Emil Donath

Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks

1968 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin
MSB: Nr. 44
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Im vorliegenden Band werden zunächst die Punkte und Linien untersucht, die zum Stoffgebiet gehören, das in allen allgemeinbildenden Schulen behandelt wird. Der kurzen Zusammenstellung der bekannten Lehrsätze mit ihren Beweisen folgt eine Ergänzung durch elementargeometrische Beweisführungen, die auf einheitlichen Beweisprinzipien beruhen. Ferner werden die Methoden der analytischen Geometrie, der Vektoralgebra und der baryzentrischen Koordinaten herangezogen, um Sätze erneut zu beweisen.
Damit soll gezeigt werden, wie man mathematische Probleme von verschiedenen Seiten betrachten und neue Wege in der Beweisführung beschreiten kann.

Im elementargeometrischen Teil erfährt dieser Stoff eine wesentliche Ergänzung durch ausgewählte Forschungsergebnisse der modernen Mathematik des 19. und 20. Jahrhunderts.

Da die Arbeit keine erschöpfende Darstellung ist, findet der Leser Anregungen, selbst nach neuen Sätzen und Beweisen zu forschen.

Zum Verständnis des elementargeometrischen Teiles sind die Kenntnisse der Absolventen der polytechnischen Oberschule ausreichend. Das mathematische Bildungsgut der erweiterten Oberschule in der analytischen Geometrie und Vektorrechnung befähigt zur selbständigen Erarbeitung des gesamten Inhalts des Buches. Für die erforderlichen Erläuterungen zur Verwendung von Determinanten vergleiche man die Literaturhinweise.
So mag das Buch in erster Linie zum Selbststudium der mathematisch interessierten Leser dienen, deren Vorbildung den genannten Anforderungen entspricht.

Auch der Fachlehrer wird Anregungen für seinen Unterricht und Stoff für mathematische Arbeitsgemeinschaften darin finden. Die Lösung der eingestreuten Aufgaben dient der Selbstkontrolle, der Wiederholung und Festigung des erarbeiteten Wissens.

Senftenberg, im Januar 1968

Emil Donath

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Definitionen des Dreiecks

Ein Dreieck ist ein aus drei Strecken gebildeter geschlossener Linienzug. Zuweilen wird der Begriff des Dreiecks genetisch definiert:
Ein Dreieck entsteht, wenn drei Geraden einander in drei Punkten schneiden.

Eine andere Definition, in der das Dreieck als Fläche aufgefasst wird, lautet:
Das Dreieck ist ein Teil der Ebene, der durch drei Strecken vollständig begrenzt ist.

Alle diese Definitionen werden in der mathematischen Literatur nebeneinander berücksichtigt, ohne dass Missverständnisse zu befürchten sind.

Unter den Vielecken nimmt das Dreieck insofern eine Sonderstellung ein, als seine Größe und Form durch die vorgegebene Länge der drei Seiten eindeutig bestimmt ist [das ist nicht bei allen n-Ecken $(n > 3)$ der Fall].
Auch alle Linien in und am Dreieck, die nach besonderen Vorschriften gezeichnet werden, erhalten eine bestimmte Größe und Lage. Analytisch drückt sich dies dadurch aus, dass alle Linien durch algebraische Formeln dargestellt werden können, die nur die Seiten des Dreiecks enthalten.

Es sollen hier nun Punkte und Linien behandelt werden, deren Lage und. Eigenschaften für das Dreieck spezifisch sind.

1 Die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks in elementargeometrischer Betrachtung

Die allgemein bekannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks sind die Schnittpunkte a) der drei Winkelhalbierenden, b) der Halbierenden eines Innenwinkels und der der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel, c) der drei Mittelsenkrechten der Seiten, d) der drei Seitenhalbierenden und e) der drei Höhen des Dreiecks.

1.1 Schnittpunktsätze

a) Die drei Halbierenden der Innenwinkel des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises.

b) Die Halbierende eines Innenwinkels und die Halbierenden der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Kreises, der eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berührt.

c) Die drei Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

d) Die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Er teilt jede Seitenhalbierende, von der Ecke aus gerechnet, im Verhältnis 2:1.

e) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Der Höhenschnittpunkt teilt die Höhen so, dass die Rechtecke aus den Abschnitten jeder Höhe einander gleich sind.

Da die vorstehenden Sätze im Schulunterricht behandelt werden, wird auf die üblichen Beweise verzichtet.

Aufgabe 1. Im Dreieck ABC (Abb. 1) sind die Halbierenden der Innen- und Außenwinkel gezeichnet. Man benutze diese Figur zum Beweis des Satzes vom Höhenschnittpunkt.

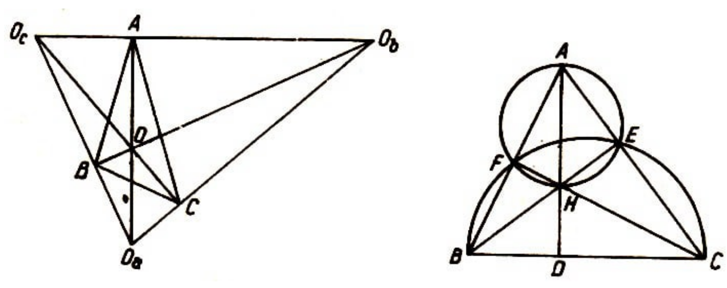


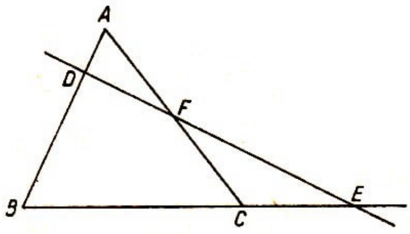
Abb. 1, 2

In Abb. 2 sind im Dreieck ABC die Höhen BE und CF gezeichnet, ihr Schnittpunkt H ist mit A verbunden. Man beweise mit Hilfe von Sätzen aus der Kreislehre, dass die über H hinaus verlängerte Gerade senkrecht auf BC steht.
Man beweise auch den Zusatz zu Satz e).

2 Ein einheitliches Beweisprinzip

Meist werden als Beweismittel Sätze der Symmetrie, der Kongruenz von Dreiecken, Sätze von Parallelogrammen, Strahlensätze und Sätze aus der Kreislehre verwendet. Damit steht auch die verschiedene Gestaltung der Beweise im Zusammenhang.
Hier soll ein einheitliches Beweisverfahren angewendet werden, das sich auf den Satz des Ceva stützt. Als Hilfssatz wird zunächst der Satz des Menelaos bewiesen, dem einige Definitionen vorausgeschickt werden.

Jede Gerade, die die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen schneidet (Abb. 3 und 4), heißt Transversale dieses Dreiecks.



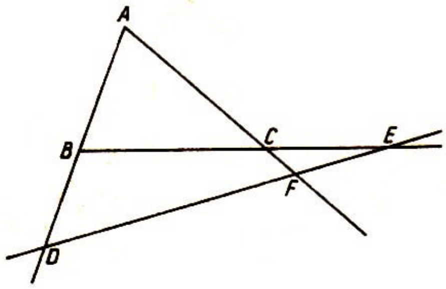


Abb. 3, 4

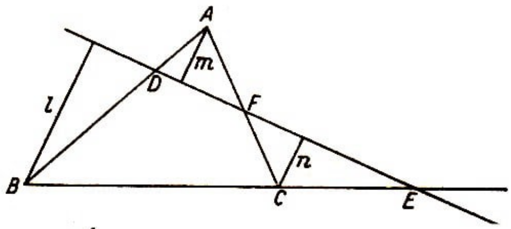
Die aufeinanderfolgenden Seitenabschnitte lauten mit den Bezeichnungen der Abbildungen

$$AD, DB, BE, EC, CF, FA$$

Fasst man den ersten, dritten und fünften Abschnitt zusammen und ebenso den zweiten, vierten und sechsten Abschnitt, so erhält man die beiden Gruppen nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte.
Man nennt sie auch alternierende Abschnitte der Seiten des Dreiecks. Das Verhältnis der Maßzahlen der Abschnitte einer Seite nennt man ihr Teilungsverhältnis. Dieses soll ein positives oder negatives Vorzeichen erhalten, je nachdem, ob es sich um eine innere oder um eine äußere Teilung der Seite handelt.

2.1 Der Satz des Menelaos

Der Satz des Menelaos lautet:



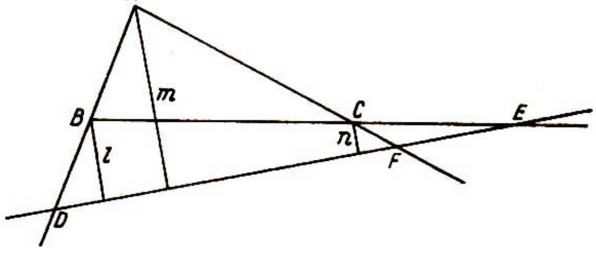


Abb. 5, 6

Schneidet eine Transversale eines Dreiecks, die nicht durch eine Ecke geht, die Dreiecksseiten oder ihre Verlängerungen, so hat der Quotient, der aus den Produkten der Längen der alternierenden Abschnitte gebildet wird, den Wert -1:

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{DB \cdot EC \cdot FA} = -1$$

Beweis 1. Von A, B und C werden Lote l, m und n auf die Transversale gefällt. Die Strahlensätze liefern dann

$$\frac{AD}{DB} = \frac{m}{l}, \qquad \frac{BE}{EC} = -\frac{l}{n}, \qquad \frac{CF}{FA} = \frac{n}{m}$$

Multipliziert man die drei Gleichungen miteinander, so erhält man (Abb. 5)

$$\frac{AD \cdot BD \cdot CF}{DB \cdot EC \cdot FA} = -\frac{m \cdot l \cdot n}{l \cdot n \cdot m} = -1$$

Aufgabe 2. Man führe den Beweis für den Fall, dass die Transversale nur die Verlängerungen der Dreiecksseiten schneidet (Abb. 6).

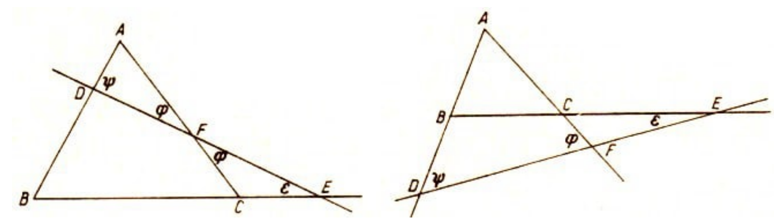


Abb. 7, 8

Aufgabe 3. Man beweise den Satz des Menelaos trigonometrisch und verwende dabei die in Abb. 7 und 8 angegebenen Winkel.

2.2 Der Satz des Ceva und seine Umkehrung

Der Satz des Ceva lautet:

Die drei Ecktransversalen eines Dreiecks, die einander in einem Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks schneiden, teilen die Dreiecksseiten so, dass die Produkte aus den Längen der alternierenden Abschnitte gleich sind.

Beweis 1. Die alternierenden Abschnitte sind durch den gleichen Index gekennzeichnet. Es ist also zu beweisen, dass

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = 1$$

ist (Abb. 9).

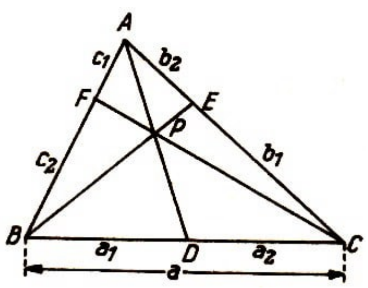


Abb. 9

Wendet man den Satz des Menelaos zweimal an, zuerst auf das Dreieck ABD mit der Transversalen FC, dann auf das Dreieck ACD mit der Transversalen EB, so erhält man

$$\frac{c_1 \cdot a \cdot m}{c_2 \cdot a_2 \cdot n} = -1 \qquad \text{und} \qquad \frac{b_2 \cdot a \cdot m}{b_1 \cdot a_1 \cdot n} = -1$$

Daraus folgt

$$\frac{c_1 \cdot a \cdot m}{c_2 \cdot a_2 \cdot n} = \frac{b_2 \cdot a \cdot m}{b_1 \cdot a_1 \cdot n}$$

Division der Gleichungen durch $\frac{a \cdot m}{n}$ ergibt

$$\frac{c_1}{c_2 \cdot a_2} = \frac{b_2}{b_1 \cdot a_1} \qquad \text{, d.h.} \qquad \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = 1$$

w.z.b.w.

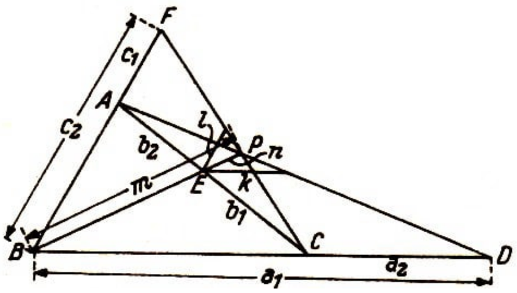


Abb. 10

Aufgabe 4. Man beweise den Satz, wenn der Schnittpunkt der Transversalen außerhalb des Dreiecks liegt (Abb. 10).

Der Satz des Ceva kann auch ohne den Satz des Menelaos bewiesen werden:

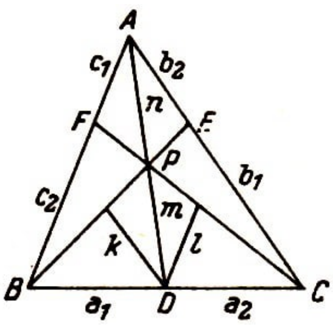


Abb. 11

Beweis 2 (Abb. 11). Als Hilfslinien werden durch den Punkt D die Parallelen zu den Seiten AB und AC bis zu den Transversalen gezogen: die Abschnitte seien k und l. Die Abschnitte AP und PD seien mit n und m bezeichnet.
Die Strahlensätze liefern dann folgende Proportionen:

$$\frac{b_1}{k} = \frac{a}{a_1}, \qquad \frac{k}{b_2} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{c_1}{l} = \frac{n}{m}, \qquad \frac{l}{c_2} = \frac{a_2}{a}$$

Multipliziert man diese Gleichungen, so folgt

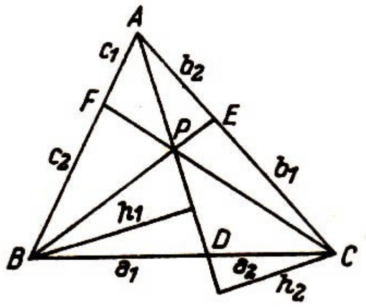
$$\frac{b_1 \cdot k \cdot c_1 \cdot l}{k \cdot b_2 \cdot l \cdot c_2} = \frac{a \cdot m \cdot n \cdot a_2}{a_1 \cdot n \cdot m \cdot a}$$

Durch Kürzen und Ordnen erhält man

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = 1$$

Aufgabe 5. Man führe den Beweis bei äußerer Lage des Schnittpunktes der Transversalen (man benutze Abb. 10).

Aufgabe 6. Man verwende zu einem weiteren Beweis des Satzes von Ceva die Proportion $\triangle APB : \triangle APC = h_1 : h_2 = a_1 : a_2$ usw. (Abb. 12).



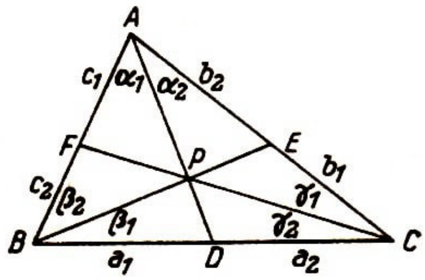


Abb. 12, 13

Aufgabe 7. Man gebe dem Lehrsatz des Ceva eine trigonometrische Fassung (Abb. 13):

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1$$

Für unsere Zwecke ist die Umkehrung des Satzes von Ceva erforderlich, da bewiesen werden soll, dass die im ersten Teil behandelten speziellen Transversalen durch einen Punkt gehen.
Die Umkehrung des Satzes von Ceva lautet:

Werden durch die drei Ecktransversalen im Dreieck alle drei Seiten innen oder zwei Seiten außen und die dritte innen so geteilt, dass die Produkte der alternierenden Abschnitte der Seiten einander gleich sind, so schneiden die drei Ecktransversalen einander in einem Punkt.

Bemerkung. Aus der Geometrie ist bekannt, dass jedem Teilpunkt einer innen oder außen geteilten Strecke ein und nur ein Teilverhältnis zugeordnet ist. Umgekehrt entspricht einem bestimmten Teilverhältnis ein und nur ein Teilpunkt einer Strecke.
Liegt eine Strecke AB auf einer Geraden, so können alle Punkte der Geraden Teilpunkte der Strecke sein. Die Teilverhältnisse durchlaufen entsprechend die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Beweis. Er wird indirekt geführt. Die Voraussetzung lautet

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = 1$$

Dann gilt die Behauptung: Die drei Transversalen AD, BE und CF schneiden einander in einem Punkt P.

Zwei der Transversalen schneiden einander stets in einem Punkt. AD und BE seien diese Transversalen, P sei ihr Schnittpunkt. Angenommen, die dritte Transversale ginge nicht durch den Punkt P. Dann gibt es eine andere Transversale von C aus, die durch P geht, die Seite AB im Punkt F' trifft und auf ihr die Abschnitte c_1 und c_2 erzeugt. Nach dem Satz des Ceva ist somit

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1'}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2'} = 1$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = 1$$

Also ist

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1'}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2'}$$

und nach Division durch $\frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2}$ folgt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1'}{c_2'} \qquad (*)$$

d.h., für die Teilpunkte F und F' ergibt sich das gleiche Teilverhältnis. Das ist ein Widerspruch; denn jedem von F verschiedenen Teilpunkt ist ein anderes Teilverhältnis zugeordnet. Also ist die Annahme falsch, und die drei Transversalen schneiden einander im Punkt P.
Aus (*) ergibt sich durch korrespondierende Addition

$$\frac{c_1 + c_2}{c_1' + c_2'} = \frac{c_1}{c_1'} \qquad \text{oder} \qquad \frac{c}{c} = \frac{c_1}{c_1} \qquad (c_1 + c_2 = c_1' + c_2' = c)$$

Aus der letzten Gleichung folgt $c_1 = c_1'$, d.h., die Teilpunkte F und F' stimmen überein, und die Transversalen CF und CF' sind identisch. Dies bedeutet aber, dass CF durch den Punkt P geht.

Die Umkehrung des Satzes von Ceva in geometrischer und trigonometrischer Fassung kann nun als Beweismittel für alle Sätze über die merkwürdigen Punkte im Dreieck dienen.

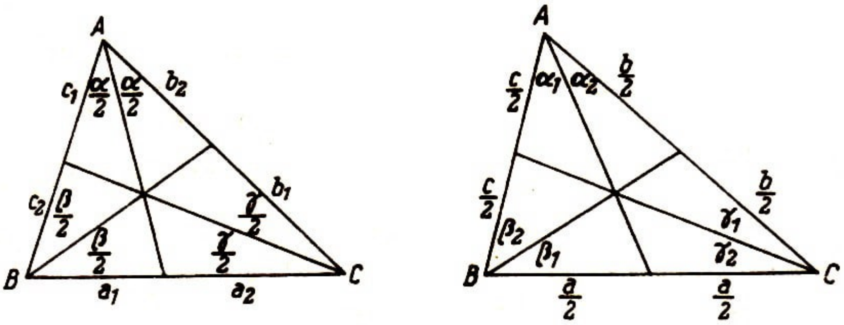
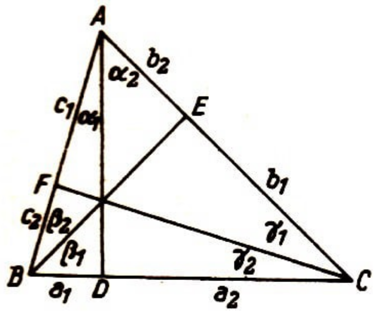


Abb. 14, 15

Aufgabe 8. Man beweist: die Sätze a) bis e) unter Verwendung beider Fassungen des Satzes von Ceva (Abb. 14 bis 18).

Mit Hilfe des Satzes von Ceva können weitere acht merkwürdige Punkte des Dreiecks gefunden werden.



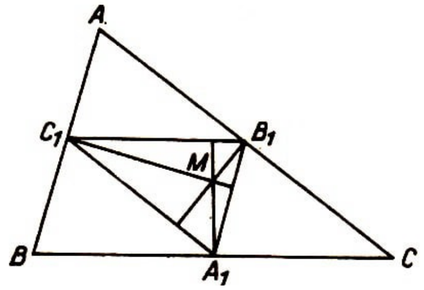


Abb. 16, 17

Aufgabe 9. a.) Man beweise unter Benutzung des Satzes von Ceva, dass die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten den dem Dreieck eingeschriebenen Kreises einander in einem Punkt schneiden.

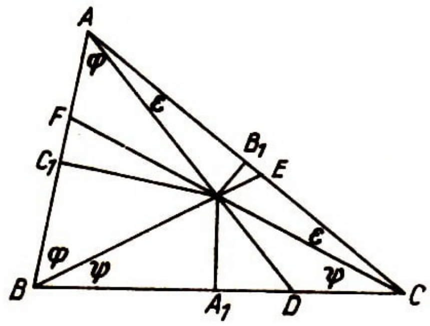


Abb. 18

b) Man zeige, dass diese Lagebeziehung auch für die drei Ecktransversalen gilt, die nach den Berührungspunkten der Ankreise mit den Dreiecksseiten gezogen werden.

c) Man beweise, dass die drei Transversalen von B nach dem Berührungspunkt des Ankreises um O_c auf der Verlängerung von CA über A hinaus, von C zu dem entsprechenden Berührungspunkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus und von A nach dem Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite a durch einen Punkt gehen (drei Fälle!).

d) Man beweise, dass die drei Ecktransversalen nach den Berührungspunkten eines der Ankreise auf einer Dreiecksseite und auf den Verlängerungen der beiden anderen einander in einem Punkt schneiden (drei Fälle !).

2.3 Die merkwürdigen Linien des Dreiecks

Bekanntlich teilt der Schwerpunkt des Dreiecks, das ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, diese Strecken von jeder Ecke zur Gegenseite im Verhältnis 2:1.

Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks hat von den Dreiecksseiten gleiche Abstände, ist also Mittelpunkt des Kreises, der die Seiten des Dreiecks berührt. Man nennt ihn den dem Dreieck eingeschriebenen Kreis.

Der Schnittpunkt der Halbierenden eines Innenwinkels des Dreiecks und der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel ist Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks.

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ist von den drei Ecken gleich weit entfernt, also Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

Auch der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks hat eine besondere Eigenschaft, die nur nicht so augenfällig ist wie die vorgenannten: Die Rechtecke aus den Abschnitten jeder Höhe im Dreieck sind einander gleich.

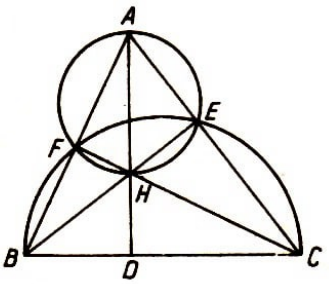


Abb. 19

Beweis 1 (Abb. 19). Die Dreiecke AEH und BDH sind ähnlich (WW). Folglich ist $\frac{AH}{HE} = \frac{BH}{HD}$ oder $AH \cdot HD = BH \cdot HE$.
Entsprechend folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BHF und CHE die Gleichung $BH \cdot HE = CH \cdot HF$. Daher ist $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

Beweis 2. In jedem der drei Kreise, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind, bilden die von den jeweiligen Endpunkten der Durchmesser ausgehenden Dreieckshöhen (da ihre Fußpunkte nach dem Satz des Thales auch auf der betreffenden Kreisperipherie liegen) zwei sich sehneidende Sehnen. Aus dem Satz, dass die Produkte der Abschnitte von zwei sich schneidenden Kreissehnen gleich groß sind, folgt bei dreimaliger Anwendung sofort die Behauptung.

Beweis 3 (Abb. 1'). Man zeichnet den Umkreis des Dreiecks ABC und verlängert die Höhen über ihre Fußpunkte hinaus bis zum Kreis. Dabei wird bei jeder Höhe der untere Abschnitt verdoppelt (Nachweis !).

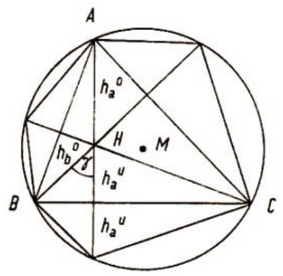


Abb. 1'

Für die drei Sehnen mit ihrem Schnittpunkt gilt

$$h_a^o \cdot 2h_a^u = h_b^o \cdot 2h_b^u = h_c^o \cdot 2h_c^u$$

d.h.

$$h_a^o \cdot h_a^u = h_b^o \cdot h_b^u = h_c^o \cdot h_c^u$$

Beweis 4 (Abb. 2'). Dieser Beweis setzt die Verwendung der Relationen

$$h_a^o = 2r\cos\alpha \qquad \text{und}$$

$$h_a^u = h_b^o \cos\gamma = 2r\cos\beta\cos\gamma$$

voraus.

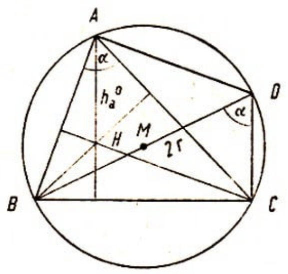


Abb. 2'

Der Rechtecksinhalt

$$h_a^o \cdot h_b^u = 4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

ergibt sich auch aus den Abschnitten der beiden anderen Höhen.

3 Eine Relation für die Ecktransversalen durch einen beliebigen Punkt des Dreiecks

Es besteht auch eine allgemeine Relation für alle Ecktransversalen, die durch einen Punkt gehen, der sowohl im Dreieck als auch außerhalb desselben liegen kann.

3.1 Satz für die Ecktransversalen durch einen beliebigen Punkt

Bildet man für jede von drei Ecktransversalen eines Dreiecks, die durch einen Punkt gehen, den Quotienten am ihrem oberen Abschnitt und der ganzen Strecke, so hat die Summe der drei Quotienten den konstanten Wert 2:

$$\frac{t_a^o}{t_a} + \frac{t_b^o}{t_b} + \frac{t_c^o}{t_c} = 2$$

(t_i ist die ganze Transversale, t_i^o der obere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt der Transversalen, t_i^u der untere Abschnitt von diesem Schnittpunkt bis zum Schnitt mit der Dreiecksseite; $i = a, b, c$).

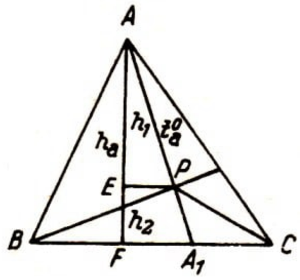


Abb. 20

Beweis. Aus Abb. 20 folgt

$$\text{Viereck } ABPC + \text{Dreieck } BFC = \triangle ABC = F$$

Nun ist

$$\square ABPC + \triangle BPC + \square BCPA + \triangle CPA + \square CAPB + \triangle APB = 3F \qquad (1)$$

Es ist

$$\triangle BPC + \triangle CPA + \triangle APB = F$$

Subtraktion ergibt

$$\square ABPC + \square BCPA + \square CAPB = 2F \qquad (2)$$

Durch Division von (2) durch F erhält man

$$\frac{ABPC}{F} + \frac{BCPA}{F} + \frac{CAPB}{F} = 2$$

Wir berechnen nun den ersten Summanden (Abb. 20):

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a h_a, \qquad \triangle BPC = \frac{1}{2} a h_2, \qquad \square ABPC = \frac{1}{2} a(h_a - h_2) = \frac{1}{2} a h_1$$

$$\frac{ABPC}{F} = \frac{\frac{1}{2}ah_1}{\frac{1}{2}ah_a} = \frac{h_1}{h_a} = \frac{t_a^o}{t_a} \qquad \text{(Strahlensatz!)}$$

Entsprechend erhält man für die anderen beiden Summanden

$$\frac{BCPA}{F} = \frac{t_b^o}{t_b} \qquad \text{und} \qquad \frac{CAPB}{F} = \frac{t_c^o}{t_c}$$

Damit folgt

$$\frac{t_a^o}{t_a} + \frac{t_b^o}{t_b} + \frac{t_c^o}{t_c} = 2$$

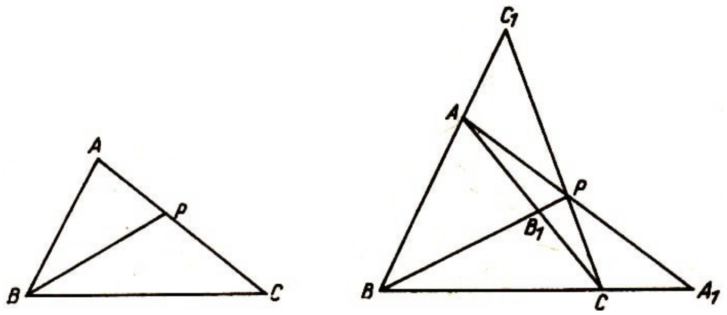


Abb. 21, 22

Aufgabe 9. Man beweise den Satz für den Fall, dass P a) auf einer Dreiecksseite (Abb. 21), b) außerhalb des Dreiecks (Abb. 22) liegt.

4 Merkwürdige Linien im Dreieck

4.1 Die Eulersche Gerade

Die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden, Höhen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden haben in jedem Dreieck eine eindeutig bestimmte Lage. Damit steht im Zusammenhang, dass die drei zuerst genannten Punkte auf einer Geraden liegen, die Eulersche Gerade genannt wird.
Die durch den Höhenschnittpunkt und den Mittelpunkt des Umkreises begrenzte Strecke dieser Geraden wird durch den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, den Schwerpunkt des Dreiecks, im Verhältnis 2: 1 geteilt.

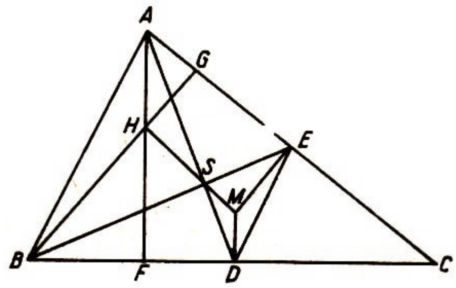


Abb. 23

Beweis 1. Im Dreieck ABC (Abb. 23) sind die Höhen h_a, und h_b die Seitenhalbierenden s_a und s_b und die Mittelsenkrechten m_a und m_b gezeichnet. Die zugehörigen Schnittpunkte sind H, S und M. Es soll nun bewiesen werden, dass diese Punkte auf einer Geraden liegen.

Die Dreiecke ABH und EDM stimmen in ihren Winkeln überein, weil die Schenkel der homologen Winkelpaare parallel und entgegengesetzt gerichtet sind: $AH \parallel MD$, als Senkrechte auf BC, $BH \parallel ME$, als Senkrechte auf AC, $AB \parallel ED$ und $AB = 2ED$; die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Dreiecksseiten ist parallel zur dritten Seite und halb so groß wie diese.

Also ist $\triangle ABH \sim \triangle DEM$ (WW). In ähnlichen Dreiecken sind die homologen Seiten proportional:

$$AH : DM = AB : DE = 2 : 1$$

Nun wird H mit M verbunden. Diese Gerade schneidet AD im Punkt S'. Zu beweisen ist, dass die Punkte S und S' identisch sind.

Es ist $\triangle AHS' \sim \triangle DMS'$ (WW); denn es gilt $\angle HAS' = \angle MDS'$, als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und $\angle HS'A = \angle MS'D$, als Scheitelwinkel.

Da sich $AH : DM$ wie 2:1 verhält, ist auch $AS' : DS' = 2 : 1$, d.h., die Seitenhalbierende AD wird durch S' im Verhältnis 2 : 1 geteilt. Die gleiche Teilung erfolgt durch S. Also stimmen S und S' überein, die Punkte H, S und M liegen in einer Geraden, und es besteht die Proportion $HS : SM = 2 : 1$.

Beweis 2a. Liegen zwei ähnliche Dreiecke so, dass homologe Seiten einander parallel laufen und gleiche bzw. entgegengesetzte Richtung besitzen, so befinden sich die Dreiecke in Ähnlichkeitslage.

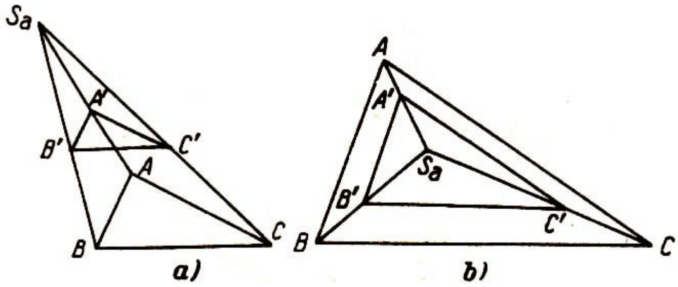


Abb. 24

Verbindet man entsprechende Eckpunkte, so schneiden die Verbindungsgeraden einander in einem Punkt, dem Ähnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke. Die Geraden heißen Ähnlichkeitsstrahlen.
Sie werden durch den Ähnlichkeitspunkt im Verhältnis zweier homologen Dreiecksseiten geteilt. Sind die entsprechenden Seiten der Dreiecke parallel und gleich gerichtet, so ist ein äußerer Ähnlichkeitspunkt vorhanden (Abb. 24), sind sie parallel und entgegengesetzt gerichtet, so existiert ein innerer Ähnlichkeitspunkt (Abb. 25). Nach diesen kurzen Erklärungen folgt nun der Beweis.

