I.M. Gelfand, E.G. Glagolewa
E. Schnol

Funktionen und ihre grafische Darstellung

Übersetzung: R. Hofmann
1974 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 58
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Aus dem Vorwort zur russischen Auflage

Dieser Band mit dem Titel "Funktionen und Graphen" enthält die allgemeinen Methoden der Konstruktion von graphischen Darstellungen an Hand von Beispielen der wichtigsten elementaren Funktionen.

Das Buch ist für Schüler von der 9. Klasse an geschrieben. Es ist nicht ganz einfach, die Konstruktion graphischer Darstellungen aus einem Buch zu lernen, weil dem Leser die Tafel fehlt, an der der Lehrer den Graphen während der Darbietung schrittweise konstruiert. Deshalb haben die Autoren von Abbildungen der fertigen Graphen im allgemeinen abgesehen und die Zeichner des Büchleins veranlasst, die Seiten mit Momentaufnahmen einer solchen Tafel anzufüllen. Wenn Sie den Zeichnungen folgen, so werden Sie den Prozess der Konstruktion Schritt für Schritt erfassen.

Ein Teil des theoretischen Materials ist im Buch in Form von Aufgaben dargestellt. Deshalb ist die vollständige Lösung aller Aufgaben und Beispiele, die im Text enthalten sind, für das Verständnis notwendig...

In der zweiten Auflage wurde der Abschnitt über Potenzfunktionen eingefügt. Außerdem sind einige Aufgaben und Zeichnungen neu aufgenommen worden.

Die Autoren

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Das vorliegende Büchlein wendet sich an einen breiten Leserkreis, kann Schülern von der 8. oder 9. Klasse an empfohlen werden und will der mathematischen Allgemeinbildung dienen.

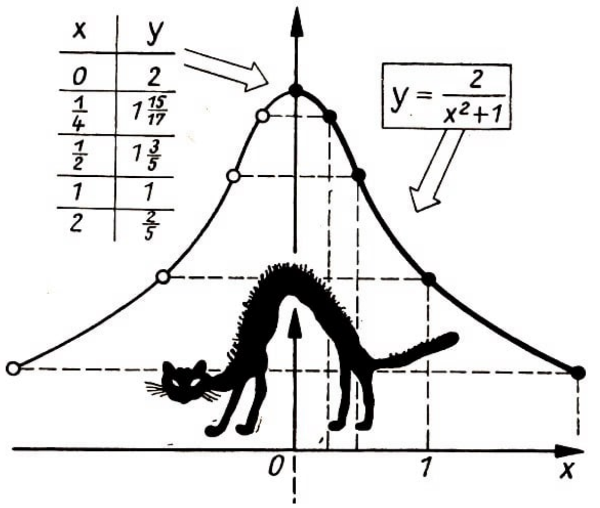
An Hand des recht anschaulichen Stoffes werden das allgemeine logische Schließen, die Verallgemeinerung beziehungsweise Spezialisierung, das Schaffen von Querverbindungen sowie die Systematik bei der Lösung mathematischer Probleme geübt und fast unmerklich gefestigt. Allerdings handelt es sich nicht um eine Sammlung von Knobelaufgaben oder Kuriositäten, sondern um ein systematisches kleines Lehr- und Übungsbuch in Form einer Vorstufe programmierten Lehrmaterials.
Es wird deshalb vom Leser der Wille zum Mitdenken erwartet, und der volle Erfolg kann sich nur bei intensivem Durcharbeiten - dann aber auch bei nicht speziell mathematisch talentierten Schülern - einstellen.

Dem Lehrer oder Zirkelleiter bietet das Buch eine Fülle von Anregungen, Beispielen und Aufgaben, die zum Teil recht originell sind und überraschende Anwendungen der im ganzen völlig elementaren Überlegungen aufzeigen.

Es wäre zu wünschen, dass dieses kleine Buch ebenso wie in der Sowjetunion auch bei uns recht viele aufgeschlossene Leser findet.

R. Hofmann

Inhaltsverzeichnis



1 Zur Einleitung

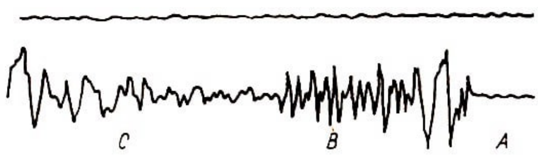


Abb. 1.1

Die Abbildung zeigt zwei Kurven, die mit Hilfe eines Gerätes aufgezeichnet worden sind, das die Schwankungen der Erdrinde registriert und Seismograph genannt wird. Die obere Kurve wurde aufgezeichnet, als sich die Erdrinde in Ruhe befand, auf der unteren sind die Signale eines Erdbebens zu sehen.

Abb. 1.2

Die beiden Kurven der zweiten Abbildung sind Kardiogramme. Das obere zeigt die normale Arbeit des Herzens, das untere wurde an einem Kranken aufgenommen.

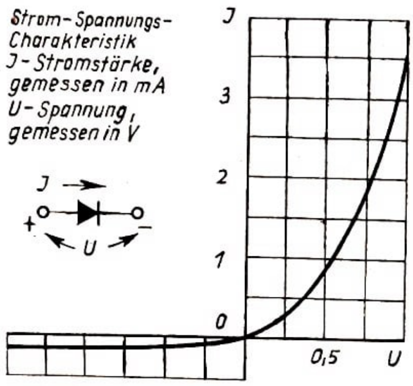


Abb. 1.3

Die Abbildung 1.3 zeigt die sogenannte Charakteristik einer Halbleiterdiode, das heißt die Kurve der Abhängigkeit der Stromstärke von der anliegenden Spannung.

Der Seismologe erkennt bei der Analyse des Seismogramms, wann ein Erdbeben stattgefunden hat und wo sich sein Zentrum befand. Er bestimmt die Stärke und die Art der Auslösung.
Der Arzt, der einen Kranken untersucht, gewinnt aus dem Kardiogramm Aufschluss über Störungen der Herztätigkeit. Das Studium des Kardiogramms hilft bei der richtigen Diagnose der Erkrankung.
Der Radioingenieur wiederum bestimmt aus der Charakteristik der Halbleiterdiode die besten Werte für die Betriebsspannung und den Betriebsstrom in einer Schaltung.
Seismologe, Arzt und Radioingenieur studieren gewisse Funktionen mit Hilfe ihrer graphischen Darstellungen.

Was aber ist eine Funktion, und was verstehen wir unter ihrer graphischen Darstellung.

Bevor wir eine genaue Definition der Funktion geben, wollen wir uns ein wenig über diesen Begriff unterhalten. Man spricht doch grob gesagt immer dann von einer Funktion, wenn jeder Zahl x einer gewissen Menge, welche die Mathematiker den Definitionsbereich der Funktion nennen, eindeutig eine Zahl y aus einer anderen Menge entspricht, die Wertebereich der Funktion genannt wird.
Man nennt x auch häufig das Argument, das zugehörige y aber Wert der Funktion.

So hat zum Beispiel die Größe der Verschiebung der Erdoberfläche während eines Erdbebens in jedem Moment einen ganz bestimmten Wert, die Größe dieser Verschiebung ist also eine Funktion der Zeit.
Die Stromstärke in der Halbleiterdiode ist eine Funktion der Spannung, weil jedem Wert der angelegten Spannung ein ganz bestimmter Wert der fließenden Stromstärke entspricht.

Man kann sehr viele solche Beispiele finden: der Umfang des Kreises ist eine Funktion seines Durchmessers; die Höhe, bis zu der ein vertikal nach oben geworfener Stein aufsteigt, ist eine Funktion der Anfangsgeschwindigkeit und so weiter.

Jetzt wollen wir aber eine genaue Definition geben. Wenn man sagt, dass die Zahl y eine Funktion der Zahl x ist, so muss man außerdem angeben, welche Werte x überhaupt annehmen kann. Diese "erlaubten" Werte für das Argument x werden als zulässige Werte bezeichnet, die Menge aller zulässigen Werte aber nennt man den Definitionsbereich der Funktion.

Wenn wir zum Beispiel davon sprechen, dass das Volumen V einer Kugel eine Funktion des Radius ist, dann wird der Definitionsbereich der durch die Vorschrift $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ gegebenen Funktion aus allen reellen Zahlen bestehen, die größer als Null sind, da R als Maßzahl des Kugelradius nur eine positive Zahl sein kann.
Immer wenn eine Funktion gegeben wird, muss unbedingt ihr Definitionsbereich mit angegeben werden.

Definition 1
Wir sprechen von einer Funktion $y = f(x)$, wenn erstens der Definitionsbereich, das heißt die Menge der zulässigen Argumentwerte x gegeben ist und wenn zweitens jedem zulässigen Wert x genau ein Wert y, zugeordnet ist. Für die Formel $y = f(x)$ (gelesen:

"Ypsilon gleich ef von x") sagt man auch manchmal: "die Zahl y ist eine Funktion der Zahl x".

Das Zeichen $f(a)$ bedeutet den Zahlenwert der Funktion $y = f(x)$, der dem Argument $x = a$ zugeordnet ist.
Ist zum Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

so ist

$$f(2) = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}, \quad f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}, \quad f(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1$$

und so weiter.

Die Vorschrift, mit deren Hilfe man zu jedem x-Wert den entsprechenden Funktionswert y findet, kann auf sehr unterschiedliche Weise gegeben sein, und es gibt keine Beschränkung für ihre Form.
Wenn behauptet wird, dass y eine Funktion von x ist, so muss immer nur überprüft werden, ob der Definitionsbereich gegeben ist, ob also gesagt wird, welche Zahlen für x stehen können, und ob eine Regel angegeben wird, mit deren Hilfe man jedem zulässigen Wert x eindeutig einen Wert y zuordnen kann.

Wie kann eine solche Vorschrift etwa aussehen? Wir geben hierfür ein paar Beispiele:

1. Es sei bekannt, dass zwischen einer beliebigen reellen Zahl x und der Zahl y stets die Beziehung $y = x^2$ besteht. Dann ist die Funktion $y = f(x) = x^2$ durch eine Formel gegeben. Die Vorschrift kann aber auch wie in dem folgenden Beispiel in Worte gekleidet sein.

2. Die Funktion $y = f(x)$ sei folgendermaßen definiert: wenn x eine positive Zahl ist, dann ist y gleich eins. Ist x negativ, dann gelte $y = -1$. y sei schließlich gleich null, wenn x gleich null ist.

Wir geben noch ein weiteres Beispiel für eine Funktion, die durch eine in Worte gekleidete Vorschrift gegeben ist.

3. Jede Zahl x kann in der Form

$$x = y + a$$

geschrieben werden, wobei y eine ganze Zahl und a eine nichtnegative reelle Zahl kleiner als eins ist. Es ist klar (warum?), dass jeder Zahl x eine einzige Zahl y entspricht, dass also y eine Funktion von x ist. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist der gesamte Zahlenstrahl.
Die so definierte Funktion heißt "ganzzahliger Teil von x" und wird folgendermaßen geschrieben:

$$y = [x]$$

Es ist zum Beispiel $[3,53] = 3$, $[4] = 4$, $[0,3] = 0$, $[-0,3] = -1$.
Wir werden diese Funktion später in unseren Übungen verwenden.

4. Wir betrachten die Funktion $y = f(x)$, die durch die Formel

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

dargestellt wird. Welcher Definitionsbereich gehört dazu?
Wenn eine Funktion durch eine Formel gegeben wird, dann betrachtet man gewöhnlich ihren sogenannten natürlichen Definitionsbereich, das heißt die Menge von Zahlen, für die man der gegebenen Formel einen Sinn beilegen kann.
Dem natürlichen Definitionsbereich unserer Funktion gehört folglich die Zahl 5 nicht an (weil für $x = 5$ der Nenner des Bruches gleich null wird); genauso wie ihm alle Zahlen nicht angehören, die kleiner als -3 sind (weil für $x < -3$ der Radikant negativ wird). Der natürliche Definitionsbereich unserer Funktion $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ besteht somit aus allen reellen Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$x \geq -3 \quad , \quad x \neq 5$$

Eine Funktion kann auch geometrisch durch ihre graphische Darstellung gegeben sein. Um die graphische Darstellung einer Funktion zu gewinnen, betrachten wir irgend einen zulässigen x-Wert und den ihm zugeordneten Wert y.
Es sei zum Beispiel der Wert, den wir für x setzen, die Zahl a und der ihm zugeordnete Zahlenwert von y gleich $b = f(a)$. Das Zahlenpaar (a, b) stellen wir in der Ebene als Punkt mit den Koordinaten (a, b) dar.
Analog bestimmen wir für alle zulässigen Werte von x diese Punkte. Die sich ergebende Menge von Punkten ist die graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$.

Definition 2

Die graphische Darstellung (der Graph[1]), das Bild oder auch die Kurve) einer Funktion ist die Menge der Punkte, deren Abszissen zulässige Werte des Argumentes x, deren Ordinaten aber entsprechende Funktionswerte y sind.

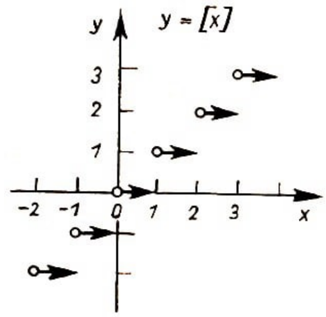


Abb. 1.4

Als Beispiel ist in Abbildung 1.4 der Graph der Funktion

$$y = [x]$$

dargestellt. Er besteht aus einer unendlichen Menge waagerechter Strecken. Die Pfeile sollen andeuten, dass die rechten Endpunkte der Strecken nicht zum Graphen dieser

[1]"Graph" ist hier nicht identisch mit dem Grundbegriff der Graphentheorie

Funktion gehören, während die starke Markierung der linken Endpunkte andeutet, dass sie zum Graphen gehören.

Die graphische Darstellung kann die Rolle der Regel übernehmen, die die Funktion definiert. Man kann etwa der Charakteristik der Halbleiterdiode (vgl. Abb. 1.5) entnehmen, dass die Funktion y den Wert 1,3 (mA) annimmt, wenn das Argument U gleich 0,6 (V) ist.

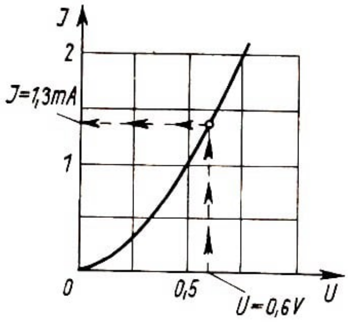


Abb. 1.5

Die Darstellung einer Funktion durch ihren Graphen ist sehr bequem, da man eine solche Darstellung mit einem Blick von der einer anderen Funktion unterscheiden kann. Wir betrachten noch einmal die untere Kurve von Abbildung 1.1. Der unerfahrenste Mensch wird dieser graphischen Darstellung sofort die Signale des Erdbebens entnehmen können (Abschnitt B und C). Bei eingehenderer Betrachtung wird er ohne Zweifel auch den Unterschied im Charakter der Wellen in den Abschnitten B und C bemerken.

(Ein Seismologe könnte uns erklären, dass im Abschnitt B die durch die Tiefen der Erdrinde laufende, im Abschnitt C dagegen die an der Oberfläche wandernde Bebenwelle registriert werden ist.)

Versuchen Sie nun aber einmal, ob es Ihnen gelingt, die beiden Abschnitte an Hand der Wertetafel zu unterscheiden! (Wir können hier keine Tabellen für die ganze Kurve aufschreiben, da sie die ganze Seite einnehmen würde. Unten finden sich die Tabellen für je ein kurzes Stück der Abschnitte B und C.)

Tab. 1.1.

Welle P Schrittweite 0,2 s	Welle P Schrittweite 0,2 s	Welle S Schrittweite 0,4 s	Welle S Schrittweite 0,4 s
0,1	3,7	0,2	2,8
0,1	0,0	0,5	0,4
-1,6	-2,0	2,5	-2,2
-1,7	-4,4	4,9	-3,3
-2,4	-5,8	7,1	-4,5
-3,0	-3,8	6,1	-4,8
-4,5	-1,6	3,8	-4,8
-3,8		0,4	-4,8
-2,9		0,2	-3,7
-1,1		0,7	-3,5
0,8		1,5	-4,4
3,3		2,5	-6,6
5,1		3,2	

In Abbildung 1.6 sehen Sie die Graphen zweier Funktionen, die durch sehr ähnliche Formeln definiert werden:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

Den Unterschied im Verlauf dieser beiden Funktionen kann man natürlich auch aus den Formeln ableiten. Wenn man aber die Kurven betrachtet, so sticht der Unterschied sofort in die Augen.

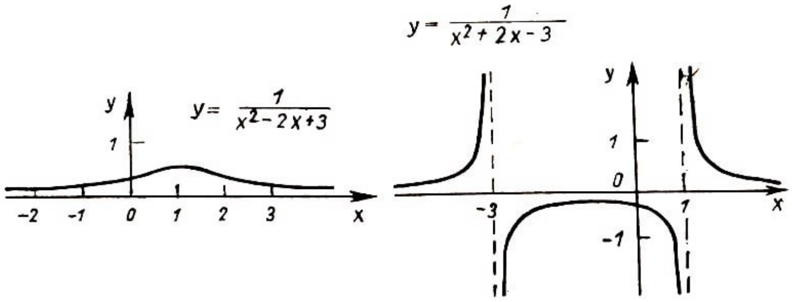


Abb. 1.6

Immer, wenn der allgemeine Charakter des Verlaufes einer Funktion aufzuklären ist und die Besonderheiten erfasst werden sollen, ist die graphische Darstellung wegen ihrer Anschaulichkeit unersetzlich. Deshalb greift jeder Ingenieur und jeder Wissenschaftler, dem eine ihn interessierende Funktion in Tabellenform oder als Formel vorliegt, gewöhnlich zuerst zum Bleistift und entwirft eine Skizze des Kurvenverlaufes. Dann schaut er nach, wie sich seine Funktion wendet, wie sie "aussieht".

2 Einige Beispiele

2.1. Wenn man die Definition wörtlich nimmt, so sind zur Konstruktion der graphischen Darstellung einer Funktion sämtliche Paare einander entsprechender Argument- und Funktionswerte zu nehmen und alle Punkte mit diesen Koordinaten zu zeichnen.
In der Mehrzahl der Fälle ist das praktisch undurchführbar, weil es sich im allgemeinen nicht um endlich viele Punkte handelt. Deshalb sucht man gewöhnlich einige Punkte, die dem Graphen angehören, und verbindet sie durch eine möglichst glatte Linie.
Wir wollen nach diesem Verfahren einmal den Graphen der Funktion

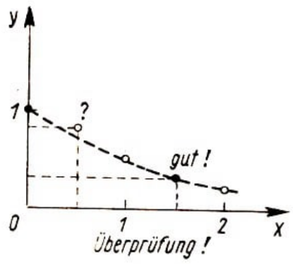
$$y = \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

zu konstruieren versuchen.
Wir wählen ein paar Argumentwerte aus, berechnen die entsprechenden Funktionswerte und notieren sie in Form einer Tabelle (Tabelle 2.1). Mit den erhaltenen Koordinaten zeichnen wir die Punkte und verbinden diese mittels der punktierten Linie (Abb. 2.1).

Tab 2.1

$y = \frac{1}{1+x^2}$

x	y	x	y
0	1	3	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{13}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$



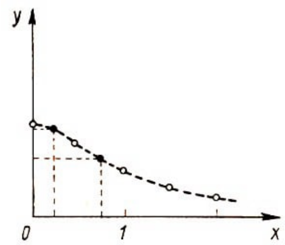
Nun überprüfen wir, ob wir die richtige Kurve durch die gefundenen Punkte gelegt haben, indem wir einen Argumentwert zwischen den früher verwendeten herausgreifen, zum Beispiel $1\frac{1}{2}$, und den entsprechenden Funktionswert $y = \frac{4}{13}$ ausrechnen. Der so bestimmte Punkt $\left(1\frac{1}{2}, \frac{4}{13}\right)$ "liegt gut" auf unserer Kurve, so dass wir ihren Verlauf für richtig ansehen.
Wir wollen aber doch lieber noch einen Zwischenwert, etwa $x = \frac{1}{2}$, herausgreifen. Hier ist $y = \frac{4}{5}$ und der entsprechende Punkt liegt oberhalb der von uns gezeichneten Kurve (Abb. 2.1). Folglich verläuft die Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 1$ nicht so, wie wir angenommen hatten.

Wir wählen deshalb auf diesem "verdächtigen" Abschnitt noch die Werte $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{3}{4}$.

Tab 2.2

$y = \frac{1}{1+x^2}$

x	y
$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{17}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{25}$

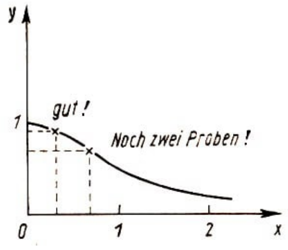


Wenn wir jetzt alle Punkte verbinden, erhalten wir die ziemlich richtige Kurve, die in Abb. 2.3 dargestellt ist. Die zur Kontrolle herangezogenen Punkte $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{10}\right)$ und $\left(\frac{2}{3}, \frac{9}{13}\right)$ liegen gut auf dieser Kurve.

Tab 2.3

$y = \frac{1}{1+x^2}$

x	y
$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{13}$



2.2. Um die linke Hälfte des Graphen zu zeichnen, muss man noch eine Wertetabelle für negative Argumentwerte aufstellen. Das ist aber ganz einfach. Wir haben zum Beispiel für

$$x = 2 \qquad , \quad y = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$$

und für

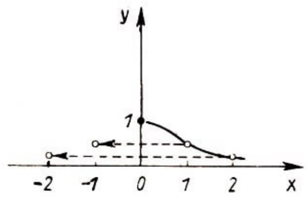
$$x = -2 \qquad , \quad y = \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{5}$$

Folglich liegt mit dem Punkt $\left(2, \frac{1}{5}\right)$ auch der an der Ordinatenachse gespiegelte Punkt $\left(-2, \frac{1}{5}\right)$ auf der Kurve.
Es gilt ganz allgemein: wenn der Punkt (a, b) auf der rechten Hälfte unseres Graphen liegt, dann liegt der Punkt $(-a, b)$, das Spiegelbild von (a, b) bezüglich der Ordinatenachse, auf ihrer linken Hälfte (Abb. 2.4).

Tab 2.4

$y = \frac{1}{1+x^2}$

x	y	x	y
-1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{1}{5}$
-3	$\frac{1}{10}$	3	$\frac{1}{10}$



Deshalb braucht man, wenn man den linken Teil des Graphen der Funktion (1) erhalten will, nur den rechten Teil an der Ordinatenachse zu spiegeln. Der Gesamtverlauf der Kurve ist in Abb. 2.5 dargestellt.

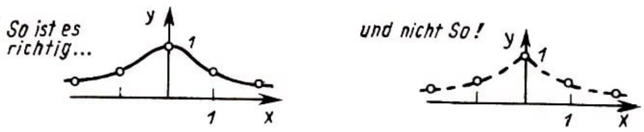


Abb. 2.5

Übungen

1. Der Graph der Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2+1} \tag{2}$$

ist dem Graphen der Funktion (1) ähnlich. Zeichnen Sie ihn!

2. Welche der folgenden Funktionen sind gerade?
a) $y = 1 - x^2$; b) $y = x^2 + x$; c) $y = \frac{x^2}{1+x^4}$; d) $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$
(Die Definition und das Beispiel eines Graphen einer geraden Funktion sowie einige Beispiele finden Sie in Tafel 2.1, umseitig.)

2.3. Wir nehmen jetzt die Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1} \tag{3}$$

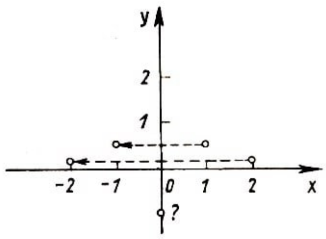
Auf den ersten Blick unterscheidet sich diese Formel nur recht wenig von der Formel (2). Jedoch ergeben sich bei der punktweisen Konstruktion der graphischen Darstellung der zugehörigen Funktion schon bald Schwierigkeiten.

Wir stellen wiederum eine Wertetabelle auf und tragen die erhaltenen Punkte in eine Zeichnung ein. Wie soll man aber diese Punkte verbinden?
Das ist keineswegs klar! Es entsteht der Eindruck, dass der Punkt $(0, -1)$ "herausfällt" (Abb. 2.6). Versuchen Sie einmal selbst, den Graphen dieser Funktion zu zeichnen. Lassen Sie sich dabei nicht dadurch abschrecken, dass Sie zum Verständnis des Kurvenverlaufes wesentlich mehr Punkte benötigen, als Sie erwartet hatten.
Erst danach sollen Sie auf den folgenden Seiten nachlesen, wie wir den Graphen konstruiert haben, und welche nützlichen Schlussfolgerungen aus der Konstruktion gezogen werden.

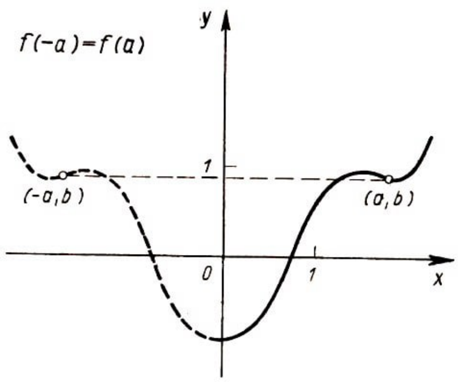
Tab 2.6

$y = \frac{1}{1+x^2}$

x	y	x	y
0	-1	-1	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{11}$
2	$\frac{1}{11}$		



Tafel 2.1: Gerade Funktionen

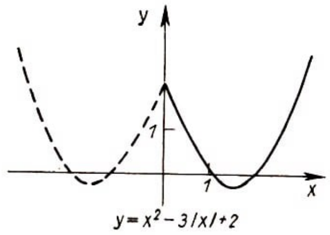


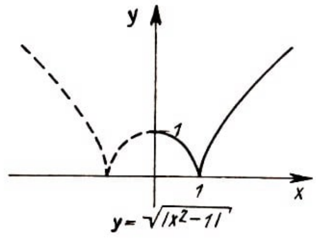
Hat eine Funktion jeweils an zwei sich nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Argumentwerten (z.B. a und $-a$) ihres Definitionsbereiches gleichen Funktionswert, so heißt diese Funktion

GERADE

Der Graph jeder geraden Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Beispiele:



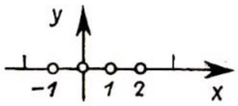


2.4. Den Graphen der durch

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \tag{4}$$

dargestellten Funktion beginnen wir ebenfalls zunächst punktweise zu konstruieren. Wenn wir als Argumente die Werte 0, 1, und 2 nehmen, so erhalten wir jedesmal den Wert null als Funktionswert. Nehmen wir noch $a = -1$ hinzu, so ergibt sich erneut der Funktionswert null. Die entsprechenden Punkte des Graphen liegen alle auf der x-Achse (Abb. 2.7)

Abb. 2.7



Wenn man sich auf diese vier Argumentwerte beschränken würde, dann wäre die "stetige" Kurve, die die zugehörigen Punkte verbindet, die Abszissenachse.

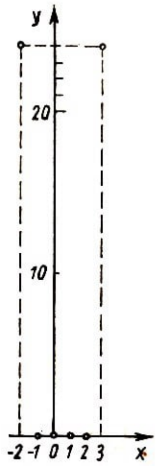


Abb. 2.8

Es ist aber klar, dass nicht die x-Achse die graphische Darstellung unserer Funktion sein kann, weil der Wert des Polynoms

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

nicht für alle x gleich null sein kann. Wir greifen nun zwei weitere Werte des Argumentes, nämlich $x = -2$ und $x = 3$ heraus. Die zugehörigen Punkte $(-2, 24)$ und $(3, 24)$ liegen schon nicht mehr auf der Abszissenachse, sondern ganz im Gegenteil sehr Weit von ihr entfernt (Abb. 2.8).

Wie die graphische Darstellung nun wirklich aussieht, ist noch immer unbestimmt. Durch Hinzunahme einer hinreichend großen Zahl von Zwischenwerten ist es zwar wie früher möglich, auch diesen Graphen angenähert zu konstruieren, jedoch ist dieses Vorgehen langwierig und nicht sehr zuverlässig.

Wir suchen anders zu verfahren.

Wir klären, wo die Funktion positiv (und folglich der Graph oberhalb der Abszissenachse gelegen) und wo sie negativ (ihr Graph also unter der x-Achse gelegen) ist.

Zu diesem Zweck zerlegen wir das Polynom in der die Funktion darstellenden Formel (4) in Faktoren:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x &= x^3(x-2) - x(x-2) = (x^3 - x)(x-2) \\ &= x(x^2-1)(x-2) \\ &= (x+1)x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Dabei wird deutlich, dass unsere Funktion nur in jenen vier Punkten gleich null ist, die wir bereits eingezeichnet hatten. Links vom Punkt $x = -1$ sind alle vier Faktoren negativ, die Funktion selbst also positiv. Zwischen $x = -1$ und $x = 0$ (d.h. im Intervall $-1 < x < 0$) ist der Faktor $(x + 1)$ positiv, die übrigen Faktoren jedoch weiterhin negativ, so dass die gesamte Funktion dort negativ ist.

Im Intervall $0 < x < 1$ haben wir zwei positive und zwei negative Faktoren, die Funktion ist also positiv. Im darauffolgenden Intervall ist die Funktion erneut negativ, und schließlich wird nach dem Durchgang durch $x = 2$ auch der letzte Faktor positiv. Damit ist die Funktion von nun an immer positiv.

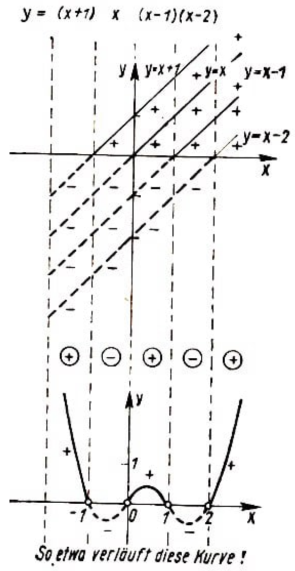


Abb. 2.9

Der Graph stellt sich uns nunmehr annähernd so dar, wie Abb. 2.9 zeigt.

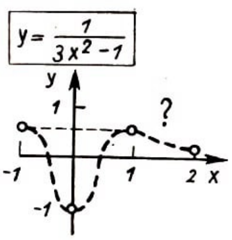
2.5. Wir gehen über zur Konstruktion des Graphen der Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

über die wir bereits auf gesprochen haben.

