Laszlo Lovasz, Katalin Vesztergombi, Jozsef Pelikan

Kombinatorik

Übersetzung: Günther Eisenreich
1977 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 90
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

1 Wie ist das Buch zu benutzen

Wir haben unser Buch in erster Linie für die Schüler ab der 7. und 8. Klasse der Polytechnischen Oberschule vorgesehen. Um es möglichst gut nutzen zu können, möchten wir euch einige Ratschläge geben.

Ihr werdet bemerken, dass in den Text Aufgaben eingestreut sind. Immer, wenn ihr zu einer Aufgabe gelangt seid, haltet mit dem Lesen inne und geht so lange nicht weiter, bis ihr die Aufgabe gelöst habt.
Manchmal werdet ihr auch Fragen im Text finden; versucht, auch diese zu beantworten. Schlagt nur dann bei den Lösungen nach, wenn ihr die Aufgabe schon gelöst habt (oder wenn ihr bereits längere Zeit erfolglos darüber nachgedacht habt).
Die Lösungen sind im allgemeinen nur skizzenhaft ausgeführt; sie enthalten den Grundgedanken der Lösung.

Gelegentlich werdet ihr überhaupt keine Lösung finden: wenn ihr eine solche Aufgabe nicht lösen konntet, so bedeutet dies, dass ihr die vorangegangenen Teile nicht aufmerksam genug gelesen habt. Dann müsst ihr die Teile, die das zur Lösung benötigte Material enthalten, nochmals durcharbeiten!

Wir wünschen eine angenehme Lektüre und hoffen, dass auch das Buch von Nutzen sein wird.

Inhaltsverzeichnis

1 Wie ist das Buch zu benutzen **2**

2 Wir wollen zusammenzählen! **3**

3 Kombinatorik in der Arithmetik **21**

4 Kombinatorik in der Geometrie **34**

5 Blockpläne **64**

6 Lösungen **76**

2 Wir wollen zusammenzählen!

Na, was soll daran schon schwer sein! Zählen erlernen wir schon in den unteren Klassen - wir sehen förmlich, dass ihr dies im Inneren denkt. Wir wollen euch jetzt zeigen, dass es oft viel einfacher ist, etwas geschickt zu berechnen, als bloß zusammenzuzählen, weil man hierbei manchmal viel nachdenken muss und damit auch mehr erreicht.
Dieser Weg führt in das Reich der Kombinatorik. Wir wollen uns mit den Kindern bekanntmachen, die unsere Reisegefährten sein werden!

Zu Andrea kommen ihre Klassenkameraden zu Besuch: Albert, Achim, Dora, Elisabeth, Fränzchen und Gabriel, alle mit ihren Eltern.

- Wieviel werden es denn sein? - fragt Andrea während des Tischdeckens und beginnt bereits aufzuzählen: - Mutti, Vati, ich. Elisabeth, Dora, Onkel Stephan, Tante Käthe, Tante Lisbeth, ...

Genug, genug! Von jedem Ort kommen jeweils drei, es werden also insgesamt sieben mal drei, d.h. einundzwanzig sein - sagt Mutti, und wenn Andrea mit den Gedanken nicht nur beim Kaffeetrinken wäre, hätte sie sich das schon selbst klargemacht.
Die Gäste treffen ein, und die Kinder geben einander zur Begrüßung die Hand. Andrea hat, so scheint es, aus dem vorigen Fall Nutzen gezogen. denn ihr ist etwas eingefallen:

- Wieviel Händedrücke ergibt das? Wer es herausfindet, bekommt Torte.

Nach kurzem Schweigen ergriff Dora das Wort:

- Ich jedenfalls habe sechsmal die Hand gegeben.
- Ich desgleichen - sagte Gabi.
- Natürlich hat jeder sechs anderen die Hand gegeben - meldete sich Achim zu Wort. Da wir sieben sind, ergibt das insgesamt $7 \cdot 6 = 42$ Händedrücke.
- Das scheint mir zu viel zu sein - sagte Elisabeth. Fränzchen warf gereizt ein:
- So, wie Achim zählt, zählt er jeden Händedruck zweimal. wenn sich zwei Kinder die Hand geben.
- Achim hat ganz recht - sagte Albert, - er hat nur vergessen, dass an jedem Händeschütteln zwei beteiligt sind und dass wir das Händeschütteln bei beiden berücksichtigt haben. Daher ist die 42 noch durch 2 zu teilen, d.h., wir bekommen 21 Händedrücke.
- Setzt euch an den Tisch! - sprach inzwischen die Mutter. -, Jeder bekommt von der Torte.

- Es kommt nicht darauf an, wohin ich mich setze, denn wir werden halbstündlich tauschen, so dass jede Sitzordnung einmal an die Reihe kommt - meinte Andrea, und Gabi fügte hinzu:
- Du bleibst freilich am oberen Ende des Tisches sitzen. weil du Geburtstag hast. -

Zum Glück vergaßen die Kinder den letzten Ausspruch von Andrea. Dafür wollen wir jetzt nachträglich ausrechnen, wie lange sie dort hätten bleiben müssen, um jede Sitzordnung an die Reihe kommen zu lassen. Da es natürlich schwer ist, sich unter den Sitzordnungen von sechs Gästen zurechtzufinden, wollen wir uns zunächst anschauen, wie es sich verhielte, wenn weniger Gäste anwesend wären (und damit auch weniger Stühle um den Tisch stünden).

Würde nur Albert kommen, so gäbe es nur eine Sitzordnung.
Wenn Albert und Achim kommen, so können sie sich auf zwei Weisen setzen: wenn sich der eine von ihnen auf einem Stuhl niederlässt, so kann sich der andere nur noch auf den anderen. leergebliebenen Stuhl setzen. Untersuchen wir jetzt, wie es im Falle von drei Gästen aussieht.

Wir wollen die Stühle, wie in Abbildung 1 angegeben, durchnummerieren und die Sitzordnungen geschickt in einer Tabelle zusammenfassen. Es ist zweckmäßig, bei der Herstellung der Tabelle so vorzugehen, dass wir zunächst diejenigen Sitzordnungen aufschreiben, bei denen etwa Dora auf dem Stuhl 3 sitzt, und dann in der Weise fortfahren, dass wir erst Achim und dann Albert auf den Stuhl 3 setzen. Wir erhalten dann die Tabelle:

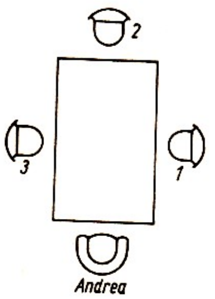


Abb. 2.1

Auf dem Stuhl Nummer		
1	2	3
sitzt		
Albert	Achim	Dora
Achim	Albert	Dora
Albert	Dora	Achim
Dora	Albert	Achim
Achim	Dora	Albert
Dora	Achim	Albert

Wir haben also sechs Sitzordnungen bekommen. Ehe wir weiter gehen, wollen wir diese Tabelle ein wenig anschauen!
Wieviel Gruppen gibt es? Offensichtlich drei, nämlich so viele, wie es Gäste gibt, da wir doch jeden von ihnen auf den Stuhl 3 setzen können. In jeder einzelnen Gruppe ist dagegen die Anzahl der Sitzordnungen gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die übrigen beiden Kinder auf die anderen beiden Plätze zu setzen, nämlich zwei.

Wir wollen jetzt versuchen uns vorzustellen, wie die Tabelle im Falle von vier Gästen aussehen würde. Wenn wir die möglichen Sitzordnungen danach gruppieren, wer auf dem Stuhl 4 sitzt, so bekommen wir offenbar vier Gruppen.
In jeder einzelnen Gruppe gibt es dagegen so viele Sitzordnungen, wie verschiedene Möglichkeiten bestehen, die übrigen drei Gäste auf die Stühle 1, 2 und 3 zu platzieren. Wir haben aber eben ausgerechnet, dass dies auf sechserlei Weisen möglich ist.
Im Falle von vier Gästen ergeben sich also insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Sitzordnungen.

Im Falle von fünf Gästen werden offenbar in fünf Gruppen je 24 Sitzordnungen möglich sein, die Anzahl aller Sitzordnungen ist also $5 \cdot 24 = 120$.
In unserem Fall schließlich, in dem es sechs Gäste gibt, können wir aus den Sitzordnungen sechs Gruppen bilden, je nachdem, wer auf dem Stuhl 6 sitzt, und in jeder solchen Gruppe werden so viele Sitzordnungen enthalten sein, wie es Möglichkeiten gibt, fünf Kinder auf fünf Plätze zu setzen, nach dem Obigen also 120.
Daher müssten die Kinder der Reihe nach $6 \cdot 120 = 720$ Sitzordnungen einnehmen, wenn sie dem Wunsch von Andrea nachkommen wollten.

Dies würde jedoch 15 Tage, d.h. mehr als zwei Wochen dauern (wenn sie zwischendurch nicht schlafen würden)! Das ist ein Zeitraum, der sich noch vorstellen lässt.
Weitere Gäste würden aber bereits zu großen Komplikationen führen: würden beispielsweise 11 Gäste kommen, so würden wir durch Wiederholung der früheren Überlegung zu dem Ergebnis gelangen, dass dann 39916800 Sitzordnungen möglich sind. Die Realisierung so vieler Sitzordnungen (bei halbstündlichem Wechsel) könnte dann in unseren Tagen beendet werden, wenn das Abendbrot noch in der Zeit des Römischen Reiches begonnen hätte!

Aufgabe
1. Wie viele Sitzordnungen würde es geben, wenn Andrea nicht nur an der Spitze des Tisches sitzen könnte?

Wie es scheint, hat sich Albert mit dem Tortengewinn nicht zufrieden gegeben, denn er fragt jetzt:
- Was wäre, wenn wir unser Geld zusammenlegen und einen Bündel Lottoscheine kaufen würden, so viele, dass uns ein Fünfer sicher sein würde?

Die Aussicht auf einen großen Gewinn wurde von allen mit Begeisterung aufgenommen, aber niemand war in der Lage zu berechnen, wieviel Scheine dazu ausgefüllt werden müssten. Wir wollen ihnen dabei helfen!

Zum Ausfüllen der Lottoscheine werden sehr viele verschiedene Methoden angewendet. Möglicherweise gibt es dabei auch jemanden, der von einem Geländelauf ausgeht, bei dem 90 Mann starten, und der die Startnummern der fünf Erstplatzierten tippt. Wir wollen zusammenrechnen, wie viele Endergebnisse der Wettkampf ergeben kann, wenn nur die fünf Ersten berücksichtigt werden.

Erster kann irgendeiner unter den 90 sein. Wer dieser auch immer gewesen sein möge, für den Zweiten bleiben noch 89 Möglichkeiten. Wenn wir also nur den Ersten und den Zweiten prämieren würden, so bekämen wir $90 \cdot 89$ Möglichkeiten. Berücksichtigen wir dagegen auch die dritte Platzierung, so eröffnet jede der vorstehenden $90 \cdot 89$ Möglichkeiten weitere 88 Möglichkeiten, es sind also bei Berücksichtigung der ersten drei Platzierungen $90 \cdot 89 \cdot 88$ Endergebnisse möglich.
Es liegt auf der Hand, wie es weitergeht. Als Endergebnis erhalten wir, dass es in einem Wettkampf von 90 Läufern für die ersten Fünf $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ Möglichkeiten gibt.

Was hat das nun mit dem Lotto zu tun? Wir müssen dazu bedenken, dass wir nur die Startnummern der fünf Ersten tippen können. Die Anzahl der möglichen Endergebnisse ist demnach genau so groß wie die Anzahl der Zahlenfünfer, die man aus den ersten 90 Zahlen auswählen kann. Dasselbe gilt auch für die Lottozahlen. Oder ist das vielleicht nicht so?!

Wir sind demselben Fehler verfallen, den früher Achim beim Zusammenzählen der Händedrücke begangen hatte. Im Wettkampf bedeutet nämlich der Zahlenfünfer 5, 9, 42, 69, 28 ein anderes Endergebnis als der Zahlenfünfer 69, 42, 28, 5, 9, während beide beim Lotto dasselbe bedeuten.
Das heißt aber, dass wir unter den Wettkampffünfern jeden Lottofünfer mehrfach gezählt haben. Wir müssten angeben, wie oft. Offenbar gerade so oft, auf wie viele Weisen man die Zahlen des Lottofünfers anordnen könnte.

Wir haben aber schon vorhin ausgerechnet, dass das gerade 120 Möglichkeiten ergibt (nur dass wir damals nicht die fünf Zahlen eines Lottofünfers, sondern fünf Gäste in eine Reihe angeordnet haben). Die Anzahl der auszufüllenden Lottoscheine, unter denen sicher ein Fünfer vorkommen wird, beträgt also

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Da diese 21974634 Mark kosten, ist es unwahrscheinlich, dass die Kinder so viel Geld haben werden (außerdem ist übrigens der zu erwartende Gewinn um ein gut Teil geringer).

Aufgaben
2. Wie viele verschiedene Lottoscheine würde es geben, wenn nur zwei Zahlen markiert werden müssten?

3. Überlegt euch, was für ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Händedrücke und der Anzahl der verschieden ausgefüllten Lottoscheine besteht!

Nach der schweren Denkaufgabe beginnt die Gesellschaft zu tanzen. Wir wollen sie dabei nicht stören, sondern uns statt dessen überlegen, wie viele verschiedene Tanzpaare. möglich sind.
Diese Aufgabe ist in der Tat nicht schwer. An Tanzpaaren, deren Damenpartner Andrea ist, gibt es vier (das bedeutet auf gut Deutsch, dass Andrea mit vier Jungen tanzen kann). Ebenso können auch Dora und Elisabeth mit je vier Jungen tanzen, also sind insgesamt $3\cdot$ 4, d.h. 12 Tanzpaare möglich.

Aufgabe
4. Wie viele Tanzpaare kann man auswählen, wenn es in einer Gesellschaft 10 Jungen und 16 Mädchen gibt? Wie viele, wenn an einem fiktiven Tanzfest 10000 Mädchen und 20000 Jungen teilnehmen?

Vom Tanz ermüdet, ging von den Kindern immer mal eines nachsehen, was die Eltern machen. Vier spielten gerade Bridge, und Dora stellte sich hinter den Vater, um zu kiebitzen.

"Vati, du hattest doch auch neulich dasselbe Blatt", sagte Dora.
"Das glaube ich nicht; überlege dir doch nur mal, wie vielerlei Karten ich bekommen kann", erwiderte der Vater.
"Ich kann nicht sagen, wie vielerlei Karten du haben kannst, weil ich die Bridgeregeln nicht kenne."
"Wenn du es tatsächlich ausrechnen willst, brauchst du nur so viel zu wissen, dass es 52 Karten gibt und ich 13 Karten bekomme."

Wir wissen nicht, ob dies von Dora dort an Ort und Stelle ausgerechnet werden konnte, aber ihr könnt, wenn ihr das Buch bis hierher aufmerksam durchgelesen habt, jetzt mit Recht sagen:

"Das ist doch dasselbe wie das Lotto, nur dass hier jetzt unter 52 Zahlen 13 zu wählen sind."
Nach dem Vorbild der dort durchgeführten Rechnung ließe sich auch hier die Anzahl der verschiedenen Blätter ermitteln. Bestimmt sie! (Das Endergebnis lautet 635013559600.)

Wir verabschieden uns jetzt von der Gesellschaft und wollen das soeben Gelernte besprechen.

2.1. Wir hoffen, dass wir euch davon überzeugen konnten, dass geschicktes Zählen durchaus interessant ist.

Dem Bisherigen haftete als großer Mangel an, dass wir nur sehr konkrete Fälle untersucht haben. An mehreren Stellen gab es Aussagen der Art: "Das haben wir im wesentlichen bereits ausgerechnet", obgleich wir etwas ganz anderes ausgerechnet hatten (beispielsweise haben wir von der Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen der fünf Lottozahlen behauptet, dass sie genau so groß ist wie die Anzahl der Sitzordnungen bei unseren fünf Gästen).
Wir konnten erkennen, dass es sich auch bei ganz anderen Zahlenangaben im wesentlichen um dieselbe Aufgabe handelte (beispielsweise beim Lotto und Kartenspiel). Es wäre daher gut, Verfahren kennenzulernen, mit denen man diese scheinbar verschiedenen Aufgaben einheitlich lösen kann.

Schließlich haben wir noch eine Nachlässigkeit begangen, als wir bei der Auszählung der Sitzordnungen im Falle von fünf Gästen nur kurz so viel gesagt hatten, dass es "in fünf Gruppen offenbar je 24 Sitzordnungen geben wird", und nicht im einzelnen ausgeführt haben, wie die Gruppierung durchzuführen ist.
An dieser Stelle hätten wir freilich diesen Mangel leicht beheben können, denn wir hätten lediglich den vorher durchgeführten Gedankengang zu wiederholen brauchen; was hätten wir aber tun sollen, wenn von 100 oder gar 1000 Gästen die Rede gewesen wäre?

Wir haben das Gefühl, dass die einzige Schwierigkeit, die Überlegung 1000 mal zu wiederholen, der Zeitmangel gewesen wäre; deshalb müssen wir aber auf diese Frage noch einmal zurückkommen.

2.2. Auf die Frage, warum die Anzahl der Reihenfolgen der Lottozahlen genau so groß wie die Anzahl der Sitzordnungen ist, werdet auch ihr sicher antworten können. In beiden Fällen war "etwas" (die Gesellschaft oder der Zahlfünfer) anzuordnen, und dieses "Etwas" bestand in allen beiden Fällen aus 5 "verschiedenerlei Dingen".
Wir mussten berechnen, wie viele solche Anordnungen möglich sind. Dieses Wort "etwas" ruft ein unsicheres Gefühl hervor; wir wollen daher lieber stattdessen die in der Mathematik eingebürgerten Bezeichnungen gebrauchen:

Jedwede Gesamtheit wird in der Mathematik Menge genannt.
Auch in unserem Falle handelt es sich um Mengen: die Gesellschaft ist die Menge der Kinder; der Zahlenfünfer ist die Menge der getippten Lottozahlen.

Diejenigen "verschiedenen Dinge", aus denen die Menge besteht, heißen die Elemente der Menge.
So sind beispielsweise die Kinder die Elemente der Gesellschaft, die getippten Zahlen die Elemente des Zahlenfünfers oder zum Beispiel die Spielkarten die Elemente des Kartenhaufens, d.h. der Menge der Spielkarten.

Es ist auch zugelassen, dass eine Menge aus nur einem Element besteht; wir können sogar von der leeren Menge sprechen, die überhaupt kein Element enthält. Man braucht vor letzterer keineswegs zu erschrecken, sie spielt dieselbe Rolle wie unter den Zahlen die 0. Ähnlich wird sie auch bezeichnet, mit $\varnothing$. Die Elementeanzahl der leeren Menge beträgt offensichtlich Null.

Wir können eine Menge dadurch vorgehen, dass wir ihre Elemente aufzählen; in diesem Falle bezeichnen wir die Menge selbst in der Weise, dass wir ihre Elemente aufschreiben und sie in geschweifte Klammern einschließen: $\{\}$.
Beispielsweise lautet die obige Gesellschaft. als Menge geschrieben, {Andrea, Albert, Achim, Dora, Elisabeth, Fränzchen, Gabi} oder kürzer {Andrea und ihre Gäste }.

Unser erstes kleines Problem können wir nunmehr in die Sprache der Mathematik übersetzen: "Wie groß ist die Elementezahl der Menge der heute abend hier anwesenden Leute?"
Um auch die Antwort von Andreas Mama zu "übersetzen", müssen wir noch einige Benennungen kennenlernen. Löst jedoch vorher noch die folgenden Aufgaben!

Aufgaben
5. Nennt diejenigen Mengen, deren Elemente a) Gebäude, b) Menschen, c) Schüler, d) Bäume, e) Zahlen, f) Punkte sind.

6. Was sind die Elemente der folgenden Mengen: a) Armee, b) Menschheit, c) Pioniergruppe, d) Bibliothek, e) Tierreich?

7. Nennt eine Menge, die aus a) 52, b) 13, c) 32, d) 100, e) 90, f) 2000000 Elementen besteht!

8. Wir schreiben eine ungewohnte Menge auf: {Andrea, $\{1\}$}. Was sind ihre Elemente?

2.3. Wenn ihr die obigen Aufgaben durchdacht habt, so habt ihr erkannt, dass die "Menschheit" die Menge der Menschen, die "Pioniergruppe" die Menge der Pioniere der Schule ist.
Gibt es etwas den beiden Mengen Gemeinsames?
Ja, die Elemente von beiden sind Menschen. Nur, dass die eine alle Menschen enthält, während

die Pioniergruppe nur aus gewissen Menschen (aus den Pionieren der Schule) besteht. Oder wir könnten das ungarische Volk nehmen: auch hierfür gilt, dass es nur aus gewissen Menschen besteht (aus den Ungarn). Beide Mengen (und wir könnten noch sehr viele andere nennen) bilden einen Teil der Menschheit.

Wir werden es noch oft mit Mengen zu tun haben, die aus gewissen Elementen einer anderen Menge bestehen, d.h. Teil der anderen sind. Dann nennen wir die betreffende Menge Untermenge oder Teilmenge der anderen Menge. So sind die Pioniergruppe und das ungarische Volk Untermengen der Menschheit. Dabei ist zugelassen, dass die "gewissen" Elemente sogar alle Elemente sind: es ist also jede Menge Untermenge von sich selbst.
Es kann auch der Fall eintreten, dass überhaupt kein Element zu den "gewissen" Elementen gehört, d. h., die leere Menge ist Untermenge jeder Menge.

Aufgaben
9. Ist das Element eine Untermenge?

10. Zählt alle Untermengen der folgenden Menge auf : $\{0, 1, 3\}$! Wie viele gibt es?

11. Nennt mehrere Mengen, von denen {Andrea, Dora, Elisabeth} eine Untermenge ist!

12. Nennt eine Menge, von der die Mengen $\{1, 3, 4\}4$ und $\{0, 3, 5\}$ Untermengen sind! Bestimmt diejenige mit möglichst wenig Elementen!

Wenn zwei Schulen zusammengelegt werden, so wird sich das Lehrerkollegium der neuen Institution aus allen den Lehrern zusammensetzen, die entweder an der ersten oder an der zweiten Schule oder eventuell an allen beiden unterrichtet haben.
Wir nennen allgemein Vereinigung (oder Vereinigungsmenge) zweier Mengen die Menge aller derjenigen Elemente, die entweder Elemente der einen Menge oder der anderen Menge oder beider Mengen sind. Im obigen Beispiel ist das Kollegium der neuen Institution die Vereinigungsmenge der Lehrerkollegien der beiden Schulen.

Aufgaben
13. Welche Menge würdet ihr Vereinigung von $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ und $\{b, c, d, e\}$ nennen? Schreibt auf, was die Vereinigung der ersten beiden ist, danach die Vereinigung hiervon und von der dritten! Bildet ebenso die Vereinigung der zweiten und dritten Menge und hiervon die Vereinigung mit der ersten! Formuliert, was unter der Vereinigungsmenge von mehr als zwei Mengen zu verstehen ist!

14. Was für ein Zusammenhang besteht zwischen der "Vereinigungsmenge" und Aufgabe 12?

15. Wir wollen die Vereinigungsmenge einer fünfelementigen und einer neunelementigen Menge bilden. Kann die Elementezahl dieser Vereinigungsmenge 4, 6, 9, 10, 14, 20 betragen? Nennt für diese Fälle Beispiele!

16. Wir bilden die Vereinigung einer n- und einer m-elementigen Menge (wo n und m vorgegebene natürliche Zahlen sind und etwa $n < m$ ist). Wie groß kann die Elementezahl der erhaltenen Menge sein?

Die Menge der Elemente, die zwei Mengen gemeinsam sind, heißt Durchschnitt der beiden Mengen (diese Benennung rührt davon her, dass die gemeinsamen Punkte zweier Ebenen gerade von der Schnittgeraden der beiden Ebenen gebildet werden).

Aufgaben
17. Was ist der Durchschnitt der Mengen $\{0, 1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$?

18. Was ist der Durchschnitt der Menge der Schülerinnen und derjenigen der Schüler einer Klasse?

19. Was ist der Durchschnitt der Menge der geraden Zahlen und der der Primzahlen?

20. Wie groß kann die Elementezahl des Durchschnitts einer m- und einer n-elementigen Menge sein?

21. Wir wollen die Vereinigungsmenge und den Durchschnitt einer m- und einer n-elementigen Menge bilden! Die Elementezahl der Vereinigung werde mit p und die Elementezahl des Durchschnitts mit q bezeichnet. Beweist, dass $p+q=m+n$ ist!

22. Formuliert nunmehr in der Sprache der Mathematik, wie Andreas Mutti die Gäste zusammengezählt hat!

2.4. Wir haben uns in der Einleitung vorwiegend mit dem Problem beschäftigt, auf wie viele Weisen man die Elemente einer Menge in einer Reihe anordnen kann. Die Anzahl der Elemente der betrachteten Menge wollen wir mit n bezeichnen.
Wir haben die Anzahl der Anordnungen für den Fall berechnet, dass $n = 2,3,4,5,6$ ist. Nehmen wir noch hinzu, dass im Falle nur eines Elementes eine einzige "Reihenfolge" möglich ist, so können wir die folgende Tabelle aufstellen:

n	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Anordnungen	1	2	$6=2\cdot 3$	$24=2\cdot 3\cdot 4$	$120=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$	$720=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$

Die Frage lautete: Auf wie viele Weisen lassen sich n Elemente in einer Reihe anordnen?
Unseren bisherigen Erfahrungen nach wird die Antwort hierauf durch folgende Rechenvorschrift gegeben:
Es sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 11 zu multiplizieren (wir haben zwar nur die Zahlen von 2 ab multipliziert, um aber keine Ausnahme zu machen, wollen wir davor noch die 1 als Faktor schreiben!).

Es ist zweckmäßig, für dieses Produkt eine besondere Bezeichnung einzuführen: wir bezeichnen es mit $n!$ (lies: n Fakultät). Es ist also $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ usw. Für die Fakultäten gilt die folgende Gleichheit:
$$(n+1)\cdot n! = (n+1)! \tag{1}$$
Wir bekommen nämlich $(n+1)!$ dadurch, dass wir das über die ganzen Zahlen von 1 bis n erstreckte Produkt noch mit $(n+1)$ multiplizieren. (1) ist auch dann anwendbar, wenn die obige kursiv geschriebene Regel keine Aufklärung gibt.

Was soll es beispielsweise bedeuten, die Zahlen von 1 bis 1 zu multiplizieren? Dieses Produkt hat keinen Sinn. In (1) können wir dagegen 1 an Stelle von n eintragen und bekommen
$$2\cdot 1! = 2!$$
Hier ist der Wert auf der rechten Seite 2, die Beziehung kann also nur dann für $n=1$ gelten, wenn $1! = 1$ ist. Analog ergibt sich für $n=0$
$$1\cdot 0! = 1!$$
Hieraus ist ersichtlich, dass die Beziehung für $n=0$ nur dann bestehen kann, wenn $0! = 1$ ist.

Auf Grund unserer Zahlenbeispiele vermuten wir, dass man eine n-elementige Menge auf $n!$

Weisen anordnen kann. Für $n = 1$ ist dies richtig, weil sich eine einelementige Menge offenbar nur auf eine einzige Weise anordnen lässt.
Ist das aber auch für $n = 1000$ richtig? Würden wir die bei der Bestimmung der An- zahl der Sitzordnungen verwendete Überlegung 1000 mal wiederholen, so würden wir feststellen, dass auch für 1000 gerade $1000!$ die Anzahl der Sitzordnungen angibt.
Es wäre aber außer- ordentlich umständlich und langweilig, die Überlegung so oft zu wiederholen, und wenn wir sie zu Ende geführt hätten, könnten wir noch immer dieselbe Frage beispielsweise für $n = 10000$ stellen.

Nun kann man aber sagen: Jemand, der sich davon überzeugt hat, dass die Überlegung tatsächlich beliebig oft durchgeführt werden kann, wird davon überzeugt sein, dass $n!$ die Anzahl der Anordnungen ist. Diese "Überzeugung" wollen wir jetzt in eine exakte mathematische Form kleiden. Vorher wollen wir jedoch noch die wichtigste Beweismethode der Kombinatorik kennenlernen, die vollständige Induktion.

2.5. Wir wollen mit einer Aufgabe beginnen!
In der Nähe einer Schule wird eine neue Konditorei eröffnet. Am ersten Tag verirrt sich Judith hinein und kauft für einen Groschen Eis. Da ihr das Eis sehr gut schmeckt, lädt sie anderentags zwei Klassenkameraden ein, und zu dritt kaufen sie für je einen Groschen Eis. Am dritten Tag laden sie zwei weitere Mitschüler ein, sie gehen jetzt also bereits zu fünft.
Den folgenden Tag nehmen sie noch zwei Mitschüler mit sich. Allgemein werden jeden Tag zwei weitere Mitschüler eingeladen, es gehen also immer zwei mehr Eis essen als am vorhergehenden Tag. Wir fragen: Wieviel Groschen haben sie in den ersten n Tagen insgesamt bezahlt?

Den ersten Tag haben sie 1 Groschen gezahlt (nur Judith ist in die Konditorei gegangen); den zweiten Tag 3 Groschen; den dritten Tag 5; den vierten Tag 7 usw.
Offensichtlich ergeben sich der Reihe nach die ungeraden Zahlen. Unsere Frage lautet also:

Wie groß ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen?

Rechnen wir diese Summe für einige kleine Werte von n aus! Die Ergebnisse lauten, in einer Tabelle zusammengefasst:

n	1	2	3	4
Summe	1	1+3=4	1+3+5=9	1+3+5+7=16

Es ist leicht zu erkennen, dass wir der Reihe nach die Quadratzahlen bekommen. Wenn dies auch für das weitere richtig ist, so müsste die folgende Summe 25 lauten. Rechnen wir sie aus!
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.
Wie könnten wir für jeden Wert von n bestätigen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen n^2 beträgt?

Wüssten wir dies für die Summe der ersten $n - 1$ ungeraden Zahlen bereits, so könnten wir folgendermaßen schließen. Die n-te ungerade Zahl ist $2n - 1$. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen können wir auch dadurch erhalten, dass wir zu der Summe der ersten $n-1$ ungeraden Zahlen noch die n-te addieren, d.h. $(2n - 1)$.
Wissen wir jetzt - irgendwoher -, dass die Summe der ersten $n-1$ ungeraden Zahlen $(n-1)^2$ ist, so können wir auch leicht die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ausrechnen:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 + (2n-1) &= (n-1)\cdot(n-1) + (2n-1) = n(n-1) - (n-1) + (2n-1)\\ &= n^2 - n - n + 1 + 2n - 1 = n^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Wenn also unsere Behauptung für $n-1$ richtig ist, so gilt sie auch für n. Aber woher wüssten wir sie für $n-1$?
Wir könnten natürlich das oben Gesagte mit $(n-1)$ statt n durchdenken, es würde also eigentlich ausreichen, für $(n-2)$ zu wissen, dass die Behauptung richtig ist, oder, indem man die obige Überlegung nochmals für $(n-2)$ statt n anwendet, für $n-3$. Oder es würde ausreichen, sie für $(n-4)$ zu kennen, oder ...

Früher oder später gelangen wir einmal zu 1 (genauer: nach $n-1$ Schritten), und für 1 wissen wir bereits, dass die oben kursiv geschriebene Behauptung richtig ist. Damit haben wir erkannt, dass sie auch für n gilt.

Wir können die obige Überlegung auch ein wenig anders aussprechen: Für 1 ist die kursiv gedruckte Behauptung richtig; davon haben wir uns überzeugt. Dann zeigt die in (2) durchgeführte Rechnung mit $n=2$, dass sie auch für 2 richtig ist (auch hiervon haben wir uns zwar bereits unmittelbar überzeugt, das wäre aber nicht notwendig gewesen). Auch für 3 ist die Behauptung richtig, weil sie sich nach (2) schon von 2 auf 3 vererbt. Ebenso vererbt sie sich von 3 auf 4, von 4 auf 5 usw. Sie ist also für alle n richtig.

Das, was wir jetzt durchdacht haben, können wir allgemein folgendermaßen formulieren:

Wir wollen eine gewisse Eigenschaft der natürlichen Zahlen beweisen. Wir wissen, dass die Zahl 1 diese Eigenschaft besitzt. Wir wissen auch, dass sich die Eigenschaft von n auf $(n+1)$ "vererbt", was für eine natürliche Zahl auch immer n bedeutet, d.h., wenn n diese Eigenschaft hat, so auch $n+1$.
Das Prinzip der vollständigen Induktion besagt, dass dann jede natürliche Zahl diese Eigenschaft besitzt. Dieses Prinzip ist für jeden einsichtig: 1 hat die Eigenschaft, sie vererbt sich von 1 auf 2, von 2 auf 3 usw.

Wir wollen jetzt sehen, in welchem Zusammenhang das mit der Anzahl der Anordnungen steht. Um welche Eigenschaft geht es hierbei?
Um die, dass die Anzahl aller Anordnungen einer n-elementigen Menge $n!$ beträgt. Dass 1 diese Eigenschaft besitzt, haben wir gesehen. Wir wollen nachschauen, ob sich diese Eigenschaft tatsächlich von n auf $n+1$ vererbt. Das heißt, wir wollen annehmen, dass die Zahl n diese Eigenschaft besitzt (diese Annahme nennen wir Induktionsvoraussetzung), und wollen beweisen (indem wir die Induktionsvoraussetzung anwenden), dass auch $n+1$ diese Eigenschaft zukommt.

Fassen wir nämlich unsere Anordnungen von $n+1$ Elementen je nachdem, welches Element an letzter Stelle steht, in eine Gruppe zusammen, so bekommen wir $n+1$ Gruppen. In jeder einzelnen Gruppe kommen so viele Anordnungen vor, wie es Möglichkeiten gibt, die verbliebenen n Elemente in einer Reihe anzuordnen, d.h. nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Stück. In den $n+1$ Gruppen gibt es also insgesamt $(n+1)n!$ Anordnungen. Hiervon wissen wir aber, dass das gerade $(n+1)!$ ist.
Also hat sich die Eigenschaft in der Tat von n auf $n+1$ vererbt. Mit Hilfe der vollständigen Induktion haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

Satz: n Elemente lassen sich auf $n!$ Weisen anordnen.

Statt in einer Reihe anordnen sagt man in der Mathematik anordnen oder ordnen. Wenn die Elemente einer Menge in einer Reihe angeordnet sind, spricht man demgemäß von einer geordneten (oder angeordneten) Menge. Ändert man die Reihenfolge der Elemente einer geordneten Menge, so sagt man stattdessen auch mit einem Fremdwort, dass man die Elemente permutiert.

2.6. Wir wenden uns jetzt einer Frage zu, die schon lange "in der Luft gelegen hat": Wie viele Untermengen besitzt eine n-elementige Menge?
Wir wollen das zunächst mit kleinen vorgegebenen Zahlen ausprobieren. Da es keine Rolle spielt, was die Elemente unserer Menge sind, ist es am bequemsten, wenn wir sie als natürliche Zahlen wählen.

