

---

**Jiří Sedlaček**

**Einführung in die Graphentheorie**

1968 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

MSB: Nr. 40

Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematika.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Vorbetrachtungen</b>	<b>4</b>
1.1 Einige Bemerkungen über Mengen . . . . .	4
1.2 Abbildungen . . . . .	7
1.3 Hintereinanderausführung von Abbildungen . . . . .	11
<b>2 Ungerichtete Graphen</b>	<b>14</b>
2.1 Grundbegriffe aus der Graphentheorie . . . . .	14
2.2 Knotengrade und ihre Eigenschaften . . . . .	18
2.3 Teilgraphen eines gegebenen Graphen . . . . .	21
2.4 Zusammenhang eines Graphen . . . . .	22
2.5 Komponenten eines Graphen . . . . .	26
2.6 Reguläre Graphen . . . . .	29
2.7 Bäume und Gerüste eines Graphen . . . . .	31
2.8 Bewertete Graphen . . . . .	35
2.9 Brücken eines Graphen . . . . .	37
2.10 Artikulationen . . . . .	39
2.11 Knoten- und Kantenzusammenhangszahl . . . . .	42
2.12 Eulersche Graphen . . . . .	46
2.13 Reguläre Faktoren . . . . .	48
2.14 Zerlegungen regulärer Graphen in reguläre Faktoren . . . . .	52
2.15 Chromatische Zahlen . . . . .	55
2.16 Knotenbasen . . . . .	58
2.17 Isomorphismen und Homöomorphismen . . . . .	63
2.18 Automorphismen von Graphen . . . . .	70
2.19 Die Automorphismengruppe eines Graphen . . . . .	71
2.20 Allgemeinere Definition eines ungerichteten Graphen . . . . .	73
<b>3 Gerichtete Graphen</b>	<b>75</b>
3.1 Betrachtungen, die zum Begriff des gerichteten Graphen führen . . . . .	75
3.2 Definition eines gerichteten Graphen . . . . .	78
3.3 Einige Typen gerichteter Graphen . . . . .	83
3.4 Quasikomponenten eines Graphen und reduzierte Graphen . . . . .	88
3.5 Inzidenzmatrizen eines gerichteten Graphen . . . . .	90
3.6 Kategorien und gerichtete Graphen . . . . .	96
3.7 Allgemeinere Definitionen eines gerichteten Graphen . . . . .	99
<b>4 Schlusskapitel</b>	<b>101</b>
4.1 Historische Anmerkungen . . . . .	101
4.2 Literatur . . . . .	104

## Vorwort

Seit dem Jahr 1936, als der ungarische Mathematiker D. König in Leipzig sein bekanntes Buch "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" veröffentlichte, ist die Graphentheorie sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gewachsen.

Es entstanden neben Hunderten von wissenschaftlichen Arbeiten auch einige gute Lehrbücher, doch eine leichtfassliche Einführung in diese Disziplin, die die Mathematikstudenten und die an der Graphentheorie interessierten Studenten und Wissenschaftler anderer Fachgebiete lesen können, fehlt noch immer.

Ich denke hier vor allem an Physiker, Chemiker, Elektroingenieure, aber auch an Ökonomen, Soziologen, Linguisten und Wissenschaftler anderer verwandter Gebiete. Das vorliegende Buch möge als ein Versuch in dieser Richtung gewertet werden.

Es setzt neben einer guten Kenntnis der Schulmathematik freilich auch noch eine gewisse Fähigkeit zum abstrakten Denken voraus.

Meiner Ansicht nach sind auch Schüler der höheren Klassen in der Lage, allein oder in Arbeitsgemeinschaften den Stoff durcharbeiten und zu verstehen. Trotz der Elementarfassung und des geringen Umfangs des Buches war ich bestrebt, möglichst viele jener Probleme zu streifen, die in letzter Zeit in der Theorie der Graphen behandelt wurden.

Mein Buch erschien zuerst 1964 in tschechischer, 1967 in bulgarischer Sprache, und nun wird es auch den deutschen Lesern vorgelegt. Bei dieser Gelegenheit möchte ich insbesondere der wissenschaftlichen Bearbeiterin dieser deutschen Ausgabe, Frau Prof. Dr. M. Hasse von der Technischen Universität in Dresden, meinen herzlichen Dank aussprechen. Ich habe ihr viele wertvolle Anregungen und Bemerkungen zu verdanken.

Ferner bin ich auch meinen Freunden Herrn Prof. Dr. M. Fiedler und Herrn Dr. J. Blazek aus Prag zu Dank verpflichtet, die die Handschrift meiner Arbeit in der tschechischen und deutschen Version gelesen haben.

Jiři Sedlaček

Prag, den 11. April 1967

# 1 Vorbetrachtungen

## 1.1 Einige Bemerkungen über Mengen

Einer der grundlegenden Begriffe der Mathematik ist der Begriff der Menge. Er spielt in allen Bereichen der Mathematik eine Rolle, z. B. in der Zahlentheorie, der Algebra, der mathematischen Statistik, der Analysis, und in der letzten Zeit dringt er sogar in die Schulmathematik ein.

Auch für unsere Betrachtungen ist es vorteilhaft, die Terminologie der Mengen zu verwenden. Daher wollen wir in diesem Abschnitt einige grundlegende Begriffe der Mengentheorie zusammenstellen.<sup>1</sup>

Unter einer Menge verstehen wir - grob gesprochen - eine Gesamtheit von irgendwelchen Objekten, den sogenannten Elementen der Menge.

Die als Elemente der Menge auftretenden Objekte können sehr verschiedenartig sein, beispielsweise die Schüler einer Klasse, die Häuser einer Straße, die Planeten im Sonnensystem usw. In der Mathematik haben wir es jedoch häufiger mit Mengen zu tun, deren Elemente etwa Punkte einer Ebene oder Primzahlen oder Geraden eines Raumes sind. Es werden jedoch auch Mengen mit verschiedenartigen Elementen zugelassen.

So können wir z. B. von einer Menge sprechen, deren Elemente sowohl die Punkte einer gegebenen Ebene als auch die natürlichen Zahlen sind. Die Elemente dieser Menge sind also einerseits geometrische Gebilde (Punkte), zum anderen die Zahlen 1, 2, 3, 4, ...

Wir bezeichnen Mengen gewöhnlich mit großen Buchstaben; beispielsweise sprechen wir von der mit dem Buchstaben  $A$  bezeichneten Menge oder kurz der Menge  $A$ , der Menge  $H$  usw. Es ist weiter üblich, die Elemente einer Menge mit kleinen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen, also z. B. mit  $a, b, c, x, u, \dots$

Den Sachverhalt, dass ein Element  $a$  zu einer Menge  $A$  gehört, drücken wir mit Hilfe der Elementbeziehung  $\in$  wie folgt aus:  $a \in A$ . Wenn ein Element  $b$  nicht zur Menge  $A$  gehört, dann schreiben wir:  $b \notin A$ .

Es ist zweckmäßig, auch eine Menge zuzulassen, die kein Element enthält. Es gibt nur eine solche Menge. Diese heißt die leere Menge und wird mit  $\emptyset$  gekennzeichnet.

Sie ist also dadurch charakterisiert, dass es kein Element  $x$  mit  $x \in \emptyset$  gibt. Auf Grund dieser Übereinkunft sind wir z. B. berechtigt, von der Menge aller der Primzahlen zu sprechen, die größer als 890 und kleiner als 905 sind, bevor wir uns überzeugt haben, ob in dieser Menge überhaupt eine Primzahl gelegen ist.

Eine Menge, die mindestens ein Element enthält, heißt eine nicht-leere Menge. Betrachten wir z. B. die Menge aller Primzahlen, die größer als 905 und kleiner als 910 sind, so stellen wir leicht fest, dass es sich hier um eine nichtleere Menge handelt; denn die Zahl 907 ist Primzahl.

Wir wollen uns noch mit dem wichtigen Begriff der mengentheoretischen Inklusion vertraut machen.

Gehört jedes Element einer Menge  $A$  auch zu einer Menge  $B$ , so sagen wir, dass die Menge  $A$  eine Teilmenge der Menge  $B$  ist oder dass  $A$  eine Untermenge der Menge  $B$  ist, und wir schreiben:  $A \subseteq B$ .

---

<sup>1</sup>Dem Leser, der eine ausführlichere Einführung in die Mengenlehre sucht, empfehle ich das Buch von M. Hasse, "Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik" (Mathematische Schülerbücherei Nr. 2, B. G. Teubner, 3. Aufl., Leipzig 1967)

Die Beziehung  $\subseteq$  heißt die mengentheoretische Inklusion.

Wählen wir z. B. als Menge  $A$  die Menge aller auf S. 10 dieses Buches gedruckten Buchstaben und als Menge  $B$  die Menge aller Buchstaben, die in diesem Buch überhaupt gedruckt sind, dann gilt  $A \subseteq B$ . Die leere Menge ist offenbar eine Teilmenge jeder beliebigen Menge.

Mitunter begegnen wir Mengen  $C$  und  $D$ , für die gleichzeitig  $C \subseteq D$  und  $D \subseteq C$  gilt. Dann sagen wir, dass die Mengen  $C$  und  $D$  einander gleich sind und schreiben dafür  $C = D$ .

Wählen wir beispielsweise für  $C$  die Menge aller ungeraden Zahlen, die größer als 27 und kleiner als 33 sind, und für  $D$  die Menge aller Primzahlen, die größer als 23 und kleiner als 36 sind, so enthält  $C$  genau zwei Elemente: die ungeraden Zahlen 29 und 31. Auch die Menge  $D$  wird genau von zwei Elementen gebildet: den Primzahlen 29 und 31. Daraus folgt, dass  $C = D$  ist.

Es seien  $E$  und  $F$  zwei Mengen, für die  $E \subseteq F$ , aber nicht  $E = F$  gilt. Dann sagen wir, die Menge  $E$  ist eine echte Untermenge der Menge  $F$ , und schreiben  $E \subset F$ .

So ist beispielsweise die leere Menge eine echte Untermenge jeder nicht-leeren Menge.

Mengen  $G$  und  $H$ , für die die Beziehung  $G = H$  nicht gilt, nennen wir verschiedene Mengen, und wir schreiben in diesem Fall  $G \neq H$ . Ist beispielsweise  $G$  eine echte Untermenge einer Menge  $H$ , dann sind die Mengen  $G$  und  $H$  verschieden.

Man unterscheidet, je nachdem, ob eine Menge endlich oder unendlich viele Elemente hat, zwischen endlichen und unendlichen Mengen. In diesem Buch werden wir uns vor allem mit endlichen Mengen beschäftigen. Die Menge aller Bücher in der Prager Universitätsbibliothek ist endlich, die Menge aller Kreislinien dagegen, die in einer gegebenen Ebene konstruiert werden können, ist unendlich.

Da eine Menge auf Grund der obigen Gleichheitsdefinition durch ihre Elemente eindeutig festgelegt ist, so erhalten wir eine übersichtliche Schreibweise für Mengen.

Besteht beispielsweise eine Menge  $M$  aus den beiden Elementen  $x$  und  $y$ , dann schreiben wir  $M = \{x, y\}$ . Aus zwei Elementen bestehende Mengen werden in diesem Büchlein wiederholt auftreten; wir werden in einem solchen Falle kurz von zweielementigen Mengen sprechen.

Wir wollen weiterhin vereinbaren, dass wir die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $M$  mit  $|M|$  angeben wollen.<sup>2</sup> Ist  $M$  eine unendliche Menge, so drücken wir diesen Sachverhalt durch die Schreibweise  $|M| = \infty$  aus.

Für eine zweielementige Menge  $A$  ist demnach  $|A| = 2$ , für die leere Menge  $|\emptyset| = 0$  usw.

Wir wählen hier für die Anzahl der Elemente einer gegebenen Menge eine Bezeichnungsweise, die wir schon von der Schule her für den absoluten Betrag einer reellen oder komplexen Zahl kennen; in der Theorie der Mengen kann jedoch keine Verwechslung eintreten, und deshalb halten wir uns an diese recht eingebürgerte Schreibweise.

Es bezeichne  $N$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Weiter sei eine natürliche Zahl  $k$  mit  $k < n$  gegeben. Wir fragen uns, wieviele verschiedene Untermengen  $K$  von  $N$  genau  $k$  Elemente haben. In der Schule haben wir die Untermengen  $K$  als Kombinationen der  $k$ -ten Klasse (aus  $n$  Elementen) bezeichnet und die Anzahl aller möglichen  $K$  durch die Zahl

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

---

<sup>2</sup>In der Literatur bezeichnet man die Anzahl der Elemente der Menge  $M$  oft auch mit  $\overline{M}$  oder  $\text{card } M$ .

ausgedrückt, die man den Binomialkoeffizienten " $n$  über  $k$ " nennt. Der Bruch auf der rechten Seite kann vereinfacht werden, wenn man Fakultäten verwendet. Dabei verstehen wir unter " $m$  Fakultät" den Ausdruck

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$$

wobei  $m$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Die Zahl  $\binom{n}{k}$  kann man dann in der Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

schreiben, wenn man noch  $0! = 1$  setzt. Es ist nützlich, die obige Definition des Binomialkoeffizienten auf  $k = 0$  zu erweitern.

Man setzt fest, dass  $\binom{n}{0} = 1$  ist (für jede Zahl  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Dies stimmt auch damit überein, dass jede Menge die leere Menge als Untermenge enthält.

Mit Mengen kann man Operationen ausführen, deren Eigenschaften an das Addieren oder Multiplizieren von Zahlen erinnern. Da wir diese Operationen in unseren weiteren Betrachtungen brauchen, wollen wir ihre Definitionen angeben.

Zu gegebenen Mengen  $A$  und  $B$  kann man eine weitere Menge konstruieren, die genau die Elemente enthält, die entweder zu  $A$  oder zu  $B$  oder zu beiden Mengen zugleich gehören.

Diese neue Menge heißt die Vereinigung der Mengen  $A$  und  $B$  und wird gewöhnlich mit  $A \cup B$  bezeichnet.

So ist die Vereinigung der Mengen  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $B = \{1, 3, 5\}$  die Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Mengen  $A$  und  $B$  und wird gewöhnlich mit  $A \cup B$  bezeichnet. Man kann weiter eine Menge konstruieren, die genau die Elemente enthält, die gleichzeitig zu einer Menge  $C$  und zu einer Menge  $D$  gehören. Die so definierte Menge heißt der Durchschnitt der Mengen  $C$  und  $D$ , in Zeichen:  $C \cap D$ .

Ist beispielsweise  $C$  die Menge aller geraden Zahlen und  $D$  die Menge aller Primzahlen, so ist  $C \cap D = \{2\}$ , da 2 die einzige gerade Primzahl ist.

Oft begegnen wir bei unseren Betrachtungen Mengen, deren Durchschnitt die leere Menge ist. Sind  $E$  und  $F$  Mengen mit  $E \cap F = \emptyset$ , so sagen wir, dass die Mengen  $E$  und  $F$  elementfremd sind.

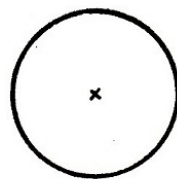


Bild 1

So sind beispielsweise die Bild Menge  $E$  aller Punkte der gezeichneten Kreislinie und die Menge  $F$  aller Punkte der in diesem Bild gezeichneten Geraden elementfremd.

### Übungen

I. 1.1. Es ist die Menge  $X = \{3, -5, \sqrt{2}\}$  gegeben. Wieviele verschiedene Untermengen enthält die Menge  $X$ ? Man schreibe alle diese Untermengen einzeln auf.

I. 1.2. Es ist eine endliche Menge  $Y$  mit  $m$  Elementen gegeben. Wieviele verschiedene Untermengen hat die Menge  $Y$ ?

I. 1.3. Es sei eine endliche Menge  $U$  mit  $|U| > 2$  gegeben. Wir wollen mit  $K$  die Menge aller zweielementigen Mengen  $X$  mit  $X \subset U$  bezeichnen. Wieviele Elemente hat die Menge  $K$ ?

I. 1.4. Es seien zwei elementefremde Mengen  $M$  und  $N$  gegeben. Die Menge  $M$  habe 5 Elemente, die Menge  $N$  10 Elemente.

Man rechne aus, auf wieviele Arten man in der Vereinigung  $M \cup N$  eine Untermenge  $X$  mit sechs Elementen so auswählen kann, dass der Durchschnitt  $X \cap M$  genau zwei Elemente enthält.

I. 1.5. Es seien ganze Zahlen  $a, b, c$  gegeben mit  $0 \leq a \leq b \leq c$ . Wir wollen Mengen  $A$  und  $C$  mit  $A \subseteq C$  betrachten, wobei  $|A| = a$  und  $|C| = c$  ist.

Wieviele Mengen  $B$  kann man konstruieren, für die  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq C$  gilt, wenn man fordert, dass  $|B| = b$  ist?

I. 1.6. Es seien  $M$  und  $N$  Mengen mit  $M \subset N$ . Man bestimme die Vereinigung  $M \cup N$  und den Durchschnitt  $M \cap N$ .

I. 1.7. Es sei  $A$  eine Menge. Man bestimme

- a) die Vereinigung  $A \cup A$ ;
- b) den Durchschnitt  $A \cap A$ ;
- c) die Vereinigung  $A \cup \emptyset$ ;
- d) den Durchschnitt  $A \cap \emptyset$ .

I. 1.8. Klammern werden beim Rechnen mit Mengen nach ähnlichen Grundsätzen angewandt, wie wir sie von der Schule her kennen. So bedeutet beispielsweise  $(A \cap B) \cup C$ , dass wir zuerst den Durchschnitt der Mengen  $A$  und  $B$  und dann die Vereinigung von  $A \cap B$  mit der Menge  $C$  bilden sollen. Wenn  $X$  und  $Y$  gegebene Mengen sind, dann bestimmen Sie

- a)  $(X \cap Y) \cup X$ ;
- b)  $(X \cup Y) \cap X$ .

## 1.2 Abbildungen

Wir wollen uns nun mit dem Begriff einer Abbildung von einer Menge in eine Menge beschäftigen, den wir für unsere weiteren Betrachtungen benötigen.

Es seien  $M$  und  $N$  nicht-leere Mengen, und es sei eine Vorschrift gegeben, die jedem Element  $x$  von  $M$  genau ein Element  $y$  von  $N$  zuordnet. Wir sagen dann, dass eine Abbildung von der Menge  $M$  in die Menge  $N$  definiert ist; dabei heißt das Element  $x$  ein Urbild von  $y$  und das Element  $y$  das Bild des Elementes  $x$ .<sup>3</sup>

Zur Bezeichnung einer Abbildung von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  wird oft ein einzelner Buchstabe verwendet (der gegebenenfalls mit einem Index versehen ist). Wir sprechen beispielsweise von einer Abbildung  $f$  oder  $F_1$ , u. ä.

Die Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$  von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  betrachten wir als verschieden, wenn wenigstens ein Element  $x$  von  $M$  existiert, dem bei der Abbildung  $f_1$  in der Menge  $N$  ein anderes Bild als bei der Abbildung  $f_2$  zugeordnet wird.

Zur Illustration sei folgendes Beispiel angegeben: Die Menge  $M_1$  wird von vier Quadraten gebildet (Bild 2); die Menge  $N_1$  setzt sich aus drei Dreiecken zusammen, wie ebenfalls aus

---

<sup>3</sup>Der Definition der Abbildung sei noch eine Bemerkung angefügt, damit beim Leser keine Missverständnisse entstehen. Es kann sowohl der Fall auftreten, dass zwei Elemente aus der Menge  $M$  verschiedene Bilder besitzen als auch der Fall, dass ihnen dasselbe Element  $y$  entspricht.

unseren Bild ersichtlich ist. Jedem Quadrat ist ein bestimmtes Dreieck so zugeordnet, wie die gestrichelten Linien es zeigen.

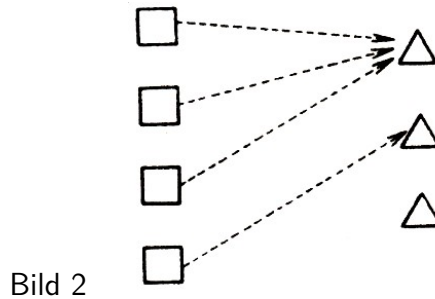


Bild 2

Wir wollen beachten, dass in Bild 2 drei Quadraten bei der betrachteten Abbildung ein einziges Dreieck zugeordnet ist, während eines der drei Dreiecke kein Urbild besitzt.

Es sei noch ein weiteres Beispiel angegeben. Als Menge  $M_2$  wählen wir die Menge aller Schüler einer Klasse und als Menge  $N_2$  die Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  aller fünf Bewertungszensuren 1, 2, 3, 4, 5. Am Ende des Bewertungszeitraumes bewertet der Lehrer die Arbeit seiner Schüler in Mathematik, und jeder Schüler erhält eine Zensur. Wir sehen, dass bei der Zensurenverteilung eine Abbildung von der Menge aller Schüler in die Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  vorgenommen wurde.

Im gleichen Bewertungszeitraum bewertet jedoch auch der Deutschlehrer diese Klasse. Auch hier liegt eine Abbildung von der Menge  $M_2$  in die Menge  $N_2$  vor. Die Noten in den Fächern Mathematik und Deutsch unterscheiden sich gewöhnlich voneinander - es existiert in der Regel wenigstens ein Schüler in der Klasse, der in Mathematik eine andere Zensur als in Deutsch hat.

Wir sehen also, dass im allgemeinen hier zwei verschiedene Abbildungen von der Menge  $M_2$  in die Menge  $N_2$  vorliegen.

Eine Abbildung von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  ist ein sehr allgemeiner Begriff. Sehr oft treten jedoch spezielle Abbildungen von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  mit folgender Eigenschaft auf:

Zu jedem Element  $y$  von  $N$  existiert wenigstens ein Element  $x$  von  $M$ , dessen Bild bei der betrachteten Abbildung gerade das Element  $y$  ist. In diesem Falle sagen wir, dass eine Abbildung von der Menge  $M$  auf die Menge  $N$  definiert ist.<sup>4</sup>

Als Beispiel wollen wir die Abbildung in Bild 3 betrachten.

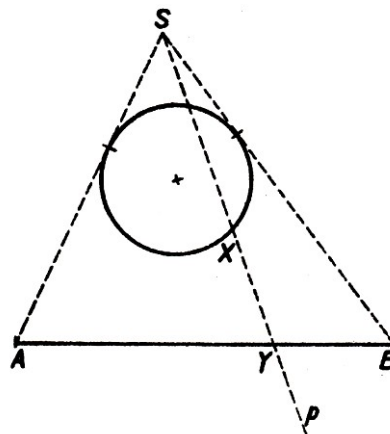


Bild 3

<sup>4</sup>Man beachte, dass diese Bezeichnungen der Abbildungen nur durch verschiedene Präpositionen voneinander unterschieden ist: Abbildung in eine Menge, Abbildung auf eine Menge. Eine ähnliche Unterscheidungsweise durch die Präposition ist für diesen Begriff auch in anderen Sprachen üblich.



Die Menge  $M_3$  besteht aus allen Punkten der aufgezeichneten Kreislinie, und die Menge  $N_3$  besteht aus allen Punkten der Strecke  $AB$ . Eine Abbildung von der Menge  $M_3$  auf die Menge  $N_3$  definieren wir nun wie folgt:

Durch einen Punkt  $S$  (siehe Bild) legen wir eine Gerade  $p$ , die mit der angegebenen Kreislinie wenigstens einen gemeinsamen Punkt hat. Wenn  $X$  einer der Schnittpunkte der Geraden  $p$  und der Kreislinie ist, dann wählen wir als Bild des Punktes  $X$  den Punkt  $Y$ , in dem die Gerade  $p$  die Strecke  $AB$  schneidet.

Diese Abbildung hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Wir haben die einzelnen Punkte der Kreislinie vom Punkt  $S$  auf die Strecke  $AB$  projiziert. Man sieht, dass nicht nur jedes Element der Menge  $M_3$  in  $N_3$  ein Bild hat, sondern auch umgekehrt jedes Element der Menge  $N_3$  das Bild wenigstens eines Elementes der Menge  $M_3$  ist.

Der Punkt  $A$  und der Punkt  $B$  haben jeweils ein einziges Urbild auf der Kreislinie, während jeder innere Punkt der Strecke  $AB$  das Bild zweier Punkte der Kreislinie ist.

In den Beispielen, die wir bisher behandelten, wurde zugelassen, dass verschiedene Elemente der Menge  $M$  bei der betrachteten Abbildung das gleiche Bild haben. Bei gewissen mathematischen Betrachtungen trifft dieser Sachverhalt nicht zu, und wir wollen deshalb eine weitere Einschränkung vornehmen.

Es sei  $f$  eine Abbildung von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$ , für die gilt:

Sind  $x$  und  $y$  verschiedene Elemente der Menge  $M$ , so sollen die Bilder dieser Elemente bei der Abbildung  $f$  verschiedene Elemente der Menge  $N$  sein. Die Abbildung  $f$  heißt dann eine eineindeutige Abbildung von der Menge  $M$  in die Menge  $N$ .

Ist  $f$  sogar eine Abbildung auf die Menge  $N$ , dann spricht man von einer eineindeutigen Abbildung von  $M$  auf  $N$ .<sup>5</sup>

Wir wollen diesen Begriff wiederum an einem Beispiel beleuchten.  $M_4$  sei die Menge aller natürlichen Zahlen und  $N_4$  die Menge aller rationalen Zahlen. Jeder natürlichen Zahl  $m \in M_4$  sei eine durch

$$a_m = \frac{1}{m}$$

definierte rationale Zahl  $a_m$  zugeordnet. Offenbar ist so eine eineindeutige Abbildung von der Menge  $M_4$  in die Menge  $N_4$  definiert. Der Leser beachte, dass diese Abbildung keine Abbildung auf die Menge  $N_4$  ist. Es lässt sich nämlich sofort eine rationale Zahl (beispielsweise  $2/3$ ) angeben, die sich nicht in der Form  $1/m$  mit einer natürlichen Zahl  $m$  ausdrücken lässt.

Bisher haben wir uns mit Beispielen beschäftigt, bei denen  $M$  und  $N$  verschiedene Mengen waren, und haben Abbildungen von  $M$  in  $N$  betrachtet. Wichtig ist jedoch auch der Fall  $M = N$ .

Wir sprechen dann von einer Abbildung von der Menge  $M$  in sich oder auf sich oder von einer eineindeutigen Abbildung der Menge  $M$  auf sich u.ä.

Wir wollen mit  $M_5$  die Menge aller reellen Zahlen bezeichnen und jeder reellen Zahl  $x$  die reelle Zahl  $y$  mit  $y = 2x - 7$  zuordnen. So erhalten wir ein Beispiel für eine eineindeutige Abbildung von der Menge  $M_5$  auf sich.

Wenn eine beliebige nicht-leere Menge  $M$  gegeben ist, dann können wir stets eine eineindeutige

---

<sup>5</sup>Ist  $f$  eine Abbildung von einer Menge  $M$  auf eine Menge  $N$  oder eine eineindeutige Abbildung von  $M$  in  $N$  oder eine eineindeutige Abbildung von  $M$  auf  $N$ , so sagt man neuerdings gewöhnlich, die Abbildung  $f$  von  $M$  in  $N$  ist bzw. surjektiv oder injektiv oder bijektiv.

Abbildung von der Menge  $M$  auf sich angeben, indem wir jedem Element  $x$  von  $M$  als Bild gerade wieder das Element  $x$  zuordnen. Diese Abbildung wird als identische Abbildung der Menge  $M$  bezeichnet.

Es sei  $f$  eine eindeutige Abbildung von einer Menge  $M$  auf eine Menge  $N$ ; dann können wir eine Abbildung  $f'$  von der Menge  $N$  auf die Menge  $M$  wie folgt, definieren:

Jedem Element  $x$  der Menge  $N$  wird bei der Abbildung  $f'$  als Bild jenes Element der Menge  $M$  zugeordnet, dessen Bild bei  $f$  gerade das Element  $x$  ist.

Die Abbildung  $f'$  heißt dann die zur Abbildung  $f$  inverse Abbildung.

Man sieht, dass  $f'$  eine eindeutige Abbildung von  $N$  auf  $M$  ist. Von einer inversen Abbildung sprechen wir auch, wenn  $M = N$  ist.

Ist beispielsweise  $f$  die oben erläuterte eindeutige Abbildung von der Menge  $M_5$  auf sich, so ordnet die inverse Abbildung  $f'$  dem Element  $x$  von  $M_5$  das Element  $1/2(x + 7)$  aus dieser Menge zu.

Beim Studium endlicher Mengen spielt der Begriff der Permutation eine wichtige Rolle. Wir wollen irgendeine nicht-leere Menge  $M$  betrachten, die aus  $m$  Elementen besteht. Da es uns nicht interessiert, welcher Art die Elemente der Menge  $M$  sind, können wir diese Elemente einfach mit den natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, \dots, m$  bezeichnen und im weiteren nur mit diesen Zahlen arbeiten.

Jede eindeutige Abbildung von der Menge  $M$  auf sich heißt eine Permutation der Menge  $M$ . Man kann diese Abbildung in einem Schema übersichtlich darstellen, das sich aus zwei Zeilen zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$$

In der ersten Zeile dieses Schemas haben wir der Reihe nach alle Elemente der Menge  $M$  aufgeschrieben; unter jedem dieser Elemente ist in der zweiten Zeile genau dasjenige Element der Menge  $M$  angegeben, das diesem Element bei der betrachteten Permutation zugeordnet wird.

In der zweiten Zeile unseres Schemas treten also wiederum alle Elemente der Menge  $M$  auf, und zwar jedes von ihnen genau einmal. Es ist nach dem Vorhergehenden klar, wann zwei Permutationen der Menge  $M$  als gleich angesehen werden, nämlich dann, wenn beide jeder der Zahlen  $1, 2, 3, \dots, m$  dieselbe Zahl als Bild zuordnen.

Beispiel 1. Wir wollen eine Übersicht über alle Permutationen der Menge  $M = \{1, 2, 3\}$  aufstellen.

In diesem Fall sind genau die folgenden Permutationen möglich:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, gibt es insgesamt 6 Permutationen der Menge  $\{1, 2, 3\}$ .

In Übereinstimmung mit der Definition der identischen Abbildung, die auf der vorigen Seite gegeben wurde, sprechen wir auch von der identischen Permutation einer Menge  $M$ . Die identische Permutation ordnet jedem Element  $x$  einer gegebenen endlichen Menge wieder das Element  $x$  zu.

In Beispiel 1, in dem wir uns mit einer Menge von drei Elementen beschäftigt haben, ist offensichtlich  $p_1$  die identische Permutation.

Zu jeder Permutation einer endlichen Menge existiert stets eine inverse Permutation. Wenn die ursprüngliche Permutation dem Element  $i$  als Bild das Element  $k_i$  zuordnet, dann ordnet die inverse Permutation dem Element  $k_i$  das Element  $i$  zu. Die inverse Permutation zur identischen Permutation ist gerade die identische Permutation selbst.

Aus Beispiel 1 ersehen wir, dass z. B.  $p_5$  die inverse Permutation von  $p_4$  ist.

Es entsteht natürlich die Frage, wieviele Permutationen eine endliche Menge  $M$  im allgemeinen Falle hat. Wir sind dieser Frage sicher schon im Schulunterricht begegnet, und manche Leser werden die Antwort wissen. Sie lautet:

Wenn  $M$  eine endliche nicht-leere Menge von  $m$  Elementen ist, dann existieren insgesamt  $m!$  Permutationen der Menge  $M$ .

Den Beweis, der durch vollständige Induktion geführt werden kann, werden wir hier übergehen.

### Übungen

I. 2.1. Es sind die Mengen  $A = \{1, 2, \dots, 100\}$  und  $B = \{0, 1\}$  gegeben. Man betrachte die Abbildung von der Menge  $A$  auf die Menge  $B$ , die jeder geraden Zahl aus  $A$  die Zahl 0 in der Menge  $B$  und jeder ungeraden Zahl aus  $A$  die Zahl 1 aus  $B$  zuordnet. Man schreibe eine arithmetische Vorschrift für diese Abbildung auf.

I. 2.2. Es seien die Mengen  $A = \{a, b, c\}$  und  $B = \{x, y\}$  gegeben.

a) Wieviele verschiedene Abbildungen von der Menge  $A$  in die Menge  $B$  gibt es?

b) Wieviele Abbildungen auf die Menge  $B$  existieren hier?

## 1.3 Hintereinanderausführung von Abbildungen

Wir nehmen an, dass eine Menge  $M$  gegeben sei.  $F_1$  und  $F_2$  seien Abbildungen von  $M$  in sich. Die Abbildung  $F_1$  ordnet einem beliebigen Element  $x$  der Menge  $M$  das Element  $x'$  von  $M$  zu. Wir bestimmen nun in der Menge  $M$  das Element  $x''$ , welches das Bild des Elementes  $x'$  bei der zweiten Abbildung  $F_2$  ist.

Dem Element  $x$  von  $M$  entspricht dann das Element  $x''$  von  $M$ . Wir haben damit eine neue Abbildung  $F_3$  von der Menge  $M$  in sich gewonnen, und wir sagen, dass  $F_3$  die aus den Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$  (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzte Abbildung ist und sprechen auch davon, dass wir die Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$  hintereinander ausgeführt haben.  $F_3$  heißt das Produkt der Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$ .

Beispiel 2.  $M$  sei die Menge aller reellen Zahlen. Die Abbildung  $F_1$  der Menge  $M$  in sich definieren wir dadurch, dass wir jedem  $x \in M$  die Zahl  $2x + 1$  zuordnen. Die Abbildung  $F_2$  erklären wir so, dass wir jedem  $x \in M$  die Zahl  $x^2$  zuordnen.

Wir wollen die Abbildung  $F_3$  bestimmen, die aus den Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$  zusammengesetzt ist, und weiter die Abbildung  $F_4$ , die durch Hintereinanderausführung der Abbildungen  $F_2$  und  $F_1$  entsteht.

Bei der Abbildung  $F_1$  wird jeder reellen Zahl  $x$  die Zahl  $2x + 1$  zugeordnet. Der reellen Zahl  $2x + 1$  entspricht bei  $F_2$ , die Zahl  $(2x + 1)^2$  zu. Die Abbildung  $F_3$  ordnet also jeder Zahl  $x$  von  $M$  die Zahl  $4x^2 + 4x + 1$  zu.

Jetzt wollen wir die beiden gegebenen Abbildungen in umgekehrter Reihenfolge zusammensetzen. Die Abbildung  $F_2$  ordnet der Zahl  $x$  die Zahl  $x^2$  zu, die bei  $F_1$  in  $2x^2 + 1$  abgebildet wird.

Bei der Abbildung  $F_4$  entspricht also jedem  $x$  von  $M$  als Bild die Zahl  $2x^2 + 1$ .

Aus dem angeführten Beispiel ist ersichtlich, dass die Reihenfolge, in der wir die gegebenen Abbildungen zusammensetzen, wesentlich ist, denn die Abbildungen  $F_3$  und  $F_4$  aus unserem Beispiel sind verschieden (nur  $x = 0$  und  $x = -2$  wird bei  $F_3$  dasselbe Bild wie bei  $F_4$  zugeordnet).

Im folgenden wollen wir speziell die Hintereinanderausführung der Permutationen einer endlichen nicht-leeren Menge  $M$  betrachten. Wir werden also von einer aus den Permutationen  $p_1, p_2$  zusammengesetzten Permutation sprechen.

Hat  $M$  nur wenige Elemente, so kann man auf übersichtliche Weise alle zusammengesetzten Permutationen aufschreiben. Diesem Zweck dient am besten eine Tafel, was gleich am Beispiel gezeigt werden soll.

Beispiel 3. Wir wollen die sechs Permutationen der Menge  $\{1,2,3\}$  betrachten, mit denen wir uns in Beispiel 1 beschäftigt haben, und eine Tafel für die Zusammensetzung dieser Permutationen aufstellen.

Jede dieser sechs Permutationen kann man mit einer beliebigen anderen dieser sechs Permutationen zusammensetzen oder, wie man auch sagt, multiplizieren. Es gibt also  $6 \cdot 6 = 36$  Produkte von je zwei Permutationen. Wir wollen eine quadratische Tafel mit sechs Zeilen und sechs Spalten aufstellen.

Den Kopf dieser Zeilen (bzw. Spalten) bezeichnen wir der Reihe nach mit  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ . Wenn die aus den Permutationen  $p_i$  und  $p_j$  zusammengesetzte Permutation die Permutation  $p_k$  ist, so schreiben wir das Element  $p_k$  in die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte. Multiplizieren wir beispielsweise die Permutation

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Permutation

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir als Ergebnis die Permutation

$$p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In den Schnittpunkt der 3. Zeile und 4. Spalte schreiben wir also die Permutation  $p_6$ . Führt man dies für alle 36 möglichen Fälle durch, so bekommt man folgende Tafel:

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$p_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$p_2$	$p_2$	$p_1$	$p_4$	$p_3$	$p_6$	$p_5$
$p_3$	$p_3$	$p_5$	$p_1$	$p_6$	$p_2$	$p_4$
$p_4$	$p_4$	$p_6$	$p_2$	$p_5$	$p_1$	$p_3$
$p_5$	$p_5$	$p_3$	$p_6$	$p_1$	$p_4$	$p_2$
$p_6$	$p_6$	$p_4$	$p_5$	$p_2$	$p_3$	$p_1$

Wir werfen noch einen Blick auf die Tafel, die wir in Beispiel 3 aufgestellt haben. In der Algebra wird gezeigt, dass die Permutationen einer endlichen nicht-leeren Menge  $M$  mit der Hintereinanderausführung als definierender Operation eine Gruppe bilden.

Das bedeutet, dass die Permutationen und die Zusammensetzung der Permutationen einigen Forderungen, den sogenannten Gruppenaxiomen genügen.

Da wir den Begriff der Gruppe in diesem Buch noch brauchen werden, wollen wir den Wortlaut dieser Axiome für die von uns betrachtete Gruppe angeben.<sup>6</sup> Es wird gefordert:

1. Die Existenz und Eindeutigkeit des Produktes.

Das Produkt der Permutationen  $p_i, p_j$  von  $M$  (in dieser Reihenfolge) ist wiederum eine Permutation  $p_{ij}$  von  $M$ . Diese Produktpermutation  $p_{ij}$  ist durch  $p_i$  und  $p_j$  eindeutig bestimmt.

2. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes.

$p_i, p_j, p_k$  seien beliebige Permutationen der Menge  $M$ . Wir wollen mit  $p_{ij}$  die Permutation bezeichnen, die (in dieser Reihenfolge) aus den Permutationen  $p_i$  und  $p_j$  zusammengesetzt wurde, und in ähnlicher Weise sei  $p_{jk}$  die Permutation, die aus den Permutationen  $p_j$  und  $p_k$  (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzt wurde. Dann ist die aus den Permutationen  $p_{ij}$  und  $p_k$  zusammengesetzte Permutation gleich der aus den Permutationen  $p_i$  und  $p_{jk}$  zusammengesetzten Permutation.<sup>7</sup>

3. Die Existenz eines Einselementes.

Unter den Permutationen von  $M$  existiert eine Permutation  $p$  so, dass für jede Permutation  $p_i$  dieser Menge gilt: Durch Zusammensetzung der Permutationen  $p$  und  $p_i$  erhalten wir wieder die Permutation  $p_i$ . Diese Permutation  $p$  ist offenbar die identische Permutation. Die Permutation  $p$  heißt das Einselement der Gruppe.<sup>8</sup>

4. Die Existenz des inversen Elementes.

Zu jeder Permutation  $p_i$  von  $M$  existiert eine Permutation  $p'_i$  so, dass die Zusammensetzung der Permutationen  $p_i$  und  $p'_i$  gerade das Einselement der Gruppe ergibt (die identische Permutation).

Man kann leicht zeigen, dass  $p'_i$  die inverse Permutation zu  $p_i$  ist. Wenn wir in der gegebenen Gruppe zur Permutation  $p_i$  die Permutation  $p'_i$  bestimmen, so sagen wir, dass wir das inverse Element von  $p_i$  bilden<sup>9</sup>.

### Übungen

I. 8.1. Es wurde eine Tafel für die Multiplikation der Permutationen einer Menge von drei Elementen angegeben. Man benutze diese Tafel und suche alle Permutationen  $p_i$  auf, die mit sich selbst multipliziert die identische Permutation ergeben.

I. 8.2. Man suche in dieser Tafel zu jedem Element das inverse Element auf.

---

<sup>6</sup>Eine ausführlichere Behandlung findet der Leser in [2].

<sup>7</sup>Das Assoziativgesetz tritt auch in der Arithmetik auf, wo für die Multiplikation von Zahlen  $a, b, c$  gilt:  $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ .

<sup>8</sup>Die identische Permutation nimmt bei der Zusammensetzung der Permutationen die entsprechende Stellung ein wie die Zahl 1 bei der Multiplikation der Zahlen. Oft spricht man auch von einer Einheit der Gruppe.

<sup>9</sup>Hier liegt eine offensichtliche Analogie zu der Aufgabe vor, zu einer gegebenen Zahl  $x (\neq 0)$  eine Zahl  $x'$  so zu bestimmen, dass  $xx' = 1$  gilt.

## 2 Ungerichtete Graphen

### 2.1 Grundbegriffe aus der Graphentheorie

Das Wort "Graph" tritt in der Mathematik und im täglichen Leben häufig auf. So sagen wir beispielsweise im Schulunterricht, der Graph der reellen Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  sei eine Parabel; anderswo drücken wir mit einem Graphen den Verbrauch von Elektroenergie in den einzelnen Monaten des Jahres aus usw.

In dem vorliegenden Buch hat das Wort "Graph" jedoch eine andere Bedeutung.

Wir verstehen darunter ein bestimmtes Gebilde, das man durch eine Skizze in der Ebene oder im Raum gut veranschaulichen kann. Wir werden sehen, dass diese Gebilde - die Graphen - sehr oft in verschiedenen mathematischen Betrachtungen auftreten und es gestatten, viele Beziehungen, die auf den ersten Blick unübersichtlich zu sein scheinen, übersichtlich und anschaulich zu gestalten, und dass sie auch in vielen Anwendungen der Mathematik nützlich sind.

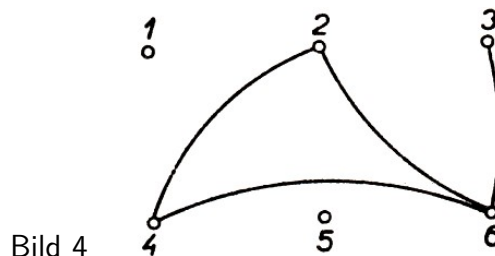


Bild 4

Beispiel 1.

Wir denken uns die Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  gegeben und wollen uns die Beziehung, nicht teilerfremd zu sein, zwischen den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 dieser Menge übersichtlich veranschaulichen. Diese Aufgabe können wir beispielsweise wie folgt lösen:

Den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ordnen wir Punkte in der Ebene zu (siehe Bild 4); außerdem sind in Bild 4 zwischen einigen Paaren dieser Punkte Bogen eingezeichnet. Durch eine Linie sind jeweils zwei solche Punkte verbunden, die zwei Zahlen der gegebenen Menge entsprechen, die nicht teilerfremd sind.

So haben wir ein Gebilde konstruiert, das aus vier Bogen und sechs Punkten besteht (die Punkte in Bild 4 sind durch kleine Kreise veranschaulicht).

Aus dem fertigen Bild ist bereits auf den ersten Blick ersichtlich, welche der in Betracht stehenden Zahlen zueinander teilerfremd sind und wieviele Paare teilerfremder Zahlen es in dieser Menge gibt.

Beispiel 2.

Am linken Ufer des Flusses steht ein Fährmann. Er soll mit seinem Kahn eine Ziege, einen Wolf und Heu über den Fluss setzen. Das Boot ist klein, und außer dem Fährmann passt nur einer der drei genannten Passagiere hinein. Kann der Fährmann Ziege, Wolf und Heu nacheinander über den Fluss setzen, wenn er am Ufer weder die Ziege mit dem Wolf noch die Ziege mit dem Heu allein lassen darf?

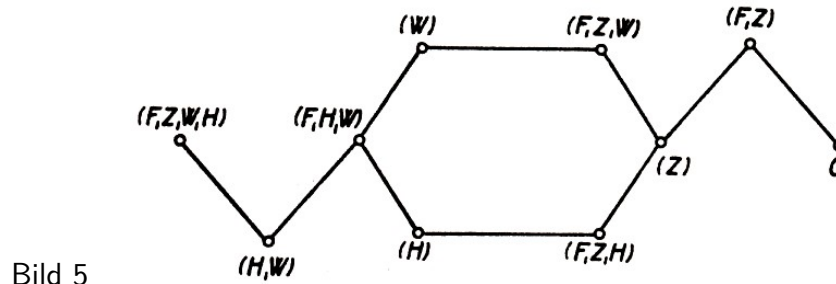
Diese alte Aufgabe können wir auf eine sehr anschauliche Weise lösen, die von D. König beschrieben worden ist.

Zuerst befindet sich die "Vierheit" Fährmann-Ziege-Wolf- Heu am linken Ufer, die wir kurz mit  $(F, Z, W, H)$  bezeichnen.

Weiter befinden sich am linken Ufer die zulässigen Dreierheiten  $(F, Z, H)$ ,  $(F, Z, W)$  und  $(F, H, W)$  sowie die Paare  $(F, Z)$  und  $(H, W)$ ; selbständig können hier  $(W)$ ,  $(Z)$  oder  $(H)$  bleiben.<sup>10</sup>

Den Endzustand, bei dem Fährmann, Ziege, Wolf und Heu schon am anderen Ufer sind, bezeichnen wir mit dem Buchstaben  $O$ . Wir haben also alle 10 möglichen Fälle beschrieben, die am linken Ufer des Flusses auftreten können.

Man kann jeden von diesen Fällen durch einen Punkt in der Ebene veranschaulichen, wie Bild 5 zeigt.



Wir haben hier einige Punkte durch eine Strecke verbunden, um damit auszudrücken, dass man mit einem einzigen Weg des Bootes von einem Zustand in den anderen übergehen kann. Unser Bild gibt schon auf sehr übersichtliche Weise Antwort auf die Frage, die wir oben gestellt haben:

Wir gehen streckenweise (in Strecken) von Punkt  $(F, Z, W, H)$  zu Punkt  $O$  über. Man sieht, dass der Fährmann zur Lösung seiner Aufgabe wenigstens siebenmal über den Fluss setzen muss.

In den beiden Beispielen, die hier angeführt wurden, treten zwei ähnliche Gebilde auf; betrachten wir sie darum etwas näher. Durch unsere Bilder ist eine bestimmte Menge von Punkten gegeben, die wir gewöhnlich mit dem Buchstaben  $U$  bezeichnen.

Außerdem wird in den Bildern von Bogen oder Strecken gesprochen, wobei uns Länge und Krümmung dieser Linien wenig interessieren.

Es interessiert uns jedoch, welche Elemente aus der Menge  $U$  durch diese Linien miteinander verbunden wurden. Jede Verbindungslinie entspricht zwei Elementen aus der Menge  $U$  oder ist eine bestimmte Veranschaulichung irgendeiner zweielementigen Untermenge der Menge  $U$ .

Auch hier können wir von der Menge aller Verbindungslinien in dem gegebenen Bild sprechen, und wir bezeichnen diese Menge in der Regel mit dem Buchstaben  $K$ . In der Graphentheorie hat sich für die Elemente der Menge  $U$  die Bezeichnung Knotenpunkte oder kurz Knoten und für die Elemente der Menge  $K$  die Bezeichnung Kanten eingebürgert.

In späteren Betrachtungen werden wir sehen, dass den Kanten mitunter auch eine ganz bestimmte Richtung zugeschrieben wird. Man spricht dann von gerichteten Kanten. Diesen Fall lassen wir jedoch vorläufig beiseite - die Kanten in unseren Betrachtungen sind ungerichtet, und wir machen diese Bemerkung an dieser Stelle nur deshalb, damit der Leser die Notwendigkeit der Bezeichnung "ungerichteter Graph" versteht.

Beim Zeichnen der Bilder lässt es sich mitunter nicht vermeiden, dass sich zwei Kanten (veranschaulicht durch Bogen, Strecken, gebrochene Linien usw.) in einem Bild in ihren "inneren"

<sup>10</sup>Am linken Ufer des Flusses ist beispielsweise nicht zulässig das Paar  $(F, W)$ , denn dann bliebe am rechten Ufer die Ziege mit dem Heu allein.

