G.I. Drinfeld

Quadratur des Kreises und Transzendenz von π

Übersetzung: K. Bratz
Vorwort, Einleitung, Anhänge: H. Pieper
1980 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 101
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Hin und wieder erhalten die mathematischen Institute der Universitäten und Akademien und die Redakteure mathematischer Zeitschriften Zuschriften von mathematisch Interessierten, die meinen, eines der allgemein bekannten mathematischen Probleme gelöst zu haben.
Handelt es sich bei diesen Einsendungen um Lösungsversuche für eines der drei berühmtesten mathematischen Probleme: das Problem der Quadratur des Kreises, das Problem der Dreiteilung des Winkels oder das Fermatsche Problem, so werden die Einsender in mathematischen Kreisen oft kurz "Kreisquadrierer", "Winkeldreiteiler" bzw. "Fermatisten" genannt.

Das Fermatsche Problem besteht darin, zu beweisen, dass es keine von Null verschiedenen ganzen Zahlen a, b, c derart gibt, dass $a^n + b^n = c^n$ gilt (für Exponenten n, die größer als 2 sind).

Das Problem der Dreiteilung des Winkels ist die Aufgabe, einen vorgegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Gesucht wird dabei eine exakte Konstruktion (also keine Näherungslösung!), wobei lediglich der Zirkel und das Lineal als Konstruktionsinstrumente zugelassen sind.

Das Problem der Quadratur des Kreises ist die Aufgabe. ein Quadrat zu zeichnen, das einem vorgegebenen Kreis flächengleich ist. Gesucht wird auch hierbei eine exakte Konstruktion, wobei nur der Zirkel und das Lineal (endlich oft) benutzt werden dürfen.

Der Gutachter eines eingesandten Lösungsversuches zu einem der Probleme steht dabei unterschiedlichen Situationen gegenüber, je nachdem, ob es sich um das (zahlentheoretische) Fermatsche Problem handelt oder um die (geometrischen) Probleme der Winkeldreiteilung und der Kreisquadratur.
Er weiß nämlich, dass das erste Problem bisher noch ungelöst ist und dass viele große Mathematiker an der Lösung dieses Problems gescheitert sind. Es dürfte daher unwahrscheinlich sein, dass ein mathematisch interessierter Laie es löst. Dennoch hat der Gutachter den Lösungsversuch zu überprüfen.

Andererseits weiß der Gutachter, dass die beiden geometrischen Aufgaben unlösbar sind. Bei Lösungsversuchen kann es sich somit bestenfalls um gute Näherungslösungen handeln, nicht aber um Lösungen der gestellten Aufgaben.

Es ist also ein wesentlicher Unterschied, ob ein Problem noch nicht gelöst ist oder ob eine Aufgabe unlösbar ist. Das Fermatsche Problem ist noch nicht gelöst. Die Probleme der Winkeldreiteilung und der Kreisquadratur sind gelöst, denn man kann beweisen, dass die Aufgabe, einen beliebigen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleichgroße Teile zu teilen, nicht lösbar ist, da es Winkel gibt (z. B. 60°), deren Winkeldrittel sich nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Und man kann ebenfalls beweisen, dass sich die Kreisquadratur unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal nicht ausführen lässt.

Nach Jahrzehnten vergeblichen Suchens nach Lösungen vermutete man noch längere

Zeit, dass die Probleme vielleicht prinzipiell unlösbar sein könnten, ohne jedoch einen Beweis dafür zu finden. Erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde auf Grund der damals erzielten Resultate der Algebra das geometrische Problem der Winkeldreiteilung als unmöglich erkannt.

Das antike Problem der Quadratur des Kreises erwies sich als schwieriger und wurde sogar erst 1882 als unlösbar nachgewiesen. Dieser Unmöglichkeitsbeweis ist Gegenstand dieses Buches. Er gilt trotz vieler inzwischen erzielter Vereinfachungen als immer noch recht kompliziert, lässt sich aber einschließlich seiner Grundlagen aus der "höheren" Mathematik - wie dieses Buch zeigt - für jeden mathematisch Interessierten verständlich darstellen.

Konstruktionsprobleme sind schon immer ein beliebter Gegenstand der Geometrie gewesen. Viele Konstruktionen lassen sich allein mit Zirkel und Lineal ausführen. Doch nicht jede Konstruktionsaufgabe lässt sich mit vor- gegebenen Hilfsmitteln bewerkstelligen. So wie es unmöglich ist, einen Kreis mit dem Lineal allein zu konstruieren, so ist es unmöglich, ein regelmäßiges 18-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und daher auch unmöglich, das Winkeldrittel von $60°$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Die Konstruktion einer Strecke hängt von ihrer Länge ab. Genau die Strecken (bei gegebener Strecke der Länge 1) sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar, deren Maßzahlen sich durch rationale Zahlen und durch Verschachtelung von Quadratwurzelausdrücken darstellen lassen.

Könnte man eine Strecke der Länge $\pi = 3,14159...$ (π ist das für jeden Kreis gleiche Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser) mit Zirkel und Lineal konstruieren, so könnte man auch zu einem gegebenen Kreis mit dem Radius 1, dem Umfang 2π und dem Flächeninhalt π ein flächengleiches Quadrat (mit der Seite $\sqrt{\pi}$) konstruieren.
Eine Strecke der Länge π ist jedoch nicht konstruierbar. Die Zahl π nämlich ist nicht rational und lässt sich nicht durch Verschachtelung von Quadratwurzelausdrücken darstellen. Paradoxerweise gibt es keinen Beweis, der nur dieses zeigt.

Man beweist vielmehr, dass π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten sein kann, dass also π transzendent ist. Die Transzendenz von π impliziert dann die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal.

Über den langen Weg bis zur Erkenntnis der Natur der Zahl π soll in einer historischen Einleitung berichtet werden. Der (indirekte) Beweis der Transzendenz von π erfolgt in Kapitel III, nachdem in den vorhergehenden Kapiteln I und II alle erforderlichen Mittel bereitgestellt worden sind.
Weitere Resultate, die man über die Transzendenz von Zahlen erzielt hat, sind im Anhang 3 zu finden.

Vom Leser werden nur Schulkenntnisse der Mathematik vorausgesetzt, ferner neben Interesse auch Ausdauer und Konzentration. (Die Grundlagen der im Text benutzten nicht notwendig zum Schulstoff gehörenden komplexen Zahlen werden im Anhang 1 bereitgestellt.) Übungsaufgaben sollen den Stoff festigen. (Ausgewählte Lösungen findet man im Anhang 2.)

Der Leser wird mit der Erkenntnis belohnt, dass die Mathematik ihre eigene Unfähigkeit beweisen kann, eine bestimmte Aufgabe mit gegebenen Mitteln zu lösen. Nach der Lektüre dieses Buches hat er einen der berühmtesten Unmöglichkeitsbeweise der Mathematik kennengelernt, nämlich den Beweis des Satzes: "Wenn man nur Zirkel und Lineal (beliebig, aber endlich oft) benutzt, so ist die Quadratur des Kreises nicht möglich".

Berlin, im Sommer 1979 — Herbert Pieper

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. Das antike Problem der Quadratur des Kreises

(H. Pieper)

Ein Kreis ist in der Ebene die Menge aller Punkte, die von einem Punkt M (Mittelpunkt) den gleichen Abstand r (Radius, $2r = d$ Durchmesser) haben.
(Der Kreis hat von allen Kurven desselben Umfangs den größten Flächeninhalt. Von allen Kurven, die den gleichen Flächeninhalt einschließen, hat der Kreis den kleinsten Umfang.)

Die Quadratur des Kreises besteht darin, (mit Zirkel und Lineal) ein Quadrat zu zeichnen, das einem vorgegebenen Kreis flächengleich ist. Um eine Konstruktion eines einem Kreis inhaltsgleichen Quadrats zu geben und diese dann auf ihre Genauigkeit zu prüfen, benötigt man eine genaue Formel für den Flächeninhalt eines Kreises, den man dann mit dem Inhalt des Quadrats vergleichen kann.

Bezeichnen F_1, F_2 die Flächeninhalte zweier Kreise und d_1, d_2 ihre Durchmesser, so gilt $F_1 : F_2 = d_1^2 : d_2^2$, anders geschrieben: $\frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2}$. Kann man für einen Durchmesser d_1 den Flächeninhalt F_1 wirklich genau berechnen, so hätte man eine genaue Formel für den Inhalt eines jeden Kreises.
Bezeichnen wir mit λ das Verhältnis des Kreisflächeninhalts (F_1) zum Quadrat seines Durchmessers (d_1^2), so ist λ eine Konstante. Für den Flächeninhalt F eines jeden Kreises mit dem Durchmesser d gilt mit dieser Konstanten

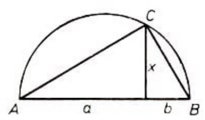
$$F = \lambda d^2$$

Durch

$$F = \frac{d}{4}U$$

wird eine Beziehung zwischen dem Kreisflächeninhalt F und dem Kreisumfang U gegeben. Die Berechnung des Flächeninhalts wird hiermit auf die Aufgabe der Rektifikation des Kreisumfangs zurückgeführt. Die Formel $F = \frac{d}{4}U$ gibt auch den Flächeninhalt eines Rechtecks an, dessen eine Seite von der Länge U ist und dessen andere Seite die Länge $d/4$ hat. Es ist nun leicht, aus einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Hat das Rechteck die Seiten a, b, so ist eine Strecke x mit $x^2 = ab$ oder $a/x = x/b$ zu konstruieren.
Schlägt man über der Strecke $\overline{AB} = a + b$ den Halbkreis (Abb. 1), so gilt nach dem Höhensatz $x^2 = ab$. (Im vorliegenden Problem nehme man $a = d/4$, $b = U$ und konstruiere x mit $x^2 = \frac{d}{4}U$.) Aus einem Kreis ist somit mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruierbar, falls eine Strecke der Länge U (Umfang des Kreises) mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Abb. 1



Das Problem der Quadratur des Kreises ist somit auf die Rektifikation des Kreises zurückgeführt.

Bezeichnen U_1, U_2 die Umfänge zweier Kreise und d_1, d_2 ihre Durchmesser, so gilt $U_l : U_2 = d_1 : d_2$ anders geschrieben: $\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$.
Bezeichnen wir (nach Euler) mit π das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser, so ist π eine Konstante. Für den Umfang U eines jeden Kreises mit dem Durchmesser d gilt mit dieser Konstanten

$$U = \pi d$$

(Aus $F = \lambda d^2 = \frac{d}{4}U$ und $U = \pi d$ folgt $\pi = 4\lambda$)

Die Quadratur des Kreises soll mit Zirkel und Lineal geschehen, d.h. durch eine beliebige, aber endliche Anzahl von folgenden einfachen Grundkonstruktionen: "Zeichnung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte" und "Beschreibung eines Kreises, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben sind".

In der analytischen Geometrie kann man zeigen: Alle Punkte, deren Koordinaten in einem gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem sich aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch die vier Grundrechenarten und den Prozess des Quadratwurzelziehens (diese fünf Operationen endlich oft angewendet) darstellen lassen, sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Es sind aber auch nur diese Punkte mit Zirkel und Lineal konstruierbar. ([7],[28]).

Einerseits lassen sich nämlich die Ausdrücke $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b, $\sqrt{a}$ $(a > 0$, $b \neq 0$ seien die Koordinaten gegebener Punkte in dem Koordinatensystem) mittels Zirkel und Lineal konstruieren, daher auch jeder Ausdruck, der durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen der fünf Operationen entsteht.

Andererseits führt die Bestimmung der Schnittpunkte von Geraden und Kreisen miteinander auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen (mit Koeffizienten, die sich rational durch die Koordinaten der gegebenen oder bereits konstruierten Punkte ausdrücken lassen).

Eine Strecke lässt sich aus einer anderen mittels Zirkel und Lineal konstruieren, wenn das Verhältnis der Längen dieser Strecken durch einen Ausdruck darstellbar ist, in dem außer den vier Grundrechenarten nur noch Quadratwurzeln vorkommen. Ist umgekehrt ein solcher Ausdruck gegeben, so lässt sich eine Strecke mittels Zirkel und Lineal konstruieren, deren Länge zu der Länge einer gegebenen Strecke in dem durch den Ausdruck bestimmten Verhältnis steht.

Die Frage nach der Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal ist somit die Frage, ob sich das Verhältnis U/d der Länge U des Kreisumfangs zur Länge d des Durchmessers durch eine endliche Anzahl der angegebenen fünf Rechenoperationen darstellen lässt.
Lässt sich also π $(= U/d)$ durch einen solchen Ausdruck darstellen?

Im folgenden wollen wir einen Blick in die Geschichte der Quadratur des Kreises und der Zahl π tun.

Vollständigkeit wird nicht angestrebt. An Hand einer Reihe von Beispielen soll ein Bild von der Behandlung der Problematik der Kreisquadratur in vergangenen Zeiten von den Anfängen vor etwa 4000 Jahren bis zur Lösung des Problems in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entworfen werden.

Inder

Quellen für die indische Mathematik des Altertums sind die "Sulbasûtras", Schriften von geometrisch-theologischem Charakter. Die erhaltenen Exemplare stammen aus den Jahren um 300 u. Z., als Verfasser werden Baudhayana (8. Jh. v.u.Z.?), Apastamba und Katayana (5.-4. Jh. v. u. Z.) genannt.
Es ist nach O. Becker jedoch nicht ganz sicherzustellen, "dass die um Jahrhunderte späteren jetzt noch erhaltenen Texte die alte Überlieferung des 8. vorchristlichen Jahrhunderts getreu wiedergeben." ([2], S. 41.) (Dieses werde jedoch im folgenden vorausgesetzt.)

Die "Sulbasûtras" sind Anweisungen für die Konstruktion und den Bau von Opferaltären. Das Apastamba-Sulbasûtra gehört in den Ausgang der Brahmana-Literatur, der Zeit, die auf die Veden folgt.
Die Veden (von "Veda" - Lehre, Wissenschaft) sind die ältesten religiösen Schriften, die Grundlage der ältesten indischen Religion (des Vedismus) - einer Naturreligion (Hauptgott Indra) mit Opferkult, Zauberriten und mythologischer Symbolik. Die riesige Brahmana-Literatur bestand in Erläuterungen zu den Veden, die die Veden selbst als bekannt voraussetzen. Die Veden gehören der Zeit 1200-1000 v. u. Z. an. Die Brahmanas gehen bis etwa 600 v. u. Z., der Zeit vor dem Auftreten Buddhas (um 560-um 480). Die Anfänge des indischen Opferwesens reichen bis in die Zeit des Rigveda zurück. Die Brahmanenperiode jedoch war die Blütezeit des indischen Opferwesens.

Die "Sulbasûtras" geben Regeln für die genaue Abmessung des Opferplatzes, der Konstruktion der verschiedenen Altäre usw. an. Sie sind Teile der Kalpa-Sûtras oder Srauta-Sûtras, der Lehrbücher, in denen das Opferritual übersichtlich dargestellt worden ist.

Auf die "Sulbasûtras" als Schlüssel zur Geometrie der Inder hatte bereits 1869 A. C. Burnell hingewiesen: "Wir müssen die Sulba-Teile der Kalpa-Sutras ansehen als die ersten Anfänge der Geometrie unter den Brahmanas." ([31], S. 163.)

(Im Jahre 1875 übersetzte G. Thibaut einen großen Teil der "Sulbasûtras". Eine erneute Beachtung fanden sie durch A. Bürks Ausgabe vom Apastamba-Sulbasûtra im Jahre 1901.)

Die Sulbasûtras des Apastamba bilden das 24. Kapitel des Srauta-Sûtra, und dieses kann nach Untersuchungen der Sanskritisten nicht nach dem Anfang des 4. Jh. v. u. Z. entstanden sein.
Das Baudhayana-Sulbasûtra ist wahrscheinlich wenigstens 200 Jahre vor dem Apastamba-Sulbasûtra redigiert. Ferner ist klar, dass die Vorschriften selbst weit älter sind als ihre schriftliche Fixierung. Insbesondere, so betont M. Simon, scheint das Apastamba-Sulbasûtra durchaus die ältere Tradition festgehalten zu haben. M. Simon ([31], S. 153) glaubt nicht, dass irgendein Indologe bezweifeln wird, dass das Alter der Sulbasûtras

dem Inhalt nach bis mindestens 1000 v. u. Z. heraufgeht und dass sich die indische Geometrie auf dem Boden der Opferlehre, des Aufbaus der Altäre entwickelt hat.

In den Sulbasûtras wird vor der Quadratur des Kreises die umgekehrte Aufgabe behandelt: Es ist ein gegebenes Quadrat in einen Kreis mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Es sollte nämlich ein Altar mit zirkulärer Basis konstruiert werden.)

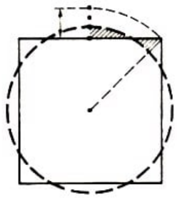


Abb. 2 (nach C. Müller)

Im Apastamba-Sulbasûtra, Kap. III, 2, heißt es (Abb. 2):
"Wünscht man aus einem Quadrat einen Kreis zu machen, so lege man von der Mitte (des Quadrats) aus nach einer Ecke (eine Schnur), führe sie in die Richtung einer Seite (des Quadrats) herum und beschreibe den Kreis zusammen mit einem Drittel des über (das Quadrat) hinausragenden Stückes. (Dies ist) die gewöhnlich benutzte (Schnur), (welche) den Kreis (liefert). Wieviel fortgenommen wird, soviel soll hinzukommen." ([20], S. 180.)

Ist a die Seite des Quadrats, so ist die halbe Diagonale (der Satz von Pythagoras war bekannt!) $1/2\sqrt{a}$, und als Radius des Kreises wird

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$$

genommen. Der Flächeninhalt des Quadrats ist a^2, der Flächeninhalt des Kreises wird $F=\lambda\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2 a^2$. Aus der geforderten Übereinstimmung folgt für λ ein Näherungswert aus

$$\lambda\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2=1$$

Die Regel zur Berechnung von $\sqrt{2}$ gibt Apastamba so an (Kap. 1, 6):
"Vermehre das Einheitsmaß um ein Drittel und dieses um ein Viertel, (das letzte aber) vermindert um seinen vierunddreißigsten Teil." ([20].)

Es ergibt sich der bemerkenswert gute Näherungswert

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}=\frac{17}{12}-\frac{1}{12\cdot 34}=\frac{577}{408}$$

für $\sqrt{2}$. (Als Dezimalbruch: 1,4142157. Der genauere Näherungswert von $\sqrt{2}$ ist 1,4142136.) Man erhält $\lambda=0,772077$ (also $4\lambda=3,08831$).

Für die Quadratur des Kreises gibt Apastamba (Kap. III, 3) folgende Regel:

"Wünscht man aus einem Kreis ein Quadrat zu machen, so mache man aus dem Durchmesser 15 Teile und nehme 2 (Teile) fort. Es bleiben 13 Teile über. (Dies ist) die gewöhnlich benutzte (Schnur), welche das Quadrat (liefert)." ([20].)

Als Seite des Quadrats wird $\frac{13}{15}d$ genommen, wobei d der Durchmesser des Kreises ist; hiermit soll

$$\left(\frac{13}{15}d\right)^2 = \lambda d^2, \qquad \text{also} \quad \lambda = \frac{169}{225} \qquad \left(\text{mithin } 4\lambda = \frac{169 \cdot 4}{225} = 3,0044\right)$$

gelten.
Baudhayana gibt diese Regel auch an (Kap. I, 60), jedoch noch eine weitere (Kap. I, 59):

"Wünscht man aus einem Kreis ein Quadrat zu machen, so mache man aus dem Durchmesser 8 Teile, teile einen (solchen) Teil in 29 Teile, nehme 28 Teile (von diesen 29 Teilen) fort und weiter von dem (verbleibenden einen) Teil noch den um seinen 8. Teil verminderten 6. Teil." ([20].)

Als Seite des Quadrats wird

$$\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)\right) d$$

Dies entspricht dem Wert

$$\lambda = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)\right)^2 = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \approx 0,77208$$

(also $4\lambda = 3,08833$).
Die Beziehung zwischen der Quadratur des Kreises (Berechnung des Flächeninhalts) und der Rektifikation des Kreisumfangs (und damit $\pi = 4\lambda$) war den Indern wahrscheinlich nicht bekannt.

"Es ist", so betont C. Müller, "ganz wertlos und geradezu irreführend, wenn aus derartigen Näherungskonstruktionen (für die Quadratur des Kreises) ... Näherungswerte für π errechnet werden. Derartige Werte haben in der Geschichte niemals existiert und können zur Klärung historischer Fragen auch nicht das mindeste beitragen." ([20], S. 190.)

Die Rektifikation des Kreises scheinen die Sûtra-Verfasser nur in der Form $U = d \cdot 3$ (also mit $\pi \approx 3$) zu kennen.
So schreibt Baudhayana (Kap. I, 112 und 113):

"Die Löcher für die Opferpfosten haben einen Durchmesser gleich einem Fuß. Die Basisflächen der Opferpfosten haben einen Umfang von drei Fuß"; so heißt es." ([20].)

Ägypter

Der "Papyrus Rhind" ist der größte bekannte ägyptische mathematische Text. (A. H. Rhind kaufte ihn einst in Luxor. Heute gehört er dem Britischen Museum. Im Jahre 1877 erschien in Leipzig eine deutsche Übersetzung von A. Eisenlohr; 1923 eine verbesserte Übersetzung ins Englische von T. E. Peet.) Der Papyrus wurde nach 1800 v. u. Z. verfasst, geht aber auf ein Muster alter Schriften aus dem Mittleren Reich (2000 bis 1800 v. u. Z.) zurück.

Die Aufgaben Nr. 41, 48 und 50 betreffen die Berechnung des Kreises. Es handelt sich um die Quadratur. ([31], S. 43.) Das Quadrat, als dessen Seite der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt wird, soll den gleichen Flächeninhalt haben wie der Kreis.

Es wird also $(\frac{8}{9}d)^2 \approx \lambda d^2$, d. h. $\lambda = \left(\frac{8}{9}\right)^2$ gesetzt. (Dies entspricht dem Näherungswert $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3,1605$ für 4λ)
Man vermutet ([31], S. 43), dass die Ägypter einst auf folgende Weise diesen Näherungswert für λ fanden:
Man nehme einen geraden Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Durchmesser d des Grundkreises und gieße Wasser hinein. Dieses Wasser werde dann in ein (gerades) Prisma mit der quadratischen Grundfläche d^2 umgegossen. Das Wasser steige bis zur Höhe k. Dann gilt für das Wasservolumen einerseits $\lambda d^2 \cdot h$, andererseits $d^2 \cdot k$. Für $\lambda = k/h$ findet man den Näherungswert $\frac{64}{81}$.

M. Simon betont: "Wie selbstverständlich es war, dass man das Volumen eines Gefäßes von konstantem Querschnitt seiner Höhe proportional setzte, das kann man bei Heron nachlesen". ([31].)

Babylonier

"Babylonische" mathematische Texte sind Tontafeln, die mit Keilschrift beschrieben sind und mit Mathematik zu tun haben. Die Aufgabentexte sind fast alle aus der altbabylonischen Zeit (1900-1600 v. u. Z.), einem Höhepunkt der Kultur auf dem Territorium des heutigen Irak, dem Flussgebiet zwischen Euphrat und Tigris (Hammurapi-Dynastie von Babel).
Die meisten Textübersetzungen führte O. Neugebauer in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts durch.

Die in den "Cunciform Texts from Babylonian Tabletts, & c., in the British Museum" zu Beginn unseres Jahrhunderts (in Keilschrift) veröffentlichten Tafeln "CT IX 8 bis 15" enthalten eine große Anzahl von Aufgaben und Lösungen, die zeigen, dass man bereits in altbabylonischer Zeit auf dem Gebiet der Geometrie des Kreises "Kenntnisse besessen hat, die das trivialste Maß überschritten". (O. Neugebauer [21].)
So beschäftigte sich CT IX 8, 37 bis 9, 18 mit der ringförmigen Befestigung einer Stadt. Die zugehörige Figur zeigt drei konzentrische Kreise, die von zwei senkrechten Durchmessern gekreuzt werden ([21]):

"Wenn sechzig der Umfang, den Durchmesser berechne. Den dritten Teil von sechzig, den Umfang bilde.
20 siehst Du 20 (ist) der Durchmesser. 5 (unverständlich; 5 ist die Breite des Kreisringes zwischen erstem und zweitem Kreis) Verdopple, 10 siehst Du.

10 zu 20, den Durchmesser addiere. 30 siehst Du. (Diesen) Durchmesser verdreifache. 1;30 (= 90) siehst Du. 1;30 (sexagesimal; dezimal = 90) (ist) der Umfang des Grabens."

Man verwendet somit 3 für π, wie die Zahlen für Kreisumfang und Durchmesser zeigen. Der Flächeninhalt F eines Kreises wurde in der Form

$$F = 0;5 \cdot U^2 \qquad \text{(in sexagesimaler Schreibweise)}$$

aus seinem Umfang bestimmt, wobei $0;5 = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ ist ([23], S. 53). $\frac{1}{12}$ ist somit eine Approximation von $\frac{1}{4\pi}$ (also $\pi = 3, \lambda = \frac{3}{4}$).

$$F = \pi r^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi}U^2$$

In unmittelbarer Fortsetzung des schon (übersetzt) Zitierten heißt es nämlich ([21])

"11;30 (=90) quadriere. 2;15;00 (=8100) siehst Du.
2;15:00 mit 0;5 - Umfang!"

Neugebauer deutet dies so:
"Die Multiplikation mit diesem Faktor $\frac{1}{12}$ ist nötig, weil die Kreisfläche durch Quadrieren des Umfangs gefunden werden soll."
und fragt: "Steckt darin ein Hinweis, dass auch andere Methoden zur Berechnung der Kreisfläche üblich waren ?"
Multipliziere. 11;15 (= 675) siehst Du (als) Fläche (?) ...

Hier ist die Fläche des zweiten Kreises (vom Durchmesser 30) berechnet worden.

Im Jahre 1936 wurden von französischen Archäologen in Susa (heute Schusch), der Hauptstadt des alten Elam, altbabylonische mathematische Tafeln ausgegraben. Ein Bericht darüber erschien 1950 in den "Proceedings" der Amsterdamer Akademie (E. M. Bruins). Auf einer Tafel befindet sich neben anderen Zahlenwerten auch ein "Koeffizient" für den Flächeninhalt des regulären Sechsecks.
Dieses lässt sich mittels Zirkel und Lineal bekanntlich so konstruieren, dass man von einem beliebigen Umfangspunkt eines Kreises sechsmal hintereinander seinen Radius abträgt (Abb. 3).

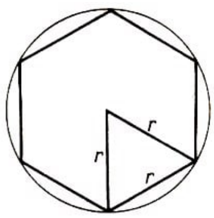


Abb. 3

Ist r der Radius des Umkreises, dann beträgt der Flächeninhalt des Sechsecks $F_6 = \frac{3}{2}\sqrt{3}r^2$ und der Umfang $U_6 = 6r$. Die Beziehung zwischen dem Umfang des Sechsecks und dem des Kreises ist $U_6 = \frac{3}{2}(2\pi r) = \frac{3}{\pi}U$.

Die auf den Tafeln gefundenen "Koeffizienten" liefern folgende Beziehungen:

$$F_6 = 2;37;30 \cdot r^2 \qquad , \qquad U_6 = 0;57;36 \cdot U$$

Der letzte Koeffizient ergibt die Approximation

$$\pi \approx 3;7;30 \qquad \text{(und } \sqrt{3} \approx 1;45)$$

Die Umrechnung der Sexagesimalzahlen ins Dezimalsystem ergibt: ([23], S. 46.) $F = 2\frac{5}{8}r^2$, $\sqrt{3} \approx 1\frac{3}{4}$

$$\pi \approx 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} = 3 + \frac{450}{60 \cdot 60} = 3\frac{1}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

Hebräer

Eine Quelle der Bücher der Könige des Alten Testaments der Bibel ist eine Tempelbeschreibung priesterlicher Herkunft (1. Könige 6-7). Das dort beschriebene Ereignis eines Tempelbaus gehört ungefähr in die Zeit 960 v. u. Z.:

"Es war im vierten Jahr der Regierung Salomos über Israel, ... da baute er den Tempel für Jahwe ... Sieben Jahre hatte er daran gebaut. An seinem eigenen Palast aber baute Salomo dreizehn Jahre."

Es folgt eine Beschreibung der öffentlichen Teile des Palastes, darunter (1. Könige 7, Vers 23) die eines großen Behälters für Reinigungswasser:
"Hierauf fertigte er das gegossene Meer an, zehn Ellen von einem Rand bis zum andern, kreisrund, fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen umspannte es ringsum." ([5].)

Auch im zweiten Buch der Chronik (das höchstwahrscheinlich ein Levit aus Jerusalem wahrscheinlich im Verlauf des 3. Jh. v. u. Z. verfasst hat) werden die Arbeiten beim Bau des Salomonischen Tempels beschrieben.
Es heißt (2. Chronik 4, Vers 2): "Ferner machte er das Meer, eine Gussarbeit, zehn Ellen von einem Rand zum andern Rand; ringsum rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen konnte es ringsum umspannen." ([5], S. 537.)

Die Werte für den beschriebenen Kreis ($U = 30$ Ellen, $d = 10$ Ellen) zeigen, dass die Hebräer $\pi \approx 3$ annahmen.

Chinesen

Das zentrale Werk der frühen chinesischen Mathematik ist die "Mathematik in neun Büchern". Die einzelnen Teile entstanden zu verschiedenen Zeiten; der älteste Teil geht wohl bis auf etwa 1100 v. u. Z. zurück. Das erhaltene Exemplar ist die Fassung von Liu Hui (3. Jh. u. Z.) aus dem Jahre 263.
(Viele alte chinesische mathematische Werke sind nicht erhalten geblieben. Die überlieferte Literatur ist noch ungenügend erforscht.)

Eine russische Übersetzung erschien 1957, eine deutsche Ausgabe 1968 (übersetzt von K. Vogel, Chiu Chang Suan Shu, Neun Bücher Arithmetischer Technik, Braunschweig). Bei Kreisberechnungen wird (bis zur Zeitenwende, teilweise auch später) der Näherungswert $\pi \approx 3$ benutzt.

Römer

Die Römer scheinen zunächst nur den Näherungswert $\pi \approx 3$ zu benutzen.
Im Hauptwerk "Über die Baukunst" (zwischen 16 und 13 v. u. Z.) des römischen Schriftstellers und Kriegsbaumeisters unter Cäsar und Augustus, Pollio Vitruvius, wird der Umfang eines Rades, dessen Durchmesser mit $4\frac{1}{6}$ Fuß angegeben wird, mit $12\frac{1}{2}$ Fuß berechnet.
In den "Schriften der römischen Feldmesser" (um 100 u. Z.) wird einmal $\pi \approx \frac{22}{7}$ benutzt. ([35].)

Griechen

Die Geschichte der griechischen Mathematiker von Thales von Milet (um 600 v. u. Z.) über Pythagoras von Samos (um 550 v. u. Z.), Aanaxagoras von Klazomenai (um 475 v. u. Z.), Hippokrates von Chios (um 450 v. u. Z.), Hippias von Elis (um 425 v. u. Z.), Antiphon (um 425 v. u. Z.), Bryson von Herakleia (um 410 v. u. Z.), Theaitetos von Athen (um 390 v. u. Z.), Eudoxos von Knidos (um 375 v. u. Z.), Dinostratos (um 350 v. u. Z.), Euklid von Alexandria (um 325 v. u. Z.), Archimedes von Syrakus (um 250 v. u. Z.), Eratosthenes von Kyrene (um 240 v. u. Z.), Apollonius von Perge (um 225 v. u. Z.), Heron (um 60 v. u. Z.), Menelaos (um 100 u. Z.), Diophantos von Alexandria (um 250 u. Z.) bis Pappos von Alexandria (um 320 u. Z.) umfasst neun Jahrhunderte.