Die beiden Untermengen der Menge $\{1\}$ sind: $\varnothing$ und $\{1\}$. Die Untermengen der Menge $\{1,2\}$ sind: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$. Die Untermengen der Menge $\{1,2,3\}$ musstet ihr bereits in einer früheren Aufgabe aufzählen:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$$

Wir fassen in einer Tabelle zusammen, wie viele Untermengen sich ergeben:

n	1	2	3
Anzahl der Untermengen	2	$4 = 2 \cdot 2$	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Somit scheint es uns, dass alle diese der folgenden Regel genügen:
Um die Anzahl aller Untermengen einer n-elementigen Menge zu bekommen, muss man die 2 n-mal als Faktor nehmen. Mit solchen Produkten, deren Faktoren gleich sind, werden wir es oft noch zu tun haben. Das Produkt, das wir erhalten, wenn wir die Zahl a n-mal als Faktor nehmen, bezeichnen wir mit a^n (lies: a hoch n oder n-te Potenz von a). Also ist beispielsweise $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$, $3 \cdot 3 = 3^2$.
Auf Grund der Zahlenbeispiele vermuten wir also:

Satz: Eine n-elementige Menge besitzt 2^n-Untermengen.

Diese Behauptung wird freilich nur dann zu einem Satz, wenn wir sie auch beweisen. Wir wenden wiederum die Beweismethode der vollständigen Induktion an. Welche Eigenschaft wollen wir für die natürlichen Zahlen beweisen?
Diejenige, die wir in Form des obigen Satzes aufgeschrieben haben. Für $n = 1$ gibt es, wie wir oben ausgerechnet haben, insgesamt 2 Teilmengen. Nehmen wir die 2 einmal als Faktor, so bekommen wir 2, d. h. $2^1 = 2$, die Zahl 1 besitzt also in der Tat die im Satz ausgesprochene Eigenschaft. Wir müssten noch untersuchen, ob sich die Eigenschaft tatsächlich vererbt.

Wir nehmen also an, dass wir von den n-elementigen Mengen bereits wissen, dass die Anzahl aller ihrer Untermengen 2^n beträgt. Indem wir dies anwenden, wollen wir alle Untermengen einer $(n+1)$-elementigen Menge zusammenzählen. Ein Element der $(n+1)$-elementigen Menge malen wir in Gedanken rot an, die übrigen dagegen blau.
Wir können jetzt die sämtlichen Untermengen in zwei Gruppen einteilen, je nachdem, ob die betreffende Untermenge dieses rote Element enthält oder nicht. Diejenigen Untermengen, die es nicht enthalten, machen gerade alle Untermengen der aus den übrigen n Elementen bestehenden Menge aus, deren Anzahl nach Induktionsvoraussetzung gleich 2^n ist. Das sind die rein blauen Untermengen. (Zu ihnen gehört auch die leere Menge, weil in ihr kein rotes Element vorkommt.)

Diesen wollen wir die Untermengen der anderen Gruppe eineindeutig zuordnen. Dazu ordnen wir jeder Untermenge aus der ersten Gruppe diejenige der zweiten Gruppe zu, die aus denselben Elementen besteht und zusätzlich noch ein rotes Element enthält. Es ist klar, dass auf diese Weise jeder rein blauen Untermenge eine rötliche Untermenge entspricht und dass alle rötlichen Untermengen erfasst werden.

Daher sind in der zweiten Gruppe ebenso viele Untermengen enthalten wie in der ersten, nämlich 2^n. In den beiden Gruppen zusammengenommen sind also

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Elemente. Damit haben wir erkannt, dass sich die in dem Satz formulierte Eigenschaft von n auf $n+1$ vererbt, und daher nach dem Prinzip der vollständigen Induktion den Satz bewiesen.

Mit der vollständigen Induktion werden wir es noch sehr oft zu tun haben. Aber auch aus dem bisherigen werdet ihr von der Beweismethode der vollständigen Induktion so viel erkannt haben, dass es vor dem eigentlichen Beweis darauf ankommt, irgendwoher zu vermuten, wie das Ergebnis lauten wird. Das gelingt uns meist auf Grund von Zahlenbeispielen.

Aufgaben
23. Wie viele Untermengen besitzt die leere Menge? Was ist auf Grund dessen unter der Zahl 2^0 zu verstehen?

24. Beweist durch vollständige Induktion:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

25. Beweist durch vollständige Induktion:

$$1^2 + 2^2 + .. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

26. Beweist sowohl durch vollständige Induktion als auch ohne sie, dass $n(n+1)$ eine gerade Zahl ist!

2.7. Wir wollen für unseren vorstehenden Satz noch einen anderen Beweis ansehen, der nicht mit vollständiger Induktion arbeitet.
Wir haben auszurechnen, auf wie viele Weisen man eine Untermenge auswählen kann. Bei der Wahl einer Untermenge muss man zunächst entscheiden, ob das erste Element zu der Menge gehören soll oder nicht. Unabhängig davon, wie wir hierüber entschieden haben, müssen wir auch hinsichtlich des zweiten Elements festlegen, ob es zu der betrachteten Untermenge gehören soll. Wir wollen diese Entscheidungen graphisch veranschaulichen. (Abb. 2.2)

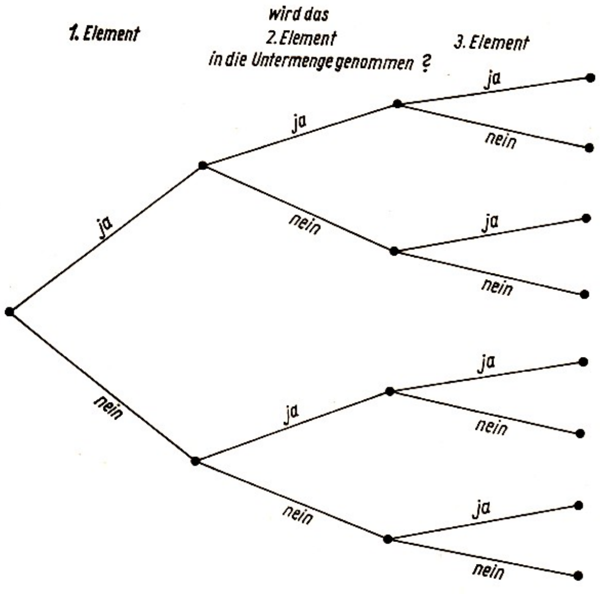


Abb. 2.2

Die Vorgabe einer Untermenge ist gleichbedeutend damit, auf alle diese Fragen zu antworten. Wir schreiten mit anderen Worten, von dem Endpunkt auf der linken Seite beginnend, auf der Abbildung fort und gelangen zu einem Endpunkt auf der rechten Seite. Die Frage ist also nur die: Wie viele rechtsseitige Endpunkte gibt es?

Darauf ist jedoch leicht zu antworten: In der Spalte nach der ersten Frage gibt es zwei Punkte (weil auf die Frage zwei mögliche Antworten gegeben werden können). Danach gabeln sich alle beiden Äste in je zwei neue Äste, es gibt also in der Spalte nach der zweiten Frage doppelt so viele Punkte, d.h. 4 Stück.
In der Spalte nach der dritten Frage werden wiederum - doppelt so viele Punkte vorkommen, nämlich 8. Wenn n - entgegen der Abbildung - größer als 3 ist, so können wir ebenso weitergehen. Nach der n-ten Frage gibt es 2^n Endpunkte.

Schauen wir uns schließlich noch einen dritten Beweis an!

Wir ordnen die Elemente der betrachteten Menge irgendwie in eine Reihe an. Wir greifen jetzt eine Untermenge heraus. Wir gehen die Elemente der Menge der Reihe nach durch und schreiben darüber eine 1, wenn das betrachtete Element zu der Untermenge gehört, anderenfalls, wenn das betrachtete Element nicht in der Untermenge auftritt, eine 0 (Abb. 2.3).

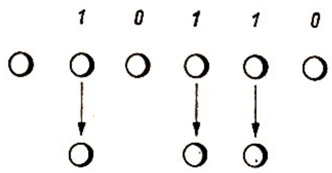


Abb. 2.3

Die aufgeschriebenen Zahlzeichen können wir dann als eine n-stellige Zahl ansehen, die im Dualsystem geschrieben ist. Sollte diese Zahl mit einer gewissen Anzahl von Ziffern 0 beginnen, dann dürfen wir die führenden Nullen einfach streichen.
Damit haben wir die Untermengen abgezählt, denn jeder ist eine (im Dualsystem geschriebene) höchstens n-stellige Zahl zugeordnet worden. Ist dabei jede höchstens n-stellige Zahl benutzt worden?

Ja, denn wir können zu einer beliebigen Zahl die entsprechende Untermenge herstellen, indem wir einfach diejenigen Elemente herausgreifen, denen die Ziffer 1 entspricht.

Fragen: Welcher Untermenge entspricht die Zahl 0?
Welche Zahlen entsprechen den 1 elementigen Untermengen?

Von dem Obigen her wissen wir bereits, dass es genau so viele Untermengen gibt wie Dualzahlen der Stellenzahl $\leq n$ (die 0 einbegriffen). Danach brauchen wir bloß noch abzuzählen, wie viele derartige Zahlen es gibt.
Nun, gerade so viele, wie die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl angibt. Welche ist das?
Im Dualsystem geschrieben, lautet sie: $100...0$ (n Nullen nach der Eins). Das ist 2^n. Die höchstens n-stelligen Zahlen lauten also: $0, 1, 2, 3$, ..., $2^n - 1$. Das heißt, unsere Anzahl beträgt 2^n. Damit haben wir den Beweis beendet.

Aufgabe 27. Wieviel höchstens n-stellige Zahlen gibt es im Dezimalsystem? Wie viele allgemein in einem Zahlensystem mit der Grundzahl p?

2.8. Wenn wir schon so weit sind, liegt natürlich die Frage nahe, wie viele genau n-stellige Zahlen es in einem Zahlensystem mit der Grundzahl p gibt.

Eine genau n-stellige Zahl ist kleiner als p^n, aber mindestens gleich p^{n-1}. Somit ist die gesuchte Anzahl gleich

$$p^n - p^{n-1} = p \cdot p^{n-1} - p^{n-1} = (p-1)p^{n-1}$$

Diese Aufgabe lässt sich auch folgendermaßen formulieren.
Es sind diejenigen n-stelligen Zahlen abzuzählen, deren erste Ziffer eine von $p-1$ vorgegebenen Ziffern ist, während die übrigen unter p gegebenen Ziffern vorkommen. Noch allgemeiner lässt sich diese Aufgabe in folgender Form fassen:

Es sind diejenigen n-elementigen Folgen (d.h. geordneten Mengen) abzuzählen, deren erstes Element aus einer gewissen ersten Menge entnommen ist, deren zweites Element zu einer zweiten Menge gehört usw. und deren n-tes Element in eine gegebene n-te Menge fällt.
Die Elementezahl der ersten Menge bezeichnen wir mit a_1, die der zweiten mit a_2 usw., die der n-ten mit a_n. Betrachten wir jetzt unsere vorstehenden beiden Probleme, in dieser Weise umformuliert.

In der 27. Aufgabe sollte jedes Element der Folge, d.h. jede Ziffer der n-stelligen Zahl, der Zahlenmenge $\{0, 1, ..., p-1\}$ angehören, es waren also $a_1, a_2, ..., a_n$ allesamt gleich p. Als Ergebnis haben wir in diesem Fall erhalten, dass die Anzahl derartiger Folgen $p^n = p \cdot p...p$ (n Faktoren) beträgt.
Eine genau n-stellige Zahl bedeutet dagegen eine solche Folge, deren erste Ziffer der Menge $\{1, 2, ..., p-1\}$ und deren übrige Ziffern der Menge $\{0, 1, ..., p-1\}$ angehören. Dann ist also $a_1 = p-1$, $a_2 = a_3 = ... = a_n = p$. Das Endergebnis lautete $(p-1) \cdot p^{n-1} = (p-1) \cdot p...p$.

Diese beiden Beispiele legen die Vermutung nahe, dass die Anzahl der betrachteten Folgen $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ beträgt. Wir wollen dies auch beweisen, und zwar mit vollständiger Induktion.

Wenn $n = 1$ ist, so haben wir einelementige Folgen zu betrachten, und für dieses eine Element gibt es a_1 Möglichkeiten. Es gibt also in der Tat a_1 derartige Folgen.
Wir nehmen jetzt an, die Behauptung sei für $(n-1)$-elementige Folgen richtig, d.h., die Anzahl derjenigen Folgen, deren erstes Element aus der ersten Menge, deren zweites Element aus der zweiten Menge usw. und deren $(n-1)$-tes Element aus der $(n-1)$-ten Menge entnommen ist, sei genau $a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}$. Das ist unsere Induktionsvoraussetzung.

Wir wollen die Folgen aus den oben aufgeschriebenen Elementen abzählen. Zu diesem Zweck fassen wir diese Folgen je nachdem, wie ihr letztes Element lautet, in Gruppen zusammen. Da die Folgen jeder einzelnen Gruppe dasselbe letzte Element aufweisen, gibt es an Stück solcher Gruppen.
In jeder Gruppe sind so viele Folgen enthalten, wie es Möglichkeiten gibt, eine aus den ersten $n-1$ Elementen bestehende Folge den Bedingungen gemäß zu wählen. Da jedoch die Anzahl der entsprechenden $(n-1)$-elementigen Folgen nach Induktionsvoraussetzung gleich $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}$ ist, sind in jeder einzelnen Gruppe gerade so viele Elemente enthalten.
Die a_n Stück Gruppen enthalten somit insgesamt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ Folgen. Damit haben wir unsere Vermutung verifiziert.

Aufgaben

28. Welche der in der Einleitung besprochenen Probleme haben wir damit aufs neue gelöst?

29. In einem Sportgeschäft kann man Fußballdresse in vier Farben, Hosen in drei Farben und Wadenschutz in zwei Farben kaufen. Wievielerlei Ausrüstungen kann man hieraus zusammenstellen? (Je zwei sollen sich in mindestens einem Kleidungsstück unterscheiden.)

30. Auf wie viele Weisen kann man einen Lottoschein ausfüllen?
(Es gibt 13 Spalten, in die man jeweils eines der Zeichen 1, 2, x schreiben muss.)

31. Wir werfen mit einem roten und einem weißen Würfel. Wie viele verschiedene Ergebnisse können wir erzielen?
(Ein Wurf mit einer roten 1 und einer weißen 4 soll etwas anderes bedeuten als einer mit einer roten 4 und einer weißen 1.) Wie viele Ergebnisse sind möglich, wenn wir die beiden Würfel nicht unterscheiden können?

32. Wir besitzen 20 verschiedene Geschenke. Diese wollen wir unter 12 Kinder verteilen. Auf wievielerlei Weisen können wir dies tun?
(Es ist nicht vorgeschrieben, dass jedes Kind etwas bekommt; es darf sogar ein einziges Kind alle Gegenstände erhalten.)

2.9. Bei einem Wettlauf starten n Wettkämpfer, aber nur die Reihenfolge der k Ersten wird notiert. In der Einführung haben wir für den Fall von 90 Wettkämpfern und die ersten 5 Plätze ausgerechnet, wieviele Endergebnisse möglich sind.
Wir werden jetzt zur Lösung des allgemeinen Falles einen anderen, kürzeren Weg einschlagen. Trotzdem wird es aber für jeden sehr lehrreich sein, den allgemeinen Fall nach dem Muster dessen, wie wir in der Einleitung vorgegangen sind, zu durchdenken.

Wir wissen bereits, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, wenn wir alle Platzierungen berücksichtigen. Unter diesen Möglichkeiten wird jedoch zwischen denen nicht unterschieden, die nur in der Reihenfolge der letzten $n-k$ Wettkämpfer voneinander abweichen.
Wir fassen sämtliche (d.h. $n!$ Stück) Endergebnisse in der Weise in Gruppen zusammen, dass wir die eben genannten in eine Gruppe werfen. Anders als früher interessieren wir uns jetzt für die Anzahl der Gruppen. Da wir wissen, dass die Gruppen insgesamt $n!$ Elemente enthalten, müssen wir uns noch über-legen, aus wie vielen Elementen jede einzelne Gruppe besteht.

Deren Anzahl ist aber gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die letzten $n-k$ Kämpfer in einer Reihe anzuordnen, d.h. $(n-k)!$. Die Anzahl der Gruppen beträgt also:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2\cdot 1}{(n-k)...2\cdot 1} = n\cdot(n-1)...(n-k+1)$$

Dass wir hier von einem Wettlauf und der Platzierung der Wettkämpfer gesprochen haben, ist nur im Interesse einer anschaulicheren Formulierung geschehen. In gleicher Weise können wir für eine beliebige Menge argumentieren und bekommen dann den nachstehenden Satz:

Satz: Aus einer n-elementigen Menge lassen sich genau $n(n-1)...(n-k+1)$ k-elementige Folgen bilden.

Mit anderen Worten: Eine n-elementige Menge besitzt $n...(n-k+1)$ Stück geordnete k-elementige Untermengen. Dabei ist jede Untermenge mehrmals gezählt, sie muss nur jeweils anders geordnet sein. Wir können sogar genau sagen, wie oft wir eine derartige Menge gezählt haben: so oft, wie es verschiedene Möglichkeiten gibt, sie anzuordnen, d.h. $k!$-mal.
Die Anzahl der k-elementigen Folgen ist also $k!$-mal so groß wie die Anzahl der k-elementigen Untermengen; mit anderen Worten:

Satz: Die Anzahl der k-elementigen Untermengen einer n-elementigen Menge beträgt:

$$\frac{n\cdot(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Mit der letzteren Frage haben wir uns bereits zu Beginn des Kapitels mehrfach befasst (beispielsweise bei der Anzahl der Händedrücke, beim Lotto, beim Kartenspiel). Es ist daher nicht überraschend, dass für das Ergebnis auch eine besondere Bezeichnung eingeführt worden ist; man bezeichnet es mit $\binom{n}{k}$ (lies: n über k).
Also:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Somit ist beispielsweise die Anzahl der Lottoscheine $\binom{90}{5}$, die Anzahl der Händedrücke $\binom{7}{2}$ usw.

Aufgaben

33. Beweise: $\binom{90}{5} = \binom{89}{5} + \binom{89}{4}$

34. Beweise: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

35. Beweise: $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

Versucht einmal, diese Aufgaben dadurch zu lösen, dass ihr nicht rechnet, sondern davon ausgeht, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Untermengen bedeutet.

2.10. In der 32. Aufgabe haben wir gefragt, auf wie viele Weisen man n Geschenke unter k Kinder verteilen kann (nur dass wir dort die Aufgabe statt mit Buchstaben mit konkreten Zahlen formuliert haben). Hierbei haben wir die Ungerechtigkeit zugelassen, dass jedes Geschenk an dasselbe Kind geht.
Um dies auszuschließen, schreiben wir jetzt vor, wie viele Geschenke die einzelnen Kinder bekommen sollen: das erste n_1, das zweite n_2 usw., das k-te schließlich n_k. Dabei soll natürlich jedes Geschenk verteilt werden, d.h. $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Verteilung?

Wir wollen die Verteilung folgendermaßen durchführen:
Wir legen die Geschenke in eine Reihe. Dem ersten Kind übergeben wir die ersten n_1 Stück. Das zweite bekommt von den übrigen die ersten n_2 Stück. In dieser Weise fahren wir fort; das $(k-1)$-te Kind bekommt von den jetzt noch übrig gebliebenen Geschenken die ersten n_{k-1} Stück. Dem k-ten Kind wird der Rest gegeben, der offensichtlich n_k Stück ausmacht.

Ändern wir die ursprüngliche Anordnung ab, so können wir, wenn wir wie eben vorgehen, jede Verteilung realisieren. Aber wieviel mal?
Sind die Geschenke irgendwie ausgeteilt, so können wir die Kinder bitten, ihre Geschenke zusammenzulegen, und zwar so, dass zunächst das erste Kind seine Gegenstände in irgendeiner Reihenfolge niederlegt, danach das zweite Kind die seinigen und so weiter. Würden wir von dieser Reihenfolge ausgehen, so würde jedes Kind seine Gegenstände zurückerhalten.

Wir müssen also ausrechnen, auf wie viele Weisen die Kinder ihre Geschenke auf die oben beschriebene Weise niederlegen können; denn damit erhalten wir zugleich die Anzahl der verschiedenen Anordnungen, die die obige Verteilung der Geschenke ergeben.
Das erste Kind kann beim Zurücklegen seiner Geschenke zwischen $n_1!$ Reihenfolgen wählen, das zweite unter $n_2!$ Reihenfolgen usw. Die Anzahl dieser Zurücklegungen ist demnach gleich $n_1! \cdot n_2! ... n_k!$.

Zurück zu unserer ursprünglichen Frage! Die Anordnungen, von denen wir ausgegangen sind,

können wir auf $n!$ Weisen wählen. Die erhaltenen Verteilungen werden jedoch nicht alle verschieden sein, sondern jede wird $n_1! \cdot n_2!...n_k!$-mal auftreten.
Die gesuchte Anzahl beträgt also

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

Aufgaben

36. Leitet das obige Ergebnis auf die Weise ab, dass ihr von folgender Überlegung ausgeht: Jede Verteilung wird dadurch erhalten, dass man von den n Elementen n_1 auswählt, von den verbliebenen $(n - n_1)$ n_2 wählt usw.!

37. Was ergibt sich in den folgenden Spezialfällen:
a) $n = k$, $n_1 = n_2 = ... = 1$;
b) $n_1 = n_2 = ... = n_{k-1} = 1$, $n_k = n - k + 1$;
c) $k = 2$?

38. Auf wie viele Weisen kann man auf einem Schachbrett 8 Türme so anordnen, dass sie einander nicht schlagen können, vorausgesetzt, dass die Türme gleichfarbig (ununterscheidbar) sind? Eine derartige mögliche Anordnung ist in Abb. 2.4 dargestellt.

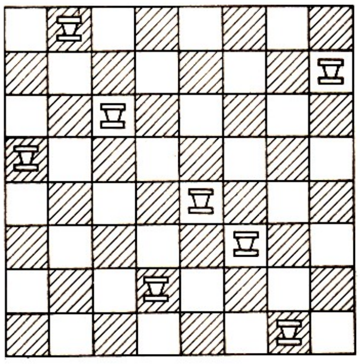


Abb. 2.4

39. Auf wie viele Weisen lässt sich dasselbe durchführen, wenn es 4 rote und 4 grüne Türme gibt?

40. Wie viele Stellungen sind dann möglich, wenn alle 8 Türme verschieden sind (beispielsweise jeder aus einem anderen Spiel stammt)?

2.11. Sicher kennt ihr die Herstellung von Anagrammen. Man muss dazu ein Wort vorgehen (beispielsweise stilgemäß KOMBINATIONEN) und aus seinen Buchstaben eine sinnvolle Aussage oder einen sinnvollen Ausdruck zusammensetzen.
Die Frage ist nun, wie viele Anagramme man zu einem Wort bilden kann.

Wenn ihr damit anfangt, ein Anagramm herzustellen, werdet ihr sogleich eine Ungenauigkeit in der Fragestellung erkennen: ihr werdet kein Einverständnis darin erzielen, wann eine gewonnene Aussage sinnvoll ist. Um solchen Auseinandersetzungen von vornherein aus dem Wege zu gehen, sehen wir jedes Anagramm als gut an; wir fordern also nicht, dass es aus sinnvollen oder gar aussprechbaren Wörtern besteht. Damit verliert die Anagrammherstellung freilich an Interesse; dagegen bekommt dann die Frage einen Sinn, wieviel Anagramme sich aus einem gegebenen Wort bilden lassen.

Aufgabe

41. Wie viele Anagramme lassen sich aus dem Wort Kombinationen bilden?

Stellt man die Aufgabe, aus dem Anagramm eines gegebenen Wortes alle möglichen Anagramme zu bilden, so ergibt sich folgendes:
Alle diese Anagramme müssen aus denselben Buchstaben hergestellt werden wie das gegebene Wort. Es ergeben sich also dieselben Anagramme. Mit anderen Worten, es handelt sich dabei um dieselbe Aufgabe. Es ist somit von vornherein klar, dass nicht jeder Text aus 13 Buchstaben eine neue Anagrammaufgabe ergibt. Man kann also fragen:

Aufgabe

42. Wie viele Texte aus 13 Buchstaben gibt es, und wie viele verschiedene Anagrammaufgaben kann man aus ihnen gewinnen?

Wenn ihr auf die letzte Frage keine Antwort wisst, lest den folgenden Paragraphen und versucht es dann noch einmal!

2.12. Wir wollen jetzt unter die Kinder nicht Geschenke, sondern Geld Verteilen. Wir hoffen, dass ihr euch schon genug an die (algebraischen) Buchstabenbezeichnungen gewöhnt habt, um sogleich die Aufgabe begreifen zu können:
Wir wollen n Groschen unter k Kinder verteilen. Wir achten nur darauf, dass jedes von ihnen ganzzahlig viele Groschen erhält, und dabei mindestens 1 Groschen (wir wollen die in einer früheren Aufgabe begangene Ungerechtigkeit vermeiden). Auf wie viele Weisen können wir dies tun?

Bevor wir uns der Lösung der Aufgabe zuwenden, wollen wir uns erst überlegen, was für ein Unterschied zwischen der Geschenkverteilung und der Geldverteilung besteht. Bei der Geschenkverteilung müssen wir nicht nur festlegen, wie viele Geschenke wer bekommt, sondern auch, welche dieser Geschenke.
Bei der Geldverteilung kommt es dagegen nur darauf an, wieviel Groschen jeder bekommt. Mit anderen Worten: Die Geschenke sind unterscheidbar, die einzelnen Groschen dagegen nicht.

Jetzt, wenn wir das Buch schreiben, herrscht gerade warmer Sommer; es ist daher nur natürlich, dass die Kinder für ihr Geld Eis kaufen wollen. Am einfachsten ist es, wenn wir gleich die Eisbilletts unter sie verteilen.
Die Eisbilletts zu je einem Groschen befinden sich an einem langen Band; wir reißen hiervon ein Stück der Länge n ab (d.h. n Billetts) und wollen dies unter die Kinder verteilen. Das Band muss also in k Teile zerschnitten werden. Dem ersten Kind geben wir das erste Stück davon, dem zweiten das zweite usw. Wir haben uns also zu entscheiden, an welchen Perforationen wir das Band abtrennen müssen.

Wollen wir das Band in k Teile zerlegen, so müssen wir es an $k-1$ Stellen trennen. Da ein aus n Billetts bestehendes Band an $n-1$ Stellen perforiert ist, können wir das Band auf so viele Weisen in k Teile zerlegen, wie es Möglichkeiten gibt, unter den $n-1$ Perforationen diejenigen $k-1$ Stück auszuwählen, an denen wir das Band trennen wollen. Wir wissen jedoch bereits, dass es dafür

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Möglichkeiten gibt. Dass wir im Verlauf der Lösung von Eisbilletts gesprochen haben, beeinträchtigt den Wert der Lösung nicht, sondern diente nur zur Veranschaulichung unserer Überlegung.

Wir wollen zwar nicht ungerecht sein, wollen aber der mathematischen Vollständigkeit halber noch die Anzahl der "ungerechten" Zerlegungen bestimmen); d.h., wir wollen auch solche Zerlegungen zulassen, bei denen eines (oder mehrere) Kinder gar nichts bekommen.

Uns stehen wiederum n Groschen zur Verfügung, die wir unter k Kinder verteilen wollen. Mit folgendem Kunstgriff können wir die Aufgabe auf die vorhergehende zurückführen:
Wir borgen von irgendjemandem k Groschen und verteilen danach das ganze Geld (d.h. $n+k$ Groschen) auf die vorangegangene Weise unter die k Kinder, so dass jedes etwas bekommt. Danach erbitten wir von jedem Kind 1 Groschen zurück und geben die geliehenen k Groschen zurück.
So haben wir im Endergebnis n Groschen unter die Kinder verteilt.

Wir können außerdem sogar behaupten, dass wir auf diese Weise jede mögliche Verteilung der n Groschen realisiert haben, und zwar jede genau einmal. Es lassen sich also n Groschen auf so viele Weisen unter die k Kinder verteilen, wie es Möglichkeiten gibt, auf die vorangegangene, gerechtere Weise $n+k$ Groschen unter sie aufzuteilen. Wie wir eben gesehen haben, ist dies auf

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Weisen möglich.

Aufgaben

43. Auf wie viele Weisen kann man n Groschen so unter k Kinder verteilen, dass jedes wenigstens 2 erhält? Versucht, die Aufgabe zu verallgemeinern !

44. k Grafen Spielen Karten. Ursprünglich hat jeder p Pfennige. Am Ende des Spieles zählen sie zusammen, wer wie viele Pfennige gewonnen oder verloren hat. Wie viele mögliche Endergebnisse können sich ergeben? (Keiner von ihnen versucht im Verlauf des Spiels zu borgen, jeder kann also höchstens seine eigenen p Pfennige verlieren.)

45. Wir verteilen n Mark so unter k Jungen und l Mädchen, dass jedes der Mädchen wenigstens 1 Mark bekommt. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

3 Kombinatorik in der Arithmetik

3.1. Betrachten wir noch einmal die Aufgabe 33 im vorstehenden Kapitel! Die Behauptung lautete:

$$\binom{90}{5} = \binom{89}{5} + \binom{89}{4} \tag{1}$$

Kann man diese Aufgabe verallgemeinern? Vielleicht bleibt die Gleichung (1) auch dann gültig, wenn wir statt 90, 89, 5, 4 andere Zahlen eintragen.
Wir können natürlich stattdessen nicht etwas x-beliebiges eintragen, denn es ist wahrscheinlich wesentlich, dass die 89 gerade um Eins kleiner als 90 ist, die 4 dagegen um Eins kleiner als 5. Nach einem kleinen Versuch kommt einem der Gedanke, ob nicht vielleicht immer

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \tag{2}$$

gilt, wenn nur n und k natürliche Zahlen mit $n > k$ sind. Wir wissen bereits aus Gleichung (1), dass dies im Falle $n = 90$ und $k = 5$ richtig ist. Aber gilt es auch allgemein? Durchaus. Dies können wir folgendermaßen nachweisen:

Angenommen, wir haben in einem Sack n Kugeln, darunter genau eine schwarze. Auf wie viele Weisen können wir aus dem Sack k Kugeln auswählen? Auf diese Frage können wir bereits nach dem vorangegangenen Kapitel antworten: aus n Elementen lassen sich k Stück auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Weisen auswählen.
Wenn wir andererseits k Kugeln ausgewählt haben, sind zwei Fälle möglich: entweder kommt die schwarze Kugel unter ihnen vor oder nicht. Wieviele solche Stichproben gibt es, die die schwarze Kugel enthalten?

Jede davon können wir auf die Weise bekommen, dass wir unter den $n-1$ nicht schwarzen Kugeln $k-1$ Stück auswählen und die schwarze Kugel hinzunehmen. Und wenn wir unter den nicht schwarzen Kugeln $k-1$ verschiedene herausnehmen, würden sich natürlich nach Hinzunahme der schwarzen Kugel k verschiedene ergeben.
Demnach gibt es ebenso viele Stichproben von k Kugeln, die die schwarze Kugel enthalten, wie Möglichkeiten, aus $n-1$ Elementen $k-1$ auszuwählen, d.h. $\binom{n-1}{k-1}$. Und wieviel Stichproben von k Kugeln gibt es, die die schwarze Kugel nicht enthalten? Natürlich $\binom{n-1}{k}$ Stück, weil aus $n-1$ nicht schwarzen Kugeln k Stück auszuwählen sind. Es hat sich also ergeben, dass man aus n Kugeln k Stück auf

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Weisen auswählen kann. Hieraus folgt bereits die Richtigkeit der Gleichung (2).

3.2. Von der jetzt gefundenen Gleichung werden wir sogleich eine interessante Anwendung kennenlernen. Wir bilden ein dreieckiges Schema, wie es in Abbildung 3.1 dargestellt ist. In die "nullte Zeile" kommt die Zahl $\binom{0}{0}$, in die erste Zeile schreiben wir die Zahlen $\binom{1}{0}$ und $\binom{1}{1}$, in die zweite Zeile $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ und $\binom{2}{2}$ und so weiter, allgemein in die n-te Zelle

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad ..., \quad \binom{n}{n}$$

Dabei verschieben wir jede Zeile gegenüber der vorhergehenden um eine halbe Stelle nach links, so dass wir ein pyramidenförmiges oder mit anderen Worten dreieckiges Schema erhalten (Abb. 1). Diese "Pyramide" heißt Pascalsches Dreieck. Benannt ist es nach dem französischen Mathematiker und Philosophen Pascal, der im XVII. Jahrhundert gelebt hat.

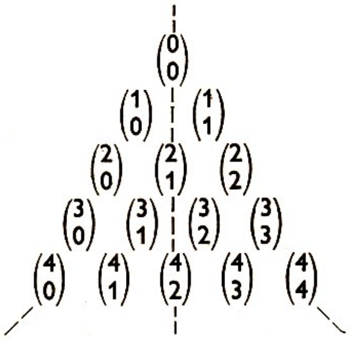


Abb. 3.1

Abb. 3.2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Wie groß ist der Wert von $\binom{0}{0}$? Wir wissen, dass definitionsgemäß

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

ist. Also ist $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$, da wir bereits im ersten Kapitel festgestellt haben, dass $0! = 1$ ist. Ebenso können wir die in einer Zeile im Pascalschen Dreieck stehenden Zahlen $\binom{n}{k}$ bestimmen und erhalten dann das in Abb. 3.2 dargestellte Pascalsche Dreieck, worin die Zahlen $\binom{n}{k}$ nicht in dieser Form vorkommen, sondern ihre Werte eingetragen sind.
Üblicherweise wird das Pascalsche Dreieck in dieser Form geschrieben (Abb. 3.2).

Aufgaben

1. Es ist zu beweisen, dass in jeder Zeile des Pascalschen Dreiecks die äußeren Elemente 1 sind, wie weit man auch das Schema fortsetzt.

2. Es ist zu beweisen, dass das Pascalsche Dreieck zu der durch die Spitze gelegten Senkrechten symmetrisch ist. (Wir haben sie in Abb. 1 mit einer gestrichelten Linie bezeichnet.)

Schauen wir uns jetzt die vierte Zeile des in Abb. 2 dargestellten Pascalschen Dreiecks an: 1 4 6 4 1 (nicht Vergessen, dass wir die Zeilenzählung mit Null begonnen haben!). Beispielsweise ist das zweite Element in dieser Zeile gleich der Summe der beiden darüber stehenden Elemente: $4 = 1 + 3$.
Ebenso ist das dritte Element der Zeile gleich der Summe der beiden Elemente darüber: $6 = 3 + 3$. Wenn wir auch noch andere Fälle durchprüfen, erfahren wir stets dasselbe:

Im Pascalschen Dreieck ist jedes Element, das nicht auf dem Rand liegt (über dem also zwei andere Elemente stehen), gleich der Summe der beiden darüber befindlichen Zahlen.

Diese Behauptung haben wir jedoch noch zu beweisen. Zu diesem Zweck greifen wir aus dem Pascalschen Dreieck ein beliebiges Element heraus: das k-te Element der n-ten Zeile.
Wenn es nicht auf dem Hand liegt, so ist $k \neq 0$ und $k \neq n$. Über diesem Element stehen das $(k-1)$-te und das k-te Element der $(n-1)$-ten Zeile. Wir wollen beweisen, dass die Summe dieser beiden Elemente gerade gleich dem k-ten Element der n-ten Zeile ist, also

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

wenn nur $0 < k < n$ ist. Das haben wir jedoch bereits bewiesen, denn dies ist gerade Gleichung (2)!

