
B. Klotzek

**Einführung in die Differentialgeometrie
II**

1983 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 108
Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Das vorliegende Bändchen enthält die Kapitel Innere Geometrie einer Fläche und Einführung in die Riemannsche Geometrie. Sie schließen an die Differentialgeometrie I mit der Kurventheorie und der Einführung in die Krümmungstheorie einer Fläche an. Selbst die Nummerierung der Kapitel und Abschnitte bringt zum Ausdruck, dass hier das frühere Bändchen die entscheidende Voraussetzung darstellt. Lediglich zum vierten Kapitel wurden ergänzende Literaturhinweise gegeben.

Das Kapitel Innere Geometrie einer Fläche beginnt mit der Darstellung der Gaußschen Krümmung einer Kugel mit Hilfe der bemerkenswerten Formel von Bertrand und Puiseux, so dass ihre Bestimmung durch Messungen in der Kugelfläche auf der Hand liegt.

Damit wird nicht nur der Begriff der inneren Geometrie einer Fläche, sondern die bald folgende Feststellung der Unmöglichkeit der Verbiegung dieser Fläche in eine Ebene vorbereitet. Die Behandlung der Abwickelbarkeit und (stetigen) Verbiegbarkeit von Flächen in zahlreichen Beispielen trägt zur Festigung und Vertiefung des Begriffes der inneren Geometrie einer Fläche bei; unter anderem wird die Abwickelbarkeit und Verbiegbarkeit der Torsen in die Ebene und der Drehflächen ein und derselben konstanten Krümmung aufeinander dargelegt.

Im dritten Abschnitt wird die Zugehörigkeit der Christoffelsymbole zur inneren Geometrie einer Fläche bewiesen und - schon im Hinblick auf die Einführung in die Riemannsche Geometrie - der Begriff der absoluten Ableitung längs einer Flächenkurve eingeführt. Daran schließt sich ein erster kurzer, aber formaler Beweis des Theorema egregium an.

Da dabei die Gleichungen von Gauß bzw. Mainardi und Codazzi entwickelt werden, empfiehlt sich eine anschließende Erörterung des Fundamentalsatzes der Flächentheorie und seiner Bedeutung für die Bestimmung von Flächen ein und derselben inneren Geometrie.

Im sechsten Abschnitt werden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve einschließlich des Satzes von Liouville erarbeitet; insbesondere haben hier die Frenetschen Formeln der ebenen Kurventheorie ihren Platz gefunden.

Die Ausführungen über geodätische Linien sind solche über den Zusammenhang Geodätische - Kürzeste; dabei wird versucht, die häufig anzutreffende Oberflächlichkeit bei der Behandlung dieses Gegenstandes zu vermeiden, auch wenn hier lokale Differentialgeometrie betrieben wird und Begriffe wie Aussagen der globalen Theorie unzureichend mit Verfügung stehen.

Die Existenz von geodätischen Parallel- bzw. Polarkoordinaten wird über die Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen und über den Nachweis der Orthogonalität einer Schar von Geodätischen und gewissen Parallelkurven gesichert. Dann können auf dem üblichen Wege die Formeln von Bertrand und Puiseux bzw. Diguët in voller Allgemeinheit gewonnen werden.

Die geodätische Parallelverschiebung, Autoparallele und absolute Ableitungsgleichungen einer Flächenkurve stehen am Ende der inneren Geometrie einer Fläche. Im Zusammenhang mit den Abbildungen einer Fläche auf eine andere werden erstens die Haupttypen und zweitens die für die Kartographie wichtigsten Probleme der Abbildung der Kugel in die Ebene behandelt.

Das Kapitel Einführung in die Riemannsche Geometrie soll die grandiosen Ideen der berühmten Probeerlesung von Bernhard Riemann von 1854 erschließen. Für diejenigen Leser, die nicht über ausreichende Kenntnis der grundlegenden Begriffe und Aussagen der Topologie und Tensorrechnung verfügen, wird eingangs der Begriff der zulässigen Parameterdarstellung einer Fläche analysiert, um den notwendigen allgemeinen Rahmen für die Begriffsbildung abzustecken.

Im Ergebnis dieser Analyse ergibt sich eine Einführung der Begriffe des Hausdorffschen Raumes mit Hilfe offener Umgebungen, des Unterraumes und des Homöomorphismus zwischen Hausdorffschen Räumen. Dann ist es nicht mehr schwer, Karte, Atlas und differenzierbare Mannigfaltigkeit zu definieren. Der zweite Abschnitt enthält die Konstruktion der Tangentialräume. Obwohl die Behandlung der Tensoralgebra und -analysis in den folgenden Abschnitten nur so weit erfolgt, wie sie später benötigt werden, kann diese kurze Darstellung auch für Anwendungen in der Physik genutzt werden; das wesentliche Ergebnis ist der Begriff der kovarianten Ableitung.

Im Abschnitt Affin zusammenhängende Räume erscheint erstmals der Krümmungstensor, zunächst bei der Untersuchung der Differentiationsreihenfolge bei kovarianten Ableitungen; einen geometrischen Zugang zu dieser Begriffsbildung eröffnet die Parallelverschiebung längs geschlossener Wege.

Nach dieser Vorbereitung wird der zentrale Begriff des Riemannschen Raumes und des zugehörigen affinen Zusammenhanges bereitgestellt. Die Kurventheorie in Riemannschen Räumen endet mit den verallgemeinerten Frenetschen Formeln, der Verallgemeinerung der absoluten Ableitungsgleichungen der Flächentheorie.

Recht ausführlich wird die Krümmungstheorie Riemannscher Räume behandelt: Kovarianter Krümmungstensor und seine Symmetrieeigenschaften, Schnittkrümmungen bezüglich zueinander senkrechter Einheitsvektoren und ihre Bedeutung für die Bestimmung des kovarianten Krümmungstensors, Ricci-Tensor und skalare Krümmung sind die Teilthemen.

Obwohl die Räume konstanter Krümmung für kosmologische Modelle heute nicht mehr in Betracht gezogen werden, wurden Beispiele angegeben und eine Charakterisierung mittels der freien Beweglichkeit hergeleitet; der Anhang enthält die Identität von Bianchi und das Schursche Kriterium für Räume konstanter Krümmung.

Im abschließenden Abschnitt wird über die schon von Riemann genannte Verallgemeinerung des Riemannschen zum Finslerschen Raum referiert, zumal dieser Raumtyp für Physiker von Interesse ist; schließlich wird noch etwas zur Entwicklung des Raumproblems mitgeteilt.

Die Zielsetzung hier entspricht der für den Teil I: Erweiterung der Allgemeinbildung und Bereitstellung von Hilfsmitteln für die Anwendung in der Praxis. Deshalb wurden die Begriffsbildungen breit motiviert, die Grundzüge hinreichend streng dargestellt und zahlreiche Beispiele vorgerechnet.

Ich hoffe, somit den Interessen von Schülern der Abiturklassen, Lehrern, Lehrerstudenten, Studenten naturwissenschaftlicher und technischer Richtungen wie auch Naturwissenschaftlern und Technikern zu entsprechen. Bezüglich des weiteren Ausbaus der Theorie und spezieller Anwendungen muss auf die Literatur verwiesen werden.

Dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften danke ich für die Aufmunterung, dieses Bändchen zu schreiben. Mein Dank gilt weiterhin J. Eichhorn, R. Sulanke und P. Wintgen für kollegiale Ratschläge sowie dem Kollegen H. Wendland für ihre freundliche Unterstützung beim Korrekturlesen. Einen ganz besonderen Dank verdient Frau E. Arndt, die durch die sachkundige und umsichtige redaktionelle Bearbeitung zur vorliegenden Gestalt des Bändchens beigetragen hat.

In dieser Hinsicht spreche ich auch dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" meine Anerkennung für die sorgfältige Arbeit aus.

Potsdam, im Herbst 1982

B. Klotzek

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
3 Innere Geometrie einer Fläche	5
3.1 Einführung	5
3.2 Abwickelbarkeit und Verbiegbarkeit	8
3.3 Die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k als Größen der inneren Geometrie einer Fläche und die absolute Differentiation	16
3.4 Theorema egregium	18
3.5 Der Fundamentalsatz der Flächentheorie	22
3.6 Die geodätische Krümmung	26
3.7 Geodätische Linien	30
3.8 Geodätische Parallel- bzw. Polarkoordinaten und die Formel von Bertrand und Puiseux	36
3.9 Parallelverschiebung und absolute Ableitungsgleichungen	40
3.10 Abbildungen von Flächen	42
3.11 Anhang. Kartennetzentwürfe	46
4 Einführung in die Riemannsche Geometrie	54
4.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	54
4.2 Tangentialräume	59
4.3 Tensoralgebra	61
4.4 Tensoranalysis	66
4.5 Affin zusammenhängende Räume	70
4.6 Riemannsche Räume	73
4.7 Kurventheorie in Riemannschen Räumen	76
4.8 Krümmung eines Riemannschen Raumes	79
4.9 Räume konstanter Krümmung	83
4.10 Finslersche Räume	88

3 Innere Geometrie einer Fläche

3.1 Einführung

Die Krümmungstheorie einer Fläche im zweiten Kapitel stützte sich wesentlich auf die Geometrie des (dreidimensionalen) Anschauungsraumes.

Wir stellen nun die Frage, welche geometrischen Größen einer Fläche durch Messungen in der Fläche allein schon bestimmt werden können. Die Vermessungsarbeiten, die Carl Friedrich Gauß von 1821 bis 1825 durchgeführt hat (Abb. 1), sind näherungsweise Messungen in der Erdoberfläche gewesen.

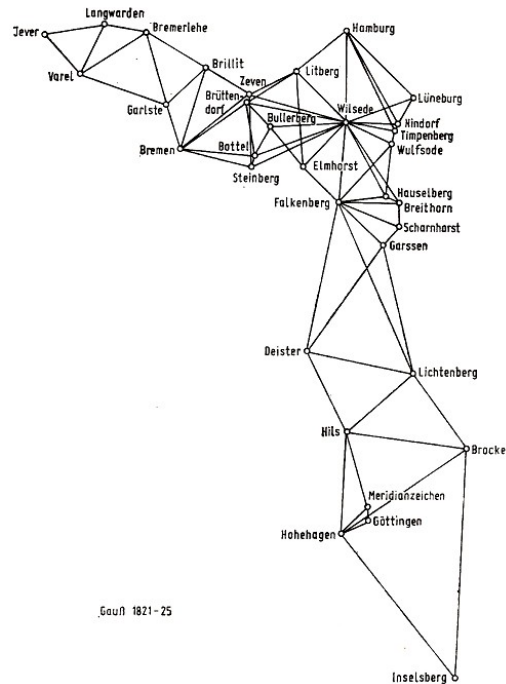


Abb. 1

Sie ergaben für ihn viele Anregungen zu allgemeinen Untersuchungen über gekrümmte Flächen, und 1827 erschien sein grundlegendes Werk "Disquisitiones generales circa superficies curvas", welches u. a. das später noch zu behandelnde Theorema egregium enthält. Einen ersten Eindruck vom Inhalt dieses Satzes erhalten wir im folgenden

Beispiel

(3.1) Gaußsche Krümmung K einer Kugel vom Radius R .

Im Beispiel (2.18) konnten wir $K = \frac{1}{R^2}$ konstatieren. Um eine Aussage bezüglich der Messung in der Kugeloberfläche zu erhalten, betrachten wir sie als Drehfläche mit $r(u^1) = R \sin \frac{u^1}{R}$ und $z(u^1) = R \cos \frac{u^1}{R}$ (Abb. 2); das ergibt die Parameterdarstellung

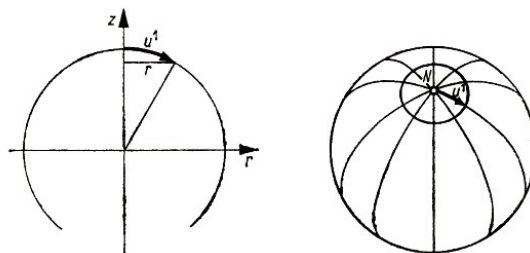


Abb. 2, 3

$$P = \left(R \sin \frac{u^1}{R} \cos u^2, R \sin \frac{u^1}{R} \sin u^2, R \cos \frac{u^1}{R} \right)$$

mit (geodätischen) Polarkoordinaten bezüglich des Ursprunges N , des Nordpols (Abb. 3). Es gilt

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\cos \frac{u^1}{R} \cos u^2, \cos \frac{u^1}{R} \sin u^2, -\sin \frac{u^1}{R} \right), \\ P_2 &= \left(-R \sin \frac{u^1}{R} \sin u^2, R \sin \frac{u^1}{R} \cos u^2, 0 \right), \\ g_{11} &= 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \frac{u^1}{R} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Radius r eines Breitenkreises

$$r = R \sin \frac{u^1}{R} = \sqrt{g_{22}}$$

während bei einer "Bindfadenkonstruktion" auf der Kugelfläche die Punkte des Breitenkreises von N den Abstand u^1 besitzen (vgl. Abb. 2, 3). Als Flächenkurve hat der Breitenkreis die Gaußsche Parameterdarstellung

$$u^1 = \text{const} \quad , \quad u^2 = t$$

Wegen $\dot{u}^1 = 0$ und $\dot{u}^2 = 1$ führt die Berechnung des Umfanges zu

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}} dt = 2\pi \sqrt{g_{22}} = 2\pi r \neq 2\pi u^1$$

dabei ergibt sich $2\pi u^1$ beim Einsetzen des in der Fläche gemessenen Abstandes u^1 in die aus der euklidischen Elementargeometrie bekannte Formel für den Umfang eines Kreises. Um die Differenz $2\pi u^1 - U$ anzunähern, benutzen wir die Taylorreihe für die sin-Funktion

$$r = R \sin \frac{u^1}{R} = \left[R \frac{u^1}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{u^1}{R} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{u^1}{R} \right)^5 (\dots) \right]$$

und erhalten zunächst

$$2\pi u^1 - U = 2\pi u^1 - 2\pi r = \frac{2\pi}{3!} \frac{(u^1)^3}{R^2} - (u^1)^5 (\dots)$$

so dass wegen $K = \frac{1}{R^2}$

$$K = \lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{3(2\pi u^1 - U)}{\pi (u^1)^3} \quad (1)$$

gilt. Da sich u^1 und U durch Messungen in der Fläche bestimmen lassen, gilt dasselbe für die Gaußsche Krümmung K einer Kugel.

Die bemerkenswerte Formel (1) gilt auch in der Ebene (Aufgabe 1). Die Herleitung von (1) für beliebige Flächen erfolgt im Abschnitt 3.8.