Punkten kreuzen. Da wir die Knoten in unseren Bildern stets durch kleine Kreise veranschaulichen, kann ein solchermaßen neu entstandener Schnittpunkt nicht zu Missverständnissen Anlass geben.

Wenn wir die Graphen durch räumliche Modelle veranschaulichen könnten, dann ließen sich solche Kantenschnittpunkte vermeiden. Jetzt können wir also schon zu einer genauen Definition des ungerichteten Graphen übergehen.

Es sei eine beliebige nicht-leere Menge  $U$  gegeben. Mit  $K_0$  bezeichnen wir die Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge  $U$ . Ist dann  $K$  eine beliebige Teilmenge der Menge  $K_0$ , so nennen wir das Paar  $[U, K]$  einen ungerichteten Graphen.<sup>11</sup>

Der Kürze wegen bezeichnen wir den ganzen Graphen gewöhnlich mit einem einzigen Buchstaben, den wir gegebenenfalls mit einem Index oder anderen Zeichen versehen können, so dass wir z. B. vom Graphen  $\mathcal{G}$  oder vom Graphen  $\mathcal{G}_1$ , vom Graphen  $\mathcal{G}^*$  und dergleichen sprechen. Wollen wir ausdrücken, dass ein Graph  $\mathcal{G}$  die Menge  $U$  als Menge seiner Knoten und die Menge  $K$  als Menge seiner Kanten hat, dann schreiben wir  $\mathcal{G} = [U, K]$ .

Die Elemente der Menge  $U$ , für die wir uns die Bezeichnung Knoten vorbehalten haben, bezeichnen wir in der Regel mit kleinen lateinischen Buchstaben, so dass der Graph  $\mathcal{G}$  beispielsweise die Knoten  $x, y_1, w^*$  und dgl. hat.

Wir wissen, dass die Kanten des Graphen eigentlich zweielementige Teilmengen der Menge  $U$  sind.

Dieser Umstand ermöglicht uns eine kurze und übersichtliche Bezeichnung der Kanten:

Eine Kante, die beispielsweise durch ein Paar verschiedener Knoten  $x$  und  $y$  bestimmt wird, müsste konsequent mit  $\{x, y\}$  bezeichnet werden. Eine solche Bezeichnung ist jedoch typographisch unnötig kompliziert, und darum bezeichnen wir sie einfach mit  $xy$ ; bei einer solchen Schreibweise ist allerdings die Reihenfolge der Buchstaben unwesentlich - man kann von der Kante  $xy$ , ebenso gut aber auch von der Kante  $yx$  sprechen.

Die Ausdrucksweise, die sich in der Graphentheorie eingebürgert hat, erinnert sehr an die Tatsachen, die man an den Bildern ablesen kann. So sagen wir beispielsweise, die Kante  $xy$  hat die Knoten  $x$  und  $y$  als ihre Endknoten oder der Knoten  $y$  inzidiert mit der Kante  $xy$  und dgl.

Einige Autoren lassen in ihren Betrachtungen auch einen Graphen zu, dessen Knotenmenge leer ist. Dann ist offenbar auch seine Kantenmenge leer; ein solcher Graph  $\mathcal{L}$  heißt leer. Wir können also schreiben  $\mathcal{L} = [\emptyset, \emptyset]$ . In unseren Erörterungen werden allerdings überwiegend Graphen mit einer nicht-leeren Knotenmenge auftreten; wir werden diese Tatsache darum nicht besonders betonen.

Wir werden es im Gegenteil immer als Ausnahme aufführen, wenn der leere Graph  $\mathcal{L}$  mit zugelassen ist. Ein anderes triviales Beispiel eines Graphen stellt der Graph  $\mathcal{G}_1$  dar, dessen Knotenmenge durch ein einziges Element  $x$  gebildet wird. Auch in diesem Falle ist die Kantenmenge leer. Es ist also  $\mathcal{G}_1 = [\{x\}, \emptyset]$ .

Wenn für einen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  speziell  $K$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge  $U$  ist, dann sagen wir,  $\mathcal{G}$  sei ein vollständiger Graph.

---

<sup>11</sup>Für unser ganzes Buch gilt folgende Abmachung: Wenn bei der Erläuterung keine Missverständnisse darüber auftreten können, um welche Graphenart es sich handelt, verzichten wir auf eine nähere Bezeichnung und sprechen nur von einem "Graphen".



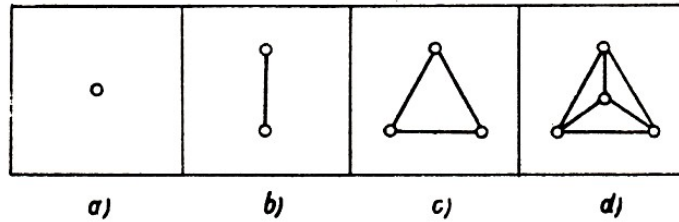


Bild 6

Beispiele für vollständige Graphen für  $|U| = 1$ ,  $|U| = 2$ ,  $|U| = 3$ ,  $|U| = 4$  sehen wir in Bild 6. Es seien Graphen  $\mathcal{G}_1 = [U, K_1]$  und  $\mathcal{G}_2 = [U, K_2]$  gegeben, die also die gemeinsame Knotenmenge  $U$  haben; es sei  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  und  $[U, K_1 \cup K_2]$  ein vollständiger Graph. Wir sagen dann, die Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  seien wechselseitig komplementär<sup>12</sup>, oder auch,  $\mathcal{G}_2$  sei der Komplementärgraph zu  $\mathcal{G}_1$ .

Wir wollen uns diesen Begriff in Bild 7 klarmachen, wo wir wechselseitig komplementäre Graphen mit vier Knoten dargestellt haben.

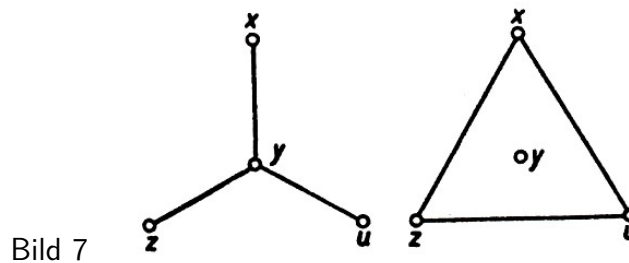


Bild 7

In den Graphen spielt die Endlichkeit oder die Unendlichkeit der Knotenmenge eine recht wichtige Rolle. Wenn in dem ungerichteten Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  die Menge  $U$  endlich ist, dann sagen wir,  $\mathcal{G}$  sei ein endlicher ungerichteter Graph.

Wenn die Menge  $U$  unendlich ist, dann heißt  $\mathcal{G}$  ein unendlicher ungerichteter Graph. Für unsere Betrachtungen haben namentlich die Graphen der ersteren Art besondere Bedeutung, während wir die unendlichen ungerichteten Graphen nur am Rande unserer Erläuterungen streifen.

Wenn zwei Graphen  $\mathcal{G}_1 = [U_1, K_1]$  und  $\mathcal{G}_2 = [U_2, K_2]$  gegeben sind, für die  $U_1 \cap U_2$  eine leere Menge ist, dann sagen wir,  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  seien disjunkte (elementfremde) Graphen.

Wenn von den Graphen  $\mathcal{G}_1 = [U_1, K_1]$ ,  $\mathcal{G}_2 = [U_2, K_2]$  sowohl  $U_1 = U_2$  als auch  $K_1 = K_2$  ist, dann sagen wir, die Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  sind einander gleich und schreiben  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ .

Gilt für die Graphen  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  nicht  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ , so heißen diese Graphen verschieden, und wir drücken dies durch  $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$  aus.

### Übungen

II. 1.1. Wieviele Kanten hat ein endlicher vollständiger Graph mit  $m$  Knoten?

II. 1.2. In einer Ebene seien  $n$  Kreislinien gegeben, die mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$  nummeriert seien. Wir wollen den Graphen  $\mathcal{G}_0 = [U, K]$  wie folgt definieren:

Es ist  $U = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , und es ist  $ij \in K$  genau dann, wenn die mit Zahlen  $i$  und  $j$  bezeichneten Kreislinien wenigstens einen Punkt gemeinsam haben.

In Bild 8 sind neun nummerierte Kreislinien veranschaulicht; man bilde den entsprechenden Graphen  $\mathcal{G}_0$ .

<sup>12</sup>Aus dem Lateinischen: complementum = Ergänzung.

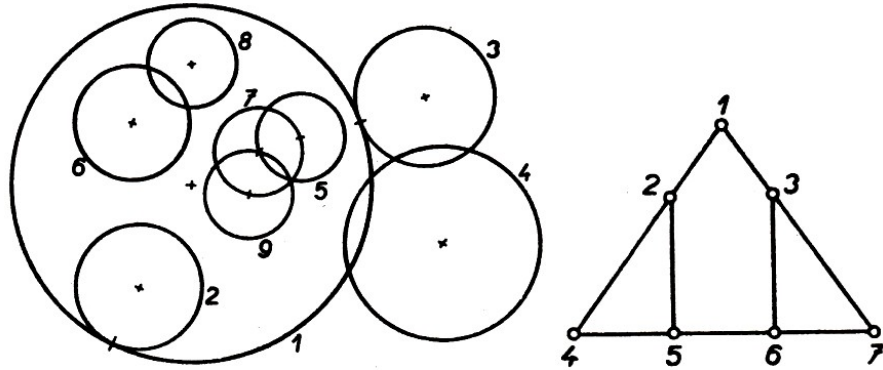


Bild 8,9

II. 1.8. In Bild 9 ist ein Graph angegeben, dessen Knoten mit den Ziffern 1,2, 3, ..., 7 nummeriert sind. Man zeige, dass dieser Graph das gegenseitige Schneiden von sieben Kreislinien in der Ebene beschreibt (im Sinne der Definition aus der vorhergehenden Aufgabe).

## 2.2 Knotengrade und ihre Eigenschaften

Wir wollen uns damit beschäftigen, wieviele Kanten eines gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  mit dem fest gewählten Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  inzidieren. Wenn endlich viele Kanten existieren, die mit dem Knoten  $x$  inzidieren, sagen wir, der Knoten  $x$  sei endlichen Grades.<sup>13</sup>

Ein Graph, bei dem jeder Knoten endlichen Grades ist, heißt kurz ein (ungerichteter) Graph endlichen Grades.

Wenn unendlich viele Kanten mit dem Knoten  $x$  inzidieren, so heißt der Knoten  $x$  von unendlichem Grad. Hat der gegebene Graph wenigstens einen Knoten von unendlichem Grad, so nennen wir ihn einen ungerichteten Graphen unendlichen Grades.

Nun betrachten wir die Knoten von endlichem Grad eingehender.

Wenn  $x$  ein Knoten endlichen Grades eines gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  ist, dann nennen wir die Anzahl der Kanten, die mit dem Knoten  $x$  inzidieren, den Grad des Knotens  $x$  (im gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$ ).

Beispiel 3. In Bild 10 ist ein endlicher Graph mit sechs Knoten angegeben: Der Knoten  $x$  hat den Grad 0, der Knoten  $y$  den Grad 1, der Knoten  $z$  den Grad 2, weiter gibt es noch drei Knoten vom Grad 3 - die Knoten  $u, v, w$ .

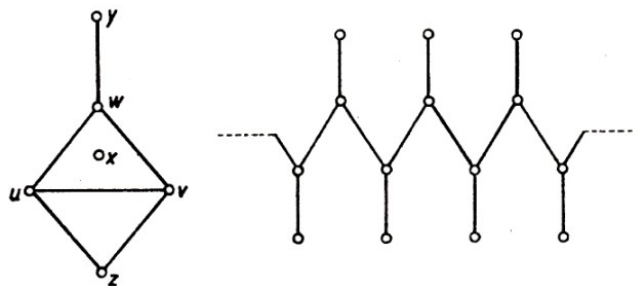


Bild 10,11

Beispiel 4. In Bild 11 ist ein unendlicher ungerichteter Graph dargestellt, der nur Knoten des Grades 1 und 3 hat.

Im rechten und im linken Teil des Bildes ist mit Punkten angedeutet, dass wir uns den Graphen auch in diesen Richtungen gezeichnet vorstellen sollen.

<sup>13</sup>In diesem Begriff ist also auch der Fall eingeschlossen, dass keine Kante mit dem Knoten  $x$  inzidiert.

Beispiel 5. Wir wollen den ungerichteten Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  betrachten, in dem  $U$  die Menge aller natürlichen Zahlen und  $K$  ähnlich definiert ist, wie wir es in Beispiel 1 getan haben: Sind  $x$  und  $y$  zwei Elemente der Menge  $U$ , dann gilt  $xy \in K$  genau dann, wenn der größte gemeinsame Teiler  $(x, y)$  größer als 1 ist.

Wir haben es hier mit einem unendlichen ungerichteten Graphen zu tun. Offenbar inzidiert der Knoten, welcher der natürlichen Zahl 1 entspricht, mit keiner Kante des Graphen  $\mathcal{G}$ , während jeder andere Knoten dieses Graphen mit unendlich vielen Kanten inzidiert. Ein Knoten unseres Graphen hat also den Grad 0, während alle anderen Knoten des Graphen von unendlichem Grade sind.

Die Knoten des Graphen, die den Grad 0 haben, werden gewöhnlich als isoliert bezeichnet. Manche Autoren schließen die Graphen mit isolierten Knoten aus ihren Erörterungen aus. Auf diesem Standpunkt steht z. B. auch das klassische Buch von D. König [15]. In den Betrachtungen, die wir in diesem Buche anstellen, ist jedoch eine solche Einschränkung nicht nötig, und wir werden deshalb stets auch Graphen mit isolierten Knoten zulassen.

Wir wollen nun zwei Sätze über endliche Graphen ableiten.

Satz: 1. Es sei ein endlicher Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  gegeben. Es seien  $u$  die Anzahl der Knoten,  $k$  die Anzahl der Kanten und  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_u$  die Grade der einzelnen Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$ . Dann gilt

$$\sum_{i=1}^u s_i = 2k$$

Beweis. Wir werden den Satz durch vollständige Induktion nach der Zahl  $k$  beweisen. Wenn  $k = 0$  ist, dann sind alle Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  isoliert, und die Behauptung des Satzes 1 ist offensichtlich richtig.

Wir wollen nun annehmen, die Behauptung von Satz 1 sei richtig für jeden Graphen, der  $k$  Kanten hat, und nehmen einen beliebigen Graphen  $\mathcal{G}^* = [U^*, K^*]$  an, der  $u$  Knoten und  $k + 1$  Kanten hat.

Die Grade seiner Knoten bezeichnen wir der Reihe nach mit  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_u^*$ . Wir wollen eine beliebige Kante  $xy \in K^*$  wählen und sie aus der Menge  $K^*$  beseitigen; nach der Beseitigung entstehe die Menge  $K_0$ .

Nun wollen wir auch den Graphen  $\mathcal{G}' = [U^*, K_0]$  betrachten. Der Grad des Knotens  $x$  im Graphen  $\mathcal{G}'$  ist um 1 niedriger als der Grad dieses Knotens im ursprünglichen Graphen  $\mathcal{G}^*$ , und dieselbe Behauptung gilt auch für den Knoten  $y$ .

Nach der Induktionsvoraussetzung ist also

$$\sum_{i=1}^u s_i^* - 2 = 2k$$

und folglich

$$\sum_{i=1}^u s_i^* = 2(k + 1)$$

Damit ist t ist der Beweis durch vollständige Induktion geführt.

Beim Beweis eines weiteren Satzes benötigen wir eine Bezeichnung, mit der wir uns jetzt vertraut machen wollen.

In einem endlichen Graphen existiert für jede ganze nichtnegative Zahl  $g$  immer eine endliche Anzahl von Knoten vom Grade  $g$ ; diese Anzahl bezeichnen wir mit  $\sigma_g$ . So ist beispielsweise in

dem Graphen, der in Bild 10 aufgezeichnet ist,  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = 3$ , und für  $g > 3$  gilt  $\sigma_g = 0$ .

Es wird uns die Summe  $\sum_{g=0}^{\infty} g\sigma_g$  interessieren, in der formal unendlich viele Zahlen zusammengezählt werden.

In jedem endlichen Graphen ist jedoch  $g\sigma_g$  nur für endlich viele  $g$  von 0 verschieden, so dass wir es hier in Wirklichkeit nur einer endlichen Summe zu tun haben. Die Schreibweise  $\sum_{g=0}^{\infty}$  behalten wir aus Bequemlichkeit bei, um nicht ausdrücken zu müssen, von welcher Zahl  $g$  an bereits alle Summanden gleich null sind.

Wir sehen leicht, dass gilt:

$$\sum_{g=0}^{\infty} g\sigma_g = \sum_{i=1}^u s_i \quad (1)$$

Satz 2. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eines endlichen Graphen ist immer eine gerade Zahl.

Beweis. Wenn wir uns an die Bezeichnung halten, die wir vereinbart haben, dann können wir die Anzahl der Knoten ungeraden Grades durch den Ausdruck

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}$$

bezeichnen.

Nach Satz 1 und nach Formel (1) gilt

$$\sum_{g=0}^{\infty} g\sigma_g = 2k$$

so dass wir für die Zahl  $L$

$$L = 2k - \sum_{j=0}^{\infty} 2j(\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1})$$

erhalten.

Auf der rechten Seite dieser Formel tritt offensichtlich eine gerade Zahl auf, so dass auch die Zahl  $L$  eine gerade Zahl ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

### Übungen

II. 2.1. Sieben Freunde, die in Urlaub fahren, vereinbarten, dass jeder von ihnen an drei von den übrigen sechs eine Ansichtskarte schicken sollte. Kann diese Korrespondenz so organisiert werden, dass jeder nur denjenigen Freunden schreibt, von denen er im Laufe des Urlaubs Ansichtskarten erhält?

II. 2.2. Man entscheide, ob ein Graph mit sechs Knoten existiert, deren Grade der Reihe nach 2, 3, 3, 4, 4, 4 sind.<sup>14</sup>

II. 2.3. Ist es möglich, dass in einem gegebenen endlichen Graphen mit wenigstens zwei Knoten niemals zwei Knoten den gleichen Grad haben?

<sup>14</sup>In der Literatur kann man Arbeiten finden, in denen folgende allgemeine Frage untersucht wird: Welche endliche Folge von natürlichen Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_u$  kann als Folge von Graden der Knoten eines Graphen angesehen werden. Eine von diesen Arbeiten wurde 1955 von V. Havel veröffentlicht (Casopis Pest. Mat. (80) 1955, No. 4, 477-480).

II. 2.4. Man entscheide, ob ein Graph endlichen Grades existiert, für den zwei Knoten niemals den gleichen Grad haben.

II. 2.5. Es ist eine endliche Menge  $N$  von  $n$  Elementen gegeben (wobei  $n > 1$  ist). Die Menge aller Untermengen der Menge  $N$  wollen wir als Menge der Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  wählen, wobei wir die Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$  wie folgt definieren:

Zwei Knoten von  $\mathcal{G}$  werden gerade dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Untermengen der Menge  $N$  elementfremd sind. Man bestimme die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$ .

### 2.3 Teilgraphen eines gegebenen Graphen

In der Mengenlehre werden in bekannter Weise die Teilmengen einer Menge definiert. Wie die Überschrift dieses Abschnittes schon zeigt, werden wir hier den entsprechenden Begriff für einen ungerichteten Graphen studieren.

Wir wollen annehmen, es seien Graphen  $\mathcal{G}_1 = [U_1, K_1]$  und  $\mathcal{G}_2 = [U_2, K_2]$  so gegeben, dass  $U_1 \subseteq U_2$  und zugleich  $K_1 \subseteq K_2$  ist. Wir sagen dann, der Graph  $\mathcal{G}_1$  sei ein Teilgraph des Graphen  $\mathcal{G}_2$ .

Wenn nicht gleichzeitig  $U_1 = U_2$  und  $K_1 = K_2$  ist, so nennen wir  $\mathcal{G}_1$  genauer einen echten Teilgraphen des Graphen  $\mathcal{G}_2$ .

Wir haben schon erläutert, wann wir zwei Graphen als verschieden ansehen. Wir wollen jetzt, da wir in einem weiteren Beispiel die verschiedenen Teilgraphen eines gegebenen Graphen untersuchen werden, diese Definition beachten.

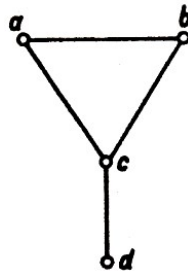


Bild 12

Beispiel 6. In Bild 12 ist ein Graph mit den vier Knoten  $a, b, c, d$  dargestellt. Wir wollen alle seine Teilgraphen bestimmen, die keinen isolierten Knoten besitzen.

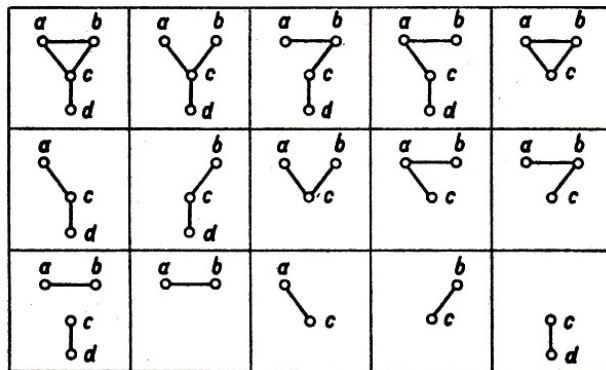


Bild 13

In dem gegebenen Graphen kann man insgesamt 15 Teilgraphen der geforderten Art bilden, wie Bild 13 zeigt.

Wenn wir in unseren Betrachtungen auch den leeren Graphen  $\mathcal{L}$  zuließen, dann hätte allerdings der Graph aus Bild 12 insgesamt 16 Teilgraphen ohne isolierte Knoten.

In jedem Graphen  $\mathcal{G}$  haben diejenigen Teilgraphen besondere Bedeutung, welche die gleiche Knotenmenge wie der Graph  $\mathcal{G}$  haben.

Wenn  $\mathcal{G} = [U, K]$  ein Graph und  $\mathcal{G}^* = [U, K^*]$  ein Teilgraph von  $\mathcal{G}$  ist, dann sagen wir, der Graph  $\mathcal{G}^*$  sei ein Faktor (oder auch ein Kantenteilgraph) des Graphen  $\mathcal{G}$ .

In dieser Bezeichnung ist die Literatur zur Graphentheorie nicht einig: So verwendet beispielsweise W.T. Tutte in [26] die Bezeichnung "Faktor". Im Russischen kann man bei manchen Autoren die Bezeichnungen "rebernyj graf" und "častičnyj graf" finden.

Beispiel 7. Wieviele verschiedene Faktoren hat der in Bild 12 dargestellte Graph?

Wir sehen ohne Schwierigkeiten ein, dass der betrachtete Graph 16 Faktoren besitzt, die in Bild 14 übersichtlich veranschaulicht sind.

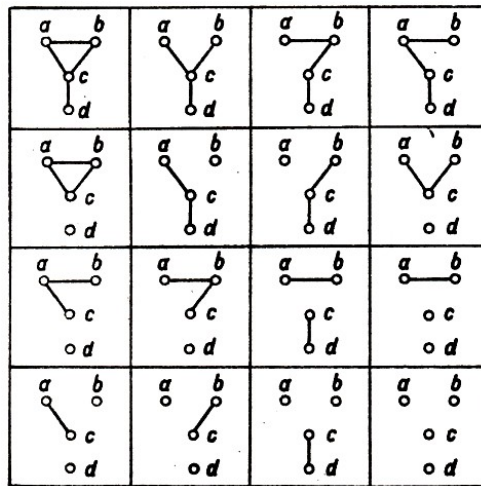


Bild 14

### Übungen

II. 3.1. Man bestimme für den in Bild 12 dargestellten Graphen alle Faktoren, die keinen isolierten Knoten besitzen.

II. 3.2. Man bestimme die Anzahl aller Faktoren eines endlichen vollständigen Graphen mit  $n$  Knoten.

## 2.4 Zusammenhang eines Graphen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit einem sehr anschaulichen Begriff beschäftigen - mit dem Zusammenhang eines Graphen. Bevor wir jedoch die genaue Definition des Zusammenhanges geben, müssen wir uns mit einem Hilfsbegriff bekannt machen.

Wir wollen wiederum annehmen, es sei irgendein (ungerichteter) Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  gegeben, in dem wir uns zwei nicht notwendig verschiedene Knoten  $x_0$  und  $x_k$  ausgewählt denken. Wenn man eine endliche Folge von Knoten und Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$  von der Form

$$x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n \tag{1}$$

bilden kann, dann nennt man diese Folge eine Verbindung<sup>15</sup> zwischen den Knoten  $x_0$  und  $x_n$ . Wir sagen auch:

<sup>15</sup>Hierfür ist in der deutschsprachigen Literatur auch das Wort Kantenfolge gebräuchlich.

Diese Verbindung beginnt im Knoten  $x_0$  und endet im Knoten  $x_n$  die weiteren in dieser Verbindung auftretenden Knoten heißen ihre inneren Knoten.

Die Zahl  $n$  hat eine sehr anschauliche Bedeutung; sie bezeichnet nämlich die Kantenanzahl in der betrachteten endlichen Folge. Der Kürze des Ausdrucks wegen sagen wir,  $n$  sei die Länge der angeführten Verbindung zwischen den Knoten  $x_0$  und  $x_n$ .

Beispiel 8. In dem Graphen, den wir in Bild 15 sehen, wählen wir die Knoten  $a$  und  $g$  aus. Eine der möglichen Verbindungen zwischen diesen beiden Knoten ist in Bild 15 durch verstärkte Linien gekennzeichnet; es ist dies die Folge  $a, ab, b, bc, c, cd, d, dh, h, hg, g$ , welche die Länge 5 hat.

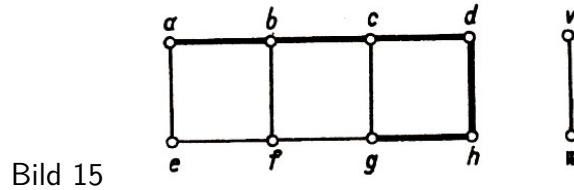


Bild 15

In unserem Graphen existiert jedoch beispielsweise keine Verbindung zwischen den Knoten  $a$  und  $w$ .

Der Leser wird folgendes selbst ohne Schwierigkeit einsehen:

Wenn zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  eines gegebenen Graphen irgendeine Verbindung existiert, dann existiert auch zwischen den Knoten  $y$  und  $x$  eine Verbindung. Dieses werden wir in unseren weiteren Betrachtungen oft anwenden.

Unsere Ausdrucksweise wird übersichtlicher, wenn wir für die Bezeichnung einer bestimmten Verbindung in einem gegebenen Graphen einen einzigen Buchstaben verwenden.

So bezeichnen wir z. B. die Verbindung

$$x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n$$

zwischen den Knoten  $x_0$  und  $x_n$  mit  $\mathbf{V}_1$  usw. Die Folge der Knoten und Kanten, aus denen sich eine Verbindung zusammensetzt, kann auch auf ein Element - einen einzigen Knoten des gegebenen Graphen - reduziert werden.

In diesem Falle sprechen wir von einer Verbindung der Länge 0. In jedem Graphen stellt also jeder seiner Knoten eine Verbindung der Länge 0 dar.

Wir wollen in einem gegebenen Graphen drei nicht notwendig verschiedene Knoten  $x, y, z$  wählen und annehmen, dass eine Verbindung  $\mathbf{V}_1$  zwischen  $x$  und  $y$  und eine Verbindung  $\mathbf{V}_2$  zwischen  $y$  und  $z$  existiert. Wenn  $\mathbf{V}_1$  die Form

$$x, xu_1, u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_m, u_my, y$$

und  $\mathbf{V}_2$  die Form

$$y, yv_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_n, v_nz, z$$

hat, dann können wir eine Verbindung zwischen  $x$  und  $z$  von folgender Form bilden:

$$x, xu_1, u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_m, u_my, y, yv_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_n, v_nz, z$$

Diese neue Verbindung bezeichnen wir der Kürze wegen mit  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$ , und wir sagen, dass sie durch Zusammensetzung der Verbindungen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  entstanden ist.

Man sieht, dass die Länge der Verbindung  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$  gleich der Summe der Längen der Verbindungen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  ist. Der Leser kann sich überlegen, dass man die Verbindung  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$  bilden kann, auch wenn beispielsweise die Verbindung  $\mathbf{V}_1$  die Länge 0 hat.

Beispiel 9. Betrachten wir wiederum den in Bild 15 dargestellten Graphen. Wir bestimmen alle Knoten  $x$  unseres Graphen, die so beschaffen sind, dass zwischen den Knoten  $a$  und  $x$  eine Verbindung

a) der Länge 1; b) der Länge 2 besteht.

a) Man kann nur zwei Verbindungen der Länge 1 bilden, die im Knoten  $a$  beginnen: zum einen die Verbindung  $a, ab, b$ , zum anderen die Verbindung  $a, ae, e$ . Hier kann  $x$  also entweder der Knoten  $b$  oder  $e$  sein.

b) Hier kommen folgende fünf Verbindungen in Betracht:

$a, ab, b, bc, c$ ;  $a, ab, b, ba, a$ ;  $a, ab, b, bf, f$ ;  $a, ae, e, ef, f$ ;  $a, ae, e, ea, a$

Für den Knoten  $x$  haben wir also drei Möglichkeiten: Entweder  $a$  oder  $c$  oder  $f$ .

Wir sehen leicht, dass die folgende Behauptung gilt: Wenn in einem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  zwischen zwei Knoten  $x$  und  $y$  irgendeine Verbindung der Länge  $l$  existiert, dann kann diese Verbindung so "verlängert" werden, dass eine neue Verbindung der Länge  $l + 2$  entsteht.

Wenn  $u, uy, y$  nämlich die letzten drei Elemente in unserer Verbindung der Länge  $l$  sind, dann entsteht durch Anfügen der weiteren vier Elemente  $yu, u, uy, y$  an diese Verbindung eine Verbindung der Länge  $l + 2$ .

Zwischen zwei Knoten in einem gegebenen Graphen existiert also entweder keine Verbindung, oder es existieren zwischen ihnen unendlich viele Verbindungen. Im zweiten Falle interessiert uns immer diejenige Verbindung, die die geringste Länge hat. Eine solche Verbindung existiert immer.

Wir werden hier jedoch nicht den Existenzbeweis führen. Wenn  $x$  und  $y$  Knoten sind, zwischen denen eine Verbindung existiert, so bezeichnen wir die Länge einer minimalen Verbindung mit  $\rho(x, y)$ .

Beispiel 10. Wir wissen bereits, dass in dem in Bild 15 dargestellten Graphen eine Verbindung zwischen den Knoten  $a$  und  $g$  besteht; wir wollen  $\rho(a, g)$  bestimmen. Wieviele Verbindungen zwischen  $a$  und  $g$  haben die Länge  $\rho(a, g)$ ?

Aus dem vorangegangenen Beispiel wissen wir, dass zwischen  $a$  und  $g$  weder eine Verbindung der Länge 1 noch eine Verbindung der Länge 2 besteht. Demgegenüber finden wir leicht eine Verbindung der Länge 3, z. B. die Verbindung  $a, ab, b, bc, c, cg, g$ .

Folglich ist  $\rho(a, g) = 3$ . Außer der Verbindung, die wir bereits angeführt haben, kann man jedoch zwischen  $a$  und  $g$  noch zwei weitere Verbindungen der Länge 3 angeben, nämlich einmal  $a, ab, b, bf, f, fg, g$ ; zum anderen  $a, ae, e, ef, f, fg, g$ .

Aus dem eben behandelten Beispiel ersehen wir: Für jedes Paar verschiedener Knoten  $x$  und  $y$ , zwischen denen eine Verbindung besteht, ist die Zahl  $\rho(x, y)$  stets eindeutig bestimmt; es kann in dem gegebenen Graphen jedoch mehrere Verbindungen zwischen  $x$  und  $y$  geben, die die Länge  $\rho(x, y)$  haben.

Wir wollen noch eine besondere Art von Verbindungen betrachten. Im Graphen  $\mathcal{G}$  möge eine Verbindung  $\mathbf{W}$  existieren, in der jeder Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  höchstens einmal auftritt. Dann heißt eine solche Verbindung  $\mathbf{W}$  ein Weg.



Der Leser sieht, dass die Verbindung zwischen den Knoten  $a$  und  $g$ , die wir in Bild 15 stark gezeichnet haben, ein Beispiel für einen Weg zwischen den genannten zwei Knoten darstellt. Es wird uns leicht fallen, nunmehr folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3. Im Graphen  $\mathcal{G}$  existiere zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  eine Verbindung. Dann gibt es in diesem Graphen zwischen  $x$  und  $y$  mindestens einen Weg.

Beweis. Wir suchen in dem Graphen  $\mathcal{G}$  zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  eine Verbindung aus, welche die Länge  $\rho(x, y)$  hat.

Wir wollen zeigen, dass diese Verbindung  $\mathbf{W}$  (mit minimaler Kantenzahl) bereits der gesuchte Weg ist. Wenn nämlich irgendein Knoten  $w$  unseres Graphen in  $\mathbf{W}$  wenigstens zweimal aufträte, könnten wir damit  $\mathbf{W}$  in drei Teile einteilen: den Teil  $\mathbf{W}_1$  (zwischen  $x$  und  $w$ ), den Teil  $\mathbf{W}_2$  (zwischen  $w$  und  $w$ ) und den Teil  $\mathbf{W}_3$  (zwischen  $w$  und  $y$ ).

Die Zusammensetzung  $(\mathbf{W}_1; \mathbf{W}_3)$  der Verbindungen  $\mathbf{W}_1$  und  $\mathbf{W}_3$  hätte dann offensichtlich eine geringere Länge als  $\rho(x, y)$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition der Zahl  $\rho(x, y)$ , und der Beweis des Satzes ist damit erbracht.

Nun können wir an die Definition des zusammenhängenden Graphen gehen. Ein Graph  $\mathcal{G}$  heißt zusammenhängend, wenn zwischen jeweils zwei seiner Knoten  $x$  und  $y$  wenigstens eine Verbindung existiert.

In Übereinstimmung mit dieser Definition betrachten wir auch den Graphen  $\mathcal{G} = [\{u\}, \emptyset]$  als zusammenhängend. In Bild 12 ist ein zusammenhängender Graph angegeben, während der Graph in Bild 15 offensichtlich nicht zusammenhängend ist.

Einen sehr anschaulichen Sinn hat der Satz, den wir im folgenden aussprechen und beweisen.

Satz 4. Es sei ein zusammenhängender Graph  $\mathcal{G}$  und in ihm ein Knoten  $x$  gegeben, der 1. Grades ist. Wenn wir aus dem Graphen  $\mathcal{G}$  den Knoten  $x$  und die mit ihm inzidente Kante  $xy$  entfernen, erhalten wir einen Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$ , der gleichfalls zusammenhängend ist.

Beweis. In dem Graphen  $\mathcal{G}$  wollen wir zwei nicht notwendig verschiedene Knoten  $v$  und  $w$  auswählen, die sich beide vom Knoten  $x$  unterscheiden. Diese Auswahl kann man mit Sicherheit vornehmen, denn  $\mathcal{G}$  enthält wenigstens zwei Knoten.

Da  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, existiert zwischen  $v$  und  $w$  eine bestimmte Verbindung. Nach dem vorangegangenen Satz wissen wir, dass zwischen den genannten Knoten auch ein Weg  $\mathbf{W}$  existiert. Wenn  $x$  zu  $\mathbf{W}$  gehören würde, ginge ihm hier die Kante  $yx$  voraus, und  $xy$  würde folgen. Der Knoten  $y$  würde also mindestens zweimal auf  $\mathbf{W}$  liegen; dies widerspricht jedoch der Definition des Weges.

Aus der bisherigen Betrachtung ist ersichtlich, dass der gesamte Weg  $\mathbf{W}$  zu dem Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$  gehört. Da  $v$  und  $w$  als beliebige Knoten des Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$ , ausgewählt waren, ersehen wir daraus, dass der Teilgraph  $\mathcal{G}_1$  zusammenhängend ist. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

### Übungen

II. 4.1. Es sei  $\mathcal{G}_1$  ein Faktor eines Graphen  $\mathcal{G}_2$ . Ist  $\mathcal{G}_1$  ein zusammenhängender Graph, so ist auch  $\mathcal{G}_2$  ein zusammenhängender Graph. Man beweise das!

II. 4.2.  $\mathcal{G}$  sei ein endlicher vollständiger Graph mit  $n$  Knoten ( $n > 2$ ). Man wähle in  $\mathcal{G}$  zwei Knoten  $x$  und  $y$  aus und bestimme die Anzahl aller Wege im Graphen  $\mathcal{G}$ , die in  $x$  beginnen und in  $y$  enden.

## 2.5 Komponenten eines Graphen

Wir wollen wieder von einem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  ausgehen, in dem wir einen bestimmten Knoten  $x$  auswählen.

Unter der zum Knoten  $x$  gehörigen Komponente<sup>16</sup> des Graphen  $\mathcal{G}$  verstehen wir den wie folgt definierten Teilgraphen  $\mathcal{G}^{(x)}$  von  $\mathcal{G}$ :

Zum Graphen  $\mathcal{G}^{(x)}$  gehören alle die Knoten und Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$ , die mindestens einer Verbindung im Graphen  $\mathcal{G}$  angehören, die in dem Knoten  $x$  beginnt<sup>17</sup>.

Es ist allerdings möglich, dass in  $\mathcal{G}$  nur eine Verbindung (der Länge 0) existiert, die im Knoten  $x$  beginnt. In diesem Falle ist  $\mathcal{G}^{(x)} = [\{x\}, \emptyset]$ , und unsere Komponente enthält einen einzigen isolierten Knoten  $x$  und keine Kante.

Beispiel 11. In dem Graphen, der in Bild 15 dargestellt ist, wählen wir den Knoten  $a$  und bilden die Komponente, die zum Knoten  $a$  gehört.

Die betrachtete Komponente setzt sich aus den Knoten  $a, b, c, d, e, f, g, h$  und aus zehn Kanten zwischen diesen Knoten zusammen, wie aus Bild 15 ersichtlich ist.

In den weiteren Erläuterungen formulieren und beweisen wir einen Satz, der einen sehr anschaulichen Inhalt hat.

Beim Beweis des Satzes können wir uns allerdings nicht nur auf die Anschauung stützen, sondern müssen von den schon angeführten Definitionen ausgehen. Wir empfehlen dem Leser, sich bei der Lektüre des Beweises eine Skizze anzufertigen. Die Skizze kann zwar nur eine der möglichen Situationen erfassen, erleichtert aber das Verständnis des Beweises sehr.

Satz 5. In dem Graphen  $\mathcal{G}$  wählen wir zwei Knoten  $x$  und  $z$  aus und bilden sowohl die Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$ , die zum Knoten  $x$  gehört, als auch die Komponente  $\mathcal{G}^{(z)}$ , die zum Knoten  $z$  gehört. Dann sind die Komponenten  $\mathcal{G}^{(x)}$  und  $\mathcal{G}^{(z)}$  entweder zwei disjunkte Graphen, oder  $\mathcal{G}^{(x)}$  ist gleich  $\mathcal{G}^{(z)}$ .

Beweis. Wenn  $\mathcal{G}^{(x)}$  und  $\mathcal{G}^{(z)}$  disjunkte Graphen sind, dann sind wir mit dem Beweis fertig. Wir wollen also annehmen, dass ein Knoten  $y$  existiert, der sowohl zur Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$  als auch zur Komponente  $\mathcal{G}^{(z)}$  gehört, und beweisen, dass dann  $\mathcal{G}^{(x)} = \mathcal{G}^{(z)}$  ist.

Wir wählen dazu einen beliebigen Knoten  $u$  (bzw. eine beliebige Kante  $vw$ ) der Komponente  $\mathcal{G}^{(z)}$  und zeigen, dass dieser Knoten (bzw. die Kante) auch zu  $\mathcal{G}^{(x)}$  gehört.

Im Graphen  $\mathcal{G}$  kann man eine Verbindung  $\mathbf{V}$  bilden, die im Knoten  $z$  beginnt und die den gewählten Knoten  $u$  (bzw. die Kante  $vw$ ) enthält. Wir bezeichnen mit  $\mathbf{V}_1$  eine Verbindung zwischen  $x$  und  $y$ , mit  $\mathbf{V}_2$  eine Verbindung zwischen  $y$  und  $z$ .

Die Verbindung  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{V}_3$ ; diese ist eine Verbindung zwischen  $x$  und  $z$ . Die Verbindung  $(\mathbf{V}_3; \mathbf{V})$  beginnt, wie man sieht, in  $x$  und enthält den Knoten  $u$  (bzw. die Kante  $vw$ ).

Daraus folgt, dass  $u$  (bzw.  $vw$ ) zur Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$  gehören.

Wir haben noch die Frage zu erörtern, ob jeder Knoten (jede Kante) der Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$  auch zu  $\mathcal{G}^{(z)}$  gehört. Es ist jedoch uns überlassen, welche der zur Betrachtung stehenden Komponenten wir mit  $\mathcal{G}^{(x)}$  und welche wir mit  $\mathcal{G}^{(z)}$  bezeichnen.

<sup>16</sup>Das Wort "Komponente" stammt aus dem Lateinischen (compono = ich setze zusammen).

<sup>17</sup>Wir pflegen auch kurz zu sagen,  $\mathcal{G}^{(x)}$  sei der maximale zusammenhängende Teilgraph des Graphen  $\mathcal{G}$ , der  $x$  als Knoten enthält. Mit dem Wort "maximal" bezeichnen wir hier den Umstand, dass  $\mathcal{G}^{(x)}$  kein echter Teilgraph eines zusammenhängenden Teilgraphen des Graphen  $\mathcal{G}$  ist.

Wenn wir uns also vorstellen, dass wir die Bezeichnung der Komponenten geändert haben, erhalten wir damit gleich das Ergebnis, dass jeder Knoten (jede Kante) aus  $\mathcal{G}^{(x)}$  zu  $\mathcal{G}^{(z)}$  gehört. Es ist also  $\mathcal{G}^{(x)} = \mathcal{G}^{(z)}$ , und der Beweis ist damit geliefert.

Bei der Definition der Komponente haben wir diesen Begriff auf einen bestimmten Knoten  $x$  bezogen. Wählen wir jedoch in einer Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$  einen weiteren Knoten  $x_1$ , und bilden wir die Komponente, die zum Knoten  $x_1$  gehört, dann erhalten wir erneut die Komponente  $\mathcal{G}^{(x)}$  - wie aus Satz 5 hervorgeht.

Der Knoten, von dem wir bei der Definition der Komponente ausgegangen sind, spielt also keine so wichtige Rolle, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte. Wenn es nicht unbedingt erforderlich ist, brauchen wir also bei den weiteren Erläuterungen nicht immer anzuführen, zu welchem von seinen Knoten die betrachtete Komponente gehört.

Die Komponenten des gegebenen Graphen stellen einen sehr wichtigen und sehr anschaulichen Typ eines Teilgraphen dar. Es lässt sich leicht beweisen, dass der zusammenhängende Graph  $\mathcal{G}$  eine einzige Komponente hat, nämlich den ganzen Graphen  $\mathcal{G}$ .

Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  kein zusammenhängender Graph ist, dann setzt sich  $\mathcal{G}$  wenigstens aus zwei Komponenten zusammen.

Jeder endliche Graph hat endlich viele Komponenten, während der unendliche Graph endlich oder unendlich viele Komponenten haben kann. Alle diese Behauptungen könnten wir exakt beweisen, des beschränkten Umfangs dieses Buches wegen sehen wir jedoch davon ab.

Dem Leser, der beim Studium der Mathematik schon den metrischen Räumen begegnet ist, kommt sicher die Symbolik  $\rho(a, b)$  bekannt vor, die wir für die Länge des kürzesten Weges eingeführt haben. Wir wollen uns damit etwas näher beschäftigen.

In der Mathematik treten oft Mengen auf, in denen die Entfernung oder die Abweichung zwischen zwei beliebigen Elementen definiert wird. In der ebenen analytischen Geometrie ist z. B. die Entfernung der Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  durch den Ausdruck

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben; die Entfernung zwischen zwei Städten in unserer Republik können wir auch dadurch festlegen, dass wir den Fahrpreis angeben, der für eine Eisenbahnreise von der einen Stadt nach der anderen zu bezahlen ist. Auf welche Weise wird der Begriff der Entfernung in der Mathematik studiert?

Es sei eine nicht-leere Menge  $P$  gegeben sowie eine Funktion  $\rho$ , die für jedes  $x \in P$  und jedes  $y \in P$  eine reelle Zahl  $\rho(x, y)$  so bestimmt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jedes  $x \in P$  gilt  $\rho(x, x) = 0$ .
2. Wenn  $x \in P, y \in P, x \neq y$  ist, dann ist  $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$ .
3. Wenn  $x \in P, y \in P, z \in P$  ist, dann ist  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Wir nennen die Funktion  $\rho$  dann eine Metrik in der Menge  $P$ ; die Menge  $P$  und die Funktion  $\rho$  zusammen bezeichnen wir als metrischen Raum.

Die Elemente eines metrischen Raumes heißen gewöhnlich Punkte. Ein metrischer Raum ist also z. B. die Ebene, wenn die Metrik durch die oben angegebene Formel gegeben ist, oder die Menge aller Städte in unserer Republik, wenn die Metrik beispielsweise durch den, Eisenbahnfahrpreis bestimmt wird usw.

Uns wird hier das Beispiel eines metrischen Raumes interessieren, den wir wie folgt bilden: Wir nehmen einen beliebigen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  an; für seine Knoten  $x, y$  definieren wir  $\rho(x, y)$  als die Länge der kürzesten Verbindung zwischen  $x$  und  $y$  (wie es übrigens bereits in den obenstehenden Betrachtungen eingeführt wurde). Dann ist die Funktion  $\rho$  eine Metrik in der Knotenmenge des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Um das einzusehen, genügt es, alle drei Bedingungen in der Definition einer Metrik zu prüfen. Die erste Bedingung ist erfüllt; denn für jeden Knoten  $x$  ist unter allen Verbindungen, die in  $x$  beginnen und enden, die kürzeste Verbindung diejenige der Länge 0.

Auch die zweite Bedingung ist erfüllt; denn für je zwei Knoten  $x, y$  ist  $\rho(x, y)$  eine natürliche Zahl, und die Beziehung  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  ist ebenfalls offensichtlich. Betrachten wir nun die dritte Bedingung, die mitunter als Dreiecksungleichung bezeichnet wird.

Wir wollen mit  $\mathbf{V}_1$  eine Verbindung zwischen  $x$  und  $y$  von der Länge  $\rho(x, y)$  bezeichnen und mit  $\mathbf{V}_2$  eine Verbindung zwischen  $y$  und  $z$  von der Länge  $\rho(y, z)$ . Die Verbindung  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$  beginnt in  $x$ , endet in  $z$  und hat offensichtlich die Länge

$$\rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Wenn  $(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2)$  eine kürzeste Verbindung zwischen  $x$  und  $z$  ist, dann gilt

$$\rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Im entgegengesetzten Falle ist die Ungleichung

$$\rho(x, z) < \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

erfüllt. Die Dreiecksungleichung ist damit bewiesen.

Insgesamt haben wir festgestellt, dass die Knotenmenge des zusammenhängenden Graphen zusammen mit der Funktion  $\rho$  einen metrischen Raum bildet. Wir wollen allerdings noch bemerken, dass die Metrik hier nur ganze nichtnegative Werte annimmt.

In einem zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  kann es mitunter geschehen, dass eine natürliche Zahl  $m$  so existiert, dass für zwei beliebige Knoten  $x, y$  unseres Graphen  $\rho(x, y) < m$  gilt.

In diesem Falle nimmt die Metrik nur endlich viele Werte an, und man kann den größten von ihnen auswählen; dieser maximale Wert heißt der Durchmesser des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Man sieht sofort, dass von einem Durchmesser gesprochen werden kann, wenn  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph ist. Wenn  $\mathcal{G}$  nicht endlich ist, dann existiert entweder ein Durchmesser des Graphen (nach der obigen Definition), oder die Metrik  $\rho$  nimmt unendlich viele Werte an. In diesem zweiten Falle sagen wir auch, der betrachtete Graph habe einen unendlichen Durchmesser. Diesen Begriffen begegnen wir noch in den Übungen.