Diese Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks nutzt man zweckmäßigerweise aus, wenn man das in Abb. 2 dargestellte Pascalsche Dreieck aufbauen will. Wir brauchen dazu nämlich nichts weiter zu tun, als an die beiden Außenplätze 1 zu schreiben und an die übrigen Stellen der Zeile die Summe der über der betreffenden Stelle stehenden beiden Zahlen zu schreiben. Jetzt könnt auch ihr das Pascalsche Dreieck mühelos beliebig weit fortsetzen.

3.3. Das Pascalsche Dreieck weist viele interessante Eigenschaften auf, beispielsweise die, dass die Summe der in der n-ten Zeile stehenden Zahlen gleich 2^n ist. Das haben wir bereits bewiesen, ihr braucht dazu nur Aufgabe 35 des I. Kapitels anzusehen.
Der dortige Beweis stützte sich auf die Abzählung der Untermengen einer Menge. Wir werden jetzt einen zweiten Beweis für diese Behauptung kennenlernen, der mit vollständiger Induktion arbeitet:

Das in der nullten Zeile stehende Element ist eine Eins, und in der Tat ist $2^0 = 1$. Auch in der ersten Zeile gilt tatsächlich $1 + 1 = 2^1$.
Wir nehmen an, dass wir bereits wissen, dass die Summe der in der n-ten Zeile stehenden Elemente 2^n ist. Betrachten wir die $(n + 1)$-te Zeile!

Hier können wir (die beiden äußeren Einsen ausgenommen) an Stelle jedes Elementes eintragen, dass es gleich der Summe der beiden über ihm (in der n-ten Zeile) stehenden Elemente ist. Um uns dies leichter vorstellen zu können, wollen wir als Beispiel die 5. und 6. Zeile des Pascalschen Dreiecks betrachten (d.h., es sei z.B. n = 5). Dann bekommen wir:

$$1+6+15+20+15+6+1 = 1+(1+5)+(5+10)+(10+10)+(10+5)+(5+1)+1 \quad (3)$$

Wir erhalten demnach statt der Summe der Elemente der $(n + 1)$-ten Zeile die aus den Elementen der n-ten Zeile gebildete Summe, in der jedes Element der n-ten Zeile zweimal auftritt: einmal deshalb, weil es jeweils die rechts oberhalb liegenden Elemente im Pascalschen Dreieck sind, einmal dagegen, weil es auch die links oberhalb stehenden Elemente sind. Das heißt nicht ganz!

Die beiden außen stehenden Einsen der n-ten Zeile können nur einmal zählen: die linke Eins dann, wenn wir die rechts unter ihr stehende Zahl in die Summe zerlegen, die rechtsseitige 1 dagegen, wenn wir die links darunter stehende Zahl in eine Summe zerlegen.
Nur wird dieser Fehler gerade dadurch wettgemacht, dass auch in der $(n + 1)$-ten Zeile zwei äußere Einsen stehen, die wir bisher nicht berücksichtigt haben. Es stimmt also tatsächlich, dass die Summe der Elemente der $(n + 1)$-ten Zeile gerade das Doppelte der Summe der Elemente der n-ten Zeile ist.

Zur Veranschaulichung wollen wir wiederum den Fall $n = 5$ anschauen. Dann kann man die Gleichung (3) folgendermaßen fortsetzen:

$$\begin{aligned}1+&(1+5)+(5+10)+(10+10)+(10+5)+(5+1)+1\\ &=(1+1)+(5+5)+(10+10)+(10+10)+(5+5)+(1+1)\\ &=2\cdot(1+5+10+10+5+1).\end{aligned}$$

Zurück zum allgemeinen Fall! Wir haben bereits erkannt, dass die Summe der Elemente der $(n + 1)$-ten Zeile doppelt so groß wie die Summe der Elemente der n-ten Zeile ist.

Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir dagegen schon, dass die Summe der in der n-ten Zeile stehenden Elemente 2^n beträgt. Also ist die Summe der in der $(n+1)$-ten Zeile stehenden Elemente $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
Damit haben wir den Induktionsbeweis der Behauptung, dass die Summe der in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks stehenden Elemente 2^n beträgt, beendet. Wir können diese Behauptung auch folgendermaßen schreiben:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n \tag{4}$$

Später werden wir die Identität (4) noch nach einem dritten Verfahren beweisen.

Aufgaben

3. Auf wie viele Weisen kann man aus der in Abb. 3.3 dargestellten Figur (von oben nach unten fortschreitend) das Wort KOMBINATIONEN lesen? (Was für ein Zusammenhang besteht zwischen dieser Aufgabe und dem Pascalschen Dreieck?)

Abb. 3.3:

```
            K
          O   O
        M   M   M
      B   B   B   B
    I   I   I   I   I
  N   N   N   N   N   N
A   A   A   A   A   A   A
  T   T   T   T   T   T
    I   I   I   I   I
      O   O   O   O
        N   N   N
          E   E
            N
```

4. Wir nehmen von dem rechten Rand des Pascalschen Dreiecks eine 1, danach das links darunter liegende Element, dann wiederum das hierunter links liegende Element, auch von diesem das links darunter liegende Element, insgesamt bis zu einem bestimmten letzten Element. Ergibt sich dann, wenn wir alle diese Elemente addieren, als Summe stets das rechts unter dem letzten Element liegende Element? (Beispielsweise ist 1 + 3 + 6 + 10 = 20.)

3.4. Wir wollen jetzt verschiedene Potenzen des Ausdrucks $(x + y)$ ausrechnen!

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ebenso können wir weiterrechnen und erhalten:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + x^5$$

Habt ihr schon bemerkt, dass die Koeffizienten dieselben Zahlen sind wie die im Pascalschen Dreieck? Ist das nicht vielleicht Zufall?

Betrachten wir dazu den Ausdruck $(x + y)^n$! Wir wissen, dass $(x + y)^n$ das Produkt von n Ausdrücken $(x + y)$ ist.
Führen wir die Multiplikation tatsächlich aus, so treten Glieder der Art x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$, ..., xy^{n-1}, y^n auf. Wie oft kommt dabei jedes vor? Wie oft tritt beispielsweise $x^{n-k}y^k$ auf?

Zu $x^{n-1}y^k$ können wir so gelangen, dass wir unter den n Faktoren $(x+y)$ aus k Stück das y wählen, aus den übrigen das x und diese ausmultiplizieren. Das Glied $x^{n-k}y^k$ wird daher so oft auftreten, wie wir unter den n Stück Faktoren $(x+y)$ k Stück wählen können, aus denen wir das y entnehmen. Dafür gibt es aber, wie wir sehr wohl wissen, $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
Das Glied $x^{n-k}y^k$ wird infolgedessen $\binom{n}{k}$-mal vorkommen. Da dies für jedes k gilt, das zwischen 0 und n liegt, haben wir im Endergebnis

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n\end{aligned}$$

bekommen.

Die damit bewiesene Behauptung ist sehr wichtig und findet häufige Anwendung. Sie trägt auch einen besonderen Namen: binomischer Satz.
(Es handelt sich nämlich um eine zweigliedrige Summe, mit dem Fremdwort Binom. Wegen ihres Vorkommens im binomischen Lehrsatz pflegt man die Zahlen $\binom{n}{k}$ oft Binomialkoeffizienten zu nennen.)

Wir wollen jetzt den binomischen Satz in der Weise anwenden, dass wir an Stelle von x und y gleichermaßen 1 schreiben. Auf diese Weise bekommen wir:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}$$

Wir haben damit einen neuen (und zwar den dritten) Beweis für die Gleichheit (4) gewonnen.

Aufgabe

5. Beweist:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + -... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

(Jedes zweite Glied der Summe ist positiv, die übrigen treten mit negativem Vorzeichen auf. Es werde $n > 0$ vorausgesetzt.) Könnt ihr die Behauptung im Falle ungerader n ohne Benutzung des binomischen Satzes nachweisen?

3.5. Für zahlreiche kombinatorische Gleichheiten bieten sich zwei Wege zum Beweis an: einerseits der durch den binomischen Satz, andererseits die Idee zu versuchen, eine solche Größe zu finden, die sich auf zweierlei Weise berechnen lässt, so dass die eine Berechnungsweise zu der auf der einen Seite der zu beweisenden Identität stehenden Größe führt, die andere dagegen zu der auf der anderen Seite stehenden. Auf diese Weise gelangt man nämlich über die Gleichheit der beiden Größen sofort zu einem Beweis.
Diese zwei Verfahren wollen wir an einem Beispiel erläutern:

Es ist zu beweisen, dass gilt

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} \tag{5}$$

Zu unserem ersten Beweis gehen wir von der Identität aus.

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

Drücken wir die rechte Seite nach dem binomischen Satz aus, so sehen wir, dass $\binom{2n}{n}$ der Koeffizient von x^n sein wird. Schreiben wir andererseits an Stelle der beiden Faktoren auf der linken Seite nach dem binomischen Satz den hierzu gleichen Ausdruck auf:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$$

was ergibt sich dann nach der Ausmultiplikation für den Koeffizienten von x^n?

x^n kann in dem Produkt so zustandekommen, dass wir aus dem ersten Faktor das x nicht enthalten de Glied, aus dem zweiten dagegen das x^n enthaltende Glied nehmen. $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n}$ ist das Produkt der hierzu gehörenden beiden Koeffizienten. x^n kann in dem Produkt aber auch so entstehen, dass man aus dem ersten Faktor das x, aus dem zweiten das x^{n-1} enthaltende Glied nimmt. Dann lautet das Produkt der Koeffizienten $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1}$.
Weiter kann in dem Produkt dadurch x^n gebildet werden, dass man aus dem ersten Faktor x^2 und aus dem zweiten x^{n-2} nimmt, ferner aus dem ersten x^3, aus dem zweiten x^{n-3} usw., schließlich dadurch, dass wir aus dem ersten x^n, aus dem zweiten dagegen das Glied entnehmen, das x nicht enthält.

Die Summe aller dieser Koeffizienten ist notwendigerweise gleich dem auf andere Weise gefundenen $\binom{2n}{n}$. Also

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} + ... + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} = \binom{2n}{n} \tag{6}$$

Beachten wir noch, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist, und wenden dies auf die zweiten Faktoren jedes der auf der linken Seite stehenden Produkte an, so bekommen wir

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

was zu beweisen war.

Dieselbe Aufgabe hätten wir auch anders lösen können:
Wir wollen uns einen Sack vorstellen, in dem sich n weiße und n rote Kugeln befinden. Auf wie viele Weisen kann man von diesen $2n$ Kugeln n Stück ziehen?
Wir wissen: auf $\binom{2n}{n}$ Weisen.

Wir wollen die möglichen Wahlen (Ziehungen) zu Gruppen zusammenfassen. In eine Gruppe kommen jeweils diejenigen, für die die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln gleich groß ist, etwa k. (k kann 0, 1, 2, ... oder n sein.) Natürlich ist $\binom{2n}{n}$ gleich der Summe der Elementzahlen dieser Gruppen.

Wie groß ist die Zahl der Wahlen, in denen k weiße Kugeln (und daher $n-k$ rote Kugeln) enthalten sind?
So viele, wie es Möglichkeiten gibt, aus n weißen Kugeln k Stück und aus n roten Kugeln $n-k$ Stück zu wählen. Aus n weißen Kugeln lassen sich auf $\binom{n}{k}$ Weisen k Stück auswählen, aus n roten Kugeln $n-k$ Stück auf $\binom{n}{n-k}$ Weisen.
Da wir eine beliebige Wahl von k Stück weißen Kugeln und eine beliebige Wahl von $n-k$ Stück roten Kugeln miteinander kombinieren können, bekommen wir als Endergebnis, dass die Anzahl aller solcher Wahlen, bei denen k weiße und $n-k$ rote Kugeln gewählt werden,

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$$

beträgt.
Bilden wir also die Summe der Elementanzahlen der einzelnen Gruppen, so erhalten wir als Endergebnis:

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1}+...+\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

Dies ist dasselbe wie die Identität (6), wir können also jetzt den Beweis ebenso wie oben beenden.

Zum Beweis der folgenden Identitäten lässt sich das eine oder andere der in diesem Kapitel aufgeschriebenen Verfahren heranziehen:

Aufgaben

6. $\binom{n+m}{k}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+...+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$ ($k\leq n$ und $k\leq m$).

7. $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

8. $\binom{l}{l}+\binom{l+1}{l}+\binom{l+2}{l}+...+\binom{n}{l}=\binom{n+1}{l+1}$

9. $1\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+...+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

3.6. Gibt es in Budapest zwei Menschen, die genau so viel Haare haben?
Ihr werdet vielleicht denken, dass sich diese Frage nicht beantworten lässt, da du beispielsweise auch nicht sagen kannst, wieviel Haare du besitzt. So viel wissen wir jedoch sicher (da die Ärzte es festgestellt haben), dass es keinen Menschen gibt, der mehr als 250000 Haare hat.

Können wir jetzt die Frage beantworten? Ja. Budapest besitzt nämlich etwa 2000000 Einwohner. Würde es keine zwei Menschen geben, die ebensoviele Haare haben, dann würde höchstens ein Mensch existieren, der null Haare hat, höchstens einer, der ein Haar hat, und so weiter, schließlich höchstens ein solcher, der 250000 Haare besitzt (es ist freilich nicht ausgeschlossen, dass es keinen solchen gibt). (Unserer obigen Feststellung nach gibt es jedoch sicher keinen, der mehr als 250000 Haare sein eigen nennt.)

Dann könnten aber in Budapest höchstens 250001 Menschen leben. Da wir wissen, dass die Einwohnerzahl größer ist, sind wir sicher, dass es zwei Menschen geben muss, die gleich viele Haare haben.

Wir könnten unsere Lösung auch folgendermaßen formulieren:
Wir stellen uns 250001 Stück riesige Schachteln vor (so groß wie beispielsweise ein Fußballstadion). Die Aufschrift der ersten lautet: "Diejenigen Einwohner Budapests, die 0 Haare haben." In die zweite kommen diejenigen, die 1 Haar haben, usw. In die letzte kommen diejenigen, die 250000 Haare besitzen. Wenn wir jetzt die ganze Budapester Einwohnerschaft in die entsprechende Schachtel gesteckt haben, so haben wir etwa 2 Millionen Menschen untergebracht, verfügen aber nur über 250001 Schachteln.

Es muss also sicher eine Schachtel geben, die mehr als einen Menschen enthält. Diese Behauptung ist so selbstverständlich, dass wir sie auch ganz allgemein formulieren können:

"Wenn wir über n Schachteln verfügen und in diese mehr als n Gegenstände stecken, so gibt es sicher eine Schachtel, in die mehr als 1 Gegenstand gelangt ist."

Diese Feststellung heißt Schubfachprinzip. Wenn es sich hierbei auch um eine ganz einfache Aussage handelt und jeder unmittelbar ihre Richtigkeit einsieht, so verdient sie es doch, einen besonderen Namen zu bekommen, denn sie wird oft angewendet, und sehr vielen Beweisen liegt gerade das Schubfachprinzip zugrunde. In den späteren Kapiteln werden wir noch viele Beispiele hierzu kennenlernen; jetzt gleich soll nur eines betrachtet werden:

Gegeben sind n natürliche Zahlen: $a_1, a_2, ..., a_n$. Es ist zu zeigen, dass man aus ihnen eine solche (nichtleere) Untermenge auswählen kann, dass die Summe der zu der Untermenge gehörenden Zahlen durch n teilbar ist.
(Wir erinnern an das vorangegangene Kapitel: es ist zugelassen, dass diese Untermenge alle n Zahlen enthält.) Wir nehmen die folgenden n Zahlen:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1\\
b_2 &= a_1 + a_2\\
b_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&...\\
b_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n
\end{aligned}$$

Wenn von diesen Zahlen eine durch n teilbar ist, so haben wir unsere Behauptung bereits verifiziert. Anderenfalls dividieren wir jede der Zahlen b_1, b_2, ..., b_n durch n mit Rest. Was für Reste können wir bekommen?
1 oder 2 oder 3, oder schließlich $n - 1$. Es liegen aber n Zahlen vor. Also gibt es unter den Zahlen b_1, b_2, ..., b_n nach dem Schubfachprinzip sicher zwei solche, die bei der Division durch n denselben Rest ergeben. b_i und b_j $(i < j)$ mögen etwa diese beiden Zahlen sein. Dann ist ihre Differenz $b_j - b_i$ durch n teilbar. Es ist aber

$$b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j$$

Wir haben demnach eine solche Untermenge der Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ gefunden, nämlich a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_j, dass die Summe der zu dieser Untermenge gehörenden Zahlen durch n teilbar ist. Das war gerade zu beweisen.

Aufgabe

10. Angenommen, zwischen 1 und $2n-1$ (die Grenzen eingeschlossen) sind n natürliche Zahlen gegeben. Es ist zu beweisen, dass es unter diesen zwei gibt, die keinen größeren gemeinsamen Teiler als 1 haben (die Mathematiker sagen dafür: sie sind relativ prim).

3.7. In einer aus 40 Schülern bestehenden Klasse sammeln viele von den Schülern Photographien beliebter Beatkapellen. Eine Photographie des Elias-Ensembles besitzen 18 Schüler, eine des Omega-Ensembles 16 Schüler, eine des Metro-Ensembles dagegen 12 Schüler.
Es gibt 7 Schüler, die ein Bild des Elias- und des Omega-Ensembles haben, 5 solche, die das Elias- und das Metro-Ensemble als Photographie besitzen, und schließlich 3 mit einer Photographie des Omega- und des Metro-Ensembles. Solche Schüler, die von allen 3 Ensembles Photographien besitzen, gibt es 2.
Frage: Wie viele Schüler gibt es in der Klasse, die von keinem der drei Ensembles ein Bild haben?

Auf den ersten Blick können wir so schließen: In der Klasse sind 40 Schüler. Von diesen "gehen

ab" 18 und 16 und 12, die eine Photographie des Elias-, Omega- bzw. Metro-Ensembles besitzen. Es bleiben also $40-(18+16+12)=-6$.
Das negative Ergebnis macht uns darauf aufmerksam, dass unsere Überlegung falsch ist; aber wo steckt der Fehler? Dort, wo wir diejenigen zweimal abgezogen haben, die von je zwei Ensembles ein Bild besitzen. Wir können dies wieder gut machen, indem wir deren Anzahl wieder zu der Summe hinzufügen; wir bekommen also $40-(18+16+1)+(7+5+3)$.
Achten wir aber darauf, dass wir nicht wieder in denselben Fehler verfallen!

Was ist mit den beiden Schülern, die von allen drei Ensembles eine Photographie haben? Auch diese haben wir zunächst dreimal abgezogen, danach aber wieder dreimal zu der Summe hinzugefügt, wir müssen sie also noch einmal subtrahieren:

$$40-(18+16+12)+(7+5+3)-2=7$$

In dieser Formel können wir keinen Fehler mehr entdecken wie in den vorigen, wie wir sie auch drehen und wenden. Die vorher gemachten Erfahrungen, mahnen aber zur Vorsicht, so dass wir einen präzisen Beweis geben müssen.
Das oben durchgeführte "Hinzuzählen" und "Abziehen" läuft im Grunde genommen darauf hinaus, dass der betrachtete Schüler zu der Endformel mit $+1$ oder -1 beigetragen hat. Die obige Formel ist also so zustande gekommen, dass wir zu jedem einzelnen Schüler eine aus lauter $+1$ und -1 bestehende Summe gebildet und diese Summen noch addiert haben.

Schauen wir uns mal an, wie wir zu diesen Summen gelangt sind! Handelte es sich um einen Schüler, der von überhaupt keinem Ensemble eine Photographie besitzt, so haben wir ihn bei den 40 Schülern mitgezählt, weiter aber nicht; die für ihn gebildete Summe besteht also aus einer einzigen $+1$.
Betrachten wir jetzt einen Schüler, der etwa von k Ensembles eine Photographie hat (k kann hier 1, 2 oder 3 sein). Er ist natürlich zu den 40 gerechnet worden, was in der zu ihm gehörigen Summe eine $+1$ bedeutet. Danach haben wir ihn aber k-mal abgezogen, in der Summe folgen also k Stück -1.

Daraufhin haben wir ihn wiederum $\binom{k}{2}$-mal hinzugezählt (freilich nur, wenn $k=2$, oder 3 ist); das bedeutet $\binom{k}{2}$ Stück $+1$. Schließlich haben wir ihn (wenn $k=3$ ist) wieder $\binom{k}{3}$-mal subtrahiert (das ist natürlich 1, aber in dieser Form ist das Wesen der Sache besser zu sehen). Rechnen wir diese Summe aus!

Für $k=1$ ist $1-\binom{0}{0}=0$;
für $k=2$ ist $1-\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=0$;
für $k=3$ ist $1-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}=0$;

(dass der Wert dieser Art von Summen stets 0 ist, wissen wir bereits aus Aufgabe 5).

Da diese Summe für diejenigen Schüler 0 ist, die von einem gewissen Ensemble eine Photographie besitzen, und 1 für diejenigen, die keine solche haben, gibt die Summe dieser 40 Summen an, wie viele der Schüler von keinem Ensemble ein Bild ihr eigen nennen.

Wir wollen uns jetzt ansehen, dass die Summe der Summen, wenn man die Glieder anders gruppiert, tatsächlich die Formel liefert, die wir vorher erhalten haben. Dies ergibt sich offenbar folgendermaßen:
Zunächst gibt es 40mal $+1$, danach durch die Eliasphotographien 18mal (-1), für die Omega- bzw. Metrophotographien 16 bzw. 12mal (-1). Weiter ergeben sich durch diejenigen Schüler,

die ein Bild des Elias- und Omega-Ensembles haben, 7mal +1; ebenso tragen die Kopplungen Elias-Metro- bzw. Omega-Metro-Photographien 5 bzw. 3mal +1 zu der Summe bei.
Schließlich ergeben die beiden Schüler, die von allen drei Ensembles ein Bild haben, noch je eine (-1) zu der Summe. Somit ergibt sich tatsächlich

$$40 - (18 + 16 + 12) + (7 + 5 + 3) - 2$$

Diese Formel und die analogen, nur mit anderen und eventuell mehr Zahlenangaben zustandegekommenen Formeln heißen Siebformeln, da gewisse Gegenstände in der Weise zusammengezählt werden, dass man die übrigen, nicht interessierenden Gegenstände "heraussiebt".

Aufgabe:

11. In einer Jungenklasse lieben 18 Jungen das Schachspiel, 23 das Fußballspiel, 21 Radfahren und 17 Spazierengehen. Die Anzahl derjenigen, die gern Schach und Fußball spielen, beträgt 9. Schachspielen und Radfahren lieben 7, Schachspielen und Spazierengehen 6, Fußballspielen und Spazierengehen 6, Fußballspielen und Spazierengehen 9, schließlich Radfahren und Spazierengehen 12.
Es gibt 4 Jungen, die gern Schach spielen, Fußball spielen sowie radfahren; 3, die gern Schach und Fußball spielen sowie spazieren gehen. 5 spielen gern Schach, fahren Rad und gehen spazieren, und 7 lieben Fußballspielen, Radfahren und Spazierengehen. Jungen, die gleichermaßen gern Schach spielen, Fußball spielen, radfahren und spazierengehen, gibt es 3.
Wir wissen auch, dass alle gern Schach spielen, Fußball spielen, radfahren oder spazierengehen. Wie viele Jungen sind in der Klasse?

3.8. Als eine wichtige Anwendung der obigen Methode lösen wir das folgende Problem: Wieviel Zahlen bis 1200 gibt es, die zu 1200 relativ prim sind? !

Da $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ ist, besitzen diejenigen Zahlen einen gemeinsamen Teiler mit 1200, die durch wenigstens eine der Zahlen 2, 3, 5 teilbar sind. Uns interessiert also:
Wieviel Zahlen gibt es, die kleiner als 1200 und durch keine der Zahlen 2, 3, 5 teilbar sind? Wir können leicht ausrechnen, dass es bis 1200

$\frac{1200}{2}$ durch 2 teilbare Zahlen gibt (jede zweite Zahl ist gerade),
$\frac{1200}{3}$ durch 3 teilbare Zahlen,
$\frac{1200}{5}$ durch 5 teilbare Zahlen.

Diejenigen Zahlen, die durch 2 und durch 3 teilbar sind, sind nichts anderes als die durch 6 teilbaren Zahlen. Daher gibt es bis 1200

$\frac{1200}{6}$ durch 2 und 3 teilbare Zahlen und analog
$\frac{1200}{10}$ durch 2 und durch 5 teilbare Zahlen,
$\frac{1200}{15}$ durch 3 und durch 5 teilbare Zahlen.

Schließlich sind die Zahlen, die sich durch jede der Zahlen 2, 3, 5 teilen lassen, gerade die durch 30 teilbaren Zahlen; es gibt also bis 1200

$\frac{1200}{30}$ Zahlen, die durch 2, 3 und 5 teilbar sind.

Rechnen wir jetzt mit diesen Angaben die gesuchte Anzahl mittels der Siebformel aus, so lautet das Ergebnis:

$$1200 - \frac{1200}{2} - \frac{1200}{3} - \frac{1200}{5} + \frac{1200}{2 \cdot 3} + \frac{1200}{2 \cdot 5} + \frac{1200}{3 \cdot 5} - \frac{1200}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 320$$

Wenn wir aus dem auf der linken Seite der obigen Gleichung stehenden Ausdruck die 1200 herausziehen, so lässt sich der verbleibende Rest in ein Produkt zerlegen (rechnet nach!):

$$1200\cdot\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}\right)=1200\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

Sei n eine natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit[1] $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n relativen primen Zahlen, die höchstens gleich n sind (dass hier statt von "kleiner" von "höchstens gleich" die Rede ist, hat nur für $n = 1$ Bedeutung; die Zahl n kann nur in diesem Falle zu sich selbst relativ prim sein. Somit ist $\varphi(1) = 1$.)
Die Zahl $\varphi(n)$ lässt sich analog ausrechnen; hierauf bezieht sich die erste der folgenden Aufgaben.

Aufgaben

12. $p_1, p_2, ..., p_k$ seien alle verschiedenen Primfaktoren der natürlichen Zahl n. Beweist, dass dann

$$\varphi(n) = n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot ...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

gilt.

13. Wir wollen zu jedem einzelnen Teiler d einer natürlichen Zahl n $\varphi(d)$ berechnen und die erhaltenen Zahlen addieren. Wie lautet das Ergebnis?

14. Wir addieren alle Primzahlen, die kleiner als n und zu n relativ prim sind. Was bekommen wir?

3.9. Jemand will auf einer n-stufigen Treppe heraufgehen. Er nimmt mit einem Mal immer eine oder zwei Stufen. Auf wie viele Weisen kann er die Treppe heraufgehen?

Wenn $n = 1$ ist, so ist dies offensichtlich nur auf eine Weise möglich. Bei $n = 2$ gibt es bereits zwei Möglichkeiten: entweder nimmt er zweimal eine Stufe oder einmal zwei Stufen. Im Falle dreier Stufen bestehen drei Möglichkeiten: dreimal eine Stufe oder zunächst zwei, dann eine, oder zunächst eine und dann zwei.
Jetzt möge jeder tippen, auf wie viele Weisen man auf einer n-stufigen Treppe heraufgehen kann.

Wer auf n getippt hat, hat nicht die richtige Antwort gefunden. Bereits im Falle $n = 4$ kann man auf fünferlei Weisen heraufgehen: entweder vier einzelne Stufen oder zwei Doppelstufen oder jedoch so, dass man einmal zwei, zweimal jedoch eine Stufe nimmt. Dieser letzte Fall lässt sich aber auf dreierlei Weise variieren: entweder steigt man zunächst zwei einzelne und dann eine Doppelstufe oder zunächst eine doppelte und danach zwei einzelne Stufen oder jedoch eine einzelne, dann eine Doppelstufe und schließlich wieder eine einzelne.

Wir wollen die Zahl, die angibt, auf wie viele Weisen man in dieser Art auf einer n-stufigen Treppe heraufgehen kann, mit F_n bezeichnen. Wir möchten F_n bestimmen.
Dazu teilen wir die auf einer n-stufigen Treppe zugelassenen Aufstiege in zwei Gruppen ein. In die eine Gruppe gehören diejenigen Aufstiege, bei denen zuletzt eine Einzelstufe benutzt wird, in die andere Gruppe dagegen diejenigen, die mit einer Doppelstufe enden.

Offensichtlich ist F_n so groß wie die Elementezahlen der beiden Gruppen zusammengenommen. Wieviel Elemente sind in der ersten Gruppe? So viele, wie es Möglichkeiten gibt, auf

[1]Der Buchstabe φ (lies: fi) ist der dem f entsprechende griechische Buchstabe.

einer $(n-1)$-stufigen Treppe heraufzugehen (wenn wir stets eine oder zwei Stufen nehmen) und dann noch die n-te Stufe zu nehmen, d.h. so viele, wie F_{n-1} angibt (die Anzahl der Möglichkeiten, eine $(n-1)$-stufige Treppe heraufzusteigen, wenn man stets eine oder zwei Stufen nimmt).

Analog kann man erkennen, dass in der zweiten Gruppe F_{n-2} Aufstiege enthalten sind. Insgesamt kann man also auf $F_{n-1} + F_{n-2}$ Weisen auf einer n-stufigen Treppe hochsteigen, wenn man immer eine oder zwei-Stufen nimmt. Wir haben also erhalten:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Da wir bereits wissen, dass $F_1 = 1$ und $F_2 = 2$ ist, können wir mittels dieser Formel nacheinander die Zahlen F_n ausrechnen:

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3, \quad F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5, \quad F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8$$

usw. Stellt euch im Falle kleiner natürlicher Zahlen n eine Tabelle für die Werte von F_n auf!
Wir vereinbaren noch, dass $F_0 = 1$ sein soll (mit der Begründung, dass man eine 0-stufige Treppe auf genau eine Weise "hochgehen" kann, nämlich so, dass man überhaupt keine Stufe nimmt).

Die so definierten Zahlen F_n heißen Fibonaccische Zahlen.
Ihren Namen Fibonacci (sprich: fibonatschi) haben sie nach einem italienischen Mathematiker des Mittelalters bekommen, der sie zuerst untersucht hat.

Für die Fibonaccischen Zahlen bestehen viele interessante Beziehungen. Beispielsweise gilt:

$$F_{2n+1} = F_0 + F_2 + F_4 + ... + F_{2n}$$

Wir können dies durch vollständige Induktion nachweisen. Im Falle $n = 0$ gilt $F_1 = F_0 = 1$. Angenommen, wir wissen bereits, dass die Beziehung für n gilt, und wollen beweisen, dass sie dann auch für $n + 1$ richtig ist, d.h., dass

$$F_{2n+3} = F_0 + F_2 + F_4 + ... + F_{2n} + F_{2n+2}$$

ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber

$$F_0 + F_2 + F_4 + ... + F_{2n} + F_{2n+2} = (F_0 + F_2 + F_4 + ... + F_{2n}) + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2}$$

Andererseits ist nach Definition der Fibonaccischen Zahlen $F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}$, womit wir die gewünschte Behauptung bewiesen haben.

Aufgaben

15. $F_{n+2} - 1 = F_0 + F_1 + ... + F_n$.

16. $1 - F_{2n} = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + ... + F_{2n} - F_{2n+1}$.

17. $F_n \cdot F_{n+1} = F_0^2 + F_1^2 + ... + F_n^2$

*18. Beweist die Gleichung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

(Bemerkung: Die obige Formel für F_n lässt sich leicht durch vollständige Induktion verifizieren - wenn man bereits irgendwoher vermutet hat, dass sich die Fibonaccischen Zahlen in dieser Weise ausdrücken lassen. Viel schwerer ist es, selbst auf diese Formel zu kommen.)

19. Ein Jäger jagt an jedem Tag so viel Wild wie an den vorhergehenden beiden Tagen zusammengenommen. Den ersten Tag hat er 10, den zweiten 5 Stück Wild geschossen. Wieviel Wild hat er am n-ten Tag geschossen?

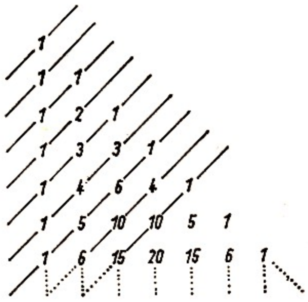


Abb. 3.4

20. Wir schreiben das Pascalsche Dreieck in der Weise auf, dass die Einsen, mit denen jede Zeile beginnt, untereinander zu stehen kommen (Abb. 3.4). Wir wollen die auf die dick ausgezogenen Geraden fallenden Zahlen addieren. Was für Zahlen bekommen wir als Ergebnis? Weshalb?

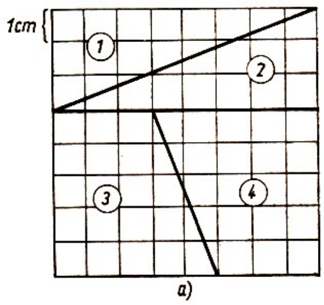


Abb. 3.5a

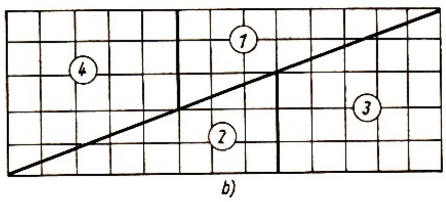


Abb. 3.5b

21. Wir wollen ein Schachbrett auf die in Abb. 3.5a dargestellte Weise in vier Teile zerlegen und aus diesen Teilen das in Abb. 3.5b dargestellte Rechteck zusammensetzen. Aus einem Quadrat von 64 cm^2 haben wir durch diesen Umbau ein Rechteck. von 65 cm^2 hergestellt. Wo ist der Fehler? Versucht, dasselbe mit einem Schachbrett vom Format 5×5 durchzuführen! In welchem Zusammenhang steht dies alles mit den Fibonaccischen Zahlen?

4 Kombinatorik in der Geometrie

Es kann sein, dass ihr im ersten Moment überrascht seid: was hat die Kombinatorik mit der Geometrie zu tun?
Dieses Kapitel ist jedoch länger als das vorhergehende. Es ist nicht nur so, dass durch die Geometrie viele Fragen aufgeworfen werden, auf die wir unsere kombinatorischen Kenntnisse anwenden können und auch anwenden müssen, sondern oft ist es auch umgekehrt: kombinatorische Aufgaben werden gelöst, indem man sie durch geometrische Probleme veranschaulicht.
1.5ex] **4.1.** Wir beginnen sogleich mit einer Aufgabe, die in einer Quizsendung des Fernsehens gestellt worden ist:
1.5ex] Wir nehmen ein konvexes n-Eck und setzen voraus, dass keine drei seiner Diagonalen durch einen Punkt gehen. Wie viele Schnittpunkte haben seine Diagonalen? (Die Eckpunkte werden nicht als Schnittpunkte gerechnet, die außerhalb des Vielecks gelegenen Schnittpunkte der Diagonalgeraden natürlich auch nicht. Demnach ist der schwarz gezeichnete Punkt in Abb. 4.1 ein Schnittpunkt, die eingekreisten Punkte dagegen nicht.)