Die Messung von Bogenlängen in der Fläche $P = P(u^1, u^2)$ wird gemäß der Formel

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k} dt$$

mit Hilfe der metrischen Fundamentalgrößen g_k durch Berechnung ersetzt; umgekehrt können diese Fundamentalgrößen nach Messungen in der Fläche als Grenzwerte bestimmt werden: Die u^1 -Linie durch den Punkt $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$ hat die Gaußsche Parameterdarstellung

$$u^1(t) = u_0^1 + t \quad , \quad u^2(t) = u_0^2$$

und für ihre Bogenlänge gilt

$$s_1(t) = \int_0^t \sqrt{g_{11}} d\tau$$

d.h.

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s_1}{t} \right)^2 = \left(\frac{ds_1}{dt} \right)_{t=0}^2$$

Analog erhalten wir für die Bogenlänge der u^2 -Linie mit der Parameterdarstellung

$$u^1(t) = u_0^1 \quad , \quad u^2(t) = u_0^2 + t$$

die Gleichung

$$s_2(t) = \int_0^t \sqrt{g_{22}} d\tau$$

und somit gilt

$$g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s_2}{t} \right)^2 = \left(\frac{ds_2}{dt} \right)_{t=0}^2$$

Auch $g_{12} = g_{21} = g_{21}(u_0^1, u_0^2)$ lässt sich auf ähnlichem Wege bestimmen (vgl. die Anleitung zur folgenden Aufgabe 2).

Zur Präzisierung des Begriffes der inneren Geometrie einer Fläche stützen wir uns deshalb auf die metrischen Fundamentalgrößen:

Definition. Es sei $P = P(u^1, u^2)$ eine Fläche. Eine (vom betrachteten Punkt abhängige) Größe f gehört genau dann zur inneren Geometrie der Fläche, heißt genau dann innergeometrische Größe, wenn $f(u^1, u^2)$ ausschließlich eine Funktion der metrischen Fundamentalgrößen $g_{ik}(u^1, u^2)$ und deren Ableitungen ist.

Die innere Geometrie der starren Fläche ist die Menge der gültigen Aussagen, die allein mit Hilfe der innergeometrischen Größen formuliert werden können.

Vom besonderen Interesse sind Größen und Aussagen, die zur inneren Geometrie jeder starren Fläche gehören, die bei sogenannten Abwicklungen (bzw. Verbiegungen) erhalten bleiben. Die abwicklungs- (bzw. biegungs-) invarianten Aussagen bilden die innere Geometrie schlechthin. Wie wir noch sehen werden, gehört beispielsweise die Formel (1) zur inneren Geometrie jeder Fläche. Dagegen trifft das in Bezug auf das Beispiel (3.1) weder auf

$$R = \sqrt{\lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\pi(u^1)^3}{3(2\pi u^1 - U)}} \quad \text{noch aus} \quad H = \sqrt{\lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{3(2\pi u^1 - U)}{\pi(u^1)^3}}$$

zu; R und H gehören nur zur inneren Geometrie der starren Kugel.

Ein sicherer Weg, abwicklungsinvariante Aussagen zu erhalten, besteht im Verzicht auf die Verwendung von Größen und Begriffen, die wie beispielsweise H und K nicht mit Hilfe von innergeometrischen Größen definiert wurden.

Andererseits besteht für uns ein besonderer Reiz darin, im Rahmen der inneren Geometrie die aus der Krümmungstheorie der Flächen bekannten Größen zu untersuchen. Solche gehören zur inneren Geometrie, wenn wie im Beispiel der Gaußschen Krümmung mit der Formel von Bertrand und Puiseux eine für alle Flächen einheitliche Darstellung mit innergeometrischen Größen gelingt.

Aufgaben

1. Man bestätige (1) für eine Ebene.
2. Man bestimme $g_{12} = g_{21}(u_0^1, u_0^2)$ durch Messung in der Fläche $P = P(u^1, u^2)$.

Anleitung. Man betrachte die Flächenkurve mit der Gaußschen Parameterdarstellung

$$u^1(t) = u_0^1 + t \quad , \quad u^2(t) = u_0^2 + t$$

und bestimme deren Bogenlänge s , um mit Hilfe von $\frac{ds}{dt}$ die Fundamentalgrößen $g_{12} = g_{21} = g_{21}(u_0^1, u_0^2)$ auszudrücken; dabei dürfen $g_{11} = g_{11}(u_0^1, u_0^2)$ und $g_{22} = g_{22}(u_0^1, u_0^2)$ als bekannt vorausgesetzt werden.

3.2 Abwickelbarkeit und Verbiegbarkeit

Angesichts der Erklärung der inneren Geometrie kann man fragen, inwieweit sie eine Fläche bestimmt, ob es verschiedene Flächen mit derselben inneren Geometrie gibt. In diesem Zusammenhang erklären wir

Definition. Zwei Flächen heißen genau dann aufeinander abwickelbar oder isometrisch, wenn Parameterdarstellungen

$$P = P(u^1, u^2) \quad \text{und} \quad \tilde{P} = \tilde{P}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in G$$

mit der Eigenschaft

$$g_{ik}(u^1, u^2) = \tilde{g}_{ik}(u^1, u^2)$$

für alle $(u^1, u^2) \in G$ existieren. Die inneren Geometrien aufeinander abwickelbarer Flächen stimmen überein.

Beispiele

(3.2) Abwicklung einer Zylinderfläche in die Ebene (vgl. Beispiel (2.7)).

In der Parameterdarstellung einer Zylinderfläche als spezieller Regelfläche

$$P(u^1, u^2) = P(u^1) + u^2 \mathbf{a} \tag{2}$$

mit einem konstanten Einheitsvektor \mathbf{a} (in Richtung der Mantellinien) dürfen wir o. B. d. A. voraussetzen, dass die "Bahn" $P = P(u^1)$ alle Mantellinien senkrecht trifft und dass dabei u^1 ihr natürlicher Parameter ist (vgl. Abb. 4 und Aufgabe 2). Unter diesen Voraussetzungen über (2) gilt

$$P_1 = P' \quad , \quad P_2 = \mathbf{a}$$

und folglich

$$g_{11} = P'^2 = 1, \quad g_{12} = g_{21} = P' \mathbf{a} = 0, \quad g_{22} = \mathbf{a}^2 = 1$$

d. h., dass $P = P(u^1, u^2)$ mit $(u^1, u^2) \in G$ und G als Teil einer Ebene mit kartesischen Koordinaten aufeinander abwickelbar sind (Abb. 4).

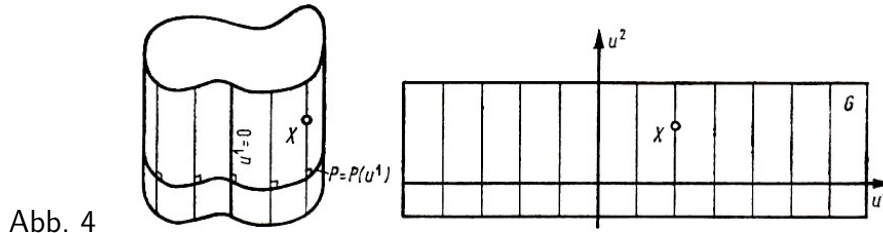


Abb. 4

(3.3) Abwicklung einer Kegelfläche in die Ebene (vgl. Beispiel (2.6)). Für die Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) = P_0 + u^2 \mathbf{a}(u^1) \quad (3)$$

mit $|\mathbf{a}(u^1)| = 1$ darf vorausgesetzt werden, dass $P(u^1) := P_0 + \mathbf{a}(u^1)$ eine Kurve mit der Bogenlänge als Parameter u^1 ist. Falls $\bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = P_0 + \bar{u}^2 \bar{\mathbf{a}}(\bar{u}^1)$ diese Voraussetzung noch nicht erfüllt, nehmen wir die Parametertransformation

$$u^1 = \int |\dot{\bar{\mathbf{a}}}| d\bar{u}^1, \quad u^2 = \bar{u}^2$$

vor, die wegen

$$\begin{vmatrix} |\dot{\bar{\mathbf{a}}}| & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

d. h. von null verschiedener Funktionaldeterminante, offenbar zulässig ist. Wir erhalten eine Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) := P_0 + u^2 \mathbf{a}(u^1)$$

wobei $\mathbf{a}(u^1) := \bar{\mathbf{a}}(\bar{u}^1(u^1))$ sei; für $P(u^1) = P_0 + \mathbf{a}(u^1)$ ist

$$\dot{P} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\dot{\bar{\mathbf{a}}}|}$$

ein Einheitsvektor, so dass u^1 der natürliche Parameter der Kurve $P = P(u^1)$ sein muss. Unter den obigen Voraussetzungen über (3) gilt

$$P_1 = u^2 \dot{\mathbf{a}}, \quad P_2 = \mathbf{a}$$

und folglich

$$g_{11} = (u^2)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{a} \cdot u^2 \dot{\mathbf{a}} = 0, \quad g_{22} = \mathbf{a}^2 = 1$$

weil $\mathbf{a}^2 = 1$ sofort $\mathbf{a} \dot{\mathbf{a}} = 0$ ergibt. Somit sind $P = P(u^1, u^2)$ mit $(u^1, u^2) \in G$ und G als Teil einer Ebene mit den Polarkoordinaten $r = u^2$ und $\varphi = u^1$ aufeinander abwickelbar (Abb. 5).

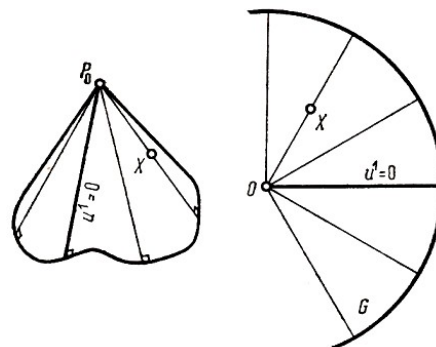


Abb. 5

(3.4) Abwicklung einer Tangentenfläche in die Ebene (vgl. Beispiel (2.8)). Es sei $P = P(s)$ Parameterdarstellung einer Kurve der Krümmung $k = k(s) > 0$ und

$$P(u^1, u^2) = P(u^1) + u^2 P'(u^1) \quad u^2 > 0 \quad (4)$$

eine zugehörige Tangentenfläche. Nach dem Fundamentalsatz der Kurventheorie gibt es eine ebene Kurve $\bar{P} = \bar{P}(s)$ der Krümmung $\bar{k}(s) = k(s)$. Deren Tangentenfläche

$$\bar{P}(u^1, u^2) = \bar{P}(u^1) + u^2 \bar{P}'(u^1), \quad u^2 > 0$$

ist eben, und für beide Tangentenflächen gilt wegen

$$P_1 = P' + u^2 P'', \quad P_2 = P'; \quad \bar{P}_1 = \bar{P}' + u^2 \bar{P}'', \quad \bar{P}_2 = \bar{P}'$$

offenbar

$$g_{11} = 1 + (u^2)^2 k^2(u^1) = \bar{g}_{11}, \quad g_{12} = 1 = \bar{g}_{12}, \quad g_{22} = 1 = \bar{g}_{22}$$

Damit ist jede Tangentenfläche in eine Ebene abwickelbar. Die zur Tangentenfläche einer Schraubenlinie gehörige ebene Tangentenfläche $P = \bar{P}(u^1, u^2)$ ist in Abb. 6 dargestellt.

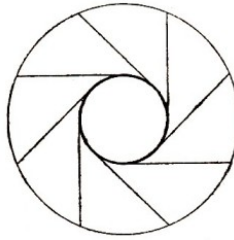


Abb. 6

Nach dem Satz 2.3 gilt der

Satz 3.1. Jede Torse ist in die Ebene abwickelbar.

Die naheliegende Frage, ob noch weitere Flächen in die Ebene abwickelbar sind, können wir erst später beantworten. Wir können aber sofort zeigen, dass Flächen existieren, die nicht in die Ebene abgewickelt werden können:

Satz 3.2. Keine Umgebung eines Punktes auf einer Kugel kann in die Ebene abgewickelt werden.

Denn andernfalls besäßen ein Stück einer Kugelfläche und ein Gebiet der Ebene dieselbe innere Geometrie, und ein Kreis k vom Radius u^1 der ersten Fläche müsste in einen Kreis k' der Ebene übergehen. Das ist ein Widerspruch, weil ihre Umfänge U voneinander verschieden sind: $U_k \neq 2\pi u^1 = U_{k'}$ (vgl. Beispiel (3.1)).

Die Relation "aufeinander abwickelbar" ist eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse enthält ausschließlich Elemente derselben inneren Geometrie. Nach dem Satz 3.2 gibt es verschiedene innere Geometrien.

Bei einer Abwicklung in eine Ebene ε kann ein Teil von ε unbedeckt bleiben (Abb. 6). Andererseits kann der übrige Teil mehrfach bedeckt werden. Das tritt z. B. ein, wenn für eine Schraubenlinie die gesamte Tangentenfläche in die Ebene abgewickelt wird.

Neben der Abwicklung wird der Begriff der (stetigen) Verbiegung betrachtet, bei dem der "Prozess des Abwickeln" modelliert wird; man denke etwa an die Umformung eines Bleches.

Definition. Zwei Flächen heißen genau dann ineinander verbiegbar, wenn sie zu einer stetigen einparametrischen Schar von aufeinander abwickelbaren Flächen gehören.

Beispiele

(3.5) Verbiegung einer Zylinderfläche in die Ebene.

Gilt für eine Zylinderfläche (2) wie im Beispiel (3.2), dass die "Bahn" $P = P(u^1)$ alle Mantellinien senkrecht trifft und u^1 ihr natürlicher Parameter ist, dann ist $P = P(u^1)$ eine ebene Kurve mit den natürlichen Gleichungen $k = k(u^1)$ und $w = 0$. Wir wollen die Verbiegung realisieren, indem wir die "Bahn" durch ebene Kurven $P = P^t(u^1)$ mit den natürlichen Gleichungen $k = tk(u^1)$ und $w = 0$ ersetzen: Das ist offenbar erfüllt, wenn $P_1^t(u^1) = P'(tu^1)$ gilt; daraus erhalten wir

$$P^t(u^1) = P(0) + \frac{P(tu^1) - P(0)}{t}$$

für $t \neq 0$; es sei noch

$$P^0(u^1) = P(0) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(tu^1) - P(0)}{t} = P(0) + \lim_{t \rightarrow 0} u^1 \cdot \frac{P(tu^1) - P(0)}{tu^1} = P(0) + u^1 P'(0)$$

Die Flächenschar

$$P^t(u^1, u^2) = P^t(u^1) + u^2 \mathbf{a}$$

enthält für $t = 1$ die Zylinderfläche (2) und für $t = 0$ eine Ebene, und sie ist in t stetig (für $t \neq 0$ sogar differenzierbar). Um schließlich die Abwickelbarkeit der Flächen der Schar zu erhalten, bilden wir

$$P^t = P'(tu^1) \quad , \quad P_2^t = \mathbf{a}$$

und erhalten $g_{11}^t = 1$, $g_{12}^t = g_{21}^t = 0$, $g_{22}^t = 1$.