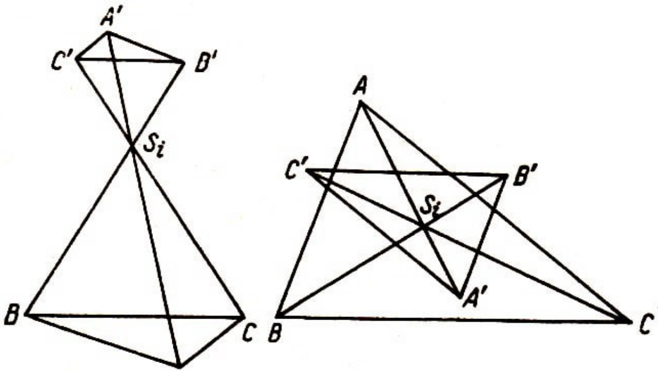


Abb. 25a, b

In Abb. 23 befinden sich die Dreiecke AHB und DME in Ähnlichkeitslage, da die homologen Seiten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind. Die Ähnlichkeitsstrahlen AD, BE und HM schneiden einander im Punkt S. Die Strahlen werden im Verhältnis der homologen Seiten der ähnlichen Dreiecke geteilt. Es ist

$$AS : SD = BS : SE = HS : SM = AB : ED = 2 : 1$$

(nach dem Strahlensatz A und nach dem Satz von der Strecke, die die Mitten zweier Dreiecksseiten verbindet).
Also liegen H, S und M auf einer Geraden, dem Ähnlichkeitsstrahl HM, der durch S im Verhältnis 2: 1 geteilt wird.

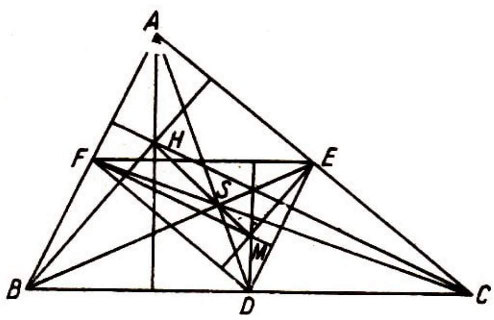


Abb. 26

Beweis 2b (Abb. 26). Man zeichnet ein Dreieck ABC, halbiert die Seiten und verbindet die Mittelpunkte D, E und F, Das Dreieck DEF ist dem Dreieck ABC ähnlich (Beweis!) (WW).
Beide Dreiecke befinden sich in Ähnlichkeitslage. Die Seitenhalbierenden sind Ähnlichkeitsstrahlen, und ihr Schnittpunkt S ist Ähnlichkeitspunkt.

Die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC sind zugleich Höhen im Dreieck DEF (Beweis !). Demnach sind die Punkte H und M entsprechende Höhenschnittpunkte in ähnlich liegenden Dreiecken. Als solche liegen sie auf einem Ähnlichkeitsstrahl, der durch den Ähnlichkeitspunkt S im Verhältnis entsprechender Dreiecksseiten, also wie 2 : 1 geteilt wird.
Damit ist bewiesen, dass H, S und M auf einer Geraden liegen und dass HM im Verhältnis 2 : 1 geteilt wird.

4.2 Der Feuerbachsche Kreis

Auf der Eulerschen Gerade liegt noch ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks, nämlich der Mittelpunkt des Kreises, auf dem neun ausgezeichnete Punkte des Dreiecks liegen. Es sind die drei Mittelpunkte der Seiten, die drei Fußpunkte der Höhen und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte.

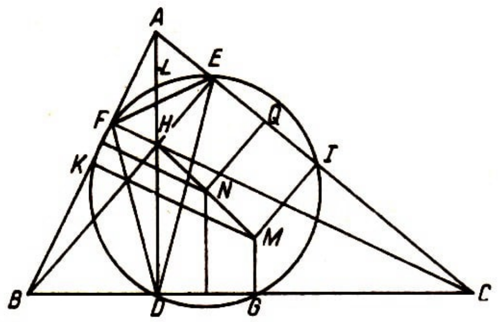


Abb. 27

Im folgenden soll nacheinander bewiesen werden, dass die genannten Punkte auf einem Kreis liegen und dass der Mittelpunkt dieses Kreises die Eulersche Strecke HM halbiert.

Der Kreis um AH als Durchmesser (Abb. 27) geht durch die Fußpunkte E und F der Höhen BE und CF (Satz des Thales). Daher ist $\angle FAH = \angle FEH$, als Peripheriewinkel über dem Bogen FH. Ebenso kann mit Hilfe des Kreises um HC als Durchmesser gezeigt werden, dass $\angle HCD = \angle HED$ ist.
Da aber $\angle FAD = \angle FCD$ ist (Beweis entweder mit Hilfe ähnlicher Dreiecke oder als Peripheriewinkel im Kreis mit AC als Durchmesser), ist $\angle FEH = \angle DEH$.

Die Höhe BE im Dreieck ABC ist demnach zugleich Winkelhalbierende im Höhenfußpunktsdreieck DEF. Es ist $\angle FED = 2\angle FEH$, und wegen $\angle FEH = \angle FAH$ folgt $\angle FED = 2\angle FAD$.
Der Mittelpunkt L des oberen Abschnitts AH der Höhe AD ist Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Punkte A, F, H und E liegen. In diesem Kreis ist $\angle FLH = 2\angle FAH$ (der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über demselben Bogen).

Da aber $\angle FED = 2\angle FAH$ ist, gilt $\angle FLD = \angle FED$. Und da beide Winkel über demselben Bogen des Kreises stehen, der durch die Fußpunkte der Höhen im Dreieck ABC geht, muss auch L auf der Peripherie dieses Kreises liegen.

Es gibt noch einen weiteren Winkel, der doppelt so groß ist wie $\angle BAD$, nämlich $\angle BKD$. Der Punkt K ist der Mittelpunkt der Seite AB und zugleich Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte A, E, D und B geht.
In diesem Kreis ist der Zentriwinkel $\angle BKD$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle BED$, der mit ihm auf dem Bogen BD steht. Wie bereits gezeigt, ist $2\angle BED = \angle FED$ und daher $\angle BKD = \angle FED$.

Die Winkel FKD und BKD betragen zusammen als Nebenwinkel $180°$. Weil die Winkel BKD und FED einander gleich sind, gilt $\angle FKD + \angle FED = 180°$.
Also ist das Viereck $FEDK$ ein Sehnenviereck, und der Punkt K liegt mit F, E und D auf dem Kreis, der durch die Fußpunkte der Höhen bestimmt ist.

Wählt man in dem Kreis um K mit dem Durchmesser AB den Winkel AKE als Zentriwinkel und den Winkel ADE als Peripheriewinkel, die beide über dem Bogen AE stehen, so lässt sich leicht zeigen, dass $\angle FKE = \angle FDE$ ist und dass deren Scheitel auf dem Kreis liegen, der durch D, E und F bestimmt ist.

Was für den Mittelpunkt des oberen Abschnitts der Höhe h_a und für den Mittelpunkt K die Seite AB gezeigt wurde, gilt auch für die übrigen gleichartigen Punkte. Also liegen die eingangs genannten Punkte des Dreiecks auf dem Höhenfußpunktskreis, der auch Feuerbachscher Kreis genannt wird.

Es ist nun zu zeigen, dass der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der Eulerschen Geraden liegt.

Beweis 1. EI, KF und DG sind Sehnen des Feuerbachschen Kreises. Aus der Kreislehre ist bekannt, dass die Mittelsenkrechten der Sehnen eines Kreises einander im Mittelpunkt desselben schneiden.
Wir betrachten zunächst das zur Sehne EI gehörige Viereck $EIMH$. EH und IM sind Lote auf EI und daher zueinander parallel. Ihnen läuft das Mittellot QN auf EI ebenfalls parallel. Deshalb ist IMH ein Trapez, dessen Mittellinie QN ist, die den Schenkel HM - das ist die Eulersche Strecke - in N halbiert.

Nun ist diese Strecke auch Schenkel in den Trapezen $KFHM$ und $GDHM$. Die Mittellinien der drei Trapeze treffen im Punkt N auf den gemeinsamen Schenkel HM. Also liegt der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der Eulerschen Strecke und halbiert sie.

Beweis 2. Gegeben sei das Dreieck ABC (Abb. 28). Verbindet man die Mitten der oberen Höhenabschnitte in diesem Dreieck durch Gerade, so entsteht ein Dreieck $A_1B_1C_1$, das dem Dreieck ABC ähnlich ist (Beweis !).

Die homologen Seiten verhalten sich wie 1 : 2. Da sie auch parallel verlaufen, befinden sich beide Dreiecke in Ähnlichkeitslage mit dem Höhenschnittpunkt als Ähnlichkeitspunkt.

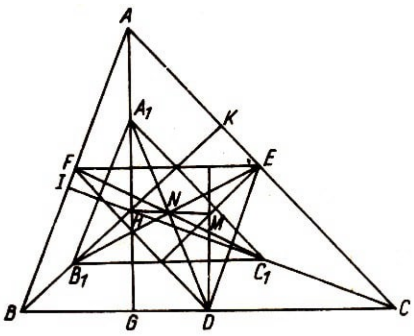


Abb. 28

Verbindet man die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC durch Gerade, so entsteht das Dreieck DEF, das ebenfalls dem Dreieck ABC ähnlich ist und sich mit ihm in Ähnlichkeitslage befindet. Die homologen Seiten verhalten sich wie 1 : 2 (Beweis !).

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle DEF$ ist und beide Dreiecke zueinander ähnlich liegen. Der Ähnlichkeitspunkt ist der Mittelpunkt N des Feuerbachschen Kreises. Die Ähnlichkeitsstrahlen A_1D, B_1E und C_1F verbinden entsprechende Eckpunkte, die sämtlich auf der Peripherie des Feuerbachschen Kreises liegen.
Sie sind Durchmesser dieses Kreises, weil die Peripheriewinkel, die über ihnen stehen $\angle A_1GD$, $\angle B_1KE$, $\angle C_1IF$ rechte Winkel sind (Satz des Thales).

Die Durchmesser schneiden einander im Mittelpunkt des Kreises, dem Ähnlichkeitspunkt N. Das Teilungsverhältnis der Ähnlichkeitsstrahlen ist 1 : 1. Da die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC zugleich Höhen im Dreieck DEF sind, erscheinen die Punkte H und M als ähnlich liegende Höhenschnittpunkte.
Als solche liegen sie auf dem Ähnlichkeitsstrahl HM, der durch den Ähnlichkeitspunkt N halbiert wird. HM ist die Eulersche Strecke im Dreieck ABC. Auf ihr liegt der Mittelpunkt N des Feuerbachschen Kreises, der die Strecke HM halbiert.

Aufgabe 10. Man beweise, dass im Dreieck ABC (Abb. 28) die Mittelsenkrechte DM auf der Seite BC halb so groß ist wie der obere Abschnitt AH der zur gleichen Dreiecksseite gehörigen Höhe und dass der Radius r des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises doppelt so groß ist wie der Radius, des Feuerbachschen Kreises.

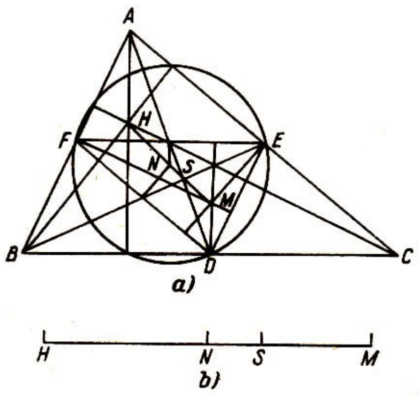


Abb. 29

Beweis 3. Die Lage des Mittelpunkts des Feuerbachschen Kreises auf der Eulerschen Geraden kann noch auf einem anderen Wege bestimmt werden (Abb. 29a)
Im Dreieck ABC werden die Mitten der Seiten D, E und F geradlinig verbunden. Dass sich die Dreiecke ABC und DEF in Ähnlichkeitslage befinden, wurde bereits gezeigt.

Der Ähnlichkeitspunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden beider Dreiecke, von denen je zwei entsprechende Punkte auf derselben Geraden liegen. (Man beweise, dass die Seitenhalbierende AD auch die Seite EF halbiert.)

Im Dreieck ABC liegen der Höhenschnittpunkt H, der Mittelpunkt des Umkreises M und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S auf der Eulerschen Geraden HM. Diese Strecke wird durch S im Verhältnis 2:1 geteilt.
Entsprechend liegen im Dreieck DEF der Höhenschnittpunkt M, der Mittelpunkt des Umkreises N und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S ebenfalls auf einer Eulerschen Geraden MN. Diese Strecke wird durch S im Verhältnis 2 : 1 geteilt.

Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und die Punkte M und N sowohl im Dreieck ABC als auch im Dreieck DEF auf der Eulerschen Geraden liegen, müssen beide Geraden übereinstimmen. Also liegen H, N, S und M auf einer Geraden, und es gelten die Proportionen:

$$NS : SM = 1 : 2, \qquad SM : SH = 1 : 2, \qquad NS : SM : SH = 1 : 2 : 4$$

Hieraus und aus Abb. 29b ergibt sich die Proportion $HN : NM = 3 : 3$, d.h., dass der Mittelpunkt N des Kreises, der dem Dreieck DEF umgeschrieben ist - das ist aber der Feuerbachsche Kreis -, auf der Eulerschen Strecke HM liegt und sie halbiert.

4.3 Das Höhenfußpunktsdreieck

Auf dem Feuerbachschen Kreis liegen neun besondere Punkte des Dreiecks, von denen je drei als Eckpunkte eines Dreiecke angesehen werden können.
In Abb. 28 sind zwei von diesen Dreiecken gezeichnet, Dreieck $A_1B_1C_1$ und Dreieck DEF; beide sind kongruent. Der Inhalt jedes dieser Dreiecke ist gleich dem vierten Teil des Dreiecks ABC (Beweis !).

Zwischen dem Höhenfußpunktsdreieck und den beiden genannten Dreiecken bestehen wesentliche Unterschiede. Dennoch ist es ebenso wie diese durch Form und Inhalt des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt, d.h., dass seine Bestimmungsstücke sowie sein Inhalt durch die Stücke des Dreiecks ABC ausgedrückt werden können.

Zunächst sollen die Seiten des Höhenfußpunktsdreiecks aus den Seiten und Winkeln des Dreiecks ABC berechnet werden (Abb. 30). Durch, die Höhen wird das Dreieck ABC in drei Sehnenvierecke $AFHE$, $BDHF$ und $CEHD$ zerlegt, in denen die Seiten des Höhenfußpunktsdreiecks Diagonalen sind.
Diese seien mit d_i $(i = 2, 4, 6)$ bezeichnet. Die anderen Diagonalen seien d_j $(j = 1, 3, 5)$. Die unteren Höhenabschnitte sind h_i^u $(i = a, b, c)$. Nach dem Ptolemäischen Lehrsatz ergeben sich folgende Gleichungen:

$$h_b^u \cdot c_1 + h_c^u \cdot b_2 = d_1 \cdot d_2, \quad h_c^u \cdot a_1 + h_a^u \cdot c_2 = d_3 \cdot d_4, \quad h_a^u \cdot b_1 + h_b^u \cdot a_2 = d_5 \cdot d_6$$

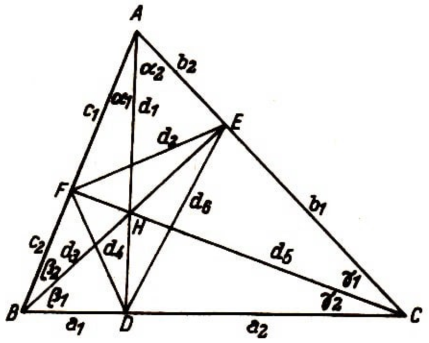


Abb. 30

Für die h_i^u $(i = a, b, c)$ gilt

$$
\begin{aligned}
h_b^u &= d_1 \sin\alpha_2, \qquad & h_c^u &= d_1 \sin\alpha_1, \qquad & h_c^u &= d_3 \sin\beta_2 \\
h_a^u &= d_3 \sin\beta_1, \qquad & h_a^u &= d_5 \sin\gamma_2, \qquad & h_b^u &= d_5 \sin\gamma_1
\end{aligned}
$$

Diese Werte setzt man in die obigen drei Gleichungen ein und erhält

$$
\begin{aligned}
c_1 d_1 \sin\alpha_2 + b_2 d_1 \sin\alpha_1 &= d_1 \cdot d_2 \\
a_1 d_3 \sin\beta_2 + c_2 d_3 \sin\beta_1 &= d_3 \cdot d_4 \\
b_1 d_5 \sin\gamma_2 + a_2 d_5 \sin\gamma_1 &= d_5 \cdot d_6
\end{aligned}
$$

Dividiert man die erste Gleichung durch d_1, die zweite durch d_3 und die dritte durch d_5, so folgt

$$d_2 = c_1 \sin\alpha_2 + b_2 \sin\alpha_1, \qquad d_4 = q_1 \sin\beta_2 + c_2 \sin\beta_1, \qquad d_6 = b_1 \sin\gamma_2 + a_2 \sin\gamma_1$$

Nun ist aber $\alpha_1 = \gamma_2 = 90° - \beta$, $\beta_1 = \alpha_2 = 90° - \gamma$ und $\gamma_1 = \beta_2 = 90° - \alpha$. Daher erhält man für die Seiten des Höhenfußpunktsdreiecks

$$
\begin{aligned}
d_2 &= c_1 \sin\beta_1 + b_2 \sin\alpha_1 = c_1 \sin\alpha_2 + b_2 \sin\gamma_2 = c_1 \cos\gamma + b_2 \cos\beta \\
d_4 &= a_1 \sin\gamma_1 + c_2 \sin\beta_1 = a_1 \sin\beta_2 + c_2 \sin\alpha_2 = a_1 \cos\alpha + c_2 \cos\gamma \\
d_6 &= b_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\gamma_1 = b_1 \sin\gamma_2 + a_2 \sin\beta_2 = b_1 \cos\beta + a_2 \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Durch Addition der ersten und der letzten Spalten erhält man

$$d_2 + d_4 + d_6 = 2s' = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$$

Setzt man $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$ und $c = 2r\sin\gamma$ und benutzt die Beziehung $2\sin x \cos x = \sin 2x$, so ergibt sich

$$2s' = r(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

und hieraus folgt

$$2s' = 4r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad \text{und} \qquad s' = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{1}$$

Nachdem die Seitensumme des Höhenfußpunktsdreiecks durch die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC dargestellt ist, soll nun der Inhalt des Dreiecks DEF durch Bestimmungsstücke des Dreiecks ABC ausgedrückt werden.

Zunächst sei die Inhaltsformel für Dreiecke kurz hergeleitet:

$$F = s^2 \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{a}\tan\frac{\gamma}{2}$$

In Abb. 33 folgt als den Teildreiecken an den drei Ecken des Dreiecks ABC

$$\rho = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2}, \qquad \rho = (s-b)\tan\frac{\beta}{2}, \qquad \rho = (s-c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\rho^3 = (s-a)(s-b)(s-c)\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{a}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Nun werden beide Seiten dieser Gleichung mit s^3 multipliziert:

$$\rho^3 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)s^2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{a}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Hieraus folgt

$$F^3 = F^2 s^2 \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{a}\tan\frac{\gamma}{2}$$

und nach Division durch F^2

$$F = s^2 \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{a}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Wendet man diese Formel auf das Dreieck DEF an, so ergibt sich (Abb. 30)

$$F' = s'^2 \tan\frac{1}{2}\angle FDE \cdot \tan\frac{1}{2}\angle DEF \cdot \tan\frac{1}{2}\angle EFD$$

Da aber

$$\frac{1}{2}\angle FDE = \gamma_1 = \beta_2 = 90^\circ - \alpha, \qquad \frac{1}{2}\angle DEF = \alpha_1 = \gamma_2 = 90^\circ - \beta$$
$$\frac{1}{2}\angle EFD = \beta_1 = \alpha_2 = 90^\circ - \gamma$$

ist, erhält man

$$F' = s'^2 \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$$

Hier wird (1) eingesetzt:

$$F' = 4r^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma \tag{2}$$

Daraus folgt

$$F' = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{3}$$

oder

$$F' = \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma \tag{4}$$

Will man jedoch zu den Seiten a, b, c gelangen, so schreibt man (3) in der Form

$$F' = \frac{1}{2r} 2r\sin\alpha \cdot 2r\sin\beta \cdot 2r\sin\gamma \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

und erhält

$$F' = \frac{abc}{2r}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

und da $\frac{abc}{4r} = F$ ist,

$$F' = 2F\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \qquad (5)$$

Daraus geht hervor, dass Dreieck DEF vom Dreieck ABC in Form und Inhalt abhängig ist.

Aufgabe 11. a) Man berechne mit Hilfe der gewonnenen Formel den Inhalt des Höhenfußpunktsdreiecks im gleichseitigen Dreieck und erläutere das Ergebnis.
b) Man führe die gleiche Rechnung für ein rechtwinkliges Dreieck durch.
c) Man berechne den Inhalt des Höhenfußpunktsdreiecks in einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel von $75°$.

Die Seiten des Höhenfußpunktsdreiecks können auf einem anderen Wege durch den Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises und die Winkel des Dreiecks ausgedrückt werden.

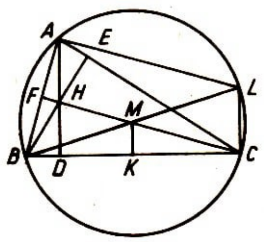


Abb. 31

Im Dreieck ABC (Abb. 31) sind die drei Höhen und der umgeschriebene Kreis gezeichnet. H ist der Höhenschnittpunkt und M der Mittelpunkt des Umkreises. Zieht man von B den Durchmesser BL und verbindet L mit A und C, so sind die Winkel BAL und BCL gleich $90°$ (Satz des Thales).

Also sind AD, CL und MK parallel als Senkrechte auf BC; ebenso sind LA und CF parallel als Senkrechte auf AB. Folglich ist $AHCL$ ein Parallelogramm und $AH = LC$. Da $LC = 2MK$ ist (Strahlensatz), erhält man

$$AH = 2MK = 2r\cos\alpha, \qquad (MK = r\cos\alpha).$$

AH ist der Durchmesser des Kreises, der durch A, F, H und E geht. Für die Sehne gilt die Relation

$$FE = AH\sin\alpha = 2r\cos\alpha\sin\alpha = r\sin 2\alpha$$

In gleicher Weise findet man

$$DF = 2r\sin\beta\cos\beta = r\sin 2\beta \qquad , \qquad DE = 2r\sin\gamma\cos\gamma = r\sin 2\gamma$$

so dass sich

$$2s' = r(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 4r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

oder

$$s' = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

ergibt. Für F' erhält man, wie schon vorher berechnet,

$$F' = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$$

Vertauscht man in Abb. 32 A und H, so ist Dreieck $(A)BC$ stumpfwinklig und (H) Höhenschnittpunkt in diesem Dreieck.

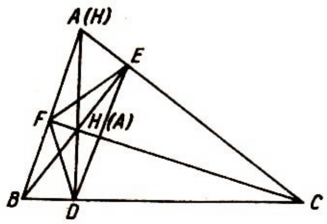


Abb. 32

Die Umkreise der Dreiecke ABC und $(A)BC$ sind gleich (Beweis!). Beide Dreiecke haben das gleiche Höhenfußpunktsdreieck. Will man aus der Formel

$$s' = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

die für das spitzwinklige Dreieck gilt, die entsprechende Relation für des stumpfwinklige Dreieck herleiten, so ist r beizubehalten, während für die Winkel α, β, γ die Winkel des stumpfwinkligen Dreiecks α_1, β_1, γ_1 einzuführen sind. Es ist $\alpha = 180° - \alpha_1$, $\beta = 90° - \gamma_1$, $\gamma = 90° - \beta_1$. Somit erhält man

$$s' = 2r \sin(180° - \alpha_1) \sin(90° - \gamma_1) \sin(90° - \beta_1)$$

oder

$$s' = 2r \sin\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1$$

und für den Flächeninhalt

$$F' = -\frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha_1 \sin 2\beta_1 \sin\gamma_1$$

(Beweis !).
Die Formeln für die Seitensumme des Höhenfußpunktsdreiecks sind für beide Arten der Dreiecke verschieden, während die Formeln für den Inhalt sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Da jedoch $2\alpha > 180°$ ist und daher $\sin 2\alpha$ negativ wird, ergeben beide Formeln einen positiven Wert. Man erläutere das an einem Zahlenbeispiel.

Aufgabe 12. Vorstehend wurden die Formeln für das stumpfwinklige Dreieck dadurch gewonnen, dass man in die Formeln für das spitzwinklige Dreieck die Winkel des stumpfwinkligen Dreiecks einführte. Man leite nun die Formeln für s' und F' direkt aus der

Abbildung ab (man benutze Abb. 32).

Anleitung. Zum Nachweis der Gleichheit der Radien der Umkreise beider Dreiecke spiegele man Dreieck BHC an BC und zeige, dass H', das Spiegelbild von H, auf dem Umkreis durch A, B und C liegt.
Man berechne die Seiten des Dreiecks DEF wie beim spitzwinkligen Dreieck und beachte dabei, dass $\angle(A)BC = \beta_1$, $\angle(A)CB = \gamma_1$, $\angle EFD = 2\beta_1$, $\angle DEF = 2\gamma_1$ und $\angle FDE = 2\alpha_1 - 180°$ ist.

Wir begegnen hier einem Beispiel, wo eine für ein spitzwinkliges Dreieck geltende Relation nicht in der gleichen Form für das stumpfwinklige Dreieck gilt. Im vorliegenden Fall sind die Formeln für die Seitensumme des Höhenfußpunktsdreiecks verschieden, während die Inhaltsformeln sich nur im Vorzeichen unterscheiden.

Das Höhenfußpunktdreieck besitzt noch eine interessante Eigenschaft: Es ist das Dreieck mit dem kleinsten Umfang, das dem spitzwinkligen Dreieck ABC eingeschrieben werden kann. Einen Beweis mit elementaren Hilfsmitteln gab der bekannte ungarische Mathematiker Fejer.
Man geht von einem beliebigen eingeschriebenen Dreieck DEF aus, wobei D auf BC fest angenommen ist, während E auf AC und F auf AB verschoben werden sollen (Abb. 3').

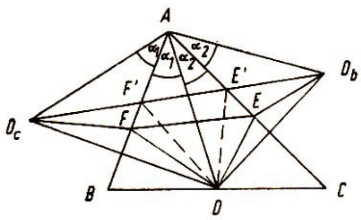


Abb. 3'

D wird sowohl an AC als auch an AB als Symmetrieachsen gespiegelt. Man erhält die Punkte D_b und D_c. Es werden die symmetrischen Strecken $ED = ED_b$, $FD = FD_c$ und $AD_b = AD_c = AD$ gezeichnet.
Da symmetrische Strecken mit der Symmietrieachse gleiche Winkel bilden, findet man leicht, dass der Winkel D_bAD gleich 2α ist.

Der Streckenzug D_bEFD_c hat dieselbe Länge wie der Umfang des Dreiecks DEF. Verschiebt man E und F auf den Dreiecksseiten b und c so, dass sie auf der Geraden D_bD_c liegen, so erhält man Dreieck $DE'F'$ mit dem kleinsten Umfang bei festliegender Ecke D. Der Umfang u ist ebenso lang wie die Basis des gleichschenkligen Dreiecks AD_bD_c,, mit dem Winkel 2α an der Spitze.

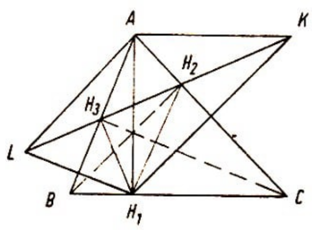


Abb. 4'

Er ist noch nicht der kleinste von allen eingeschriebenen Dreiecken. Man verschiebt nun die Ecke D so, dass sie Fußpunkt der kürzesten Transversale durch die Ecke A wird. Sie wird dann Höhe h_a mit dem Fußpunkt H_1 (Abb. 4').

Die Spiegelpunkte von H_1 an den Seiten b und c seien K und L, und KL schneidet b und c in H_2 bzw. H_3. Das Dreieck AKL mit dem Winkel 2α an der Spitze besitzt demnach die kürzesten Schenkel h_a und daher auch die kürzeste Basis, die ebensolang wie der Umfang u des Dreiecks $H_1H_2H_3$ ist. Dieses ist, wie noch gezeigt wird, ein Höhenfußpunktdreieck.

Man findet auch das Dreieck mit dem kleinsten Umfang, wenn man auf der Seite AC einen Punkt festlegt und dann zum Höhenfußpunkt H_2 übergeht. Auch die Konstruktion mit Hilfe der Höhe h_c führt zu dem Dreieck mit dem kleinsten Umfang. Da in allen drei Fällen das gleiche Dreieck entstehen muss, weil es nur eines mit dem kleinsten Umfang im Dreieck ABC geben kann, handelt es sich offensichtlich um das Höhenfußpunktdreieck.

Aufgabe 1'. Man kann beweisen, dass bei der ersten Konstruktion, in der H_1 als Höhenfußpunkt festgelegt ist, die Fußpunkte der Höhen h_b und h_c auf der Geraden KL liegen.

Aufgabe 2'. Man berechne den Umfang des eingeschriebenen Dreiecks $H_1H_2H_3$ mit Hilfe des gleichschenkligen Dreiecks AKL mit $AK = h_a$ und dem Winkel $KAL = 2\alpha$ und zeige die Übereinstimmung des Ergebnisses mit dem in Gleichung (1), für $2s$ errechneten Wert.

Lösungen der Aufgaben

1'. Unter Benutzung des fest angenommenen Höhenfußpunktes H_1 ist das Dreieck H_1EF mit dem kleinsten Umfang dem Dreieck ABC eingeschrieben worden. Der Umfang ist ebensolang wie die Basis des gleichschenkligen Dreiecks LAK. Jeder Schenkel ist gleich h_a, der Winkel an der Spitze 2α.

Es soll bewiesen werden, dass E und F die Fußpunkte der Höhen h_b bzw. h_c sind.
Es ist $\angle AKL = 90° - \alpha$, $\angle CAK = \angle CAH_1 = 90° - \alpha$. Dann ist $\angle AEL$ als Außenwinkel des Dreiecks AEK gleich $180° - \alpha - \gamma = \beta$.
Das Viereck $ALBH_1$ ist ein Sehnenviereck, weil

$$\angle LAH_1 + \angle LBH_1 = 2(90° - \beta) = 180°$$

ist. Sein Umkreis hat AB als Durchmesser. In diesem Kreis ist $\angle ABL = \beta$ Peripheriewinkel. Auf dem gleichen Bogen AL steht auch der Winkel LEA, von dem gezeigt wurde, dass er gleich β ist. Daher muss E auf dem Umkreis liegen.

Betrachtet man nun die Peripheriewinkel über dem Durchmesser AB, zu denen auch $\angle AEB$ gehört, so muss dieser nach dem Thalessatz gleich $90°$ sein, und BE ist die Höhe h_b. Wir dürfen nun (entsprechend H_1) H_2 anstelle von E setzen.
Analog lässt sich beweisen, dass F und H_3 identisch sind.

2'. Dass $H_1H_2H_3$ (in Abb. 5': H_1EF) Höhenfußpunktsdreieck ist, kann man auch

dadurch beweisen, dass man seinen Umfang $u = KL$ (= Basis des gleichschenkligen Dreiecks AKL mit den Schenkeln h_a und dem Winkel $2\angle$ an der Spitze) berechnet und mit dem schon berechneten Wert vergleicht.
Aus dem Dreieck AKL folgt

$$u = 2h_a \sin\alpha = \frac{2ah_a \sin\alpha}{a} = \frac{4F \sin\alpha}{2r \sin\alpha} = \frac{2F}{r}$$

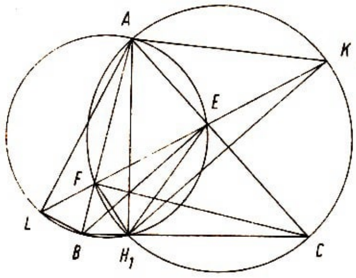


Abb. 5'

dabei ist F der Inhalt und r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Für

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

ist

$$u = 4r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

wie in Gleichung (1), berechnet ($u = 2s'$).

4.4 Der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks

Es wurde bereits erörtert, wie die Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise des Dreiecks gefunden werden. Abb. 33, die diese vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks und die Kreise zeigt, ist in mannigfacher Beziehung aufschlussreich.
Die Berührungspunkte der Kreise auf den Dreiecksseiten erzeugen auf diesen Abschnitte, deren Längen bereits im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen berechnet werden. Man bestätige folgende Relationen:

$$\begin{array}{rcl}
AF_1 = AE_1 = s - a & , & BF_1 = BD_1 = s - b, \\
AF_2 = AE_2 = s & , & BF_2 = BD_2 = s - c, \\
BF_4 = BD_3 = s & , & AF_4 = AE_3 = s - c, \\
CE_4 = CD_4 = s & , & AF_3 = AE_4 = s - b, \\
CD_1 = CE_1 = s - c & , & CD_2 = CE_2 = s - b, \\
CE_3 = CD_3 = s - a & , & BF_3 = BD_4 = s - a
\end{array}$$

mit $s = \frac{a+b+c}{2}$.
Man leite auch die Inhaltsformel für das Dreieck ABC

$$F = \rho \cdot s \tag{1}$$

her.