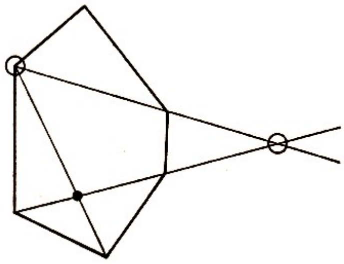


Abb. 4.1

Auf den ersten Blick könnten wir uns die Lösung der Aufgabe so denken, dass wir auf jeder einzelnen Diagonalen die Schnittpunkte abzählen und diese alle addieren. Wir wollen zunächst die Addition durchführen, etwa im Falle eines Sechsecks (Abb. 4.2).

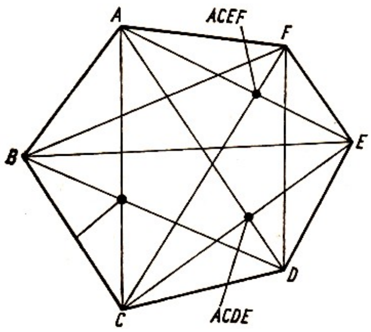


Abb. 4.2

Wir greifen zunächst eine Diagonale heraus, die zwei Ecken verbindet, zwischen denen noch jeweils ein weiterer Eckpunkt liegt, sagen wir A und C. Diese Diagonale wird von den von B ausgehenden Diagonalen geschnitten, und zwar gibt es auf ihr drei Schnittpunkte. Da sechs derartige Diagonalen existieren, ziehen wir insgesamt $6 \cdot 3 = 18$ Schnittpunkte in Betracht.

Jetzt nehmen wir eine Diagonale, die gegenüberliegende Ecken verbindet, etwa AD. Wie aus der Abbildung leicht abzulesen ist, liegen auf dieser vier Schnittpunkte. Da es drei solche Diagonalen gibt, bekommen wir von ihnen $3 \cdot 4 = 12$ weitere Schnittpunkte.
Beträgt also die Anzahl aller Schnittpunkte tatsächlich $18 + 12 = 30$? Aufgepasst!

Den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD beispielsweise haben wir sowohl da gezählt, als wir die auf der Diagonalen AC liegenden Schnittpunkte betrachtet haben, als auch dann, als es um die auf der Diagonalen BD liegenden ging; und ebenso verhält es sich auch mit den übrigen Schnittpunkten: jeder ist von uns zweimal gezählt worden. Wir müssen also das Ergebnis noch durch Zwei teilen und bekommen somit 15 Schnittpunkte.

Man sieht, wie viel man bereits im Falle solcher kleiner n zu rechnen hat, und man kann sich vorstellen, Wie weit dies im allgemeinen Falle gehen wird (die Rechnung ist kaum ausführbar; probiert es einmal!). Wir gelangen viel schneller zum Ziel, wenn wir geschickter sind und uns auf unsere kombinatorischen Kenntnisse stützen.

Wir wollen einen Schnittpunkt in der Weise bezeichnen, dass wir die Endpunkte der durch ihn verlaufenden Diagonalen hinschreiben; also mit $ABCD$ den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD und mit $ACDE$ den der Diagonalen AD und CE usw.
Ist diese Bezeichnung korrekt, d.h., haben wir nicht etwa verschiedene Punkte auf dieselbe Weise bezeichnet? Korrekt ist sie, denn wir haben beispielsweise die Buchstaben A, B, C, D nur an den Schnittpunkten der Diagonalen des konvexen Vierecks $ABCD$, d.h. der Diagonalen AC und BD, geschrieben.

Wir können darüber hinaus noch mehr bemerken: Zur Bezeichnung der Diagonalenschnittpunkte mussten wir jeden der vier Eckpunkte benutzen; das Quadrupel $ACEF$ beispielsweise bezeichnet den Schnittpunkt der Diagonalen AE und CF (Abb. 2).

Wollen Wir jetzt alle Diagonalenschnittpunkte aufzählen, so brauchen wir nichts weiter zu tun, als alle Eckpunktquadrupel aufzuschreiben. Die Anzahl der Diagonalenschnittpunkte ist also nichts anderes als die Anzahl der aus der Menge der Eckpunkte wählbaren vierelementigen Untermengen. Das heißt:
Bei $n = 6$ ist dies $\binom{6}{4}$, was wir ein wenig schneller ausrechnen können, wenn wir ausnutzen, dass das gleich $\binom{6}{2}$ ist: $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$.

Aufgabe

1. Wieviel Diagonalen besitzt ein konvexes n-Eck?

4.2. In derselben Quizsendung ist eine weitere interessante Aufgabe zur Sprache gekommen; im Verlauf ihrer Lösung werden wir auf eine andere uns von früher her bekannte Methode stoßen, auf das Schubfachprinzip.

Auf ein Quadrat von 70 cm Seitenlänge als Zielscheibe geben wir 50 Schuss ab. Wir schießen "ziemlich gut", denn alle Geschosse treffen die Zielseheibe. Wir wollen beweisen, dass es zwei Schüsse gibt, die weniger als 15 cm voneinander entfernt einschlagen.[2]

Lösung: Angenommen, wir benutzen als Zielscheibe ein ausgedientes Schachbrett, von dem eine Außenzeile und eine Außenkante markiert sind; auf dem Schachbrett verbleiben somit nur 49 Felder. Da das Schachbrett von insgesamt 50 Schüssen getroffen wird, muss es ein Feld geben, auf das mindestens zwei Schüsse gefallen sind (hier ist das Schubfachprinzip anwendbar).

Wir behaupten, dass diese beiden es sein werden, die weniger als 15 cm voneinander entfernt sind. Zeichnen wir dieses Quadrat gesondert heraus! (Abb. 4.3)

Seine Seitenlänge beträgt offenbar 10 cm, während seine Diagonale etwa 14,1 cm lang ist. Die beiden Geschosse können auch keinen größeren Abstand voneinander haben. (Beweist dies aber selbst!) Im Endergebnis haben wir etwas mehr herausbekommen, nämlich, dass zwei Geschosse

[2]Wir haben die Zahlenangaben ein wenig abgeändert.

nicht nur näher als 15 cm, sondern auch näher als 14,2 cm sind.

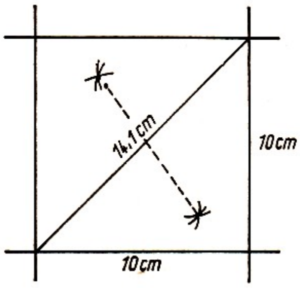


Abb. 4.3

Aufgabe

2. Verallgemeinert die Voraussetzungen der obigen Aufgabe!

4.3. Altbekannt ist uns auch die vollständige Induktion. Auch diese wird in der Geometrie sehr oft angewendet. Sogleich ein Beispiel dafür:

Wir zeichnen in der Ebene Kreise (n Stück) und färben die auf diese Weise erhaltenen Ebenenteile so mit zwei Farben, dass zwei Ebenenteile, die einen gemeinsamen Randbogen besitzen, verschieden gefärbt werden (weisen sie dagegen nur einen gemeinsamen Randpunkt auf, so dürfen sie dieselbe Farbe erhalten).

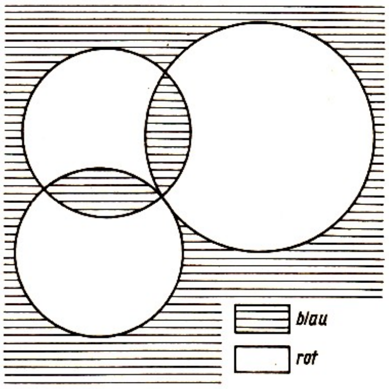


Abb. 4.4

In Abb. 4.4 ist eine derartige Färbung für den Fall von drei Kreisen dargestellt. Es ist zu beweisen, dass eine solche Einfärbung stets möglich ist. Das ist nicht evident, denn wir müssen die Nachbarn eines Gebietes, das wir etwa blau angemalt haben, rot färben und können beispielsweise nicht (jetzt noch nicht) wissen, ob nicht unter den letzteren zwei benachbart sind.

Betrachten wir also den Beweis! Wir werden vollständige Induktion anwenden. Für den Fall eines Kreises ($n = 1$) ist die Behauptung evident: das Innere des Kreises malen wir mit der einen Farbe aus, den außerhalb des Kreises befindlichen Teil mit der anderen Farbe. Wir haben noch nachzuschauen, ob sich die Färbbarkeit von n auf $n + 1$ vererbt.
Wir nehmen also $n + 1$ Kreise, zeichnen aber einstweilen nur n Stück unter ihnen auf und färben die dann erhaltenen Teile "gut", d.h. so, dass die Nachbarn verschieden gefärbt sind. Dass wir dies tun können, besagt gerade die Induktionsvoraussetzung.

Wir zeichnen jetzt den letzten, $(n + 1)$-ten Kreis ein und ändern die Färbung folgendermaßen ab: außerhalb des Kreises bleibt die Färbung ungeändert, die Färbung der in seinem Inneren befindlichen Teile wird dagegen in die entgegengesetzte verkehrt (Abb. 4.5).

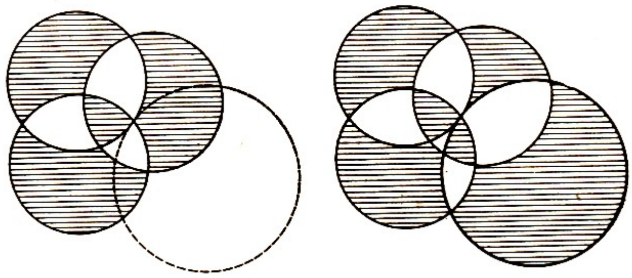


Abb. 4.5

Wir wollen jetzt nachsehen, ob die so gewonnene Färbung tatsächlich unseren Wünschen entspricht, d.h., ob auf beiden Seiten der Bandbögen entgegengesetzt gefärbte Gebiete liegen. Für die alten Randbögen ist dies der Fall, weil hierfür entweder alle beide Teile ihre Farbe behalten haben oder alle beide umgefärbt worden und somit auf jeden Fall verschieden gefärbt geblieben sind.

Auf den neuen Randbögen sind sie dagegen sicher verschieden, denn das im Inneren liegende Gebiet ist ja dann gerade umgefärbt werden. Die "Zweifärbung" vererbt sich also von n auf $n+1$.

Damit haben wir zwar den Beweis abgeschlossen, es ist aber trotzdem von Interesse, noch ein wenig bei diesem Problem zu verweilen. Jemand zeichnet uns ein derartiges Kreissystem auf, zeigt dann auf einen Ebenenteil davon und fragt, mit welcher Farbe man diesen ausmalen muss.
Das hängt natürlich davon ab, mit was für einer Farbe wir die Färbung begonnen haben. In Ordnung - erwidert er -, malen wir den äußersten Ebenenteil blau an! Dann können wir schon die Frage beantworten: die dem äußersten benachbarten Teile werden rot gemalt, deren Nachbarn blau usw.
Früher oder später gelangen wir zu dem fraglichen Teil.

Ließe sich dessen Färbung aber nicht vielleicht einfacher angeben? Verfolgen wir dazu die Färbung des betrachteten Teils, während wir nacheinander die Kreise hinzunehmen! Solange es überhaupt keinen Kreis gibt, ist die ganze Ebene blau.
Nehmen wir jetzt einen Kreis hinzu, so bleibt die Färbung eines gewissen Ebenenteils erhalten, wenn er außerhalb des Kreises liegt, und ändert sich, wenn er innerhalb des Kreises gelegen ist.
Im Endergebnis ändert sich die Färbung des Ebenenteils so oft, wie es Kreise gibt, in deren Innerem er liegt. Seine letzte Farbe ist somit: rot, wenn er im Inneren ungeradzahlig vieler Kreise liegt, und blau, wenn er im Inneren geradzahlig vieler Kreise liegt (Abb. 4.6).

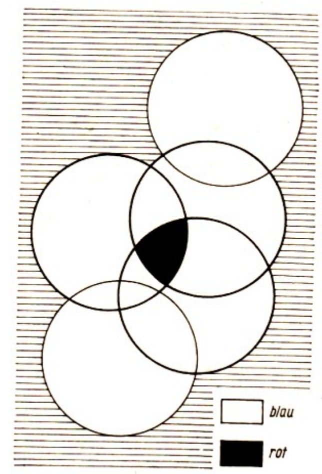


Abb. 4.6

Wir können feststellen, dass sich, hiervon ausgehend, für die ursprüngliche Aufgabe ein neuer Beweis geben lässt. Wir brauchen nämlich nur einen Teil rot oder blau zu färben, je nachdem, ob er im Inneren ungeradzahlig- oder geradzahligvieler Kreise liegt.
Beweist selbst, dass die auf diese Weise erhaltene Färbung "gut" ist.

Aufgaben

3. Es ist zu beweisen, dass die Teile, in die die Ebene durch eine Anzahl von Geraden zerlegt wird, mit zwei Farben färbbar sind.

4. Wie könnte man auch im Falle von Geraden die Färbung eines Ebenenteils angeben, ohne sämtliche Teile auszumalen?

4.4. Es ist freilich fraglich, wann man überhaupt in die Verlegenheit kommt, Ebenenteile färben zu müssen. Nun, gerade mit dieser Aufgabe hat man es beispielsweise bei der Landkartenherstellung zu tun: Sehen wir die in der vorstehenden Aufgabe auftretenden Ebenenteile als Länder einer fiktiven Landkarte an, so müssen wir die Landkarte aus Gründen der Übersichtlichkeit so ausmalen, dass benachbarte Länder verschieden gefärbt werden.
Oben haben wir also gerade gesehen, dass sich eine derartige Färbung durchführen lässt, wenn die Landkarte von solcher spezieller Form wie die unsrige ist. Wenn wir uns eine reale Landkarte vor Augen halten, so wird sie freilich weitaus komplizierter gestaltet sein und zu ihrer Färbung auch mehr Farben benötigen.

So kann man etwa als einfaches Beispiel vier Länder so zeichnen, dass sie sich paarweise längs einer Strecke berühren, wir müssten also, wenn wir diese "gut" färben wollen (d.h. so, dass benachbarte Länder verschieden gefärbt sind), alle vier Länder mit unterschiedlichen Farben anmalen (Abb. 4.7).

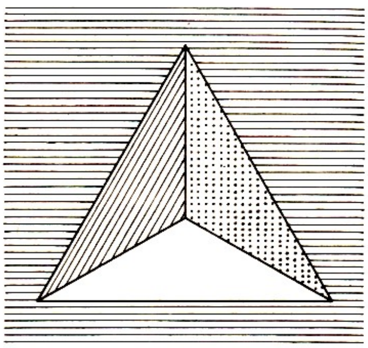


Abb. 4.7

Betrachten wir jetzt eine "reale" Landkarte, beispielsweise die Karte der Bezirke der DDR. Auf der Schullandkarte werden zu ihrer Färbung sechs Farben gebraucht, obgleich auch vier Farben ausreichen würden, wie aus der Abbildung 4.8 ersichtlich ist.[3]

Man kann freilich fragen, ob auch drei Farben genügen würden; es ist aber leicht zu erkennen, dass dies nicht der Fall ist. Beginnen wir nämlich, die Landkarte mit Rot, Blau und Gelb zu färben (es spielt keine Rolle, wie wir die drei Farben nennen), so müssen wir erkennen, dass wir früher oder später steckenbleiben.

Wir beginnen die Färbung mit dem Bezirk Leipzig, etwa mit roter Farbe. Dann können die zu dem Bezirk Leipzig benachbarten Bezirke nur blau und gelb gefärbt sein. Der Bezirk Karl-Marx-Stadt sei meinetwegen blau. Dann können wir Dresden nur noch gelb färben, Cottbus

[3] Die Landkartenhersteller verwenden deshalb mehr Farben, als eigentlich notwendig wären, damit die Landkarte übersichtlicher wird.

blau, Halle gelb, und stecken fest, weil der Bezirk Gera bereits einen roten (Leipzig), blauen (Karl-Marx-Stadt) und einen gelben Nachbarn (Halle) besitzt, also in überhaupt keiner Farbe mehr gefärbt werden kann (Abb. 4.8).

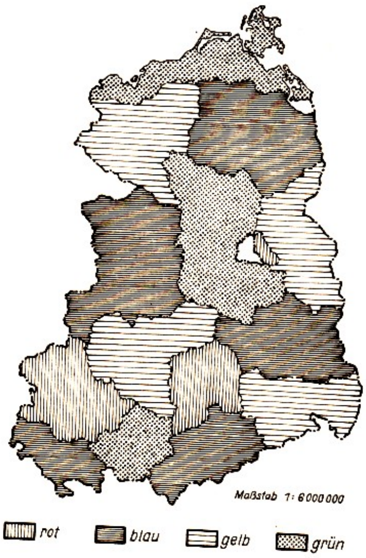


Abb. 4.8

Es ist kein Zufall, dass auch im Falle zweier verschiedener Landkarten vier Farben zur Färbung notwendig waren und auch ausreichten. Da für alle Landkarten, die bisher gezeichnet worden sind, vier Farben ausreichend waren, halten es die Mathematiker seit mehr als 100 Jahren für sehr wahrscheinlich (mit dem Fachausdruck: sie vermuten), dass für jede Landkarte vier Farben ausreichen; also auch für die noch in Zukunft herzustellenden Landkarten, selbst für solche, die sich gar nicht zeichnen ließen, weil sie so viele Länder darstellen.

Dass fünf Farben immer ausreichen, ließ sich beweisen[4], dass aber auch vier Farben langen, nicht. Das ist die berühmte Vierfarbenvermutung (einige glauben so sehr daran, dass sie sie geradezu Vierfarbensatz nennen), an deren Beweis sich die Mathematiker lange Zeit versucht haben - vergebens.

Oder vielmehr nicht ganz vergeblich, weil zu ihrer Lösung eine ganze Reihe von Hilfsmitteln ausgearbeitet worden sind, die auf anderen Gebieten sehr viele Anwendungen gefunden haben. Die wichtigsten von diesen, die Graphen, werden wir bald kennenlernen. Freilich können wir hier nicht die zur Lösung der Vierfarbenvermutung gemachten Versuche darstellen, weil das den gezogenen Rahmen sprengen würde.

Aufgabe

5. Es ist zu beweisen, dass eine Landkarte, auf der sich in jedem Eckpunkt[5] eine gerade Anzahl von Ländern treffen, mit zwei Farben färben lässt. - Wenn der Beweis nicht gelingt, so lest die folgenden drei Abschnitte und probiert es dann aufs neue!

4.5. Wir wollen uns jetzt mit einer Aufgabe befassen, die auf den ersten Blick nichts mit der Geometrie zu tun hat:

Es ist zu beweisen, dass es in einer Gesellschaft von 51 Mitgliedern sicher einen Menschen gibt, dem eine gerade Anzahl davon bekannt sind. (Bekanntschaft soll immer gegenseitige Bekanntschaft bedeuten. In der Gesellschaft kann es auch Leute geben, die sich nicht untereinander

[4] Den Beweis könnt ihr dem Buch von Rademacher und Toeplitz "Von Zahlen und Figuren" entnehmen.
[5] Eckpunkte heißen diejenigen Punkte, in denen mehr als zwei Länder zusammenstoßen.

kennen; es ist sogar zugelassen, dass einer dabei ist, der überhaupt keinen kennt.)

Die Aufgabe ist deshalb schwer, weil sie neuartig ist. Wir gehen dann im allgemeinen so heran, dass wir uns zunächst an konkreten Fällen zu orientieren versuchen. Das ist in unserem Fall jedoch sehr schwierig, weil sich sogleich die Frage erhebt, wie eine 51köpfige Gesellschaft vorgegeben werden soll.
Sollen wir jedem einen Namen geben und danach aufzählen, welche von ihnen sich gegenseitig kennen? Das wäre allein schon hoffnungslos langwierig, und dann wäre noch abzuzählen, wieviel Bekannte wer hat ... Würde es sich um eine kleinere Gesellschaft handeln, so wäre die Lage schon besser; aber ob die Behauptung überhaupt noch richtig bleib, wenn wir an Stelle der 51 irgendeine Zahl nennen?

Für 50 sicher nicht, denn wenn beispielsweise alle 50 einander kennen, so hat jeder 49 Bekannte, d.h., ungeradzahligviele. Aus demselben Grunde können wir die 51 nicht durch 48 oder 30 oder durch sonst eine gerade Zahl ersetzen. Ob wir aber die 51 durch die ungeraden Zahlen ersetzen können?
Versuchen wir zu beweisen, dass es

in einer aus ungeradzahlig vielen Menschen bestehenden Gesellschaft stets einen Menschen gibt, der geradzahlig viele Bekannte in der Gesellschaft hat!

Jetzt können wir bereits eine vorgegebene Gesellschaft betrachten. Die Mitglieder der Gesellschaft seien: Becker, Neumann, Schulze, Müller, Fuchs. Neumann kennt jeden, Becker und Müller kennen einander, und Müller kennt auch Fuchs. Dann kennt:

Becker 2 andere,
Neumann 4 andere,
Schulze 1 anderen,
Müller 3 andere,
Fuchs 2 andere.

Im Endergebnis haben drei (Becker, Neumann und Fuchs) eine gerade Anzahl von Bekannten; für diese Gesellschaft gilt also, was wir behauptet haben.

Es ist noch immer sehr langwierig, einen konkreten Fall durchzusehen, und keineswegs übersichtlich. Dem können wir jedoch abhelfen, indem wir geschickt eine Abbildung anfertigen. So ist es naheliegend, die Mitglieder der Gesellschaft durch Punkte zu bezeichnen und dann zwei Punkte durch eine Strecke zu verbinden, wenn die beiden Menschen einander kennen. Auf diese Weise gelangen wir zu Abb. 4.9.

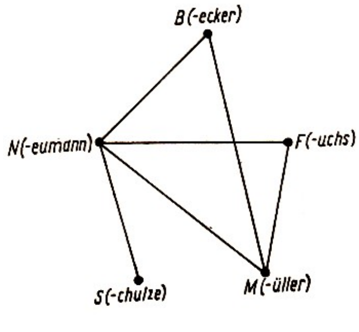


Abb. 4.9

Eine derartige Abbildung heißt Graph. Einen Graphen bekommen wir also auf die Weise, dass wir einige Punkte zeichnen und gewisse Paare unter diesen (nicht notwendig alle) mit je einer

Strecke verbinden. Die ursprünglich gezeichneten Punkte heißen Eckpunkte oder Knotenpunkte oder Punkte, die Verbindungsstrecken Kanten des Graphen.
Wenn ihr einen Graph zeichnet, braucht ihr die Kanten nicht mit dem Lineal zu ziehen und braucht auch nicht darauf zu achten, dass diese gerade sind. Wichtig ist lediglich, ob zwei Eckpunkte verbunden sind oder nicht.

Wir können also die Gesellschaft bequem mit einem Graphen darstellen. In unserer Aufgabe spielt weiterhin eine Rolle, wieviel Bekannte jemand hat. Dies können wir dadurch aus dem Graphen ablesen, dass wir abzählen, wieviel Kanten von einem Eckpunkt ausgehen.
Diese Zahl heißt der Grad oder die Valenz des Knotenpunktes. So hat B den Grad 2 (B ist von zweitem Grade), N den Grad 4 (N ist von viertem Grade), S den Grad 1 (S ist, von erstem Grade), M den Grad 3 und F den Grad 2. Wenn jetzt Gärtner ankommt, der keinen aus der Gesellschaft kennt, so brauchen wir nur zu dem Graphen einen neuen Punkt G hinzuzunehmen, der aber mit keinem früheren verbunden wird. Der Grad von G ist also 0.

In der Sprache der Graphentheorie können wir also unsere Aufgabe folgendermaßen formulieren:

In einem Graphen mit ungeradzahlig vielen Knotenpunkten gibt es einen Punkt gerader Valenz.

Da sich Graphen leicht zeichnen lassen, hindert uns jetzt nichts mehr daran, konkrete Beispiele zu untersuchen. In Abb. 4.10 haben wir mehrere konkrete Graphen aufgezeichnet und unsere Erfahrungen in einer Tabelle zusammengefasst:

Graph	a)	b)	c)	d)	e)
Anzahl der Punkte gerader Valenz	1	5	3	3	7

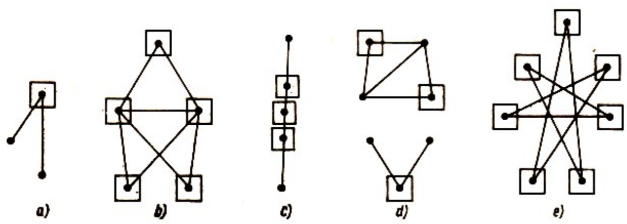


Abb. 4.10

Wir können feststellen: Es gibt nicht nur Punkte von gerader Valenz, sondern stets ungeradzahlig viele. Wir wollen also versuchen, folgende Aussage zu beweisen:

In einem Graphen mit ungeradzahlig vielen Knotenpunkten ist die Anzahl der Punkte gerader Valenz ungerade.

Ehe wir dies jedoch in Angriff nehmen, wollen wir noch einige Graphen betrachten, die geradzahlig viele Knotenpunkte haben; sicher stellt sich auch bei ihnen etwas Interessantes heraus (Abb. 4.11). Stellen wir eine Tabelle auf!

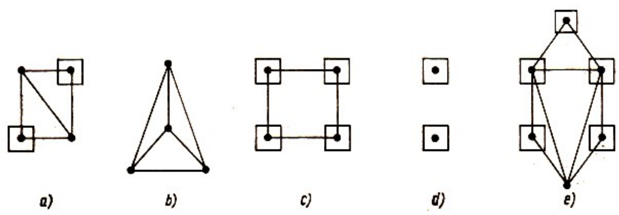


Abb. 4.11

Graph	a)	b)	c)	d)	e)
Anzahl der Punkte gerader Valenz	2	0	4	2	6

Hier können wir jetzt Folgendes bemerken:

In einem Graphen mit gerader Knotenpunktzahl ist die Anzahl der Punkte gerader Valenz gerade.

Wir sehen, dass es in diesem Falle vorkommen kann, dass es überhaupt keinen Eckpunkt gerader Valenz gibt. Die Anzahl der Eckpunkte gerader Valenz ist dann trotzdem gerade, weil 0 eine gerade Zahl ist.
Je nachdem, ob die Knotenpunktzahl des Graphen ungerade oder gerade ist, bieten die Beispiele etwas anderes. Richtiger: Sie bieten etwas anderes, wenn wir die Anzahl der Knotenpunkte gerader Valenz betrachten. Und wenn wir die Anzahl der Knotenpunkte ungerader Valenz betrachten würden?

Diese bekommen wir dadurch, dass wir von der Anzahl aller Knotenpunkte die Anzahl derjenigen gerader Valenz abziehen. Subtrahieren wir aber von einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl oder von einer geraden eine gerade, so wird sich immer eine gerade Zahl ergeben. Für die Punkte ungerader Valenz bekommen wir mit anderen Worten:

Satz: In jedem Graphen gibt es geradzahlig viele Punkte ungerader Valenz.

Wir können natürlich die obige Behauptung nur dann Satz nennen, wenn wir sie auch beweisen. Wir haben zwar in mehreren konkreten Fällen gesehen, dass sie gilt, aber auch ihr wisst, dass dies noch kein Beweis ist. Es ist interessant, dass wir bisher die Aufgabe nur erschwert haben, die ursprüngliche Aufgabe durch zugleich immer inhaltsreichere Aussagen ersetzt haben; trotzdem wird sich die letztere Form am leichtesten bestätigen lassen.

Bei unserem vorangegangenen Problem, bei der Färbung, sind wir so vorgegangen, dass wir die Abbildung schrittweise hergestellt haben, indem wir nacheinander die Kreise zeichneten. Wir haben festgestellt, dass sich die zu beweisende Eigenschaft bei jeder Hinzunahme eines neuen Kreises vererbt. Auch jetzt wollen wir ähnlich vorgehen, indem wir nacheinander die Kanten einzeichnen (Abb. 4.12).

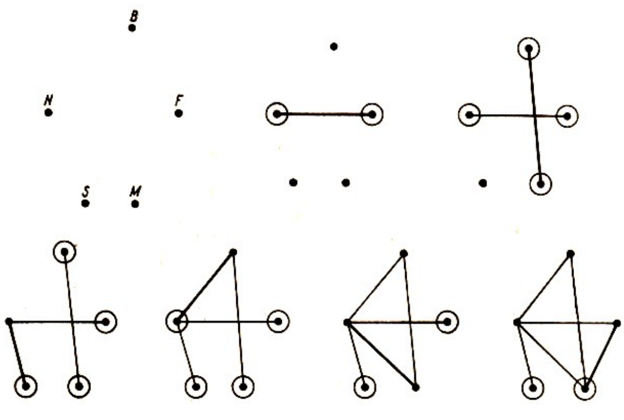


Abb. 4.12

Zu Beginn haben alle Punkte den Grad 0, die Anzahl der Punkte ungerader Valenz ist also Null, d.h. eine gerade Zahl. Wir wollen jetzt untersuchen, wenn wir schon bis zu einer gewissen Stelle fortgeschritten sind, um wieviel sich bei der Hinzunahme einer neuen Kante die Anzahl der Punkte ungerader Valenz ändert. Dies hängt offenbar davon ab, welche Valenz die Punkte haben, die durch die neue Kante verbunden werden.
Wenn der Grad aller beider Punkte vor ihrer Einzeichnung gerade war, so haben alle beide hinterher ungerade Valenz, die Anzahl der Punkte ungerader Valenz ist also um 2 gestiegen. Hatten alle beide ungerade Valenz, so sind sie von gerader Valenz geworden, die Anzahl der

Punkte ungerader Valenz ist also um 2 gesunken.

War schließlich der Grad des einen gerade, der des anderen ungerade, so haben sie sich in einen Punkt ungerader bzw. gerader Valenz umgewandelt, die Anzahl der Punkte ungerader Valenz ist also ungeändert geblieben. Insgesamt wächst die Anzahl der Punkte ungerader Valenz um 2 oder fällt um 2 oder bleibt ungeändert.
Wenn also vor der Einzeichnung der Kante geradzahlig viele Punkte ungerader Valenz existiert haben, so sind es auch danach geradzahlig viele geblieben. Damit haben wir den Beweis vollendet.

(Im Grunde genommen haben wir vollständige Induktion angewendet; überlegt, weshalb! Im Falle des ersten Graphen in Abb. 12 kann man verfolgen, wie sich die Valenzen der einzelnen Punkte beim Einziehen der Kanten ändern; wir haben die Punkte ungerader Valenz eingekreist und stets die zuletzt eingezogene Kante dick ausgezogen.)

Aufgabe

6. Formuliert die folgende Behauptung in die Sprache der Graphen um und beweist sie: In jeder Gesellschaft gibt es zwei Menschen, die in der Gesellschaft gleich viele Bekannte haben.

4.6. Es ist nützlich, für den im vorangegangenen Abschnitt bewiesenen Satz noch einen anderen Beweis zu betrachten. Dieser Beweis verläuft in der Weise, dass wir eine anscheinend nicht hierher gehörige Frage aufwerfen:
Wie kann man die Kanten eines Graphen abzählen? Hierauf kann man sehr einfach antworten:

Wir nehmen der Reihe nach die Knotenpunkte und zählen die von ihnen ausgehenden Kanten. Mit anderen Worten, wir addieren die Gradzahlen. Nur müssen wir dabei noch beachten, dass wir auf diese Weise jede Kante in ihren beiden Eckpunkten gezählt haben, das Ergebnis also durch Zwei teilen müssen. Was wir damit bekommen haben, ist auch für sich betrachtet interessant und verdient, besonders als Satz formuliert zu werden:

Satz: In einem Graphen ist die Summe der Gradzahlen doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten.

Aus dem Satz folgt, dass die Summe der Gradzahlen stets gerade ist, denn sie stellt ja das Doppelte einer ganzen Zahl dar (der Anzahl der Kanten). Lassen wir aus dieser Summe die geraden Glieder weg, so bleibt etwas Gerades übrig, die Summe der ungeraden Gradzahlen ist also gerade. Das ist aber nur dadurch möglich, dass diese geradzahlig oft auftreten. Damit haben wir den im Abschnitt 5 ausgesprochenen Satz aufs neue bewiesen.

4.7. Auf Graphen können wir nicht nur bei der Veranschaulichung von Gesellschaften stoßen. Wir können auch andere Zusammenhänge mit ihnen verdeutlichen, beispielsweise, welche Stadt mit welcher anderen in Verkehrsverbindung steht. Es gibt Fälle, in denen der Graph gleich aufgezeichnet veröffentlicht wird:
beispielsweise auf einer Karte von Wegenetzen oder Eisenbahnnetzen oder auf dem elektrischen Sehaltbild eines Radios (wir können die einzelnen Bauteile, Transistoren, Widerstände als Punkte, die Verbindungsdrähte als Kanten nehmen).

Sogar die Landkarten, die Länder oder Kreise darstellen, sind Graphen: ihre Knotenpunkte sind diejenigen Punkte, in denen drei oder mehr Länder (oder Bezirke) zusammenstoßen, ihre Kanten die Grenzabschnitte,die diese verbinden.[6]

[6]Eigentlich müssten wir gewisse Landkarten ausschließen; es kann kein solches Land wie San Marino auftreten,

Wenn wir einen Graphen aufzeichnen, kann es geschehen, dass sich seine Kanten schneiden (das ist auch im Falle unseres ersten Graphen passiert). Diese Schnittpunkte sehen wir natürlich nicht als Knotenpunkte an. Am besten ist es, sich die Sache so vorzustellen, dass die eine Kante dann oberhalb der anderen verläuft (wenn wir eine räumliche Darstellung, beispielsweise aus Draht, anfertigen, tritt diese Komplikation nicht auf).
Auf unseren Abbildungen wollen wir die "echten" Knotenpunkte zur Unterscheidung schwarz kennzeichnen. Wenden wir uns jedoch wieder dem ersten Graphen zu, so können wir sehen, dass sich die Überkreuzung durch eine geschicktere Zeichnung vermeiden lässt (Abb. 4.13).

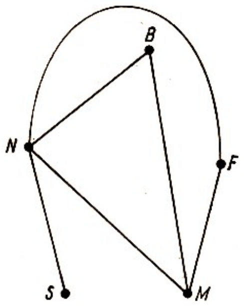


Abb. 4.13

Wenn sich ein Graph so zeichnen lässt, dass keine Überkreuzung stattfindet (wie wir wissen, brauchen keine geraden Kanten benutzt zu werden), so sagen wir, dass der Graph planar (plättbar) ist. Es gibt Graphen, die planar sind, aber auch solche, die es nicht sind (sich nicht in die Ebene zeichnen lassen); beispielsweise die Graphen von Abb.4.14 bzw. der Graph von Abb. 4.15.

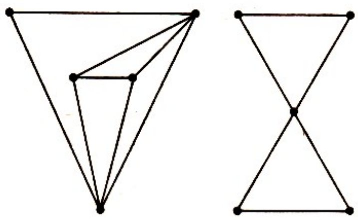


Abb. 4.14

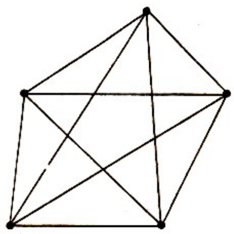


Abb. 4.15

Davon, dass der letztere Graph nicht planar ist, überzeugt ihr euch sogleich durch Probieren; wir werden jedoch hierauf noch zurückkommen.

4.8. An einem Schulball haben 300 Schüler teilgenommen. Dann kennt natürlich nicht jeder jeden. Jeder Junge möge genau 50 Mädchen und jedes Mädchen genau 50 Jungen kennen. Wir behaupten, dass sie gleichzeitig so tanzen können, dass jeder mit einem Bekannten tanzt.