(3.6) Verbiegung einer Tangenten- bzw. Kegelfläche in die Ebene.

Analog dem Vorgehen im Beispiel (3.5) kann bei gegebener Tangentenfläche einer Kurve mit natürlichen Gleichungen $k = k(s)$ und $w = w(s)$ eine Schar von Kurven mit den natürlichen Gleichungen $k = k(s)$ und $w = tw(s)$ genutzt werden, um eine Schar von aufeinander abwickelbarer Tangentenflächen anzugeben, die für $t = 1$ die ursprüngliche Fläche und für $t = 0$ eine ebene Tangentenfläche enthält. Bei einer Kegelfläche (3) ist $P(u^1) = P_0 + \mathbf{a}(u^1)$ in einen Einheitskreis überzuführen.

Damit sind alle Torsen in die Ebene verbiegbar.

Wir wollen nun die Verbiegung von einigen in der Praxis besonders bedeutsamen Drehflächen

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (5)$$

näher studieren. Wie im Beispiel (2.3) sei $\mathbf{c}(s) = r(s)\mathbf{i} + z(s)\mathbf{j}$ eine Erzeugende mit dem natürlichen Parameter s .

Nach den Beispielen (2.10) und (2.14) gilt

$$\begin{aligned} g_{11} &= r'^2 + z'^2 = 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= g = r^2 > 0 \\ L_{11} &= r'z'' - r''z', & L_{12} &= L_{21} = 0, & L_{22} &= rz', & L &= (z''r' - z'r'')rz' \end{aligned}$$

Die Gaußsche Krümmung der Drehfläche (5)

$$K = \frac{L}{g} = \frac{z'}{r} (z''r' - z'r'')$$

hängt nur von u^1 ab; wegen $0 = g'_{11} = 2r'r'' + 2z'z''$ bzw. $z'z'' = -r'r''$ ist

$$K = \frac{1}{r}(-r'^2 r'' - z'^2 r'') = -\frac{r''}{r}(r'^2 + z'^2) = -\frac{r''}{r}$$

folglich sind K und r durch die Differentialgleichung

$$r'' + Kr = 0 \tag{6}$$

verbunden. Die Gleichung (6) ist von zweiter Ordnung und linear, sie ist zu dem System

$$r'_1 = r_2 \quad , \quad r'_2 = -Kr_1 \tag{6'}$$

äquivalent. Zu vorgegebener stetiger Funktion $K = K(u^1)$ und vorgegebenen Zahlen u_0^1, r_{10}, r_{20} gibt es genau eine Lösung $r_1 = r_1(u^1), r_2 = r_2(u^1)$ mit $r_1(u_0^1) = r_{10}$ und $r_2(u_0^1) = r_{20}$ (vgl. den Abschnitt 0.1).

Das bedeutet bezüglich (6) die Lösbarkeit, denn mit $r = r_1$ gilt $r'' = r''_1 = r'_2 = -Kr_1 = -Kr$; dabei können für $r(u_0^1)$ und $r'(u_0^1)$ noch Zahlenwerte vorgegeben werden.

Wir können zunächst feststellen, dass zu vorgegebener stetiger Funktion $K = K(u^1)$ stets Drehflächen derart existieren, dass für alle u^1 die Gaußsche Krümmung gerade $K(u^1)$ ist: Wir haben für eine Erzeugende nur

$$r = r(u^1)$$

als Lösung von (6) und dann wegen $r'^2 + z'^2 = 1$

$$z = \int \sqrt{1 - r'^2(\xi)} d\xi$$

zu wählen.

Das Problem der Verbiegung wird nun für konstante Gaußsche Krümmung betrachtet.

Beispiel

(3.7) Die Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung $K = 1$.

Wir erhalten eine Übersicht über alle Drehflächen mit $K = 1$, indem wir

$$r'' + r = 0 \tag{6.1}$$

lösen; dabei können wir noch Anfangsbedingungen der Form $r(0) = a > 0$ und $r'(0) = b$ aufstellen. Auch ohne größere Kenntnisse über die Lösung von Differentialgleichungen hilft bezüglich (6.1) folgender "Kunstgriff" weiter:

Aus $r'' = -r$ folgt $2r''r' = -2rr'$, d. h.

$$r'^2 = r_0^2 - r^2$$

Um nun das Wurzelziehen zu umgehen, versuchen wir den Ansatz $r = r_0 \cos \varphi$, d. h.

$$r_0^2 \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{du^1} \right)^2 = r_0^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

und folglich

$$\frac{d\varphi}{du^1} = \pm 1 \quad , \quad \varphi = \pm u^1 + u_0^1$$

Wir können o. B. d. A. $u_0^1 = 0 = r'(0)$ und das obere Vorzeichen wählen; dann gilt $b^2 = (r'(0))^2 = 0 = r_0^2 - r^2(0) = r_0^2 - a^2$, d. h.

$$r = a \cos u^1, \quad z = \int_0^{u^1} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{mit} \quad |u^1| < \frac{\pi}{2}$$

(Abb. 7). Für $a = 1$ ist die Erzeugende wegen $r = \cos u^1$, $z = \sin u^1$ ein Einheitskreis; für $a \neq 1$ ist z als sogenanntes elliptisches Integral nur näherungsweise zu bestimmen, wobei im Fall $a > 1$ noch die weitere Einschränkung $1 - a^2 \sin^2 u^1 \geq 0$, d. h. $|u^1| \leq \arcsin \frac{1}{a}$, zu beachten ist.

Es sei $0 < a < 1$. Die Einheitskugelfläche

$$P(u^1, u^2) = O + \cos u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + \cos u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + \sin u^1 \mathbf{k}, \quad -\pi < \frac{u^2}{a} < \pi$$

und die zu a gehörige Drehfläche

$$P^a(u^1, u^2) := O + a \cos u^1 \cos \frac{u^2}{a} \mathbf{i} + a \cos u^1 \sin \frac{u^2}{a} \mathbf{j} + \int_0^{u^1} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \xi} d\xi \mathbf{k}$$

sind ineinander verbiegbar, denn sie gehören zur Schar der Flächen

$$P^t(u^1, u^2) = O + t \cos u^1 \cos \frac{u^2}{t} \mathbf{i} + t \cos u^1 \sin \frac{u^2}{t} \mathbf{j} + \int_0^{u^1} \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \xi} d\xi \mathbf{k}$$

mit den Ableitungen

$$P_1^t = \left(-t \sin u^1 \cos \frac{u^2}{t}, -t \sin u^1 \sin \frac{u^2}{t}, \sqrt{1 - t^2 \sin^2 u^1} \right)$$

$$P_2^t = \left(-\cos u^1 \sin \frac{u^2}{t}, \cos u^1 \cos \frac{u^2}{t}, 0 \right)$$

und den metrischen Fundamentalgrößen

$$g_{11}^t = 1, \quad g_{12}^t = g_{21}^t = 0, \quad g_{22}^t = \cos^2 u^1$$

Es sei nun $a > 1$. Die Zone $|u^1| < \arcsin \frac{1}{a}$ der Einheitskugel mit $-\pi < u^2 < \pi$ und die Drehfläche

$$P = P^a(u^1, u^2) \quad , \quad -\frac{\pi}{a} < u^2 < \frac{\pi}{a}$$

sind ineinander verbiegbar, weil sie zur Schar $P = P^t(u^1, u^2)$ gehören.

Da alle Drehzylinderflächen ineinander verbiegbar sind und aus dem Ergebnis des Beispiels (3.7) bei Wahl einer neuen Längeneinheit das entsprechende Resultat für jedes konstante $K > 0$ folgt, gilt der

Satz 3.3. Es sei $K \geq 0$. Alle Drehflächen der konstanten Gaußschen Krümmung K sind ineinander verbiegbar, wenn der Definitionsbereich in der u^1, u^2 -Ebene geeignet gewählt wird.

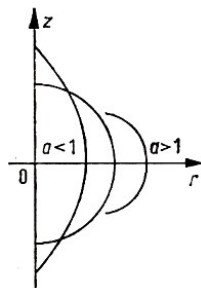


Abb. 7

Zunächst bleibt noch offen, ob dabei auch Drehflächen verschiedener Gaußscher Krümmung ineinander verbiegbar sind und welche Aussagen im Falle $K < 0$ gemacht werden können. Antworten auf diese Fragen enthalten die Abschnitte 3.4 und 3.8 (vgl. auch die folgende Aufgabe 1).

Unter den Drehflächen sind die Katenoide die einzigen Minimalflächen (vgl. den Abschnitt 2.10). Schon 1838 hat Ferdinand Adolf Minding (1806-1885) die Verbiegbarkeit der (längs eines Meridians aufgeschnittenen) Katenoide

$$P(z, u^2) = \left(a \cosh \frac{z}{a} \cos u^2, a \cosh \frac{z}{a} \sin u^2, z \right) \quad (7)$$

(vgl. die Herleitung des Satzes 2.10) in die Wendelfläche

$$\bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (\bar{u}^2 \cos \bar{u}^1, \bar{u}^2 \sin \bar{u}^1, a\bar{u}^1) \quad (8)$$

entdeckt. Zum Beweis dieser Tatsache betrachten wir die Flächenschar (Abb. 8a-d nach W. Wunderlich)

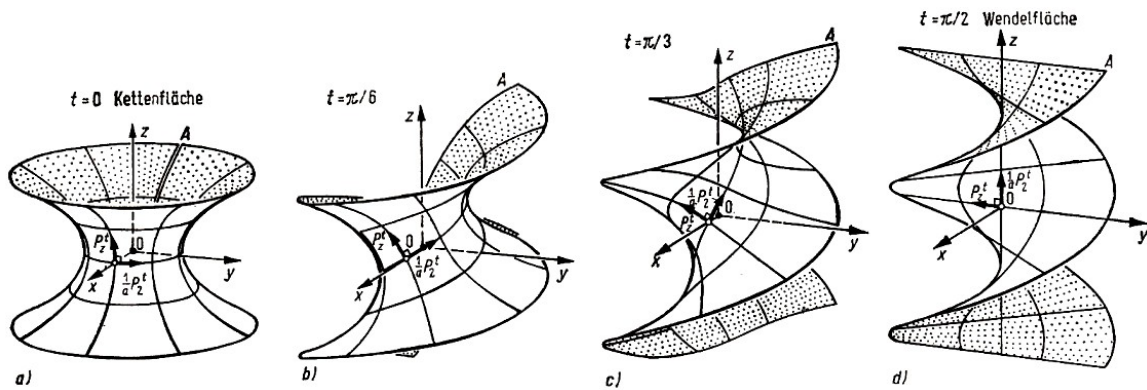


Abb. 8

$$P^t(z, u^2) = \left(a \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + a \sinh \frac{z}{a} \sin^2 u^2 \sin t, \right. \\ \left. a \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t - a \sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t, z \cos t + au^2 \sin t \right) \quad (9)$$

a) Zu dieser Schar gehören die Katenoide (7), denn wir haben offensichtlich $P^0(z, u^2) = P(z, u^2)$. Weiterhin gilt

$$P^{\pi/2}(z, u^2) = \left(a \sinh \frac{z}{a} \sin u^2, -a \sinh \frac{z}{a} \cos u^2, au^2 \right)$$

Um (8) zu erhalten, betrachten wir die Parametertransformation

$$\bar{u}^1 = u^2 - \frac{\pi}{2}, \quad \bar{u}^2 = a \sinh \frac{z}{a}$$

Wie man leicht sieht, ist diese Parametertransformation zulässig, weil die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 0 & \cosh \frac{z}{a} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\cosh \frac{z}{a}$$

stets negativ ist.

b) Die Flächen der Schar sind aufeinander abwickelbar, denn es gilt

$$P_z^t = \left(\sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t, \sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t - \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t, \cos t \right)$$

$$P_2^t = \left(-a \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t + a \sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t, a \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + a \sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t, a \sin t \right)$$

und somit

$$g_{zz}^t = \left(\sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t \right)^2 + \left(\sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t - \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t \right)^2$$

$$+ \cos^2 t = \left(\sinh^2 \frac{z}{a} + 1 \right) \cos^2 t + \cosh^2 \frac{z}{a} \sin^2 t = \cosh^2 \frac{z}{a}$$

$$g_{z2}^t = a \left(\sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t \right) \cdot \left(\sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t - \cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t \right)$$

$$+ a \left(\sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t - \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t \right) \cdot \left(\sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t + \cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t \right)$$

$$+ a \sin t \cos t = 0$$

$$g_{22}^t = a^2 \left[\left(-\cosh \frac{z}{a} \sin u^2 \cos t + \sinh \frac{z}{a} \cos u^2 \sin t \right)^2 + \left(\cosh \frac{z}{a} \cos u^2 \cos t + \sinh \frac{z}{a} \sin u^2 \sin t \right)^2 \right.$$

$$\left. + \sin^2 t \right] = a^2 \left[\cosh^2 \frac{z}{a} \cos^2 t + \left(\sinh^2 \frac{z}{a} + 1 \right) \sin^2 t \right] = a^2 \cosh^2 \frac{z}{a}$$

d. h., dass $g_{zz}^t, g_{z2}^t (= g_{2z}^t)$ und g_{22}^t nicht von t abhängen. Wir haben also den

Satz 3.4. Das Katenoid (7) und die Wendelfläche (8) sind ineinander verbiegbar.

Aufgaben

1. Die Schar mit dem Scharparameter $t > 0$

$$P^t(u^1, u^2) = O + t \cosh u^1 \cos \frac{u^2}{t} \mathbf{i} + t \cosh u^2 \sin \frac{u^2}{t} \mathbf{j} + \int \sqrt{1 - t^2 \sinh^2 \chi} d\chi \mathbf{k}$$

besteht aus ineinander verbiegbaren Flächen der Gaußschen Krümmung $K = -1$.