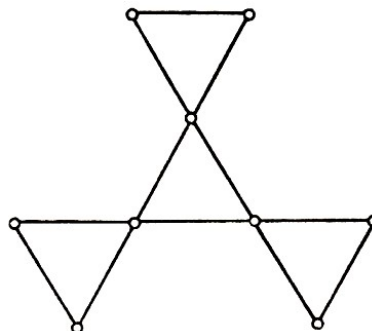


Bild 16

Übungen

II. 5.1. Wenn  $\mathcal{G}^{(x)}$  eine Komponente des Graphen  $\mathcal{G}$  ist, dann ist  $\mathcal{G}^{(x)}$  ein zusammenhängender Graph. Man beweise das!

II. 5.2. Man bestimme den Durchmesser eines vollständigen Graphen.

II. 5.3. Man bestimme den Durchmesser des in Bild 16 dargestellten Graphen.

II. 5.4. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen zusammenhängenden Graphen an, dessen Durchmesser unendlich ist.

### 2.6 Reguläre Graphen

Es kann bei einem Graphen geschehen, dass alle seine Knoten denselben Grad haben, der gleich der Zahl  $g$  ist.

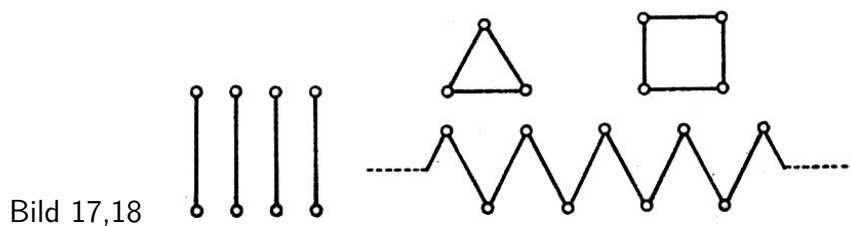


Bild 17,18

Einen solchen Graphen bezeichnet man als regulären Graphen  $g$ -ten Grades. Der Graph  $\mathcal{G} = [U, \emptyset]$  ist ein regulärer Graph nullten Grades. Dieser Fall ist für unsere weiteren Betrachtungen, im ganzen gesehen, ohne Interesse, und auch die regulären Graphen ersten Grades sind so übersichtlich, dass wir uns hier nicht eingehender über sie zu äußern brauchen.

Ein Beispiel eines regulären Graphen ersten Grades sehen wir in Bild 17.

Etwas komplizierter ist schon der Fall  $g = 2$ . Ein Beispiel eines unendlichen regulären Graphen zweiten Grades ist in Bild 18 gegeben. Der dargestellte Graph besteht aus drei Komponenten: eine enthält drei Knoten, die zweite vier Knoten, und die dritte hat unendlich viele Knoten.

Ein zusammenhängender endlicher regulärer Graph zweiten Grades heißt ein Kreis. Man sieht, dass z. B. zwei Komponenten des Graphen in Bild 18 Kreise sind, während die dritte Komponente ein unendlicher Graph ist, also hier kein Kreis vorliegt.

Die Zahl der Knoten, aus denen sich ein bestimmter Kreis zusammensetzt, nennen wir die Länge des Kreises. Es ist klar, dass kein Kreis der Länge 1 oder 2 existiert; es existieren jedoch Kreise der Länge 3, 4, 5, 6 ...

Den Kreis der Länge 3 bezeichnen manche Autoren auch als Dreieck, den Kreis der Länge 4 als Viereck usw.

Wir wollen nun endliche reguläre Graphen ungeraden Grades betrachten. Mit Leichtigkeit lässt sich folgender Satz beweisen:

**Satz 6.** Die Anzahl der Knoten eines endlichen regulären Graphen ungeraden Grades ist immer eine gerade Zahl.

**Beweis.** Nach Satz 2 ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in jedem endlichen Graphen stets eine gerade Zahl. In unserem Falle sind alle Knoten des Graphen ungeraden Grades, und daraus folgt die Behauptung unseres Satzes.

Eine Reihe interessanter Eigenschaften haben die regulären Graphen dritten Grades. Wir wollen

uns hier auf die endlichen Graphen beschränken. Nach dem vorhergehenden Satz hat jeder dieser Graphen eine gerade Knotenzahl.

Es ist gleich zu sehen, dass kein regulärer Graph dritten Grades existiert, der nur zwei Knoten hat. Bild 19 zeigt uns den Fall eines Graphen mit vier Knoten.

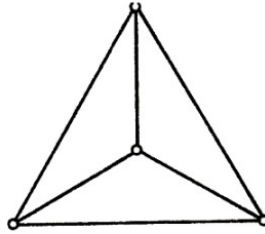


Bild 19

Eine weitere Information über endliche reguläre Graphen dritten Grades gibt uns folgender Satz:

Satz 7. Es sei eine gerade natürliche Zahl  $m \geq 4$  gegeben, Dann existiert ein regulärer Graph dritten Grades  $\mathcal{G}_m = [U_m, K_M]$  so, dass  $|U_m| = m$  ist.

Beweis. Wir werden den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion führen. Für  $m = 4$  ist nach Bild 19 die Existenz eines Graphen  $\mathcal{G}_m$  klar.

Wir wollen annehmen, dass wir die Existenz eines Graphen  $\mathcal{G}_m$  bereits für eine bestimmte gerade natürliche Zahl  $m$  bewiesen haben. Wir wollen nun einen Graphen  $\mathcal{G}_{m+2} = [U_{m+2}, K_{m+2}]$  bilden.

Die Konstruktion des Graphen  $\mathcal{G}_{m+2}$  beschreiben wir dadurch, dass wir vom Graphen  $\mathcal{G}_m$  ausgehen und wie folgt verfahren: In  $\mathcal{G}_m$  wählen wir einen gewissen Knoten  $x$  mit dem die drei Kanten  $xy, xz, xt$  inzidieren. Aus der Menge  $U_m$  lassen wir den Knoten  $x$  aus und fügen dem entstandenen Teil die drei anderen Knoten  $x_1, x_2, x_3$  hinzu; so entsteht die Menge  $U_{m+2}$ , die offensichtlich  $m + 2$  Elemente hat.

Aus der Menge  $K_m$  entfernen wir zugleich die Kanten  $xy, xz, xt$  und fügen folgende sechs Kanten an:  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1y, x_2z$  und  $x_3t$ . So entsteht die Menge  $K_{m+2}$ .

Der so gewonnene Graph  $\mathcal{G}_{m+2} = [U_{m+2}, K_{m+2}]$  ist offensichtlich ein regulärer Graph dritten Grades und enthält  $m + 2$  Knoten. Damit ist unser Satz durch vollständige Induktion bewiesen.

Die Bedeutung der regulären Graphen wird noch in den folgenden Betrachtungen erläutert, wenn wir die regulären Faktoren des gegebenen Graphen studieren werden.

Übungen II. 6.1. Man bestimme alle Kreise, die Teilgraph des Graphen aus Bild 19 sind!

II. 6.2. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen zusammenhängenden regulären Graphen dritten Grades an!

II. 6.3. Im Raum ist der Würfel  $ABCD A' B' C' D'$  gegeben. Seine Ecken können wir als die Knoten eines bestimmten Graphen betrachten, wobei die Kanten des Graphen die Kanten des Würfels darstellen.

Man stelle diesen Graphen auf die übliche Weise in der Ebene dar und zeige, dass dies ein regulärer Graph dritten Grades ist. Man bestimme seinen Durchmesser!

II. 6.4. Im Raum ist ein reguläres Oktaeder gegeben. Seine Ecken können wir als die Knoten eines Graphen betrachten, wobei die Kanten des Graphen die Kanten des Oktaeders darstellen.

Man stelle diesen Graphen auf die übliche Weise in der Ebene dar und zeige, dass dies ein regulärer Graph vierten Grades ist. Man bestimme seinen Durchmesser!

II. 6.5.  $\mathcal{G} = [U, K]$  sei ein endlicher regulärer Graph  $g$ -ten Grades; es ist zu beweisen, dass dann  $2|K| = g|U|$  gilt.

II. 6.6. Man bestimme, wieviele verschiedene Kreise in einem endlichen vollständigen Graphen mit  $n$  Knoten existieren ( $n > 3$ ).

## 2.7 Bäume und Gerüste eines Graphen

Der Begriff des Kreises, dem wir im vorangegangenen Kapitel begegnet sind, spielt in der Graphentheorie eine ziemlich bedeutende Rolle. In Bild 20 sehen wir ein Beispiel für einen Graphen, der keinen Kreis als Teilgraphen enthält.

Die Graphen dieser Art haben eine Reihe interessanter und wichtiger Eigenschaften, und deshalb machen wir uns mit ihnen in diesem Kapitel etwas näher bekannt.

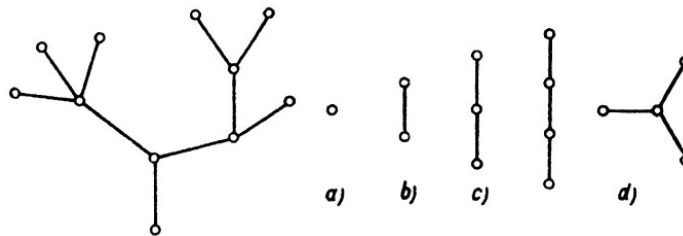


Bild 20, 21a,b,c,d

Im vorigen Jahrhundert haben besonders A. Cayley, G. Kirchhoff und G. K. Ch. Staudt diese Graphen studiert. Im Jahre 1847 stießen Kirchhoff und Staudt gleichzeitig auf sie, wenn auch auf verschiedenen Wegen: der erste bei physikalischen Untersuchungen über die Leitung des elektrischen Stromes, der zweite bei mathematischen Betrachtungen in Zusammenhang mit dem sogenannten Eulerschen Polyedersatz.

Unabhängig von beiden untersuchte A. Cayley ab 1857 diese Gebilde; denn sie stehen in engem Zusammenhang mit einigen Strukturformeln in der organischen Chemie.

Ein endlicher zusammenhängender Graph, der als Teilgraphen keinen Kreis enthält, heißt ein Baum. Diese Bezeichnung ist wirklich sehr anschaulich, denn die Skizze dieses Graphen erinnert mitunter etwas an das Bild eines Baumes.

Beispiel 12. Wir wollen einen Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  veranschaulichen, für den a)  $|U| = 1$ ; b)  $|U| = 2$ ; c)  $|U| = 3$ ; d)  $|U| = 4$  ist.

a) Der Baum, in dem  $|U| = 1$  ist, wird in Bild 21a gezeigt.

Wir wissen bereits, dass manche Autoren (z. B. D. König) bei den Graphen die Existenz isolierter Knoten nicht zulassen. Wenn wir uns diesem Standpunkt anschließen würden, müssten wir auch den Baum, in dem  $|U| = 1$  ist, aus unseren Betrachtungen ausschließen. Diese Einschränkung erscheint jedoch aus unserer Sicht überflüssig.

b) Den Fall  $|U| = 2$  sehen wir in Bild 21b. Dieser Baum weist eine einzige Kante auf.

c) Der Fall  $|U| = 3$  ist in Bild 21c dargestellt.

d) Für  $|U| = 4$  ist die Situation schon etwas komplizierter. In Bild 21d sehen wir links einen Baum, der zwei Knoten 1. Grades und zwei-Knoten 2. Grades hat, während das Bild 21d rechts einen Baum mit drei Knoten 1. Grades und einem Knoten 3. Grades zeigt.

Satz 8. Es sei ein Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  gegeben, wobei  $|K| \geq 1$  ist. Dann existieren in  $\mathcal{B}$  mindestens zwei Knoten, die 1. Grades sind.

Beweis. Die Länge jedes Weges im Graphen  $\mathcal{B}$  ist offenbar höchstens gleich der Zahl  $|K|$ . Wir wollen in  $\mathcal{B}$  einen Weg von größter Länge aussuchen und ihn mit  $\mathbf{W}_{\max}$  und seine Länge mit  $l_{\max}$  bezeichnen.

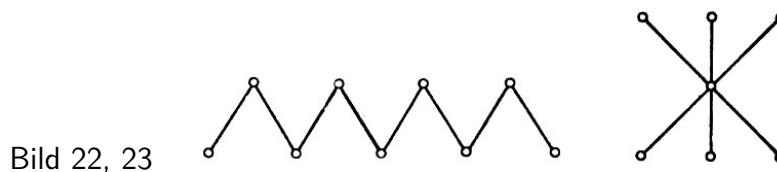
$\mathbf{W}_{\max}$  beginne in dem Knoten  $x$  und ende im Knoten  $y$ . Da  $\mathcal{B}$  wenigstens eine Kante enthält, gilt  $l_{\max} > 0$ , und die Knoten  $x$  und  $y$  sind verschieden.

Wir wollen noch beweisen, dass diese beiden Knoten vom 1. Grade sind. Offenbar genügt es, dies z. B. nur vom Knoten  $x$  zu beweisen; den Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen an, es sei  $x$  mindestens vom 2. Grade; dann existiert eine Kante  $wx$ , die nicht zu  $\mathbf{W}_{\max}$  gehört.

Der Knoten  $w$  kann nicht zu  $\mathbf{W}_{\max}$  gehören, denn dann enthielte  $\mathcal{B}$  einen Kreis. Den Weg  $w, wx, x$ , wollen wir kurz mit  $\mathbf{W}$  bezeichnen und den Weg  $(\mathbf{W}; \mathbf{W}_{\max})$  bilden. Seine Länge beträgt  $l_{\max} + 1$ .

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Wahl der Zahl  $l_{\max}$ . Damit ist der Beweis vollendet.

Der Satz, den wir eben bewiesen haben, sagt uns, dass jeder Baum mit wenigstens einer Kante mindestens zwei Knoten 1. Grades hat. Wir können leicht einen Baum konstruieren, der genau zwei Knoten 1. Grades hat. Einen solchen Baum (den man mitunter als "Schlange" bezeichnet) sehen wir in Bild 22 dargestellt.



Wir können uns auch die Frage vorlegen, wieviele Knoten 1. Grades in einem gegebenen Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  maximal existieren können.

Für  $|U| = 1$  existiert keiner, für  $|U| = 2$  existieren zwei und für  $|U| > 3$  schließlich existieren maximal  $|U| - 1$  Knoten.

In diesem letzten Falle, der zuweilen auch als "Stern" bezeichnet wird, ist nur ein Knoten nicht vom 1. Grade, er hat nämlich den Grad  $|U| - 1$  (in Bild 23 haben wir den Fall  $|U| = 7$  dargestellt).

Satz 9. Es sei ein Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  gegeben; dann gilt

$$|K| = |U| - 1 \tag{1}$$

Beweis. Wir wenden vollständige Induktion nach der Knotenanzahl an.

Wenn  $|U| = 1$  ist, dann wissen wir bereits, dass der betrachtete Baum keine Kante enthält, also  $|K| = 0$  ist. (1) ist also in diesem Falle erfüllt.

Wir wollen annehmen, es gilt für eine bestimmte natürliche Zahl  $n$ : Jeder Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$ , in dem  $|U| = n$  ist, erfüllt (1).

Unter dieser Voraussetzung wollen wir den Baum  $\mathcal{B}_1 = [U_1, K_1]$  betrachten, in dem  $|U_1| = n + 1$  ist. Nach dem vorangehenden Satz können wir in  $\mathcal{B}_1$  einen Knoten  $x$  angeben, der 1. Grades ist; wir wollen mit  $xy$  die mit diesem Knoten  $x$  inzidente Kante bezeichnen.

Wenn wir aus  $\mathcal{B}_1$  den Knoten  $x$  und die Kante  $xy$  entfernen, erhalten wir einen Teilgraphen von  $\mathcal{B}_1$ , der gemäß Satz 4 zusammenhängend ist. Dieser Teilgraph kann selbstverständlich keinen Kreis enthalten, ist also ein Baum; wir wollen ihn mit  $\mathcal{B}_2 = [U_2, K_2]$  bezeichnen.



Offenbar ist  $|U_2| = n$ , so dass wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Nach dieser Voraussetzung ist  $|K_2| = |U_2| - 1$ . Wir sehen auch, dass  $|U_1| = |U_2| + 1$ ,  $|K_1| = |K_2| + 1$  gilt. Aus allen drei Beziehungen geht hervor, dass  $|K_1| = |U_1| - 1$  ist.

Damit ist der Induktionsschritt durchgeführt und der Beweis unseres Satzes geliefert.

In einem weiteren Satz wollen wir zeigen, welche wichtige Rolle die Bäume beim Studium der endlichen zusammenhängenden Graphen spielen.

Satz 10. Es sei ein beliebiger endlicher zusammenhängender Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  gegeben. Dann existiert ein Faktor  $\mathcal{B} = [U, K_1]$ , der ein Baum ist.

Beweis. Wenn wir einen beliebigen Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  auswählen, dann existiert offensichtlich ein Baum  $\mathcal{B}^* = [U^*, K^*]$ , der ein Teilgraph des Graphen  $\mathcal{G}$  ist und den Knoten  $x$  enthält.

Wir erhalten ein Beispiel für einen solchen Baum, wenn wir  $U^* = \{x\}$ ,  $\mathcal{B}^* = [U^*, \emptyset]$  setzen. Da der Graph  $\mathcal{G}$  endlich ist, können wir in ihm einen solchen Baum aussuchen, der eine möglichst große Knotenzahl des Graphen  $\mathcal{G}$  enthält.

Wenn es mehrere solche Bäume gibt, wählen wir einen beliebigen von ihnen aus.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Menge  $U$  selbst die Knotenmenge dieses Baumes bildet. Der Beweis wird indirekt geführt.

Es sei  $\mathcal{B}_{\max} = [U_{\max}, K_{\max}]$  ein Baum mit größtmöglicher Knotenzahl, der ein Teilgraph von  $\mathcal{G}$  ist, und es sei  $x \in U_{\max}$ .

Weiter existiere ein Knoten  $y \in U$  mit  $y \notin U_{\max}$ . Da  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, existiert ein Weg  $\mathbf{W}$  zwischen  $x$  und  $y$ .

Wegen  $x \in U_{\max}$ ,  $y \notin U_{\max}$  gibt es auf  $\mathbf{W}$  eine Kante  $vw$  mit  $v \in U_{\max}$ ,  $w \notin U_{\max}$ .

Nun wollen wir den Baum  $\mathcal{B}_{\max}$  durch den Knoten  $w$  und die Kante  $vw$  ergänzen. Wir erhalten so einen Teilgraphen des gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$ , der offenbar ein Baum ist, jedoch mehr Knoten als der Baum  $\mathcal{B}_{\max}$  enthält.

Dieses Ergebnis steht jedoch im Widerspruch zu der Definition des Baumes  $\mathcal{B}_{\max}$ . Der Beweis des Satzes ist damit erbracht.

In Satz 10 haben wir bewiesen, dass in jedem endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  ein Baum  $\mathcal{B}$  als Faktor enthalten ist. Ein solcher Teilgraph  $\mathcal{B} = [U, K_1]$  heißt ein Gerüst des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  selbst ein Baum ist, dann existiert in ihm ein einziges Gerüst, nämlich  $\mathcal{G}$  selbst. Im allgemeinen Falle ist das Gerüst des Graphen  $\mathcal{G}$  jedoch nicht eindeutig bestimmt. Das ist aus Bild 24 ersichtlich.

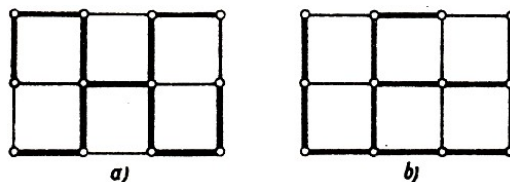


Bild 24a, b

Im Teil a) dieses Bildes sind die Kanten eines solchen Gerüsts mit dicken Linien gekennzeichnet, im Teil b) ist ein anderes Gerüst dieses Graphen gezeigt.

Es entsteht die Frage, wie die Anzahl aller Gerüste eines gegebenen endlichen zusammenhängenden Graphen bestimmt werden kann. Ist die Knotenzahl des gegebenen Graphen genügend klein, so finden wir die Antwort leicht dadurch, dass wir eine Skizze eines solchen Graphen anfertigen und systematisch alle Möglichkeiten durchgehen, die in Betracht kommen.

Dieses Verfahren versagt allerdings, wenn der Graph eine größere Knotenzahl hat. In einem solchen Falle existieren nämlich im allgemeinen viele Gerüste, und überdies wird eine Skizze bei größerer Knotenzahl unübersichtlich.

Es sind jedoch Methoden zur Bestimmung der Gerüstzahl mit Hilfe einer Determinante bekannt. Diejenigen Leser, die sich für diese Frage interessieren, verweisen wir z. B. auf das Buch von C. Berge [3], in dem sich Näheres findet. Es zeigt sich auch, dass man bei manchen wichtigen Graphentypen aus der Determinante eine einfache Formel für die Gerüstanzahl ableiten kann.

So wird beispielsweise für einen vollständigen Graphen mit  $n$  Knoten die Gerüstanzahl durch die Zahl  $n^{n-2}$  ausgedrückt, ein Ergebnis, das im Jahre 1889 bereits A. Cayley bekannt war.

Wir wollen nochmals zu den Sätzen 9 und 10 zurückkehren, aus denen wir eine interessante Schlussfolgerung ziehen können.

Satz 11. Für einen beliebigen endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  gilt die Ungleichung

$$|K| - |U| + 1 \geq 0$$

Beweis. Nach Satz 10 bilden wir in  $\mathcal{G}$  ein Gerüst  $\mathcal{B} = [U, K_1]$ . Nach Satz 9 ist  $|K_1| = |U| - 1$ . Da  $K_1 \subseteq K$  ist, gilt  $|K_1| \leq |K|$ . Daraus folgt  $|U| - 1 \leq |K|$ , wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Man kann noch einen allgemeineren Satz beweisen, als dies in Satz 11 geschieht, der sich auf zusammenhängende Graphen beschränkt.

Satz 12. Für einen beliebigen endlichen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$ , der sich aus  $k$  Komponenten zusammensetzt, gilt die Ungleichung

$$|K| - |U| + k \geq 0$$

Beweis. Wir wollen die  $i$ -te Komponente des Graphen  $\mathcal{G}$  kurz mit  $\mathcal{G}_i = [U_i, K_i]$  bezeichnen. Da jeder Graph  $\mathcal{G}_i$  endlich und zusammenhängend ist, gilt von ihm nach dem vorstehenden Satz die Ungleichung  $|K_i| - |U_i| + 1 \geq 0$ .

Weiter ist offensichtlich, dass gilt

$$\sum_{i=1}^k |U_i| = |U| \quad , \quad \sum_{i=1}^k |K_i| = |K| \quad (1)$$

Wenn wir nun die  $k$  Ungleichungen

$$\begin{aligned} |K_1| - |U_1| + 1 &\geq 0 \\ |K_2| - |U_2| + 1 &\geq 0 \\ &\dots \\ |K_k| - |U_k| + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

addieren, erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) direkt die Bestätigung des Satzes 12. Damit ist der Beweis geliefert.

Wir bezeichnen  $|K| - |U| + k$  mit  $\nu(\mathcal{G})$ . Ist  $\mathcal{G} = [U, K]$  ein endlicher Graph mit  $k$  Komponenten, so wird die Zahl  $\nu(\mathcal{G})$  gewöhnlich die zyklomatische Zahl des Graphen  $\mathcal{G}$  genannt. In dieser Bezeichnung ist sich die Literatur zur Graphentheorie freilich nicht einig; manche Autoren

gebrauchen für die Zahl  $\nu(\mathcal{G})$  beispielsweise die Bezeichnung Bettische Zahl usw.

### Übungen

II. 7.1. Es seien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  endliche Graphen, wobei  $\mathcal{G}_1$  ein Teilgraph von  $\mathcal{G}_2$  und  $\mathcal{G}_2$  zusammenhängend ist. Enthält  $\mathcal{G}_1$  keinen Kreis, dann existiert ein den Graphen  $\mathcal{G}_1$  enthaltendes Gerüst des Graphen  $\mathcal{G}_2$ .

Man beweise dies! (Nach A. Kotzig.)

II. 7.2. Ist es möglich, dass in einem endlichen zusammenhängenden Graphen zwei Gerüste existieren, die keine gemeinsame Kante haben?

II. 7.3. Man zeige, dass die Strukturformel des Paraffins  $C_nH_{2n+2}$  (für jedes  $n$ ) ein Baum ist. (Wir erinnern daran, dass das Wasserstoffatom einwertig ist, das Kohlenstoffatom vierwertig.)

II. 7.4. Es seien  $n$  natürliche Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  ( $n \geq 2$ ) gegeben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  von der Art existiert, dass  $|U| = n$  und dass die Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  der Reihe nach die Grade der einzelnen Knoten dieses Baumes sind, ist die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n g_i = 2n - 2$$

Man beweise dies!

## 2.8 Bewertete Graphen

Bei vielen praktischen Fragestellungen begegnen wir den sogenannten bewerteten Graphen. Dieser Begriff soll hier erläutert werden.

Ist in einem gegebenen Graphen jeder Kante eine reelle oder allgemeiner eine komplexe Zahl zugeordnet, so sagen wir, der Graph sei kantenmäßig bewertet.

Die Zahl, die jeder Kante des Graphen zugeordnet ist, kann unterschiedliche konkrete Bedeutung haben. Wenn die Knoten des Graphen beispielsweise als Städte auf der Landkarte gedeutet werden, dann können die den Kanten zugeordneten Zahlen beispielsweise die Entfernungen dieser Städte oder die maximale Lastmenge bedeuten, die in einer gegebenen Zeitspanne zwischen den Städten hin- und hertransportiert werden kann usw.

In dieser Interpretation sind allerdings alle Zahlen nichtnegativ, und wir sprechen dann auch von einer nichtnegativen Kantenbewertung des Graphen  $\mathcal{G}$ .

In einem aus der Physik genommenen Beispiel kann die Bewertung der Kanten den Widerstand des Leiters, die Kapazität, die Induktivität usw. bedeuten.

Satz 13. Es sei ein endlicher zusammenhängender Graph  $\mathcal{G}$  gegeben, der kantenmäßig durch positive Zahlen bewertet sei.

Wir wollen mit  $\mathcal{K}$  einen zusammenhängenden Faktor des Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnen, für den die Summe der Kantenwerte minimal ist. Dann ist  $\mathcal{K}$  ein Gerüst des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Beweis. Es braucht nur bewiesen zu werden, dass  $\mathcal{K}$  keinen Kreis enthält. Wir wollen also annehmen, dass in  $\mathcal{K}$  ein Kreis existiert; in diesem wählen wir die Kante  $xy$  aus, die mit der Zahl  $c$  bewertet sei.

Entfernt man  $xy$  aus dem Faktor  $\mathcal{K}$ , erhält man einen neuen Faktor  $\mathcal{K}'$ , der offensichtlich ebenfalls zusammenhängend ist. Die Summe der Kantenwerte des Faktors  $\mathcal{K}'$  ist jedoch um  $c$  geringer als die Summe der Kantenwerte des Faktors  $\mathcal{G}$ . Dies ist ein Widerspruch, und der

Satz ist damit bewiesen.

Es erhebt sich die Frage, wann ein solcher minimaler Faktor  $\mathcal{K}$  eindeutig bestimmt ist. Das ist dann der Fall, wenn in dem ursprünglichen Graphen  $\mathcal{G}$  sämtliche Kanten verschieden bewertet sind. Diese Bedingung wird in der Praxis eigentlich immer erfüllt.

Bedeutet die Kantenwerte z. B. die Entfernungen der Städte oder die Transportlasten, dann kann man niemals von "genau" gleichen Entfernungen, Lasten usw. sprechen.

Die angeführte Bedingung für die Eindeutigkeit ist allerdings nur hinreichend, aber nicht notwendig.

So sehen wir beispielsweise in Bild 25 einen kantenmäßig bewerteten Graphen; mit dickgezogenen Strichen ist in ihm der Faktor  $\mathcal{K}$  dargestellt, von dem Satz 13 spricht; man sieht sogleich, dass dies der einzige Faktor mit der genannten Eigenschaft ist.

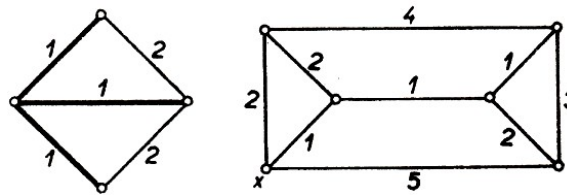


Bild 25, 26

Es wird den Leser vielleicht interessieren, dass O. Boruvka bereits im Jahre 1926 in [6] elektrische Netzwerke mit minimaler Länge studiert hat und dass sich auch in den folgenden Jahren eine Reihe von Autoren ähnlichen Problemen sowie dem Auffinden von Algorithmen für die Konstruktion minimaler Faktoren gewidmet hat.

Darauf kommen wir noch in den historischen Bemerkungen am Schluss dieses Buches zurück. Wir können hier jedoch auch das sog. Rundreiseproblem nicht übergehen, das gleichfalls mit den kantenmäßig bewerteten Graphen zusammenhängt.

Ein Geschäftsreisender soll durch eine Reihe auf der Landkarte bestimmter Städte fahren und dann in die Stadt zurückkehren, von der er aufgebrochen war, Dabei sollen die Reisekosten so niedrig wie möglich liegen.

Die Städte, die der Reisende zu besuchen hat, können wir uns als Knoten eines bestimmten Graphen vorstellen. Kanten lassen wir zwischen denjenigen Städtepaaren zu, zwischen denen eine direkte Zug-, Autobus-, Flug- oder andere Verbindung besteht.

Die Kanten werden hier dadurch bewertet, dass wir ihnen den Fahrpreis zuordnen (gegebenenfalls zusammen mit weiteren Ausgaben).

Man sieht leicht ein, dass der Reisende manchmal seine Strecke so wählen kann, dass er gerade einmal in jede Stadt kommt; in anderen Fällen muss er auf der Reise nochmals in eine Stadt fahren, in der er schon gewesen ist, damit die Bedingung minimaler Auslagen erfüllt wird.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch bemerkt, dass man zuweilen auch knotenmäßig bewertete Graphen betrachtet. In diesem Falle ist offenbar jedem Knoten eines Graphen eine bestimmte Zahl zugeordnet, die z. B. die Einwohnerzahl einer Stadt oder die Zahl der Eisenbahnwagen bedeuten kann, die an einem Tage eine Eisenbahnstation maximal durchlaufen können.

### Übungen

II. 8.1. Der Geschäftsreisende (aus der Stadt  $x$ ) soll durch sechs Städte fahren, die in Bild 26 als Knoten des Graphen dargestellt sind. Die Kantenwerte sind hier die mit der Reise zwischen zwei Städten verbundenen Auslagen. Man suche die Strecke aus, für welche die Auslagen des Reisenden am niedrigsten liegen.

II. 8.2. Man nummeriere die Kanten eines Würfels mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots, 11, 12$  so, dass jeweils verschiedene Kanten mit verschiedenen Zahlen bezeichnet sind und dass die Summe von vier Zahlen auf den Kanten jeder Fläche konstant ist.

II. 8.8. In der Ebene ist ein regelmäßiges Sechseck gegeben. Seine Ecken wollen wir als die Knoten eines vollständigen Graphen ansehen; die Kanten dieses Graphen seien mit Zahlen bewertet, welche die Entfernung der entsprechenden zwei Ecken des Sechsecks bedeuten. Man suche von allen Gerüsten dieses bewerteten Graphen dasjenige aus, in dem die Summe der Bewertung a) minimal; b) maximal ist.

## 2.9 Brücken eines Graphen

Bereits in den vorangegangenen Betrachtungen ist uns klar geworden, welche große Bedeutung in einem gegebenen Graphen die Kreise haben. In diesem Abschnitt werden wir diejenigen Kanten eines Graphen betrachten, die zu keinem seiner Kreise gehören. Solche Kanten heißen Brücken des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Ist z.B. der betrachtete Graph ein Baum mit wenigstens zwei Knoten, so ist jede seiner Kanten eine Brücke. Ein anderes Beispiel sehen wir in Bild 27.

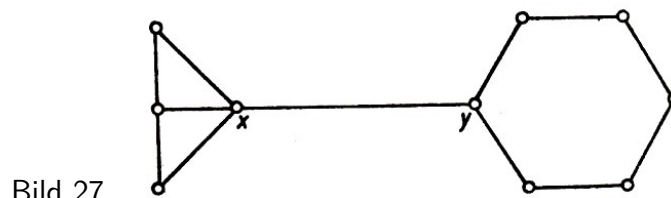


Bild 27

Hier wird ein zusammenhängender Graph dargestellt, der kein Baum ist; seine Kante  $xy$  ist in keinem Kreis enthalten und stellt also eine Brücke dieses Graphen dar.

Satz 14.  $\mathcal{G} = [U, K]$  sei ein zusammenhängender Graph und  $xy$  sei eine Brücke des Graphen  $\mathcal{G}$ . Wir betrachten denjenigen Teilgraphen  $\mathcal{G}_1 = [U_1, K_1]$  des Graphen  $\mathcal{G}$ , der aus dem Graphen  $\mathcal{G}$  durch Entfernung der Kante  $xy$  entsteht. Dann ist der Graph  $\mathcal{G}_1$  nicht zusammenhängend.

Beweis. Wir nehmen an, der Graph  $\mathcal{G}_1$  sei zusammenhängend, und werden sehen, dass sich daraus ein Widerspruch ergibt.

Zunächst betrachten wir in  $\mathcal{G}_1$  einen Weg  $\mathbf{W}$  zwischen den Knoten  $x$  und  $y$ . Dann existiert in  $\mathcal{G}$  gleichfalls der Weg  $\mathbf{W}$  zwischen  $x$  und  $y$ ; die Knoten und Kanten dieses Weges bilden im Graphen  $\mathcal{G}$  zusammen mit der Kante  $xy$  einen Kreis des Graphen.

Dies ist jedoch nicht möglich; denn wir haben angenommen, dass  $xy$  eine Brücke des Graphen  $\mathcal{G}$  ist. Der Graph  $\mathcal{G}_1$  ist also nicht zusammenhängend. Damit ist der Beweis des Satzes geliefert.

Die Behauptung des Satzes 14 können wir noch in deutlicherer Form aussprechen. Es lässt sich nämlich leicht beweisen, dass der Graph  $\mathcal{G}_1$  gerade zwei Komponenten hat.

Den Beweis dieser sehr anschaulichen Tatsache überlassen wir dem Leser als eine leichte Übung. Wir werden hier gleichfalls nicht nachweisen, dass die Knoten  $x$  und  $y$ , von denen in Satz 14 die Rede ist, jeder in einer anderen Komponente des neu entstandenen Graphen  $\mathcal{G}_1$  liegen.

Wir sehen von einem detaillierten Beweis nicht deshalb ab, weil es schwierig wäre, ihn zu führen, sondern weil es sich hier um sehr anschauliche Dinge handelt. Wir wollen jedoch noch weitere Eigenschaften der Brücken in dem gegebenen Graphen anführen.

Satz 15. Jedes Gerüst eines endlichen zusammenhängenden Graphen enthält alle Brücken des

Graphen.

Beweis. Wir werden die Behauptung indirekt beweisen. Wir wollen annehmen, dass in dem endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  eine Brücke  $xy$  existiert und dass man in dem Graphen  $\mathcal{G}$  ein Gerüst  $\mathcal{K}$  bilden kann, zu dem die Kante  $xy$  nicht gehört.

Aus dem Graphen  $\mathcal{G}$  entfernen wir die Brücke  $xy$ ; nach dem vorstehenden Satz wissen wir, dass dadurch ein Graph  $\mathcal{G}_1$  entsteht, der nicht zusammenhängend ist. Andererseits ist  $\mathcal{K}$  ein Teilgraph von  $\mathcal{G}_1$ ; nach der Übung 4.1 ergibt sich aus dem Zusammenhang des Graphen  $\mathcal{K}$  auch der Zusammenhang des Graphen  $\mathcal{G}_1$ . Dies ist ein Widerspruch, und damit ist der Satz bewiesen.

Es erhebt sich natürlich die Frage, ob endliche reguläre Graphen existieren, die Brücken besitzen. Wenn wir von dem ganz trivialen Fall eines Graphen nullten Grades absehen, erkennen wir, dass auch bei den Graphen ersten und zweiten Grades die Antwort einfach ist.

Bei den Graphen ersten Grades ist jede Kante eine Brücke, während bei den Graphen zweiten Grades keine Brücke existiert, denn jede Kante eines solchen Graphen ist gerade in einem Kreis enthalten.

Wie sieht es mit den Graphen höheren Grades aus?

Teilweise informiert uns darüber der Satz, den wir jetzt formulieren und beweisen wollen.

Satz 16.  $\mathcal{G}$  sei ein endlicher regulärer Graph des geraden Grades  $2m$ . Dann existiert im Graphen  $\mathcal{G}$  keine Brücke.

Beweis. Wir werden wiederum indirekt vorgehen und nehmen an, dass in einem endlichen regulären Graphen  $\mathcal{G}$ , der  $2m$ -ten Grades ist, eine Brücke  $xy$  existiert. Wir wollen die Komponente, in der die Kante  $xy$  liegt, mit  $\mathcal{G}_0$  bezeichnen und aus  $\mathcal{G}_0$  die Kante zu entfernen.

Der Graph  $\mathcal{G}_1$ , der nach dieser Modifizierung aus der Komponente  $\mathcal{G}_0$  entsteht, ist nicht zusammenhängend, wobei die Knoten  $x$  und  $y$  jeder in einer anderen Komponente des neu entstandenen Graphen  $\mathcal{G}_1$  liegen.

Betrachten wir nunmehr die Grade der einzelnen Knoten in  $\mathcal{G}_1$ . Jeder von den Knoten  $x$  und  $y$  hat den Grad  $2m - 1$ , während die anderen Knoten aus  $\mathcal{G}_1$  den Grad  $2m$  haben. Die Komponente des Graphen  $\mathcal{G}_1$ , die zum Knoten  $x$  gehört, hat also einen Knoten ungeraden Grades, und ihre anderen Knoten sind geraden Grades.

Das ist jedoch ein Widerspruch zu Satz 2. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Der Satz, den wir eben behandelt haben, beantwortet unsere Frage für den Fall eines endlichen regulären Graphen geraden Grades. Für den Fall ungeraden Grades begnügen wir uns hier mit der Feststellung, dass man einen endlichen regulären Graphen ungeraden Grades bilden kann, der Brücken enthält.

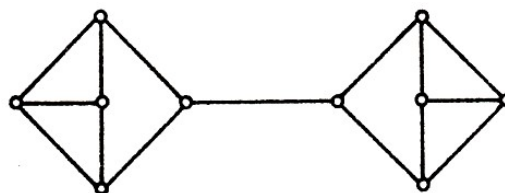


Bild 28

In Bild 28 zeigen wir einen Graphen dritten Grades mit einer Brücke und in Bild 29 einen Graphen fünften Grades mit einer Brücke.

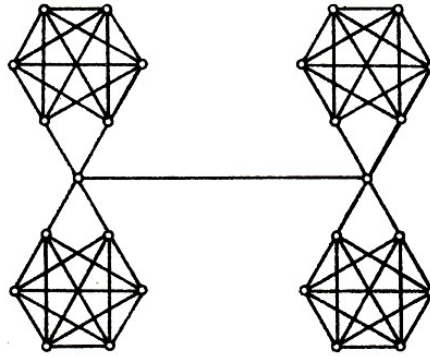


Bild 29

Wir wollen noch bemerken, dass manche Autoren eine Brücke anders als wir definieren. So versteht beispielsweise D. König in seinem Lehrbuch [15] unter einer Brücke eines Graphen im wesentlichen dasselbe wie wir, betrachtet aber die Kante, die mit dem Knoten 1. Grades inzidiert, nicht als Brücke.

Dies befindet sich übrigens in Übereinstimmung mit der Gesamtkonzeption von König, denn dieser Autor lässt - wie wir bereits wissen - keine isolierten Knoten zu; wenn wir jedoch die Kante der betrachteten Art beseitigen, entsteht eine Komponente mit einem einzigen isolierten Knoten.

### Übungen

II. 9.1. Man entscheide, ob in einem unendlichen regulären Graphen geraden Grades Brücken existieren können.

II. 9.2. Zu jeder geraden Zahl  $n > 10$  existiert ein regulärer Graph 3. Grades mit mindestens einer Brücke, der  $n$  Knoten hat. Man beweise dies.

## 2.10 Artikulationen

Wir haben bereits gesehen, welche Rolle die Brücken beim Studium des Zusammenhanges eines gegebenen Graphen spielen. Anschaulich können wir dies folgendermaßen ausdrücken: Wenn ein gegebener zusammenhängender Graph eine Brücke hat, dann teilt ihn diese Brücke so in zwei Teile ein, dass man von dem einen Teil nach dem anderen nicht anders gelangen kann als eben über diese Brücke. In diesem Absatz werden diejenigen Knoten eines Graphen betrachtet, die in ihm eine ähnliche Funktion haben wie die Brücken.

Jeder solche Knoten heißt eine Artikulation.<sup>18</sup>

Sie ist folgendermaßen definiert:

Es seien ein Graph  $\mathcal{G}$  und in ihm ein Knoten  $x$  gegeben. Nehmen wir an, dass in  $\mathcal{G}$  zwei Kanten  $xy_1$  und  $xy_2$  existieren, die nicht beide zu ein und demselben Kreis des Graphen  $\mathcal{G}$  gehören. Dann sagen wir, der Knoten  $x$  sei eine Artikulation des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Wir wollen einige Beispiele zur Erläuterung des neuen Begriffes anführen. Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  ein Baum ist und in ihm ein Knoten  $x$  von mindestens 2. Grade existiert, dann ist  $x$  eine Artikulation des Graphen  $\mathcal{G}$ ; wir haben nämlich die Existenz zweier Kanten, die mit dem Knoten  $x$  inzidieren, garantiert, und wissen auch, dass in unserem Graphen kein Kreis existiert.

Ein anderes Beispiel einer Artikulation sehen wir in Bild 30, in dem der Knoten  $a$  eine Artikulation ist.

<sup>18</sup>Aus dem lateinischen articulus = Gelenk, Biegung

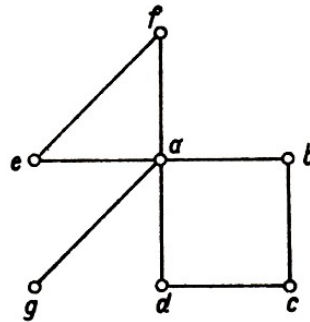


Bild 30

Um die Bedeutung der Artikulationen für einen gegebenen Graphen untersuchen zu können, formulieren und beweisen wir zunächst einen Hilfssatz.

Satz 17. In einem Graphen  $\mathcal{G}$  seien drei Kanten  $x_1x_2$ ,  $y_1y_2$ ,  $z_1z_2$  gegeben, und es existiere einmal ein Kreis  $\mathcal{O}_1$ , auf dem die Kanten  $x_1x_2$  und  $y_1y_2$  liegen, zum anderen ein Kreis  $\mathcal{O}_2$ , auf dem die Kanten  $y_1y_2$  und  $z_1z_2$  liegen. Dann existiert in dem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  gleichfalls ein Kreis  $\mathcal{O}_3$ , auf dem die Kanten  $x_1x_2$  und  $z_1z_2$  liegen.

Beweis. Zunächst setzen wir  $\mathcal{O}_1 = [U_1, K_1]$  und  $\mathcal{O}_2 = [U_2, K_2]$  und bilden den Durchschnitt  $U_1 \cap U_2$ , der nach den Voraussetzungen unseres Satzes wenigstens zwei Elemente hat.

Zwischen jeweils zwei Elementen  $v$  und  $w$  dieses Durchschnittes wollen wir auf dem Kreis  $\mathcal{O}_1$  den Weg bilden, der die Kante  $x_1x_2$  enthält. Nun suchen wir im Durchschnitt  $U_1 \cap U_2$  dasjenige Paar verschiedener Knoten  $v_0$  und  $w_0$ , für das der erwähnte Weg die geringste Länge hat. Diesen minimalen Weg in  $\mathcal{O}_1$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{W}_1$  und wir bilden in  $\mathcal{O}_2$  noch den Weg  $\mathbf{W}_2$  zwischen  $v_0$  und  $w_0$ , der die Kante  $z_1z_2$  enthält.

Man sieht ohne Schwierigkeit ein, dass die Wege  $\mathbf{W}_1$  und  $\mathbf{W}_2$  in dem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  nur die Knoten  $v_0$  und  $w_0$  gemeinsam haben.

Nun haben wir nur noch den Teilgraphen  $\mathcal{O}_3$  zu bilden; seine Knotenmenge stellen diejenigen Knoten dar, die entweder auf  $\mathbf{W}_1$  oder auf  $\mathbf{W}_2$  liegen, und die Kantenmenge bilden die Kanten, die entweder auf  $\mathbf{W}_1$  oder auf  $\mathbf{W}_2$  liegen. Man sieht, dass  $\mathcal{O}_3$ , ein Kreis des Graphen  $\mathcal{G}$  ist, der gleichzeitig die Kanten  $x_1x_2$  und  $z_1z_2$  enthält.

Damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Wir wollen jetzt einen Begriff definieren, bei dem sich die Bedeutung des Hilfssatzes zeigt, den wir soeben bewiesen haben. Zunächst machen wir uns hier mit einem Teilgraphen des gegebenen Graphen bekannt, der als Glied des Graphen bezeichnet wird. Wir beschreiben nur die Kanten dieses Teilgraphen.

Der Teilgraph enthält weiterhin gerade diejenigen Knoten des gegebenen Graphen, mit denen die genannten Kanten inzidieren. Wir nehmen an, dass ein Graph  $\mathcal{G}$  gegeben ist, der eine Kante  $ab$  enthält, und definieren das zur Kante  $ab$  gehörige Glied wie folgt:

Wenn  $ab$  eine Brücke des Graphen  $\mathcal{G}$  ist, dann hat das Glied  $\mathcal{G}^{(ab)}$  die einzige Kante  $ab$ . Wenn  $ab$  keine Brücke ist, dann konstruieren wir  $\mathcal{G}^{(ab)}$  so, dass wir in  $\mathcal{G}$  alle die Kreise bilden, die die Kante  $ab$  enthalten, und fassen alle Kanten dieser Kreise zum Teilgraphen  $\mathcal{G}^{(ab)}$  zusammen.

Wir wollen den Begriff wiederum näher erläutern und kehren zu diesem Zweck noch einmal zu Bild 30 zurück.

In ihm betrachten wir das zur Kante  $ab$  gehörige Glied. Dies ist offenbar ein Kreis von der Länge 4, der in unserem Bild die Knoten  $a, b, c, d$  hat. Wir wollen noch das zur Kante  $ef$  sowie weiterhin das zur Kante  $ag$  gehörige Glied bilden. Im ersten Falle erhalten wir einen Kreis mit den Knoten  $a, e, f$ , im zweiten Falle hat das Glied nur die einzige Kante  $ag$ .



Vielleicht erinnern diese Betrachtungen manchen Leser an das, was wir bereits bei der Untersuchung des Zusammenhangs eines Graphen und bei der Definition einer Komponente gezeigt haben. Dieser Vergleich ist hier durchaus am Platze, und wir werden die entsprechende Analogie weiter verfolgen. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 18. In einem Graphen  $\mathcal{G}$  mögen zwei Kanten  $ab$  und  $cd$  existieren. Dann haben die diesen Kanten zugehörigen Glieder  $\mathcal{G}^{(ab)}$  und  $\mathcal{G}^{(cd)}$  entweder keine gemeinsame Kante, oder es gilt  $\mathcal{G}^{(ab)} = \mathcal{G}^{(cd)}$ .

Beweis. Wenn die Glieder  $\mathcal{G}^{(ab)}$  und  $\mathcal{G}^{(cd)}$  keine gemeinsame Kante haben, dann sind wir mit dem Beweis fertig.

Wir wollen also voraussetzen, dass in dem Graphen  $\mathcal{G}$  eine Kante  $xy$  existiert, die gleichzeitig beiden betrachteten Gliedern angehört. Es existiert also in  $\mathcal{G}$  ein Kreis  $\mathcal{O}_1$ , welcher die Kanten  $ab$  und  $xy$  umfasst, und es existiert hier auch ein Kreis  $\mathcal{O}_2$ , welcher  $xy$  und zugleich  $cd$  umfasst.