Da von einer Gesellschaft und von Bekanntschaften die Rede ist, können wir analog zu dem Vorangegangenen (wenigstens in Gedanken) einen Graphen herstellen, der die Gesellschaft veranschaulicht. Wir können jedoch feststellen, dass es überhaupt keine Rolle spielt, ob zwei Jungen einander kennen. Demnach brauchen wir auch Bekanntschaften zwischen den Jungen in dem Graphen nicht zu kennzeichnen. Ebenso ziehen wir auch keine Kanten, die Mädchen verbinden.
Es wird also zweckmäßig sein, die Zeichnung so anzufertigen, dass wir oben die den Mädchen entsprechenden Knotenpunkte, unten die den Jungen entsprechenden Knotenpunkte zeichnen

das gänzlich im Inneren eines anderen Landes liegt, aber auch kein solches wie die Mongolei, das nur zwei Nachbarn besitzt; denn dann müssten zwei Punkte durch zwei Kanten verbunden werden. Diese Schwierigkeit entfällt jedoch, wenn wir außer den ursprünglichen Eckpunkten noch einige auf den Grenzen liegende Punkte als Knotenpunkte ansehen (diese sind natürlich von zweitem Grade).

und nur dann eine Kante einzeichnen, die einen oberen mit einem unteren Punkt verbindet, wenn die entsprechenden Schüler einander kennen.

Auf diese Weise bekommen wir einen Graphen spezieller Art, einen sogenannten paaren Graphen. Einen derartigen paaren Graphen haben wir in Abb. 4.16 dargestellt (natürlich einen, der einer kleineren Gesellschaft entspricht).

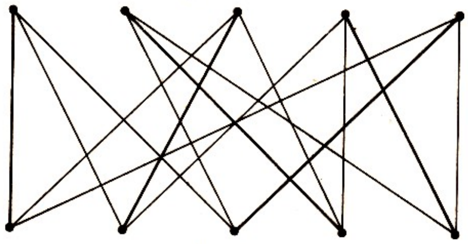


Abb. 4.16

Die dick ausgezogenen Kanten geben an, wer beispielsweise gleichzeitig miteinander tanzen kann.

Versuchen wir, unsere Aufgabe in der Sprache der Graphen zu formulieren! Wir haben also einen paaren Graphen, der 300 Knotenpunkte besitzt. Jeder Knotenpunkt hat den Grad 50. So viel wissen wir.
Wir wollen beweisen, dass die Punkte so in Paare eingeteilt werden können, dass die zu einem Paar gehörenden Punkte miteinander verbunden sind. Mit anderen Worten: Wir können gewisse Kanten auszeichnen, so dass jeder Punkt gerade Endpunkt einer solchen Kante ist (dadurch werden die Endpunkte jeder solchen Kante zu einem Paar zusammengefasst). Ein solches Kantensystem wird gewöhnlich Faktor ersten Grades genannt.

Wir können erwarten, dass es auf die Anzahl der Knotenpunkte des Graphen nicht ankommen wird, ebenso nicht darauf, wie groß der Grad der Knotenpunkte ist, sondern nur darauf, dass jeder Punkt denselben Grad besitzt. Letztendlich werden wir beweisen:

Satz: Ist der Grad jedes Punktes eines paaren Graphen gleich groß und mindestens 1, so kann man in ihm einen Faktor ersten Grades auswählen.

Dabei scheint uns Folgendes bemerkenswert. Lassen wir die zu diesem Faktor ersten Grades gehörigen Kanten weg, so bekommen wir wiederum einen solchen paaren Graphen, in dem der Grad jedes Punktes gleich groß ist (und zwar um Eins kleiner als im vorigen). Wenn diese Gradzahl nicht 0 ist, so können wir aus dem verbliebenen Graphen - dem obigen Satz zufolge - abermals einen Faktor ersten Grades wählen usw.
Auf diese Weise bekommen wir schließlich so viele Faktoren ersten Grades, wie ursprünglich der Grad der Knotenpunkte betrug. Wir wollen die zu dem einen Faktor gehörigen Kanten mit einer bestimmten Farbe färben, die Kanten des anderen Faktors mit einer anderen Farbe, die Kanten des dritten Faktors ersten Grades mit einer dritten usw. (Abb. 4.17).

Abb. 4.17

Auf diese Weise bekommen wir:

Satz: Wenn in einem paaren Graph der Grad jedes Punktes dieselbe Zahl k ist, so können wir seine Kanten so mit k Farben färben, dass von einem Punkt aus keine zwei identisch gefärbten Kanten ausgehen (und infolgedessen von jedem Punkt aus Kanten aller Farben ausgehen).

Aufgaben

7. Es ist zu beweisen, dass es in einem paaren Graphen, in dem jeder Punkt denselben Grad hat, ebenso viele Punkte "oben" wie "unten" gibt.

8. Bleiben die obigen beiden Sätze richtig, wenn wir sie so abändern, dass wir anstatt "paarer Graph" nur "Graph" schreiben?

Zum Beweis des zuerst ausgesprochenen Satzes kehren wir am Ende des folgenden Abschnitts zurück.

4.9. Auf einer Insel leben 6 Indianerstämme. Jeder besitzt 100 Quadratmeilen Jagdgebiet. Sie beschließen, an Stelle ihrer bisherigen Totemtiere künftig Schildkröten zu verehren. Da überall auf der Insel Schildkröten vorkommen, insgesamt 6 Arten, will jeder Stamm eine der auf dem Gebiet des Stammes vorkommenden Arten als Totem wählen, und zwar so, dass jeder Stamm ein anderes Totem hat.
Gelingt ihnen dies, wenn wir noch hinzufügen, dass die einzelnen Schildkrötenarten auf einem Gebiet von je 100 Quadratmeilen verteilt sind (Abb. 4.18).

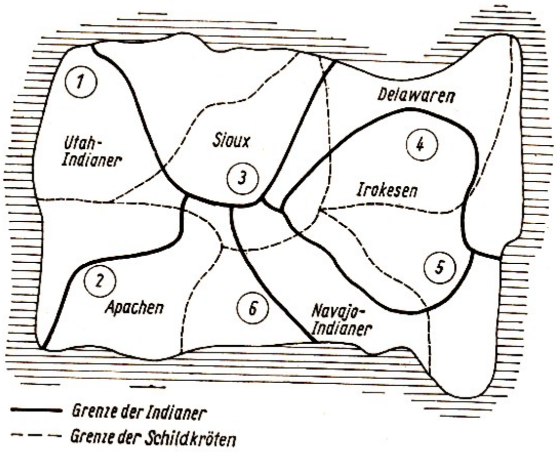


Abb. 4.18

Um die Bedingungen klarer zu erkennen, wollen wir untersuchen, warum wir die letzte Aussage hinzunehmen mussten.

Würde eine Schildkrötenart etwa auf einem Gebiet von 200 Quadratmeilen vorkommen, so könnte es geschehen, dass zwei verschiedene Indianerstämme nur diese eine Schildkrötenart auf ihrem Jagdgebiet vorfinden und infolgedessen keine verschiedenen Totems wählen könnten.
Aus unseren Voraussetzungen geht auch hervor, dass die Insel 600 Quadratmeilen umfasst. Das Jagdgebiet der Indianer umfasst insgesamt 600 Quadratmeilen, wobei es außerhalb liegende Gebiete nicht geben kann, da die Schildkröten die ganze Insel bevölkern und jede einzelne Art nur 100 Quadratmeilen einnimmt.

Wir versuchen, unsere Aufgabe mit einem geeigneten Graphen zu veranschaulichen. Die Schildkrötenarten und die Indianerstämme werden mit Punkten bezeichnet. Da wir uns dafür interessieren, welche Schildkrötenarten auf dem Gebiet welcher Indianerstämme leben, verbinden wir dann einen Schildkrötenpunkt und einen Indianerpunkt mit einer Kante, wenn die Schildkrötenart auf dem Jagdgebiet des betreffenden Indianerstamms vorkommt.

Wenn wir die Schildkrötenarten in der oberen Zeile gezeichnet haben, die Indianerstämme dagegen in der unteren, so sieht man sofort, dass wir einen paaren Graphen bekommen. Was haben wir zu beweisen?
Dass es in dem Graphen einen Faktor ersten Grades gibt, weil dann jeder Indianerstamm nur diejenige Schildkrötenart zu wählen braucht, mit der er in diesem Faktor ersten Grades verbunden ist (Abb. 4.19).

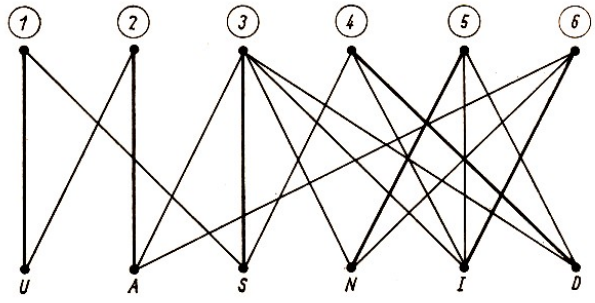


Abb. 4.19

Wiederum sind wir zu derselben Frage gelangt: Wann gibt es in einem Graphen einen Faktor ersten Grades?
Dem im voran- gegangenen Abschnitt ausgesprochenen Satz zufolge (den wir noch nicht bewiesen haben!) genügt es dazu, dass der Grad aller Punkte gleich groß ist. Das stellt aber eine allzu starke Einschränkung dar.
Von der neueren Aufgabe ausgehend können wir eine bessere Bedingung finden, d.h. eine, die weniger verlangt.

Wir wollen sehen, was für Eigenschaften der gewonnene Graph hat. Da die Schildkröten die gesamte Insel bevölkern, geht von jedem unteren Punkt eine Kante aus. Außerdem ist es nicht möglich, dass nur eine Schildkrötenart auf dem Jagdgebiet zweier Indianerstämme zusammengenommen lebt.
Für den Graphen bedeutet dies, dass zwei untere Punkte zusammengenommen mit wenigstens zwei oberen Punkten verbunden sind. Ebenso könnten wir aber auch 3, 4, 5 oder 6 Indianerstämme betrachten; stets würden wir erfahren, dass auf ihrem Gebiet stets wenigstens so viele Schildkrötenarten leben, wie wir Indianerstämme herausgegriffen haben. Der Graph hat mit anderen Worten die folgende Eigenschaft:

Eine beliebige Anzahl unterer Punkte ist insgesamt mit der gleichen Anzahl oberer Punkte verbunden.

Sehen wir jetzt von den in der Aufgabe genannten konkreten Zahlenangaben ab, so geht es also darum, den folgenden Satz zu beweisen (der im wesentlichen gleichfalls von Dénes König stammt und einer der wichtigsten Sätze der Graphentheorie ist):

Satz: Wenn in einem paaren Graphen oben und unten n Punkte liegen und ferner eine beliebig herausgegriffene Anzahl von unteren Punkten stets zusammengenommen mit wenigstens ebenso vielen oberen Punkten verbunden ist, so gibt es in dem Graphen einen Faktor ersten Grades.

Wir können feststellen. dass ein paarer Graph, der einen Faktor ersten Grades besitzt, diese Eigenschaft auch noch hat, wenn man ihn auf den Kopf stellt. Was wird aber aus unseren Bedingungen, wenn wir den Graphen auf den Kopf stellen, d.h., die unteren Punkte als obere ansehen und umgekehrt?
Es ist leicht zu erkennen, dass der umgedrehte Graph dieselbe Bedingung erfüllt. Hierzu haben wir nachzuweisen, dass in dem ursprünglichen Graphen, in dem wir oben k Punkte ausgewählt

haben, wenigstens k untere Punkte existieren, die mit irgendwelchen dieser oberen k Punkte verbunden sind. Färben wir dazu diese unteren Punkte rot und die übrigen blau!

Die blauen Punkte zusammengenommen können mit wenigstens $n-k$ oberen Punkten verbunden werden. Da die Bedingung "von unten nach oben" erfüllt ist, ist die Anzahl der blauen Punkte höchstens $n-k$ und somit die der roten Punkte mindestens k (Abb. 4.20).

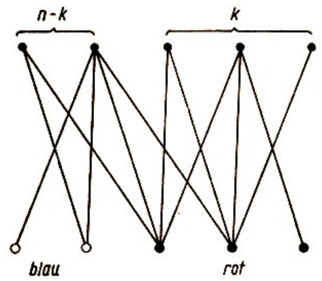


Abb. 4.20

Wenden wir uns jetzt dem Beweis des Satzes zu!

Beweis: Wir müssen uns so oft auf die oben formulierte Eigenschaft berufen, dass es am einfachsten ist, wenn wir im Verlauf des Beweises solche Graphen kurz "gute" Graphen nennen. Uns liegt also ein "guter" Graph vor, und wir wollen beweisen, dass er einen Faktor ersten Grades hat.

Wenn ein aus zwei Knotenpunkten bestehender Graph - der also einen unteren und einen oberen Punkt enthält - "gut" ist, bedeutet dies gerade soviel, dass die beiden Punkte verbunden sind. Somit bedeutet die Existenz eines Faktors ersten Grades, dass unser Graph in "gute" zweipunktige Graphen zerlegt werden kann. Zerlegung heißt, die Punkte so einzuteilen, dass nur die Kanten zwischen Punkten beibehalten bleiben, die in ein und dieselbe Gruppe gelangt sind.

Wir werden nunmehr so vorgehen, dass wir den Graphen in zwei "gute" Teile zerlegen, diese Teile wieder in "gute" Teile zerlegen und das Verfahren so lange fortsetzen, bis wir zu lauter zweipunktigen "guten" Graphen gelangen. Dann ergeben die verbliebenen Kanten gerade den gesuchten Faktor ersten Grades.

Lässt sich dies aber machen? Um diese Frage bejahen zu können, brauchen wir nur Folgendes zu beweisen:
Wenn ein paarer Graph "gut" ist und mehr als zwei Punkte besitzt, so lässt er sich in zwei "gute" Graphen zerlegen.

Wir versuchen es zunächst mit einer sehr einfachen Zerlegung:
Wir nehmen einen oberen Punkt A und einen unteren Punkt B, die miteinander verbunden sind; diese sollen den einen Graphen darstellen, die übrigen Punkte und die zwischen ihnen gezogenen Kanten dagegen den anderen. Mit dem ersten Graphen gibt es kein Problem: er ist "gut". Ist aber der andere "gut"?
Das ist nicht sicher, denn er kann solche k unteren Punkte besitzen, die mit weniger als k oberen Punkten von ihm verbunden sind.

Ursprünglich waren auch diese k Punkte mit mindestens k oberen verbunden; das ist nur dann möglich, wenn der k-te gerade der Punkt A war. Hat also die Zerschneidung zu keinem Erfolg geführt, so haben wir doch so viel erreicht, dass wir k Punkte unten gefunden haben, die mit genau k Punkten verbunden sind. Wir wissen auch, dass diese k Punkte nicht alle unteren Punkte ausmachen, weil beispielsweise B nicht zu ihnen gehört (Abb. 4.21).

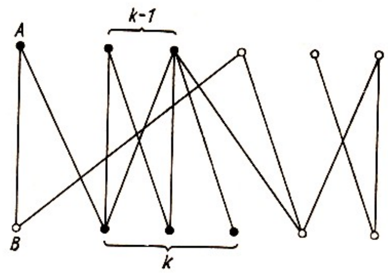


Abb. 4.21

Wir wollen jetzt die oben genannten k unteren Punkte und die mit ihnen verbundenen k oberen Punkte rot anmalen, blau dagegen die übrigen Punkte. Wir behaupten, dass die roten Punkte und die blauen Punkte für sich genommen je einen "guten" Graphen bilden.

Nehmen wir zunächst die roten Punkte! Unter ihnen wählen wir einige untere aus, etwa j Stück. Wir haben nachzuweisen, dass diese zusammengenommen mit wenigstens j oberen Punkten verbunden sind. Das ist jedoch offensichtlich, weil diese im ursprünglichen Graphen auch nur mit roten Punkten verbunden waren, und zwar mit wenigstens j.
Für die blauen Punkte ergibt sich die Behauptung ebenso, nur dass man dazu den Graphen auf den Kopf stellen muss (wir wissen, dass dabei der Graph "gut" bleibt). Damit haben wir den Beweis abgeschlossen.

Aufgabe

9. Es ist zu beweisen, dass ein paarer Graph, in dem jeder Punkt denselben Grad hat, "gut" ist. (Damit, wird auch der Satz von Abschnitt 8 bewiesen, da die guten Graphen einen Faktor ersten Grades besitzen.)

Die vorstehende Aufgabe zeigt, dass die Bedingungen, die wir gefunden haben, genügend allgemein ist, denn in ihr wird auch für die Graphen von Abschnitt 8 bewiesen, dass sie Faktoren ersten Grades haben. Ob wir vielleicht eine noch allgemeinere finden können?

Es ist leicht zu beweisen, dass ein paarer Graph, der einen Faktor ersten Grades besitzt, "gut" ist (der Beweis hierfür ist eure 10. Aufgabe). Die Mathematiker bringen dies dadurch zum Ausdruck, indem sie sagen, dass die gefundene Bedingung notwendig und hinreichend ist.

4.10. Nach den paaren Graphen wollen wir jetzt noch andere besondere Arten von Graphen kennenlernen.
Die einfachsten Graphen sind diejenigen, in denen je zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind. Ein derartiger Graph heißt vollständiger Graph.

Wir zeichnen Punkte in eine Reihe und verbinden die benachbarten. Den so erhaltenen Graphen nennen wir Weg. Verbinden wir auch noch den ersten Punkt mit dem letzten, so bekommen wir einen Kreis. Zeichnen wir dieselben Graphen anders, beispielsweise mit Überkreuzungen, so ändern sie sich dadurch, wie wir wissen, nicht wesentlich. Wir nennen sie daher im Weiteren gleichfalls Weg bzw. Kreis (Abb. 4.22).

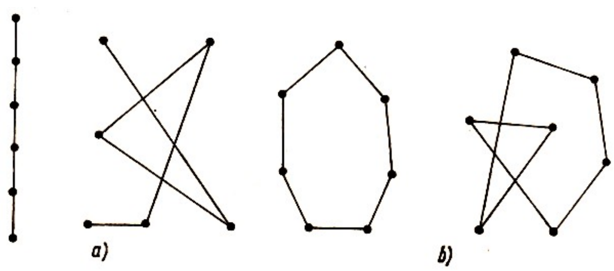


Abb. 4.22

Aufgaben

11. Wieviel Kanten hat ein vollständiger Graph von n Punkten, ein Weg von n Punkten und ein Kreis von n Punkten?

12. Es ist zu untersuchen, welche unter unseren bisherigen Abbildungen vollständige Graphen, Wege oder Kreise darstellen!

Sehr wichtig sind die zusammenhängenden Graphen. Anschaulich ist jedem klar, was das bedeuten soll, wir können es aber auch sehr leicht formulieren: Zusammenhängend ist ein Graph, in dem man von einem beliebigen Punkt zu jedem Punkt gelangen kann, indem man auf Kanten fortschreitet. Noch genauer:

Zusammenhängend ist ein Graph, wenn man zu je zweien seiner Punkte einen Weg finden kann, der diese Punkte als Endpunkte besitzt.

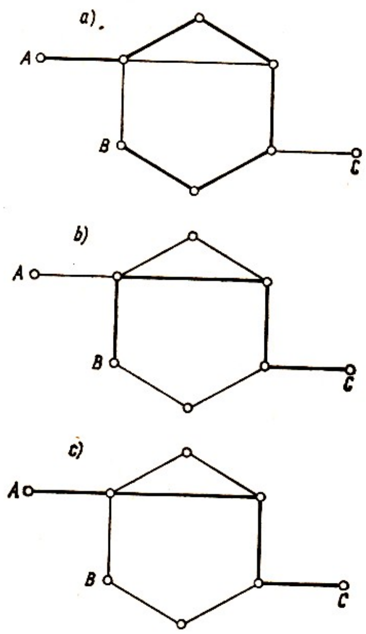


Abb. 4.23

Hier müssen wir etwas erklären. Wenn ein Weg einen Punkt A mit einem Punkt B verbindet und der Punkt B durch einen anderen Weg mit einem dritten Punkt C verbunden wird, so können wir von dem Punkt A dadurch zu C gelangen, dass wir auf dem ersten Weg nach B gehen und von hier aus auf dem zweiten Weg nach C.

Dann ist es jedoch nicht sicher, dass wir auf einem Weg fortgeschritten sind, weil der zweite Weg den ersten schneiden kann, sogar mehrmals, wie beispielsweise der dick ausgezogene Weg in Abb. 4.23a und b.
Wir können aber auch auf einem Weg von A nach C gelangen, ohne einen überflüssigen Abstecher nach B zu machen. Am einfachsten ist es, wenn wir auf dem ersten Weg so lange fortschreiten, bis wir zu einem gewissen Punkt des zweiten Weges gelangen, auf den anderen Weg übergehen und auf diesem nach C wandern. (Aus den in Abb. 4.23a bzw. b) dick ausgezogenen Wegen bekommen wir auf diese Weise den in Abb. 4.23c dargestellten Weg.)

Aufgabe

13. In einem zusammenhängenden Graphen möge es einen Kreis geben. Eine Kante dieses Kreises werde aus dem Graphen weggelassen. Beweist, dass auch der übrigbleibende Graph zusammenhängend ist!

4.11. Dass ein Graph zusammenhängend ist, stellt oft einen sehr wichtigen Gesichtspunkt dar, wenn wir die Graphentheorie in der Praxis anwenden wollen.
Beispielsweise ist das Telephonnetz eines Landes gut, wenn es zusammenhängend ist. Es liegt völlig auf der Hand, wie man das Telephonnetz durch Graphen veranschaulichen kann: Wir bezeichnen die Städte durch Punkte und verbinden zwei Punkte, wenn zwischen ihnen eine unmittelbare Telephonverbindung besteht.

Dieser Graph muss also zusammenhängend sein. Wir können natürlich an dem Graphen noch weitere Eigenschaften feststellen, wenn wir von dem Telephonnetz weitere gute Eigenschaften fordern, beispielsweise, dass sich zwischen zwei Städten auf zwei völlig unabhängigen Wegen eine Verbindung herstellen lässt (aus Sicherheitsgründen), oder die, dass man von jeder Stadt aus mit höchstens dreimaliger Vermittlung in jede Stadt telephonieren kann, usw.

Der Einfachheit halber stützen wir uns jedoch nicht auf derartige Forderungen. Für uns ist also die einzige wesentliche Eigenschaft eines Telephonnetzes die, dass es zusammenhängend ist.

Wir möchten dies natürlich mit möglichst billigen Kanten erreichen. Das heißt, wir wollen keine überflüssigen Kanten. In Aufgabe 13 haben wir gesehen, dass es in einem solchen Graphen keinen Kreis geben kann, denn eine beliebig herausgegriffene Kante desselben wäre dann überflüssig, da der Graph, wenn man sie weglassen würde, auch zusammenhängend bliebe. Für uns sind also jetzt diejenigen Graphen von Interesse, die zusammenhängend sind und in denen es keinen Kreis gibt.

Derartige Graphen heißen baumförmige Graphen oder kurz Bäume. Die Herkunft der Benennung wird verständlich, wenn man die in Abb. 4.24 aufgezeichneten Bäume betrachtet.

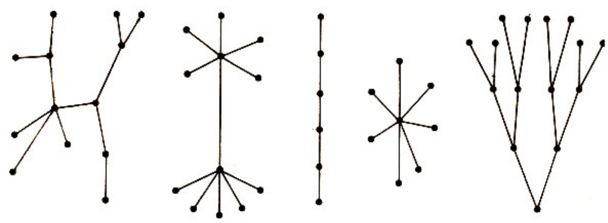


Abb. 4.24

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Bäume besteht darin, dass in ihnen je zwei Punkte auf genau eine Weise durch einen Weg verbunden werden können.
Machen wir uns jetzt daran, das zu beweisen!

Da der Graph zusammenhängend ist, lassen sich je zwei seiner Punkte durch einen Weg verbinden, wir haben also nur auszuschließen, dass dies auf mehrerlei Weise geschehen kann. Dazu nutzen wir die andere Eigenschaft aus, indem wir zeigen: Würden sich zwei Punkte durch zwei verschiedene Wege verbinden lassen, so könnte man in dem Graphen einen Kreis wählen (s. Abb. 4.25).

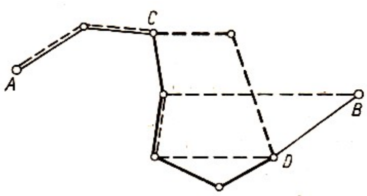


Abb. 4.25

Wir gehen von dem Punkt A aus und wandern bis zu demjenigen Punkt, wo sich die beiden Wege verzweigen. Diesen Punkt haben wir in der Abbildung mit C bezeichnet. Jetzt laufen wir, von C ausgehend, auf dem mit einer gestrichelten Linie bezeichneten Weg bis zu demjenigen Punkt D, wo der "ausgezogene" Weg aufs neue den "gestrichelten" trifft. Von hier aus kehren wir auf dem mit einer ausgezogenen Linie bezeichneten Weg zurück zu C. Dann haben wir gerade einen Kreis durchwandert.

Fragen: Ist der Beweis auch dann korrekt, wenn die beiden Wege außer den Endpunkten keinen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen?

Aufgaben

14. Beweist, dass ein Graph, in dem je zwei beliebige Punkte auf genau eine Weise durch einen Weg verbindbar sind, ein Baum ist.

15. Ein Graph enthalte keinen Kreis, zieht man aber in ihm beliebig eine neue Kante, so soll in dem neuen Graphen stets ein Kreis enthalten sein. Beweist, dass dann der Graph ein Baum

ist!

16. Beweist, dass es in jedem Baum einen Punkt vom Grade Eins gibt!

17. Ein realer Baum wächst in der Weise, dass er immer wieder ein neues kleines Reis treibt. Einen Graphen können wir analog wachsen lassen, indem wir immer wieder einen Punkt hinzunehmen und diesen mit einem alten verbinden (dieser wird das neue "Reis" sein). Bekommen wir auf diese Weise einen Baum? Können wir jeden Baum so wachsen lassen?

4.12. Wieviel Kanten hat ein Baum?
Das hängt davon ab, wieviel Punkte er enthält, das ist ganz klar. Das Überraschende aber ist, dass die Kantenzahl von nichts anderem abhängt. Wie vielgestaltig auch ein Baum sein kann,

jeder Baum mit n Punkten besitzt $n-1$ Kanten.

Ein Beweisgedanke hierzu kann sich ergeben, wenn wir zu der Aufgabe zurückkehren, auf Grund deren wir die Bäume eingeführt haben.

Von einem Ereignis, das in einer Stadt stattgefunden hat, sollen alle übrigen benachrichtigt werden. Daher benachrichtigt die Stadt alle unmittelbar mit ihr in Verbindung stehenden Städte, diese geben die Nachricht an die mit ihnen in Verbindung stehenden Städte weiter usw. Da das Netz zusammenhängend ist, gelangt die Nachricht auf diese Weise überall hin.
Die Nachricht ist in jede Stadt auf nur einem Wege gelangt, und jede Telephonleitung ist zur Verbreitung der Nachricht benutzt worden. Demnach haben zur Verbreitung der Nachricht so viele Telephonate stattgefunden, wie es Telephonleitungen (Kanten) gibt.

Da aber mit jedem Telephonat eine neue Stadt die Nachricht erfahren hat, gibt es mit der Nachrichtenquelle zusammen eine Stadt (einen Knotenpunkt) mehr als Telephonleitungen (Kanten).

Aufgabe

18. Beweist dasselbe, indem ihr euch auf Aufgabe 17 stützt!

4.13. Angenommen, die Telephonleitungen sind noch nicht verlegt, und wir sollen gerade das Netz planen. Wir haben dann zunächst zu entscheiden, welche Städte eine unmittelbare Verbindung erhalten sollen. Wovon soll das abhängen?
Wir nehmen an, nur davon, wieviel es kostet. (In praxi spielen freilich auch noch andere Gesichtspunkte eine Rolle. Der obige ist aber auf alle Fälle wichtig.)

Wir wollen also das Netz so planen, dass es möglichst billig realisierbar ist. Auf den ersten Blick könnten wir sagen, dass es nicht darauf ankommt, zwischen welche Städte wir unmittelbar Leitungen verlegen, denn wie wir bereits aus dem vorangegangenen Abschnitt wissen, müssen wir auf jeden Fall $n-1$ Leitungen legen. Die einzelnen Leitungen schlagen aber nicht in gleicher Weise zu Buche!

Manche sind billiger, manche teurer, je nachdem, ob die Städte näher oder weiter voneinander entfernt sind, ob sich zwischen ihnen Gebirge befinden usw.
Unsere Aufgabe besteht also darin, denjenigen Baum zwischen den gegebenen Punkten zu bestimmen, für den die Gesamtkosten der zugehörigen Kanten möglichst niedrig sind.

"Das ist nicht schwer!" - könnt ihr sagen. Man braucht nur die möglichen Bäume durchzuprobieren, um den billigsten herauszufinden. Wo steckt hier die Mathematik?
Mit der Behauptung, dies sei nicht schwer, begeben wir uns in eine Diskussion. Die Schwierigkeit eines solchen Durchprobierens besteht darin, dass sehr viele Fälle zu unterscheiden sind.

Hier erhebt sich also nebenbei auch die Frage, wieviel Bäume sich zwischen n vorgegebene Punkte zeichnen lassen. Da diese Frage sehr schwer zu beantworten ist, können wir jetzt nur das Endergebnis mitteilen: n^{n-2}.

Damit ihr euch einen Begriff davon machen könnt, wie groß diese Zahl ist, bemerken wir, dass es im Falle von 10 Städten 10^8, d.h. 100000000 (hundert Millionen) verschiedene Möglichkeiten dafür gibt, das Telephonnetz zu errichten. So viele verschiedene Möglichkeiten durchzurechnen, stellt eine hoffnungslose Aufgabe dar. Daher müssen wir ein anderes Verfahren ersinnen, um den besten Baum zu ermitteln, und gerade hierin besteht die Mathematik.

Es gibt ein wohlbekanntes Gleichnis von dem Optimisten und dem Pessimisten. Jeder bekommt eine Schachtel Zigaretten. Der Optimist verraucht zunächst die beste, dann von den verbleibenden die beste usw.; stets raucht er unter den noch existierenden die beste Zigarette. Der Pessimist sucht dagegen die schlechteste und raucht sie und fährt immer in derselben Weise fort. Auf diese Weise raucht der Optimist stets die möglichst beste Zigarette, der Pessimist stets die möglichst schlechteste, obgleich alle beide dieselben Zigaretten rauchen.

Wir wollen uns darüber klar werden, was ein optimistischer Unternehmer in unserem Falle tun würde. Da er Optimist ist, übernimmt er die Aufgabe auch ohne Geld. Er wartet, bis sich genug Geld angesammelt hat, um die billigste Verbindung zu errichten, und dann stellt er sie her. Danach wartet er wieder, bis er genug Geld hat, um die nächstbillige herzustellen, und baut diese, usw.
Natürlich legt er zwischen solchen Städten, die bereits - direkt oder indirekt - miteinander verbunden sind, niemals eine neue Leitung. Auf diese Weise realisiert er schließlich ein entsprechendes Telephonnetz - nur fragt sich, ist dies das möglichst billigste? Ist es möglich, dass sich die anfängliche Sparsamkeit später rächt - oder nicht?
Wir verraten, dass dies nicht geschehen kann und dass das Verfahren notwendig zum Erfolg führt. Das werden wir auch bald beweisen.

4.14. Zunächst müssen wir jedoch begründen, warum der obige Bauerfolg "unverdient" war. Deshalb, weil er mit der Aufgabe Glück hatte. Wenn wir die Aufgabe ein wenig abändern, würde er mit derselben Methode ein ganz schlechtes Ergebnis erzielen:

Das Telephonnetz soll aus Sicherheitsgründen so gebaut werden, dass je zwei Städte auf zwei völlig voneinander unabhängigen Wegen miteinander verbindbar sind (die Verbindung also im Falle eines Fehlers nicht zusammenbricht). Hierzu genügt es nicht mehr, $n-1$ Leitungen zu verlegen; mit n Leitungen lässt sich die Aufgabe dagegen realisieren: man braucht nur durch alle n Punkte einen einzigen Kreis zu legen.

Die Aufgabe besteht also darin, denjenigen Kreis zu wählen, der alle Städte enthält und für den die Baukosten der den Kanten entsprechenden Telephonleitungen möglichst niedrig sind. Unser optimistischer Bauherr würde jetzt folgendermaßen vorgehen:

Er würde die billigste Leitung verlegen, dann von den verbleibenden die billigste usw. und natürlich zwischendurch aufpassen, dass er keine überflüssigen Leitungen verlegt, also von einer Stadt aus, von der schon zwei Leitungen ausgehen, keine dritte mehr verlegen, und auch keine solche Leitung, die den Kreis eher schließen würde. So gelangt er zwar zu einem entsprechenden Netz, aber keineswegs zu dem billigsten.

Verfolgen wir seine Arbeitsweise an Abb. 4.26!

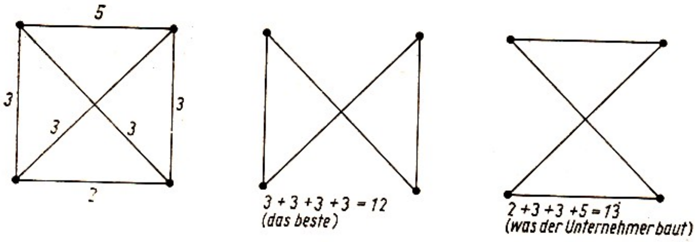


Abb. 4.26

Die Zahlen, die wir in der Abbildung an die einzelnen Kanten geschrieben haben, bedeuten die Baukosten, sagen wir, in Millionen Mark. Daneben haben wir den Kreis geschrieben, der am billigsten ist, und daneben denjenigen, den unser Bauherr bekommt. Wir können erkennen, dass ihn der Bau 1 Million Mark mehr kostet!
(Für diese letztere Aufgabe lässt sich nicht so leicht eine Lösung finden, wenn es viele Städte gibt. Es existieren zwar brauchbare Methoden, für die man aber eine Rechenmaschine in Anspruch nehmen muss.)
Wir kehren jetzt lieber zur Lösung der ersten Aufgabe zurück.

4.15. Wir wollen also beweisen, dass das optimistische Verfahren den billigsten Baum liefert, dass mit anderen Worten die Realisierung jedes anderen Baumes mindestens so viel kostet. Wir wollen denjenigen Baum, den das Verfahren liefert, mit F und einen anderen Baum mit G bezeichnen.
Wir halten an, wenn wir im Verlauf der Konstruktion von F erstmalig eine nicht zu G gehörige Kante gewählt haben. Dies sei die Kante a. Nehmen wir die Kante a zu dem Baum G hinzu, so entsteht in G ein Kreis.

Diesen können wir aber dadurch beseitigen, dass wir eine gewisse andere Kante von ihm weglassen. Da nicht der ganze Kreis zu F gehört, können wir eine Kante weglassen, etwa b, die nicht zu F gehört. Auf diese Weise wird G durch einen Baum H ersetzt (Abb. 4.27; die bereits ausgewählten Linien sind dick ausgezogen).