Wichtige Zentren der Mathematik waren zu verschiedenen Zeiten Milet in Ionien an der Westküste Kleinasiens, Athen auf dem griechischen Festland, die ägyptische Hafenstadt Alexandria, Syrakus auf Sizilien. ([37].)

"Der Bau mathematischer Wissenschaft, den sie (die Griechen) so in der Zeit von Thales bis zur Gründung der alexandrischen Schule von seinen ersten Fundamenten aufgeführt, gehört zu den größten Taten des menschlichen Geistes", betonte (im Oktober 1846) der berühmte Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) in einem Brief an Alexander von Humboldt (1769-1859). ([14], -S. 392.)
Humboldt hatte Jacobi im Herbst 1846 gebeten, ihm über die Mathematik der Griechen Mitteilungen zu machen, welche dieser zu seinem "Kosmos" benutzen wollte. Jacobi gehört zu den wenigen Mathematikern, die die Geschichte der Mathematik auch aktiv erforscht und sich nicht nur passiv dafür interessiert haben.

In einem anderen Brief (vom Oktober 1846) schreibt er ([14], S. 391):
"Aus der ganzen Zeit der stufenweisen Entwicklung der Mathematik bei den Hellenen während der Blüte ihrer Bildung bis zur Zeit Alexanders des Großen, von Thales bis Platos Schüler Philippos von Mende, bis zu welchem die alten Geschichtsschreiber der Mathematik, wie der Peripatetiker Eudemos, ihre Geschichte fortführen, ist nichts in seiner ursprünglichen Form auf uns gekommen, sondern wir kennen von den tiefen mathematischen Arbeiten dieser reichen Zeit nur die bereits in ein System geordneten Resultate.
Was davon den einzelnen gebührt, darüber sind uns nur dürftige Berichte übrig geblieben."

Es sind in der Tat (insbesondere aus der frühen griechischen Mathematik) nur wenige Originaltexte erhalten geblieben.
"So hat man keine Spur[1], dass etwas mathematisches aufgeschrieben worden (ist), bis auf Hippokrates von Chios, der zu den Zeiten des Euripides lebte und die ersten Elemente geschrieben hat.
Durch die schon zu Platos Zeit verbreiteten Schulen hatte sich ein lebendiger Unterricht erzeugt, der die mathematische Bildung weiter verbreitete als es durch das beschwerliche Kopieren der wenigen mathematischen Bücher möglich war.“" ([12].)

Eine äußerst wichtige Quelle zur frühen griechischen Mathematik bilden die "Elemente" von Euklid. Das Buch gehört zu den bemerkenswertesten und verbreitetsten Büchern der Weltliteratur. Die 13 Teile (die planimetrischen Kapitel 1-6, die arithmetischen Kapitel 7-10, die stereometrischen Kapitel 11-13) stammen von verschiedenen Verfassern (neben Euklid z. B. auch Theaitetos und Eudoxos) und wurden um 325 v. u. Z. von Euklid zusammengestellt, enthalten daher wichtige Bestandteile der älteren Mathematik.

Wichtige Angaben stammen vom griechischen Biographen Plutarch (etwa 46 bis 120 u. Z.). Eine ergiebige Quelle für sonst verlorengegangene Schriften griechischer Mathematiker ist die "Collectio" von Pappos von Alexandria (um 320 u. Z.).
Eine weitere wichtige Quelle ist das im "Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen" enthaltene sogenannte Geometerverzeichnis von Proklos (410-485 u. Z.). Es handelt sich dabei vermutlich um einen von Geminos (einem Schriftsteller des 1. Jh. v. u. Z.) überlieferten Auszug aus einer "Geschichte der Mathematik", die einst Eudemos von Rhodos (um 320 v. u. Z.), der erste Mathematikhistoriker, ein Schüler von Aristoteles (384-322), verfasst hatte.
Von letzterer sind nur wenige Fragmente erhalten. Simplikios (um 520 u. Z.) hat einen umfangreichen Kommentar zur Physik des Aristoteles verfasst, worin auch ein Teil aus Eudemos "Geschichte der Mathematik" enthalten ist.

In der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts (v. u. Z.) war das Problem der Kreisquadratur in Athen (insbesondere durch die Untersuchungen von Antiphon und Hippokrates) so populär, dass Aristophanes (um 445- um 386 v. u. Z.) in seinem 414 zuerst aufgeführten Lustspiel "Die Vögel" eine scherzhafte Anspielung auf das Problem der Quadratur des Kreises machen konnte (die das Publikum auch verstand).
In seinem Lustspiel lässt Aristophanes den Astronomen und Geometer Meton auftreten und mit Peitheräros ein Gespräch führen, das folgende Stelle enthält ([25]):

"Meton. Ich leg' das Lineal nun an und setz' von oben den gebogenen Zirkel ein - verstehst Du, was ich will?
Peithetäros. Nein, ich verstehe nichts.
Meton. Dann leg' ich an das Lineal und messe recht, auf das vierwinklig werde Dir der Kreis, und in der Mitt' der Markt, und Straßen führen geradewegs auf ihn als Zentrum, just so wie von einem Stern, mit rundem Kerne, Licht in geraden Linien rings erstrahlt nach allen Seiten.

[1] Einige neuaufgefundene Fragmente wurden Anfang unseres Jahrhunderts (u. a von H. Diels) publiziert.

Peithetäros. Der reinste Thalesmensch."

Meton erklärt einen Stadtplan. Die Straßenlinien werden so gezogen, dass der zugrunde liegende Kreis in vier Quadranten durch Konstruktion von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern zerlegt wird. Von einer Verwandlung des Kreises in ein Quadrat kann hier nicht die Rede sein, obwohl der griechische Text (nach Rudio) zweideutig ist.

Nach F. Rudios Interpretation ([25]) hat der Dichter hier einen Scherz, ein Wortspiel beabsichtigt: Den Kreis in ein Quadrat verwandeln, heißt wörtlich "den Kreis viereckig" oder "vierwinklig" machen.
Aristophanes kannte das Problem der Kreisquadratur und wusste, dass es den Mathematikern nicht gelingt, den Kreis "vierwinklig" zu machen. Er löst die Aufgabe auf seine Art; durch zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser lässt er den Meton den Kreis tatsächlich "vierwinklig" machen.

Plutarch berichtet, dass von den griechischen Mathematikern zuerst der in Athen hoch angesehene Anaxagoras (um 500-428 v. u. Z.) "die Quadratur des Kreises gezeichnet habe".
"Wie ernstere und tiefere Naturbetrachtung zeigt die Lehre des Anaxagoras, von der wir nicht ohne Staunen vernehmen, und die er fast mit dem Leben gebüßt hätte", schrieb Jacobi im Oktober 1846 an Humboldt, die Lehre nämlich, "dass der Mond, wenn seine Schwungkraft aufhörte, zur Erde fallen würde, wie die Steine einer Schleuder". ([14], S. 393.)

Für seine Ansichten weilte er damals (etwa 20 Jahre vor der Aufführung der "Vögel" von Aristophanes) im Gefängnis in der Verbannung außerhalb Athens. Wie er dort ein Quadrat konstruierte, welches als Flächeninhalt mehr oder weniger genau den Flächeninhalt eines gegebenen Kreises besaß, wird nicht überliefert.

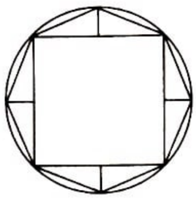


Abb. 4 (nach O. Becker)

Simplikios berichtet in seinem Kommentar zur Physik des Aristoteles als Einleitung in einem selbst aus Eudemos geschöpften Bericht über den Quadrierungsversuch des Sophisten Antiphon (um 430 v. u. Z.), einem Zeitgenossen des Sokrates (469-399 v. u. Z.) ([3], S. 43-44; vgl. dazu Abb. 4):

"Antiphon aber beschrieb einen Kreis und zeichnete ein Polygon hinein, eines von denen, die eingeschrieben werden können. Es sei das eingeschriebene z. B. ein Quadrat. Indem er alsdann jede der Seiten des Quadrates halbierte, zog er von den Teilpunkten aus nach den Kreisbogen senkrechte Linien, von denen offenbar eine jede das zu ihr gehörige Segment des Kreises halbierte.
Darauf zog er von den Teilpunkten nach den Endpunkten der Seiten des Quadrates Verbindungsgeraden, so dass vier Dreiecke über den Seiten entstanden, die ganze eingeschriebene Figur aber ein Achteck ward. Und indem er so wieder nach demselben

Verfahren jede der Seiten des Achtecks halbierte, von dem Teilpunkte aus eine Senkrechte nach dem Kreisumfange zog und von den Punkten, in denen die Senkrechten die Kreisbogen trafen, Verbindungsgeraden nach den Endpunkten der geteilten Geraden führte, machte er das eingeschriebene zu einem Sechzehneck.
Und indem er wieder in demselben Verhältnis die Seiten des eingeschriebenen Sechzehnecks teilte und Verbindungslinien zog und das eingeschriebene Polygon verdoppelte und dies beständig wiederholte, glaubte er, dass schließlich einmal nach Erschöpfung der Fläche auf diese Weise dem Kreise ein Polygon werde eingeschrieben werden, dessen Seiten sich wegen ihrer Kleinheit mit dem Umfange des Kreises decken würden.
Da wir aber zu jedem Polygone ein gleiches Quadrat konstruieren können, wie wir in den Elementen gelernt haben, so werden wir, weil das Polygon dem Kreise, mit dem es sich ja deckt, gleich zu achten ist, auch zu einem Kreise ein gleiches Quadrat herzustellen imstande sein."

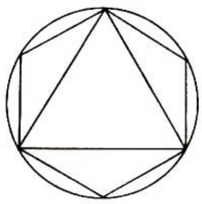


Abb. 5 (nach O. Becker)

Ein anderer Kommentator des Aristoteles, Themistios (um 320-390 u. Z.), weiß die Sache ganz ähnlich ([3], S. 44-45; vgl. dazu Abb. 5):

"(Antiphon) zeichnete ein gleichseitiges Dreieck in den Kreis, beschrieb aber jeder der Seiten nach dem Kreisumfange zu ein anderes, gleichschenkliges und, indem er dies beständig wiederholte, glaubte er, dass schließlich einmal die Seite des letzten Dreiecks, die doch geradlinig ist, sich mit dem Umfange decken würde - während er doch damit die Teilung ins Unendliche aufhob, die der Geometer als Grundsatz annimmt."

Die Übereinstimmung der beiden Berichte spricht für die gleiche Quelle, wahrscheinlich die "Geschichte der Mathematik" von Eudemos. Für die Quadratur des Antiphon gibt es noch eine dritte Quelle; der Kommentator des Aristoteles, Johannes Philoponos (6. Jh. u. Z.) schreibt darüber.
Er berichtet auch über die Versuche des Bryson aus Herakleia (um 410 v. u. Z.), die Quadratur des Kreises zu finden. Bryson betrachtet nicht nur die einbeschriebenen Polygone wie Antiphon, sondern gleichzeitig auch die umbeschriebenen. Der Aristoteles-Kommentator Alexander von Aphrodisios (um 200 u. Z.) beschreibt das (nach Joh. Philoponos) wie folgt ([3], S. 46):

"Der Kreis ist größer als jedes in ihn einbeschriebene Polygon, kleiner als jedes ihm umbeschriebene ... Aber auch die zwischen einer bestimmten einbeschriebenen und einer bestimmten umbeschriebenen geradlinigen Figur liegende geradlinige Figur ist kleiner als die umbeschriebene und größer als die einbeschriebene.
Nun ist das, was gleichzeitig jeweils größer bzw. kleiner als dasselbe ist, einander gleich; der Kreis ist also gleich dem zwischen den einbeschriebenen und den umbeschriebenen Polygonen liegenden Polygon. Wir haben aber die Möglichkeit, zu jeder gegebenen geradlinigen Figur ein ihr flächengleiches Quadrat zu konstruieren; es ist also möglich,

ein dem Kreis flächengleiches Quadrat herzustellen."

Auf Proklos bzw. den Bericht seines Schülers Ammonios Hermeion (um 500 u. Z.) gehen die folgenden Zeilen von Joh. Philoponos zurück ([3], S. 46-47):

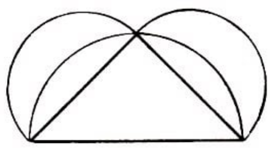
"Proklos sagte nun, Bryson habe den Kreis auf folgende Weise quadriert: Der Kreis, sagt Bryson, ist größer als jedes eingeschriebene und kleiner als jedes umgeschriebene Polygon.
Im Vergleich, wozu aber Größeres und Kleineres existiert, dazu existiert auch Gleiches. Es existieren aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also existiert auch ein ihm gleiches."

Wohl kann man jedes ein- bzw. umbeschriebene Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, nicht aber die Grenzfigur, den Kreis.

Hippokrates von Chios (um 440 v. u. Z.) (nicht der Arzt Hippokrates von Kos) war der berühmteste Geometer des 5. Jahrhunderts. Er wirkte in Athen, und schrieb das erste Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Er bewies (nach Eudemos) den Satz, dass Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional sind.
Von ihm stammt auch das erste Beispiel einer wirklichen Quadratur krummlinig begrenzter Flächen. Wie er sich am Problem der Kreisquadratur versuchte, erfahren wir von Simplikios so, wie dieser es von seinem Lehrer Alexander von Aphrodisias erfahren hatte. Simplikios betont zu Beginn ausdrücklich, dass er seinen Bericht wörtlich aus der "Geschichte der Mathematik" von Eudemos wiedergibt, aber einige Erläuterungen hinzufügt, da sich Eudemos nach altertümlicher Weise recht kurz ausgedrückt habe.

Mit der nicht ganz leichten Frage nach der sauberen Trennung der Worte des Eudemischen Berichts von den begleitenden Erläuterungen des Simplikios haben sich F. Rudio (1907, [26]) und O. Becker (1935, [1]) befasst. Becker betont, dass "der Bericht des Eudemos von Rhodos über die Quadraturen des Hippokrates das älteste wörtlich erhaltene größere Stück griechischer Mathematik" sei.
(Dieser Bericht ist in [3], S. 29, zu finden.)

Abb. 6



Danach betrachtete Hippokrates ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck. Er konstruierte aus den Halbkreisen über den Katheten und dem Halbkreis über der Hypotenuse "Möndchen" (Abb. 6) und zeigte, dass die Summe der Flächeninhalte der Möndchen gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist.

Es ist "Flächeninhalt des Dreiecks + Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über b und a = Summe der beiden Möndchen + Flächeninhalt des Halbkreises über c". Der Halbkreis über c hat den Flächeninhalt $\frac{\pi}{8}c^2$, die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über b und a ist auch $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2) = \frac{\pi}{8}c^2$ wegen $c^2 = a^2 + b^2$.

Konstruiert man analog Möndchen an einem Quadrat, so ist die Summe der Flächeninhalte der vier Möndchen gleich dem Flächeninhalt des Quadrates (Abb. 7).

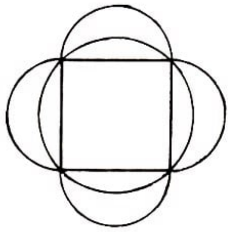


Abb. 7

Hippokrates beschrieb ferner einem Kreis ein regelmäßiges Sechseck ein (Abb. 8) und betrachtete die obere Hälfte (auf einem Durchmesser); Auf den drei einandergrenzenden Seiten des Sechsecks zeichnete er Halbkreise, die mit dem gegebenen Kreis drei "Möndchen" bilden.

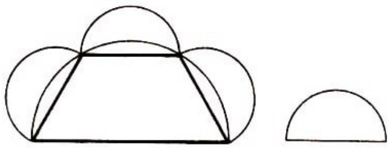


Abb. 8

Könnte man die Möndchen quadrieren, so könnte man den Halbkreis und damit den Kreis quadrieren. Hippokrates beschäftigte sich nun mit der Quadratur von durch Kreisbogen begrenzten "Möndchen".

Pappos von Alexandria berichtet im vierten Buch seines Sammelwerkes, dass Dinostrator, der Bruder des Menaichmos (beide um 350 v. u. Z., aus Eudoxos' Schule stammend), und der alexandrinische Mathematiker Nikomedes (um 180 v. u. Z.) sowie auch andere Geometer für die Quadratur des Kreises eine Kurve benutzten, die ihren Namen von dieser Eigenschaft erhielt. Sie wurde Quadratrix genannt.

Die Quadratrix hat der berühmte Hippias von Elis (um 420 v. u. Z.) erfunden. Sie diente zur Dreiteilung des Winkels und zur Quadratur des Kreises. Die Konstruktionsbeschreibung des Pappos lautet (zitiert aus [36], S. 315; Abb. 9):

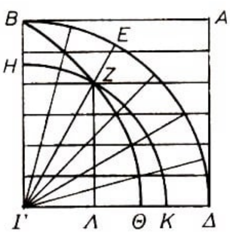


Abb. 9 (nach van der Waerden)

"Beschreibe in ein Quadrat $AB\Gamma\Delta$ einen Kreisbogen $BE\Delta$ um Γ. Die Gerade ΓB drehe sich gleichförmig um Γ, so dass B den Bogen $BE\Delta$ durchläuft, und BA verschiebe sich außerdem, stets parallel zu $\Gamma\Delta$ bleibend, gleichförmig nach $\Gamma\Delta$.
Die beiden gleichförmigen Bewegungen mögen sich in derselben Zeit abspielen, so dass die beiden Geraden ΓB und BA im gleichen Augenblick mit $\Gamma\Delta$ zusammenfallen. Die beiden sich bewegenden Geraden schneiden sich in einem Punkt, der sich mitbewegt und dabei eine Kurve $BZ\Theta$ beschreibt.
Ist ΓZE irgendein bestimmter Stand der sich drehenden Geraden und Z der Schnittpunkt mit der sich parallel verschiebenden Geraden, so wird sich nach der Definition

$B\Gamma$ zum Lot $Z\Lambda$ wie der ganze Bogen $B\Delta$ zum Bogen $E\Delta$ verhalten."

Bewegt sich also die Strecke BA parallel zu sich selbst und gleichförmig nach unten und gleichzeitig, ebenfalls gleichförmig, ΓB als Strahl um Γ nach $\Gamma\Delta$, so bilden die entsprechenden Schnittpunkte die Quadratrix.

Pappos beweist, dass der Bogen ΔEB sich zur Strecke $B\Gamma$ wie $B\Gamma$ zu $\Gamma\Theta$ verhält (wobei Θ der Endpunkt der Quadratrix ist). Hieraus folgt, wenn man $\Gamma\Theta = x$, $\Gamma\Delta = \Gamma B = r$ setzt, dass $r/x = \pi/2$ ist.

Auf diese Weise lässt sich der Kreisumfang bestimmen. Man kann annehmen, dass Dinostratos den Satz, dass die Kreisfläche gleich der Fläche des Rechtecks ist, dessen eine Seite gleich dem Umfang und dessen andere Seite gleich $d/4$ ist ($F = \frac{d}{4}U$) kannte, einen Satz, den erst Archimedes exakt bewiesen hat.

Die Quadratrix ist mit Zirkel und Lineal (in endlich vielen Schritten) nicht konstruierbar; sie gibt also keine Lösung des Problems im festgesetzten Sinne.

Erst die Beschreibung der Hilfsmittel schafft die notwendige Grundlage, um zu behaupten und zu beweisen, dass die Kreisquadratur nicht ausführbar bzw. ausführbar ist. Die zugelassenen Werkzeuge sind Zirkel und Lineal (endlich oft angewendet). Die Mathematikhistoriker haben verschiedene Vermutungen über die Entstehungszeit einer Beschränkung auf Zirkel und Lineal aufgestellt.

Bei den Indern, Ägyptern, Babyloniern, Chinesen wurden die Hilfsmittel nicht genannt. Auch überall dort, wo die Griechen die Kreisquadratur als Aufgabe stellen und von ihrer Lösbarkeit sprechen, fehlt nach A. D. Steele ([33]) zunächst jede wörtliche Bezugnahme auf Zirkel und Lineal.
So lassen der Euklid-Kommentator Proklos Diadochos (410-485 u. Z.) und die Kommentatoren des Aristoteles, Ammoinios Hermeion (um 500 u. Z.) und Joh. Philoponos (6. Jh. u. Z.), die Aufgabe der Kreisquadratur aus der Aufgabe der Vieleckquadratur entstehen, jedoch hebt keiner hervor, dass die Quadratur des Vielecks mit Zirkel und Lineal ausführbar ist und dass die Kreisquadratur deshalb auf die gleiche Art gesucht werden müsse.

In den Schriften des Aristoteles von Stageira (384-322 v. u. Z.) wird die Quadratur (nach Steele) neunmal erwähnt. Er beschränkt sich tatsächlich, aber stillschweigend, wie auch Euklid in den "Elementen", auf die Hilfsmittel Zirkel und Lineal. Doch kann aus diesem Stillschweigen an sich nichts gefolgert werden.

Inwiefern Beschränkungen der Hilfsmittel von den Griechen selbst empfunden oder ausgesprochen worden sind, hat A. D. Steele (1936, [33]) genauer untersucht. Er betont, dass die älteren mathematischen Geschichtsschreiber über diese Fragen keine besonderen Untersuchungen angestellt haben. Erst 1874 sprach H. Hankel in seinem Buch "Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter" (Leipzig 1874) eine Behauptung aus, die dann in der Folgezeit oft wiederholt wurde:
"Wir verdanken ... Plato die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf jene zwei elementaren" (Zirkel und Lineal).

Steele nahm eine Prüfung der Hankelschen Belegstellen (zwei Stellen bei Plutarch und eine Äußerung in Platons "Staat") vor. Die zwei Stellen bei Plutarch berichten von einem Tadel, den Platon (428-348 v. u. Z.) gegen Archyten von Tarent (um 400 v. u. Z.), Eudoxos von Knidos (4. Jh. v. u. Z.) und Menaichmos (4. Jh. v. u. Z.) gerichtet habe.
Die Frage, ob Platons Tadel gegen das Hinausgehen über Zirkel und Lineal gerichtet war, beantwortet Steele nach der Untersuchung der Tadelstellen und der Äußerung aus Platons "Staat" so:

"Aus den Umständen des Tadels, aus der dargebotenen Begründung, aus den bevorzugten Ansichten Platons und aus der späteren Entwicklung der Geometrie konnte die Vermutung wiederholt geschöpft werden, dass nicht die Bewegungsgeometrie und nicht das Hinausgehen über Zirkel und Lineal, sondern der Gebrauch von gerätlichen Sondermitteln und die Abkehr von der rein begrifflichen Geometrie den Gegenstand von Platons Tadel bildeten."

Auch von Steele geprüfte weitere antike Zeugnisse über eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal konnten nicht "die nötige Stütze dafür bieten, dass auch nur zeitweise, etwa unter Platons Einfluss, eine vollständige Beschränkung auf Zirkel und Lineal bestanden habe." ([33], S. 362.)
"So kann von den Zeiten an, wo Euklid und Aristaeus und Apollonius diese Lehre (von den Kegelschnitten) zu hoher Blüte bringen, von einer allgemeinen Beschränkung auf Zirkel und Lineal nicht länger die Rede sein." ([33], S. 341.)[2]

Die Schrift des Apollonius über die "ebenen Örter" ist das erste Werk, in welchem Gerade und Kreis nach des Verfassers Wunsch für die Stoffwahl maßgebend gewesen sind.
Die bedingte Beschränkung auf Zirkel und Lineal, die Pflicht, so oft es möglich ist, mit Zirkel und Lineal auszukommen, aber zugleich die Erlaubnis, sonst mit höheren Hilfsmitteln zu arbeiten, wird von Pappos (um 320 u. Z.) in einem uns erhaltenen Werke ausgesprochen.

Zwei Gründe, warum die griechischen Geometer den Standpunkt weitestgehender Verwendung von Zirkel und Lineal gewählt haben, sind (nach Steele) aus dem Altertum überliefert:
1. Rücksicht auf die Lernenden, also didaktische, unterrichtliche Beweggründe;
2. Rücksicht auf ein wohlgeordnetes Lehrgebäude, also wissenschaftstheoretische Beweggründe.

Fragen der Lösbarkeit von Aufgaben mit vorgegebenen Hilfsmitteln, insbesondere der Lösbarkeit von Aufgaben mit Zirkel und Lineal, wurden von den Griechen bisweilen gestellt und verneinend beantwortet.
Die Unmöglichkeit einer Lösung der Delischen Aufgabe mit Zirkel und Lineal wird von Pappos wiederholt behauptet.
Die Winkeldreiteilung gilt bei Pappos und auch bei Proklos als nicht lösbar mit Zirkel

[2] Über andere Auffassungen zu dieser Problematik siehe auch A. Szabo, Anfänge der griechischen Mathematik, Budapest 1969.

und Lineal.

In der Eudemischen Ethik wird die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises im Sinne der theoretischen Geometrie nach Steele ([33]) keineswegs eindeutig zum Ausdruck gebracht.

"In der Aussage bestimmt, in der Begründung verfehlt ist die Erklärung des Olympiadors, die Kreisquadratur sei deshalb unmöglich, weil der Punkt kein gemeinsames Maß für die geometrischen Größen abgebe. Olympiador vergleicht diese geometrische Aufgabe mit der anderen, arithmetischen Aufgabe, eine Kreiszahl zu finden, die zugleich eine Quadratzahl ist.
Das sei unmöglich, weil die Eins das Maß aller Zahlen ist."([33], S. 351.)

Ammonios und Philoponos berichten, dass mehrere berühmte Mathematiker sich in der Quadratur des Kreises versucht hätten; dem Archimedes sei eine gute Näherung geglückt, das Genaue aber noch niemandem.
Ammonios Gründe für eine Unmöglichkeit der Kreisquadratur werden von Simplikios mitgeteilt. Sie gehen von der "Wesensverschiedenheit des Geraden und des Runden" aus. Simplikios führt die Möndchen als Gegenbeispiel an. Bei ihm findet sich die ausdrückliche Feststellung, dass für die Quadratur des Kreises ein Unmöglichkeitsbeweis noch aussteht:

"Der Grund dafür, dass die bislang unentdeckte Kreisquadratur noch untersucht wird, und dass man noch fragt, ob eine dem Kreisumfang gleich lange Strecke vorhanden ist, besteht darin, dass diese Dinge noch nicht für unmöglich befunden worden sind, wie das bei der Unausmessbarkeit von Seite und Diagonale schon der Fall ist." (Zitiert aus [33], S. 352.)

"Ausreichende Gründe für die Unmöglichkeit einer Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal sind im Altertum auch nicht zu erwarten; ist es doch bisher nicht gelungen, den Lindemannschen Beweis vom Jahre 1882, der sehr viel mehr dartut, als dass π keine Quadratwurzelgröße ist, durch einen einfachen Beweis zu dieser einfacheren Tatsache zu ersetzen." ([33], S. 352.)

Die erste tatsächliche und für uns greifbare Beschränkung auf Zirkel und Lineal liegt in den "Elementen" von Euklid (um 350 v. u. Z.-etwa 300 v. u. Z.) vor. Euklid ist (nach Pappos) in anderen Werken über diese Grenze hinausgegangen.
In den Elementen wird nirgends der Flächeninhalt eines Kreises berechnet. Sollte die Ausrechnung des Kreisinhalts bis zu Euklid verlorengegangen sein?

"Die Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme der mehrfachen Beschäftigung mit der Quadratur des Kreises bei Anaxagoras, bei Antiphon, bei Bryson, bei Hippokrates gegenüber wird vollends für einen in Alexandria lebenden Mathematiker zur Unmöglichkeit ... Wir stehen vielmehr hier von einer absichtlichen Weglassung." (M. Cantor [8], S. 271.)

Im 12. Kapitel der "Elemente" zeigt Euklid, was Hippokrates von Chios schon wusste, dass Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Die Beschränkung Euklids auf Zirkel und Lineal bei geometrischen Konstruktionen bezieht sich also nicht auf die Kreisquadratur.

Von den vier großen Geometern Euklid, Eratosthenes, Archimedes und Apollonios aus der Blütezeit der griechischen Mathematik haben sich Archimedes und Apollonios mit der Quadratur des Kreises beschäftigt.
Dem Archimedes von Syrakus (287?-212 v. u. Z.) verdanken wir eine Abhandlung "Die Kreismessung"([24]). Hierin beweist er die folgenden drei Sätze:

1. Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.

2. Der Kreis hat zum Quadrate seines Durchmessers (nahezu) ein Verhältnis von 11 : 14.

3. Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers.

Der dritte Satz ist (so F. Rudio) "zu den bewunderungswürdigsten mathematischen Leistungen des ganzen Altertums zu rechnen." ([24], S. 15.)
Archimedes erkannte, dass die Länge des Kreisumfangs zwischen der eines einbeschriebenen und eines umbeschriebenen regelmäßigen Vielecks liegt. Er bestimmte nacheinander die Seiten und den Umfang des ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, Zwölfecks, 24-Ecks, 48-Ecks und des 96-Ecks.

Für das Verhältnis des Umfangs U_{96} des einbeschriebenen 96-Ecks zum Durchmesser fand Archimedes

$$3\frac{10}{71} < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \frac{U_{96}}{d}$$

Für das Verhältnis des Umfangs U'_{96} des umbeschriebenen 96-Ecks zum Durchmesser ergab sich

$$\frac{U'_{96}}{d} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}$$

Beim Sechseck benutzte Archimedes die Näherungen $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ und $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$. (Über eine neue Deutung, wie Archimedes dazu gekommen sein könnte, siehe [15].)

Heron (um 100 u. Z.) berichtete von einer anderen Näherung des Archimedes für das Verhältnis Kreisumfang U zu Durchmesser d:

$$\frac{211875}{67441} < \frac{U}{d} < \frac{197888}{62351}$$

Dass Archimedes noch weitere genauere Näherungen besaß, konnte W. R. Knorr ([15]) nachweisen.
Archimedes versuchte die Quadratur des Kreises mittels Kurven, die nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, durchzuführen. Simplikios berichtete darüber ([26], S. 45), indem er eine Stelle aus einem Aristoteles-Kommentar des Iamblichos von Chalkis

(283?-330 v. u. Z.) zitierte:

"Später aber ... konstruierten auch Archimedes mittels der Spirale und Nikomedes mittels der Linie, die eigens Quadratrix genannt wird, und Apollonius mittels einer gewissen Linie, die er selbst eine Schwester einer Muschellinie nennt - sie ist aber dieselbe wie die des Nikomedes - und auch Karpus mittels einer gewissen Linie, die er einfach 'aus doppelter Bewegung' nennt, und noch viele andere ..., auf mannigfache Weise das Problem."

Rechnungen wie Archimedes scheint auch Apollonios von Perge (3. Jh. v. u. Z., wirkte zunächst in Alexandria, später in Pergamon) durchgeführt zu haben. In einem Archimedes-Kommentar von Eutokios von Askalon (geb. 480 u. Z.) heißt es ([35], S. 206):

"Soviel in meinen Kräften steht, habe ich die von Archimedes angegebenen Zahlen einigermaßen erläutert. Wissenswert ist aber noch, dass auch Apollonius von Perge in seinem 'Okytokion' dasselbe durch andere Zahlen bewiesen hat, wodurch er sich der Sache noch mehr näherte."

P. Tannery vermutet, dass es der Näherungswert 3,1416 für π gewesen sei.

Der von Archimedes gewonnene Näherungswert $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ verbreitete sich. In Alexandria verdrängte er den alten ägyptischen Wert. Bei Heron tritt meist der Wert $\frac{22}{7}$ auf. Die Nachfolger von Archimedes im Altertum und Mittelalter beschränken sich zunächst darauf, die Genauigkeit zu erhöhen.