In Abb. 33 sind die Dreiecke AF_1O, AF_2O_a, AE_4O_c und AF_4O_b einander ähnlich, da sie sämtlich neben dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einen rechten Winkel enthalten (WW). Daher ergeben sich die folgenden Beziehungen der Zeile A in Tabelle 1 (entsprechend findet man die Gleichungen der Zeilen B und C):

Tabelle 1

	I	II	III	IV	V
A	$\frac{\rho}{s-a}$	$=\frac{\rho_a}{s}$	$=\frac{s-b}{\rho_c}$	$=\frac{s-c}{\rho_b}$	$=\tan\frac{\alpha}{2}$
B	$\frac{\rho}{s-b}$	$=\frac{\rho_b}{s}$	$=\frac{s-c}{\rho_a}$	$=\frac{s-a}{\rho_c}$	$=\tan\frac{\beta}{2}$
C	$\frac{\rho}{s-c}$	$=\frac{\rho_c}{s}$	$=\frac{s-a}{\rho_b}$	$=\frac{s-b}{\rho_a}$	$=\tan\frac{\gamma}{2}$

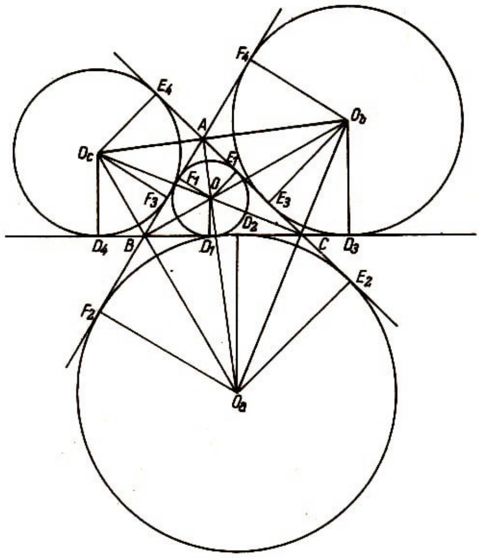


Abb. 33

Setzt man $F = \rho s$ als bekannt voraus, so folgt aus den Gleichungen AI = AII, ferner aus BI = BII und aus CI = CII

$$F = \rho_a(s-a), \qquad F = \rho_b(s-c), \qquad F = \rho_c(s-c) \tag{2,3,4}$$

Aufgabe 13. Man leite die Formeln (2) bis (4) geometrisch her.

Um ρ durch die Seiten des Dreiecks auszudrücken, fasst man B I und B III zusammen und erhält

$$\rho\rho_a = (s-b)(s-c) \tag{*}$$

Aus A I und A II folgt

$$\rho s = \rho_a(s-a)$$

Multiplikation beider Gleichungen und Division durch ρ_a ergibt

$$\rho^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Hieraus folgt nach Division durch a und Ziehen der Quadratwurzel

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{5}$$

Multipliziert man (5) mit s, so gewinnt man die Heronische Inhaltsformel des Dreiecks:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{6}$$

Diese Formel erhält man auch, wenn beide Seiten der Gleichung (*) mit $s(s-a)$ multipliziert werden:

$$\rho s \rho_a (s-a) = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

oder wegen $\rho s = \rho_a(s-a) = F$

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

und daraus die Formel (6).
Die Berechnung der Winkel des Dreiecks aus den Seiten desselben soll nun für den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ entwickelt werden. Multipliziert man die Gleichungen A I = A V und A II = A V, so ergibt sich

$$\frac{\rho\rho_a}{s(s-a)} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

Nach B I und B III ist $\rho\rho_a = (s-b)(s-c)$, und man erhält damit

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \tag{7}$$

Im Dreieck AF_1O von Abb. 33 ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(s-a)^2}} \qquad \text{und} \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho^2}{\rho^2+(s-a)^2}$$

Für ρ^2 setzt man den aus (5) folgenden Wert ein und erhält

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-c)^2}$$

Erweitert man mit s und kürzt durch $s-a$, so ergibt sich

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)+s(s-a)}$$

Die Summe im Nenner beträgt bc, wie man durch Ausrechnen leicht findet; also erhält man

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \tag{8}$$

In gleicher Weise findet man aus $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-a)^2}{\rho^2+(s-a)^2}$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \tag{9}$$

Aufgabe 14. Man zeige mit Hilfe vorstehender Formeln, dass

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1 \qquad , \qquad \sin\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

ist. Man berechne $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus den Seiten des Dreiecks ABC.

Aufgabe 15. Man leite an Hand von (8) und (9) aus $F=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ die Heronische Inhaltsformel des Dreiecks her.

Weitere Inhaltsformeln für das Dreieck lassen sich aus den Gleichungen der Tabelle 1 leicht ermitteln. Aus A I und A III folgt

$$\rho\rho_c=(s-a)(s-b)$$

und aus A II und A IV

$$\rho_a\rho_b=s(s-c)$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen miteinander, so erhält man

$$\rho\rho_a\rho_b\rho_c=s(s-a)(s-b)(s-c)=F^2$$

und daraus

$$F=\sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c} \tag{10}$$

A I und A V ergibt $\rho=(s-a)\tan\frac{\alpha}{2}$, B I und B V ergibt $\rho=(s-b)\tan\frac{\beta}{2}$, C I und C V ergibt $\rho=(s-c)\tan\frac{\gamma}{2}$. Daraus folgt

$$\rho^3=(s-a)(s-b)(s-c)\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Nun multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit s^2:

$$\rho^2s^2\rho=s(s-a)(s-b)(s-c)s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Es ist also

$$\rho=s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} \tag{11}$$

Hieraus folgt leicht

$$s=\rho\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergeben sich wegen $F=\rho s$ die Inhaltsformeln

$$F=s^2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} \qquad , \qquad F=\rho^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} \tag{13,14}$$

Aufgabe 16. a) Man berechne ρ_a aus A II und A V und ρ aus A I und A V und zeige, dass

$$\rho_a-\rho=a\tan\frac{\alpha}{2}=4r\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{15}$$

ist.

b) Man leite aus A III und A V und aus A IV und A V die Beziehung

$$\rho_b + \rho_c = a \cot \frac{\alpha}{2} = 4r \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tag{16}$$

her.
c) Man bilde die Summe von (15) und (16):

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r \tag{17}$$

Aufgabe 17. a) Man bilde die Summe

$$\rho_a + \rho = 2r(\cos\beta + \cos\gamma) \tag{18}$$

b) Man zeige, dass

$$\rho_b - \rho_c = 2r(\cos\gamma - \cos\beta) \tag{19}$$

ist.
c) Man bilde die Summe von (18) und (19):

$$\rho_a + \rho + \rho_b - \rho_c = 4r\cos\gamma \tag{20}$$

Da in der Gleichung (20), bei der ρ_c mit negativem Vorzeichen versehen ist, auf der rechten Seite der Winkel γ auftritt, wird entsprechend, wenn ρ_a bzw. ρ_b negatives Vorzeichen haben, auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Winkel β bzw. α auftreten.
Man erhält also

$$\begin{aligned} \rho_a + \rho_b - \rho_c + \rho &= 4r\cos\gamma \\ \rho_a - \rho_b + \rho_c + \rho &= 4r\cos\beta \\ -\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho &= 4r\cos\alpha \end{aligned}$$

Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c + 3\rho = 4r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 4r(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}) \tag{21}$$

Mit $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$ folgt daraus $4\rho = 16r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ und damit

$$\rho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \tag{22}$$

Nach Aufgabe 16b) ist $\rho_b + \rho_c = 4r\cos^2\frac{\alpha}{2}$; entsprechend gilt $\rho_c + \rho_a = 4r\cos^2\frac{\beta}{2}$ und $\rho_b + \rho_a = 4r\cos^2\frac{\gamma}{2}$. Die Addition der drei Gleichungen liefert

$$2(\rho_a + \rho_b + \rho_c) = 4r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\rho_a+\rho_b+\rho_c &= 2r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right) = r\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\beta}{2}+2\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= r(1+\cos\alpha+1+\cos\beta+1+\cos\gamma) = r(3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\ &= r\left(4+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 4r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (23)\end{aligned}$$

Mit (17) ergibt sich hieraus wieder die Gleichung (22).

Aufgabe 18. Man berechne ρ_a, ρ_b, ρ_c aus den nach (20) folgenden Relationen [es können auch die Gleichungen (15) und (18) verwendet werden].

Wir berechnen nun s mit Hilfe von r und den Winkeln des Dreiecks. Es ist

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(2r\sin\alpha+2r\sin\beta+2r\sin\gamma) = r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\\ &= 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad (24)\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Man zeige, dass das Produkt der Gleichungen (22) und (24) die bekannte Inhaltsformel $F = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ liefert.

Aufgabe 20. Man eliminiere aus (22) und (24) $4r$, berechne ρ und s und bestätige dadurch die Relationen (11) und (12).

Aufgabe 21. Man bilde die Produkte

$$(\rho_b+\rho_c)(\rho_a-\rho), \qquad (\rho_c+\rho_a)(\rho_b-\rho), \qquad (\rho_a+\rho_b)(\rho_c-\rho)$$

Die Lösung der Aufgabe 21 lautet

$$(\rho_b+\rho_c)(\rho_a-\rho) = a^2, \qquad (\rho_c+\rho_a)(\rho_b-\rho) = b^2, \qquad (\rho_a+\rho_b)(\rho_c-\rho) = c^2 \qquad (25,26,27)$$

Wir bilden nun das Produkt der drei Gleichungen:

$$a^2b^2c^2 = (\rho_b+\rho_c)(\rho_a-\rho)(\rho_c+\rho_a)(\rho_b-\rho)(\rho_a+\rho_b)(\rho_c-\rho)$$

dividiert durch $16r^2 = (\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho)^2$ [nach (17)] und erhält wegen $\frac{abc}{4r} = F$

$$F = \frac{\sqrt{(\rho_b+\rho_c)(\rho_a-\rho)(\rho_c+\rho_a)(\rho_b-\rho)(\rho_a+\rho_b)(\rho_c-\rho)}}{\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho} \qquad (28)$$

Aufgabe 22. Man beweise, dass

$$\rho = \sqrt{\frac{(\rho_a-\rho)(\rho_b-\rho)(\rho_c-\rho)}{\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho}} \qquad (29)$$

Ist und berechne s.

Lösung:

$$s = \sqrt{\frac{(\rho_a + \rho_b)(\rho_b + \rho_c)}{(\rho_c + \rho_a)(\rho_a + \rho_b) + (\rho_c - \rho)}} \tag{30}$$

Wir formen nun die Gleichung (29) um, indem wir sie quadrieren und dann nach ρ auflösen. Wir erhalten

$$\rho = \frac{\rho_a \rho_b \rho_c}{\rho_a \rho_b + \rho_b \rho_c + \rho_a \rho_c} \tag{31}$$

Bildet man auf beiden Seiten die reziproken Werte, so erhält man

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} \tag{31'}$$

Aufgabe 23. Man ersetze in (30) ρ durch den in (31) erhaltenen Wert und vereinfache den Ausdruck.

Lösung: $s = \sqrt{\rho_a \rho_b + \rho_b \rho_c + \rho_a \rho_c}$ (32)

Aufgabe 24. Man bestätige die Richtigkeit der Gleichungen (31) und (32) unter Benutzung der für die Produkte einzusetzenden Werte aus Tabelle 1.

Aus (31) und (32) ergeben sich die Inhaltsformeln des Dreiecks:

$$F = \frac{\rho_a \rho_b \rho_c}{\sqrt{\rho_a \rho_b + \rho_b \rho_c + \rho_a \rho_c}} \tag{33}$$

$$F = \rho \sqrt{\rho_a \rho_b + \rho_b \rho_c + \rho_a \rho_c} \tag{34}$$

$$F = \frac{s \rho_a \rho_b \rho_c}{\rho_a \rho_b + \rho_b \rho_c + \rho_a \rho_c} = \frac{\rho_a \rho_b \rho_c}{s} \tag{35}$$

Aufgabe 25. a) Man drücke den reziproken Wert von ρ durch die Radien der drei Ankreise des Dreiecks aus, indem man von der Gleichung $s = s - a + s - b + s - c$ ausgeht.
b) Man berechne die reziproken Werte von ρ, ρ_a, ρ_b und ρ_c aus den reziproken Werten der drei Höhen des Dreiecks.

Anleitung. Man benutze die Relation $s = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$ usw.

Für die Berührungspunkte, die der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks auf einer Dreiecksseite erzeugen, bestehen interessante Lagebeziehungen. Sie sollen bezüglich der Seite BC untersucht werden. Man verwende hierbei Abb. 33.

Aufgabe 26. Man drücke die Länge folgender Strecken durch die Seiten des Dreiecks aus: D_1D_2, D_1D_3, D_1D_4, D_2D_3, D_2D_4, D_3D_4. Wir bezeichnen die Mitten von D_1D_3 mit P, von D_1D_4 mit Q, von D_2D_3 mit R und von D_2D_4 mit T.
Wie lang sind die Strecken CP, CR, CQ und PT? Wo liegen die Mitten von D_1D_2 und D_3D_4?

Wir beweisen nun noch eine Eigenschaft des Feuerbachschen Kreises.

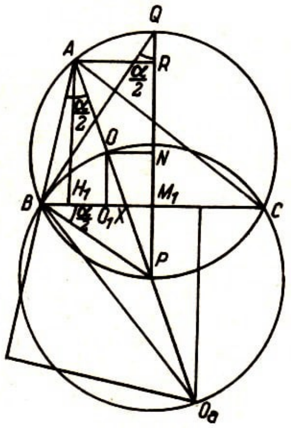


Abb. 34

Der Feuerbachsche Kreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.

Dazu benötigen wir folgenden

Hilfssatz. Sind H_1 der Höhenfußpunkt, O_1 der Berührungspunkt des Inkreises auf der Seite a, X der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von α mit der Seite a und M_1 die Mitte von BC, so gilt (Abb. 34)

$$M_1X \cdot M_1H_1 = M_1O_1^2$$

Beweis.
Es ist $\triangle BPX \sim \triangle BPA$ (WW; denn es ist $\angle BPX = \angle BPA$ und $\angle PBX = \angle PAB = \frac{\alpha}{2}$). Daraus folgt $PX : PB = PB : PA$, oder, da $PB = PO$ ist, $PX : PO = PO : PA$ und nach dem Strahlensatz $M_1X : NO = NO : RA$ oder $M_1 : X : M_1O_1 = M_1O_1 : M_1H_1$ und die Produktgleichung $M_1X \cdot M_1H_1 = M_10_1^2$.

Nun kann der oben formulierte Satz vom Feuerbachschen Kreis bewiesen werden. Im Punkt M_1 (Abb. 35) ist die Tangente an den Feuerbachschen Kreis gezeichnet.

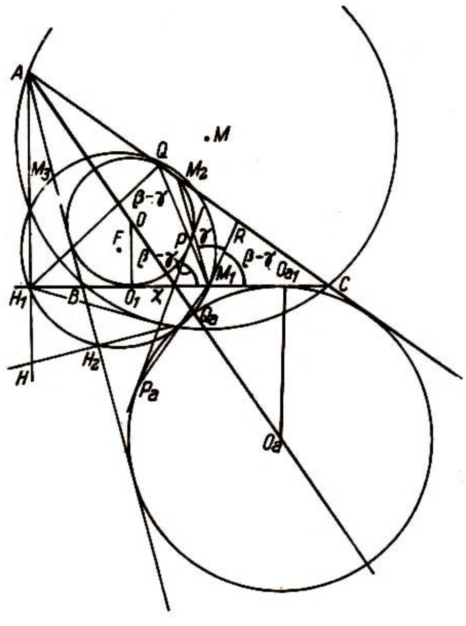


Abb. 35

Der Sehnentangentenwinkel RM_1M_2 ist gleich $\angle M_2M_3M_1 = \gamma$ und $\angle M_2M_1C = \beta$, also $\angle RM_1C = \beta - \gamma$. Ferner ist $\angle AXB = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, als Außenwinkel des Dreiecks AXC, und $\angle BXP = 2\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = \alpha + 2\gamma$.
Es ist der Winkel der beiden Tangenten an den Inkreis XO und XP. Folglich ist

$$\angle PXC = 180° - (\alpha + 2\gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \alpha - 2\gamma = \beta - \gamma$$

Und daher ist $XP || M_1R$.

Zeichnet man nun die Sekante M_1P, die den Inkreis im Punkt Q schneidet, so gilt

nach dem Sekanten-Tangentensatz $M_1P \cdot M_1Q = M_1O_1^2$, und nach dem Hilfssatz ist $M_1X \cdot M_1H_1 = M_1O_1^2$.
Also ist $M_1P \cdot M_1Q = M_1X \cdot M_1H_1$, d.h., die Punkte P, Q, X und H_1 liegen auf einem Kreis. In dem von diesen Punkten gebildeten Sehnenviereck ist $\angle H_1QP = \angle PXC = \beta - \gamma$. Da aber $\angle H_1QM_1 = \beta - \gamma$ über der Sehne H_1M_1 steht, die mit der Verlängerung der Tangente RM_1 über M_1 hinaus den Sehnentangentenwinkel $\beta - \gamma$ bildet, liegt Q auch auf dem Feuerbachschen Kreis.

Hierzu sei noch bemerkt, dass der Berührungspunkt zweier Kreise Ähnlichkeitspunkt derselben ist, da sie sich in Ähnlichkeitslage befinden. Homologe Punkte liegen auf denselben Ähnlichkeitsstrahlen, und Tangenten in solchen Punkten laufen parallel.

Aufgabe 27. Man beweise, dass der Ankreis um den Punkt O_a mit dem Radius ρ_a, durch den Feuerbachschen Kreis im Punkt Q_a berührt wird.

Anleitung. $M_1Q_a \cdot M_1P_a = M_1O_{a1}^2$; $\angle H_1XP_a = \angle H_1Q_aP_a$; H_1, Q_a, M_1, Q liegen auf dem Feuerbachschen Kreis.

Wir wollen nun einen zweiten Beweis für den Satz vom Feuerbachschen Kreis angeben. Für die Berührung mit dem Inkreis gelten folgende Relationen:

$$MO^2 = r^2 - 2r\rho, \qquad OH^2 = 2\rho^2 - 2r\rho_1, \qquad MH^2 = r^2 - 4r\rho_1$$

$$FO^2 = \frac{1}{2}(MO^2 + OH^2) - FH^2 = \frac{1}{4}r^2 - r\rho + \rho^2 = \left(\frac{1}{2}r - \rho\right)^2$$

(ρ_1 ist der Radius des dem Höhenfußpunktsdreieck $H_1H_2H : 3$ eingeschriebenen Kreises. Sein Mittelpunkt ist der Höhenschnittpunkt H. Die Bedeutung der anderen Bezeichnungen ist bekannt und aus Abb. 36 ersichtlich.)

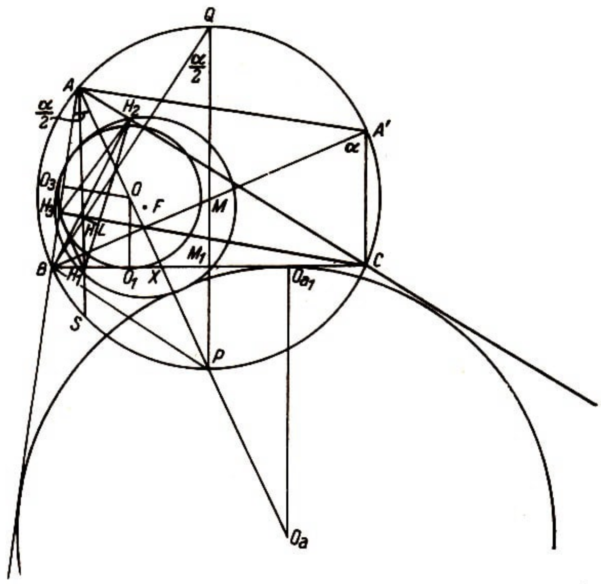


Abb. 36

1. $MO^2 = r^2 - 2r\rho$.
$\triangle OO_3A \sim \triangle PBQ$ (WW). Daraus folgt $\rho : AO = PB : 2r$ oder $2r\rho = AO \cdot PB$. Da $PB = PO$ ist, gilt

$$AO \cdot PO = (r + OM)(r - OM) = r^2 - OM^2$$

(Potenz des Punktes O in Bezug auf den Umkreis des Dreiecks ABC). Also ist $2r\rho = r^2 - MO^2$ und damit die Behauptung bewiesen.

2. $MH^2 = r^2 - 4r\rho_1$.
$\angle H_2H_1C = \angle LHH_1 = \angle BA'C = \alpha$.
$\triangle HLH_1 \sim \triangle BA'C$ (WW). Daher ist $\rho_1 : HH_1 = A'C : 2r$ oder wegen $A'C = AH$ auch $\rho_1 : HH_1 = AH : 2r$. Daraus folgt $2r\rho_1 = AH \cdot HH_1$ und

$$4r\rho_1 = 2HH_1 \cdot AH = HS \cdot AH = (r + MH)(r - MH) = r^2 - MH^2$$

Also gilt $MH^2 = r^2 - 4r\rho_1$, w. z. b. w.

3. $OH^2 = 2\rho^2.2r\rho_1$
Nach 2. ist

$$2r\rho_1 = AH \cdot HH_1 = 2r\cos\alpha \cdot 2r\cos\beta\cos\gamma = 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Aus den Inhaltsformeln $\rho s = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ findet man unter Anwendung der Additionstheoreme

$$\rho r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$4\rho r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 16r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

woraus

$$\rho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

folgt. Es muss also bewiesen werden, dass

$$OH^2 = 32r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

gilt. Man bestimmt die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, gebildet aus der Hypotenuse OH und den beiden Katheten,

$$BO_1 - BH_1 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 2r\cos\beta\sin\gamma = m$$
$$\rho - HH_1 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 2r\cos\beta\cos\gamma = n$$

und berechnet $OH^2 = m^2 + n^2$: Nach Quadrieren der Ausdrücke für m und n und Zusammenfassung ergibt sich

$$OH^2 = 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - 16r^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\beta\left(\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma + \sin\frac{\beta}{2}\cos\gamma\right) + 4r^2\cos^2\beta$$

Es ist

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma + \sin\frac{\beta}{2}\cos\gamma = \sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

und damit nach Anwendung des Additionstheorems für den Kosinus

$$\begin{aligned} OH^2 &= 16r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\beta \\ &- 16r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\beta + 4r^2\cos^2\beta \end{aligned}$$

Mit $cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}$ folgt nach Fortlassen der gleichen Glieder und Zusammenfassung

$$\begin{aligned} OH^2 &= 32r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} + 4r^2\cos\beta(\cos\beta - \sin\alpha\sin\gamma) \\ &= 32r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} + 4r^2\cos\beta[-\cos(\alpha+\gamma) - \sin\alpha\sin\gamma] \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus folgt

$$OH^2 = 32r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2\rho^2 - 2r\rho_1$$

Schließlich folgt aus 1., 2. und 3.

$$OF^2 = \frac{1}{2}(OM^2 + OH^2) - FH^2 = \frac{1}{2}r^2 - r\rho + \rho^2 - r\rho_1 - \frac{1}{4}r^2 + r\rho_1 = \left(\frac{1}{2}r - \rho\right)^2$$

Diese Gleichung besagt, dass der Inkreis den Feuerbachschen Kreis von innen berührt; denn die Zentrale FO ist gleich der Differenz der Radien, ihre Verlängerung geht durch den Berührungspunkt.

Aufgabe 28. Man führe den Beweis für den Ankreis um den Punkt O_a mit den Radius ρ_a.

Anleitung.

$$O_aM^2 = r^2 + 2r\rho_a \quad , \quad O_aH^2 = 2\rho_a^2 - 2r\rho_1$$

$$MH^2 = r^2 - 4r\rho_1 \quad , \quad FO_a^2 = \frac{1}{2}(MO_a^2 + HO_a^2) - FH^2 = \left(\frac{1}{2}r + \rho_a\right)^2$$

5 Punkte und Linien des Dreiecks in neuerer Forschung

Die bisher behandelten Sätze und Beweise sind zum größten Teil seit langem Bestandteil der elementaren Geometrie. Die moderne mathematische Forschung im neunzehnten und zwanzigsten Jahrhundert bereicherte dieses Stoffgebiet durch eine große Zahl von Entdeckungen interessanter Linien und Punkte des Dreiecks mit ihren Eigenschaften. Einige von ihnen sollen im folgenden behandelt werden.

5.1 Der Miquelsche Satz

Nimmt man auf jeder Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt beliebig an und zeichnet durch jede Ecke und die beiden Punkte, die auf den der Ecke benachbarten Seiten liegen, Kreise, so gehen die drei Kreise durch einen Punkt, der Miquelscher Punkt genannt wird (Abb. 37).

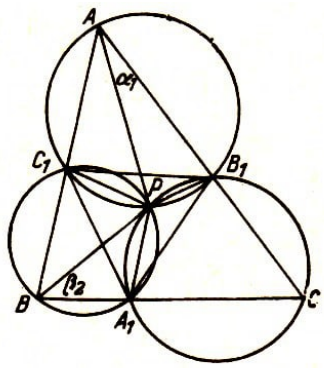


Abb. 37

Gegeben sei das Dreieck ABC; auf jeder Seite sei ein Punkt beliebig angenommen. Diese Punkte bezeichnen wir mit A_1, B_1 und C_1. Durch die Punkte A, C_1, B_1 durch B, C_1, A_1 und durch C, A_1, B_1 sind Kreise gezeichnet. Es soll nun bewiesen werden, dass die drei Kreise einander in einem Punkt schneiden.

Die beiden Kreise durch A, B_1, C_1 und durch B, A_1, C_1 schneiden einander in C_1 und P. AC_1PB_1 ist ein Sehnenviereck, und deshalb ist $\angle C_1PB_1 = 180° - \alpha$. Ebenso gilt $\angle C_1PA_1 = 180° - \beta$. Es bleiben also für $\angle A_1PB_1$, der beide Winkel zu $360°$ ergänzt,

$$360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$$

Das bedeutet aber, dass A_1PB_1C ein Sehnenviereck ist und der Kreis durch die Punkte C, A_1 und B_1 auch durch P geht.
Verbindet man die Punkte A_1, B_1 und C_1, so erhält man ein Miquelsches Dreieck. Da die Punkte A_1, B_1 und C_1 beliebig angenommen wurden, sind unbegrenzt viele Miquelsche Punkte im Dreieck möglich.

Satz. Die Strecken, die den Miquelschen Punkt mit den drei Punkten A_1, B_1 und C_1 verbinden, bilden mit den Dreiecksseiten gleiche Winkel.

Betrachtet man P als Schnittpunkt der beiden Kreise, die durch die Ecken des Dreiecks A und B verlaufen, so ist $\angle AB_1P = 180° - \angle AC_1P$. Es ist $\angle BC_1P = 180° - \angle AC_1P$. Folglich ist $\angle AB_1P = \angle BC_1P$. Da $\angle BC_1P = 180° - \angle BA_1P$ und $\angle CA_1P = 180° - \angle BA_1P$ ist, ist $\angle BC_1P = \angle CA_1P$.
Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in diesem Beweis nicht vorausgesetzt wurde, dass die Punkte C, A_1, P, B_1 auf einem Kreis liegen. Aus der eben bewiesenen Gleichheit der Winkel CA_1P und AB_1P folgt $\angle CB_1P + \angle CA_1P = 180°$ und daraus, dass CA_1PB_1 ein Sehnenviereck ist. Dadurch wird der Satz, dass die drei Miquelschen Kreise einander in einem Punkt schneiden, auf einem anderen Weg bewiesen.

Zu einem Punkt P gehören unbegrenzt viele Miquelsche Dreiecke; denn man kann z.B. jeden Punkt der Seite BC als Eckpunkt eines solchen Dreiecks wählen und die anderen Ecken leicht bestimmen.
Bezeichnet man den Punkt auf BC mit A_2, so hat man an PA_2 in P den Winkel $180° - \beta$ als gegenüberliegenden Winkel zu β und Winkel $180° - \gamma$ als Gegenwinkel zu γ anzutragen, um die Ecken B_2 und C_2 zu finden.
Ein Spezialfall liegt vor, wenn die Strecken PA_1, PB_1 und PC_1 auf den entsprechenden Dreiecksseiten senkrecht stehen. Dann nennt man das Dreieck $A_1B_1C_1$ Fußpunktsdreieck des Punktes P in Bezug auf das Dreieck ABC (Abb. 38).

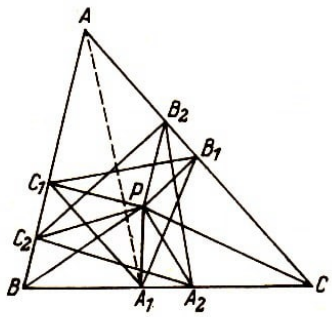


Abb. 38

Alle dem Punkt P zugeordneten Miquelschen Dreiecke sind einander ähnlich.

Um diesen Satz zu beweisen, muss man zeigen, dass die genannten Dreiecke in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Es ist

$$\angle BPC = \alpha + \angle C_1A_1B_1$$

Beweis. $\angle BPC = \angle BPA_1 + \angle CPA_1$. Nun ist $\angle BPA_1 = \angle BC_1A_1$ und $\angle C_1PA_1 = \angle CB_1A_1$ (Peripheriewinkel über demselben Bogen),

$$\angle BC_1A_1 = \angle C_1AA_1 + \angle C_1A_1A, \qquad \angle CB_1A_1 = \angle B_1AA_1 + \angle B_1A_1A$$

(Außenwinkelsatz)
Addiert man diese Gleichungen, so erhält man $\angle BPC = \alpha + \angle B_1A_1C_1$. Ebenso findet man $\angle CPA = \beta + \angle C_1B_1A_1$ und $\angle APB = \gamma + \angle A_1C_1B_1$.

Aufgabe 28. Man beweise, dass diese Relationen auch gelten, wenn P außerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Aus den letzten drei Gleichungen lassen sich die Winkel der dem Punkt P zugeordneten Miquelschen Dreiecke berechnen. Man erhält $(i = 1, 2, ..., n)$

$$\angle B_iA_iC_i = \angle BPC - \alpha, \qquad \angle A_iB_iC_i = \angle APC - \beta, \qquad \angle A_iC_iB_i = \angle APB - \gamma,$$

Da die Winkel auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vom Dreieck ABC und der Lage des Punktes P bestimmt werden, sind alle Miquelschen Dreiecke ähnlich, weil sie in ihren Winkeln übereinstimmen.

Man kann zum Beweis der Gleichheit der Winkel der Miquelschen Dreiecke auch Teilwinkel des Dreiecks ABC verwenden, die ebenfalls durch die Lage des Punktes P

eindeutig bestimmt sind. So ist $\angle B_1C_1P = \alpha_1$ und $\angle A_1C_1P = \beta_2$. Addiert man beide Gleichungen, so erhält man $\angle B_1C_1A_1 = \alpha_1 + \beta_2$.
Diese Beziehung gilt für jede Lage des Punktes C_1. Also sind alle Winkel $A_iC_iB_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ gleich. Das gleiche kann man für $\angle A_iB_iC_i$ und $\angle B_iA_iC_i$ zeigen. Damit ist der Satz von der Ähnlichkeit der Miquelschen Dreiecke auf einem zweiten Weg bewiesen.

Die Seiten des durch den Punkt P im Dreieck ABC bestimmten Fußpunktsdreiecks lassen sich durch die Abstände des Punktes P von den Ecken A, B und C, durch die entsprechenden Dreiecksseiten a, b, c und durch den Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises ausdrücken.
Da die Punkte A, B_1, P, C_1 auf einem Kreis liegen, dessen Durchmesser AP ist, gilt $B_1C_1 = AP \sin\alpha$. Es ist $a = 2r \sin\alpha$ und $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$ (2r ist der Durchmesser des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises). Somit ergibt sich

$$B_1C_1 = \frac{AP \cdot a}{2r}, \qquad A_1C_1 = \frac{BP \cdot b}{2r}, \qquad A_1B_1 = \frac{CP \cdot c}{2r}$$

Diese Relationen lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Jede Seite eines Miquelschen Fußpunktsdreiecks bezüglich des Punktes P ist dem Produkt proportional, das gebildet wird aus dem Abstand des Punktes P von der entsprechenden Ecke des Dreiecks ABC und der dieser Ecke gegenüberliegenden Dreiecksseite.

Aufgabe 29. Man prüfe an geeigneten Konstruktionen,
a) ob einer oder mehrere der Punkte A_1, B_1, C_1 auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten liegen können,
b) ob der Punkt P auch außerhalb des Dreiecks ABC liegen kann.

Aufgabe 30. Man beweise folgende Sätze:
a) Verbindet man die Mittelpunkte der drei Miquelschen Kreise, so ist das entsprechende Dreieck $M_1M_2M_3$ dem gegebenen Dreieck ABC ähnlich.
Anleitung. Man verwende zum Beweis den Satz von dem Zentriwinkel und den Peripheriewinkeln über demselben Kreisbogen.

b) Sind die Abstände des Miquelschen Punktes P von den Ecken des Dreiecks ABC gleich, so sind alle durch diesen Punkt bestimmten Miquelschen Dreiecke dem gegebenen Dreieck ABC ähnlich. (Der Punkt P ist zugleich Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises.)

5.2 Die Simsonsche Gerade

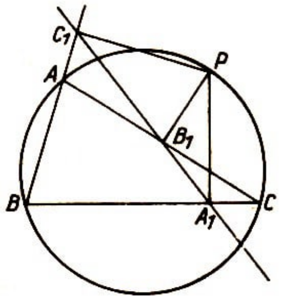


Abb. 39

Im Zusammenhang mit den Betrachtungen über den Miquelschen Punkt und seine Eigenschaften steht eine besondere gerade Linie, die man erhält, wenn der Miquelsche Punkt auf der Peripherie des Umkreises des Dreiecks ABC liegt. Sie heißt Simsonsche Gerade. Man findet sie, wenn man von diesem besonders gelegenen Punkt P auf die Dreiecksseiten Lote fällt. Ihre Fußpunkte bestimmen die Simsonsche Gerade (Abb. 39).