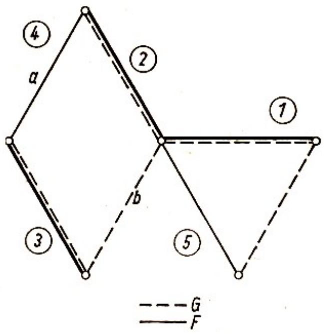


Abb. 4.27

Jetzt kommt die entscheidende Bemerkung: Die weggelassene Kante b kostet mindestens so viel wie a, denn wenn b billiger wäre, hätten wir im Verlauf des Konstruktionsverfahrens zu den schon ausgewählten Kanten b an Stelle von a hinzugenommen.
Hier müssen wir noch bedenken, dass mit der Hinzunahme von b kein Kreis entstehen konnte, denn dieser Kreis wäre ein Kreis in G gewesen, weil F die vor a gewählten Kanten enthält und auch b zu G gehört.

Der Baum H ist somit billiger oder kostet höchstens so viel wie G. Machen wir jetzt mit dem Baum H dasselbe, so können wir H durch einen noch billigeren Baum ersetzen, usw. Die erhaltenen Bäume stimmen in immer mehr Kanten mit F überein, im Endergebnis gelangen wir also zu F.

Zwischendurch haben die Kosten ständig abgenommen oder sind zumindest nicht gewachsen. Daher müssen die Kosten von G mindestens so hoch wie die Kosten von F sein. Der optimistische Bauherr hat also Glück, er bezahlt möglichst wenig.

Aufgaben

19. Der pessimistische Unternehmer würde folgendermaßen argumentieren:
Wenn ich nicht vorsichtig bin, müsste ich zuletzt sicher die teuerste Leitung bauen; daher streiche ich aus der Liste der zu verlegenden Leitungen zu Anfang die teuerste heraus. Dann streiche ich die zweitteuerste, dann die dritteuerste usw. Ich muss jedoch aufpassen, dass die übriggebliebenen Leitungen noch ein zusammenhängendes Netz bilden.

Wäre daher zu einem Zeitpunkt nach Beseitigung der nächstteueren Leitung das noch zu bauende Netz nicht mehr zusammenhängend, dann kann ich diese nicht weglassen, sondern muss sie bauen. Danach kann ich zu der nächst kostspieligsten Leitung übergeben, kann mir ansehen, ob ich sie weglassen kann, und sie dementsprechend streichen oder bauen usw.
Der pessimistische Unternehmer baut also von den zur Debatte stehenden Leitungen immer die teuerste!

Und trotzdem - der Beweis dafür ist eure Aufgabe - werden die Kosten dafür ebenso groß sein wie die des "Optimisten", mit anderen Worten, auch er hat die billigste Möglichkeit gefunden.

20. Könnt ihr noch weitere Verfahren zur Herstellung des billigsten Baumes ausdenken?

21. Was macht der pessimistische Unternehmer, wenn er die Aufgabe von Abschnitt 14 lösen will? Wendet man seine Methode (formuliert, wie das Verfahren in diesem Falle lautet!) auf den Graphen von Abb. 26 an, dann bekommt man den billigsten Kreis. Könnt ihr die Abbildung so abändern, dass der Pessimist nicht die billigste erhält?
Konstruiert ein Beispiel dafür, dass jeder der beiden Unternehmer hereinfällt!

4.16. Bisher haben wir zwar bereits sehr viele Eigenschaften der Graphen untersucht, ihr werdet aber mit Recht fragen, was sie mit der Vierfarbenvermutung zu tun haben. Wir wollen kurz darauf eingehen.

Es gibt eine sehr naheliegende Möglichkeit, die Vierfarbenvermutung mit den Graphen in Zusammenhang zu bringen: eine Landkarte kann als Graph aufgefasst werden, wenn man die Punkte, in denen sich wenigstens drei Länder treffen, als Knotenpunkte betrachtet, und als Kanten die Grenzstreifen, die diese verbinden.[7]
Auf diese Weise bekommen wir einen planaren Graphen. Die entstehenden Ebenenteile, d.h. die Länder, müssen wir so mit vier Farben ausmalen, dass benachbarte Länder mit verschiedenen Farben gefärbt sind. Auf diese Weise kommen wir jedoch der Lösung der Aufgabe nicht näher, weil nicht nur die Punkte und Kanten der Graphen auftreten, sondern auch die entstehenden Länder.

Wir können das Problem auch noch anders veranschaulichen.
Jedem Land ordnen wir je einen Punkt zu. Am zweckmäßigsten gehen wir so vor, dass wir die Hauptstädte der Länder auf der Landkarte mit einer Kante verbinden. Die Kanten zeichnen wir so, dass sie den gemeinsamen Grenzstreifen schneiden und dass sich die von einer Hauptstadt aus verästelnden Kanten nicht gegenseitig überkreuzen (von solcher Art sind im allgemeinen die Eisenbahnlinien, die die benachbarten Hauptstädte verbinden).

[7] Von den schon genannten Ausnahmen wollen wir jetzt absehen (von diesen kann man leicht nachweisen, dass sie unter dem Blickwinkel der Vierfarbenvermutung uninteressant sind.

Auf diese Weise erhalten wir einen Graphen (Abb. 4.28).

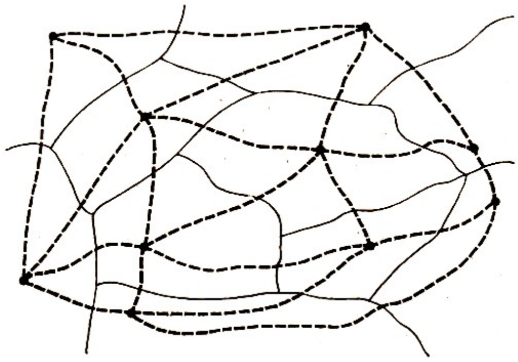


Abb. 4.28

Und jetzt folgt eine sehr wichtige Bemerkung: Dieser Graph ist planar!
Die Einfärbung der Landkarte läuft darauf hinaus, die Punkte des Graphen so mit vier Farben zu färben, dass die durch eine Kante verbundenen Punkte verschieden gefärbt sind. Die Vierfarbenvermutung lässt sich also folgendermaßen formulieren:

Die Punkte jedes planaren Graphen lassen sich so mit vier Farben färben, dass die Endpunkte jeder Kante verschieden gefärbt sind.

Aufgabe

22. Wir wollen die Ecken des zweiten obigen Graphen als die Länder einer anderen Landkarte ansehen! Analog zu Obigem ist der aus den Hauptstädten dieser Landkarte entstehende Graph zu konstruieren! Was für einen Graph erhalten wir?

4.17. Wir kehren jetzt zu einer unserer früheren geometrischen Aufgaben zurück. In Aufgabe 3 war zu beweisen, dass die Ebenenteile, in die die Ebene durch irgendwie darin gezeichnete Geraden zerlegt wird, mit zwei Farben gefärbt werden können. Wir haben jedoch oben eine viel natürlichere Frage übergangen: wieviel Ebenenteile entstehen insgesamt?

Dies hängt natürlich davon ab, wie die Geraden liegen. Beispielsweise wird die Ebene durch zwei parallele Geraden in drei Teile zerlegt, durch zwei einander schneidende Geraden dagegen in vier Teile (Abb. 4.29).

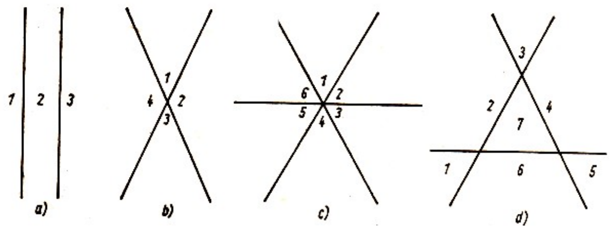


Abb. 4.29

Ein anderes Beispiel: Im Falle dreier Geraden, die durch einen Punkt gehen, bekommen wir 6 Teile, gehen sie jedoch nicht durch einen Punkt, erhalten wir 7. Wir machen demnach die überraschende Feststellung: Schließen wir die Fälle a) und c) aus, so kommt es nicht mehr darauf an, wie die Geraden liegen.
Wir betrachten also Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. Solche Geraden werden wir kurz Geraden in allgemeiner Lage nennen. Unsere Aufgabe lautet also, genau formuliert:

In wieviel Teile wird die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage zerlegt?

Wir zeichnen die Geraden sukzessive und sehen nach, wie dabei die Anzahl der Teile zunimmt (Abb. 4.30).

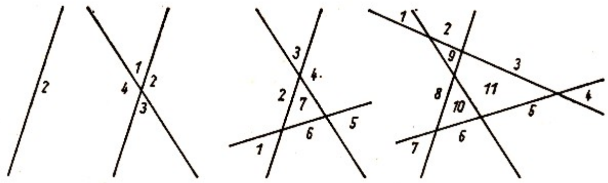


Abb. 4.30

In Tabellenform:

Anzahl der Geraden	1	2	3	4
Anzahl der Ebenenteile	2	4	7	11

Wir wollen diese Tabelle ein wenig genauer betrachten. Wir sehen, dass die Anzahl der Ebenenteile beim Ziehen einer neuen Geraden zunächst um 2, dann um 3, dann um 4 gewachsen ist. Hierauf stützt sich unsere Vermutung, dass die Anzahl der Teile durch die n-te Gerade um n wachsen wird. Beweisen wir dies!

Wodurch wächst die Anzahl der Länder beim Ziehen einer neuen Geraden? Dadurch, dass durch diese Gerade gewisse Länder zerschnitten werden, und zwar gerade um so viel, wie es derartige Länder gibt. Durch wie viele alte Länder geht diese neue Gerade?
Durchschreiten wir die Gerade, so gelangen wir stets dann in ein neues Land, wenn wir eine andere Gerade kreuzen. Auf der ganzen Geraden gibt es $n-1$ Überkreuzungen, was bedeutet, dass die Gerade durch n Länder verläuft. Also nimmt die Anzahl der Länder tatsächlich um n zu. (Da wir vorausgesetzt haben, dass sich die Geraden in allgemeiner Lage befinden, folgt, dass die neue Gerade alle alten kreuzt und diese Überkreuzungen alle verschieden sind.)

Wir sind noch nicht fertig, wir wissen erst, um wieviel die Anzahl der Länder nach dem Ziehen der n-ten Geraden wächst.
Die Anzahl der Länder beträgt also 2, $2+2$, $2+2+3$, $2+2+3+4$ und so weiter, im Falle von n Geraden: $2+2++3+4+...+n$. Ein wenig anders geschrieben, lautet dies:

$$1+1+2+3+4+...+n$$

d.h., die Anzahl der entstehenden Länder ist gerade um 1 größer als die Summe der natürlichen Zahlen bis n. Diese haben wir jedoch schon in einer früheren Aufgabe ausgerechnet; im Endergebnis lautet die Anzahl der Länder also:

$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$

Wir gehen noch eine andere Lösung an, die direkter ist, aber die Länder geschickter zusammenrechnet. Wir wollen uns die Geraden auf eine Tafel gezeichnet vorstellen, und zwar auf eine sich nach oben rechts und links ins Unendliche erstreckende Tafel. Unsere Abbildung ordnen wir so an, dass alle Schnittpunkte der Geraden auf die Tafel fallen und keine horizontale Gerade auftritt (Abb. 4.31).

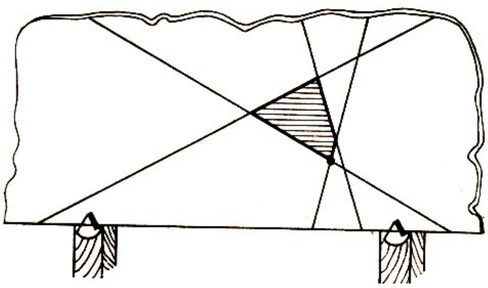


Abb. 4.31

Betrachten wir jetzt den jeweils untersten Punkt der einzelnen Länder. Diejenigen Länder, die keinen solchen besitzen, sind durch die untere Kante der Tafel ins Unendliche zu offen. Gibt es jedoch welche, so nur einen, weil ihre untere Berandungsstrecke nicht horizontal sein kann. Wenn wir einen Schnittpunkt ansehen, so treffen sich hier vier Länder, und der Schnittpunkt ist der unterste Punkt eines (des obersten von ihnen, der übrigen aber sicher nicht. Aus dem Bisherigen können wir entnehmen, dass es an solchen Ländern, die einen untersten Punkt besitzen, gerade so viele gibt, wie n Geraden Schnittpunkte haben. Die Anzahl derartiger Schnittpunkte beträgt $\binom{n}{2}$.

Es bleiben noch diejenigen Länder, die keinen untersten Punkt aufweisen. Die Unterkante der Tafel wird von den n Geraden in $n+1$ Teile zerlegt, und durch jeden derartigen Teil erstreckt sich je ein solches Land, es gibt also $n+1$ derartige Länder.
Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so bekommen wir, dass die Anzahl der entstandenen Länder $\binom{n}{2} + n + 1$ beträgt.

Aufgabe

23. Haben wir dasselbe wie vorhin erhalten?

4.18. Oben haben wir im wesentlichen ausgerechnet, in wieviel Teile die Ebene durch einen speziell konstruierten, in die Ebene gezeichneten Graphen zerlegt wird. (Als Knotenpunkte können wir die Schnittpunkte, als Kanten die zwischen diese fallenden Abschnitte der Geraden ansehen.)
Wir wollen jetzt davon ab- sehen, dass auch "nach dem Unendlichen zu offene" Kanten vorgekommen sind.

Sehr wichtig ist das Ergebnis, das Euler, der größte Mathematiker des XVII. Jahrhunderts, gefunden hat und mit dessen Hilfe wir bei jedem zusammenhängenden planaren Graphen die Anzahl der Länder ausrechnen können, wenn wir die Anzahl der Kanten und der Eckpunkte kennen.
Die berühmte Eulersche Formel lautet folgendermaßen:

Anzahl der Länder + Anzahl der Knotenpunkte = Anzahl der Kanten + 2.

Die Herleitung dieser Beziehung werden wir an einer kleinen Geschichte veranschaulichen. Durch diese Umrahmung verliert der Beweis nichts an seinem mathematischen Wert.
Wir wollen unseren Graphen wieder als Landkarte betrachten. Es ist jedoch zweckmäßiger, die Kanten nicht als Ländergrenzen, sondern als Dämme anzusehen und die Eckpunkte der Kanten als Wachtürme. Die eingeschlossenen Gebiete stellen also keine Länder, sondern Becken dar. Außerhalb befindet sich das Meer, die übrigen Becken sind dagegen trocken.
Warum ist diese Auffassung zweckmäßiger?

Deshalb, weil die in Abb. 4.32 dargestellte Mole nicht als Ländergrenze aufgefasst werden kann (weil auf beiden Seiten von ihr dasselbe Land liegen würde), wohl aber als Damm.

Da die Insel von einem Feind angegriffen wird, überschwemmen die Verteidiger die ganze Insel durch die Sprengung gewisser Dämme mit dem Wasser des Ozeans. Die Verteidiger hoffen darauf, nachdem sie den Angreifer zurückgeworfen haben, zurückkehren zu können, sie sind also daran interessiert, nur möglichst wenig Dämme zu sprengen. Die Sprengung erfolgt auf die folgende Weise.

Gleichzeitig wird immer nur ein Damm gesprengt, und zwar ein solcher, dessen eine Seite von Wasser bespült wird, die andere dagegen nicht.

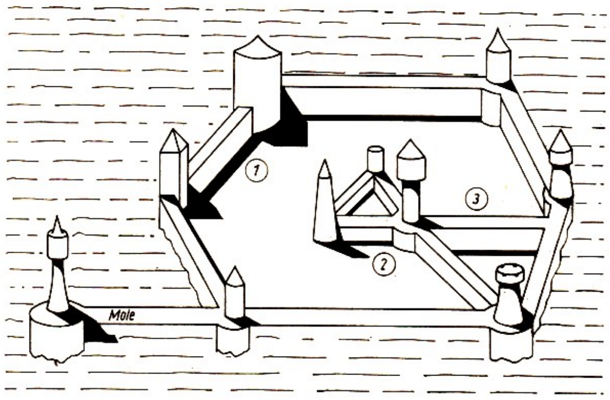


Abb. 4.32

Dann strömt der Ozean in das bisher trockene Becken ein, das sich auf seiner anderen Seite befindet. Wir müssen hier bemerken, dass dann die übrigen Dämme, die das Becken begrenzen, noch unversehrt sind, das Wasser also nur diese eine Seite überschwemmt. Auf der Abbildung haben wir gekennzeichnet, welche Dämme gesprengt werden, und in welcher Reihenfolge.

Wir bezeichnen die Anzahl der Wachtürme (Eckpunkte) mit e, die Anzahl der Dämme (Kanten) mit k, die Anzahl der Becken (Länder, Flächen) mit f. (Das ist die gebräuchliche Bezeichnungsweise, wir werden später erklären, warum.)
Da $f - 1$ Becken der Insel mit Wasser überschwemmt werden, müssen gerade $f - 1$ Sprengungen durchgeführt werden.

Was für ein Graph bleibt nach der Sprengung übrig? Zunächst wird in ihm kein Kreis enthalten sein, weil das Innere eines solchen Kreises trocken geblieben wäre. Andererseits ist das Dammsystem zusammenhängend geblieben, weil jeder gesprengte Damm eine Kante eines Kreises gebildet hat (auf der Grenze desjenigen Beckens, das durch die Sprengung mit Wasser überschwemmt worden ist) und wir aus Aufgabe 12 wissen, dass durch die Entfernung einer solchen Kante der Zusammenhang nicht gestört wird.
Der erhaltene Graph ist also zusammenhängend und enthält keinen Kreis, stellt also einen Baum dar.

Wir wenden jetzt die wichtige Beziehung an, dass ein Baum um Eins weniger Kanten als Eckpunkte besitzt. Unser Baum hat e Ecken, also $e - 1$ Kanten.
Fassen wir das Bisherige zusammen, so ergibt sich Folgendes.

Es mussten $f - 1$ Kanten gesprengt werden, und $e - 1$ Kanten sind geblieben. Die Anzahl der Kanten ist also die Summe dieser beiden Zahlen, in Formeln: $(e-1)+(f-1) = k$. Lösen wir . hier die Klammern auf und addieren zu beiden Seiten 2, so bekommen wir:

$$f + e = k + 2$$

und das ist es gerade, was zu beweisen war.

Aufgabe

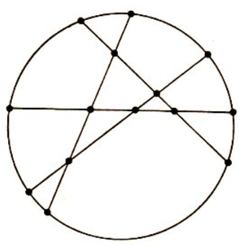


Abb. 4.33

24. Rechnet zusammen, in wieviel Teile die Ebene durch n Geraden zerlegt wird, indem ihr die Geraden als Dämme auf einer großen kreisförmigen Insel betrachtet. Seht als Hilfe die Abbildung 4.33 an (wenn ihr diese Aufgabe löst, so habt ihr damit bereits eine dritte Methode zur Lösung derselben Aufgabe kennengelernt). **4.19.** Es steht noch der Beweis dafür aus, dass der fünfpunktige vollständige Graph (vollständiges Fünfeck) nicht planar ist. Dies werden wir auf überraschende Weise mit Hilfe der Eulerschen Formel tun.

Wir zeigen, dass die Annahme, das vollständige Fünfeck sei planar, zum Widerspruch führt. Wir wollen also annehmen, das vollständige Fünfeck lasse sich ohne Überkreuzung in die Ebene zeichnen. (Leider können wir keine Abbildung beifügen, weil wir gerade beweisen wollen, dass dies nicht möglich ist.) Wir rechnen aus, wie groß die Anzahl der Ebenenteile sein würde. Ecken gibt es fünf, Kanten $\binom{5}{2} = 10$, und nach der Eulerschen Beziehung ist die Anzahl der entstehenden Teile: $10 + 2 - 5 = 7$. Da jeder dieser 7 Teile von mindestens drei Kanten begrenzt wird, bekommen wir, wenn wir flächenstückweise die Kanten zusammenzählen, dass es wenigstens $\frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$ Kanten gibt. (Wir mussten deshalb durch 2 teilen, weil wir jede Kante von zwei Seiten aus gezählt haben.)

Somit hat unsere Annahme, dass das vollständige Fünfeck planar sei, zu der unmöglichen Folgerung geführt, dass $10 > 10,5$ ist. Das vollständige Fünfeck lässt sich also nicht in eine Ebene zeichnen.

Aufgaben

25. Ist der Graph, der sich aus dem vollständigen Fünfeck ergibt, indem man darin eine Kante weglässt, planar?

26. Es gibt drei Häuser und drei Brunnen. Kann man von jedem Haus so zu jedem Brunnen je einen Weg legen, dass sich diese Wege nicht überkreuzen?

27. Auf einer Insel sind e Wachtürme errichtet. Wieviel Dämme kann man höchstens bauen, wenn jeder Damm zwei Wachtürme verbindet?

28. In wieviel Teile wird das konvexe n-Eck durch seine Diagonalen zerlegt, wenn keine drei Diagonalen durch einen Punkt gehen?

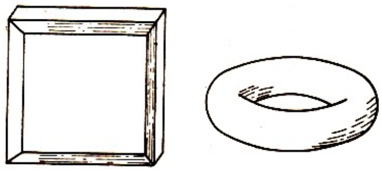
4.20. Eine anscheinend bedeutungslose Frage steht noch aus.
Warum haben wir die Anzahl der Länder mit f bezeichnet? Nun, das ist der Anfangsbuchstabe des Wortes Fläche. Euler hat nämlich überhaupt nicht Landkarten untersucht, als er zu der Formel gelangt ist, sondern Körper, die von ebenen Flächen begrenzt werden, wie Würfel, Pyramide, Prisma. Wir wollen bei einigen Körpern die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken ausrechnen:

	Anzahl der		
	Flächen	Kanten	Ecken
Würfel	6	12	8
Dreiseitige Pyramide	4	6	4
Dreiseitiges Prisma	5	9	6
Fünfseitiges Prisma	7	15	10
Fünfseitige Pyramide	6	10	6

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass in jedem Falle gilt:

Anzahl der Flächen + Anzahl der Ecken = Anzahl der Kanten + 2

Dies ähnelt sehr der Eulerschen Formel, nur mit dem Unterschied, dass hier an Stelle von Ländern Flächen auftreten. Die Ähnlichkeit ist nicht zufällig; wir können diese Beziehung aus der anderen leicht folgendermaßen herleiten: Wir stellen uns vor, der Körper sei aus Gummi. Wir bohren in eine Seite von ihm ein Loch und "blasen ihn auf", wie etwa einen Luftballon. Die meisten Körper werden dabei zu einer Kugel aufgeblasen (beispielsweise der Würfel oder die Pyramide). Wir müssen jedoch beachten, dass es auch Körper gibt, die sich nicht zu einer Kugel aufblasen lassen. So bläst sich etwa der in Abb. 4.34 dargestellte "Bilderrahmen" zu einem Gegenstand ähnlich einem Rettungsring auf.

Abb. 4.34


Die obige Beziehung gilt nur für Körper, die sich zu einer Kugel aufblasen lassen! (Zur Beruhigung teilen wir mit, dass beispielsweise die konvexen Körper alle von dieser Art sind.)

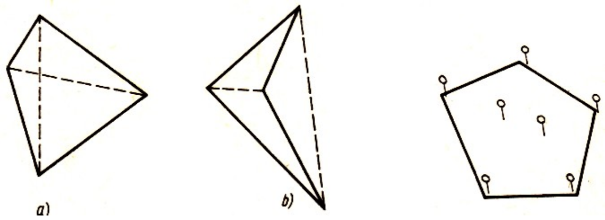
Danach ergreifen wir die gewonnene Gummikugel am Band des gebohrten Loches und strecken sie, bis das Ganze zu einem großen Ebenenstück wird. Dieses breiten wir auf die Ebene aus. Wenn wir die Kanten des Körpers schwarz ausgezogen haben, so werden wir jetzt in der Ebene eine Landkarte vor uns haben, deren Ecken die Eckpunkte des Körpers, deren Kanten die Kanten des Körpers und deren Länder die Seitenflächen des Körpers sind. Daher bekommen wir aus der Form der Eulerschen Beziehung für Landkarten gerade die obige Formel für Körper. (Übrigens hat auch Euler selbst den Satz in einer solchen Form ausgesprochen.)

4.21. Man kann in der Geometrie sehr viele Fragen finden, zu deren Behandlung kombinatorische Methoden erforderlich sind. Diese Fragen sind oft schwerer als die "üblichen" geometrischen Aufgaben. Wir haben als ungelöstes Problem bereits die Vierfarbenvermutung genannt. Jetzt wollen wir euch eine weitere ungelöste Frage vorstellen, die sich vielleicht noch einfacher als die vorige formulieren lässt.

Wir betrachten zunächst die folgende Aufgabe:

Es ist zu beweisen, dass es unter fünf beliebig in der Ebene vorgegebenen Punkten, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, vier Stück gibt, die die Eckpunkte eines konvexen Vierecks bilden.

Um im weiteren kürzere Formulierungen zu ermöglichen, nennen wir gewisse Punkte in allgemeiner Lage, wenn keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Wir erinnern daran, dass ein Vieleck dann konvex heißt, wenn jeder seiner Winkel konvex ist.
Im Falle eines Vierecks bedeutet dies gerade, dass sich seine beiden Diagonalen schneiden (Abb. 4.35). In Abb. 4.35 ist a) ein konvexes, b) ein konkaves Viereck.

Abb. 4.35, 4.36


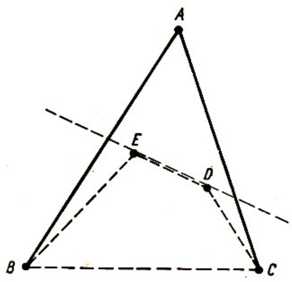
Wir stellen uns vor, auf einer Tafel seien Punkte in allgemeiner Lage aufgezeichnet. An diesen Stellen schlagen wir Nägel ein und spannen Gummi darum. Durch den Gummi wird ein konvexes

Vieleck begrenzt, dessen Eckpunkte unter den aufgezeichneten Punkten vorkommen, während die übrigen gezeichneten Punkte in sein Inneres fallen (Abb. 4.36). Dieses Vieleck nennen wir die konvexe Hülle der Punkte.

Im Hinblick auf unsere Aufgabe wollen wir jetzt untersuchen, wie die konvexe Hülle unserer fünf Punkte aussehen kann. Wenn diese ein Fünfeck ist, so bilden je vier Punkte die vier Eckpunkte eines konvexen Vierecks. Stellt die konvexe Hülle ein Viereck dar, so ist sie selbst das gewünschte Viereck.
Es bleibt also nur noch der Fall, dass die konvexe Hülle ein Dreieck ist. Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks mit A, B, C und die anderen beiden gegebenen Punkte mit D und E. Da D und E innerhalb des Dreiecks ABC liegen, schneidet die Gerade DE die Berandung des Dreiecks in zwei Punkten. Diese beiden Punkte mögen etwa auf den Seiten AB und AC liegen (wäre dies nicht der Fall, so brauchten wir bloß die Ecken des Dreiecks umzubenennen).

Jetzt könnt auch ihr euch leicht überlegen, dass die Punkte B, C, D und E Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind (Abb. 4.37).

Abb. 4.37



In der Mathematik kommt es manchmal vor, dass man im Verlauf eines Beweises Sätze heranziehen kann, von denen man auf den ersten Blick nicht gedacht hat, dass sie mit der zu beweisenden Sache etwas zu tun haben. Würde jemand von euch denken, dass man die oben behandelte Aufgabe auch dadurch lösen kann, dass man sich darauf beruft, dass der fünfpunktige vollständige Graph nicht planar ist (das ist in Abschnitt 4.19 bewiesen worden)?

Verbinden wir dazu je zwei unserer fünf vorgegebenen Punkte durch eine gerade Strecke. Da der so erhaltene Graph nicht planar ist, müssen sich gewisse zwei dieser Strecken schneiden. Die vier Endpunkte der beiden Strecken bilden ein Viereck, dessen Diagonalen einander schneiden, d.h. ein konvexes Viereck.

Das Folgende wollen wir nicht als Aufgabe stellen, weil es viel schwieriger als das Bisherige ist; versucht euch aber trotzdem einmal daran (seid nicht traurig, wenn es nicht gelingt):

Es ist zu beweisen, dass man unter neun in allgemeiner Lage befindlichen Punkten stets ein konvexes Fünfeck auswählen kann.

Aufgabe

29. Zeichnet acht Punkte so auf, dass man unter diesen kein konvexes Fünfeck auswählen kann!

Es ist zwar sehr kompliziert, aber auch bewiesen, dass sich aus 17 in allgemeiner Lage befindlichen Punkten stets ein konvexes Sechseck auswählen lässt. Danach erhebt sich natürlich die Frage, wieviel Punkte in allgemeiner Lage dazu notwendig sind, um aus ihnen stets ein konvexes n-Eck auswählen zu können.
Mit anderen Worten:

Wie viele Punkte kann man höchstens in der Ebene vorgehen, damit man unter ihnen kein konvexes n-Eck auswählen kann?
Wenn wir aus den bereits bekannten Fällen eine Tabelle herstellen, so ist es nicht schwer zu vermuten, wie die wahrscheinlichste Antwort lauten wird:

n	2	3	4	5	6
	1	2	4	8	16

(Die Fälle $n = 2, 3$ haben wir bisher nicht erwähnt, weil sie nicht interessant sind, der Vollständigkeit halber haben wir aber die Tabelle durch sie ergänzt. Das Zweieck ist nichts anderes als die Strecke. Somit ist jedes Zweieck und jedes Dreieck konvex.)

Wir können beobachten, dass die Maximalzahl von Punkten, die kein konvexes n-Eck enthalten, auf das Doppelte wächst, wenn n um 1 zunimmt, wenigstens in diesen Fällen. Es liegt auf der Hand anzunehmen, dass dies auch im weiteren so sein wird, d.h., dass diese Zahl 2^{n-2} lautet.
Es ist jedoch bis auf den heutigen Tag nicht gelungen, dies zu beweisen.

5 Blockpläne

5.1. Wir haben bereits Beispiele dafür kennengelernt, dass die Bekanntschaften in einer Gesellschaft mit Hilfe von Graphen mathematisch veranschaulicht und untersucht werden können. Auch andersartige gesellschaftliche Gebilde lassen sich an einem mathematischen Modell beschreiben. Dieses Modell wird sich natürlich auch zu vielen anderen Zwecken heranziehen lassen.

Wir stellen uns vor, die Mitglieder einer Gemeinschaft, zum Beispiel die Einwohner einer Kleinstadt, wollen Klubs gründen. Die Einwohner dieser Kleinstadt sind jedoch sehr demokratisch gesinnt und dulden nicht die geringste gesellschaftliche Ungleichheit. Daher lassen sie auch zunächst nicht zu, dass es größere Klubs gibt, weil diese ihrer Meinung nach die kleineren unterdrücken.
Das heißt, sie fordern, dass jeder Klub genauso viele Mitglieder hat. Weiterhin wird nicht zugelassen, dass ein Bürger Mitglied von mehr Klubs als ein anderer ist, weil sich solche dann eventuell größeren Einfluss verschaffen würden. Jeder Bürger wird also Mitglied von gleich vielen Klubs sein.

Schließlich sind sie noch der Meinung, dass es nicht richtig wäre, wenn sich Stadtbewohner A gegenüber den Stadtbewohnern B und C nicht gleich verhält, sondern beispielsweise mit B öfter zusammen sein würde, so dass die Anzahl derjenigen Klubs, von denen A und B Mitglied ist, größer wäre als die Anzahl derjenigen, von denen A und C gemeinsames Mitglied sind.

Im Endergebnis werden also die Stadtbewohner (deren Anzahl mit v bezeichnet werde) so in Klubs organisiert, dass jeder Klub ebensoviel Mitglieder hat, etwa k. Die Anzahl der Klubs werde mit b bezeichnet. Ferner wissen wir, dass jeder Einwohner Mitglied von ebenso vielen Klubs ist, etwa von r Stück, und dass zu je zwei Einwohnern genau λ[8] Klubs existieren, von denen alle Mitglied sind.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob wir zwischen den fünf Zahlen b, v, r, k, λ irgendeine Beziehung finden können. Wenn jeder Klub jedem seiner Mitglieder einen Mitgliedsausweis ausstellt, wieviel Mitgliedsausweise gibt es dann?
Es gibt b Klubs, von denen jeder k Mitglieder hat, also insgesamt bk Mitgliedsausweise. Andererseits hat aber die Stadt v Einwohner und jeder - r Mitgliedsausweise, die Anzahl der Mitgliedsausweise beträgt also vr. Daher ist

$$bk = vr \tag{1}$$

Wir stellen uns andererseits vor, dass durch die Klubs die Freundschaft zwischen ihren Mitgliedern dadurch bestärkt werden soll, dass sie jedes ihrer Mitglieder bitten, bei jeweils einer Gelegenheit im Vereinshaus des Klubs zu zweit mit jedem Klubmitglied zusammen zu Abend zu essen.
Will jetzt ein besorgter Einwohner der Stadt ausrechnen, wie oft er verpflichtet ist, Abendbrot zu essen, so kann er folgendermaßen argumentieren:

"Außer mir leben in der Stadt noch $v-1$ Einwohner. Mit jedem von ihnen zusammen bin ich Mitglied von λ Klubs, muss also mit jedem in je einem anderen Vereinshaus λ-mal ein Abendessen ausgeben. Das sind insgesamt $\lambda(v-1)$ Abendessen."

Er kann aber auch so argumentieren:

[8] Der griechische Buchstabe λ entspricht dem l. Aussprache: lambda.

"Ich bin Mitglied von r Klubs. Außer mir sind in jedem noch $k-1$ Mitglieder. Also muss ich in jedem meiner Klubs $(k-1)$-mal abendessen. Das sind insgesamt $r(k-1)$ Abendessen."

Aus der zweierlei Berechnung ergibt sich, dass

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \tag{2}$$

ist.

Aufgabe

1. Wenn eine Kleinstadt 924 Klubs hat, jeder mit 21 Mitgliedern, und je zwei Bürger von genau 2 Klubs gemeinsames Mitglied sind, wieviel Einwohner hat dann die Stadt?
Von wieviel Klubs ist jeder einzelne Bürger Mitglied? (Seid nicht überrascht! Es handelt sich um eine sehr kleine Stadt, und jeder ist Mitglied von sehr vielen Klubs.)

5.2. Wir sehen, dass wir unter den Zahlen b, v, r, k, λ nur drei nach unserem Belieben vorgehen können, weil die anderen beiden bereits durch die Beziehungen (1) und (2) bestimmt sind.
Aber nicht einmal drei können wir irgendwie vorgehen! Sind zum Beispiel in einer Stadt von 500 Einwohnern Klubs von je 11 Mitgliedern so möglich, dass jeder Mitglied von 7 Klubs ist? Die Antwort lautet: nein.
Das müsste aber bewiesen werden. Haltet mit dem Lesen inne und versucht selbst, einen Beweis zu finden! (Es ist nicht besonders schwer.)