Aus der Existenz der Kreise  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  folgt nach Satz 17, dass man in unserem Graphen einen Kreis  $\mathcal{O}_3$  finden kann, auf dem gleichzeitig die Kanten  $ab$  und  $cd$  liegen. Daraus ist ersichtlich, dass  $ab$  zu  $\mathcal{G}^{(cd)}$  und  $cd$  zu  $\mathcal{G}^{(ab)}$  gehört.

Wir erkennen jedoch auch leicht, dass  $\mathcal{G}^{(ab)} = \mathcal{G}^{(cd)}$  gilt. Wenn wir nämlich in  $\mathcal{G}^{(ab)}$  eine beliebige Kante  $vw$  wählen, dann können wir einen Kreis  $\mathcal{O}_4$  bilden, auf dem gleichzeitig  $ab$  und  $vw$  liegen. Nach Satz 17 folgt aus der Existenz der Kreise  $\mathcal{O}_3$  und  $\mathcal{O}_4$  die Existenz des Kreises  $\mathcal{O}_5$ , auf dem  $cd$  und zugleich  $vw$  liegen.

Daraus ist zu ersehen, dass die gewählte Kante  $vw$  auch zu  $\mathcal{G}^{(cd)}$  gehört. In ähnlicher Weise sehen wir ein, dass jede Kante des Gliedes  $\mathcal{G}^{(cd)}$  auch zu dem Glied  $\mathcal{G}^{(ab)}$  gehört. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Hier besteht allerdings ein Unterschied im Vergleich zu dem, was wir beim Studium der Komponenten eines gegebenen Graphen festgestellt haben. Zwei Glieder des Graphen, die keine gemeinsame Kante haben, müssen nicht disjunkt sein. Es kann nämlich in dem gegebenen Graphen ein Knoten existieren, der beiden Gliedern des betrachteten Graphen gemeinsam ist. Wir haben dies übrigens schon in Bild 30 gesehen, wo die Artikulation  $a$  allen drei Gliedern des Graphen angehört.

Satz 19. Ein Knoten  $x$  ist genau dann eine Artikulation eines Graphen  $\mathcal{G}$ , wenn mit ihm zwei Kanten  $xy_1$  und  $xy_2$  inzidieren, wobei jede von ihnen zu einem anderen Glied des Graphen gehört.

Beweis. Wenn  $xy_1$  und  $xy_2$  zu verschiedenen Gliedern von  $\mathcal{G}$  gehören, dann existiert kein Kreis, der diese beiden Kanten gleichzeitig enthält;  $x$  ist also eine Artikulation.

Wenn umgekehrt  $x$  eine Artikulation des Graphen  $\mathcal{G}$  ist, dann kann man in  $\mathcal{G}$  Kanten  $xy_1$  und  $xy_2$  finden, die nicht gleichzeitig demselben Kreis des Graphen  $\mathcal{G}$  angehören. Das der Kante  $xy_1$  zugehörige Glied enthält also nicht die Kante  $xy_2$ ; damit ist der Beweis geliefert.

Übungen II. 10.1. Wenn ein zusammenhängender Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$ , in dem  $|U| > 3$  ist, eine Brücke enthält, dann enthält  $\mathcal{G}$  wenigstens eine Artikulation. Man beweise das!

II. 10.2. Wenn ein endlicher, regulärer Graph dritten Grades eine Brücke enthält, dann enthält er auch eine Artikulation. Man beweise das!

II. 10.3. Man bilde ein Beispiel für einen regulären Graphen vierten Grades mit einer Artikulation.

II. 10.4. Es sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher zusammenhängender Graph und  $x$  ein Knoten. Es existiert genau dann in  $\mathcal{G}$  ein Gerüst, in welchem  $x$  ein Knoten ersten Grades ist, wenn  $x$  keine Artikulation in  $\mathcal{G}$  ist. Man beweise das!

II. 10.5. Enthält ein Graph mit  $2n + 1$  Knoten keinen Kreis gerader Länge, dann hat er höchstens  $3n$  Kanten. Enthält ein Graph mit  $2n$  Knoten keinen Kreis gerader Länge, dann hat er höchstens  $3n - 2$  Kanten. Man beweise das!<sup>19</sup>

## 2.11 Knoten- und Kantenzusammenhangszahl

Wir haben bereits gesehen, dass die Artikulationen und die Brücken eines Graphen für das Studium des Zusammenhanges des Graphen eine besondere Bedeutung haben. Grob gesagt, bei Entfernung der Artikulation oder der Brücke aus einem zusammenhängenden Graphen wird der Zusammenhang dieses Graphen geändert.

Es ist offensichtlich, dass statt einer Artikulation oder einer Brücke einfach eine beliebige Menge von Knoten oder Kanten betrachtet werden kann, nach deren Entfernung der Zusammenhang des Graphen gestört wird.

Mit einer solchen Verallgemeinerung werden wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Wir wollen annehmen, dass ein endlicher zusammenhängender Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  und in ihm zwei Knoten  $x$  und  $y$  gegeben seien. Wir nehmen weiter an, dass eine nicht-leere Menge  $A \subseteq U$  existiert, zu der keiner von den Knoten  $x, y$  gehört und dass jede Verbindung zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  wenigstens einen Knoten aus der Menge  $A$  enthält.

Wenn im Graphen  $\mathcal{G}$  eine solche Menge  $A$  existiert, dann sagen wir,  $A$  sei ein Knotenschnitt des Graphen  $\mathcal{G}$  zwischen den Knoten  $x$  und  $y$ . Anschaulich könnten wir die Bedeutung des Knotenschnittes auch so ausdrücken, dass der Zusammenhang des Graphen  $\mathcal{G}$  dadurch gestört wird, dass wir aus  $\mathcal{G}$  alle Knoten der Menge  $A$  entfernen sowie alle Kanten, die mit diesen Knoten inzident sind.

Wenn zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  eines zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  ein Knotenschnitt existiert, dann wählen wir denjenigen Schnitt aus, der die kleinste Zahl von Elementen hat, und bezeichnen ihn mit  $A_{\min}$ .

Die Zahl  $|A_{\min}|$  heißt Knotenzusammenhangszahl zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  und wird mit  $u(x, y)$  bezeichnet.

Wann ist es nicht möglich, zwischen den zwei Knoten  $x$  und  $y$  eines endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  einen Knotenschnitt zu finden?

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn die Knoten  $x, y$  beide mit derselben Kante des Graphen  $\mathcal{G}$  inzidieren. Auch in diesem Falle werden wir jedoch von der Knotenzusammenhangszahl zwischen  $x$  und  $y$  sprechen und  $u(x, y) = |U| - 1$  setzen.<sup>20</sup>

Auf diese Weise wird also die Knotenzusammenhangszahl zwischen zwei beliebigen Knoten des endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$  definiert. Wir wollen nun in  $\mathcal{G}$  zwei Knoten  $x_0$  und  $y_0$  aussuchen, für die die Zahl  $u(x_0, y_0)$  minimal ist; diese minimale Zahl nennen wir die Knotenzusammenhangszahl des Graphen  $\mathcal{G}$ .

<sup>19</sup>Nach P. Erdős, Canadian Math. Bulletin, 1958, 112.

<sup>20</sup>Weshalb wir die Knotenzusammenhangszahl für diesen Fall gerade auf solche Weise definieren, wird der Leser beim Studium der weiteren Sätze und der Übungen einsehen. Die Definition wurde nämlich so gewählt, dass sich dann die Eigenschaften dieses Begriffes übersichtlich beschreiben lassen.

Beispiel 13. In Bild 31 sehen wir einen Graphen mit den fünf Knoten  $a, b, c, d, e$ . Wir wollen die Knotenzusammenhangszahl zwischen jeweils zwei Knoten bestimmen.

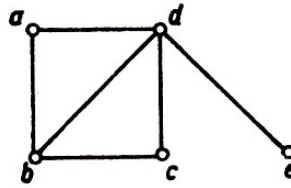


Bild 31

Einen Überblick gibt uns hier am besten eine quadratische Tafel, die in unserem Falle 25 Felder hat. Die Felder, die in einer Diagonale dieses Quadrates liegen, sind mit einem Strich versehen, während in den anderen Feldern natürliche Zahlen stehen, die immer die Knotenzusammenhangszahl zwischen dem entsprechenden Knotenpaar bedeuten. Wir haben also folgende Tafel:

	a	b	c	d	e
a	-	4	2	4	1
b	4	-	4	4	1
c	2	4	-	4	1
d	4	4	4	-	4
e	1	1	1	4	-

Man sieht, dass unsere Tafel zu der von der linken oberen zur rechten unteren Ecke führenden Diagonale symmetrisch ist. Diese Symmetrie folgt übrigens ganz allgemein aus der Beziehung  $u(x, y) = u(y, x)$ , die in jedem zusammenhängenden Graphen für jeweils zwei seiner Knoten erfüllt ist.

Wir können auch leicht aus der Tafel ersehen, dass die Knotenzusammenhangszahl unseres Graphen 1 ist. Wir wollen beachten, dass unser Graph die Artikulation  $d$  hat; die Menge  $\{d\}$  stellt den Knotenschnitt mit der kleinsten Zahl der Elemente dar, die man, in unserem Graphen zwischen zwei seiner Knoten bilden kann.

Satz 20. Wenn ein endlicher zusammenhängender Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  die Knotenzusammenhangszahl  $u$  hat, dann hat jeder Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  einen Grad, der wenigstens gleich der Zahl  $u$  ist.

Beweis. Wir wählen im Graphen  $\mathcal{G}$  einen beliebigen, Knoten  $x$  aus und bezeichnen mit  $xy_1, xy_2, \dots, xy_k$  alle Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$ , die mit dem Knoten  $x$  inzidieren.

Wir setzen  $A = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Wenn  $U = A \cup \{x\}$  gilt, d.h. wenn der Graph  $\mathcal{G}$  außer den Knoten aus der Menge  $A$  und dem Knoten  $x$  keinen weiteren Knoten hat, dann ist  $u(x, y_1) = |U| - 1 = k$  und also  $k > u$ .

Wenn jedoch  $U \neq A \cup \{x\}$  ist, dann existiert ein weiterer Knoten  $z$ , für den  $z \in A \cup \{x\}$  nicht gilt. Die Menge  $A$  ist also offensichtlich ein Knotenschnitt zwischen  $x$  und  $z$ , so dass  $k \geq u(x, z)$  ist.

Weiterhin ist jedoch  $u(x, z) \geq u$ , so dass insgesamt auch hier  $k \geq u$  gilt.

Die Zahl  $k$  ist aber der Grad des Knotens  $x$  im Graphen  $\mathcal{G}$ ; wir haben also bewiesen, dass dieser Grad stets größer als die Knotenzusammenhangszahl des Graphen  $\mathcal{G}$  oder wenigstens ebenso groß wie diese ist.

Nun werden wir den Zusammenhang des Graphen von einem anderen Gesichtspunkt aus untersuchen, der sich uns anbietet, wenn wir den Begriff der Brücke verallgemeinern. Wir werden

also die Kantenzusammenhangszahl des endlichen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  definieren.

Zunächst wollen wir jedoch den Begriff des Kantenschnittes zwischen zwei Knoten eines Graphen einführen.

In dem Graphen  $\mathcal{G}$  sei zu zwei Knoten  $x$  und  $y$  eine Menge  $B \subseteq K$  so gewählt, dass jede Verbindung zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  wenigstens eine Kante aus der Menge  $B$  enthält. Eine solche Menge  $B$  nennen wir den Kantenschnitt zwischen den Knoten  $x$  und  $y$ .

Wir könnten den Kantenschnitt anschaulich dadurch charakterisieren, dass der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  gestört wird, wenn wir aus dem Graphen  $\mathcal{G}$  alle Kanten des Schnittes entfernen. Dies zeigt zugleich auch die Beziehung zwischen einem Kantenschnitt und einer Brücke, mit der wir uns schon beschäftigt haben.

Wir sehen, dass zwischen je zwei Knoten eines Graphen stets ein Kantenschnitt existiert. Einen dieser trivialen Kantenschnitte bildet z. B. die Menge  $K$  selbst. Uns wird allerdings wiederum ein solcher Kantenschnitt zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  interessieren, der von allen möglichen Kantenschnitten die kleinste Zahl von Elementen hat.

Einen solchen Kantenschnitt wollen wir mit  $B_{\min}$  bezeichnen und die Zahl  $|B_{\min}|$  die Kantenzusammenhangszahl zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  nennen; wir bezeichnen sie kurz mit  $k(x, y)$ .

Man sieht, dass auf diese Weise zwischen jeweils zwei Knoten eines endlichen zusammenhängenden Graphen eine Kantenzusammenhangszahl definiert worden ist. Wir können in dem gegebenen Graphen wiederum zwei Knoten  $x_1$  und  $y_1$  aussuchen, für welche die Zahl  $k(x_1, y_1)$  minimal ist. Diese kleinste Zahl nennen wir (ähnlich wie in unseren vorangegangenen Betrachtungen) die Kantenzusammenhangszahl des Graphen  $\mathcal{G}$ .

Beispiel 14. Wir wollen zum Bild 31 zurückkehren, das wir im Beispiel 13 unter dem Gesichtspunkt des Knotenzusammenhanges studiert haben. Wir wollen hier die Kantenzusammenhangszahl zwischen jeweils zwei Knoten des gegebenen Graphen bestimmen.

Auch in diesem Falle dient uns zur übersichtlichen Schreibweise eine quadratische Tafel mit 25 Feldern, in der wir die in der Diagonale zwischen der linken oberen und der rechten unteren Ecke liegenden Felder mit einem Strich kennzeichnen. In den anderen Feldern stehen natürliche Zahlen, die die Kantenzusammenhangszahl für das entsprechende Knotenpaar angeben. Unsere Tafel hat die Form:

	a	b	c	d	e
a	-	2	2	2	2
b	2	-	2	3	1
c	2	2	-	2	1
d	2	3	2	-	1
e	2	1	1	1	-

Diese Tafel ist wiederum symmetrisch zu der aus den gestrichenen Feldern zusammengesetzten Diagonale, denn für jeweils zwei Knoten  $x$  und  $y$  gilt  $k(x, y) = k(y, x)$ , was allerdings ganz allgemein in jedem endlichen zusammenhängenden Graphen erfüllt ist.

Die Tafel belehrt uns auch darüber, dass unser Graph die Kantenzusammenhangszahl 1 hat. Es besteht in ihm nämlich eine Brücke  $de$ .

Der Umstand, dass die Knotenzusammenhangszahl des betrachteten Graphen gleich der Kantenzusammenhangszahl ist, ist allerdings nur zufälliger Natur.

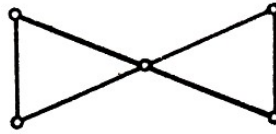


Bild 32

In Bild 32 sehen wir einen Graphen mit fünf Knoten, dessen Knotenzusammenhangszahl 1 ist (es existiert hier eine Artikulation), während die Kantenzusammenhangszahl 2 ist.

Beide Begriffe können auf einen Graphen ausgedehnt werden, der nicht zusammenhängend ist. In einem solchen Graphen existieren immer zwei Knoten, zwischen denen keine Verbindung besteht. Es ist hier also nicht erforderlich, Kanten oder Knoten zu beseitigen, um den Zusammenhang zu stören.

Wir setzen die Knoten- und die Kantenzusammenhangszahl für jeden derartigen Graphen gleich der Zahl 0. Formal können wir  $v(x, y)$  und  $k(x, y)$  auch für den Fall definieren, dass die Knoten  $x$  und  $y$  zusammenfallen.

In einem solchen Falle existiert immer eine Verbindung (von der Länge 0) zwischen  $x$  und  $y$ , wie auch immer wir Kantenmengen oder Knotenmengen aus dem Graphen entfernen. Formal können wir also für jeden Knoten  $u(x, y) = \infty$ ,  $k(x, y) = \infty$  setzen.

Wir könnten noch einige Sätze über Kantenschnitte und Kantenzusammenhangszahlen ableiten, verweisen jedoch den Leser auf die Spezialliteratur zur Graphentheorie. Auf einige Eigenschaften kommen wir allerdings in den Übungen zu diesem Abschnitt noch zurück.

Wir möchten bemerken, dass sich eine Reihe von Autoren mit einer eingehenden Analyse des Zusammenhangsbegriffes beschäftigt haben.

So stellte beispielsweise A. Sainte-Lague im Jahre 1926 in seiner Arbeit [23] Betrachtungen über die Kantenzusammenhangszahl an, für die er die Bezeichnung *puissance* verwandte. Zur gleichen Zeit gelangte K. Menger zu bedeutenden Ergebnissen, und um das Jahr 1932 untersuchte H. Whitney den Zusammenhang der Graphen.

### Übungen

II. 11.1. Man gebe ein Beispiel für einen zusammenhängenden Graphen an, in dem nach Beseitigung einer beliebigen Kante sowohl die Kanten- als auch die Knotenzusammenhangszahl des gesamten Graphen vermindert wird.

II. 11.2. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen mit fünf Knoten an, in dem nach Entfernung einer beliebigen Kante die Kantenzusammenhangszahl des gesamten Graphen vermindert wird, die Knotenzusammenhangszahl aber erhalten bleibt.

II. 11.8. Es ist ein endlicher vollständiger Graph mit  $n$  Knoten gegeben. Man bestimme  
a) die Knotenzusammenhangszahl;  
b) die Kantenzusammenhangszahl.

II. 11.4. Man gebe ein Beispiel für einen endlichen regulären Graphen dritten Grades an, dessen Knoten- bzw. Kantenzusammenhangszahl a) 1; b) 2 ist.

II. 11.5. Man entscheide, ob ein endlicher regulärer Graph vierten Grades die Kantenzusammenhangszahl 1 haben kann.

## 2.12 Eulersche Graphen

In der Unterhaltungsmathematik tritt die Aufgabe auf, ein gegebenes zusammenhängendes Bild in einem Zug zu zeichnen. Dabei darf jede Linie nur einmal gezogen werden.

Schnittpunkte, in denen die Linien sich schneiden, können allerdings mit beliebiger Häufigkeit vorhanden sein.

Manche Leser werden sicherlich wissen, dass es schon recht einfache Bilder gibt, die nicht in einem Zug gezeichnet werden können. Es ergibt sich demnach die Aufgabe, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass ein Bild in einem Zug gezeichnet werden kann.

Diese Bedingung ist in der Mathematik schon längst bekannt.

Sie ist mit dem Namen des bekannten Mathematikers L. Euler verbunden.<sup>21</sup>

Euler beschäftigte sich im 18. Jh. mit dem sogenannten Königsberger Brückenproblem, das gerade die Möglichkeit der Zeichnung eines Bildes in einem Zug behandelt.<sup>22</sup>

Wir können das Problem, ein Bild in einem Zug zu zeichnen, graphentheoretisch aussprechen und formulieren es hier wie folgt:

Unter einem Zug<sup>23</sup> in einem endlichen Graphen werden wir eine solche Verbindung verstehen, auf der jede Kante des Graphen höchstens einmal auftritt.

Wir sagen also, der endliche Graph  $\mathcal{G}$  kann in einem Zug gebildet werden, wenn im Graphen eine Verbindung  $\mathbf{V}$  existiert, auf der jede Kante des Graphen genau einmal auftritt. Dabei kann die Verbindung  $\mathbf{V}$  entweder in demselben Knoten beginnen und enden, oder der Knoten, in dem  $\mathbf{V}$  beginnt, ist ein anderer als der, in dem  $\mathbf{V}$  endet.

Im ersten Falle sprechen wir von einem geschlossenen Zug, im zweiten von einem offenen Zug.

Nun untersuchen wir, welche Bedeutung die Knotengrade bei der Bildung von Graphen in einem Zug haben. Wir werden sehen, dass die sog. Eulerschen Graphen hier eine besondere Bedeutung haben.

Mit dieser Bezeichnung versehen wir einen endlichen Graphen ohne isolierte Knoten, in dem jeder Knoten geraden Grades ist. Zunächst wollen wir jedoch einen Satz über die Kreise in den Eulerschen Graphen beweisen.

**Satz 21.** Jeder Knoten eines Eulerschen Graphen  $\mathcal{G}$  ist in wenigstens einem Kreis von  $\mathcal{G}$  enthalten.

**Beweis.** Wir wollen in  $\mathcal{G}$  einen Knoten  $x$  und eine Kante  $xy$  auswählen, die mit  $x$  inzidiert. Die Kante  $xy$  kann keine Brücke des Graphen  $\mathcal{G}$  sein, denn nach ihrer Entfernung erhielten wir einen nichtzusammenhängenden Graphen, und die Komponente, die z. B. den Knoten  $x$  enthält, hätte einen einzigen Knoten ungeraden Grades.

Dies steht jedoch im Widerspruch zu Satz 2.

Es existiert also ein Kreis, welcher die Kante  $xy$  und also auch den Knoten  $x$  durchläuft. Der Beweis ist erbracht.

<sup>21</sup>Den Namen Leonhard Euler (1707-1783) finden wir fast in allen Bereichen der Mathematik. Euler wurde in der Schweiz geboren, lebte jedoch lange Jahre in Paris, Berlin und vor allem in Petersburg.

<sup>22</sup>Das Königsberger Brückenproblem wird in vielen Veröffentlichungen mit unterhaltungsmathematischer Thematik behandelt. Von deutsch geschriebenen Quellen sei hier nur beispielsweise das Buch [24], die Übersetzung des bekannten Werkes des polnischen Mathematikers H. Steinhaus, genannt.

<sup>23</sup>In der deutschsprachigen Literatur ist auch das Wort Kantenzug gebräuchlich.

Der Satz, den wir eben bewiesen haben, ist interessant an sich, dient uns aber auch als Hilfssatz beim Beweis einer weiteren Behauptung.

Satz 22. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein endlicher Graph  $\mathcal{G}$  ohne isolierte Knoten in einem geschlossenen Zug gebildet werden kann, ist die, dass  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender Eulerscher Graph ist.

Beweis. Wenn man  $\mathcal{G}$  in einem einzigen geschlossenen Zug bilden kann, dann ist  $\mathcal{G}$  offensichtlich zusammenhängend. In Graphen  $\mathcal{G}$  kann kein Knoten ungeraden Grades existieren, denn beim Ausführen des Zuges kommen wir ebenso oft zu  $v$ , wie wir  $v$  verlassen.  $\mathcal{G}$  ist also ein Eulerscher Graph.

Jetzt werden wir den zweiten Teil des Satzes beweisen, dass man nämlich jeden zusammenhängenden Eulerschen Graphen in einem geschlossenen Zug bilden kann. Wir wollen einen beliebigen Knoten  $w$  wählen. Nach Satz 21 existiert in unserem Graphen ein Kreis, der den Knoten  $w$  enthält. Aus den Knoten und Kanten dieses Kreises können wir leicht - einen geschlossenen Zug zusammensetzen, der im Knoten  $w$  beginnt und endet.

Von allen Zügen, die im Knoten  $w$  beginnen und enden, wollen wir einen solchen auswählen, der die größte Länge hat; wir bezeichnen diesen Zug mit  $\mathbf{Z}_{\max}$ . Wir zeigen, dass  $\mathbf{Z}_{\max}$  schon ein solcher geschlossener Zug ist, dessen Existenz wir beweisen wollen.

Angenommen irgendeine Kante des Graphen würde nicht zu  $\mathbf{Z}_{\max}$  gehören. Wir bilden den Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$  des Graphen  $\mathcal{G}$  so, dass zu  $\mathcal{G}_1$  alle Kanten von  $\mathcal{G}$  gehören, die nicht zu  $\mathbf{Z}_{\max}$  gehören, und ebenso alle Knoten, die mit diesen Kanten inzidieren.

Man sieht, dass  $\mathcal{G}_1$  ein Eulerscher Graph ist. Aus dem Zusammenhang des Graphen  $\mathcal{G}$  folgt, dass wenigstens ein Knoten  $x$  existiert, der dem Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$  und dem Zug  $\mathbf{Z}_{\max}$  gemeinsam ist.

Nach Satz 21 existiert in dem Graphen  $\mathcal{G}_1$  ein Kreis  $\mathcal{O}$ , der den Knoten  $x$  durchläuft, und dieser Kreis gehört demnach zu  $\mathcal{G}$ . Nun werden wir mit Leichtigkeit einen neuen Zug bilden, der im Knoten  $w$  beginnt und endet und zwar dadurch, dass wir zunächst längs  $\mathbf{Z}_{\max}$  bis zum Knoten  $x$ , dann auf dem Kreis  $\mathcal{O}$  erneut bis  $x$  und schließlich den Rest des Zuges längs  $\mathbf{Z}_{\max}$  gehen.

Dieser neue Zug hat jedoch eine größere Länge als der Zug  $\mathbf{Z}_{\max}$ , und das ist ein Widerspruch. Deshalb enthält  $\mathbf{Z}_{\max}$  jede Kante des Graphen  $\mathcal{G}$ , und der Satz ist damit bewiesen.

Nun betrachten wir diejenigen Graphen, die man mit einem offenen Zug bilden kann. Auch diese Graphen kann man, wie wir im nächsten Satz sehen, einfach und übersichtlich beschreiben.

Satz 23. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein endlicher Graph  $\mathcal{G}$  in einem offenen Zug gebildet werden kann, ist, dass  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender Graph mit genau zwei Knoten ungeraden Grades ist. Wenn  $\mathcal{G}$  genau zwei solche Knoten hat, dann beginnt der offene Zug in dem einen von ihnen und endet in dem anderen.

Beweis. Wenn man  $\mathcal{G}$  in einem offenen Zug bilden kann, der in einem Knoten  $x$  beginnt und in einem anderen Knoten  $y$  endet, dann sind die Knoten  $x$  und  $y$  in  $\mathcal{G}$  offenbar ungeraden Grades, und die anderen Knoten sind - sofern sie existieren - geraden Grades. Auch der Zusammenhang des Graphen  $\mathcal{G}$  ist offensichtlich.

Umgekehrt besitze  $\mathcal{G}$  genau zwei Knoten von ungeradem Grade; wir wollen sie mit  $x$  und  $y$  bezeichnen. Weiter sei  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender Graph. Wir wollen einen neuen Hilfsgraphen  $\mathcal{G}_1$  bilden, den wir wie folgt definieren:

Wir führen einen neuen Knoten  $z$  ein, der nicht zur Knotenmenge des Graphen  $\mathcal{G}$  gehört, und die zwei neuen Kanten  $xz$  und  $zy$ . Man sieht, dass  $\mathcal{G}_1$  ein zusammenhängender Eulerscher Graph ist, wir ihn also nach dem vorstehenden Satze in einem geschlossenen Zug bilden können. Diesen Zug beginnen wir im Knoten  $z$  und beenden ihn wieder in  $z$ .

Es genügt nun, zu dem ursprünglichen Graphen  $\mathcal{G}$  dadurch überzugehen, dass wir aus dem geschlossenen Zug den Knoten  $z$  sowie beide mit ihm inzidenten Kanten auslassen. So entsteht in  $\mathcal{G}$  ein offener Zug der geforderten Eigenschaft; damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen hier noch ohne Beweis und ohne genaue Angaben der Ergebnisse einige ähnliche Fragen erwähnen.

J. B. Listing<sup>24</sup> und E. Lucas<sup>25</sup> untersuchten im vorigen Jahrhundert diejenigen endlichen zusammenhängenden Graphen, die man nicht durch einen Zug bilden kann.

In diesem Falle interessierten sich beide Autoren für die kleinste Zahl von Zügen, mit denen man einen solchen Graphen bilden kann. Auch in neuerer Zeit sind interessante Arbeiten über die Eulerschen Graphen entstanden.

So beschrieb beispielsweise O. Ore im Jahre 1951 einen Sonderfall der Eulerschen Graphen. Seine Untersuchungen waren einem Eulerschen Graphen gewidmet, der einen Knoten  $u$  mit der Eigenschaft besitzt, dass alle Kreise des Graphen durch den Knoten  $u$  laufen.

Einigen weiteren Eigenschaften dieser Eulerschen Graphen schenkte im Jahre 1953 auch F. Bähler Beachtung.<sup>26</sup>

Zum Schluss sei bemerkt, dass die Frage, ob ein gegebener Graph in einem Zug gebildet werden kann, auch auf die gerichteten Graphen übertragen werden kann.

### Übungen

II. 12.1. In jedem Eulerschen Graphen existiert ein System von Kreisen  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_8$  von der Art, dass jede Kante unseres Graphen genau in einem Kreis  $\mathcal{K}_i$  enthalten ist. Man beweise das!

II. 12.2. Es ist ein vollständiger endlicher Graph  $\mathcal{G}$  gegeben, der  $n$  Knoten hat. Wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist, dann kann  $\mathcal{G}$  durch einen geschlossenen Zug gebildet werden. Ist  $n$  eine gerade Zahl, dann existieren in dem Graphen  $n/2$  offene Züge von der Art, dass jede Kante des Graphen  $\mathcal{G}$  genau zu einem dieser Züge gehört. Man beweise das!

II. 12.3. Ein zusammenhängender Eulerscher Graph  $\mathcal{G}$  habe folgende Eigenschaft:

Jeder geschlossene Zug, der im Knoten  $w$  beginnt und endet und der alle mit dem Knoten  $w$  inzidenten Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$  enthält, umfasst bereits alle Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$ . Es gilt dann: Jeder Kreis des Graphen  $\mathcal{G}$  läuft durch den Knoten  $w$ . Man beweise das!

## 2.13 Reguläre Faktoren

Wir haben in den vorangegangenen Betrachtungen festgestellt, dass die Gerüste wichtige Faktoren jedes endlichen zusammenhängenden Graphen sind. Jetzt werden wir Faktoren anderer

---

<sup>24</sup>Den Namen J.B. Listing (1808-1882) finden wir im 19. Jh. mehrmals in Zusammenhang mit Fragen, die zur Entstehung der Topologie beitragen. Listing, ursprünglich Astronom, wirkte in Göttingen und gab 1847, angeregt durch C. F. Gauß, ein Buch mit dem Titel "Vorstudien zur Topologie" heraus.

<sup>25</sup>E. Lucas (1842-1891) ist der Autor eines Buches über Unterhaltungsmathematik, das in vielen Auflagen erschienen ist. Außerdem wurde sein Name auch im Zusammenhang mit der Zahlentheorie bekannt.

<sup>26</sup>Elemente der Mathematik, 1951, S. 49-53; Comm. Math. Helv., 1953, S. 81-100.



Art untersuchen.

Es sei ein beliebiger Graph  $\mathcal{G}$  gegeben; in ihm existiere ein Faktor  $\mathcal{G}_1$ . Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  ein regulärer Graph  $k$ -ten Grades ist, dann sagen wir, dass  $\mathcal{G}_1$  ein Faktor  $k$ -ten Grades in dem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  ist. Wenn wir nicht ausdrücken wollen, um welchen Grad es sich handelt, sprechen wir mitunter einfach von einem regulären Faktor in dem gegebenen Graphen.

Ein Faktor 0. Grades existiert in jedem Graphen; dieser Fall ist daher ohne Interesse. Wenn in dem Graphen  $\mathcal{G}$  ein Faktor 1. Grades existiert, dann bezeichnen wir ihn auch als linearen Faktor.

Die notwendige Bedingung dafür, dass in einem endlichen Graphen  $\mathcal{G}$  ein Faktor ungeraden Grades existiert, ist, dass  $\mathcal{G}$  eine gerade Zahl von Knoten hat. Diese Behauptung ist die einfache Folgerung des Satzes 6.

Die genannte Bedingung ist allerdings nicht hinreichend. Man konstruiert leicht einen endlichen Graphen mit gerader Knotenzahl, in dem kein Faktor ungeraden Grades existiert. Hier genügt es, als Beispiel einen Stern mit gerader Knotenzahl zu wählen.

Einen Faktor 2. Grades nennen wir auch einen quadratischen Faktor. Wenn in einem endlichen Graphen  $\mathcal{G}$  ein quadratischer Faktor existiert, dann ist jede Komponente dieses Faktors ein Kreis. Viele Autoren haben die zusammenhängenden quadratischen Faktoren eines gegebenen Graphen studiert. Ein solcher zusammenhängender quadratischer Faktor heißt eine Hamiltonsche Linie, denn dieser Begriff hängt eng mit dem Problem zusammen, das W. R. Hamilton im Jahre 1859 gelöst hat.<sup>27</sup>

Die Hamiltonsche Arbeit beschäftigt sich mit einem Spiel, das darin besteht, alle Ecken eines Dodekaeders zu durchlaufen, dass man an den Kanten dieses Körpers entlangfährt, jede Ecke nur einmal berührt und zum Schluss zur Ausgangsecke zurückkehrt.<sup>28</sup>

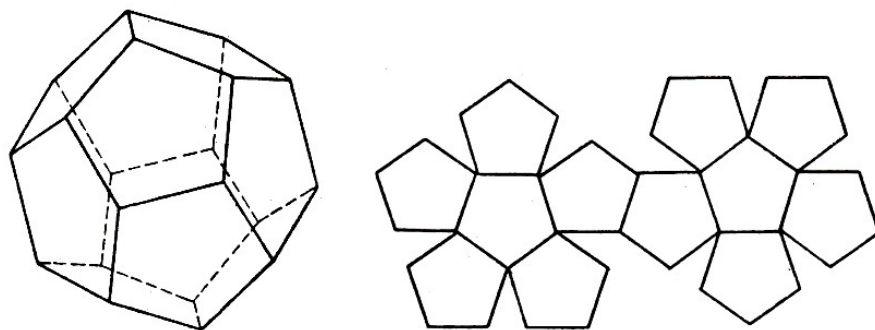


Bild 33,34

Wenn wir diese Hamiltonsche Aufgabe in der Sprache der Graphen formulieren würden, lautete sie wie folgt:

Es soll in dem Graphen, der in Bild 35 gezeigt ist, eine Hamiltonsche Linie gefunden werden. Die Antwort auf diese Frage ist schon in Bild 35 enthalten, denn dort sind die Kanten einer Hamiltonschen Linie stärker ausgezogen.

<sup>27</sup>Der irische Mathematiker W. R. Hamilton (1805-1865) ist in der Mathematik besonders durch die Einführung der Quaternionen bekannt, die eine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Algebra hatten. Hamilton hat außerdem einen Namen in der theoretischen Physik. Nach ihm ist das bekannte Hamiltonsche Prinzip benannt, ein sehr wichtiges Gesetz, das in der Optik, der klassischen Mechanik usw. eine große Rolle spielt. Es ist interessant, dass viele von den wertvollsten Forschungsergebnissen Hamiltons aus der Zeit stammen, als er erst zwanzig Jahre alt war.

<sup>28</sup>Das reguläre Zwölfflach (Dodekaeder) ist einer von den fünf regulären Körpern. Die Oberfläche des Dodekaeders setzt sich aus zwölf regulären Fünfecken zusammen. Die Skizze eines Dodekaeders sehen wir in Bild 33, während Bild 34 seine in die Ebene abgewinkelte Oberfläche zeigt.

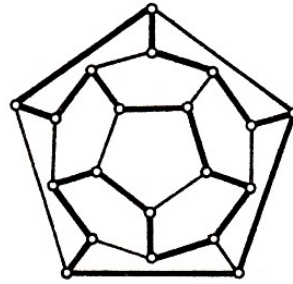


Bild 35

Es ist allerdings offensichtlich, dass im Graphen in Bild 35 auch andere Hamiltonsche Linien existieren, und es mag für den Leser eine leichte Übung sein, zu bestimmen, wieviele Hamiltonsche Linien in Bild 35 möglich sind.

Es ist selbstverständlich, dass eine Hamiltonsche Linie nur in einem zusammenhängenden Graphen existieren kann, der Zusammenhang ist aber offenbar keine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Hamiltonschen Linie.

Obwohl die Frage nach der Existenz Hamiltonscher Linien auf den ersten Blick einfach scheint, ist dies kein triviales Problem.

Mit dem Studium von Graphen mit Hamiltonschen Linien hat sich schon eine ganze Reihe von Autoren beschäftigt. Alle bisher veröffentlichten Arbeiten berücksichtigen jedoch meist nur Spezialgraphen und studieren an ihnen die Existenz der Hamiltonschen Linie. Eine interessante Bedingung hat G. A. Dirac gefunden:

Für die Existenz einer Hamiltonschen Linie in einem Graphen mit  $n$  Knoten ist hinreichend, dass jeder Knotengrad größer als  $n/2$  ist.

Wir wollen noch bemerken, dass mit den Hamiltonschen Linien auch die bekannte Aufgabe aus der Unterhaltungsmathematik zusammenhängt, bei der ein Springer das leere Schachbrett so durchlaufen soll, dass er durch jedes Feld gerade einmal hindurchgeht und beim letzten Zug auf das Ausgangsfeld zurückkehrt.

Wie lautet diese Aufgabe die mit dem Namen von L. Euler verbunden ist, in der Sprache der Graphen?

Die Antwort fällt leicht:

Wir ordnen jedem Feld auf dem Schachbrett einen Knoten des Graphen zu und verbinden zwei Knoten genau dann durch eine Kante, wenn nach den Regeln des Schachspiels der Springer einen Zug zwischen den diesen Knoten entsprechenden Feldern machen kann. Wir erhalten so einen Graphen mit 64 Knoten.

Wenn wir diesen Graphen allerdings wirklich im Bilde veranschaulichen wollten, wäre das Ergebnis wegen der großen Anzahl von Kanten recht unübersichtlich.

Jetzt zur eigentlichen Frage. Die Aufgabe fordert von uns, in dem so definierten Graphen eine Hamiltonsche Linie zu bilden. Wenn unser Graph auch unübersichtlich ist, so finden wir die Antwort auf die vorgelegte Frage doch ziemlich leicht. Es existieren hier nämlich eine ganze Anzahl der geforderten Hamiltonschen Linien, und eine von ihnen ist aus folgender Tafel (nächste Seite) ersichtlich.

In dieser quadratischen Tafel haben wir von einer Veranschaulichung der Knoten und Kanten des betrachteten Graphen abgesehen. Wir sehen hier ein quadratisches Schachbrett vor uns, dessen Felder mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 64 in derjenigen Reihenfolge bezeichnet sind, in der die Hamiltonsche Linie des betrachteten Graphen verläuft.

50	59	48	33	22	31	12	5
41	34	51	58	13	6	23	30
60	49	40	47	32	21	4	11
35	42	57	52	7	14	29	24
56	61	46	39	20	25	10	3
43	36	53	64	15	8	17	28
62	55	38	45	26	19	2	9
37	44	63	54	1	17	27	18

Es sei gesagt, dass sich schon eine große Anzahl von Mathematikern und Schachspielern mit der Aufgabe über die Züge der Springer beschäftigt hat; besonders im vorigen Jahrhundert wurden in dieser Hinsicht viele interessante Ergebnisse veröffentlicht.

Die Zahl der Hamiltonschen Linien in dem Graphen, der unserem Schachbrett entspricht, ist sehr groß, und bis heute wurde nicht genau ermittelt, wieviele von diesen Linien insgesamt existieren.

Eine der interessantesten dieser Hamiltonschen Linien ist jedoch offensichtlich diejenige, die 1862 der Schachtheoretiker Jaenisch beschrieben hat. Wenn wir uns an die gleichen Grundsätze halten, nach denen die vorangegangene quadratische Tafel aufgestellt wurde, dann kann man das Ergebnis Jaenischs durch folgende Tafel ausdrücken:

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Die Tafel ist ein magisches Quadrat, denn die Summe der in jeder ihrer Zeilen aufgeführten Zahlen und auch die Summe der in jeder ihrer Spalten aufgeführten Zahlen ist 260. Außerdem gibt die Tafel die Hamiltonsche Linie an, von der jetzt die Rede war, und sie hat noch eine Reihe weiterer interessanter Eigenschaften.<sup>29</sup>

### Übungen

II. 18.1. In einer Ecke eines quadratischen Schachbrettes mit 64 Feldern steht der Springer. Man entscheide, ob diese Figur das ganze Schachbrett so durchlaufen kann, dass sie in jedem Feld gerade einmal auftritt und in einem Feld endet, das dem Ausgangsfeld gegenüberliegt.

II. 18.2. Man entscheide, ob ein Springer ein quadratisches Schachbrett mit 49 Feldern so durchlaufen kann, dass er jedes Feld gerade einmal berührt und durch den letzten Zug auf das Ausgangsfeld zurückkehrt.

II. 18.3. Man überlege, mit welcher Schachaufgabe folgendes arithmetische Problem zusammenhängt: Man gebe 64 verschiedene Paare ganzer Zahlen  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{64}, b_{64})$  an,

<sup>29</sup>Ausführlicher kann man sich über die Beziehungen zwischen einem magischen Quadrat und der Aufgabe von den Zügen des Springers z. B. in dem Buch von W. Ahrens [1] informieren. Auch A. Sainte-Lague verweist in seiner Arbeit [23] auf magische Quadrate im Zusammenhang mit dieser Schachbrettaufgabe. In beiden Quellen finden sich weitere Hinweise auf Literatur.

wobei  $a_k, b_k$  die Werte  $1, 2, 3, \dots, 8$  annehmen können und wobei wir fordern, dass folgendes gelte:

$$(a_{k+1} - a_k)^2 + (b_{k+1} - b_k)^2 = 5$$

für  $k = 1, 2, 3, \dots, 63$  und

$$(a_{64} - a_1)^2 + (b_{64} - b_1)^2 = 5$$

II. 18.4. Man zeige, dass ein regulärer Graph dritten Grades, der keine Artikulation hat, keine Hamiltonsche Linie haben muss.

II. 18.5. Wenn ein endlicher Graph eine Brücke enthält, dann existiert in diesem Graphen keine Hamiltonsche Linie. In einem unendlichen Graphen, der eine Brücke enthält, kann jedoch eine Hamiltonsche Linie existieren. Man beweise das!

II. 18.6. Zu jeder natürlichen Zahl  $m$  existiert ein endlicher Graph, der gerade  $m$  Hamiltonsche Linien enthält. Man beweise das!

## 2.14 Zerlegungen regulärer Graphen in reguläre Faktoren

Ende des vorigen Jahrhunderts beschäftigte sich J. Petersen mit dem Studium regulärer Graphen und untersuchte vor allem, ob in ihnen reguläre Faktoren existieren. Wir wollen uns ein wenig mit dieser Problematik beschäftigen.

Angenommen, es sei ein regulärer Graph  $\mathcal{G}$  gegeben, der  $k$ -ten Grades ist, und es existiere in ihm ein Faktor  $l$ -ten Grades, den wir mit  $\mathcal{G}_1$  bezeichnen; dabei nehmen wir noch an, dass  $k > l > 0$  gilt.

Wir betrachten nunmehr diejenigen Kanten des Graphen  $\mathcal{G}$ , die nicht zum Faktor  $\mathcal{G}_1$  gehören.

Der Graph  $\mathcal{G}_2$  sei derjenige Faktor des Graphen  $\mathcal{G}$ , der gerade die Kanten enthält, die nicht zu  $\mathcal{G}_1$  gehören. Man sieht, dass  $\mathcal{G}_2$  gleichfalls ein regulärer Faktor des Graphen  $\mathcal{G}$  vom Grad  $k - l$  ist. Wir  $n$  auch, der ursprüngliche Graph  $\mathcal{G}$  sei das Produkt der Faktoren  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  oder  $\mathcal{G}$  könne in die zwei Faktoren  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  zerlegt werden.

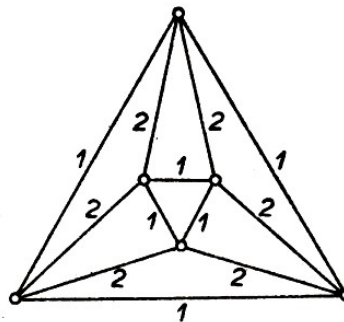


Bild 36

Beispiel 15. In Bild 36 sehen wir einen regulären Graphen 4. Grades<sup>30</sup>. Wir sollen diesen in zwei quadratische Faktoren zerlegen.

Wir sehen leicht, dass die Zerlegung nicht eindeutig ist. In Bild 36 sind die Kanten eines der gesuchten quadratischen Faktoren mit der Zahl 1 und die Kanten des zweiten mit der Zahl 2 bezeichnet. Man sieht also, dass in der genannten Zerlegung der erste Faktor nicht, der zweite Faktor aber sehr wohl zusammenhängend ist (dieser Faktor ist also eine Hamiltonsche Linie unseres Graphen).

<sup>30</sup>Diesem Graphen sind wir schon in Übung II. 6.4 begegnet; es ist dies ein Graph, der einem regulären Oktaeder entspricht.

Es sei dem Leser als Übung überlassen, den Graphen aus Bild 36 in zwei zusammenhängende quadratische Faktoren zu zerlegen.

Nun ist es kein Zufall, dass sich der reguläre Graph 4. Grades in zwei quadratische Faktoren zerlegen lässt, wie wir das in Beispiel 15 gesehen haben. Es lässt sich nämlich beweisen, dass jeder endliche reguläre Graph 4. Grades diese Eigenschaft hat.

Satz 24. Man kann jeden endlichen regulären Graphen 4. Grades in zwei quadratische Faktoren zerlegen.

Beweis. Wir wählen einen beliebigen endlichen regulären Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$ , der vom 4. Grade ist. Offenbar kann man sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf zusammenhängende Graphen beschränken. Ist unsere Behauptung nämlich für einen zusammenhängenden Graphen bewiesen, dann kann man sie auch auf den Fall eines nichtzusammenhängenden Graphen erweitern, wenn die erwähnte Zerlegung in jeder Komponente des Graphen gesondert vorgenommen wird.

Ist  $\mathcal{G}$  zusammenhängend, so ist  $\mathcal{G}$  ein spezieller endlicher zusammenhängender Eulerscher Graph. Nach Satz 22 kann man demnach den Graphen  $\mathcal{G}$  in einem geschlossenen Zug bilden. Die Kantenanzahl von  $\mathcal{G}$  ist nach Satz 1  $|K| = 2|U|$ , also gerade.

Nun wollen wir die beiden quadratischen Faktoren bilden, von deren Existenz in dem zu beweisenden Satz gesprochen wird. Dazu wählen wir in dem oben erwähnten Kantenzug eine Kante aus und bezeichnen sie mit 1.

Die folgende Kante erhält die Zahl 2, die nächste wieder 1, und so wechselt die Nummerierung dieses Zuges regelmäßig. Die Hälfte der Kanten unseres Zuges ist also mit 1 bezeichnet, die andere Hälfte mit der Zahl 2.

Wie man sieht, haben wir damit die Kanten unseres Graphen schon in die beiden quadratischen Faktoren eingeteilt.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Die Bezeichnungen, die wir in unseren Betrachtungen verwenden, erinnern an die Terminologie der Zahlentheorie, wo gleichfalls von Zerlegungen, Faktoren, Produkten u. dgl. gesprochen wird. Welcher Begriff aus unseren Betrachtungen entspricht nun in gewissem Sinne dem zahlentheoretischen Begriff der Primzahl?

Es ist dies offenbar der Begriff eines regulären Graphen (mindestens 2. Grades), der nicht in zwei reguläre Faktoren zerlegt werden kann; ein solcher regulärer Graph wird als primitiv bezeichnet.

Im Falle eines regulären Graphen 2. Grades ist jeder Kreis von ungerader Länge ein primitiver Graph. Nach Satz 24 wissen wir, dass jeder endliche reguläre Graph 4. Grades nicht primitiv ist.

Wir haben jedoch den Fall der regulären Graphen 3. Grades übersprungen. Wie verhält es sich hier mit der Primitivität eines Graphen ?

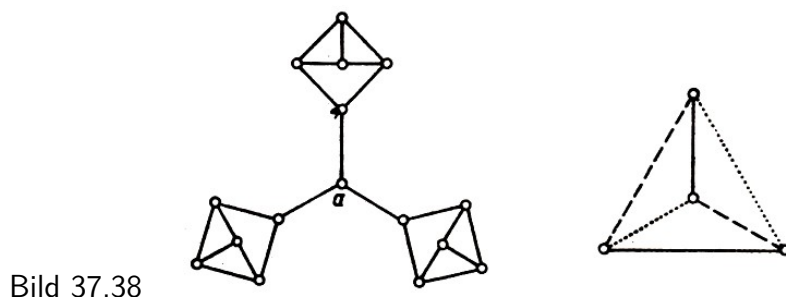


Bild 37,38

Man konstruiert sich leicht einen endlichen regulären Graphen 3. Grades, der primitiv ist. Ein Beispiel für einen solchen Graphen sehen wir in Bild 37, in dem ein Graph mit drei Brücken gezeigt wird. Offenbar sind in dem gegebenen Graphen die Brücken gerade die Kanten, die mit dem Knoten  $a$  inzidieren.