Wir vermerken in der Zeichnung die den Werten $x =$ -1, 0, 1 und 2 entsprechenden Punkte des Graphen und verbinden sie durch eine Linie, wie das etwa in Abb. 2.10 geschehen ist. Jetzt nehmen wir $x = \frac{1}{2}$. Wir erhalten $y = -4$. Der Punkt $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ liegt wesentlich unterhalb der Kurve. Folglich verläuft die Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ganz anders!

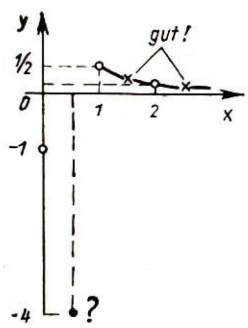
Den genaueren Kurvenverlauf stellen wir in Abb. 2.11 dar. Wir nehmen noch $1\frac{1}{2}$ und $2\frac{1}{2}$ für x. Die entsprechenden Punkte liegen ziemlich genau auf unserer Kurve.



Tab 2.11

$y = \frac{1}{3x^2-1}$

x	y
$\frac{1}{2}$	-4
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{23}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{71}$



Wie sieht nun aber die graphische Darstellung zwischen $x = 0$ und $x = 1$ wirklich aus?
.
Wir wählen $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{3}{4}$ und erhalten als zugehörige Funktionswerte $y = -\frac{16}{13} \approx -1\frac{1}{4}$ und $y = \frac{16}{11} \approx 1\frac{1}{2}$. Dadurch wird der Kurvenverlauf zwischen $x = 0$ und $x = 1$ einigermaßen geklärt (Abb. 2.12).

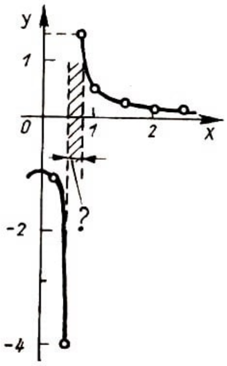


Abb. 2.12

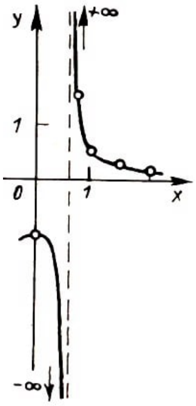


Abb. 2.13

Was aber zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ passiert, ist noch immer unbekannt.
Wenn wir noch einige weitere Werte zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{4}$ nehmen, so stellen wir fest, das die zugehörigen Punkte des Graphen nicht auf einer, sondern auf zwei glatten Linien liegen, und dass der Graph demnach etwa das in Abb. 2.13 dargestellte Aussehen hat. Jetzt werden Sie wohl verstehen, warum die punktweise Konstruktion des Graphen ein riskanter und vor allem langer Weg ist.

Werden zu wenige Punkte genommen, so können wir ein insgesamt falsches Bild der Funktion gewinnen, werden aber mehr Punkte benutzt, dann gibt es viel überflüssige Arbeit. Weiterhin fehlt auch jede Kenntnis darüber, ob etwas Wesentliches nicht gerade übersehen werden ist.

Wie soll man es also machen?

Wir erinnern uns, dass bei der Konstruktion des Graphen von $y = \frac{1}{x^2+1}$ über den Intervallen $2 < x < 3$ und $1 < x < 2$ überhaupt keine zusätzlichen Punkte benötigt worden waren, dass aber über dem Intervall $0 < x < 1$ die Hinzunahme von weiteren fünf Punkten notwendig war.
Ebenso entfiel im Falle der Konstruktion des Graphen der Funktion $y = \frac{1}{3x^2-1}$ die Hauptarbeit auf das Intervall $0 < x < 1$, wo die Kurve in zwei Zweige zerfällt.
Kann man nicht vielleicht solche "kritischen" Intervalle vorher aussondern.

2.6. Wir wenden uns zum dritten Mal der graphischen Darstellung der Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

zu.
Wenn man den die Funktion darstellenden Ausdruck ansieht, so bemerkt man, dass sein Nenner für zwei Werte von zu gleich null wird. Diese Werte sind $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, das heißt annähernd $\pm 0,58$. Einer von ihnen liegt im Intervall $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$, das heißt genau in dem Intervall, wo sich die Funktion ungewöhnlich verhält, wo der Graph, keine glatte Kurve ist. Jetzt wird verständlich, warum das der Fall ist.

In der Tat ist nämlich die Funktion für die genannten beiden Werte überhaupt nicht definiert, weil Division durch Null unmöglich ist. Es gibt folglich im Graphen keine Punkte mit diesen Abszissen, die Kurve schneidet demnach die Geraden $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und

$x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ nicht.

Also zerfällt der Graph in drei einzelne Zweige. Wenn sich x einem der "verbotenen" Werte nähert, etwa dem Werte $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, so wächst der absolute Betrag des Bruches $\frac{1}{3x^2-1}$ unbegrenzt.

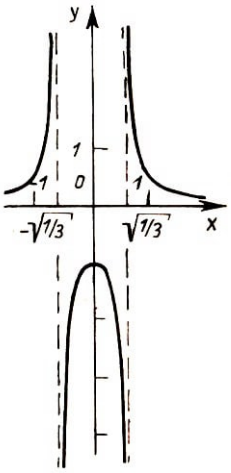


Abb. 2.14

Die beiden Zweige des Graphen nähern sich der vertikalen Geraden $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Analog verhält sich unsere (gerade!) Funktion in der Nähe des Wertes $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.
Der ungefähre Gesamtverlauf des Graphen der Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

ist in Abb. 2.14 dargestellt.

So haben wir herausgefunden, dass immer, wenn die Funktion durch eine Formel gegeben wird, die sich als Bruch schreiben lässt, die Aufmerksamkeit auf diejenigen x-Werte zu richten ist, für die der Nenner den Wert null annimmt.

2.7. Welche Lehren können wir aus der Betrachtung der Beispiele dieses Kapitels ziehen?

Für das Studium des Kurvenverlaufes und die Konstruktion des Graphen einer Funktion sind nicht alle Argumentwerte gleich wichtig! Am Beispiel der Funktion

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

sahen wir, um wie vieles wichtiger diejenigen "besonderen" Punkte sind, in denen die Funktion nicht definiert ist. Der Charakter des Graphen von

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

wurde uns erst verständlich, als wir seine Schnittpunkte mit der Abszissenachse, das heißt die Nullstellen des Polynoms, gefunden hatten.
In den meisten Fällen besteht die Hauptaufgabe bei der Konstruktion des Graphen genau darin, die für diese Funktion wesentlichen Argumentwerte zu ermitteln und den Verlauf der Funktion in Nachbarschaft dieser Werte zu studieren. Nach solchen Untersuchungen genügt es für die vollständige Konstruktion eines Graphen meist, einige Werte zwischen diesen charakteristischen Punkten aufzusuchen.

Übungen

1. Konstruieren Sie die Darstellung der Funktion $y = \frac{1}{3x-1}$. In welchen Punkten schneidet der Graph die Koordinatenachsen?
Stellen Sie sich vor, dass wir den Koordinatenursprung genau in die Mitte der Heftseite (wir rechnen von nun an immer mit 16 $\times$ 20 cm als Abmessungen für eine Heftseite) gelegt und als Maßeinheit auf jeder Achse 1 cm gewählt haben. Bestimmen Sie diejenigen Punkte, in denen der Graph über den Rand unserer Seite hinausläuft!

2. Wir konstruieren die Graphen der Polynome[2]
a) $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$,
b) $y = x^3 - 2x^2 + x$ (X)
(Vor allem ist darauf zu achten, dass im Fall b) bei der Zerlegung des Polynoms in Faktoren nur zwei verschiedene Faktoren vorkommen.)

2.8. Wenn einmal die graphische Darstellung irgendeiner Funktion konstruiert worden ist, dann können die Graphen vieler weiterer "verwandter" Funktionen mittels verschiedener Methoden gezeichnet werden.[3]
Eine der einfachsten dieser Methoden ist die Dehnung in Ordinatenrichtung (Tafel 2.2).

Wir haben bereits die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

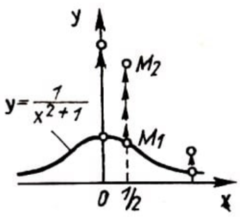
gezeichnet (vgl. Abb. 2.5). Jetzt zeichnen wir die Darstellung der Funktion

$$y = \frac{3}{x^2+1}$$

Wir greifen uns einen beliebigen Punkt des ersten Graphen heraus, etwa $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$.
Es ist klar, dass wir einen Punkt des zweiten Graphen dadurch erhalten können, dass wir das Argument x beibehalten, jedoch einen dreimal größeren Funktionswert nehmen.

Tab 2.15

$y = \frac{1}{x^2+1}$		$y = \frac{3}{x^2+1}$	
x	y	x	y
0	1	0	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{3}{5}$



So ergibt sich der Punkt $M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$. Man erhält diesen Punkt in der Skizze (Abb. 2.15), wenn man die Ordinate des Punktes M_1 dreimal verlängert. Wenn wir dieses Verfahren auf jeden Punkt des Graphen von $y = \frac{1}{x^2+1}$ anwenden, dann geht jeder Punkt $M(a, b)$ in einen Punkt $M'(a, 3b)$ des Bildes von $y = \frac{3}{x^2+1}$ über, das ganze Bild aber geht - um den Faktor drei in Ordinatenrichtung gedehnt - in das Bild der Funktion $y = \frac{3}{x^2+1}$ über (Abb. 2.16).

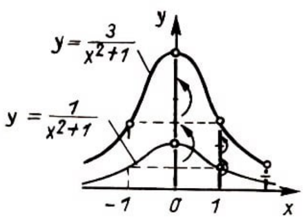


Abb. 2.16

[2]Die Antworten oder Hinweise zu den mit (X) bezeichneten Aufgaben und Übungen findet man am Ende des Buches im Abschnitt 9.

[3]Methoden dieser Art sind uns bereits in Abschnitt 1.2. bei der Konstruktion des Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x^2+1}$ begegnet. Nach Konstruktion des Graphen für positive x-Werte konnten wir auch den Teil für negatives Argument im ganzen zeichnen.

Folglich stellt der Graph von $y = \frac{3}{x^2+1}$ sich als um den Faktor drei in Ordinatenrichtung gedehnter Graph von $y = \frac{1}{x^2+1}$ dar.

2.9. Noch einfacher ist das Bild der Funktion

$$y = -\frac{1}{x^2+1}$$

aus der Darstellung von $y = \frac{1}{x^2+1}$ zu gewinnen.
Um aus der Tabelle 2.1 für die Funktion $y = \frac{1}{x^2+1}$ die Tabelle der Funktion $y = -\frac{1}{x^2+1}$ zu bekommen, braucht nur das Vorzeichen jeder der Zahlen der zweiten Spalte vertauscht zu werden. Also erhält man aus jedem Punkt des Graphen von $y = \frac{1}{x^2+1}$, etwa aus $M\left(2, \frac{1}{5}\right)$, den Punkt $M'\left(2, -\frac{1}{5}\right)$ von $y = -\frac{1}{x^2+1}$ mit der nämlichen Abszisse, aber negativer Ordinate.
Man kann sofort sehen, dass dieser Punkt zum Punkte M spiegelsymmetrisch in Bezug auf die Abszissenachse liegt. Allgemein entspricht jedem Punkt $M(a, b)$ des Graphen von $y = \frac{1}{x^2+1}$ der Punkt $M'(a, -b)$ des Bildes von $y = -\frac{1}{x^2+1}$.
Deshalb kann gesagt werden, dass der Graph der zweiten Funktion durch Spiegelung der graphischen Darstellung der ersten Funktion an der x-Achse gewonnen werden kann (Abb. 2.17).

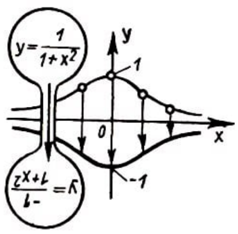


Abb. 2.17

Übungen

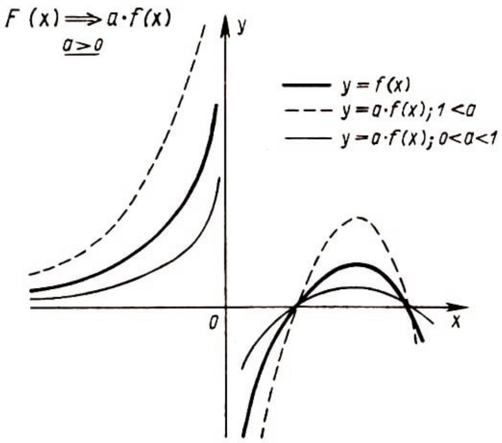
1. Konstruieren Sie die Bilder der Funktionen
a) $y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$ und
b) $y = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$
unter Verwendung des bekannten Bildes der Funktion $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (Abb. 2.9).

2. Es ist die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{2x^2+2}$ unter Verwendung des Bildes von $y = \frac{1}{x^2+1}$ zu zeichnen.

3. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen:[4]
a) $y = \frac{1}{2}[x]$,
b) $y = x - [x]$ und $y = -2(x - [x])$,
c) $y = [2x]$.

[4]Die Bedeutung des Symbols $[x]$ - größte ganze Zahl x — ist in der Einleitung erklärt worden.

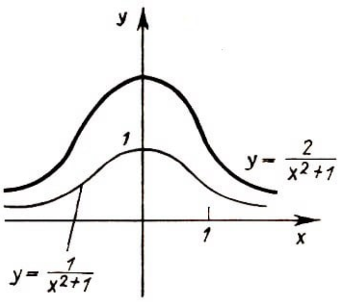
Tafel 2.2: Dehnung in y-Richtung

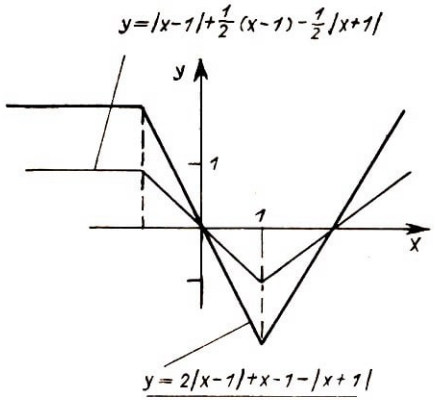


Der Graph von $y = a \cdot f(x)$ geht aus dem Graphen von $y = f(x)$ durch Dehnung um den Faktor a in y-Richtung hervor: Jeder Kurvenpunkt (c, d) von $y = f(x)$ geht in einen Kurvenpunkt $(c, a \cdot d)$ von $y = af(x)$ über.

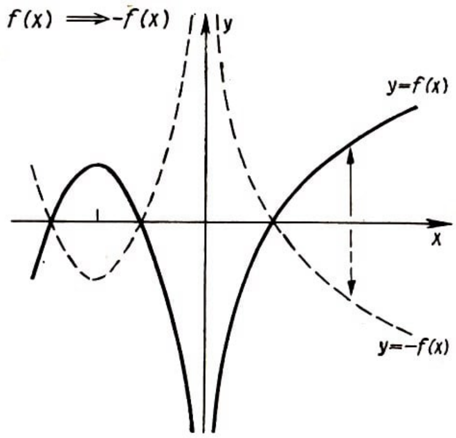
(Falls $0 < a < 1$ ist, so spricht man von Stauchung statt von Dehnung.)

Beispiele:

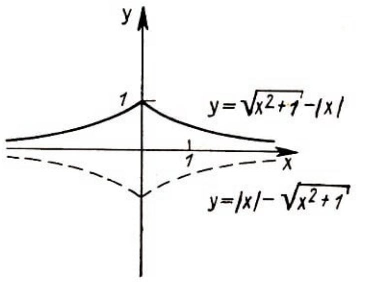


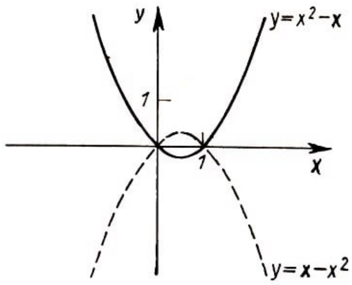


Tafel 2.3: Spiegelung an der Abszissenachse



Man kann die graphische Darstellung der Funktion $y = -f(x)$ durch punktweise Spiegelung des Graphen von $y = f(x)$ erhalten. Spiegelachse ist dabei die Abszissenachse. [1.5ex] Beispiele: [1.5ex]





3 Lineare Funktionen

3.1. Wir gehen nun zu einem systematischen Studium des Verhaltens verschiedener Funktionen und der Konstruktion ihrer graphischen Darstellungen über.
Dabei werden wir nicht nur charakteristische Züge des Verhaltens dieser Funktionen und die Besonderheiten ihrer Graphen, sondern auch ein Menge weiterer Beispiele kennenlernen. Bei der Konstruktion komplizierterer graphischer Darstellungen werden wir stets versuchen, bereits bekannte Elemente in ihnen aufzuspüren.

Die einfachste Funktion ist sicher die Funktion $y = x$. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade, nämlich die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems (Abb. 3.1).

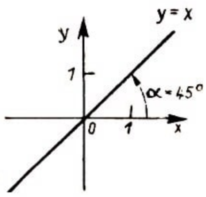


Abb. 3.1

Sicher wissen Sie auch bereits, dass die graphische Darstellung jeder beliebigen linearen Funktion

$$y = kx + b$$

immer eine gewisse Gerade ist. Umgekehrt ist auch jede Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, das Bild einer gewissen linearen Funktion.
Der Verlauf einer Geraden ist bereits vollkommen bestimmt, wenn zwei ihrer Punkte gegeben sind. Dementsprechend ist jede lineare Funktion bereits vollkommen festgelegt, wenn zwei ihrer Werte zu zwei gegebenen Argumentwerten bekannt sind.

Übungen

1. Bestimmen Sie die lineare Funktion $y = kx + b$, die für $x = -10$ den Wert $y = 41$ und für $x = 6$ den Wert $y = 9$ annimmt.

2. Eine Gerade geht durch die Punkte $A(0, 0)$ und $B(a, c)$. Es ist diejenige lineare Funktion zu ermitteln, deren Graph die gegebene Gerade ist.

3. Legen Sie, durch den Koordinatenanfang eine Gerade unter einem Winkel von $60°$ gegen die Ordinatenachse. Welche lineare Funktion hat diese Gerade zur graphischen Darstellung?

4a) Welche beiden Funktionswerte in der Tabelle 3.1 müssen falsch sein, wenn es sich um die Wertetafel einer linearen Funktion handeln soll? Geben Sie die richtigen Werte an!

Tab 3.1

x	y
-2	-2
-1	3
0	1
1	2
2	-3

Tab 3.2

x	y
-15	-33
-10	-13
0	7
10	+17
15	+27

b) Dasselbe für Tab. 3.2!

5. Betrachten Sie diejenige lineare Funktion $y = ax + b$, deren graphische Darstellung durch den Punkt $(3, -5)$ geht und zum Bild der Funktion $y = x$ parallel ist.

6. Bestimmen Sie die lineare Funktion, deren Bild die Abszissenachse unter einem Winkel von $60°$ schneidet und durch den Punkt $(3, -5)$ läuft.

7. Der "Anstieg"[5] einer Funktion sei k. Die Gerade möge durch den Punkt $(3, -5)$ gehen. Bestimmen Sie die lineare Funktion, deren graphisches Bild diese Gerade ist.

3.2. Die typische Eigenschaft der linearen Funktion besteht darin, dass sich y gleichmäßig ändert, wenn x gleichmäßig, das heißt jeweils um die gleiche Zahl, zunimmt.
Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y = 3x - 2$. Es soll x die Werte 1, 3, 5, 7, ... annehmen, von denen jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende ist. Die entsprechenden Funktionswerte sind 1, 7, 13, 19, ... Sie sehen, dass jeder Wert um ein und dieselbe Zahl, nämlich 6, größer als der vorangegangene ist.

Eine Zahlenfolge, die aus einer beliebigen Zahl durch wiederholte Addition einer beliebigen, aber festen Zahl gebildet wird, ist eine sogenannte arithmetische Zahlenfolge. Demnach besteht die oben beschriebene charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion darin, dass jede lineare Funktion eine arithmetische Zahlenfolge eindeutig auf eine andere arithmetische Zahlenfolge abbildet.[6] (Abb. 3.2).

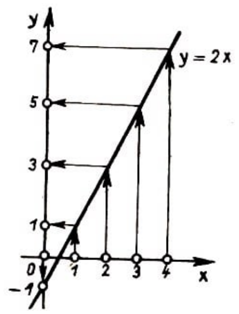


Abb. 3.2

In unserem Beispiel bildet die Funktion $y = 3x - 2$ die arithmetische Folge 1, 3, 5, 7, 9, ... auf die arithmetische Zahlenfolge 1, 7, 13, 19, 25, ... ab, während Abb. 3.2 zeigt, dass die Funktion $y = 2x - 1$ die arithmetische Zahlenfolge 0, 1, 2, 3, ... auf die arithmetische Folge -1, 1, 3, 5, ... abbildet.

Die beschriebene charakteristische Eigenschaft lässt sich aber auch noch anders beschreiben.
Bei jeder linearen Funktion sind nämlich die Differenzen zweier beliebiger Argumentwerte und der dazugehörigen Funktionswerte zueinander proportional:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist dabei gleich dem Anstieg der Geraden, die das Bild der gegebenen linearen Funktion ist.

Übungen

1. Überlegen Sie sich eine lineare Funktion, die die arithmetische Folge -3, -1, 1, 3, ... auf die arithmetische Folge -2, -12, -22, -32, ... abbildet. Welche lineare Funktion bildet

[5] In der Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden bezeichnen wir den Koeffizienten a als "Anstieg".

[6] Unter Abbildung versteht man in der Mathematik eine Zuordnung von Elementen zweier verschiedener Mengen.

die zweite auf die erste Folge ab?

2. Es mögen zwei arithmetische Folgen a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ... und c, $c+t$, $c+2t$, $c+3t$, ... gegeben sein. Kann man dann immer eine lineare Funktion $y=kx+b$ finden, welche die eine Folge auf die andere abbildet?

3.a) Die Gerade $y=\frac{7}{15}x+\frac{1}{3}$ geht durch die beiden Punkte $A(10,5)$ und $B(-20,-9)$ mit ganzzahligen Koordinaten. Gibt es auf dieser Geraden noch weitere "ganzzahlige" Punkte (d.h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten)?

b) Es sei bekannt, dass das Bild der Geraden $y=ax+b$ zwei "ganzzahlige" Punkte enthält. Gibt es dann auf dieser Geraden noch weitere ganzzahlige Punkte?

c) Man kann sehr leicht Geraden angeben, die keine ganzzahligen Punkte enthalten. Ein Beispiel ist etwa das Bild der Funktion $y=x+\frac{1}{2}$. Kann es eine Gerade geben, die nur einen ganzzahligen Punkt enthält? [7]

[7] Wenn Sie diese Frage nicht beantworten können, so schauen Sie sich zunächst die Aufgabe 4 aus Abschnitt 8, an.

4 Die Funktion $y = |x|$

4.1. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$y = |x|$$

wo $|x|$ den absoluten Betrag von x bezeichnet.[8]

Wir konstruieren das Bild dieser Funktion, indem wir die Definition des absoluten Betrages einer reellen Zahl verwenden. Für positive x haben wir $|x| = x$, das heißt dort fällt das Bild unserer Funktion mit dem Bild der Funktion $y = x$ zusammen und ist der vom Ursprung, unter einem Winkel von $45°$ gegen die Abszissenachse ausgehende Strahl (Abb. 4.1).

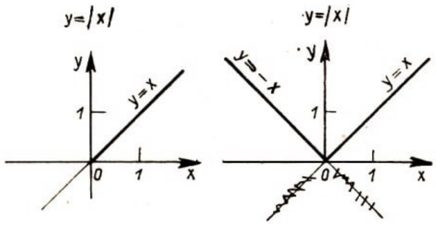


Abb. 4.1, 4.2

Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und folglich fällt für negative x der Graph von $y = |x|$ mit dem Bild der Funktion $y = -x$ zusammen, das heißt mit dem Strahl, der den zweiten Quadranten halbiert (Abb. 4.2).

Übrigens bekommt man die zweite Hälfte des Bildes (für negative x) auch leicht aus der ersten Hälfte, wenn man beachtet, dass es sich wegen $|-a| = |a|$ bei $y = |x|$ um eine gerade Funktion handelt (Vergleichen Sie die Definition einer geraden Funktion in Tafel 2.1).
Folglich ist das Bild der Funktion $y = |x|$ zur y-Achse spiegelsymmetrisch, und man kann die zweite Hälfte des Bildes durch Spiegelung der Punkte mit positiver Abszisse bekommen.

4.2. Wir konstruieren das Bild der Funktion

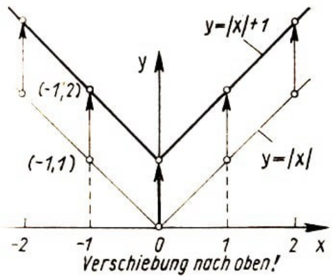
$$y = |x| + 1$$

Die graphische Darstellung kann leicht gezeichnet werden, doch erhalten wir sie auch unmittelbar aus der Darstellung von $y = |x|$. Wir stellen eine Wertetabelle auf und vergleichen sie mit einer ebensolchen Tabelle für die Funktion $y = |x|$, indem wir beide Tabellen nebeneinanderschreiben (Tab. zu Abb. 4.3).

Man sieht sofort, dass man einen Punkt des Graphen der Funktion $y = |x| + 1$ aus einem Punkt des Bildes von $y = |x|$ dadurch erhält, dass man y um 1 vergrößert. (Zum Beispiel geht der Punkt $(-2, 2)$ des Bildes von $y = |x|$ in den Punkt $(-2, 3)$ des Bildes

[8]Zur Erinnerung: Der absolute Betrag einer positiven reellen Zahl ist gleich dieser Zahl ($|x| = x$ für $x > 0$), der einer negativen Zahl ist gleich dem negativen Wert dieser Zahl ($|x| = -x$ für $x < 0$) und der Betrag von null ist gleich null ($|x| = 0$ für $x ==$).

von $y = |x| + 1$ über, der um eine Einheit über dem ersten liegt (Abb. 4.3).



x	$y = \|x\|$	$y = \|x\| + 1$
-2	2	3
-1	1	2
0	0	1
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Folglich braucht man jeden Punkt des einen Bildes nur um eine Einheit höher zu zeichnen, um das Bild der anderen Funktion zu bekommen. Das heißt, die ganze graphische Darstellung der zweiten Funktion erhält man aus der ersten durch Verschiebung derselben um eine Einheit in positiver y-Richtung (s. Abb. 4.3).

Aufgabe: Wir konstruieren das Bild der Funktion $y = |x| - 1$.

Lösung: Wir vergleichen dieses Bild mit der graphischen Darstellung von $y = |x|$. Wenn der Punkt $(a, |a|)$ auf der zweiten Kurve liegt, dann liegt der Punkt $(a, |a| - 1)$ auf der ersten. Darum kann jeder Punkt des gesuchten Bildes aus dem Punkt $(a, |a|)$ des Bildes von $y = |x|$ durch Verschiebung um eine Einheit nach unten bestimmt werden, der ganze Graph aber ergibt sich durch Verschiebung des gesamten Bildes von $y = |x|$ um eine Einheit in negativer y-Richtung (Abb. 4.4).

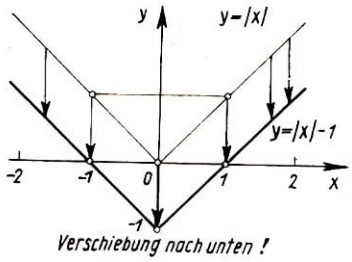


Abb. 4.4

Eine solche Verschiebung in Richtung der Ordinatenachse kann bei der Konstruktion vieler graphischer Darstellungen sehr nutzbringend verwendet werden (siehe Tafel 4.1).

Es sei etwa das Bild der Funktion

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

zu konstruieren. Wir schreiben die Abbildungsvorschrift in der Form

$$y = \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1} \qquad \text{oder} \qquad y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Jetzt sieht man deutlich, dass das Bild dieser Funktion durch Verschiebung in Richtung der Ordinatenachse und zwar um eine Einheit nach oben aus dem Bild der Funktion $y = \frac{1}{x^2+1}$ gewonnen werden kann.

4.3. Wir nehmen jetzt die Funktion mit der Abbildungsvorschrift

$$y = |x + 1|$$

Das Bild dieser Funktion erhalten wir ebenfalls aus dem der Funktion $y = |x|$. Wir schreiben wiederum zwei Tabellen nebeneinander: die Wertetafeln für $y = |x|$ und $y = |x + 1|$ [Abb. 4.5, a) und b)].

Beim Vergleich der Werte der Funktionen zu gleichen Argumentwerten x zeigt sich, dass für einige x die Ordinaten der Punkte des ersten Graphen größer sind als die der zweiten, für einige andere ist das gerade umgekehrt.

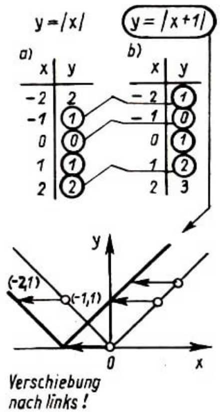
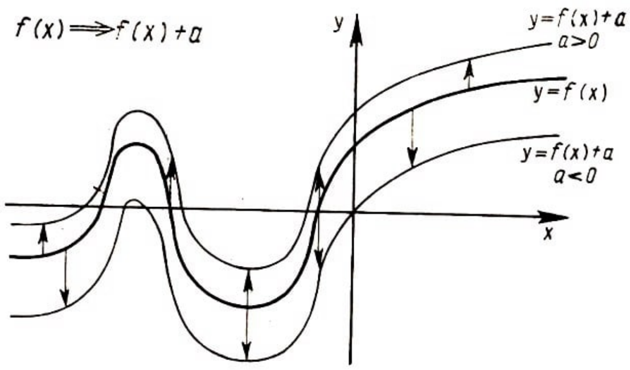


Abb. 4.5

Wenn man die Aufmerksamkeit indessen nur auf die rechten Spalten der beiden Tabellen richtet, dann kann man einen Zusammenhang zwischen den beiden Tabellen feststellen. Die zweite Funktion nimmt genau dieselben Werte an, wie die erste, nur nimmt sie dieselben um eine Einheit "früher" an, das heißt für einen kleineren x-Wert (warum?).

