-2, -1) = (-2, 2)$$

Letztlich folgt für das Ungleichungssystem:

$$L_A = L_{AI} \cap L_{AII} = (0, +\infty) \cap (-2, 2) = (0, 2)$$

Geometrische Veranschaulichung:

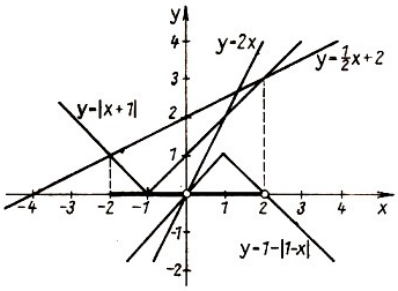


Bild 20

Zu 4.3.2.
Behauptung: $|x+y| \geq |x|+|y|$. (x, y bel. reell)
Beweis: Es gilt

$$|x+y|+|y| = |x+y|+|-y|$$

Nach Aufgabe 4.3.1. gilt:

$$|x+y|+|-y| \geq |x+y-y| = |x|$$

Aus $|x+y|+|y| \geq |x|$ folgt $|x+y| \geq |x|+|y|$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Vorzeichen von x und y verschieden sind.

Zu 5.1.3.
Bestimmung der Lösungsmenge von $\frac{x}{p} - \frac{3p}{x} < 7$, wobei p eine beliebige reelle Zahl ist. (1)

Lösung:
1. Fall: $p = 0$.
Dieser Fall muss ausgeschlossen werden, da $\frac{x}{p}$ für $p = 0$ nicht erklärt ist.

2. Fall: $p > 0$.
Analog wie bei der Aufgabe 5.1.2. erhält man für diesen Fall:

$$L_{A2} = \left(0, \frac{7}{2}p + \frac{p}{2}\sqrt{61}\right) \cup \left(-\infty, \frac{7}{2}p - \frac{p}{2}\sqrt{61}\right)$$

3. Fall: $p < 0$.
Da $x \neq 0$, sind folgende Fälle zu unterscheiden:
a) $x_0 > 0$.
Für $p < 0$ und $x_0 > 0$ ist $px_0 < 0$, daher folgt aus (1) $x_0^2 - 3p^2 > 7px_0$ und daraus

$$\left(x_0 - \frac{7}{2}p\right)^2 > \frac{61}{4}p^2 \qquad , \qquad \left|x_0 - \frac{7}{2}p\right| > \frac{p}{2}\sqrt{61}$$

Wegen $p < 0$, ist $-\frac{7}{2}p > 0$ und da auch $x_0 > 0$, ist $x_0 - \frac{1}{2}p > 0$.
Für $x_0 - \frac{7}{2}p > 0$ erhält man $x_0 > \frac{p}{2}(7+\sqrt{61})$

$$T_1 = \left(\frac{p}{2}(7+\sqrt{61}), +\infty\right)$$

b) $x_0 < 0$
Da $p < 0$ und $x_0 < 0$, ist $px_0 > 0$, und man erhält aus (1)

$$\left(x_0 - \frac{7}{2}p\right)^2 < \frac{61}{4}p^2 \qquad , \qquad \left|x_0 - \frac{7}{2}p\right| < \frac{p}{2}\sqrt{61}$$

und nach Fallunterscheidung:

$$\alpha) \quad x_0 < \frac{7}{2}p + \frac{p}{2}\sqrt{61} \qquad , \qquad \beta) \quad x_0 > \frac{7}{2}p - \frac{p}{2}\sqrt{61}$$

Da nach Voraussetzung $p < 0$, ist $-\frac{p}{2}\sqrt{61} > 0$, also $x_0 > 0$, Widerspruch, dieser Fall ist auszuschließen!

$$\gamma) \quad x_0 = \frac{7}{2}p \qquad , \qquad T_2 = \left(-\infty, \frac{7}{2}p + \frac{p}{2}\sqrt{61}\right)$$

Ist $p < 0$, so erhält man für Ungleichung (1) $L_{A3} = T_1 \cap T_2$. Die Proben mögen vom Leser selbst durchgeführt werden.