Abschließend sei noch Ptolemaios Klaudios von Alexandria (um 150 u. Z.) erwähnt. Er benutzte für π den Wert $\frac{377}{120}$ (im Sexagesimalsystem $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} \approx 3,1416667$.

Von Zhang Heng bis Huygens

Wir haben über die Kreisberechnung und die Kreisquadratur bei den Alten, den Indern, Ägyptern, Babyloniern, Hebräern, Römern, Chinesen und Griechen berichtet und damit relativ ausführlich die erste Hälfte der etwa 4000jährigen Geschichte der Kreisquadratur behandelt.
Nun sollen nur noch ausgewählte Beispiele für die an Material wesentlich reichere zweite Hälfte dieser Geschichte angegeben werden.

Im Zeitraum bis zum 17. Jahrhundert gab es zu verschiedenen Zeiten Zentren mathematischer Forschung vor allem in Indien und China, in den Ländern des Islams von Spanien bis Zentralasien und in Europa. Lange Zeit blieben die Betrachtungen zur Kreisberechnung und -quadratur elementargeometrisch.

Unter dem Einfluss der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung wurden dann zahlreiche "analytische" Ausdrücke (z. B. mittels unendlicher Produkte und Reihen und Kettenbrüche) für $\pi = 4\lambda$ angegeben. Im Jahre 1766 erkannte man daraus, dass π irrational ist, und erst 1882 wurde bewiesen, dass π sogar transzendent ist, sich also insbesondere nicht durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ auf rationale Zahlen gewinnen lässt, die Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal somit unmöglich ist.

Der chinesische Philosoph und Astronom Zhang Heng (78-139) gab als Verhältnis des Quadrates des Kreisumfangs zum Quadrat des Umfangs des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates den Wert $5:8$ an.
Dies bedeutet $\frac{(2\pi r)^2}{(8r)^2} \approx \frac{5}{8}$, d.h. $\pi^2 \approx 10$. ([13], S. 57.) Den Näherungswert $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3,1623$ verwendete noch 1247 der chinesische Algebraiker Qin Jin-Shao. Man findet ihn auch im 7. Jahrhundert beim indischen Astronomen Brahmagupta (geb. 598) und im 9. Jahrhundert beim Choresmier Al-Hwarazmi (gest. zwischen 835 und 845).

Der chinesische Mathematiker Liu Hui (3. Jh.) wendete zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises die gleiche Methode an, wie sie von Archimedes beschrieben wurde. (Annäherung durch eine Folge einbeschriebener regulärer Vielecke). Er dehnte seine Berechnung bis zum 3072-Eck aus. Sein dabei erhaltener Näherungswert für π ist $3,14159$.

Im 5. Jahrhundert bewies der chinesische Mathematiker Zu Chong-Zhi (430-501) die Ungleichung

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

Sein Näherungswert $\frac{355}{113}$ ist auf sechs Stellen nach dem Komma genau. Der im 5. Jahrhundert in China erzielte Wert für π wurde erst tausend Jahre später verbessert. ([13], S. 59.)

Der Astronom an der Sternwarte zu Samarkand, Al-Kasi (gest. um 1436), berechnete im Jahre 1427 in seiner "Abhandlung über den Kreis" die Zahl π auf neun Sexagesimalstellen (16 Dezimalstellen) genau. Die Berechnung des Kreisumfangs führte Al-Kasi wie seine Vorgänger auf die Berechnung des Umfangs der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke zurück.
Das archimedische Verfahren wurde (gelegentlich auch in einer vom indischen Mathematiker Aryabhata - geb. 476 - beschriebenen besseren Form) benutzt, um π mit immer größerer Genauigkeit zu berechnen.

In Europa ging Leonardo von Pisa (um 1220) bis zum 96-Eck und ermittelte $\pi \approx \dfrac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3,1418...$, Vieta (1540-1603) ging (1593) bis zum $2^{16} \cdot 6$-Eck und fand π auf neun Dezimalstellen genau.

Ludolf van Ceulen (1539-1610) ging bis zum 2^{62}-Eck und fand π auf 32 Stellen genau.

Im Jahre 1654 erschien Christian Huygens' Abhandlung "De circuli magnitudine inventa". Diese Schrift ist, so betont F. Rudio, "nicht nur für die Kreismessung eine geradezu epochemachende, sie gehört auch unstreitig zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben worden sind, und wird, wie die Abhandlung des Archimedes, ihren Wert behalten, auch wenn die darin niedergelegten Resultate durch die Mittel der Analysis heutzutage auf viel kürzerem Wege gewonnen werden können."([24])

Im Vorwort beschreibt Huygens sein Hauptresultat:

"Da ich in Bezug auf das alte Problem von der Quadratur des Zirkels, welches zumal bei den der Mathematik Unkundigen an Berühmtheit von keinem anderen übertroffen wird, neuerdings eine Untersuchung ausgeführt habe, die mir der Mühe nicht unwert zu sein scheint, und da ich dabei zu Resultaten gelangt bin, die, wie ich glaube, besser als die bisher bekannten sind, so will ich dieselben mit den Beweisen den Geometern zukommen lassen.
Denn ich bin der Ansicht, dass dieselben nicht nur den Studien jener förderlich sein werden, sondern dass sie auch gerade durch ihre Neuheit geeignet sein dürften, zur Erforschung noch verborgener Tatsachen anzuspornen, indem ich mir vorstelle, dass auch auf dem Gebiete, auf welchem sich ehedem alle mit der größten Anspannung ihrer Kräfte betätigt haben, noch manche des Fleißes nicht unwerte Frucht zu pflücken übrig geblieben ist.

Zwar haben vordem schon sehr viele den Ruhm, die Quadratur gefunden zu haben, sich anzueignen versucht und wiederholt die verschiedensten Erfindungen veröffentlicht, Wahres mit Falschem mischend. Aber wir wissen, dass alles dies von den Kundigeren entweder widerlegt oder mit Verachtung bestraft worden ist und dass bis heute von allen den Sätzen, auf welche sich jede Ausmessung des Kreises stützte, nur der eine feststeht, nämlich der, dass der Kreis größer ist als das ihm eingeschriebene und kleiner als ihm umgeschriebene Polygon.

Ich aber will jetzt eine sorgfältigere Bestimmung beibringen und zeigen, dass, wenn man zwei Polygone als mittlere Proportionalen zu einem eingeschriebenen und dem dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygone konstruiert, der Umfang des kleineren derselben größer ist als der Umfang des Kreises, während die Fläche des anderen in demselben Verhältnis größer ist als die Fläche des Kreises."

Durch das von Huygens angegebene Verfahren kann,
"das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser, welches Archimedes aus Polygonen von 96 Seiten ermittelt hat, in gleicher Weise durch Benutzung eines Zwölfecks gewonnen werden ... Überhaupt gewinnt man allemal gerade die doppelte Anzahl der richtigen Stellen, gleichgültig wie viele Seiten die zur Berechnung benutzten Polygone besitzen."

Ein weiteres von Huygens angegebenes Verfahren ist noch besser.

"Brauchen wir doch in der Tat, um die von Archimedes für die Kreisperipherie gewonnenen Grenzen zu erhalten, jetzt einzig und allein die Seite des eingeschriebenen Dreiecks zu kennen! Aus dem Sechzigeck aber erkennen wir, dass jene zwischen den Grenzen 31415926538 und 31415926533 enthalten ist; insofern der Durchmesser gleich 10000000000 Teilen gesetzt wird, während nach der gewöhnlichen Methode kaum die Grenzen 3145 und 3140 gewonnen werden.
Ich kann somit sagen, dass ich bei diesem Verfahren mehr als die dreifache Anzahl der richtigen Stellen erhalte, ebenso wie bei den vorhergehenden die doppelte; und zwar stellt sich dieses Verhältnis fortwährend ein, in ähnlicher Weise, wie etwa bei größeren Zahlen der Kubus die dreifache Stellenzahl aufweist." ([24], S. 85-87.)

Von al-Biruni bis J. H. Lambert

Die Methoden der Zurückführung der Berechnung des Kreisumfangs auf die Berechnung der Umfänge der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke - nach Antiphon, Archimedes, Huygens - ließ sicher den Gedanken aufkommen, dass Umfang und Durchmesser eines Kreises inkommensurabel seien.

Al-Kasi wusste, dass sein π-Wert zwar wesentlich genauer sei als der von Archimedes, doch "die gesamte Wahrheit dieser Dinge wisse niemand außer Allah". ([13], S. 319.)
Der Choresmier Al-Biruni (973-1048) hatte es bereits früher in seinem "Canon Masudicus" geäußert:

"Umfang und Durchmesser eines Kreises stehen in einem Verhältnis; es ist dies das Verhältnis der Maßzahl des Kreisumfangs zur Maßzahl des Durchmessers, und dieses Verhältnis ist irrational." ([13], S. 250.)

Der aus Cordoba stammende jüdische Denker Moses Maimonides (1135 bis 1204) schrieb in seiner um 1190 in arabischer Sprache verfassten philosophischen Abhandlung "Wegweiser der im Irrtum Befindlichen", dass man $\sqrt{5000}$ ebensowenig genau berechnen könne wie das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser, denn "man erreiche hier nie die Grenze der Rechnung". ([13], S. 319.)

Man fand im Laufe der Jahre die verschiedensten genauen analytischen Darstellungen für π, doch der Beweis der Irrationalität gelang erst im 18. Jahrhundert.

Der französische Jurist und Mathematiker Vieta (1540-1603) führte (1593), wie er selbst anmerkte, einen zuerst von Antiphon ausgesprochenen Gedanken in der angegebenen Weise wirklich aus und gelangt zu dem Resultat, dass der Kreis mit dem Durchmesser 1 den Flächeninhalt $(\pi/4 =)$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}...}}}}$$

besitzt. (Im Nenner steht ein unendliches Produkt, dessen Konvergenz erst 1891 F. Rudio bewies.) Der englische Mathematiker John Wallis (1616-1703) fand 1659 das unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot ...$$

Der englische Mathematiker Lord Brouncker (1620-1684) ermittelte den folgenden unendlichen Kettenbruch:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + ...}}}}$$

Der Universalgelehrte G. W. Leibniz (1646-1716) gab 1673 die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - ...$$

an. Diese ergibt sich aus der wichtigen arctan-Reihe, die der Professor der Mathematik in St. Andrews, J. Gregory (1638-1675), im Jahre 1670 fand (für $x = 1$, also $\arctan x = \frac{\pi}{4}$):

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - ... \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

Setzt man $x = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird $\arctan x = \frac{\pi}{6}$; es folgt

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \frac{1}{3^{11} \cdot 11} + ...\right)$$

Aus dieser Reihe berechnete der englische Astronom A. Sharp (1651-1742) um 1700 die Zahl π auf 72 Dezimalen.
Die Entwicklung des Arcustangens in eine Potenzreihe und deren Anwendung auf die Berechnung von $\pi/4$ (in der von Leibniz angegebenen Form) sind übrigens schon im 15./16. Jahrhundert von indischen Mathematikern (z. B. Nilakantha) angegeben worden ([13], S. 167 ff.).

In seinem Buch "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" (Zweiter Teil. Erster Abschnitt) ([17]) gab J. H. Lambert (1728 bis 1777), Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, im Kapitel V "Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen". Im § 9 heißt es zunächst:

"Ob das Verhältnis des Diameters zum Umkreise durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, ist, meines Wissens, noch nicht erörtert. Sturm (J. Ch. Sturm, 1635-1703) hat zwar diese Frage zu verneinen gesucht: allein sein Beweis ist mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen gibt, deren Summe rational ist, ungeachtet alle Glieder rational sind.
Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, so kann es immer noch Leute geben, die mit Aufsuchung solcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüsse dergleichen auf die Bahn bringen ...

Wenn auch das Verhältnis des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken ließe, so kann man ... erweisen, dass es ein sehr großer Bruch sein müsse ... (So) fand ich für das Verhältnis des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse:

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33 102	:	103 993
33 215	:	104 348
66 317	:	208 341
99 532	:	312 689
265 381	:	833 719
364 913	:	1 146 408

1 360 120	:	4 272 943
1 725 033	:	5 419 351
25 510 582	:	80 143 857
52 746 197	:	165 707 065
78 256 779	:	245 850 922
131 002 976	:	411 557 987
340 262 731	:	1 068 966 896
811 528 438	:	2 549 491 779
1 963 319 607	:	6 167 950 454
4 738 167 652	:	14 885 392 687
6 701 487 259	:	21 053 343 141
567 663 097 408	:	1 783 366 216 531
1 142 027 682 075	:	3 587785 776 203
1 709 690 779 483	:	5 371 151 992 734
2 851 718 461 558	:	8 958 937 768 937
107 223 273 857 129	:	336 851 849 443 403
324 521 540 032 945	:	1 019 514 486 099 146 etc.

Von diesen Verhältnissen ist nun jedes folgende genauer als das vorhergehende, und zwischen denselben fällt kein rationales Verhältnis, das genauer wäre, als das nächst größere unter den hier angegebenen. Demnach, wenn auch das Verhältnis des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen genau sollte ausgedrückt werden können, so müssten diese Zahlen notwendig größer als die letzten

$$324521540032945 : 1019514486099146$$

von den hier angegebenen sein. Diese zwei Zahlen geben die Ludolphische bis auf die 25te Dezimalstelle."

Lambert knüpft nun an eine von Euler gegebene Kettenbruchentwicklung an:

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \ldots}}}}}}}$$

um hieraus die beiden unendlichen Kettenbrüche

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x} + \cfrac{1}{\frac{10}{x} + \cfrac{1}{\frac{14}{x} + \ldots}}}} \qquad \text{und} \qquad \tan v = \cfrac{1}{\frac{1}{v} - \cfrac{1}{\frac{3}{v} - \cfrac{1}{\frac{5}{v} - \cfrac{1}{\frac{7}{v} - \ldots}}}}$$

herzuleiten.
Aus diesen folgen die beiden Sätze:

(1) Ist x eine von Null verschiedene rationale Zahl, so ist e^x niemals rational.
(2) Ist x eine von Null verschiedene rationale Zahl, so ist $\tan x$ niemals rational.

Aus $\tan \pi/4 = 1$ ergibt sich dann die Irrationalität von π.
Eine Aussage über die Irrationalität gewisser Kettenbrüche muss die Lambertschen Sätze ergänzen, um den Beweis der Irrationalität von π als vollständig anzuerkennen.
Die Aussage bewies später A.-M. Legendre (1752-1833).

Von Euler bis Lindemann

Der Schweizer Mathematiker L. Euler (1707-1783), der vor allem in Berlin und St. Petersburg wirkte, fand 1739 erste Zusammenhänge zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion.
In einem Brief vom 18. Oktober 1740 teilte er Johann Bernoulli (1667-1748) die Formel

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

mit. Einen schon von R. Cotes (1682-1716) im Jahre 1714 gefundenen Satz hat Euler wiederentdeckt und 1748 in der klassischen Schrift "Einleitung in die Analysis des Unendlichen" publiziert:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Setzt man $x = \pi$, so folgt $e^{i\pi} = -1$ oder

$$e^{2\pi i} = 1$$

eine Beziehung zwischen den mathematischen Konstanten $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und π, aus der später die genauere Natur der Zahl π und damit die Unmöglichkeit des Kreisquadraturproblems erkannt werden konnte.

Mit dem von Lambert und Legendre gegebenen Beweis der Irrationalität von π war die Natur der Zahl π zwar in gewisser Weise erkannt, doch die Möglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal (in endlich vielen Schritten), also die Möglichkeit der Konstruktion einer Strecke der Länge π noch nicht ausgeschlossen, da es ja auch irrationale Zahlen α gibt, so dass Strecken der Länge α mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Es muss für die Unmöglichkeit noch gezeigt werden, dass π nicht durch Verschachtelung von Quadratwurzelausdrücken darstellbar ist. Bereits Euler, Lambert, Legendre vermuteten eine noch stärkere Aussage:
"Es ist wahrscheinlich, dass die Zahl π: nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, d. h. dass sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind. Aber es scheint schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen. Wir können nur zeigen, dass auch noch das Quadrat von π eine irrationale Zahl ist." (Legendre [24], S. 166.)

Es sei bemerkt, dass man bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts noch überhaupt kein Beispiel von nichtalgebraischen, also transzendenten Zahlen kannte. Erst 1844 entdeckte J. Liouville (1809-1882) in Paris die ersten transzendenten Zahlen. 1873 erkannte der französische Mathematiker Ch. Hermite (1822-1901) die Transzendenz von e.

Im Jahre 1882 konnte endlich der deutsche Mathematiker F. Lindemann (1852-1939) in den Berichten der Berliner Akademien mitteilen, dass π eine transzendente Zahl ist ([18]). Dies folgt aus dem folgenden Satz, der den ersten der oben zitierten Lambertschen Sätze verallgemeinert:

"Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebraisch irrationale Zahl, so ist e^z immer transzendent." ([18], S. 681.)

Nun ist aber nach Euler $e^{\pi i} = -1$ rational, folglich kann πi, also auch π nicht algebraisch sein.
Lindemann erzielte sein Resultat "durch direkte Erweiterung der Schlüsse, vermittelst welcher Hr. Hermite ... bewiesen hat, dass die Basis der natürlichen Logarithmen eine transzendente Zahl ist." ([18], S. 679.)

Der Beweis ist ausführlicher in Lindemanns Aufsatz "Über die Zahl π" in den "Mathematischen Annalen" dargestellt ([19]).

"Bei der Vergeblichkeit der so außerordentlich zahlreichen Versuche, die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt.
Jede mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktion lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Koeffizienten hat, während die Koeffizienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind.

Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadrieren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind.
Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises dartun, wenn man nachweist, dass die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Koeffizienten sein kann. Den dafür nötigen Beweis zu erbringen" ([19], S. 213) ist zuerst Lindemann gelungen.

Literatur

[1] O. Becker, Zur Textgestaltung des eudemischen Berichts über die Quadratur der Möndchen durch Hippokrates von Chios. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abt. B.) 3 (1936), 411-419.

[2] O. Becker und J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik. Athenäum-Verlag, Bonn 1951.

[3] O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Verlag Karl Alber, Freiburg/München 1954.

[4] E. Beutel, Die Quadratur des Kreises. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

[5] Bibel. Deutsche Ausgabe mit den Erläuterungen der Jerusalemer Bibel. St. Benno-Verlag GmbH, Leipzig 1970.

[6] L. Bieberbach, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Verlag Birkhäuser, Basel 1952.

[7] L. N. H. Bunt, P. S. Jones und J. D. Bedient, The historical roots of elementary mathematics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.

[8] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. 4. Aufl. Verlag B. G. Teubner, Leipzig, Berlin 1922.

[9] F. Cimpan, I storia numarului π. Bucuresti 1965 (russ. Übers. Moskau 1971).

[10] Euklid, Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1975.

[11] G. Hessenberg, Transzendenz von e und π. Ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkt aus. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig/Berlin 1912.

[12] C. G. J. Jacobi, Brief an A. v. Humboldt vom 7.(?) 4. 1847. Zentralarchiv d. AdW der DDR, Berlin, Nachlass Dirichlet, Nr. 57/III.

[13] A. P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).

[14] L. Koenigsberger, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1904.

[15] W. R. Knorr, Archimedes and the measurement of the circle: A new interpretation. Archive for History of Exact Sciences 15 (1976), 115-140.

[16] F. von Krbek, Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik. 3. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1962.

[17] J. H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Zweyter Theil. Erster Abschnitt. Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin 1770.

[18] F. Lindemann, Über die Ludolphsche Zahl. Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften Jahrgang 1882, S. 679-682.

[19] F. Lindemann, Über die Zahl π. Math. Ann. 20 (1882), 213-225.

[20] C. Müller, Die Mathematik der Sulvasûtra. Eine Studie zur Geschichte indischer Mathematik. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 7 (1930), 173-204.

[21] O. Neugebauer und W. Struve, Über die Geometrie des Kreises in Babylonien. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abt. B) 1 (1929), 81-92.

[22] O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Erster Band: Vorgriechische Mathematik. Verlag von Julius Springer, Berlin 1934.

[23] O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[24] F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1892.

[25] F. Rudio, Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes. Bibl. math. (3), 8 (1908), 13-22.

[26] F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und Deutsch. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Verlag von B. G. Teubner Leipzig 1907.

[27] P. Schreiber, Theorie der geometrischen Konstruktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[28] A. Seidenberg, The ritual origin of geometry. Archive for History of Exact Sciences 1 (1962), 488-527.

[29] A. Seidenberg, On the area of a semi-circle. Archive for History of Exact Sciences 9 (1972), 171-211.

[30] A. Seidenberg, The origin of mathematics. Archive for History of Exact Sciences 18 (1978), 301-342.

[31] M. Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum. Vorlesungen in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, über die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften in Ägypten, Mesopotamien, Indien, Hellas und in der hellenistischen Welt. Philo Press Amsterdam (Neudruck 1973 der Ausgabe Berlin 1909).

[32] E. S. Stamatis, Eucleideia. Mathematica Balkanica 1 (1971), 239-242.

[33] A. D. Steele, Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abt. B) 3 (1936), 287-369.

[34] D. J. Struik, Abriss der Geschichte der Mathematik. 7. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Amerikanischen und Russischen).

[35] J. Topfke, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. IV. Band: Ebene Geometrie. 2. Aufl. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co, Berlin/Leipzig 1923.

[36] B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. 2. Aufl. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966.

[37] H. Wussing, Mathematik in der Antike. Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft. 2. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

[38] H. Wussing und W. Arnold (Hrsg.), Biographien bedeutender Mathematiker. 2. Aufl. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1978.

1 Die Existenz transzendenter Zahlen

1.1 Der Begriff der algebraischen und der transzendenten Zahlen

Definition 1. Eine komplexe[3] Zahl α heißt algebraisch, wenn eine Gleichung der Form

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_0 = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ existiert, für die α eine Lösung ist.

Beispielsweise ist jede rationale zahl p/q (p und q ganz) algebraisch, weil sie die Gleichung $qx - p = 0$ löst. Die Zahl

$$a + \sqrt[3]{b}, \qquad b \geq 0 \tag{2}$$

wobei a und b rationale Zahlen sind, ist ebenfalls algebraisch. Tatsächlich ist (2) eine Lösung der Gleichung

$$(x-a)^3 - b = 0 \qquad \text{d.h. der Gleichung} \qquad x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - (a^3 + b) = 0$$

Die komplexen Zahlen

$$a + bi, \qquad a + \sqrt{b}i$$

mit rationalen Zahlen a und b sind algebraische Zahlen, weil sie Lösungen der Gleichungen

$$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 - 2ax + (a^2 + b) = 0$$

sind. Um das einzusehen, genügt es, die Gleichungen in der Form

$$(x-a)^2 + b^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (x-a)^2 + b = 0$$

zu schreiben. Ist schließlich n eine positive ganze Zahl, so ist

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} \tag{3}$$

eine algebraische Zahl; nach der Formel von Moivre gilt nämlich

$$\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

und folglich löst eine Zahl der Form (3) die Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

Im folgenden werden wir annehmen, dass alle Koeffizienten der Gleichung (1) ganze Zahlen sind. Sind die Koeffizienten rational, so genügt es, die Gleichung (1) mit dem Hauptnenner ihrer Koeffizienten zu multiplizieren, um eine Gleichung mit ganzzahligen

[3] Für den Leser, der komplexe Zahlen nicht kennt, werden die Grundtatsachen über diese Zahlen in Anhang 1 dargestellt.

Koeffizienten zu erhalten, die der Ausgangsgleichung äquivalent ist.

Ist in (1) der Koeffizient $a_0 = 1$ und sind die übrigen Koeffizienten ganze Zahlen, so wird eine Lösung α einer solchen Gleichung ganze algebraische Zahl genannt. Beispielsweise sind $a + bi$ und $a + \sqrt{b}i$ ganze algebraische Zahlen, wenn a und b ganze Zahlen sind. Die Zahl $\cos \pi/n + i \sin \pi/n$ ist für jedes ganzzahlige n eine ganze algebraische Zahl.

Definition 2. Jede nichtalgebraische Zahl heißt transzendent. Mit anderen Worten, α ist eine transzendente Zahl, wenn keine einzige Gleichung der Form (1) mit rationalen (ganzzahligen) Koeffizienten existiert, für die α Lösung sein würde.

Es ist leicht nachzuprüfen, ob eine gegebene Zahl Lösung einer bestimmten, in der Form (1) gegebenen Gleichung ist, aber nachzuweisen, dass sie nicht Lösung irgendeiner Gleichung der Form (1) sein kann, ist schwierig und manchmal sogar unmöglich. Im folgenden werden wir jedoch mit Hilfe elementarer Methoden beweisen, dass transzendente Zahlen existieren.

1.2 Äquivalente Mengen

Der Mengenbegriff ist einer der sogenannten primären (mathematischen) Begriffe, d. h., man kann ihn nicht mit Hilfe anderer noch einfacherer Begriffe definieren. Den Terminus "Menge" werden wir immer dann verwenden, wenn wir Objekte mit bestimmten gemeinsamen Eigenschaften betrachten. Beispielsweise kann man von der Menge der Stühle in der Schule, der Menge der Rinder einer Herde, der Menge der natürlichen Zahlen, der Menge der reellen Zahlen usw. sprechen.

Definition 3. Zwei Mengen heißen äquivalent (gleichmächtig), wenn man zwischen den Elementen dieser Mengen eine eineindeutige Zuordnung herstellen kann, d.h., wenn jedem Element der einen Menge ein und nur ein Element der anderen Menge zugeordnet werden kann und umgekehrt.

So sind z.B. folgende Mengen äquivalent: die Menge der Schüler einer Klasse und die Menge der Zahlen, mit denen ihre Familiennamen im Klassenbuch durchnummeriert sind; die Menge der positiven ganzen Zahlen und die Menge der negativen ganzen Zahlen; die Menge der Kreise mit dem Zentrum in einem gegebenen Punkt und die Menge der positiven reellen Zahlen; die Menge der Punkte einer Strecke AB, deren Länge gleich 1 ist, und die Menge der Punkte einer Strecke CD, deren Länge gleich einer vorgegebenen positiven Zahl k ist.
Wir betrachten die letzten beiden Beispiele etwas näher.

Die erwähnte Menge der Kreise ist tatsächlich äquivalent der Menge der positiven reellen Zahlen, weil jeder Kreis einer bestimmten positiven Zahl, nämlich seiner Radiuslänge, entspricht, und umgekehrt entspricht jeder positiven Zahl (bei gegebenem Mittelpunkt) ein Kreis, dessen Radius gleich dieser Zahl ist.

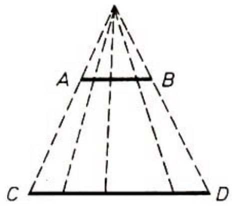


Abb. 1

Eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten zweier Strecken kann man auf graphischem Wege herstellen, wie das in Abb. 1 gezeigt ist, oder analytisch mit Hilfe der Formeln

$$y = a + (b - a)x \qquad , \qquad x = \frac{y - a}{b - a}$$

die sich als eineindeutige Beziehungen zwischen den Zahlen x $(0 \leq x \leq 1)$ und y $(a \leq y \leq b)$ erweisen.

Das letzte Beispiel zeigt, dass eine Menge zu einer ihrer Teilmengen äquivalent sein kann. So ist die Menge der natürlichen Zahlen äquivalent zur Menge der geraden Zahlen:
Jeder natürlichen Zahl n entspricht eine gerade Zahl $2n$. Wir bemerken folgendes: Endliche Mengen, d. h. Mengen, die eine endliche Anzahl von Elementen besitzen, sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten. (Der Beweis sei dem Leser überlassen !)

Die Äquivalenz zweier Mengen ist die Verallgemeinerung der uns gut bekannten Nummerierung. Eine solche Nummerierung bedeutet ja nichts anderes als die Herstellung einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen der betrachteten Menge und der Zahlenreihe 1, 2, ..., n (Nummern).

1.3 Abzählbare und überabzählbare Mengen

Nach den endlichen Mengen, mit denen man täglich zu tun hat, sind die sogenannten abzählbaren Mengen die einfachsten.

Definition 4. Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen äquivalent ist.

Abzählbarkeit bedeutet also nichts anderes als die Möglichkeit, die Elemente einer Menge zu zählen bzw. zu nummerieren. Beispiele für abzählbare Mengen sind die Menge der natürlichen Zahlen; die Menge der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2n$, ... (gerade Zahlen); die Menge der Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$; die Menge der Zahlen $1!, 2!, ..., n!...$. Später betrachten wir kompliziertere Beispiele für abzählbare Mengen, jetzt jedoch zeigen wir die Existenz überabzählbarer, d. h. nicht abzählbarer, Mengen.

Satz 1. Die Menge derjenigen reellen Zahlen x, die der Bedingung $a \leq x \leq b$, $a \neq b$, genügen, ist eine überabzählbare Menge.

Wir betrachten hier nur den Fall $a = 0$, $b = 1$, weil wir bereits in § 2 gezeigt haben, dass die Mengen aller Zahlen x mit $a \leq x \leq b$ und aller Zahlen y mit $0 \leq y \leq 1$ äquivalent sind.

Für den Beweis benutzen wir die Tatsache, dass jede reelle Zahl C als unendlicher Dezimalbruch geschrieben werden kann:

$$C = C_0, C_1C_2...C_n...$$

Eine solche Darstellung der reellen Zahlen ist eindeutig, wenn die Schreibweise in Form eines periodischen Dezimalbruches mit der Periode 9 nicht zugelassen wird (so schreiben wir 21,00 und nicht 20,99...). Außerdem benutzen wir die Tatsache, dass zwei unendliche Dezimalbrüche voneinander verschieden sind, wenn sie bereits zwei ungleiche Dezimalen derselben Ordnung enthalten z. B. 2,34156... $\neq$ 2,34146...

Beweis. Wir werden die Behauptung indirekt beweisen und nehmen dazu an, dass die Menge aller Zahlen zwischen Null und Eins abzählbar ist. Das bedeutet, dass die vorgegebene Menge in Form eines Schemas, das jedes Element dieser Menge enthält, geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n... \\ a_2 = 0, \beta_1\beta_2\beta_3...\beta_n... \\ ... \\ a_n = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n... \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Wir betrachten nun die Zahl

$$d = 0, \overline{\alpha}_1\overline{\beta}_2...\overline{\alpha}_n... \qquad (2)$$

wobei die Ziffer $\overline{\alpha}_1$ beliebig sein kann, aber ungleich α_1 sein muss, die Ziffer $\overline{\beta}_2$ beliebig sein kann, aber ungleich β_2 sein muss usw.
Es ist klar, dass $0 \leq d \leq 1$ und d nicht gleich einer der Zahlen aus (1) ist. Folglich enthält das Schema (1) entgegen der Voraussetzung nicht jede Zahl zwischen Null und Eins. Der aufgetretene Widerspruch bestätigt die Richtigkeit des Satzes.

Gerade dieser Satz ermöglicht, die Existenz transzendenter Zahlen nachzuweisen.

1.4 Sätze über abzählbare Mengen

Eine der Grundoperationen in der Mengenlehre ist die Addition (Vereinigung) von Mengen.

Definition 5. Eine Menge M heißt Summe oder Vereinigung der Mengen A, B, ..., wenn jedes Element von M zu mindestens einer der Mengen A, B, ... gehört, wobei jedes Element jeder der Mengen A, B, ... Element der Menge M ist.