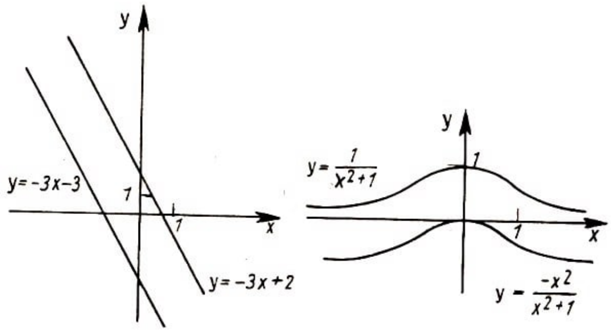
Folglich erhält man aus jedem Punkt des Bildes der Funktion $y = |x|$ einen Punkt der Darstellung von $y = |x + 1|$, wenn man ihn um eine Einheit nach links verschiebt. Zum Beispiel ergibt sich so aus dem Punkt $(-1, 1)$ der Punkt mit den Koordinaten $(-2, 1)$ (Abb. 4.5). Also bekommt man auch die ganze graphische Darstellung von $y = |x + 1|$ durch Verschiebung des Bildes von $y = |x|$ entlang der x-Achse um eine Einheit nach links.

Tafel 4.1: Verschiebung in Ordinatenrichtung



Der Graph der Funktion $g = f(x) + a$ entsteht aus der graphischen Darstellung von $y = f(x)$ durch Verschiebung um a Einheiten in Richtung der Ordinatenachse.

Die Richtung der Verschiebung hängt vom Vorzeichen von a ab ($a > 0$ nach oben; $a < 0$ nach unten).
Beispiele :



Aufgabe: Das Bild der Funktion $y = |x - 1|$ ist zu konstruieren.

Lösung: Wir vergleichen auch ihr Bild mit der graphischen Darstellung von $y = |x|$. Wenn der Punkt $A(a, |a|)$ ein Punkt des Bildes von $y = |x|$ ist, dann ist offenbar der Punkt $A'(a + 1, |a|)$ ein Punkt des Graphen von $y = |a - 1|$ mit dem gleichen Ordinatenwert (warum?).
Diesen zweiten Punkt kann man aus dem ersten durch Verschiebung desselben um eine Einheit nach rechts in Richtung der x-Achse erhalten. Folglich ergibt sich auch die gesamte Darstellung der Funktion $y = |x - 1|$ durch eine solche Verschiebung des Bildes von $y = |x|$ (Abb. 4.6).

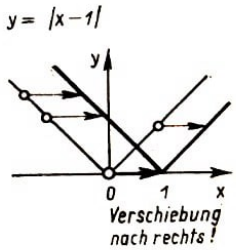


Abb. 4.6

Wir können sagen, dass die Funktion $y = |x - 1|$ dieselben Werte wie die Funktion $y = |x|$ annimmt, lediglich mit einer gewissen "Verzögerung" (in diesem vorliegenden Falle eben um eine Einheit).
Auch eine Verschiebung entlang der x-Achse ist bei der Konstruktion vieler graphischer Darstellungen von großem Nutzen.

Übungen

1. Konstruieren Sie das Bild der Funktion

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

(Hinweis: Stellen Sie den Nenner des Bruches in der Form. $(x - 1)^2 + 1$ dar!).

2. Formulieren Sie eine Regel, nach welcher man aus dem Bild der Funktion $y = f(x)$ direkt das Bild der Funktionen $y = f(x + 5)$ beziehungsweise $y = f(x - 3)$ gewinnen kann.

3. Man konstruiere die Bilder der Funktionen $y = |x| + 3$ und $y = |x + 3|$.

4. Bestimmen Sie alle linearen Funktionen, die für $x = 3$ den Wert $y = -5$ annehmen.

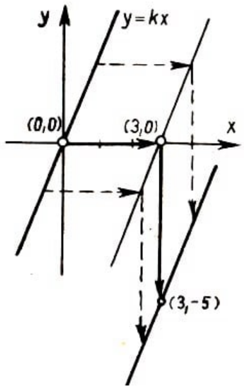


Abb. 4.7

Lösung: Geometrisch lautet die Bedingung so: Es sind alle Geraden zu suchen, die durch den Punkt $(3, -5)$ laufen und nicht zur Ordinatenachse parallel sind. Eine beliebige Gerade, die durch den Koordinatenanfang läuft und nicht senkrecht ist, ist die graphische Darstellung einer gewissen Funktion $y = kx$.

Wir verschieben die Gerade parallel zu sich so weit, bis sie durch den gegebenen Punkt geht, das heißt um drei Einheiten nach rechts und um fünf Einheiten nach unten (Abb. 4.7). Nach der ersten Verschiebung erhalten wir die Funktion $y = k(x - 3)$ und nach der zweiten $y = k(x - 3) - 5$.

Antwort: Alle linearen Funktionen, die für $x = 3$ den Wert $y = -5$ annehmen, werden durch eine Formel

$$y = k(x - 3) - 5$$

ausgedrückt, in der k eine beliebige reelle Zahl ist. (Vergleichen Sie diese Aufgabe mit der Aufgabe 7 aus 3.1.)

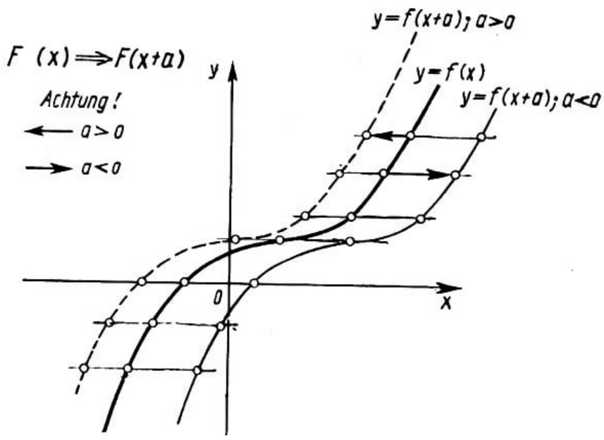
4.4. Aufgabe: Zu konstruieren ist das Bild der Funktion

$$y = |x + 1| + |x - 1]$$

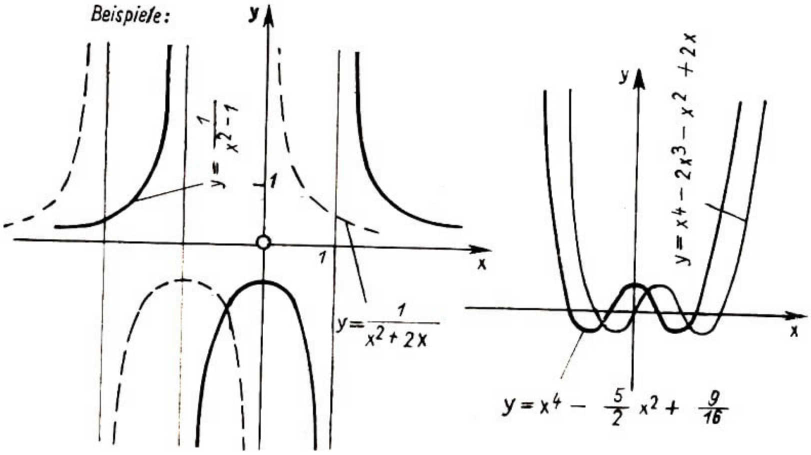
Lösung: Wir zeichnen zunächst die Bilder jedes der beiden Summanden $y = |x+1|$ und $y = |x - 1|$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Jede Ordinate y des gesuchten Graphen ist die Summe der Ordinaten der beiden gezeichneten graphischen Darstellungen an der gleichen Stelle des Arguments.

So ist etwa für den Argumentwert $x = 3$ die Ordinate der ersten Funktion $y_1 = 4$, die Ordinate der des zweiten Punktes an der gleichen Stelle ist $y_2 = 2$, die Ordinate des Graphen von $y = |x + 1| + |x - 1|$ ist folglich dort gleich 6.

Tafel 4.2: Verschiebung in Abszissenrichtung



Um den Graphen von $y = f(x+a)$ zu bekommen, muss man die graphische Darstellung von $y = f(x)$ um $-a$ Einheiten in Abzissenrichtung verschieben.
(Ist $a > 0$, so erfolgt also eine Verschiebung nach links. Bei $a < 0$ wird nach rechts verschoben).
Beispiele:



Wir versuchen die gesamte Darstellung dadurch zu erhalten, dass wir in jedem Punkt (d.h. für jedes x) die Ordinaten beider Bilder addieren. Wir bekommen eine Zeichnung, wie sie in Abbildung 4.8 dargestellt ist.

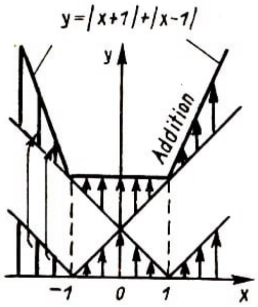


Abb. 4.8

Wie wir sehen, ist die graphische Darstellung von

$$y = |x+1| + |x-1]$$

eine geknickte Linie, die sich aus drei Geradenstücken zusammensetzt. Die Funktion ist somit auf jedem der drei Teilabschnitte linear.

Übungen

1. Schreiben Sie für jedes Stück der gebrochenen Linie, die der Graph von

$$y = |x+1| + |x-1]$$

ist, die Gleichung auf.

Antwort: für $x \leq -1$ gilt $y = ...x + ...$,
für $-1 \leq x \leq 1$ gilt $y =$ .... und
für $x \geq 1$ gilt $y =$ ....

2. In welchen Punkten besitzt die geknickte Linie, die das Bild der Funktion $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$ ist, ihre Ecken? Bestimmen Sie die Darstellung jeder ihrer Abschnitte als lineare Funktion.

3.a) Die Funktion, deren Graph in Abbildung 4.9 gezeichnet ist, kann in folgender Form dargestellt werden:

für $x < 0$ ist $y = 0$,
für $x \geq 0$ ist $y = 2x$.

Versuchen Sie diese Funktion durch eine einzige Formel darzustellen!

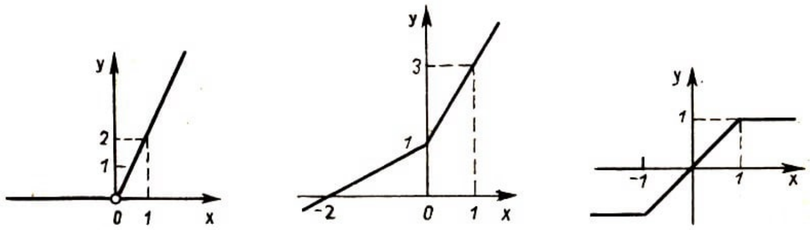


Abb. 4.9-11

b) Man bestimme die Formeln für die Funktionen, deren graphische Darstellungen die Abbildungen 4.10 und 4.11 zeigen. (X)

4. Konstruieren Sie die graphische Darstellung der Funktion

$$y = |3x - 2|$$

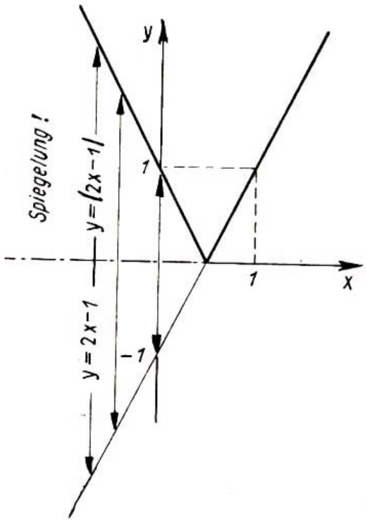
Hinweis: Man leitet diese Darstellung durch zwei Transformationen aus der Darstellung von $y = |x|$ her: durch Verschiebung in x-Richtung und durch Dehnung in Richtung der Ordinatenachse.
Um die richtige Größe der Verschiebung zu bestimmen, muss man den Koeffizienten von x vor das Betragszeichen ziehen. So bekommt man $|3x - 2| = 3\left|x - \frac{2}{3}\right|$.

4.5. Aufgabe: Es ist die graphische Darstellung der Funktion

$$y = [2x - 1|$$

zu zeichnen.
Lösung: Wir gehen von der Geraden $y = 2x - 1$ (Abb. 4.12) aus. Dort, wo die Gerade oberhalb der Abszissenachse liegt, ist y positiv, d.h. $2x - 1 > 0$. Folglich ist in diesem Abschnitt $|2x - 1| = 2x - 1$, und dementsprechend fällt die graphische Darstellung von $y = |2x - 1|$ mit der von $y = 2x - 1$ zusammen.

Wo dagegen $2x - 1 < 0$ gilt (d.h. wo die Gerade unter der Abszissenachse liegt), haben wir $|2x - 1| = -(2x - 1)$. Wenn man also den Graphen von $y = |2x - 1|$ in diesem Abschnitt aus dem von $y = 2x - 1$ gewinnen will, dann braucht man lediglich für jeden Punkt dieser Geraden das Vorzeichen umzukehren.
Das heißt aber, dass man diese Gerade lediglich an der Abszissenachse zu spiegeln hat. Auf diese Weise erhalten wir die Abbildung 4.13.



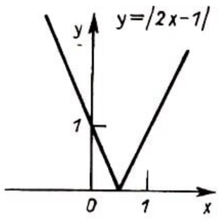


Abb. 4.13

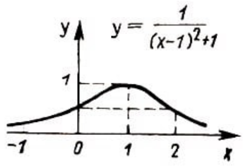


Abb. 4.12-14

Übungen

Aus der bekannten Darstellung von

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

(Abb. 2.9) ist die Darstellung der Funktion

$$y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|$$

abzuleiten.

4.6. Aufgabe: Es soll die graphische Darstellung von

$$y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} \qquad (1)$$

unter Verwendung des Bildes von

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \qquad (2)$$

bestimmt werden (Abb. 4.14).

Lösung: Weil für positive Argumentwerte $x| = x$ ist, gilt

$$\frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

(für $x > 0$). Für positive Argumente fällt somit das Bild von (1) mit dem von (2) zusammen (Abb. 4.15).
Um den linken Teil der gesuchten Darstellung von (1) zu bestimmen, bemerken wir, dass die Kurve zur Ordinatenachse spiegelbildlich sein muss, weil die Funktion (1) gerade ist. Die linke Hälfte des Graphen ergibt sich also einfach durch Spiegelung der rechten an der Ordinatenachse (Abb. 4.16).

$$\frac{1}{(-x)^2 - 2|-x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$$

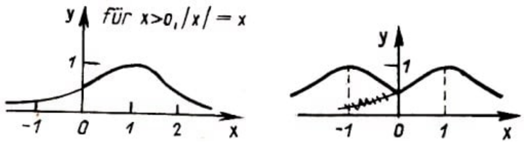


Abb. 4.15,4.16

Unsere Überlegungen beziehen sich aber nicht nur auf die vorliegende spezielle Funktion, sondern führen zu einer allgemeinen Regel:

Um die Darstellung der Funktion $y = f(|x|)$ aus dem Graphen von $y = f(x)$ zu gewinnen, braucht man nur deren rechts von der Ordinatenachse gelegenen Teil an derselben zu spiegeln.

Übungen

1. Man bestimme die graphische Darstellung von $y = 2|x| - 1$.

2. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen
a) $y = 4 - 2x$; b) $y = |4 - 2x|$; c) $y = 4 - 2|x|$ und d) $y = |4 - 2|x||$.

3. Es ist der kleinste Wert der Funktion

$$y = |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x + 4| \qquad (X)$$

zu bestimmen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes legen wir Ihnen einige Aufgaben zur Lösung vor, die auf den ersten Blick überhaupt nichts mit dem Inhalt dieses Kapitels zu tun haben. Bei einigem Nachdenken werden Sie aber bemerken, dass dieser erste Eindruck falsch ist.

Aufgaben:[9]

1. Sieben Streichholzschachteln liegen in einer Reihe. In der ersten Schachtel befinden sich 19 Zündhölzer, in der zweiten 9 und in den folgenden in dieser Reihenfolge 26, 8, 18, 11 und 14 (Abb. 4.17).
Aus jeder beliebigen Schachtel können die Hölzchen in eine benachbarte gelegt werden. Man soll die Hölzchen so umsortieren, dass schließlich in jeder Schachtel gleichviele Zündhölzer liegen.
Wie muss man dabei vorgehen, wenn man mit möglichst wenigen Umordnungen auskommen will?

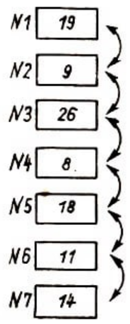


Abb. 4.17

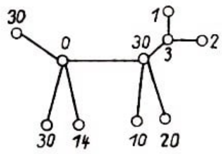
Lösung: Insgesamt enthalten die Schachteln 105 Hölzchen. Demnach müssen bei Gleichverteilung in jeder Schachtel 15 Zündhölzer liegen. Unter dieser Voraussetzung hat die Aufgabe genau eine Lösung:
Man muss aus der ersten Schachtel 4 Hölzchen in die zweite legen. Dann hat dieselbe 15 und die zweite 13 Hölzchen. Wir fügen zwei überflüssige Hölzchen aus der dritten Schachtel zu denen der zweiten hinzu. Dann verbleiben in der dritten Schachtel noch 24 Hölzchen. Die überflüssigen Hölzer legen wir nun in die vierte Schachtel und so weiter.

[9]Die Aufgaben 1. bis 4. und ihr Lösungsweg stammen von M. L. Zetliny.

Die folgenden beiden Aufgaben sind schon etwas schwieriger. Die in ihnen aufgeworfenen Fragen entsprechen der Fragestellung von Aufgabe 1.

2. Wiederum seien sieben Schachteln in einer Reihe angeordnet, jedoch ist die Verteilung der Hölzchen eine andere. In der ersten liege nämlich nur ein Hölzchen, die zweite enthalte zwei und die folgenden entsprechend 3, 72, 32, 20, 10.

3. Die Schachteln mit den Streichhölzern seien jetzt in Form eines "Hundes" angeordnet (Abb. 4.18, die Zahlen bezeichnen die Anzahlen der Hölzchen in den Schachteln). Die Hölzchen sollen nur entlang der eingezeichneten Linien zwischen den Schachteln transportiert werden können.



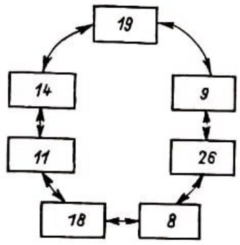
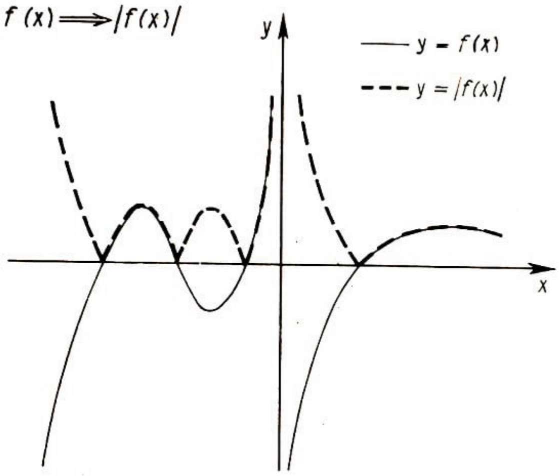


Abb. 4.18, 4.19

Für die folgende Aufgabe ist die Verwendung der graphischen Darstellung schon recht nützlich.

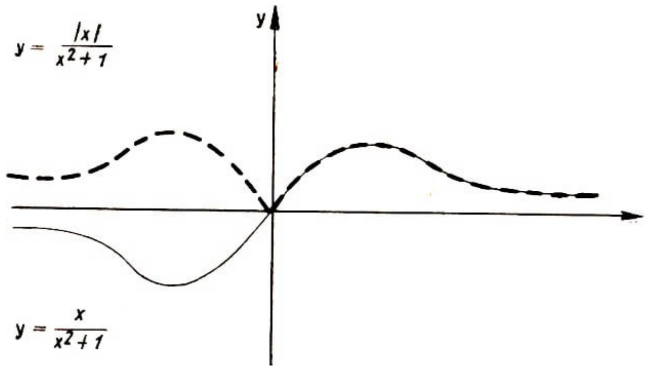
4. Die sieben Schachteln mit Zündhölzern mögen nun in einem Kreis angeordnet sein. In der ersten Schachtel liegen 19, in der zweiten 9 und in den folgenden 26, 8, 18, 11, 14 Hölzchen (Abb. 4.19).
Es sei erlaubt, Hölzchen aus einer Schachtel jeweils in eine der beiden benachbarten zu legen. Es ist verlangt, die Hölzchen so umzugruppieren, dass in jeder Schachtel gleich viele liegen, wobei insgesamt möglichst wenige Zündhölzer bewegt werden sollen. (X)

Tafel 4.3: Der absolute Betrag einer Funktion



Der Graph von $y = |f(x)|$ besteht aus allen Stücken des Graphen von $y = f(x)$, die oberhalb der Abszissenachse liegen und den an der Abszissenachse gespiegelten Stücken, die unterhalb derselben verlaufen.

Beispiel:



5 Quadratische Funktionen

5.1. Wir gehen nun zur Betrachtung der Funktion

$$y = x^2$$

über. Die graphische Darstellung der Funktion haben Sie sicherlich schon einmal gezeichnet oder zumindest gesehen und wissen, dass es für diese Kurve einen besonderen Namen gibt. Man nennt die Kurve bekanntlich Parabel.
Die graphischen Darstellungen von Funktionen der Form $y = ax^2$, die man ebenfalls Parabeln nennt, erhält man aus dem Bild von $y = x^2$ durch Dehnung.[10]

Übung

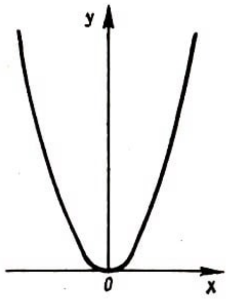


Abb. 5.1

In der Abbildung 5.1 ist eine Parabel dargestellt.
a) Es sei bekannt, dass es sich um die graphische Darstellung der Funktion $y = x^2$ handelt. Bestimmen Sie den für beide Achsen gleichen Maßstab.
b) Wie muss man die Maßeinheit auf den Achsen wählen, damit dieselbe Kurve die graphische Darstellung der Funktion $y = 5x^2$ ist?

5.2. Wir schauen nach, wie sich die Werte der Funktion $y = x^2$ ändern, wenn die Werte des Argumentes eine arithmetische Folge durchlaufen (vgl. Abschnitt 3.2.).

Zur Vereinfachung betrachten wir nur positive Werte für x. Zum Beispiel soll an die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... annehmen. Die Funktion $y = x^2$ bildet diese Folge eindeutig auf die Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ... ab. Wie wir sehen, bilden diese Werte keine arithmetische Folge mehr.

Wir fügen nun der Wertetabelle unserer Funktion noch eine weitere Spalte hinzu (Abb. 5.2), in die wir eintragen, um wieviel sich der Funktionswert beim Übergang von einem Argumentwert zum nächsten ändert. Zum Beispiel ändert sich der Funktionswert von $y = 4$ auf $y = 9$ um 5, wenn sich das Argument von $x = 2$ auf $x = 3$ erhöht.

x	y	Differenzen Δy
1	1	
2	4	4 - 1 = 3
3	9	9 - 4 = 5
4	16	16 - 9 = 7
...	...	

Abb. 5.2

[10] Es ist interessant, dass alle Parabeln einander ähnlich sind (vgl. 4.3. und Aufgabe 16. d) aus 8.).

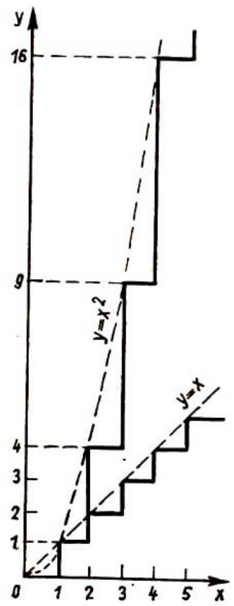


Abb. 5.3

Die Differenz je zweier Differenzen beträgt konstant 2!

Der sogenannte Zuwachs einer Funktion[a] ist die Differenz des neuen und alten Wertes der Funktion, das heißt im Falle unseres Beispiels 9 - 4 = 5.
Folglich haben wir in der dritten Spalte unserer Tabelle die Zuwüchse der Funktion $y = x^2$ aufgeschrieben. Jetzt sehen wir sofort, dass sich die Funktion $y = x^2$ so verändert, dass bei wachsendem Argument nicht nur die Funktionswerte selber, sondern auch die Zuwüchse größer werden.

An der Kurve wird diese Tatsache auch sichtbar. Sie steigt immer steiler und steiler nach oben. Eine Gerade als Darstellung der linearen Funktion hat dagegen konstante Zuwüchse und schließt stets den gleichen Winkel mit der x-Achse ein (Abb. 5.3).

[a] Den Zuwachs einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet man im Allgemeinen mit dem griechischen Buchstaben Δ (Delta): Δy oder $\Delta f(x)$.

Interessanterweise bilden die Zuwächse der Funktion $y = x^2$ eine arithmetische Folge, wie Sie anhand der Tabelle leicht feststellen werden. Wir wollen einmal versuchen, die folgende Behauptung allgemein zu beweisen:

Wenn die Werte des Argumentes eine arithmetische Folge

$$a, a + d, a + 2d, ..., a + nd, ...$$

bilden, dann bilden die Werte der zugehörigen Zuwüchse der Funktion $y = x^2$ ebenfalls eine arithmetische Folge.

Wenn das Argument t die Zeit und die Funktion s den zurückgelegten Weg darstellen (wir schreiben t Statt x und s statt y, wie das in der Physik üblich ist), so entspricht das Gesetz $s = t^2$ der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung 2 und die Beziehung $s = kt + b$ beschreibt die gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Bei der gleichförmigen Bewegung legt der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurück. Das heißt, gleichmäßigen Veränderungen des Argumentes entsprechen gleichmäßige Veränderungen der Funktionswerte (denn lineare Funktionen bilden jede arithmetische Folge auf eine arithmetische Folge ab!)
Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung sind die in gleichen Zeitintervallen zurückgelegten Wegstrecken nicht gleich, sondern vergrößern sich gleichmäßig.

Genauso entsprechen bei jeder quadratischen Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ und nicht nur bei $y = x^2$ gleichen Argumentzuwüchsen gleichmäßig wachsende Zuwüchse der Funktionswerte.

Übungen

1. Stellen Sie für die Funktion $y = x^2 + x - 3$ eine Tabelle mit drei Spalten (x, y, Zuwüchse Δy) auf, indem Sie für x die Zahlen 1, 0, -1, -2, -3 nehmen.

Ergänzen Sie diese Tabelle um eine weitere Spalte, in der Sie die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Zuwüchse (man spricht von Differenzen zweiter Ordnung: $\Delta^2 y$) eintragen.

Stellen Sie nun eine entsprechende Tabelle für die Funktion $y = x^2 + 3x + 5$ auf, und vergleichen Sie die beiden jeweils letzten Spalten der Tabellen. Wie fällt der Vergleich aus, wenn wir die Funktion $y = 2x^2 + 3x + 5$ betrachten?

2. Aus der Abbildung 5.4 ist zu ersehen, dass eine auf der x-Achse aufgetragene, gleichmäßig unterteilte Skala durch die Funktion $y = x^2$ auf eine nicht mehr gleichmäßig unterteilte Skala 0, A_1, A_2, ... abgebildet wird. Nun denken wir uns diese Skala in die Abschnitte $0A_1$, A_1A_2 - usw. zerschnitten und die Abschnitte der Reihe nach senkrecht zur x-Achse jeweils an den Stellen 1, 2, 3, ... aufgestellt (Abb. 5.5). Wie sind die Endpunkte der Abschnitte dann angeordnet? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

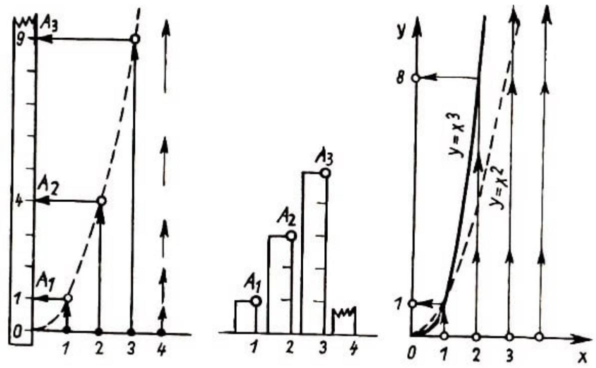


Abb. 5.4-6

3. Wir betrachten die graphische Darstellung von $y = x^3$ für positive x (Abb. 5.6). Ihre Aufgabe besteht jetzt darin, für diesen Fall die zu 2. analoge Aufgabe zu lösen. Sie können die Kurve, auf der die Endpunkte der Strecken liegen, wenigstens zeichnen. Die Bestimmung ihrer Gleichung ist schon eine schwierigere Aufgabe.

Aufgabe

Wir zeichnen die graphische Darstellung von $y = x^2$ und wählen als Maßeinheit auf beiden Achsen $E = 2$ cm. Dann zeichnen wir auf der y-Achse den Punkt $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ und messen mit einem kleinen Papierstreifen die Entfernung von F bis zu einem beliebigen Punkt M der Parabel.
Danach halten wir den Streifen in M fest und drehen ihn so lange um diesen Punkt, bis er senkrecht zur x-Achse steht. Das Ende des Streifens ragt dann etwas über die x-Achse hinaus, und wir markieren auf ihm die Stelle, unter der die Achse verläuft (Abb. 5.7).

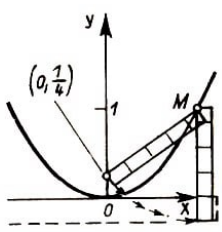


Abb. 5.7

Dann wählen wir uns einen anderen Parabelpunkt und verfahren ebenso. Wie weit wird jetzt der Streifen über die x-Achse hinaus- ragen? Wo werden wir jetzt unsere Markierung anbringen? - Wir können das Ergebnis des Versuches bereits voraussagen!

Welchen Punkt M der Parabel wir auch immer nehmen, der Abstand des Punktes vom Punkte F ist immer um genau denselben Betrag größer als der Abstand zur Abszissenachse, nämlich um genau $\frac{1}{4}E$ (= 0,5 cm in unserem Falle). Diesen Sachverhalt kann man auch in folgender Form aussprechen:

Der Abstand eines beliebigen Punktes der Parabel $y = x^2$ vom Punkte $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ist gleich dem Abstand desselben Punktes von der Geraden $y = -\frac{1}{4}$, die parallel zur Abszissenachse verläuft. Der bemerkenswerte Punkt $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ heißt Brennpunkt, die Gerade $y = -\frac{1}{4}$ heißt Leitlinie der Parabel $y = x^2$. Jede Parabel besitzt einen Brennpunkt und eine Leitlinie. (Vergleichen Sie auch Tafel 5.1!)