Anleitung. a) Man zeige zunächst, dass g_{11}^t, g_{12}^t und g_{22}^t von t nicht abhängen, d. h., dass alle Flächen der Schar aufeinander abwickelbar sind.

b) $P = P^t(u^1, u^2)$ muss in t stetig sein, da für $t > 0$ die Differenzierbarkeit offensichtlich ist.

c) Die Gaußsche Krümmung ist -1 , da $r = t \cosh u^1$ der Differentialgleichung (6) mit $K = -1$ genügt.

Bemerkung. Die Bestimmung sämtlicher Lösungen der Differentialgleichung $r'' - r = 0$ kann wie im Beispiel (3.7) begonnen werden:

Aus $2r''r' = 2rr'$ folgt zunächst

$$r'^2 - a^2 = r^2 - b^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = r^2 + a^2 - b^2$$

Wir setzen $r_0 := \sqrt{|a^2 - b^2|}$, machen für $r_0 \neq 0$ den Ansatz $r = r_0 \cosh \chi$ oder $r = r_0 \sinh \chi$, je nachdem, ob $a^2 < b^2$ oder $a^2 > b^2$ ist, und finden $\chi = \pm u^1 + u_0^2$.

Im Fall $a^2 = b^2$ gilt $r' = \pm r$, woraus $\frac{r'}{r} = \pm 1$, $\ln r = \pm u^1 + u_1^0$ und schließlich $r = r_0 e^{\pm u^1}$ folgt.

2*. Man zeige, dass für eine Zylinderfläche der Übergang von einer Parameterdarstellung $\bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \bar{P}(\bar{u}^1) + \bar{u}^2 \mathbf{a}$ zu einer Darstellung $P(u^1, u^2) = P(u^1) + u^2 \mathbf{a}$ mit $\mathbf{a} \perp \dot{P}$ und $\dot{P}^2 = 1$ zulässig realisiert werden kann.

Anleitung. Man führe zwei Parametertransformationen durch:

$$(a) \quad \bar{u}^1 = \tilde{u}^1 \quad , \quad \bar{u}^2 = \tilde{u}^2 - \int \dot{P} \mathbf{a} d\tilde{u}^1$$

ist zulässig, und für

$$\tilde{P}(\tilde{u}^1) := \bar{P}(\bar{u}^1) - \int \dot{P} \mathbf{a} d\tilde{u}^1 \mathbf{a}$$

gilt $\mathbf{a} \perp \dot{\tilde{P}}$.

(b)

$$u^1 = \int |\dot{\tilde{P}}| d\tilde{u}^1 \quad , \quad u^2 = \tilde{u}^2$$

ist ebenfalls zulässig. Man setze abschließend $P(u^1) := \tilde{P}(\tilde{u}^1(u^1))$.

3.3 Die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k als Größen der inneren Geometrie einer Fläche und die absolute Differentiation

Es sei $P = P(u^1, u^2)$ eine Fläche mit dem begleitenden Dreibein P_1, P_2, \mathfrak{N} .

Im Zusammenhang mit der geodätischen Krümmung wurden die Ableitungsgleichungen von Gauß und mit ihnen die Christoffelsymbole¹ eingeführt:

$$P_{ij} = \Gamma_{ij}^r P_r + L_{ij} \mathfrak{N} \quad (10)$$

Um hieraus eine Darstellung von Γ_{ij}^h zu gewinnen, multiplizieren wir beide Seiten von (10) mit P_k :

$$P_{ij} P_k = \Gamma_{ij}^r P_r P_k = \Gamma_{ij}^r g_{rk} \quad (11)$$

Die Matrizen (g_{rs}) und (g^{st}) sind zueinander invers - $g_{rs} g^{st} = \delta_r^t$ (Kroneckersymbol) -, so dass sich aus (11) vorerst

$$P_{ij} P_k g^{kh} = \Gamma_{ij}^r g_{rk} g^{kh} = \Gamma_{ij}^r \delta_r^h = \Gamma_{ij}^h \quad (12)$$

ergibt. Andererseits gilt wegen $g_{uv} = P_u P_v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= P_{ik} P_j + P_i P_{jk} \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} &= P_{ji} P_k + P_j P_{ki} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} &= P_{kj} P_i + P_k P_{ij} \end{aligned}$$

indem wir die beiden letzten Gleichungen addieren und vom Ergebnis die erste Gleichung subtrahieren, erhalten wir wegen $P_{uv} = P_{vu}$

$$2P_{ij} P_k = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \quad (13)$$

Die Gleichung (13) wird übersichtlicher, wenn wir wie bei P_i und P_{ij} die partiellen Ableitungen von g_{rs} nach u^t durch einen unteren Index kennzeichnen. Um den Index, der die Ableitung

¹Ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie hat Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) bereits 1869 erkannt.

angibt, von den schon vorhandenen Indizes ohne diese Bedeutung zu trennen, wird ein Komma gesetzt

$$g_{rs,t} := \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^t}$$

Aus (12) und (13) gewinnen wir schließlich

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{g^{hk}}{2} (-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}) \quad (14)$$

wobei in der Klammer die Indizes durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen. Zusammenfassend gilt der

Satz 3.5. Die Christoffelsymbole sind innergeometrische Größen der Fläche. Sie können nach (14) berechnet werden.

Ist längs einer Kurve mit den Gaußschen Parametern

$$u^i = u^i(t)$$

eine Schar von Vektoren (Abb. 9)



Abb. 9

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = v^i(t) P_i(u^1(t), u^2(t))$$

in der jeweiligen Tangentialebene

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \varepsilon(u^1(t), u^2(t))$$

gegeben, dann ist

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}^i P_i + v^i P_{ik} \dot{u}^k$$

im allgemeinen kein Vektor der Tangentialebene $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Das trifft beispielsweise auf $\mathbf{v}(t) = \dot{P}(t)$ zu; denn ist t die Bogenlänge, dann hatten wir in (1.54) die Zerlegung

$$\mathbf{v}' = P'' = k_n \mathfrak{N} + k_g \mathfrak{e}$$

aufgestellt, und k_n ist im allgemeinen von null verschieden. Für die Differentialgeometrie innerhalb der inneren Geometrie einer Fläche wollen wir keineswegs auf Ableitungen verzichten; deshalb zerlegen wir $\dot{\mathbf{v}}$ bezüglich $\varepsilon = \varepsilon(t)$ in die Parallelkomponente $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon$ und die Normalkomponente $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp$, und wir nennen $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon = \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon(t)$ absolute Ableitung der Schar $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ längs der Flächenkurve $u^i = u^i(t)$, in Zeichen²

$$\frac{D\mathbf{v}(t)}{dt} := \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp \quad (15)$$

Mit Hilfe der Ableitungsgleichungen von Gauß erhalten wir

$$\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp = \dot{v}^i P_i + v^i \Gamma_{ij}^r P_r \dot{u}^j$$

²Zweifellos kann die Zweckmäßigkeit dieser Definition in Frage gestellt werden, weil $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon$ wie $\mathbf{v}(t)$ im allgemeinen nicht mehr in der Fläche enthalten ist. Wie wir in Abschnitt 4.2. jedoch sehen werden, kann der Begriff der Tangentialebene ohne Anschauungsraum innerhalb der inneren Geometrie entwickelt werden.

d. h.

$$\frac{D\mathbf{v}(t)}{dt} = (\dot{v}^i + \Gamma_{ij}^i v^j \dot{u}^k) P_i \quad (15)$$

Aufgaben

1. Man berechne für eine Fläche mit den metrischen Fundamentalgrößen $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$ - vgl. die metrischen Fundamentalgrößen der Drehflächen - sämtliche Christoffelsymbole nach (14).

Anleitung. Es gilt $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ und $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$. (Vgl. auch den Abschnitt 3.4.)

2. Wird für eine (Orts-)Funktion $f = f(u^1, u^2)$

$$\frac{Df}{dt} := f_i \dot{u}^i$$

gesetzt, d. h. Identifizierung der absoluten mit der gewöhnlichen Differentiation, dann gelten folgende Summen- und Produktregeln:

$$\frac{D(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} + \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{dt}, \quad \frac{D(\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{dt}$$

Anleitung. Um $\frac{D\mathbf{v}}{dt} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{dt}$ zu berechnen, benutze man $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp$, $\dot{\bar{\mathbf{v}}}_\varepsilon = \dot{\bar{\mathbf{v}}} - \dot{\bar{\mathbf{v}}}_\varepsilon^\perp$, sowie $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \perp \mathfrak{N}$, $\dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp, \dot{\bar{\mathbf{v}}}_\varepsilon^\perp$.

3.4 Theorema egregium

Die Tatsache, dass die heutzutage nach Gauß benannte Krümmung K zur inneren Geometrie der Fläche $P = P(u^1, u^2)$ gehört, hat Gauß als theorema egregium (hervorragenden Satz) bezeichnet.

Bevor wir ihn später als Folgerung der Formel (1) gewinnen, geben wir hier eine erste kurze, aber formale Herleitung. Sie führt uns zwangsläufig auf Gleichungen, die für die Fundamentalgrößen erfüllt sein müssen und später noch gebraucht werden, auf die Gleichungen von Gauß und auf die Gleichungen von Mainardi und Codazzi.

Wir gehen davon aus, dass nach einem Satz von H. A. Schwarz (vgl. den Abschnitt 0.1.), nach dem die Existenz von stetigen partiellen Ableitungen die Vertauschung der Differentiationsreihenfolge gestattet, bezüglich der Parameterdarstellung $P = P(u^1, u^2)$

$$P_{ijk} = P_{ikj} \quad (16)$$

gilt. Mit Hilfe der Ableitungsgleichungen von Gauß (1.58)

$$P_{rs} = \Gamma_{rs}^t P_t + L_{rs} \mathfrak{N}$$

und Weingarten (1.75)

$$\mathfrak{N}_r = -L_{rs} g^{st} P_t$$

lässt sich P_{ijk} folgendermaßen berechnen:³

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial u^k} P_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^r P_r + L_{ij} \mathfrak{N}) = \Gamma_{ij,k}^r P_r + \Gamma_{ij}^r P_{rk} + L_{ij,k} \mathfrak{N} + L_{ij} \mathfrak{N}_k \\ &= \Gamma_{ij,k}^r P_r + \Gamma_{ij}^r (\Gamma_{rk}^s P_s + L_{rk} \mathfrak{N}) + L_{ij,k} \mathfrak{N} + L_{ij} (-L_{kl} g^{ls} P_s) \\ &= (\Gamma_{ij,k}^s + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - L_{ik} L_{jl} g^{ls}) P_s + (L_{ij,k} + \Gamma_{ij}^r L_{rk}) \mathfrak{N} \end{aligned}$$

³Bezüglich der Bezeichnungen $\Gamma_{ij,k}^r$ und $L_{ij,k}$ vergleiche man die Bemerkungen zu $g_{rs,t}$ über der Formel (14).

entsprechend gilt

$$P_{ikj} = (\Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - L_{ik} L_{jl} g^{ls}) P_s + (L_{ik,j} + \Gamma_{ij}^r L_{rj}) \mathfrak{N}$$

Aus (16) folgt $P_{ijk} - P_{ikj} = 0$, d. h.

$$G_{ijk}^s P_s + C_{ijk} \mathfrak{N} = 0 \quad (16')$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_{ijk}^s &:= R_{ijk}^s - (L_{ij} L_{kl} - L_{ik} L_{jl}) g^{ls} \\ R_{ijk}^s &:= \Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s \\ C_{ijk}^s &:= L_{ij,k} - L_{ik,j} + \Gamma_{ij}^r L_{rk} - \Gamma_{ik}^r L_{rj} \end{aligned} \quad (16'')$$

Da die Vektoren P_1, P_2, \mathfrak{N} linear unabhängig sind, gibt es genau eine Linearkombination des Nullvektors bezüglich dieser Vektoren, nämlich $\mathfrak{o} = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot \mathfrak{N}$, d. h., dass in (16') sämtliche Koeffizienten verschwinden müssen. Somit bestehen die Gleichungen von Gauß (1827)

$$G_{ijk}^s = 0 \quad (17)$$

- die Variable G erinnert an Gauß - und die Gleichungen von Mainardi und Codazzi⁴

$$C_{ijk} = 0 \quad (18)$$

Aus (17) kann nun die eingangs genannte Behauptung gewonnen werden, denn (17) ist mit

$$R_{ijk}^s = (L_{ij} L_{kl} - L_{ik} L_{jl}) g^{ls} \quad (17')$$

äquivalent. Da (g_{st}) und (g^{ls}) zueinander invers sind und somit $g^{ls} g_{st} = \delta_t^l$ gilt, folgt aus (17') nunmehr

$$g_{st} R_{ijk}^s = (L_{ij} L_{kl} - L_{ik} L_{jl}) \delta_t^l = L_{ij} L_{kt} - L_{ik} L_{jt}$$

oder nach Umbenennung von t

$$G_{ls} R_{ijk}^s = L_{ij} L_{kl} - L_{ik} L_{jl} \quad (17'')$$

Insbesondere gilt für $i = j = 1$ und $k = l = 2$

$$g_{2s} R_{112}^s = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{12} = L$$

Nach (1.70') heißt das

$$K = \frac{L}{g} = \frac{g_{2s}}{g} R_{112}^s \quad (19)$$

Weil $R_{112}^s = \Gamma_{11,2}^s - \Gamma_{12,1}^s + \Gamma_{11}^r \Gamma_{r2}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{r1}^s$ nach dem Satz 3.5 zur inneren Geometrie der Fläche gehört, gilt das

Theorema egregium. Die Gaußsche Krümmung $K = K(u^1, u^2)$ ist eine Größe der inneren Geometrie der Fläche.

Die Formel (19), die zum Theorema egregium führte, hat auf der rechten Seite nur deshalb

⁴Diese Gleichungen sind in Veröffentlichungen aus den Jahren 1856 und 1860 enthalten, die von Gaspare Mainardi (1800-1876) bzw. Delfino Codazzi (1794-1859) abgefasst wurden. Das C in (18) bezieht sich auf Codazzi.

solch einfaches Aussehen, weil wir günstige Abkürzungen eingeführt hatten. Allerdings kann, wie wir im folgenden Beispiel sehen werden, die rechte Seite von (19) unter besonderen Voraussetzungen auch sehr einfach sein.

Beispiel

(3.8) Der Fall $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$. Der Fall tritt beispielsweise bei Drehflächen mit der Bogenlänge der Erzeugenden als Parameter u^1 ein, er ist aber darüber hinaus für spätere Untersuchungen wichtig.