Beispielsweise ist die Menge der Schüler einer Oberschule die Vereinigung der Mengen der Schüler der 1., 2., ..., 10. Klassen dieser Schule; die Menge der natürlichen Zahlen ist die Vereinigung der Mengen derjenigen natürlichen Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind (Primzahlen), der Menge der durch 2 teilbaren Zahlen, der Menge der durch 3 teilbaren Zahlen usw.

Die Addition (Vereinigung) von Mengen wird mit dem Symbol $\cup$ bezeichnet:

$$A \cup B, \quad A \cup B \cup C, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Satz 2. Die Vereinigung abzählbar vieler unendlicher Mengen ist eine abzählbare Menge.

Beweis. Es seien $M_1, M_2, ..., M_k$ endliche Mengen, die n_1 bzw. $n_2, ..., n_k, ...$ Elemente haben mögen. Wir bezeichnen die Elemente der Mengen M_1 mit $a_1, a_2, ..., a_{n_1}$; die Elemente der Menge M_2 die von den Elementen der Menge M_1 verschieden sind, mit $a_{n_1+1}, ..., a_{n_1+\overline{n}_2}$ (es ist $\overline{n}_2 = 0$, wenn jedes Element von M_2 auch Element der Menge M_1 ist, und $\overline{n}_2 = n_2$, wenn die Mengen M_1 und M_2 keine gemeinsamen Elemente enthalten), die Elemente der Menge M_3 bezeichnen wir mit $a_{n_1+\overline{n}_2+1}, ..., a_{n_1+\overline{n}_2+\overline{n}_3}$ usw.
Jetzt ist einerseits klar, dass die Menge aller dieser Elemente $a_1, a_2, ..., a_m, ...$ abzählbar ist, und andererseits, dass sie gleich der Vereinigung der Mengen $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ ist (die somit abzählbar ist).

Als ein wichtiges Beispiel für die Anwendung des Satzes zeigen wir folgende Behauptung:

Satz 3. Die Menge der positiven und negativen rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Wir nennen die Zahl $|a| + |b|$ Höhe der Zahl a/b (a und b seien ganze Zahlen) und bemerken, dass die Menge der rationalen Zahlen mit gegebener Höhe n endlich ist. So haben z. B. nur die Zahlen $\pm\frac{3}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{1}{3}$ die Höhe 4.

Wir bezeichnen mit M_1 die Menge der rationalen Zahlen mit der Höhe 1 (die Zahl $\frac{0}{1}$), mit M_2 die Menge der Zahlen mit der Höhe 2 (die Zahlen $\pm\frac{1}{1}$), mit M_3 die Menge der Zahlen mit der Höhe 3 (die Zahlen $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}$) usw.
Die Menge aller rationalen Zahlen ist also die Vereinigung der Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$. Nach Satz 2 ist diese Menge abzählbar. Folglich kann man die Menge der rationalen Zahlen durchnummerieren.

Tatsächlich kann man die Menge der positiven rationalen Zahlen durchnummerieren, indem man - wie in Abb. 2 angegeben - das Schema der rationalen Zahlen in Pfeilrichtung durchläuft.

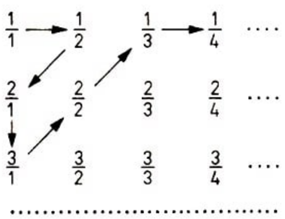


Abb. 2

Werden die positiven rationalen Zahlen mit den Nummern 2, 4, 6, ..., die Zahl 0 mit der Nummer 1 und die negativen rationalen Zahlen mit den Nummern 3, 5, 7, ... bezeichnet, so haben wir mit dieser Nummerierung die gesamte Menge der rationalen Zahlen erfasst.
Satz 2 lässt sich leicht verallgemeinern.

Satz 4. Die Vereinigung abzählbar vieler unendlicher Mengen ist eine abzählbare Menge.

Der Leser möge den Beweis dieses Satzes selbst führen, indem er die Elemente der Mengen M_n mit $a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{sn}, ...$ bezeichnet und die Zahl $s+n$ als Höhe der Elemente

a_{sn} ansieht. Man kann dann ein ebensolches Schema wie in Abb. 2 bilden.

Satz 5. Die Menge der irrationalen Zahlen y, für die $a \leq y \leq b$, $a \neq b$, gilt, ist überabzählbar.

Wenn die Menge der irrationalen Zahlen y $(a \leq y \leq b)$ tatsächlich abzählbar wäre, so wäre die Vereinigung dieser Menge mit der Menge der rationalen Zahlen x $(a \leq x \leq b)$, deren Abzählbarkeit bereits gezeigt wurde (Satz 3), nach Satz 4 abzählbar; das ist aber nach Satz 1 unmöglich.

1.5 Die Existenz transzendenter Zahlen

In diesem Paragraphen weisen wir die Existenz transzendenter Zahlen nach, indem wir die Überabzählbarkeit der Menge der transzendenten Zahlen beweisen.

Satz 6. Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Die Menge der algebraischen Zahlen kann in der Tat als Vereinigung einer Menge M_1 algebraischer Zahlen, der Lösungen aller möglichen Gleichungen ersten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, einer Menge M_2 algebraischer Zahlen, der Lösungen aller möglichen Gleichungen zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, usw. betrachtet werden.
Nach Satz 4 genügt es, die Abzählbarkeit jeder der Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$, ... zu beweisen.

Wir betrachten die Menge M_k der Lösungen der Gleichung

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_{k-1}x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Zahl

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_k| \qquad (2)$$

nennen wir Höhe dieser Gleichung. Da die Zahlen $a_0, a_1, ..., a_k$ ganzzahlig sind, gibt es nur eine endliche Menge solcher Zahlen mit der Summe (2), die gleich einer vorgegebenen ganzen Zahl N ist.
Die Gleichung (1) besitzt nicht mehr als k verschiedene Lösungen. Folglich ist die Menge M_k der algebraischen Zahlen, die Lösungen aller möglichen Gleichungen k-ten Grades mit der Höhe N sind, endlich und die Menge aller algebraischen Zahlen, die Lösungen von Gleichungen k-ten Grades sind, als Vereinigungsmenge der Lösungen solcher Gleichungen mit den Höhen $1, 2, ..., N$, abzählbar. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 7. Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar. Darüber hinaus ist auch die Menge der reellen transzendenten Zahlen überabzählbar.

Tatsächlich ist die (überabzählbare) Menge der reellen Zahlen die Vereinigung (der abzählbaren Menge) der algebraischen Zahlen und der Menge der transzendenten Zahlen. Wäre die letztgenannte Menge abzählbar, so wäre auch die Menge der reellen Zahlen abzählbar; das ist aber unmöglich, und der Satz ist damit bewiesen.

Dieser Beweis stammt von Georg Cantor (1873).[4]

1.6 Über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wir zeigen hier, dass die Konstruktion einer Strecke der Länge l mit Zirkel und Lineal dann und nur dann möglich ist, wenn l eine algebraische Zahl ist, und damit unmöglich, wenn l eine transzendente Zahl ist. Bevor wir einen entsprechenden Satz beweisen, machen wir einige Bemerkungen.

Bemerkung 1. Im kartesischen Koordinatensystem ist die graphische Darstellung der Gleichung

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

mit von x und y unabhängigen Koeffizienten eine Gerade, und umgekehrt kann die Gleichung einer beliebigen Geraden im kartesischen Koordinatensystem in der Gestalt (1) dargestellt werden, d. h., die Koordinaten jedes Punktes einer gegebenen Geraden erfüllen eine solche Gleichung (1).

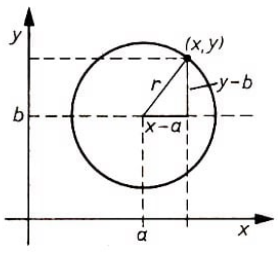


Abb. 3

Bemerkung 2. Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass die Koordinaten x und y jedes Punktes eines Kreises mit dem Mittelpunkt (a, b) (Abb. 3) und dem Radius r die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{2}$$

erfüllen, also durch eine Gleichung der Form

$$x^2 + y^2 + Kx + Ly + M = 0 \tag{3}$$

verbunden sind. Die Gleichung (3) kann auch in der Gestalt

$$\left(x + \frac{K}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{L}{2}\right)^2 = \frac{K^2 + L^2 - 4M}{4} \tag{4}$$

geschrieben werden, wobei der Ausdruck auf der linken Seite von (4) der quadratische Abstand des Punktes (x, y) vom Punkt $\left(-\frac{K}{2}, -\frac{L}{2}\right)$ ist. Somit ist umgekehrt die graphische Darstellung der Gleichung (3) der geometrische Ort der Punkte, die vom gegebenen Punkt gleich weit entfernt sind, d. h. ein Kreis.[5]

[4] Georg Cantor (1845-1918), deutscher Mathematiker, Begründer der Mengenlehre; geb. in Petersburg. (Nach dem Studium in Zürich und Berlin promovierte er 1867 in Berlin und habilitierte sich 1869 in Halle, wirkte von 1869 bis 1913 in Halle. 1874 erschien die erste Abhandlung über Fragen der Mengenlehre. Im Jahre 1918 starb Cantor in Halle.

[5] Wir setzen hier $I = \frac{K^2+L^2+4M}{4} > 0$ voraus. Ist $I = 0$, so fällt der Kreis mit einem Punkt zusammen; für $I < 0$ können x und y nicht reellwertig sein, man spricht dann von einem imaginären Kreis.

Folglich hat also im rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung jedes Kreises die Form (3), und umgekehrt ist die graphische Darstellung von (3) ein Kreis.

Bemerkung 3. Das Lösen des Systems der Gleichungen (1) und (3) bedeutet das Auffinden eines Punktes, dessen Koordinaten beide Gleichungen erfüllen, d. h. das Auffinden eines Punktes, welcher sowohl auf der Geraden als auch auf dem Kreis liegt, also eines Schnittpunktes dieser Kurven.
Umgekehrt muss man, um analytisch einen Schnittpunkt von Gerade und Kreis zu finden, das System der Kurvengleichungen (1) und (3) lösen.

Definition 6. Eine reelle Zahl α heißt Zahl vom Typ A_1, wenn sie Lösung einer quadratischen Gleichung (oder einer linearen Gleichung) mit rationalen Koeffizienten ist; Zahl vom Typ A_2, wenn sie Lösung einer quadratischen Gleichung (oder einer linearen Gleichung) mit reellen Koeffizienten vom Typ A_1 ist, ..., Zahl vom Typ A_k, wenn sie Lösung einer quadratischen Gleichung (oder einer linearen Gleichung) mit reellen Koeffizienten vom Typ A_{k-1} ist.

Beispielsweise sind die Zahlen $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ Zahlen vom Typ A_1, da sie die Gleichung

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

lösen, und die Zahlen $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$, $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ sind Zahlen vom Typ A_2, da sie Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 4x + (1+2) = 0 \tag{5}$$

sind.

Satz 8. Jede Zahl α vom Typ A_k, wobei k eine natürliche Zahl ist, ist eine algebraische Zahl.

Beweis. Bekanntlich kann man die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

in der Form

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

schreiben. Für den Fall der Zahlen vom Typ A_1 brauchen wir nichts zu beweisen.
Die Zahlen vom Typ A_2 sind Lösungen der Gleichung

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \tag{8}$$

deren Koeffizienten ihrerseits Lösungen der Gleichung (6) sind. Folglich kann man (8) in der Form

$$\frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1}}{2\alpha_1}x^2 + \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}x + \frac{-\beta_3 \pm \sqrt{\beta_3^2 - 4\alpha_3\gamma_3}}{2\alpha_2} = 0 \tag{9}$$

schreiben, wobei $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ rationale Zahlen sind.

Wenn wir in der Gleichung (9) die Irrationalität beseitigen können, erhalten wir eine Gleichung (hinreichend hohen Grades) mit rationalen Koeffizienten, d.h., die Zahlen vom Typ A_2 sind algebraische Zahlen. Außerdem ist klar, dass diese Zahlen als Lösungen der Gleichung (9) aus rationalen Zahlen mit Hilfe einer bestimmten Anzahl von arithmetischen Operationen und Ziehen der Quadratwurzeln gebildet werden.

Wir nehmen nun an, dass die Koeffizienten der Gleichung (8) zum Typ A_2 gehören. Indem wir analog argumentieren, kommen wir zu der Schlussfolgerung, dass die Zahlen vom Typ A_3 algebraische Zahlen sind, usw.

Zusammenfassend können wir sagen: Gehört α zum Typ A_k, dann ist α Lösung einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten aus rationalen Zahlen mit Hilfe einer bestimmten Anzahl geeigneter arithmetischer Operationen und Ziehen der Quadratwurzeln gebildet werden.
Mit Hilfe von aus der Schule bekannten Verfahren kann man die Irrationalität beseitigen. In diesem Fall erhalten wir eine algebraische Gleichung (höheren Grades) mit rationalen Koeffizienten, für die α eine Lösung ist. Folglich ist α eine algebraische Zahl.

Wenn z. B. in Gleichung (5) die Irrationalität beseitigt wird, erhalten wir die Gleichung

$$x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 8x - 1 = 0$$

So sind die Zahlen $-2 + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, $-2 - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$ algebraische Zahlen.

Satz 9. Eine Strecke der Länge α kann dann und nur dann mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn α eine Zahl vom Typ A_k ist, wobei k eine natürliche Zahl ist.

Folgerung. Ist α eine transzendente Zahl, so ist es unmöglich, eine Strecke der Länge α mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Beweis. Hinlänglichkeit. Ist α Lösung einer quadratischen Gleichung, so kann man mit Sicherheit eine Strecke der Länge α mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn eine solche Konstruktion für Strecken möglich ist, deren Längen Absolutbeträge der Koeffizienten der Gleichung sind.
Daraus folgt, dass eine Strecke der Länge α konstruierbar ist, wenn α eine Zahl vom Typ A_1 ist. Dann kann man aber dasselbe sagen, wenn α eine Zahl vom Typ A_2 ist, usw.

Notwendigkeit. Eine Strecke mit Zirkel und Lineal zu konstruieren heißt, durch Konstruktion endlich vieler Geraden und Kreise und Bestimmung der Schnittpunkte der konstruierten Kurven ihre Endpunkte zu finden.
Mit anderen Worten, der Prozess der Konstruktion einer Strecke mit Zirkel und Lineal ist eine endliche Kette von Konstruktionen; jedes Glied dieser Kette bedeutet die Konstruktion der Verbindungsgeraden zweier gegebener Punkte und die Konstruktion eines Kreises mit vorgegebenem Mittelpunkt und vorgegebenem Radius.

Dabei finden wir die angegebenen Punkte mit Hilfe der vorhergehenden Konstruktion. Daher bildet die Konstruktion von Geraden durch Punkte mit rationalen Koordinaten, die Konstruktion von Kreisen, deren Radien und Mittelpunkte durch rationale Zahlen gegeben sind, und außerdem das Auffinden der Schnittpunkte der vorher konstruierten Kurven den ersten Konstruktionsschritt.

Die Gleichungen der konstruierten Geraden und Kreise haben nur rationale Koeffizienten, und folglich sind die Koordinaten ihrer Schnittpunkte Zahlen vom Typ A_1. Die weiteren Konstruktionsschritte führen zu Zahlen vom Typ A_2 (und möglicherweise vom Typ A_1) usw.
Letzten Endes kommen wir zur Zahl α, die dann zum Typ A_k gehört. Damit ist der Satz bewiesen.

1.7 Historische Bemerkungen

Im Verlaufe vieler Jahrhunderte, ja bereits im Altertum, interessierte man sich für Aufgaben. die die Quadratur des Kreises zum Inhalt hatten: Ist es möglich, mit Zirkel und Lineal ein Quadrat zu konstruieren, dessen Fläche gleich der eines gegebenen Kreises ist?

Da die Fläche des Kreises mit dem Radius 1 gleich der Zahl π ist, kann man die Aufgabe auf die Konstruktion einer Strecke der Länge π zurückführen.
Tatsächlich ist ja aus der Schulgeometrie bekannt, dass die Konstruktion einer Strecke der Länge a und die Konstruktion einer Strecke der Länge a^2 gleichzeitig möglich sind.

Der bekannte Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) kam zu der Schlussfolgerung, dass die Aufgabe der Quadratur des Kreises unlösbar ist, und sprach folgende Vermutung aus:

Die Zahl π kann nicht Lösung irgendeiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein. Folglich vermutete Euler die Existenz transzendenter Zahlen und insbesondere die Transzendenz der Zahl π.
Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass die Bezeichnung des Verhältnisses vom Kreisumfang zum Durchmesser mit dem Buchstaben π und der Terminus "transzendente Zahl" von Euler stammen.

Die Eulersche Vermutung über die Existenz transzendenter Zahlen wurde zuerst im Jahre 1844 von dem französischen Mathematiker Joseph Liouville (1809-1882) streng bewiesen; die Transzendenz der Zahl π, und damit folglich auch die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, wurde jedoch erst im Jahre 1882 gezeigt.

Liouville zeigte die Existenz transzendenter Zahlen, indem er folgendes hinreichende, aber nicht notwendige Kriterium für die Transzendenz aufstellte:

Wenn α eine irrationale Zahl ist und drei wachsende Folgen ganzer Zahlen

$$\begin{aligned} p_1, p_2, ..., p_k ... \qquad & (p_k \to \infty \text{ für } k \to \infty), \\ q_1, q_2, ..., q_k ... \qquad & (q_k \to \infty \text{ für } k \to \infty), \\ m_1, m_2, ..., m_k ... \qquad & (m_k \to \infty \text{ für } k \to \infty) \end{aligned}$$

so existieren, dass
$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^{m_k}}$$
gilt, wobei c für alle k eine Konstante ist, so ist α eine transzendente Zahl.

Das Kriterium von Liouville bietet die Möglichkeit, z.B. die Transzendenz der Zahl

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2!}} + \frac{1}{2^{3!}} + ... + + \frac{1}{2^{k!}} + ...$$

festzustellen.
Aus dem Liouvilleschen Kriterium folgt somit die Existenz transzendenter Zahlen; dieses Kriterium beweist jedoch nicht die Überabzählbarkeit der Menge der transzendenten Zahlen.

Der weiter oben dargelegte Cantorsche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen lässt erkennen, dass die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar ist. Da es sich aber um einen reinen Existenzbeweis handelt, gibt er nicht irgendein Kriterium für die Transzendenz und kein konkretes Beispiel für eine transzendente Zahl an.

Das Liouvillesche Kriterium ist jedoch nur begrenzt anwendbar. Es versagt sogar bereits beim Beweis der Transzendenz der Zahlen π und $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.[6]
Die Transzendenz der Zahl e wurde erst im Jahre 1873 von dem französischen Mathematiker Charles Hermite (1822-1901) und die Transzendenz von π im Jahre 1882 von dem deutschen Mathematiker Ferdinand von Lindemann (1852-1939) bewiesen. Die Beweismethoden von Hermite und Lindemann sind spezifische, und ihre Anwendung beim Beweis der Transzendenz anderer Zahlen als der von e und π ist kaum möglich.

Bedeutende Ergebnisse in der Theorie der transzendenten Zahlen erzielten die sowjetischen Mathematiker Aleksander Osipovic Gelfond (1906-1968), Rodion Osievic Kuzmin (1891-1950), Andrej Borusovic Sidlovskij (geb. 1915) und Dmitrij Dmitrievic Morduchaj-Boltovskoj (1876-1952).

1.8 Die Ergebnisse von A. O. Gelfond und R. O. Kuzmin

Auf dem 11. Internationalen Mathematikerkongress (Paris 1900) hielt einer der bedeutendsten Mathematiker, der Göttinger Professor David Hilbert (1862-1943), einen Vortrag, in dem er 23 Probleme formulierte, "deren Untersuchung die weitere Entwicklung der Wissenschaft entscheidend vorantreiben kann".

Zu dieser Zeit waren die Methoden zur Lösung dieser Probleme noch nicht entwickelt, es stand allein die Frage nach der Vervollkommnung alter und der Erarbeitung neuer Methoden in der Mathematik. Die äußerst genaue Formulierung der Probleme, aber auch die Autorität Hilberts führten dazu, dass die Aufmerksamkeit vieler Mathematiker auf diese Probleme gelenkt wurde.

Das siebente Hilbertsche Problem lautet folgendermaßen:

[6] Über die Definition von e siehe Kap. II, § 4.

"Es sei α eine beliebige Zahl ungleich 1 und β eine beliebige algebraische irrationale Zahl.
Welcherart (algebraisch oder transzendent) wird die Zahl α^β sein? Sind insbesondere die Zahlen $2^{\sqrt{2}}$ und e^π transzendent?"[7]

In den Jahren 1929-1930 bewies A. O. Gelfond die Behauptung:
Ist α eine algebraische Zahl ungleich 0 oder 1 und β eine imaginäre quadratische Irrationalität ($\beta = i\sqrt{q}$ mit einer ganzen Zahl $q \geq 1$), so ist α^β transzendent.

Das war zwar ein bedeutender Schritt zur Lösung des Hilbertschen Problems, aber noch nicht seine volle Lösung. So war noch nicht die Antwort auf die Frage nach dem Wesen der Zahlen $2^{\sqrt{2}}$ und e^π gefunden.
Im Jahre 1930 zeigte R. O. Kuzmin, dass die Forderung "$beta$ sei eine nichtreelle Zahl" überflüssig ist, und auf diese Weise wurde die Transzendenz der Zahl $2^{\sqrt{2}}$ hergeleitet.

Im Jahre 1934 gab A. O. Gelfond die vollständige Lösung des siebenten Hilbertschen Problems an.[8]
Es sei erwähnt, dass sowjetische Mathematiker eine Reihe anderer Hilbertscher Probleme ganz oder teilweise lösten oder einen bedeutenden Beitrag zu ihrer Untersuchung leisteten.

Aufgaben

1. Man leite eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten eines Kreises und den Punkten einer Geraden her.

2. Eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ist eine Menge von Elementen, bei der jedem Element eine Nummer (eine natürliche Zahl) zugeordnet ist mit der Bedingung, dass das Element a_2 auf a_1 folgt, a_3 auf a_2 usw.
Wodurch unterscheidet sich eine abzählbare Menge von einer Folge? Kann man auch sagen, dass die Menge

$$..., -2, -1, 1, 2, ... \tag{1}$$

eine Folge ist? Man stelle eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Elementen der Menge (1) und der Menge der natürlichen Zahlen her.

3. Man zeige folgende Behauptung: Aus jeder unendlichen Menge kann man eine abzählbare Menge auswählen.

4. Jedes Element $a(r_1, r_2, ..., r_n)$ einer Menge A wird bestimmt durch Vorgabe ganzer

[7] Die Hilbertschen Probleme, Vortrag "Mathematische Probleme" von David Hilbert, gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress Paris 1900. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Aleksandrov. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 2. Aufl., Leipzig 1979 (Übersetzung aus dem Russischen).

[8] Der Satz "Die Zahl α^β (α algebraisch $\neq 0$, $\neq 1$, β algebraisch irrational) ist transzendent"wurde nicht nur von A. O. Gelfond (Sur le septiéme probléme de D. Hilbert, C. R. Acad. Sc. URSS (2) 2 (1934), 1-6), sondern wenig später (und unabhängig) von Th. Schneider (Transzendenz von Potenzen, J. reine angew. Math. 172 (1934), 65-69) mit völlig anderem Beweis publiziert. Eine von A. O. Gelfond im Jahre 1959 gegebene Übersicht zu Ergebnissen über die Transzendenz von Zahlen wurde dem vorliegenden Text als Anhang 3 (S. 129ff.) hinzugefügt.

Werte der Zahlen $r_1, r_2, ..., r_n$. Man beweise, dass A eine abzählbare Menge ist.

5. In der Mengenlehre werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$a \in A$ (a ist Element der Menge A), $A \subset E$ (die Menge A ist Teilmenge der Menge E; A ist Untermenge), $\overline{A}$ (Komplement der Menge A von E, d. h. $A \subset E$; $\overline{A}$ besteht aus allen Elementen von E, die nicht in A liegen), $A \cap B$ (Durchschnitt der Mengen A und B; das ist die Menge aller gemeinsamen Elemente der Mengen A und B), $\varnothing$ (leere Menge).

Man beweise folgende Beziehungen:

a) Ist $A \subset B$, so gilt $A \cap B = A$, $A \cap B \cap C = A \cap C$, $A \cup B \cup C = B \cup C$.
b) Ist $A \subset B, B \subset C$, so gilt $A \cap B \cap = A$, $A \cup B \cup C = C$.
c) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$.
d) $A \cap (B \cup C) \cup (A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
e) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.
f) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \varnothing$. [9]

6. Man zeige, dass die Zahl

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{1}$$

eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

ist.
Anmerkung. Die Formel (1) heißt Cardanische Formel (Hieronimo Cardano, italienischer Mathematiker (1501-1576)). Wenn man berücksichtigt, dass die dritte Wurzel aus einer Zahl drei verschiedene Werte haben kann, so erhält man gemäß Formel (I) neun Werte, von denen nur drei Wurzeln der Gleichung (2) sind. Man ziehe Schlussfolgerungen für die Algebraizität der Zahl (1).

7. Es seien α bzw. β Lösungen der Gleichungen

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

Man beweise, dass $\alpha + \beta$ Lösung der Gleichung

$$x^4 + 2(p_1 + p_2)x^3 + (p_1^2 + 3p_1p_2 + p_2^2 + 2q_1 + 2q_2)x^2 + (p_1 + p_2)(2q_1 + 2q_2 + p_1p_2)x + (q_2p_2^2 + q_1p_1^2 - 4q_1q_2) = 0$$

ist.
Man bestimme Gleichungen vierten Grades, deren Lösungen $\alpha - \beta$ bzw. $\alpha\beta$ sind.

Hinweis. a) Das Wesentliche der Aufgabe besteht in folgendem:

[9]Anmerkung: Diese Aufgabe enthält im Original Druckfehler und wurde hier korrigiert.

Wenn α und β algebraische Zahlen sind, so folgt unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Wurzeln quadratischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten sind, dass die Zahlen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ ebenfalls algebraisch sind (später wird sich herausstellen, dass diese Voraussetzung unnötig ist).

b) Es seien $\overline{\alpha}$ bzw. $\overline{\beta}$ die Quadratwurzeln der gegebenen Gleichungen. Man stelle eine Gleichung mit den Wurzeln $\alpha + \beta$, $\overline{\alpha} + \beta$, $\alpha + \overline{\beta}$ und $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$ auf.

8. Man beweise folgende Aussage: Ist α eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so ist α^{-1} ebenfalls algebraisch, und folglich ist auch der Quotient zweier algebraischer Zahlen eine algebraische Zahl.

9. Ist folgende Aussage richtig: Die Summe zweier transzendenter Zahlen ist eine transzendente Zahl?

2 Die Exponentialfunktion

2.1 Die Newtonsche Binomialformel

Die bekannten Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad , \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1}$$

sind Spezialfälle der allgemeinen Formel

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}b + \binom{m}{2} a^{m-2}b2 + ... \binom{m}{k} a^{m-k}b^k + ... + b^m \tag{2}$$

wobei m eine natürliche Zahl ist.
Wir führen die Regel für die Berechnung der sogenannten Binomialkoeffizienten

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, ..., \binom{m}{k}, ..., \binom{m}{m-1} \tag{3}$$

ein. Einiges über diese Koeffizienten kann man sofort sagen:
Da a und b auf der linken Seite der Gleichung (2) vertauschbar sind (man sagt, dass der Ausdruck bezüglich a und b symmetrisch ist), müssen sie auch auf der rechten Seite vertauschbar sein. Daraus folgt

$$\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1}, \binom{m}{2} = \binom{m}{m-2}, ..., \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

d. h., in der Reihe der Binomialkoeffizienten (3) sind die von den Enden der Reihe gleich weit entfernten Koeffizienten einander gleich. Wegen

$$(a+b)^m = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{m-\text{mal}}$$

folgt, dass die Koeffizienten (3) positive ganze Zahlen sind. Wir zeigen jetzt die Gültigkeit der Formel

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cot 3 \cdot ... \cdot k} \tag{4}$$

wobei $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p$ ist.
Für $m = 2$ erhalten wir

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

Unter Berücksichtigung der ersten Formel von (1) überzeugen wir uns davon, dass für $m = 2$ die Beziehung (4) gilt. Da aber $(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b)$ ist, ist es zweckmäßig, die Methode der vollständigen Induktion anzuwenden.

Wir zeigen zuerst, dass uns (4) eine Gleichung der Form

$$\binom{m}{s} + \binom{m}{s+1} = \binom{m+1}{s+1} \tag{5}$$

folgt. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\binom{m}{s} + \binom{m}{s+1} &= \frac{m!}{s!(m-s)!} + \frac{m!}{(s+1)!(m-s-1)!} = \frac{m![(s+1)+(m-s)]}{(s+1)![(m+1)-(s+1)]!} \\ &= \frac{(m+1)!}{(s+1)![(m+1)-(s+1)]!} = \binom{m+1}{s+1}\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass (2) für die Werte (4) ihrer Koeffizienten gilt, beweisen wir, dass

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m b + \binom{m+1}{2}a^{m-1}b^2 + ... + \binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k + ... + b^{m+1}$$

bei Anwendung desselben Prinzips (4) der Koeffizientenberechnung gilt.
Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)^m(a+b) \\ &= \left(a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + ...\binom{m}{k}a^{m-k}b^k + ... + b^m\right)(a+b)\end{aligned}$$

Wenn wir die Polynome entsprechend multiplizieren und die freien Glieder zusammenfassen, ergibt sich

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \left(\binom{m}{1}+1\right)a^m b + ... \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right)a^{(m+1)-k}b^k + ... + b^{m+1}$$

Nach Formel (5) erhalten wir dann

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k} \quad , \quad \binom{m}{1} + 1 = m+1 = \binom{m+1}{1}$$

Folglich gilt

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m b + \binom{m+1}{2}a^{m-1}b^2 + ... + \binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k + ... + b^{m+1}$$

was zu beweisen war.

2.2 Einiges aus der Grenzwerttheorie

Wir rufen uns einige Definitionen ins Gedächtnis zurück.

Definition 1. Eine Zahl A heißt Grenzwert einer Zahlenfolge

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{1}$$

wenn zu einer beliebigen, noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl N derart existiert, dass die Ungleichung

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

für jedes n mit $n \geq N$ gilt.
Symbolisch drücken wir diesen Sachverhalt folgendermaßen aus:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Definition 2. Eine Zahl A heißt Grenzwert der Funktion $f(x)$ (an der Stelle $x = a$), wenn zu einer beliebigen, noch so kleinen Zahl ε eine Zahl $\eta > 0$ derart existiert, dass die Ungleichung

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1'}$$

für jedes x mit $|x - a| < \eta$ gilt. Symbolisch schreiben wir

$$A = \lim_{x=a} f(x) \qquad , \qquad A = \lim_{x\to a} f(x)$$

Bemerkung. Die Schreibweise

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x) \qquad , \qquad A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

bedeutet, dass die Ungleichung (1') für $x > M$ bzw. $x < -M$ gilt, wobei M eine positive Zahl ist, die von der vorgegebenen Zahl ε abhängt.