5.3. Wir betrachten die graphische Darstellung quadratischer Funktionen der Form

$$y = x^2 + px + q$$

Wir werden zeigen, dass sie sich der Form nach überhaupt nicht von der Parabel $y = x^2$ unterscheiden, sondern nur eine andere Lage innerhalb des Koordinatensystems einnehmen.
Betrachten wir zu Beginn ein Zahlenbeispiel.

Um die graphische Darstellung der Funktion

$$y = x^2 + 2x + 3$$

zu erhalten, schreiben wir die Formel in der Gestalt

$$y = (x + 1)^2 + 2$$

die durch ein vollständiges Quadrat gekennzeichnet ist. Das Bild von $y = (x + 1)^2$ gewinnt man aus der Parabel $y = x^2$ durch Verschiebung entlang der x-Achse. (Begründen Sie diese Behauptung!)
Dann erhalten wir das Bild von $y = (x+1)^2+2$ sofort aus diesem Graphen entsprechend Abb. 5.8.

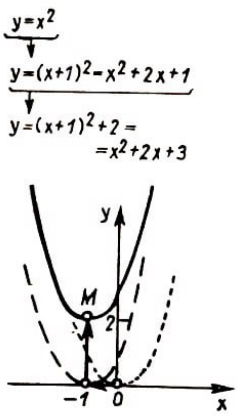


Abb. 5.8

Folglich handelt es sich bei der graphischen Darstellung von $y = x^2 + 2x + 3$ tatsächlich um die längs der x-Achse um eine Einheit nach links und um zwei Einheiten nach oben in Richtung der y-Achse verschobene Normalparabel.
Der Scheitel der Parabel, der sich zuvor im Nullpunkt befunden hatte, geht bei dieser Verschiebung in den Punkt $M(-1, 2)$ über.

Übungen

1. Zeichnen Sie die graphischen Darstellungen der Funktionen:
a) $y = (x + 2)^2 + 3$; b) $y = (x + 2)^2 - 3$;
c) $y(x - 2)^2 + 3$; d) $y = (x-^2)^2 - 3$

2.a) Gesucht wird der kleinste Funktionswert von $y = x^2 + 6x + 5$.

Lösung: Der kleinste Wert der angegebenen Funktion ist die Ordinate des Scheitels der Parabel. Um die Koordinaten des Scheitels zu ermitteln, ergänzen wir zu einem vollen Quadrat:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$$

Also ist unsere Parabel durch Verschiebung um -3 längs der x-Achse und um -4 längs der y-Achse aus der Normalparabel hervorgegangen. Das heißt, der kleinste Funktionswert ist gleich -4.

b) Der Scheitel einer Parabel $y = x^2 + px + q$ befindet sich im Punkte $(-1, 2)$. Es sind die Koeffizienten p und q zu bestimmen.

Wir zeigen nunmehr allgemein, dass man durch Verschiebung der Normalparabel die graphische Darstellung jeder Funktion finden kann, deren Abbildungsvorschrift die Form

$$y = x^2 + px + q$$

hat. Zu dem Zweck heben wir wie oben ein vollständiges Quadrat aus, das heißt, wir formen unser Trinom so um, dass es die Form $y = (x + ...)^2 + ...$ bekommt, wo das zweite Glied in der Klammer und das Absolutglied nicht von x abhängen.

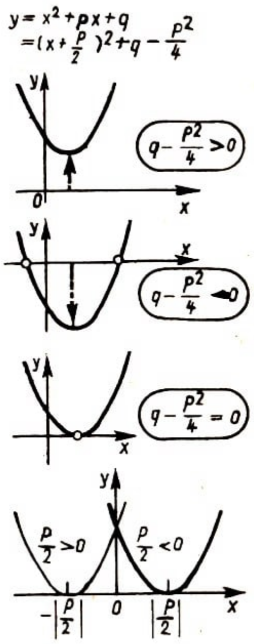


Abb. 5.9

Beim Ausmultiplizieren der Klammer bekommt man als Ausdruck mit der ersten Potenz von x das doppelte Produkt der beiden Summanden in der Klammer, und weil dieser Ausdruck gleich px sein soll, so muss man als zweiten Summanden in der Klammer die Zahl $\frac{p}{2}$ wählen. Dann bekommen wir

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + ... = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + ...$$

Weil das Absolutglied unseres Trinoms gleich q sein soll, ist an die Stelle der Punkte die Zahl $q - \frac{p^2}{4}$ zu schreiben. Demnach kann die Formel $y = x^2 + px + q$ umgeformt werden in

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

Es ergibt sich also (Abb. 5.9), dass sich die graphische Darstellung der durch $y = x^2 + px + q$ gegebenen Funktion als Normalparabel erweist, die in x-Richtung um $-\frac{p}{2}$ und in y-Richtung um $q - \frac{p^2}{4}$ verschoben worden ist.[a]

[a] Die Verschiebung um $\frac{p}{2}$ entlang der x-Achse erfolgt nach rechts, wenn $-\frac{p}{2} > 0$, und nach links, wenn $-\frac{p}{2} < 0$ ist.

Der Scheitel M dieser Parabel hat die Koordinaten $x_M = -\frac{p}{2}$ und $y_M = q - \frac{p^2}{4}$.

5.4. Auf die gleiche Weise kann man den Graphen der quadratischen Funktion der allgemeineren Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

erhalten, indem man vom Graphen der Funktion $y = ax^2$ als "Grundform" ausgeht. Wir setzen das an einem Beispiel auseinander und wählen $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$. Wir klammern den Koeffizienten von x^2 aus

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12)$$

und bringen den Ausdruck in der Klammer durch quadratische Ergänzung auf die Form eines vollen Quadrates

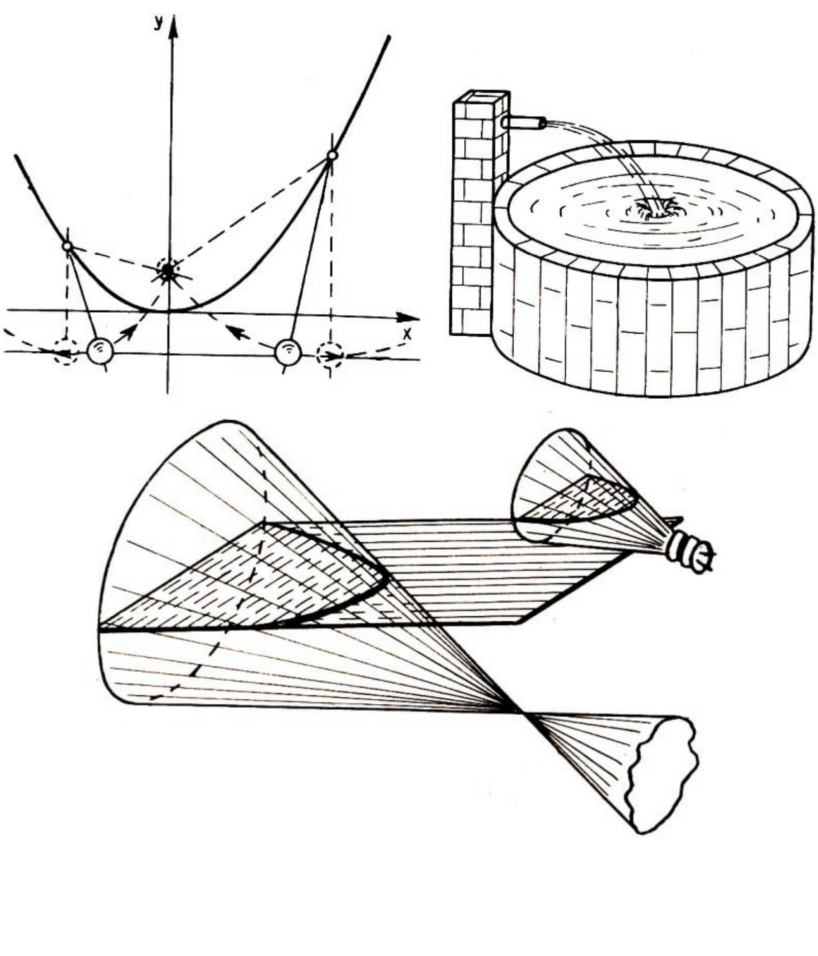
$$\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) = \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 3) = \frac{1}{2}[(x-3)^2 + 3]$$

woraus wir schließlich

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2}$$

gewinnen.
Wir sehen, dass der Graph von $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ sich aus der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ durch Verschiebung längs der x-Achse um drei Einheiten nach rechts und um $\frac{3}{2}$ Einheiten längs der y-Achse ergibt.

Tafel 5.1



Interessante Eigenschaften der Parabel

1. Jeder beliebige Punkt einer Parabel ist gleichweit von einem gewissen festen Punkt, dem sogenannten Brennpunkt, und einer festen Geraden, der sogenannten Leitlinie, entfernt.

2. Ohne Luftwiderstand fliegt jeder unter einem Winkel gegen die Vertikale (Senkrechte) geworfene Gegenstand entlang einer gewissen Parabel.

3. Wenn der Mantel eines Kreiskegels parallel zu einer Mantellinie geschnitten wird, so entsteht als Schnittlinie eine Parabel.

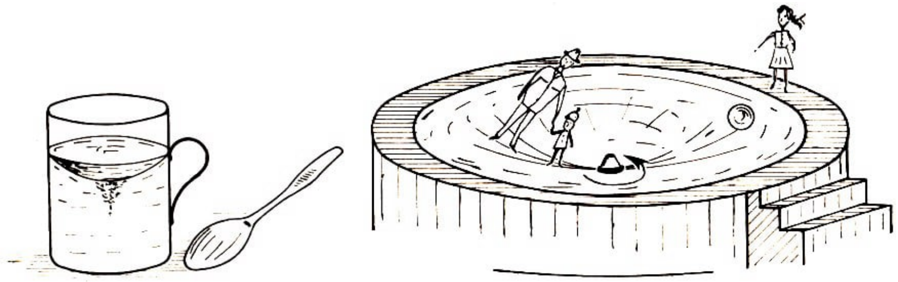
4. Wird eine Parabel um ihre Symmetrieachse gedreht, dann ergibt sich eine sehr interessante Fläche, das Rotationsparaboloid.

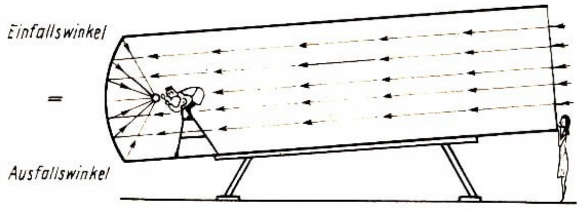
Die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit nimmt die Form eines solchen Rotationsparaboloides an. Wir können eine solche Fläche also sofort beobachten, wenn wir Wasser (oder Tee) in einem Glas in rasche Drehung versetzen und den Löffel dann rasch herausnehmen.

5. Auf Rummelplätzen findet man manchmal die lustige Attraktion des "Wunder-Paraboloids"Wenn man sich an irgend eine Stelle der sich schnell drehenden "Schüssel" (die die Form eines Paraboloides hat) stellt, so hat man den Eindruck, auf festem Boden zu stehen, während die Zuschauer von außen sehen, dass wir an einer schrägen Wand "kleben". (Die in 4. und 5. beschriebenen Erscheinungen beruhen übrigens auf der gleichen Eigenschaft des Paraboloids: Wenn ein Paraboloid mit ausreichender Geschwindigkeit um seine Achse rotiert, die senkrecht steht, so steht die Resultierende der Zentrifugal- und der Schwerkraft in jedem Punkt des Paraboloids senkrecht auf seiner Oberfläche.)

6. Der Reflexionsspiegel in Scheinwerfern hat gewöhnlich die Form eines Paraboloids. Wenn sich die Lichtquelle im Brennpunkt des Paraboloids befindet, dann tritt das Licht in einem parallelen Bündel aus dem Scheinwerfer aus.

7. In Spiegelteleskopen verwendet man ebenfalls Parabolspiegel. Das Licht weit entfernter Sterne ist parallel und wird deshalb bei Reflexion am Parabolspiegel zum Brennpunkt gelenkt und dort beobachtet.





Aufgaben

1. Die Parabel $y = ax^2$ ist in Richtung beider Achsen zu verschieben, so dass die graphische Darstellung der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ herauskommt.

(Antwort: Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ergibt sich aus der Parabel $y = ax^2$ durch Verschiebung längs der Abszissenachse um $-\frac{b}{2a}$ und längs der Ordinatenachse um $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. Man suche das Minimum der Funktionswerte der durch $y = 2x^2 - 4x + 5$ gegebenen Funktion über den Intervallen:
a) $0 \leq x \leq 5$, d.h. zwischen $x = 0$ und $x = 5$;
b) $-5 \leq x \leq 0$, d.h. zwischen $x = -5$ und $x = 0$.

Lösung: Wir benutzen die Ergebnisse der vorhergehenden Aufgabe und konstruieren die graphische Darstellung der Funktion $y = 2x^2 - 4x + 5$ (Abb. 5.10). Man erkennt aus der Zeichnung, dass die Funktion $y = 2x^2 - 4x + 5$ beim Durchlaufen der Werte von $x = 0$ bis $x = 5$ zunächst bis $x = 1$ fällt, von da an aber wächst.

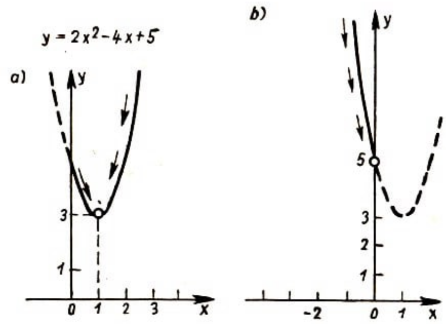


Abb. 5.10

Folglich ist der kleinste Funktionswert in diesem Intervall der Funktionswert an der Stelle $x = 1$ (Abb. 5.10a)).
Beim Durchlaufen des Intervalls von $x = -5$ bis $x = 0$ fällt die Funktion ständig. Daraus folgt, dass der kleinste Funktionswert im Intervall 2b) ihr Wert an der Stelle $x = 0$ (Abb. 5.10b)) ist. (Antwort: Der Minimalwert über dem Intervall a) ist gleich 3, über dem Intervall b) ist er gleich 5.)

Übungen

1. Zeichnen Sie die graphischen Darstellungen der folgenden Funktionen, indem Sie die Koordinaten ihrer Scheitelpunkte und Achsenschnittpunkte bestimmen:
a) $y = x - x^2 - 1$; b) $y = -3x^2 - 2x + 1$; c) $y = 10x^2 - 10x + 3$; d) $y = 0,125x^2 + x + 2$

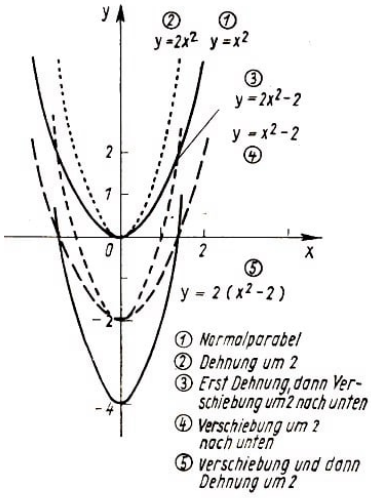


Abb. 5.11

2. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die entsteht, wenn die Parabel $y = x^2$ zuerst in Ordinatenrichtung um den Faktor 2 gedehnt und danach in der gleichen Richtung um zwei Einheiten verschoben wird?
Wie lautet die Antwort, wenn die gleichen Operationen in umgekehrter Reihenfolge (erst Verschiebung, dann Dehnung) angewendet werden (Vgl. Abb. 5.11)?

3. Wie muss man die Parabel $y = x^2 - 3x + 2$ in Richtung der beiden Achsen verschieben, um die durch $y = x^2 + x + 1$ gegebene Parabel zu erhalten?

4. Man verschiebe die Normalparabel längs der x-Achse so, dass sie durch den Punkt (3, 2) läuft. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die diese graphische Darstellung hat (Abb. 5.12)?

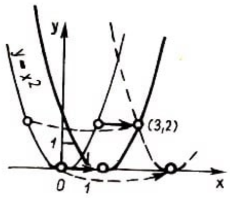


Abb. 5.12

5.5. Wir untersuchen nun, welche Aussagen über die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

wir der graphischen Darstellung der Funktion $y = x^2 + px + q$ entnehmen können.

Die Wurzeln jener Gleichung sind doch gerade diejenigen Abszissenwerte, für die die Funktion $y = x^2+px+q$ den Wert null annimmt. Im Graphen haben die entsprechenden Punkte dann die Ordinaten null, liegen also auf der x-Achse.
Aus der graphischen Darstellung der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ ist mit einem Blick zu erkennen, dass die zugehörige quadratische Gleichung zwei reelle Wurzeln besitzt, wenn $\frac{p^2}{4} - q > 0$ ist, und dass sie keine Wurzeln besitzt, wenn dieser Ausdruck kleiner als null ist. (Wir erinnern uns, dass die Parabel nach unten verschoben wird, wenn $q - \frac{p^2}{4} < 0$.

Ist dieser Ausdruck größer als null, dann findet eine Verschiebung nach oben statt. Vgl. Abb. 5.13). Wenn aber gerade $\frac{p^2}{4} - q = 0$ ist, dann verwandelt sich die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in die Gleichung $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$. Dieser Fall ist besonders interessant.
Wir werden ihn etwas ausführlicher behandeln.

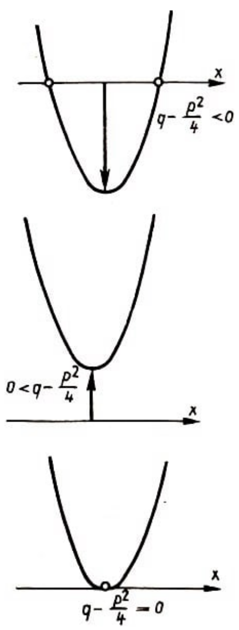


Abb. 5.13

Die Gleichung $x-2=0$ besitzt die einzige Lösung $x=2$. Die Gleichung $(x-2)^2=0$ hat ebenfalls nur eine Lösung $x=2$, denn es gibt keine weitere Zahl, die diese Gleichung erfüllt. Dennoch sagen wir im ersten Fall, die Gleichung $x^-2=0$ besitze eine Wurzel, während wir im zweiten Fall von den zwei gleichen Wurzeln $x_1=2$ und $x_2=2$ oder von der Doppelwurzel $x=2$ der Gleichung $(x-2)^2=0$ sprechen.
Warum machen wir diesen Unterschied? Es gibt mehrere Gründe dafür, und wir werden einen von ihnen darlegen.

Wir ändern die erste Gleichung ein wenig ab, indem wir die Null auf der rechten Seite mit einer anderen recht kleinen Zahl vertauschen. Natürlich ändert sich dabei die Wurzel der Gleichung, aber es gibt weiterhin nur eine einzige Wurzel! Wir notieren etwa das Beispiel

$$x-2=0,01 \qquad , \qquad x=2,01$$

Nun verändern wir die zweite Gleichung auf dieselbe Weise: $(x-2)^2=0,01$, $x^2-4x+3,99=0$. Die entstandene Gleichung wird jetzt zwei Wurzeln haben, nämlich $x_1\approx 2,1$ und $x_2\approx 1,9$.
Wir ändern jetzt erneut die rechte Seite der Gleichung $(x-2)^2=0,01$, indem wir immer kleinere Zahlen einsetzen. Solange dabei die rechte Seite nicht genau gleich null wird, hat die Gleichung zwei Wurzeln. Durch die Verkleinerung der rechten Seiten werden diese Wurzeln nur "verschoben", so dass sich ihre Werte immer weniger voneinander unterscheiden. Wenn aber schließlich die rechte Seite null ist, dann "fallen die Wurzeln zusammen", die beiden Werte unterscheiden sich überhaupt nicht mehr.

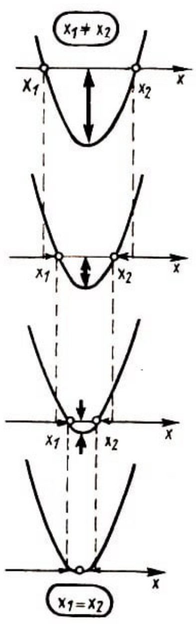


Abb. 5.14

Deshalb sagt man, dass die Gleichung $(x-2)^2=0$ zwei Wurzeln hat, die zu einer Doppelwurzel zusammenfallen. Geometrisch entspricht dieser Fall der Berührung der Parabel $y=(x-2)^2$ mit der x-Achse.
Wir analysieren nun den allgemeinen Fall geometrisch. Sei zunächst das Absolutglied q kleiner als $\frac{p^2}{4}$ (d.h. $q-\frac{p^2}{4}<0$), so dass die Parabel als Bild von $y=x^2+px+q$ zwei Schnittpunkte mit der Abszissenachse hat (Abb. 5.14).

Dann vergrößern wir das Absolutglied: Zunächst wird die Parabel, die immer weiter nach oben verschoben wird, immer noch zwei Schnittpunkte mit der x-Achse haben: die Gleichung $x^2+px+q=0$ hat zwei verschiedene Lösungen. Diese beiden Schnittpunkte werden sich aber bei weiterer Vergrößerung von q einander beständig nähern und bei einer ganz bestimmten Größe von q $\left(q-\frac{p^2}{4}=0\right)$ in einen Punkt zusammenfallen. In diesem Moment berührt die Parabel

$$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

die x-Achse, die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ aber besitzt eine Doppelwurzel.
Bei weiterer Vergrößerung von q hört die Bildparabel auf, die x-Achse zu schneiden, und die entsprechende Gleichung wird keine reellen Wurzeln mehr besitzen.

Übungen

1. Zu bestimmen ist diejenige Parabel

$$y = ax^2 + bx + c$$

welche die x-Achse in den Punkten $x = 3$ und $x = -5$ und die Ordinatenachse im Punkt $y = 30$ schneidet.

Lösung: Das quadratische Trinom, welches diese Parabel zum Graphen hat, muss die Form

$$a(x-3)(x+5)$$

haben. Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse ergibt sich für $x = 0$. Nun soll unsere Funktion für $x = 0$ den Wert 30 haben: $a(-3)(5) = 30$, woraus $a = -2$ folgt.
Antwort: Die Gleichung der gesuchten Parabel ist $y = -2x^2 - 4x + 30$.

2. a) Man bestimme die quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$, deren graphische Darstellung die x-Achse in den Punkten $x = 2$ und $x = 5$ schneidet.

b) Man bestimme die kubische Funktion mit der Darstellung $y = x^3 + px^2 + qx + r$, wenn bekannt ist, dass ihr Bild die Abszissenachse in den Punkten $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ schneidet.

c) Können Sie sich ein Polynom denken, dessen Graph die Abszissenachse in den 101 Punkten $x_1 = -50$, $x_2 = -49$, ..., $x_{101} = +50$ schneiden würde? Welchen Grad müsste dieses Polynom mindestens haben?

3. Das Trinom $-x^2 + 6x - 9$ besitzt eine doppelte Nullstelle.
a) Ändern Sie das Absolutglied um 0,01 ab, so dass das entstehende Trinom zwei verschiedene Wurzeln besitzt.
b) Kann man dasselbe Resultat auch dadurch bekommen, dass man den Koeffizienten von x um 0,01 abändert?

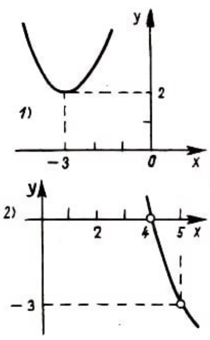


Abb. 5.15

4. In den Abbildungen 5.15 1) und 2) sind die Graphen von quadratischen Funktionen der Gestalt $y = ax^2 + px + q$ dargestellt. Bestimmen Sie p und q. Zeichnen Sie die

Darstellung 2), nachdem Sie einen geeigneteren Maßstab und eine bessere Lage der Koordinatenachsen gewählt haben.

5. In den Abbildungen 5.16 sind graphische Darstellungen von quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Koeffizienten a, b, c.

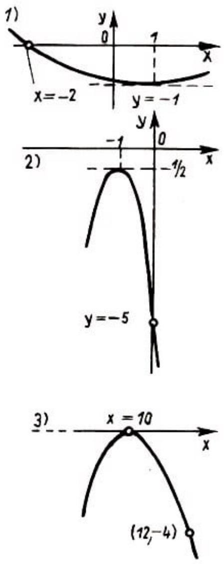


Abb. 5.16

6. a) Lösen Sie die Ungleichung

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

Lösung: Man erkennt aus der Abb. 5.17, dass die Funktion $y = x^2 - 5x + 4$ über zwei Intervallen positiv ist, nämlich für x, die kleiner als eins und solche, die größer als 4 sind.
Antwort: $x < 1$ und $x > 4$.

b) Man löse die Ungleichung

$$x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$$

Lösung: Wir skizzieren die graphischen Darstellungen der Funktionen, die auf der linken beziehungsweise auf der rechten Seite der Ungleichung stehen. Man sieht dann (Abb. 5.18), dass die Gerade $y = x - 1$ mit der Darstellung von $y = |x^2 - 5x + 4|$ drei gemeinsame Punkte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ und $C(x_3, y_3)$ hat. Die Bedingung

$$x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$$

wird somit über drei Intervallen erfüllt: für $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$ und $x_3 < x$.

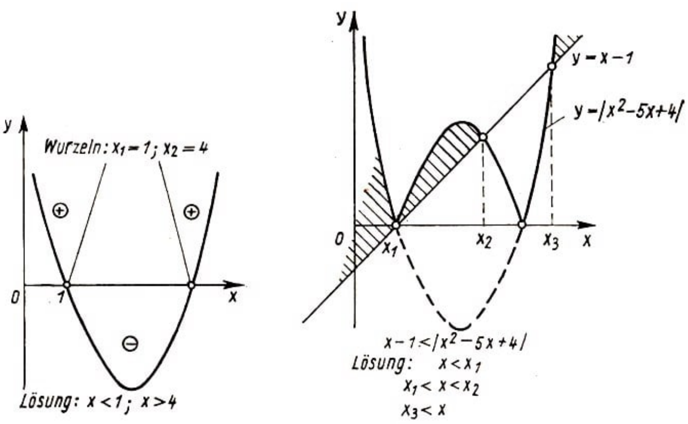


Abb. 5.17,5.18

Die Werte x_1 und x_3 ergeben sich aus der Gleichung

$$x - 1 = x^2 - 5x + 4$$

Der Wert x_2 berechnet sich aus $x - 1 = -(x^2 - 5x + 4)$.
Antwort: $x < 1$; $1 < x < 3$ und $x > 5$, d.h., alle x außer $x = 1$ und $3 \leq x \leq 5$ sind Lösungen.

c) Notieren Sie die entsprechenden Antworten für die Ungleichungen

$$x - 1 > |x^2 - 5x + 4| \qquad , \qquad x - 1 \geq |x^2 - 5x + 4|$$

7. Bestimmen Sie den größten Funktionswert von $y = x^2 - 5|x| + 4$ über dem Intervall $-2 \leq x \leq 2$.

5.6. Die graphische Darstellung von $y = x^2$ kann man auch zeichnen, indem man den Graphen von $y = x$ "quadriert", das heißt sinngemäß, dass man jeden Ordinatenwert eines Punktes ins Quadrat setzt (Abb. 5.19).

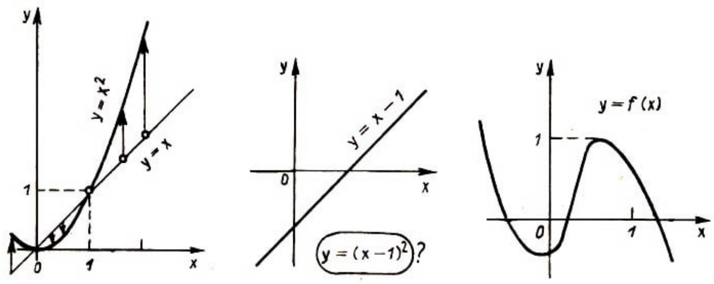


Abb. 5.19-21

Übungen

1. Vorgegeben ist das Bild von $y = x - 1$ (Abb. 5.20). Im gleichen Koordinatensystem ist die graphische Darstellung von $y = (x-1)^2$ zu zeichnen.

2. Vorgegeben ist die Zeichnung des Graphen von $y = f(x)$ (Abb. 5.21). Zeichnen Sie den Graphen von $y = (f(x))^2$ dazu.

3. Unter Verwendung der graphischen Darstellung von

$$y = x(x+1)(x-1)(x-2)$$

(Abb. 2.9) ist der Graph der Funktion

$$y = x^2(x+1)^2(x-1)^2(x-2)^2$$

zu zeichnen.

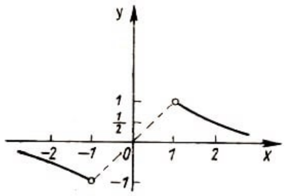
4. Man zeichne die Bilder von
a) $y = [x]^2$; b) $y = (x - [x])^2$

6 Gebrochen-lineare Funktionen

6.1. In der Abbildung 6.1 ist der "Graph" der Funktion $y = \frac{1}{x}$ so dargestellt, wie ihn ganz sicher derjenige zeichnen würde, der in der Konstruktion von graphischen Darstellungen keine Übung hat. Er würde so überlegen:
"Für $x = 1$ ist $y = 1$. Für $x = 2$ wird $y = \frac{1}{2}$, $x = 3$ hat $y = \frac{1}{3}$ zur Folge. Für $x = -1$ haben wir $y = -1$. Für $x = 0$ ... nun, das ist mir unklar, weil ich nicht weiß, was $\frac{1}{0}$ bedeutet.

Abb. 6.1 $y = \frac{1}{x}$

x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
-1	-1

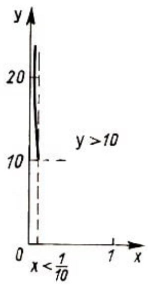


Also lassen wir $x = 0$ weg ..."
Wir wissen aber nun schon längst, dass man eine graphische Darstellung auf diese Weise nur selten exakt gewinnen kann. Um uns ein richtiges Bild zu machen, stellen wir zunächst fest, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ überhaupt nicht definiert ist. In solchen Fällen war es immer wichtig, dass wir untersucht haben, wie sich die Funktion in der Nachbarschaft dieses Punktes verhält.