Unter obigen Voraussetzungen gilt $g = g_{22}$, $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$ sowie

$$K = \frac{g_{21}}{g} R_{112}^1 + \frac{g_{22}}{g} R_{112}^2 = R_{112}^2 = \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2$$

In einer Nebenrechnung bestimmen wir die benötigten Christoffelsymbole (vgl. die Aufgabe 1 zu Abschnitt 3.3.)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &:= \frac{g^{11}}{2} (-g_{11,1} + g_{11,1} + g_{11,1}) = 0 \\ \Gamma_{11}^2 &:= \frac{g^{22}}{2} (-g_{11,2} + g_{12,1} + g_{21,1}) = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &:= \frac{g^{22}}{2} (-g_{12,2} + g_{22,1} + g_{21,2}) = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}} = \Gamma_{21}^2 \end{aligned}$$

und die beiden benötigten Ableitungen

$$\Gamma_{11,2}^2 = 0 \quad , \quad \Gamma_{12,1}^2 = \frac{g_{22,1,1} g_{22} - (g_{22,1})^2}{2(g_{22})^2}$$

Somit gilt die Formel

$$K = -\frac{g_{22,1,1}}{2g_{22}} + \frac{1}{4} \left(\frac{g_{22,1}}{g_{22}} \right)^2 \quad (19')$$

aus der die Zugehörigkeit von $K = K(u^1, u^2)$ zur inneren Geometrie der Fläche bereits leicht abgelesen werden kann. Wegen

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{g_{22,1}}{2\sqrt{g_{22}}} \right) = \frac{g_{22,1,1}}{2\sqrt{g_{22}}} - \frac{(g_{22,1})^2}{4(\sqrt{g_{22}})^3}$$

besteht schließlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2} + K \sqrt{g_{22}} = 0 \quad (20)$$

Sind Flächen aufeinander abwickelbar oder gar ineinander verbiegbar, dann existieren Parameterdarstellungen $P = P(u^1, u^2)$ und $\tilde{P} = \tilde{P}(u^1, u^2)$ mit

$$g_{ik}(u^1, u^2) = \tilde{g}_{ik}(u^1, u^2) \quad (21)$$

nach (19) gilt dann

$$K(u^1, u^2) = \tilde{K}(u^1, u^2) \quad (22)$$

In Ergänzung des Satzes 3.3 kann nun festgestellt werden, dass Drehflächen konstanter, aber verschiedener Gaußscher Krümmung nicht aufeinander abwickelbar und damit erst recht nicht

ineinander verbiegbare sind, weil K als Größe der inneren Geometrie bei Verbiegung wie auch bei Abwicklung konstant bleiben muss.

Die naheliegende Frage, ob aus (22) umgekehrt (21) folgt, ist - wie das folgende Beispiel zeigt - zu verneinen.

Beispiel

(3.9) Parameterdarstellungen mit (22), die (21) nicht erfüllen. Neben der Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) = \left(u^1, u^2, \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{2} \right)$$

eines hyperbolischen Paraboloides (vgl. Beispiel (2.16)) mit

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 0, -u^1), & P_2 &= (0, 1, u^2), \\ P_{11} &= (0, 0, -1), & P_{12} &= P_{21} = 0, & P_{22} &= (0, 0, 1), \\ g_{11} &= 1 + (u^1)^2, & g_{12} &= g_{21} = -u^1 u^2, & g_{22} &= 1 + (u^2)^2, & g &= 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 \end{aligned}$$

betrachten wir

$$\bar{P}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1 u^2)$$

wobei wegen

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= (1, 0, u^2), & \bar{P}_2 &= (0, 1, u^1), \\ \bar{P}_{11} &= 0, & \bar{P}_{12} &= \bar{P}_{21} = (0, 0, 1), & \bar{P}_{22} &= 0, \\ \bar{g}_{11} &= 1 + (u^2)^2, & \bar{g}_{12} &= \bar{g}_{21} = u^1 u^2, & \bar{g}_{22} &= 1 + (u^1)^2, & \bar{g} &= 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 \end{aligned}$$

offenbar (21) für $(u^1, u^2) \neq (0, 0)$ verletzt ist. Die Berechnung der Gaußschen Krümmung ergibt jedoch

$$K = \frac{L}{g} = \frac{(P_1 P_2 P_{11})(P_1 P_2 P_{22}) - (P_1 P_2 P_{12})^2}{g^2} = -\frac{1}{g^2}$$

sowie

$$\bar{K} = \frac{\bar{L}}{\bar{g}} = \frac{(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_{11})(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_{22}) - (\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_{12})^2}{\bar{g}^2} = -\frac{1}{\bar{g}^2} = K$$

Trotz dieses Resultates kann gefragt werden, wann die Gaußsche Krümmung bereits die innere Geometrie einer Fläche beherrscht. Hier können wir zunächst den Satz 3.3 nennen. Um ein weiteres Resultat von dieser Art zu erhalten, bestimmen wir alle Flächen verschwindender Gaußscher Krümmung:

Für $P = P(u^1, u^2)$ gelte $K(u^1, u^2) = 0$.

a) In Flachpunkten gilt $L_{ik} = \lambda g_{ik}$ mit $\lambda = 0$ nach dem Satz 2.6, d. h. $L_{ik} = 0$ und $\mathfrak{N}_i = 0$ nach den Ableitungsgleichungen (1.75) von Weingarten. In einem offenen Flächenstück aus Flachpunkten ist \mathfrak{N} konstant und die Fläche eben. Alle übrigen Flachpunkte sind Häufungspunkte von Nicht-Flachpunkten, und über sie erhalten wir nach b) und einem Grenzübergang eine Aussage.

b) In flachpunktfreien Flächenstücken seien o. B. d. A. die Parameterlinien Krümmungslinien, so dass nach einem Zusatz des Satzes 2.7 sofort $g_{12} = g_{21} = 0$ und wegen $x_{(1)}^2 = x_{(2)}^1 = 0$ nach (1.71) noch

$$L_{11} = \lambda_1 g_{11}, \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{22} = \lambda_2 g_{22}$$

folgt. Es gilt $\lambda_1 \lambda_2 = K = 0$, d. h. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ oder $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$; aus Stetigkeitsgründen dürfen wir einheitlich $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ voraussetzen.

Dann ist noch $L_{22} = 0$ und $\mathfrak{N}_2 = -L_{2r} g^{rj} P_j = 0$. Für P_{22} erhalten wir

$$P_{22} = \Gamma_{22}^r P_r + L_{22} \mathfrak{N} = \Gamma_{22}^2 P_2$$

denn nach (18) ist $0 = C_{221} = \Gamma_{22}^1 L_{11}$ und folglich $\Gamma_{22}^1 = 0$. Insbesondere haben wir für die x -Koordinate von P_2

$$\frac{\partial x}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^2 x \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^2$$

oder nach Integration

$$\ln x - \ln x_0 = f(u^1, u^2) := \int \Gamma_{22}^2 du^2 \quad \text{bzw.} \quad x = x_0 e^f$$

Analog ergibt sich $y = y_0 e^f$ und $z = z_0 e^f$. Da $P_2 = e^f(x_0, y_0, z_0)$ gilt, sind die u^2 -Linien geradlinig. Mithin ist das Flächenstück eine Regelfläche mit $\mathfrak{N}_2 = 0$, d. h. eine Tors.

Aus diesem Ergebnis und dem Satz 3.1 folgt der

Satz 3.6. Folgende Aussagen sind untereinander äquivalent.

- Die Fläche ist eine Torse.
- Die Fläche ist in die Ebene abwickelbar.
- Für die Fläche gilt überall $K(u^1, u^2) = 0$.
- Die Punkte der Fläche sind parabolisch, oder es sind Flachpunkte.

Aufgaben

- Die Gaußsche Krümmung einer Regelfläche ist nirgends positiv.
- Man überprüfe die Gültigkeit von (20) für eine a) Drehzylinderfläche, b) Drehkegelfläche, c) Kugel vom Radius r .
Anleitung. Für Drehflächen gilt $g_{22} = r$. Unter a) ist r konstant und $K = 0$, unter b) gilt $r = u^1 \sin \beta$ und $K = 0$, unter c) sind $r = R \sin \frac{u^1}{R}$ und $K = \frac{1}{R^2}$ zu berücksichtigen.
- 3*. Die Gleichungen (17) enthalten nur vier wesentliche Gleichungen, die sämtlich das Theorema egregium erweisen und untereinander äquivalent sind. Dagegen befinden sich unter den Gleichungen (18) zwei wesentliche Gleichungen.

3.5 Der Fundamentalsatz der Flächentheorie

Bereits in der Einführung 3.1. konnte festgestellt werden, dass die innere Geometrie zur eindeutigen Bestimmung einer Fläche im allgemeinen nicht ausreicht, d. h., dass eine Fläche durch die metrischen Fundamentalgrößen noch nicht eindeutig festgelegt ist. Nach dem folgenden Fundamentalsatz gelingt die eindeutige Beschreibung einer Fläche mit Hilfe aller Fundamentalgrößen.

Im Zusammenhang mit der Bestimmung aller Flächen ein und derselben inneren Geometrie ist vor allem zu klären, inwieweit die zweiten Fundamentalgrößen beliebig gewählt werden können.

Schon im zweiten Kapitel wurde darauf hingewiesen, dass den Frenetschen Formeln der Kurventheorie die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten entsprechen. Somit bilden die Fundamentalgrößen g_{ik} und L_{ik} , das Gegenstück zu Krümmung und Windung, mit deren Hilfe sich die Koeffizienten in den Frenetschen Formeln angeben lassen.

Wegen $g_{ik} = P_i P_k$, $(P_1 \times P_2)^2 = g$ und $P_{ij} = \Gamma_{ij}^k P_k + L_{ij} \mathfrak{N}$ gilt

- (i) g_{ik} zweimal stetig differenzierbar; $g_{11}, g_{22}, g > 0$; $g_{ik} = g_{ki}$,
- (ii) L_{ik} stetig differenzierbar, $L_{ik} = L_{ki}$.

Im Gegensatz dazu, dass in der Kurventheorie Krümmung und Windung völlig unabhängig voneinander sind, müssen die Fundamentalgrößen nach Abschnitt 3.4. noch den Gleichungen von Gauß bzw. Mainardi und Codazzi

- (iii) $G_{ijk}^r = 0$ (Gauß 1827),
- (iv) $C_{ijk} = 0$ (Mainardi 1856, Codazzi 1860)

genügen. Die Bedingungen (i) bis (iv) sind somit notwendig dafür, dass die Funktionen $g_{ik} = g_{ik}(u^1, u^2)$ und $L_{ik} = L_{ik}(u^1, u^2)$ zu einer zulässigen Parameterdarstellung einer Fläche gehören. Nach dem folgenden Satz sind diese Bedingungen auch hinreichend:

Fundamentalsatz der Flächentheorie (Bonnet 1867).

Genügen die Funktionen $\tilde{g}_{ik} = \tilde{g}(u^1, u^2)$ und $\tilde{L}_{ik} = \tilde{L}_{ik}(u^1, u^2)$ den Bedingungen (i) bis (iv), so gibt es bis auf Bewegung im Raum genau eine zulässige Parameterdarstellung $P = P(u^1, u^2)$ mit

$$g_{ik}(u^1, u^2) = \tilde{g}_{ik}(u^1, u^2) \quad \text{und} \quad L_{ik}(u^1, u^2) = \tilde{L}_{ik}(u^1, u^2)$$

Der Beweis beruht auf der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von einem System partieller Differentialgleichungen. Das soll im folgenden skizziert werden:

Eine Lösung $P = P(u^1, u^2)$ muss die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten

$$P_{ij} = \tilde{\Gamma}_{ij}^r P_r + \tilde{L}_{ij} \mathfrak{N} \quad , \quad \mathfrak{N}_i = -\tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{rs} P_s \quad (23,24)$$

erfüllen. Notwendige Voraussetzung für die Lösbarkeit dieses Systems von partiellen Differentialgleichungen ist

$$(\tilde{\Gamma}_{ij}^r P_r + \tilde{L}_{ij} \mathfrak{N})_k = (\tilde{\Gamma}_{ij}^r P_r + \tilde{L}_{ik} \mathfrak{N})_j \quad (25)$$

und

$$(-\tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{rs} P_s)_j = (-\tilde{L}_{jr} \tilde{g}^{rs} P_s)_j \quad (26)$$

dabei besteht (25) nach (23) und (24) infolge von (iii) und (iv), wie die Herleitung dieser Gleichungen im Abschnitt 3.4. lehrt. Es erweist sich überraschenderweise, dass (26) keine neue Bedingung erfordert. Denn (26) hat die Gestalt

$$K_{ij}^s P_s + K_{ij} \mathfrak{N} = K_{ji}^s P_s + K_{ji} \mathfrak{N}$$

wobei sich die vorübergehend mit K_{ij}^s bzw. K_{ij} bezeichneten Koeffizienten nach (23) berechnen lassen

$$K_{ij}^s P_s + K_{ij} \mathfrak{N} = -(\tilde{L}_{ir,j} \tilde{g}^{rs} + \tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{rs,j}) P_s - \tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{ru} (\tilde{\Gamma}_{uj}^s P_s + \tilde{L}_{uj} \mathfrak{N})$$

Trivialerweise haben wir

$$K_{ij} = -\tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{rs} \tilde{L}_{sj} = -\tilde{L}_{js} \tilde{g}^{sr} \tilde{L}_{ri} = K_{ji}$$

Um $K_{ij}^s = K_{ji}^s$ nachzuweisen, bemerken wir zunächst

$$\tilde{g}^{rs,j} \tilde{g}_{st} + \tilde{g}^{rs} \tilde{g}_{st,j} = 0$$

wegen $\tilde{g}^{rs} \tilde{g}_{st} = \delta_t^r$ und betrachten

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^s \tilde{g}_{st} &= -\tilde{L}_{it,j} + \tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{rs} \tilde{g}_{st,j} - \tilde{L}_{ir} \tilde{g}^{ru} \tilde{\Gamma}_{uj}^s \tilde{g}_{st} \\
 &= -\tilde{L}_{it,j} + \tilde{L}_{ir} \left(\tilde{g}^{rs} \tilde{g}_{st,j} - \tilde{g}^{ru} \frac{\tilde{g}^{sy}}{2} (-\tilde{g}_{uj,y} + \tilde{g}_{jy,u} + \tilde{g}_{yu,i}) \tilde{g}_{st} \right) \\
 &= \tilde{L}_{it,j} + \tilde{L}_{ir} \left(\tilde{g}^{ru} \tilde{g}_{ut,j} - \frac{\tilde{g}^{ru}}{2} (-\tilde{g}_{uj,t} + \tilde{g}_{jt,u} + \tilde{g}_{tu,i}) \right) \\
 &= \tilde{L}_{it,j} + \tilde{L}_{ir} \frac{\tilde{g}^{ru}}{2} (-\tilde{g}_{jt,u} + \tilde{g}_{tu,j} + \tilde{g}_{uj,t}) = \tilde{L}_{it,j} + \tilde{L}_{ir} \tilde{\Gamma}_{jt}^r = \tilde{L}_{it,j} + \tilde{\Gamma}_{tj}^r \tilde{L}_{ir} \\
 &= -\tilde{C}_{tij} - \tilde{L}_{tj,i} + \tilde{\Gamma}_{ti}^r \tilde{L}_{rj} = -\tilde{C}_{tij} - \tilde{K}_{ji}^s \tilde{g}_{st}
 \end{aligned}$$

Nach (iv) gilt $\tilde{C}_{tij} = 0$ und somit

$$K_{ij}^s \tilde{g}_{st} = K_{jt}^s \tilde{g}_{st}$$

woraus $K_{ij}^s = K_{ji}^s$ und damit (26) folgt. Also besteht (26) nach (23) lediglich wegen (iv). Die Theorie der Lösung von Differentialgleichungen lehrt, dass (23) und (24) wegen (25) und (26) genau eine Lösung

$$P_i = P_i(u^1, u^2), \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2) \quad (27)$$

besitzt, wenn man von einem geeigneten Dreibein

$$P_1(u_0^1, u_0^2), \quad P_2(u_0^1, u_0^2), \quad \mathfrak{N}(u_0^2, u_0^2)$$

ausgeht. Nach der Wahl eines Punktes P_0 gibt es wegen $P_i(u^1, u^2)_j = P_j(u^1, u^2)_i$ nach (23) genau eine Lösung $P = P(u^1, u^2)$ mit (27) und $P(u_0^1, u_0^2) = P_0$. Schließlich lässt sich $g_{ik} = \tilde{g}_{ik}$ und $L_{ik} = \tilde{L}_{ik}$ für alle (u^1, u^2) nachweisen.