Zu 5.2.2.
Bestimmung der Lösungsmenge von

$$I. \quad p(x-3) > x-3, \qquad II. \quad (2p+3)(x-1) > (p-1)(x+2)$$

wobei p eine beliebige reelle Zahl ist. Aus I und II folgen

$$I^*. \quad x_0(p-1) > 3(p-1), \qquad II^*. \quad x_0(p+4) > 4p+1$$

Bei der notwendigen Fallunterscheidung der einzelnen Ungleichungen erhält man:

Fälle:	p	x_0	Bemerkungen
Ungleichung I			
$p-1=0$	$p=1$		Widerspruch, also $p \neq 1$
$p-1>0$	$p>1$	$x_0 > 3$, $(3,\infty) = L_{A1}$	
$p-1<0$	$p<1$	$x_0 < 3$, $(-\infty,3) = L_{A2}$	
Ungleichung II			
$p+4=0$	$p=-4$		Widerspruch, also $p \neq -4$
$p+4>0$	$p>-4$	$x_0 > \frac{4p+1}{p+4}$, $\left(\frac{4p+1}{p+4},\infty\right) = L_{A3}$	
$p+4<0$	$p<-4$	$x_0 < \frac{4p+1}{p+4}$, $\left(-\infty,\frac{4p+1}{p+4}\right) = L_{A4}$	

Für $p \in (-4,1)$ ist $L_A = L_{A2} \cap L_{A3} = \left(\frac{4p+1}{p+4}, 3\right)$.
Für $p \in (1,\infty)$ ist $L_A = L_{41} \cap L_{A3} = (3,+\infty)$.
Für $p \in (-\infty,-4)$ ist $L_A = L_{42} \cap L_{A4} = (-\infty,3)$.

Zu 6.2.3.
Es sind alle reellen x zu bestimmen, für die $\cos x \cos 3x \geq \cos 5x \cos 7x$ gilt.

Lösung.
Die Ungleichung kann zunächst auf das Periodenintervall $(0,2\pi)$ beschränkt werden.
Aus $\cos x_0 \cos 3x_0 \geq \cos 5x_0 \cos 7x_0$ folgt

$$\frac{1}{2}(\cos 2x_0 + \cos 4x_0) \geq \frac{1}{2}(\cos 2x_0 + \cos 12x_0) \qquad , \qquad \cos 4x_0 \geq \cos 12x_0$$

Setzt man $4x_0 = \alpha$, so folgt weiter $\cos\alpha - \cos 3\alpha \geq 0$ und daraus nacheinander

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{3+1}{2}\alpha \sin\frac{3-1}{2}\alpha &\geq 0 \\ \sin 2\alpha \sin\alpha &\geq 0 \\ \sin^2\alpha\cos\alpha &\geq 0 \\ (1-\cos^2\alpha)\cos\alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

Zur weiteren Lösung ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Fall: $1 - \cos^2\alpha \leq 0$ und $\cos\alpha \leq 0$.
2. Fall: $1 - \cos^2\alpha \geq 0$ und $\cos\alpha \geq 0$.

Lösung des 1. Falls:
Aus $1 - \cos^2\alpha \leq 0$ folgt $\cos^2\alpha \geq 1$ und daraus $|\cos\alpha| \geq 1$.
Das ist aber ein Widerspruch, da stets gilt $|\cos\alpha \leq 1$, also ist dieser Fall auszuschließen.

Lösung des 2. Falls:
Aus $1 - \cos^2\alpha \geq 0$ folgt $\cos^2\alpha \leq 1$ und daraus $|\cos\alpha| \leq 1$.
Ist $\cos\alpha \leq 0$, dann Widerspruch, da nach Voraussetzung des 2. Falles $\cos\alpha \geq 0$ gelten soll.
Für $\cos\alpha \geq 0$ folgt aus $|\cos\alpha| \leq 1$, $\cos\alpha \leq 1$.
Aus $\cos\alpha \leq 1$ folgt für α im Periodenintervall $[0, 2\pi)$.

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi \tag{1}$$

Aus $\cos\alpha \geq 0$ folgt für α im Periodenintervall $[0, 2\pi)$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{3}{2}\pi \leq \alpha \leq 2\pi \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt für x_0

$$0 \leq 4x_0 \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{3}{2}\pi \leq 4x_0 \leq 2\pi$$

und daraus

$$0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{8} \qquad \text{oder} \qquad \frac{3}{8}\pi \leq 4x_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$L_{A2} = \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$L_A = \left[2\pi k, \frac{\pi}{8} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{3}{8}\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$$

8 Literaturhinweise

I. Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (MSB Nr. 2), 5. A. Leipzig 1970

II. Görke, Mengen, Relationen, Funktionen, 2. A. Berlin 1967

III. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (MSB Nr. 8), 9. A. Berlin 1969

IV. Korowkin, Ungleichungen (MSB Nr. 9), 6. A. Berlin 1970

V. Kipnis, Aufgabensammlung für Ungleichungen. Berlin 1964

VI. Kleine Enzyklopädie "Mathematik", 3. A. Leipzig 1968

VII. Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band III, Analysis, 2. A. Berlin 1968