Wenn sich x dem Wert null nähert, indem sich der absolute Betrag von x immer mehr verkleinert, dann wird y dem Betrage nach beliebig groß. Dabei ist auch $y = \frac{1}{x}$ positiv, wenn sich x dem Werte null von rechts her nähert ($x > 0$), die Kurve steigt also bei Annäherung an null von rechts her, ohne die y-Achse zu schneiden (Abb. 6.2 a).

Abb. 6.2a $x > 0$, $y = \frac{1}{x} > 0$, $x \to +0$

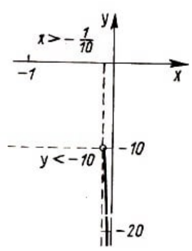
x	y
$\frac{1}{10}$	10
$\frac{1}{20}$	20
$\frac{1}{100}$	100



Nähert sich x dagegen von links her der Null ($x < 0$), so ist auch y negativ, und die Kurve verläuft nach unten (Abb. 6.2 b). Jetzt haben wir uns also davon überzeugt, dass bei beidseitiger Annäherung an den "singulären" Wert $x = 0$ die graphische Darstellung in zwei Zweige zerfällt, die längs der y-Achse auseinanderlaufen: der linke Zweig geht nach unten, der rechte kommt von oben (Abb. 6.3).

Abb. 6.2b $x < 0$, $y = \frac{1}{x} < 0$, $x \to -0$

x	y
$-\frac{1}{10}$	-10
$-\frac{1}{20}$	-20
$-\frac{1}{100}$	-100



Jetzt wollen wir feststellen, wie die Kurve für betragsmäßig große x verläuft. Zu Beginn

schauen wir uns den rechten Zweig an, das heißt die Werte $x > 0$.
Für positive x sind die Funktionswerte ebenfalls positiv. Also verläuft die Kurve für $x > 0$ immer oberhalb der Abszissenachse. Bei Vergrößerung von x verkleinert sich der Wert des Bruches $\frac{1}{x}$. Deshalb senkt sich die Kurve $y = \frac{1}{x}$ bei Entfernung vom Nullpunkt nach rechts immer tiefer und tiefer herab, wobei Sie Sich der x-Achse zwar auf eine beliebig kleine Entfernung nähern, sie aber niemals schneiden kann (Abb. 6.4).

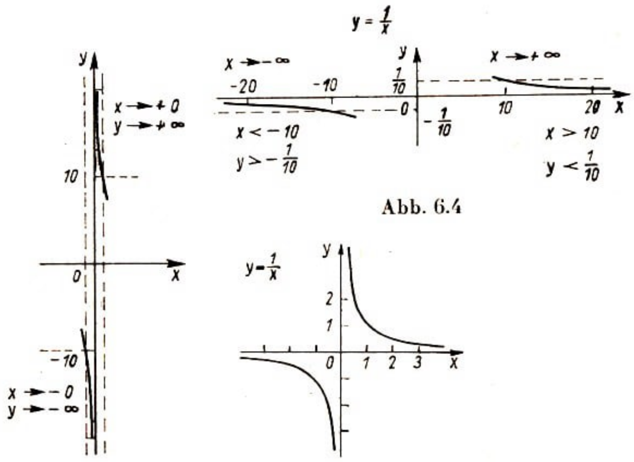


Abb. 6.3-6.5

Für $x < 0$ ergibt sich ein analoges Bild (Abb. 6.4). Die Funktion nimmt also dem Betrage nach beliebig kleine Werte an, wenn x dem Betrage nach unbegrenzt wächst; beide Zweige der graphischen Darstellung nähern sich der Abszissenachse: der rechte von oben für $x \to \infty$ und der linke von unten für $x \to -\infty$ (Abb. 6.5).

Die soeben studierte Kurve, der Graph von $y = \frac{1}{x}$, wird Hyperbel genannt. Die beiden Geraden, denen sich die Zweige der Hyperbel anschmiegen, heißen ihre Asymptoten.

6.2. Man kann die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{x}$ auch noch ein wenig anders konstruieren.

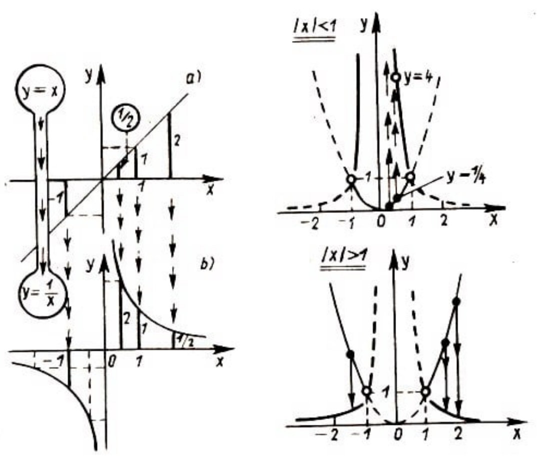


Abb. 6.6,6.7

Wir zeichnen die Darstellung der Funktion $y = x$ (Abb. 6.6 a), ersetzen jede Ordinate durch die zu ihr reziproke Größe und zeichnen die entsprechenden Punkte in Zeichnung 6.6 b. Dann erhalten wir die gesuchte Darstellung. Das gezeichnete Bild zeigt anschaulich, wie betragsmäßig kleine Ordinaten des ersten Graphen in betragsmäßig große des zweiten übergehen und umgekehrt.

Das hier skizzierte Verfahren der "Division" einer graphischen Darstellung ist immer dann nützlich, wenn wir die Darstellung einer Funktion $y = f(x)$ kennen, jedoch die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{f(x)}$ konstruieren müssen.

Übungen

1. Die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{x^2}$ ist zu zeichnen, wenn die Darstellung von $y = x^2$ bekannt ist (Lösung in Abb. 6.7).

2. Die graphischen Darstellungen von

$$a) \quad y = \frac{1}{x^2 - 3x - 2} \qquad \text{und} \qquad b) \quad y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

sind zu konstruieren. (Überzeugen Sie sich davon, dass beide Graphen sehr ähnlich aussehen!)

3. Die Graphen von $y = [x]$ und $y = x - [x]$ seien bekannt. Konstruieren Sie die Bilder von

$$a) \quad y = \frac{1}{[x]} \qquad , \qquad b) \quad y = \frac{1}{x - [x]}$$

6.3. Die Kurven, welche wir im folgenden Abschnitt zeichnen werden, erhält man aus der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ mittels schon besprochener Transformationen. Sie alle heißen ebenfalls Hyperbeln.

Übungen

1. Zeichnen Sie die graphische Darstellung der Funktionen
a) $y = \frac{1}{x} + 1$; b) $y = \frac{1}{x+1}$; c) $y = \frac{1}{x-2} + 1$
Bestimmen Sie jeweils die Asymptoten dieser Hyperbeln.

2. a) Es ist zu zeigen, dass die Geraden $y = x$ und $y = -x$ Symmetrieachsen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ sind.

b) Besitzt der rechte Zweig der graphischen Darstellung von $y = \frac{1}{x^2}$ eine Symmetrieachse? (X)

3. Man bestimme unter Verwendung des Bildes von $y = \frac{1}{x}$ die graphische Darstellung von $y = \frac{4}{x}$. Besitzt diese Kurve Symmetrieachsen?
Die Graphen der Funktionen der Form

$$y = \frac{b}{cx + d} \qquad (c \neq 0, b \neq 0)$$

ergeben sich aus dem Graphen von $y = \frac{1}{x}$ durch Verschiebung in x-Richtung und Dehnung in Ordinatenrichtung. Um die Größe der Verschiebung und den Dehnungskoeffizienten richtig ablesen zu können, erweitern wir den Bruch mit $\frac{1}{c}$:

$$\frac{b}{cx + d} = \frac{\frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

Für das Beispiel $y = \frac{1}{3x+2}$ sieht das so aus.

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}}{x+\frac{2}{3}}$$

Jetzt sehen wir, dass die Darstellung unserer Funktion die um $-\frac{2}{3}$ (und nicht um -2, wie ein unüberlegt antwortender Schüler vielleicht gedacht haben könnte) in x-Richtung verschobene und in y-Richtung auf ein Drittel verkürzte Darstellung von $y = \frac{1}{x}$ ist (Abb. 6.8).

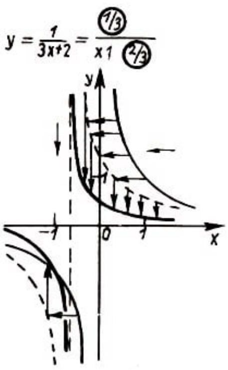


Abb. 6.8

Übung

Zeichnen Sie die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{1}{2-x} + 1$$

(Hinweis: Der Bruch $\frac{1}{2-x}$ ist nach der oben gegebenen Vorschrift mit dem Kehrwert des Koeffizienten von x, also mit -1 zu erweitern. Man bekommt $y = \frac{-1}{x-2} + 1$).

6.4. Die Bilder von Funktionen der Form

$$y = \frac{ac+b}{cx+d}$$

die gebrochen-lineare Funktionen genannt werden, weichen im Aussehen ebenfalls nicht von der soeben behandelten Darstellung von $y = 1/x$ ab. Wir setzen natürlich voraus, dass $c \neq 0$ (sonst bekommt man die lineare Funktion $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$) und dass $ad \neg bc$, d.h. der Zähler kein Vielfaches des Nenners und folglich die Funktion keine Konstante ist und beweisen nun die Behauptung.

$$\begin{array}{l} \quad (2x+1) : (x-3) = 2 + \frac{7}{x-3} \\ -(2x-6) \\ \hline \qquad\quad 7 \end{array}$$

Wir betrachten zunächst die Funktion $y = \frac{2x+1}{x-3}$ als Beispiel. Wir lösen den "ganzen Teil" des Bruches heraus, indem wir Zähler und Nenner dividieren und erhalten

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

Nun ist zu sehen, dass der Graph dieser Funktion aus der Darstellung von $y = 1/x$ durch folgende Transformationen hervorgeht: Verschiebung um drei Einheiten nach rechts, Dehnung um den Faktor 7 in Ordinatenrichtung und Verschiebung in dieser Richtung um zwei Einheiten nach oben.

Der beliebige Bruch $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kann in analoger Weise dargestellt werden, wenn der "ganze Teil" abgespaltet wird. Folglich sind die graphischen Darstellungen aller gebrochen-linearen Funktionen $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ Hyperbeln mit Asymptoten, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Bemerkung:

Zur Konstruktion der graphischen Darstellung einer beliebigen gebrochen-linearen Funktion braucht man den die Funktion darstellenden Bruch jetzt nicht mehr umzuformen. Da wir ja wissen, dass diese Darstellung eine Hyperbel der genannten Art ist, brauchen wir nur den Asymptotenschnittpunkt und einige wenige Kurvenpunkte zu bestimmen.

Beispiel: Wir konstruieren die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{3x+5}{2x+2}$$

Zuerst suchen wir die Asymptoten dieser Hyperbel. Die Funktion ist dort nicht definiert, wo $2x + 2 = 0$ ist, das heißt für $x = -1$ (Abb. 6.9).
Folglich ist die Gerade $x = -1$ die senkrechte Asymptote. Um die horizontale Asymptote zu finden, schauen wir nach, welchem Wert sich die Funktionswerte nähern, wenn die Argumentwerte immer größer werden. Für große Werte von $|x|$ haben wir und deshalb ist die Gerade $y = \frac{3}{2}$ die horizontale Asymptote unserer Kurve.

$$y = \frac{3x+5}{2x+2} \approx \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

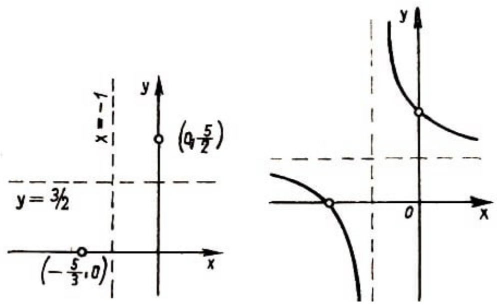


Abb. 6.9,6.10

Jetzt bestimmen wir noch die Schnittpunkte unserer Hyperbel mit den Koordinatenachsen. Für $x = 0$ ist $y = \frac{5}{2}$. Andererseits ist die Funktion null, wenn $3x + 5 = 0$ ist, also für $x = -\frac{5}{3}$. Wenn wir nun die Punkte $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ und $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ in die Zeichnung eintragen, können wir das Bild der Funktion angenähert richtig zeichnen Abb. 6.10).

Übungen

1. Konstruieren Sie die Graphen der Funktionen
a) $y = \frac{1}{1-2x}$, b) $y = \frac{3+x}{3-x}$, c) $y = \left|\frac{2x+1}{x+1}\right|$.

2. In Abbildung 6.11 sind die Graphen gebrochen linearer Funktionen $y = \frac{px+q}{x+r}$ dargestellt. Bestimmen Sie diese Funktionen (d.h. die Konstanten p, q und r).

3. a) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung

$$\frac{x}{1-x} = x^2 + 4x + 2$$

Lösung: Wir zeichnen die Graphen der Funktionen

$$y = \frac{x}{1-x} \qquad \text{und} \qquad y = x^2 + 4x + 2$$

in ein gemeinsames Koordinatensystem. In Abb. 6.12 sind zwei Schnittpunkte der beiden Graphen zu sehen. Es ist aber klar, dass es noch einen dritten Schnittpunkt geben muss, weil die Parabel die

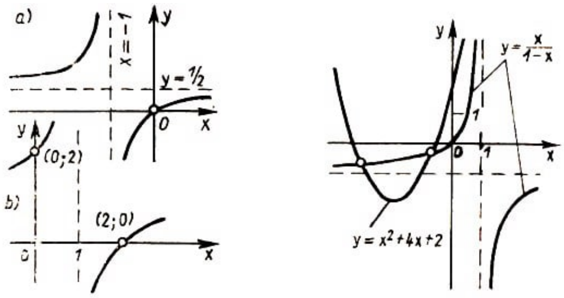
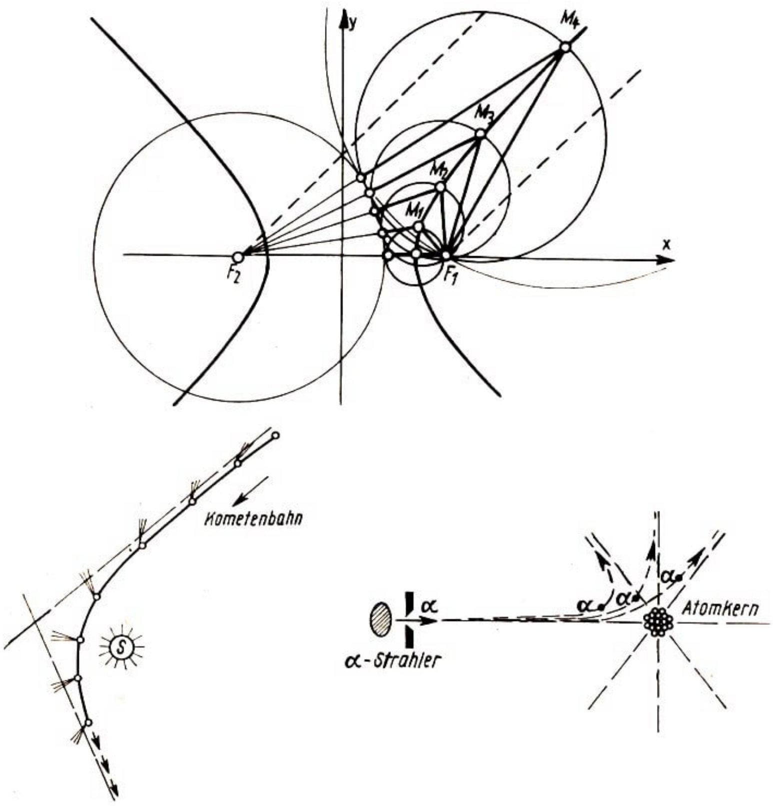


Abb. 6.11,6.12

Asymptote der Hyperbel sicher schneidet. Die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen sind gleichzeitig die Lösungen der betrachteten Gleichung.
Die Antwort lautet also: drei Lösungen!

Tafel 6.1



Interessante Eigenschaften der Hyperbel

1. Die Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte M, deren Abstandsdifferenz von

zwei festen Punkten F_1 und F_2, den Brennpunkten der Hyperbel, konstant ist.

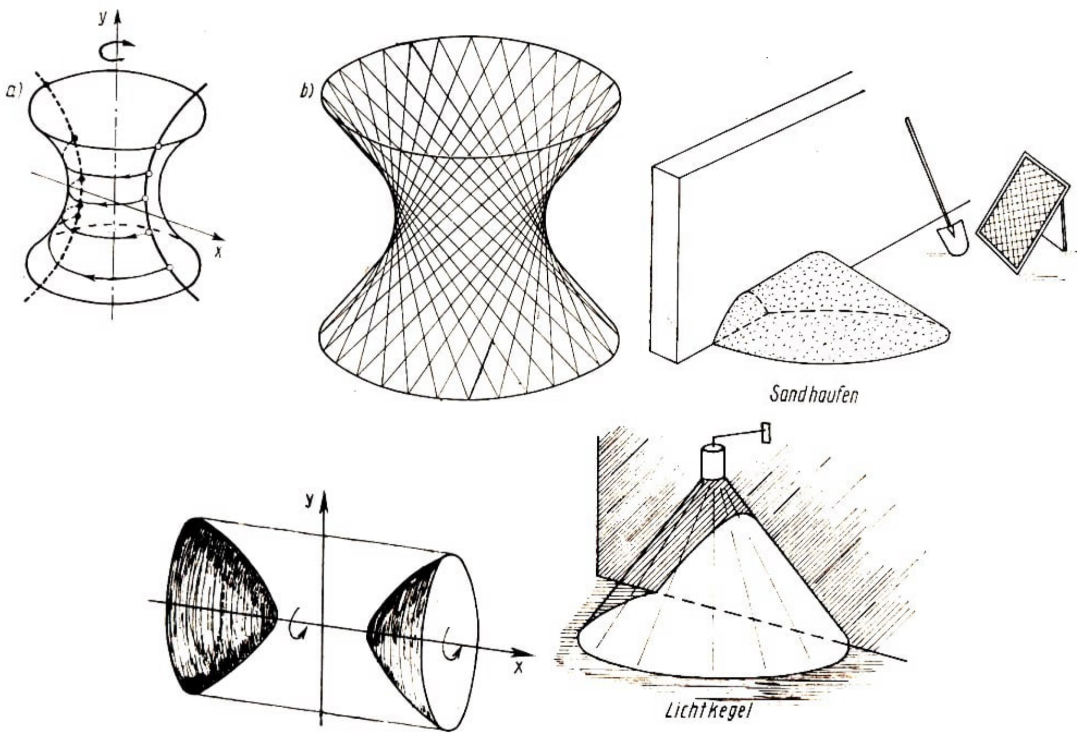
2. Kometen oder Meteoriten, die von weit her in das Sonnensystem eindringen, bewegen sich auf einem Hyperbelast, in dessen Brennpunkt die Sonne steht. Eine Asymptote[11] gibt die Richtung des Eindringens, die andere die des Verlassens des Sonnensystems an.

3. Beim Beschuss des Atomkerns mit α-Teilchen bewegen sich dieselben ebenfalls auf Hyperbelästen, sofern sie am Kern vorbeifliegen.

4. Wenn man eine Hyperbel um die Symmetrieachse dreht, die ihre beiden Zweige nicht schneidet, dann ergibt sich eine Fläche, die den Namen "Einschaliges Rotationshyperboloid" trägt. Sie besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass sie von geraden Linien "erzeugt" werden kann. Der Gittermast des Moskauer Fernsehzentrums ist aus Stücken solcher Hyperboloide zusammengesetzt, obwohl er völlig aus geraden Stahlträgern zusammengefügt wurde.

5. Wenn man eine Hyperbel um die andere Symmetrieachse rotieren lässt, dann erhält man eine Fläche, die aus zwei "Stücken" besteht, das "Zweischalige Rotationshyperboloid".

6. Wenn ein unbegrenzter Kreiskegel in geeigneter Weise von einer Ebene geschnitten wird, dann entsteht als Schnittkurve des Kegelmantels mit der Ebene eine Hyperbel. Wenn Sie eine Lampe mit kreisförmiger Schirmöffnung haben, so können Sie beobachten, dass die Lampe einen Teil der Wand beleuchtet, der von einer Hyperbel berandet ist.



[11] Jede Hyperbel besitzt zwei Asymptoten. Bei Hyperbeln, die Graphen gebrochen-linearer Funktionen sind, stehen diese senkrecht aufeinander. Bei den anderen Hyperbeln schließen sie einen anderen Winkel ein.

7 Potenzfunktionen

7.1. Potenzfunktionen sind Funktionen mit der Abbildungsvorschrift $y = x^n$.
Die graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen für die drei ersten natürlichen Zahlen als Exponenten.($n = 0$, $n = 1$, $n = 2$) haben wir bereits konstruiert. Für $n = 0$ und $n = 1$ erhalten wir die Funktionen $y = 1$ und $y = x$, deren Bild jeweils eine Gerade ist (Abb. 7.1 a). Für $n = 2$ erhalten wir die Funktion $y = x^2$ mit der Normalparabel als graphischer Darstellung (Abb. 7.1b).

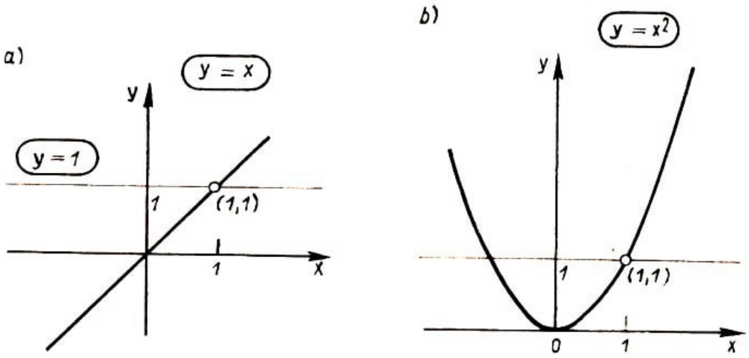


Abb. 7.1

Die graphische Darstellung der Funktion $y = x^3$ ($n = 3$) wird ebenfalls als Parabel bezeichnet und zwar als Parabel dritter Ordnung oder als kubische Parabel. Für positive Argumentwerte ist die kubische Parabel der Normalparabel auch wirklich recht ähnlich. Für $x = 0$ sind die Werte von $y = x^2$ und $y = x^3$ beide gleich null, so dass beide Kurven durch den Koordinatenanfang geben. Für $x = 1$ sind die Funktionswerte beider Funktionen ebenfalls gleich, so dass die beiden Kurven auch durch den Punkt $(1, 1)$ laufen.

Bei Vergrößerung von x (x soll zunächst positiv sein) wird auch der Funktionswert von $y = x^2$ bzw. von $y = x^3$ größer. Die kubische Parabel steigt also ebenso wie die quadratische Normalparabel $y = x^2$ für positive x-Werte (Abb. 7.2).

Für negative x-Werte hat der Graph von $y = x^3$ einen anderen Verlauf, als der von $y = x^2$. Für diese x ist x^3 ebenfalls negativ, und die Kurve verläuft nach unten (Abb. 7.3). Im ganzen betrachtet ist also die kubische Parabel der quadratischen unähnlich.

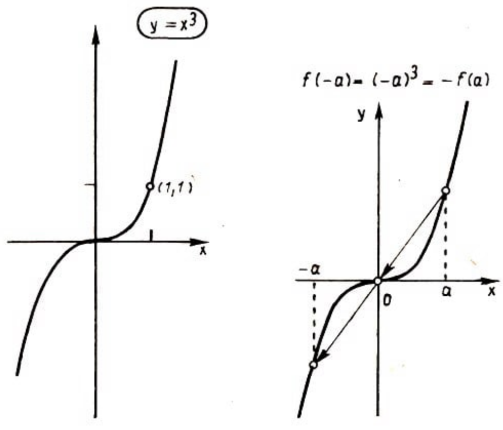


Abb. 7.2,7.3

Den linken Teil des Graphen von $y = x^3$ kann man aus dem rechten auch mittels der Symmetrie erhalten, die aber jetzt von anderer Art als die in Tafel 2.1 betrachtete Spiegelsymmetrie ist.
Wir greifen einen beliebigen Punkt M der rechten Hälfte des Graphen heraus (Abb. 7.3). Wenn die Abszisse dieses Punktes mit a bezeichnet wird, so hat seine Ordinate die Größe $b = a^3$. Dann suchen wir den Punkt des Graphen, der die zu a entgegengesetzte Abszisse $x = -a$ hat. Die Ordinate dieses Punktes ist $(-a)^3 = -a^3$ oder gleich $-b$.
Man kann so zu jedem Punkt $M(a, b)$ auf dem rechten Teil der Kurve $y = x^3$ einen Punkt $M'(-a, -b)$ auf der linken Hälfte finden.

Es ist leicht zu sehen, (Abb. 7.3), dass der Punkt M' symmetrisch zu M bezüglich des Koordinatenursprungs liegt. Demnach kann man die gesamte linke Hälfte aus der rechten durch Punktspiegelung oder durch Drehung um den Nullpunkt um $180°$ erhalten.

Übungen

1. Welche graphischen Darstellungen der im folgenden genannten Funktionen besitzen ein Symmetriezentrum, und welche von ihnen haben eine Symmetrieachse

$$y = x^4; \quad y = x^5; \quad y = x^7; \quad y = x^{16}$$

2. Beweisen Sie, dass das Bild der Funktion $y = \frac{1}{x^3}$ zentralsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt ist.

Lösung: Wir betrachten zwei Kurvenpunkte mit den Abszissen $x = a$ und $x = -a$. Die Ordinate des ersten Punktes ist $\frac{1}{a^3}$, die des zweiten ist $\frac{1}{(-a)^3} = -\frac{1}{a^3}$. Folglich lässt sich zu jedem Punkt $M\left(a, \frac{1}{a^3}\right)$ unserer Kurve ein Punkt $M'\left(-a, -\frac{1}{a^3}\right)$ finden, der zum ersten zentralsymmetrisch in bezug auf den Ursprung liegt. Also ist die ganze Kurve in diesem Sinne zentralsymmetrisch.

3. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, und welche sind ungerade[12]

$$y = x^3|x|; \qquad y = |x^3| + x; \qquad y = \frac{x}{|x|}$$
$$y = |x - x^2|; \qquad y = (2x+1)^4 + (2x-1)^4$$
$$y = (x^3+1)^2; \qquad y = (x^2+1)^3; \qquad y = (3-x)^5 - (3+x)^5$$
$$y = \frac{1}{|2x - x^2|} - \frac{1}{|2x + x^2|}; \qquad y = \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}$$

Wir untersuchen nun, worin sich die Graphen von $y = x^3$ und $y = x^2$ für positives x unterscheiden. Zu dem Zwecke schreiben wir x^3 als $x^2 \cdot x$ und erhalten die graphische Darstellung von $y = x^3$ durch "Multiplikation" der Graphen von $y = x^2$ und $y = x$. (Abb. 7.4).

Für $x = 1$ sind die x Werte von x^2 und x^3 einander gleich, der entsprechende Punkt $(1, 1)$ gehört beiden Kurven gleichzeitig an. Wir schreiten von hieraus nach links beziehungsweise rechts fort.

[12] Die gerade Funktion wurde auf Tafel 2.1, die ungerade Funktion auf Tafel 7.1 definiert und erläutert.

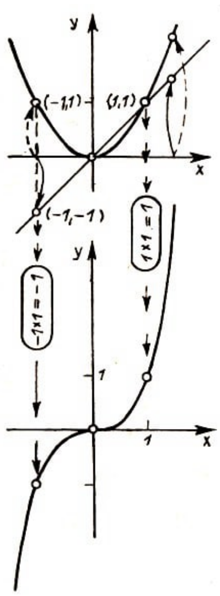


Abb. 7.4

Für $x > 1$ (rechts vom Punkt $(1, 1)$) ergeben sich die Funktionswerte von $y = x^3$ durch Multiplikation der Funktionswerte von $y = x^2$ mit Zahlen, die immer größer als eins sind. Demzufolge ist für $x > 1$ x^3 größer als x^2, d.h., rechts vom Punkte $(1, 1)$ verläuft die kubische Parabel dauernd oberhalb der Parabel $y = x^2$ und zwar in immer größer und größer werdendem Abstand (weil die Werte von x^2 mit immer größeren Zahlen multipliziert werden).

Gehen wir vom Punkt $(1, 1)$ nach links in Richtung auf den Nullpunkt, so entsteht dort x^3 aus x^2 durch Multiplikation mit einem Faktor, der kleiner als eins ist. Die kubische Parabel muss also immerzu unter der Normalparabel bleiben, wobei sie sich zunächst von ihr entfernt, um sich ihr dann wieder zu nähern und bei $x = 0$ wieder mit ihr zusammenzufallen, was wir uns schon weiter oben überlegt hatten.

In der Nähe des Nullpunktes schmiegt sich die kubische Parabel dabei enger an die x-Achse an, als die Normalparabel (Abb. 7.5).

Fragen

Für welches x wird der Wert von x^3 hundertmal größer als der von x^2 sein? Wann ist er 1000-mal größer?
Wieviel höher liegt für diese Argumentwerte die kubische Parabel als die quadratische? Gibt es einen Punkt, in dem die kubische Parabel um 10^9 Einheiten über der quadratischen liegt? Wie lautet die Antwort auf die entsprechende Frage mit 1 Million Einheiten?

Wenn wir annehmen, dass die Breite der Bleistiftlinie 0,1 mm beträgt und die Maßeinheit unserer graphischen Darstellung auf beiden Achsen gleich 1 cm ist, dann ist für $x = 0,1$ die Parabel $y = x^2$ nicht mehr von der Koordinatenachse zu unterscheiden. Wievielmal näher ist die kubische Parabel der Achse an derselben Stelle?

7.3. Weil wir x^3 durch Multiplikation aus x^2 erhalten, sehen wir, wievielmal die Ordinate $y = x^3$ größer (oder kleiner) als die Ordinate $y = x^2$ ausfällt.
Wir möchten jetzt sichtbar machen, um wieviel der Funktionswert $y = x^3$ größer (oder kleiner) ist als der Wert $y = x^2$.