Um nun eine Klasse von Flächen mit derselben inneren Geometrie zu bestimmen, kann man bei festen metrischen Fundamentalgrößen g_{ik} zunächst alle mit (iii) und (iv) verträglichen L_{ik} bestimmen. Da beide Bedingungen für $j = k$ trivialerweise erfüllt sind (vgl. (16")), dürfen wir o. B. d. A. sofort $j = 1$ und $k = 2$ voraussetzen.

Die Bedingung (iii). Aus (iii) und $g_{ik} = \bar{g}_i k$, folgt erst

$$(L_{i1}L_{2l} - L_{i2}L_{1l})g^{lr} = R_{i12}^r = (\bar{L}_{i1}\bar{L}_{2l} - \bar{L}_{i2}\bar{L}_{1l})g^{lr}$$

und dann

$$L_{i1}L_{2l} - L_{i2}L_{1l} = \bar{L}_{i1}\bar{L}_{2l} - \bar{L}_{i2}\bar{L}_{1l}$$

In den Fällen $i = l = 1$ oder $i = l = 2$ liegen triviale Identitäten vor. Abschließend betrachten wir die übrigen Fälle:

a) $i = 1$ und $l = 2$: $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{12} = \bar{L}_{11}\bar{L}_{22} - \bar{L}_{12}\bar{L}_{12}$

b) $i = 2$ und $l = 1$: $L_{21}L_{21} - L_{22}L_{11} = \bar{L}_{21}\bar{L}_{21} - \bar{L}_{22}\bar{L}_{11}$

Zusammenfassend können wir feststellen, dass (iii) lediglich $L = \bar{L}$ ergibt; diese Gleichung erhalten wir bereits aus $g_{ik} = \bar{g}_{ik}$, über $K = \bar{K}$ nach dem Theorema egregium. Bei der obigen Voraussetzung $g_{ik} = \bar{g}_{ik}$ ist folglich (iii) belanglos.

Die Bedingung (iv). Wegen $j = 1$ und $k = 2$ besteht (iv) aus zwei Gleichungen ($i = 1, 2$)

$$(iv') \quad \begin{cases} L_{11,2} - L_{12,1} + \Gamma_{11}^1 L_{12} + \Gamma_{11}^2 L_{22} - \Gamma_{12}^1 L_{11} - \Gamma_{12}^2 L_{21} = 0 \\ L_{21,2} - L_{22,1} + \Gamma_{21}^1 L_{12} + \Gamma_{21}^2 L_{22} - \Gamma_{22}^1 L_{11} - \Gamma_{22}^2 L_{21} = 0 \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Parameterlinien zueinander orthogonale Krümmungslinien sind, vereinfacht sich (iv') erheblich: Aus $g_{12} = g_{21} = 0$ und $x_{(1)}^2 = x_{(2)}^1 = 0$ folgt nach (1.71)

$$L_{11} = \lambda_1 g_{11}, \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{22} = \lambda_2 g_{22}$$

so dass wir

$$(iv'') \quad \begin{cases} L_{11,2} = \Gamma_{12}^1 L_{11} - \Gamma_{11}^2 L_{22} \\ L_{22,1} = -\Gamma_{22}^1 L_{11} + \Gamma_{21}^2 L_{22} \end{cases}$$

erhalten, wobei wir die Bestimmung von L_{11} und L_{22} auf die Ermittlung von $\lambda_1 = \lambda_1(u^1, u^2)$ bzw. $\lambda_2 = \lambda_2(u^1, u^2)$ zurückführen können.

Beispiel

(3.10) Bestimmung aller mit $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ verträglichen zweiten Fundamentalgroßen unter der Voraussetzung, dass die Parameterlinien Krümmungslinien sind.

Wegen $\Gamma_{ik}^i = 0$ gilt $R_{ijk}^s = 0$ nach (16'') und $K = 0$ nach (19). Aus Stetigkeitsgründen dürfen wir o. B. d. A. überall $\lambda_2 = 0$ voraussetzen. Zur Ermittlung von λ_1 steht uns (iv_1'') zur Verfügung:

$$L_{11,2} = (\lambda_1 g_{11})_2 = \lambda_{1,2} = 0$$

als Lösungen kommen gerade alle stetig differenzierbaren Funktionen $\lambda_1 = \lambda_1(u^1)$ in Frage. Außerdem gilt

$$L_{11}(u^1, u^2) = \lambda(u^1) \quad , \quad L_{12} = L_{21} = L_{22} = 0$$

Nach dem Fundamentalsatz gibt es zu jeder Funktion $\lambda_1 = \lambda(u^1)$ eine Lösung $P = P_\lambda(u^1, u^2)$; diese Lösung können wir sogar explizit als Zylinderfläche (2)

$$P_\lambda(u^1, u^2) = P_\lambda(u^1) + u^2 \mathbf{a}$$

mit $|P'_\lambda| = |\mathbf{a}| = 1$ und $\mathbf{a}P'_\lambda = 0$ angeben, wobei die ebene "Bahn"-Kurve $P = P_\lambda(u^1)$ die Krümmung $k_\lambda(u^1) = |\lambda(u^1)|$ besitzt und $\text{sgn } \lambda(u^1) = +1$ etwa "Links"- und $\text{sgn } \lambda(u^1) = -1$ "Rechtskurve" bedeutet. Sonderfall ist natürlich die Ebene.

Im obigen Beispiel haben wir über (iv'') nicht alle in die Ebene abwickelbaren Flächen erhalten. Die Ursache ist darin zu sehen, dass die Ebene vielfältige Systeme zueinander orthogonaler Krümmungslinien besitzt.

Nach einer Bemerkung in Abschnitt 1.2.9. lassen sich in einer Umgebung jedes Nicht-Nabelpunktes die Krümmungslinien als Parameterlinien einführen, und nach einem Zusatz zum Satz 1.2.7 ist das System der Krümmungslinien dort eindeutig. Um den Wert von (iv'') einschätzen zu können, müssen wir den Fall der Nabelpunkte näher untersuchen:

Es sei $P = P(u^1, u^2)$ eine Fläche, die nur aus Nabelpunkten besteht. Nach dem Satz 1.2.6 gilt

$$L_{ik}(u^1, u^2) = \lambda(u^1, u^2) g_{ik}(u^1, u^2)$$

nach den Ableitungsgleichungen von Weingarten (1.75) somit

$$\mathfrak{N}_i = -L_{ir} g^{rj} P_j = \lambda g_{ir} g^{rj} P_j = -\lambda P_i \quad (28)$$

Folglich ist

$$\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{N}_{21} = -\lambda_{,2} P_1 - \lambda P_{12} + \lambda_{,1} P_2 + \lambda P_{21} = \lambda_{,1} P_2 - \lambda_{,2} P_1 = 0$$

wegen der linearen Unabhängigkeit von P_1 und P_2 bedeutet das $\lambda_{,1} = \lambda_{,2} = 0$, so dass λ konstant ist. Folglich ergibt (28) im Fall $\lambda = 0$ einen konstanten Normalvektor \mathfrak{N} , mithin ist $P = P(u^1, u^2)$ eben; im Fall $\lambda \neq 0$ führt Integration von (28) zu

$$\mathfrak{N} = \lambda(P_0 - P(u^1, u^2)) \quad \text{bzw.} \quad (P_0 - P(u^1, u^2))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

d. h., dass $P = P(u^1, u^2)$ der Gleichung der Kugel um P_0 mit dem Radius $\frac{1}{|\lambda|}$ genügt. Wir haben also den

Satz 3.7. Ein Flächenstück, das nur aus Nabelpunkten besteht, ist entweder Teil einer Ebene oder Teil einer Kugel.

Aufgaben

1. Für $P = P(u^1, u^2)$ seien die Parameterlinien zueinander orthogonale Krümmungslinien.
 - a) Man zeige $g_{12} = L_{12} = 0$.
 - b) $\tilde{L}_{ik} := -L_{ik}$, ist mit g_{ik} verträglich, d.h., dass (iv'') von g_{ik} und \tilde{L}_{ik} erfüllt wird.
 - c) Man berechne \bar{L}_{ik} nach der Parametertransformation $\bar{u}^1 = u^1$, $\bar{u}^2 = -u^2$, vergleiche das Resultat mit \tilde{L}_{ik} und deute des Ergebnis.
2. Für die Kegelfläche (3) gilt $g_{11} = (u^2)^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = 1$. Man bestimme alle mit diesen g_{ik} verträglichen L_{ik} , die zu Flächen mit orthogonalen Krümmungslinien als Parameterlinien gehören.
3. Man löse nochmals Aufgabe 3* aus Abschnitt 3.4.

3.6 Die geodätische Krümmung

Es sei $u^i = u^i(s)$ die Gaußsche Parameterdarstellung einer Kurve der Fläche $P = P(u^1, u^2)$, wobei s den natürlichen Parameter bezeichne. Im Abschnitt 2.5. haben wir die geodätische Krümmung über die Zerlegung

$$P''(u^1(s), u^2(s)) = k_n \mathfrak{N} + k_g (\mathfrak{N} \times P') \quad (29)$$

eingeführt. Da $\mathfrak{N} \times P'$ ein zu \mathfrak{N} senkrechter Einheitsvektor ist, erhalten wir aus (29)

$$k_g = (\mathfrak{N} \times P') P'' = \mathfrak{N} (P' \times P'') \quad (30)$$

Diese Darstellung zeigt noch keine Beziehung von k_g zur inneren Geometrie der Fläche $P = P(u^1, u^2)$. Deshalb formen wir P' und P'' mit Hilfe der Ableitungsgleichungen von Gauß um:

$$\begin{aligned} k_g &= \mathfrak{N} (P' \times P'') = \mathfrak{N} (P_r u^{r'} \times (P_s u_{s''} + \Gamma_{ij}^s u^i u^{j'} P_s + L_{ij} u^i u^{j'} \mathfrak{N})) \\ &= u^{r'} (u^{s''} + \Gamma_{ij}^s u^i u^{j'}) \mathfrak{N} (P_r \times P_s) \end{aligned}$$

Wegen

$$P_r \times P_s = \begin{cases} P_1 \times P_2 & \text{für } r < s \\ 0 & \text{für } r = s \\ -P_1 \times P_2 & \text{für } r > s \end{cases}$$

gilt $\mathfrak{N} (P_r \times P_s) = \mathfrak{N} (P_1 \times P_2) \operatorname{sgn}(s - r) = \sqrt{g} \operatorname{sgn}(s - r)$ und schließlich

$$k_g = \sqrt{g} (u^{1'} (u^{2''} + \Gamma_{ij}^1 u^i u^{j'}) - u^{2'} (u^{1''} + \Gamma_{ij}^1 u^i u^{j'})) \quad (31)$$

Nach dem Satz 3.5 haben wir nun den

Satz 3.8. Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve gehört zur inneren Geometrie der Fläche.

Der Nachteil der Formel (31) besteht neben ihrer Länge in der Abhängigkeit von den Flächenparametern. Für die Theorie der ebenen Kurven soll das nachgewiesen werden. Dort kann man vorteilhaft die geodätische Krümmung statt der Krümmung benutzen, weil das Vorzeichen $\text{sgn } k_g(s)$ eine bemerkenswerte Deutung besitzt:

a) Ebene mit kartesischen Koordinaten.

Wegen $g_{11} = g_{22} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$ verschwinden alle Christoffelsymbole. Der Tangentenvektor $P'(s)$ einer ebenen Kurve lässt sich mit Hilfe des Winkels $\psi = \psi(s)$ zwischen den positiv orientierten Parallelen zur u^1 -Achse und $P'(s)$ darstellen (vgl. Abb. 10):

$$P'(s) = (u^1', u^2') = (\cos \psi, \sin \psi)$$

so dass

$$P''(s) = (u^{1''}, u^{2''}) = \left(-\sin \psi \frac{d\psi}{ds}, \cos \psi \frac{d\psi}{ds} \right)$$

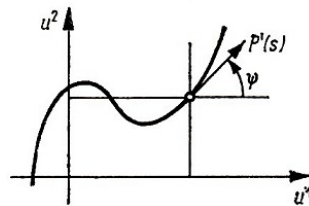


Abb. 10

gilt. Aus (31) erhalten wir folglich

$$k_g = \cos \psi \cdot \cos \psi \frac{d\psi}{ds} - \sin \psi \left(-\sin \psi \frac{d\psi}{ds} \right) \quad \text{d. h.} \quad k_g(s) = \frac{d\psi}{ds} \quad (31a)$$

Wachsender Winkel ψ und positive geodätische Krümmung entsprechen einander und kennzeichnen eine Linkskurve; negative geodätische Krümmung charakterisiert eine Rechtskurve. Die Parametertransformation $\bar{s} := -s$ ergibt

$$\bar{k}_g(\bar{s}) = \frac{d\psi}{d\bar{s}} = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = -k_g(s)$$

und wie erwartet die Umwandlung einer Links- in eine Rechtskurve und umgekehrt. Ist $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_+)$ ein positiv orientiertes Zweibein, dann erhalten wir wegen $k_n = 0$

$$\mathbf{t}' = k_g \mathbf{n}_+ \quad , \quad \mathbf{n}'_+ = -k_g \mathbf{t}$$

die Frenetschen Formeln der ebenen Kurventheorie. Damit wird

$$k_g = k_g(s)$$

die natürliche Gleichung einer ebenen Kurve.

b) Ebene mit Polarkoordinaten.