In der Schulmathematik werden folgende Sätze bewiesen:

1. Existieren die Grenzwerte der Summanden und ist die Anzahl der Summanden fest, so existiert der Grenzwert der Summe und ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + ... + k_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + ... + \lim_{n\to\infty} k_n$$
$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + ... + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

2. Existieren die Grenzwerte der Faktoren und ist ihre Anzahl fest, so existiert der Grenzwert des Produktes und ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n \cdot ... \cdot k_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \cdot ... \cdot \lim_{n\to\infty} k_n$$
$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot ... \cdot \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Wenn insbesondere α eine konstante Größe ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n \qquad , \qquad \lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x)$$

3. Existieren sowohl der Grenzwert des Zählers als auch der Grenzwert des Nenners und ist der Grenzwert des Nenners von Null verschieden, so existiert der Grenzwert des

Quotienten und ist gleich dem Grenzwert des Zählers geteilt durch den Grenzwert des Nenners:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\qquad \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$$

4. Der Grenzwert einer Größe, die zwischen zwei anderen liegt, welche den gemeinsamen Grenzwert A besitzen, existiert und ist gleich A, d. h., gilt für alle n (n beliebig gewählt)

$$a_n\leq c_n\leq b_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=A,\qquad \lim_{n\to\infty}b_n=A$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty}c_n=A$$

Gilt analog für jedes x, das genügend nahe bei a liegt,

$$f(x)\leq\varphi(x)\leq F(x)\qquad\text{und}\qquad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}F(x)=A$$

so ist

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$$

5. Ist x_n eine beschränkte Größe $(x_n<M)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$$

Für die weitere Darlegung benötigen wir die folgende Behauptung: Für jeden von n unabhängigen Wert x gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

Beweis. Es sei r eine ganze Zahl und $r+1>2|x|$. Wegen

$$\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{|x|^{n-r}}{(r+1)(r+2)...n}<\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{|x|^{n-r}}{(r+1)^{n-r}}=\frac{|x|^r}{r!}\left(\frac{|x|}{r+1}\right)^{n-r}$$

und

$$|x|<\frac{r+1}{2}\qquad\text{gilt}\qquad\frac{|x|^n}{n!}<\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{1}{2^{n-r}}$$

Die Größe $\frac{|x|^r}{r!}$ hängt nicht von n ab, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-r}}=0$; daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{1}{2^{n-r}}=0$$

Folglich gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

Wir beweisen noch einige Sätze aus der Grenzwerttheorie, die im folgenden benutzt werden.

Satz 1. Jede nach oben (unten) beschränkte nicht fallende (nichtwachsende) Folge besitzt einen Grenzwert.

Die Beschränktheit der Folge

$$a_1, a_2, ..., a_n \tag{3}$$

nach oben bedeutet, dass eine Zahl M derart existiert, dass $a_n < M$, $n = 1, 2, ...$, gilt. Analog definiert man die Beschränktheit nach unten.
Die Folge (3) heißt nicht fallend, wenn

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ...$$

und nicht wachsend, wenn

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ...$$

gilt.

Beweis. Beim Beweis dieses Satzes benutzen wir die Theorie der irrationalen Zahlen. Da es zwei Wege zur Begründung einer Theorie irrationaler Zahlen gibt, geben wir auch zwei Beweise des Satzes an; dazu setzen wir eine nicht fallende, nach oben beschränkte Folge voraus.

I (Auf der Grundlage der Dedekindschen Theorie der irrationalen Zahlen, d. h. der Theorie der Schnitte).
Wir bezeichnen als Rechtsklasse B die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die größer als ein beliebiges Element der Folge (3) sind, und als Linksklasse A die Menge der übrigen rationalen Zahlen, d. h. die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die nicht größer als ein Element der Folge (3) sind.
Da die Folge (3) nach oben beschränkt ist, existieren beide Klassen $A \neq 0$, $B \neq 0$. Offensichtlich ist jede Zahl der Klasse A kleiner als jede beliebige Zahl der Klasse B, und außerdem gehört jede rationale Zahl einer der Klassen A oder B an.
Folglich erhalten wir einen Schnitt in der Gesamtheit der rationalen Zahlen, d. h., es existiert eine einzige reelle Zahl α, die nicht kleiner als jede Zahl aus A und nicht größer als jede Zahl aus B ist. Wir beweisen, dass

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ist.
Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es in der Folge (3) ein Element a_k, so dass

$$\alpha - a_k < \varepsilon \tag{4}$$

gilt; denn wenn es ein solches Element nicht gäbe, so hätten wir

$$\alpha - a_k \geq \varepsilon \qquad , \qquad a_k \leq \alpha - \varepsilon < \alpha$$

für jedes k. Aber in diesem Fall würde die Zahl α die Klasse A nicht von der Klasse B trennen, was der Definition von α widersprechen würde.

Folglich ist die Ungleichung (4) richtig. Da die Folge (3) nicht fallend ist, gilt $a_n \geq a_n$ für $n \geq k$, und aus (4) ergibt sich $\alpha - a_n < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

II (Auf der Grundlage der Definition der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche). Wir nehmen an, dass die Folge (3) durch eine ganze Zahl M nach oben beschränkt ist (andernfalls würden wir M durch die nächstgrößere ganze Zahl ersetzen).
Es sei m die größte ganze Zahl, die kleiner als a_1 ist. Dann folgt

$$m \leq a_n \leq M, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Wir betrachten die Zahlen $m, m+1$, ..., $M-1, M$. Es sei $c+1$ die erste dieser Zahlen, die nicht kleiner ist als jedes a_n (im Grenzfall ist $c + l = M$).
Wir gehen davon aus, dass man ein Element a_k finden kann, so dass $a_k \geq c$ gilt. In diesem Fall erhält man aber die Ungleichung $a_n \geq c$ für $n \geq k$. Schließlich ist $c \leq a_n \leq c+1$ für $n \geq k$.
Nun betrachten wir die Zahlen

$$c; \quad c + 0,1 = c,1; \quad c + 0,2 = c,2; \quad ...; \quad c + 0,9 = c,9; \quad c+1$$

Indem wir analog wie vorher argumentieren, kommen wir zu dem Ergebnis, dass Zahlen $c, \alpha_1 = c + 0, \alpha_1$; $c, \alpha_1 + 1 = c, \alpha_1 + 0,1$ und eine Zahl k_1 existieren, so dass

$$c, \alpha_1 \leq a_n \leq c, \overline{\alpha_1 + 1} \qquad \text{für} \quad n \geq k_1$$

gilt. Wenn wir die Zahlen

$$c, \alpha_1; \quad c, \alpha_1 + 0,01 = c\alpha_1 1; \quad c, \alpha_1 2; \quad ...; \quad c, \alpha_1 9; \quad c, \alpha_1 + 1$$

betrachten, erhalten wir Zahlen $c, \alpha_1\alpha_2$ und $c, \alpha_1\overline{\alpha_2 + 1}$, so dass

$$c, \alpha_1\alpha_2 \leq a_n \leq c, \alpha_1\overline{\alpha_2 + 1} \qquad \text{für} \quad n \geq k_2$$

gilt usw.
Es ist klar, dass wir auf diese Weise einen unendlichen Dezimalbruch

$$a = c, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m...$$

bestimmen, für den

$$\begin{gathered} c, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \leq a \leq c, \alpha_1\alpha_2...\overline{\alpha_m + 1} \\ c, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \leq a_n \leq c, \alpha_1\alpha_2...\overline{\alpha_m + 1} \qquad \text{für} \quad n \geq k_m \end{gathered}$$

gilt. Also folgt

$$|a_n - a| \leq c, \alpha_1\alpha_2...\overline{\alpha_m + 1} - c, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m = \frac{1}{10^m} \qquad \text{für} n \geq k_m$$

Daher erhalten wir bei genügend großem m

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{und schließlich} \qquad a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beispiel. Die Folge $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ist ist nicht fallend. Wegen

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2, \qquad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = 2, ...$$

ist die gegebene Folge nach oben beschränkt, sie besitzt folglich einen Grenzwert a. Wir bestimmen diesen Grenzwert. Dazu bezeichnen wir das n-te Element der Folge mit a_n. Dann ist

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \qquad , \qquad a_{n+1}^2 - a_n - 2 = 0$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich

$$a^2 - a - 2 = 0$$

woraus $a = 2$ oder $a = -1$ folgt. Es muss $a = 2$ sein.

Satz 2. Ist $a > 0$ und besitzt die Folge rationaler Zahlen $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ den Grenzwert Null, d. h., ist

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \qquad \text{so ist} \qquad \lim_{n\to\infty} a^{h_n} = 1 \tag{5}$$

Wir betrachten zuerst den Spezialfall $h_m = 1/m$. Es sei zunächst $a > 1$. Dann ist

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha_m \qquad \text{für } \alpha_m > 0 \tag{6}$$

Gemäß der Newtonschen Formel gilt

$$a = (1+\alpha_m)^m = 1 + m\alpha_m + ...$$

wobei die übrigen Summanden größer als Null sind. Daraus folgt

$$a > 1 + m\alpha_m, \qquad \alpha_m < \frac{a-1}{m}, \qquad \lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$$

Aus Gleichung (6) erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1$$

Ist nun $a < 1$, so ist $1/a > 1$ und daher

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = 1$$

Aus dem Satz über den Grenzwert eines Quotienten ergibt sich

$$\lim_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \left[1 : \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

Für $a = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Schließlich erhalten wir für jedes $a > 0$

$$\lim_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1 \tag{7}$$

Wir beweisen jetzt die Gleichung (5). Es sei $|h_n| = p_n/q_n$ und m eine ganze Zahl, so dass $m \leq p_n/q_n \leq m+1$ gilt. Folglich ist

$$\frac{1}{m+1} \leq |h_n| \leq \frac{1}{m}$$

und wenn $n \to \infty$ strebt, dann strebt auch $m \to \infty$. Auf diese Weise erhalten wir für $h_n > 0$

$$a^{\frac{1}{m+1}} \leq a^{h_n} \leq a^{\frac{1}{m}} \qquad \text{für} \quad a > 1,$$
$$a^{\frac{1}{m+1}} \geq a^{h_n} \geq a^{\frac{1}{m}} \qquad \text{für} \quad a < 1$$

Hieraus folgt auf Grund von Gleichung (7) und des Satzes über den Grenzwert einer Größe, die zwischen zwei anderen liegt,

$$\lim_{n\to\infty} a^{h_n} = 1$$

was zu beweisen war.
Den Fall $h_n < 0$ möge der Leser selbst betrachten.

2.3 Die Potenz mit irrationalem Exponenten

Indem wir die Definition der Größe $a^{m/n}$ $(m, n$ ganze Zahlen), d. h. den Begriff der Potenz mit rationalem Exponenten, als bekannt voraussetzen, führen wir nun den Begriff der Potenz mit irrationalem Exponenten ein.
Da man eine irrationale Zahl annähernd bis auf einen beliebig kleinen Fehler durch eine rationale Zahl ersetzen kann (z. B. $a, \alpha_1 ... \alpha_n ... \approx a, \alpha_1 ... \alpha_{14}$ mit einem Fehler kleiner als $1/10^{14}$), ist es völlig natürlich, dass man eine Definition wie die folgende angeben kann:

Definition 3. Es sei α eine irrationale Zahl, und

$$r_1, r_2, ..., r_n, ... \tag{1}$$

sei eine beliebige Folge rationaler Zahlen. für die

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha \tag{2}$$

gilt. Dann ist

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \tag{3}$$

Eine solche Definition kann man geben, wenn man die Existenz des Grenzwertes und seine Unabhängigkeit von der Auswahl der Folge (1) beweist; notwendig ist nur, dass die Gleichung (2) gilt.
Ist die Folge (1) nicht fallend, so ist die Folge

$$a_{r_1}, a_{r_2}, ..., a_{r_n}, ... \tag{4}$$

für $a \geq 1$ (und o. B. d. A. für $r_n > 0$) nicht fallend, jedoch für $a \leq 1$ nicht wachsend. Im ersten der genannten Fälle gilt $a^{r_n} \leq a^r$, wobei r eine beliebige rationale Zahl größer als α ist, und im zweiten Fall gilt $a^{r_n} \geq a^r$. Wenn also die Folge (1) nicht fallend ist, erfüllt die Folge (4) die Bedingung von Satz 1 und hat somit den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = A \tag{5}$$

Wir zeigen jetzt, dass für eine beliebige Folge rationaler Zahlen $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha \tag{6}$$

der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = A$$

existiert. Tatsächlich erhalten wir aus (2) und (6)

$$\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} r_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

dann ist aber gemäß Satz 2 (§ 2) und Gleichung (5)

$$\lim_{n\to\infty}(a^{r_n} - a^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}(1 - a^{s_n - r_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty}(1 - a^{r_n - s_n}) = 0$$

Daher erhalten wir, indem wir wieder zur Gleichung (5) zurückkehren,

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = A$$

Also haben wir gezeigt, dass die Definition

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

korrekt ist.

Bemerkung 1. Die Rationalität der Zahlen s_n ließen wir nur deshalb zu, damit wir a^{s_n} betrachten konnten. Daher kann man, nachdem die Definition von a^α gerechtfertigt ist, ohne die Voraussetzung, dass die s_n rationale Zahlen sind, behaupten, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha \qquad \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^\alpha \qquad \text{folgt.}$$

Bemerkung 2. Für irrationale Exponenten bleibt die grundlegende Eigenschaft $\alpha^\alpha \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\alpha+\beta}$ erhalten. (Den Beweis überlassen wir dem Leser.)

2.4 Die Nepersche Zahl

Der Grenzwert der Folge

$$1+1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad ..., \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad ... \tag{1}$$

heißt Nepersche Zahl. Euler führte für diesen Grenzwert die Bezeichnung „e“ ein; daher ist nach Definition

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

wenn n ganze positive Werte annimmt. Diese Zahl tritt in der höheren Mathematik ebenso oft auf wie die Zahl π.

Die Definition (2) ist nur dann sinnvoll, wenn gezeigt wird, dass der Grenzwert existiert. Dazu genügt es unter Anwendung von Satz 1 (§ 2) zu beweisen, dass die Folge (1) wachsend und nach oben beschränkt ist.
Da n eine ganze positive Zahl ist, erhalten wir nach der Newtonschen Binomialformel

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+...+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...\\ &+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

also insgesamt $n+1$ Summanden, und

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\ &...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

also insgesamt $n+2$ Summanden.
Vergleichen wir (3) und (4), so sehen wir, dass die ersten $n+1$ Summanden des Ausdrucks (4) größer sind als die entsprechenden Summanden des Ausdrucks (3) und außerdem noch ein weiterer Summand existiert, der größer als Null ist. Folglich gilt

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

d. h., die Folge (1) ist wachsend. Aus Gleichung (3) erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

d. h., die Folge (1) ist nach oben beschränkt. Damit ist die Existenz der Zahl e bewiesen.

Bemerkung. Aus Gleichung (3) und der letzten Ungleichung erhalten wir

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

daher ist $2 \leq e \leq 3$. Später werden wir zeigen, dass $e = 2,718281828...$ ist.

Bei der Berechnung von Grenzwerten benutzt man häufig den folgenden Satz.

Satz 3. Existiert eine Folge $u_1, u_2, ..., u_m, ...$ mit $|u_m| \to \infty$ für $m \to \infty$, so gilt

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_m}\right)^{u_m} = e \tag{5}$$

Zum Beweis betrachten wir zunächst den Fall $u_m > 0$. Es sei n eine nahe bei u_m gelegene Zahl, die nicht größer als u_m ist. Dann ist

$$n \leq u_m \leq n+1 \qquad , \qquad n \to \infty \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

und

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < (1+u_m)^{u_m} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{6}$$

es gilt jedoch

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

Beachten wir die letzten beiden Gleichungen, so ergibt sich Gleichung (5) aus Gleichung (6).

Ist $u_m < 0$ und nehmen wir $u_m = -v_m$ an, so erhalten wir $v_m \to 0$, und es gilt

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{u_m}\right)^{u_m} &= \left(1-\frac{1}{v_m}\right)^{-v_m} = \left(\frac{v_m-1}{v_m}\right)^{-v_m} = \left(\frac{v_m}{v_m-1}\right)^{v_m} \\ &= \left(1+\frac{1}{v_m-1}\right)^{v_m-1}\left(1+\frac{1}{v_m-1}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Da, wie bereits bewiesen, für $u_m > 0$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{v_m-1}\right)^{v_m-1} = e$$

gilt, folgt aus (7) die Gleichung (5).

Satz 3 kann auch anders formuliert werden.

Es gelte $x \to 0$, wobei x eine beliebige Folge von Werten durchläuft. Dann ist

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{8}$$

Wenn x die Folge der Werte $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ $(x_n \to 0)$ durchläuft, erhalten wir tatsächlich unter der Voraussetzung $x_n = \frac{1}{u_n}$ aus (5) die Gleichung (8).

Ist a unabhängig von x, so kann man auch zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a} = e \tag{9}$$

gilt.

2.5 Die Exponentialfunktion. Natürliche Logarithmen

Definition 4. Eine Funktion a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, x eine beliebige reelle Zahl, heißt Exponentialfunktion. Insbesondere nennt man die Funktion e^x Exponentialfunktion (manchmal schreibt man dafür exp x).

Die Exponentialfunktion ist für jedes reelle x definiert; wir definierten bereits Potenzen mit irrationalem Exponenten.
Eine wichtige Funktionenklasse bilden die sogenannten stetigen Funktionen.

Definition 5. Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig im Punkt $x = x_0$, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt, d. h., wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für jeden Wert x gilt, der die Bedingung $|x - x_0| < \eta$ erfüllt.

Satz 4. Die Exponentialfunktion ist für jeden Wert des Argumentes stetig.

Tatsächlich gilt

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) \tag{1}$$

Wir wählen eine beliebig kleine rationale Zahl h, so dass bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}$ gilt. Dies ist auf Grund von Satz 2 (§ 2) möglich. Für jedes x, das die Bedingung $|x - x_0| < h$ erfüllt, erhalten wir aus (1)

$$|a^x - a^{x_0}| < a^{x_0}(a^h - 1) < \varepsilon$$

Damit ist die Stetigkeit der Funktion a^x bewiesen.

Die Logarithmen mit der Basis e heißen natürliche Logarithmen und werden mit dem Symbol $\ln N$ bezeichnet. Nach Definition des Logarithmenbegriffs haben wir

$$a^{\log_a N} = e^{\ln N}$$

daher gilt

$$\log_a N \cdot \ln a = \ln N \qquad , \qquad \log_a N = \ln N \cdot \log_a e$$

also

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a} \qquad , \qquad \ln N = \frac{\log_a N}{\log_a e}$$

Diese Formeln stellen den Zusammenhang zwischen den Logarithmen zur Basis a und den natürlichen Logarithmen her.

2.6 Die Entwicklung der Funktion e^x in eine Potenzreihe. Die Irrationalität der Zahl e

Der arithmetische Begriff der Summe kann auf den Fall unendlich vieler Summanden ausgedehnt werden.

Definition 6. Besitzt die Zahlenfolge

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$$

den Grenzwert a, so schreibt man

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

und sagt, dass die Zahl a in Gestalt einer Reihe

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

darstellbar ist oder dass die Reihe (1) konvergiert und ihre Summe gleich der Zahl a ist.

Definition 7. Wenn für ein bestimmtes x die Folge der Polynome

$$a_0, a_0 + a_1x, a_0 + a_1x + a_2x^2, ..., a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

den Grenzwert $f(x)$ besitzt, sagt man, dass für dieses x die Potenzreihe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

konvergiert und die Summe gleich $f(x)$ ist.
Diese Tatsache schreibt man folgendermaßen:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... \tag{2}$$

und sagt, dass $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt wird. Wegen Gleichung (2) kann man die Näherungsgleichung

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

aufschreiben, deren Fehler für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Satz 5. Für jeden Wert x gilt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \tag{3}$$

Beweis. Wir betrachten hier nur den Fall $x > 0$. Wegen Gleichung (9) (§ 4) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{4}$$

Bei Anwendung der Newtonschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{x^2}{n^2} + ... \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot r}\frac{x^r}{n^r} + ... + \frac{x^n}{n^n} \\ &= 1 + v_1 + v_2 + ... + v_r + ... v_n \end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$v_r = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot r} \frac{x^r}{n^r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}$$

Da

$$v_{r+s} = v_r \frac{\left(1 - \frac{r}{n}\right)\left(1 - \frac{r+1}{n}\right)...\left(1 - \frac{r+s-1}{n}\right)}{(r+1)(r+2)...(r+s)} x^s$$

ist, gilt für $x > 0$ die Ungleichung

$$v_{r+s} < v_r \left(\frac{x}{r+1}\right)^s \tag{6}$$

Es sei $n > r > x$. Dann erhalten wir aus (6)

$$\begin{aligned} v_{r+1} + v_{r+2} + ... + v_n &< v_r \left[\frac{x}{r+1} + \left(\frac{x}{r+1}\right)^2 + ... + \left(\frac{x}{r+1}\right)^{n-r}\right] \\ &< v_r \left[\frac{x}{r+1} + \left(\frac{x}{r+1}\right)^2 + ... + \left(\frac{x}{r+1}\right)^{n-r} + ...\right] = \frac{x}{r+1-x} v_r \end{aligned} \tag{7}$$

Aus Gleichung (5) und Ungleichung (7) ergibt sich

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - v_r \frac{x}{r+1-x} < 1 + v_1 + v_2 + ... + v_r < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{8}$$

Indem wir r festhalten, gehen wir zum Grenzwert für $n \to \infty$ über und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} v_r = \frac{x^r}{r!}$$

und aus den Beziehungen (4) und (8) folgt

$$e^x - \frac{x^{r+1}}{r!(r+1-x)} < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^r}{r!} < e^x$$

Diese letzte Ungleichung gilt für jedes r. Gehen wir zum Grenzwert $r \to \infty$ über, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^r}{r!}\right) = e^x$$

oder

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...$$

was zu beweisen war.

Unter Ausnutzung der Gleichung (3) berechnen wir die Zahl e näherungsweise. Für $x = 1$ gilt

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \delta_n$$

mit

$$\delta_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... = \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ...\right\}$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + ...\right\} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} \tag{9}$$

Insbesondere gilt

$$\delta_9 < \frac{11}{10!10} = \frac{11}{3628800} < \frac{1}{300000} < 0,00001$$

So erhalten wir bis auf eine Genauigkeit von 0,00001

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{9!} \approx 2,71828$$

Satz 6. Die Zahl e ist irrational.

Wir beweisen diese Aussage indirekt. Es sei $e = p/q$, wobei p und q ganze Zahlen sind. Dann folgt für $x = 1$ aus Gleichung (3)

$$\frac{p}{q} - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ... = \delta_q$$

Daraus erhalten wir nach Multiplikation mit $q!$

$$p(q-1)! - \left(2 \cdot q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + ... + + \frac{q!}{q!}\right) = q!\delta_q \tag{10}$$

Wegen (9) gilt

$$q!\delta_q < q!\frac{q+2}{(q+1)!(q+1)} = \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$$

Auf diese Weise erhalten wir auf der rechten Seite der Gleichung (10) einen echten Bruch, was unmöglich ist, weil die linke Seite derselben Gleichung eine ganze Zahl ist. Es liegt also ein Widerspruch vor; unsere Annahme ist falsch, d. h., e ist irrational.

Wir beweisen nun, dass für jedes natürliche m

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0 \tag{11}$$

gilt. Wir haben

$$\frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + ...} < \frac{x^m}{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}} = \frac{(m+1)!}{x}$$

Die Zahl m ist eine feste natürliche Zahl, folglich auch die Zahl $(m+1)!$; deshalb gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(m+1)!}{x} = 0 \qquad \text{und weiter} \qquad \lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$$

Die Gleichung (11) zeigt, dass für $x \to \infty$ die Funktion e^x schneller wächst als x^m, unabhängig davon, wie auch immer die endliche Zahl m gewählt wird. Zum Beispiel wächst e^x schneller als x^{1000}.

2.7 Die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion e^x

Wir betrachten nun jene Eigenschaft der Funktion e^x, welche sie gegenüber allen anderen Exponentialfunktionen auszeichnet.

Definition 8. Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

heißt Ableitung der Funktion $f(x)$, falls er existiert und nicht unendlich wird, und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Wenn sich ein Punkt geradlinig bewegt und $f(x)$ den Weg bezeichnet, den er in der Zeit x zurücklegt, gibt $f(x+h)-f(x)$ den Weg an, den der Punkt in der Zeit $(x+h)-x$ durchlaufen hat, und der Quotient

$$\frac{(f(x+h)-f(x)}{h}$$

bezeichnet die mittlere Geschwindigkeit des Punktes während der Zeit h (vom Zeitpunkt x an). Natürlich kann man dann $f'(x)$ als Geschwindigkeit im Zeitpunkt x bezeichnen. Allgemeiner können wir die Ableitung $f'(x)$ als Änderungsgeschwindigkeit der Funktion $f(x)$ bezüglich ihres Argumentes annehmen.

Beispiel. Es sei

$$f(x) = \frac{a}{2}x^2 \tag{2}$$

Dann ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a}{2}(x+h)^2 - \frac{a}{2}x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a}{2}(2x+h) = ax$$

Wenn ein Massepunkt frei fällt, dann bestimmt Formel (2) den Weg, den der Punkt in der Zeit x durchläuft. So bedeutet die Gleichung $f'(x) = ax$, dass der frei fallende Massepunkt zum Zeitpunkt x die Geschwindigkeit ax besitzt.

Satz 7. Die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion e^x ist gleich e^x, d. h., es ist $(e^x)' = e^x$.

Beweis. Zunächst beweisen wir, dass

$$\lim_{h\to 0} = \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{3}$$

ist. Tatsächlich gilt

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \qquad , \qquad \frac{(e^h-1)-h}{h} = \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| < \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{2^2} + \frac{|h|^3}{2^3} + \dots = \frac{\frac{|h|}{2}}{1-\frac{|h|}{2}}$$

und wir erhalten für $|h| \to 0$ die Gleichung (3). Nun haben wir

$$(e^x)' = \lim_{|h|\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{|h|\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{|h|\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Da $a^x = e^{x \ln a}$ ist, folgt

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + ... + \frac{(x \ln n)^n}{n!} + ...$$

Daher ist $(a^x)' = a^x \ln a$. Folglich wächst die Funktion für $a > 1$ wegen $(a^x)' > 0$, während sie für $a < 1$ fällt.

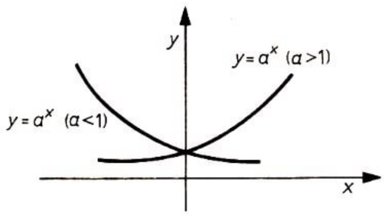


Abb. 4

Bemerkung 2. Die Eigenschaften der Exponentialfunktion, Existenz, Stetigkeit, Monotonie (Wachsen für $a > 1$ und Fallen für $a < 1$), ermöglichen es, diese Funktion graphisch darzustellen (vgl. Abb. 4). Somit ist auch die Existenz des Logarithmus jeder positiven Zahl zu einer beliebigen positiven Basis erkennbar.

2.8 Die charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion

Wie bereits bemerkt wurde, hat die Exponentialfunktion die Eigenschaft

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Der Satz, den wir nun beweisen werden, zeigt, dass diese Eigenschaft für die Exponentialfunktion charakteristisch ist.

Satz 8. Ist die Funktion $f(x)$ stetig und gilt für alle reellen Werte x, y

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) \tag{1}$$

so ist diese Funktion, falls sie nicht identisch verschwindet, eine Exponentialfunktion.

Beweis. Es sei $f(1) = 0$. Setzen wir in (1) $y = x$, so erhalten wir

$$f(2x) = [f(x)]^2$$

Nun sei $y = 2x$, dann folgt

$$f(x) \cdot f(2x) = f(3x) \qquad , \qquad f(3x) = [f(x)]^3$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir für ganzzahliges positives n

$$f(nx) = [f(x)]^n \tag{2}$$

Tatsächlich folgt aus $f(kx) = [f(x)]^k$ wegen Gleichung (1)

$$f(\overline{k+1}x) = f(kx + x) = f(kx) \cdot f(x) = [f(x)]^{k+1}$$

Setzen wir nun in Gleichung (2) $x = 1$ ein, so erhalten wir

$$f(n) = [f(1)]^n = a^n \tag{3}$$

und wird $x = m/n$ gesetzt, so gilt

$$f(m) = \left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n \qquad \text{und folglich} \qquad f\left(\frac{m}{n}\right) = [f(m)]^{\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \tag{4}$$

Es sei $x = y = 0$. Dann erhalten wir aus Gleichung (1)

$$[f(0)]^2 = f(0) \tag{5}$$

Die Annahme $f(0) = 0$ muss fallengelassen werden, da sonst

$$f(x)f(-x) = f(0) = 0$$

wäre; das ist jedoch nicht möglich. Dann ist nach Gleichung (5) $f(0) = 1 = a^0$. Bei Anwendung von (1) ergibt sich

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(-\frac{m}{n}\right) = f(0) = 1$$

also ist

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}} \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) und (6) zeigen, dass die Beziehung

$$f(r_k) = a^{r_k} \tag{7}$$

für jedes rationale r_k Gültigkeit besitzt. Ist α eine irrationale Zahl, so existiert eine Folge rationaler Zahlen r_k, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \alpha$ gilt. Da die Funktion $f(x)$ stetig ist, folgt nach der Definition einer Potenz mit irrationalem Exponenten aus Gleichung (7)

$$\lim_{k\to\infty} f(r_k) = \lim_{k\to\infty} a^{r_k} \qquad \text{also} \qquad f(\alpha) = a^\alpha$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Anmerkung. Gleichung (1) gehört zu den sogenannten Funktionalgleichungen. Solche Gleichungen wurden schon von Euler betrachtet.

2.9 Die Entwicklung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ in Potenzreihen

Wir beweisen zuerst einige wichtige Behauptungen.

Lemma 1. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind für jedes x stetig:

$$\lim_{x\to\alpha} \cos x = \cos\alpha \quad , \quad \lim_{x\to\alpha} \sin x = \sin\alpha \tag{1}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

Beweis. In der Tat, es ist

$$|\cos x - \cos\alpha| = 2\left|\sin\frac{x+\alpha}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right| < 2\cdot 1 \frac{x-\alpha}{2}$$

Gilt also $|x-\alpha| < \varepsilon$, so ist $|\cos x - \cos\alpha| < \varepsilon$. Dann folgt

$$\lim_{x\to\alpha} \cos x = \cos\alpha$$

Analog beweist man die Stetigkeit von $\sin x$.

Lemma 2. Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

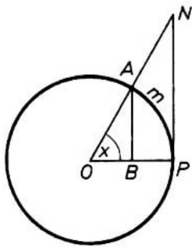


Abb. 5

Beweis. Wir betrachten den Fall $x < \pi/2$. Dann erhalten wir, indem wir die Flächeninhalte des Dreiecks OAB, des Sektors $OAmP$ und des Dreiecks ONP in Abb. 5 vergleichen (die gleich $\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$, $\frac{1}{2}x$ bzw. $\frac{1}{2}\tan x$ sind)

$$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x$$

Daher ist

$$\frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\tan x} \quad , \quad \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Nach Lemma 1 folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Auf Grund dieses Lemmas erhalten wir weiter

$$(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Lemma 3 (Formel von Moivre).

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Wir wenden die Methode der vollständigen Induktion an:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^{n+1} &= (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x)\\ &= (\cos nx + i \sin nx)(\cos x + i \sin x)\\ &= (\cos nx \cdot \cos x - \sin nx \cdot \sin x) + i(\sin nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \sin x)\\ &= (\cos(nx + x) + i \sin(nx + x) = \cos(n+1)x + i \sin(n+1)x\end{aligned}$$

Lemma 4. Für $n = 2k$ gelten die Gleichungen

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2} \cos n - 2z \cdot \sin^2 z + ... + (-1)^k \sin^n z$$

und

$$\sin nz = n \cos^{n-1} z \cdot \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos n - 3z \cdot \sin^3 z + ... + (-1)^{k-1} n \cos z \cdot \sin^{n-1} z$$

Zum Beweis genügt es, die Ergebnisse der Berechnung von $(\cos z + i \sin z)^n$ mit der Formel von Moivre und der Newtonschen Binomialformel zu vergleichen.