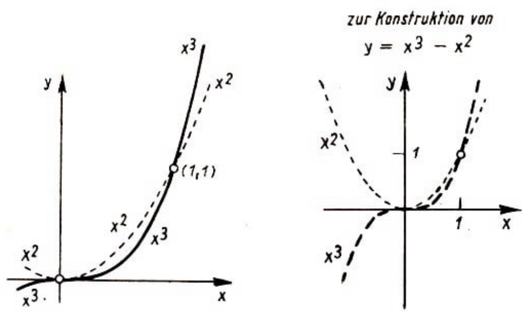


Abb. 7.5,7.6

Um unser Ziel zu erreichen, zeichnen wir die graphische Darstellung der Funktion $y =$

$x^3 - x^2$, deren Ordinaten man bekommen kann, indem man von den Ordinaten der graphischen Darstellung von $y = x^3$ die Ordinaten der Normalparabel subtrahiert (Abb. 7.6). (Superposition von$y = x^3$ und $y = -x^2$!)

Für $x = 0$ wird sowohl x^3 als auch x^2 null, der gesuchte Graph läuft also auch durch den Nullpunkt. Für $x < 0$ wird eine positive Zahl x^2 von der negativen Zahl x^3 abgezogen, die Differenz $x^3 - x^2$ ist sicher negativ und der Graph unserer Funktion liegt dort unterhalb der x-Achse, ja sogar unterhalb der Kurve $y = x^3$ (vgl. Abb. 7.7).
Für $x > 0$ ist die Sache etwas verwickelter, denn beide Funktionen sind positiv, und das Resultat hängt davon ab, welche der beiden Zahlen x^3 oder x^2 die größere ist. Zunächst ist x^2 größer als x^3 und die Kurve $y = x^3 - x^2$ liegt in Nachbarschaft des Nullpunktes unterhalb der x-Achse (Abb. 7.8).

Allmählich beginnt die Funktion $y = x^3$ immer stärker anzuwachsen, und für $x = 1$ holt sie die Funktion $y = x^2$ ein. Irgendwo zwischen 0 und 1 muss also die graphische Darstellung von $y = x^3 - x^2$ zu steigen beginnen. Sie schneidet schließlich an der Stelle $x = 1$ die Abszissenachse (Abb. 7.9).

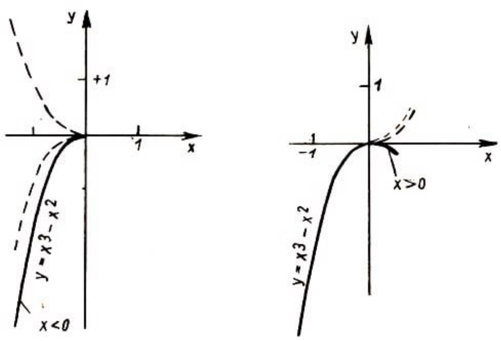


Abb. 7.7,7.8

Im weiteren Verlauf, das heißt für $x > 1$, wachsen die Funktionswerte von $y = x^3 - x^2$ an, die graphische Darstellung verläuft nach oben und unterscheidet sich für sehr große x in der Form fast nicht mehr von der kubischen Parabel, weil dann x^2 sehr klein im Verhältnis zu x^3 ist (Abb. 7.10).

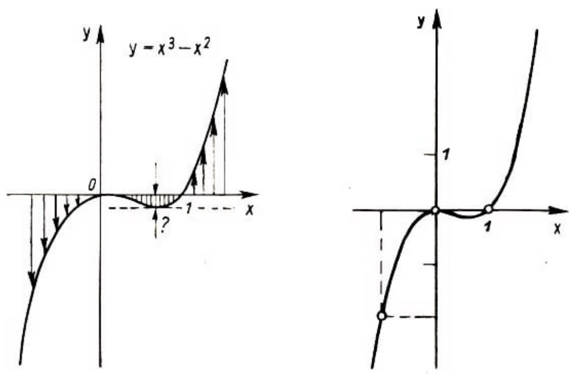


Abb. 7.9,7.10

Übungen

1. Wenn man die Werte von $y = x^3 - x^2$ betrachtet, so kann man annähernd feststellen, für welches x diese Werte zu wachsen beginnen. Versuchen Sie diesen Wert etwa mit einer Genauigkeit von 0,1 (d.h. auf eine Stelle nach dem Komma genau) zu bestimmen.

Später werden wir sehen, wie man ihn genau bestimmen kann. An derselben Stelle unserer graphischen Darstellung befindet sich deren tiefster Punkt, das heißt die tiefste Stelle der "Mulde" im betrachteten Graphen.

2. Lösen Sie die Ungleichungen

$$x^3 - x^2 > 0 \qquad , \qquad x^3 - x^2 \leq 0$$

Wir vergleichen jetzt den Verlauf der Funktionen $y = x^3$ und $y = cx^2$ und konstruieren die graphische Darstellung der Funktion $y = x^3 - cx^2$.

Zu Beginn unserer Überlegungen wollen wir für c einen kleinen Wert, z.B. $c = 0,3$ nehmen. Das Bild der Kurve hängt davon ab, wie die zwei Graphen von $y = x^3$ und $y = 0,3x^2$ zueinander gelegen sind.
Aus der Abbildung 7.11 liest man leicht ab, dass die Konstruktion der Kurve in größerer Entfernung vom Nullpunkt, das heißt für x-Werte, deren Absolutbetrag hinreichend groß ist, nicht schwierig sein wird. Dagegen kann man aus dieser Skizze nicht ersehen, wie die Kurve, verglichen mit den Graphen von $y = x^3$ und $y = 0,3x^2$, in der Nähe des Nullpunktes verläuft.
Man weiß zunächst nicht, welche der beiden Parabeln ober- oder unterhalb der betrachteten Kurve liegt. Davon hängt aber die Entscheidung darüber ab, ob die resultierende Kurve eine "Mulde" besitzt oder nicht.

Um diese Frage zu beantworten, lösen wir die Ungleichung

$$x^3 > 0,3x^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2(x - 0,3) > 0$$

Dann wird klar, dass in der Nähe des Koordinatenanfangs und zwar für positive x, die kleiner als 0,3 sind, die kubische Parabel unterhalb der Parabel $y = 0,3x^2$ liegt (Abb. 7.12a).

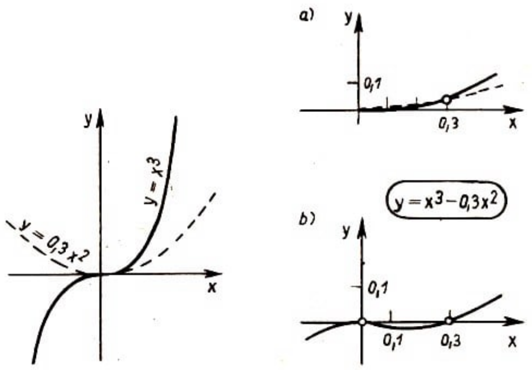


Abb. 7.11,7.12

Deshalb können wir jetzt die uns bisher unklare Stelle der Abb. 7.11 in vergrößertem Maßstab zeichnen und die graphische Darstellung der Differenzfunktion

$$y = x^3 - 0,3x^2$$

konstruieren. Auch diese Kurve besitzt genau wie das Bild von $yx^3 - x^2$ eine Mulde. Diese ist nur wesentlich flacher (Abb. 7.12b).

Übungen

1. Bestimmen Sie die Breite der Mulde in den Graphen der Funktionen
a) $y = x^2 - 0,01x^2$; b) $y = x^3 - 1000x^2$

2. Besitzt die graphische Darstellung von $y = x^3 + 0,001x^2$ eine "Mulde"?

3. Es ist zu bestimmen, von welchem x an die Parabel $y = x^3$ oberhalb der Parabeln $y = 50x^2$ oder $y = 10000x^2$ verläuft.

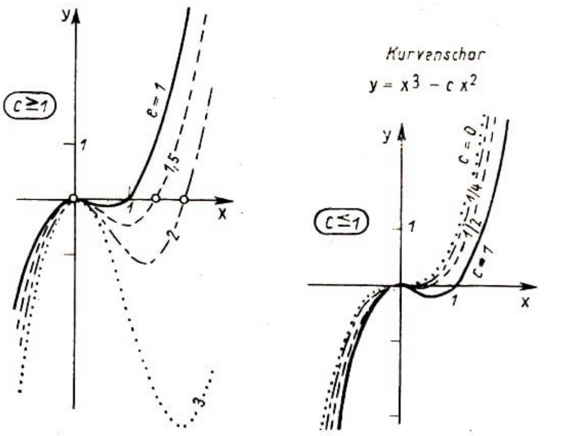


Abb. 7.13 a,b

Wenn Sie die vorstehenden Übungen durchgeführt haben, werden Sie erkennen, dass die graphischen Darstellungen von Funktionen $y = x^3 - cx^2$ für beliebiges $c > 0$ ein und denselben Charakter, ein und dieselbe Form haben:

Links von der Ordinatenachse kommt die Kurve von unten, geht durch den Koordinatenursprung und fällt zunächst wieder. Von einer gewissen Stelle an beginnt sie erneut zu steigen. Die dabei entstehende "Mulde" des Graphen wird mit größer werdendem c ebenfalls immer tiefer (Abb. 7.13).

7.4. Jetzt können wir einen allgemeinen Schluss darüber ziehen, wie sich die Funktion $y = x^3$ im Verhältnis zu einer beliebigen Funktion der Form $y = cx^3$ für positive x verhält!

Für nahe bei null gelegene x wird die Funktion $y = x^3$ kleinere Werte annehmen als jede beliebige Funktion $y = cx^2$, auch wenn der Koeffizient c sehr klein gewählt wird. Für große Werte von x nimmt demgegenüber die Funktion $y = x^3$ größere Werte an als jede beliebige Funktion $y = cx^2$, auch wenn c eine noch so große positive Zahl ist. Unsere Schlussfolgerung lautet demnach:

Die Parabel dritter Ordnung schmiegt sich im Koordinatenursprung der Abszissenachse so weit an, dass zwischen Kurve und Achse nicht nur keine Gerade $y = kx$, sondern auch keine quadratische Parabel $y = cx^2$ eingeschoben werden kann, wie klein auch immer c genommen werden mag.
Im Gegensatz dazu "überholt" die Parabel $y = x^3$ für sehr große positive x jede der Parabeln $y = cx^2$, mag c auch noch so groß gewählt werden.

Übungen

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

$$y=-x^3; \qquad y=|x^3|; \qquad y=1+x^3; \qquad y=(2+x)^3$$
$$y=(2-x)^3; \qquad y=x^3+3x^2+3x$$

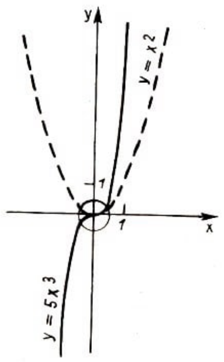


Abb. 7.14

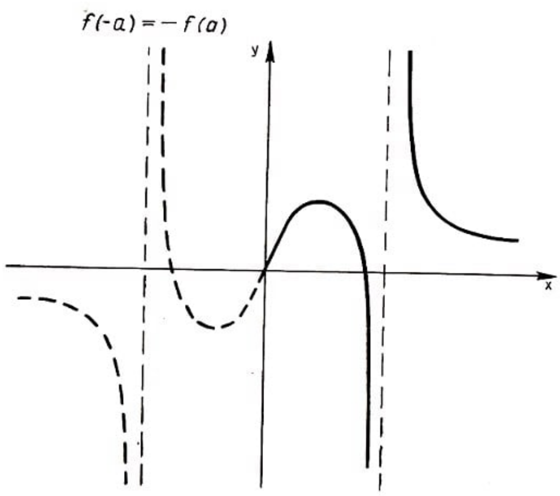
2. In Abb. 7.14 sind die Parabeln $y=5x^3$ und $y=x^2$ dargestellt. Wegen des kleinen Maßstabes der Zeichnung ist die gegenseitige Lage der beiden Kurven in der Nähe von null nicht klar. Denken Sie sich diese Zeichnung mit einer starken Lupe betrachtet, und zeichnen Sie, was Sie dann sehen würden! (Das durch einen kleinen Kreis kenntlich gemachte Gebiet ist im vergrößerten Maßstab zu zeichnen.)

7.5. Die Funktionen $y=x^n$ für $n>3$ werden wir nicht so genau analysieren wie $y=x^3$. Die graphischen Darstellungen dieser Funktionen ähneln bei flüchtiger Betrachtung entweder der Parabel $y=x^2$ (für gerades n) oder der Parabel $y=x^3$ (für jedes ungerade n).

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die Funktion $y=x^4$ für betragsmäßig große x-Werte noch schneller wächst als die Funktion $y=x^3$, x^5 wächst wiederum schneller als $y=x^4$ und so weiter.

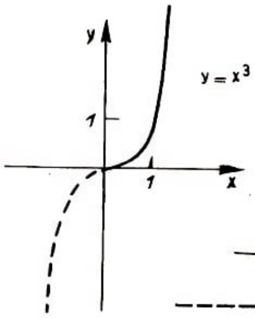
Je größer n ist, umso schneller wächst die Potenzfunktion $y=x^n$ für große positive x (Abb. 7.15).
Für $0\le x\le +1$, $x\to 0$ nähern sich die Funktionswerte sämtlicher Potenzfunktionen $y=x^n$ dem Wert null und zwar umso schneller, je größer n ist.

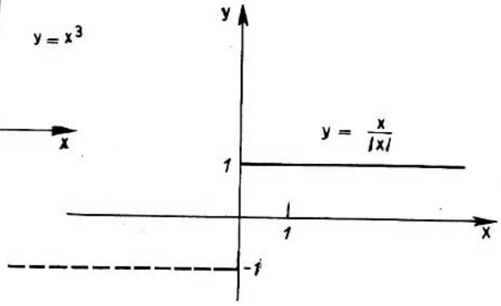
Tafel 7.1: Ungerade Funktionen



Eine Funktion $y=f(x)$ heißt ungerade, wenn für jedes a die Gleichung $f(-a)=-f(a)$ besteht. Der Graph einer ungeraden Funktion ist zentralsymmetrisch in bezug auf den Koordinatenursprung.

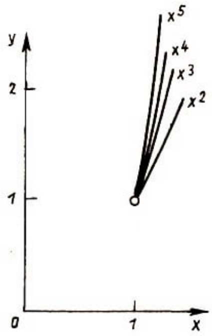
Beispiele:

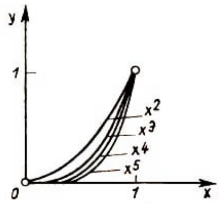




Die Graphen aller Potenzfunktionen $y = x^n$ (beginnend mit $n = 2$) berühren die Abszissenachse im Koordinatenursprung, wobei sie sich ihr umso mehr anschmiegen, je größer n ist (Abb. 7.16).

Abb. 7.15,7.16





Für große n ist es praktisch unmöglich, die Darstellung einer Funktion $y = x^n$ mit durchgehendem Maßstab zu zeichnen. An fast allen Stellen des Intervalls zwischen null und eins sind die Funktionswerte sehr klein und das Bild von $y = x^n$ fällt praktisch mit der x-Achse zusammen.
Innerhalb eines kleinen Intervalls in der Nähe von $x = 1$ wächst die Funktion dann bis zum Wert 1 an, um dann sehr rasch weiter zu steigen, so dass die Kurve über den Rand jedes beliebigen Blattes hinausläuft.[13]

Sei zum Beispiel $n = 100$. Wir versuchen das Bild von $y = x^{100}$ zu zeichnen, wobei wir mit $x = 1$ beginnen. Für $x = 2$ haben wir $y = 2^{100}$, Das ist wohl groß genug!
Wir nehmen $x = 1,1$, dann ist $y = 1,1^{100}$. Auch das ist noch eine sehr große Zahl. In der Tat ist $1,1^{100} = (1,1^{10})^{10}$. Wir werden diese Zahl nicht ausrechnen, sondern nur abschätzen. Dafür verwenden wir die Ungleichung

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

die für $a > 0$ und alle natürlichen Zahlen n richtig ist.[14] Wir bekommen $(1,1)^{10} \geq 1 + 10 \cdot 0,1 = 2$, woraus wir die Abschätzung $(1,1)^{100} \geq 2^{10} > 1000$ gewinnen.

[13] Für negative x-Werte ist alles völlig analog.

[14] $(1 + a)^n = (1 + a)(1 + a)...(1 + a) = 1 + (a + a + ... + a) + ...$, wobei die durch ... angedeuteten und nicht hingeschriebenen weiteren Glieder alle positiv sind.

Es ist also das Intervall von 1 bis 1,1 immer noch zu groß für die Konstruktion der Darstellung von $y = x^{100}$. Nur in einem Intervall von der Länge 0,01 bis 0,02 unterscheiden sich die Funktionswerte noch nicht zu sehr voneinander.
Wir wählen jetzt den Maßstab auf der x-Achse um den Faktor 100 größer, als auf der y-Achse. Die Kurve $y = x^{100}$ wird dabei in horizontaler Richtung um das 100-fache gedehnt und wird etwa die in Abb. 7.17 dargestellte Form bekommen.

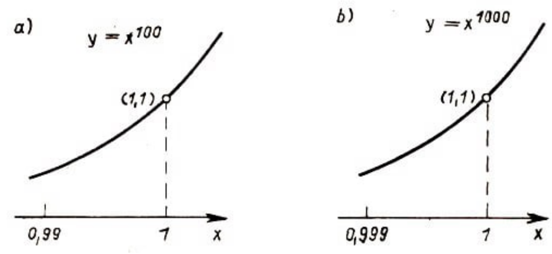


Abb. 7.17

Wenn n noch größer ist, dann wird das Intervall der genauen zeichnerischen Darstellbarkeit noch kleiner. In Abb. 7.17 b sehen Sie die graphische Darstellung von $y = x^{1000}$, welche in x-Richtung um das 1000-fache gedehnt worden ist. Es scheint im übrigen, als hätten wir zwei identische Kurven bekommen.[15]

Übungen

1. Konstruieren Sie das Bild der Funktion $y = x^2 - x^4$ auf zwei Arten:
a) durch "Subtraktion" der Graphen von $y = x^2$ und $y = x^4$,
b) durch Faktorzerlegung des Polynoms $(x^2 - x^4)$.

2. a) Gegeben sind zwei wachsende Zahlenfolgen

a_n: 0,001; 0,004; 0,009; . . .
b_n: 100; 300; 500; ...

Kann die erste Folge jemals die zweite überholen, d.h. kann die Ungleichung $a_n > b_n$ für irgend ein n erfüllt werden? b) Beantworten Sie dieselbe Frage bezüglich der Folgen

a_n: 0,001; 0,008; 0,027; ...
b_n: 100; 400; 900; ...

3. Wir möchten wissen, wieviele Lösungen die folgenden Gleichungen besitzen:
a) $x^3 = x^2 + 1$; b) $x^3 = x + 1$; c) $x^3 + 0,1 = 10x$; d) $x^5 - x - 1 = 0$.

4. a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

$$y = x^3 - x \qquad , \qquad y = x^3 + x$$

b) Wählen Sie a und b derart, dass im Bilde der Funktion $y = ax^3 + bx$ die Breite der "Mulde" 10 beträgt und ihre Tiefe nicht kleiner als 100 ist.

7.6. Als wir über den Verlauf der Potenzfunktion $y = x^n$ für kleine Argumentwerte

[15] Natürlich sind die beiden Graphen in Wahrheit nicht gleich. Der Unterschied ist aber so klein, dass er in der Zeichnung nicht zu bemerken ist.

sprachen, haben wir bemerkt, dass die Bilder dieser Funktionen die x-Achse im Koordinatenursprung berühren. Wir verweilen noch etwas bei dieser Frage, um den genaueren Sinn der Redeweise: "eine Gerade berührt eine Kurve" herauszufinden.

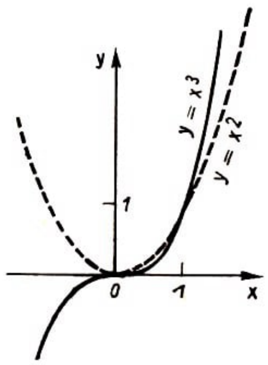


Abb. 7.18

Ja, warum sagen wir eigentlich, dass die x-Achse sowohl die Parabel $y = x^2$ als auch die kubische Parabel berührt, wo doch die kubische Parabel die x-Achse im Punkte $x = 0$ ganz sicher auch schneidet (Abb. 7.18)?

Warum nennen wir andererseits nicht auch die y-Achse eine Tangente der Parabel $y = x^2$, wo doch auch diese Gerade nur einen einzigen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat (Abb. 7.18)?
Alles hängt davon ab, welchen Sinn man der Formulierung "die Gerade berührt Kurve" gibt. Dazu müssen wir die typischen Eigenschaften einer Tangente und ihre allgemeine Definition kennen.

In der Schulgeometrie sind wir bisher nur einer einzigen Kurve begegnet, bei der wir den Begriff der Tangente definiert haben, nämlich dem Kreis.
Wir wollen zu erfassen versuchen, wodurch sich eine Tangente eines Kreises von einer Sekante unterscheidet. Die beiden folgenden Unterschiede springen sofort ins Auge:

1. Während die Sekante mit der Kreislinie zwei gemeinsame Punkte hat, besitzt die Tangente nur einen Punkt mit ihr gemeinsam (Abb. 7.19).

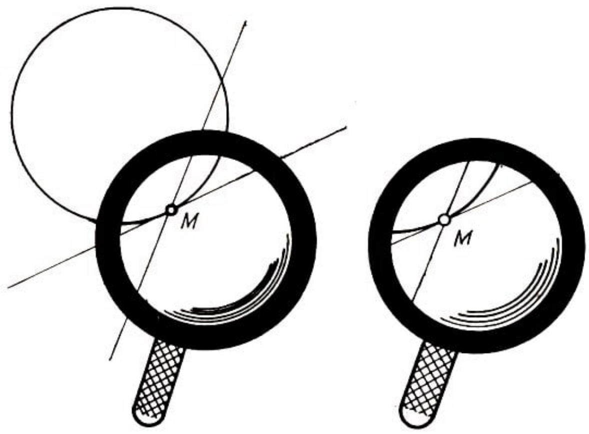


Abb. 7.19,7.20

2. Die Tangente "schmiegt sich" in der Nähe des Berührungspunktes M mehr als eine Sekante an die Kurve an. (Deshalb können wir eine Tangente auch dann von einer Sekante unterscheiden, wenn nicht der gesamte Kreis abgebildet und damit möglicherweise der zweite Sekantenschnittpunkt nicht zu sehen ist [Abb. 7.20].)

Wir müssen uns nun fragen, welche der beiden Eigenschaften die wesentliche ist (die Haupteigenschaft), so dass wir sie zur Grundlage einer Tangentendefinition für eine beliebige Kurve (und nicht nur für eine Kreislinie) machen können.

Sicher ist die erste die natürlichere von beiden. Man könnte also den Versuch machen, als Tangente eine solche Gerade zu bezeichnen, die mit; der betrachteten Kurve nur einen gemeinsamen Punkt hat. Wenn wir jedoch eine solche Definition nehmen, geraten wir sehr schnell in Widerspruch zu unserem gesunden Menschenverstand und zu unserer anschaulichen Vorstellung von einer Tangente, d.h. zur zweiten oben genannten Eigenschaft einer Kreistangente.

Durch den Scheitel der Parabel geht zum Beispiel außer der Abszissenachse eine weitere Gerade mit nur einem gemeinsamen Punkt mit dem Graphen von $y = x^2$, nämlich die y-Achse. Diese heißt aber trotzdem niemals Tangente der Normalparabel (Abb. 7.18).

In der Abbildung 7.21 ist die Lage noch schlimmer: alle Geraden, die im Inneren des Winkels $\angle BOA$ liegen, schneiden die Kurve nur ein einziges Mal! Andererseits besitzt die in Abb. 7.22 dargestellte Gerade AB mit der Kurve zwei gemeinsame Punkte, und dennoch kann sie mit dem größten Recht Tangente an die Kurve im Punkte O genannt werden.

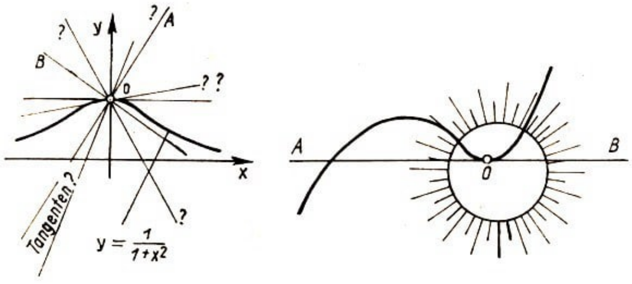


Abb. 7.21,7.22

Wenn wir unsere Abbildung "vergrößern", um den in einer Umgebung von O liegenden Teil der Kurve näher zu betrachten, so ist die Anordnung der Kurve und der Geraden in der Tat ihrem Charakter nach völlig identisch mit der Lage von Normalparabel und Abszissenachse zueinander in der Abbildung 7.23.

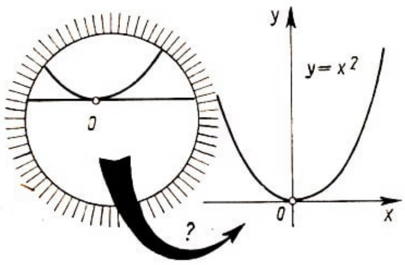


Abb. 7.23

Es erscheint also sinnvoller, wenn wir die zweite Eigenschaft als die wesentliche ansehen. Sie besagt, dass eine Tangente sich der Kurve eng anschmiegt. So hat es durchaus einen Sinn zu sagen, das sich die Abszissenachse der kubischen Parabel $y = x^3$ im Ursprung eng anschmiegt (noch enger etwa als der Parabel $y = x^2$).

Um auf diesem Wege zu einer Definition der Tangente zu gelangen, müssen wir genauer sagen, was es bedeutet, dass sich eine Gerade und eine Kurve "eng aneinander schmiegen".
Wir betrachten nochmals die Parabel $y = x^2$. Zwischen der x-Achse ($y = 0$) und der Parabel kann keine weitere Gerade verlaufen, denn jede Gerade $y = kx$ ($k > 0$) verläuft innerhalb eines gewissen Intervalls oberhalb der Parabel und schneidet sie noch einmal.

Wenn wir k verkleinern, indem wir die Gerade drehen, dann nähert sich der zweite Schnittpunkt (in Abb. 7.24 ist es der Punkt M) dem ersten und fällt schließlich einmal mit ihm zusammen. In diesem Moment verwandelt sich die Sekante in eine Tangente.

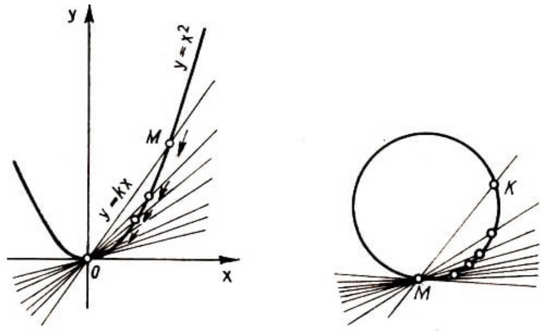


Abb. 7.24,7.25

Den gleichen Sachverhalt findet man in jedem anderen Falle wieder. In Abb. 7.25 wurde durch den festen Punkt M der Kreislinie die Sekante KM gezeichnet. Nähert man den Punkt K dem Punkte M, dann dreht sich die Sekante um den Punkt M und verwandelt sich schließlich in die Tangente an die Kreislinie mit dem Berührungspunkt M, wenn der Punkt K mit M zusammenfällt.
In diesem Fall besitzt die Gerade sicher auch keine weiteren Schnittpunkte mit der Kreislinie. Diese Eigenschaft ist jedoch von zweitrangiger Bedeutung und nicht notwendig.
Damit haben wir die folgende Definition für eine Tangente gewonnen.

Definition:
Es sei eine beliebige Kurve (L) und ein Punkt M auf ihr gegeben (Abb. 7.26). Durch den Punkt M und irgend einen anderen Kurvenpunkt K legen wir die Gerade MK (eine solche durch zwei beliebige Punkte einer Kurve gehende Gerade nennt man eine Sekante; sie kann die Kurve jedoch auch noch in beliebig vielen weiteren Punkten schneiden).
Wird nun der Punkt K entlang der Kurve verschoben, so dass er sich dem Punkte M nähert, so wird sich die Sekante um den Punkt M drehen. Wenn schließlich beim Zusammenfallen von M und K die Gerade mit einer gewissen, wohldefinierten Geraden MN (Abb. 7.26) zusammenfällt, dann heißt diese Gerade Tangente an die Kurve (L) im Punkte M.

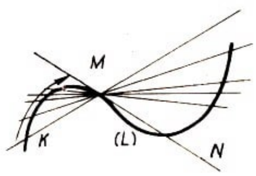


Abb. 7.26

Demnach ist der Hauptunterschied zwischen einer Geraden, die eine gewisse Kurve in einem Punkt M berührt und allen anderen Geraden durch diesen Punkt der, dass der mit der Kurve gemeinsame Punkt M, d.h. ihr Berührungspunkt, in dem Sinne "doppelt" ist, als er sich als Resultat der Verschmelzung zweier sich einander nähernder Schnittpunkte darstellt.

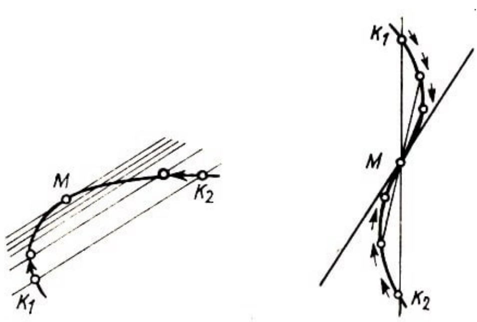


Abb. 7.27,7.28

Es ist dabei ganz unwesentlich, dass einer der beiden Punkte festgehalten worden ist. Es können auch beide Schnittpunkte einer Sekante aufeinander zu bewegt werden, so dass sie sich wieder im Berührungspunkt vereinigen (Abb. 7.27). Manchmal verschmelzen nicht nur zwei, sondern sogar drei Punkte im Berührungspunkt (Abb. 7.28).

Bemerkung 1: In der Definition ist nichts über die Zahl der gemeinsamen Punkte von Tangente und Kurve (L) gesagt. Diese Zahl kann beliebig sein. In Abb. 7.29a sehen wir eine Gerade, die die Kurve (Γ) im Punkte M berührt und in zwei weiteren Punkten schneidet, wohingegen in Abb. 7.29b die Gerade MN die Kurve in unendlich vielen Punkten berührt.