Wenn dieser Graph nämlich nicht primitiv wäre, so müsste er einen linearen Faktor besitzen, und dem müsste gerade eine der Brücken angehören. Dann würden jedoch die verbleibenden beiden Brücken zu dem quadratischen Faktor des Graphen gehören, und das ist nicht möglich. Der Graph in Bild 37 ist also tatsächlich primitiv.

Wir wollen noch die Zerlegung regulärer Graphen in eine größere Anzahl von Faktoren betrachten. Für einen regulären Graphen  $\mathcal{G}$  existiere eine Zerlegung in zwei reguläre Faktoren  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  und für den regulären Graphen  $\mathcal{G}_2$  existiere eine weitere Zerlegung in zwei reguläre Faktoren  $\mathcal{G}_3$  und  $\mathcal{G}_4$ . Dann sagen wir kurz, dass für  $\mathcal{G}$  eine Zerlegung in die drei regulären Faktoren  $\mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{G}_3$  und  $\mathcal{G}_4$  existiert.

Auf ähnliche Weise wird die Zerlegung eines regulären Graphen in eine größere Anzahl von Faktoren definiert.

Beispiel 16. Ein vollständiger Graph mit vier Knoten ist ein regulärer Graph 3. Grades. Für diesen Graphen existiert eine Zerlegung in drei lineare Faktoren.

Das zeigt Bild 38, in dem die Kanten des ersten Faktors voll ausgezogen, die Kanten des zweiten Faktors gestrichelt und diejenigen des dritten Faktors punktiert dargestellt sind.

Wir haben uns bereits davon überzeugt, dass unter den endlichen regulären Graphen 3. Grades ein primitiver Graph existiert. Wenn der reguläre Graph 3. Grades nicht primitiv ist, dann können wir uns die weitere Frage vorlegen, ob es möglich ist, diesen Graphen in drei lineare Faktoren zu zerlegen oder nicht.

In Beispiel 16 haben wir den ersten Fall kennengelernt, während Bild 28 den zweiten Fall zeigt. In Bild 28 ist ein Graph mit einer Brücke angegeben, den wir leicht in einen linearen und einen quadratischen Faktor zerlegen können.

Die Brücke unseres Graphen kann nicht zu dem quadratischen Faktor gehören, so dass bei jeder derartigen Zerlegung unseres Graphen die Brücke in einem linearen Faktor liegt. Der quadratische Faktor ist dann allerdings nicht zusammenhängend, sondern hat zwei Komponenten, und zwar jede mit fünf Knoten. Der Kreis der Länge 5 hat jedoch keinen linearen Faktor, und darum kann der Graph aus Bild 28 nicht in drei lineare Faktoren zerlegt werden.

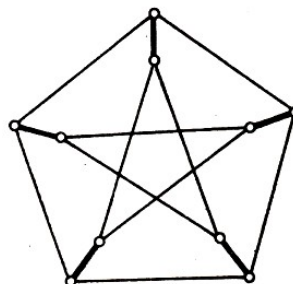


Bild 39

Wir wollen noch einen Graphen anführen, den J. Petersen konstruiert hat; er ist in Bild 39 zu sehen. Es ist dies wiederum ein regulärer Graph 3. Grades, der nicht in drei lineare Faktoren zerlegt werden kann.

In diesem Graphen existiert allerdings eine Zerlegung in einen linearen und einen quadratischen Faktor - die Kanten des linearen Faktors sind in unserem Bild stärker ausgezogen.

Der Leser möge sich überlegen, dass es wirklich nicht möglich ist, den Petersenschen Graphen

in drei lineare Faktoren zu zerlegen. Das Bild 37 lässt vermuten, dass die Primitivität des hier veranschaulichten Graphen mit der Existenz einer Brücke zusammenhängt. Wir haben auch in Bild 28 aus der Existenz einer Brücke geschlossen, dass dieser Graph nicht in drei lineare Faktoren zerlegt werden kann. Der Petersensche Graph enthält jedoch keine Brücke, und darin besteht auch seine Bedeutung.<sup>31</sup>

Übungen

II. 14.1. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen zusammenhängenden regulären Graphen 3. Grades an, der in drei lineare Faktoren zerlegt werden kann!

II. 14.2. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen zusammenhängenden regulären Graphen 3. Grades an, der primitiv ist!

II. 14.3. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen zusammenhängenden regulären Graphen 3. Grades an, der nicht primitiv ist, jedoch nicht in drei linearen Faktoren zerlegt werden kann!

## 2.15 Chromatische Zahlen

Eines der Probleme, das schon seit Jahrzehnten Anregungen für die Entwicklung der Graphentheorie liefert und bis heute nicht gelöst wurde, ist das sogenannte Vierfarbenproblem.

So wird die folgende scheinbar einfache Fragestellung genannt, von deren Schwierigkeit sich schon im vorigen Jahrhundert zahlreiche Mathematiker überzeugt haben.

Stellen wir uns vor, auf einer Landkarte seien mehrere Staaten dargestellt. Wir sollen die Karte mit einigen Farben so färben, dass zwei Nachbarstaaten niemals die gleiche Farbe erhalten. Unter Nachbarstaaten verstehen wir dabei Gebiete, die eine gemeinsame Grenze haben. Wir fragen, wieviele Farben zur Färbung einer solchen Karte ausreichen.

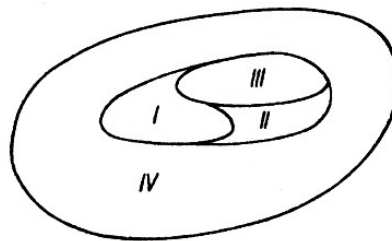


Bild 40

In Bild 40 ist eine Karte mit vier Staaten schematisch dargestellt, die dort mit I, II, III, IV nummeriert sind. Man sieht, dass auf dieser Karte jeder Staat mit jedem anderen benachbart ist, und dass wir also zur Färbung vier Farben brauchen. Die Erfahrung zeigt, dass vier Farben zur Färbung jeder Karte ausreichen.

Diese Behauptung wurde bisher jedoch weder bewiesen noch gelang es, sie zu widerlegen. Es ist jedoch bekannt, dass fünf Farben zur Färbung jeder Karte ausreichen.

Wir können die Frage der Färbung einer Karte leicht in ein Problem der Färbung der Knoten eines bestimmten Graphen überführen. Stellen wir uns vor, dass wir in jedem Staat einen Ort wählen (z. B. die Hauptstadt) und ihm einen Knoten eines Graphen zuordnen. Die Kanten dieses Graphen führen wir auf folgende Weise ein: Wenn zwei Staaten eine gemeinsame Grenze haben, dann verbinden wir die beiden den Staaten entsprechenden Knoten durch eine Kante.

<sup>31</sup>J. Petersen hat nachgewiesen, dass jeder endliche reguläre Graph 3. Grades, der keine Brücke enthält, in zwei Faktoren zerlegt werden kann. Bild 39 ergänzt also eigentlich diesen Petersenschen Satz, denn es zeigt, dass es allgemein nicht mehr möglich ist, diese Zerlegung "zu verfeinern".

Haben sie keine gemeinsame Grenze, dann soll keine Kante existieren. So entspricht beispielsweise der Karte, die wir in Bild 40 sehen, ein vollständiger Graph mit vier Knoten.

Der Färbung der Staaten entspricht also eine Färbung der entsprechenden Knoten, und so ist klar, dass wir das Vierfarbenproblem als ein Problem der Graphentheorie formulieren können.<sup>32</sup>

Wir wollen nun annehmen, es sei ein beliebiger Graph  $\mathcal{G}$  gegeben. Angenommen, wir haben  $k$  verschiedene Farben, und es gelingt uns, jeden Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  mit einer von ihnen so zu färben, dass keine Kante des Graphen  $\mathcal{G}$  mit zwei gleichgefärbten Knoten inzidiert.

Wenn das möglich ist, dann sagen wir, der Graph sei  $k$ -chromatisch.

Es ist unmittelbar zu sehen, dass jeder  $k$ -chromatische Graph zugleich ein  $(k+1)$ -chromatischer Graph ist. Ist  $\mathcal{G}$  ein  $k$ -chromatischer, dagegen kein  $(k-1)$ -chromatischer Graph, so heißt die Zahl  $k$  die chromatische Zahl von  $\mathcal{G}$ .

Beispiel 17. Es ist ein Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$  gegeben, der wenigstens eine Kante hat. Wir wollen die chromatische Zahl des Graphen  $\mathcal{B}$  bestimmen.

Man sieht an Hand einer Skizze leicht ein, dass die gesuchte chromatische Zahl 2 ist. Diese Vermutung werden wir beweisen.

Eine einzige Farbe genügt nicht zum Färben, die chromatische Zahl ist also mindestens 2. Wir werden nun zeigen, dass zwei Farben bereits zur Färbung genügen. Wenn in unserem Graphen  $|U| = 2$  ist, dann färben wir jeden der beiden Knoten mit einer anderen Farbe und sind fertig. Es sei nun  $n$  eine natürliche Zahl so, dass jeder Baum mit  $n$  Knoten mit zwei Farben gefärbt werden kann. Wir betrachten nun einen beliebigen Baum  $\mathcal{B} = [U, K]$ , in dem  $|U| = n + 1$  ist. Nach Satz 8 wissen wir, dass  $\mathcal{B}$  wenigstens zwei Knoten 1. Grades hat; wir wählen einen von ihnen aus und bezeichnen ihn mit  $x$ .

Nach Satz 4 wissen wir, dass der Zusammenhang des Baumes  $\mathcal{B}$  nicht gestört wird, wenn wir den Knoten  $x$  und die mit ihm inzidente Kante  $xy$  entfernen. Der neu entstandene Baum hat  $n$  Knoten, die man nach unserer Annahme mit zwei Farben färben kann.

Wir übertragen nun die Färbung des betrachteten Hilfsbaumes auf  $\mathcal{B}$  und wählen für  $x$  die von der Farbe von  $y$  verschiedene Farbe. Damit ist die in unserem Beispiel gestellte Frage beantwortet.

Welche Graphen haben die chromatische Zahl 1? Die Antwort ist einfach - es sind gerade die Graphen, deren sämtliche Knoten isoliert sind. Als nächstes betrachten wir Graphen mit der chromatischen Zahl 2.

In Beispiel 17 haben wir gesehen, dass zu den Graphen mit dieser chromatischen Zahl alle Bäume mit wenigstens einer Kante gehören; es gehört zu diesen Graphen aber auch z. B. jeder Kreis von gerader Länge. Es ist interessant, dass sich eine sehr einfache notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben lässt, dass ein endlicher Graph die chromatische Zahl 2 hat.

Mit dieser Bedingung machen wir uns im nächsten Satz vertraut.

Satz 25. Ein endlicher Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$ , indem  $K \neq 0$  ist, hat genau dann die chromatische Zahl 2, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beweis. Wenn in  $\mathcal{G}$  ein Kreis ungerader Länge existiert, dann kann man offenbar die Knoten

<sup>32</sup>Bei der Formulierung dieses Problems werden in der Graphentheorie jedoch einige Voraussetzungen gemacht, von denen die wesentlichste besagt, dass die zu färbende Landkarte auf einem Globus aufgezeichnet ist. Ist das zu färbende Gebiet beispielsweise eine Insel, so wird hiernach gefordert, dass nicht nur alle auf der Insel liegenden Länder, sondern auch das umgebende Wasser eine Farbe erhält.



dieses Kreises nicht mit zwei Farben so färben, dass keine Kante mit zwei gleichgefärbten Knoten inzidiert. In diesem Falle ist also die chromatische Zahl größer als 2.

$\mathcal{G}$  möge also keinen Kreis von ungerader Länge enthalten. Dann wollen wir beweisen, dass zwei Farben zur Färbung der Knoten in der vereinbarten Weise genügen.

Weiter können wir uns auf zusammenhängende Graphen beschränken; denn die Knoten kann man in jeder Komponente des Graphen unabhängig voneinander färben. Wir liefern hier den Beweis durch vollständige Induktion nach der Zahl der Kreise in unserem Graphen.

Wenn  $\mathcal{G}$  keinen Kreis enthält, dann ist  $\mathcal{G}$  ein Baum; aus Beispiel 17 wissen wir, dass seine chromatische Zahl 2 ist. Nehmen wir also an, dass für eine gewisse natürliche Zahl  $k$  folgende Induktionsvoraussetzung gilt:

Wenn ein zusammenhängender Graph weniger als  $k$  Kreise enthält und alle diese Kreise von gerader Länge sind, dann ist die chromatische Zahl des Graphen 2. Wir wählen nun einen zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}_k$ , der gerade  $k$  Kreise hat, die alle von gerader Länge sind.<sup>33</sup> Wir werden beweisen, dass auch  $\mathcal{G}_k$  die chromatische Zahl 2 hat.

Dazu wählen wir in  $\mathcal{G}_k$  einen Kreis aus und bezeichnen ihn mit  $\mathcal{K}$ . Dann entfernen wir aus dem Graphen  $\mathcal{G}_k$  eine Kante  $xy$  des Kreises  $\mathcal{K}$  und erhalten so einen neuen zusammenhängenden Graphen, den wir mit  $\mathcal{G}^*$  bezeichnen und der höchstens  $k - 1$  Kreise hat.

Nach der Induktionsvoraussetzung hat  $\mathcal{G}^*$  die chromatische Zahl 2. Wir fragen uns, ob die Knoten  $x$  und  $y$  in der entsprechenden Färbung der Knoten gleich oder verschieden gefärbt sind. Es genügt, den Kreis  $\mathcal{K}$  zu betrachten und aus ihm die Kante  $xy$  zu entfernen.

Da  $\mathcal{K}$  eine gerade Länge hat, erhalten wir so einen Baum (vom Typ einer "Schlange") mit gerader Knotenzahl, wobei sich vom Knoten  $x$  zum Knoten  $y$  hin auf diesem Gebilde die Farben der Knoten abwechseln.

In dem Graphen  $\mathcal{G}^*$  sind also  $x$  und  $y$  verschieden gefärbt, und man kann die Färbung der Knoten des Graphen  $\mathcal{G}^*$  demnach auf  $\mathcal{G}_k$  übertragen. Die chromatische Zahl des Graphen  $\mathcal{G}_k$  ist also 2. Damit ist der Beweis erbracht.

Die Graphen mit der chromatischen Zahl 2 haben noch eine Reihe weiterer interessanter Eigenschaften und wurden deshalb in der Literatur recht oft studiert.

Ein Graph mit der chromatischen Zahl 2 heißt bei vielen Autoren ein paarer Graph. Einige Eigenschaften der paaren Graphen hat A. B. Kempe schon im Jahre 1879 bemerkt; später schenkten u. a. A. Sainte-Lague und D. König diesen Graphen ihr Augenmerk.

Oft wurden auch die sog. vollständig paaren Graphen untersucht. Darunter versteht man einen Graphen mit der chromatischen Zahl 2, in dem je zwei Knoten, die verschiedene Farben haben, durch eine Kante verbunden sind. Ohne Beweis führen wir hier ein Ergebnis über vollständig paare Graphen ein.

Wenn wir mit  $a$  bzw. mit  $b$  die Knotenzahl der ersten bzw. zweiten Farbe bezeichnen, dann hat der vollständig paare Graph gerade  $a^{a-1} \cdot b^{b-1}$  Gerüste.

Zu diesem Ergebnis, das an die Cayleysche Formel für die Gerüstzahl eines vollständigen Graphen erinnert, gelangten M. Fiedler und der Verfasser dieses Büchleins in einer gemeinsamen Arbeit im Jahre 1958.<sup>34</sup>

## Übungen

<sup>33</sup>Der Leser wird selbst erkennen, dass für jedes  $k$  ein solcher Graph existiert.

<sup>34</sup>Oasopis Post. Mat., 1958, 3. 214-225.

II. 15.1. Man zeige, dass zu jeder natürlichen Zahl  $n$  ein Graph existiert, dessen chromatische Zahl gleich der Zahl  $n$  ist.

II. 15.2. Es ist ein Graph  $\mathcal{G}_1$  gegeben, der die chromatische Zahl  $c_1$  hat, und weiter ein Graph  $\mathcal{G}_2$  mit der chromatischen Zahl  $c_2$ . Wenn  $\mathcal{G}_1$  ein Teilgraph des Graphen  $\mathcal{G}_2$  ist, dann gilt  $c_1 \leq c_2$ . Man beweise das!

II. 15.3. Man bestimme die maximale Anzahl der Kanten für einen paaren Graphen mit  $2n$  bzw. mit  $2n + 1$  Knoten.

II. 15.4. Man bestimme die Knoten- und Kantenzusammenhangszahl für einen vollständig paaren Graphen, wenn  $a$  bzw.  $b$  die Knotenzahl der ersten bzw. zweiten Farbe bedeutet.

## 2.16 Knotenbasen

Wir wenden uns nun einer Anzahl von Fragen zu, die in verschiedenen Bereichen der Mathematik, vor allem aber in der Unterhaltungsmathematik auftreten. Dies sind in erster Linie die Schachbrettaufgaben, in denen z. B. gefordert wird, auf einem leeren Schachbrett eine möglichst kleine Anzahl von Königen so aufzustellen, dass jedes freie Feld des Schachbrettes wenigstens von einem König bedroht ist.<sup>35</sup>

Eine solche Aufgabe können wir leicht in ein Problem der Graphentheorie überführen, wobei wir die Felder auf dem Schachbrett als Knoten eines Graphen betrachten und für jedes Paar von benachbarten Feldern Kanten einführen.

Auch bei dem Spiel "6 aus 49" tritt eine ähnliche Frage auf. Bekanntlich werden beim "Sportfest-Toto" (die tschechische Bezeichnung für diese Wettart ist "Sportka") 6 Sportarten von insgesamt 49 möglichen getippt.

Der Spieler, der wenigstens 3 Sportarten richtig geraten hat, erhält einen Gewinn im ersten, zweiten, dritten oder vierten Rang. Hier ergibt sich folgende Frage: Wie oft muss ein Spieler sechs Sportarten ankreuzen, wenn er sich einen Gewinn wenigstens im vierten Rang sichern will.

Auch diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe eines Graphen veranschaulichen.

Als Knoten des Graphen nehmen wir hier alle möglichen Sechserkombinationen, von denen es  $\binom{49}{6}$  gibt, und definieren die Kanten wie folgt:

Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die ihnen entsprechenden 6 Sportarten wenigstens drei Elemente gemeinsam haben. In einem so definierten Graphen haben wir eine möglichst kleine Knotenzahl so zu kennzeichnen, dass jeder nichtmarkierte Knoten durch eine Kante wenigstens mit einem markierten Knoten verbunden wird.

Die beiden Beispiele, mit denen wir diesen Abschnitt eingeleitet haben, führen uns zur Definition eines allgemeineren Begriffes aus der Graphentheorie, nämlich der Knotenbasis<sup>36</sup> eines gegebenen Graphen.

Ehe wir die entsprechende Definition geben, wollen wir bemerken, dass dieser Begriff in ver-

<sup>35</sup>Wir möchten an dieser Stelle auf das Buch "Nichtelementare Aufgaben in elementarer Darstellung" hinweisen, das 1954 in Moskau erschienen ist und in dem die Autoren A. M. Jaglom und I. M. Jaglom gleichfalls Schachbrettaufgaben behandeln. In der am Schluss unseres Buches angegebenen Literatur wird diese Problematik vor allem in den Arbeiten [1], [3], [9], [15], [16] und [24] berührt.

<sup>36</sup>D. König hat in seinem Buch [15] den deutschen Terminus "Punktbasis" eingeführt. König definierte auch eine Kantenbasis. Mit diesem Begriff werden wir uns hier aber nicht beschäftigen.

schiedenen Bedeutungen auftritt. Um diese Varianten voneinander zu unterscheiden, sprechen wir gewöhnlich von einer Knotenbasis erster, zweiter Art usw.<sup>37</sup>

Es sei ein endlicher Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  gegeben. Dann kann man eine Teilmenge  $B$  von  $U$  so angeben, dass für jeden Knoten  $x \in U$ , für den  $x \notin B$  gilt, wenigstens ein Knoten  $y \in B$  mit  $xy \in K$  vorhanden ist.

Da die Menge  $U$  nur endlich viele Teilmengen hat, können wir aus allen Mengen  $B$ , welche die obengenannte Forderung erfüllen, diejenige auswählen, die die kleinste Zahl von Elementen hat. Eine solche Menge bezeichnen wir mit  $B_{\min}$  und nennen sie Knotenbasis erster Art (für den gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$ ).

Es ist also offensichtlich, dass in jedem endlichen Graphen  $\mathcal{G}$  eine Knotenbasis  $B_{\min}$  existiert. Wir fragen uns nun, ob diese eindeutig bestimmt ist. Dies ist nicht der Fall, jedoch ist die Zahl  $|B_{\min}|$  für den gegebenen Graphen eindeutig bestimmt. Das sehen wir übrigens auch im nächsten Beispiel.

Beispiel 18. Wir bestimmen alle Knotenbasen erster Art des Graphen, der in Bild 41 dargestellt ist.

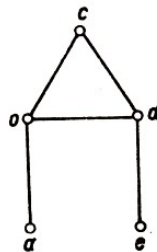


Bild 41

Die gesuchte Basis kann nicht aus einem einzigen Knoten bestehen, da man zu jedem Knoten  $x$  des Graphen einen Knoten  $y$  so finden kann, dass die Kante  $xy$  nicht in dem gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$  enthalten ist. Jede Knotenbasis erster Art hat also wenigstens zwei Elemente.

Wir finden leicht heraus, dass hier insgesamt drei Basen mit zwei Elementen existieren, nämlich  $\{a, d\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{b, e\}$ .

In einem weiteren Beispiel zeigen wir, wie Knotenbasen in einer Aufgabe mit einem Schachbrett gesucht werden. Wir begegnen dort dem allgemeineren Typ eines quadratischen Schachbrettes, nämlich einem Schachbrett mit  $n^2$  Feldern (wobei  $n$  eine fest gegebene natürliche Zahl ist).

Diese allgemeineren Schachbretter treten in mathematischen Betrachtungen oft auf, und es ist im wesentlichen klar, wie wir die Regeln über die Bewegung der Figuren, die vom Brett mit 64 Feldern bekannt sind, auf sie übertragen sollen.

Beispiel 19. Auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit  $n^2$  Feldern wollen wir eine möglichst kleine Zahl von Türmen so aufstellen, dass jedes freie Feld wenigstens von einem Turm bedroht ist. Auf wieviele Arten kann man diese minimale Anzahl von Türmen auf dem Schachbrett aufstellen?

Es ist offenbar, dass wir in diesem Beispiel die Knotenbasen für einen Graphen suchen, der  $n^2$  Knoten hat und dessen Kanten entsprechend den bekannten Zügen des Turmes auf dem Schachbrett bestimmt werden. Zuerst bestimmen wir, wieviele Elemente eine der gesuchten Basen hat.

<sup>37</sup>Das Wort "Basis" (aus dem Griechischen) bedeutet wörtlich: Grundlage, Unterlage.

Wenn auf unserem Schachbrett weniger als  $n$  Türme stehen, dann können sie nicht alle seine Felder bedrohen.

In einem solchen Falle können wir nämlich wenigstens eine Spalte von Feldern finden, in der kein Turm steht.

Diese Spalte hat  $n$  Felder, die deshalb nicht alle von unseren Türmen bedroht werden können, weil jeder Turm auf diese Spalte nur in waagerechter Richtung einwirkt und die Gesamtzahl der Türme kleiner als  $n$  ist. Die zu suchende Basis hat also wenigstens  $n$  Elemente.

Hiernach ist klar, dass, wenn wir mit den Türmen z. B. die ganze erste Spalte besetzen, die Bedingungen unseres Beispiels erfüllt sind. Die gesuchte Basis hat also gerade  $n$  Elemente.

Jetzt werden wir uns mit der Frage beschäftigen, auf wieviele Arten man auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit  $n^2$  Feldern  $n$  Türme so aufstellen kann, dass jedes freie Feld wenigstens von einem Turm bedroht wird. Wenn  $n$  Türme so auf unserem Schachbrett aufgestellt sind, dann steht entweder in jeder Spalte oder in jeder Reihe ein Turm.

Gäbe es nämlich auf dem Schachbrett gleichzeitig eine Spalte und eine Reihe ohne einen Turm, dann wäre das in ihrem Schnittpunkt liegende Feld durch keinen Turm bedroht. Die Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  Türme in den  $n$  Spalten unseres Schachbrettes aufzustellen, ist gleich der Zahl  $n^n$ .

Den ersten Turm können wir nämlich auf  $n$  Arten in der ersten Spalte unterbringen, den zweiten unabhängig vom vorhergehenden wiederum auf  $n$  Arten in der zweiten Spalte usw. Die Zahl  $n^n$  bezeichnet aber auch die Anzahl der Arten, auf die man  $n$  Türme in den Zeilen des Schachbrettes aufstellen kann. Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob die von uns gesuchte Anzahl deshalb gleich der Summe  $n^n + n^n$ , also gleich der Zahl  $2n^n$  ist.

Das ist jedoch nicht richtig, denn dann würden wir die Stellung zweimal rechnen, in der in jeder Spalte und in jeder Zeile gerade ein Turm steht. Es ist also erforderlich, von der Zahl  $2n^n$  die Anzahl der Möglichkeiten abzuziehen, auf die man  $n$  Türme so auf dem Schachbrett aufstellen kann, dass in jeder Spalte und jeder Zeile genau ein Turm steht.

Diese Anzahl ist offensichtlich gleich der Zahl der Permutationen aus  $n$  Elementen, d. h. der Zahl  $n!$ .

In dem Graphen, dem wir bei der Lösung der gegebenen Aufgabe begegnet sind, existieren also insgesamt  $2n^n - n!$  Knotenbasen erster Art.

Nun wollen wir von einer anderen Definition der Knotenbasis sprechen, die gleichfalls in manchen Aufgaben mit Schachthematik auftritt. Es sei ein Graph  $\mathcal{G} = [U, K]$  gegeben:

Eine Menge  $B^*$  mit  $B^* \subseteq U$  nennen wir eine Knotenbasis zweiter Art (für den gegebenen Graphen  $\mathcal{G}$ ), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Wenn  $x$  und  $y$  zwei verschiedene Knoten aus  $B^*$  sind, dann gilt  $xy \in K$ .
- (2) Wenn  $z \in U$  und  $z \notin B^*$  ist, dann existiert wenigstens ein Knoten  $t \in B^*$  von der Art, dass  $zt \in K$  ist.

Beispiel 20. Wir bestimmen alle Knotenbasen zweiter Art für den Graphen, der in Bild 41 dargestellt ist und den wir schon in Beispiel 18 studiert haben.

Wir sehen leicht ein, dass hier insgesamt drei Basen zweiter Art existieren, nämlich  $\{a, c, e\}$ ,  $\{a, d\}$  und  $\{b, e\}$ .

Wenn wir Beispiel 18 mit Beispiel 20 vergleichen, können wir zu mehreren Schlussfolgerungen gelangen. In beiden Fällen treten gemeinsam die Mengen  $\{a, d\}$  und  $\{b, e\}$  auf, so dass diese Mengen sowohl Knotenbasen erster als auch zweiter Art sind. Demgegenüber sind wir in

Beispiel 18 zu einer Menge  $\{b, d\}$  gelangt, die keine Knotenbasis zweiter Art ist, und in Beispiel 20 erfüllt wieder die Menge  $\{a, c, e\}$  nicht die Voraussetzungen für eine Knotenbasis erster Art. Für die Knotenbasen zweiter Art leiten wir einen allgemeinen Satz ab, nämlich:

Satz 26. In jedem endlichen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  existiert wenigstens eine Knotenbasis zweiter Art.

Beweis. Wir werden diesen Satz mit Hilfe vollständiger Induktion beweisen. Wenn  $|U| = 1$  ist, dann ist die Existenz einer Basis offensichtlich; die Menge  $U$  bildet nämlich eine Basis.

Es sei  $u$  eine natürliche Zahl  $> 1$  so, dass jeder Graph, der weniger als  $u$  Knoten hat, eine Knotenbasis zweiter Art besitzt. Wir wählen nun einen beliebigen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$ , in dem  $|U| = u$  ist.

Wir bilden einen Teilgraphen  $\mathcal{G}_1$  des Graphen  $\mathcal{G}$  so, dass wir aus  $\mathcal{G}$  irgendeinen fest gewählten Knoten  $x$  und alle mit diesem Knoten inzidenten Kanten entfernen (vorausgesetzt allerdings, dass solche Kanten existieren).

Der Graph  $\mathcal{G}_1$  erfüllt die Induktionsvoraussetzung, und wir können in ihm also wenigstens eine Knotenbasis zweiter Art bilden; wir bezeichnen sie mit  $B_1^*$ .

Nunmehr gehen wir zum Graphen  $\mathcal{G}$  über und werden hier die Basis  $B^*$  wie folgt definieren: Wir setzen  $B^* = B_1^*$ , wenn ein Knoten  $y \in B_1^*$  der Art existiert, dass die Kante  $xy$  zum Graphen  $\mathcal{G}$  gehört. Ist das nicht der Fall, dann setzen wir  $B^* = B_1^* \cup \{x\}$ . Es ist offensichtlich, dass  $B^*$  eine Basis ist; der Beweis ist damit erbracht.

Der Satz 26 garantiert uns also die Existenz wenigstens einer Knotenbasis zweiter Art; wir wissen allerdings aus Beispiel 20, dass diese Basis im Graphen nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht und dass auch die Zahl der Knoten dieser Basis nicht eindeutig bestimmt ist.

Am Schluss dieses Paragraphen wollen wir uns noch mit dem klassischen Problem der Damen auf dem Schachbrett beschäftigen. In der Mitte des vorigen Jahrhunderts erschien in der Schachrubrik einer deutschen illustrierten Zeitschrift folgende Aufgabe:

Wir wollen auf einem normalen Schachbrett acht Damen so aufstellen, dass keine von ihnen eine der anderen bedroht, und es soll angegeben werden, wieviele Lösungen es für diese Aufgabe gibt.

Dieselbe Zeitschrift brachte dann auch eine Antwort, derzufolge man insgesamt 92 Lösungen gefunden hat. Diese Aufgabe nahm auch den berühmten Mathematiker C. F. Gauß gefangen, wie seine Korrespondenz mit H. O. Schumacher aus dem Jahre 1850 zeigt.

Spätere Autoren schenken diesem Problem der acht Damen ebenfalls Aufmerksamkeit und lösten die Aufgabe auch für andere quadratische Schachbretter. Was bedeutet aus unserer Sicht die Aufgabe über die acht Damen?

Offenbar geht es um das Auffinden einer Knotenbasis zweiter Art. Da es auf einem Schachbrett mit 64 Feldern nicht möglich ist, mehr als 8 Damen so aufzustellen, dass keine eine andere bedroht, soll die zu suchende Basis zweiter Art eine möglichst große Anzahl von Elementen haben.

Wenn wir von dem allgemeineren quadratischen Schachbrett ausgehen, das  $n^2$  Felder hat, können wir auf ähnliche Weise folgende Forderung formulieren: Es sollen hier  $n$  Damen so aufgestellt werden, dass keine von ihnen eine andere bedroht.

Schon die Fälle  $n = 2$  und  $n = 3$  zeigen, dass diese Aufgabe im allgemeinen nicht lösbar ist. Wenn die natürliche Zahl  $n$  anwächst, dann wachsen auch sehr schnell die Schwierigkeiten, mit

denen unsere Untersuchungen verbunden sind. Das Problem wurde für die natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, 3, \dots, 13$  untersucht. Wenn wir mit  $N$  die entsprechende Anzahl der Lösungen der genannten Aufgabe bezeichnen, dann kann man das Ergebnis in folgender Tafel zusammenfassen:<sup>38</sup>

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$N$	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200	73712

Übungen

II. 16.1. Wenn wir in einem gegebenen Graphen mit  $B_{\min}$  eine Knotenbasis erster Art und mit  $B_1^*$ , eine Knotenbasis zweiter Art bezeichnen, die eine möglichst kleine Anzahl von Elementen hat, so gilt  $|B_{\min}| \leq |B_1^*|$ . Man beweise das und gebe ein Beispiel für einen Graphen an, in dem  $|B_{\min}| < |B_1^*|$  gilt.

II. 16.2. Auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit  $n^2$  Feldern sollen wir eine möglichst große Anzahl Türme so aufstellen, dass sich niemals zwei Figuren gegenseitig bedrohen. Auf wieviele verschiedene Arten kann man das tun?

II. 16.3. Auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit  $n^2$  Feldern sollen wir eine möglichst kleine Anzahl Läufer so aufstellen, dass jedes freie Feld des Schachbrettes wenigstens von einem Läufer bedroht wird. Man bestimme diese minimale Anzahl von Läufern.

II. 16.4. Auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit  $n^2$  Feldern sollen wir eine möglichst große Anzahl Läufer so aufstellen, dass niemals zwei Läufer einander bedrohen. Man bestimme die maximale Anzahl von Läufern.

II. 16.5. Auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit 64 Feldern sollen wir eine möglichst große Anzahl Springer so aufstellen, dass niemals zwei Figuren einander bedrohen. Wieviele Springer können höchstens auf dem Schachbrett stehen?

II. 16.6. Man gebe alle Möglichkeiten an, auf einem leeren quadratischen Schachbrett mit 16 Feldern vier Damen so aufzustellen, dass keine eine andere bedroht.

II. 16.7. Ein Versuchsfeld hat die Form eines 5 m breiten, 8 m langen Rechteckes. Das Feld ist in 40 kleinere quadratische Gebiete eingeteilt, wie Bild 42 zeigt.

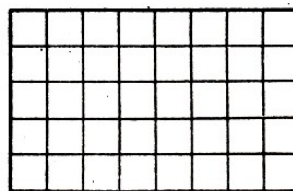


Bild 42

Bei einem bestimmten Versuch können wir annehmen, dass Bodenproben, die wir zwei benachbarten quadratischen Gebieten entnommen haben, sich nur wenig voneinander unterscheiden. Man schlage vor, welche Gebiete in Bild 42 geprüft werden sollen, wenn gefordert wird, dass niemals zwei von den untersuchten quadratischen Gebieten benachbart sind und dass jedes Gebiet, aus dem wir keine Probe entnehmen, wenigstens an ein geprüftes Gebiet anschließt. Man plane den Versuch so, dass eine möglichst kleine Anzahl von Gebieten geprüft wird.

<sup>38</sup>Für  $n = 1, 2, 3, \dots, 12$  hat M. Kraitchik in seinem Buch [16] eine solche Tafel aufgestellt. Den Fall  $n = 13$  hat in dieser Tafel R. J. Walker im Jahre 1960 ergänzt; sein Beitrag ist in dem Sammelband [7] abgedruckt. Den Leser, der sich für die Geschichte des Problems der acht Damen interessiert, verweise ich auch auf das Buch von W. Ahrens [1].

Anmerkung: 2022 sind die Fälle bis  $n = 25$  gelöst-

II. 16.8. Man bestimme die Anzahl der Knotenbasen erster bzw. zweiter Art für einen vollständig paaren Graphen, wenn  $a$  bzw.  $b$  die Anzahl der mit erster bzw. zweiter Farbe gefärbten Knoten bedeutet.

## 2.17 Isomorphismen und Homöomorphismen

Im Schulunterricht sind wir verschiedentlich geometrischen Verwandtschaften begegnet. So sind dem Leser sicherlich der Begriff der Kongruenz ebener Figuren oder der Begriff der Ähnlichkeit bekannt.

In diesem Buch beschäftigen wir uns mit Gebilden von anderer Art, als sie Gegenstand der Betrachtungen in der elementaren Geometrie gewesen sind.

Die Definition des Graphen ist nämlich nicht von den planimetrischen und stereometrischen Begriffen abhängig, die wir aus der Schule kennen, wenn wir auch bei der Erklärung (allerdings nur der Anschaulichkeit halber) das ebene Bild für den zu betrachtenden Graphen verwenden. Auch zwischen Graphen kann eine bestimmte Verwandtschaft eingeführt werden, die an den Kongruenzbegriff aus der elementaren Geometrie erinnert.

Bevor wir diese Verwandtschaft genau definieren, wollen wir ein anschauliches Modell des Graphen betrachten, bei dem die Knoten durch kleine Metallringe veranschaulicht werden.

Wenn zwischen irgendeinem Knotenpaar in dem gegebenen Graphen eine Kante existiert, dann drücken wir das an dem Modell dadurch aus, dass wir die entsprechenden beiden Ringe durch einen Faden verbinden; noch besser ist es jedoch, für diese Verbindungslinie zwischen den Ringen irgendein elastisches Material zu wählen.

Stellen wir uns nun vor, wir verändern dieses Modell des Graphen dadurch, dass wir in dem Raum einige Metallringe umstellen oder dass wir die Fäden, mit denen die Ringe verbunden sind, auf verschiedene Weise verschlingen oder dass wir gegebenenfalls einige elastische Verbindungsstücke zwischen den Ringen verlängern.

Bei diesen Veränderungen zerreißen und zerschneiden wir keinen Faden, binden keinen Ring ab noch binden wir einen Ring an einen anderen Faden, als es ursprünglich der Fall war. Diese letzteren Veränderungen sind bei unserem Modell verboten.

Trotzdem wird uns der Leser recht geben, dass es bei einem komplizierteren Modell schwierig sein wird, nach den vorgenommenen Änderungen zu entscheiden, ob es sich um das ursprüngliche Modell des Graphen handelt oder ob diese Gruppierung von Ringen und Fäden irgendeinen "anderen" Graphen darstellt.

Das Wort "anderen" haben wir in Anführungsstriche gesetzt; denn wir haben bisher keine Verwandtschaft zwischen Graphen definiert, die es uns erlauben würde, dieses Wort in der genauen Bedeutung anzuwenden.

Das wollen wir jetzt tun.

Es seien Graphen  $\mathcal{G}_1 = [U_1, K_1]$  und  $\mathcal{G}_2 = [U_2, K_2]$  gegeben, und es existiere eine eindeutige Abbildung  $F$  von der Menge  $U_1$  auf die Menge  $U_2$  mit folgender Eigenschaft:

Wenn  $x$  bzw.  $y$  zwei beliebige Elemente aus  $U_1$  und  $x'$  bzw.  $y'$  ihre Bilder in der Menge  $U_2$  bei der Abbildung  $F$  sind, so soll die Kante  $xy$  genau dann zu  $K_1$  gehören, wenn die Kante  $x'y'$  zu  $K_2$  gehört.

Durch die Abbildung  $F$  ist dann ein Isomorphismus zwischen den Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  erklärt. Wenn zwischen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  ein Isomorphismus existiert, sagen wir, der Graph  $\mathcal{G}_1$  sei isomorph zum Graphen  $\mathcal{G}_2$  oder auch, die Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  seien zueinander isomorph.

Existiert zwischen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  kein Isomorphismus, dann sagen wir,  $\mathcal{G}_1$  sei nichtisomorph zum Graphen  $\mathcal{G}_2$ .

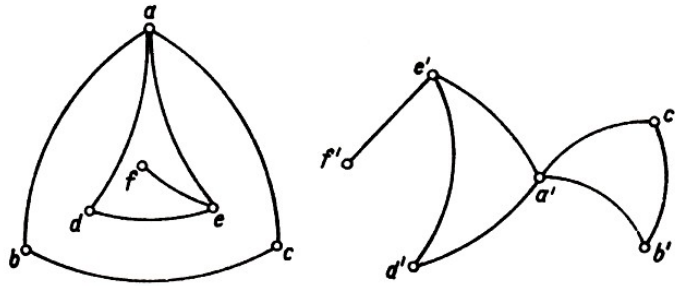


Bild 43,44

Beispiel 21. In Bild 43 ist ein endlicher Graph mit sechs Knoten dargestellt; dasselbe gilt für Bild 44. Wir wollen zeigen, dass der erste Graph zum zweiten Graphen isomorph ist.

In Bild 43 sind die Knoten des Graphen mit den Buchstaben  $a, b, c, d, e, f$  und in Bild 44 mit den Buchstaben  $a', b', c', d', e', f'$  bezeichnet.

Wir betrachten die Abbildung  $F$ , bei der der Knoten  $a$  auf  $a'$ , der Knoten  $b$  auf  $b'$ , der Knoten  $c$  auf  $c'$ , der Knoten  $d$  auf  $d'$ , der Knoten  $e$  auf  $e'$ , der Knoten  $f$  auf  $f'$  abgebildet wird.

Offenbar ist durch diese Abbildung  $F$  ein Isomorphismus zwischen den beiden betrachteten Graphen definiert. Die Abbildung  $F$  lässt sich durch das Zwei-Zeilen-Schema

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix}$$

übersichtlich angeben, wobei wir in der ersten Zeile die Knoten des ersten Graphen aufgeführt und in der zweiten Zeile unter jeden Knoten denjenigen des zweiten Graphen geschrieben haben, der ihm bei der Abbildung  $F$  entspricht.

Wir wollen bemerken, dass  $F$  nicht der einzige Isomorphismus zwischen den betrachteten Graphen ist. So wird durch das Schema

$$F^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & c' & b' & d' & e' & f' \end{pmatrix}$$

gleichfalls ein Isomorphismus zwischen den beiden betrachteten Graphen erklärt.

Sind zwei Graphen einander isomorph, so haben sie die gleichen Eigenschaften, da sie sich nur in der Bezeichnung ihrer Elemente unterscheiden. Wenn beispielsweise  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  isomorphe Graphen sind und  $\mathcal{G}_1$  einen Kreis der Länge  $l$  enthält, dann enthält auch  $\mathcal{G}_2$  einen Kreis der Länge  $l$ .

Wir wissen bereits, dass man dem endlichen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$ , in dem  $|U| = n$  ist, eine endliche Folge ganzer nichtnegativer Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  zuordnen kann, die die Knotengrade des Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnen. Wenn wir von einem Graphen  $\mathcal{G}$  zu einem Graphen  $\mathcal{G}'$  übergehen, der mit dem Graphen  $\mathcal{G}$  isomorph ist, können wir wieder eine endliche Folge ganzer nichtnegativer Zahlen bilden, die die Knotengrade im Graphen  $\mathcal{G}'$  bedeuten und zwar gilt offenbar:

Wenn dem Knoten  $x$  des Graphen  $\mathcal{G}$  bei einem Isomorphismus der Knoten  $x'$  des Graphen  $\mathcal{G}'$  entspricht, dann stimmt der Grad des Knotens  $x$  im Graphen  $\mathcal{G}$  mit dem Grad des Knotens  $x'$  im Graphen  $\mathcal{G}'$  überein.

Die Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  bezeichnen also wiederum die Grade der Knoten in dem Graphen  $\mathcal{G}'$ . Das Ergebnis können wir kurz wie folgt ausdrücken: Ein Isomorphismus erhält die Grade der

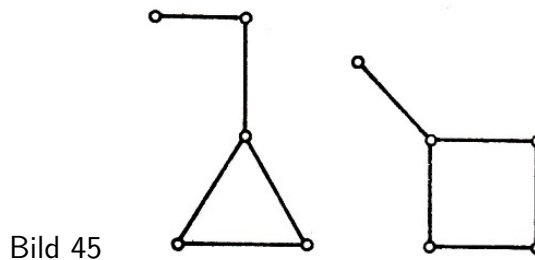


Knoten.

An dieser Stelle ist es jedoch nötig, eine Bemerkung anzufügen.

Beim oberflächlichen Lesen könnte es so erscheinen, als ob die Gleichheit der Gradzahlen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  eine Eigenschaft isomorpher Graphen ist. Es lassen sich jedoch leicht zwei Graphen angeben, für die die Knotengrade durch dieselbe endliche Folge ganzer nichtnegativer Zahlen beschrieben werden, die jedoch nicht isomorph sind.

Ein Beispiel sehen wir in Bild 45. Es sind hier zwei Graphen dargestellt; jeder von ihnen enthält fünf Knoten, und die Grade dieser Knoten sind in beiden Graphen 1, 2, 2, 2, 3. Die Graphen sind jedoch nicht isomorph.



Jeder von den beiden Graphen enthält einen einzigen Kreis als Teilgraphen, aber dieser Kreis hat bei dem linken Graphen die Länge 3, bei dem rechten Graphen die Länge 4.

Der Untersuchung der Isomorphie zweier Graphen mag abstrakt erscheinen, und die bisher angeführten Beispiele können den Eindruck erwecken, dass es sich hier nur um eine rein theoretische Frage handelt.

Dieser Eindruck ist jedoch unzutreffend.

Die Frage der Isomorphie zweier Graphen spielt auch in den Anwendungen eine Rolle; wir wollen hier auf ihre Bedeutung in der organischen Chemie hinweisen. Die Strukturformeln in der organischen Chemie können wir als endliche Graphen ansehen.

In der Chemie tritt oft die Frage auf, wieviele verschiedene Strukturformeln der gegebenen empirischen Formel einer organischen Verbindung entsprechen. Dem Leser ist jetzt sicherlich klar, dass wir zwei Strukturformeln als verschieden betrachten, wenn die diesen entsprechenden Graphen nicht isomorph sind.

Wir nennen hier erneut den Namen von A. Cayley, der sich mit solchen Fragen vom mathematischen Standpunkt aus schon im vorigen Jahrhundert beschäftigt hat.

Bezüglich ihrer Struktur besonders einfache Graphen sind Bäume. Aber schon für diese ist es nicht leicht, zu bestimmen, wieviele nichtisomorphe Bäume gleicher Knotenzahl existieren. Sehr wertvolle Ergebnisse hat in dieser Richtung kurz vor dem zweiten Weltkrieg G. Pólya erzielt.

Die Mittel, die Pólya bei der Lösung der genannten Frage anwandte und deren sich nach ihm auch eine Reihe anderer Autoren bedienten, sind nicht elementar und setzen tiefere Kenntnisse in der Mathematik voraus. Dies geht jedoch bei weitem über den informativen Rahmen unseres Buches hinaus, und deshalb verweisen wir Interessenten auf die Arbeit von Pólya [20], in der nähere Erläuterungen zu finden sind.

Bei kleiner Knotenzahl  $n$  ist es allerdings nicht allzu schwer, die Anzahl der nichtisomorphen Bäume mit  $n$  Knoten zu bestimmen. Mit wachsender Zahl  $n$  nimmt jedoch die Schwierigkeit dieser Untersuchung sehr schnell zu.

Wir wollen mit  $t_n$  die Anzahl aller nichtisomorphen Bäume mit  $n$  Knoten bezeichnen. In dem Buch [22] von J. Riordan aus dem Jahre 1958 ist eine Tafel zu finden, welche die Abhängigkeit von  $t_n$  von der Zahl  $n$  für die Werte  $n = 1, 2, 3, \dots, 26$  angibt.

Zur Illustration wollen wir diese Riordansche Tafel hier folgen lassen.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$t_n$	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551	1301	3159	7741	19320
$n$		17			18		19		20		21		22		23	
$t_n$	48629	1234867			317955		823065		2144505		5623756		14828074			
$n$			24			25		26								
$t_n$	39299897		104636890			279793450										

Auch F. Harary und G. Prins [12] haben sich (neben anderen Autoren) mit ähnlichen Problemen befasst und führen einen Überblick über alle Bäume für  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  an.

Nur wollen wir uns noch mit einer anderen Verwandtschaftsbeziehung zwischen Graphen bekannt machen, die als Homöomorphie bezeichnet wird. Bevor wir jedoch an die Definition gehen, müssen wir den Begriff der Halbierung einer Kante erläutern.

Wir wählen in einem gegebenen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  eine Kante  $xy$  aus und definieren einen neuen Graphen  $\mathcal{G}_0 = [U_0, K_0]$  wie folgt:

Wir wählen einen Knoten  $z$ , der nicht zu  $U$  gehört, und setzen  $U_0 = U \cup \{z\}$ . Es bezeichne  $K_0$  die Menge, die wir erhalten, wenn wir aus der Menge  $K$  die Kante  $xy$  entfernen und gleichzeitig die Kanten  $xz$  und  $zy$  hinzufügen. Wir sagen dann, der Graph  $\mathcal{G}_0$  ist aus dem Graphen  $\mathcal{G}$  durch eine Halbierung der Kante  $xy$  entstanden.