Satz 9. Für jedes x gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ... \tag{3}$$

Beweis. Wenn wir $z = x/n$ setzen, erhalten wir nach Lemma 4

$$\sin x = n \cos^{n-1} \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} \frac{x}{n} \cdot \sin^3 \frac{x}{n} + ... + (-1)^{k-1} n \cos \frac{x}{n} \cdot \sin^{n-1} \frac{x}{n}$$

Diese Gleichung können wir auch in der Form

$$\begin{aligned}\sin x = n \cos^{n-1} \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} \frac{x}{n} \cdot \sin^3 \frac{x}{n} + ...\\ + (-1)^r \frac{n(n-1)...(n-2r)}{(2r+1)!} \cos^{n-2r-1} \frac{x}{n} \cdot \sin^{2r+1} \frac{x}{n} + S_{n,r}\end{aligned} \tag{4}$$

schreiben mit

$$\begin{aligned}S_{n,r} = (-1)^{r+1} \frac{n(n-1)...(n-2r-2)}{(2r+3)!} \cos^{n-2r-3} \frac{x}{n} \sin^{2r+3} \frac{x}{n} + ...\\ + (-1)^{k-1} n \cos \frac{x}{n} \cdot \sin^{n-1} \frac{x}{n}\end{aligned}$$

Wir schätzen $S_{n,r}$ ab. Dazu bemerken wir, dass

$$\left|\cos\frac{x}{n}\right| < 1 \qquad , \qquad \left|\sin\frac{x}{n}\right| < \frac{|x|}{n}$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}|S_{n,r}| &< \frac{n(n-1)...(n-2r-2)}{(2r+3)!}\cdot\frac{|x|^{2r+3}}{n^{2r+3}} + \frac{n(n-1)...(n-2r-4)}{(2r+5)!}\cdot\frac{|x|^{2r+5}}{n^{2r+5}} + ... + n\frac{|x|^{n-1}}{n^{n-1}}\\ &< \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!} + \frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!} + ... + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!} + \frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!} + ... + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} + ...\\ &< \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\left\{1 + \frac{|x|^2}{(2r+4)^2} + \frac{|x|^4}{(2r+4)^4} + ...\right\} = \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}}\end{aligned}$$

wenn $|x| < 2r+4$ gilt.
Aus Gleichung (4) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}&\left|\sin x - \left\{n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\cdot\sin\frac{x}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\cdot\sin\frac{3x}{n} + ...\right.\right.\\ &\left.\left.+(-1)^r\frac{n(n-1)...(n-2r)}{(2r+1)!}\cos^{n-2r-1}\frac{x}{n}\sin^{2r+1}\frac{x}{n}\right\}\right| < \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!} : \left(1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}\right)\end{aligned}$$

Wir halten r fest und gehen zum Grenzwert für $n\to\infty$ über. Wegen

$$1 \geq \cos^{n-p}\frac{x}{n} = \left(1-\sin^2\frac{x}{n}\right)^{(n-p)/2} > \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{(n-p)/2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{(n-p)/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n/2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/2}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-p/2} = e^{-x/2}\cdot e^{x/2} = 1$$

ist

$$\lim_{n\to\infty}\cos^{n-p}\frac{x}{n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} n(n-1)...(n-s)\sin^{s+1}\frac{x}{n} = x^{s+1}$$

Dann gilt

$$\left|\sin x - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}\right| < \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!} : \left(1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}\right)$$

Wir gehen jetzt zum Grenzwert für $r\to\infty$ über. Da der Grenzwert der rechten Seite der Ungleichung Null ist (vgl. § 2, Gleichung (2)), gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + ...$$

Damit ist Gleichung (2) bewiesen. Analog zeigt man auch Gleichung (3).

Bemerkung. Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich für numerische Berechnungen sehr geeignete Näherungsformeln:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \pm \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}, \qquad \text{Schranke } < \frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!})$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \pm \frac{x^{2r}}{(2r)!}, \qquad \text{Schranke } < \frac{|x|^{2r+2}}{(2r+2)!})$$

Zum Beispiel ist

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} \approx \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \approx 0,49 \qquad \text{(genau: } \sin 30^\circ = 0,5)$$

Man beachte die Analogie zwischen den hier durchgeführten Überlegungen und den Überlegungen in § 6. Solche Überlegungen kann man auch in einigen anderen Aufgaben bei Grenzübergängen benutzen.

In der Differential- (bzw. Integral-)rechnung werden die allgemeinen Methoden der Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen weitergeführt.
Dort lässt sich die Entwicklung der Funktionen e^x, $\cos x$, $\sin x$ in Reihen mit Hilfe einfacherer Berechnungen als der hier durchgeführten vornehmen, aber diese Einfachheit basiert auf einer Reihe schwieriger Sätze.

2.10 Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument. Die Eulersche Formel. Logarithmen komplexer Zahlen

Die Definition des Grenzwertbegriffes einer Folge komplexer Zahlen

$$a_1 + b_1 i, \quad a_2 + b_2 i, \quad ..., \quad a_n + b_n i$$

und damit auch die Definition des Reihenbegriffes

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + ... + (a_n + b_n i) + ... \tag{1}$$

unterscheiden sich nicht von der Definition im Fall reeller Zahlen. Nahezu offensichtlich ist also die Behauptung:[10]

Die Summe der Reihe (1) ist gleich $a + bi$ dann und nur dann, wenn

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad \text{und} \qquad b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \tag{2,3}$$

gilt.
Wir betrachten die Reihe

$$1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ...$$

(sie wird formal gebildet aus der Reihe e^x, indem man x durch xi ersetzt).
Für diese Reihe gilt, falls wir

$$1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ... = \cos x$$

[10] Zum Beweis genügt es, die Gültigkeit der Beziehungen

$$|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq |\alpha| + |\beta|, \qquad |\alpha + \beta i| \geq |\alpha|, \qquad |\alpha + \beta i| \geq |\beta|$$

auszunutzen.

als Reihe (2) und

$$x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... = \sin x$$

als Reihe (3) nehmen:

$$\cos x + i \sin x = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ... \tag{4}$$

Nun kann man den Potenzbegriff und folglich auch den Begriff der Exponentialfunktion auf den Fall eines nichtreellen Exponenten erweitern.

Definition 9. Das Symbol e^{y+xi} bedeutet:

$$e^{y+xi} = e^y \left\{1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ...\right\} \tag{5}$$

Insbesondere gilt

$$e^{xi} = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ... \tag{6}$$

Eine solche Definition ist deshalb gerechtfertigt, weil

1. der rechte Teil der Gleichung (6) definiert ist (vgl. (4)):

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x \tag{7}$$

2. im Fall $x = 0$ ist e^{y+xi} nach Gleichung (5) gleich e^y;
3. die Funktion $f(z) = e^z$, wobei z eine komplexe Zahl ist, erfüllt die Bedingung

$$f(z)f(u) = f(z+u) \tag{8}$$

d. h., die charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion bleibt auch für komplexe Exponenten erhalten.

Es sei $z = y + xi$, $u = w + vi$. Dann ergibt sich aus den Formeln (4), (7) und (5)

$$e^z = e^y(\cos x + i \sin x) \qquad , \qquad e^u = e^w(\cos v + i \sin v)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^u &= e^{y+w}[(\cos x \cos v - \sin x \sin v) + i(\cos x \sin v + \sin x \sin v)] \\ &= e^{y+w}[\cos(x+v) + i \sin(x+v)] = e^{(y+w)+i(x+v)} = e^{z+u} \end{aligned}$$

Formel (7), die sogenannte Eulersche Formel, ist eine der wichtigsten Formeln der Mathematik. Wir ziehen einige Schlussfolgerungen aus dieser Formel.

1. Für $x = \pi$ ist

$$e^{\pi i} = -1 \tag{9}$$

(Dieses Ergebnis wird beim Beweis der Transzendenz der Zahl π benutzt!)

2. Ersetzen wir in Formel (7) x durch $-x$, so erhalten wir

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x \tag{7'}$$

Wenn wir die Gleichungen (7) und (7') addieren und subtrahieren, erhalten wir

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} \tag{10}$$

Diese Formeln heißen ebenfalls Eulersche Formeln; sie finden breite Anwendung. Aus (10) erhalten wir die bekannte Beziehung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

3. Es gilt

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

Folglich gilt $|e^{xi}| = 1$, $|e^{y+xi}| = e^y$.

4. Bekanntlich kann man jede komplexe Zahl $a + bi$ in der trigonometrischen Form

$$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{11}$$

mit

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

schreiben. Folglich ist

$$a + bi = re^{i\varphi} \tag{12}$$

Das ist die sogenannte Exponentialform einer komplexen Zahl. Die Darstellung (11) bzw. (12) ist jedoch nur eine von vielen. Tatsächlich kann man die Formeln (11) und (12) wegen (k ganze Zahl)

$$\cos(x + 2k\pi) \equiv \cos x \quad , \quad \sin(x + 2k\pi) \equiv \sin x$$

durch allgemeinere ersetzen:

$$a + bi = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] \tag{11'}$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$a + bi = re^{i(\varphi + 2k\pi)} \tag{12'}$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

5. Die Exponentialform einer komplexen Zahl gibt uns die Möglichkeit, den Begriff der Logarithmen komplexer Zahlen einzuführen.

Definition 10. Jede Zahl $\alpha+\beta i$, für die $e^{\alpha+\beta i} = a+bi$ gilt, heißt natürlicher Logarithmus der komplexen Zahl $a + bi$.

Wir schreiben $\ln N$, wobei N eine reelle positive Zahl und der Logarithmus im üblichen

Sinne definiert ist. Ist N eine komplexe (reelle oder nichtreelle) Zahl, so schreiben wir $\operatorname{Ln} N$. Aus (12') erhalten wir

$$a + bi = e^{\ln r} e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\ln r + i(\varphi + 22k\pi)}$$

Deshalb ist

$$\operatorname{Ln}(a + bi) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{13}$$

mit $k = 0, \pm 1, ...$. Folglich haben die Zahlen eine überabzählbare Menge von Logarithmen, und der Logarithmus $\ln r + i\varphi$ $(k = 0)$ heißt Hauptwert.

Ist $a > 0$ und $b = 0$ ($N = a + bi$ positiv reell), so ist $\varphi = 0$ $(a = a(\cos 0 + i \sin 0))$, und der Hauptwert ist $\ln r$. Man betrachtet also in der Schule nur einen der Logarithmen einer positiven Zahl, den Hauptwert.

Ist $a < 0$ und $b = 0$ ($N = a + bi$, negativ reell), so ist $\varphi = \pi$ $(a = |a|(\cos\pi + i \sin\pi))$, und der Hauptwert ist $\ln r + i\pi$, eine nichtreelle Zahl.

Also muss man die in der Schule aufgestellte Behauptung "eine negative Zahl besitzt keinen Logarithmus" folgendermaßen präzisieren: "Alle Logarithmen einer negativen Zahl sind nichtreelle Zahlen (es gibt keinen reellen Logarithmus)."
Wir bemerken noch, dass es genügt, den Hauptwert einer Zahl zu finden. Dann finden wir alle Logarithmen dieser Zahl nach Formel (13).

Aufgaben

1. Nach welcher Regel wird die Tabelle (Pascalsches Dreieck) aufgestellt?

$$\begin{array}{l|llllll}
m = 0 & 1 \\
m = 1 & 1 & 1 \\
m = 2 & 1 & 2 & 1 \\
m = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
m = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
m = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
... &
\end{array}$$

Man zeige, das in der n-Zeile der Tabelle die Binomialkoeffizienten

$$1, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad ..., \quad \binom{n}{n-1}, ...$$

stehen.

2. Man beweise die Gleichung

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + ... + \binom{m}{k} + ... + 1 = 2^m$$

3. Man beweise die Identitäten

$$\cos^6 x + 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x \equiv 1$$

und

$$\cos^6 x - 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x \equiv \cos^3 2x$$

und verallgemeinere sie.

4. Es seien a, b, c, ..., s n verschiedene Dinge. Jede Anordnung dieser Dinge in einer bestimmten Reihenfolge heißt ihre Permutation. Man beweise, dass die Anzahl aller möglichen (verschiedenen) Permutationen

$$P_n = n!$$

beträgt.

5. Als Kombination zu je k Dingen von n verschiedenen Dingen $a, b, ..., s$ bezeichnet man jede Anordnung von k dieser Dinge mit der Bedingung, dass je zwei Anordnungen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden (z. B. abd und adb) als gleich angesehen werden. Man zeige, dass die Anzahl aller möglichen (verschiedenen) Kombinationen zu je k von n Elementen $\binom{k}{n}$ beträgt.

6. Unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 5 beweise man die Newtonsche Binomialformel, ohne die Methode der vollständigen Induktion zu benutzen.

7. Man beweise die Identität

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = A\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}\right) ... \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m\pi}{n}}\right)$$

wobei A eine bezüglich x konstante Größe und $n = 2m + 1$ ist.

Hinweis. Man verwende die Formel von Moivre,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos nx + i\sin nx$$

die Newtonsche Formel und die Regel von der Zerlegung eines Polynoms in Faktoren, wenn die Lösungen des Polynoms bekannt sind. Mit Hilfe von Lemma 2 (§ 9) zeige man dann, dass $A = n$ ist.

8. $e^{\pi n} = -1$. Daraus folgt $e^{2\pi} = 1$, $2\pi i = 0$. Wo steckt der Fehler?

9. Welche der beiden Zahlen 119^{120} und 120^{119} ist größer?

10. Bekanntlich ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Man beweise

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln\frac{a}{b}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

11. Unter der Annahme, dass $f(x)$ eine unstetige Funktion ist, ist die Eulersche Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

zu lösen.

12. Man beweise, dass gilt:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

13. Wenn man am 1. Januar 100 Mark zur Sparkasse bringt, sind am 1. Januar des folgenden Jahres 103 Mark auf dem Konto, nach einem weiteren Jahr $100 \cdot (1 + \frac{3}{100})^2$ Mark. Man berechne mit genügender Genauigkeit, wieviel Geld 33 Jahre nach der Einlage auf dem Konto liegt.

14. In jedem $\frac{1}{b}$-ten Teil eines Jahres wächst ein bestimmtes Kollektiv von N Werktätigen um den $\frac{1}{n}$-ten Teil seiner ursprünglichen Anzahl. Wieviel Werktätige sind es am Ende des Jahres? Kann dieses Kollektiv in einem Jahr um das Vierfache anwachsen?

15. Mit Hilfe der Eulerschen Formeln für $\cos x$ und $\sin x$ beweise man die Formeln

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad , \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

16. Die Funktionen

$$\sinh u = \frac{e^u - e{-}u}{2} \qquad , \qquad \cosh u = \frac{e^u + e{-}u}{2}$$

werden hyperbolischer Sinus bzw. hyperbolischer Kosinus genannt, wobei u auch nichtreell sein kann. Man leite daraus folgende Formeln her:

$$\cos x = \cosh ix, \qquad i\sin x = \sinh ix, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$
$$\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v,$$
$$\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v.$$

3 Die Transzendenz der Zahl π

3.1 Sätze über Polynome

Satz 1. Die Identität

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n \tag{1}$$

gilt dann und nur dann, wenn die Koeffizienten der Polynome an der gleichen Potenz von x übereinstimmen, d. h.

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, ...a_{n-1} = b_{n-1}, a_n = b_n \tag{2}$$

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist, ist offensichtlich. Wir beweisen die Notwendigkeit.
Setzen wir in der Identität (1) x = 0, so erhalten wir $a_n = b_n$ und weiterhin

$$a_0x^{n-1} + ... + a_{n-2}x + a_{n-1} \equiv b_0x^{n-1} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

Setzen wir wiederum $x = 0$ (d. h. genauer, gehen wir zum Grenzwert für $x = 0$ über), so erhalten wir $a_{n-1} = b_{n-1}$

$$a_0x^{n-2} + ... + a_{n-3}x + a_{n-2} \equiv b_0x^{n-2} + ... + b_{n-3}x + b_{n-2}$$

usw.

Satz 2 (Bezout). Ist α eine Lösung des Polynoms

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{3}$$

d. h., ist

$$0 = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n \tag{4}$$

so ist dieses Polynom ohne Rest durch $x - \alpha$ teilbar.

Offensichtlich erhält man, wenn man die Identität (4) von (3) subtrahiert,

$$f(x) = a_0(x^n - \alpha^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + ... + a_{n-1}(x - \alpha)$$

Jede der Differenzen $x^n - \alpha^n$, $x^{n-1} - \alpha^{n-1}$, ... , $x - \alpha$ ist ohne Rest durch $x - \alpha$ teilbar.

Satz 3. Jedes Polynom besitzt mindestens eine reelle oder nichtreelle Lösung.

Das ist der sogenannte Hauptsatz der (klassischen) Algebra[11], den wir hier ohne Beweis anführen.

Satz 4. Jedes Polynom n-ten Grades

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{5}$$

[11] Siehe auch Anhang 1.

besitzt genau n Lösungen $x_1, x_2, ..., x_n$ (diese können reell oder nicht reell oder untereinander gleich sein); dabei gilt

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \tag{6}$$

In der Tat, das Polynom (5) hat nach Satz 3 eine Lösung x_1, und nach dem Satz von Bezout gilt

$$f(x) = (x - x_1)\varphi(x)$$

wobei $\varphi(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist:

$$\varphi(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

Weiter erhalten wir gemäß Satz 3

$$\varphi(x) = (x - x_2)\varphi_1(x) \qquad \text{mit} \qquad \varphi_1(x) = a_0x^{n-2} + c_1x^{n-3} + ... + c_{n-2}$$

Folglich gilt

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\varphi_1(x) \qquad \text{und} \qquad \varphi_1(x) = (x - x_3)\varphi_2(x) \qquad \text{usw.}$$

Wir nehmen Gleichung (6) als bewiesen an. Dann sind offensichtlich $x_1, x_2, ...x_n$ Lösungen des Polynoms $f(x)$, weil $f(x_i) = 0$ gilt.

Satz 5 (Vietasche Formeln). Sind $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen des Polynoms (5), so gelten folgende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \\
\sum\limits_{j\neq i} x_ix_j = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0} \\
\sum\limits_{i\neq j\neq k} x_ix_jx_k = x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0} \\
... \\
x_1x_2...x_n = (-1)\frac{a_n}{a_0}
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Tatsächlich erhalten wir auf Grund von Satz 4 die Identität

$$a_ox^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Führen wir auf der rechten Seite die Multiplikation aus und fassen die ähnlichen Glieder zusammen, so erhalten wir

$$a_ox^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0x^n + a_0\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)x^{n-1} + a_0\left(\sum_{i\neq j}^{n} x_ix_j\right)x^{n-2} + ...$$
$$+ a_0(-1)^n x_1x_2...x_n$$

Daraus folgen nach Satz 1 die Formeln (7).

3.2 Elementarsymmetrische Funktionen

In vielen algebraischen Problemen spielen die sogenannten symmetrischen Funktionen als Lösungen einer algebraischen Gleichung eine bedeutende Rolle.
Zum Beispiel beweist man mit Hilfe solcher Funktionen die Unlösbarkeit in Radikalen einer allgemeinen Gleichung höheren als vierten Grades.[12]
Einige elementare Fakten aus der Theorie der symmetrischen Funktionen benötigen wir zum Beweis der Transzendenz von π.

Definition 1. Eine Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ von n Veränderlichen heißt symmetrisch, wenn sie sich bei beliebiger Permutation ihrer Argumente nicht ändert.

Zum Beispiel sind die Funktionen

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \sqrt{\frac{x_1}{2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad \cos(x_2 - x_1)$$

symmetrisch, jedoch sind die Funktionen

$$x_1 + x_1^2, \quad x_1x_3 + x_2, \quad \sin(x_2 - x_1)$$

nicht symmetrisch.

Definition 2. Die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ p_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \sum\limits_{i\neq j} x_ix_j, \\ p_3 = x_1x_2x_3 + ... + x_kx_rx_s = \sum\limits_{k\neq r\neq s} x_kx_rx_s, \\ ... \\ p_n = x_1x_2...x_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

heißen elementarsymmetrische Funktionen von n Veränderlichen.

In der Algebra betrachtet man auch den Fall, dass sich zwar die Funktion bei Permutation der Argumente ändert, aber bei bestimmten Zahlwerten der Argumente ihre Permutation die Zahlwerte der Funktion nicht ändert.

Zum Beispiel ist die Funktion $x_1^2 + x_2x_3 + x_4^2$ nicht symmetrisch im Sinne von Definition 1, aber für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = a$ ändert sich der Wert der Funktion nicht, wenn ihre Argumente willkürlich permutiert werden. Wir halten weiterhin an Definition 1 fest und betrachten nur solche Werte symmetrischer Funktionen, die sie: annehmen, wenn $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen der Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2}$$

sind. Wir sagen kurz, symmetrische Funktionen sind Lösungen einer Gleichung.

[12] Siehe auch Anhang 1 (Satz von Abel).

Satz 6. Sind die Koeffizienten der Gleichung (2) ganzzahlig und $x_1, x_2, ..., x_n$ ihre Lösungen, so sind auch die elementarsymmetrischen Funktionen der Größen a_0x_1, $a_0x_2, ..., a_0x_n$ ganze Zahlen.

Tatsächlich erhalten wir nach den Vietaschen Formeln

$$a_0x_1 + a_0x_2 + ... + a_0x = a_0(x_1 + x_2 + ... + x_n) = -a1,$$
$$(a_0x_1)(a_0x_2) + ... + (a_0x_{n-1})(a_0x_n) = a_0^2(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) = a_0a_2, \quad ...$$
$$(a_0x_1)(a_0x_2)...(a_0x_n) = a_0^n x_1x_2...x_n = (-1)^n a_0^{n-1} a_n$$

3.3 Potenzsummen. Die Newtonschen Formeln

Elementarsymmetrische Funktionen werden sehr oft auf der Grundlage der Vietaschen Formeln durch die Koeffizienten des entsprechenden Polynoms definiert. Eine solche Eigenschaft besitzen auch einige andere symmetrische Funktionen als Lösung des Polynoms.

Definition 3. Als Potenzsummen bezeichnet man Funktionen der Gestalt

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + .. + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2, \\ s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + .. + x_n^3, \\ &... \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + .. + x_n^n \end{aligned} \tag{1}$$

Satz 7. Sind $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen des Polynoms

$$F(x) = x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n \tag{2}$$

so gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{ll} s_1 + b_1 & = 0 \\ s_2 + s_1b_1 + 2b_2 & = 0 \\ & ... \\ s_{n-1} + s_{n-2}b_1 + s_{n-3}b_2 + ... + s_1b_{n-2} + (n-1)b_{n-1} & = 0 \\ s_n + s_{n-1}b_1 + s_{n-2}b_2 + ... + s_1b_{n-1} + nb_n & = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

aus denen wir nacheinander die Newtonschen Formeln erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = -b_1 \\ s_2 = b_1^2 - 2b_2 \\ s_3 = -b_1^3 + 3b_1b_2 - 3b_3 \\ ... \end{array}\right\} \tag{3}$$

Um die Formeln (3) zu rechtfertigen, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
\omega_1(x) &= x + b_1\\
\omega_2(x) &= x^2 + b_1x + b_2\\
\omega_3(x) &= x^3 + b_1x^2 + b_2x + b\\
&\dots\\
\omega_{n-1}(x) &= x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \omega_1(x_i) = s_1 + nb_1\\
&\sum_{i=1}^{n} \omega_2(x_i) = s_2 + b_1s_1 + nb_2\\
&\dots\\
&\sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1}(x_i) = s_{n-1} + b_1s_{n-2} + b_2s_{n-3} + \dots + b_{n-2}s_1 + nb_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir berechnen die Summe

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{x-x_1} + \frac{F(x)}{x-x_2} + \dots + \frac{F(x)}{x-x_n}$$

auf zwei Arten. Da $x_1, x_2, \dots, x_n$ Lösungen des Polynoms $F(x)$ sind, ist

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_n) \tag{6}$$

und darüber hinaus

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = &(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots\\
&+ (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir nach Multiplikation und Zusammenfassen gleichartiger Glieder nach den Vietaschen Formeln

$$\varphi(x) = nx^{n-1} + (n-1)b_1x^{n-2} + (n-2)b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1} \tag{7}$$

Andererseits haben wir nach der Divisionsregel (wir berechnen die $\frac{F(x)}{x-x_i}$):

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{x-x_i} &= \frac{x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1} + b_n}{x-x_i}\\
&= x^{n-1} + \omega_1(x_i)x^{n-2} + \omega_2(x_i)x^{n-3} + \dots + \omega_{n-1}(x_i)
\end{aligned}$$

wobei mit $\omega_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, die oben definierten Funktionen bezeichnet wurden. Summation über $i = 1, 2, \dots, n$ ergibt

$$\varphi(x) = nx^{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_1(x_i)\right)^2 x^{n-2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_2(x_i)\right)^2 x^{n-3} + \dots + \sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1}(x_i) \tag{8}$$

Indem wir Satz 1 anwenden, bestimmen wir aus den Gleichungen (7) und (8) die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_1(x_i) = (n-1)b_1, \qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_2(x_i) = (n-2)b_2, \qquad ... \qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_{n-1}(x_i) = b_{n-1}$$

Diese Gleichungen führen zusammen mit (5) zu den ersten $n-1$ Gleichungen von (3), während sich die letzte der Gleichungen (3) wie folgt ergibt:

$$F(x_i) = x_i^n + b_1 x_i^{n-1} + ... + b_{n-1}x_i + b_n \equiv 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{9}$$

da x_i Lösung des Polynoms $F(x)$ ist. Addieren wir alle Identitäten (9), so erhalten wir

$$sn + b_2 s_{n-1} + ... + b_{n-1}s_1 + b_n 0$$

was zu zeigen war.

Bemerkung. Aus den Identitäten (9) folgen die Identitäten

$$x_i^k F(x_i) = x_i^{n+k} + b_1 x_i^{n+k-1} + ... + b_{n-1}x_i^{k+1} + b_n x_i^n \equiv 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Die Addition dieser Identitäten (für $k = 1, 2, ...$) führt zu den Gleichungen

$$s_{n+1} + b_1 s_n + ... + b_{n-1}s_2 + b_n s_1 = 0$$
$$s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + ... + b_{n-1}s_3 + b_n s_2 = 0 \quad ...$$

Diese Gleichungen bieten zusammen mit den Formeln (4) die Möglichkeit, die Potenzsummen $s_{n+1}, s_{n+2}, ...$ durch die Koeffizienten des Polynoms $F(x)$ zu bestimmen. Analog kann man folgende Potenzsummen berechnen:

$$s_{-1} = x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}$$
$$s_{-2} = x_1^{-2} + x_2^{-2} + ... + x_n^{-2} \quad ...$$

wenn keine Lösung des Polynoms $F(x)$ gleich Null ist ($b_n \neq 0$).
Aus Satz 7 folgen unmittelbar zwei Korollare.

Folgerung 1. Sind die Koeffizienten des Polynoms (2) ganze Zahlen, so sind die Potenzsummen Lösungen dieses Polynoms, d. h., die Größen $x_1, x_2, ...$ sind ebenfalls ganze Zahlen.

Folgerung 2. Sind die Koeffizienten des Polynoms

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

ganze Zahlen und $x_1, x_2, ..., x_n$ die Lösungen dieses Polynoms, so ist die Summe gleicher Potenzen der Zahlen $a_0x_1, a_0x_2, ..., a_0x_n$ ebenfalls eine ganze Zahl.

In dem Fall, dass $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen des Polynoms sind, sind sie auch Lösungen des Polynoms

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0}$$

und daher erhalten wir nach den Formeln (4)

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0}$$
$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = -\frac{a_1^3}{a_0^3} + 3\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_0} - 3\frac{a_3}{a_0} \qquad ...$$

Folglich gilt

$$a_0x_1 + a_0x_2 + ... + a_0x_n = -a_1$$
$$(a_0x_1)^2 + (a_0x_2)^2 + ... + (a_0x_n)^2 = a_1^2 - 2a_0a_2$$
$$(a_0x_1)^3 + (a_0x_2)^3 + ... + (a_0x_n)^3 = -a_1^3 + 3a_0a_1a_2 - 3a_3a_0^2$$
$$...$$

Die für uns wichtigste Folgerung aus den Newtonschen Formeln ist folgende Behauptung:

Satz 8. Ist die symmetrische Funktion $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ ein Polynom und sind $x_1, x_2, ..., x_n$ die Lösungen des Polynoms (2), so gilt

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(b_1, b_2, ..., b_n)$$

wobei φ ein Polynom ist. Sind die Koeffizienten des Polynoms $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ ganze Zahlen, so sind auch die Koeffizienten des Polynoms $\varphi(b_1, b_2, ..., b_n)$ ganzzahlig.

Zum Beweis des Satzes bemerken wir:
Wenn das Polynom $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ das Glied Ay_k enthält, so enthält es unbedingt wegen der Symmetrie die Glieder $Ay_1, Ay_2, ...Ay_n$ und andere Glieder ersten Grades kann es nicht enthalten.
Ebenso gilt: Wenn $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ Glieder der Form By_ky_l, Cy_k^2 enthält, dann enthält es auch die Glieder By_1y_2, ..., $By_{n-1}y_n$, $Cy_1^2, ..., Cy_n^2$ und keine anderen Glieder zweiten Grades. Dasselbe kann man über die Glieder jeden Grades sagen.

Ist folglich $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ ein symmetrisches Polynom, so besitzt es die Form

$$\Phi(y_1, y_2, ..., y_n) = A_0 + A_1 \sum_{k=1}^{n} y_k + A_2 \sum_{k \neq l} y_k y_l + A_1^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + A_3 \sum_{k \neq l \neq m} y_k y_l y_m + ...$$

Daher gilt

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = A_0 + A_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + A_2 \sum_{k \neq l} x_k x_l + A_1^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + A_3 \sum_{k \neq l \neq m} x_k x_l x_m + ...$$

Nach den Formeln (4) finden wir

$$\begin{aligned}
\sum x_k &= s_1 = -b_1,\\
2\sum_{k\neq l} x_k x_l &= x_1(x_1 + x_2 + ...x_n - x_1) + x_2(x_1 + x_2 + ...x_n - x_2) + ...\\
&+ x_n(x_1 + x_2 + ...x_n - x_n)\\
&= s_1(x - 1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)\\
&= s_1^2 - s_2 = b_1^2 - (b_1^2 - 2b_2) = 2b_2,\\
\sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= s_2 = b_1^2 - 2b_2,\\
\sum_{k\neq l} x_k x_l^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_k^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k(s_2 - x_k^2) = s_2 \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k^3\\
&= s_1 s_2 - s_3 = -b_1(b_1^2 - 2b_2) - (-b_1^3 + 3b_1 b_2 - 3b_3) = 3b_3 - b_1 b_2
\end{aligned}$$

Indem wir solche Rechnungen weiterführen, können wir uns letzten Endes von der Richtigkeit des Satzes überzeugen.
Aus dem bewiesenen Satz und Folgerung 2 von Satz 7 ergibt sich die folgende Behauptung.

Satz 9. Ist $\Phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ ein symmetrisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und sind $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen des Polynoms

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

so ist $\Phi(a_0 x_1, a_0 x_2, ..., a_0 x_n)$ eine ganze Zahl.

3.4 Beweis der Transzendenz von π

Wir beweisen zunächst drei Hilfssätze.