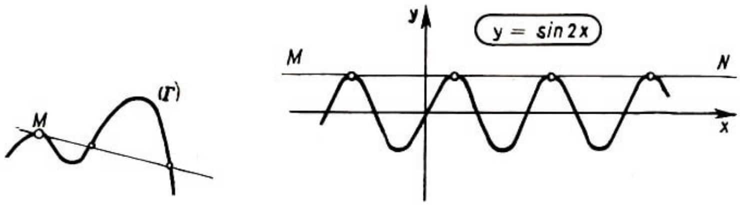


Abb. 7.29 a,b

Bemerkung 2: In der Definition der Tangente wird gefordert, dass die Annäherung des Punktes K an den Punkt M ganz beliebig sein soll. In allen Fällen, wo wir von einer Tangente sprechen, muss die Sekante ein und derselben Geraden zustreben. Wenn für verschiedene Arten der Annäherung des Punktes K an M die Sekante verschiedenen Geraden zustrebt, dann sagen wir, dass die Kurve in diesem Punkte keine Tangente besitzt.

Übungen

1. Es ist die Tangente an die Parabel $y = x^2 + x$ im Punkt $(0, 0)$ zu bestimmen.

Lösung: Wir nehmen einen beliebigen Punkt M der Parabel mit den Koordinaten (a, b). Natürlich ist $b = a^2 + a$. Nun zeichnen wir die Gerade durch 0 und M. Die Gleichung dieser Geraden lautet $y = kx$.
Für $x = a$ haben wir $y = (a + 1)a$ und demnach ist $k = a + 1$ und die Gleichung der Sekante lautet $y = (a + 1)x$.

Jetzt nähern wir den Punkt $M(a, b)$ dem Nullpunkt. Wenn sich der Punkt M mit dem Punkt 0 vereinigt, dann hat sich seine Abszisse in null verwandelt und aus der Sekante $y = (a + 1)x$ ist die Tangente $y = x$ geworden.
Antwort: Die Gleichung der Tangente lautet $y = x$.

2. Bestimmen Sie die Tangente an die Parabel $y = x^2 + x$ im Punkte $A(1, 2)$. (X)

3. Welche der zu $y = x$ parallelen Geraden berührt die Parabel $y = -x^2 + 1$? (X)

4. a) Beweisen Sie, dass die Gerade $y = 0$ im Koordinatenursprung Tangente der Kurve $y = x^3 + x^2$ ist.

b) Bestimmen Sie zu $y = x^3 - 2x$ die Tangente im Nullpunkt.

5. Für welche durch ein Polynom dritten Grades dargestellten Funktionen ($y = ax^3 + ...$) ist die Abszissenachse Tangente im Nullpunkt?

8 Rationale Funktionen

8.1. Rationale Funktionen sind solche Funktionen, die durch einen Bruch zweier Polynome dargestellt werden können. Beispiele für rationale Funktionen sind:[16]

$$y = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^6 + 1}, \qquad y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+3}, \qquad y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}$$

Die im Abschnitt 6. untersuchten gebrochen-linearen Funktionen $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ sind rational, denn sie sind als Bruch zweier Polynome ersten Grades dargestellt.

Wenn die Funktion $y = f(x)$ durch einen Bruch aus zwei Polynomen höheren als ersten Grades dargestellt wird, dann wird ihre graphische Darstellung erwartungsgemäß komplizierter sein, und ihre genaue Konstruktion mit allen Details ist meist schwierig. In den meisten Fällen wird es aber genügen, wenn Beispiele bekannt sind, die die entsprechenden wesentlichen Eigenschaften besitzen.

8.2. Wir analysieren deshalb jetzt einige Beispiele. Zuerst konstruieren wir die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$$

Wir wollen die Aufmerksamkeit vor allem darauf richten, dass die Funktion für $x = -1$ nicht definiert ist, weil der Nenner des Bruches für $x = -1$ gleich null wird. Für solche x, die nahe bei -1 liegen, ist der Wert des Zählers nahezu gleich -2, der Nenner $(x+1)^2$ aber ist positiv und sehr klein. Demnach wird der ganze Bruch negativ und dem absoluten Betrag nach sehr groß sein (und zwar umso größer, je näher x dem Werte -1 kommt).

Folgerung: Die graphische Darstellung zerfällt in zwei Zweige, wobei auf keinem der Zweige ein Punkt mit der Abszisse $x = -1$ liegt; beide Zweige verlaufen nach unten, wenn sich x dem Wert -1 nähert (Abb. 8.1).

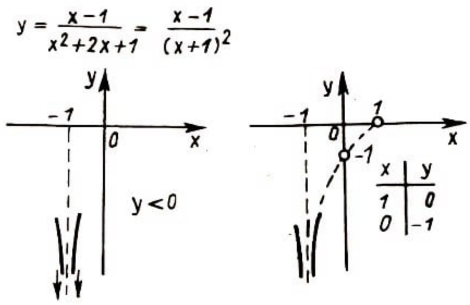


Abb. 8.1,8.2

Jetzt schauen wir uns den Zähler an. Er wird für $x = 1$ null. Folglich schneidet die graphische Darstellung die Abszissenachse an dieser Stelle. Wenn wir noch den Ordinatenschnittpunkt (für $x = 0$ und $y = -1$) einzeichnen, so können wir uns den Verlauf

[16] $y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}$ ist eine rationale Funktion, weil man Sie in Gestalt eines Quotienten zweier Polynome schreiben kann:.

$$y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2+3)(x-1) - 1}{x-1}$$

des Graphen im mittleren Teil annähernd vorstellen (Abb. 8.2).

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Funktion verhält, wenn die Argumentwerte dem absoluten Betrag nach immer größer werden. Wenn x positiv ist und wächst, vergrößern sich Zähler und Nenner des Bruches. Weil aber im Zähler die Variable x in der ersten Potenz steht, während im Nenner x^2 vorkommt, wächst der Nenner für große x wesentlich schneller als der Zähler. Deshalb wird sich die Funktion

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$$

für unbegrenzt wachsende x immer mehr dem Werte null nähern, so dass sich der rechte Kurvenast rechts vom Punkte $x = 1$ zunächst etwas über die x-Achse erhebt (Abb. 8.3), dann aber wieder nach unten geht und sich der x-Achse anschmiegt.
Analoge Überlegungen zeigen uns, dass sich der linke Kurvenzweig bei wachsendem absoluten Betrag des negativen Argumentes ebenfalls der Abszissenachse asymptotisch nähert, allerdings nicht von oben; sondern von unten (Abb. 8.3). Erst später (im Abschnitt 8.4.) werden wir lernen, wie man die Stelle der größten Erhebung des rechten Kurvenastes genau finden kann.

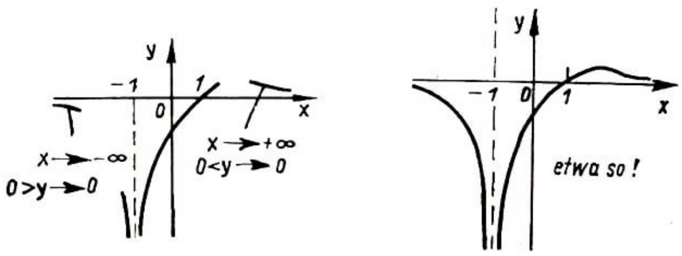


Abb. 8.3,8.4

Wir haben an diesem Beispiel vorgeführt, wie man unter Vernachlässigung von Einzelheiten die allgemeine Form eines Graphen finden kann (Abb. 8.4).

Wir betrachten das Bild der Funktion

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

Zur Vereinfachung zeichnen wir zunächst die Graphen der Funktionen $y = ax$ (des Zählers) und des Nenners $y = x^2 + 1$ (Abb. 8.5). Zur Konstruktion der Darstellung unserer Funktion sind die Werte des Zählers durch die Werte des Nenners zu dividieren. Diese Funktion ist für alle x definiert, denn der Nenner wird nie null.

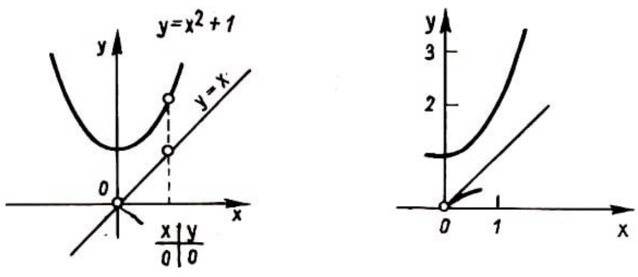


Abb. 8.5,8.6

Für $x = 0$ ist der Zähler gleich null, die graphische Darstellung geht also durch den Koordinatenursprung. Jetzt schreiten wir nach rechts fort (d.h. wir betrachten positive

Argumentwerte). Weil für sehr kleine x die Größe x^2 wesentlich kleiner ist als an selbst, so wird der Nenner eine gewisse Zeit in der Nähe des Nullpunktes nahezu gleich eins sein (genauer: ein wenig größer als eins).
Aus diesem Grunde ist die ganze Funktion ungefähr dem Zähler gleich (auch hier müsste man genauer sagen; ein wenig kleiner als der Zähler), so dass die Kurve dicht neben der Geraden $y = x$ verläuft, wobei sie sich allmählich von ihr entfernt (Abb. 8.6).

Bald jedoch beginnt $x^2 + 1$ schneller zu wachsen als x, der Nenner überholt den Zähler und der Bruch nimmt immer kleinere Werte an - die Kurve wendet sich nach unten (Abb. 8.7). Da die Funktion natürlich dabei positiv bleibt, andererseits aber beliebig kleine Werte annimmt, nähert sich die Kurve der x-Achse (Abb. 8.8).

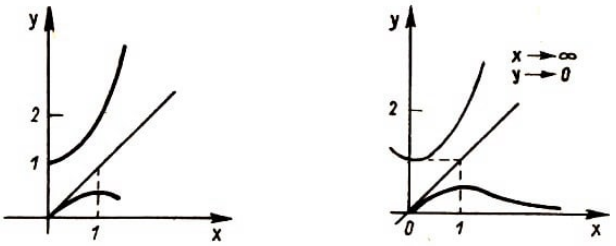


Abb. 8.7,8.8

Den linken Teil der graphischen Darstellung kann man bekommen, wenn man beachtet, dass die gegebene Funktion ungerade ist. Der Gesamtverlauf der graphischen Darstellung ist in Abb. 8.9 dargestellt.

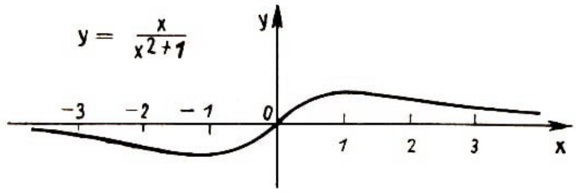


Abb. 8.9

8.4. Wir kehren nochmals zu der von uns bereits studierten Darstellung der Funktion

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

zurück und behandeln anhand dieses Beispieles eine weitere interessante Frage. Wir wollen nämlich versuchen, den höchsten Punkt des rechten Kurvenastes genau zu bestimmen (womit wir natürlich auch den tiefsten Punkt der linken Hälfte bestimmt haben).

Es ist leicht zu sehen, dass unsere Kurve nicht sehr hoch ansteigen kann, weil der Nenner $x^2 + 1$ genügend schnell den Zähler zu übertreffen beginnt. Wir schauen nach, ob sich der Wert 1 noch unter den Funktionswerten befindet, d.h. ob sich die Kurve bis zu einem Punkt mit der Ordinate 1 erheben kann.
Weil $y = \frac{x}{x^2+1}$ ist, so ist dazu die Gleichung $1 = \frac{x}{x^2+1}$; oder die dazu äquivalente Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ zu lösen. Diese Gleichung besitzt jedoch keine reellen Wurzeln (überprüfen Sie das!). Folglich gibt es auf der Kurve keinen Punkt mit der Ordinate $y = 1$. Die Kurve schneidet die Gerade $y = 1$ nicht (Abb. 8.10).

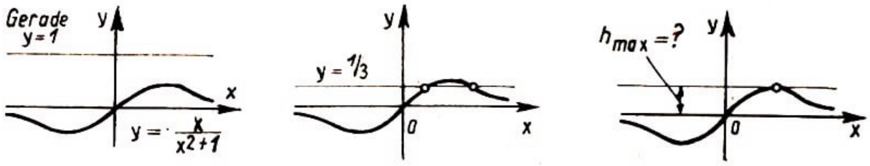


Abb. 8.10-12

Nun sehen wir nach, ob die Kurve über den Wert $y = \frac{1}{3}$ hinaussteigt. Zu dem Zweck haben wir die Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ zu lösen. Diese Gleichung besitzt zwei reelle Lösungen (überprüfen Sie auch das!), und unsere graphische Darstellung besitzt deshalb zwei Schnittpunkte mit der Geraden $y = \frac{1}{3}$. (Abb. 8.11).

Um nun den höchsten Kurvenpunkt zu finden, müssen wir offenbar herausfinden, für welchen größten Wert h die Gleichung $h = \frac{x}{x^2+1}$ noch lösbar ist (Abb. 8.12). Wir ersetzen diese Gleichung durch die dazu äquivalente quadratische Gleichung

$$hx^2 - x + h = 0.$$

Diese Gleichung besitzt sicher eine Lösung, wenn $1 - 4h^2 \geq 0$ gilt. Als größten Funktionswert der Funktion $y = \frac{x}{x^2+1}$ erhalten wir den Wert $h = \frac{1}{2}$. Nun bestimmen wir noch den x-Wert, für welchen diese Zahl als Funktionswert angenommen wird. Setzen wir dazu $h = \frac{1}{2}$ in die Gleichung $hx^2 - x + h = 0$ ein, so ergibt sich $x = 1$. [17]
Der höchste Punkt unseres Graphen ist somit der Punkt $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Übung

Suche die größte Ordinate auf der Kurve (vgl. Abschnitt 8.2.).

$$y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

8.5. Jetzt schauen wir uns die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

an. Der allgemeine Verlauf ist leicht zu zeichnen, wenn man beachtet, dass

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x^2+1}}$$

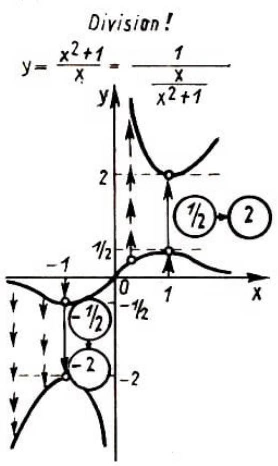
ist und wir demzufolge zu einer Aufgabe gelangt sind, die wir bereits gelöst haben: Es ist die Kurve von $y = \frac{1}{f(x)}$ zu zeichnen, wenn die Darstellung von $f(x)$ gegeben ist (vergleiche Abschnitt 6.2.). Wir bekommen ungefähr das in Abb. 8.13 dargestellte Bild.

Nun konstruieren wir den gleichen Graphen auf einem anderen Wege. Dabei wird sich noch eine interessante Besonderheit zeigen. Wir dividieren Zähler und Nenner:

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Nun konstruieren wir die Darstellung von $y = x + \frac{1}{x}$ durch "Superposition" der uns wohlbekannten Graphen von $y = x$ und $y = \frac{1}{x}$ (Abb. 8.14).

[17] Ergab sich das volle Quadrat hier zufällig?



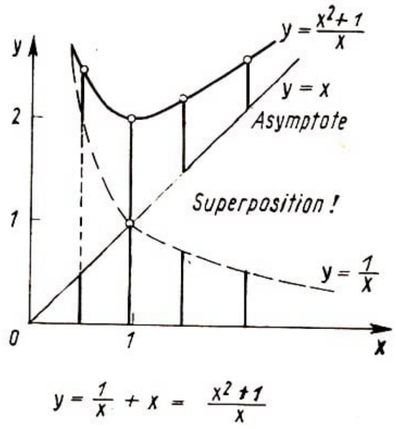


Abb. 8.13,8.14

Wir hatten schon herausgefunden, dass die Funktion

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

eine senkrechte Asymptote besitzt, der sich die Kurve nähert, wenn x sich dem Werte null nähert, nämlich die y-Achse. Jetzt kann man sehen, dass dieselbe Kurve noch eine schräge Asymptote hat, nämlich die Gerade $y = x$.

Übungen

1. Man zeige, dass die graphische Darstellung von

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt des Koordinatensystems ist.

2. Man bestimme die Koordinaten des tiefsten Punktes des rechten Astes der graphischen Darstellung von

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Die Antwort auf die zweite Frage wird bei Betrachtung der ersten Art der Konstruktion dieses Graphen klar (Abb. 8.13): Der tiefste Punkt der Darstellung ergibt sich für dasjenige x, für welches sich in der Darstellung von $y = \frac{x}{x^2+1}$ der höchste Punkt ergeben hatte, das heißt für $x = 1$. Der kleinste Ordinatenwert des Graphen von $y = \frac{x^2+1}{x}$ ist demnach gleich 2. Wenn wir uns das Ergebnis genauer ansehen, bemerken wir, dass wir eine interessante Ungleichung erhalten haben:

Für positive x (es war ja die Rede von der rechten Hälfte der Darstellung) ist stets $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Übungen

1. Beweisen Sie die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{für} \quad x > 0 \tag{1}$$

auf direktem Wege.

2. Es ist die Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad a,b > 0 \tag{2}$$

zu beweisen. Das ist die wichtige Ungleichung über das arithmetische und das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen: "Das arithmetische Mittel zweier positiver Zahlen a und b ist immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen."

Die Ungleichung (1) ist ein Spezialfall der Ungleichung (2). Für welches a und b in (2) ergibt sich (1)?

3. Die Ungleichung (1) wird zur Lösung der Aufgabe "vom ehrlichen Kaufmann" verwendet.
Ein ehrlicher Kaufmann wusste, dass seine Waage nicht richtig anzeigte, weil einer der beiden Waagebalken ein wenig länger war als der andere. (Man benutzte damals noch Waagen mit zwei Waagschalen, wie sie Abb. 8.15 zeigt.)

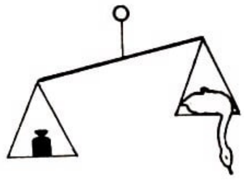


Abb. 8.15

Was soll er tun? Den Käufer zu betrügen ist eine Sünde. Er will sich aber natürlich auch nicht selbst übervorteilen. ... Unser Kaufmann löst das Problem so, dass er die Hälfte der Ware eines jeden Käufers auf der einen Waagschale und die andere Hälfte auf der zweiten abwiegt. Es ist aber noch die Frage, ob er das Problem wirklich gelöst hat! Arbeitet er nun mit Gewinn oder mit Verlust?

8.6. Im nächsten Beispiel betrachten wir die Funktion

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

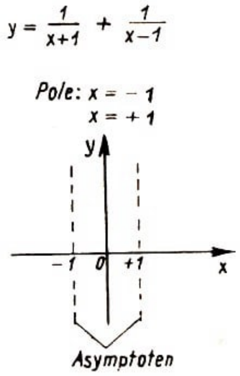


Abb. 8.16

Sie ist dargestellt als Summe zweier Funktionen und man kann ihren Graphen demnach durch Superposition der Bilder von $y = \frac{1}{1+x}$ und $y = \frac{1}{1-x}$ erzeugen. Aber es ist hier vielleicht auch sinnvoll, wenn wir den Gesamtverlauf des Graphen durch folgende Überlegungen zu erfassen suchen: -

a) Die Funktion ist nicht definiert für $x = 1$ und $x = -1$. Die Kurve zerfällt also in drei Zweige (Abb. 8.16).

b) Bei Annäherung an den Wert $x = 1$ wächst der absolute Betrag des zweiten Summanden und damit auch der Funktion. Die Zweige entfernen sich also von der Abszissenachse und nähern sich gleichzeitig der Geraden $x = 1$.

Dabei verläuft die Kurve rechts von $x = 1$ nach oben, links kommt sie von unten (Abb. 8.17).
Ein analoges Bild erhält man in Nachbarschaft der Geraden $x = -1$.

c) Für $x = 0$ ist $y = 0$, die Kurve geht durch den Koordinatenanfang (Abb. 8.18).

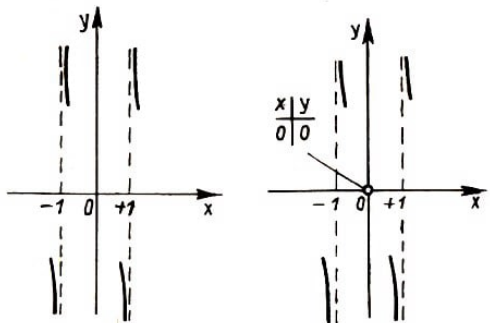


Abb. 8.17,8.18

d) Für x-Werte mit sehr großem absoluten Betrag sind beide Summanden klein, die beiden äußeren Zweige des Graphen nähern sich, wenn $|x|$ steigt, der Abszissenachse: der rechte von oben, der linke von unten (Abb. 8.19).
Wenn wir alle diese Aussagen vereinigen, dann bekommen wir das vollständige Bild der Funktion (Abb. 8.20) mit allen wesentlichen Eigenschaften.

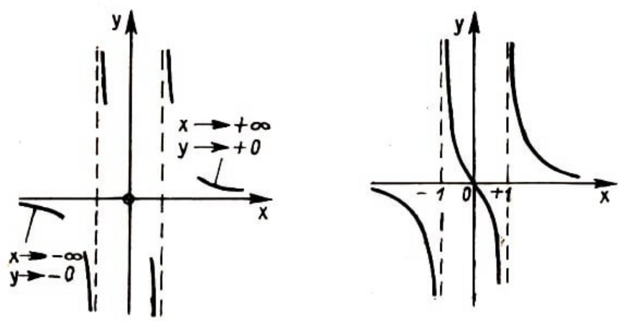


Abb. 8.19,8.20

Beweisen Sie, dass auch dieser Graph zentralsymmetrisch mit $(0, 0)$ als Symmetriezentrum ist.

8.7. Die vorstehenden Beispiele zeigen, dass selbst für die Konstruktion ein und derselben graphischen Darstellung verschiedene Möglichkeiten bestehen. Darum geben wir nachfolgend noch einige Beispiele für die Konstruktion von Graphen an, wobei wir dem Leser aber das Vergnügen der Auswahl der zur Konstruktion verwendeten Methode nicht nehmen wollen!

Übungen

1. Es ist die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

zu zeichnen. In welche Zweige zerfällt die Kurve?

2. a) Man konstruiere die graphische Darstellung von

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

b) Konstruieren Sie die graphische Darstellung von $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ und nennen Sie die Symmetrieachse dieses Graphen.

3. Es sind die folgenden Graphen zu zeichnen:
a) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$; b) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$; c) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

9 Wir lösen weitere Aufgaben ohne Anleitung

1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

a) $y = x(1-x) - 2$; b) $y = x(1-x)(x-2)$; c) $y = \dfrac{4-x}{x^3-4x}$;

d) $y = \dfrac{2|x|-3}{3|x|-2}$; e) $y = \dfrac{1}{4x^2-8x-5}$; f) $y = \dfrac{1}{x^3-5x}$;

g) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$; h) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$; i) $y = (2x^2+x-1)^2$;

k) $y = |x| + \dfrac{1}{1+x^2}$; l) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+3}$; m) $y = \dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x-2}$;

n) $y = (x-3)|x+1|$; o) $y = |x-2| + 2|x| + |x+2|$; p) $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$;

r) $y = \dfrac{|x+1|-x}{|x-2|+3}$; s) $y = \dfrac{x}{[x]}$; (X)

t) Man konstruiere die graphischen Darstellungen der gebrochen-linearen Funktionen der Form $y = \frac{3x+a}{2x+2}$ für verschiedene Werte von a.

2. Die Funktion $y = f(x)$ sei durch folgende Regel definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Man begegnet dieser Funktion recht oft, und es gibt deshalb für sie einen besonderen Namen, nämlich $y = \operatorname{sign} x$ (gelesen: "Ypsilon gleich Signum von x; signum (lat.) - das Zeichen). Der Graph dieser Funktion ist in Abb. 9.1 dargestellt.
Für $x \neq 0$ kann die Funktion $y = \operatorname{sign} x$ durch die Formel $y = \frac{x}{|x|}$ ausgedrückt werden.[18]

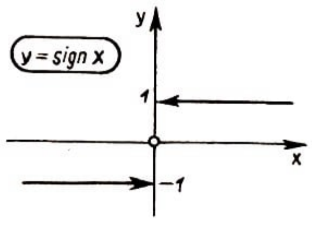


Abb. 9.1

Die Graphen der folgenden Funktionen sollen gezeichnet werden:

$$y = \operatorname{sign}^2 x; \qquad y = (x-1)\operatorname{sign} x; \qquad y = x^2 \operatorname{sign} x$$

3. Der Verlauf der graphischen Darstellung einer Funktion, die speziell als Bruch zweier quadratischer Trinome

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$$

[18]Warum nur für $x \neq 0$?

dargestellt ist, hängt davon ab, wieviele und welche Wurzeln Zähler und Nenner besitzen.

a) Konstruieren Sie die Bilder der Funktionen

$$y = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x - x^2}; \qquad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}; \qquad y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}$$

b) Welches Aussehen hat die graphische Darstellung der Funktion

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$$

wenn beide Wurzeln des Zahlers kleiner als die Wurzeln des Nenners sind? (X)

c) Analysieren Sie alle möglichen Fälle und zeichnen Sie die möglichen Typen von Graphen bei Funktionen der Form

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$$

Hoffentlich haben Sie keinen der möglichen Fälle vergessen! Führen Sie zu jedem Typ ein Beispiel an!

4. Man konstruiere die graphische Darstellung der Funktion $y = \sqrt{3}x$.

a) Es ist zu beweisen, dass dieselbe außer durch $(0, 0)$ durch keinen weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen kann. Wenn Sie als Maßeinheit die Kantenlänge eines Kästchens wählen, dann sind alle Eckpunkte von Kästchen solche "ganzzahligen" Punkte.
Wählen Sie den Koordinatenanfang in der linken unteren Ecke der Seite, und zeichnen Sie die Gerade $y = \sqrt{3}x$ so genau wie möglich ein! (Unter welchem Winkel zur x-Achse muss sie gezeichnet werden?)

Einige der ganzzahligen Gitterpunkte befinden sich recht nahe bei dieser Geraden. Geben Sie unter Ausnutzung dieser Tatsache einen gemeinen Bruch an, der ein Näherungswert für $\sqrt{3}$ ist. Vergleichen Sie den gefundenen Wert mit dem Tabellenwert $\sqrt{3} \approx 1,7321$.

b) Etwas schwieriger ist folgende Aufgabe: Man zeige, dass es einen ganzzahligen Gitterpunkt gibt, der von der Geraden $y = \sqrt{3}x$ einen kleineren Abstand als $\frac{1}{1000}$ hat.[19]

Zur Lösung der Aufgaben 5) bis 9) sollen Sie in geeigneter Weise die Graphen der vorkommenden Funktionen verwenden.

5. Wieviele Lösungen besitzen die Gleichungen:

[19] Statt $\frac{1}{1000}$ kann man eine beliebige andere Zahl wählen. Dann ist zu beweisen, dass man stets einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten angeben kann, der von der Geraden $y = \sqrt{3}x$ einen kürzeren Abstand als diese vorgegebene kleine Zahl hat, wie klein auch immer dieselbe gewählt worden sein mag.

a) $-x^2+x-1=|x|$; b) $|3x^2+12x+9|+x=0$; c) $\dfrac{1}{x^2-x+1}=x$;

d) $|x-1|+|x-2|+|x+1|+[x+2|=6$; e) $x(x+1)(x+2)=0,01$; f) $|x+3|=|x+2|(x^2-1)$;

g) $[x]=x$ im Intervall $|x|<3$; h) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=100$

6. Lösen Sie die Gleichungen:

$$a)\quad 2x^2-x-1=|x|;\quad b)\quad |2x^2-x-1|-x=0;\quad c)\quad |x|=|x-1|+|x-2|$$

7. a) Wieviele Lösungen kann eine Gleichung

$$|1^-|x||=a$$

für verschiedene Werte von a besitzen? b) Beantworten Sie dieselbe Frage für die Gleichung[20]

$$x^2+\frac{1}{x}=a$$

8. Lösen Sie die Ungleichungen:

$$a)\quad \frac{2-x}{x^2+6x+5}>0;\quad b)\quad x\le|x^2-x|;\quad c)\quad |x|+2|x+1|>3$$

9. Gesucht ist der größte Funktionswert. Für welche Argumentwerte wird er angenommen? Die Funktionen werden dargestellt durch
a) $y=x(a-x)$;
b) $y=|x|(a-|x|)$;
c) $y=x^2(a-x^2)$;
d) $y=\dfrac{x^2+4}{x^2+x+1}$;
e) $y=1-\sqrt{2x}$ für $|x|\le\sqrt{2}$;
f) $y=-x^2+2x-2$ auf dem Intervall $-5\le x\le 0$;
g) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ für $x\le 2$

10. Zwei Straßen kreuzen sich im rechten Winkel. Um 12.00 Uhr befanden sich zwei Autos 10 km von der Kreuzung entfernt und fuhren mit 60 km/h beziehungsweise 80 km/h jeweils auf einer der beiden Straßen auf die Kreuzung zu.
In welchem Moment war der Abstand zwischen den beiden Fahrzeugen am kleinsten, und wo befanden sie sich zu diesem Zeitpunkt?

11. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit gegebenem Umfang U ist dasjenige mit dem größten Flächeninhalt zu finden.

[20] Den Wert von a, der die Grenze zwischen den verschiedenen Fällen markiert, sollen Sie selbst näherungsweise ermitteln, wobei die graphische Darstellung zu verwenden ist.

12. Es sei die Funktion $y = f(x)$ eine gerade Funktion, $y = g(x)$ jedoch sei ungerade. Kann man entscheiden, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind:

$$y = f(x) + g(x); \qquad y = f(x) \cdot g(x); \qquad y = |g(x)|$$

$$y = f(x) - g(x); \qquad y = f(|x|) - g(x); \qquad y = f(x) - g(|x|)$$

13. Suche alle geraden und ungeraden Funktionen der Form

$$a) \quad y = kx + b; \quad b) \quad y = \frac{px + q}{x + r}; \quad c) \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$$

14. Die Funktion $y = x^4 - x$ ist weder gerade noch ungerade. Dennoch lässt sie sich leicht als Summe der geraden Funktion $y = x^4$ und der ungeraden Funktion $y = -x$ darstellen (Abb. 9.2).