Hat es geklappt? Wir haben den Beweis so geführt:

Wenn sich solche Klubs einrichten ließen, würde die Anzahl der Klubs, b, natürlich eine ganze Zahl sein. Wie groß müsste sie sein? Aus (1) wissen wir:

$$b = \frac{v \cdot r}{k} = \frac{500 \cdot 7}{11} = 318\frac{2}{11}$$

Das ist aber keine ganze Zahl. Also kann man sicher keine derartigen Klubs einrichten. Wir müssen jedoch aufpassen!
Daraus, dass die natürlichen Zahlen b, v, r, k, λ den Gleichungen (1) und (2) genügen, folgt noch nicht, dass man in einer Stadt von v Einwohnern b Klubs von je k Mitgliedern so einrichten kann, dass jeder Bürger Mitglied von r Klubs ist und je zwei Bürger von λ Klubs gemeinsames Mitglied sind. Beispielsweise genügen die Zahlen $b = v = 43$, $k = r = 7$, $\lambda = 1$ den Beziehungen (1) und (2), und dennoch lassen sich zu ihnen keine Klubs bilden.

Der Beweis für diese Behauptung ist jedoch so schwer, dass wir ihn hier nicht aufschreiben können.

5.3. Wenn ihr das erste Kapitel aufmerksam gelesen habt, so kennt ihr sicher den Begriff der Menge. Mit Hilfe dieses Begriffs können wir nunmehr formulieren, was unter einem Blockplan verstanden werden soll.

Es sei eine v-elementige Menge gegeben. Wir wollen k-elementige Untermengen davon auswählen (die wir Blöcke nennen werden), und zwar so, dass jedes Element in genau r Blöcken vorkommt und je zwei verschiedene Elemente in genau λ Blöcken gemeinsam vorkommen. Die Anzahl der Blöcke bezeichnen wir mit b.

Ihr habt sicher erkannt, dass sich die so definierten Blockpläne in der Tat in nichts von den bis jetzt behandelten Klubs unterscheiden, nur dass wir bisher die Elemente der v-elementigen

Menge Einwohner und die Blöcke Klubs genannt haben. Im folgenden wollen wir auch lieber von einer Stadt und von Klubs sprechen und hoffen, dass sich niemand daran stoßen wird, dass manchmal auch von Städten die Rede sein wird, die insgesamt 7 Einwohner haben.

Betrachten wir jetzt schon Beispiele für Blockpläne. Hier ist eines in Abb. 5.1. Diese Abbildung ist so zu verstehen, dass die nummerierten schwarzen Punkte die Einwohner bedeuten und jeweils 3 Bürger einen Klub bilden, die in der Abbildung durch eine gerade Linie verbunden sind, und dass es noch einen Klub gibt, dessen 3 Mitglieder durch einen Kreis verbunden sind.

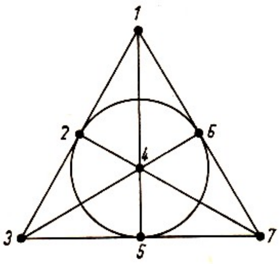


Abb. 5.1

Schauen wir nach, ob wir tatsächlich einen Blockplan erhalten haben! Jeder Klub hat 3 Mitglieder (d.h., $k = 3$). Das ist also in Ordnung. Wenn wir die mit Zahlen von 1 bis 7 bezeichneten Stadtbewohner betrachten, sehen wir, dass jeder Mitglied von genau 3 Klubs ist (also $r = 3$). Schauen wir uns schließlich an, in wieviel Klubs je zwei verschiedene Bürger Mitglied sind, so erkennen wir, dass es genau einen solchen gibt. Beispielsweise sind die Einwohner „2“ und „6“ gemeinsames Mitglied von einem einzigen Klub: von demjenigen, dessen drittes Mitglied „5“ ist. Auf die gleiche Weise können wir uns auch von allen übrigen Paaren überzeugen.
Wir sehen also, dass $\lambda = 1$ ist. Also haben wir tatsächlich einen Blockplan bekommen. Die Anzahl der Blöcke (oder Klubs) beträgt: $b = 7$.

Denselben Blockplan können wir auch noch anders darstellen: Wir schreiben nacheinander die Folge der Namen der einzelnen Mitglieder auf:

$$(12, 3); (1, 4, 5); (1, 6, 7); (2, 4, 7); (2, 5, 6); (3, 4, 6); (3, 5, 7)$$

Innerhalb jeder einzelnen Klammer haben wir die 3 Mitglieder des betreffenden Klubs aufgeführt.

5.4. Derjenige Blockplan, den wir jetzt konstruiert haben, besitzt die Eigenschaft, dass die Blöcke 3-elementig sind und dass jedes Paar in einem Tripel (Block) vorkommt. Unter Benutzung unserer üblichen Bezeichnungen können wir dies auch so formulieren, dass $k = 3$ und $\lambda = 1$ ist. Solche Blockpläne, für die $k = 3$ und $\lambda = 1$ ist, heißen Steinersysteme.
(Deshalb, weil ein Schweizer Mathematiker namens Steiner sie erstmalig um die Mitte des vorigen Jahrhunderts untersucht hat.)

In Städten welcher Einwohnerzahl kann man Klubs einrichten, die ein Steinersystem bilden? Wieder nehmen wir die Gleichungen (1) und (2) zu Hilfe, nur dass wir die Bedingungen $k = 3$ und $\lambda = 1$ eintragen. Wir bekommen

$$3b = vr \qquad , \qquad 2r = v - 1$$

Hieraus folgt:

$$r = \frac{v-1}{2} \qquad , \qquad b = \frac{v(v-1)}{6} \tag{3,4}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, was für Reste v ergeben kann, wenn wir durch 6 teilen und wünschen, dass r und b ganze Zahlen sind.

Zunächst zeigt (3), dass v ungerade sein muss; es kann sich bei der Division durch 6 also nur 1, 3 oder 5 als Rest ergehen.
Dies können wir auch so ausdrücken: v kann nur eine Zahl sein, die sich in der Form $6j + 1$, $6j + 3$ oder $6j + 5$ schreiben lässt, wo j eine beliebige nichtnegative ganze Zahl ist.

Von der Form $6j + 5$ kann v jedoch nicht sein, weil dann nach (4)

$$b = \frac{(6j+5)(6j+4)}{6} = 6j^2 + 9j + 3 + \frac{1}{3}$$

b also keine ganze Zahl wäre.

v kann somit nur von der Form $6j + 1$ oder $6j + 3$ sein, man kann also mit anderen Worten nur in solchen Städten, für welche die Einwohnerzahl bei der Division durch 6 als Rest 1 oder 3 ergibt, Klubs errichten, die ein Steinersystem bilden.
Also im Falle von $v = 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21$ usw. (Hierfür ist es, was wir hier jedoch nicht beweisen wollen, in der Tat auch möglich.)
Im Falle $v = 3$ ist die Sache sehr leicht: es gibt insgesamt 1 Klub mit 3 Mitgliedern. Für den Fall $v = 7$ haben wir oben schon ein gutes Blocksystem kennengelernt.

Aufgabe

2. Im Falle $v = 9$, also in einer "Stadt"von 9 Einwohnern, sind Klubs aufzustellen, die ein Steinersystem bilden!

5.5. Jetzt wollen wir uns jedoch Folgendes vorstellen:
Ein Lehrer hat eine aus 9 Schülerinnen bestehende Gruppe. Er führt sie jeden Tag spazieren, und zwar gehen sie in Dreierreihen spazieren. (Es gibt also insgesamt 3 Dreierreihen.) Obendrein will er sie mehrere Tage lang so spazieren gehen lassen, dass schließlich jedes Mädchen sagen kann, dass es mit jeder Kameradin genau einmal in einer Reihe spazieren gegangen ist.

Aufgabe

3. Wieviel Tage müssen sie spazieren gehen, damit dies überhaupt möglich ist?

Wenn ihr bereits die Aufgabe 3 gelöst habt, so wisst ihr, wieviel Tage sie spazieren gehen müssen. Es ist aber noch nicht sicher, ob sie überhaupt in dieser Weise spazieren gehen können.
Betrachten wir jedoch die Lösung der Aufgabe 2! Das ist nämlich gerade das, was wir gesucht haben! Wie ihr sehen werdet, steht in jeder einzelnen Reihe die tägliche "Spaziergangsordnung". Am dritten Tag beispielsweise gehen in der ersten Reihe die Mädchen 1, 5 und 9, in der zweiten Reihe die Mädchen 2, 6 und 7 und in der dritten Reihe die Mädchen 3, 4 und 8.

Dasselbe Problem, nur mit 15 statt 9 Mädchen, hat den Namen Kirkmanproblem erhalten nach einem deutschen Mathematiker namens Kirkman. (Dabei mussten die Mädchen freilich 7 Tage lang in Dreierreihen spazieren gehen.)
Das von 15 Schulmädchen handelnde Kirkmanproblem konnte sehr lange von den Mathematikern nicht gelöst werden. Heute ist die Lösung längst bekannt. Wenn freilich die richtige Spaziergangsordnung bereits einmal vorliegt, ist es nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass sie tatsächlich richtig ist.

Dass eine entsprechende "Spaziergangsordnung" allgemein für jede Zahl v der Form $6j + 3$ an Stelle von 9 und 15 existiert, ist erstmalig 1969 einem indischen Mathematiker namens Ray-Chaudhuri zu beweisen gelungen.

Die Schwierigkeit der Aufgabe wird besser erkennbar, wenn wir bemerken, dass eine solche "Spaziergangsordnung" zugleich auch ein Steinersystem darstellt, also aus dem Satz von Ray-Chaudhuri auch die Existenz eines Steinersystems aus $6j+3$ Elementen folgt, was selbst schon ziemlich schwierig zu beweisen ist.

5.6. Wir wollen uns jetzt noch ein wenig gründlicher mit Steinersystemen beschäftigen! Wir stellen uns vor, unter den Einwohnern eines Städtchens mit der Einwohnerzahl v, die in Klubs organisiert Sind, die ein Steinersystem bilden, komme Unzufriedenheit auf.
Beispielsweise ist ihnen der Mitgliedsbeitrag zu hoch. Daher rufen sie eine Organisation ins Leben, die sich aus Einwohnern zusammensetzt und deren Ziel darin besteht, gegen die hohen Mitgliedsbeiträge Einspruch zu erheben. Damit jedoch der Einspruch jeden Klub erreichen kann, muss sich in jedem Klub wenigstens ein Mitglied der Organisation befinden.

Damit erhebt sich die Frage, wieviel Mitglieder eine solche Organisation mindestens haben muss, die in jedem Klub wenigstens einen Vertreter hat.
Betrachten wir einen solchen Stadtbewohner, der nicht Mitglied dieser Organisation ist! Nennen wir ihn Andreas! Andreas ist Mitglied von r Klubs, und im Falle eines Steinersystems gilt

$$r = \frac{v-1}{2}$$

[siehe Gleichung (3)].
Außer Andreas hat jeder dieser Klubs noch zwei Mitglieder, und da Andreas mit jedem anderen Stadtbewohner gemeinsam nur Mitglied von einem Klub sein kann, haben unter den $\frac{v-1}{2}$ Klubs je zwei nur ein gemeinsames Mitglied: nämlich Andreas.

In jedem Klub muss die Organisation aber ein Mitglied haben, und dies ist stets ein von Andreas verschiedener Bürger (da Andreas ja nicht Mitglied der Organisation ist). Das bedeutet jedoch, dass die Organisation wenigstens $\frac{v-1}{2}$ Mitglieder hat (denn zu jedem der $\frac{v-1}{2}$ Klubs muss je ein Mitglied von ihr gehören).

Was dann, wenn es tatsächlich gelungen ist, eine Organisation von $\frac{v-1}{2}$ Mitgliedern ins Leben zu rufen, die in jedem Klub einen Vertreter hat? Das Ergebnis ist ziemlich überraschend:
Dann ist auch diese Organisation selbst ein Steinersystem! Genau ist darunter Folgendes zu verstehen:
Wir wollen diese $v_1 = \frac{v-1}{2}$ Einwohner betrachten, die zu der Organisation gehören, sowie nur diejenigen Klubs, deren sämtliche drei Mitglieder der Organisation angehören. Dann bilden diese v_1 Elemente und die mit ihnen verbliebenen Klubs ein Steinersystem.

Hierzu genügt es nachzuweisen (siehe Aufgabe 4), dass unter den v_1 Bürgern je zwei Mitglied von genau einem Klub sind.
Offensichtlich von höchstens einem, weil bereits unter den früheren Klubs nur einer existierte, dem die Mitglieder gemeinsam angehörten. Um zu erkennen, dass sie tatsächlich von einem Klubmitglied sind, müssen wir nachweisen, dass wir die alten gemeinsamen Klubs beibehalten haben, dass also auch deren drittes Mitglied der Organisation angehört.

Angenommen, das wäre nicht so. Dann nennen wir das dritte Klubmitglied, das nicht der Organisation angehört, Albert. Ebenso wie oben können wir begründen, dass Albert in $\frac{v-1}{2}$ Klubs Mitglied ist und diese Klubs außer Albert kein gemeinsames Mitglied haben.
In jedem Klub gibt es wenigstens ein Mitglied der Organisation. Nur dass sie in einem von ihnen - und zwar gerade in dem Klub, von dem wir ausgegangen sind - zwei Mitglieder hat! In den übrigen noch mindestens je eines.

Das ergibt insgesamt mindestens $\frac{v+1}{2}$ Menschen. Die Organisation hat aber nur $\frac{v-1}{2}$ Mitglieder.

Wir sind zu einem Widerspruch gelangt, es kann also nicht sein, dass Albert nicht zu der Organisation gehört. Damit haben wir jedoch erkannt, dass die $v_1 = \frac{v-1}{2}$ Mitglieder der Organisation und die nur aus ihnen bestehenden Klubs tatsächlich ein Steinersystem bilden. Aufgaben

4. Es ist zu beweisen: Sind von einer v-elementigen Menge gewisse k-elementige Untermengen ausgewählt, und zwar so, dass jedes Paar in genau λ Stück enthalten ist, so bilden diese k-tupel sicher einen Blockplan. Wir brauchen also nicht nachzuprüfen, ob jedes Element in gleichviel Blöcken enthalten ist, weil aus unseren obigen Feststellungen notwendig folgt, dass jedes Element zu

$$\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

Blöcken gehört. (Hinweis: Versucht, auf dieselbe Weise vorzugehen, auf die wir zu der Gleichung (2) gelangt sind, nur gerade in umgekehrter Richtung.)

5. Angenommen, wir haben ein Steinersystem zu v Elementen und können unter diesen v Elementen $\frac{v-1}{2}$ so auswählen, dass unter den Tripeln des ursprünglichen Steinersystems diejenigen, deren sämtliche drei Elemente von diesen $\frac{v-1}{2}$ Elementen stammen, ein Steinersystem mit diesen $\frac{v-1}{2}$ Elementen bilden. Es ist zu beweisen, dass dann diese $\frac{v-1}{2}$ Elemente eine gute Organisation darstellen werden (also jedes Tripel des ursprünglichen Steinersystems eines dieser $\frac{v-1}{2}$ Elemente enthält).

(Benennung: Eine Menge, die aus gewissen der v Punkte eines Steinersystems besteht mit der Eigenschaft, dass wenigstens ein Punkt jedes Tripels zu dieser Menge gehört, werden wir repräsentatives Punktsystem nennen. Oben haben wir also gesehen, dass jedes repräsentative Punktsystem stets wenigstens $\frac{v-1}{2}$ Punkte enthält und dass es, wenn es gerade so viele Punkte enthält, auch selbst ein Steinersystem bildet.)

5.7. Wir stellen uns jetzt vor, in unserem Steinersystem seien v Elemente ("Punkte"), und wir wollen die Punkte so färben, dass kein Block (Klub, Tripel) aus lauter gleichfarbigen Punkten besteht.
Mit einer Farbe kann man das offensichtlich nicht machen, weil dann jeder Block einfarbig wäre. Aber auch mit zwei Farben lässt sich das noch nicht bewerkstelligen. Angenommen nämlich, es sei gelungen, die Punkte mit zwei Farben, etwa blau und rot, so auszumalen, dass jedes Tripel sowohl blaue als auch rote Punkte enthält. Da dann sowohl alle blauen als auch alle roten Punkte ein repräsentatives Punktesystem bilden, gibt es aus jedem mindestens $\frac{v-1}{2}$. Dies sind insgesamt $v-1$ Punkte.

Es gibt also noch einen, der entweder blau oder rot sein muss (sagen wir rot). Dann enthält aber jedes zu diesem kleinen Steinersystem gehörige Tripel lauter blaue Punkte, während wir angenommen hatten, dass es kein gleichfarbiges Tripel gibt. Wir haben also nachgewiesen, dass zur Färbung jedes Steinersystems wenigstens drei Farben notwendig sind.

Aufgabe

6. Weist nach, dass sich jedes der in Aufgabe 1 auftretenden bzw. in Aufgabe 2 definierten Steinersysteme mit drei Farben färben lässt.

5.8. Wir wollen uns wieder ganz allgemein der Untersuchung von Blockplänen zuwenden, die durch fünf Parameter, b, v, r, k, λ, charakterisiert werden. Einen Blockplan bekommen wir

sicher dann, wenn wir annehmen, dass ein einziger Block vorliegt, zu dem jedes Element der v-elementigen Menge gehört.
Es ist also $b = 1$, $r = 1$, $k = v$ und $\lambda = 1$. Auf diese Weise können wir auch zum Ausdruck bringen, dass in der Stadt ein einziger Klub arbeitet, von dem jeder Mitglied ist. Dieser Fall möge ausgeschlossen werden! Nehmen wir also an, dass $k < v$ ist!

Neben dieser Bedingung besteht noch die folgende (hier nicht zu beweisende) sogenannte Fishersche Ungleichung:

$$b \geq 4 \tag{5}$$

(es gibt also wenigstens so viele Klubs wie Stadtbewohner).

Aufgabe

7. In einer Stadt aus v Einwohnern ($v \geq 3$) ist ein Blockplan so zu realisieren, dass die Anzahl der Klubs mit der Einwohnerzahl der Stadt übereinstimmt (d.h. $b = v$) ist)! (Um die trivialen Fälle auszuschließen, fordern wir jetzt und auch später, dass $l < k < v$ gilt.)

Die Fishersche Ungleichung leistet oft sehr gute Dienste.
Wir stellen uns vor, dass jeder Klub ein Abzeichen hat. Auf einem Stadtfest, auf dem jeder Einwohner der Stadt erscheint, muss jeder das Abzeichen von irgendeinem seiner Klubs tragen. Kann man es so einrichten, dass keine zwei Bürger dasselbe Abzeichen tragen?

Wer über diese Aufgabe nachdenkt, wird feststellen, dass sie sehr viel mit dem im dritten Kapitel kennengelernten Satz von König zu tun hat. Wie Abbildung 5.2 zeigt, können wir nämlich aus unserem Blockplan (d.h. aus den Stadtklubs) einen paaren Graphen machen.

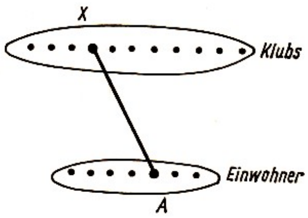


Abb. 5.2

Mit den unteren Punkten werden die Stadtbewohner bezeichnet, mit den oberen die Klubs. Die Tatsache, dass beispielsweise der Einwohner namens A Mitglied des Klubs X ist, können wir dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir die Punkte A und X in dem Graphen mit einer Kante verbinden. Abb. 5.2 ist nicht vollständig, weil wir nur als Beispiel eine Kante eingezeichnet haben.
Wir wissen, dass in Wahrheit von A (und von jedem unteren Punkt) aus r Kanten ausgehen, in X (und in jeden oberen Punkt) dagegen k Kanten münden. Unten gibt es v Punkte, oben dagegen b Punkte. Wählen wir n untere Punkte aus ($n \leq v$), so wissen wir, dass von ihnen insgesamt nr Kanten ausgehen.

Die Anzahl der als obere Endpunkte dieser Kanten fungierenden Punkte werde mit m bezeichnet. In jeden münden k Kanten ein, insgesamt also mk Stück. Unter diesen kommen auch die oben genannten nr Kanten vor. Also ist

$$nr \leq mk \tag{6a}$$

Nach (1) ist $bk = vr$, und wir wissen, dass $b \geq v$ ist (Fishersche Ungleichung), also $k \leq r$. Somit gilt

$$mk \leq mr \tag{6b}$$

(6a) und (6b) zusammengenommen ergibt

$$nr \leq mr \qquad \text{und daher} \qquad n \leq m$$

Also sind alle n unteren Punkte mit mindestens n oberen Punkten verbunden. Dann können wir jedoch einen Satz von König anwenden (siehe Aufgabe 8 !) und haben somit bewiesen, dass in dem aus dem Blockplan konstruierten Graphen v Kanten existieren, von denen jede von je einem anderen unteren Punkt ausgeht und deren sämtliche obere Endpunkte gleichfalls verschieden sind.

Das heißt, zu den unteren Punkten A_1, A_2, ..., A_v existieren lauter verschiedene obere Punkte (Klubs) X_1, X_2, ..., X_v, so dass beispielsweise A_1 mit X_1, A_2 mit X_2, ..., A_v mit X_v verbunden ist.
Also ist A_1 Mitglied des Klubs X_1, A_2 des Klubs X_2, ..., A_v des Klubs X_v. Dann besteht jedoch die gesuchte Lösung darin, dass auf dem Fest A_1 das Abzeichen des Klubs X_1, A_2 das des Klubs X_2, ..., A_v jedoch das des Klubs X_v trägt.

Aufgabe

8. Die Feststellung, die wir hier (unter dem Namen Satz von König) benutzen, ist die folgende: "Wenn ein paarer Graph vorliegt, der unten v Punkte, oben b Punkte hat und für den zu je n unteren Punkten ($n \leq v$) die Anzahl der oberen Punkte, die mit einem beliebigen hiervon verbunden sind, mindestens n ist, so gibt es in dem Graphen v Kanten, von denen jede von einem anderen unteren Punkt ausgeht und deren obere Endpunkte gleichfalls sämtlich verschieden sind."

Wie könntest du diese Behauptung beweisen, wenn du den im dritten Kapitel aufgetretenen Satz von König benutzt? (Der dort genannte Satz von König ergibt sich als Spezialfall für $v = b$ aus dem von hier.)

5.9. Habt ihr schon von lateinischen Quadraten gehört? Das ist eigentlich ein sehr einfacher Begriff.
Man bekommt beispielsweise ein lateinisches Quadrat vom Format 4×4, indem man in jedes Feld eines Schachbrettes vom Format 4×4 irgendeine der Zahlen von 1 bis 4 einträgt, und zwar so, dass dieselbe Zahl in keiner Zeile oder Spalte zweimal auftritt.

Aufgaben

9. Stellt ein lateinisches Quadrat vom Format 4×4 her!

10. Wieviel verschiedene lateinische Quadrate vom Format 4×4 gibt es? Wieviel gibt es dann, wenn man zwei solche nicht als verschieden ansieht, von denen eines dadurch aus dem anderen hervorgeht, dass man eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 vornimmt (z.B. 2 1 3 4) und in das eine lateinische Quadrat überall dort, wo die Zahl k steht ($1 \leq k \leq 4$), an Stelle der Zahl k die auf Grund der gewählten Permutation an ihrer Stelle stehende Zahl schreibt?

(Legen wir beispielsweise 2 1 3 4 zugrunde, so bekommen wir aus dem bei der Lösung der Aufgabe 9 in der Abbildung dargestellten lateinischen Quadrat die in Abb. 5.3 dargestellte Situation.)

2	1	3	4
4	2	1	3
3	4	2	1
1	3	4	2

Abb. 5.3

Zwei lateinische Quadrate, die durch eine derartige Umformung ineinander überführt werden können, sollen nicht wesentlich verschieden genannt werden. Lassen sie sich jedoch auf diese Weise nicht ineinander überführen, so nennen wir sie wesentlich verschieden.
Kannst du sofort die Anzahl der wesentlich verschiedenen lateinischen Quadrate angeben, wenn bereits die Anzahl der verschiedenen lateinischen Quadrate vom Format 4×4 bekannt ist?

Betrachten wir jetzt die folgenden beiden Quadrate vom Format 4×4 (Abb. 5.4 und 5.5)!

Abb. 5.4
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Abb. 5.5
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

Wenn wir jetzt diese beiden lateinischen Quadrate "ineinander setzen", d.h. in jedes Feld des 4×4-Schachbretts ein Zahlenpaar schreiben: als sein erstes Element die Zahl, die in dem lateinischen Quadrat von Abb. 5.4 auf dem betreffenden Feld steht, als zweites Element dagegen die Zahl, die in dem lateinischen Quadrat von Abb. 5.5 auf dem betreffenden Feld steht (Abb. 5.6), was sehen wir dann?

Abb. 5.6

(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
(2,4)	(1,3)	(4,2)	(3,1)
(4,3)	(3,4)	(2,1)	(1,2)
(3,2)	(4,1)	(1,4)	(2,3)

Nun, dass in keinen zwei Feldern dasselbe Zahlenpaar steht. Das bedeutet natürlich, dass jedes Zahlenpaar einmal vorkommt, da es ebenso viele Felder des Schachbretts gibt wie mögliche Zahlenpaare (16 Stück).
Wenn also kein Zahlenpaar zweimal erscheint, so muss jedes einmal vorkommen. (Schubfachprinzip !) Zwei lateinische Quadrate, die diese Eigenschaft besitzen, heißen orthogonal. (Man sagt auch manchmal, dass das eine zu dem anderen orthogonal ist.)

Die Orthogonalität lässt sich auch folgendermaßen nachprüfen: Man sieht diejenigen Felder des lateinischen Quadrats 5.4 an, wo 1 steht. In der Sprache des Schachs ausgedrückt, sind dies die Felder $a4$, $b3$, $c1$, $d2$.
Danach sieht man dieselben Felder auf dem lateinischen Quadrat 5.5 durch. Dann wird mit denjenigen Feldern, auf denen in dem lateinischen Quadrat 5.4 die Zahl 2, 3 bzw. 4 steht, ebenso verfahren. Besteht das lateinische Quadrat 5.5 alle diese Proben, so ist es tatsächlich zu dem lateinischen Quadrat 5.4 orthogonal. (Überlegt einmal, warum dies so ist!)

5.10. Aus zwei orthogonalen Quadraten kann man leicht ein magisches Quadrat herstellen. Wir brauchen dazu nichts weiter zu tun, als die in Abb. 5.6 dargestellten Paare zu betrachten. Zunächst schreiben wir hier überall 0 an Stelle von 4 (so dass beispielsweise in der rechten oberen Ecke (0, 0) steht). Danach stellen wir uns jedoch in jedes Feld an Stelle des Paares (a, b) die im Vierersystem geschriebene Zahl $a'b'$ eingetragen vor.

(Wir wissen, dass im Vierersystem $a'b' = 4a + b$ ist.) So bekommen wir die in Abb. 5.7 dargestellte Tafel. Da in jeder Zeile und jeder Spalte derselben die Summe der Elemente 30 ist, können wir sie magisches Quadrat nennen. Auf diese Weise bekommen wir aus je zwei orthogonalen lateinischen Quadraten ein magisches Quadrat, denn da in jeder Zeile und auch am Ort der "Vierecke" jede der Zahlen 0, 1, 2, 3 genau einmal auftritt, wird die Summe der Elemente in einer beliebigen Zeile bzw. Spalte gerade

$$(0 + 1 + 2 + 3) \cdot 4 + (0 + 1 + 2 + 3) = 30$$

sein.

Abb. 5.7

5	10	15	0
8	7	2	13
3	12	9	6
14	1	4	11

Aufgaben

11. In unserem magischen Quadrat kommen die Zahlen von 0 bis 15 vor, nicht jedoch wie üblich die von 1 bis 16. Könnt ihr aus dem in Abb. 5.7 dargestellten magischen Quadrat ein solches herstellen, in dem die Zahlen von 1 bis 16 auftreten?

12. Das von uns gefundene magische Quadrat ist kein "echtes" magisches Quadrat, weil sich die Diagonalsummen von den Zeilen- bzw. Spaltensummen unterscheiden. Aus welchen orthogonalen lateinischen Quadraten könnte man ein "echtes" magisches Quadrat verfertigen?

5.11. Die Frage lautet jetzt: Gibt es ein lateinisches Quadrat vom Format 4×4, das zu jedem der lateinischen Quadrate 5.4 und 5.5 orthogonal ist? In der Tat. (Bevor ihr Abb. 5.8 in Augenschein nehmt, versucht selbst, ein solches lateinisches Quadrat herzustellen !)

Abb. 5.8

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Aufgaben

13. Beweist, dass es kein lateinisches Quadrat vom Format 4×4 gibt, das zu jedem der lateinischen Quadrate 5.4, 5.5 und 5.8 orthogonal ist!

14. Seht euch das lateinische Quadrat von Abb. 5.9 an! Ist es nicht dasselbe wie das lateinische Quadrat von Abb. 5.8? Beweist jedoch (eventuell mit ein wenig Probieren), dass es kein lateinisches Quadrat vom Format 4×4 gibt, das zu dem lateinischen Quadrat von Abb. 5.9 orthogonal ist (obgleich zu dem lateinischen Quadrat von Abb. 5.8 zwei weitere lateinische Quadrate orthogonal sind).

Abb. 5.9

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Es ist interessant zu bemerken, dass die lateinischen Quadrate 5.4, 5.5 und 5.8 aus denselben Zahlen bestehen, nur jeweils in anderer Reihenfolge.

5.12. Wir machen jetzt aus diesen drei, paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten einen Blockplan.
Zunächst fertigen wir ein Schema vom Format 5×16 an, wie es in Abb. 5.10 dargestellt ist. Die ersten beiden Zeilen sind nach einer leicht ersichtlichen Regel zustandegekommen, die 3. Zeile haben wir aus dem lateinischen Quadrat 5.4 dadurch bekommen, dass wir nacheinander seine Zeilen fortgesetzt abgeschrieben haben.

Die 4. bzw. 5. Zeile ist ebenso aus dem lateinischen Quadrat 5.8 bzw. 5.5 hervorgegangen. Unser Blockplan wird aus $4^2+4+1 = 21$ Punkten bestehen. $4^2 = 16$ Punkte bezeichnen wir mit

dem Buchstaben P: $P_1, ..., P_{16}$, weitere $4+1=5$ Punkte mit dem Buchstaben Q: $Q_1, ..., Q_5$. Die Blöcke werden aus $4+1=5$ Elementen bestehen. Ihre Anzahl wird $4(4+1)+1=21$ betragen.
Der eine Block bestehe aus den folgenden 5 Punkten: $Q_1, Q_2, ..., Q_5$. Die weiteren Blöcke bezeichnen wir mit L_{ij}, wobei $1 \leq i \leq 4$ und $1 \leq j \leq 5$ ist. Der Block L_{ij} besteht aus den folgenden Punkten: Q_j, ferner P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}, wo die Zahlen i_1, i_2, i_3, i_4 folgendermaßen definiert sind: wir schauen nach, an der wievielten Stelle in der j-ten Zeile in Abb. 5.10 die Zahl i steht. Die Antwort lautet:
"An der i_1-ten, i_2-ten, i_3-ten und i_4-ten." Das ist die Definition der Zahlen i_1, i_2, i_3, i_4.

1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	2	1	4	3	4	3	2	1	3	4	1	2
1	2	3	4	3	4	1	2	2	1	4	3	4	3	2	1
1	2	3	4	4	3	2	1	3	4	1	2	2	1	4	3

Abb. 5.10

Bezeichnen wir der Einheitlichkeit halber die Punkte P_1, P_2, ..., P_{16} der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, ..., 16, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 dagegen mit $17, 18, 19, 20, 21$, so besteht der Blockplan aus den folgenden Blöcken (die Elemente jedes einzelnen Blockes sind die in einer Spalte stehenden Zahlen):

17	1	5	9	13	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
18	2	6	10	14	5	6	7	8	6	5	8	7	7	8	5	6	8	7	6	5
19	3	7	11	15	9	10	11	12	12	11	10	9	10	9	12	11	11	12	9	10
20	4	8	12	16	13	14	15	16	15	16	13	14	16	15	14	13	14	13	16	15
21	17	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19	19	20	20	20	20	21	21	21	21

Abb. 5.11

Wir können nachprüfen, dass wir hier tatsächlich einen Blockplan bekommen haben. In diesem Blockplan ist $b = v = 4^2 + 4 + 1 = 21$, $r = k = 4 + 1 = 5$, $\lambda = 1$.
Ein derartiger Blockplan, in dem $\lambda = 1$ und $b = v$ (und $v > 3$) ist, heißt endliche projektive Ebene. (Der Grund für die Benennung liegt darin, dass er sehr viele Eigenschaften mit der in der projektiven Geometrie untersuchten projektiven Ebene gemein hat.) In einer endlichen projektiven Ebene heißen die Blöcke verallgemeinerte Geraden.
Diese "Geraden" besitzen die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Durch je zwei Punkte geht eine und nur eine Gerade (da doch $\lambda = 1$ ist). (Es ist zu beachten, dass die im Sinne der gewöhnlichen Geometrie aufgefassten Geraden und Punkte diese Eigenschaft aufweisen!)

2. Je zwei Geraden haben einen und nur einen gemeinsamen Punkt (das beweisen wir hier nicht).

Auch der in Abb. 1 dargestellte Blockplan ist eine endliche projektive Ebene. Er stellt sogar die einfachste mögliche endliche projektive Ebene dar.
Man kann beweisen, dass es zu jeder endlichen projektiven Ebene eine natürliche Zahl n gibt ($n \geq 2$) mit

$$b = v = n^2 + n + 1, \qquad r = k = n + 1, \qquad \lambda = 1$$

n pflegt man Ordnung der betreffenden endlichen projektiven Ebene zu nennen. Die Ordnung der in Abb. 1 dargestellten endlichen projektiven Ebene ist 2, die Ordnung der soeben konstruierten endlichen projektiven Ebene 4. Bis heute hat man nur solche endlichen projektiven

Ebenen gefunden, deren Ordnung Primzahlpotenz ist; niemand hat aber beweisen können, dass es keine andersartigen endlichen projektiven Ebenen gibt.

Aufgaben

15. Ermittelt zwei orthogonale lateinische Quadrate vom Format 3×3!

16. Stellt nach dem obigen Verfahren aus diesen eine endliche projektive Ebene dritter Ordnung her!

17. Nehmt das lateinische Quadrat $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ und verfertigt aus ihm eine endliche projektive Ebene zweiter Ordnung! Weist nach, dass diese, von der Nummerierung der Punkte abgesehen, mit der in Abb. 1 dargestellten endlichen projektiven Ebene übereinstimmt!

18. Bestimmt drei lateinische Quadrate vom Format 4×4, die sich von den lateinischen Quadraten 5.4, 5.5 und 5.8 wesentlich unterscheiden! Stellt mit ihrer Hilfe eine endliche projektive Ebene vierter Ordnung her!

6 Lösungen

Zu Kapitel 2: Wir wollen zusammenzählen!

1. ..., d. h., auf wie viele Weisen kann man 7 Kinder auf 7 Stühle setzen? Wiederholen wir die vorangegangene Überlegung noch einmal, so erhalten wir die Zahl $7 \cdot 720 = 5040$.

2. $\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$.

3. Würden wir die Händedrücke zwischen den 90 Leuten zusammenzählen, so würden wir dasselbe bekommen wie in der vorstehenden Aufgabe. Das ist nicht zufällig, weil in jedem Fall ausgerechnet wird, wieviel Paare sich aus 90 Dingen bilden lassen.