Die Halbierung der Kante ist also gleichbedeutend damit, dass wir in dem Bild auf eine bestimmte Kante einen kleinen Ring aufmalen; damit entsteht in dem Graphen ein neuer Knoten 2. Grades.

Man erkennt, dass die Knoten 2. Grades im Graphen eine besondere Stellung einnehmen. Wenn wir in dem Bild an einigen Kanten weitere kleine Ringe anbringen oder, was dasselbe besagt, eine Halbierung einiger weiterer Kanten des Graphen vornehmen, dann ändert sich dadurch (grob gesagt) an dem optischen Eindruck von diesem Bild nicht viel. Und damit sind wir der Definition der Homöomorphie schon sehr nahegekommen.

Es seien die Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  gegeben. Wir sagen dann,  $\mathcal{G}_1$  ist homöomorph zum Graphen  $\mathcal{G}_2$ , wenn entweder  $\mathcal{G}_1$  isomorph zu  $\mathcal{G}_2$  ist oder wenn man durch eine endliche Anzahl von Halbierungen der Kanten in beiden Graphen erreichen kann, dass die so entstandenen Graphen isomorph sind.

Wenn  $\mathcal{G}_1$  zu  $\mathcal{G}_2$  homöomorph ist, sagen wir auch, dass beide Graphen homöomorph sind.

Beispiel 22. Wenn wir als Graphen zwei Kreise der Längen  $l_1$  und  $l_2$  wählen, so sind diese homöomorph.

Ist nämlich  $l_1 = l_2$ , so sind diese Kreise isomorph. Wenn das nicht der Fall und beispielsweise  $l_1 < l_2$  ist, dann halbieren wir in dem ersten Kreis  $(l_2 - l_1)$ -mal die Kanten. Beide Kreise haben dann die Länge  $l_2$ , und die Homöomorphie ist auch hier nachgewiesen.

Auch die Homöomorphie von Graphen ist ein sehr wichtiger Begriff, dem wir z. B. beim Studium der Frage begegnen, welche Graphen man in der Ebene so veranschaulichen kann, dass sich zwei ihrer Kanten nicht im Inneren schneiden.

Solche Graphen werden als eben (oder plättbar) bezeichnet.

Die Bestimmung ebener Graphen hat der polnische Mathematiker K. Kuratowski im Jahre 1930 vor genommen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein gegebener Graph eben ist, ist nach Kuratowski die folgende:

Der Graph enthält keinen Teilgraphen, der zu einem Graphen  $\mathcal{A}$  oder zu einem Graphen  $\mathcal{B}$  (Bild 47) homöomorph ist.

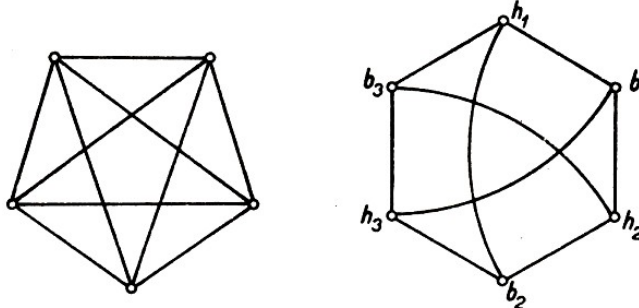


Bild 46,47

Mit dem Satz von Kuratowski haben sich auch eine ganze Anzahl anderer Autoren beschäftigt, und der ursprüngliche Beweis wurde modifiziert und vereinfacht.

Der Leser wird bemerken, dass der Graph  $\mathcal{B}$  mit der Aufgabe von den drei Häusern und den drei Brunnen zusammenhängt. In dieser Aufgabe wird gefordert, jedes der drei Häuser mit jedem der drei Brunnen (die auf dem Plan veranschaulicht sind) zu verbinden, aber so, dass sich die Wege nicht kreuzen.

Die Häuser entsprechen im Bild 47 den Knoten  $h_1, h_2, h_3$  und die Brunnen den Knoten  $b_1, b_2, b_3$ . Diese Aufgabe von den drei Häusern und den drei Brunnen ist nicht lösbar.

A. Errera hat schon im Jahre 1923 folgenden Satz<sup>39</sup> bewiesen:

Ein ebener paarer Graph, der  $a$  Knoten erster Farbe und  $b$  Knoten zweiter Farbe besitzt ( $a \geq 2$ ,  $b \geq 2$ ), hat höchstens  $2a + 2b - 4$  Kanten.

Von P. Turán stammt eine Frage, mit der sich K. Zarankiewicz (1902-1959) im Jahre 1954 beschäftigte<sup>40</sup>:

Man soll die minimale Anzahl der Schnittpunkte eines vollständig paaren Graphen bestimmen, wenn dieser in der Ebene dargestellt wird; dabei sollen niemals drei Kanten einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Von der Schwierigkeit einer analogen Frage für den vollständigen Graphen mit  $n$  Knoten hat sich R. K. Guy überzeugt und unabhängig auch G. Ringel und die tschechoslowakischen Autoren J. Blažek und M. Keman (s. [25]).

Bisher hat man nur Teilresultate gewonnen. Bezeichnet man mit  $p_n$  die minimale Anzahl der Schnittpunkte, dann weiß man z. B., dass  $p_5 = 1$ ,  $p_6 = 3$ ,  $p_7 = 9$ ,  $p_8 = 18$  gilt.

Manche Autoren schenken den sogenannten homöomorph irreduziblen Graphen Beachtung. Darunter verstehen wir Graphen, in denen keine Knoten 2.Grades existieren.

So stellten z.B. F. Harary und G. Prins eine Tafel aller homöomorph irreduziblen Bäume auf, die höchstens 12 Knoten haben. Bezeichnen wir wiederum mit  $n$  die Anzahl aller Knoten eines Baumes und mit  $b_n$  die Anzahl aller nichtisomorphen Bäume der genannten. Eigenschaft, dann können wir die Ergebnisse, die diese beiden Autoren erzielten, in einer Tafel zusammenfassen:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b_n$	1	1	0	1	1	2	2	4	5	10	14	26

<sup>39</sup>Comptes Rendus, 177, 1923, S. 489-491.

<sup>40</sup>Fundamenta Math. 41, 1954, S. 137-145

Wir wollen noch bemerken, dass man sich auch mit der Veranschaulichung eines gegebenen Graphen auf allgemeineren Flächen beschäftigt und die ganze Problematik, die wir in der Ebene studiert haben, auf diese übertragen hat. In diesem Büchlein wollen wir uns mit einem einfachen Beispiel begnügen.

Der Leser ist wahrscheinlich schon einer Fläche begegnet, die wir in der Geometrie als Torus bezeichnen.

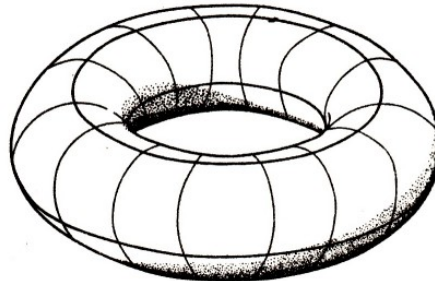


Bild 48

Wie wir aus Bild 48 ersehen, hat der Torus, grob gesagt, Ringform. Diese Fläche entsteht wie folgt:

In der Ebene wählen wir eine Kreislinie  $k$  und eine Gerade  $n$ , die  $k$  nicht schneidet; dann lassen wir im Raum die Kreislinie  $k$  um die Gerade  $n$  als Achse rotieren. Die Fläche, die so entsteht, heißt ein Torus.

Man sieht, dass ein Torus eine Reihe von Eigenschaften hat, durch die er sich von der Ebene unterscheidet. So teilt beispielsweise jede Kreislinie (anschaulich ausgedrückt) die Ebene in zwei Teile (das Innere und das Äußere der Kreislinie) so ein, dass jeder Bogen, der einen Punkt des ersten Teils mit einem Punkt des zweiten Teils verbindet, die Kreislinie schneidet.

Den Torus können wir jedoch in einer bestimmten Kreislinie so zerschneiden, dass man auch nach dem Zerschneiden zwei beliebige Punkte der Fläche durch einen Bogen verbinden kann, der die Kreislinie nicht schneidet.

Kehren wir jedoch zur Darstellung von Graphen auf dem Torus zurück. Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass z. B. der Graph  $\mathcal{A}$  aus dem Satz Kuratowskis auf dem Torus dargestellt werden kann, ohne dass neue Schnittpunkte der Kanten entstehen.

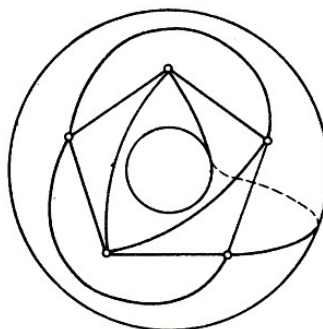


Bild 49

Schematisch zeigt uns dies Bild 49, in dem wir den Torus als Kreisring dargestellt haben. Im Grunde genommen ist dies die senkrechte Parallelprojektion des Torus (seine Rotationsachse steht senkrecht zur Projektionsebene).

In Bild 49 sind die Kanten des Graphen  $\mathcal{A}$  veranschaulicht, auf dem sichtbaren Teil des Torus voll und auf dem unsichtbaren gestrichelt. Den Umstand, dass sich ein vollständiger Graph mit fünf Knoten auf einen Torus aufzeichnen lässt, ohne dass sich die Kanten in irgendeinem neuen Schnittpunkt schneiden, drücken wir noch etwas anders aus.

Man kann auf einem Torus (wie auf einer Karte) fünf Staaten so aufzeichnen, dass jeder Staat mit jedem anderen benachbart ist. Wir überlassen es dem Leser, sich darüber klar zu werden, dass diese Veranschaulichung der Karte auf dem Torus der Darstellung des Graphen  $\mathcal{A}$  auf dieser Fläche wirklich äquivalent ist.

So sind wir erneut auf den Fragenkomplex um das Vierfarbenproblem gestoßen.

Am Torus kommen wir also beim Färben der Karten nicht mit vier Farben aus. Es lässt sich sogar zeigen, dass man auf dieser Fläche nicht einmal mit sechs Farben auskommt, denn hier können wir sechs Staaten so angeben, dass jeder von ihnen mit jedem anderen benachbart ist. Obwohl es scheint, als ob diese Untersuchung auf dem Torus komplizierter als in der Ebene ist, wurde hier die Frage, die dem ebenen Vierfarbenproblem entspricht, vollständig gelöst. Auf dem Torus kommen wir nämlich beim Färben einer beliebigen Karte immer mit sieben Farben aus<sup>41</sup>.

### Übungen

II. 17.1. Man zeige, dass ein Graph  $\mathcal{G}$  (mit wenigstens zwei Knoten) mit folgender Eigenschaft existiert: Der zum Graphen  $\mathcal{G}$  komplementäre Graph ist isomorph zum Graph  $\mathcal{G}$ .<sup>42</sup>

II. 17.2. Hat ein selbstkomplementärer Graph  $n$  Knoten, dann gilt entweder  $n = 0 \pmod{4}$  oder  $n = 1 \pmod{4}$ . Man beweise das!

11. 17.3. Butan hat die empirische Formel  $C_4H_{10}$ . Man suche seine Strukturformeln!

II. 17.4. Man fertige Skizzen aller nichtisomorphen Bäume mit sechs Knoten an!

II. 17.5. K. Husimi hat einen Baum allgemeiner definiert. Ein Baum im Sinne von Husimi ist ein endlicher zusammenhängender Graph, bei dem jede Kante höchstens in einem Kreis des Graphen enthalten ist. Man bestimme, wieviele nichtisomorphe Bäume dieser Art mit fünf Knoten existieren!

II. 17.6. Man beweise: Wenn ein Graph  $\mathcal{G}_1$  zusammenhängend und ein Graph  $\mathcal{G}_2$  zum Graphen  $\mathcal{G}_1$  isomorph ist, so ist auch der Graph  $\mathcal{G}_2$ , zusammenhängend.

II. 17.7. Man beweise: Wenn ein endlicher Graph  $\mathcal{G}_1$  die zyklomatische Zahl  $\nu(\mathcal{G}_1) = k$  hat und ein Graph  $\mathcal{G}_2$  zu dem Graphen  $\mathcal{G}_1$  isomorph ist, dann ist auch  $\nu(\mathcal{G}_2) = k$ .

II. 17.8. Man zeige, dass man auf dem Torus den Graphen  $\mathcal{B}$  aus dem Satz von Kuratowski so darstellen kann, dass sich die Kanten des Graphen nicht in einem weiteren Schnittpunkt kreuzen.

II. 17.9. Man zeige, dass man auf dem Torus einen vollständigen Graphen mit sechs Knoten darstellen kann, ohne dass sich die Kanten des Graphen in einem weiteren Schnittpunkt kreuzen.

II. 17.10. Man zeige, dass man auf dem Torus einen vollständigen Graphen mit sieben Knoten darstellen kann, ohne dass sich die Kanten des Graphen in einem weiteren Schnittpunkt kreuzen.<sup>43</sup>

---

<sup>41</sup>Näheres über die Färbung von Karten auf den Torus kann der Leser z. B. in dem Buch von H. Steinhaus [24] finden.

<sup>42</sup>Mit solchen Graphen beschäftigte sich G. Ringel im Jahre 1962 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Stockholm und nannte sie selbstkomplementär. Weiter wurden diese Graphen von R. C. Read, H. Sachs und B. Zelinka untersucht.

<sup>43</sup>Der Leser wird sicher bemerken, dass mit der Lösung dieser Aufgabe auch die beiden vorhergehenden Übungsaufgaben gelöst sind. Trotzdem ist dem Leser zu empfehlen, diese drei Aufgaben nacheinander und

## 2.18 Automorphismen von Graphen

Wir haben im vorigen Abschnitt den Begriff der isomorphen Abbildung von einem Graphen  $\mathcal{G}$  auf einen Graphen  $\mathcal{G}'$  eingeführt. Ist hierbei speziell  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ , so spricht man genauer von einer automorphen Abbildung des Graphen  $\mathcal{G}$  auf sich oder von einem Automorphismus von  $\mathcal{G}$ .

Man sieht, dass für jeden Graphen  $\mathcal{G}$  die Abbildung, die jedem Knoten  $w$  des Graphen  $\mathcal{G}$  als Bild gerade wieder den Knoten  $w$  zuordnet, einen Automorphismus von  $\mathcal{G}$  definiert.

Dieser Automorphismus heißt der identische Automorphismus von  $\mathcal{G}$ .

Wir werden später sehen, dass es Graphen gibt, die außer dem identischen keinen weiteren Automorphismus haben. Dagegen lassen sich leicht Graphen angeben, die mehrere verschiedene Automorphismen besitzen.

Wenn der Graph  $\mathcal{G}$  endlich ist, dann liegt jedem seiner Automorphismen als Abbildung eine Permutation der Knotenmenge des Graphen  $\mathcal{G}$  zugrunde. Da wir wissen, dass eine endliche Menge endlich viele Permutationen besitzt, ergibt sich daraus, dass für einen endlichen Graphen nur endlich viele Automorphismen existieren.

Für einen unendlichen Graphen lassen sich in manchen Fällen nur endlich viele Automorphismen angeben; es gibt jedoch sehr wohl auch unendliche Graphen, die unendlich viele Automorphismen besitzen.

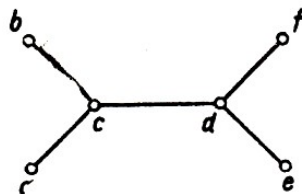


Bild 50

Beispiel 23. Wir wollen alle Automorphismen des Graphen angeben, der in Bild 50 dargestellt ist.

Die Knotenmenge dieses Graphen hat 6 Elemente, die in dem Bild mit den Buchstaben  $a, b, c, d, e, f$  bezeichnet sind. Es existieren insgesamt  $6!$  Permutationen dieser Menge, aber nur einige von ihnen sind kanteninvariant und somit Automorphismen. Neben dem identischen Automorphismus

$$F_0 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}$$

existieren noch die folgenden weiteren Automorphismen unseres Graphen:

$$F_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & d & e & f \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & d & f & e \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & f & d & c & a & b \end{pmatrix}, \quad F_5 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & f & d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad F_6 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & a & b \end{pmatrix}$$

$$F_7 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Es gibt also genau 8 verschiedene Automorphismen des Graphen.

### Übungen

II. 18.1. Man bestimme, wieviele verschiedene Automorphismen ein Baum a) vom Typ "Schlange"; b) vom Typ "Stern" hat. Dabei bedeute  $n$  die Knotenzahl des Baumes.

jede für sich zu lösen.

II. 18.2. Man bestimme, wieviele verschiedene Automorphismen ein vollständiger Graph mit  $n$  Knoten hat. Man löse auch die analoge Aufgabe für den vollständig paaren Graphen, der  $a$  bzw.  $b$  Knoten erster bzw. zweiter Farbe hat.

II. 18.3. Man bestimme, wieviele verschiedene Automorphismen ein Kreis der Länge  $n$  hat, wobei  $n > 3$  ist.

II. 18.4. Man gebe ein Beispiel für einen unendlichen Graphen an, der a) endlich viele, b) unendlich viele Automorphismen besitzt.

## 2.19 Die Automorphismengruppe eines Graphen

Am Anfang dieses Buches haben wir uns mit dem Begriff einer Gruppe beschäftigt, die vier Gruppenaxiome angeführt und gesagt, dass wir in den weiteren Betrachtungen noch auf diesen Begriff zurückkommen.

Ein Automorphismus eines Graphen  $\mathcal{G}$  ist eine kantentreue eineindeutige Abbildung der Knotenmenge von  $\mathcal{G}$  auf sich, und es ist daher selbstverständlich, dass man zwei Automorphismen eines gegebenen Graphen hintereinander ausführen kann.

Wenn  $F_i$  ein Automorphismus des gegebenen Graphen  $\mathcal{G} = [U, K]$  und  $F_j$  ein weiterer Automorphismus dieses Graphen ist, dann erhalten wir auf diese Weise als Resultat der Verknüpfung die Abbildung  $F_{ij}$ .

Diese ist wiederum eine eineindeutige Abbildung der Menge  $U$  auf sich. Es lässt sich leicht zeigen, dass  $F_{ij}$  auch ein Automorphismus des Graphen  $\mathcal{G}$  ist.

Wir sagen,  $F_{ij}$  sei der aus den Automorphismen  $F_i$  und  $F_j$  zusammengesetzte Automorphismus.

Die Menge der Automorphismen eines gegebenen Graphen zusammen mit der Hintereinanderausführung als definierender Operation ist eine Gruppe. Diese wird die Automorphismengruppe des gegebenen Graphen genannt.

Statt von der Hintereinanderausführung oder Zusammensetzung zweier Automorphismen spricht man häufig auch von der Multiplikation von Automorphismen.

Wir wollen nun die Multiplikationstabelle für einen endlichen Graphen aufstellen.

Beispiel 24. Kehren wir zu dem Graphen in Bild 50 zurück, der nach Beispiel 23 acht Automorphismen  $F_1, F_2, \dots, F_8$  hat. Unsere Tafel hat 8 Zeilen und 8 Spalten. Die Zeilen (bzw. die Spalten) werden im Kopf der Reihe nach mit  $F_1, F_2, \dots, F_8$  bezeichnet. Im Schnittpunkt der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte wird der aus den Automorphismen  $F_i$  und  $F_j$  zusammengesetzte Automorphismus aufgeführt. Die Tafel lautet dann:

	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$
$F_0$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$
$F_1$	$F_1$	$F_0$	$F_3$	$F_2$	$F_6$	$F_7$	$F_4$	$F_5$
$F_2$	$F_2$	$F_3$	$F_0$	$F_1$	$F_5$	$F_4$	$F_7$	$F_6$
$F_3$	$F_3$	$F_2$	$F_1$	$F_0$	$F_7$	$F_6$	$F_5$	$F_4$
$F_4$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$F_5$	$F_5$	$F_4$	$F_7$	$F_6$	$F_2$	$F_3$	$F_0$	$F_1$
$F_6$	$F_6$	$F_7$	$F_4$	$F_5$	$F_1$	$F_0$	$F_3$	$F_2$
$F_7$	$F_7$	$F_6$	$F_5$	$F_4$	$F_3$	$F_2$	$F_1$	$F_0$

Das Beispiel 24 zeigt uns auch, dass die Zusammensetzung zweier Automorphismen von der

Reihenfolge ihrer Verknüpfung abhängt. So ist beispielsweise aus unserer Tafel zu ersehen, dass durch Zusammensetzung von  $F_1$  und  $F_4$  der Automorphismus  $F_6$  entsteht, während sich in umgekehrter Reihenfolge bei Zusammensetzung von  $F_4$  und  $F_1$  der Automorphismus  $F_5$  ergibt.

Wir wissen, dass die Automorphismengruppe jedes Graphen wenigstens einen Automorphismus, nämlich den identischen Automorphismus besitzt. Es kann vorkommen, dass ein Graph außer dem identischen Automorphismus keinen weiteren Automorphismus hat. In diesem Falle besitzt die Automorphismengruppe genau ein Element. Ein Beispiel hierfür sehen wir in Bild 51.

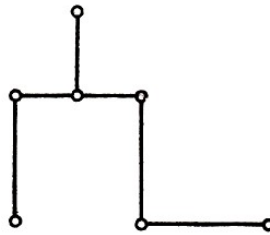


Bild 51

Der Leser kann sich selbst davon überzeugen, dass der hier dargestellte Baum mit sieben Knoten einen einzigen Automorphismus hat. F. Harary und G. Prins untersuchten im Jahre 1959 solche Bäume, die einen einzigen Automorphismus haben.

Wenn wir mit  $n$  die Anzahl der Knoten eines Baumes bezeichnen und wenn  $a_n$ , die Anzahl aller nichtisomorphen Bäume mit  $n$  Knoten ist, die genau einen Automorphismus besitzen, können wir auf Grund der Ergebnisse, die Harary und Prins erzielt haben, folgende Tafel aufstellen:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_n$	1	0	0	0	0	0	1	1	3	6	15	29

Aus dieser Tafel ist ersichtlich, dass für  $1 < n < 7$  kein Baum der geforderten Eigenschaft existiert, und weiterhin ist zu vermuten, dass für  $n \geq 7$  die Werte  $a_n$  recht schnell anwachsen. Es wäre sicher sehr schwierig, in einer expliziten Formel die Abhängigkeit des Wertes  $a_n$ , von der Zahl  $n$  zu erfassen.

Der Fall einer Automorphismengruppe, die ein einziges Element hat, zeigt uns noch folgendes. Wenn eine Gruppe gegeben ist, dann können wir fragen, ob ein Graph existiert, dessen Automorphismengruppe zu der gegebenen Gruppe isomorph ist. Wir können weiter fragen, ob ein Graph durch eine Gruppe - bis auf Isomorphie - eindeutig bestimmt ist oder ob man mehrere nichtisomorphe Graphen mit derselben Automorphismengruppe finden kann.

Wir haben gesehen, dass selbst in dem einfachen Fall, der eben betrachtet wurde, Eindeutigkeit auch dann nicht vorhanden ist, wenn wir die Zahl der Knoten vorschreiben und noch weiter fordern, dass der Graph ein Baum ist.<sup>44</sup>

### Übungen

- II. 19.1. Man suche in der Tafel auf S. 71 zu jedem Element  $F_i$  das inverse Element.
- II. 19.2. Man suche in derselben Tafel alle Elemente  $F_i$  von der Art, dass durch Zusammensetzung von  $F_i$  mit sich selbst der identische Automorphismus entsteht.
- II. 19.3. Man fertige Skizzen aller nichtisomorphen Bäume mit neun Knoten an, die einen einzigen Automorphismus haben.

<sup>44</sup>Mit den Zusammenhängen zwischen Gruppen und Graphen haben sich vor einiger Zeit R. Frucht, H. Izbicki, G. Sabidussi und andere beschäftigt.



## 2.20 Allgemeinere Definition eines ungerichteten Graphen

Mit diesem Paragraphen beenden wir die Behandlung der ungerichteten Graphen. Bisher haben wir uns auf ungerichtete Graphen beschränkt, um den Anfängern das Verständnis zu erleichtern.

Es erscheint zweckmäßig, sich wenigstens kurz über eine allgemeinere Definition eines ungerichteten Graphen zu äußern; wir werden dabei jedoch - ohne Anspruch auf Vollständigkeit der Definition - nur von der Anschauung ausgehen.<sup>45</sup>

In den bisherigen Betrachtungen haben wir nur den Fall zugelassen, dass jeweils zwei Knoten des Graphen durch höchstens eine Kante verbunden sind. Für manche Fälle ist es jedoch zweckmäßig, auch solche Knotenpaare zu betrachten, zwischen denen mehr als eine Kante existiert.

Wir schließen auch den Fall nicht aus, dass zwei Knoten durch eine beliebige Menge von Kanten verbunden sind.

Das Gebilde, das wir so erhalten, nennt man einen Multigraphen. So sehen wir beispielsweise in Bild 52 einen Multigraphen mit drei Knoten  $a, b, c$  und mit vier Kanten. Das Knotenpaar  $a$  und  $b$  ist hier durch zwei Kanten verbunden. Bei der früheren Definition eines Graphen haben wir jede Kante durch Angabe der beiden mit ihr inzidierenden Knoten bezeichnet.

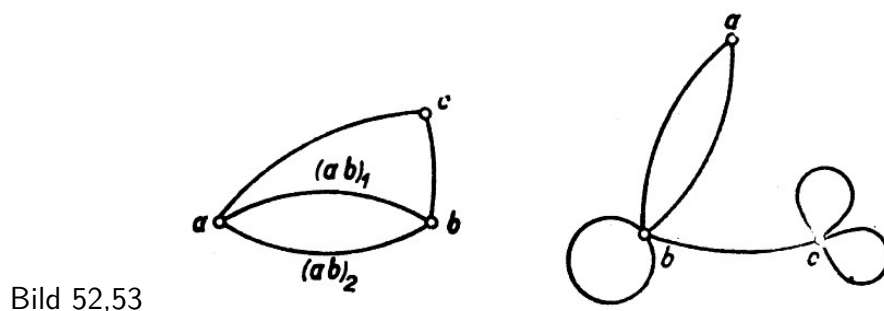


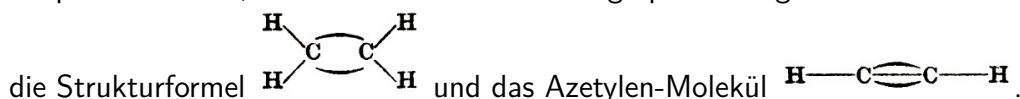
Bild 52,53

Das ist allerdings beim Multigraphen nicht möglich. Wir helfen uns hier jedoch leicht damit, dass wir die verschiedenen zu einem gleichen Knotenpaar doppelt zugehörigen Kanten durch Indizierung unterscheiden.

So sind in Bild 52 die Kanten durch  $(ab)_1$  und  $(ab)_2$  bezeichnet, die mit den Knoten  $a$  und  $b$  inzidieren.

Der Begriff des Multigraphen ist auch für die Anwendungen nützlich. Dafür führen wir ein Beispiel aus der organischen Chemie an. Bei der Konstruktion der Strukturformel irgendeines organischen Stoffes ordnen wir jedem Atom einen Knoten zu und jedem Valenzstrich eine Kante.

In vielen Fällen kommen wir hier jedoch mit unserem ursprünglichen Begriff des ungerichteten Graphen nicht aus; man muss zu dem des Multigraphen übergehen. So hat das Äthylen-Molekül



Bei unseren bisherigen Betrachtungen ist niemals der Fall aufgetreten, dass die beiden Knoten,

<sup>45</sup>Leser, die sich für die genaue Definition des verallgemeinerten Begriffes interessieren, verweisen wir auf die Arbeit der deutschen Autorin M. Hasse [13]. Sie hat einen verallgemeinerten ungerichteten Graphen, als eine Klasse  $L$  von Elementen mit einer Abbildung  $\gamma$  von  $L$  in die Menge der Teilklassen von  $L$  definiert. Dabei ist  $\gamma(f)$  für jedes  $f$  aus  $L$  eine Teilklasse von  $L$ , die im allgemeinen aus zwei Elementen von  $L$  besteht, nämlich gerade aus den Knotenpunkten der Kante  $f$ .

mit denen eine Kante des Graphen inzidiert, zusammenfallen. Bei der allgemeineren Definition braucht man diesen Fall jedoch nicht von der Betrachtung auszuschließen. Eine Kante, deren Endknoten zusammenfallen, heißt Schlinge in diesem Knoten.

Bei einem Multigraphen wird zugelassen, dass in jedem seiner Knoten eine beliebige Menge von Schlingen gegeben ist. So sehen wir beispielsweise in Bild 53 einen Multigraphen mit drei Schlingen, von denen zwei zum Knoten  $c$  gehören.

Der Leser erkennt sicherlich, dass die Graphen, die wir in den vorhergehenden Abschnitten behandelt haben, Spezialfälle eines Multigraphen sind. Die Sätze die dort abgeleitet wurden, gelten im allgemeinen nicht für Multigraphen; einige Begriffe und Sätze kann man jedoch auch auf den allgemeineren Begriff des Multigraphen übertragen.

Wir werden uns mit diesen Fragen hier nicht systematisch beschäftigen, sondern werden uns auf einige Bemerkungen beschränken. Nehmen wir z.B. den Knotengrad.

Wir wählen in einem gegebenen Multigraphen einen Knoten  $x$ , mit dem nur eine endliche Anzahl von Kanten inzidiert. Wir bezeichnen mit  $s$  die Anzahl der zum Knoten  $x$  gehörigen Schlingen;  $t$  bedeute die Anzahl aller übrigen, mit  $x$  inzidenten Kanten. Dann definieren wir den Grad des Knotens  $x$  in dem gegebenen Multigraphen als die Zahl  $2s + t$ .<sup>46</sup>

So erhalten wir für den in Bild 53 gezeigten Multigraphen das Ergebnis, dass der Knoten  $a$  2. Grades, dagegen jeder von den Knoten  $b$  und  $c$  5. Grades ist.

Man kann auch von einem endlichen regulären Multigraphen sprechen (dessen sämtliche Knoten den gleichen Grad haben), und auch der Zusammenhang kann ebenso wie im Abschnitt 4 definiert werden. Wenn wir einen Kreis als endlichen zusammenhängenden regulären Multigraphen 2. Grades einführen, dann sehen wir, dass hier auch ein Kreis der Länge 1 und der Länge 2 existiert, was bei der vorangegangenen Definition für Graphen nicht möglich war.

### Übungen

II. 20.1. Man bestimme die Anzahl der Kreise in dem in Bild 53 angegebenen Multigraphen.

II. 20.2. Auch für einen zusammenhängenden Multigraphen kann man ein Gerüst entsprechend wie bei einem Graphen definieren. Man bestimme die Anzahl der Gerüste in dem in Bild 52 gezeigten Multigraphen.

II. 20.3. In Satz 7 haben wir gesehen, dass für eine gerade Zahl  $m \geq 4$  ein regulärer Graph 3. Grades mit  $m$  Knoten existiert. Man zeige, dass ein regulärer Multigraph 3. Grades mit zwei Knoten existiert.

---

<sup>46</sup>Der Leser stellt sich möglicherweise die Frage, warum der Knotengrad hier gerade auf diese Weise definiert wird. Dies geht daraus hervor, dass dann auch für die Multigraphen einige der Sätze gelten, die wir in den vorhergehenden Betrachtungen abgeleitet haben. Wir meinen hier besonders die Sätze aus Abschnitt 2 über die Summe der Grade der einzelnen Knoten des endlichen Graphen und über die Anzahl der Knoten ungeraden Grades.

## 3 Gerichtete Graphen

### 3.1 Betrachtungen, die zum Begriff des gerichteten Graphen führen

Am Anfang dieses Buches haben wir schon bemerkt, dass man den Begriff des Graphen auch so definieren kann, dass jeder Kante des Graphen eine bestimmte Richtung zugeordnet wird. Wir wollen nun zeigen, dass derartige Gebilde mit "gerichteten Kanten" bei verschiedenen mathematischen Betrachtungen auftreten. Zur genauen Definition des gerichteten Graphen kommen wir erst im folgenden Abschnitt.

Nehmen wir an, es sei die Permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  gegeben.

$P$  können wir auf folgende Weise veranschaulichen:

Wir wählen in der Ebene sechs Punkte und bezeichnen sie der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Unsere Permutation ordnet der Zahl 1 die Zahl 5 zu, deshalb ziehen wir in dem Bild einen Pfeil von dem mit 1 bezeichneten Punkt zu dem mit 5 bezeichneten Punkt.

In ähnlicher Weise tun wir das auch in den restlichen fünf Fällen, die bei unserer Permutation in Frage kommen.

Man beachte, dass die Permutation  $P$  die Zahl 4 wiederum in die Zahl 4 abbildet. Wir zeichnen daher in dem Bild eine (gerichtete) Schlinge im Punkt 4. Das Resultat, zu dem wir bei dieser graphischen Veranschaulichung der Permutation  $P$  gelangt sind, ist in Bild 54 zu sehen.

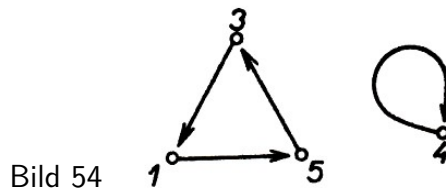


Bild 54

Gehen wir zu einem anderen Beispiel über, in dem wir durch einen gerichteten Graphen die Mengeninklusion zwischen den Teilmengen einer gegebenen Menge veranschaulichen.

Der Einfachheit halber wollen wir die dreielementige Menge  $\{a, b, c\}$  betrachten, die drei zweielementige Teilmengen  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$  und drei einelementige Teilmengen  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$  hat und die weiter die Menge  $\{a, b, c\}$  selbst und die leere Menge  $\emptyset$  als Teilmengen besitzt. Diesen acht Mengen ordnen wir acht Punkte in der Ebene zu.

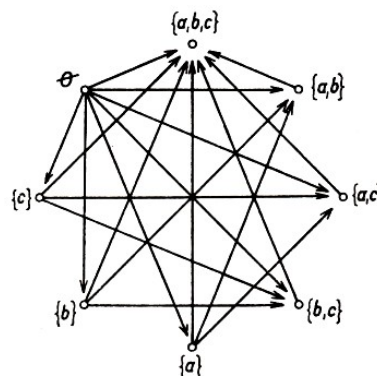


Bild 55

Die Menge  $\{a, b\}$  ist eine echte Untermenge der Menge  $\{a, b, c\}$ , was wir graphisch dadurch ausdrücken, dass wir einen Pfeil vom Punkt  $\{a, b\}$  zum Punkt  $\{a, b, c\}$  führen.

Auch in den anderen Fällen deuten wir durch einen Pfeil an, dass eine Menge eine echte Untermenge einer anderen Menge ist. So erhalten wir das Ergebnis, das in Bild 55 angegeben ist. In dieser Darstellung können wir uns sehr übersichtlich darüber informieren, welche Mengen in der Inklusionsbeziehung zueinander stehen.

Als weiteres Beispiel wollen wir eine Frage anführen, die dem Leser wahrscheinlich aus der Unterhaltungsmathematik bekannt ist. Wir haben drei Gefäße:

Das erste Gefäß fasst 4 l und ist mit Wasser gefüllt; das zweite Gefäß fasst 3 l, das dritte 1 l. Die beiden letzten Gefäße sind leer. Wir sollen durch eine Umfüllung erreichen, dass im ersten und im zweiten Gefäß je 2 l sind. Dabei können wir zur Abmessung nur die drei Gefäße benutzen, von denen in der Aufgabe die Rede ist.

Der Gedanke, diese Aufgabe graphisch darzustellen, stammt bereits aus dem vergangenen Jahrhundert und wurde von G. Brunel geäußert.<sup>47</sup>

Wir wollen beschreiben, wie diese Aufgabe graphisch zu lösen ist. Der Stand des Wassers in den Gefäßen kann durch die Zahlentripel  $(a, b, c)$  charakterisiert werden, wobei  $a$  die Literzahl im ersten Gefäß,  $b$  diese Zahl im zweiten Gefäß,  $c$  dieselbe im dritten Gefäß bedeutet.

Offensichtlich ist immer  $a+b+c = 4$ . Weiter ist leicht einzusehen, dass wir bei jedem Umgießen des Wassers nur diejenigen Situationen erreichen, in denen wenigstens ein Gefäß entweder leer oder voll ist (entweder entleeren wir es völlig, oder wir gießen es ganz voll).

Diese Bedingung können wir auch so ausdrücken, dass für die Zahlen  $a, b, c$  bei jedem Umgießen wenigstens eine der folgenden Beziehungen gilt:

$$a = 4, \quad a = 0, \quad b = 3, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad c = 0$$

Wir wollen nun alle Tripel  $(a, b, c)$  angeben, die wir durch das Umgießen erreichen können. Offenbar sind dies die folgenden Zahlentripel:

$$(4,0,0); (3,1,0); (3,0,1); (2,2,0); 2,1,1); (1,3,0); (1,2,1); (0,3,1)$$

Wir wählen nun in der Ebene acht Punkte und ordnen jedem von ihnen eines dieser Zahlentripel zu. Von dem Tripel  $(4, 0, 0)$ , das den Wasserstand in den Gefäßen zu Beginn unserer Aufgabe gibt, können wir entweder zum Tripel  $(3, 0, 1)$  dadurch gelangen, dass wir 1 l aus dem ersten Gefäß in das dritte geben, oder zu dem Tripel  $(1, 3, 0)$  dadurch, dass wir aus dem ersten Gefäß 3 l in das zweite gießen. Eine andere Möglichkeit besteht hier nicht.

Wir ziehen also zwei Pfeile, die von dem mit  $(4, 0, 0)$  bezeichneten Punkt ausgehen und in den mit  $(3, 0, 1)$  und  $(1, 3, 0)$  bezeichneten Punkten enden. Auf diese Weise fahren wir fort und suchen für jeden der acht Punkte unseres Bildes diejenigen Punkte (Wasserstände) heraus, die wir durch ein einmaliges Umgießen erreichen können. So erhalten wir eine graphische Darstellung, wie sie in Bild 56 angegeben ist.

---

<sup>47</sup>Unser Beispiel, bei dem wir für die Maßzahlen der Volumina die Zahlen 4, 3 und 1 gewählt haben, ist allerdings sehr einfach, so dass wir die Lösung auch ohne graphische Darstellung leicht finden können. Wir haben die kleinen Zahlen jedoch deshalb gewählt, damit das Bild nicht allzu kompliziert ist und der Sinn der graphischen Veranschaulichung desto deutlicher hervortritt.

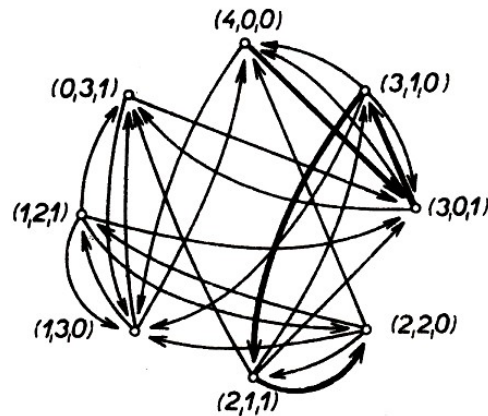


Bild 56

Die Antwort auf die gestellte Frage ist jetzt einfach. In Bild 56 gehen wir von dem mit  $(4, 0, 0)$  bezeichneten Punkt aus und steuern über Pfeile den Punkt  $(2, 2, 0)$  an. Eine der möglichen Lösungen ist im Bild durch stärkere Linien verdeutlicht.<sup>48</sup>

Das letzte Beispiel, das wir zum Verständnis des Begriffs eines gerichteten Graphen anführen wollen, bezieht sich auf ein bekanntes Spiel mit Streichhölzern. Dieses Spiel tritt in mancherlei Varianten in der mathematischen Literatur auf, und wir haben hier eine besonders einfache Variante ausgewählt.

11 Streichhölzer liegen auf einem Haufen, und zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd. Jeder von ihnen darf ein, zwei oder drei Zündhölzer von dem Haufen nehmen, den gleichen Zug aber nicht zweimal unmittelbar hintereinander wiederholen.

Der Spieler A beginnt das Spiel.

Es gewinnt derjenige, der das letzte Streichholz vom Haufen nimmt. Wir wollen zeigen, dass sich der Spieler A durch geschicktes Vorgehen gegenüber dem Mitspieler immer den Gewinn sichern kann.

Wir geben zunächst an, wie der Spieler A vorgehen muss.

Beim ersten Zug nimmt A 3 Zündhölzer vom Haufen. Wir wollen nun alle Reaktionen des Spielers B durchdenken. Wenn der Spieler B beim ersten Zug 1 Zündholz nimmt, nimmt A beim zweiten Zug gleichfalls 1 Streichholz.

Der Spieler B hat beim zweiten Zug zwei Möglichkeiten; wenn er 2 Streichhölzer nimmt, reagiert A ebenfalls mit einem Zug von 2 Hölzern. B kann nun nicht die letzten beiden Hölzer nehmen, die übriggeblieben sind; er nimmt bei seinem dritten Zug 1 Streichholz, und der Spieler A nimmt triumphierend das letzte Holz und hat gewonnen.

Zurück zum zweiten Zug des Spielers B: Wenn B 3 Streichhölzer nimmt, nimmt A mit dem dritten Zug ebenfalls 3 Hölzer; damit ist das Spiel für ihn gewonnen.

Wenn B bei seinem ersten Zug 2 Streichhölzer nimmt, dann antwortet A mit einem Zug von gleichfalls 2 Streichhölzern. Der Spieler B hat zwei Möglichkeiten. Wenn er 1 Holz nimmt, dann nimmt Spieler A die übriggebliebenen 3 Hölzer, wenn er 3 Hölzer nimmt, dann nimmt A das letzte Streichholz des Haufens.

Wenn schließlich der Spieler B im ersten Zug 3 Streichhölzer zieht, dann nimmt A 1 Holz. Wenn B jetzt 1 Streichholz nimmt, dann zieht A die letzten 3 Zündhölzer; nimmt B 2 Streichhölzer, dann beendet A die Partie erfolgreich durch einen Zug von 2 Hölzern.

<sup>48</sup>Bild 56 gibt gleichzeitig auch auf eine Reihe weiterer Fragen Antwort, die man sich vorlegen kann. Auf einige von ihnen kommen wir in den Übungen noch zurück.

Man sieht: Auch bei der kleinen Zahl von Streichhölzern, die in unserer Aufgabe auftritt, ist die gesamte Beschreibung des Vorgehens vom Spieler A unübersichtlich. Diesen Nachteil der Beschreibung vermeiden wir jedoch durch eine graphische Veranschaulichung.

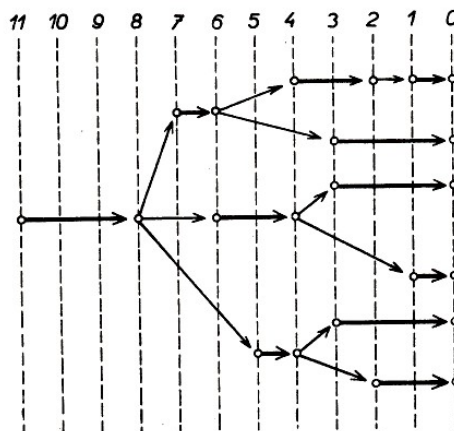


Bild 57

In Bild 57 sind senkrechte Hilfsgeraden in gestrichelter Form enthalten, die im oberen Teil des Bildes der Reihe nach mit den Zahlen 11, 10, 9, ..., 2,1,0 versehen wurden.

Diese Zahlen geben an, wieviele Streichhölzer in dem jeweiligen Augenblick auf dem Haufen liegen. Zu Anfang des Spieles sind dies 11 Hölzer, und von diesem, Anfangszustand aus führt eine mit einem Pfeil versehene Strecke zu dem Zustand mit 8 Hölzern; diese Strecke veranschaulicht den ersten Zug des Spielers A.

Auf ähnliche Weise sind hier auch die anderen Züge erfasst worden. Wenn es bei einem bestimmten Zustand nötig ist, mehrere Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, dann ist dies auf dem Bild dadurch ausgedrückt, dass sich der Graph "verzweigt".

Der größeren Übersichtlichkeit halber sind die Züge des Spielers A stärker gezeichnet als die von B.

Aus Bild 57 geht hervor, dass die graphische Darstellung die ganze Situation in der Tat besser und übersichtlicher wiedergibt als eine Beschreibung.

### Übungen

III. 1.1. Das erste Gefäß hat ein Volumen von 4 l und ist mit Wasser gefüllt. Das zweite Gefäß misst 3 l und das dritte 1 l, und beide sind leer. Man überlege sich an Hand von Bild 56, dass man durch Umgießen des Wassers jeden von den weiteren sieben Wasserständen erreichen kann, die in Bild 56 betrachtet werden.

III. 1.2. Auf einem Haufen liegen 11 Streichhölzer, und zwei Spieler dürfen bei jedem Zug ein, Zwei oder drei Streichhölzer davon wegnehmen. Dabei ist verboten, dass ein Spiel unmittelbar hintereinander den gleichen Zug tut. Es verliert der Spieler, der die letzten Streichhölzer vom Haufen nimmt. Man zeige, dass der Spieler, der die Partie beginnt, sie auch gewinnen kann. Man fertige eine graphische Darstellung an!

## 3.2 Definition eines gerichteten Graphen

Nach den vorbereitenden Betrachtungen im vorigen Abschnitt können wir nun zur genauen Definition eines gerichteten Graphen übergehen. Die Dinge liegen hier ähnlich wie im Falle der ungerichteten Graphen, auch hier finden sich in der Literatur verschiedene Definitionen.

Wir gehen wieder von einer speziellen Definition aus und weisen erst später auf die Möglichkeit ihrer Verallgemeinerung hin.

Es sei eine beliebige nicht-leere Menge  $U$  und eine Abbildung  $\Gamma$  gegeben, die jedem Element  $x$  von  $U$  eindeutig eine Teilmenge  $\Gamma(x)$  der Menge  $U$  zuordnet. Dann nennen wir das Paar  $[U, \Gamma]$  einen gerichteten Graphen; die Menge  $U$  heißt die Knotenmenge dieses Graphen und ihre Elemente die Knoten des Graphen.

Wenn für einen Knoten  $x$  ein Knoten  $y$  von der Art existiert, dass  $y \in \Gamma(x)$  ist, dann bezeichnen wir das geordnete Paar  $(x, y)$  als gerichtete Kante oder kurz nur als Kante des betrachteten Graphen.

Man beachte, dass es auf die Reihenfolge ankommt, in der die Knoten angegeben werden, denn das geordnete Paar  $(x, y)$  ist von dem geordneten Paar  $(y, x)$  verschieden.

Statt eine Kante mit den Knoten  $x$  und  $y$  durch das geordnete Paar  $(x, y)$  anzugeben, bezeichnet man sie auch mit  $xy$ . Wir verwenden auch Inzidenzbezeichnungen für die Knoten und Kanten des gerichteten Graphen, so dass wir z. B. sagen, die Kante  $\overrightarrow{xy}$  inzidiert mit dem Knoten  $x$ , oder der Knoten  $w$  ist mit der Kante  $\overrightarrow{vw}$  inzident usw.<sup>49</sup>

Ein gerichteter Graph ist also durch eine Menge  $U$  und eine Abbildung  $\Gamma$  von  $U$  in die Menge der Teilmengen von  $U$  bestimmt. Offensichtlich besteht hier aber auch eine andere Möglichkeit der Definition, und zwar ähnlich derjenigen, die wir schon kennen:

Ein gerichteter Graph kann auch dadurch erklärt werden, dass wir neben der Menge  $U$  der Knoten noch eine Menge  $K$  angeben, die die Kanten des Graphen enthält. Wir sprechen dann kurz vom Graphen  $[U, K]$  und benutzen zu seiner Bezeichnung gleichfalls einen einzigen Buchstaben.

Um Missverständnisse auszuschließen und zu betonen, dass wir mit einem gerichteten Graphen arbeiten, versehen wir diesen Buchstaben immer mit einem Pfeil. So treten in unseren Betrachtungen beispielsweise Graphen  $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ ,  $\overrightarrow{\mathcal{G}}_1$ , usw. auf.