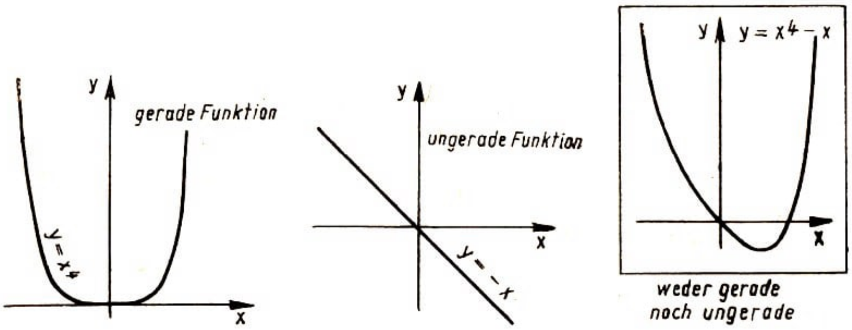


Abb. 9.2

a) Stellen Sie die Funktion $y = \frac{1}{x^4 - x}$ in Form einer Summe aus einer ungeraden und einer geraden Funktion dar.

b) Man zeige, dass sich eine beliebige Funktion $f(x)$ stets als eine Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen lässt. (X)

15. Durch je zwei Punkte mit verschiedenen Abszissen geht eine Gerade, die die graphische Darstellung einer linearen Funktion der Form $y = mx + n$ ist. Ganz analog kann man durch je drei Punkte mit verschiedener Abszisse, die nicht alle auf einer Geraden liegen, immer eine Parabel, d.h. die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$, hindurchlegen.

Ihre Aufgabe soll nun darin bestehen, die Koeffizienten der quadratischen Trinome $y = ax^2 + bx + c$ zu berechnen, deren Graphen jeweils durch die Punkte

a) $(-1, 0)$; $(0, 2)$; $(1, 0)$;
b) $(1, 0)$; $(4, 0)$; $(5, 6)$;
c) $(-6, 7)$; $(-4, -1)$; $(-2, 7)$;
d) $(0, -4)$; $(1, -3)$; $(2, -1)$;
e) $(-1, 9)$; $(3, 1)$; $(6, 16)$.

hindurchgehen.

16. a) Führen Sie eine Ähnlichkeitstransformation der Parabel $y = x^2$ durch, indem Sie

als Ähnlichkeitszentrum den Koordinatenanfang und als Dehnungskonstante 2 wählen. Welche Kurve bekommt man?

b) Welche Ähnlichkeitstransformation verwandelt die Kurve $y = x^2$ in die Kurve $y = 5x^2$?

c) Suchen Sie Brennpunkt und Leitlinie der Parabel $y = 4x^2$, indem Sie die Ergebnisse der Aufgabe 16b) verwenden. (Die Begriffe Brennpunkt und Leitlinie wurden im Abschnitt 5.2. erläutert.)

d) Man soll beweisen, dass alle Parabeln $y = x^2 + bx + c$ geometrisch ähnlich sind.

17. Jetzt sollen Sie beweisen, dass der Punkt $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ der Brennpunkt, die Gerade $y = -\frac{1}{4}$ die Leitlinie der Parabel $y = x^2$ ist, das heißt, dass ein beliebiger Kurvenpunkt der Parabel gleichweit von diesem Punkt und dieser Geraden entfernt ist.

Hinweis: Wählen Sie auf der Parabel einen beliebigen Punkt M mit den Koordinaten (a, a^2). Berechnen Sie sodann zunächst den Abstand dieses Punktes von F nach der Formel zur Abstandsberechnung zweier Punkte[21] und danach den Abstand des Punktes $M(a, a^2)$ von der Geraden $y = -\frac{1}{4}$.[22] Zeigen Sie dann, dass die beiden Ausdrücke übereinstimmen.

18. Beweisen Sie, dass die Punkte $F_1(2, 2)$ und $F_2(-2, -2)$ die Brennpunkte der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ sind, das heißt, dass die Differenz der Abstände eines Hyperbelpunktes von den beiden genannten Punkten F_1 und F_2 dem absoluten Betrag nach eine konstante Größe darstellt.

Hinweis: Nehmen Sie $M\left(a, \frac{1}{a}\right)$ als beliebigen Punkt der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$. Drücken Sie den jeweiligen Abstand dieses Punktes von F_1 beziehungsweise F_2 durch a aus, und bestimmen Sie die Differenz dieser Abstände. Es lässt sich dann unschwer zeigen, dass der Absolutbetrag dieser Differenz für alle Werte von a der gleiche ist (und folglich nicht von der Wahl des Punktes auf der Hyperbel abhängt).

19. In Tafel 9.1 sind siebzehn graphische Darstellungen skizziert und ebensoviele Formeln gegeben. Ihre Aufgabe bestehe darin, jeder Abbildung die entsprechende Formel zuzuordnen. Unter diesen Graphen finden Sie auch die Lösungen verschiedener Übungen.

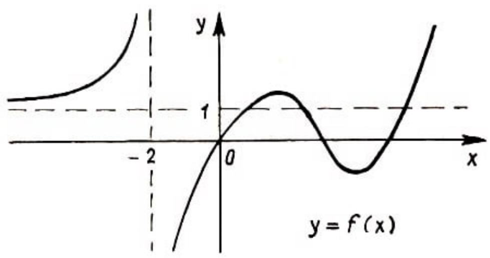


Abb. 9.3

20. Die Abbildung 9.3 zeigt die graphische Darstellung einer Funktion $y = f(x)$. Sie

[21]Der Abstand zwischen zwei Punkten $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ wird durch die Formel $\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ gegeben.

[22]Der Abstand des Punktes $A({}_1, y_1)$ von der Geraden $y = c$ ist gleich $|y_1 - c|$.

sollen nun Skizzen der Graphen nachfolgender Funktionen zeichnen:

a) $y = f(x) - 2$; b) $y = f(x+2)$; c) $y = |f(x)|$; d) $y = f(|x|)$;

e) $y = -3f(x)$; f) $y = \frac{1}{f(x)}$; g) $y = (f(x))^2$; h) $y = f(-x)$;

i) $y = x + f(x)$; k) $y = \frac{f(x)}{x}$

21. In der Zeichenebene sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a gegeben (Abb. 9.4). Die Kurve L_s ist der geometrische Ort aller Punkte, deren kürzester Abstand von irgend einem Punkt des Quadrates gleich s ist. Wir bezeichnen die Fläche der von dieser Kurve L_s berandeten Figur mit $A(s)$.

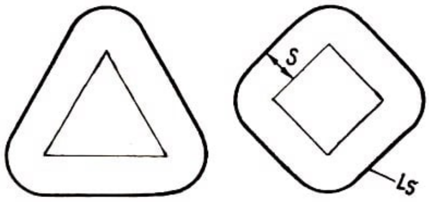
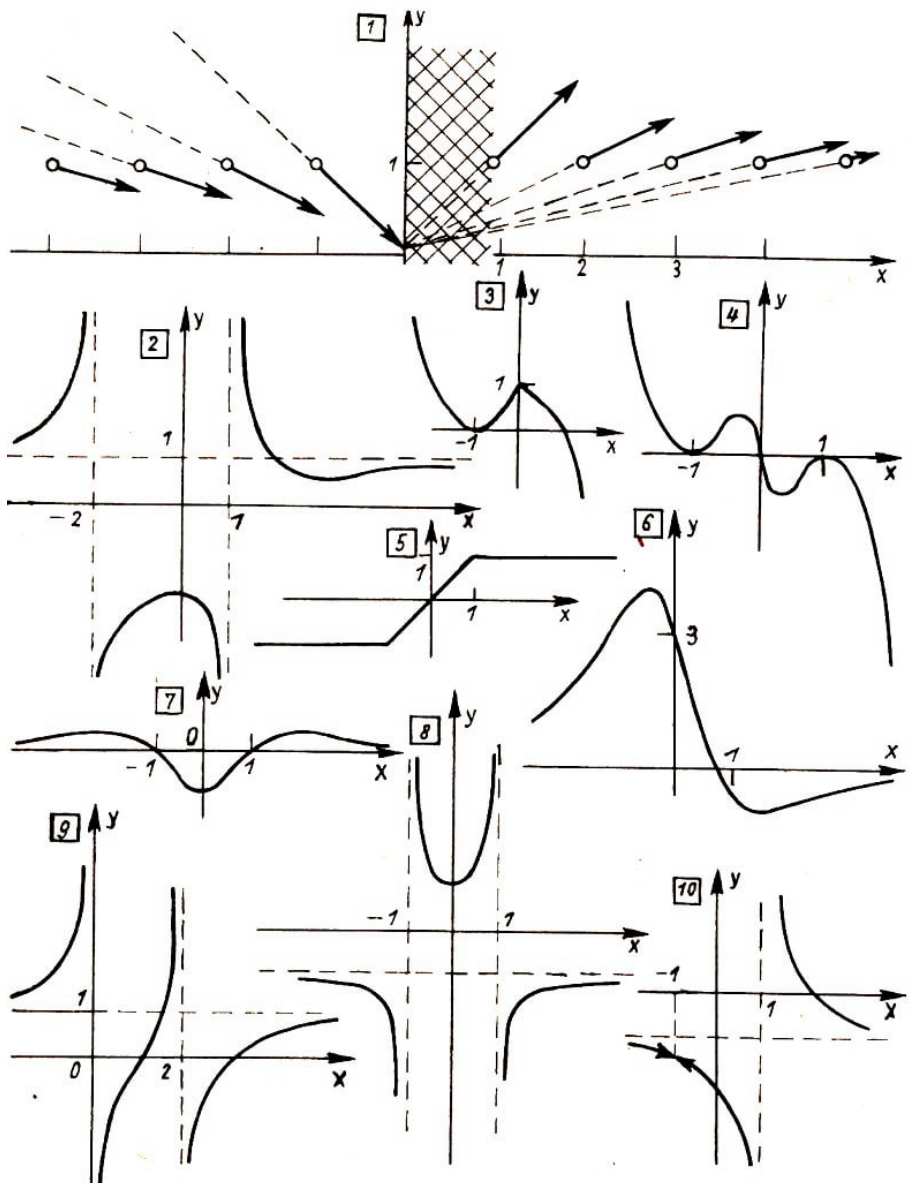


Abb. 9.4

a) Es ist $A(3)$ als Funktion von 3 durch eine Formel auszudrücken.
b) Man löse dieselbe Aufgabe, wenn anstelle des Quadrates ein Rechteck mit den Seiten a und b vorgegeben ist,
c) dieselbe Aufgabe für ein Dreieck mit den Seiten a, b und c,
d) dieselbe Aufgabe für einen Kreis vom Radius r.

Tafel 9.1



22. Bemerken Sie eine Gesetzmäßigkeit in den erhaltenen Formeln für $A(3)$?
Geben Sie eine allgemeine Formel für eine beliebige konvexe Figur als Grundfigur an. Ist diese Formel auch für nicht-konvexe Figuren richtig?

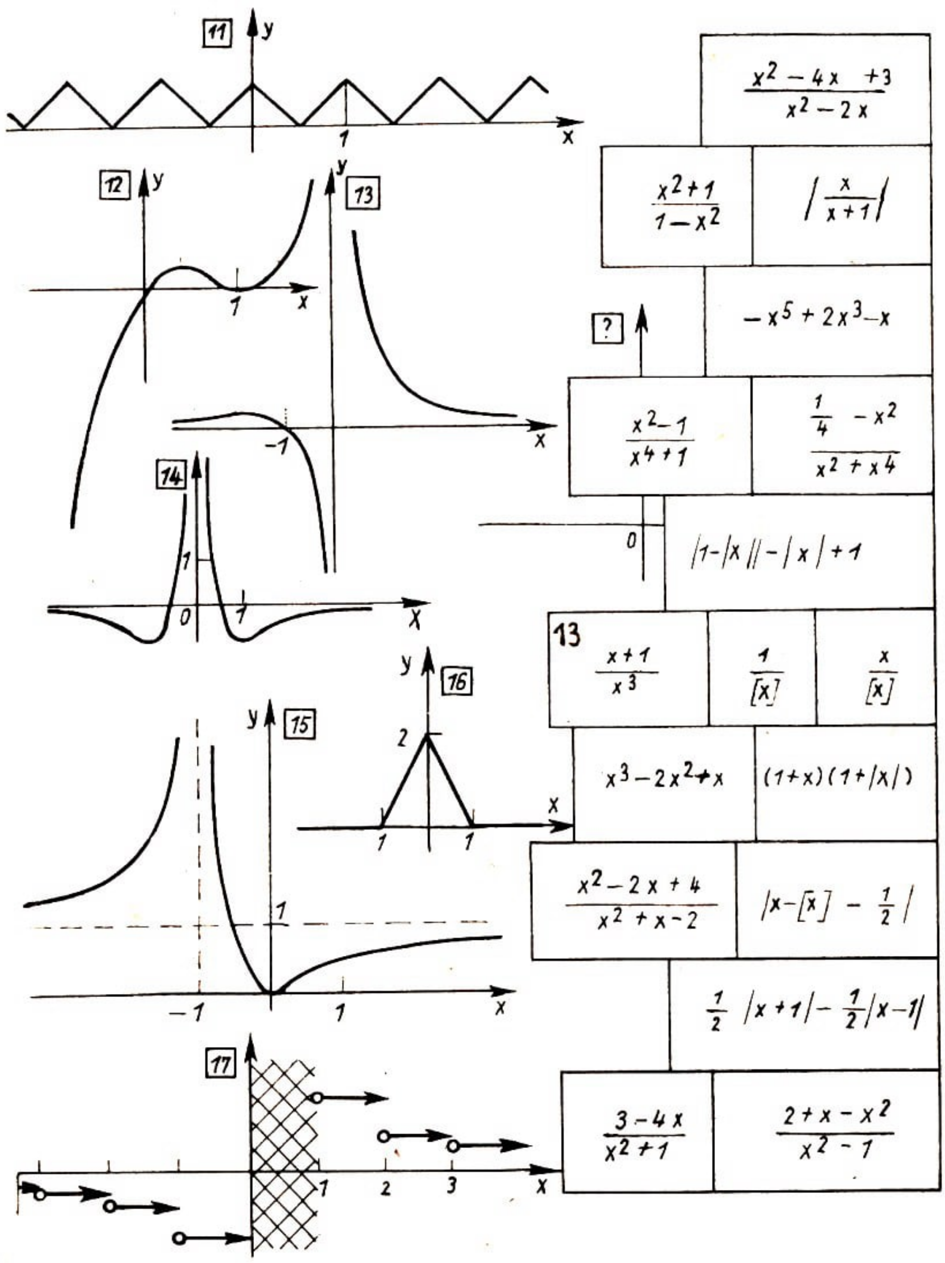
23. Wir werden jetzt quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ betrachten, von denen jede durch die beiden Zahlen p und q eindeutig bestimmt ist. Wir vereinbaren, jede Gleichung in einer Ebene durch einen Punkt mit den Koordinaten (p, q) darzustellen.
Zum Beispiel wird die Gleichung $x^2 - 2x + 3 = 0$ durch den Punkt $A(-2, 3)$ dargestellt, während die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ zum Punkt $B(0, -1)$ gehört.

a) Welche Gleichung entspricht dem Koordinatenursprung?

b) Zeichnen Sie die Menge der Punkte, deren zugeordnete Gleichungen zwei Wurzeln mit der konstanten Summe 0 besitzen.

(Hinweis: Verwenden Sie den Viétaschen Wurzelsatz!)

Tafel 9.2



c) Nehmen Sie aufs Geratewohl einen Punkt der Ebene. Wenn die Gleichung, die diesem Punkt zugeordnet ist, zwei reelle Wurzeln hat, dann kennzeichnen Sie den Punkt mit einem blauen Stift. Hat diese Gleichung aber keine reellen Wurzeln, dann wollen wir den Punkt rot markieren. Wir wählen noch mehrere Punkte und verfahren auf die gleiche Weise.

Kann man eigentlich angeben, welcher Teil der Ebene "blaue", und welcher Teil "rote" Punkte enthält? Welche Linie trennt diese beiden Teile voneinander? Wieviele Wurzeln hat eine Gleichung, die einem Punkt dieser Trennungslinie entspricht?

d) Welche Punktmenge entspricht jenen Gleichungen, deren Wurzeln reell und positiv sind?

24. Ein Automobil bewegt sich bis zu einem bestimmten Moment gleichmäßig beschleunigt und danach mit der erreichten Geschwindigkeit gleichförmig weiter. Die Kurve für den Bewegungsablauf ist in Abb. 9.5 dargestellt.

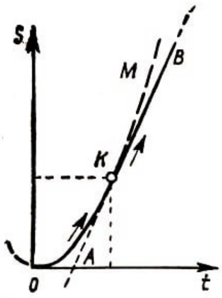


Abb. 9.5

Zeigen Sie, dass die Gerade AB Tangente an die Parabel OKM ist.

25. a) Unter Verwendung der graphischen Darstellung soll die Anzahl der reellen Lösungen folgender kubischer Gleichungen ermittelt werden:
1) $0,01x^3 = x^2 - 1$,
2) $0,001x^3 = x^2 - 3x + 2$,
b) Bestimmen Sie die Näherungswerte für die Wurzeln dieser Gleichungen.

26. a) Die Tafel 4.2 enthält eine Skizze, die zeigt, dass die graphische Darstellung des Polynoms $y = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}$ durch Verschiebung des Graphen von $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x$ längs der x-Achse entsteht. Bestimmen Sie die Größe dieser Verschiebung.

l)) Lösen Sie die Gleichung vierten Grades

$$x - 4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$$

Hinweis: Verschieben Sie die Kurve des Polynoms $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$ entlang der x-Achse, so dass sie zur graphischen Darstellung eines gewissen biquadratischen Polynoms wird.

c) Unter welchen Bedingungen besitzt die Kurve zu $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ eine Symmetrieachse? (X)

27. Jetzt lösen wir die Aufgabe 4) aus dem Abschnitt 4.5. Die Gesamtzahl der Hölzchen beträgt $19 + 9 + 26 + 8 + 18 + 11 + 14 = 105$. Demnach müssen wir so verteilen, dass am Ende in jeder Schachtel $105 : 7 = 15$ Hölzchen liegen.
Mit x bezeichnen wir die Anzahl der Hölzchen, die aus der ersten in die zweite Schachtel gebracht werden müssen. (Es kann natürlich auch vorkommen, dass Hölzchen gerade aus der zweiten in die erste Schachtel gelegt werden müssen. Dann wird x eben negativ sein!)

Nachdem wir aus der ersten Schachtel x Hölzchen in die zweite gelegt haben, befinden sich dort $x + 9$ Zündhölzer.
Demnach müssen $x - 6$ Hölzchen aus der zweiten in die dritte, $x + 5$ aus der dritten in die vierte Schachtel gelegt werden. Entsprechend aus der vierten in die fünfte $x - 2$, aus dieser in die sechste $x + 1$ aus der sechsten in die letzte $x - 3$ und schließlich müssen $x - 4$ Zündhölzchen aus der siebenten in die erste Schachtel zurückgelegt werden (Abb. 9.6).

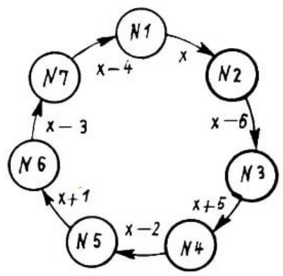


Abb. 9.6

Text zu Abb. 9.6:

$$19+9+26+8+18+11+14=105$$
$$105:7=15$$
$$9+x-(x-6)=15$$
$$26+(x-6)=20+x$$
$$20+x-(x+5)=15$$

Jetzt bezeichnen wir mit S die Gesamtzahl der überhaupt bewegten Hölzchen:

$$S=|x|+|x-6|+|x+5|+|x-2|+|x+1|+|x-3|+|x-4|$$

In dieser Formel stehen die Betragsstriche deshalb, weil uns lediglich die Anzahl der überhaupt bewegten Hölzchen und nicht die Richtung ihres Transportes interessiert. Unsere Aufgabe verlangt nun die Auswahl eines solchen x, für das S den kleinsten Wert besitzt. Dazu kann uns die graphische Darstellung der Funktion $S=f(x)$ verhelfen (Abb. 9.7).

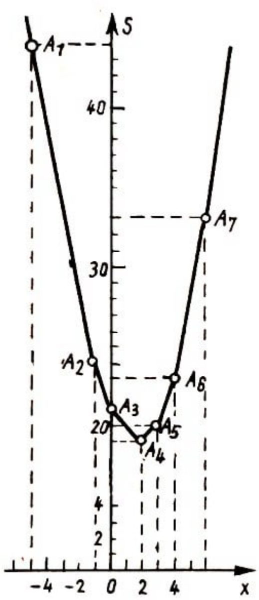


Abb. 9.7

Text zu Abb 9.7:

$$S=|x|+|x-6|+|x+5|+|x-2|$$
$$+|x+1|+|x-3|+|x-4|$$

Der tiefste Punkt der Darstellung ist die Ecke A_4. Daraus folgt, dass die Funktion $S=f(x)$ ihren kleinsten Wert für $x=2$ annimmt. Damit ist x gefunden, und wir können sagen, wieviele Hölzchen von jeder Schachtel in eine benachbarte gelegt werden müssen (Abb. 9.8).
Auf diese Weise lässt sich die entsprechende Aufgabe natürlich auch für eine beliebige Zahl n von Schachteln lösen. Dazu muss man genau wie in unserem Beispiel die formelmäßige Darstellung für die Funktion $S=f(x)$ aufschreiben. Sie hat folgende Form:

$$S=|x|+|x-a_1|+|x-a_2|+...+|x-a_{n-1}|$$

Zur Bestimmung des x-Wertes kann man im Falle ungerader Anzahl n folgende einfache Regel verwenden:
Die Zahlen $0,a_1,a_2,...,a_{n-1}$ werden der Größe nach aufgeschrieben. Danach wählt man diejenige Zahl x als Lösung, die in der Mitte dieser Folge steht. (Wenn n ungerade ist, dann gibt es immer eine solche Zahl.) Überlegen Sie, wie die graphische Darstellung im Falle gerader n aussieht, und versuchen Sie danach auch in diesem Falle eine Regel zur Bestimmung von x zu formulieren.

Mit dieser in Form eines Spieles formulierten Aufgabe hängt eine Aufgabe von praktischer Bedeutung zusammen, die sich auf den Transport auf geschlossenen Transportwegen bezieht.

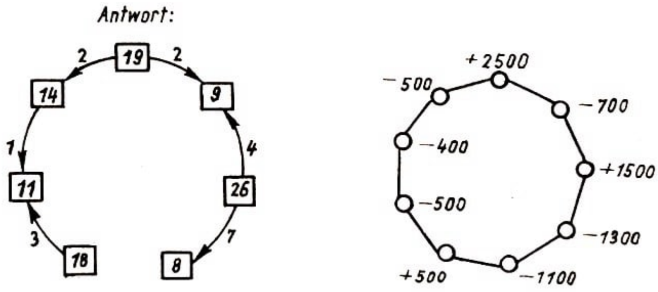


Abb. 9.8,9.9

Stellen Sie sich eine ringförmige Eisenbahnlinie mit voneinander gleichweit entfernten Stationen vor. Auf einigen der Stationen befinden sich Kohlebunker, auf den anderen Verbraucher, die die gesamte Kohle bekommen sollen.
In Abb. 9.9 sind die Vorräte in den Lagern und (mit dem Minuszeichen) die Verbrauchszahlen dargestellt. Unter Verwendung der Lösungsmethode der vorigen Aufgabe ist der Transportplan mit geringsten Kosten aufzustellen.

10 Antworten und Hinweise zu den durch das Zeichen (X) kenntlich gemachten Aufgaben und Übungen

Übung 2. b) aus 2.7.: Die Lösung findet sich unter den Graphen der Tafel 9.1.

Übung 3. b) aus 4.4., Abb. 4.11: Lösung Tafel 9.1.

Übung 3. aus 4.6. Hinweis: Diese Funktion nimmt entlang einer ganzen Strecke ihren kleinsten Wert an.

Aufgabe 4. aus 4.6.: Lösung vgl. Aufgabe 27. aus 9.

Übung 2. b) aus 6.3.: Nein, sie besitzt keine Symmetrieachse.
Der genaue Beweis dieser Tatsache ist nicht ganz einfach, und wir wollen ihn hier nicht durchführen. Jedoch ist klar, dass nur die Gerade $y = x$ Symmetrieachse sein könnte, weil beide Koordinatenachsen Asymptoten an die Kurve darstellen. Dass diese Gerade aber keine Symmetrieachse ist, kann leicht eingesehen werden.

Übung 2. aus 7.6.: Die Gleichung der Tangente ist $y = 3x - 1$.

Übung 3. ebenda. Hinweis: Das System $y = x + a$; $y = -x^2 - 1$ muss zwei zusammenfallende Lösungen haben.

Aufgabe 1. h) und s) aus 9.: Die Antwort finden Sie ebenfalls auf Tafel 9.1.

Aufgabe 3. b) aus 9: Wir nehmen ein Zahlenbeispiel. Seien die Wurzeln des Zählertrinoms gleich -5 und 0 und die Wurzeln des Nenners gleich 2 und 4. Dann hat unsere Funktion die Form

$$y = \frac{ax(x+5)}{(x-2)(x-4)}$$

Wir wählen einen beliebigen konkreten Wert für a, zum Beispiel $a = 2$. Die Funktion $y = \frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)}$ ist für $x = 2$ und $x = 4$ nicht definiert. Bei Annäherung von x an einen dieser Werte verkleinert sich der Nenner, wobei er sich dem Wert null nähert. Demzufolge wächst die Funktion dem absoluten Betrag nach unbegrenzt, die Geraden $x = 2$ und $x = 4$ sind vertikale Asymptoten des Graphen.

Die Funktion ist für $x = 0$ und $x = -5$ gleich null. Wir vermerken zwei Punkte des Graphen auf der Abszissenachse: die Punkte $(0, 0)$ und $(-5, 0)$.

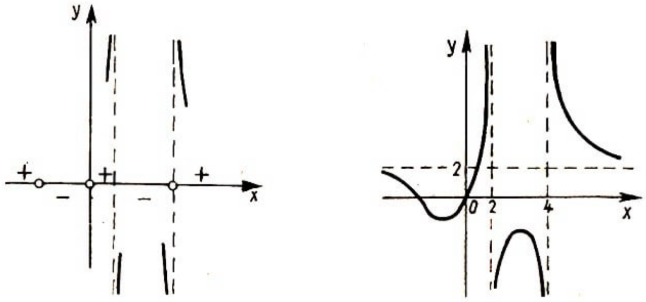


Abb. 10.1,10.2

Vier "besondere Punkte" teilen die x-Achse in fünf Intervalle. Beim Überschreiten jeder Intervallgrenze $(-5, 0, 2, 4)$ wechselt die Funktion ihr Vorzeichen (wobei sie entweder den Wert null durchläuft, oder nach unendlich geht (Abb. 10.1)!).

Nun müssen wir noch den Verlauf der Funktion untersuchen, wenn das Argument dem absoluten Betrag nach unbegrenzt wächst. Wir versuchen für x sehr große Zahlen einzusetzen (etwa $x = 10000$, $x = 100000$ usw.). Weil $2x^2$ schneller wächst als $10x$ und x^2 schneller als $-6x + 8$, wird der Bruch

$$\frac{2x(x+5)}{(x-2)(x+4)} = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 - 6x + 8}$$

annähernd gleich dem Verhältnis der Glieder von Zähler und Nenner mit den höchsten Graden

$$y = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 - 6x + 8} \approx \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

wobei er dem Wert 2 umso näher kommt, je größer x wird. Folglich wird sich die graphische Darstellung bei Entfernung vom Koordinatenanfang der horizontalen Geraden $y = 2$ annähern.
Der Gesamtverlauf des Graphen ist in Abb. 10.2 dargestellt.

In all den Fällen, in welchen sämtliche Wurzeln des Nenners größer als die Wurzeln des Zählers sind, wird die Kurve dieser hier ähnlich sein.

Aufgabe 14. b) aus 9.: Wie das in der Mathematik oft der Fall ist, ist die allgemeine Aufgabe einfacher zu lösen, als die spezielle Aufgabe, die sich auf eine konkrete Funktion bezieht. Deshalb lösen wir zuerst die Aufgabe b) und erhalten die Lösung von a) als Sonderfall.

Es sei also irgend eine Funktion $f(x)$ gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass die Aufgabe bereits gelöst, d.h. $f(x)$ in der Form einer Summe aus einer geraden Funktion $g(x)$ und einer ungeraden Funktion $h(x)$ dargestellt sei:

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad (*)$$

Weil diese Gleichung für alle Werte von x richtig sein soll, so können wir in ihr x durch $-x$ ersetzen und erhalten

$$f(-x) = g(-x) + H(-x) \qquad (**)$$

Da $g(x)$ gerade und $h(x)$ ungerade ist, ist $g(-x) = g(x)$ und $h(-x) = -h(x)$. Wenn wir das verwenden und die beiden Gleichungen (*) und (**) zunächst addieren und dann subtrahieren, so finden wir:

$$f(x) + f(-x) = 2g(x) \qquad , \qquad f(x) - f(-x) = 2h(x)$$

Daraus ergeben sich die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, und wir erhalten als allgemeine Zerlegung von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad (1)$$

Wenn man aber einmal weiß, wie die Zerlegung aussehen muss, dann ist der eigentliche Beweis sehr kurz:
Wir schreiben sofort die Zerlegung (1) auf, beweisen, dass sie für alle x des Definitionsbereiches von $f(x)$ ihre Gültigkeit besitzt und dass der erste Summand auf der rechten Seite eine gerade, der zweite eine ungerade Funktion darstellt. Damit haben wir bereits die Behauptung bewiesen.

Die Lösung der Aufgabe 14. a) erhält man unmittelbar aus Formel (1):

$$\frac{1}{x^4 - x} = \frac{x^2}{x^6 - 1} + \frac{1}{x7 - x}$$

Anmerkung: Wenn die Funktion $y = f(x)$ nicht für alle Werte von x definiert ist, dann werden auch die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ nicht für alle x definiert sein. Dabei kann es vorkommen, dass für gewisse x zwar $f(x)$, nicht aber $g(x)$ und $h(x)$ definiert sind.

Übung 26. c) aus 9.: $4d = b^3 + 2bc$.