Aus den metrischen Fundamentalgrößen $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = (u^1)^2$, wie sie im Beispiel (1.2.12') ermittelt wurden, erhalten wir bezüglich der Christoffelsymbole nach (14) folgende Ergebnisse:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22,1}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}}$$

Ist ψ der Winkel, den die durch den betrachteten Punkt laufende u^1 -Linie mit dem Tangentenvektor $P'(s)$ einschließt (Abb. 11), dann gilt wegen $P_2^2 = g_{11}(u^1)^2 + g_{22}(u^2)^2 = 1$ hier zunächst

$$P'(s) = P_i u^i = P_1 \cos \psi + P_2 \frac{\sin \psi}{u^1}$$

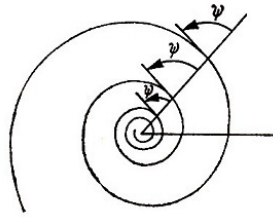


Abb. 11

und dann

$$u^{1''} = -\sin \psi \cdot \frac{d\psi}{ds}, \quad u^{2''} = \frac{\cos \psi}{u^1} \cdot \frac{d\psi}{ds} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{(u^1)^2}$$

Die geodätische Krümmung kann nun wieder nach (31) berechnet werden:

$$\begin{aligned} k_g &= u^1 \left(\cos \psi \left(\frac{\cos \psi}{u^1} \cdot \frac{d\psi}{ds} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{(u^1)^2} + \frac{2}{u^1} \cdot \cos \psi \cdot \frac{\sin \psi}{u^1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \psi}{u^1} \left(-\sin \psi \frac{d\psi}{ds} - u^1 \cdot \frac{\sin^2 \psi}{(u^1)^2} \right) \right) \\ &= \cos^2 \psi \frac{d\psi}{ds} + \cos^2 \psi \frac{\sin \psi}{u^1} + \sin^2 \psi \frac{d\psi}{ds} + \sin \psi \frac{\sin^2 \psi}{u^1} = \frac{d\psi}{ds} + \sin \psi \cdot \frac{1}{u^1} \end{aligned} \quad (31b)$$

Gegenüber (31a) ist hier ein Korrekturglied zu berücksichtigen, das mit $\frac{1}{u^1}$ die geodätische Krümmung der u^2 -Linie durch den betrachteten Punkt enthält.

Nach (31 b) lässt sich eine Darstellung der geodätischen Krümmung einer Kurve $u^i = u^i(s)$ in einer beliebigen Fläche $P = P(u^1, u^2)$ mit Hilfe der geodätischen Krümmung der Parameterlinien vermuten.

Dabei setzen wir voraus, dass sie ein orthogonales Netz bilden, d. h. $g_{12} = g_{21} = 0$. Es sei s_1 der natürliche Parameter der u^1 -Linie $u^2 = c$. Dann ist wegen $P_{s_1} = P_i u^i = P_1 u^1$ und $|P_{s_1}| = 1 = |P_1 u^1|$ o. B. d. A.

$$u^{1'} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad u^{2'} = 0$$

Um die Formel (31) anwenden zu können, benötigen wir lediglich noch

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g_{22}}(-g_{112,2}) = -\frac{g_{11,2}}{2g_{22}}$$

denn jetzt ist

$$k_g^{(1)} = \sqrt{g} u^{1'} \Gamma_{11}^2 u^1 u^1 = -\frac{g_{11,2} \sqrt{g_{11} g_{22}}}{2g_{22} \sqrt{g_{11}}^3} = -\frac{g_{11,2}}{2g_{11} \sqrt{g_{22}}} \quad (32.1)$$

Analog ergibt sich

$$k_g^{(2)} = + \frac{g_{22,1}}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}} \quad (32.2)$$

Abschließend berechnen wir die geodätische Krümmung der Flächenkurve $u^i = u^i(s)$ gemäß (31). Wegen $g_{12} = g_{21} = 0$ gilt zunächst

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-g_{22,1}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-g_{11,2}}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{-g_{22,1}}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{g_{22,2}}{2g_{22}}$$

Wir stellen den Tangentenvektor P' wiederum mit Hilfe des Winkels ψ zwischen u^1 -Linie und Kurve (Abb. 12) dar:



Abb. 12

$$P' = P_i u^{i'} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{11}}} P_1 + \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{22}}} P_{22}$$

somit haben wir

$$\begin{aligned} u^{1'} &= \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{11}}}, & u^{1''} &= -\frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{11}}} \frac{d\psi}{ds} - \frac{\cos \psi}{2\sqrt{g_{11}}} \left(g_{11,1} \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{11}}} + g_{11,2} \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{22}}} \right) \\ u^{2'} &= \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{22}}}, & u^{2''} &= \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{22}}} \frac{d\psi}{ds} - \frac{\sin \psi}{2\sqrt{g_{22}}} \left(g_{22,1} \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{11}}} + g_{22,2} \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{22}}} \right) \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Berechnung der geodätischen Krümmung ausführen:

$$\begin{aligned} k_g &= \sqrt{g} \left(\frac{\cos \psi}{\sqrt{g_{11}}} \left(u^{2''} - \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{g_{11}} + \frac{g_{22,1}}{g_{11}} \cdot \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{g}} + \frac{g_{22,2}}{2g_{22}} \cdot \frac{\sin^2 \psi}{g_{22}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_{22}}} \left(u^{1''} + \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{g_{11}} + \frac{g_{11,2}}{g_{11}} \cdot \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{g}} - \frac{g_{22,1}}{2g_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \psi}{g_{11}} \right) \right) \\ &= \frac{d\psi}{ds} + k_g^{(2)} \sin \psi \cos^2 \psi + k_g^{(1)} \cos^3 \psi + k_g^{(1)} \cos \psi \sin^2 \psi + k_g^{(2)} \sin^3 \psi \end{aligned}$$

Nach einer weiteren Zusammenfassung erhalten wir den

Satz 3.9 (Liouville⁵, 1850). Bilden die Parameterlinien ein orthogonales Netz, dann lässt sich die geodätische Krümmung nach der Formel

$$k_g = \frac{d\psi}{ds} + k_g^{(1)} \cos \psi + k_g^{(2)} \sin \psi \quad (33)$$

berechnen.

Bei der effektiven Bestimmung von k_g wird man jedoch meist auf (30) zurückkommen, woraus nach den Frenetschen Formeln

$$k_g = \mathfrak{N}(P' \times P'') = \mathfrak{N}(\mathfrak{t} + k\mathfrak{n}) = k\mathfrak{N}\mathfrak{b}$$

⁵Joseph Liouville (1809-1882). Seine mathematische Schule brachte u. a. die Frenetschen Formeln hervor.

und somit

$$k_g = k \cos \angle(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \quad (34)$$

folgt. Das lässt sich umdeuten:

Satz 3.10. Die geodätische Krümmung ergibt sich aus der Krümmung nach Multiplikation mit dem Kosinus des Neigungswinkels von Tangential- und Schmiegeebene.

Aufgaben

1. Man zeige, dass für ebene Flächen $P = P(u^1, u^2)$ stets $|k_g| = k$ gilt.

2. Man bestimme die geodätische Krümmung einer logarithmischen Spirale (Abb. 11) mittels (31b).

Anleitung. Nach dem Beispiel (1.15) gilt $\cos \psi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

3. Man zeige, dass in einer Kugelfläche jede Kurve konstanter geodätischer Krümmung ein Kreis ist.

Anleitung. Ist R der Kugelradius, dann gilt $k_n^2 = \frac{1}{R^2}$, so dass k konstant sein muss (warum?). Man zeige abschließend $w = 0$.

4. Man beweise für die Meridiane der Drehflächen $k_g = 0$ nach (32) und ermittle eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der geodätischen Krümmung der Breitenkreise.

Anleitung. Für eine Drehfläche (1.36)

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

gilt $g_{11}=1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = r(u^1)^2$ nach dem Beispiel (2.10), wobei Meridiane und Breitenkreise Parameterlinien sind.

5. Man überprüfe (32.2) sowie

$$k_g^{(1)} = -\frac{d}{ds_2} \ln \sqrt{g_{11}} \quad , \quad k_g^{(2)} = -\frac{d}{ds_1} \ln \sqrt{g_{22}}$$

3.7 Geodätische Linien

Die Geraden sind durch verschwindende Krümmung gekennzeichnet. Da Flächen nur in Ausnahmefällen Geraden enthalten, zeichnen wir in einer Fläche die Kurven verschwindender geodätischer Krümmung als "geradeste" Linien aus:

Definition. Eine Flächenkurve $P = P(u^1(s), u^2(s))$ heißt geodätische Linie oder kurz Geodätische genau dann, wenn $k_g(s) = 0$ für alle s gilt.

Beispiele

(3.11) Geraden. Enthält eine Fläche eine Gerade g , dann ist g eine Geodätische, weil aus $k = 0$ und $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ sofort $k_g = k_n = 0$ folgt. Unter anderem sind die Geraden einer Regelfläche geodätisch.

(3.12) Meridiane der Drehflächen. Für sie ist \mathfrak{b} Tangentenvektor der Breitenkreise, d. h. $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{N}$; aus (34) folgt $k_g = 0$.

Eine andere Begründung ergibt sich daraus, dass ihre Schmiegeebene auf der Tangentialebene senkrecht steht und dass somit $k_g = 0$ nach dem Satz 3.10 gilt. Schließlich führt auch die Feststellung $|k_n| = k$ zur Behauptung $k_g = 0$. Dagegen gilt $k_g = 0$ nur für die Breitenkreise,

deren Tangentialebenen parallel zur Achse sind, z. B. für alle Breitenkreise der Drehzylinderflächen.

Satz 3.11. Jede der folgenden Bedingungen ist für Geodätische kennzeichnend:

- a) $\mathfrak{N}(P' \times P'') = 0$ für alle s ,
- b) $u^{i''} + \Gamma_{jk}^i u^{j'} u^{k'} = 0$ für alle s und $i = 1, 2$.

Beweis. Die Behauptung bezüglich a) ergibt sich unmittelbar aus (29). Wir erinnern an (I.54) und (I.61). Wegen

$$P'' = k_g(\mathfrak{N} \times P') + k_n \mathfrak{N} = (u^{i''} + \Gamma_{jk}^i u^{j'} u^{k'}) P_i + k_n \mathfrak{N}$$

ist $k_g = 0$ gleichbedeutend mit

$$(u^{i''} + \Gamma_{jk}^i u^{j'} u^{k'}) P_i = 0$$

und diese Gleichung wegen $P_1 \nparallel P_2$ mit $u^{i''} + \Gamma_{jk}^i u^{j'} u^{k'} = 0$, $i = 1, 2$, für alle s , w. z. b. w.

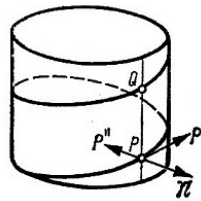


Abb. 13

Beispiel

(3.13) Die Schraubenlinien auf Drehzylindern sind geodätisch, da $\mathfrak{N} \parallel P''$ und somit $\mathfrak{N}(P' \times P'') = -\mathfrak{N}(P'' \times P') = -(\mathfrak{N} \times P'') P' = 0$ ist (Abb 13).

Da die Meridiane und Breitenkreise ebenfalls geodätisch sind, geht von einem Punkt des Drehzylinders in jeder Richtung eine Geodätische. Allerdings ist die Verbindung zweier Punkte durch eine Geodätische nicht eindeutig: Beispielsweise gibt es für zwei Punkte P und Q einer Mantellinie noch unendlich viele sie verbindende Schraubenlinien (Abb. 13).

In der Ebene ist die geradlinige Verbindung zweier Punkte nach der Dreiecksungleichung stets kürzeste Verbindung dieser Punkte. Wie das Beispiel (3.13) lehrt, kann es geodätische Verbindungen zweier Punkte geben, deren Länge nicht minimal ist (Abb. 13). Umgekehrt ist in einer Ebene die kürzeste Verbindung geradlinig. Diese Aussage lässt sich stets verallgemeinern:

Satz 3.12 (Johann Bernoulli, 1697). Eine kürzeste Verbindung zweier Punkte ist stets Teil einer Geodätischen der Fläche $P = P(u^1, u^2)$.

Beweis. Es sei $u^i = u^i(s)$ die Gleichung einer kürzesten Verbindung der Punkte $A_j = P(u^1(s_j), u^2(s_j))$, $j = 1, 2$, d. h., dass ihre Länge das Minimum für die Längen aller A_1 und A_2 verbindenden Kurven ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s_1 < s_2$.

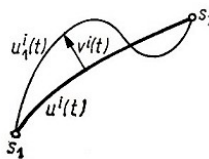


Abb. 14

Wir betrachten zwei dreimal stetig differenzierbare Funktionen $v^1 = v^1(t)$ und $v^2 = v^2(t)$ mit $v^1(s_1) = v^2(s_1) = v^1(s_2) = v^2(s_2) = 0$ und fragen, wann durch (Abb. 14)

$$u_\varepsilon^1(t) := u^1(t) + \varepsilon v^1(t), \quad u_\varepsilon^2(t) := u^2(t) + \varepsilon v^2(t), \quad s_1 \leq t \leq s_2 \quad (35)$$

eine Flächenkurve beschrieben wird. Offenbar gilt $u_0^i(t) = u^i(t)$, d. h., dass für $\varepsilon = 0$ die Kürzeste dargestellt wird; dann ist t nach Voraussetzung sogar natürlicher Parameter. (Da diese Eigenschaft bei dem obigen Ansatz nicht gefordert wird, haben wir den Parameter mit t bezeichnet.)