Lemma 1. Für jedes ganze positive r und jeden Wert x gilt die Gleichung

$$r!e^x = r! + r!x + \frac{r!}{2!}x^2 + ... + \frac{r!}{(r-1)!}x^{r-1} + x^r + x^{r+1} q_r e^{|x|} \tag{1}$$

mit $q_r = q_r(x)$, $|q_r| < 1$.
Wir wenden die bereits bekannte Gleichung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + ...$$

an, aus der wir

$$r!e^x = r! + r!x + \frac{r!}{2!}x^2 + ... + \frac{r!}{(r-1)!}x^{r-1} + x^r + x^{r+1}\delta(x, r)$$

mit

$$\delta(x, r) = \frac{1}{r+1} + \frac{x}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)(r+3)} + ...$$

erhalten. Da

$$|\delta(x,r)| < 1 + \frac{|x|}{1\cdot 2} + \frac{|x|^2}{1\cdot 2\cdot 3} + ... < 1 + |x| + \frac{|x|^2}{1\cdot 2} + \frac{|x|^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ... = e^x$$

ist, kann man annehmen, dass

$$\delta(x,r) = q_r(x)e^{|x|}, \qquad |q_r| < 1$$

gilt. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2. Es sei

$$\begin{aligned}
f(x) &= C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n \\
F(x) &= f(x) + f'(x) + f''(x) + ... + f^{(n)}(x) \qquad \text{mit} \\
f'(x) &= C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + ... + nC_nx^{n-1} \\
f''(x) &= C_2 + 6C_3x + ... + n(n-1)C_nx^{n-2} \\
&... \\
f^{(n-1)}(x) &= (n-1)!C_{n-1} + n!C_nx \\
f^{(n)}(x) &= n!C_n
\end{aligned}$$

Dann ist

$$Pe^x = e^{|x|}Q(x) + F(X) \tag{2}$$

mit

$$P = C_0 + 1!C_1 + 2!C_2 + ... + n!C_n = \sum_{r=0}^{n} C_r r! \tag{3}$$

und

$$Q(x) = \sum_{r=0}^{n} C_r q_r x^{r+1}, \qquad q_r = q_r(x), \qquad |q_r| < 1 \tag{4}$$

Zum Beweis des Hilfssatzes schreiben wir nach (1) folgende Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
e^xe^x &= 1 + x + x^2q_1e^{|x|} && \text{(r=1)} \\
2!e^x &= 2! + 2x + x^2 + x^3q_2e^{|x|} && \text{(r=2)} \\
&... \\
n!e^x &= n! + n!x + \frac{n!}{2!}x^2 + ... + nx^{n-1} + x^n + x^{n+1}q_ne^{|x|} && \text{(r=n)}
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen entsprechend mit $C_{0,1}, ..., C_n$ und addieren die Ergebnisse, so erhalten wir Gleichung (2).

Lemma 3. Die Summe und das Produkt algebraischer Zahlen sind algebraische Zahlen (sogar ganze algebraische Zahlen, wenn die Summanden oder Faktoren es sind).

Es sei $\alpha = \alpha_1$ eine algebraische Zahl, die Lösung einer beliebigen Gleichung n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten ist, und es seien $\alpha_2, ..., \alpha_n$ die übrigen Lösungen derselben Gleichung. Analog sei $\beta = \beta_1$ die Lösung einer beliebigen Gleichung m-ten

Grades mit rationalen Koeffizienten, und es seien $\beta_1, ..., \beta_m$ die übrigen Lösungen dieser Gleichung.

Das Produkt aller Differenzen der Form $x - \alpha_i\beta_j$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, ist offensichtlich ein Polynom (vom Grad nm), und eine seiner Lösungen ist $\alpha\beta$. Folglich genügt es zu zeigen, dass die Koeffizienten dieses Polynoms rationale Zahlen sind. Dies gilt in der Tat.

Die Koeffizienten sind symmetrische Funktionen der Argumente α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_m. Indem wir Satz 9 zweimal anwenden, kommen wir zu der notwendigen Schlussfolgerung. So ist also das Produkt zweier algebraischer Zahlen eine algebraische Zahl. Analog beweist man die Behauptung über die Summe algebraischer Zahlen.

Satz 10. π ist eine transzendente Zahl.

Wir beweisen diesen Satz indirekt und nehmen dazu an, dass π eine algebraische Zahl ist. Nach Lemma 3 ist πi ebenfalls eine algebraische Zahl, d. h., sie ist Lösung einer Gleichung der Form[13]

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + ... + p_{m-1}x + p_m = 0 \tag{5}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ seien Lösungen dieser Gleichung, eine davon sei πi. Da $e^{\pi i} = -1$ ist (vgl. Kap. II, § 10), gilt

$$(e^{\beta_1+1})(e^{\beta_2+1})...(e^{\beta_m+1}) = 0 \tag{6}$$

Lösen wir die Klammern auf der linken Seite auf, so erhalten wir

$$1 + \sum_{k=1}^{n} e^{\beta_k} + \sum_{k,l} e^{\beta_k+\beta_l} + ... + e^{\beta_1+\beta_2+...+\beta_m} = 0 \tag{7}$$

Wir bezeichnen mit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ diejenigen Exponenten $\beta_k, \beta_k + \beta_l$, ..., $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m$, die von Null verschieden sind, und mit $\alpha_{m-1}, ..., \alpha_N$ die übrigen[14] Exponenten (diese sind gleich Null).
Zählen wir die entsprechenden Summanden (Einsen) auf der linken Seite von (7) zum ersten Summanden hinzu, so erhält (7) die Gestalt

$$K + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + ... + e^{\alpha_n} = 0 \tag{8}$$

wobei K eine ganze positive Zahl ist.
Die Zahlen $p_o\beta_1, p_0\beta_2, ..., p_0\beta_n$ sind ganze algebraische Zahlen, daher (vgl. Lemma 3) sind auch die Zahlenpaare $p_0\alpha_1, p_0\alpha_2, ...$ ganze algebraische Zahlen.

Ist $F(z_1, z_2, ..., z_n)$ ein symmetrisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, so ist auch $F(p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n)$ eine ganze Zahl.

[13]Unter allen solchen Gleichungen betrachten wir diejenigen vom kleinsten Grad, d. h. diejenige, die nicht weiter zerlegbar ist.

[14]Offensichtlich gibt es einen solchen Exponenten; denn hat (5) die Lösung πi, so besitzt sie auch die Lösung $-\pi i$.

Das ist tatsächlich der Fall, denn wenn

$$F(p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n) = a + b\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + c\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k\alpha_l + ...$$

gilt, so ist

$$F(p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n) = a + b\sum_{k=1}^{N} \alpha_k + c\sum_{k,l=1}^{N} \alpha_k\alpha_l + ... \tag{9}$$

weil jede Summe auf der rechten Seite der zweiten Gleichung sich von der entsprechenden Summe auf der rechten Seite der ersten Gleichung oder von den Summanden, die gleich $\alpha_{n+1}, ..., \alpha_N$ sind, oder von den Summanden, die $\alpha_{n+1}, ..., \alpha_N$ als Faktoren haben, unterscheidet; die Zahlen $\alpha_{n+1}, ..., \alpha_N$ sind jedoch gleich Null.

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (9) ist ein symmetrisches Polynom bezüglich $p_0\alpha_1$, $p_0\alpha_2$, ... $p_0\alpha_n$, folglich auch bezüglich $p_0\beta_1$, $p_0\beta_2$, ..., $p_0\beta_m$.
Aus Satz 9 folgt nun, dass $F(p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n)$ eine ganze Zahl ist.
Setzen wir im folgenden in Gleichung (2) $x = 0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P &= F(0) \\ Pe^{\alpha_1} &= e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + F(\alpha_1) \\ Pe^{\alpha_2} &= e^{|\alpha_2|}Q(\alpha_2) + F(\alpha_2) \\ &... \\ Pe^{\alpha_n} &= e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n) + F(\alpha_n) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit K und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir auf Grund von (8)

$$0 = \{KF(0) + F(\alpha_1) + ... + F(\alpha_n)\} + [e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + ... + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n)] \tag{10}$$

Wenn wir jetzt zeigen, dass für ein gewisses Polynom $f(x)$ (nach dem $F(x)$ konstruiert wurde) die Gleichung (10) nicht gelten kann, wenn $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ algebraische Zahlen sind, so ist damit gleichzeitig die Transzendenz der Zahl π nachgewiesen.

Das gewünschte Polynom konstruieren wir folgendermaßen:

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1}x^{t-1}(x-\alpha_1)^t(x-\alpha_2)^t...(x-\alpha_n)^t}{(t-1)!} \tag{11}$$

wobei t eine natürliche Zahl ist, die vorerst nicht definiert wird. Das Polynom (11) schreiben wir in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{A_{t-1}x^{t-1} + A_t x^t + ...}{(t-1)!} \\ f(x) &= \tfrac{B_t p_0^t (x-\alpha_1)^t + B_{t+1} p_0^{t+1}(x-\alpha_1)^{t+1} + ...}{(t-1)!} \\ f(x) &= \tfrac{C_t p_0^t (x-\alpha_2)^t + C_{t+1} p_0^{t+1}(x-\alpha_2)^{t+1} + ...}{(t-1)!} \\ &... \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die erste der Gleichungen (12) erhalten wir, wenn wir in (11) die Klammern auflösen. Dabei ist

$$A_{t-1} = (-1)^n p_0^{t-1} (p_0\alpha_1)^t (p_0\alpha_2)^t ... (p_0\alpha_n)^t$$

d.h., A_{t-1} ist symmetrisch bezüglich $p_0\alpha_1, ... p_0\alpha_n$ und deshalb eine ganze Zahl. Ebenso kann man sich davon überzeugen, dass die Koeffizienten A_t, ..., A_n ganzzahlig sind.

Die zweite der Gleichungen (12) erhalten wir, wenn wir (11) folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1}[(x-\alpha_1)+\alpha_1]^{t-1}(x-\alpha_1)^t[(x-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)]^t + ...}{(t-1)!}$$

und danach von den eckigen Klammern befreien. Analog erhalten wir auch die übrigen Gleichungen (12). Dabei muss man darauf achten, dass B_t, B_{+1}, ..., C_t, C_{t+1}, ... Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten bezüglich $p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n$ sind.
Auf Grund der Definition der Funktion $F(x)$ kann man nachweisen, dass

$$\begin{aligned} F(0) &= A_{t-1} + tA_t + (t+1)tA_{t-1} + ... \\ F(\alpha_1) &= tB_t p_0^t + (t+1)tB_{t+1}p_0^{t+1} + ... \\ F(\alpha_2) &= tC_t p_0^t + (t+1)tC_{t+1}p_0^{t+1} + ... \\ &... \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt, dass die Summe $F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + ... + F(\alpha_n)$ durch t teilbar ist. Diese Summe ist außerdem ein symmetrisches Polynom bezüglich $p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten (weil $f(x)$ symmetrisch ist) und daher eine ganze Zahl.

Wir nehmen an, dass t die größte der ganzen Zahlen $K, p_0, p_0\alpha_1, ..., p_0\alpha_n$ ist. Dann ist

$$KF(0) = KA_{t-1} + KtA_t + ... \tag{13}$$

eine ganze Zahl, die nicht durch t teilbar ist, denn das gilt für KA_{t-1} die übrigen Summanden auf der rechten Seite von (13) sind jedoch durch t teilbar.
Folglich ist der Ausdruck in den geschweiften Klammern der rechten Seite von Gleichung (10) nicht durch t teilbar und eine ganze Zahl, die außerdem von Null verschieden ist.

Wir betrachten die Summe

$$L = e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + e^{|\alpha_2|}Q(\alpha_2) + ... + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n)$$

Weil

$$Q(x) = \sum_{r=0}^{n} C_r q_r x^{r+1}, \qquad |q_r| < 1$$

gilt (vgl. (4)), wobei C_r Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ sind, erhalten wir auf Grund von Gleichung (11)

$$Q(x) = \frac{A_{t-1}q_{t-1}x^{t-1} + A_t q_t x^t + ...}{(t-1)!}$$

Folglich gilt

$$|Q(x)| < \frac{|A_{t-1}||x|^{t-1} + |A_t||x|^t + ...}{(t-1)!}$$

Weil
$$\lim_{m\to\infty} = \frac{|x|^{m+s}}{m!} = |x|^s \lim_{m\to\infty} \frac{|x|^m}{m!} = 0$$
(vgl. Kap. 11, § 2, (Z)) und die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (14) endlich ist, gilt
$$\lim_{t\to\infty} |Q(x)| = 0$$
Wir erhalten also für $0 < \varepsilon < 1$ und genügend großes t
$$e^{|\alpha_r|}|Q(\alpha_r)| < \frac{\varepsilon}{n}$$
und dann
$$|L| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \quad (< 1)$$
Auf diese Weise ist der rechte Teil der Gleichung (10) die Summe aus von Null verschiedenen ganzen Zahlen und einer Zahl, deren Absolutbetrag kleiner als 1 ist. Eine solche Summe kann aber nicht gleich Null werden, und somit ist Gleichung (10) für unser gewähltes $f(x)$ und t unmöglich.
Damit ist die Transzendenz der Zahl π bewiesen.

Aufgaben

1. Man zeige: Ist $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ein symmetrisches Polynom ersten Grades, dessen freies Glied gleich Null ist, und gilt
$$f(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, ..., x_n + \alpha) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n) + \alpha$$
so ist
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}$$
2. Man stelle eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ auf, wobei x_1, x_2, x_3 Lösungen der Gleichung
$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$
sind.

3. Man zeige, dass die Bedingung $a^4(a^2 - 2b) = 2(a^2 - 2ab + 2c)^2$ notwendig und hinreichend dafür ist, dass das Quadrat einer der Lösungen der Gleichung
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
gleich der Summe der Quadrate der übrigen beiden Lösungen ist.
Hinweis. $2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

4. Man zeige: Sind die Sinus der drei Winkel eines Dreiecks Lösungen der Gleichung
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{dann gilt} \qquad a(4ab - a^3 - 8c) = 4c^2$$

Hinweis. Man betrachte ein Dreieck, das dem gegebenen Dreieck ähnlich ist und dem ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ einbeschrieben wurde.

5. Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Lösungen des Polynoms

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Als Resultante des Polynoms $f(x)$ und des Polynoms

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$$

bezeichnet man den Ausdruck

$$R(f,g) = a_0^m g(x_1)g(x_2)...g(x_n)$$

Man zeige, dass die Beziehung gilt:

$$R(f,g) = (-1)^{mn} R(g,f)$$

Hinweis. Man benutze die Faktorzerlegung von $g(x)$.

6. Ist die Bedingung $R(f,g) = 0$ hinreichend dafür, dass die Polynome $f(x)$ und $g(x)$ eine gemeinsame Lösung besitzen? Ist sie auch hinreichend dafür, dass ihre graphischen Darstellungen sich schneiden?

7. Man zeige, dass $R(f,g)$ ein symmetrisches Polynom der Nullstellen jedes der Polynome f und g ist, und ziehe eine Schlussfolgerung über den Zusammenhang zwischen $R(f,g)$ mit den Koeffizienten der Polynome.

8. Man beweise: Ist

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \qquad , \qquad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

so gilt

$$R(f,g) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

9. Man beweise, dass $b^2 - 4ac$ die Resultante der Polynome

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad , \qquad f'(x) = 2ax + b$$

ist.

10. Man bestimme die Resultante

$$R(f,f') = -4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

der Polynome

$$f(x) = x^3 + px + q \qquad , \qquad f'(x) = 3x^2 + p$$

11. Die Längen der Seiten eines Dreiecks sind Lösungen der Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

Man beweise, dass

$$R = \frac{c}{\sqrt{a(4ab - a^3 - bc)}}$$

der Radius des umbeschriebenen Kreises und

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab - a^3 - bc)}$$

die Dreiecksfläche ist.

4 Anhang 1. Komplexe Zahlen

(H. Pieper)

Zwei reelle Zahlen a, b bilden ein geordnetes Paar (bezeichnet mit (a, b)), wenn von den beiden Zahlen eine (a) als erste, die andere (b) als zweite gekennzeichnet ist. Ein geordnetes Paar ist somit erst dann vollständig bestimmt, wenn neben den beiden Zahlen auch deren Reihenfolge bekannt ist.
Gleichheit von geordneten Paaren bedeutet nicht nur Übereinstimmung in den beiden Zahlen, sondern auch in deren Reihenfolge. Es gilt also $(a, b) = (c, d)$ dann und nur dann, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

In der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen lässt sich eine Addition und eine Multiplikation durch die folgenden Formeln erklären:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{1}$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{2}$$

Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass diese Operationen analoge Eigenschaften haben wie die Addition und Multiplikation in der Menge der reellen Zahlen.
Beispielsweise gilt

$$((a, b) + (c, d))(e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$$

wie man einfach unter Benutzung von (1) und (2) ausrechnet:

$$\begin{aligned}((a, b) + (c, d))(e, f) &= (a + c, b + d)(e, f) = ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e)\\ &= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de)\\ &= (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)\end{aligned}$$

Insbesondere gibt es Paare, nämlich $(0, 0)$ und $(1, 0)$, die mit den anderen Paaren additiv oder multiplikativ verknüpft, diesen gegenüber genau das gleiche Verhalten zeigen wie die Zahlen 0 und I :

$$\begin{aligned}(a, b) + (0, 0) &= (a, b),\\ (a, b)(1, 0) &= (a1 - b0, a0 + b1) = (a, b)\end{aligned}$$

Die Subtraktion wird auf natürliche Weise durch

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \tag{3}$$

erklärt.
Zu gegebenen Paaren $(a, b) \neq (0, 0)$ und (c, d) existiert genau ein Paar (x, y) mit $(a, b)(x, y) = (c, d)$. Ist (x, y) solch ein Zahlenpaar, so gilt notwendigerweise $(ax - by, ay + bx) = (c, d)$, also

$$ax - by = c \qquad , \qquad bx + ay = d$$

und hieraus folgt (da $a^2 + b^2 > 0$ ist)

$$x = \frac{ac - bd}{a^2 + b^2} \qquad , \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

Umgekehrt gilt in der Tat

$$(a - b)\left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2c + abd - bad + b^2c}{a^2 + b^2}, \frac{a^2d - abc + bac + b^2d}{a^2 + b^2}\right) = (c, d)$$

Die Division ist also durch

$$\frac{(c, d)}{(a, b)} = \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b2}\right) \tag{4}$$

gegeben (vorausgesetzt, dass $(a, b) \neq (0, 0)$, also $a^2 + b^2 > 0$ ist).

Jedes Paar lässt sich aus Paaren der Form $(c, 0), (1, 0)$ und $(0, 1)$ zusammensetzen:

$$(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1) \tag{5}$$

$(1, 0)$ ist das Einselement.
Wendet man die vier Rechenoperationen auf Paare der Form $(c, 0)$ an, so erhält man wieder Paare dieser Form:

$$\begin{aligned}
(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), \\
(a, 0) - (b, 0) &= (a - b, 0), \\
(a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0), \\
\frac{(a, 0)}{(b, 0)} &= \left(\frac{a}{b}, 0\right), \qquad (b \neq 0)
\end{aligned}$$

Man identifiziert ein Paar $(c, 0)$ mit der reellen Zahl c:

$$c = (c, 0) \tag{6}$$

Für $(0, 1)$ gilt $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. Dieses Paar wird kurz mit i bezeichnet:

$$i = (0, 1) \tag{7}$$

Nun lässt sich jedes Paar in der Gestalt

$$(a, b) = a + bi \tag{8}$$

darstellen. Die Gleichheit und die Rechenoperationen lassen sich dann durch die folgenden Formeln beschreiben:

$$a + bi = c + di \quad \text{genau dann, wenn} \quad a = c \text{ und } b = d, \tag{9}$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \tag{10}$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i, \tag{11}$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i, \tag{12}$$

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \quad (a + bi \neq 0) \tag{13}$$

Die geordneten Paare $(a,b) = a + bi$ heißen komplexe Zahlen. Die reelle Zahl a heißt der Realteil von $\alpha = a+bi$ (Re α) und die reelle Zahl b der Imaginärteil von $\alpha = a+bi$ (Im α).
Ist $b = 0$, so ist die komplexe Zahl reell.
Ist $a = 0$, so heißt sie rein-imaginär. Zwei komplexe Zahlen der Form $\alpha = a + bi$ und $\overline{\alpha} = a - bi$ heißen konjugiert-komplex. Ihre Summe ist reell:

$$\alpha + \overline{\alpha} = a + bi + a - bi = 2a$$

Ihre Differenz ist rein-imaginär: $\alpha - \overline{\alpha} = a + bi - (a - bi) = 2bi$. Ihr Produkt ist

$$\alpha\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \tag{14}$$

Ferner gilt $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$, $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

Es sei betont, dass man sich die Rechenregeln (10) bis (13) nicht zu merken braucht. Wichtig ist es zu wissen, wie man zu rechnen hat. Man rechne mit den komplexen Zahlen $a+bi$ wie mit gewöhnlichen Binomen unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ und der Trennung von Realteilen und Imaginärteilen.

So ergibt sich das Produkt zu

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

Man erweitere den Bruch $\frac{c+di}{a+bi}$ mit der Konjugierten des Nenners und multipliziere die Zahlen in Zähler und Nenner, als Quotient erhält man

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di}{a + bi}\frac{a - bi}{a - bi} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + db}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$$

Da komplexe Zahlen durch geordnete Paare reeller Zahlen gegeben sind, können wir sie uns als Punkte der Ebene geometrisch - anschaulich deuten (Abb. 1). In einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem wird eine Längeneinheit 1 festgelegt. Die komplexe Zahl $a + bi$ ist dann der Punkt mit der Abszisse a und der Ordinate b.

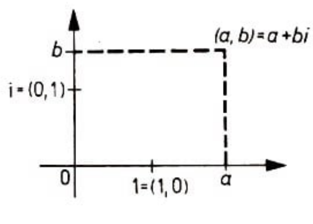


Abb. 1

Der Abstand der Zahl $\alpha = a+bi$ vom Nullpunkt heißt (in natürlicher Verallgemeinerung des Betrages reeller Zahlen) Betrag $|a + bi|$ dieser komplexen Zahl. Offenbar ist

$$|\alpha| = |a + bi| = |a - bi| = |\overline{\alpha}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} \tag{15}$$

Anschaulich unmittelbar einsichtig sind die Ungleichungen:

$$\text{Re } \alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} \leq |\alpha| \qquad , \qquad \text{Im } \alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i} \leq |\alpha|$$

Die üblichen Eigenschaften für den Betrag sind (wie man leicht erkennt) erfüllt:

$$\begin{aligned} |\alpha| &> 0 \qquad \text{(falls } \alpha \neq 0 \text{ ist)} \\ |\alpha\beta| &= |\alpha||\beta| \\ |\alpha+\beta| &\leq |\alpha| + |\beta| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung ist anschaulich klar, ergibt sich aber auch wie folgt:

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta} \\ &= |\alpha|^2 + 2\text{Re}(\alpha\overline{\beta}) + |\beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\overline{\beta}| + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2 \end{aligned}$$

(man beachte $\text{Re}(\alpha\overline{\beta}) = \frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha\overline{\beta}}}{2} = \frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2}$).

Bezeichnet φ (bis auf Vielfache von 2π) den Winkel, den die Verbindungsgerade durch $\alpha \neq 0$ und 0 mit der positiven Achse einschließt - entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt -, so gilt (wenn wir $|\alpha| = r$ setzen)

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{16}$$

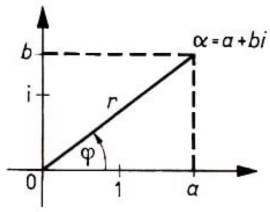


Abb. 2

φ heißt das Argument von α ($\arg\alpha$). Es ist nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\varphi \equiv \varphi'$, falls $\varphi = \varphi' + 2k\pi$ ist (k ganzzahlig).

Aus $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ folgt für $\alpha = a+bi \neq 0$ die (trigonometrische) Darstellung

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{17}$$

(mit $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$).

Die Formeln (16) ermöglichen die Umwandlung von $a + bi$ in die trigonometrische Darstellung und umgekehrt.
Ist $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$, so liefern die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\alpha\beta = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

d. h. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta$.

Durch vollständige Induktion folgt hieraus für natürliche Zahlen n

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad \text{(Formel von Moivre)} \tag{18}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \tag{19}$$

d.h. $\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$, $\arg\frac{1}{\alpha} \equiv -\arg\alpha$.
Man erkennt auch $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$ und $\arg\overline{\alpha} \equiv -\arg\alpha$.

Aus (19) folgt die Gültigkeit von (18) auch für negative ganze Zahlen n. Ist $|\alpha| = r = 1$, so bedeutet (18)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Es sei $\varphi = 2\pi/n$. Wir setzen

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \tag{20}$$

Dann folgt $\zeta^n = 1$.

Satz. Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^n = 1$, nämlich 1, ζ, ζ^2, ζ^3, ..., ζ^{n-1}. (Es sind die Ecken des dem Kreis mit dem Radius 1 einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, dessen eine Ecke im Punkt $z = 1$ liegt.) Die Zahlen

$$\zeta^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

heißen n-te Einheitswurzeln (Abb. 3).

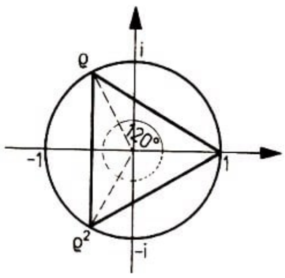


Abb. 3. Die dritten Einheitswurzeln $1, \rho = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i), \rho^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$

Beweis. Die Zahlen $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, ..., \zeta^{n-1}$ mit $\zeta = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$ sind verschieden, und es gilt $(\zeta^k)^n = (\zeta^n)^k = 1$. Wenn wir in der Folge der Exponenten noch weiter gehen oder auch negative Exponenten benutzen, erhalten wir keine neue Zahlen:

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta^n}{\zeta} = \zeta^{n-1} \qquad , \qquad \zeta^{n+1} = \zeta^n\zeta = \zeta \quad \text{usw.}$$

Es sei nun $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine komplexe Zahl mit $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $z^n = 1$. Dann ist $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 1$, also $r^n = 1$, $\cos n\varphi = 1$, $\sin n\varphi = 0$. Es folgt $r = 1$, und es gibt ein $k \geq 0$ mit $n\varphi = k2\pi$, q. e. d.

Ist a eine beliebige nicht-negative reelle Zahl, so gibt es bekanntlich genau eine nicht-negative Zahl b mit $b^n = a$. Diese eindeutig bestimmte reelle Zahl heißt n-te Wurzel aus a ($\sqrt[n]{a}$). Für $a < 0$ hat das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ (im Bereich der reellen Zahlen) keinen Sinn. Die Beseitigung dieser Einschränkung beim Radizieren ist durch die Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen zum Bereich der komplexen Zahlen möglich geworden. Es gilt der

Satz. Ist α eine beliebige komplexe Zahl $\neq 0$, so gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen, deren n-te Potenz mit α übereinstimmen.

Beweis. Ist $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $\eta_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, so gilt (nach der Formel von Moivre) $\eta_o^n = \alpha$. Ist ζ^k eine n-te Einheitswurzel ($0 \leq k \leq n-1$), so gilt auch $(\eta_0\zeta^k)^n = \eta_0^n = \alpha$. Ist umgekehrt n eine Zahl mit $\eta^n = \alpha$, so ist $(\eta/\eta_0)^n = 1$, d. h. η/η_0 eine n-te Einheitswurzel.

Alle komplexen Zahlen, deren n-te Potenzen mit α übereinstimmen, sind somit von der Form

$$\eta_0\zeta^k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)k \tag{21}$$

für $k = 0, 1, ..., n-1$, q.e.d.

Jede der Zahlen (21) heißt eine n-te Wurzel aus $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und wird mit $\sqrt[n]{\alpha}$ bezeichnet. Das Zeichen $\sqrt[n]{\alpha}$ ist somit nicht eindeutig, sondern n-deutig. Es bezeichnet eine der n Zahlen (21).

$\eta_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi/n + i\sin\varphi/n)$ mit $0 \leq \varphi/n \leq 2\pi/n$ heißt Hauptwert.

Man erhält die n-ten Wurzeln $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$, wenn man den Hauptwert nacheinander mit allen n-ten Einheitswurzeln multipliziert. (Gelegentlich wird wegen der Eindeutigkeit der Bezeichnung auch nur der Hauptwert

$$\eta_0 = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

mit "$\sqrt[n]{\alpha}$" bezeichnet. Ist $\alpha = a$ positiv reell, so ist der Hauptwert gleich der reellen Wurzel $\sqrt[n]{a}$)

Der zuletzt bewiesene Satz besagt, dass jedes Polynom von der Form $z^n - \alpha$ genau n verschiedene Nullstellen besitzt, die Gleichung $zn - \alpha = 0$ also n verschiedene Lösungen hat. Allgemeiner kann man beweisen, dass jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen besitzt, wenn auch nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen (Fundamentalsatz der klassischen Algebra).

G. W. Leibniz zweifelte noch an der Richtigkeit dieser Aussage! Zahlreiche Beweisversuche sind im 18. Jahrhundert publiziert worden. Gauß gab 1799 einen neuen Beweis. Am Anfang dieser Doktorarbeit unterzieht Gauß die ihm bekannten Beweise von d'Alembert, Euler und Lagrange einer kritischen Untersuchung.
Insbesondere nimmt er einen Gedankengang auf, der von d'Alembert (1746) ausgesprochen worden ist. Dieser Gaußsche Beweis "stellt wegen seiner Klarheit und Originalität einen beträchtlichen Fortschritt gegenüber den früheren Beweisversuchen dar" . (Bourbaki).

Insgesamt gab Gauß vier Beweise für den Fundamentalsatz. (Die Hilfsmittel der Theorie der Funktionen komplexer Variabler gestatten heute sehr kurze Beweise des Satzes.)[15] Der Satz beruht auf dem folgenden hier nicht beweisbaren

Satz (d'Alembert-Gauß). Jede algebraische Gleichung

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

worin n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind, hat mindestens eine Lösung, d. h., es gibt eine komplexe Zahl α mit $f(\alpha) = 0$. (Vgl. Kapitel III, Sätze 3 und 4.)

Als Anwendung der komplexen Zahlen und als Beispiel für die Auflösung algebraischer Gleichungen soll hier noch die Auflösung von Gleichungen dritten Grades (kubische Gleichungen) skizziert werden.

Eine Gleichung $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ (worin die Koeffizienten reelle oder komplexe Zahlen sind) wird durch die Transformation $z = x - a/3$ auf die einfachere Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \tag{23}$$

(mit $p = -\frac{a^2}{3} + b$, $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$) zurückgeführt. Die Gleichung (23) lässt sich leicht durch einen Kunstgriff auflösen. Man setzt $x = u + v$ mit zwei neuen Variablen u und v. Aus $x = u + v$ folgt

$$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

oder

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \tag{24}$$

Der Koeffizientenvergleich in (23) und (24) ergibt

$$q = -(u^3 + v^3) \qquad \text{oder} \qquad u^3 + v^3 = -q \tag{25}$$

$$p = -3uv \qquad \text{oder} \qquad uv = -\frac{p}{3} \tag{26}$$

Man kennt also von den gesuchten Größen u und v die Summe ihrer dritten Potenzen und das Produkt.

Wir nehmen an, dass u und v das Gleichungssystem (25)-(26) befriedigen. Wird dann die Gleichung (25) quadriert und von der Gleichung (26) das Vierfache der dritten Potenz gebildet, so ergibt sich

$$u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \qquad , \qquad 4u^3v^3 = -4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{27,28}$$

[15] Vgl. etwa I. I. Priwalow, Einführung in die Funktionentheorie, Teil II, 3. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1969 (Übersetzung aus dem Russischen) oder W. Tutschke, Grundlagen der Funktionentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967

Die Subtraktion der Gleichung (28) von der Gleichung (27) liefert

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \text{also} \qquad u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{2}\right)} \tag{29}$$

Aus (25) und (29) folgt durch Addition bzw. Subtraktion

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad , \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{30,31}$$

Wir setzen für die Quadratwurzel einen bestimmten, aber beliebigen ihrer zwei Werte fest; es sei u_1 eine Lösung von (30) und v_1 eine Lösung von (31).
Dann sind $u_1, u_1\rho, u_1\rho^2$ die drei Lösungen von (30) und $v_1, v_1\rho, v_1\rho^2$ die drei Lösungen von (31).[16]

Jedes Paar (u, v) mit $u \in \{u_1, u_1\rho, u_1\rho^2\}$ und $v \in \{v_1, v_1\rho, v_1\rho^2\}$ erfüllt die Gleichungen (30) und (31) und auch (28) und (25) (wie man leicht nachrechnet). Es muss aber auch $uv = p/3$ (das ist (26)), d. h. das Produkt uv reell sein.