Wir müssen noch davon sprechen, wie die Kanten eines gerichteten Graphen in den Bildern veranschaulicht werden. Dies ist nach den Betrachtungen des vorigen Abschnitts klar:

Die gerichtete Kante  $\overrightarrow{xy}$  veranschaulichen wir als, Bogen, gebrochene Linie oder Strecke, die in dem Bild den Knoten  $x$  mit dem Knoten  $y$  verbindet und die mit einem auf den Knoten  $y$  gerichteten Pfeil versehen ist.

Beispiel 1. Kommen wir zu der Permutation.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

in der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  zurück, die wir in Bild 54 veranschaulichten. Wir wollen hier die Knotenmenge  $u$ , die Abbildung  $\Gamma$  und die Kantenmenge  $K$  des  $P$  zugeordneten Graphen angeben. Die Knotenmenge ist offensichtlich  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Für jedes  $x$  aus dieser Menge ist  $\Gamma(x)$  eine einelementige Menge, z. B. ist  $\Gamma(1) = \{5\}$ ,  $\Gamma(4) = \{4\}$  usw. Wir sehen, dass die Kantenmenge unseres Graphen 6 Elemente hat.

Bei der Definition eines gerichteten Graphen haben wir den Fall nicht ausgeschlossen, dass ein Knoten  $x$  zur Menge  $\Gamma(x)$  gehört. Wir können das auch so ausdrücken, dass die Existenz einer Kante  $\overrightarrow{xx}$  zugelassen wird, die wir eine Schlinge im Punkt  $x$  nennen.

Im obigen Beispiel ist  $\Gamma(4) = \{4\}$ , also  $\overrightarrow{44}$  eine Schlinge im Punkt 4.

Wir heben noch hervor: Wenn  $x, y$  zwei Knoten sind, kann in dem gerichteten Graphen neben der Kante  $\overrightarrow{xy}$  gleichzeitig auch die Kante  $\overrightarrow{yx}$  existieren.

<sup>49</sup>Man sagt auch, dass  $x$  der linke und  $y$  der rechte Knotenpunkt der Kante  $\overrightarrow{xy}$  ist.

Hier sei wieder auf Bild 54 hingewiesen, in dem ein solcher Fall gezeigt wird. Wenn für zwei Knoten  $x$  und  $y$  die Kante  $\overrightarrow{xy}$  existiert, jedoch nicht die Kante  $\overleftarrow{yx}$ , so sagen wir, dass  $\overrightarrow{xy}$  eine einfache Kante ist. Der Graph in Bild 54 besitzt insgesamt drei einfache Kanten.

Einige Autoren lassen bei der Definition eines gerichteten Graphen auch den sogenannten leeren Graphen zu, der keinen Knoten (und also auch keine Kante) besitzt; wir werden diesen Fall jedoch nicht betrachten. Genau wie bei den ungerichteten Graphen nennen wir einen gerichteten Graphen mit endlicher Knotenmenge einen endlichen gerichteten Graphen und jeden anderen einen unendlichen gerichteten Graphen.

Für das Studium der gerichteten Graphen kann man einen ähnlichen Begriff einführen, wie es bei den ungerichteten Graphen: die Verbindung zwischen zwei Knoten war, die sogenannte gerichtete Verbindung oder kurz die Verbindung.

In einem gerichteten Graphen wollen wir die Knoten  $x_0$  und  $x_n$  wählen. Wenn eine endliche Folge von Knoten und Kanten unseres Graphen der Form

$$x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, x_1, \overrightarrow{x_1x_2}, x_2, \dots, x_{n-1}, \overrightarrow{x_{n-1}x_n}, x_n$$

existiert, so nennen wir diese Folge eine gerichtete Verbindung zwischen den Knoten  $x_0$  und  $x_n$ . Wir sagen, dass diese Verbindung im Knoten  $x_0$  beginnt und im Knoten  $x_n$  endet und dass die anderen Knoten dieser Verbindung ihre inneren Knoten sind. Die Zahl  $n$ , welche die Kantenzahl in der betrachteten Folge bezeichnet, heißt die Länge der Verbindung.

Beispiel 2. In dem Graphen in Bild 56 ist bereits mit stärkeren Linien eine Verbindung zwischen zwei Knoten dargestellt. Sie beginnt in dem Knoten, der dem Stand  $(4, 0, 0)$  entspricht, und endet in dem Knoten, der dem Stand  $(2, 2, 0)$  entspricht. Die Verbindung hat die Länge 4.

Es empfiehlt sich wiederum, die gesamte Folge von Knoten und Kanten, die irgendeine Verbindung ausdrückt, mit einem einzigen Buchstaben zu bezeichnen (wobei gegebenenfalls noch ein Index verwendet wird).

Damit keine Verwechslungen mit dem Symbol eintreten, das wir früher zur Bezeichnung der ungerichteten Verbindung gewählt haben, werden wir hier einen kleinen Pfeil über den Buchstaben setzen. So sprechen wir beispielsweise von der Verbindung  $\vec{V}$  oder  $\vec{V}^*$  usw. Die Folge der Länge 0, der wir bei den ungerichteten Graphen begegnet sind, hat auch hier eine Bedeutung. Dies ist eine Verbindung der Länge 0.

Wir fragen uns nun, wie sich der Begriff des Knotengrades, den wir für ungerichtete Graphen eingeführt haben, auf gerichtete Graphen übertragen lässt.

Zuvor wollen wir in dem gegebenen Graphen noch eine Abbildung  $\Gamma^{-1}$  von  $U$  in die Menge der Teilmengen von  $U$  wie folgt definieren:

Für jeden Knoten  $x$  unseres Graphen bedeute  $\Gamma^{-1}$  die Menge der Knoten  $y$ , für welche gilt  $x \in \Gamma(y)$ . Die Menge  $\Gamma^{-1}(x)$  wird gerade von denjenigen Knoten unseres Graphen gebildet, von denen gerichtete Kanten ausgehen, die zum Knoten  $x$  führen.

In dem zu betrachtenden Graphen wählen wir einen Knoten  $x$  und setzen  $a = |\Gamma(x)|$ ,  $b = |\Gamma^{-1}(x)|$ . Wenn die Mengen  $\Gamma(x)$  und  $\Gamma^{-1}(x)$  endlich sind, dann sind  $a$ ,  $b$  nichtnegative ganze Zahlen.<sup>50</sup>

Dieser Fall tritt offenbar immer dann ein, wenn der zu betrachtende Graph endlich ist. Wenn wir jedoch einen unendlichen Graphen vor uns haben, dann kann  $a = \infty$  oder  $b = \infty$  sein. Uns wird hier jedoch nur der erste Fall interessieren. Die anschauliche Bedeutung der Zahlen  $a$  und  $b$  ist dann folgende:

<sup>50</sup>In der Literatur werden die Zahlen  $a$ ,  $b$  oft als Halbgrade des Knotens  $x$  bezeichnet.



$a$  bedeutet die Anzahl der Kanten, die vom Knoten  $x$  ausgehen, während  $b$  die Anzahl der Kanten bezeichnet, die in den Knoten  $x$  einmünden. Das Paar  $(a, b)$  beschreibt dann den Knoten  $x$  auf ähnliche Weise, wie der Knotengrad den Knoten beim ungerichteten Graphen charakterisiert. Wenn  $a = 0$  und  $b = 0$  ist, dann nennen wir den Knoten  $x$  isoliert (ähnlich wie bei den ungerichteten Graphen).

Wir wollen von einem Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_1$  ausgehen und in ihm zwei Knoten  $x$  und  $y$  wählen. Weiter nehmen wir an, dass in dem Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_1$  eine einfache Kante  $\vec{xy}$  existiert. Der Graph  $\vec{\mathcal{G}}_2$  sei wie folgt definiert:

Die Knotenmenge von  $\vec{\mathcal{G}}_2$  stimmt mit der Knotenmenge von  $\vec{\mathcal{G}}_1$  überein.  $\vec{\mathcal{G}}_2$  enthält alle Kanten von  $\vec{\mathcal{G}}_1$  außer der Kante  $\vec{xy}$ ; anstelle dieser Kante enthält der Graph  $\vec{\mathcal{G}}_2$  die Kante  $\vec{yx}$ .

Wir sagen dann, der Graph  $\vec{\mathcal{G}}_2$  ist durch Änderung der Richtung der Kante  $\vec{xy}$  aus dem Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_1$  entstanden.

Wir können in einem gegebenen Graphen die Richtung bei einer beliebigen Anzahl seiner einfachen Kanten ändern. Im Falle eines unendlichen Graphen kann die Anzahl der Kanten, deren Richtung geändert werden kann, auch unendlich sein.

Wenn ein Graph  $\vec{\mathcal{G}}_1 = [U_1, K_1]$  und ein weiterer Graph  $\vec{\mathcal{G}}_2 = [U_2, K_2]$  so gegeben sind, dass  $U_1 \subseteq U_2$  und gleichzeitig  $K_1 \subseteq K_2$  gilt, so sagen wir, dass  $\vec{\mathcal{G}}_1$  ein Teilgraph des Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_2$  ist. Wenn dabei nicht, gleichzeitig  $U_1 = U_2$  und  $K_1 = K_2$  gilt, so nennen wir  $\vec{\mathcal{G}}_1$  genauer einen echten Teilgraphen von  $\vec{\mathcal{G}}_2$ .

Bevor wir an die Definition des Zusammenhanges eines gerichteten Graphen gehen, führen wir noch einen Begriff ein. Wenn in einem gegebenen Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  zwischen den Knoten  $v$  und  $w$  eine Verbindung existiert oder wenn man durch Änderung der Richtung gewisser Kanten des Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  erreichen kann, dass in dem neuen Graphen zwischen  $v$  und  $w$  eine Verbindung besteht, dann sagen wir, dass die Knoten  $v$  und  $w$  zusammenhängen.

Wenn in dem Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  jeweils zwei seiner Knoten zusammenhängen, so heißt  $\vec{\mathcal{G}}$  ein zusammenhängender Graph. So ist beispielsweise der Graph, den wir in Bild 56 angegeben haben, zusammenhängend, der durch Bild 54 gegebene Graph dagegen nicht.

Auch den Begriff einer Komponente kann man im Falle der gerichteten Graphen einführen. Wir gehen dabei von einem beliebigen Knoten  $x$  eines Graphen  $\vec{\mathcal{G}} = [U, K]$  aus und betrachten die Menge  $U_1$  aller Knoten des Graphen, die mit dem Knoten  $x$  zusammenhängen. Wenn wir mit  $K_1$  die Menge aller Kanten von  $\vec{\mathcal{G}}$  bezeichnen, die wenigstens mit einem Knoten aus  $U_1$  inzidieren, dann heißt der Graph  $\vec{\mathcal{G}}^{(x)} = [U_1, K_1]$  die (zu dem Knoten  $x$  gehörige) Komponente des Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$ .

Der Leser mag sich selbst zur Übung darüber klarwerden, dass der Graph in Bild 54 drei Komponenten hat.

Wir haben gesehen, dass in einem ungerichteten Graphen die Kreise eine besondere Bedeutung haben. Nun betrachten wir die den Kreisen entsprechenden Teilgraphen der gerichteten Graphen.

Es sei ein endlicher zusammenhängender gerichteter Graph  $\vec{\mathcal{Z}} = [U, \Gamma]$  gegeben, und für jeden Knoten  $x \in U$  gelte  $|\Gamma(x)| = 1$  und auch  $|\Gamma^{-1}(x)| = 1$ .

Dann wird der Graph  $\vec{\mathcal{Z}}$  als Zyklus bezeichnet. Die Definition hat wiederum einen sehr anschaulichen Sinn, den wir kurz wie folgt ausdrücken können: Der Zyklus ist ein zusammenhängender

endlicher Graph, in dem von jedem Knoten eine einzige Kante ausgeht und in jeden Knoten eine einzige Kante einmündet.

Wenn ein Zyklus  $\vec{\mathcal{G}} = [U, \Gamma]$  gegeben ist, dann nennen wir die Zahl  $|U|$  die Länge des Zyklus.

Der Leser überlege sich, dass ein Zyklus der Länge 1 ein mit einer Schlinge versehener Knoten ist. Ein Zyklus der Länge 2 enthält zwei Knoten  $v$  und  $w$  zusammen mit den Kanten  $\vec{vw}$ ,  $\vec{wv}$  usw.

Übungen

III. 2.1. Wir wollen in einem endlichen Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  die Knoten der Reihe nach mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$  nummerieren und mit  $a_i$  die Zahl der Kanten des Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  bezeichnen, die von dem  $i$ -ten Knoten ausgehen, und mit  $b_i$  die Zahl der Kanten, die in den  $i$ -ten Knoten einmünden. Man beweise, dass

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

gilt.

III. 2.2. Nun betrachten wir den in Bild 56 angegebenen Graphen. Man zeige, dass jede seiner Kanten wenigstens in einem Zyklus enthalten ist.

Weiterhin bestimme man, in wievielen verschiedenen Zyklen die Kante enthalten ist, die von dem mit  $(2, 2, 0)$  bezeichneten Knoten ausgeht und in dem mit  $(1, 2, 1)$  bezeichneten Knoten endet.

III. 2.3. Wenn in einem gegebenen Graphen zwischen zwei Knoten  $x$  und  $y$  eine Verbindung besteht, dann bezeichnen wir mit  $\vec{V}_{\min}$  eine solche Verbindung zwischen  $x$  und  $y$ , die die geringste Länge hat. Man beweise, dass in  $\vec{V}_{\min}$  jeder Knoten und jede Kante des gegebenen Graphen höchstens einmal auftritt.

III. 2.4. Es sei ein Graph  $\vec{\mathcal{G}} = [U, \Gamma]$  gegeben, und es sei jedem seiner Knoten  $x$  eine nichtnegative ganze Zahl  $g(x)$  zugeordnet. Wir sagen, die so definierte Abbildung  $g$  ist eine Grundysche Funktion für  $g$ , wenn gilt:

- a) Wenn  $\Gamma(x) = \emptyset$  ist, dann ist  $g(x) = 0$ ;
- b) Wenn  $\Gamma(x) \neq \text{varnothing}$  ist, dann ist  $g(x)$  gleich der kleinsten nichtnegativen ganzen Zahl, die von allen Werten  $g(y)$  für  $y \in \Gamma(x)$  verschieden ist.

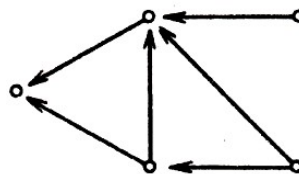


Bild 58

Man zeige, dass in dem in Bild 58 angegebenen Graphen eine Grundysche Funktion existiert und dass sie durch diesen Graphen eindeutig bestimmt wird. Man gebe diese Grundysche Funktion an!

III. 2.5. Man gebe ein Beispiel für einen Bild 58 Graphen an, für den keine Grundysche Funktion definiert werden kann!

III. 2.6. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen an, für den wenigstens zwei Grundysche Funktionen existieren!

III. 2.7. Es existiere für einen Graphen  $\vec{G}$  eine Grundysche Funktion  $g$ , und für einen Knoten  $x$  sei die Menge  $\Gamma(x)$  endlich. Dann gilt  $g(x) \leq |\Gamma(x)|$ . Man beweise das!

III. 2.8. In einen gerichteten Graphen  $\vec{G} = [U, T]$  wollen wir eine Knotenbasis definieren als eine Teilmenge  $B$  der Menge  $U$ , für die gilt:

I. Wenn  $x \in B$  ist, dann ist  $\Gamma(x) \cap B = \emptyset$ .

II. Wenn  $x \notin B$  ist, dann ist  $\Gamma(x) \cap B \neq \text{varnothing}$ .

Man zeige, dass in dem Graphen in Bild 58 eine einzige Knotenbasis existiert, und gebe diese an.

III. 2.9. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen  $\vec{G}$  an, in dem keine Knotenbasis existiert.

III. 2.10. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen  $\vec{G}$  an, in dem zwei Knotenbasen existieren. Man gebe einerseits einen Graphen an, in dem beide Knotenbasen gleichmächtig sind und andererseits einen Graphen, in dem sie nicht gleichmächtig sind.

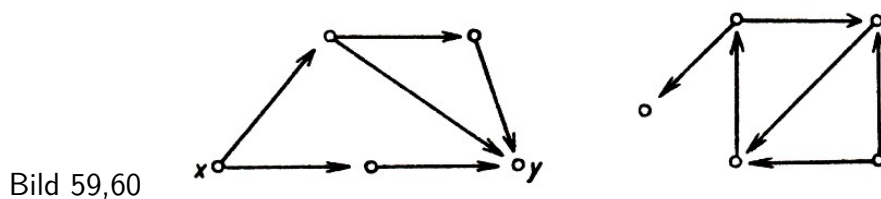
III. 2.11. Für einen gegebenen Graphen  $\vec{G}$  existiere eine Grundysche Funktion  $g$ . Wir wollen mit  $B$  die Menge aller Knoten  $x$  des Graphen  $\vec{G}$  bezeichnen, für die  $g(x) = 0$  ist, Man beweise, dass die Menge  $B$  eine Knotenbasis des Graphen  $\vec{G}$  ist.

### 3.3 Einige Typen gerichteter Graphen

Für einen Knoten  $x$  eines Graphen  $\vec{G}$  sei die Menge  $\Gamma^{-1}(x)$  leer; dann sagen wir, dass  $x$  ein Anfangsknoten des betrachteten Graphen ist.<sup>51</sup>

Wir können anschaulich ausgedrückt sagen, dass ein Knoten genau dann ein Anfangsknoten ist, wenn in ihn keine Kante des Graphen mündet. So ist beispielsweise in Bild 59 der Knoten  $x$  ein Anfangsknoten, und dieser Graph hat keine weiteren Anfangsknoten mehr.

Auch jeder isolierte Knoten des Graphen ist ein Anfangsknoten. Auf ähnliche Weise kann ein Endknoten eines Graphen als ein Knoten  $y$  definiert werden, für den die Menge  $\Gamma^{-1}(y)$  leer ist. So ist beispielsweise in Bild 59 der Knoten  $y$  ein Endknoten. Wir werden hier keine Sätze über die Endknoten eines Graphen ableiten; denn durch eine Änderung der Richtung der Kanten kann man jeden Satz über die Endknoten eines Graphen in einen solchen über die Anfangsknoten überführen.



Ein verhältnismäßig einfacher Typ eines gerichteten Graphen ist der sogenannte azyklische Graph. Ein Graph  $\vec{G}$  heißt azyklisch, wenn er keinen Zyklus als Teilgraphen enthält. So ist z. B. der Graph aus Bild 59 azyklisch, derjenige aus Bild 60 nicht.

Der Leser weiß, dass wir hier auch die Schlinge als Zyklus betrachten, und darum kann ein azyklischer Graph keine Schlingen enthalten.

Man beachte, dass die Azyklizität eine "Erbeigenschaft" in dem folgenden Sinn ist:

<sup>51</sup>Manche Autoren nennen einen Anfangsknoten auch Quelle.

Wenn  $\vec{G}_1$  ein Teilgraph eines Graphen  $\vec{G}_2$  ist, dann folgt aus der Tatsache, dass  $\vec{G}_2$  ein azyklischer Graph ist, dass auch  $\vec{G}_1$  azyklisch ist. Diese einfache Eigenschaft werden wir in den Beweisen brauchen.

Über die endlichen Graphen leiten wir nun zwei Sätze ab.

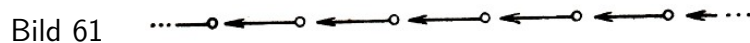
Satz 1. In jedem endlichen azyklischen Graphen existiert wenigstens ein Anfangsknoten.

Beweis. Wir wählen in einem endlichen azyklischen Graphen einen beliebigen Knoten  $x_1$ . Wenn  $x_1$  ein Anfangsknoten ist, sind wir mit dem Beweis fertig.

Wenn er kein Anfangsknoten ist, dann existiert in dem Graphen wenigstens ein von  $x_1$  verschiedener Knoten  $x_2$ , so dass die Kante  $\overrightarrow{x_2x_1}$  vorhanden ist. Wenn  $x_2$  ein Anfangsknoten ist, ist der Beweis fertig. Im entgegengesetzten Falle suchen wir einen (von  $x_1$  und  $x_2$  verschiedenen) Knoten  $x_3$ , so, dass die Kante  $\overrightarrow{x_3x_2}$  existiert.

Auf diese Weise können wir fortfahren und so die Folge der Knoten  $x_1, x_2, x_3, \dots$  bilden, in der kein Knoten zweimal auftritt (unser Graph ist azyklisch!).

Da der Ausgangsgraph endlich ist, kann diese Folge nicht unendlich sein, und wir müssen bei ihrer Konstruktion einen Anfangsknoten des gegebenen Graphen finden. Damit ist der Beweis geliefert.



Es sei bemerkt, dass es in Satz 1 wesentlich ist, dass der zu betrachtende Graph endlich ist. Bild 61 zeigt uns nämlich das Beispiel eines unendlichen azyklischen Graphen, der keinen Anfangsknoten enthält.

Man kann die endlichen azyklischen Graphen durch eine sehr einfache Bedingung beschreiben, die wir im nächsten Satz angeben.

Satz 2. Ein endlicher Graph  $\vec{G} = [U, K]$  ist dann und nur dann azyklisch, wenn wir seine Knoten mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots, |U|$  so nummerieren können, dass für jede Kante  $\overrightarrow{ij}$  die Beziehung  $i < j$  erfüllt ist.

Beweis. Wir gehen von einem endlichen Graphen  $\vec{G}$  aus und nehmen an, dass man seine Knoten so nummerieren kann, wie es in unserem Satz gesagt wird. Unser Graph hat keine Schlinge  $\overrightarrow{ii}$ , denn es gilt nicht  $i < i$ . Wenn  $\vec{G}$  einen anderen Zyklus enthielte, so kommen wir durch folgende Erwägung zu einem Widerspruch:

Mögen die Knoten unseres Zyklus in der vorgenommenen Nummerierung der Knoten die Zahlen  $i_1, i_2, \dots, i_n$  in der Reihenfolge enthalten, wie die Kanten in diesem Zyklus gerichtet sind. Es ist also  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$  und weiter  $i_n < i_1$ . Daraus folgt  $i_1 < i_1$ , was ein Widerspruch ist. Unser Graph ist also azyklisch.

In dem zweiten Teil des Beweises wollen wir von einem endlichen azyklischen Graphen  $\vec{G}$  ausgehen und zeigen, dass seine Knoten so nummerierbar sind, wie in unserem Satz angegeben ist. Nach dem vorangegangenen Satz können wir in  $\vec{G}$  wenigstens einen Anfangsknoten finden, wir wollen ihn mit der Zahl 1 bezeichnen.

Wenn  $|U| \neq 1$  ist, dann entfernen wir aus  $\vec{G}$  den Knoten 1 und alle Kanten, die von ihm ausgehen. Wir erhalten so den azyklischen Graphen  $\vec{G}_1$ . Da  $\vec{G}_1$  ein endlicher Graph ist, können wir hier wieder wenigstens einen Anfangsknoten finden, und diesen bezeichnen wir mit 2. Wenn  $|U| \neq 2$  ist, dann entfernen wir ebenfalls den Knoten 2 aus  $\vec{G}_1$  und alle von ihm ausgehenden Kanten.

In dem so entstandenen Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_2$  suchen wir wieder einen Anfangsknoten und wiederholen die Konstruktion so lange, wie der erreichte Graph  $\vec{\mathcal{G}}_j$  wenigstens zwei Knoten hat. Da  $\vec{\mathcal{G}}$  ein endlicher Graph ist, gelangen wir auf diese Weise schließlich zu einem Graphen mit einem einzigen Knoten, dem wir die Zahl  $|U|$  zuordnen.

Man sieht, dass die so definierte Nummerierung der Knoten die Eigenschaft hat, die wir in dem zu beweisenden Satz gefordert haben. Damit ist der Beweis von Satz 2 erbracht.

Eine interessante Anwendung der azyklischen Graphen hat Oystein Ore im Jahre 1960 festgestellt; er hat nämlich gezeigt, dass diese Art von Graphen auch in der Biologie Anwendung findet.

Wenn wir eine Menge von Lebewesen einer bestimmten Art beobachten, können wir jedem Einzel Exemplar einen Knoten eines gewissen gerichteten Graphen zuordnen; die Kante  $\vec{x}y$  führen wir genau dann ein, wenn das Exemplar  $y$  der (direkte) Nachkomme des Exemplars  $x$  ist. Da keiner sein eigener Nachkomme ist, hat ein so entstandener Graph offensichtlich keine Schlinge, und man erkennt auch leicht, dass dies ein azyklischer Graph speziellen Typs ist (in jedem Knoten gehen zwei Kanten ein, denn jedes Exemplar hat zwei Eltern).

Eingehender kann sich der Leser in Ores Buch [19] auf über diese biologischen Anwendungen orientieren. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit nun einem anderen Typ gerichteter Graphen zuwenden.

Es existiere in einem Graphen  $\vec{\mathcal{G}}$  für jedes Knotenpaar  $x, y$  eine Verbindung, die in  $x$  beginnt und in  $y$  endet. Wir sagen dann,  $\vec{\mathcal{G}}$  sei ein wohlgerichteter Graph.<sup>52</sup>

Wenn  $\vec{\mathcal{G}}$  nur einen Knoten hat, dann ist dieser Graph offensichtlich nach Definition wohlgerichtet (gleichgültig, ob dieser Knoten mit einer Schlinge versehen ist oder nicht). Das ist allerdings ein trivialer Fall.

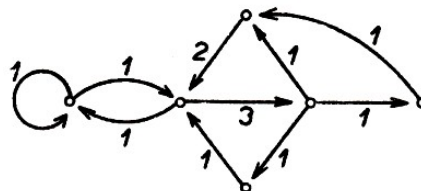


Bild 62

Ein anderes Beispiel für einen wohlgerichteten Graphen sehen wir in Bild 62. Der Leser kann selbst erkennen, dass hier wirklich die Bedingung erfüllt ist, die wir von einem wohlgerichteten Graphen fordern. Wir überlassen es gleichfalls dem Leser, sich selbst ein Beispiel für einen unendlichen wohlgerichteten Graphen zu konstruieren.

Wenn wir an die Definition des Zusammenhanges bei gerichteten Graphen denken, sehen wir, dass ein wohlgerichteter Graph ein Sonderfall eines zusammenhängenden Graphen ist. Ein zusammenhängender gerichteter Graph muss allerdings nicht wohlgerichtet sein, wie z. B. Bild 63 zeigt.



Bild 63

Wir wollen nun einen Satz über wohlgerichtete Graphen beweisen.

Satz 3. Ein zusammenhängender Graph  $\vec{\mathcal{G}}$  ist genau dann wohlgerichtet, wenn jede seiner

<sup>52</sup>In der Literatur finden wir auch die Bezeichnung stark zusammenhängender Graph. Die deutsche Bezeichnung wohlgerichtet benutzte L. Egged schon im Jahre 1941.

Kanten in wenigstens einem Zyklus von  $\vec{G}$  liegt.

Beweis. Wir wollen im ersten Teil des Beweises von einem wohlgerichteten Graphen  $\vec{G}$  ausgehen und beweisen, dass jede seiner Kanten in wenigstens einem Zyklus liegt.

Es sei  $\vec{xy}$  eine Kante von  $\vec{G}$ . Ist diese eine Schlinge, so ist alles klar. Sind  $x, y$  verschiedene Knoten, so existiert in dem gegebenen Graphen eine Verbindung, die im Knoten  $y$  beginnt und im Knoten  $x$  endet.

Wenn mehrere solcher Verbindungen existieren, dann gibt es unter diesen eine oder mehrere, die die geringste Länge haben. Unter diesen Verbindungen minimaler Länge wählen wir eine beliebige aus und bezeichnen sie mit  $\vec{V}_{\min}$ .

Nun erkennen wir leicht, dass auf  $\vec{V}_{\min}$  jeder Knoten und jede Kante unseres Graphen höchstens einmal auftreten. Es genügt nun, einen Zyklus zu bilden, der aus allen Knoten der Verbindung  $\vec{V}_{\min}$ , aus allen Kanten dieser Verbindung und weiter aus der Kante  $\vec{xy}$  besteht. Damit ist der gesuchte Zyklus, der die Kante  $\vec{xy}$  enthält, gebildet.

Im zweiten Teil beweisen wir folgendes: Wenn ein zusammenhängender Graph  $\vec{G}$  gegeben ist, bei dem jede Kante wenigstens zu einem Zyklus gehört, dann ist der Graph  $\vec{G}$  wohlgerichtet. Wir wählen also in einem zusammenhängenden Graphen, bei dem jede Kante wenigstens zu einem Zyklus gehört, einen willkürlichen Knoten  $x$  und bezeichnen mit  $M$  die Menge aller Knoten  $y$  von der Art, dass in  $\vec{G}$  eine Verbindung zwischen  $x$  und  $y$  existiert.

Um zu einem Widerspruch zu kommen, werden wir annehmen, dass in unserem Graphen auch solche Knoten existieren, die nicht zu  $M$  gehören; wir wollen die Menge dieser Knoten mit dem Buchstaben  $N$  bezeichnen.

Offenbar ist es nicht möglich, zwei Knoten  $v$  und  $w$  so zu finden, dass  $v \in M, w \in N$  ist und die Kante  $\vec{vw}$  zu  $\vec{G}$  gehört. Dann würde nämlich  $w \in M$  sein, was nicht möglich ist.

Da unser Graph zusammenhängend ist, müssen also zwei Knoten  $r, s$  so existieren, dass  $r \in M, s \in N$  ist und  $\vec{sr}$  eine Kante von  $\vec{G}$  ist.

Nun bilden wir den Zyklus  $\vec{Z}$  über der Kante  $\vec{sr}$  und bezeichnen mit  $\vec{V}_1$  die Verbindung zwischen  $x$  und  $r$  und mit  $\vec{V}_2$  die Verbindung zwischen  $r$  und  $s$ , die zum Zyklus  $\vec{Z}$  gehört.

Wenn wir zuerst  $\vec{V}_1$  und dann  $\vec{V}_2$  durchlaufen, so erhalten wir auf diese Weise eine Verbindung zwischen  $x$  und  $s$ . Das ist jedoch ein Widerspruch; denn wir haben vorausgesetzt, dass in unserem Graphen keine Verbindung zwischen  $x$  und  $s$  existiert. Auch der zweite Teil des Beweises ist damit geliefert.

Als Illustration können wir erneut Bild 62 betrachten, in dem ein wohlgerichteter Graph gezeigt wird. Die Zahlen, die an seinen Kanten angegeben sind, bedeuten, in wievielen Zyklen die entsprechende Kante auftritt.

Man sieht also: Eine Kante kann auch in mehreren Zyklen enthalten sein.

Die Eulerschen Graphen, denen wir beim Studium der ungerichteten Graphen begegnet sind, haben auch unter den gerichteten Graphen eine bestimmte Analogie. Wir meinen hiermit die sogenannten gleichwertig gerichteten Graphen.<sup>53</sup>

<sup>53</sup>Der Begriff des gleichwertig gerichteten Graphen tritt in der mathematischen Literatur recht oft auf; es hat sich für ihn jedoch keine Bezeichnung fest eingebürgert. So arbeitet z. B. D. König [15] mit dieser Art gerichteter Graphen, verwendet dabei jedoch keine besondere Bezeichnung. Bei anderen Autoren (N.G. de Bruijn, T. van Aardenne-Ehrenfest, F. Harary) fand ich gleichfalls verschiedene Ausdrücke für diesen Begriff (z. B. T-Graph, Isograph).

Ein endlicher Graph  $\vec{G} = [U, \Gamma]$  heißt gleichwertig gerichtet, wenn für jeden seiner Knoten  $x$  gilt  $|\Gamma(x)| = |\Gamma^{-1}(x)|$ .

Anschaulich ausgedrückt bedeutet diese Bedingung, dass in jeden Knoten eines gleichwertig gerichteten Graphen ebensoviele Kanten eintreten, wie von ihm ausgehen. So ist z. B. ein Zyklus ein einfaches Beispiel für einen gleichwertig gerichteten Graphen. Ein anderes triviales Beispiel erhalten wir, wenn wir einen Graphen wählen, dessen sämtliche Knoten isoliert sind.

Eine Verbindung, in der jede Kante des gegebenen Graphen höchstens einmal auftritt, nennen wir einen (gerichteten) Zug. Der Zug kann wieder offen oder geschlossen sein (je nachdem, ob er in verschiedenen Knoten beginnt und endet oder nicht).

In einem weiteren Satz äußern wir uns darüber, welche gerichteten Graphen man in einem Zug bilden kann.

Satz 4. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass wir einen endlichen Graphen  $\vec{G}$  in einem geschlossenen Zug bilden können, ist, dass  $\vec{G}$  ein zusammenhängender gleichwertig gerichteter Graph ist.

Beweis. Unsere Behauptung ist der Aussage des Satzes 22 auf S. 47 analog, dessen Beweis wir auf einem Hilfssatz aufgebaut haben. Wir werden hier auf eine etwas andere Weise vorgehen (die sich allerdings in ihrem Wesen von dem Beweisgedanken jenes Satzes über die Eulerschen Graphen nicht allzusehr unterscheidet).

Aus der Möglichkeit der Konstruktion in einem Zug folgt wiederum der Zusammenhang unseres Graphen. Ist dies ein geschlossener Zug, dann ist (aus ähnlichen Gründen wie im Satz 22) für jeden Knoten  $t$  die Beziehung  $|\Gamma(t)| = |\Gamma^{-1}(t)|$  erfüllt, und der Graph ist gleichwertig gerichtet.

Wir wollen also von dem zusammenhängenden gleichwertig gerichteten Graphen  $\vec{G}$  ausgehen und werden beweisen, dass wir ihn in einem geschlossenen Zug bilden können. Zunächst wählen wir in  $\vec{G}$  einen beliebigen Knoten  $w$  und bilden einen Zug dadurch, dass wir die Kanten des zu betrachtenden Graphen "in Pfeilrichtung" fortschreitend durchgehen.

Da  $\vec{G}$  ein gleichwertig gerichteter Graph ist, können wir immer von neuem den Knoten verlassen, in den wir eingetreten sind; eine Ausnahme bildet nur der Knoten  $w$ , in den wir nach einer endlichen Zahl von Schritten notwendigerweise gelangen, denn unser Graph ist endlich.

Es bleibt die Frage bestehen, ob man einen geschlossenen Zug bilden kann, der alle Kanten unseres Graphen enthält. Wir wollen mit  $\vec{T}_{\max}$  einen solchen geschlossenen Zug bezeichnen, der die größte Länge hat.

Wenn irgendeine Kante unseres Graphen nicht zu  $\vec{T}_{\max}$  gehört, bilden wir einen Teilgraphen  $\vec{G}_1$  des Graphen  $\vec{G}$  von der Art, dass  $\vec{G}_1$  alle Kanten, die nicht zu  $\vec{T}_{\max}$  gehören, und alle mit ihnen inzidenten Knoten enthält.

Der Graph  $\vec{G}_1$  ist offensichtlich gleichwertig gerichtet und hat wenigstens einen Knoten  $x$  gemeinsam mit  $\vec{T}_{\max}$ . In dem Graphen  $\vec{G}_1$  kann man aus ähnlichen Gründen, wie wir schon dem ursprünglichen Graphen  $\vec{G}$  erkannt haben, gleichfalls einen geschlossenen Zug  $\vec{T}$  bilden (der im Knoten  $x$  beginnt und endet).

Wenn wir jedoch zu dem Graphen  $\vec{G}$  zurückkehren und hier  $\vec{T}_{\max}$  bis zum Knoten  $x$  durchlaufen, dann kann man durch Einschaltung des Zuges  $\vec{T}$  den Zug  $\vec{T}_{\max}$  "verlängern". Das ist ein Widerspruch, und der Beweis ist damit geliefert.

Der Satz, mit dem wir uns eben beschäftigt haben, zeigt uns auch, welche Beziehung zwi-

schen den gleichwertig gerichteten und den wohlgerichteten Graphen besteht. Da man einen zusammenhängenden gleichwertig gerichteten Graphen durch einen geschlossenen Zug bilden kann, existiert zwischen jeweils zwei seiner Knoten eine Verbindung, und der Graph ist also wohlgerichtet.

Diese Folgerung aus Satz 4 können wir so ausdrücken. Ein zusammenhängender gleichwertig gerichteter Graph ist ein Sonderfall eines wohlgerichteten Graphen.

### Übungen

III. 8.1. Man gebe ein Beispiel für einen endlichen zusammenhängenden azyklischen Graphen an, der einen einzigen Anfangsknoten besitzt.

III. 8.2. Man gebe ein Beispiel für einen wohlgerichteten Graphen an, bei dem jede Kante a) zu genau einem Zyklus; b) zu genau zwei Zyklen gehört.

III. 8.3. In einem endlichen azyklischen Graphen  $\vec{G}$  existiere ein einziger Anfangsknoten  $p$  und ein einziger Endknoten  $q$ . Wir bilden einen neuen Graphen  $\vec{G}_1$  dadurch, dass wir zu  $\vec{G}$  die Kante  $\vec{qp}$  hinzufügen. Man beweise, dass  $\vec{G}_1$  wohlgerichtet ist.

III. 8.4. Wenn wir in der vorhergehenden Übung von dem Graphen  $\vec{G}$  annehmen, dass er unendlich ist, dann kann nicht bewiesen werden, dass  $\vec{G}$  wohlgerichtet ist. Man zeige das an einem Beispiel!

III. 8.5. In Bild 64 ist ein wohlgerichteter Graph mit vier Knoten angegeben.

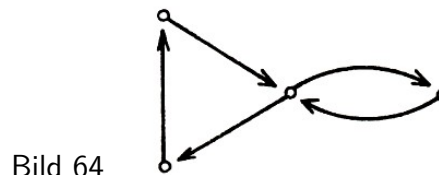


Bild 64

Man zeige, dass eine natürliche Zahl  $l$  so existiert, dass zwischen jeweils zwei nicht notwendig verschiedenen Knoten unseres Graphen eine Verbindung von der Länge  $l$  existiert.

Man gebe die kleinste natürliche Zahl  $l$  an, die so Bild 64 unserem Graphen zugeordnet werden kann.

## 3.4 Quasikomponenten eines Graphen und reduzierte Graphen

Der Begriff des azyklischen Graphen ermöglicht uns, einen beliebigen endlichen gerichteten Graphen übersichtlich zu beschreiben. Bei dieser Untersuchung spielen noch die sogenannten Quasikomponenten<sup>54</sup> eines Graphen eine Rolle, anhand deren wir uns den schon bekannten Begriff der Komponente ein wenig in Erinnerung rufen.

Wir haben gesehen, dass jede Kante eines wohlgerichteten Graphen wenigstens zu einem seiner Zyklen gehört. Es wird darum sicherlich nützlich sein, wenn wir im allgemeinen Falle diejenigen Kanten eines Graphen betrachten, die zu keinem Zyklus gehören. Jede derartige Kante nennen wir eine freie Kante des Graphen.

Wenn wir aus dem Graphen  $\vec{G}$  alle seine freien Kanten entfernen, entsteht ein Teilgraph  $\vec{G}_0$ . Dieser Graph  $\vec{G}_0$  hat schon die Eigenschaft, dass jede Kante wenigstens in einem Zyklus dieses Graphen enthalten ist.

<sup>54</sup>Die Vorsilbe "Quasi" (aus dem Lateinischen) bedeutet "gleichsam", "sozusagen".



Wenn wir also die einzelnen Komponenten des Graphen  $\vec{G}_0$  betrachten, sehen wir, dass jede dieser Komponenten ein wohlgerichteter Graph ist.

Die Komponenten des Graphen  $\vec{G}_0$  haben eine bestimmte Bedeutung für den ursprünglichen Graphen  $\vec{G}$ ; wir nennen sie die Quasikomponenten des Graphen  $\vec{G}$ .

Beispiel 3. Wir bestimmen die freien Kanten und die Quasikomponenten des Graphen, der in Bild 65 angegeben wird.

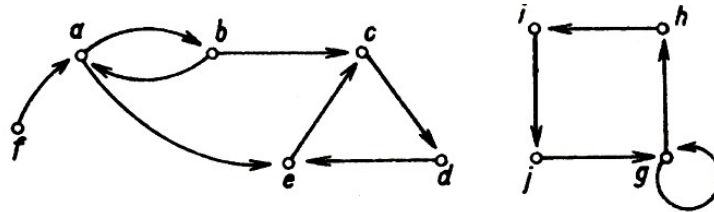


Bild 65

Unser Graph hat drei freie Kanten, nämlich  $\vec{ae}$ ,  $\vec{be}$  und  $\vec{fa}$ . Wenn wir diese Kanten aus dem gegebenen Graphen entfernen, entsteht ein Graph mit vier Komponenten; das sind also die Quasikomponenten des ursprünglichen Graphen.

Wir beachten noch, dass die Quasikomponente, deren Knotenmenge  $\{g, h, i, j\}$  ist, gleichzeitig eine Komponente des ursprünglichen Graphen ist.

Kehren wir wieder zum allgemeinen Fall zurück. Wir suchen in einem gegebenen Graphen  $\vec{G}$  alle Quasikomponenten auf und bilden einen neuen Graphen  $\vec{R}$ , der wie folgt definiert wird: Jeder Quasikomponente des Graphen  $\vec{G}$  entspreche ein Knoten des Graphen  $\vec{R}$ . Wenn  $\vec{G}_1$  und  $\vec{G}_2$  zwei Quasikomponenten des Graphen  $\vec{G}$  sind und wir mit  $g_1$  und  $g_2$  die entsprechenden Knoten von  $\vec{R}$  bezeichnen, dann existiert in  $\vec{R}$  die Kante  $\vec{g_1g_2}$  dann und nur dann, wenn es in  $\vec{G}$  eine freie Kante  $\vec{xy}$  von der Art gibt, dass  $x$  zu  $\vec{G}_1$  und  $y$  zu  $\vec{G}_2$  gehört. Der Graph  $\vec{R}$ , der auf diese Weise beschrieben wird, heißt der reduzierte Graph von  $\vec{G}$ .<sup>55</sup>

Beispiel 4. Bilden wir einen reduzierten Graphen zu dem in Bild 65 dargestellten Graphen. In Beispiel 3 haben wir gesagt, dass der dort betrachtete Graph vier Quasikomponenten hat. Der reduzierte Graph hat also vier Knoten. Wir sehen ihn in Bild 66, in dem bei jedem Knoten die Knotenmenge der entsprechenden Quasikomponente angegeben ist.

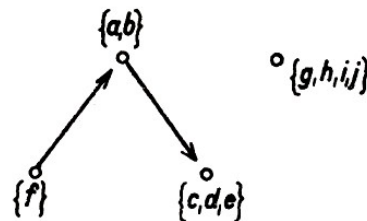


Bild 66

Wir wollen nun eine wichtige Eigenschaft des reduzierten Graphen ableiten.

Satz 5. Der reduzierte Graph  $\vec{R}$  eines Graphen  $\vec{G}$  ist azyklisch.

Beweis. Aus der Konstruktion des reduzierten Graphen wissen wir, dass  $\vec{R}$  keine Schlinge hat. Nun nehmen wir an, dass in  $\vec{R}$  ein Zyklus der Länge  $l$  existiert (wobei  $l > 2$  ist) und bezeichnen mit  $\vec{g_1g_2}$ ,  $\vec{g_2g_3}$ ,  $\vec{g_3g_4}$ , ...,  $\vec{g_lg_1}$  alle Kanten dieses Zyklus.

<sup>55</sup>Die Definition des reduzierten Graphen hat eine sehr anschauliche Bedeutung. Jede Quasikomponente wird hier in einen einzigen Knoten "zusammengezogen", und auch die Kanten zwischen den so entstandenen Knoten werden immer auf höchstens eine reduziert.

Von den Knoten  $g_1, g_2, \dots, g_l$  des Graphen  $\vec{G}$  können wir zu den entsprechenden Quasikomponenten  $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_l$  übergehen.

Nunmehr suchen wir im Graphen  $\vec{G}$  freie Kanten  $\overrightarrow{x_1y_1}, \overrightarrow{x_2y_2}, \dots, \overrightarrow{x_ly_l}$  von der Art aus, dass die Kante  $\overrightarrow{x_iy_i}$  von der Quasikomponente  $\vec{G}_i$  ausgeht und in  $\vec{G}_{i+1}$  endet (für  $i = 1, 2, 3, \dots, l-1$ ) und die Kante  $\overrightarrow{x_ly_l}$  von  $\vec{G}_l$  ausgeht und in  $\vec{G}_1$  endet.

Wir bilden in  $\vec{G}_2$  eine kürzeste Verbindung zwischen  $y_1$  und  $x_2$ , in  $\vec{G}_3$  eine kürzeste Verbindung zwischen  $y_2$  und  $x_3$  und führen auch in den anderen Quasikomponenten eine ähnliche Konstruktion durch.

Dann würden die Kanten  $\overrightarrow{x_1y_1}, \overrightarrow{x_2y_2}, \dots, \overrightarrow{x_ly_l}$  zusammen mit allen Knoten und Kanten jener minimalen Verbindungen einen Zyklus bilden. Das ist jedoch ein Widerspruch; denn die Kanten  $\overrightarrow{x_iy_i}$  sind frei. Der Beweis ist damit geliefert.

Die Quasikomponenten haben nicht nur in der Graphentheorie eine Bedeutung, sondern auch in den Anwendungen.

F. Harary<sup>56</sup> zeigte, dass sie auch in der numerischen Mathematik angewendet werden können, wenn man eine quadratische Matrix invertieren will. P. Liebl und der Verfasser dieses Buchleins<sup>57</sup> haben einen Algorithmus beschrieben, der auch in dem Falle die Quasikomponenten aufzufinden ermöglicht, wo der gegebene Graph eine größere Anzahl von Knoten hat.

### Übungen

III. 4.1. Man bestimme den reduzierten Graphen für einen endlichen Graphen  $\vec{G}$ , wenn  $\vec{G}$  a) azyklisch, b) wohlgerichtet ist.

## 3.5 Inzidenzmatrizen eines gerichteten Graphen

Wir werden uns jetzt mit dem Zusammenhang der Graphentheorie mit der Matrixtheorie beschäftigen. Zunächst wollen wir uns kurz einige Begriffe in Erinnerung bringen, die wir in der Algebra gelernt haben.

Es seien natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  gegeben; wir bilden das Rechteckschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

in dem die Elemente  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  beliebige komplexe Zahlen bedeuten. Man nennt ein solches Schema eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten oder kurz eine Matrix von Typ  $(m, n)$  mit komplexen Elementen. Dieses Rechteckschema bezeichnet man auch mit einem Buchstaben, z. B. spricht man von einer Matrix  $A$ .

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, ist es mitunter auch von Vorteil, die betrachtete Matrix kurz durch  $(a_{ik})$  anzugeben.

Ist speziell  $m = n$ , so geht das Rechteckschema in ein Quadrat über. Wir sprechen dann von einer quadratischen Matrix  $m$ -ten Grades.

In einer quadratischen Matrix  $(a_{ik})$  nennt man die Elemente  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$  die Elemente der Hauptdiagonale der gegebenen Matrix.

<sup>56</sup>Numerische Mathematik 4 (1962), 128-135.

<sup>57</sup>Aplikace matematiky 1 (1966), 1-9.

Nun wollen wir zeigen, dass man manche Eigenschaften von Matrizen mit Hilfe von Graphen studieren kann - also eigentlich auf geometrischem Wege.

Wir wollen annehmen, es sei ein endlicher Graph  $\vec{G} = [U, \Gamma]$  gegeben, in dem  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  ist. Nun bilden wir eine quadratische Matrix  $m$ -ten Grades, die wie folgt definiert wird:

Wenn in dem Graphen eine Kante  $\overrightarrow{x_i x_k}$  existiert, so setzen wir  $a_{ik} = 1$ ; wenn eine solche Kante nicht existiert, werden wir  $a_{ik} = 0$  setzen.

Die quadratische Matrix  $(a_{ik})$ , die wir auf diese Weise erhalten, heißt die Inzidenzmatrix des Graphen  $\vec{G}$ .

Beispiel 5. Wir bilden die Inzidenzmatrix für den in Bild 67 angegebenen Graphen.

Da unser Graph 6 Knoten hat, erhalten wir eine quadratische Matrix 6. Grades. Diese hat die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass in der Hauptdiagonale dieser Inzidenzmatrix gerade ein Element gleich der Zahl 1 ist; das entspricht der Tatsache, dass unser Graph eine einzige Schlinge hat (nämlich im Knoten  $x_3$ ).