Um dies zu beweisen, wählt man auf dem Umkreis des Dreiecks ABC einen Punkt P und fällt von ihm Lote auf die Dreiecksseiten: PA_1, PB_1, PC_1. Für jedes Miquelsche Dreieck $A_1B_1C_1$ gilt die Relation $\angle B_1A_1C_1 = \angle BPC - \alpha$.
Nun liegt P auf dem Kreis durch A, B, C, und es ist $\angle BPC = \angle BAC$, also gleich α. Folglich ist $\angle B_1A_1C_1 = \alpha - \alpha = 0°$, d.h., die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 31. Man bestätige folgende Behauptungen:
a) Fällt der Punkt P auf eine Ecke des Dreiecks ABC, so ist die zugehörige Simsonsche Gerade die von der Ecke ausgehende Höhe des Dreiecks.

b) Ist der Punkt P der Endpunkt einen von einer Dreiecksecke gezogenen Durchmessers des Umkreises, so ist die der Ecke gegenüberliegende Seite die zugehörige Simsonsche Gerade.

c) Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote, die man von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten desselben fällt, auf einer Geraden liegen, zuerst mit Hilfe des Scheitelwinkelsatzes und dann unter Verwendung des Satzes von Menelaos.

Lösung der Aufgabe

1. Beweis. Man zeichnet außer dem Umkreis des Dreiecks ABC die Kreise mit den Durchmessern AT, BT und CT und erhält vier Sehnenvierecke, in denen die gegenüberliegenden Winkel zusammen $180°$ betragen. Dann sind

$$\angle T_1TT_3 = \angle ATC = 180° - \beta = \alpha + \gamma$$

Nun ist

$$\angle T_1TC = \angle CTT_3 - (\alpha + \gamma) \qquad \text{und} \qquad \angle T_3TA = \angle CTT_3 - (\alpha + \gamma)$$

Daraus folgt

$$\angle T_1TC = \angle T_3TA$$

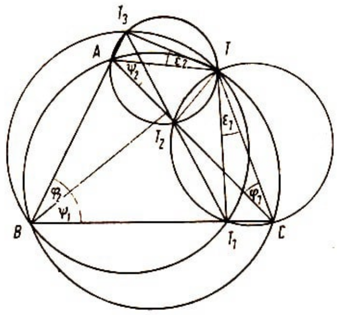


Abb. 6'

Diese Winkel werden in Abb. 6' mit ε_1 und ε_2 bezeichnet. Weiter ist

$$\varepsilon_1 = \angle T_1T_2C \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_2 = \angle T_3T_2A$$

(Peripheriewinkelsatz!). Beide Winkel haben den Scheitelpunkt T_2 gemeinsam, ihre Schenkel sind paarweise entgegengesetzt gerichtet. Zwei von ihnen liegen auf einer Dreiecksseite AC. Dann müssen nach dem Scheitelwinkelsatz die Schenkel T_1T_2 und T_3T_2 auch auf einer Geraden liegen.

2. Beweis. In allen bei folgendem Beweis benutzten Dreiecken liegt ein rechter Winkel. Dann sind zwei Dreiecke ähnlich, wenn sie noch in einem spitzen Winkel übereinstimmen.

Nach Abb. 6' ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, wie oben bewiesen. Weiter ist $\varphi_1 = \varphi_2$ und $\psi_1 = \psi_2$ (als Peripheriewinkel über demselben Bogen). Daraus folgt

$$\triangle BTT_1 \sim \triangle ATT_2 \quad (\psi_1 = \psi_2); \qquad \text{dann ist} \qquad \frac{TT_1}{TT_2} = \frac{BT_1}{T_2A}$$
$$\triangle CTT_2 \sim \triangle BTT_3 \quad (\varphi_1 = \varphi_2); \qquad \text{dann ist} \qquad \frac{TT_2}{TT_3} = \frac{CT_2}{T_3B}$$
$$\triangle ATT_3 \sim \triangle CTT_1 \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2); \qquad \text{dann ist} \qquad \frac{TT_3}{TT_1} = \frac{AT_3}{T_1C}$$

Durch Multiplikation der drei Proportionen erhält man

$$\frac{TT_1 \cdot TT_2 \cdot TT_3}{TT_2 \cdot TT_3 \cdot TT_1} = \frac{BT_1 \cdot CT_2 \cdot AT_3}{T_2A \cdot T_3B \cdot T_1C} = 1$$

Hier wurden die Maßzahlen der Seitenabschnitte des Dreiecks ABC verwendet, die sämtlich positiv genommen wurden. Berücksichtigt man jedoch, dass der zweite Quotient das Produkt aus den Teilverhältnissen der Dreiecksseiten ist, die durch die Punkte T_1, T_2 und T_3 geteilt werden, und das Teilverhältnis $\frac{AT_3}{T_3B}$ wegen der äußeren Teilung das negative Vorzeichen erhält, so wird das Produkt -1.

Nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos liegen T_1, T_2 und T_3 auf einer Geraden.

5.3 Der Flächeninhalt des Miquelschen Fußpunktsdreiecks

Es soll bewiesen werden, dass der Flächeninhalt des Fußpunktsdreiecks eines Punktes P im Dreieck ABC proportional ist der Potenz des Punktes P in Bezug auf den Umkreis des Dreiecks ABC (Abb. 40).

Zum Beweis verwendet man folgende Relationen:

$$\angle BAC = \angle BB_2C, \qquad \angle BPC = \angle PB_2C + \angle PCB_2, \qquad \angle BPC = \angle B_1A_1C_1 + \alpha$$

Die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Umkreis des Dreiecks lautet $(r+MP)(r-MP) = r^2 - MP^2$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC wird durch Δ symbolisiert; er beträgt

$$\Delta = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

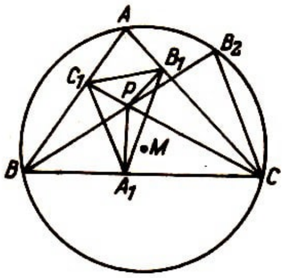


Abb. 40

Beweis. $\angle BPC = \angle B_1A_1C_1 + \alpha = \angle BB_2C + \angle B_2CP$
Also ist $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2CP$. Dann ist der Inhalt des Fußpunktsdreiecks $A_1B_1C_1$

$$F = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \sin\angle B_1A_1C_1 = \frac{1}{2} PC \sin\gamma \cdot PB \sin\beta \sin\angle B_2CP$$

Nun ist im Dreieck PB_2C

$$\frac{\sin\angle B_2CP}{\sin\angle BB_2C} = \frac{PB_2}{PC}$$

Daraus folgt $\sin\angle B_2CP = \frac{PB_2}{PC}\sin\alpha$; eingesetzt in den Wert für F ergibt sich

$$F = \frac{1}{2} PB \cdot PB_2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

und wegen $PB \cdot PB_2 = r^2 - MP^2$ ist

$$F = \frac{1}{2}(r^2 - MP^2) \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{r^2 - MP^2}{4r^2} \cdot \Delta$$

Folgerung. Der Inhalt des Fußpunktsdreiecks eines Punktes in Bezug auf das Dreieck ABC ist Null, wenn $MP = r$ ist, also der Punkt auf der Peripherie des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises liegt (Simsonsche Gerade!).

Aufgabe 32. Man überlege sich, wenn der Inhalt des Fußpunktsdreiecks in einem gegebenen Dreieck ABC am größten wird. (Man betrachte MP dabei als veränderliche Größe.)

Aufgabe 33. Man zeige, dass die Inhaltsformel für das Höhenfußpunktsdreieck mit der oben berechneten übereinstimmt. (Man drücke die Potenz des Höhenschnittpunktes in Bezug auf den Umkreis durch die entsprechenden Höhenabschnitte aus.)

5.4 Der Lémoine-Grebesche Punkt

Um den Lémoineschen Punkt im Dreieck zu bestimmen, sind einige Vorbemerkungen erforderlich. Im Dreieck ABC (Abb. 41) sind die Seitenhalbierenden AM_1 und BM_2 und die Winkelhalbierenden der Winkel α und β gezeichnet.

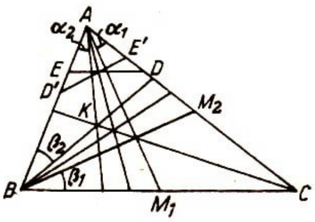


Abb. 41

Wird AM_1 an der Halbierenden des Winkels α und BM_2 an der Halbierenden des Winkels β gespiegelt, so findet man die Spiegelbilder AN_1 bzw. BN_2. Für eine Seitenhalbierende hat man den Ausdruck Mediane geprägt und die zu ihr bezüglich der Winkelhalbierenden symmetrisch gelegene Ecktransversale Symmediane genannt.

Jede zur Seite BC parallele Strecke im Dreieck ABC wird durch die Seitenhalbierende AM_1 halbiert, so z.B. die Strecke ED. Spiegelt man das Dreieck AED zugleich mit der Medianen AM_1 an der Winkelhalbierenden w_α, so erhält man das Dreieck $AE'D'$, in dem $\angle AE'D' = \beta$ und $\angle AD'E' = \gamma$ ist und $D'E'$ durch die Symmediane halbiert wird.
$D'E'$ nennt man Antiparallele zu BC. Das Dreieck $AD'E'$ ist dem Dreieck ABC ähnlich. Hieraus wird ersichtlich, wie man die Symmedianen in einem Dreieck zeichnen kann.

Satz. Die drei Symmedianen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Für die Medianen eines Dreiecks, die sich in einem Punkt schneiden, gelten nach dem Satz von Ceva die Relationen

$$\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1 \qquad (1,2)$$

Auch die Umkehrung des Satzes von Ceva wurde bereits bewiesen.
Da jede Symmediane durch Spiegelung der Mediane an der Halbierenden des Winkels an der gleichen Ecke des Dreiecks entsteht, werden die Teilwinkel, in die jede Mediane den Dreieckswinkel zerlegt, ebenfalls gespiegelt, d.h. in ihrer Lage vertauscht. Daher gilt (2) auch für die drei Symmedianen, die einander in einem Punkt schneiden müssen. Dieser Sachverhalt folgt im übrigen bereits aus der symmetrischen Lage der Medianen und Symmedianen.

Der Schnittpunkt der Symmedianen des Dreiecks wird Lémoinescher oder Grebescher Punkt genannt.

Satz. Die Abstände des Lémoineschen Punktes von den Seiten des Dreiecks sind den zugehörigen Seiten proportional: (Abb. 42).

$$KA_1 : KB_1 : KC_1 = a : b : c$$

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, soll ein Hilfssatz bewiesen werden.

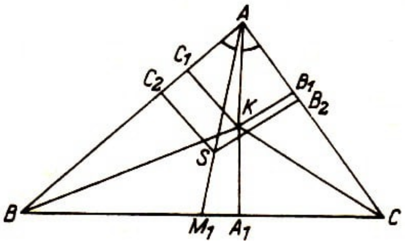


Abb. 42

Hilfssatz. Die Abstände des Schwerpunktes eines Dreiecks von den Seiten sind den zugehörigen Dreiecksseiten indirekt proportional.

Beweis. Jede Mediane teilt das Dreieck in zwei flächengleiche Teildreiecke (Beweis!). Die drei Medianen teilen das Dreieck in drei flächengleiche Teildreiecke. Bezeichnet man die Abstände des Schwerpunktes S von den Seiten des Dreiecks mit m_1, m_2, m_3 so ergibt sich

$$a \cdot m_1 = b \cdot m_2 = c \cdot m_3 = \frac{2}{3}F$$

(F bedeutet den Inhalts des Dreiecks ABC). Daraus folgt

$$m_1 : m_2 = b : a \qquad \text{oder} \qquad m_1 : m_2 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

$$m_2 : m_3 = c : a \qquad \text{oder} \qquad m_2 : m_3 = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Daraus ergibt sich

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Nun kann der oben formulierte Satz bewiesen werden. Ist K der Lémoinesche Punkt, so ist $\angle SAC_2 = \angle KAB_1$. Daher ist $\triangle ASC_2 \sim \triangle AKB_1$; denn außer den gleichen Winkeln liegt in jedem dieser Dreiecke ein rechter Winkel.
Folglich ist $m_3 : KB_1 = AS : AK$. Es ist ohne weiteres klar, dass $\triangle ASB_2 \sim \triangle AKC_1$ ist (Beweis!).

Daraus folgt $m_2 : KC_1 = AS : AK$, und beide Proportionen liefern $m_2 : m_3 = KC_1 : KB_1$. Nach dem Hilfssatz ist $m_2 : m_3 = c : b$. Durch Zusammenfassung der beiden letzten Gleichungen erhält man $KC_1 : KB_1 = c : b$. Ebenso lässt sich zeigen, dass $KB_1 : KA_1 = b : a$ ist. Damit ist bewiesen, dass

$$KA_1 : KB_1 : KC_1 = a : b : c$$

gilt.
Führt man den Proportionalitätsfaktor p ein, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$KA_1 = p \cdot a, \qquad KB_1 = p \cdot b, \qquad KC_1 = p \cdot c$$

Um p zu bestimmen, berechnet man den Inhalt des Dreiecks ABC. Es ist

$$2F = KA_1 \cdot a + KB_1 \cdot b + KC_1 \cdot c = p(a^2 + b^2 + c^2)$$

hieraus folgt

$$p = \frac{2F}{a^2+b^2+c^2} \qquad \text{und} \qquad KA_1 = a\frac{2F}{a^2+b^2+c^2}$$

Ebenso findet man KB_1 und KC_1.

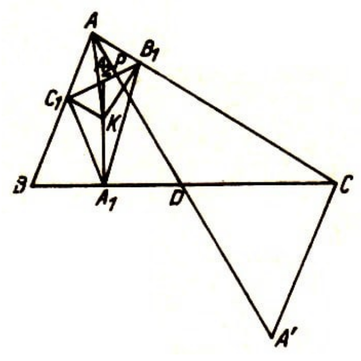


Abb. 43

Aufgabe 34. Man beweise, dass im rechtwinkligen Dreieck der Lémoinesche Punkt die zur Hypotenuse gezogene Höhe halbiert.
Anleitung. Man zeichne die Symmedianen von den Scheiteln der spitzen Winkel.

Satz. Der Lémoinesche Punkt ist der Schwerpunkt seines eigenen Fußpunktsdreiecks (Abb. 43).

Hilfssatz. Im Dreieck ABC steht die Seitenhalbierende AD senkrecht auf der Seite B_1C_1 des Fußpunktsdreiecks des Punktes K.

Beweis. Die Punkte A, C_1, K, $B1$ liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser AK. Daher ist $\angle AB_1C_1 = \angle AKC_1$. Außer diesen Winkeln sind in den Dreiecken AB_1P und AKC_1 die Winkel KAC_1 und PAB_1 einander gleich, weil die Mediane AD mit der Seite b und die Symmediane mit der Seite c gleiche Winkel bilden. Folglich ist $\triangle PAB_1 \sim \triangle KAC_1$ und daher $\angle APB_1 = \angle AC_1K = 90°$.

Beweis des Satzes.
AD wird über D hinaus um sich selbst verlängert bis zum Punkt A'. Dann ist $AB \parallel CA'$ und $AB = CA'$. Es ist $\triangle ACA' \sim \triangle B_1KC_1$, weil beide Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen. Die Winkel sind gleich, weil ihre Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $KB_1 : KC_1 = AC : AB$. (Damit ist auf einem zweiten Wege der Lehrsatz bewiesen, nach dem die Abstände des Punktes K von den Dreiecksseiten den zugehörigen Seiten proportional sind.) In beiden ähnlichen Dreiecken stehen entsprechende Seiten senkrecht aufeinander.

Auch entsprechende Strecken in den Dreiecken befinden sich in der gleichen Lage zueinander. So steht auf der Seitenhalbierenden CD des Dreiecks ACA' die Strecke A_1A_2 senkrecht. Daher muss KA_2 Seitenhalbierende im Dreieck B_1KC_1 und A_1KA_2 eine solche im Dreieck $A_1B_1C_1$ sein. Die beiden anderen Seitenhalbierenden im Dreieck $A_1B_1C_1$ sind B_1K und C_1K und daher ist K der Schwerpunkt des Fußpunktsdreiecks des Punktes K.

5.5 Der Nagelsche Punkt

Zeichnet man im Dreieck ABC die Ecktransversalen nach den Punkten, in denen die drei Ankreise die Dreiecksseiten berühren, so schneiden sie einander in einem Punkt, der Nagelscher Punkt genannt wird.

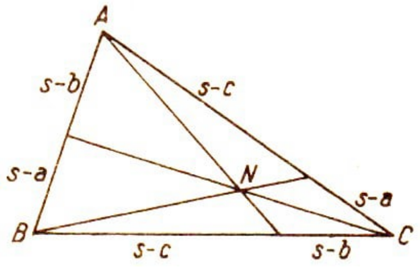


Abb. 44

Der Beweis wurde als Aufgabe gestellt (Aufgabe 9b).
Die von A, B, C einander folgenden, durch die Berührungspunkte der Ankreise erzeugten Seitenabschnitte sind: $s-b$, $s-a$, $s-c$ $s-b$, $s-a$, $s-c$ (Abb. 44). Der Quotient aus den Produkten der alternierenden Abschnitte ist

$$\frac{(s-b)(s-c)(s-a)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden die drei Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise auf den Gegenseiten im Dreieck einander in einem Punkt.

Der Nagelsche Punkt steht in besonderer Beziehung zum Mittelpunkt O des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises sowie zum Schwerpunkt S des Dreiecks.
Die drei Punkte liegen auf einer Geraden, und die Strecke ON wird durch S im Verhältnis 1 : 2 geteilt (Abb. 45).

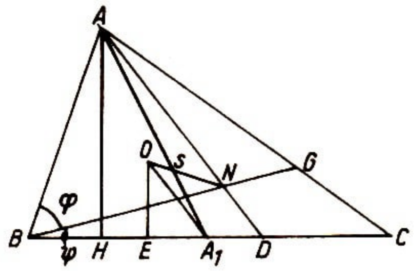


Abb. 45

Um diese Behauptung zu beweisen, zeigt man zunächst, dass $\triangle AHD \sim \triangle OEA_1$ ist.
Der Inhalt des Dreiecks ABC ist

$$F = \rho s = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Wegen $\rho = OE$ und $h_a = AH$ ergibt sich $OE = \frac{F}{s}$ und $AH = \frac{2F}{a}$. Daraus folgt

$$\frac{AH}{OE} = \frac{2s}{a} \tag{1}$$

Wir bilden nun das Verhältnis $\frac{HD}{EA_1}$. Es ist $EA_1 = \frac{a}{2} - (s-b) = \frac{b-c}{2}$, $HD = BD - BH$ und $BD = s-c$. Nach dem allgemeinen Satz des Pythagoras ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$ und damit $BH = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Dann ist

$$HD = s - c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{s(b-c)}{a} \qquad \text{also} \qquad \frac{HD}{EA_1} = \frac{2s}{a} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich $\frac{AH}{OE} = \frac{HD}{EA_1}$, d.h., in den Dreiecken AHD und OEA_1 sind je zwei Seiten proportional: $\angle AHD = \angle OEA_1 = 90°$. Folglich sind beide Dreiecke ähnlich, und es gilt $AD \parallel OA_1$.

Es soll nun gezeigt werden, dass $\frac{AN}{AD} = \frac{a}{s}$ ist (Abb. 45). Im Beweis wird $BD = s - c$, $AG = s-c$ und $CG = s-a$ gesetzt und berücksichtigt, dass $\sin\angle ANB = \sin\angle DNB$ sowie $\sin\angle AGB = \sin\angle CGB$ ist. Im Dreieck ABN ist $AN : c = \sin\varphi : \sin\angle ANB$, und im Dreieck DBN ist $DN : (s-c) = \sin\psi : \sin\angle ANB$.
Daraus folgt

$$\frac{AN\cdot(s-c)}{DN\cdot c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

Im Dreieck ABG ist $(s-c) : c = \sin\varphi : \sin\angle AGB$, und im Dreieck CBG ist $(s-a) : a = \sin\psi : \sin\angle AGB$. Daraus folgt

$$\frac{(s-c)\cdot a}{(s-a)\cdot c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

Somit erhält man $\frac{AN}{DN} = \frac{a}{s-a}$ und weiter $\frac{AN}{AN+DN} = \frac{a}{s}$ oder $\frac{AN}{AD} = \frac{a}{s}$. Aus den Beziehungen $AD : OA_1 = 2s : a$ und $AN : AD = a : s$ ergibt sich $AN : OA_1 = 2 : 1$.
Verbindet man O mit N und zeichnet die Seitenhalbierende AA_1, so ist der Schnittpunkt S beider Geraden Scheitel eines Strahlenbüschels, in dem die Parallelenabschnitte der Schneidenden des Büschels sich wie 2: 1 verhalten. Daher ist auch $AS : SA_1 = 2 : 1$. Also ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, er liegt ebenfalls auf der Geraden ON und teilt diese Strecke im Verhältnis 1 : 2.

Verbindet man die Mitten A_1, B_1, C_1 der Seiten des Dreiecks ABC, so erhält man das Dreieck $A_1B_1C_1$, das dem Dreieck ABC ähnlich ist. Beide Dreiecke befinden sich in Ähnlichkeitslage mit S als Ähnlichkeitspunkt.
Entsprechende Ecken und andere Punkte, die für beide Dreiecke die gleiche Bedeutung haben, liegen auf Ähnlichkeitsstrahlen. Das Ähnlichkeitsverhältnis ist 2 : 1.
Nun liegen N, S und O auf einer Geraden, und es ist $NS : SO = 2 : 1$. Ist N der Nagelscher Punkt im Dreieck ABC, so ist O Nagelscher Punkt im Dreieck $A_1B_1C_1$.
Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises ist zugleich der Nagelsche Punkt in dem Dreieck, dessen Ecken in den Mitten der Seiten des Dreiecks ABC liegen.

Halbiert man die Abschnitte der Ecktransversalen von den Ecken des Dreiecks ABC bis zum Nagelschen Punkt und verbindet die Mittelpunkte, so erhält man das Dreieck $A_2B_2C_2$ das dem Dreieck $A_1B_1C_1$ kongruent ist. Beide Dreiecke sind dem Dreieck ABC ähnlich. Je zwei von den drei Dreiecken befinden sich in Ähnlichkeitslage (Abb. 46).

Aufgabe 35. Man bestimme Ähnlichkeitspunkt und Verhältnis entsprechender Strecken: a) der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, b) der Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$, c) der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$.

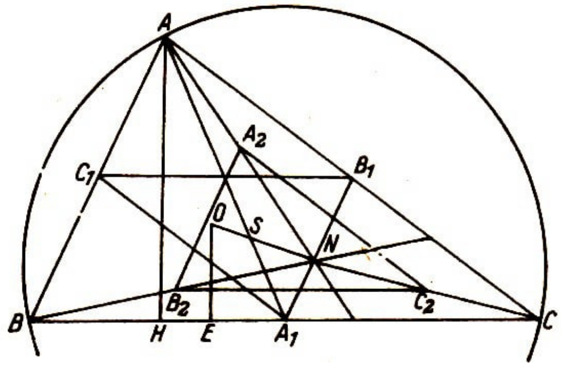


Abb. 46

5.6 Der Spiekersche Kreis

Wir betrachten die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ (Abb. 47).
Beide Dreiecke sind kongruent (SSS) und somit auch ähnlich mit dem Ähnlichkeitsverhältnis 1 : 1. Da die entsprechenden Seiten parallel sind, befinden sich beide Dreiecke in Ähnlichkeitslage.

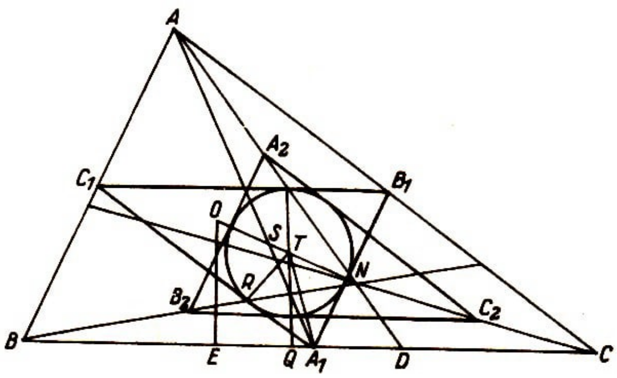


Abb. 47

Die Verbindungsstrecken entsprechender Ecken A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 schneiden einander im Ähnlichkeitspunkt, den wir mit T bezeichnen wollen. Er halbiert die genannten Strecken. Da auch die Verbindungsstrecke der Nagelschen Punkte O und N beider Dreiecke durch T halbiert wird und S diese Strecke im Verhältnis 1 : 2 teilt, erhält man die Proportionen (Abb. 48) $OS : SN = 1 : 2$, $OT : TN = 1 : 1$, $OS : ST = 2 : 1$ und $NT : NO = 1 : 2$.

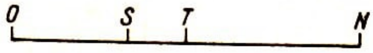


Abb. 48

Ist S Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ und gilt $OS : ST = 2 : 1$, so hat T für das Dreieck $A_1B_1C_1$ die gleiche Bedeutung wie O für das Dreieck ABC. Also ist T Mittelpunkt des dem Dreieck $A_1B_1C_1$ eingeschriebenen Kreises.

Betrachtet man N als Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ und die Proportion $NO : NT = 2 : 1$, so folgt, dass T auch Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $A_2B_2C_2$ ist.

Da in den kongruenten Dreiecken die Inkreisradien als entsprechende Strecken gleich sind, haben beide Dreiecke einen gemeinsamen eingeschriebenen Kreis. Je zwei Berührungspunkte des Kreises auf den entsprechenden Seiten liegen auf einem Ähnlichkeitsstrahl, der durch T halbiert wird. Dieser gemeinsame Inkreis wird Spiekerscher Kreis genannt.

Aufgabe 36. Man zeige, dass man T auch finden kann, wenn man durch A_1 die Parallele zu AO zeichnet. Man benutze hierzu den Zweistrahl durch S, der durch die Parallelen geschnitten wird, und beweise in diesem Zusammenhang, dass A_1T die Halbierende des Winkels $B_1A_1C_1$ ist.

Aufgabe 37. Man beweise, dass die Strecken NE, B_2C_2 und OA_1 einander in einem Punkt schneiden.

Anleitung. Man betrachte NE als Ähnlichkeitsstrahl durch zwei entsprechende Berührungspunkte der Inkreise und beachte, dass der Zweistrahl EN und ED durch die Parallelen OA_1 und AD geschnitten wird, wobei $EA_1 = A_1D$ ist.

5.7 Der Brocardsche Punkt

Ein Brocardscher Punkt wird wie folgt konstruiert:

Gegeben sei das Dreieck ABC. Durch die Punkte A und B wird der Kreis k_1 gezeichnet, der AC als Tangente hat, durch B und C der Kreis k_2 mit BA als Tangente und durch C und A der Kreis k_3 mit OB als Tangente. Die drei Kreise haben einen gemeinsamen Schnittpunkt, den Brocardschen Punkt (Abb. 49).

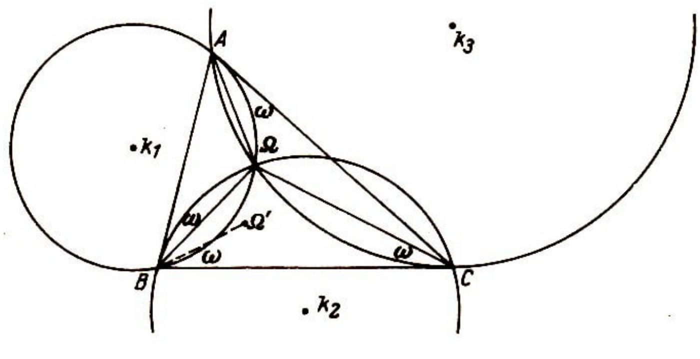


Abb. 49

Im Dreieck ABC gibt es noch einen weiteren Brocardschen Punkt. Man erhält ihn, wenn BC Tangente an k_1, CA Tangente an k_2 und AB Tangente an k_3 ist.
Zu beweisen ist, dass die drei Kreise einander in einem Punkt schneiden.

Die Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten Ω und B. Der Sehnentangentenwinkel $CA\Omega$ ist gleich dem Peripheriewinkel $AB\Omega$. Dieser ist im Kreis k_2 Sehnentangentenwinkel und gleich dem Peripheriewinkel $BC\Omega$. Daraus folgt $\angle CA\Omega = \angle BC\Omega$. Der Kreis, der durch C und Ω so gezeichnet wird, dass BC Tangente wird, hat $\angle BC\Omega$ als Sehnentangentenwinkel und muss wegen der Gleichheit der Winkel $BC\Omega$ und $CA\Omega$ durch den Punkt A gehen und daher mit dem Kreis k_3 identisch sein.
Damit ist bewiesen, dass sich die drei Brocardscher Kreise in einem Punkt schneiden.

Die drei gleichen Winkel heißen Brocardsche Winkel und werden mit ω bezeichnet.

Ein zweiter Beweis des soeben formulierten Problems stützt sich auf den Miquelschen Satz (Abb. 37). Darin wird ausgesagt, dass die Kreise durch A_1, B_1, C_1, durch B, C_1, A_1 und durch C, A_1, B_1 einander in einem Punkt schneiden.
Denkt man sich die Punkte A_1, B_1 und C_1 auf den Seiten des Dreiecks so verschoben, dass A_1 mit C, B_1 mit A und C_1 mit B zusammenfallen, so muss der Kreis durch A, B_1, C_1 die Seite AC, der Kreis durch B, C_1, A_1 die Seite BA und der Kreis durch C, A_1, B_1 die Seite CB zur Tangente haben. Für die Miquelschen Kreise ist bewiesen, dass sie einander in einem Punkt schneiden.
Da sie in diesem Fall zugleich Brocardsche Kreise darstellen, gilt diese Aussage auch für Sie.

Aufgabe 38. Man konstruiere in einem gegebenen Dreieck ABC den Brocardschen Punkt. (Die Lösung der Aufgabe ergibt sich aus der Definition des Brocardschen Punktes.)

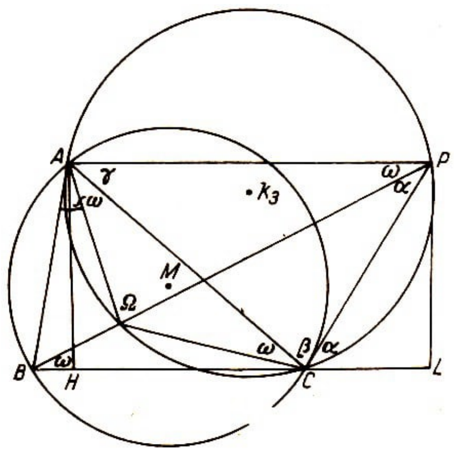


Abb. 50

Zu einer zweiten Konstruktion des Brocardschen Punktes führt folgende Überlegung (Abb. 50).
Gegeben seien das Dreieck ABC und der Brocardsche Punkt Ω; weiter sei $\angle\Omega BC = \omega$. Durch A ist die Parallele zu BC gezeichnet und $B\Omega$ über Ω hinaus bis zum Schnitt mit der Parallelen verlängert. Der Schnittpunkt P ist mit C verbunden, und durch A, Ω, C ist der Brocardsche Kreis k_3 gezeichnet.

Es ist $\angle APB = \omega$ (Beweis!) und $\angle AC\Omega = \omega$. Also gilt $\angle AP\Omega = \angle AC\Omega$, und P muss auf dem Brocardschen Kreis k_3 liegen (Satz von den Peripheriewinkeln). Da ferner AB Tangente an den Brocardschen Kreis k_3 ist, ist $\angle APC = \alpha$ (Sehnentangentenwinkelsatz). Weiter ist $\angle CAP = \gamma$. Dann muss $\angle ACP = \beta$ sein.
Aus der Lagebeziehung dieses Winkels zu dem Peripheriewinkel β im Umkreis des Dreiecks ABC folgt, dass CP Tangente an diesen Kreis im Punkt C ist. Somit kann P auch durch diese Tangente und die Parallele durch A zu BC gefunden werden, und Ω lässt sich dann leicht ermitteln.

Aufgabe 39. Man konstruiere in Anlehnung an die obigen Ausführungen den Brocardschen Punkt im Dreieck ABC.

5.8 Der Brocardsche Winkel

Der Brocardsche Winkel ist in jedem Dreieck eindeutig bestimmt; denn er lässt sich als Funktion der Winkel oder der Seiten des gegebenen Dreiecks darstellen. Aus Abb. 50 folgt

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$$

Im Dreieck BLP ist $\cot\omega = \frac{BL}{PL}$. Und wegen $BL = BH + HC + CL$ und $AH = PL$ ist

$$\cot\omega = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} + \frac{CL}{PL} = \cos\beta + \cot\gamma + \cot\alpha$$

(Man beweise, dass $\angle PCL = \alpha$ ist.)
$\cot\omega$ lässt sich auch durch die Seiten und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ausdrücken.
Der Kosinussatz liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2bc\cdot\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ 2ca\cdot\cos\beta &= c^2 + a^2 - b^2 \\ 2ab\cdot\cos\gamma &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen addiert, die Summanden auf der linken Seite der Gleichung der Reihe nach mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$ bzw. $\sin\gamma$ erweitert und der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit Δ bezeichnet, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{2bc\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{2ca\cdot\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{2ab\cdot\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma} \\ &\qquad = 4\Delta\cdot\cot\alpha + 4\Delta\cdot\cot\beta + 4\Delta\cdot\cot\gamma = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Also ist

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

und damit

$$\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

5.9 Zwei Dreiecke zum Brocardschen Punkt

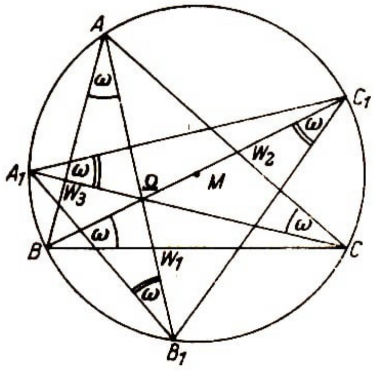


Abb. 51

Verlängert man die Brocardschen Strecken $A\Omega$, $B\Omega$ und $C\Omega$ über Ω hinaus bis zum Schnitt mit dem Umkreis des Dreiecks ABC, so ist das durch $A_1B_1C_1$ bestimmte Dreieck dem gegebenen Dreieck kongruent, und der Brocardsche Punkt im Dreieck ABC entspricht dem Punkt Ω' im Dreieck $A_1B_1C_1$ (Abb. 51).