Es sei u_1 eine beliebige Lösung von (30). Man wähle v_1 so, dass $u_1v_1 = -p/3$ ist. Dieses $v_1 = -p/(3u_1)$ erfüllt offensichtlich (31). Für die Paare $(u, v) = (u_1\rho, v_1\rho^2)$ und $(u, v) = (u_1\rho^2, v_1\rho)$ gilt ebenfalls $uv = -p/3$. Die Gleichung (23) wird also von

$$x_1 = u_1 + v_1, \qquad x_2 = u_1\rho + u_2\rho^2, \qquad x_3 = u_1\rho^2 + v_1\rho$$

gelöst; und diese drei sind alle möglichen Lösungen von (23) (wie man sich unschwer überlegt).

Benutzt man die Wurzelschreibweise, so haben wir die sogenannten Cardanischen Lösungsformeln. Die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat drei Lösungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
x_2 &= \rho\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \rho^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
x_3 &= \rho^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \rho\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$

Der Wert der Quadratwurzel ist dabei beliebig; die Werte der Kubikwurzeln sind so zu wählen, dass ihr Produkt gleich $-p/3$ wird.
Bekannt sind die Lösungsformeln für die quadratischen Gleichungen, aber auch für Gleichungen vom Grad 4. Es entsteht nun die Frage nach Lösungsformeln für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades, d. h. nach Formeln, die die Lösungen z. B. der Gleichung fünften Grades

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

[16] ρ ist eine dritte Einheitswurzel (vgl. Abb. 3).

durch ihre Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ausdrücken. Diese Koeffizienten können in den Formeln durch Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Radizieren miteinander verbunden sein. Man sagt hierzu kurz, man möchte die Nullstellen "durch Radikale" ausdrücken.

Fast dreihundert Jahre suchten die Mathematiker nach der Lösungsformel. Um 1800 sprach C. F. Gauß die Vermutung aus, dass eine Lösungsformel überhaupt nicht existiert. Es handelt sich (wie bei der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal) nicht um das Unvermögen der Mathematiker, dass keine Lösungsformel gefunden werden kann, sondern es dürfte - davon war Gauß überzeugt - im Gegenteil bewiesen werden, dass eine solche Formel unmöglich ist.

Im Jahre 1823 beschäftigte sich N. H. Abel mit dieser Problemstellung. Er glaubte zunächst, eine Auflösungsformel der allgemeinen Gleichung fünften Grades gefunden zu haben. Doch bald entdeckte er seinen Irrtum. Weitere Untersuchungen führten ihn dann auf das Ergebnis:

Satz (Abel). Für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades gibt es im allgemeinen keine Lösungsformeln.

Es gibt für spezielle Gleichungen jeden Grades sehr wohl Lösungsformeln.
So konnte Gauß Gleichungen der Form $x^n - 1 = 0$ "durch Radikale" auflösen. Abel entdeckte das Wesen für das von Gauß gefundene Resultat:
"Die Auflösung dieser Gleichungen beruht auf gewissen Relationen, die zwischen den Wurzeln bestehen."

Er konnte eine große Klasse durch Formeln ("durch Radikale") auflösbarer Gleichungen beschreiben, die später von L. Kronecker Abelsche Gleichungen genannt wurden.
Während Abel durch Relationen zwischen den Lösungen (Wurzeln) das Wesen der algebraischen Gleichungen zu durchdringen suchte, konnte E. Galois den Kernpunkt für die Behandlung algebraischer Gleichungen finden. Er gab einen genauen und vollständigen Überblick über alle "durch Radikale" lösbaren Gleichungen sämtlicher Grade. Jeder Gleichung wird eine Gruppe (von Vertauschungen der Wurzeln) zugeordnet. Ihre Struktur zeigt, ob eine Gleichung durch eine Formel auflösbar ist oder nicht.

Vom Standpunkt der Galoisschen Theorie lassen sich die Abelschen Gleichungen wie folgt charakterisieren:

1. Die Galoissche Gruppe einer Abelschen Gleichung ist kommutativ.
2. Jeder irreduzible Faktor einer Gleichung mit kommutativer Galoisscher Gruppe ist eine Abelsche Gleichung.

Das Kriterium für die Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung durch Auflösungsformeln kann man so aussprechen: Damit eine Gleichung durch Wurzelzeichen auflösbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Auflösung auf die einer Kette irreduzibler Abelscher Gleichungen vom Primzahlgrad zurückgeführt werden kann.

5 Anhang 2. Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

(H. Pieper)

Kapitel I

1. Wir wählen die Gerade g als x-Achse eines Koordinatensystems. Der Kreis k sei $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (mit dem Mittelpunkt $(0,1)$). k berührt g im Koordinatenursprung $(0,0)$.
Die umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Mengen g und k erhalten wir auf folgende Weise: Jedem Punkt a ordnen wir den Punkt b des Kreises zu, in dem der Kreis von der Geraden geschnitten wird, die den Punkt $(0,2)$ des Kreises mit a verbindet (Abb. 1). (Dem Punkt $(0,2)$ entspricht der unendlich ferne Punkt.)

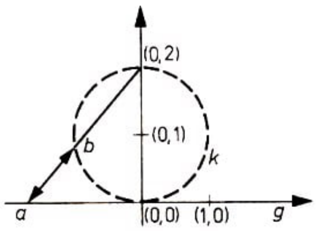


Abb.1

2. Folgen sind offenbar (spezielle) Funktionen: $n \to a_n$.
Der Funktionswert a_n heißt n-tes Glied der Folge, n die Platznummer desselben. Die Elemente einer Menge M können genau dann als Glieder einer Folge dienen, wenn die Menge abzählbar ist. Die Menge aller ganzen Zahlen ist abzählbar. Eine eineindeutige Zuordnung zwischen den ganzen Zahlen und den natürlichen Zahlen ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Die Menge der ganzen Zahlen kann daher als Folge in der Form

$$a_n = \begin{cases} k & \text{für } n = 2k \\ -k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

$(n = 1, 2, ...; \; k = 0, 1, 2, ...)$ geschrieben werden.

3. Es sei M eine unendliche Menge. a_1 sei ein beliebiges Element von M. Da M unendlich ist, gibt es ein Element a_2 in $M \setminus \{a_1\}$, ein Element a_3 in $M \setminus \{a_1, a_2\}$ usw. Die Folge $a_1, a_2, a_3, ...$ ist eine abzählbare Teilmenge von M.

4. Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar; folglich ist auch die Menge aller geordneten Paare ganzer Zahlen (Beweis ähnlich dem Beweis von Satz 3 in § 4) und damit (Induktion!) die Menge aller n-Tupel ganzer Zahlen abzählbar. A ist als Teilmenge davon auch abzählbar.

5. c) Es ist

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B)$$

Daher ist

$(A \cup B) \cap (C \cup D) = [A \cap (C \cup D)] \cup [B \cap (C \cup D)] = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$

d). Es ist

$[A \cap (B \cup C)] \cup [(A \cup B) \cap C] = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

8. Es sei $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x a_0$ ein Polynom mit der Nullstelle α : $f(\alpha) = 0$. Setzt man $x = 1/y$ und multipliziert mit y^m, dann hat das entstehende Polynom $y^m f(1/y) = g(y)$ in y die Nullstelle $1/\alpha : g(1/\alpha) : (1/\alpha)^m f(\alpha) = 0$.
Somit ist $1/a$ ebenfalls eine algebraische Zahl.

9. Nein. Ist α eine algebraische Zahl und τ eine transzendente Zahl, so ist $\alpha - \tau = \omega$ transzendent. (Wäre ω algebraisch, so wäre nämlich auch $\alpha - \omega = \tau$ transzendent.) Die Summe $\alpha = \tau + \omega$ der transzendenten Zahlen τ und ω ist algebraisch.

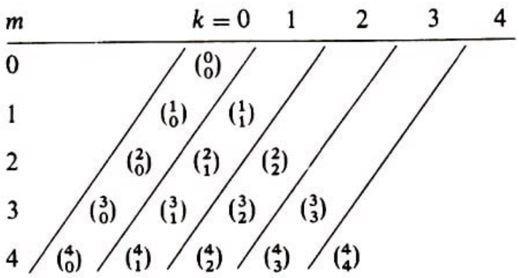
Anderer Lösungsweg: Ist α transzendent, so ist auch $-\alpha$ transzendent. Es folgt $\alpha + (-\alpha) = 0$, aber 0 ist algebraisch.

Kapitel II

1. Jede Zahl innerhalb der Randzahlen steht unter der Lücke der beiden über ihr stehenden Zahlen und ist gleich deren Summe. Für die Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

was dieses Bildungsgesetz erklärt.



2. $(1+1)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$ (Binomischer Satz).

4. $P_n = nP_{n-1}$ (Induktion).

5. Aus n verschiedenen Dingen kann man unter Berücksichtigung der Reihenfolge k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ verschiedene Arten auswählen (z. B. Induktion). Aus jeder Anordnung (zu je k von n Dingen) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Kombinationen) erhält man durch Permutation $k!$ verschiedene Anordnungen (zu je k von n Dingen) unter Berücksichtigung der Reihenfolge.

Bezeichnet man mit a die gesuchte Anzahl der Kombinationen, so gilt also $k!a = n(n-1)...(n-k+1)$, somit

$$a = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

6. Man deute die Binomialkoeffizienten als Kombinationszahlen. Es ist

$$(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n) = a^n + a^{n-1}s_1 + a^{n-2}s_2 + ... + a^{n-k}s_k + ... + s_n \quad (1)$$

worin
$s_1 = b_1 + b_2 + ... + b_n$
s_2 die Summe aller verschiedenen Produkte aus je zwei der Zahlen $b_1, b_2, ..., b_n$ ist, und allgemein
s_k die Summe aller Produkte aus je k Zahlen ist, die aus $b_1, b_2, ..., b_n$auf alle möglichen verschiedenen Arten ausgewählt sind, und

$$s_n = b_1 b_2 ... b_n$$

Die Anzahl der Summanden in s_k ist gleich der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, je k untereinander verschiedene Zahlen aus den n Zahlen $b_1, ..., b_n$ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, d. h. gleich $\binom{n}{k}$. Setzt man in (I)$b_1 = b_2 = ... = b_n = b$, so folgt der Binomische Satz.

8. Es ist $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$, also $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Es ist daher $e^{a+bi} = 1$ genau dann, wenn $e^a \cos b = 1$ und $e^a \sin b = 0$ ist (also nicht $e^{a+bi} = 1$ genau dann, wenn $a + bi = 0$, d. h. $a = 0$, $b = 0$ ist).

9. Es ist

$$\frac{120^{119}}{119^{120}} = \frac{1}{119}\left(1 + \frac{1}{119}\right)^{119} < \frac{1}{119}e < 1$$

d. h. $119^{120} > 120^{119}$.

10. Die ersten beiden Grenzwerte folgen aus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ unter Benutzung von $a^y = e^{y \ln a}$. (Man setze $y \ln a = x$.) Den dritten Grenzwert erhält man z. B. wie folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

(Setze $y = 1 + x$, $z = \ln y$, also $y = e^{\ln y} = e^z$.)

12. (Vgl. Aufgabe 10).

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

13. Nach 33 Jahren liegen

$$100\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{33} = 100\left(1 + \frac{1}{\frac{100}{3}}\right)^{100/3} \approx 100e \approx 270$$

Mark auf dem Konto.

14. Nach $1/n$-ten Teil des Jahres wächst das Kollektiv auf $N + \frac{1}{n}N = N(1 + 1/n)$

Werktätige. Nach einem Jahr wächst es auf $N(1 + 1/n)^n$ Werktätige. Es ist stets $(1+1/n)^n < 3$. Das Kollektiv kann in einem Jahr also nicht um das Vierfache anwachsen.

16. Die angegebenen trigonometrischen Formeln folgen leicht aus den Eulerschen Formeln $\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}$ und den Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Kapitel III

2. Es gilt (wie man leicht nachrechnet)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 3x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Da x_1, x_2, x_3 Lösungen der Gleichung $x^2 + px^2 + qx + r = 0$ sind, gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \qquad x_1x_2 + x_3x_3 + x_3x_1 = q, \qquad x_1x_2x_3 = -r$$

Daher sind

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q \qquad \text{und} \qquad y_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p^3 + 3pq - 3r$$

Lösungen der Gleichung $y^2 + ay + b = 0$ mit

$$\begin{aligned} a &= -(y_1 + y_2) = p^3 - p^2 - 3pq + 2q + 3r \qquad \text{und} \\ b &= y_1y_2 = -p^5 + 5p^3q + 3p^2r - 6pq^2 + 6qr \end{aligned}$$

5. Es sei

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \\ g(x) &= b_0(x - x_1')(x - x_2')...(x - x_m') \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_0^m \prod_{k=1}^{n} g(x_k) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(x_k - x_i') = (-1)^{mn} b_0^n a_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(x_i' - x_k) \\ &= (-1)^{nm} b_0^n \prod_{i=1}^{m} f(x_i) = (-1)^{nm} R(g, f) \end{aligned}$$

6. Sind $x_1, ..., x_n$ die Nullstellen von $f(x)$ und $x_1', ..., x_n'$ die Nullstellen von $g(x)$ und gilt $R(f, g) = 0$, so ist wenigstens ein Faktor in der Produktdarstellung der Lösung der Aufgabe 5 gleich 0, d. h., es gibt ein i und ein k mit $x_k - x_i' = 0$, d. h., $f(x)$ und $g(x)$ besitzen eine gemeinsame (komplexe) Nullstelle.

7. $R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(x_k - x_i')$ ist als Produkt $a_0^m \prod_{k=1}^{n} g(x_k)$ homogen vom Grad n in $b_0, b_1, ..., b_m$ und als Produkt $(-1)^{mn} b_0^n \prod_{i=1}^{m} f(x_i')$ homogen vom Grad m in $a_0, a_1, ..., a_n$. $\frac{R(f,g)}{a_0^m b_0^n}$ ist ein Polynom in $\frac{a_1}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, ..., \frac{b_m}{b_0}$.

Dies sind die elementarsymmetrischen Polynome der Nullstellen $x_1, ..., x_m, x_1', ..., x_m'$ von $f(x)$ bzw. $g(x)$. Folglich ist $\frac{R(f,g)}{a_o^m b_0^n}$ sowohl in den x_k als auch in den x_i' symmetrisch.

6 Anhang 3. Zum siebenten Hilbertschen Problem

(A. O. Gelfond)[17]

Jede Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten a_i bezeichnet man als eine algebraische Zahl.
Jede nicht algebraische Zahl heißt transzendente Zahl. Die Existenz transzendenter Zahlen ist streng Von J . Liouville im Jahre 1844 bewiesen worden, aber schon L. Euler hatte die Existenz solcher Zahlen für gesichert gehalten, obwohl er allem Anschein nach eine vollkommen strenge Definition der transzendenten Zahl nicht besaß.

Bei Euler finden wir die ersten allgemeinen Behauptungen, die sich auf die arithmetische Natur von Zahlen beziehen. Er hat z. B. behauptet, dass die Zahlen $a^{\sqrt{b}}$ mit irrationalem a und ganzem nichtquadratischem b nicht nur nicht rational, sondern nicht einmal mehr "irrational" sind. Das bedeutet in unserer Terminologie, dass sie transzendent sind.

Bei der Schaffung und Weiterentwicklung von Beweismethoden für die Transzendenz von Zahlen wurden in den über 60 Jahren, die seit der Stellung des Hilbertschen Problems vergangen sind, wesentliche Erfolge erzielt, und das grundlegende von D. Hilbert gestellte Problem ist ganz allgemein gelöst worden.
Zwei Hauptmethoden von Transzendenzbeweisen gründen sich, wie das schon von Hilbert vermutet wurde, auf die Untersuchung der arithmetischen und analytischen Eigenschaften einer Funktion, die als Wert für ein algebraisches Argument die untersuchte Zahl annimmt. Wir konzentrieren uns nur auf die wichtigsten Etappen der Entwicklung dieser Methoden.

Das geometrische Problem, ob das Verhältnis von Grundlinie und Seite in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem das Verhältnis der Winkel eine irrationale algebraische Zahl ist, transzendent ist, läuft auf die Frage der Transzendenz der Zahl $e^{\pi\alpha} = i^{-2i\alpha}$ für algebraisches reelles α hinaus.

Die Transzendenz der Zahlen von der Form $\alpha^{i\sqrt{q}}$, wo $\alpha \neq 0, 1$ eine algebraische und $q \geq 1$ eine ganze Zahl ist, wurde von A. O. Gelfond[18] im Jahre 1929 bewiesen, und zwar mit Hilfe einer Untersuchung des Wachstums und der arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten, die bei der Entwicklung der Funktion α^z in eine Newtonsche Interpolationsreihe mit den Stützstellen $x + i\sqrt{q}y$ auftreten, wobei x und y alle ganzen Werte durchlaufen.

Dieselbe Methode hat in der Folgezeit R. O. Kuzmin für den Transzendenzbeweis bei

[17] Nachdruck aus: "Die Hilbertschen Probleme" (erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Aleksandrow, 2. Aufl., Leipzig 1979, Ostwalds Klassiker Bd. 252, S. 151-159 (Originalausgabe Moskau 1959). Die folgenden Fussnoten wurden von der Redaktion dieses Buches verfasst.

[18] C.r. Acad. sei. 189 (1929) S. 1224-1228.

Zahlen der Form $\alpha^{\sqrt{q}}$ verwendet, und zwar unter denselben Voraussetzungen für α und q wie oben; zusätzlich verlangte er noch, dass $\sqrt{q}$ irrational ist.
Auch von C. L. Siegel ist die Methode benutzt worden, um die Transzendenz von einer der Perioden der elliptischen Funktion $\wp(x)$, die der Differentialgleichung

$$[\wp'(x)]^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$$

genügt, für algebraische Werte der Invarianten g_2 und g_3 zu beweisen.

Die Transzendenz der Zahlen der Form α^β mit algebraischem $\alpha \neq 0, 1$ und algebraischem, irrationalem β (auf die Frage nach der arithmetischen Natur solcher Zahlen bezieht sich ja die Problemstellung von Hilbert) hat zuerst im Jahre 1934 Gelfond mit Hilfe tiefgehender Untersuchungen der arithmetischen und analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion gezeigt.

Wenig später hat auch Th. Schneider[19] diesen Satz bewiesen. Schneider verwendete die Gelfondsche Methode auch für den Transzendenzbeweis bei beiden Perioden der elliptischen Funktionen für algebraische Invarianten.
Ferner bewies er damit die Transzendenz vieler Konstanten, die mit den elliptischen Funktionen zusammenhängen. Die Transzendenz der Zahlen α^β für algebraische α und β ist der Transzendenz der entsprechenden Logarithmenverhältnisse $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ äquivalent. Hieraus folgt insbesondere, dass alle solchen Logarithmen entweder rationale oder transzendente Zahlen sind.

Das allgemeine Problem, zu zeigen, dass zwischen Zahlen der Form α^β" unter den obigen Voraussetzungen bezüglich α und β keine algebraischen Beziehungen mit ganzen Koeffizienten bestehen, ist bis jetzt noch nicht gelöst worden.

Gewisse Spezialfälle dieses Problems hat Gelfond 1949 mittels einer wesentlichen Verschärfung der obengenannten Methoden erledigt. Speziell wurde gezeigt, dass keine solchen algebraischen Beziehungen zwischen den Zahlen a^α und a^{α^2} bestehen können, wo $a \neq 0, 1$ eine algebraische Zahl und α eine kubische Irrationalität ist.
Ungeklärt ist noch die Frage, ob zwischen den Logarithmen algebraischer Zahlen algebraische Relationen mit ganzen Koeffizienten bestehen können. (Man weiß nur, dass eine homogene Beziehung zwischen zwei Logarithmen nicht bestehen kann.) Dieses Problem beansprucht vom Standpunkt möglicher Anwendungen bei anderen zahlentheoretischen Fragen, speziell bei der Lösung von Gleichungen in ganzen Zahlen, großes Interesse.

Wir bemerken nochmals, dass das Transzendenzproblem für die Zahlen der Form α^β oder $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ erstmalig, wenn auch in spezieller Weise, von Euler formuliert worden ist (Introductio in analysin infinitorum, Bd. 1, 1748).

Alle Zahlen, von deren Transzendenz oben die Rede war, sind Werte analytischer Funktionen mit folgender Eigenschaft: Ist einer ihrer Werte für ein algebraisches Argument algebraisch, so folgt daraus, dass ihre Werte und die Produkte der Werte ihrer Ableitungen mit einer gewissen Zahl auf einer sehr umfangreichen Argumentmenge algebraisch sind.

[19] J. f. reine und angewandte Math. 172 (1934) S. 65-69.

So sind z. B. für die Funktionen alle Zahlen $\frac{1}{\ln^k a_0}\varphi^{(k)}(z)$ für $z = m + nz_0$ algebraische Zahlen, wenn a, z_0, a_0 algebraisch sind und z_0 überdies irrational ist; $k \geq 0$, m und n sollen dabei ganze Zahlen sein.

Zu einer anderen Klasse von Transzendenzproblemen gehört die Transzendenz von Werten solcher Funktionen, die in rasch konvergierende Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten entwickelt werden können und linearen Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten genügen.
Das einfachste Beispiel für solche Funktionen ist die Funktion e^z, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, denn $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.
Solche Funktionen bezeichnete Siegel als E-Funktionen.

Im Jahre 1873 bewies Ch. Hermite die Transzendenz der Zahl[20] e und 1882 zeigte F. Lindemann[21], indem er die Methode von Hermite verallgemeinerte, dass eine Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k e^{z_k} = 0$ mit algebraischen A_k die nicht alle 0 sind, und untereinander verschiedenen algebraischen z_k nicht bestehen kann.
Damit wurde die Transzendenz von π gezeigt, weil ja $e^{2\pi i} = 1$ ist, was nicht möglich wäre, wenn π und damit $2\pi i$ eine algebraische Zahl wäre.[22]

Aus der Transzendenz von π folgt bekanntlich die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal. Für die E-Funktionen, die Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen, hat Siegel[23] zum ersten Mal 1930 die Transzendenz und die algebraische Unabhängigkeit der Funktionswerte für algebraische Argumente bewiesen. Er verwendete dabei eine von ihm ausgearbeitete allgemeine Methode.
Zum Beispiel wurde von ihm die Transzendenz der Zahlen der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{[n!]^2}$ für algebraisches $a \neq 0$ bewiesen und noch allgemeiner die der Werte der Besselschen oder Zylinderfunktionen.

In den letzten Jahren hat A. B. Sidlovskij in dieser Richtung wesentliche Fortschritte erzielt; man kann sagen, dass er die diesem Gebiet zugehörigen Fragestellungen erschöpfend behandelt hat. Er betrachtete ein System von E-Funktionen, das die Lösung eines Systems linearer Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten ist, wobei die Koeffizienten der Polynome algebraische Zahlen sind. Sidlovskij bewies nun folgendes:

Aus der algebraischen Unabhängigkeit eines solchen Funktionensystems über dem Körper der rationalen Funktionen folgt die algebraische Unabhängigkeit der Funktionswerte für algebraische Argumente über dem Körper der rationalen Zahlen.

Das gilt bis auf einzelne triviale Ausnahmefälle. Unter anderem wurde von ihm z. B.

[20] C.r. Acad. sci. 77 (1873) S. 18, 74, 226, 285.
[21] Math. Ann. 20 (1882) S. 213.
[22] Die Frage nach der arithmetischen Natur der Zahlen e und π hat eine lange Geschichte. Im Jahre 1767 konnte Lambert zeigen, dass die Zahlen π und e^m (für rationales m) nicht rational sind (Mem. Ac. Berlin, 1761 (1768)). Liouville zeigte 1840 (J. math. pures et appl.), dass weder e noch e^2 quadratische Irrationalitäten sein können.
[23] Abh. d. preuss. Akad. d. Wiss., No. 1 (1929-1930) S. 1-70.

die Transzendenz der Zahlen der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{[n!]^q}$ bewiesen, wo $a \neq 0$ eine algebraische und $q \geq 1$ eine ganze Zahl ist.

Wir erwähnen noch das sehr schöne Theorem von K. Mahler:

$\alpha = 0,123456789101112...$ ist eine transzendente Zahl, d. h. mit anderen Worten: Der Dezimal- oder q-adische Bruch, in dem nach dem Komma nacheinander alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe oder allgemeiner die Ziffern der Wertefolge $P(n)$, $n = 1, 2, 3, ...$ eines ganzzahligen Polynoms stehen, ist transzendent.
Dieses Resultat bekam man mit Hilfe des Satzes von Schneider über die Annäherung algebraischer Zahlen durch rationale Brüche. Es ist eine direkte Folgerung des später von K. F. Roth erhaltenen Theorems.

Neben gewissen geometrischen Anwendungen der Tatsache, dass diese oder jene der bisher besprochenen Zahlen transzendent sind, hat das sogenannte Transzendenzmaß oder Maß der algebraischen Unabhängigkeit große praktische Bedeutung. Dem Studium dieses Gegenstandes sind viele Arbeiten gewidmet.

Sei $P(x_1, ..., x_s)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, die keinen gemeinsamen Teiler haben. H sei eine obere Schranke ihrer Beträge, $n_1, ..., n_s$ seien die Grade bezüglich $x_1, ..., x_s$. Dann lassen sich für beliebige reelle Werte $x_1, ..., x_s$ diese Koeffizienten verschieden von Null so wählen, dass die Ungleichung

$$|P(x_1, ..., x_s)| < H{-}(1 + \varepsilon)n_1...n_s, \qquad \varepsilon > 0$$

erfüllt ist, wobei ε eine beliebig kleine Konstante ist. Als Maß der Transzendenz oder der gegenseitigen Transzendenz der Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_s$ bezeichnet man die durch die folgende Beziehung definierte Funktion $\Phi(H, n_1, ..., n_s)$:

$$\Phi(H, n_1, ..., n_s) = \inf |P(\alpha_1, ..., \alpha_s)| > 0$$

In dieser Richtung erhielten Siegel, J. F. Koksma, Mahler, J. Popken, N. I. Feldman, Sodlovskij, Gelfond, A. Baker u. a. zahlreiche und interessante Resultate.
Allgemeine Abschätzungsmethoden und viele andere Ergebnisse Feldmans wurden in der Folgezeit in einer Reihe von Arbeiten dieser Forschungsrichtung verwendet. Wir gehen hier nur auf zwei Resultate ein, die eine direkte Beziehung zum 7. Problem von Hilbert haben. Vor mehr als 30 Jahren bewies Gelfond die Ungleichung:

$$|t_1 \ln \alpha + t_2 \ln \beta| > e^{-\ln^q t}, \qquad q > 3, t \geq t_0$$

Dabei sind t_1 und t_2 ganze Zahlen mit $|t_1| < t$, $|t_2| < t$; α und β sind algebraische Zahlen, deren Logarithmen über dem rationalen Zahlkörper linear unabhängig sind.
Eine solche Ungleichung kann man herleiten, wenn man in den Beweis der rein qualitativen Aussage der Transzendenz von $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ Abschätzungen für die Annäherung solcher Zahlen durch rationale Brüche mit einfließen lässt.

In einer Reihe von Sätzen der analytischen Zahlentheorie und bei einigen Problemen aus der Theorie der diophantischen Gleichungen hat man diese Ungleichung verwendet. Ende 1966 konnte Baker mit Hilfe einer äußerst geistreichen Verschärfung der Gelfondschen Methode die allgemeine Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{s} t_k \ln \alpha_k\right| > e^{-\ln^q t}, \qquad q > s+1, |t_k| \leq t, t \geq t_0$$

herleiten. Hierbei sind die t_k ganz mit $\sum\limits_{k=1}^{s} |t_k| > 0$, die α_k sind algebraische Zahlen, deren Logarithmen über dem rationalen Zahlkörper unabhängig sind.

In letzter Zeit konnte Feldman die Ungleichung von Baker noch wesentlich verschärfen. Er zeigte die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{s} \beta_k \ln \alpha_k\right| > H^{-\gamma}$$

wo H das Maximum der Höhen der algebraischen Zahlen β_k ist. Die α_k sind algebraische Zahlen mit linear unabhängigen Logarithmen; γ hängt von H nicht ab.

Bei der Bakerschen Ungleichung kann man - genau wie in ihrem Spezialfall, der Ungleichung von Gelfond - bei gegebenen $\alpha_1, ..., \alpha_s$ und q angeben, ab welchem t sie richtig wird.
Damit wird es möglich, für die Lösungen der Gleichung von A. Thue eine effektive Schranke anzugeben. Diese Gleichung lautet: $P(x, y) = c$, wo $P(x, y)$ ein homogenes Polynom vom Grad $n > 2$ mit ganzen Koeffizienten und c eine ganze Zahl ist.

Dieses Problem war viele Jahre offen und galt als eines der schwierigsten. Eine umfassende Literaturzusammenstellung zu den Fragen der Transzendenz findet man in dem Artikel von Feldman und Sidlovskij "Entwicklung und gegenwärtiger Stand der Theorie der transzendenten Zahlen" (Uspechi math. nauk, 22, Nr. 3, 1967).

Während die Forschungsrichtung in der Theorie der transzendenten Zahlen, die Hermite und Lindemann in ihren Arbeiten eingeleitet haben, durch die Arbeiten Sidlovskij um sehr allgemeine Resultate bereichert wurde, ist die Richtung, die sich auf Grund der Anregungen Eulers und Hilberts zu entwickeln begann, vorerst noch nicht zu hinreichend allgemeinen Aussagen vorgedrungen.

So ist zum Beispiel nicht einmal über die lineare Unabhängigkeit der Zahlen ω^{α_k}, $k = 1, ..., n$ über dem rationalen Zahlkörper etwas bekannt; dabei sollen die α_k verschiedene irrationale algebraische Zahlen und $\omega \neq 0, 1$ eine algebraische Zahl sein.
Eine Ausnahme bildet lediglich der Fall $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \alpha^2$ mit einer kubischen Irrationalität α. (Der Fall einer quadratischen Irrationalität an ist eine Folgerung aus der Transzendenz von ω^α.)
Schließlich weiß man auch nichts über die Transzendenz der Zahl $\prod\limits_{k=1}^{s} \omega_k^{\alpha_k} = \alpha$ für algebraische ω_k und α_k (Baker).
Die Zahlen $\ln \omega_k$ sind linear unabhängig über dem rationalen Zahlkörper.

Das Problem der algebraischen Unabhängigkeit der Logarithmen algebraischer Zahlen ist auch noch nicht gelöst. Ausgenommen ist hierbei eine homogene Beziehung zwischen zwei Logarithmen, die bekanntlich nicht bestehen kann. Ferner ist bis jetzt noch nichts über die arithmetische Natur der Eulerschen Konstanten bekannt.
Dasselbe gilt für die Zahlen $\zeta(2n+1)$, wo $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion und $n \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl ist.
Schließlich gilt allem Anschein nach der folgende Satz:

Bleiben die Näherungsbrüche in der Kettenbruchentwicklung einer Zahl beschränkt und ist der Kettenbruch unendlich, so ist diese Zahl entweder eine quadratische Irrationalität oder eine transzendente Zahl.