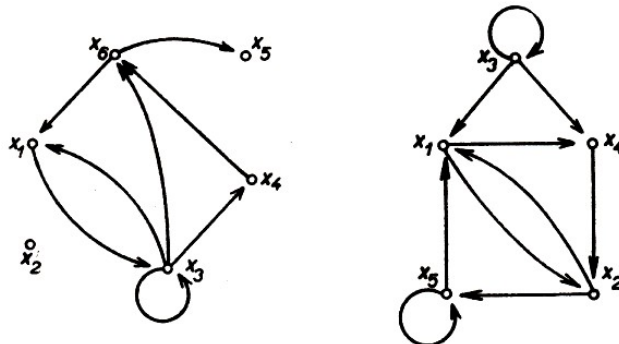


Bild 67,68

Wir gehen wieder von einem endlichen Graphen  $\vec{G}$  aus und bilden seine Inzidenzmatrix  $A$ . Vertauschen wir die Zeilen und Spalten der Matrix  $A$ , dann erhalten wir eine neue Matrix  $A'$ , die die zu  $A$  transponierte Matrix genannt wird.

Man kann auch sagen, dass wir  $A'$  aus  $A$  erhalten, wenn wir  $A$  an der Hauptdiagonale spiegeln. Wir erkennen leicht, dass die transponierte Matrix  $A'$  die Inzidenzmatrix eines Graphen  $\vec{G}'$  ist, der aus  $\vec{G}$  durch Änderung der Richtung seiner Kanten entsteht.<sup>58</sup>

Nun betrachten wir auch die umgekehrte Aufgabe. Es sei  $(a_{ik})$  eine beliebige quadratische Matrix  $m$ -ten Grades, deren Elemente komplexe Zahlen sind. Wir wollen ihr einen endlichen Graphen  $\vec{G}$  zuordnen, der wie folgt definiert wird:

Der Graph  $\vec{G}$  hat die Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Ist in der gegebenen Matrix das Element  $a_{ik}$  von 0 verschieden, dann führen wir in  $\vec{G}$  eine Kante  $\overrightarrow{x_i x_k}$  ein; wenn dieses Element gleich 0 ist, dann ordnen wir ihm keine Kante zu.

<sup>58</sup>Den Graphen  $\vec{G}'$  bezeichnet man mit Rücksicht auf strukturtheoretische Fragestellungen auch als den zu  $\vec{G}$  dualen Graphen, und man sollte statt von der transponierten Matrix  $A'$  auch besser von der zu  $A$  dualen Matrix sprechen.

Der Graph  $\vec{\mathcal{G}}$ , der der Matrix  $A$  eindeutig zugeordnet ist, heißt das Diagramm dieser Matrix.

Beispiel 6. Es sei die quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7i & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir bilden ihr Diagramm.

Da unsere Matrix 5. Grades ist, hat ihr Diagramm 5 Knoten. Wir bezeichnen diese Knoten mit  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Die Antwort auf unsere Frage gibt Bild 68.

Der Leser kann feststellen, dass der Graph, den wir hier veranschaulicht haben, nicht wohlgerichtet ist; diese Feststellung werden wir bald brauchen.

Bevor wir fortfahren, wollen wir an den klassischen Begriff einer zerlegbaren Matrix erinnern, dem der Leser möglicherweise bereits beim Studium der Matrizen­theorie begegnet ist.

$(a_{ik})$  sei eine beliebige quadratische Matrix  $m$ -ten Grades mit komplexen Elementen. Es existiere eine Zerlegung der Menge  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  in zwei nicht-leere Mengen  $R = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ,  $S = \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$  so, dass  $r + s = m$  ist und dass für jedes  $i \in R$  und für jedes  $k \in S$  das Element  $a_{ik} = 0$  ist.

Dann wird die Matrix  $(a_{ik})$  als zerlegbar bezeichnet. Eine quadratische Matrix, die nicht zerlegbar ist, heißt unzerlegbar.

Beispiel 7. Wir wollen entscheiden, ob die Matrix aus dem vorhergehenden Beispiel zerlegbar oder unzerlegbar ist.

Für  $R = \{1, 2, 4, 5\}$  und  $S = \{3\}$  ist die obige Bedingung für eine zerlegbare Matrix erfüllt. Dieser Sachverhalt lässt sich auch so ausdrücken, dass  $a_{i3} = 0$  für  $i = 1, 2, 4, 5$  in der Matrix  $(a_{ij})$  ist oder dass die dritte Spalte der Matrix (mit Ausnahme des Elements der Hauptdiagonale) lauter Nullen enthält.

In dem folgenden Satz wollen wir den Zusammenhang zwischen unzerlegbaren Matrizen und wohlgerichteten Graphen angeben.

Satz 6. Eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$   $m$ -ten Grades ist genau dann unzerlegbar, wenn ihr Diagramm ein wohlgerichteter Graph ist.

Beweis. Wir werden den Satz in zwei Schritten beweisen. Zuerst nehmen wir an, dass eine zerlegbare Matrix  $(a_{ik})$  existiert, deren Diagramm wohlgerichtet ist.

Dann bilden wir die beiden Mengen  $R$  und  $S$ , von denen in der Definition der Zerlegbarkeit die Rede ist, und wählen im Diagramm der Matrix zwei Knoten  $x_i$  und  $x_k$  so, dass  $i \in R$ ,  $k \in S$  ist. Da das Diagramm ein wohlgerichteter Graph sein soll, so existiert eine Verbindung zwischen den Knoten  $x_i$  und  $x_k$ .

Wir durchlaufen nun diese Verbindung so, dass wir von dem Knoten  $x_i$  ausgehen und "in der Pfeilrichtung" fortschreiten. Dabei wollen wir diejenigen Knoten beachten, deren Indizes der Menge  $R$  angehören. Da  $k \in S$  ist, kommen wir so zu einem letzten Knoten, dessen Index der Menge  $R$  angehört, bevor wir zu  $x_k$  gelangen. Wir wollen diesen letzten Knoten mit  $x_\alpha$  bezeichnen und den Knoten, der in unserer Verbindung auf ihn folgt, mit  $x_\beta$ ; es ist also  $x_\alpha \in R$ ,  $x_\beta \in S$  und deshalb  $a_{\alpha\beta} = 0$ . Das Diagramm enthält jedoch die Kante  $\overrightarrow{x_\alpha x_\beta}$ , und das steht im Widerspruch zur Definition des Diagramms.

Im zweiten Schritt wollen wir annehmen, dass eine unzerlegbare Matrix existiert, deren Diagramm nicht wohlgerichtet ist. In dem Diagramm existieren dann zwei Knoten  $x$  und  $y$  so, dass man keine Verbindung bilden kann, die in  $x$  beginnt und in  $y$  endet.

Wir wollen mit  $R^*$  die Menge aller Knoten  $x'$  bezeichnen, für die eine Verbindung zwischen  $x$  und  $x'$  besteht. Die Menge  $R^*$  ist nicht leer, denn es gilt  $x \in R^*$ .

Alle übrigen Knoten des Diagrammes fassen wir in der Menge  $S^*$  zusammen. Da  $y \in S^*$  ist, ist auch  $S^*$  nicht leer. Wir sehen leicht ein, dass das Diagramm keine Kante  $\overrightarrow{vw}$  mit  $v \in R^*$  und  $w \in S^*$  enthält.

Den Mengen  $R^*$  und  $S^*$  entspricht jedoch eine bestimmte Zerlegung der Menge  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  in zwei nicht-leere Mengen  $R$  und  $S$ , wobei  $a_{ik} = 0$  für jedes  $i \in R$  und jedes  $k \in S$  gilt.

Das ist jedoch ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass  $(a_{ik})$  eine unzerlegbare Matrix ist. Der Beweis des Satzes ist damit geliefert.

Wir wollen noch einige weitere Begriffe aus der Matrizenrechnung in Erinnerung bringen.

Es seien die Matrizen  $(a_{ik})$  und  $(b_{ik})$  vom Typ  $(m, n)$  gegeben. Wenn die Elemente der Matrix  $(a_{ik})$  sämtlich mit den an entsprechender Stelle stehenden Elementen der Matrix  $(b_{ik})$  übereinstimmen, dann sagen wir, dass beide Matrizen einander gleich sind, und schreiben  $(a_{ik}) = (b_{ik})$ .

Auch die Vorschrift für die Addition zweier Matrizen ist einfach. Unter der Summe  $(a_{ik}) + (b_{ik})$  zweier Matrizen  $(a_{ik})$  und  $(b_{ik})$  vom Typ  $(m, n)$  verstehen wir die Matrix  $(c_{ik})$ , die ebenfalls vom Typ  $(m, n)$  ist, und es gilt  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ , für  $i = 1, 2, \dots, m$  und  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Die Multiplikation wird nur für zwei solche Matrizen definiert, von denen die erste soviel Spalten hat wie die zweite Zeilen. Nehmen wir also an, wir haben die Matrix  $(a_{ik})$  vom Typ  $(l, m)$  und die Matrix  $(b_{ik})$  vom Typ  $(m, n)$ ; ihr Produkt

$$(c_{ik}) = (a_{ik})(b_{ik})$$

ist eine Matrix vom Typ  $(l, n)$ , deren Elemente durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}$$

gegeben sind.

Beispiel 8. Es sind die beiden quadratischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir wollen die Summe  $A + B$  und das Produkt  $AB$  bestimmen.

Nach der Definition der Addition ist

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Die Vorschrift für die Multiplikation der Matrizen ist komplizierter. Wenn  $(c_{ik})$  die resultierende Matrix ist, dann ist

$$c_{11} = \sum_{j=1}^2 a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$$

Auf ähnliche Weise finden wir auch die anderen Elemente des zu suchenden Produktes, so dass wir zu dem Ergebnis

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

kommen.

Wir wollen nun einen Satz über nichtnegative Matrizen angeben. Eine Matrix heißt nichtnegativ, wenn alle ihre Elemente nichtnegative reelle Zahlen sind. Die nichtnegativen Matrizen haben eine Reihe interessanter Eigenschaften und treten auch in den Anwendungen oft auf.

Wir betrachten beispielsweise in der Ökonomie mehrere Betriebe  $B_1, B_2, \dots, B_m$  und interessieren uns für ihre Zusammenarbeit. Wenn wir mit  $a_{ik}$  den Wert der Erzeugnisse bezeichnen, die (in einem bestimmten Zeitraum) der Betrieb  $B_i$  dem Betrieb  $B_k$  liefert, dann ist die Matrix  $(a_{ik})$  offensichtlich nichtnegativ.

Auch in der mathematischen Statistik und in der Wahrscheinlichkeitstheorie treten nichtnegative Matrizen oft in Erscheinung; denn ihre Elemente bedeuten hier z. B. die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Erscheinung usw. Für solche nichtnegativen Matrizen gilt nun:

Satz 7. Es seien  $(a_{ik})$  und  $(b_{ik})$  quadratische nichtnegative Matrizen  $m$ -ten Grades.  $\vec{\mathcal{G}}_1 = [U, K_1]$  sei das Diagramm der Matrix  $(a_{ik})$  und  $\vec{\mathcal{G}}_2 = [U, K_2]$  das Diagramm der Matrix  $(b_{ik})$ . Dann hat die Matrix  $(a_{ik}) + (b_{ik})$  das Diagramm  $\vec{\mathcal{G}}_s = [U, K_s]$ , wobei  $K_s = K_1 \cup K_2$  ist. Die Matrix  $(a_{ik})(b_{ik})$  hat als Diagramm  $\vec{\mathcal{G}}_p = [U, K_p]$ , das wie folgt bestimmt wird: Für  $x_i \in U, x_k \in U$  gilt  $\overrightarrow{x_i x_j} \in K_p$  genau dann, wenn ein Knoten  $x_j \in U$  existiert mit  $\overrightarrow{x_i x_j} \in K_1$  und  $\overrightarrow{x_j x_k} \in K_2$ .

Beweis. I. Die Kanten des Diagrammes  $\vec{\mathcal{G}}_s$  entsprechen den positiven Elementen der Matrix  $(a_{ik}) + (b_{ik})$ .

Die Zahl  $a_{ik} + b_{ik}$  ist jedoch genau dann positiv, wenn wenigstens ein Summand positiv ist. Im Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_s$  existiert also für  $x_i \in U, x_k \in U$  die Kante  $\overrightarrow{x_i x_k}$  gerade dann, wenn eine solche Kante wenigstens in einem der Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2$  existiert.

II. Wie verhält es sich nun mit dem Diagramm des Produkts der Matrizen?

Es genügt, alle Kanten des Graphen  $\vec{\mathcal{G}}_p$  aufzusuchen; wir wissen von ihnen, dass sie den positiven Elementen der Matrix  $(a_{il})(b_{ik})$  entsprechen. Das Element

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$$

ist genau dann positiv, wenn wenigstens ein Summand  $a_{ij} b_{jk}$  positiv ist oder wenn wenigstens ein Index  $j$  von der Art existiert, dass  $a_{ij} > 0$  und zugleich  $b_{jk} > 0$  ist.

Diese Bedingung bedeutet jedoch, dass ein Knoten  $x_j \in U$  von der Art existiert, dass  $\overrightarrow{x_i x_j} \in K_1$  und  $\overrightarrow{x_j x_k} \in K_2$  ist. Damit ist der Beweis geliefert.

Das Ergebnis des vorhergehenden Satzes können wir leicht auf eine beliebige endliche Anzahl nichtnegativer quadratischer Matrizen erweitern. Was die Multiplikation der Matrizen betrifft, so ist besonders der Fall interessant, in dem alle betrachteten Matrizen einander gleich sind.

Ähnlich wie bei der Multiplikation von Zahlen definieren wir auch hier die Potenz einer quadratischen Matrix  $A$ , die wir mit  $A^r$  bezeichnen. Für  $r = 1$  setzen wir  $A^r = A$ ; wenn wir die Potenz  $A^r$  für irgendeine natürliche Zahl  $r$  schon definiert haben, dann setzen wir  $A^{r+1} = A^r A$ .

Interessant ist, das Diagramm der Potenz  $A^r$  mit dem Diagramm der Matrix  $A$  zu vergleichen. Für  $r = 2$  ist dieses Ergebnis schon in Satz 7 als Spezialfall enthalten.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, dass der Exponent  $r$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Wenn  $\vec{\mathcal{G}}$  das Diagramm der Matrix  $A$  ist und wenn wir für das Diagramm der Potenz  $A^r$  die Schreibweise  $\vec{\mathcal{G}}^r$  wählen, dann können wir folgendes beweisen:

Im Graphen  $\vec{\mathcal{G}}^r$  existiert eine Kante  $\overrightarrow{x_i x_k}$  genau dann, wenn zwischen den Knoten  $x_i$  und  $x_k$  in  $\vec{\mathcal{G}}$  eine Verbindung der Länge  $r$  existiert.

Den Beweis, in dem die Methode der vollständigen Induktion angewandt wird, können wir dem Leser überlassen.

Unter den quadratischen nichtnegativen Matrizen haben die unzerlegbaren Matrizen eine Reihe interessanter Eigenschaften.

Es kann mitunter vorkommen, dass eine bestimmte Potenz einer solchen Matrix nur positive Elemente hat. Solche Matrizen hat bereits G. Frobenius im Jahre 1912 studiert und sie als primitive Matrizen bezeichnet. So ist z. B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

primitiv, denn die Potenz  $A^2$  hat nur positive Elemente. Demgegenüber ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht primitiv, denn es gilt

$$B^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad B^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je nachdem, ob der Exponent  $r$  eine gerade oder ungerade ist.

In den letzten Jahren haben verschiedene Autoren die primitiven Matrizen studiert. H. Wieland hat im Jahre 1950 ohne Beweis die Behauptung<sup>59</sup> veröffentlicht, dass die Potenz  $A^{n^2-2n+2}$  für jede primitive Matrix  $n$ -ten Grades nur positive Elemente enthält. Er zeigte auch, dass eine primitive Matrix  $B$  vom Grade  $n$  existiert, für welche die Potenz  $B^{n^2-2n+1}$  noch mindestens eine Null als Element enthält. Diese extremal Matrix hat die Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ihr Diagramm ist für  $n = 6$  in Bild 69 dargestellt.

Der Beweis dieser Behauptung wurde im Jahre 1958 von V. Pták<sup>60</sup> und unabhängig von ihm von J.C. Holladay und R. S. Varga<sup>61</sup> veröffentlicht.

<sup>59</sup>Math. Zeitschrift, 52, (1950), S. 642-648.

<sup>60</sup>Czechoslovak Math. J., 8 (1958), S. 487-495.

<sup>61</sup>Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), S. 631-634.

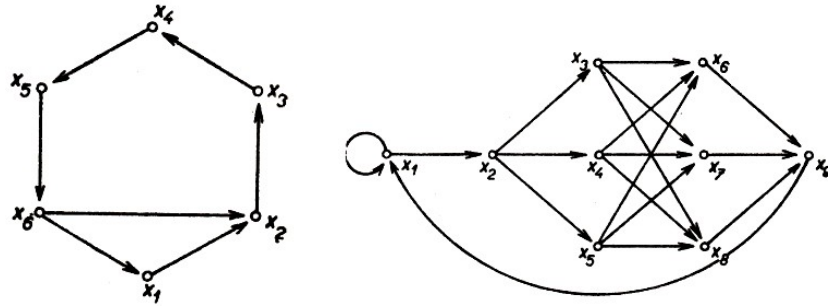


Bild 69,70

Eine interessante Vermutung wurde von Z. Sidak formuliert. Es sei  $p(A)$  die Anzahl der positiven Elemente der Matrix  $A$ . Einfache Beispiele von primitiven Matrizen zeigen, dass für diese

$$p(A) \leq p(A^2) \leq p(A^3) < \dots$$

gilt. Z. Sidak vermutete, dass diese Behauptung für jede primitive Matrix  $A$  gilt, hat aber bald ein Gegenbeispiel gefunden. Es existiert nämlich eine primitive Matrix  $C$ , deren Diagramm in Bild 70 dargestellt ist, für die  $p(C) = 18$ ,  $p(C^2) = 16$  gilt.

Es zeigt sich, dass man auch die primitiven Matrizen gut mit Hilfe ihrer Diagramme studieren kann. Eine primitive Matrix kann man nämlich dadurch charakterisieren, dass ihr Diagramm ein wohlgerichteter Graph ist, wobei die Längen aller Zyklen dieses Graphen teilerfremde Zahlen sind.

Der Beweis dieses Ergebnisses ist zwar elementar, aber recht kompliziert, so dass wir ihn hier nicht führen werden. Der Leser, der sich für die Anwendung der Graphen beim Studium der Matrizen interessiert, findet in der am Schluss dieses Büchleins angeführten Literatur eingehendere Belehrung.

### Übungen

III. 5.1.  $A$  sei eine quadratische nichtnegative Matrix  $m$ -ten Grades, deren Diagramm ein Zyklus ist. Man bestimme das Diagramm der Matrix  $A^m$ .

III. 5.2. Man prüfe, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

primitiv ist oder nicht, und gebe auch ihr Diagramm an.

III. 5.3. Man bestimme  $p(B^{n^2-2n+1})$ , wenn  $B$  die primitive Matrix  $n$ -ten Grades ist, die auf S. 95 angegeben wurde.

## 3.6 Kategorien und gerichtete Graphen

Als wir in diesem Buch die Struktur der ungerichteten Graphen untersuchten, erinnerten wir auch an den wichtigen algebraischen Begriff der Gruppe. Die folgenden Erörterungen bringen uns diese Betrachtungen erneut in Erinnerung; denn wir machen uns in ihnen mit einem noch allgemeineren algebraischen Begriff, nämlich dem der Kategorie bekannt.

Wir werden hier allerdings keine theoretischen Betrachtungen anstellen und nicht die Eigenschaften dieses sehr allgemeinen algebraischen Begriffes ableiten können. Für unsere Zwecke wird es genügen, auf die Zusammenhänge der Kategorien mit den Graphen hinzuweisen.



Bevor wir angeben, was eine Kategorie ist, wollen wir zum gerichteten Graphen zurückkehren und uns fragen, auf welche Weise wir hier eine Verbindung zwischen zwei Knoten definiert hatten. Wir nehmen an, in unserem Graphen sei eine Verbindung

$$x, \overrightarrow{xu_1}, u_1, \overrightarrow{u_1u_2}, u_2, \dots, u_m, \overrightarrow{u_my}, y$$

vorhanden, die wir kurz mit  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1$  bezeichnen, und außerdem eine Verbindung

$$y, \overrightarrow{yv_1}, v_1, \overrightarrow{v_1v_2}, v_2, \dots, v_n, \overrightarrow{v_nz}, z$$

vorhanden, die wir kurz mit  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$  kennzeichnen. Genau wie in ungerichteten Graphen können wir auch hier eine Zusammensetzung der Verbindungen  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1$  und  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$  folgendermaßen erklären:

$$x, \overrightarrow{xu_1}, u_1, \overrightarrow{u_1u_2}, u_2, \dots, u_m, \overrightarrow{u_my}, y, \overrightarrow{yv_1}, v_1, \overrightarrow{v_1v_2}, v_2, \dots, v_n, \overrightarrow{v_nz}, z$$

Diese neue Verbindung werden wir mit  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1; \overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$  bezeichnen und sagen, dass sie durch Zusammensetzung der Verbindung  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1$  mit der Verbindung  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$  entstanden ist. Es ist wiederum offensichtlich, dass die Länge der Verbindung  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1; \overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$  gleich der Summe der Längen der Verbindungen  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1$  und  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$  ist.

Es ist dem Leser sicher klar, wann wir zwei Verbindungen in dem gegebenen Graphen als verschieden und wann wir sie als gleich ansehen können; in diesem zweiten Falle setzen wir das Gleichheitszeichen. Wir können also z. B. schreiben  $\overrightarrow{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_0$  usw.

Sehen wir uns nun die Operation, die wir in einem gerichteten Graphen soeben definiert haben, noch einmal an. Wenn in unserem Graphen Verbindungen  $\overrightarrow{\mathbf{V}}^*$  und  $\overrightarrow{\mathbf{V}}^{**}$  existieren, dann ist es in einigen Fällen nicht möglich, die Verbindung  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}^*, \overrightarrow{\mathbf{V}}^{**})$  zu bilden, in anderen Fällen ist das jedoch möglich.

Nach der Definition ist es nämlich erforderlich, dass die Verbindung  $\overrightarrow{\mathbf{V}}^*$  in dem Knoten endet, in dem  $\overrightarrow{\mathbf{V}}^{**}$  beginnt.

Wir müssen auch bedenken, dass es bei dieser Operation sehr auf die Reihenfolge ankommt, in der wir die beiden Elemente aufführen. Wenn nämlich  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}^*, \overrightarrow{\mathbf{V}}^{**})$  existiert, dann muss noch nicht die Verbindung  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}^{**}; \overrightarrow{\mathbf{V}}^*)$  existieren.

Wir wollen nun die Verbindungen  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3$ , betrachten und annehmen, dass wir  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1; \overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$  bilden können. Wir wollen diese neue Verbindung kurz mit  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{12}$  kennzeichnen und annehmen, dass man auch  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_{12}; \overrightarrow{\mathbf{V}}_3)$  bilden kann<sup>62</sup>).

Da  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{12}$  in dem gleichen Knoten endet wie  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$ , können wir unter den angeführten Voraussetzungen auch  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_{12}; \overrightarrow{\mathbf{V}}_3)$  bilden; diese Verbindung sei kurz mit  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{23}$  bezeichnet. Da  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{12}$ , mit dem gleichen Knoten beginnt wie  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{23}$  kann man auch  $(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1; \overrightarrow{\mathbf{V}}_{23})$  bilden.

Der Leser wird leicht erkennen, dass wir mit dieser zweiten Konstruktion zum gleichen Ergebnis wie im ersten Falle gelangt sind; nur die Bezeichnung ist anders. Diese Operation erinnert uns ein wenig an das für die Multiplikation von Zahlen gültige Assoziativgesetz.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit auch an das Assoziativgesetz erinnern, dem wir bei der Gruppe begegnet sind. Der Unterschied besteht allerdings darin, dass für beliebig gegebene Tripel  $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3$ , hier die Operation nicht ausführbar sein muss, die wir für diese Elemente

<sup>62</sup>Ich empfehle dem Leser, sich selbst eine Hilfsskizze zu machen.

eingeführt haben.

Legen wir uns nunmehr die Frage vor, ob zu der gegebenen Verbindung  $\vec{V}$  eine Verbindung  $\vec{V}'$  von der Art existiert, dass  $(\vec{V}'; \vec{V}) = \vec{V}$  gilt.

Die Antwort ist einfach:

Es genügt, den Knoten zu nehmen, in dem die Verbindung  $\vec{V}$  beginnt, und ihn als Verbindung der Länge 0 zu betrachten. Das ist gerade die gesuchte Verbindung  $\vec{V}'$ . Auf ähnliche Weise kann man zu dem Beben  $\vec{V}$  eine solche Verbindung  $\vec{V}''$  aufsuchen, dass gilt  $(\vec{V}; \vec{V}'') = \vec{V}$ .

Die beiden Verbindungen  $\vec{V}'$  und  $\vec{V}''$  haben ähnliche Eigenschaften wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen oder - wenn wir einen abstrakteren Vergleich wählen wollen - wie die Einheit in einer Gruppe.

Der Unterschied besteht hier allerdings darin, dass nicht gelten muss  $\vec{V}' = \vec{V}''$  und dass eine solche Beziehung sogar nur ausnahmsweise gilt (wenn  $\vec{V}$  im gleichen Knoten beginnt und endet).

Wenn wir die Terminologie der Gruppentheorie übertragen wollen, werden wir einerseits von einer Linkseinheit der Verbindung  $\vec{V}$  (diese ist hier  $\vec{V}'$ ) und zum anderen von einer Rechteinheit von  $\vec{V}$  sprechen (diese ist hier  $\vec{V}''$ ).

Der Vergleich mit den Gruppen wird noch klarer, wenn wir uns ein einfaches Beispiel vor Augen führen, indem wir auf ähnliche Weise wie früher bei den Permutationen einer Menge und bei den Automorphismen eines Graphen eine Tafel aufstellen.<sup>63</sup>

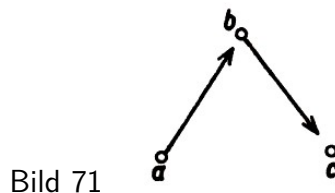


Bild 71

Beispiel 9. In Bild 71 ist ein Graph mit drei Knoten angegeben. Wir wollen hier alle möglichen Verbindungen herausuchen und eine Tafel für deren Zusammensetzung konstruieren.

In dem gegebenen Graphen haben wir drei Verbindungen der Länge 0, die der Reihe nach den Knoten  $a, b, c$  entsprechen. Wir bezeichnen sie in entsprechender Weise mit  $\vec{V}_a, \vec{V}_b, \vec{V}_c$ .

Weiter existieren hier zwei Verbindungen der Länge 1: Die erste ist  $a, \vec{ab}, b$ , die zweite  $b, \vec{bc}, c$ . Die erste bezeichnen wir mit  $\vec{V}_{ab}$  die zweite mit  $\vec{V}_{bc}$ .

Schließlich gibt es hier eine einzige Verbindung der Länge 2, nämlich  $a, \vec{ab}, b, \vec{bc}, c$ ; wir werden sie mit  $\vec{V}_{ac}$  bezeichnen.

Im ganzen treten in unserer Betrachtung 6 Verbindungen auf. Die quadratische Tafel, die wir nun aufstellen, wird also 36 Felder haben. Ist die Verknüpfung der Verbindungen nicht erklärt, so setzen wir einen Strich in das betreffende Feld.

Die Tabelle hat folgende Gestalt:

<sup>63</sup>Man beachte jedoch, dass die Elemente einer Kategorie - im Gegensatz zur Gruppe - im allgemeinen nicht invertierbar sind. Kategorien sind durch Verallgemeinerung aus einer Halbgruppe hervorgegangen.

	$\vec{V}_a$	$\vec{V}_b$	$\vec{V}_c$	$\vec{V}_{ab}$	$\vec{V}_{bc}$	$\vec{V}_{ac}$
$\vec{V}_a$	$\vec{V}_a$	-	-	$\vec{V}_{ab}$	-	$\vec{V}_{ac}$
$\vec{V}_b$	-	$\vec{V}_b$	-	-	$\vec{V}_{bc}$	-
$\vec{V}_c$	-	-	$\vec{V}_c$	-	-	-
$\vec{V}_{ab}$	-	$\vec{V}_{ab}$	-	-	$\vec{V}_{ac}$	-
$\vec{V}_{bc}$	-	-	$\vec{V}_{bc}$	-	-	-
$\vec{V}_{ac}$	-	-	$\vec{V}_{ac}$	-	-	-

Am Schluss dieses Abschnittes wollen wir - in abstrakter Form - diejenigen Axiome anführen, die in der Algebra dafür vorausgesetzt werden, dass eine Menge mit einer gegebenen Operation eine Kategorie ist. Wir knüpfen hier an die Arbeit [13] an, in der M. Hasse die Beziehung zwischen den Graphen und den Kategorien untersucht.

Die Kategorie ist hier als eine Klasse  $C$  von Elementen definiert, in der für gewisse Paare von Elementen von  $C$  eine Multiplikationsvorschrift gegeben ist (die wir z. B. als Zusammensetzung zweier Elemente bezeichnen können). Das Element, das durch Zusammensetzung der Elemente  $x$  und  $y$  (in dieser Reihenfolge) entsteht, bezeichnen wir einfach mit  $x \cdot y$  - also ähnlich wie das Produkt zweier Zahlen. Dabei werden wir fordern, dass folgende Axiome erfüllt sind:

- 1) Wenn entweder  $(x \cdot y) \cdot z$  oder  $x \cdot (y \cdot z)$  definiert ist, dann sind beide Ausdrücke definiert, und es gilt  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .
- 2) Wenn  $x \cdot y$  und gleichzeitig  $y \cdot z$  definiert ist, dann ist auch der Ausdruck  $(x \cdot y) \cdot z$  definiert.
- 3) Für jedes Element  $x$  aus unserer Kategorie existieren zwei Einheiten  $\alpha(x)$  und  $\beta(x)$  von der Art, dass einerseits  $\alpha(x) \cdot x$ , zum anderen  $x \cdot \beta(x)$  definiert ist. Dabei bezeichnen wir ein Element  $e$  als Einheit, wenn gilt  $e \cdot x = x$  bzw.  $y \cdot e = y$  für alle  $x$  bzw. alle  $y$ , für welche die Zusammensetzung  $e \cdot x$  bzw.  $y \cdot e$  definiert ist.

Man sieht also, dass in dem gegebenen gerichteten Graphen alle möglichen Verbindungen eine Kategorie bilden, wenn wir als entsprechende Operation eben die Zusammensetzung dieser Verbindungen nehmen, wie sie in den vorangegangenen Betrachtungen definiert ist.

Übungen

III 6.1. Man nenne ein Beispiel für einen endlichen Graphen  $\vec{G}$ , in dem unendlich viele Verbindungen existieren. Man beschreibe die Kategorie, die diese Verbindungen bilden.

### 3.7 Allgemeinere Definitionen eines gerichteten Graphen

Als wir in diesem Buch die Behandlung der ungerichteten Graphen beendeten, machten wir zum Schluss einige Bemerkungen über allgemeinere Definitionen dieses Begriffes. Jetzt verfahren wir mit den gerichteten Graphen ähnlich.

Wir wollen hier eine Verallgemeinerung erwähnen, stützen uns dabei jedoch nur auf die geometrische Darstellung Diese Zeilen dienen also nur zur knappen Information<sup>64</sup>.

In einem gerichteten Graphen haben wir bisher zugelassen, dass für jeweils zwei Knoten  $x$  und  $y$  höchstens eine Kante  $\vec{xy}$  existiert. In einem gerichteten Multigraphen lassen wir jedoch zu, dass für ein solches Knotenpaar eine beliebige Anzahl von Kanten des Typs  $\vec{xy}$  existiert, wobei diese Anzahl gegebenenfalls auch unendlich sein kann.

<sup>64</sup>Wir können hier wieder auf Arbeit [13] hinweisen, in der M. Hasse eine genauere Definition gibt.

Man kann wieder Indizes dazu benutzen, um diese Kanten voneinander zu unterscheiden. So sehen wir in Bild 72 einen gerichteten Multigraphen mit den Knoten  $x_1, x_2, x_3$ . Man beachte dabei gleichzeitig, dass der Knoten  $x_3$  mit zwei Schlingen versehen ist.

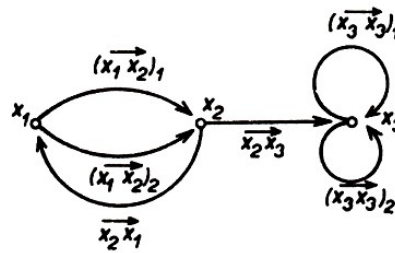


Bild 72

Für einen gerichteten Multigraphen gelten ähnliche Bemerkungen, wie wir sie in Abschnitt 20 für ungerichtete Graphen gemacht haben. Wir wollen hier nur erwähnen, wie sich für einen gerichteten Multigraphen die Inzidenzmatrix definieren lässt.

Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass sowohl die Knotenmenge als auch die Kantenmenge endlich sind. Wenn  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  die Knotenmenge ist, dann verstehen wir unter der Inzidenzmatrix des Multigraphen eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$   $m$ -ten Grades, wobei  $a_{ik}$  die Anzahl der Kanten bedeutet, die von dem Knoten  $x_i$  ausgehen und in den Knoten  $x_k$  eintreten.

So erhalten wir beispielsweise für den Graphen aus Bild 72 die Inzidenzmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss wollen wir noch eine Verallgemeinerung anführen, die in sich sowohl die gerichteten als auch die ungerichteten Graphen einschließt.

Wir meinen den sogenannten teilweise gerichteten Multigraphen, der ein aus Knoten und Kanten zusammengesetztes Gebilde ist, wobei sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten zugelassen werden. Die Eigenschaften solcher Gebilde hat beispielsweise G. N. Povarov im Jahre 1956 beschrieben.

Wir wollen auch hier nicht in die Einzelheiten eindringen und uns mit einem Bild begnügen. In Bild 73 ist ein teilweise gerichteter Multigraph mit den drei Knoten  $a, b, c$  angegeben.

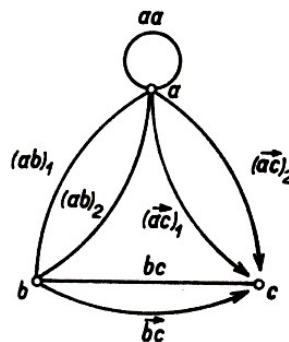


Bild 73

## 4 Schlusskapitel

### 4.1 Historische Anmerkungen

Die Entwicklung der Wissenschaft ist in den letzten Jahren vor allem dadurch gekennzeichnet, dass scheinbar weit auseinanderliegende Fachgebiete in immer nähere Verbindung zueinander treten und dass gerade in solchen Bereichen recht intensiv gearbeitet wird, wo sich diese Fachgebiete berühren.

Das lässt sich besonders gut an der heutigen Entwicklung der Kybernetik beobachten, doch kann man dafür auch andere Beispiele anführen. So gehen wir wohl selbst in unserer Annahme nicht fehl, dass auch die Graphentheorie in neuester Zeit ihre Entwicklung und Beliebtheit eben dem Umstand verdankt, dass sich dafür Fachleute der verschiedensten Wissenschaftszweige interessieren.

Auf mathematischen Kongressen und in einschlägigen Fachzeitschriften wird die Graphentheorie gewöhnlich in der Sprache der Topologie oder der kombinatorischen Analysis und neuerdings auch in der Sprache der Algebra entwickelt. Sie wird jedoch als wissenschaftliches Spezialfach nicht nur von Mathematikern behandelt, sondern ihrer Anwendungen wegen in der letzten Zeit auch in der Physik, der Elektrotechnik, der organischen Chemie, der Ökonomie, der Soziologie und der Linguistik studiert.

Die Anfänge der Graphentheorie reichen weit in die Vergangenheit zurück, denn viele ihrer Probleme sind bereits mit dem Namen L. Eulers (1707-1783) verknüpft.

Doch erst das vergangene Jahrhundert vermochte eine Reihe von Erkenntnissen und Problemen zu zeitigen; es sei hier nur an G. Kirchhoffs (1824-1887) Arbeiten über Stromkreise sowie an A. Cayleys (1821-1895). Schriften über Strukturformeln in der organischen Chemie erinnert.

Wir dürfen hier keineswegs das bereits besprochene Vierfarbenproblem vergessen. Auch dieses Problem, dessen Schwierigkeit an den großen Fermatschen Satz aus der Zahlentheorie erinnert, hat die Entwicklung der Graphentheorie mit angeregt. Es wird bereits im Jahre 1840 von A. F. Möbius (1790-1868) und im Jahre 1850 von A. de Morgan (1806-1871) erwähnt.

Auch A. Cayley stieß 1878 auf das Vierfarbenproblem und überzeugte sich von seiner Schwierigkeit. Um den mathematischen Beweis, dass zu der erwünschten Färbung einer jeden Landkarte vier Farben ausreichen, hatte sich schon A. B. Kempe (1849-1922) im Jahre 1879 bemüht, doch machte P. J. Heawood im Jahre 1890 darauf aufmerksam, dass Kempe in seinen Erwägungen ein Fehler unterlaufen sei.

Heawood verbesserte den ursprünglichen Beweis Kempes, und es gelang ihm damit, nachzuweisen, dass zu der erwünschten Färbung einer jeden Landkarte fünf Farben ausreichen. Trotz der großen Bemühungen vieler Mathematiker ist dies eigentlich das einzige Ergebnis von allgemeiner Gültigkeit.

Man suchte das Vierfarbenproblem darüber hinaus für solche Landkarten zu lösen, die eine kleine Anzahl von Staaten aufweisen. Wenn wir daher z. B. die Vermutung von den vier Farben widerlegen wollen, so müssen wir zunächst Landkarten überprüfen, die schon ziemlich kompliziert sind.

Der enge Zusammenhang der Graphentheorie mit ihren Anwendungen in den verschiedenen wissenschaftlichen Fachgebieten tritt wie in einer Reihe von wissenschaftlichen Originalarbeiten der letzten Jahrzehnte so auch in einschlägigen Monographien klar zutage.

So schrieb A. Sainte-Lague schon im Jahre 1926 eine längere Abhandlung über Graphen [23], doch zum klassischen Lehrbuch dieses Gebietes wurde erst das Buch des ungarischen

Mathematikers D. König [15].

Denes König (1883-1944) war der Sohn des bekannten Mathematikers Julius König. Seit 1927 las er alljährlich in Budapest über Graphen und zog sich so eine Reihe von Schülern heran; seine Hörer waren z. B. P. Erdős, T. Gallai und G. Hajós, deren Namen heute im Zusammenhang mit der Graphentheorie wohlbekannt sind.

Königs Buch [15] erschien im Jahre 1936 und wurde im Jahre 1950 von neuem in New York herausgegeben. An diese Monographie hat dann eine Reihe von Autoren in der ganzen Welt angeknüpft, so dass man sie mit Recht für ein klassisches Werk halten darf.

Wohlbekannt ist auch die französische Monographie von C. Berge [3], die erstmalig im Jahre 1958 erschien und bald auch in andere Sprachen übersetzt wurde. Im Jahre 1962 erschien z. B. ihre Übersetzung ins Russische von A. A. Zykw.

Der Übersetzer ergänzte das Original mit einer Reihe von Fußnoten und fügte ihm auch ein Schlusskapitel bei. Im Jahre 1962 wurde das Buch [3] auch ins Englische übertragen.

Speziell gehalten sind das Buch von G. Ringel [21], erschienen 1959, und die ein Jahr darauf herausgegebene Schrift von G. A. Bodino [5], die sich mit der Anwendung der Graphentheorie in der Ökonomie befasst. Kurz vor Abschluss der tschechischen Handschrift der vorliegenden Arbeit für die erste Ausgabe ist eine weitere Monographie [19] von O. Ore erschienen.

Derselbe Autor hat auch eine elementare Einführung in die Theorie der Graphen [18] verfasst, die im Jahre 1965 auch ins Russische übersetzt wurde.

Im Jahre 1963 fand auf Schloss Smolenice in der Tschechoslowakei ein Internationales Symposium über die Graphentheorie statt, dem ein Buch [25] seine Entstehung verdankt. F. Harary, R. Z. Norman und D. Cartwright schrieben eine Einführung in die Theorie der gerichteten Graphen unter Berücksichtigung der Gesellschaftswissenschaften [11].

Die ersten zwei Autoren sind Mathematiker, der dritte ist Psychologe. Das sind also einige Hinweise auf Bücher, die die Graphentheorie behandeln.

Unsere historischen Anmerkungen können jedoch auch weitere Bücher nicht gut unbeachtet lassen, die entweder etwas anders oder allgemeiner eingestellt sind als die soeben erwähnten, die aber (zumindest in einigen Kapiteln) mit unserer Thematik enge Berührungspunkte haben. Hierher gehört vor allem das bekannte Buch [1] des deutschen Verfassers W. Ahrens (1872-1927).

Es ist zwar der Unterhaltungsmathematik gewidmet, doch finden sich darin auch Fragen, die man heute der Graphentheorie zuordnet. So löst z. B. Ahrens eine Reihe von Schachbrettproblemen, befasst sich mit dem Königsberger Brückenproblem und mit dem Hamiltonschen Dodekaederspiel, wendet aber seine Aufmerksamkeit auch einigen topologischen Eigenschaften der Strukturformeln der organischen Chemie zu.

Das hier über das Ahrenssche Buch Gesagte trifft mit nur kleinen Abänderungen auch für weitere bekannte Publikationen [9], [16], [24] zu. Weiterhin seien die Monographie von J. Riordan [22] sowie eine Sammelschrift [7] genannt.

Das im Jahre 1962 von J.W. Moon und L. Moser aufgestellte Verzeichnis von einschlägigen Fachartikeln zeugt von dem raschen Anstieg des Interesses für die Graphentheorie in der Welt.

Ein noch ausführlicheres Verzeichnis von Arbeiten über die Graphentheorie wurde im Jahre 1963 von A. A. Zykw angelegt. Beide Quellen wurden bei der Zusammenstellung eines bibliographischen Anhangs zu dem hier bereits erwähnten Buch [25] benutzt. Eine andere bibliographische Übersicht, im Jahre 1966 von A. Salvati und G. Marradi geschrieben, enthält

auch eine Klassifizierung der einzelnen Arbeiten nach ihrem Inhalt.

In der Tschechoslowakei hat die Graphentheorie eine lange Tradition. In der Literatur wird häufig O. Boruvkas Arbeit [6] aus dem Jahre 1926 zitiert. Darin wird die Methode beschrieben, wie man das kürzeste Stromnetz für eine gegebene Gruppe von Städten finden kann.

Mit demselben Problem hat sich auch V. Jarnik befasst und hat im Jahre 1930 eine andere Methode der Lösung gegeben.

Vier Jahre später schrieben V. Jarnik und M. Kösler (1884-1961) gemeinsam eine Arbeit, die gleichfalls in diese Problematik einschlägt. Im Jahre 1956 knüpfte an Boruvkas Abhandlung der amerikanische Mathematiker J. B. Kruskal jr. an - siehe [17] - und in der letzten Zeit beschäftigte sich mit dieser Problematik auch der slowakische Autor A. Kotzig.

Andere ökonomische Anwendungen wurden vor kurzem von J. Bily, M. Fiedler und F. Nozicka studiert, die im Jahre 1958 eine dem Transportproblem gewidmete Arbeit [4] veröffentlicht haben. Man versteht unter dieser Bezeichnung eine Aufgabe, in der es darum geht, die ökonomischste Lieferung eines Rohstoffes (z. B. Kohle) vorzuschlagen, wenn man seine Grubenproduktion kennt und weiß, wieviel davon eine jede Fabrik benötigt.

Die Arbeit [4] bedient sich bei der Lösung des Transportproblems gerade der Graphentheorie.

Andere tschechoslowakische Mathematiker studieren die Graphentheorie in regelmäßigen Seminarübungen, und solche Interessengruppen gibt es auch sonst in der Welt.

Gegenstand der Untersuchung sind beispielsweise physikalische Anwendungen von Graphen beim Studium der Stromnetze; gewisse Ergebnisse wurden auch dadurch erzielt, dass man sich bei der Erforschung der künstlichen Sprachen und der in endlichen Automaten repräsentierbaren Erscheinungen der Graphen bediente - und schließlich und endlich darf man auch die Anwendung der Graphen in den verschiedenen mathematischen Spezialfächern nicht außer acht lassen.

Es handelt sich insbesondere um Zusammenhänge mit der Algebra, um das Verhältnis der Graphen zur Theorie der Determinanten und der Matrizen, und in letzter Zeit auch um ihre Bedeutung für die Theorie der Kategorien.

Die Graphentheorie wurde auch beim Studium der Simplexe in mehrdimensionalen euklidischen Räumen angewandt.

Wie man sieht, hat die Graphentheorie viele Berührungspunkte mit der praktischen Anwendung und auch mit anderen Zweigen der Mathematik aufzuweisen. Es wäre zu wünschen, dass sich auch die jüngste Generation der Mathematiker - Schüler und Studenten - mit dieser nützlichen Disziplin bekanntmacht.

Wenn unser kleines Buch zumindest einiges dazu beiträgt, dann ist das Ziel, das wir uns im Rahmen dieser Bücherreihe gesteckt haben, so gut wie erreicht.

## 4.2 Literatur

- [1] W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig 1901.
- [2] P. S. Alexandroff: Einführung in die Gruppentheorie, MSB Nr. 1. 6. Aufl., Berlin 1967 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [3] C. Berge; Theorie des graphes et ses applications, Paris 1958 englisch in New York 1962, russisch in Moskau 1962.
- [4] J. Bily, M. Fiedler, F. Nozicka: Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem, Math. Journal, 8 (83) (1958), 94-121.
- [5] G. A. Bodino: Applicazioni economiche della teoria dei grafici, Pavia 1960 (englisch in New York 1962).
- [6] O. Boruvka: Über ein Minimalproblem, tschechisch, Prace moravske prirod. spol., 1926, III. 3.
- [7] Combinatorial Analysis, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, X., 1960.
- [8] K. Culik: Zur Theorie der Graphen, Casopis Pest. Mat., 83 (1958), 133-155.
- [9] A. P. Domoryad: Mathematical Games and Pastimes, Oxford- London-Edinburgh 1964 (Übersetzung aus dem Russischen; russisch in Moskau 1961).
- [10] E. B. Dynkin, W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltung Teil 1, Mehrfarbenprobleme, MSB Nr. 18,3. Aufl., Berlin 1967 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [11] F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright: Structural Models, New York-London-Sydney 1965.
- [12] F. Harary, G. Prins: The number of homeomorphically irreducible trees and other species, Acta Math. Uppsala, 1959, 101: 1-2 141-162.
- [13] M. Hasse: Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide, Mathematische Nachrichten, 22. Band, Heft 5-6, (1960), 255-270.
- [14] M. Hasse: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, MSB Nr. 2, 5. Aufl., Leipzig 1970.
- [15] D. König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.
- [16] M. Kraitichik: Mathematical Recreations, 4. Aufl., London 1949.
- [17] I. B. Kruskal: On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 48-50.
- [18] O. Ore: Graphs and their Uses, New York- Toronto 1963,
- [19] O. Ore: Theory of Graphs, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 38 (1962).
- [20] G. Pólya: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathematica (Uppsala), 68 (1937), 145-254.
- [21] G. Ringel: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin 1959.
- [22] J. Riordan: An Introduction to Combinatorial Analysis, New York-London 1958 (russisch 1963).
- [23] A. Sainte-Lague: Les réseaux (où graphes), Memorial des Mathematiques, Fasc. 18, Paris 1926.



[24] H. Steinhaus: Kaleidoskop der Mathematik, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Polnischen).

[24a] H. Steinhaus: Einhundert Probleme der Elementarmathematik MSB Nr. 27, Leipzig 1968.

[25] Theory of Graphs and its Applications, Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Praha 1964.

[26] W. T. Tutte: A short proof of the factor theorem for finite graphs, *Canad. J. Math.*, 6 (1954), 347-352.

[27] Beiträge zur Graphentheorie, vorgetragen auf dem Internationalen Kolloquium in Manebach (DDR) vom 9.-12. Mai 1967, Leipzig 1968.

[28] H. Sachs: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I, Leipzig 1970.