Aufgabe 40. Man beweise die Kongruenz der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$.

Anleitung. Die Bogen $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, $\overset{\frown}{CC_1}$ sind einander gleich. Dann ist $\overset{\frown}{AA_1}\overset{\frown}{A_1A_B} = \overset{\frown}{BB_1} + \overset{\frown}{A_1B}$ und daher $AB = A_1B_1$ usw.

Aufgabe 41. Man beweise die folgenden Relationen

a) $\angle A\Omega A_1 = \alpha$, $\angle A_1\Omega B = \gamma$, $\angle B\Omega B_1 = \beta$

b) $B\Omega = \frac{AB}{\sin\beta}\sin\omega$,

c) $\frac{B\Omega}{C\Omega} = \frac{c^2}{ab} = \frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\omega}$

d) $\frac{W_3A}{W_3B} = \frac{b\sin\omega}{a\sin(\gamma-\omega)} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$

5.10 Die Brocardschen Fußpunktsdreiecke

Fällt man vom Brocardschen Punkt Ω Lote auf die Seiten des Dreiecks, so sind die Fußpunkte der Lote Ecken einem Brocardschen Fußpunktsdreiecks. Es gibt zwei solcher Fußpunktsdreiecke, nämlich das zum Punkt Ω und das zum Punkt Ω' gehörige.
Das Brocardsche Fußpunktsdreieck $Q_1Q_2Q_3$ ist dem gegebenen Dreieck ABC ähnlich (Abb. 52).

1. Beweis. Aus der Ähnlichkeit gleichliegender Teildreiecke folgt die Ähnlichkeit der ganzen Dreiecke. Zum Beweis werden die drei Sehnenvierecke $AQ_1\Omega Q_3$, $BQ_2\Omega Q_1$ und $CQ_3\Omega Q_2$ benutzt.
Wegen $\angle Q_1Q_3\Omega = \angle Q_1A\Omega$ und $\angle AC\Omega = \omega$ muss auch $\angle Q_1Q_3\Omega = \angle AC\Omega$ sein. Ferner ist $\angle Q_3Q_1\Omega = \angle Q_3A\Omega$. Also ist $\triangle Q_1Q_3\Omega \sim \triangle AC\Omega$ (WW).

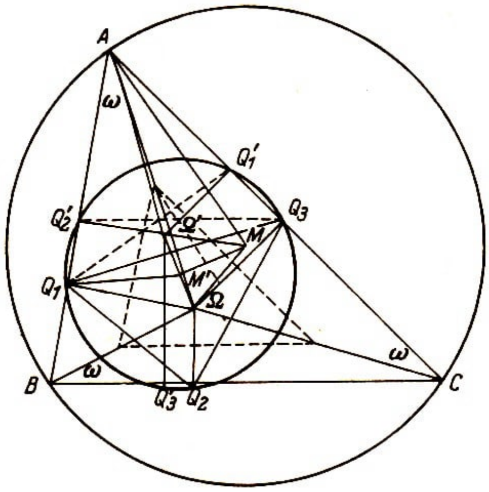


Abb. 52

Entsprechend beweist man, dass $\triangle Q_2Q_1\Omega \sim \triangle BA\Omega$ und $\triangle Q_3Q_2\Omega \sim \triangle CB\Omega$ ist.

Daraus folgt $\triangle Q_1Q_2Q_3 \sim \triangle ABC$.

2. Beweis. Es ist $\angle Q_3Q_1\Omega = \angle Q_3A\Omega = \alpha - \omega$ und $\angle Q_2Q_1\Omega = \angle Q_2B\Omega = \omega$; die Addition ergibt $\angle Q_3Q_1Q_2 = \alpha$.

Ebenso beweist man die Relationen $\angle Q_1Q_2Q_3 = \beta$ und $\angle Q_2Q_3Q_1 = \gamma$, woraus die Ähnlichkeit der Dreiecke $Q_1Q_2Q_3$ und ABC folgt (WW). Das Ähnlichkeitsverhältnis ist $\sin\omega : 1$. Im rechtwinkligen Dreieck $AQ_1\Omega$ ist $Q_1\Omega : A\Omega = \sin\omega$. Dreht man Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ um Ω im Uhrzeigersinn, bis Q_1 auf $A\Omega$ fällt, so liegen Q_2 auf ΩB und Q_3 auf ΩC; denn jeder Strahl ΩQ_i $(i = 1, 2, 3)$ hat sich um den Winkel $90° - \omega$ gedreht. Beide Dreiecke befinden sich nun in Ähnlichkeitslage mit Ω als Ähnlichkeitspunkt, und es gilt $\Omega Q_1 : \Omega A = Q_1Q_2 : AB = \sin\omega : 1$.

Aus der Ähnlichkeitslage beider Dreiecke folgt weiter, dass $\angle Q_1Q_3\Omega = \angle Q_2Q_1\Omega = \angle Q_3Q_2\Omega = \omega$ ist. Die Dreiecke ABC und $Q_1Q_2Q_3$ haben demnach den Brocardschen Punkt Ω gemeinsam.

Sämtliche zwischen den Dreiecken $Q_1Q_2Q_3$ und ABC bewiesenen Relationen lassen sich auf die Dreiecke $Q'_1Q'_2Q'_3$ und ABC übertragen, deren Ähnlichkeitszentrum Ω ist.

Aus dem gleichen Ähnlichkeitsverhältnis der entsprechenden Dreiecksseiten in beiden Fällen folgt die Kongruenz der Dreiecke $Q_1Q_2Q_3$ und $Q'_1Q'_2Q'_3$. In kongruenten Dreiecken sind als entsprechende Strecken die Radien der Umkreise gleich, und man erhält $r_1 = r_2 = r\sin\omega$, wobei r den Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises bezeichnet.
Bezeichnet man mit M_1 den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ und mit M_2 den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $Q'_1Q'_2Q'_3$, so gilt

$$M_1Q_1 = M_2Q'_2 = M_1Q_2 = M_2Q'_3 = M_1Q_3 = M_2Q'_1$$

Zieht man die Mittelsenkrechten der Strecken $Q_1Q'_2$, $Q_2Q'_3$ und $Q_3Q'_1$, so schneiden diese einander im Mittelpunkt M' der Strecke $\Omega\Omega'$, und man erhält die Relationen

$$M'Q_1 = M'Q'_2, \quad M'Q_2 = M'Q'_3, \quad M'Q_3 = M'Q'_1$$

Daraus und aus den vorher ermittelten Gleichungen folgt, dass die Punkte M_1, M_2 und M' identisch sind.
M' ist also Mittelpunkt des Kreises, der beiden Dreiecken $Q_1Q_2Q_3$ und $Q'_1Q'_2Q'_3$ zugleich umgeschrieben ist. Dann ist Dreieck $M\Omega\Omega'$ gleichschenklig mit dem Winkel 2ω an der Spitze und den Basiswinkeln $90° - \omega$.

Verbindet man Q_3 mit Q'_2, so läuft diese Strecke der Seite BC parallel, denn $\angle AQ'_2Q_3$ ist gleich dem Winkel ABC. Im Sehnenviereck $Q_3Q'_2Q_1Q_2$ ist nämlich $\angle Q_3Q'_2Q_1 = 180° - \beta$ und daher $\angle AQ'_2Q_3 = \beta$. Die Ecktransversale von A durch den Mittelpunkt von $Q_3Q'_2$ ist eine Mediane des Dreiecks ABC.

Verbindet man jedoch Q_1 mit Q'_1, so ist diese Strecke antiparallel zu BC; denn $\angle AQ'_1Q_1 = \beta$ und $\angle AQ_1Q'_1 = \gamma$. Im Sehnenviereck $Q_1Q'_1Q_3Q_2$ ist $\angle Q_1Q'_1Q_3 = 180° - \beta$, also $\angle AQ'_1Q_1 = \beta$.

Die Ecktransversale von A durch den Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_1' ist eine Symmediane und geht durch den Lemoine-Grebeschen Punkt des Dreiecks ABC.

5.11 Die Lémoineschen Kreise

Der Lémoinesche Punkt ist der Schnittpunkt der von den Ecken des Dreiecks ABC gezogenen Symmedianen. Sie halbieren alle zu den Gegenseiten gezogenen Antiparallelen.
Zeichnet man nun durch den Lémoineschen Punkt K die Antiparallelen zu den Dreiecksseiten, so bestimmen ihre Schnittpunkte mit den Seiten des Dreiecks einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Lémoinesche Punkt K ist (Abb. 53).

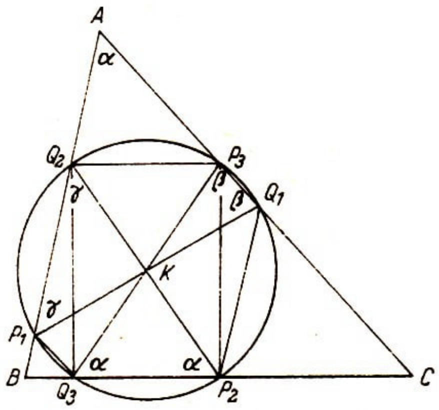


Abb. 53

P_iQ_i $(i = 1, 2, 3)$ sind die drei Antiparallelen durch den Punkt K, der jede von ihnen halbiert. Auf Grund der Definition der Antiparallelen ist $\angle KP_2Q_3 = \alpha$ und $\angle KQ_3P_2 = \alpha$, also Dreieck KP_2Q_3 gleichschenklig und dem Dreieck KQ_2P_3 kongruent (SWS). Das Viereck $Q_2P_3P_2Q_3$ ist wegen der Gleichheit der einander halbierenden Diagonalen P_2Q_2 und P_3Q_3 ein Rechteck. Seine Eckpunkte liegen auf dem Kreis, dessen Mittelpunkt K ist.

Aufgabe 42. Man beweise, dass auch P_1 und Q_1 auf demselben Kreis liegen.

Aufgabe 43. Man beweise, dass P_3P_2 und Q_2Q_3 senkrecht auf BC, P_1P_3 und Q_3Q_1 senkrecht auf CA und P_2P_1 und Q_1Q_2 senkrecht auf AB stehen.

Im Dreieck $P_3Q_3P_2$ ist $P_2Q_3 = P_3Q_3 \cos\alpha = d\cos\alpha$; dabei bezeichnet d den Durchmesser des Lémoineschen Kreises. Ebenso findet man $P_3Q_1 = d\cos\beta$ und $P_1Q_2 = d\cos\gamma$. Aus diesen Gleichungen folgt

$$P_2Q_3 : P_3Q_1 : P_1Q_2 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

Die vom Lémoineschen Kreis aus den Seiten des Dreiecks ABC herausgeschnittenen Sehnen sind den Kosinusfunktionen der gegenüberliegenden Dreieckswinkel proportional. Daher wird dieser Lémoinesche Kreis auch "Kosinuskreis" genannt.

Verbindet man alle P_i, ebenso alle Q_i $(i = 1, 2, 3)$, so entstehen zwei Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $Q_1Q_2Q_3$ (Abb. 54), die beide dem Dreieck ABC ähnlich sind (WW); denn die Schenkel jedes ihrer Winkel stehen auf zwei Seiten des Dreiecks ABC senkrecht.

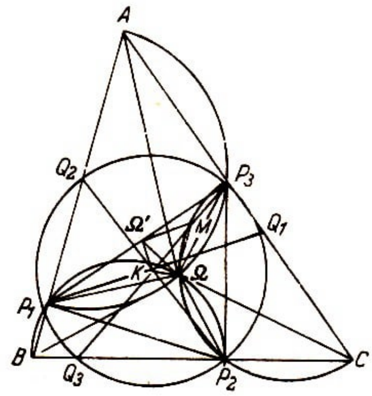


Abb. 54

Also ist $\angle P_3P_1P_2 = \alpha$, $\angle P_1P_2P_3 = \beta$ und $\angle P_2P_3P_1 = \gamma$ sowie $\angle Q_3Q_1Q_2 = \alpha$, $\angle Q_1Q_2Q_3 = \beta$ und $\angle Q_2Q_3Q_1 = \gamma$ (Beweis!).
Ähnlichkeitszentrum der Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $Q_1Q_2Q_3$ ist K. Wählt man K als Drehzentrum und dreht eines der beiden Dreiecke um $180°$, so werden beide zur Deckung gebracht (Beweis!), sind also kongruent.

Eine merkwürdige Eigenschaft besitzt sowohl Dreieck $P_1P_2P_3$ als auch Dreieck $Q_1Q_2Q_3$. Der Miquelsche Punkt des Dreiecks ABC, der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 bestimmt wird, ist sowohl Brocardscher Punkt für das Dreieck $P_1P_2P_3$ als auch für das Dreieck ABC.

Beweis. Die Miquelschen Kreise haben AP_1, BP_2 bzw. CP_3 als Durchmesser (Thales-Kreise), und jede Seite des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist Tangente an einen der drei Miquelschen Kreise.
Daher schneiden die Kreise einander im Brocardschen Punkt Ω des Dreiecks $P_1P_2P_3$. $\angle P_2P_1\Omega$, $\angle P_3P_2\Omega$ und $\angle P_1P_3\Omega$ sind die Brocardschen Winkel ω.
Verbindet man Ω mit A, so ist $\angle P_1\Omega A = 90°$ (Thales-Satz) und $\angle P_2P_1\Omega = \angle P_1A\Omega$, weil beide den $\angle AP_1\Omega$ zu $90°$ ergänzen. Also ist $\angle P_1A\Omega = \omega$.
Entsprechend findet man leicht, dass $\angle P2B\Omega = \omega$ und $\angle P_3C\Omega = \omega$ und daher Ω auch Brocardscher Punkt des Dreiecks ABC ist.

Der Punkt Ω ist Ähnlichkeitszentrum der Dreiecke ABC und $P_1P_2P_3$. Wählt man Ω als Drehzentrum und dreht Dreieck $P_1P_2P_3$ im Sinne des Uhrzeigers um den Winkel von $90\circ$, so bringt man beide Dreiecke in Ähnlichkeitslage. Entsprechende Punkte liegen auf demselben Ähnlichkeitsstrahl, also die Ecken A und P_1, B und P_2 und C und P_3, ferner die Mittel punkte der Umkreise beider Dreiecke M und K.

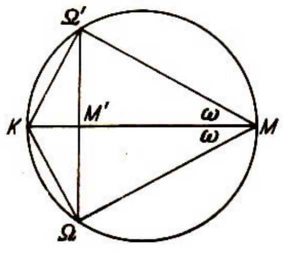


Abb. 55

Das Ähnlichkeitsverhältnis kann mit Hilfe des bei Ω rechtwinkligen Dreiecks ΩP_1A mit $\angle P_1A\Omega = \omega$ bestimmt werden, in dem die beiden Strecken ΩA und ΩP_1 Katheten sind.

Es besteht die Beziehung $P_1\Omega : A\Omega = \tan\omega : 1$ oder $P_1\Omega = A\Omega \cdot \tan\omega$, ebenso gilt $K\Omega = M\Omega \cdot \tan\omega$ (Abb. 55).
Aus dieser letzten Gleichung folgt, da $\angle K\Omega M = 90°$ ist, $\angle KM\Omega = \omega$.

Werden diese Ausführungen auf die Dreiecke ABC und $Q_1Q_2Q_3$ übertragen, so erhält man entsprechende Relationen und den zweiten Brocardschen Punkt Ω'. Es ist $\angle K\Omega' M = 90°$, $K\Omega' = M\Omega' \cdot \tan\omega$, $\angle KM\Omega' = \omega$, also $\angle \Omega M \Omega' = 2\omega$.
Ist r Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, so ist $r \cdot \tan\omega$ Radius des Lémoineschen Kreises.

Aus Abb. 55 folgt, dass die Brocardschen Punkte eines Dreiecks auf der Peripherie des Kreises liegen, der die Strecke KM als Durchmesser hat. Er wird Brocardscher Kreis genannt. Die Punkte Ω und Ω' liegen symmetrisch zum Durchmesser KM, der die Verbindungsstrecke $\Omega\Omega'$ in M' halbiert und senkrecht auf ihr steht.
Es ist also $\Omega M' = \Omega M \cdot \sin\omega$ und $\Omega' M' = \Omega' M \cdot \sin\omega$. Somit sind M' und M homologe Punkte in den Brocardschen Fußpunktsdreiecken $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1'Q_2'Q_3'$ und dem diesen ähnlichen Dreieck ABC. Da M der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises ist, haben die beiden kongruenten Fußpunktsdreiecke bezüglich der Brocardschen Punkte einen gemeinsamen Umkreis mit dem Mittelpunkt M'. Damit ist der noch ausstehende Beweis erbracht.

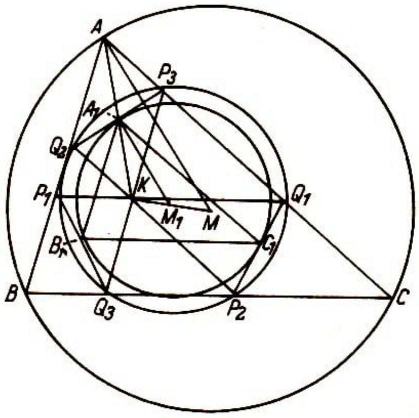


Abb. 56

Ein anderer Lémoinescher Kreis wird nach folgender Vorschrift konstruiert (Abb. 56):
Durch den Lémoineschen Punkt K des Dreiecks ABC werden Parallele zu den Seiten gezeichnet. Ihre Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten werden mit P_iQ_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet.
Sie liegen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M_1 die Strecke halbiert, die den Punkt K mit dem Mittelpunkt M des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises verbindet.

Zunächst wird bewiesen, dass P_3Q_2 und BC, P_1Q_3 und AC, P_2Q_1 und AB antiparallel sind. Die Ecktransversalen des Dreiecks ABC, die einander in dem . Lémoineschen Punkt K schneiden, halbieren alle Antiparallelen zu den Dreiecksseiten, die den Ecken gegenüberliegen, von denen die Transversalen ausgehen.
Daher muss z.B. die Strecke P_3Q_2, die als Diagonale im Parallelogramm AP_3KQ_2 durch die Diagonale AK halbiert wird, zur Seite BC antiparallel sein. Das gleiche folgt leicht für P_1Q_3 und CA sowie für P_2Q_1 und AB.

Die antiparallelen Strecken P_3Q_2, P_1Q_3 und P_2Q_1 sind dem Radius des im letzten Abschnitt behandelten Lémoineschen Kreises gleich, dessen Mittelpunkt der Punkt K ist. Die Antiparallelen durch K sind Durchmesser dieses Kreises.
Nach dem Strahlensatz verhält sich z.B. die Strecke P_3Q_2 zu dem ihr parallelen Durchmesser wie 1:2. Entsprechendes gilt auch für P_1Q_3 und P_2Q_1. Also ist jede dieser Antiparallelen gleich dem Radius des Lémoineschen Kreises mit K als Mittelpunkt, d. h.

$$P_3Q_2 = P_1Q_3 = P_2Q_1 = r_1$$

Nun soll bewiesen werden, dass die Punkte P_iQ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf einem Kreis liegen. Da P_3Q_2 antiparallel zu BC verläuft, ist $\angle AQ_2P_3 = \gamma$, dann ist $\angle Q_2P_3K = \gamma$; (Winkel an Parallelen) und $\angle P_1Q_2P_3 = \alpha + \beta$ (Nebenwinkelsatz).
Ebenso lässt sich mit Hilfe von P_1Q_3, antiparallel zu CA, zeigen, dass $\angle P_1Q_3K = \gamma$ und $\angle Q_3P_1Q_2 = \alpha + \beta$ ist.
Da die Summen der gegenüberliegenden Winkel im Viereck $P_3Q_2P_1Q_3$ $180°$ betragen, ist das betrachtete Viereck ein Sehnenviereck, und seine Eckpunkte liegen auf einem Kreis. Nun lässt sich leicht beweisen, dass auch $Q_2P_1Q_3P_2$ sowie $P_1Q_2P_3Q_1$ auf dem gleichen Kreis liegen.

Aufgabe 44. Man beweise, dass die gegenüberliegenden Winkel in beiden Vierecken $180°$ betragen.

Liegen die Punkte P_iQ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf einem Kreis, so haben die Mitten der gleichen Sehnen P_3Q_2, P_1Q_3 und P_2Q_1 gleiche Abstände vom Mittelpunkt dieses Kreises. Die Mittelpunkte der drei Sehnen liegen somit auf einem Kreis, der zum ersten Kreis konzentrisch ist.
Den Mittelpunkt der beiden Kreise findet man durch Zeichnen der Mittelsenkrechten zu den genannten Sehnen, die einander in einem Punkt M_1 schneiden müssen. Der Radius dieses zweiten Kreises ist gleich dem halben Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises.

Um dies zu beweisen, verbindet man die Mitten der drei Sehnen A_1, B_1, C_1 miteinander und erhält ein Dreieck, das dem Dreieck ABC ähnlich liegt. Der Ähnlichkeitspunkt ist K, und das Ähnlichkeitsverhältnis ist $KA_1 : KA = 1 : 2$.
Dann liegen auch die Mittelpunkte der Umkreise beider Dreiecke auf einem Ähnlichkeitsstrahl; und da $KM_1 : KM = 1 : 2$ sein muss, wird KM durch M_1 halbiert.

Die Radien der Kreise, die als homologe Strecken parallel laufen, verhalten sich ebenfalls wie 1 : 2. Also ist $M_1A_1 = \frac{r}{2}$, wobei r den Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises bezeichnet. In dem rechtwinkligen Dreieck $A_1M_1P_3$ ist $A_1M_1 = \frac{r}{2}$, $A_1P_3 = \frac{r_1}{2}$ und $P_3M_1 = r_2$ (dabei ist r_2 der Radius des Kreises durch die Punkte P_iQ_i und r_1 der Radius des zuvor behandelten Lémoineschen Kreises). Folglich ist

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_1^2}$$

Der durch den Mittelpunkt M_1 und den Radius r_2 bestimmte Lémoinesche Kreis teilt jede Seite des Dreiecks ABC in drei Abschnitte, die sich wie die Quadrate der Dreiecksseiten in ganz bestimmter Folge verhalten, z.B.

$$BQ_3 : Q_3P_2 : P_2C = c^2 : a^2 : b^2$$

Beweis. Multipliziert man die Beziehungen

$$BQ_3 : BP_1 = c : a \qquad , \qquad KQ_3 : Q_3P_3 = c : a$$

und beachtet, dass $KQ_3 = BP_1$ ist, so ergibt sich

$$BQ_3 : Q_3P_2 = c^2 : a^2 \tag{1}$$

Aus

$$KP_2 : Q_3P_2 = b : a \qquad , \qquad CP_2 : CQ_1 = b : a$$

folgt in gleicher Weise

$$CP_2 : CQ_1 = b^2 : a^2 \tag{2}$$

(1) und (2) zusammen liefern die Behauptung.

Die durch den Lémoineschen Kreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_2 aus den Dreiecksseiten herausgeschnittenen Sehnen verhalten sich wie die Kuben der zugehörigen Dreiecksseiten:

$$P_2Q_3 : P_3Q_1 : P_1Q_2 = a^3 : b^3 : c^3$$

Beweis. Aus den Proportionen

$$Q_3P_2 : KP_2 = a : b, \qquad KP_2 : KQ_1 = a : b, \qquad KQ_1 : P_3Q_1 = a : b$$

folgt durch Multiplikation

$$Q_3P_2 : P_3Q_1 = a^3 : b^3$$

Ähnlich erhält man $P_3Q_1 : P_1Q_2 = b^3 : c^3$ und damit die Behauptung.

Verbindet man die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$ miteinander und ebenso die Punkte Q_i so entstehen zwei Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $Q_1Q_2Q_3$.

Aufgabe 45. Man beweise die Kongruenz der beiden Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $Q_1Q_2Q_3$ und ihre Ähnlichkeit mit dem Dreieck ABC.

Anleitung. Man beachte, dass entsprechende Winkel in den kongruenten Dreiecken über gleichen Kreisbogen stehen, zu denen auch gleiche Sehnen gehören. $\angle P_1P_3P_2$ und $\angle P_1Q_2P_2 = \alpha$ stehen über demselben Kreisbogen.

Das Ähnlichkeitsverhältnis $1 : 2\cos\omega$ liefert die Relation

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_1^2} \qquad \text{oder} \qquad r_2 = \frac{r}{2}\sqrt{1 + \tan^2\omega} = \frac{r}{2\cos\omega}$$

5.12 Zwei Dreiecke im Brocardschen Kreis

Dem Brocardschen Kreis mit dem Durchmesser KM (Abb. 55) können zwei verschiedene Dreiecke nach bestimmten Vorschriften eingezeichnet werden. Das erste dieser Dreiecke findet man, wenn man an die Seiten des Dreiecks ABC in ihren Endpunkten nach innen die gleichen Winkel von der Größe ω anträgt (ω ist der Brocardsche Winkel für das Dreieck ABC).

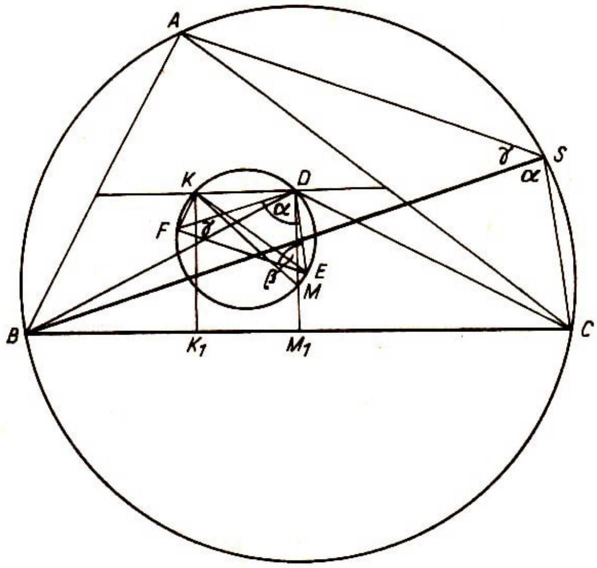


Abb. 57

Die Schnittpunkte der freien Schenkel der an jede Seite angetragenen Winkel sind die Ecken D, E, F des ersten Brocardschen Dreiecks (Abb. 57). Die Dreiecke BCD, ACE und ABF sind gleichschenklig und wegen der gleichen Basiswinkel einander ähnlich. D liegt zugleich mit M, dem Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises, auf der Mittelsenkrechten der Seite BC, deren Mittelpunkt M_1 ist. Die Strecke DM_1 ist gleich $\frac{1}{2}a\tan\omega$.

Das Lot vom Lémoineschen Punkt K auf BC ist gleich $KK_1 = \frac{1}{2}a\frac{4F}{a^2+b^2+c^2}$. Da $\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4F}$ ist, erhält man $KK_1 = \frac{1}{2}a\tan\omega$. Also sind KK_1 und DM_1 gleich und parallel, KDM_1K_1 ist ein Rechteck, die Gerade KD ist der Dreiecksseite BC parallel und $\angle MDK = 90°$.

Nach dem Satz des THALES liegt somit D auf dem Kreis mit KM als Durchmesser. Analog lässt sich beweisen, dass E und F ebenfalls auf diesem Kreis liegen. Es ist der Brocardsche Kreis, auf dem auch die Brocardschen Punkte Ω und Ω' liegen.
Die Dreiecke ABC und DEF sind einander ähnlich.

Wir haben bewiesen, dass $KD \parallel BC$ ist. Ebenso lässt sich zeigen, dass $KE \parallel AC$ und $KF \parallel AB$ ist. Weiter ist $\angle FDE = \angle FKE$ (Peripheriewinkelsatz) und $\angle FKE = \angle BAC$, weil ihre Schenkel paarweise parallel und gleichgerichtet sind.
Dann ist auch $\angle FDE = \angle BAC$. Da $\angle FKD$ und $\angle ABC$ einander zu $180°$ ergänzen und die gleiche Beziehung zwischen $\angle FKD$ und $\angle FEB$ besteht, ist $\angle FED = \angle ABC$. Die Dreiecke ABC und DEF sind also wegen der Gleichheit zweier Winkel ähnlich. Die Ecktransversalen AD, BE und CF schneiden einander in einem Punkt.

Zum Beweis dieses Satzes zeichnet man die Transversalen AK und AD. Beide schneiden BC, und zwar die Transversale durch K in P_1 und die durch D in Q_1. Verlängert man KD beiderseits bis zum Schnitt mit den Dreiecksseiten und ist G der Schnittpunkt auf AB und H der Schnittpunkt auf AC, so liegen G und H auf dem Lémoineschen Kreis, der zum Brocardschen Kreis konzentrisch ist.
Daher ist $KG = DH$. Nach dem Strahlensatz muss dann auch $BP_1 = CQ_1$ sein. Ebenso ergeben sich für die beiden anderen Dreiecksseiten die Gleichungen $CP_2 = AQ_2$ und $AP_3 = BQ_3$. Aus diesen drei Gleichungen findet man nach Abb. 57 die Beziehungen $CP_1 = BQ_1$, $AP_2 = CQ_2$ und $BP_3 = AQ_3$. Für die durch den Lémoineschen Punkt gehenden Transversalen AP_1, BP_2 und CP_3 gilt nach dem Satz von Ceva

$$\frac{AP_3 \cdot BP_1 \cdot CP_2}{BP_3 \cdot CP_1 \cdot AP_2} = 1$$

und unter Benutzung der oben gefundenen Relationen ergibt sich

$$\frac{BQ_3 \cdot CQ_1 \cdot AQ_2}{AQ_3 \cdot BQ_1 \cdot CQ_2} = 1$$

Somit schneiden die Transversalen AQ_1, BQ_2 und CQ_3 einander in einem Punkt.

Die Konstruktion eines zweiten Brocardschen Dreiecks ist aus Abb. 58 ersichtlich. Zeichnet man in einem gegebenen Dreieck ABC durch A und B den Kreis, der die Seite AC in A berührt, und durch A und C den Kreis, der AB in A berührt, so erhält man mit dem Schnittpunkt G der beiden Kreise einen Eckpunkt des zweiten Brocardschen Dreiecks GHI. Die Ecken H und I werden auf entsprechende Weise bestimmt.

Um zu beweisen, dass G auf dem Brocardschen Kreis liegt, ist zu zeigen, dass K auf AG liegt und dass $\angle KGM = 90°$ ist.

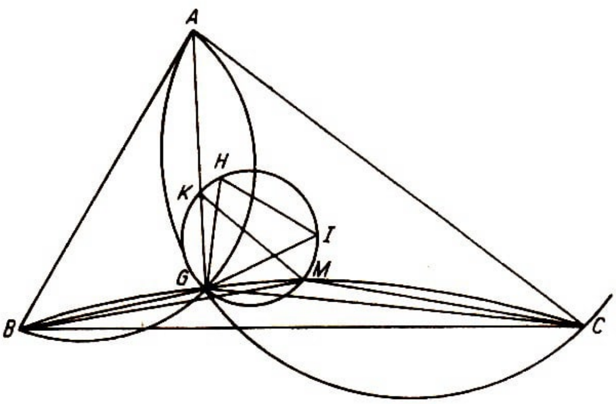


Abb. 58

Hilfssatz. Der Mittelpunkt M des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises liegt auf dem Kreis, der durch die Punkte B, G und C bestimmt ist.

Beweis. $\angle BAG$ ist Sehnentangentenwinkel im Kreis durch A, G und C und daher gleich dem Peripheriewinkel ACG im gleichen Kreis. Die gleiche Beziehung besteht zwischen $\angle CAG$ und $\angle ABG$ im Kreis durch die Punkte A, G und B. Also ist $\triangle AGB \sim \triangle AGC$ (WW) und $\angle ABG + \angle BAG = \angle CAG + \angle BAG = \alpha$ und daher $\angle AGB = 180° - \alpha$.

Ebenso zeigt man, dass $\angle AGC = 180° - \alpha$, also

$$\angle BGC = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \alpha) = 2\alpha$$

ist. Im Umkreis des Dreiecks ABC ist der Zentriwinkel BMC gleich dem doppelten zugehörigen Umfangswinkel BAC, also $\angle BMC = 2\angle BAC$.
Über BC stehen zwei Winkel von gleicher Größe 2α. Somit liegen die Punkte B, G, M und C auf einem Kreis. Da $\triangle BMC$ gleichschenklig ist mit dem Winkel 2α an der Spitze, ist $\angle MCB = 90° - \alpha$.
Im Sehnenviereck $BGMC$ liegt diesem Winkel der Winkel BGM gegenüber; so gilt $\angle BGM = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$. Nun lässt sich $\angle AGM$ berechnen:

$$\angle AGM = 360° - \angle AGB - \angle BGM = 360° - (180° - \alpha) - (90° + \alpha) = 90°$$

Da hiernach MGsenkrecht auf AG steht, ist G der Mittelpunkt der durch A und G gezeichneten Sehne des Umkreises des Dreiecks ABC.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass der Punkt K auf AG liegt. Die Abstände des Punktes G von den Dreiecksseiten b und c, h_b bzw. h_c, sind Höhen in den ähnlichen Dreiecken AGB und CGA.
Die Höhen verhalten sich wie die zugehörigen Dreiecksseiten, d.h. $h_b : h_c = b : c$. Es wurde schon bewiesen, dass sich die Abstände des Lémoineschen Punktes K von den Dreiecksseiten verhalten wie die entsprechenden Seiten, hier also $KB_1 : KC_1 = b : c$ (B_1 und C_1 sind die Fußpunkte der Lote von K auf die Seiten b und c).
Daraus folgt, dass K und G auf demselben Strahl durch den Punkt A liegen müssen. Damit ist bewiesen, dass $\angle KGM = 90°$ ist, dass also der Punkt G auf dem Brocardschen Kreis liegt. Dasselbe lässt sich leicht für die Punkte H und I zeigen.