4. $10 \cdot 16 = 160$; $10000 \cdot 20000 = 200000000$.

8. Diejenige Menge, deren eines Element Andrea und deren anderes Element die Menge ist, die nur ein einziges Element enthält, die Zahl 1.

9. Nein, weil man zwischen einer einelementigen Menge und deren (einzigem) Element unterscheiden muss, da das letztere ja keine Menge ist.

10. Ihr musstet insgesamt 8 Untermengen finden. Vergesst nicht die leere Menge und die Menge $\{0, 1, 3\}$ selbst!

12. Diese Menge kleinster Elementezahl ist die Menge $\{0, 1, 3, 4, 5\}$.

13. Die Vereinigung beliebig vieler Mengen besteht aus denjenigen Elementen, die zu wenigstens einer von diesen gehören.

14. Die Menge aus möglichst wenig Elementen, von der alle beide Untermengen sind, ist die Vereinigung der beiden Mengen.

15. Die Elementezahl der Vereinigung ist mindestens 9 und höchstens 14.

16. Die Elementezahl der Vereinigung beträgt mindestens m und höchstens $m + n$.

17. Die Menge $\{1, 3\}$.

18. Die leere Menge.

19. Diejenige Menge, deren einziges Element die Zahl 2 ist.

20. Höchstens so viele, wie es kleinere zwischen m und n gibt.

21. Wir nehmen diejenigen Elemente, die in der m-elementigen Menge enthalten sind, in der anderen dagegen nicht. Deren Anzahl beträgt $m - q$. Nehmen wir zu diesen die Elemente der anderen Menge (zahlenmäßig n) hinzu, so bekommen wir die Vereinigung der beiden Mengen. Also ist $p = (m - q) + n$. Gehen wir zu allen beiden Lösungen q hinzu, so bekommen wir die Behauptung.

22. Da unsere "Gesellschaft" die Vereinigung von 7 Stück 3-elementigen Mengen ist, von denen je zwei die leere Menge als Durchschnitt haben, ist die Elementezahl unserer Gesellschaft $7 \cdot 3 = 21$.

23. Die einzige Untermenge der leeren Menge ist diese selbst. Auf Grund dessen ist unter 2^0 die Zahl 1 zu verstehen. (Diese Festsetzung ist auch unter jedem anderen Gesichtspunkt stichhaltig.)

24. Wenn $n = 1$ ist, so steht auf beiden Seiten 1. Angenommen, wir können die Behauptung für n beweisen, dann wird die Summe der ersten $n+1$ Zahlen

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^3 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Das ist jedoch dasselbe wie die zu beweisende Formel, wenn wir in ihr $n+1$ statt n schreiben.

25. Wenn $n = 1$ ist, steht auf beiden Seiten 1. Angenommen, für n ist die Gleichung richtig, dann wird

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 2}{6} = (n+1)\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Das ist jedoch dasselbe wie die zu beweisende Formel, wenn wir in ihr $n+1$ statt n schreiben.

26. Im Falle $n = 1$ bekommt man 2, und das ist eine gerade Zahl. Für $n - 1$ lässt sich der Ausdruck dadurch erhalten, dass man $2(n+1)$ zu $n(n+1)$ addiert; angenommen, dass $n(n+1)$ gerade war, ist auch diese Summe gerade.
Da von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die eine stets gerade ist, wird das Produkt auf jeden Fall gerade sein.

27. 10^n ist die erste $(n+1)$-stellige Zahl, daher 10^n. Analog p^n.

29. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

30. Es müssen 13 + 1 Stellen ausgefüllt werden, also 3^{14}.

31. Im Falle eines roten und eines weißen Würfels beträgt die Anzahl der Ergebnisse $6 \cdot 6 = 36$.
Im Falle von Würfeln gleicher Art: Wenn wir auf beiden Würfeln dieselbe Zahl bekommen, so ist es einerlei, ob wir sie unterscheiden können oder nicht. Solche Fälle gibt es 6.
Die übrigen 30 Fälle sehen wir hingegen als paarweise gleichartig an, weil wir nicht unterscheiden können, auf welchem Würfel die eine und auf welchem die andere Zahl herausgekommen ist. Wir erhalten demnach statt der 30 nur 15 Fälle. Im Endergebnis bekommen wir jetzt 21.

32. Auf jedes Geschenk schreiben wir drauf, wer es bekommt. Auf diese Weise erhalten wir aus den 12 Namen gebildete 20-elementige Folgen. Das Ergebnis lautet also 12^{20}.

33. Ein Zahlenfünfer, den wir aus den ersten 90 Zahlen gebildet haben, kann von zweierlei Art sein: Entweder enthält er die Zahl 90 nicht - solche gibt es $\binom{89}{5}$ Stück -, oder er enthält sie - solche gibt es $\binom{89}{4}$ Stück.

34. Eine k-elementige Untermenge von n-elementigen Mengen lässt sich auch dadurch auswählen, dass man die übrigen $n - k$ Elemente wegnimmt; das ist jedoch gerade auf $\binom{n}{n-k}$ Weisen möglich.

35. Die Anzahl aller Untermengen ist gleich der "Anzahl der leeren Untermengen"- d.h. 1 - plus die Anzahl der einelementigen Untermengen plus die Anzahl der zweielementigen Untermengen plus die Anzahl der n-elementigen Untermengen (natürlich ist die letztere 1).

36. Aus n Elementen können wir n_1 auf $\binom{n}{n_1}$ Weisen auswählen. Unabhängig davon, wie wir das getan haben, gibt es für die Auswahl der n_2 Elemente $\binom{n-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten, für die Wahl der n_1 und n_2 Elemente insgesamt also $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten.
Geht man analog weiter, so erhält man als Endergebnis

$$\begin{aligned}&\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot ...\\ &= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{...} \cdot ...\\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}\end{aligned}$$

führen wir hier die möglichen Vereinfachungen durch, so bekommen wir dasselbe wie oben.

37.a) Die Anzahl der Anordnungen (Permutationen) von n Elementen, $n!$;
b) die Anzahl der aus n Elementen bildbaren k-elementigen Folgen: $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$;
c) die Anzahl der k-elementigen Untermengen von n Elementen, d.h. $\binom{n}{k}$.

38. In die erste Spalte an 8 mögliche Felder, danach in die zweite nur noch an 7 usw., die Anzahl der Möglichkeiten beträgt also 8!

39. Zunächst entscheiden wir, wohin wir die Türme stellen, was auf 8! Weisen möglich ist. Danach entscheiden wir, welches die vier Stellen sind, wohin wir die roten Türme setzen wollen, was sich auf $\binom{8}{4}$ Weisen machen lässt. Die Anzahl aller Möglichkeiten beträgt: $8! \cdot \binom{8}{4}$.

40. Analog zu dem Vorangegangenen $8! \cdot 8!$.

41. Jeder Buchstabe "wählt sich selbst", wohin er in dem Anagramm gelangt. K, M , B, A, T, E wählen je eine Stelle, O, I. je zwei, N drei, die Anzahl der Möglichkeiten beträgt also nach einem Ergebnis von Abschnitt 10:

$$\frac{13!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot} = \frac{13!}{24} = 2594592$$

42. Die Anzahl aller Texte aus 13 Buchstaben, d.h. die Anzahl aller aus den 29 Buchstaben bildbaren 13elementigen Folgen ist nach Abschnitt 8 gleich 29^{13}, Wenn wir jetzt die wesentlich verschiedenen Anagramme abzählen wollen, so ist es am zweckmäßigsten, so vorzugehen, dass wir zu jedem Buchstaben sagen, wie oft er vorkommt.
Das heißt, wir müssen 13 Stellen unter 29 Buchstaben verteilen. Hierfür bekommen wir nach Abschnitt 12 $\binom{29+13-1}{29-1} = \binom{41}{28}$ Möglichkeiten.

43. Zunächst geben wir jedem der Kinder je einen Groschen. Dann verteilen wir die übrig gebliebenen Groschen so, dass jedes von ihnen wenigstens noch 1 Groschen bekommt. Nur kann letzteres auf mehrerlei Weise geschehen, und zwar, wie wir wissen, auf $\binom{n-k-1}{k-1}$ Weisen.

Verallgemeinerung: n Groschen werden so unter k Kinder verteilt, dass jedes mindestens p Groschen bekommt. Analog zu dem Vorangegangenen ergeben sich $\binom{n-(p-1)k-1}{k-1}$ Verteilungsmöglichkeiten.

44. Im Endergebnis werden im Verlauf des Spiels $k-p$ Pfennige verteilt. Das lässt sich auf $\binom{kp+k-1}{k-1}$ Weisen tun.

45. Wir geben jedem Mädchen je eine Mark, das übrig gebliebene Geld verteilen wir dagegen

auf die "ungerechtere" Weise. Das Ergebnis lautet:

$$\binom{(n-l)+(k+l)-1}{(k+l)-1} = \binom{n+k-1}{k+l-1}$$

Zu Kapitel 3: Kombinatorik in der Arithmetik

1. In der n-ten Zeile sind die beiden äußeren Elemente $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$. Aber $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

2. Es ist nachzuweisen, dass in jeder Zeile das $(k+1)$-te Element von links dasselbe ist wie das $(k+1)$-te von rechts, dass also $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist. Siehe hierzu jedoch die Aufgabe 34 des vorstehenden Kapitels!

3. Wir machen das Gebilde von Abb. 3.3 zu einem Pascalschen Dreieck (also kommt beispielsweise der dritte Buchstabe N von links an die Stelle von $\binom{5}{2}$, der zweite Buchstabe O von links an die Stelle von $\binom{9}{4}$.
Auf wieviel Weisen können wir beispielsweise zu dem Buchstaben M gelangen? Zu den beiden äußeren auf eine Weise, zu dem mittleren auf zwei Weisen. Die entsprechende Zeile des Pascalschen Dreiecks lautet gerade 1 2 1.
Auch allgemein können wir zu jedem Element auf so viele Weisen von oben nach unten gelangen, wie die Zahl angibt, die an seiner Stelle im Pascalschen Dreieck steht. Das kann man durch vollständige Induktion beweisen:

Wenn dies bereits für die Elemente der n-ten Zeile nachgewiesen ist, so können wir zu jedem Element der $(n+1)$-ten Zeile auf so viele Weisen gelangen, wie man zu dem links darüber liegenden Element gelangen kann plus die Weisen, auf die man zu dem rechts oberhalb liegenden Element gelangen kann. Wir können also zu den Elementen der $(n+1)$-ten Zeile auf so viele Weisen gelangen, wie die Zahl angibt, die an der entsprechenden Stelle des Pascalschen Dreiecks steht.
Speziell zu dem untersten Buchstaben N kann man auf $\binom{12}{6}$ Weisen gelangen, d.h., die Anzahl der möglichen Ablesungen beträgt $\binom{12}{6} = 924$.

4. An Stelle der 1 am Anfang nehmen wir die rechts über ihr stehende 1 und wenden mehrmals nacheinander die Gleichung (2) an.

5. Nach dem binomischen Satz ist

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + -... + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

Wenn n ungerade ist, so folgt die Behauptung daraus, dass einerseits $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist, andererseits $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{n-k}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten.

6. Untersucht in $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$ den Koeffizienten von x^k. Auch die "Kugel"methode ist anwendbar, mit $n+m$ Kugeln, von denen k auszuwählen sind.

7. Beweist zunächst, dass $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ ist. Danach müsst ihr die Gleichung (4) anwenden (aber statt auf n auf $(n-1)$).

8. Die Aufgabe deckt sich im wesentlichen mit der Aufgabe 3.

9. Teilen wir beide Seiten durch 2:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + ... + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2 \cdot 3}$$

d.h.

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+...+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$$

Diese Aussage ist jedoch ein Spezialfall der Aufgabe 8 im Falle $l = 2$. Versucht, die Behauptung auch mit der Methode der vollständigen Induktion zu beweisen, die ihr im ersten Kapitel kennengelernt habt!

10. Wenn die Zahl 1 darunter vorkommt, so ist sie zu jeder anderen relativ prim. Wir können also annehmen, dass die 1 nicht zu ihnen gehört. Dann liegt aber jede der n Zahlen in einem der folgenden Schubfächer:

$$(2,3),(4,5),(6,7),...,(2n-2,2n-1)$$

Dann gibt es in einem gewissen Schubfach zwei Zahlen. Unter den n natürlichen Zahlen kommen also zwei benachbarte vor (solche, deren Differenz 1 ist). Zwei benachbarte natürliche Zahlen sind jedoch stets relativ prim. (Beweist das !)

11. Wir bezeichnen die Anzahl der Schüler der Klasse mit x. Wenn wir die Siebformel anwenden, bekommen wir 0, d.h.

$$x-(18+23+21+17)+(9+7+6+12+9+12)-(4+3+5+7)+3=0$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir nach x auflösen und die angegebenen Rechenoperationen ausführen, $x = 40$.

12. Wenn man einige beliebige der Zahlen $p_1, p_2, ..., p_k$ vorgibt, etwa p_1, p_2 und p_3, so kann man die Anzahl der Zahlen bis n, die durch jede davon teilbar sind, dadurch bekommen, dass man n durch das Produkt der ausgewählten Primzahlen dividiert. In unserem Falle ist dies also die Zahl $\frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}$.
Sieben wir jetzt diejenigen unter den Zahlen $1, 2, ..., n$ aus, die durch einen gewissen Primfaktor der Zahl n teilbar sind, so müssen wir nach unserer Formel folgendermaßen vorgehen:

Wir müssen $\frac{n}{p_1}$ von n abziehen, danach $\frac{n}{p_2}$ und so weiter, schließlich die Zahl $\frac{n}{p_k}$; danach müssen wir zu dem Ergebnis diejenigen Zahlen addieren, die sich dadurch ergeben, dass man die Zahl n durch je zwei Primzahlen dividiert; dann sind diejenigen Zahlen zu subtrahieren, die man durch Division von n durch jeweils drei Zahlen bekommt, usw.
Zu guter Letzt ist der $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$-te Teil von n zu addieren oder zu subtrahieren. (Achtung! Wenn unter den Primfaktoren von n einer in der Primfaktorzerlegung mit einem größeren Exponenten auftritt, so ist der letztere Quotient nicht 1.) Wenn ihr nachrechnet, könnt ihr sehen, dass wir als Ergebnis dasselbe erhalten haben, wie in der Aufgabe behauptet wird, wenn man dort die Klammern auflöst.

13. Auf Grund von Zahlenbeispielen kann man leicht vermuten, dass das Ergebnis n lautet. Beweisen lässt sich dies beispielsweise folgendermaßen:
Betrachten wir die folgenden Brüche: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}$. Diese n Brüche sind freilich nicht auf die einfachste Weise geschrieben: wir führen in Gedanken die möglichen Kürzungen durch.
Auf diese Weise bekommen wir Brüche, deren Nenner Teiler von n und deren Zähler kleiner als der Nenner und zu ihm relativ prim ist. Offensichtlich wird jeder derartige Bruch erhalten.
Betrachten wir jetzt einen Teiler d von n, so ist die Anzahl der Brüche mit dem Nenner d gerade $\varphi(d)$. Hieraus folgt, dass die Summe über $\varphi(d)$ gleich der Anzahl der Brüche, d.h. n ist.

14. Der Einfachheit halber wollen wir von den Fällen $n = 1, 2$ absehen (dann können wir die gesuchte Summe leicht ausrechnen: in allen beiden Fällen 1). Wenn eine Zahl r kleiner als n und zu n relativ prim ist, so gilt dies auch für $n - r$ (warum?). Berechnen wir also die Summe dieser Zahlen, so können wir die Glieder paarweise so zusammenfassen, dass ihre Summe jeweils n ist. Da es $\frac{\varphi(n)}{2}$ solche Paare gibt, ist die Summe $\frac{n \cdot \varphi(n)}{2}$.

15-16-17. Analog durch vollständige Induktion zu bestätigen, wie die im vorangegangenen Abschnitt bewiesene Identität.

18. Im Falle $n = 0, 1$ erkennt man durch Einsetzen, dass die Identität gilt. Für größere n folgt die Behauptung durch vollständige Induktion.
Eine kleine Kostprobe davon, wie man auf die Formel kommen kann. Zunächst sehen wir, ob sich nicht eine Formel der Form

$$F_n = a^n$$

finden lässt (wie beispielsweise bei der Anzahl der Untermengen, nur eventuell mit anderem a). Für jedes n müsste dann gelten $a^{n+1} = a^n + a^{n-1}$. Wir können hier durch a^{n-1} dividieren und bekommen, dass $a^2 - a - 1 = 0$ ist.
Indem wir diese Gleichung zweiten Grades lösen, erhalten wir $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Schlecht ist nur, dass weder a_1 noch a_2 geeignet ist, weil wir für $n = 1$ nicht 1 bekommen. Wir versuchen, dem dadurch abzuhelfen, dass wir aus den Folgen

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad , \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

geschickt eine dritte Folge bilden, die dann bereits allen Forderungen genügt. Überlegt einmal, warum wir die dritte Folge gerade in der Weise gebildet haben, wie sie in der Aufgabe auftritt!

19. Die Lösung macht sich besser, wenn wir die Anzahl des am ersten Tag geschossenen Wildes allgemeiner mit a und die des am zweiten Tag geschossenen Wildes mit b bezeichnen. Dann ist die Anzahl des Wildes am dritten Tag $a + b$, am vierten Tag $a + 2b$, am fünften Tag $2a + 3b$, am sechsten Tag $3a + 5b$.
Hieraus können wir bereits vermuten, dass am n-ten Tag von dem Jäger $F_{n-3}a + F_{n-2}b$ Stück Wild geschossen worden sind (natürlich nur, wenn $n \geq 3$ ist). Das kann man leicht durch vollständige Induktion bestätigen.

20. Die Fibonaccischen Zahlen, dies lässt sich leicht durch vollständige Induktion beweisen.

21. Längs der Diagonalen des Rechtecks passen die Stücke nicht genau zusammen, es bleibt vielmehr ein Gebiet von gerade 1 cm^2 Flächeninhalt frei. Geht man von einem Quadrat der Größe 5×5 aus, so kann man auf die in Abb. 6.1 dargestellte Weise ein Rechteck der Größe $8 \cdot 3$ herstellen, nur mit dem Unterschied, dass die Teile sich überlappen (weil $5 \cdot 5 > 8 \cdot 3$ ist). Allgemein kann man aus einem Quadrat der Seitenlänge F_n ein Rechteck der Größe $F_{n+1} \times F_{n-1}$ herstellen (überlegt, wie). Hieraus können wir erkennen, dass F_n^2 "nahe" bei $F_{n+1}F_{n-1}$ liegt und abwechselnd kleiner oder größer ist.

Diese Beobachtung lässt sich auch genau in Form einer Identität formulieren:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

Diese Identität kann man ähnlich durch vollständige Induktion bestätigen wie die Behauptungen der Aufgaben 15-17.

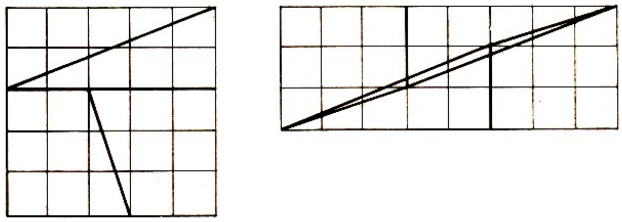


Abb. 6.1

Zu Kapitel 4: Kombinatorik in der Geometrie

1. $\binom{n}{2} - n$.

3. Der Beweis lässt sich ebenso wie im Falle von Kreisen führen.

4. Auch jetzt ist die Frage nur dann interessant, wenn wir bereits ein Gebiet blau angemalt haben. Die Farbe eines beliebigen Gebietes ergibt sich nunmehr so, dass man einen Punkt von ihm mit einem Punkt des blauen Gebietes verbindet und abzählt, von wieviel Geraden diese Strecke geschnitten wird. Wenn diese Anzahl gerade ist, wird das Gebiet blau sein, wenn ungerade, so rot.

5. Die Behauptung wird durch vollständige Induktion nach der Anzahl der auftretenden Länder bewiesen. Im Falle von 1 Land ist nichts aufgezeichnet, die ganze Ebene stellt ein einziges Land dar, das mit einer Farbe gefärbt werden kann.
Nehmen wir also eine aus $n+1$ Ländern bestehende Landkarte und lassen aus der Abbildung Kanten weg, die ein gewisses Land begrenzen. Wiederum bekommen wir einen Graphen, dessen sämtliche Knotenpunkte gerade Valenz haben.
Nach Induktionsvoraussetzung können wir ihn mit 2 Farben färben. Bei dieser Färbung sind das betrachtete Land und seine Nachbarn gleichgefärbt; kehren wir also auf dem Gebiet des betreffenden Landes die Färbung um, so haben wir $n+1$ Länder gut gefärbt.

6. Umformulierung: In jedem Graphen gibt es zwei Punkte gleichen Grades.
Beweis: Wenn n Punkte existieren, so kommen die Grade der Punkte unter den Zahlen $0, 1, ..., n-1$ vor. 0 und $n-1$ können jedoch nicht gleichzeitig auftreten (Begründung!).
Also gibt es für die Gradzahlen nur $n^{-}1$ Möglichkeiten. Nach dem Schubfachprinzip existieren somit zwei Punkte mit gleichem Grad.

7. Dieser Grad sei g und die Anzahl aller Kanten etwa k. Dann müssen oben und unten gleichermaßen $\frac{k}{g}$ Punkte liegen.

8. Nein, die Behauptung ist nicht wahr; Gegenbeispiel ist das Dreieck.

9. Der Grad der Punkte sei k. Wir wählen unten j Punkte. Hiervon gehen $k-j$ Kanten aus. Ein oberer Punkt "fasst" wenigstens k von diesen Kanten. Also führt zu wenigstens j oberen Punkten eine Kante aus den unteren j.

11. $\binom{n}{2}; n-1; n$.

13. Wenn bei dem Tilgen der Kante ein Weg verschwindet, der zwei Punkte im ursprünglichen Graphen verbindet, d.h. ein Weg über die Kante verläuft, so können wir die Kante durch den verbliebenen Bogen des Kreises ersetzen. Auf diese Weise haben wir die beiden Punkte durch Aneinanderheftung dreier Wege miteinander verbunden. Wir wissen aber aus dem Obigen, dass man hieraus auch einen echten Verbindungsweg auswählen kann.

14. Der Graph ist zusammenhängend, weil ja zwei seiner Punkte verbindbar sind, und er kann keinen Kreis enthalten, weil dann die beiden Endpunkte des Kreises auf zweierlei Weise durch

einen Weg verbindbar wären.

15. Man kann beweisen, dass der Graph zusammenhängend ist, d.h., dass sich je zwei Punkte durch einen Weg verbinden lassen. Im Falle zweier miteinander verbundener Punkte ist gerade diese Kante der entsprechende Weg. Sind die beiden Punkte jedoch nicht verbunden, so können wir dadurch zu einer Lösung kommen, dass wir denjenigen Kreis nehmen, der beim Einziehen dieser Kante entsteht; der Bogen von ihm, der in den ursprünglichen Graphen fällt, ist dann der betreffende Weg.

16. Wir gehen von einem Punkt aus und schreiten auf aneinanderstoßenden Kanten fort. Auf diese Weise können wir nicht zu bereits berührten Punkten zurückgelangen, weil das die Existenz eines Kreises bedeuten würde. Früher oder später müssen wir also stoppen, und das kann nur in einem Punkt vom Grade Eins geschehen.

17. Wir bekommen einen Baum, weil der Graph bei der Hinzunahme des neuen "Reises" zusammenhängend bleibt und in ihm kein Kreis entstehen kann (ist zu überlegen!). Jeder Baum kann auf diese Weise erhalten werden, weil es in dem betrachteten Baum einen Punkt vom Grade Eins gibt. Lässt man diesen Weg, so bleibt der Graph wiederum ein Baum; hieraus kann man abermals einen Punkt ersten Grades weglassen und so weiter. Bei einem umgekehrt eingezogenen Film bedeutet das jedoch gerade das Wachstum des Baumes.

18. Im Falle zweier Punkte gibt es 1 Kante. Ein neues "Reis" erhöht sowohl die Zahl der Punkte als auch die Anzahl der Kanten um 1.

19. Wir gehen analog vor wie im Falle des optimistischen Unternehmers: Wir bezeichnen den konstruierten Baum mit F und zeigen, dass wir zu jedem anderen Baum G einen Baum H finden können, der billiger (oder wenigstens nicht teurer) ist und von dem mehr Kanten als von G zu F gehören. Wir verfolgen die Konstruktion von F so lange, bis wir erstmalig eine Kante von G streichen müssten.
Diese Kante sei e. Lassen wir die Kante e aus G weg, so zerfällt der verbleibende Teil von G in zwei Teile. Da nicht in jedem dieser beiden Teile alle Kanten gestrichen sein können, gibt es unter ihnen eine nicht gestrichene Kante a. Nehmen wir jetzt an Stelle von e diese Kante a zu C, so wird der gewonnene Baum H billiger (oder höchstens so teuer) wie G sein.
(Überlegt, warum; ferner, dass wir bei Fortsetzung dieses Verfahrens früher oder später F selbst bekommen.)

20. Als sehr gutes Beispiel das folgende Verfahren:
Wir gehen von einem beliebigen Punkt aus, bauen die billigste von ihm ausgehende Leitung, dann unter den hieran (in irgendeinem ihrer Endpunkte) anstoßenden Linien die billigste usw. Stets verlegen wir die billigste Leitung, durch die in das bereits existierende Netz eine neue Station eingeschaltet wird. Wir überlassen es euch, zu überlegen, dass auf diese Weise der billigste Baum erhalten wird.

21. Siehe Abb. 6.2!

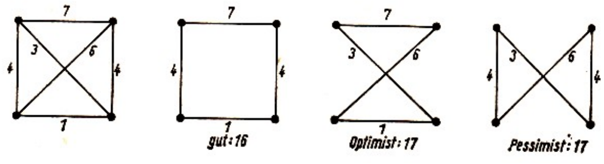


Abb. 6.2

22. Den ursprünglichen Graph, bzw. das was von den Grenzen der ursprünglichen Länder gebildet wird, eventuell ein wenig deformiert. Auf der ursprünglichen Landkarte kann es nicht

sehr "wilde" Länder geben, d.h. solche Länder wie in Abb. 6.3; es ist daher am besten, wenn wir beispielsweise voraussetzen, dass sich in jedem Eckpunkt nur drei Länder treffen und dass die gemeinsame Grenze zweier Länder einen einzigen zusammenhängenden Bogen darstellt (für die Grenzlinie zwischen der Sowjetunion und China trifft dies nicht zu, denn sie wird von der Mongolei zerschnitten).

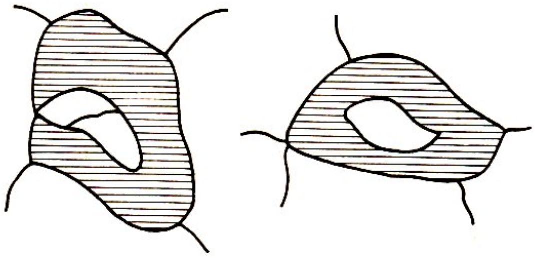


Abb. 6.3

24. Die Anzahl der entstandenen Ebenenteile können wir aus dem Eulerschen Satz ausrechnen. Diese ist um Eins kleiner als das im Satz vorkommende f, weil wir außer den Ländern auch den Ozean zählen müssen. Das in der Beziehung auftretende e ist offensichtlich $\binom{n}{2}+2n$: (die auf dem Ufer liegenden Eckpunkte sind auch zu zählen!).
Die Anzahl der Kanten können wir mit Hilfe des Satzes in Abschnitt 6 bekommen: wir addieren die Gradzahlen und dividieren durch 2. Die Gradzahlen sind: $2n$ mal 3 und $\binom{n}{2}$ mal 4, deren Summe $2n^2+4n$; die Kantenanzahl n^2+2n. Somit wird $f+\binom{n}{2}+2n=n^2+2n+2$ und daraus $f-1=\binom{n+1}{2}+1$.

25. Ja (siehe Abb. 6.4)

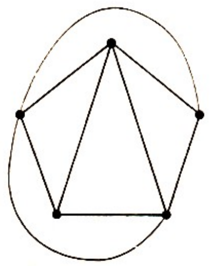


Abb. 6.4

26. Nein. Angenommen nämlich, wir hätten es gezeichnet, so könnten wir unsere Zeichnung als eine Landkarte ansehen, die 6 Eckpunkte, 9 Kanten und somit - nach dem Eulerschen Satz - 5 Länder enthält. Da jedes Land aber von mindestens 4 Kanten begrenzt wird (es gibt in dem Graphen keinen aus 3 Kanten bestehenden Kreis), ergeben sich, wenn wir die Kanten länderweise zusammenzählen, wenigstens $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ Kanten. Auf diese Weise gelangen wir zu der unmöglichen Folgerung, dass $9\geq 10$ ist.

27. Wir stellen uns vor, es seien möglichst viele Dämme gebaut. Dann werden die einzelnen Becken von je drei Dämmen begrenzt (warum?). Rechnet man die Dämme länderweise zusammen, so ergibt sich $\frac{3f}{2}=k$. Mit anderen Worten: $f=\frac{2k}{3}$. Das setzen wir in die Eulersche Formel ein: $\frac{2k}{3}+e=k+2$, woraus $k=3e-6$ folgt. Also:
Ein planarer Graph mit e Eckpunkten kann höchstens $3e-6$ Kanten besitzen.

28. Wir gehen analog zu Aufgabe 24 vor. Offensichtlich ist $e=n+\binom{n}{4}$ (hier machen wir von dem Gebrauch, was wir in Abschnitt 1 ausgerechnet haben, dass nämlich die Diagonalen

insgesamt $\binom{n}{4}$ Schnittpunkte haben). Die Anzahl der Kanten ist:

$$k = \frac{1}{2}\left[n(n-1) + \binom{n}{4} \cdot 4\right] = \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4}$$

Also mit dem Eulerschen Satz

$$f + n + \binom{n}{4} = \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4} + 2$$

Wir interessieren uns für $f-1$ (da wir den äußeren "Ozean" nicht zu berücksichtigen brauchen), also

$$f - 1 = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 1$$

29. Siehe Abb. 6.5

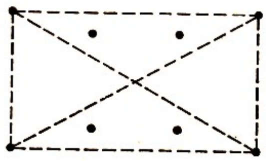


Abb. 6.5

Zu Kapitel 5: Blockpläne

1. 441, 44.

2. Zählen wir die Einwohner von 1 bis 9 und schließen die Folge der Namen der Mitglieder der einzelnen Klubs in Klammern ein, so ergibt sich:

$$(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$$

$$(1,5,9)(2,6,7)(3,4,8)(1,6,8)(2,4,9)(3,5,7)$$

Deine Lösung unterscheidet sich von dieser sicher nicht wesentlich. Darunter ist zu verstehen, dass sie, auch wenn sie sich unterscheiden sollte, durch geeignete Umnummerierung der Stadtbewohner mit dieser zur Übereinstimmung gebracht werden könnte. Versuch es mal!

3. Jedes Mädchen hat 8 Kameradinnen und kann täglich mit zweien in einer Reihe spazieren gehen. Damit es mit jedem genau einmal in einer Reihe Spazieren gehen kann, sind also 4 Tage notwendig.

7. Beispielsweise die folgenden 19 Klubs: Zu jedem Stadtbewohner bilden wir einen Klub, von dem jeder Mitglied ist, er ausgenommen. Hier ist $b = v$, $k = v - 1$, $r = v - 1$, $\lambda = v - 2$.

8. Wir stellen aus unserem paaren Graphen dadurch einen neuen paaren Graphen her, dass wir $b - v$ neue untere Punkte nehmen und jeden derselben mit jedem oberen Punkt verbinden. Es ist nachzuweisen, dass für diesen neuen Graphen die Bedingungen des Satzes von König im dritten Kapitel erfüllt sind, dieser also einen Faktor ersten Grades enthält. Es ist ferner zu zeigen, dass hieraus bereits folgt, dass die Behauptung der Aufgabe richtig ist.

9. Das ist sehr einfach. Beispielsweise das folgende:

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

Ihr könnt leicht nachprüfen, ob ihr den Grundgedanken des in der Abbildung dargestellten lateinischen Quadrats verstanden habt. Könnt ihr nämlich eines vom Format 5×5 herstellen? Oder gar eines vom Format $n \times n$?

10. $24 - 4! = 576$, bzw. 24.

11. Man braucht nur zu jeder Zahl 1 zu addieren, dann nimmt jede Zeilen- bzw. Spaltensumme um 4 zu.

12. Aus denjenigen, in deren Diagonalen jede Zahl genau einmal vorkommt. Beispielsweise aus den folgenden beiden:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

Aus diesen gewinnen wir das folgende "echte" magische Quadrat:

$$\begin{array}{cccc} 5 & 10 & 15 & 0 \\ 12 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 13 & 8 & 7 \\ 11 & 4 & 1 & 14 \end{array}$$

13. Würde es ein solches lateinisches Quadrat geben, so wäre nicht nur dieses, sondern auch jedes von ihm nicht wesentlich verschiedene lateinische Quadrat zu den lateinischen Quadraten 5.4, 5.5 und 5.8 orthogonal. (Das ist zu beweisen!)
Wir könnten also stattdessen dasjenige, zu ihm im wesentlichen gleiche lateinische Quadrat nehmen, dessen erste Zeile so aussieht: 1 2 3 4. Was kann aber in diesem lateinischen Quadrat im ersten Feld der zweiten Zeile (an der Stelle (a3) stehen?
1 nicht, da es dann kein lateinisches Quadrat wäre. Aber 2, 3 oder 4 auch nicht; denn würde beispielsweise 3 stehen, so wäre es zu dem lateinischen Quadrat von Abb. 5.8 nicht orthogonal, setzt man sie nämlich "nebeneinander", so würde das Paar (3, 3) an den Stellen c4 und a3 auftreten. Also gibt es tatsächlich kein solches lateinisches Quadrat.

(Versucht, nach dem Vorbild der obigen Lösung nachzuweisen, dass man unter den lateinischen Quadraten vom Format $n \times n$ höchstens $n - 1$ so auswählen kann, dass je zwei von ihnen zueinander orthogonal sind!)

14. Wenn es ein solches geben würde, könnten wir mit derselben Begründung wie in der Lösung der Aufgabe 13 annehmen, dass seine erste Zeile 1 2 3 4 lautet, während das erste Element der zweiten Zeile 3 oder 4 ist. Danach führt bereits recht wenig Probieren zum Ziel.

15.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

16. Die Tabelle vom Format 4×9 ist die folgende:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Die Blöcke sind:

10	1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	5	8	4	5	6	6	4	5	5	6	4
12	3	6	9	7	8	9	8	9	7	9	7	8
13	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13

Die Punkte der endlichen projektiven Ebene werden mit 1, 2, ..., 13 bezeichnet, ihre Geraden stehen in den Spalten der unteren Tabelle.
Lassen wir aus der Tabelle der Geraden die erste Spalte und das letzte Element aller übrigen Spalten weg, so stimmen die verbleibenden Tripel gerade mit dem in der Aufgabe 2 als Lösung erhaltenen Steinersystem überein. Könnt ihr nachweisen, indem ihr lediglich die Eigenschaften der endlichen projektiven Ebenen benutzt, dass wir hier sicher ein Steinersystem bekommen werden?