Aufgabe 46. Wie kann man die Eckpunkte der Brocardschen Dreiecke auf anderen Wegen bestimmen, wenn man zuvor die Punkte K und M ermittelt ?

5.13 Der Steinersche Punkt

In Abb. 57 sind das Dreieck ABC, der Brocardsche Kreis, das erste Brocardsche Dreieck und der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis gezeichnet.

Satz. Zeichnet man durch A die Parallele zu FE, durch B die Parallele zu FD und durch C die Parallele zu ED, so schneiden die drei Parallelen einander im Punkt S, der auf der Peripherie des Umkreises des Dreiecks ABC liegt. Der Punkt S heißt Steinerscher Punkt.

Es ist zu beweisen, dass die genannten Parallelen einander in einem Punkt schneiden und dass der Punkt auf dem Kreis durch A, B und C liegt.

Wir betrachten zunächst die Geraden AS und BS. Sie bilden den Winkel ASB, der gleich dem Winkel DFE ist, weil die Schenkel beider Winkel paarweise parallel und entgegengesetzt gerichtet sind. Da $\angle DFE = \gamma$ ist, ist auch $\angle ASB = \angle ACB$, und beide Winkel stehen über dem Bogen AB des Umkreises des Dreiecks ABC. Daher liegt S auf der Peripherie dieses Kreises.

Nun ist noch zu zeigen, dass die Gerade CS mit der Parallelen zu ED durch den Punkt C identisch ist.
Da der Punkt S auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, ist $\angle BSC = \angle BAC = \alpha$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. $\angle FDE$ ist auch gleich dem Winkel α und daher gleich $\angle BSC$. Bei diesen gleichen Winkeln sind die Schenkel DF und SB nach Konstruktion parallel und gleichgerichtet.
Folglich müssen auch die zweiten Schenkel DE und SC parallel und gleichgerichtet sein. Somit ist der Satz vom Steinerschen Punkt bewiesen.

6 Untersuchung der merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks mit den Methoden der analytischen Geometrie

Voraussetzung für das Verständnis dieses Kapitels ist der in der Erweiterten Oberschule behandelte Stoff der analytischen Geometrie. Leser, die mit dem Stoffgebiet nicht vertraut sind, seien auf die im Anhang angegebene Literatur verwiesen, insbesondere die Werke Nr. [2], [3], [11] und [12].

6.1 Die vier bekannten Punkte des Dreiecks

Zunächst werden die Kriterien für den Fall bestimmt, dass drei durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden einander in einem Punkt schneiden, sowie die Kriterien dafür, dass drei gegebene Punkte auf einer Geraden liegen.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Die Geraden seien gegeben durch ihre allgemeinen Gleichungen

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

a) Zwei Gleichungen werden zu einem Gleichungssystem mit zwei Variablen zusammengefasst. Die Lösung dieses Systems liefert die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden. Erfüllen die gefundenen Koordinaten auch die dritte Gleichung, so schneiden die Geraden einander in einem Punkt.

b) Setzt man also die Werte

$$x_s = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_s = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

in die dritte Gleichung ein, so erhält man

$$-a_3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dieser Ausdruck lässt sich als dreireihige Determinante schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Determinante enthält in jeder Zeile die Koeffizienten einer der drei Gleichungen. Sie verschwindet, wenn die drei Geraden einander in einem Punkt schneiden.

c) Setzt man $a_i x + b_i y + c_i = G_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so werden die drei Geraden durch die Gleichungen $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ und $G_3 = 0$ symbolisiert. Addition der ersten beiden

Gleichungen liefert $G_1 + G_2 = 0$. Diese Gleichung wird nur von den Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden erfüllt, d.h.,

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + c_1 + c_2 = 0$$

ist die Gleichung einer Geraden, die nur den Schnittpunkt S der Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ mit ihnen gemein hat. Multipliziert man G_1 und G_2 mit beliebigen konstanten Zahlen, m und n, so bezeichnen sie dieselben Geraden, und man erhält $mG_1 + nG_2 = 0$ oder $G_1 + \frac{n}{m}G_2 = 0$. Setzt man $\frac{n}{m} = \lambda$, so ergibt sich

$$G_1 + \lambda G_2 = 0 \qquad (m, n, \lambda \text{ heißen Parameter}) \tag{1}$$

Lässt man λ alle Werte des Kontinuums der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man alle Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt S, d.h., (1) ist die Gleichung eines Strahlenbüschels mit dem Träger S.
Betrachtet man $mG_1 + nG_2 = 0$ als eine dritte Gerade, so kann diese die Gleichung $G_3 = 0$ besitzen, die sich von $mG_1 + nG_2 = 0$ nur durch einen konstanten Faktor, den wir mit $-l$ bezeichnen wollen, unterscheidet:

$$mG_1 + nG_2 = -lG_3$$

Daraus folgt

$$mG_1 + nG_2 + lG_3 = 0 \tag{2}$$

Für $m = n = l = 1$ erhalten wir

$$G_1 + G_2 + G_3 = 0 \tag{2a}$$

es darf aber kein Summand gleich Null werden. In beiden Fällen schneiden die drei Geraden $G_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ einander in einem Punkt.
Damit drei Geraden $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ und $G_3 = 0$ einander in einem Punkt schneiden, ist notwendig und hinreichend,

a) dass die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden die Gleichung der dritten Geraden identisch erfüllen oder

b) dass die Determinante aus den Koeffizienten der drei Gleichungen verschwindet oder

c) dass $mG_1 + nG_2 + lG_3$ identisch verschwindet (m, n, l dürfen nicht Null, können jedoch gleich ± 1 sein).

Wir untersuchen nun, wann drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) Durch je zwei Punkte einer Ebene ist eine Gerade bestimmt. Sind die Koordinaten der Punkte gegeben, so lautet die Gleichung der Geraden

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Hat der dritte Punkt die Koordinaten x_3, y_3, so müssen diese, falls der Punkt auf der Geraden liegt, die angegebene Gleichung erfüllen.

b) Liegen drei Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ auf einer Geraden, dann ist der Inhalt des Dreiecks, das durch diese drei Punkte gebildet wird, gleich Null, d.h., das Dreieck ist zu einer Geraden ausgeartet:

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

Aufgabe 47. Man forme die Inhaltsformel des Dreiecks auf die Gleichung
$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$ um.

c) Da man die Inhaltsformel des Dreiecks als dreireihige Determinante schreiben kann, liegen drei Punkte auf einer Geraden, wenn die folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sie enthält in der ersten und zweiten Spalte die Koordinaten der drei Punkte.

Dafür, dass drei Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ einer Ebene in einer Geraden liegen, ist notwendig und hinreichend:

a) dass die Gleichung, die durch die Koordinaten zweier Punkte bestimmt wird, durch die des dritten Punktes identisch erfüllt wird oder

b) dass der Inhalt des Dreiecks, das die drei Punkte als Ecken hat, gleich Null wird:

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

oder
c) dass die aus den Koordinaten der drei Punkte gebildete dreireihige Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Wir wollen nun die Kriterien in einigen Beispielen und Aufgaben anwenden. Zunächst wird gezeigt, dass die drei Höhen des Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.
Zur besseren Veranschaulichung legen wir das Dreieck $P_1P_2P_3$ in den ersten Quadranten des Koordinatensystems (Abb. 59).

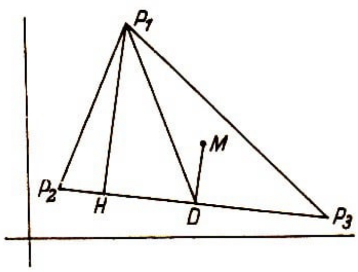


Abb. 59

Die Koordinaten der Punkte P_i werden durch x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet. Das hat den Vorteil, dass in allen vier Fällen nur eine Gleichung der betreffenden Geraden entwickelt zu werden braucht. Durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben sich daraus die Gleichungen der anderen beiden Geraden.

Die Höhe durch den Punkt P_1 steht senkrecht auf der Seite P_2P_3, die die Richtungskonstante $m_1 = \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$ hat. Dann ist die Richtungskonstante der Höhe gleich $m_2 = -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$, d.h. $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Die Gleichung der Höhe lautet also

$$y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$$

oder

$$(x_2 - x_3)(x - x_1) + (y2 - y_3)(y - y_1) = 0$$

Durch zyklische Vertauschung der Indizes erhält man auch die Höhen von den Ecken P_2 und P_3. Die Summe der drei Gleichungen ist identisch Null. Also schneiden die drei Höhen des Dreiecks einander in einem Punkt.

Aufgabe 48. Man beweise die entsprechenden Sätze für die Mittelsenkrechten und die Seitenhalbierenden, des Dreiecks.

6.2 Beweise mit Hilfe der Hesseschen Normalform

Das Kriterium für den gemeinsamen Schnittpunkt der Winkelhalbierenden erfordert umfangreiche Rechnungen, wenn man dazu von der allgemeinen Form der Geradengleichung

$$ax + by + c = 0$$

ausgeht. Einfacher gestaltet sich der Beweis bei Verwendung der Hesseschen Normalform der Geradengleichung.
Wir bezeichnen die Gleichungen der Dreiecksseiten g_i mit $N(g_i) = 0$, wobei

$$N(g_i) \equiv x \cos\varphi_i + y \sin\varphi_i - p_i = 0$$

ist $(i = 1, 2, 3)$.

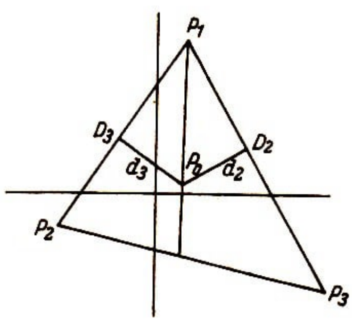


Abb. 60

Da ein Punkt P_0, der nicht auf der Geraden

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

liegt, von ihr den Abstand

$$d = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p$$

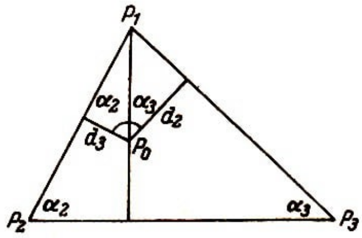
hat und die Abstände jedes Punktes der Winkelhalbierenden von den beiden Sehenkeln gleich sind, lauten die Gleichungen der drei Winkelhalbierenden

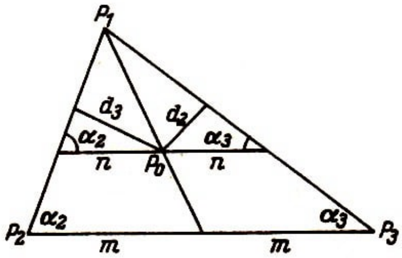
$$N(g_1) - N(g_2) = 0, \quad N(g_2) - N(g_3) = 0, \quad N(g_3) - N(g_1) = 0$$

Da die Summe der linken Seiten Null ergibt, ist der Satz von den Winkelhalbierenden bewiesen.

Aufgabe 49. Man führe den Beweis für die Halbierenden eines Innenwinkels und der entsprechenden Außenwinkel eines Dreiecks (Abb.60).

Abb. 61, 62





Aufgabe 50. Man führe den Beweis mit Hilfe der Hesseschen Normalfort der Geradengleichung a) für die Höhen (Abb. 61) und b) für die Seitenhalbierenden des Dreiecks (Abb. 62).

Anleitung. a) Man beachte, dass $d_2 : d_3 = \cos\alpha_3 : \cos\alpha_2$ ist und damit

$$d_2 \cos\alpha_2 = d_3 \cos\alpha_3$$

b) Es gilt

$$d_2 : d_3 = \sin\alpha_3 : \sin\alpha_2 \qquad \text{oder} \qquad d_2 \sin\alpha_2 = d_3 \sin\alpha_3$$

Den Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises findet man auch, wenn man an die Seiten in ihren Endpunkten nach der Innenseite die Komplemente der gegenüberliegenden Dreieckswinkel anträgt. Je zwei Schenkel der drei gleichschenkligen Dreiecke fallen zu einer Ecktransversalen zusammen, und die drei Transversalen treffen einander im Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe 51. Man benutze diese Tatsache zur Aufstellung der Gleichungen der Ecktransversalen und zum Beweis des Satzes von der Ermittlung des Mittelpunktes des Umkreises.

Anleitung. Die drei Gleichungen sind mit einem geeigneten konstanten Faktor zu multiplizieren, damit ihre Summe identisch Null wird.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Dreieck im folgenden so in das rechtwinklige Koordinatenkreuz gelegt werden, dass P_0P_1 vom Ursprung aus auf die x-Achse fällt, wodurch sich die Rechnung vereinfacht (Abb. 63).

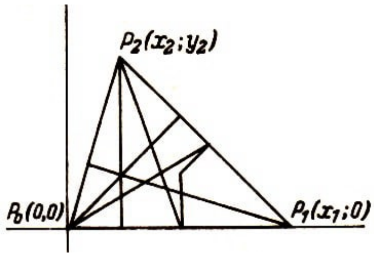


Abb. 63

Aufgabe 52. Man stelle die Gleichungen a) der drei Höhen, b) der drei Mittelsenkrechten, c) der drei Seitenhalbierenden, d) der drei Winkelhalbierenden auf, berechne die Koordinaten der Schnittpunkte und wende in jedem Fall die drei Kriterien an, durch die bewiesen wird, dass jeweils drei Geraden durch einen Punkt gehen.

Anleitung. d) Man bilde die Hessesche Normalform aus der allgemeinen Form der Geradengleichungen der Dreiecksseiten. Es ist

$$\frac{ax+by\pm c}{\mp\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

6.3 Die Eulersche Gerade

Drei Punkte liegen auf einer Geraden,

a) wenn der Inhalt des Dreiecks, das durch die Punkte bestimmt wird, verschwindet,

b) wenn die entsprechende Determinante gleich Null wird,

c) wenn die Koordinaten eines der gegebenen Punkte die Gleichung der Geraden erfüllen, die durch die beiden anderen Punkte bestimmt ist.

Jedes dieser drei Kriterien kann zum Beweis der genannten Eigenschaft der drei Punkte dienen.
Im vorliegenden Fall handelt es sich um den Höhenschnittpunkt H mit den Koordinaten $x_h = x_2$, $y_h = \frac{(x_1-x_2)x_2}{y_2}$, den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden des Dreiecks mit den Koordinaten $x_s = \frac{x_1-x_3}{3}$, $y_s = \frac{y_2}{3}$ und um den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks mit den Koordinaten $x_m = \frac{x_1}{2}$, $y_m = \frac{y_2^2-(x_1-x_2)x_2}{2y_2}$.

Aufgabe 53. Man beweise unter Anwendung der drei Kriterien, dass die genannten Punkte auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden, liegen.

6.4 Der Feuerbachsche Kreis

Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks, die Fußpunkte der Höhen und die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreis, dem Feuerbachschen Kreis.
Die allgemeine Kreisgleichung lautet

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

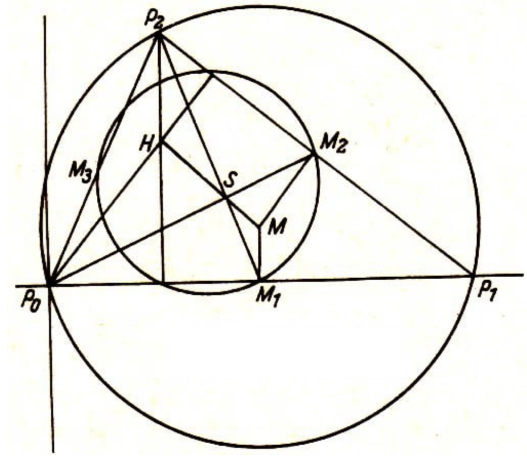


Abb. 64

Aufgabe 54. Man berechne die Koordinaten a, b des Mittelpunktes des Kreises, wenn der Kreis durch die drei Punkte $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ geht.

Aufgabe 55. Man setze zur Bestimmung der Mittelpunktskoordinaten des Feuerbachschen Kreises die Koordinaten der Mittelpunkte der Dreiecksseiten $M_1\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$, $M_2\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$ ein (Abb. 64).

Aufgabe 56. Man bilde die Kreisgleichung und berechne r durch Einsetzen von $M_1\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$ in diese.

Aufgabe 57. Man zeige, dass die Koordinaten $(x_2, 0)$ des Fußpunktes der Höhe auf P_0P_1 und die des Mittelpunktes ihres oberen Abschnittes $\left(x_2, \frac{y_2^2+(x_1-x_2)x_2}{2y_2}\right)$ die Gleichung des Feuerbachschen Kreises erfüllen, die Punkte also auf dem Feuerbachschen Kreis liegen.

Aufgabe 58. Man berechne den Radius des dem Dreieck $P_0P_1P_2$ umgeschriebenen Kreises und vergleiche seine Länge mit dem des Feuerbachschen Kreises.

Aufgabe 59. Man beweise, dass der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der Eulerschen Geraden liegt und die Strecke HM halbiert.

7 Merkwürdige Punkte und Linien des Dreiecks in der Vektoralgebra

Wie auch im vorigen Kapitel werden die Grundbegriffe der Vektorrechnung vorausgesetzt. Leser, denen solche Kenntnisse fehlen, können sich in den unter Nr. [7], [8], [11] und [12] in den Literaturhinweisen angegebenen Werken informieren.

7.1 Die Seitenhalbierenden

In den Beweisen mit Methoden der Vektorrechnung treten folgende Begriffe und Verknüpfungen von Vektoren auf: Addition und Subtraktion von Vektoren, das skalare und das vektorielle Produkt von Vektoren, lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren, die Gleichung der Geraden und das Kriterium für die Lage von drei Punkten in einer Geraden.

In allen zu beweisenden Sätzen schneiden drei Geraden einander in einem Punkt. In den Beweisen der Vektoralgebra werden zuerst zwei Vektoren, die einander schneiden, operativ zusammengefasst.
Durch weitere Rechnung wird dann gezeigt, dass die gleichen Eigenschaften, die sich für die beiden Vektoren ergeben, auch für den zugehörigen dritten Vektor gelten. Am Beispiel der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC sei dieses Beweisverfahren erläutert.

Die Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

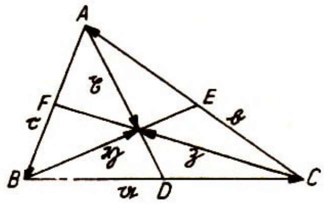


Abb. 65

1. Beweis. In Abb. 65 ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ (1)

$$\mathfrak{x} = \lambda\overrightarrow{AD} = \lambda\left(\mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right) \qquad , \qquad \mathfrak{y} = \mu\overrightarrow{BE} = \mu\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\right)$$

Im Dreieck ABS ist $\mathfrak{c} + \mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ oder

$$\mathfrak{c} + \mu\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\right) = \lambda\left(\mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right) \tag{2}$$

Wegen $\mathfrak{c} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ erhält man

$$-\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mu\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\right) = \lambda\left(-\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)$$

$$-\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \frac{1}{2}\mu\mathfrak{b} + \lambda\mathfrak{b}$$

$$\left(-1 + \mu + \frac{1}{2}\lambda\right)\mathfrak{a} = \left(1 - \frac{1}{2}\mu - \lambda\right)\mathfrak{b} \tag{3}$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind linear unabhängig. Die Gleichung (3) wird also nur erfüllt, wenn die Koeffizienten verschwinden. Aus den sich ergebenden Gleichungen lassen sich λ und μ wie folgt berechnen:

Aus $-1+\mu+\frac{1}{2}\lambda = 0$ und $1-\frac{1}{2}\mu-\lambda = 0$ folgt $\lambda = \frac{2}{3}$ und $\mu = \frac{2}{3}$. Nimmt man an, dass $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{CF}$ einander in S' schneiden, und setzt $\mathfrak{y}' = \mu\overrightarrow{BE}$ und $\mathfrak{z} = \nu\overrightarrow{CF}$, so findet man in ähnlicher Weise $\mu = \nu = \frac{2}{3}$. Die Punkte S und S' stimmen also überein.

Aufgabe 60. Man beweise denselben Satz, wenn das Dreieck durch die Endpunkte von drei Ortsvektoren im Raum bestimmt ist, die von einem Punkt ausgehen (Abb. 66).

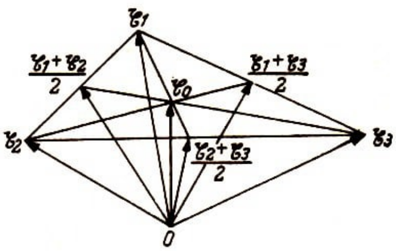


Abb. 66

Anleitung. Man gehe aus von den Gleichungen der drei Seitenhalbierenden

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \lambda\left(\frac{\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3}{2} - \mathfrak{x}_1\right), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \mu\left(\frac{\mathfrak{x}_3+\mathfrak{x}_1}{2} - \mathfrak{x}_2\right), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_3 + \lambda\left(\frac{\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2}{2} - \mathfrak{x}_3\right)$$

und berechne ihren Schnittpunkt $\mathfrak{x}_0$. Die vorher veränderlichen Parameter nehmen für $\mathfrak{x}_0$ bestimmte Werte an. Man berechne λ und μ und beachte dabei, dass die drei Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ im Raum linear unabhängig sind.

Ein weiterer Beweis dieses Satzes kann mit Hilfe des Vektorproduktes geführt werden.

3. Beweis. Alle Vektoren liegen in der durch das Dreieck bestimmten Ebene. Eine Ecke des Dreiecks ist Anfangspunkt der Ortsvektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Dann bestimmt $\frac{\mathfrak{p}_1}{2}$ den Mittelpunkt von $\mathfrak{p}_1$, $\frac{\mathfrak{p}_2}{2}$ den von $\mathfrak{p}_2$ und $\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}$ den Mittelpunkt von $\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{x}$.
Die beiden Seitenhalbierenden $\mathfrak{p}_1 - \frac{\mathfrak{p}_2}{2}$ und $\mathfrak{p}_2 - \frac{\mathfrak{p}_1}{2}$ schneiden einander in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Endpunkt des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ (Abb. 67).

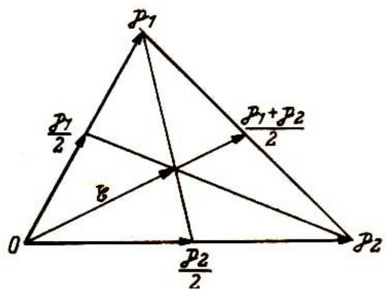


Abb. 67

Es soll nun gezeigt werden, dass die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}$ in einer Geraden liegen, dass also ihr Vektorprodukt gleich Null wird. Es ist

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{p}_1)\times\left(\mathfrak{p}_1 - \frac{p_2}{2}\right) = \mathfrak{o} \qquad \text{und} \qquad (\mathfrak{x}-\mathfrak{p}_2)\times\left(\mathfrak{p}_2 - \frac{\mathfrak{p}_1}{2}\right) = \mathfrak{o}$$

weil in jedem Fall beide Vektoren in einer Geraden liegen. Werden beide Produkte berechnet und addiert, so ergibt sich, wenn man noch beachtet, dass

$$\frac{\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_1}{2} = -\frac{\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_2}{2}$$

ist,

$$\mathfrak{x} \times (\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) - \left(\mathfrak{x} \times \frac{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}{2}\right) = \mathfrak{x} \times \frac{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}{2} = \mathfrak{o}$$

Also sind $\mathfrak{x}$ und $\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2}{2}$ kollinear, und die drei Seitenhalbierenden schneiden einander in einem Punkt.

7.2 Die Höhen

Aufgabe 61. Man beweise, dass die drei Höhen eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden (Abb. 68).

Anleitung. Man benutze die skalaren Produkte $(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}_2) \cdot \mathfrak{p}_1 = 0$ und $(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}_1) \cdot \mathfrak{p}_2 = 0$. Man deute das Ergebnis.

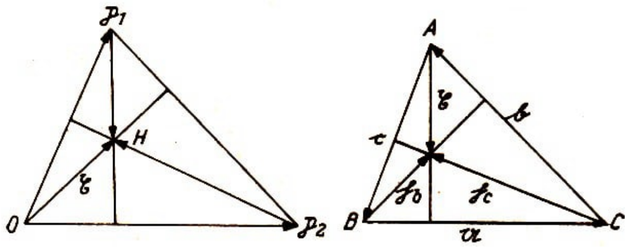


Abb. 68, 69

Aufgabe 62. Man beweise den Satz von Aufgabe 61 an Hand der Abb. 69.

Anleitung. Es ist $\mathfrak{h}_c \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_b \cdot \mathfrak{b} = 0$. Man setze $\mathfrak{h}_c = \mathfrak{b} + \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{h}_b = \mathfrak{x} - \mathfrak{c}$.

7.3 Die Mittelsenkrechten der Seiten

Aufgabe 63. Man beweise den Satz von den Mittelsenkrechten im Dreieck (Abb. 70).

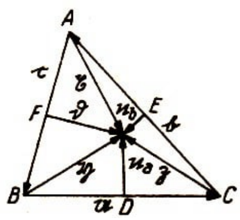


Abb. 70

Anleitung. Man zeige, dass das skalare Produkt der Gleichungen $\mathfrak{x} - \mathfrak{z} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{x} + \mathfrak{z} = 2\mathfrak{n}_b$ die Beziehung $\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2 = 0$, also $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{z}|$ ergibt.
Ebenso findet man $|\mathfrak{z}| = |\mathfrak{y}|$ und aus den letzten beiden Gleichungen $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{y}|$. Man bilde $\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{x}^2 = 2\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}$ und deute dieses Ergebnis.

7.4 Die Winkelhalbierenden

Aufgabe 64. Man beweise, dass die drei Winkelhalbierenden im Dreieck einander in einem Punkt schneiden (Abb. 71).

Anleitung. Auf den Schenkeln des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Winkels sind vom Scheitelpunkt aus die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_a$ und $\mathfrak{e}_b$ gezeichnet (Abb. 72).

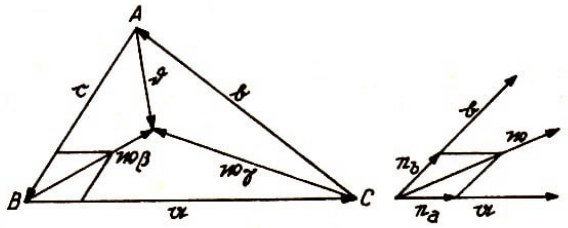


Abb. 71, 72

Ihre Summe $\mathfrak{e}_a + \mathfrak{e}_b$ bestimmt die Richtung der Winkelhalbierenden. Ihr Vektor ist

$$\mathfrak{w} = m(\mathfrak{e}_a + \mathfrak{e}_b) = m\left(\frac{\mathfrak{a}}{a} + \frac{\mathfrak{b}}{b}\right)$$

Man berechne $\mathfrak{w}\beta$ und $\mathfrak{w}_\gamma$ und verbinde sie mit $\mathfrak{a}$ zu einer Gleichung, aus der die Faktoren m und n bestimmt werden können. Nun lässt sich aus $\mathfrak{w}_\beta$ und $\mathfrak{c}$ der Vektor $\mathfrak{d}$ ermitteln, von dem man zeigen kann, dass er mit $\mathfrak{w}_\alpha$ identisch ist.

Aufgabe 65. Man beweise, dass die Halbierenden eines Innenwinkels und der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel einander in einem Punkt schneiden.

7.5 Die Eulersche Gerade

Im Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten auf einer Geraden.
Dieser Satz lässt sich mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung auf verschiedene Art beweisen.

Ein Kriterium für diese Eigenschaft der genannten Punkte liefert die Gleichung der Geraden. Liegen die Endpunkte A, B und X dreier Vektoren, die von demselben Punkt O ausgehen, auf einer Geraden, so gilt (Abb. 73)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$$

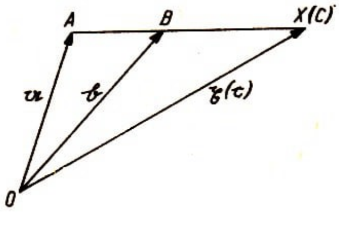


Abb. 73

Setzt man $X = C$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$, so ergibt sich

$$(1 - \lambda)\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b} - \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

Da die Punkte A, B und X beliebig gewählt werden können, gilt diese letzte Gleichung allgemein. Wir bringen sie nun auf die Form

$$t_1\mathfrak{a} + t_2\mathfrak{b} + t_3\mathfrak{c} = \mathfrak{o} \tag{1}$$

Für die Koeffizienten der Vektoren gilt $(1-\lambda) + \lambda - 1 = 0$, oder allgemein

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \tag{2}$$

Kann umgekehrt die Gleichung (1) für drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gebildet werden und ist zugleich die Nebenbedingung (2) erfüllt, so liegen die drei Endpunkte der Vektoren auf einer Geraden (Beweis !).

Ein zweites Kriterium liefert die Summe der Beträge der drei Vektorprodukte, $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}|$, die gleich Null wird, wenn die Endpunkte der Vektoren auf einer Geraden liegen (Abb. 73).
Da der Betrag des Vektorprodukts den doppelten Inhalt des durch die Vektoren aufgespannten Dreiecks bedeutet, stellen $\frac{1}{2}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ und $\frac{1}{2}|\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}|$ die Inhalte der Dreiecke OAB und OBC, das Produkt $\frac{1}{2}|\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}|$ den mit -1 multiplizierten Inhalt des Dreiecks OCA dar. Die Summe der drei Beträge ist Null.

Liegen A, B und C nicht in einer Geraden, so ergibt die Rechnung den Inhalt des aus diesen drei Punkten gebildeten Dreiecks.

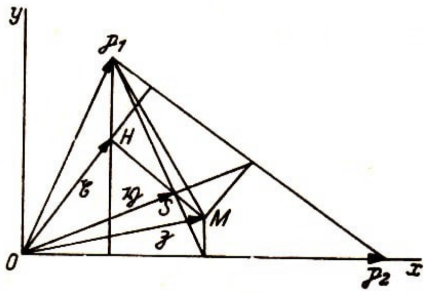


Abb. 74

a) Anwendung des ersten Kriteriums (Abb. 74). Das durch die Vektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ aufgespannte Dreieck ist so in das Koordinatensystem gelegt, dass eine Ecke in den Koordinatenursprung fällt und eine Seite auf der x-Achse liegt.
Es sind der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt des Umkreises M ermittelt. Zu beweisen ist, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.
Die von O ausgehenden Vektoren sind $\overrightarrow{OH} = \mathfrak{x}$, $\overrightarrow{OS} = \mathfrak{y}$ und $\overrightarrow{OM} = \mathfrak{z}$.
Wir zerlegen die Vektoren in ihre Komponenten und erhalten

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{i} + \frac{(x_2 - x_1)x_1}{y_1}\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{y} = \frac{x_1 + x_2}{3}\mathfrak{i} + \frac{y_1}{3}\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{z} = \frac{x_2}{2}\mathfrak{i} + \frac{y_1^2 - (x_2 - x_1)x_1}{2y_1}\mathfrak{j}$$

Die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ lassen sich mit den Mitteln der analytischen Geometrie leicht berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} t_1\mathfrak{x} + t_2\mathfrak{y} + t_3\mathfrak{z} &= 1\left[x_1\mathfrak{i} + \frac{(x_2 - x_1)x_1}{y_1}\mathfrak{j}\right] - 3\left[\frac{x_1 + x_2}{3}\mathfrak{i} + \frac{y_1}{3}\mathfrak{j}\right] \\ &+ 2\left[\frac{x_2}{2}\mathfrak{x} + \frac{y_1^2 - (x_2 - x_1)x_1}{2y_1}\mathfrak{j}\right] = 0 \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{x} - 3\mathfrak{y} + 2\mathfrak{z} = 0$$

Da auch die Nebenbedingung $t_1 + t_2 + t_3 = 1 - 3 + 2 = 0$ erfüllt ist, liegen H, S und M auf einer Geraden.

Nun ist $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} - 2\mathfrak{y} + 2\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \overrightarrow{SH}$ und $2(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) = 2\overrightarrow{MS}$. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich $\overrightarrow{SH} - 2\overrightarrow{MS} = \mathfrak{o}$ oder $\overrightarrow{SH} = 2\overrightarrow{MS}$, d.h., HM ist durch S im Verhältnis 2:1 geteilt.

b) Das zweite Kriterium für die oben angegebene Eigenschaft der Punkte H, S und M im Dreieck ist die Bedingung

$$|\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}| + |\mathfrak{y} \times \mathfrak{z}| + |\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}| = 0$$

Die Zerlegung der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem lautet

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{i} + x_2\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{y} = y_1\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{z} = z_1\mathfrak{i} + z_2\mathfrak{j}$$

Für das Produkt $\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = (x_1\mathfrak{i} + x_2\mathfrak{j}) \times (y_1\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j})$ ergibt sich

$$x_1y_1(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) + x_1y_2(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) + x_2y_1(\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) + x_2y_2(\mathfrak{j} \times \mathfrak{j})$$

Wegen $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}$ ist

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)\mathfrak{k} \qquad \text{und} \qquad |\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}| = x_1y_2 - x_2y_1$$

Entsprechend sind die anderen Produkte zu bilden.
Verwenden wir hier nun speziell die Komponentenzerlegung, die wir bereits in a) benutzt haben, so ergibt sich für die absoluten Beträge der Produkte

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}| &= \frac{x_1y_1}{3} - \frac{(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)x_1}{3y_1} \\
|\mathfrak{y} \times \mathfrak{z}| &= \frac{x_1 + x_2}{3}\left[\frac{y_1}{2} - \frac{(x_2 - x_1)x_1}{2y_1}\right] - \frac{x_2y_1}{6} \\
|\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}| &= \frac{x_2(x_2 - x_1)x_1}{2y_1} - x_1\left[\frac{y_1}{2} - \frac{(x_2 - x_1)x_1}{2y_1}\right]
\end{aligned}$$

Die Addition liefert $|\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}| + |\mathfrak{y} + \mathfrak{z}| + |\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}| = 0$, d.h., H, S und M liegen auf einer Geraden.

8 Merkwürdige Punkte des Dreiecks und ihre baryzentrischen Koordinaten

Ferdinand Möbius gab in seiner Arbeit "Der baryzentrische Kalkül" (Leipzig 1827) einen Algorithmus an, der geeignet ist, die Kollinearität gewählter Punkte im Dreieck und ihre Lage auf der jeweiligen Geraden zu bestimmen. Dazu benutzte Möbius baryzentrische Koordinaten. Im folgenden sollen diese Koordinaten definiert und in einigen Beispielen angewendet werden.

Zunächst definieren wir Verknüpfungen von Punkten und Strecken, die Möbius Addition, Subtraktion und Multiplikation nennt.

8.1 Addition und Subtraktion von Punkten

In Analogie zu der Zusammenlegung parallel und in gleicher Richtung wirkender Kräfte in der Physik werden die mit den Gewichten x_1 und x_2 versehenen Punkte E_1 und E_2 folgendermaßen addiert (Abb. 75):

Abb. 75 

$$x_1E_1 + x_2E_2 = (x_1 + x_2)P \tag{1}$$

Der Punkt P mit der Summe $x_1 + x_2$ der Gewichte teilt die Strecke E_1E_2 innen im Verhältnis $E_1P : PE_2 = x_2 : x_1$.
Ist z.B. $x_2 = 2$ und $x_1 = 5$, so geht (1) über in $5E_1 + 2E_2 = 7P$ (Abb. 76), und das Verhältnis lautet $E_1P : PE_2 = 2 : 5$.

Abb. 76 

Aus der Addition der Punkte folgt sofort die Subtraktion; denn aus (1) folgt (Abb. 75)

$$(x_1 + x_2)P - x_1E_1 = x_2E_2 \tag{2}$$

Der Punkt x_2E_2, der die Differenz darstellt, teilt die Strecke E_1P außen im Verhältnis $E_1E_2 : E_2P = (x_1 + x_2) : x_1$. Für $x_1 = 5$ und $x_2 = 2$ ist wieder $7P - 5E_1 = 2E_2$ (Abb. 76).
Bildet man die Differenz der Größen x_1E_1 und x_2E_2, so lautet die Subtraktionsformel (Abb. 77)

Abb. 77 

$$x_1E_1 - x_2E_2 = (x_1 - x_2)P \tag{2a}$$

Bei der Subtraktion wird zunächst der Fall $1E_1 - 1E_2$ ausgeschlossen, weil in diesem Fall P als "uneigentlicher Punkt" unbegrenzt weit von E_1 und E_2 entfernt liegen müsste.

Um aber für diese Differenz einen endlichen Wert zu erhalten, definieren wir nach Möbius $E_1 - E_2$ als Vektor $\overrightarrow{E_2E_1}$:

$$E_1 - E_2 = \overrightarrow{E_2E_1} \tag{3}$$

Aufgabe 66. Man stelle die Parallele hierzu in der Vektorrechnung dar und veranschauliche sie.

8.2 Produkte von Punkten

Als äußeres Produkt zweier Punkte A und B bezeichnen wir die Größe $[AB]$. Es wird definiert als linienflüchtiger Vektor $\overrightarrow{AB}$, d.h. als ein Vektor, der an eine Trägergerade gebunden ist und auf ihr beliebig verschoben werden darf. Dagegen kann man den freien Vektor beliebig parallel zu sich selbst verschieben.

$$[AB] = \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

Der Vektor $[BA]$ hat die gleiche Länge wie $[AB]$, ist aber entgegengesetzt gerichtet, d.h.

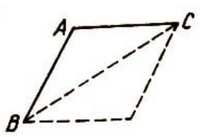
$$[BA] = -[AB] \tag{2}$$

Vertauscht man in dem Produkt $[AA]$ die Faktoren, so ergibt sich nach (2) $[AA] = -[AA]$. Diese Gleichung kann nur gelten, wenn $[AA] = \mathfrak{o}$ ($\mathfrak{o}$ Nullvektor) ist.
Das Produkt $[AB^{-}A]$, in dem ein Punkt A mit einem freien Vektor zu multiplizieren ist, liefert wegen $[AA] = \mathfrak{o}$

$$[AB - A] = [AB] - [AA] = [AB] \tag{3}$$

also einen linienflüchtigen Vektor. Die Multiplikation genügt dem distributiven Gesetz.
$[ABC]$ ist das äußere Produkt dreier Punkte und bedeutet geometrisch den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die drei Punkte A, B und C bestimmt wird (Abb. 78).

Abb. 78



Das Dreieck ABC hat den halben Flächeninhalt des Parallelogramms, also $\frac{1}{2}[ABC]$.
Wir multiplizieren nun den Punkt A mit zwei freien Vektoren und erhalten

$$[AB - AC - A] = [ABC] - [AAC] - [ABA] + [AAA] = [ABC] \tag{4}$$

d.h. das Parallelogramm. Es lässt sich leicht die Ähnlichkeit mit dem Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ nachweisen. Bekanntlich bedeutet $ab\sin(\mathfrak{a};\mathfrak{b})\mathfrak{e}_c$ einen Vektor, dessen Betrag gleich dem Inhalt des durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

8.3 Der Begriff der baryzentrischen Koordinaten

Wählt man drei beliebige in einer Ebene gelegene Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, so lässt sich jeder Punkt dieser Ebene durch die drei Punkte linear darstellen, wenn sie mit geeigneten Gewichten versehen werden.

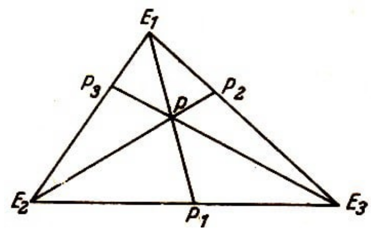


Abb. 79

Gegeben sei ein Dreieck $E_1E_2E_3$ (Abb. 79). In dem Dreieck werde ein Punkt P angenommen, durch den die Ecktransversalen E_1P_1, E_2P_2 und E_3P_3 gezogen sind. Werden die Ecken des Dreiecks mit geeigneten Gewichten x_1, x_2 bzw. x_3 versehen, so bestimmen sie den Punkt P der Ebene des Dreiecks, der als physikalischer Schwerpunkt des Systems betrachtet werden kann, in dem also die Gewichte x_1, x_2, x_3 vereinigt erscheinen. Es gilt

$$xP = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \qquad \text{mit} \qquad x = x_1 + x_2 + x_3 \tag{1}$$

oder

$$P = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \qquad \text{mit} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{1a}$$

Beweis. In dem Bezugsdreieck $E_1E_2E_3$ erhält man durch Punktaddition

$$x_2E_2 + x_3E_3 = (x_2 + x_3)P_1$$

Damit sind die Gewichte x_2 und x_3 in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Um alle drei Gewichte in einem Punkt zu vereinen, sind noch E_1 und P_1 zu addieren, und man erhält

$$x_1E_1+(x_2+x_3)P_1 = (x_1+x_2+x_3)P \quad \text{oder} \quad x_1E_1+x_2E_2+x_3E_3 = (x_1+x_2+x_3)P = xP$$

wie (1). Durch geeignete Änderung der den Punkten E_1, E_2, E_3 zugeordneten Gewichte lässt sich jeder beliebige Punkt der Ebene darstellen, in der das Dreieck $E_1E_2E_3$ liegt.
Die Gewichte x_1, x_2 und x_3 heißen auch homogene Koordinaten des Punktes P.
Möbius nennt sie baryzentrische Koordinaten, weil sie den Schwerpunkt des Bezugssystems bestimmen.

Die Anwendungsmöglichkeit der baryzentrischen Koordinaten wollen wir an Hand des Beweises der Relation bezüglich der Ecktransversalen im Dreieck zeigen.

In Abb. 79 sind durch einen beliebigen Punkt P im Dreieck $E_1E_2E_3$ die Ecktransversalen gezeichnet. Es ist

$$xP = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \quad \text{mit} \quad x_1 + x_2 + x_3 = x$$

Durch Punktaddition findet man

$$(x_2 + x_3)P_1 = x_2E_2 + x_3E_3 \tag{2}$$
$$(x_3 + x_1)P_2 = x_1E_1 + x_3E_3 \tag{3}$$
$$(x_1 + x_2)P_3 = x_1E_1 + x_2E_2 \tag{4}$$

Bildet man die Differenz aus xP und xE_1, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x(P - E_1) &= x_2E_2 + x_3E_3 - x_2E_1 - x_3E_1 \\ &= (x_2 + x_3)P_1 - (x_2 + x_3)E_1 && \text{(wegen (2), 5)} \\ &= (x_2 + x_3)(P_1 - E_1) \end{aligned}$$

Setzt man für $P - E_1$ den Vektor $\overrightarrow{E_1P}$ und für $P_1 - E_1$, den Vektor $\overrightarrow{E_1P_1}$, so erhält man $xE_1P = (x_2 + x_3)E_1P_1$ oder

$$\frac{E_1P}{E_1P_1} = \frac{x_2 + x_3}{x} \tag{6}$$

Ebenso erhält man

$$\frac{E_2P}{E_2P_2} = \frac{x_3 + x_1}{x} \qquad ; \qquad \frac{E_3P}{E_3P_3} = \frac{x_1 + x_2}{x} \tag{7, 8}$$

Durch Addition von (6) bis (8) ergibt sich

$$\frac{E_1P}{E_1P_1} + \frac{E_2P}{E_2P_2} + \frac{E_3P}{E_3P_3} = \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{x} = 2$$

und weiter

$$\frac{PP_1}{E_1P_1} + \frac{PP_2}{E_2P_2} + \frac{PP_3}{E_3P_3} = 1$$

8.4 Teilflächen des Dreiecks als baryzentrische Koordinaten eines beliebigen Punktes des Dreiecks

Als Gewichte, durch die die Ecken des Bezugsdreiecks $E_1E_2E_3$ belegt werden, lassen sich auch mit homogener Masse gleichmäßig belegte Teilflächen dieses Dreiecks verwenden. Da die Gewichte dieser Teilflächen derem Inhalt proportional sind, setzt man für x_i $(i = 1, 2, 3)$ den Inhalt entsprechender Teilflächen des Dreiecks $E_1E_2E_3$.
Zunächst untersuchen wir, welche Flächen den Ecken E_i $(i = 1, 2, 3)$ zuzuordnen sind. Für das Dreieck $E_1E_2E_3$ mit P als gewähltem Schwerpunkt gilt

$$P = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \qquad \text{mit} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{1}$$

Das äußere Produkt dieser Gleichung mit $[E_2E_3]$ ergibt wegen $[E_2E_2E_3] = [E_3E_2E_3] = 0$

$$[PE_2E_3] = x_1[E_1E_2E_3] \tag{2}$$

Multipliziert man (1) noch mit $[E_1E_3]$ sowie mit $[E_1E_2]$, so findet man

$$[PE_1E_3] = x_2[E_1E_2E_3] \qquad \text{und} \qquad [PE_1E_2] = x_3[E_1E_2E_3] \tag{3,4}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$$x_1 = \frac{[PE_2E_3}{E_1E_2E_3]}, \qquad x_2 = \frac{[PE_1E_3}{E_1E_2E_3]}, \qquad x_3 = \frac{[PE_1E_2}{E_1E_2E_3]}$$

Durch Einsetzen in (1) und Multiplikation mit $[E_1E_2E_3]$ ergibt sich

$$[E_1E_2E_3]P = [PE_2E_3]E_1 + [PE_1E_3]E_2 + [PE_1E_2]E_3 \tag{1a}$$

Diese Gleichung wird noch durch 2 dividiert. Dann bedeutet die dem Punkt P zugeordnete Fläche das Bezugsdreieck $E_1E_2E_3$, das im folgenden mit Δ bezeichnet wird. Die den Ecken E_i zugeordneten Teildreiecke werden durch P und die beiden anderen Ecken des Dreiecks bestimmt.

Wir sind nun in der Lage, für die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks ABC die baryzentrischen Koordinaten, also die Teilflächen des Dreiecks zu bestimmen.

8.5 Die baryzentrischen Koordinaten bestimmter Punkte des Dreiecks

a) Der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises (Abb. 80).

Die Teildreiecke haben die Flächeninhalte $\frac{1}{2}a\rho$, $\frac{1}{2}b\rho$ und $\frac{1}{2}c\rho$. Die Gleichung (1a) aus Abschnitt 4 liefert somit

$$\rho s \cdot O = \frac{1}{2}a\rho A + \frac{1}{2}b\rho B + \frac{1}{2}c\rho C \tag{1}$$

mit $\frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}c\rho = \rho s$. * Division durch ρ und Multiplikation mit 2 ergibt

$$2s \cdot O = aA + bB + cC \tag{1a}$$

Ähnliche Überlegungen führen zu den Gleichungen für die Mittelpunkte der drei Ankreise des Dreiecks ABC:

$$2(s-a)O_a = (-aA) + bB + cC \tag{2}$$
$$2(s-b)O_b = aA + (-bB) + cC \tag{3}$$
$$2(s-c)O_c = aA + bB + (-cC) \tag{4}$$

Nicht für alle merkwürdigen Punkte im Dreieck lassen sich die Dreiecksseiten allein als homogene Koordinaten verwenden. Aber alle in Betracht kommenden Teildreiecke können durch Seiten und Winkel des Bezugsdreiecks, zu denen noch der Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises tritt, ausgedrückt werden.

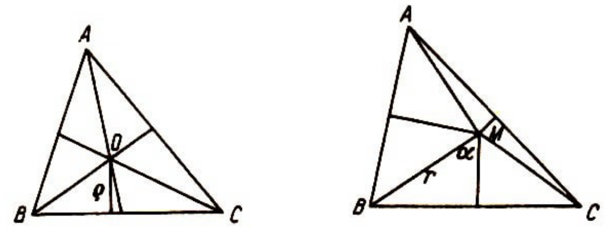


Abb. 80, 81

Mit Hilfe der Beziehung $\rho = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$ ergibt sich aus der Gleichung (1a) von Abschnitt 4 nach Division durch $2r$

$$\frac{\Delta}{2r} \cdot O = a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} A + b \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} B + c \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} C \qquad (5)$$

b) Der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises.
Aus Abb. 81 sehen wir, dass der Inhalt des Dreiecks BMC gleich $\frac{1}{2} ar \sin\angle MBC$ ist; und wegen $\angle MBC = 90° - \alpha$ ist Dreieck BMC gleich $\frac{1}{2} ar \sin(90° - \alpha)$ oder

$$\triangle BMC = \frac{1}{2} ar \cos\alpha$$

Ähnlich erhält man

$$\triangle CMA = \frac{1}{2} br \cos\beta \qquad \text{und} \qquad \triangle AMB = \frac{1}{2} cr \cos\gamma$$

Das sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes M, seine Gleichung lautet

$$\frac{2\Delta}{r} \cdot M = a \cos\alpha A + b \cos\beta B + c \cos\gamma C \qquad (6)$$

c) Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Abb. 82).

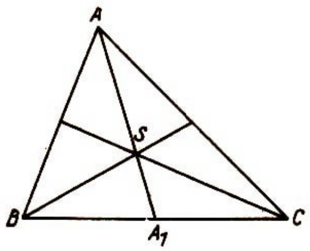


Abb. 82

Der Schwerpunkt des Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S. Da jede Seitenhalbierende durch S im Verhältnis $AS : SA_1 = 2 : 1$ geteilt wird, ist jede Höhe im Teildreieck gleich dem dritten Teil der zugehörigen Seitenhöhe im Dreieck ABC. Daher ist auch jedes Teildreieck gleich dem dritten Teil des Dreiecks ABC.
Aus $\triangle BSC = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} h_a$ erhält man wegen

$$h_a = b \sin\gamma = c \sin\beta = 2r \sin\beta \sin\gamma$$

$$\triangle BSC = \frac{1}{3} ar \sin\beta \sin\gamma$$

Ähnlich ergibt sich

$$\triangle CSA = \frac{1}{3} br \sin\gamma \sin\alpha \qquad , \qquad \triangle ASB = \frac{1}{3} cr \sin\alpha \sin\beta$$

und weiter

$$\frac{3\Delta}{r} \cdot S = a \sin\beta \sin\gamma \cdot A + b \sin\gamma \sin\alpha \cdot B + c \sin\alpha \sin\beta \cdot C \tag{7}$$

d) Der Höhenschnittpunkt (Abb. 83).

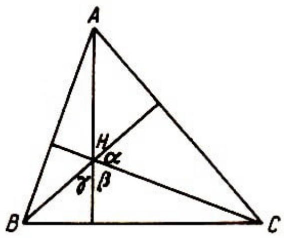


Abb. 83

Zur Inhaltsberechnung der Teildreiecke verwendet man die Formel

$$F = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$$

die eine Seite und alle Winkel des Dreiecks ABC enthält. Im Teildreieck BHC ist

$$\angle HBC = 90° - \gamma, \qquad \angle HCB = 90° - \beta, \qquad \angle BHC = \beta + \gamma$$

der Inhalt ist also

$$\triangle BHC = \frac{a^2 \sin(90° - \beta) \sin(90° - \gamma)}{2 \sin(\beta + \gamma)}$$

Wegen $\sin(90° - \beta) = \cos\beta$, $\sin(90° - \gamma) = \cos\gamma$ und $\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$ erhält man

$$\triangle BHC = \frac{a^2 \cos\beta \cos\gamma}{2 \sin\alpha}$$

Setzt man $a = 2r \sin\alpha$, so findet man $\triangle BHC = ar \cos\beta \cos\gamma$. Hieraus und aus den entsprechenden Formeln für die anderen Teildreiecke $\triangle CHA = br \cos\gamma \cos\alpha$ und $\triangle AHB = cr \cos\alpha \cos\beta$ folgt

$$\frac{\Delta}{r} \cdot H = a \cos\beta \cos\gamma \cdot A + b \cos\gamma \cos\alpha \cdot B + c \cos\alpha \cos\beta \cdot C \tag{8}$$

e) Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises (Abb. 84).

Zur Inhaltsberechnung des Teildreiecks BFC wird der Winkel BDF benötigt. Um diesen Winkel zu finden, berechnen wir $\angle HAM$. Es ist

$$\angle HAM = \angle BAM - \angle BAI = (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta - \gamma$$

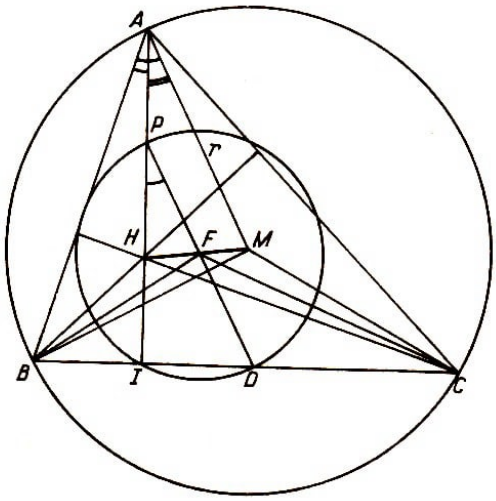


Abb. 84

Nun ist aber $\angle IPD = \angle HAM = \beta - \gamma$; denn es gilt $PF \parallel AM$ (Beweis!). Dann ist $\angle FDB = 90° - (\beta - \gamma)$. Der Durchmesser des Fuerbachschen Kreises ist gleich dem Radius des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises, also $FD = \frac{1}{2}r$.
Somit ist

$$\triangle BFC = \frac{ar}{4}\sin[90° - (\beta - \gamma)] = \frac{r}{4}a\cos(\beta - \gamma)$$

und entsprechend

$$\triangle CFA = \frac{r}{4}b\cos(\beta - \gamma) \qquad , \qquad \triangle AFB = \frac{r}{4}c\cos(\alpha - \beta)$$

Dadurch sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes F bestimmt, und es gilt

$$\frac{4\Delta}{r} \cdot F = a\cos(\beta - \gamma) \cdot A + b\cos(\gamma - \alpha) \cdot B + c\cos(\alpha - \beta) \cdot C \tag{9}$$

f) Der Nagelsche Punkt (Abb. 85).

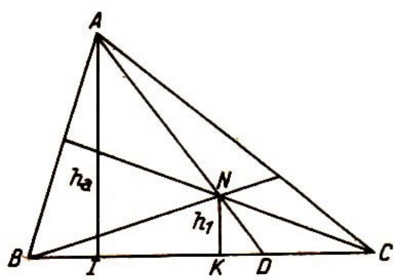


Abb. 85

Es wurde bereits bewiesen, dass $\frac{AN}{AD} = \frac{a}{s}$ ist. Daraus folgt

$$\frac{AD - AN}{AD} = \frac{s-a}{s} \qquad \text{oder} \qquad \frac{ND}{AD} = \frac{s-a}{s}$$

Durch Anwendung des Strahlensatzes ergibt sich $\frac{h_1}{h_a} = \frac{s-a}{s}$ und somit $h_1 = \frac{h_a(s-a)}{s}$.
Erweitern wir mit ρ_b, so ergibt sich (vgl. Tabelle 1)

$$h_1 = \frac{h_a(s-a)}{\rho_b}\frac{\rho_b}{s} = h_a \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2}$$

Der Inhalt des Dreiecks BNC ist gleich

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}ah_a \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = \triangle ABC \cdot \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man

$$\triangle ABC = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 8r^2 \sin\alpha \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und $2r\sin\alpha = a$, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\triangle BNC = 4ra\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\frac{\Delta}{4r}\cdot N = a\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}A + b\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}B + c\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}C \qquad (10)$$

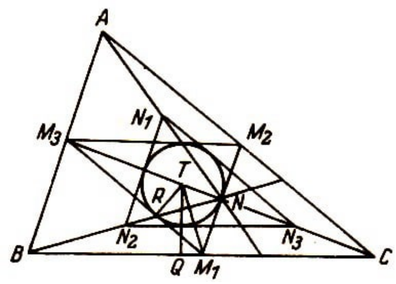


Abb. 86

g) Der Mittelpunkt des Spiekerschen Kreises (Abb. 86).
Im Dreieck ABC sind die Dreiecke $M_1M_2M_3$ und $N_1N_2N_3$ gezeichnet. M_i $(i = 1, 2, 3)$ sind die Mitten der Dreiecksseiten a, b und c und N_i die Mitten der Strecken AN, BN und CN von den Ecken des Dreiecks zum Nagelschen Punkt.
Die gezeichneten Dreiecke sind kongruent und dem Dreieck ABC ähnlich. Das Ähnlichkeitsverhältnis beträgt 1 : 2. Daher verhalten sich alle entsprechenden Strecken in den Dreiecken $M_1M_2M_3$ und $N_1N_2N_3$ zu denen im Dreieck ABC wie $1 : 2$, und der Radius $TR = \rho_1$ des dem Dreieck $M_1M_2M_3$ eingeschriebenen Kreises, der zugleich der Inkreis des Dreiecks $N_1N_2N_3$ ist, ist gleich der Hälfte von ρ, dem Radius des Inkreises von Dreieck ABC.

Nun lässt sich in dem Teildreieck BTC die Höhe TQ bestimmen. Es ist

$$TR = \frac{1}{2}\rho, \qquad \angle TM_1R = \frac{\alpha}{2}, \qquad \angle M_3M_1B = \gamma$$

Dann ist

$$\angle TM_1B = \frac{\alpha}{2} + \gamma = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} + \gamma = 90^\circ\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Es ist

$$TQ = TM_1 \sin\left(90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad TM_1 = \frac{TR}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

also

$$TQ = \frac{\frac{1}{2}\rho \cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Für $\rho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ erhält man [vgl.(22)]

$$TQ = 2r\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Der Inhalt des Teildreiecks ist dann

$$\triangle BTC = ar\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Durch zyklische Vertauschung der Seiten und Winkel findet man

$$\triangle CTA = br\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} \qquad \text{und}$$

$$\triangle ATB = cr\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{und}$$

und schließlich die Gleichung

$$\frac{\Delta}{r}\cdot T = a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}A + b\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}B - c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}C$$

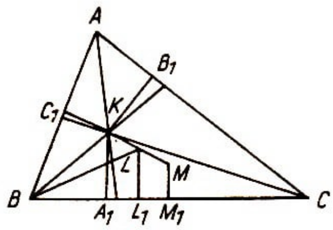


Abb. 87

h) Der Lémoinesche Punkt (Abb. 87).
Der Lémoinesche Punkt K (Schnittpunkt der Symmedianen im Dreieck ABC) hat von der Seite a den Abstand $KA_1 = \frac{a}{2}\tan\omega$ (dabei ist ω der Brocardsche Winkel des Dreiecks ABC und
Also ist $\triangle BKC = \frac{a^2}{4}\tan\omega$ oder $\triangle BKC = \frac{a}{2}r\sin\alpha\tan\omega$ Die beiden anderen Teilflächen sind leicht zu errechnen, und die Gleichung mit den baryzentrischen Koordinaten für den Punkt K lautet

$$\frac{2\Delta}{r}\cdot K = a\sin\alpha\tan\omega\cdot A + b\sin\beta\tan\omega\cdot B + c\sin\gamma\tan\omega\cdot C \tag{12}$$

K ist der Mittelpunkt des Lémoineschen Kreises, der auch Kosinuskreis genannt wird (vgl. Abb. 53).

i) Der Mittelpunkt des zweiten Lémoineschen Kreises (Abb. 87).

Der Mittelpunkt des zweiten Lémoineschen Kreises L ist der Mittelpunkt der Strecke KM, die den Lémoineschen Punkt K mit dem Mittelpunkt M des Umkreises des

Dreiecks ABC verbindet. Die Strecken KA_1 und MM_1, senkrecht zu der Dreiecksseite a, sind parallel und bestimmen das Trapez KA_1M_1M, dessen Mittellinie LL_1 die Höhe in dem Teildreieck BLC ist. Man findet LL_1 als arithmetisches Mittel von KA_1 und MM_1, also $LL_1 = \frac{1}{2}(KA_1 + MM_1)$, und wegen $KA_1 = \frac{a}{2}\tan\omega$ und $MM_1 = \frac{a}{2}\cot\alpha$ ist

$$LL_1 = \frac{1}{4}a(\tan\omega + \cot\alpha) \qquad \text{und} \qquad \triangle BLC = \frac{a^2}{8}(\tan\omega + \cot\alpha)$$

oder, da $a = 2r\sin\alpha$ ist,

$$\triangle BLC = \frac{a}{4}r(\sin\alpha\tan\omega + \cos\alpha)$$

Hieraus ergibt sich nun

$$\frac{4\Delta}{r}\cdot L = a(\sin\alpha\tan\omega + \cos\alpha)A + b(\sin\beta\tan\omega + \cos\beta)B + c(\sin\gamma\tan\omega + \cos\gamma)C \tag{15}$$

j) Die Brocardschen Punkte.

Aufgabe 67. Man suche die baryzentrischen Koordinaten für die Brocardschen Punkte Ω und Ω' auf.

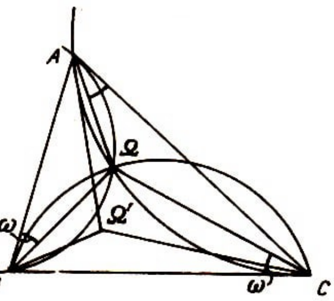


Abb. 88

Anleitung. Man verwende die Inhaltsformel $F = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$. Für das der Ecke A zugeordnete Teildreieck kommen die Seite a und die Winkel ω und $\beta - \omega$ (bzw. $\gamma - \omega$) und der gegenüberliegende Winkel $180° - \beta$ (bzw. $180° - \gamma$) in Anwendung (Abb. 88).

Die Lage der Punkte, für die in den Formeln (5) bis (13) die baryzentrischen Koordinaten festgelegt wurden, ist in dem elementargeometrischen Abschnitt genau bestimmt worden.
Es wurde dort auch gezeigt, dass ausgewählte Punkte auf Geraden liegen. Diese Tatsachen lassen sich bestätigen, wenn zu den sich ergebenden Additionen von Punkten die baryzentrischen Koordinaten (5) bis (13) verwendet werden.

Aufgabe 68. a) Man zeige, dass die Punkte H, F, S und M, die auf der Eulerschen Geraden liegen, folgende Gleichungen erfüllen (Abb. 89):

$$H + M = 2F, \quad H + 2M = 3S, \quad M + 2F = 3S \quad \text{und} \quad H + 3S = 4F$$

Abb. 89

b) Man stelle die Parallele zwischen der Punktaddition und der Addition der Ortsvektoren an Hand der Summen in a) der (Abb. 90).

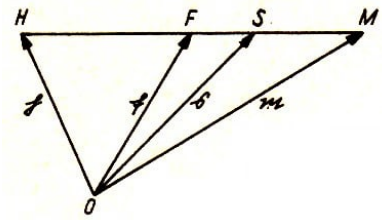


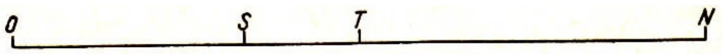
Abb. 90

Die Punkte O, S, T und N liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 69. Man bestätige die Richtigkeit der Beziehungen

$$O + N = 2T, \quad O + 2T = 3S, \quad N + 2O = 3S \quad \text{und} \quad N + 3S = 4T$$

und deute sie geometrisch (Abb. 91).

Abb. 91


Aufgabe 70. Der Mittelpunkt der Strecke $\Omega\Omega'$ ist das Zentrum des den beiden Brocardschen Fußpunktsdreiecken umgeschriebenen Kreises. Man bestimme seine baryzentrischen Koordinaten.

9 Lösungen der Aufgaben

1 a. Der Beweis des Satzes von den Winkelhalbierenden im Dreieck wird vorausgesetzt (Abb. 1). Es ist $O_aO_b \perp O_cC$, $O_bO_c \perp O_aA$ und $O_cO_a perp O_bB$. Die Winkelhalbierenden im Dreieck ABC sind Höhen im Dreieck $O_aO_bO_c$. Somit gilt die Aussage von den Winkelhalbierenden auch von den Höhen im Dreieck.

1 b. $\angle FAH = \angle FEH$; $\angle FEB = \angle FCB$; also ist $\angle BAD = \angle FCB$ und $\triangle BDA \sim \triangle BFC$. Daher muss $\angle BDA = \angle BFC = 90°$ sein (Abb. 2).
Zusatz zu Satz e). Die Höhen betrachtet man als Sehnen in den Kreisen mit den Durchmessern a und b.

2. Vgl. Abb.6. $\frac{AD}{DB} = -\frac{m}{l}$, $\frac{BE}{EC} = -\frac{l}{n}$, $\frac{CF}{FA} = -\frac{n}{m}$, also

$$\frac{AD \cdot BD \cdot CF}{DB \cdot EC \cdot FA} = -1$$

3. Vgl. Abb. 7 und 8. Der Sinussatz führt zu

$$\frac{AD \cdot EB \cdot CF}{FA \cdot DB \cdot EC} = \frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\epsilon}{\sin\psi \sin\epsilon \sin\varphi} = -1$$

4. Vgl. Abb. 10. Im Dreieck ABE betrachten wir die Transversale FC und im Dreieck CBE die Transversale AD; dann ist

$$\frac{c_1(m+n)b_1}{(b_1+b_2)c_2 n} = \frac{(m+n)a_2 b_2}{a_1(b_1+b_2)n} \qquad \text{oder} \qquad \frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2} = 1$$

5. Vgl. Abb. 10. Es gilt $\frac{l}{c_1} = \frac{b_1}{b}$, $\frac{c_2}{l} = \frac{m+n}{n}$, $\frac{k}{a_1} = \frac{n}{m+n}$, $\frac{a_2}{k} = \frac{b}{b_2}$, also

$$\frac{lc_2ka_2}{c_1la_1k} = \frac{b_1(m+n)nb}{bn(m+n)b_2} \quad , \quad \frac{a_2b_2c_2}{a_1b_1c_1} = 1$$

6. Vgl. Abb. 12.

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2} = \frac{\triangle APB \cdot \triangle BPC \cdot \triangle CPA}{\triangle CPA \cdot \triangle APB \cdot \triangle BPC} = 1$$

7. Abb. 13. Man setze in die Lösung von Aufgabe 6

$$\triangle APB = \frac{1}{2} t_a^o c \sin\alpha_1 = \frac{1}{2} t_b^o c \sin\beta_2$$

und entsprechende Ausdrücke für $\triangle BPC$ und $\triangle CPA$ ein. Dann erhält man

$$\frac{\frac{1}{2}t_a^o c\sin\alpha_1 \cdot \frac{1}{2}t_b^o a\sin\beta_1 \cdot \frac{1}{2}t_c^o b\sin\gamma_1}{\frac{1}{2}t_a^o b\sin\alpha_2 \cdot \frac{1}{2}t_b^o c\sin\beta_2 \cdot \frac{1}{2}t_c^o a\sin\gamma_2} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1$$

8. Winkelhalbierende:
a) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c}{b}, \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{a}{c}, \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{b}{a}$, also

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2} = \frac{cab}{bca} = 1$$

b) Der trigonometrische Beweis ist trivial.

Seitenhalbierende :
a) Der geometrische Beweis ist einfach.
b) Man berechnet die Inhalte der Teildreiecke, von denen je zwei gleich sind,

$$\frac{1}{2}cs_a \sin\alpha_1 = \frac{1}{2}bs_a \sin\alpha_2$$

usw., multipliziert die drei Gleichungen miteinander und dividiert beide Seiten durch $\frac{1}{8}abcs_as_bs_c$.

Höhen:
a) Aus ähnlichen Dreiecken findet man $\frac{a_1}{c_2} = \frac{c}{a}$, $\frac{b_1}{a_2} = \frac{a}{b}$, $\frac{c_1}{b_2} = \frac{b}{c}$, und durch Multiplikation ergibt sich daraus

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2} = 1$$

b) Man benutze die Gleichheit der Winkel $\alpha_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \beta_2$.

Mittelsenkrechte :
Die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC sind Höhen in dem Dreieck, dessen Ecken die Mitten der Dreiecksseiten sind. Für die Höhen ist der Satz bereits bewiesen, folglich gilt er auch für die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC (Abb. 17).
Beide Beweisformen des Satzes von Ceva sind anwendbar, wenn man die Ecktransversalen $AM = t_a$, $BM = t_b$ und $CM = t_c$ benutzt (Abb. 18). Die trigonometrische Form lautet

$$\frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\epsilon}{\sin\varphi \sin\psi \sin\epsilon} = 1$$

Für den geometrischen Beweis benutze man die Relationen

$$\frac{BD}{t_a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}, \quad \frac{CE}{t_b} = \frac{\sin\psi}{\sin\gamma}, \quad \frac{AF}{t_c} = \frac{\sin\epsilon}{\sin\alpha}, \quad \frac{CD}{t_a} = \frac{\sin\epsilon}{\sin\gamma}, \quad \frac{AE}{t_b} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \quad \frac{BF}{t_c} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$$

9. a) $\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$
b) $\frac{(s-b)(s-a)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$ Diesen Punkt nennt man auch den Nagelschen Punkt.
c) $\frac{s(s-c)(s-b)}{s(s-c)(s-b)} = 1$
d) $\frac{s(s-b)(s-a)}{s(s-a)(s-b)} = 1$

9'. a) $\frac{BP}{BP} + \frac{AP}{AC} + \frac{CP}{AC} = 1 + \frac{AC}{AC} = 2$. (Abb.21).
b) (Abb. 22).

$$\begin{aligned}\frac{BP}{BB_1} + \frac{AP}{AA_1} + \frac{CP}{CC_1} &= \frac{\triangle ABC + \triangle APC}{\triangle ABC} - \frac{\triangle ABC - \triangle BPC}{\triangle ABC} + \frac{\triangle ABC - \triangle APB}{\triangle ABC} \\ &= \frac{3\triangle ABC + \triangle APC - \triangle APB - \triangle BPC}{\triangle ABC} = 2\end{aligned}$$

10. Abb. 28. Es befinden sich in Ähnlichkeitslage:

a) $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$, Ähnlichkeitspunkt H, Ähnlichkeitsverhältnis $2:1$, also $HA : HA_1 = 2:1$;
b) $\triangle A_1B_1C_1$ und $\triangle FED$, Ähnlichkeitspunkt N, Ähnlichkeitsverhältnis $1:1$, Höhenschnittpunkte H und M; also ist $MD : HA = 1:2$.
Nach a.) ist $MA : NA - 1 = r : r_1 = 2:1$, d.h., der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist doppelt so groß wie der des Feuerbachschen Kreises.

11. a) $F' = \frac{a^2}{16}\sqrt{3}$, b) $F' = 0$, c) $F' = \frac{1}{16}b^2(2\sqrt{3}-3) = \frac{1}{16}a^2\sqrt{3}$.

13. Abb. 33. $2\triangle AO_aE_2 - 2\triangle BCO_a = \rho_a s - \rho_a a = \rho_a(s-a)$

14. a) und b) sind durch Einsetzen zu bestätigen.
c) $\sin\alpha = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
d)

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{2s(s-a)}{bc} - 1\\ &= \frac{s(s-a)+(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc} = 1 - \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}\end{aligned}$$

15. Man benutze die Lösung von Aufgabe 14c und forme um:

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = F$$

22. Neben $\rho_a - \rho$ bestimme man noch $\rho_b - \rho$ und $\rho_c - \rho$. Dann ist

$$(\rho_a-\rho)(\rho_b-\rho)(\rho_c-\rho) = 4^3r^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

Nach (17) ist

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$

und somit [vgl. (22)]

$$\frac{(\rho_a-\rho)(\rho_b-\rho)(\rho_c-\rho)}{\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho} = (4r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \rho^2$$

25. a) Man dividiere durch

$$F = \rho s = \rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c)$$

Es ist $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c}$
b) $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

26. $D_1D_2 = b-c$, $D_2D_3 = c$, $CP = \frac{a-c}{2}$, $D_1D_3 = b$, $D_2D_4 = b$, $CR = \frac{a-b}{2}$, $D_1D_4 = c$, $D_3D_4 = b+c$, $CQ = \frac{a+b}{2}$, $PT = c$.
Die Mitten von D_1D_2 und von D_3D_4 fallen mit dem Mittelpunkt der Seite a zusammen.

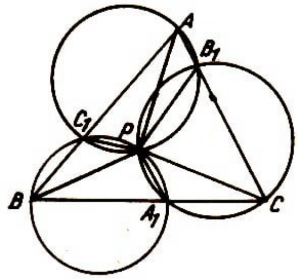


Abb. 92

28. P liegt innerhalb (Abb. 92):

$$\alpha = \angle BPC - \angle C_1A_1B_1 \quad , \quad \beta = \angle CPA - \angle A_1B_1C_1 \quad , \quad \gamma = \angle APB - \angle B_1C_1A_1$$

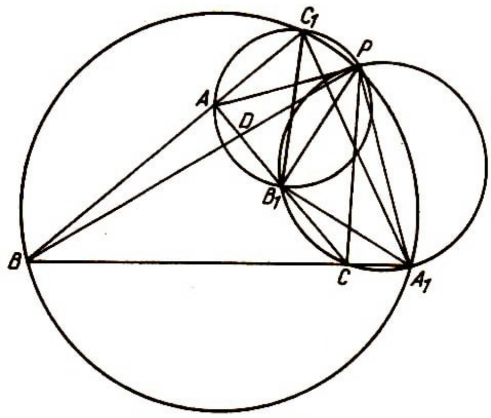


Abb. 93

P liegt außerhalb (Abb. 93)

$$\alpha = \angle BPC + \angle C_1A_1B_1 \quad , \quad \beta = -\angle CPA + \angle A_1B_1C_1 \quad , \quad \gamma = \angle APB + \angle B_1C_1A_1$$

Bei gleicher Benennung von Winkel und Dreieck wird der entgegengesetzte Umlaufsinn bei Außenlage von P durch das entgegengesetzte Vorzeichen gekennzeichnet.

Berechnung von $\angle B_1C_1A_1$ bei Außenlage von P:

$$\angle B_1C_1A_1 = \angle B_1C_1P - \angle A_1C_1P = \angle B_1AP - \angle A_1BP \qquad (1)$$

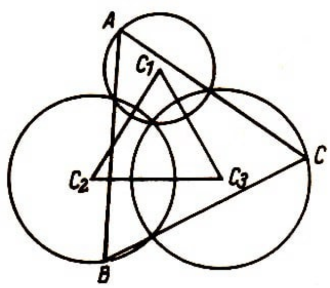
Es ist

$$\angle DAP + \angle DPA = \angle DBC + \angle DCB \qquad \text{(Beweis!)}$$
$$\angle DAP - \angle DBC = \angle DCB - \angle DPA$$
$$\angle B_1AP - \angle A_1BP = \angle DCB - \angle DPA \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\angle B_1C_1A_1 = \gamma - \angle APB$$

29. Die verschiedenen Lagen sind möglich.



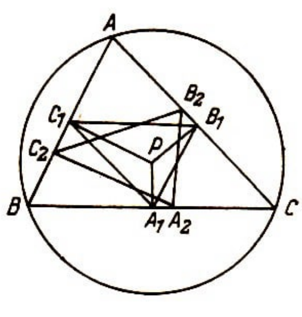


Abb. 94, 95

30. Abb. 94. a.) Die Ecken von $\triangle C_1C_2C_3$ sind Scheitel dreier Zentriwinkel, die den Peripheriewinkeln in den gleichen Kreisen gleich sind, weil diese über den doppelten Kreisbogen stehen: $\triangle ABC \sim \triangle C_1C_2C_3$ (WW).
b) Es lässt sich leicht zeigen, dass in diesem Falle das Miquelsche Fußpunktsdreieck dem $\triangle ABC$ ähnlich ist und daher auch alle durch den Punkt P bestimmten Miquelschen Dreiecke (Abb. 95).

31. a) Fällt beispielsweise P mit A zusammen, so sind die Lote von P auf die Seiten b und c zu Punkten entartet, die in A liegen. Das dritte Lot, die Höhe h_a, ist die Simsonsche Gerade.

b) Zwei Lote von P aus auf die Dreiecksseiten treffen zwei Ecken des Dreiecks. Die sie verbindende Dreiecksseite ist die Simsonsche Gerade.

32. Wenn der Miquelsche Punkt mit dem Umkreismittelpunkt zusammenfällt, d.h., wenn $MP = 0$ ist.

33.

$$r^2 - MP^2 = h_a \cdot 2h_a = 8r^2 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \qquad , \qquad \frac{r^2 - MP^2}{4r^2} = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$F' = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \cdot 2r^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$$

34. Im rechtwinkligen Dreieck sind die Antiparallelen, die den Scheiteln der spitzen Winkel benachbart sind, der Hypotenusenhöhe parallel, die daher von den Symmedianen halbiert wird (Abb. 96).

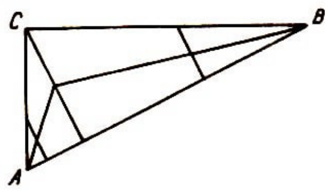


Abb. 96

35. a) Ähnlichkeitspunkt T, Verhältnis $2:1$ (Abb. 47),
b) Ähnlichkeitspunkt N, Verhältnis $2:1$,
c) Ähnlichkeitspunkt T, Verhältnis $1:1$.

86. Abb. 47. T bzw. O sind die Mittelpunkte der Inkreise der ähnlichliegenden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC. Daher ist $AO \parallel A_1T$ (Verbindungsstrecken entsprechender Punkte), und es gilt $AO : A_1T = 2:1$.
AO und A_1T sind Halbierende der Winkel α bzw. α_1.

37. Abb.47. Q_1 sei der Schnittpunkt von B_2C_2 und NE; NE ist Ähnlichkeitsstrahl. Q_1 und E sind entsprechende Berührungspunkte der Inkreise.
$EA_1 = DA_1$ (Beweis!), $OA_1 \parallel AD$. OA_1 schneidet EN in Q'; $EQ' : Q'N = 1:1$ (Strahlensatz). Da auch $EQ_1 : Q_1N = 1:1$ ist, fällt Q' mit Q_1 zusammen.

40. Beide Dreiecke stimmen in den drei Winkeln und im Umkreisradius r überein. Daraus folgt ihre Kongruenz.

41. a) Außenwinkelsatz, b) Sinussatz, c) aus b) folgt

$$\frac{B\Omega}{C\Omega} = \frac{c \sin\gamma}{a \sin\beta} = \frac{c^2}{ab} = \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin\omega}$$

d) Aus $\frac{W_3A}{b} = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha+\omega)}$ und $\frac{W_3B}{a} = \frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin(\alpha+\omega)}$ folgt der in der Aufgabe angegebene Ausdruck.

42. Abb. 53. KP_3Q_1 und KP_1Q_3 sind gleichschenklige Dreiecke (Gleichheit der Basiswinkel). Daraus ergibt sich die Gleichheit der Strecken

$$KQ_1 = KP_3 = KP_1 = KQ_3$$

43. Es handelt sich um drei Rechtecke, bei denen je eine Seite in einer Dreiecksseite liegt, auf der dann zwei Rechtecksseiten senkrecht stehen.

44. Die Beweise ergeben sich leicht analog dem Beweis, der der Aufgabe vorausgeht.

45. Abb. 56. $\angle P_1P_3P_2 = \alpha$, $\angle Q_3Q_2Q_1 = \alpha$, $\angle P_2P_1P_3 = \beta$, $\angle Q_1Q_3Q_2 = \beta$, $\angle P_3P_2P_1 = \gamma$, $\angle Q_2Q_1Q_3 = \gamma$.
Daraus folgt die Kongruenz bzw. Ähnlichkeit.

46. Abb. 58. Kreis mit MK als Durchmesser und Ecktransversalen durch K. Ihre zweiten Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Ecken des Brocardschen Dreiecks.

47. Es ist

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Addition von $x_1y_1 - x_1y_1$ und geeignete Zusammenfassung der Produkte ergibt

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

48. a) Mittelsenkrechte:

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^3 + y_2^2 - y_3^3) = 0$$

b) Seitenhalbierende:

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)(x - x_1) - (x_2 + x_3 - 2x_1)(y - y_1) = 0$$

Die beiden fehlenden Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes. Die Summe der drei linken Seiten ist in jedem Fall gleich Null.

49.

$$N(g_1) - N(g_2) = 0, \qquad N(g_2) + N(g_3) = 0, \qquad N(g_3) + N(g_1) = 0$$

Multiplikation der letzten Gleichung mit -1 und Addition der drei Gleichungen liefert auch auf der linken Seite Null.

50. a) Höhen:

$$N(g_3)\cos\alpha_3 - N(g_2)\cos\alpha_2 = 0 \quad , \quad N(g_2)\cos\alpha_2 - N(g_1)\cos\alpha_1 = 0$$

$$N(g_1)\cos\alpha_1 - N(g_3)\cos\alpha_3 = 0$$

Die Summe der linken Seite ist Null. b) Seitenhalbierende:

$$N(g_2)\sin\alpha_2 - N(g_3)\sin\alpha_3 = 0 \quad , \quad N(g_3)\sin\alpha_3 - N(g_1)\sin\alpha_1 = 0$$

$$N(g_1)\sin\alpha_1 - N(g_2)\sin\alpha_2 = 0$$

Die Summe der linken Seite ist Null.

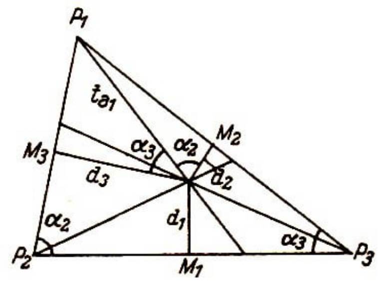


Abb. 97

51. Abb. 97. Ecktransversale zum Umkreiszentrum:

$$N(g_2)\cos\alpha_3 - N(g_3)\cos\alpha_2 = 0 \quad , \quad N(g_3)\cos\alpha_1 - N(g_1)\cos\alpha_3 = 0$$

$$N(g_1)\cos\alpha_2 - N(g_2)\cos\alpha_1 = 0$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ bzw. $\cos\alpha_3$ und addiert sie, so ergibt sich auf der linken Seite Null.

52. a) Die Höhen des Dreiecks:

$$x - x_2 = 0 \tag{1}$$
$$(x_1 - x_2)x - yy_2 = 0 \tag{2}$$
$$x_2 x - y_2 y - x_1 x_2 = 0 \tag{3}$$

Die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes sind

$$x_s = x_2 \quad , \quad y_s = \frac{(x_1 - x_2)x_2}{y_2}$$

b) Die Gleichungen der Mittelsenkrechten der Seiten:

$$2x - x_1 = 0 \tag{1}$$
$$2(x_1 - x_2)x - 2y_2 y - x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 0 \tag{2}$$
$$2x_2 x + 2y_2 y - x_2^2 - y_2^2 = 0 \tag{3}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind

$$x_s = \frac{x_1}{2} \quad , \quad y_s = \frac{y_2^2 - (x_1 - x_2)x_2}{2y_2}$$

c) Die Gleichungen der Seitenhalbierenden:

$$2y_2x - 2x_2y + x_1y - x_1y_2 = 0 \tag{1}$$
$$-y_2x + x_2y + x_1y = 0 \tag{2}$$
$$-y_2x + x_2y - 2x_1y + x_1y_2 = 0 \tag{3}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{3} \quad , \quad y_s = \frac{y_2}{3}$$

d) Die Gleichungen der Winkelhalbierenden:

$$\frac{y_2x - x_2y}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{y_2x + (x_1 - x_2)y - x_1y_2}{\sqrt{y_2^2 + (x_1 - x_2)^2}} = 0 \tag{1}$$
$$\frac{y_2x + (x_1 - x_2)y - x_1y_2}{\sqrt{y_2^2 + (x_1 - x_2)^2}} + y = 0 \tag{2}$$
$$y - \frac{y_2x - x_2y}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = 0 \tag{3}$$

Setzt man $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = a$ und $\sqrt{y_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = b$, so erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes in der vereinfachten Form:

$$x_s = \frac{x_1(a + x_2)}{a + b + x_1} \quad , \quad y_s = \frac{x_1y_2}{a + b + x_1}$$

Aus der Zusammenstellung ersieht man leicht, dass die Summe der drei Gleichungen unter Berücksichtigung der angedeuteten erlaubten Multiplikation in jedem Fall Null ist. Auch die aus den Koeffizienten von je drei Gleichungen gebildete dreireihige Determinante verschwindet. Die berechneten Schnittpunktskoordinaten erfüllen jede der zugehörigen drei Gleichungen.

53. a) Einsetzen in die Inhaltsformel für das Dreieck ergibt

$$2\Delta = x_2\frac{3(x_1 - x_2)x_2 - y_2^2}{6y_2} + (x_1 + x_2)\frac{y_2^2 - 3(x_1 - x_2)x_2}{6y_2} + x_1\frac{3(x_1 - x_2)x_2 - y_2^2}{6y_2} = 0$$

b)

$$D = \begin{vmatrix} x_2 & \frac{(x_1 - x_2)x_2}{y_2} & 1 \\ \frac{x_1 + x_2}{3} & \frac{y_2}{3} & 1 \\ \frac{x_1}{2} & \frac{y_2^2 - (x_1 - x_2)x_2}{2y_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c) Die Gleichung der Geraden HM:

$$y - \frac{(x_1 - x_2)x_2}{y_2} = \frac{y_2^2 - 3(x_1 - x_2)x_2}{y_2(x_1 - 2x_2)}(x - x_2)$$

wird durch $x_s = \frac{x_1 + x_2}{3}$ und $y_s = \frac{y_2}{3}$ identisch erfüllt.

54.

$$a = \frac{(x_1^2+y_2^2)(y_2-y_3)+(x_2^2+y_2^2)(y_3-y_1)+(x_3^2+y_3^2)(y_1-y_2)}{2[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]}$$
$$b = \frac{(x_1^2+y_2^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)}{2[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)]}$$

55.

$$a = \frac{x_1+2x_2}{4} \qquad , \qquad b = \frac{x_2(x_1-x_2)+y_2^2}{4y_2}$$

56.

$$\left(x - \frac{x_1+2x_2}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{x_2(x_1-x_2)+y_2^2}{4y^2}\right)^2 = r^2$$
$$\frac{(x_2^2+y_2^2)[y_2^2+(x_1-x_2)^2]}{16y_2^2} = r^2$$

57. Die Gleichung wird identisch erfüllt.

58. Der Radius R des Umkreises des Dreiecks $P_0P_1P_3$ folgt aus

$$R^2 = \frac{(x_2^2+y_2^2)[y_2^2+(x_1-x_2)^2]}{4y_2^2}$$

zu $R = 2r$.

59. Die Gleichung der Geraden HM und die Koordinaten des Mittelpunktes des Feuerbachschen Kreises können aus Aufgabe 53 c und Aufgabe 55 entnommen werden. Der Mittelpunkt der Strecke HM ist gegeben durch die Formeln $\frac{x_h+x_m}{2}$ und $\frac{y_h+y_m}{2}$. Es ergeben sich die in Aufgabe 55 berechneten Koordinaten

$$x_h = x_2, \quad y_h = \frac{(x_1-x_2)x_2}{y_2}, \quad x_m = \frac{x_1}{2}, \quad y_m = \frac{y_2^2-(x_1-x_2)x_2}{2y_2}$$

60. Es ist

$$1-\lambda-\frac{1}{2}\mu = 0, \qquad 1-\frac{1}{2}\lambda-\mu = 0, \qquad \frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu = 0$$

Daraus ergibt sich $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, $\mathfrak{x}_s = \frac{\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3}{3}$.

61. Abb. 68. $(\mathfrak{x}-\mathfrak{p}_2) \perp \mathfrak{p}_1$, $(\mathfrak{x}-\mathfrak{p}_1) \perp \mathfrak{p}_2$. Man bildet die skalaren Produkte, subtrahiert und erhält $\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{p}-1-\mathfrak{p}_2) = 0$, d.h. $\mathfrak{x} \perp (\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2)$.

62. Abb. 69.

$$\mathfrak{h}_c \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_b \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{b}+\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{c} + (\mathfrak{x}-\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{x} \cdot b - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}$$
$$= \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{c}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{x} \cdot (-\mathfrak{a}) = 0$$

wegen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{o}$, d.h. $\mathfrak{x}\perp\mathfrak{a}$. 63. Abb. 70.

$$\mathfrak{x}-\mathfrak{z}=\mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{z}-\mathfrak{y}=\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{x}+\mathfrak{z}=2\mathfrak{n}_b, \qquad \mathfrak{z}+\mathfrak{y}=2\mathfrak{n}_a,$$
$$\mathfrak{x}^2-\mathfrak{z}^2=2\mathfrak{n}_b\cdot\mathfrak{b}=0, \qquad \mathfrak{z}^2-\mathfrak{y}^2=2\mathfrak{n}_a\cdot\mathfrak{a}=0, \qquad |\mathfrak{x}|=|\mathfrak{z}|, \qquad |\mathfrak{z}|=|\mathfrak{y}|$$

also $|\mathfrak{x}|=|\mathfrak{y}|$.

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{z}=\mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{y}+\mathfrak{z}=2\mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}^2=2\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{c}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist Null, also ist auch $2\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{c}=0$, und da weder $\mathfrak{d}$ noch $\mathfrak{c}$ den Nullvektor darstellen, ist $\mathfrak{d}\perp\mathfrak{c}$.
Die Mittelsenkrechten $\mathfrak{n}_a$, $\mathfrak{n}_b$ und $\mathfrak{d}$ schneiden einander in einem Punkt.

64. Abb. 98. Im Dreieck ABC gilt

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{w}_\beta=m\left(\frac{\mathfrak{a}}{a}-\frac{\mathfrak{c}}{c}\right), \qquad \mathfrak{w}_\gamma=n\left(\frac{\mathfrak{b}}{b}-\frac{\mathfrak{a}}{a}\right), \qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{w}_\gamma=\mathfrak{w}_\beta$$

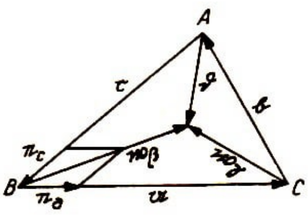
Man findet $m=\frac{ac}{a+b+c}$ und $n=\frac{ab}{a+b+c}$. Setzt man diese Werte in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\mathfrak{w}_\beta=\frac{c\mathfrak{a}-a\mathfrak{c}}{a+b+c}, \qquad \mathfrak{w}_\gamma=\frac{a\mathfrak{b}-b\mathfrak{a}}{a+b+c}, \qquad \mathfrak{d}=\frac{b\mathfrak{c}-c\mathfrak{b}}{a+b+c}$$

Es ist $\mathfrak{d}=\mathfrak{c}+\mathfrak{w}_\beta$. Man berechne $\mathfrak{w}_\alpha$ und $\mathfrak{w}_\beta$ aus $\mathfrak{c}+\mathfrak{w}_\beta=\mathfrak{w}_\alpha$, wenn $\mathfrak{w}_\alpha=r\left(\frac{\mathfrak{c}}{c}-\frac{\mathfrak{b}}{b}\right)$ und $\mathfrak{w}_\beta=m\left(\frac{\mathfrak{a}}{a}-\frac{\mathfrak{c}}{c}\right)$ gesetzt wird.

65.
$$\mathfrak{w}_\beta=\frac{c\mathfrak{a}-a\mathfrak{c}}{a+c-b}, \qquad \mathfrak{w}_{\alpha'}=\frac{-b\mathfrak{c}-c\mathfrak{b}}{a+c-b}, \qquad \mathfrak{w}_{\gamma'}=\frac{a\mathfrak{b}-b\mathfrak{a}}{a+c-b}$$

α' und γ' sind Außenwinkel an den Ecken A bzw. C. α,β',γ' und γ,α',β' liefern analoge Werte.



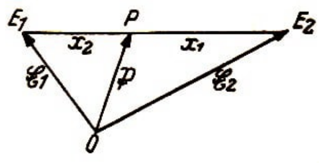


Abb. 98, 99

66. a) $x_1E_1+x_2E_2==(x_1+x_2)P$, in Vektorschreibweise

$$x_1\mathfrak{E}_1+x_2\mathfrak{E}_2=(x_1+x_2)\mathfrak{P} \quad , \quad \mathfrak{E}_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}(\mathfrak{E}_2-\mathfrak{E}_1)=\mathfrak{P} \qquad \text{(Abb. 99)}$$

b) $x_1E_1-x_2E_2=(x_1-x_2)P$, in Vektorschreibweise

$$x_1\mathfrak{E}_1-x_2\mathfrak{E}_2=(x_1-x_2)\mathfrak{P} \qquad \text{(Abb. 100)}$$

E_2E_1 wird durch P außen im Verhältnis $x_1:x_2$ geteilt. Es ist

$$|\mathfrak{E}_1-\mathfrak{E}_2|:|\mathfrak{P}-\mathfrak{E}_1|=(x_1-x_2):x_2$$

Daraus folgt

$$x_2|\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2| = (x_1 - x_2)|\mathfrak{P} - \mathfrak{E}_1| \qquad , \qquad x_1\mathfrak{E}_1 - x_2\mathfrak{E}_2 = (x_1 - x_2)\mathfrak{P}$$

e) $E_1 - E_2 = \overrightarrow{E_2E_1}$. $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \overrightarrow{E_2E_1}$ (Abb. 101).

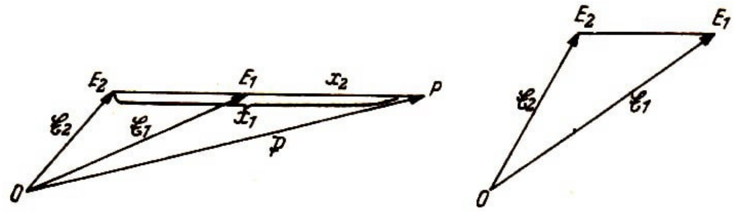


Abb. 100, 101

67.

$$\frac{\Delta}{r}\Omega = \frac{a\sin\alpha\sin\omega\sin(\beta-\omega)}{\sin\beta}\cdot A + \frac{b\sin\beta\sin\omega\sin(\gamma-\omega)}{\sin\gamma}\cdot B + \frac{c\sin\gamma\sin\omega\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}\cdot C$$
$$\frac{\Delta}{r}\Omega' = \frac{a\sin\alpha\sin\omega\sin(\gamma-\omega)}{\sin\gamma}\cdot A + \frac{b\sin\beta\sin\omega\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}\cdot B + \frac{c\sin\gamma\sin\omega\sin(\beta-\omega)}{\sin\beta}\cdot C$$

68. a) Bei der Summierung der baryzentrischen Koordinaten werden die Additionstheoreme der Winkel angewendet. Dabei ist zu beachten, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$ ist, beispielsweise $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$, $\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$.

b) Abb. 90.

$$H + M = 2F \to \mathfrak{h} + \frac{1}{2}(\mathfrak{m} - \mathfrak{h}) = \mathfrak{f} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{h} + \mathfrak{m} = 2\mathfrak{f}$$
$$H + 2M = 3S \to \mathfrak{h} + \frac{2}{3}(\mathfrak{m} - \mathfrak{h}) = \mathfrak{s} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{h} + 2\mathfrak{m} = 3\mathfrak{s}$$
$$H + 2F = 3S \to \mathfrak{m} + \frac{2}{3}(\mathfrak{f} - \mathfrak{m}) = \mathfrak{s} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{m} + 2\mathfrak{f} = 3\mathfrak{s}$$
$$H + 3S = 4F \to \mathfrak{h} + \frac{3}{4}(\mathfrak{s} - \mathfrak{h}) = \mathfrak{f} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{h} + 3\mathfrak{s} = 4\mathfrak{f}$$

69. Die Rechnungen erfolgen wie in Aufgabe 68a.

70. a) Man benutze die Ergebnisse von Aufgabe 67 und drücke $\cot\beta + \cot\gamma$ durch die Gleichung $\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ aus.
Es ergibt sich

$$M_1 = \frac{r}{2\Delta}[a\sin\omega\sin(\alpha+\omega)\cdot A + b\sin\omega\sin(\beta+\omega)\cdot B + c\sin\omega\sin(\gamma+\omega)\cdot C]$$

b) M_1 kann auch aus den baryzentrischen Koordinaten von K und M errechnet werden.

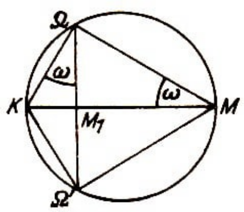


Abb. 102

Es ist (Abb. 102)

$$KM_1 : M_1M = \sin^2\omega : \cos^2\omega$$
$$(M_1 - K)\cos^2\omega = (M - M_1)\sin^2\omega$$
$$M_1 = M\sin^2\omega + K\cos^2\omega$$

Ergebnis wie zu a).

Bemerkung. Die baryzentrischen Koordinaten von M_1 sind die Inhalte der Dreiecke BM_1C, CM_1A und AM_1B. Sie lassen sich auch direkt berechnen (vgl. Abb. 52 und 55).

10 Literaturhinweise

Die Sätze über die Höhen, die Seitenhalbierenden, die Winkelhalbierenden des Dreiecks und die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten finden sich in fast allen im Unterricht verwendeten Büchern.

Für Kapitel V wurde benutzt:

[1] Johnson, R. A. (ed. John Wesley Young), Advanced euclidean geometry (Modern geometry), Dover Publications, Inc., New York 1960. (Gute Übersicht über die Ergebnisse moderner Forschung.)

Zur Einführung in die analytische Geometrie werden empfohlen:

[2] Crantz, P., und M. Hauptmann, Analytische Geometrie der Ebene, 14. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963.

[3] Ganter, H., und F. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie, 1. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene, 6. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig-Berlin 1906.

[4] Schoenflies, A., und M. Dehn, Einführung in die analytische Geometrie, Springer, Berlin 1931.

[5] Blaschke, W., Analytische Geometrie, 2. Aufl., Verlag Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1954.

Zur Vektorrechnung fanden Verwendung bzw. dienen auch weiterführenden Studien:

[6] Jahnke, E., Vorlesungen über Vektorenrechnung, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1905. (Hier ist auch die Darstellung der baryzentrischen Koordinaten enthalten.)

[7] Hieke, M., Vektoralgebra, 2. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963.

[8] Lagally, M., Vorlesungen über Vektorrechnung, 7.Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1964.

In die Determinantentheorie führen ein:

[9] Fischer P., Determinanten, 4. Aufl., W. de Gruyter & Co., Berlin- Leipzig 1944.

[9a] Belkner, H., Determinanten, 2. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

[10] Kowalewski, G., Einführung in die Determinantentheorie, 4. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1954.

Die erforderlichen Grundlagen der analytischen Geometrie und der Vektorrechnung sind auch enthalten in:

[11] Willers, Fr., Elementar-Mathematik, 13. Aufl., Theodor Steinkopff, Dresden 1968.

[12] Holtmann, F., Mathematik, Band 2: Geometrie, 5. Aufl., Fachbuchverlag, Leipzig 1964.

Zur Weiterbildung werden empfohlen:

Alexandroff, P. S., u.a. (Hrsg.), Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, V: Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969 bzw. 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).

Böhm, J., u.a., Geometrie, I: Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

Böhm, J., u.a., Geometrie, II: Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie, Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie, geometrische Konstruktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

Boltjanski, W. G., und I. Z. Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

Crantz, P., und M. Hauptmann, Ebene Trigonometrie, 11. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962.

Crantz, P., und M. Hauptmann, Planimetrie, 10. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1961.

Dubnow, J. S., Fehler in geometrischen Beweisen, 5. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

Efimow, N. W., Über die Grundlagen der Geometrie (Höhere Geometrie, Teil I), 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

Golowina, I. M., und I. M. Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

Hameister, E.. Geometrische Konstruktionen und Beweise. 3. Aufl. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979.

Jaglom, I. M., und W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).

Keller, O.-H., Analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

Klotzek, B., Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

Listernik, L. A., Kürzeste Linien, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).

Perelmann, J. I., Unterhaltsame Geometrie, 2. Aufl., Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963 (Übersetzung aus dem Russischen).

Steinhaus, H., Kaleidoskop der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Polnischen).

Steinhaus, H., 100 Aufgaben, Urania-Verlag, Leipzig-Jena-Berlin 1968 (Übersetzung aus dem Polnischen).

Steinhaus, H., 100 neue Aufgaben, Urania-Verlag, Leipzig 1973 (Übersetzung aus dem Englischen).