Für $\varepsilon \neq 0$ ist $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon^i(t)$ dreimal stetig differenzierbar; doch wann gilt $(\dot{u}_\varepsilon^1, \dot{u}_\varepsilon^2) \neq (0, 0)$? Wegen der Äquivalenzen

$$(\dot{u}_\varepsilon^1, \dot{u}_\varepsilon^2) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \dot{P}_\varepsilon := P_i \dot{u}_\varepsilon^i \neq 0 \Leftrightarrow \dot{P}_\varepsilon^2 > 0 \Leftrightarrow g_{ik} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^k > 0$$

genügt es, die Werte der durch (g_{ik}) definierten positiv definiten quadratischen Form zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{ik} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^k &= g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k + 2\varepsilon g_{ik} \dot{u}^i \dot{v}^k + \varepsilon^2 g_{ik} \dot{v}^i \dot{v}^k = 1 + 2\varepsilon g_{ik} \dot{u}^i \dot{v}^k + \varepsilon^2 g_{ik} \dot{v}^i \dot{v}^k \\ &\geq 1 + 2\varepsilon g_{ik} \dot{u}^i \dot{v}^k \geq 1 - 2|\varepsilon| |g_{ik} \dot{u}^i \dot{v}^k| \geq 1 - |\varepsilon| M > 0 \end{aligned}$$

wenn M das Maximum der stetigen Funktion

$$f(t) := 2|g_{ik} \dot{u}^i \dot{v}^k|$$

auf dem abgeschlossenen Intervall $[s_1, s_2]$ bezeichnet und für $M \neq 0$ dann $|\varepsilon| < \frac{1}{M}$ gewählt wird. Es gibt also stets eine Umgebung U_ρ von 0 derart, dass (35) für $\varepsilon \in U_\rho$ eine Flächenkurve beschreibt.

Die Länge l_ε einer Kurve (35) erfüllt nach der Voraussetzung die Ungleichung $l_0 \leq l_\varepsilon$. Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Minimum ist bekanntlich

$$\left. \frac{dl_\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

genauer heißt das

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j} dt \right|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{g_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j \frac{d\dot{u}_\varepsilon^k}{d\varepsilon} + 2g_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \frac{d\dot{u}_\varepsilon^j}{d\varepsilon}}{d} t \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2} (g_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j v^k + 2g_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{v}_\varepsilon^j) dt = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} g_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j v^k dt + g_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{v}_\varepsilon^j \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} (g_{ij} \dot{u}_\varepsilon^i) v^j dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} (g_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j - 2(g_{ik} \dot{u}_\varepsilon^i)) v^k dt \end{aligned}$$

Da $v^1 = v^1(t)$ und $v^2 = v^2(t)$ weitgehend beliebig gewählt werden können - speziell derart, dass der Integrand stets nicht negativ ist -, kann das Integral nur dann verschwinden, wenn

$$g_{ij,k} \dot{u}_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^j - 2(g_{ik} \dot{u}_\varepsilon^i) = 0 \tag{36}$$

gilt.

Für $\varepsilon = 0$ ist der Parameter die Bogenlänge s , so dass wir künftig die Ableitungen mit $'$ statt $\dot{}$ kennzeichnen. Aus (36) folgt

$$\begin{aligned} g_{ij,k} u^i u^j - 2g_{ik} u^i v^j - 2g_{ik} u^i u'' &= 0 \\ g_{tk} \left(u^{t''} + \frac{g^{tr}}{2} (-g_{ij,r} + 2g_{ir,j}) u^i u^j \right) &= 0 \end{aligned}$$

und schließlich nach Multiplikation mit g^{hk} und Summation

$$u^{h''} + \Gamma_{ij}^h u^{i'} u^{j'} = 0$$

für unsere Kürzeste. Nach dem Satz 3.11 ist sie geodätisch, w.z.b.w.

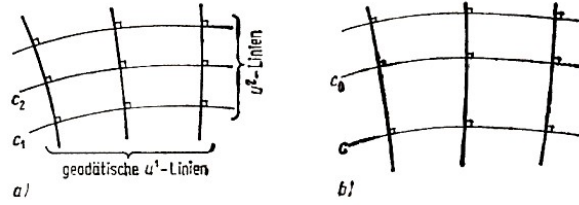


Abb. 15

Wie wir bereits wissen, gilt die Umkehrung des Satzes 3.12 im allgemeinen nicht. Um eine hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit formulieren zu können, erklären wir:

Definition. Das System der Parameterlinien einer Fläche heißt genau dann geodätisch, wenn die u^1 -Linien geodätisch sind und von den u^2 -Linien senkrecht durchsetzt werden (Abb. 15a). Man spricht dann auch von geodätischen Parametern.

Das System der Meridiane und Breitenkreise einer Drehfläche ist z. B. geodätisch.

Satz 3.13. Zwei u^2 -Linien eines geodätischen Parametersystems schneiden aus den u^1 -Linien Stücke gleicher Länge aus (Gauß, 1827). Umgekehrt ergibt diese Eigenschaft bei einem orthogonalen Netz, dass die u^1 -Linien geodätisch sind.

Zusatz. Bei geodätischen Parametern kann o. B. d. A. $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$ angenommen werden.

Folgerung. Sind bei einem geodätischen System der Parameterlinien auch die u^2 -Linien geodätisch, dann lässt sich die Fläche in die Ebene abwickeln.

Beweis. a) Das System der Parameterlinien sei geodätisch. Falls die metrischen Fundamentalgrößen \bar{g}_{ik} , noch nicht die im Zusatz angegebene Gestalt haben, gilt jedoch $\bar{g}_{11,2}$ nach (32.1) und $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{11}(\bar{u}^1)$. Wir nehmen die Parametertransformation

$$u^1 := \int \sqrt{\bar{g}_{11}} d\bar{u}^1, \quad u^2 := \bar{u}^2$$

vor; dabei wird offensichtlich nur die "Nummerierung" der u^2 -Linien geändert. Für die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{g}_{11}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nach (I.2.4A)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\bar{g}_{11}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix; damit gilt

$$\begin{aligned} g_{11} &= P_1^2 = \left(\bar{P}_i \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^1} \right)^2 = \bar{g}_{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}^2} = 1 \\ g_{12} &= P_1 P_2 = \left(\bar{P}_i \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^1} \right) \left(\bar{P}_k \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^2} \right) = \bar{g}_{12} \cdot \frac{f}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \cdot 1 = 0 = g_{21} \\ g_{22} &= P_2 P_2 = \bar{P}_2^2 = \bar{g}_{22} \end{aligned}$$

Damit ist der Zusatz bewiesen. Sind sogar die Voraussetzungen der Folgerung erfüllt, dann kann mit denselben Argumenten wie oben neben $g_{11} = 1$ und $g_{12} = 0$ noch $g_{22} = 1$ erreicht werden, d. h., dass die Fläche in die Ebene (mit kartesischen Koordinaten) abwickelbar ist. Für die Länge l des Kurvenbogens zwischen den u^2 -Linien $u^1 = c_1$ und $u^1 = c_2$ gilt (Abb. 15a)

$$l = \int_{c_1}^{c_2} du^1 = c_2 - c_1$$

b) Für die Umkehrung sei die Berechnung der Bogenlänge unabhängig von u^2 (Abb.15b)

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^2} \int_{c_0}^c \sqrt{g_{11}} du^1 = \int_{c_0}^c \frac{\partial}{\partial u^2} \sqrt{g_{11}} du^1 = \int_{c_0}^c \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} g_{11,2} du^1$$

Folglich ist $g_{11,2} = 0$ und $k_g^{(1)} = 0$ nach (32.1), w. z. b. w.

Wegen des bewiesenen Sachverhaltes werden die u^2 -Linien eines geodätischen Systems von Parameterlinien Parallelkurven, (u^1, u^2) signifikanter geodätische Parallelkoordinaten oder Gaußsche geodätische Parameter genannt. Mit ihrer Hilfe lässt sich eine hinreichende Bedingung für die Umkehrung des Satzes 3.12 formulieren:

Satz 3.14. Sind die (zulässigen⁶) Parameter der einfach zusammenhängenden Fläche $P = P(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in G$, geodätische Parallelkoordinaten und liegen P, Q auf einer u^1 -Linie, dann ist ihr Teil k zwischen P und Q die Kürzeste unter allen Verbindungskurven der Fläche.

Beweis. Es sei $P = P(p, c)$ und $Q = P(q, c)$. Da die Fläche einfach zusammenhängt, ist k durch P und Q eindeutig bestimmt, etwa $k = \{P = P(x, c) : p \leq x \leq q\}$; die Länge von k ist $q - p$.

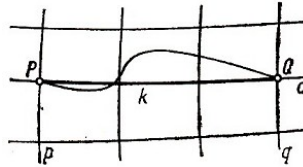


Abb. 16

Für eine Verbindungskurve $u^i = u^i(t)$ der Punkte P und Q (Abb. 16) gelte $u^1(a) = p$, $u^1(b) = q$ sowie $u^2(a) = u^2(b) = 0$. Ihre Länge

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + g_{22}(\dot{u}^2)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{(\dot{u}^1)^2} dt = \int_a^b |\dot{u}^1| dt \geq \int_a^b \dot{u}^1 dt = q - p$$

übertrifft $q - p$; damit ist k eine Kürzeste. Darüber hinaus ist k einzige Kürzeste, denn aus $l = q - p$ folgt erstens $\dot{u}^2 = 0$, d. h. $u^2 = c$ für $a \leq t \leq b$, und zweitens $\dot{u}^1 > 0$ für alle $t \in [a, b]$ wegen $\dot{u}^1 \neq 0$ und $\dot{u}^1 = |\dot{u}^1|$, so dass $u_1 = u^1(t)$, $u^2 = c$ nur eine andere zulässige

⁶In der Literatur findet man häufig eine oberflächliche Zusammenstellung der Voraussetzungen, wird oft nur die Schlichtheit der u^1 -Linien (durch jeden Punkt der Fläche geht genau eine u^1 -Linie) hervorgehoben. Jeder Drehzylinder wird von den Schraubenlinien ein und derselben Ganghöhe schlicht überdeckt, ohne dass solch geodätische Verbindung Kürzeste zu sein braucht. Bei unserer Parameterdarstellung der Kugel müssen Nord- und Südpol ausgeschlossen werden, um die Zulässigkeit zu gewährleisten; danach ist die Fläche wie ein Drehzylinder nicht mehr einfach zusammenhängend (nicht jede geschlossene Kurve lässt sich "stetig auf einen Punkt zusammen ziehen"); es muss nun noch ein Halbmeridian zwischen Nord- und Südpol entfernt werden.

Darstellung von k ist, w. z. b. w.

Beispiele

(3.14) Die Voraussetzungen des Satzes 3.14 im Fall des Drehzylinders.

Die Drehzylinderfläche ist nicht einfach zusammenhängend. Trotzdem lässt sich für jede geodätische Verbindung k zweier Punkte ein derartiges einfach zusammenhängendes Flächenstück F angeben, dass dort diese geodätische Verbindung Kürzeste wird (Abb. 17); bei der Abwicklung in die Ebene geht F in eine Rechtecksfläche über.



Abb. 17

Es brauchen keine neuen Parameter eingeführt zu werden, wenn die geodätische Verbindung Teil einer Mantellinie oder eines Breitenkreises ist. Liegt k in einer Schraubenlinie $P = P(s)$, dann wählen wir die Schraubenlinien derselben Ganghöhe als u^1 -Linien und in F diejenigen Schraubenlinien mit entgegengesetztem Schraubungssinn als u^2 -Linien, die $P = P(s)$ im rechten Winkel treffen. (Außerhalb von F können die u^2 -Linien nur gering verlängert werden, weil sie sonst ein und dieselbe u^1 -Linie mehrfach treffen würden.)

(3.15) Die Kürzesten der Kugel.

Die Voraussetzungen des Satzes 3.14 sind erfüllt, wenn aus der Fläche Nord- und Südpol sowie ein sie verbindender Halbkreis aus der Fläche entfernt werden. Die geodätischen Meridiane sind für ihre Punkte kürzeste Verbindungen; ihre Länge wird durch πR (R Kugelradius) beschränkt. Auf dem durchtrennten Äquator gibt es jedoch geodätische Verbindungen k einer Länge $l > \pi R$ (Abb. 18a). Solche Verbindung k kann jedoch stets durch einen Kleinkreisbogen kleinerer Länge (wegen des kleineren Radius und kleineren Zentriwinkels, Abb. 18b) ersetzt werden. Auf der Kugel ist eine geodätische Verbindung also genau dann Kürzeste, wenn ihre Länge durch πR beschränkt wird.

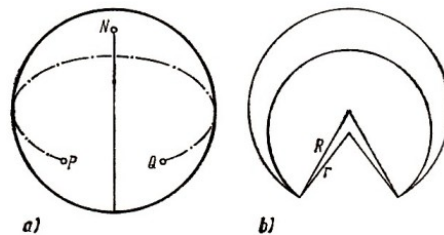


Abb. 18

In Ergänzung des Satzes 3.14 kann man nach Möglichkeiten zur Konstruktion eines geodätischen Systems von Parameterlinien fragen, bei dem eine gegebene Geodätische k eine u^1 -Linie ist. Diese Frage wird im folgenden Abschnitt beantwortet.

Aufgaben

1. Man zeige, dass jede Geodätische in der Kugelfläche Teil eines Großkreises ist (vgl. Aufgabe 3 von Abschnitt 3.6.).
2. Man beweise, dass in einer Zylinderfläche (2) a) alle Mantellinien, b) alle Schnittkurven in den zu den Mantellinien senkrechten Ebenen, c) alle Böschungslinien geodätisch sind.

3. Auf dem Drehzylinder $x^2 + y^2 = r^2$ befindet sich die Schraubenlinie

$$P(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$$

Man ermittle diejenige Schraubenlinie, die $P = P(t)$ im Punkt $(r, 0, 0)$ senkrecht trifft, und berechne alle Schnittpunkte dieser Schraubenlinien.

3.8 Geodätische Parallel- bzw. Polarkoordinaten und die Formel von Bertrand und Puiseux

Die Einführung spezieller Koordinaten in der Fläche $P = P(u^1, u^2)$ hängt wesentlich von der Lösung folgender Aufgabe ab:

Durch einen Punkt P_0 ist eine Geodätische $u^i = u^i(s)$ zu legen, deren Tangentenvektor $P' = P_i u^{i'}(0)$ in P_0 ein gegebener Einheitsvektor \mathfrak{t}_0 ist. Die Lösung stützt sich auf die Theorie der Differentialgleichungen.

Hilfssatz 3.15. Es sei \mathfrak{t}_0 Einheitsvektor der Tangentialebene im Punkt P_0 der Fläche $P = P(u^1, u^2)$. Dann gibt es dreimal stetig differenzierbare Funktionen $u^i = u^i(s)$, $s \in I$, derart, dass $P = P(s) := P(u^1(s), u^2(s))$ eine Geodätische durch P_0 mit dem natürlichen Parameter s ist, die $P_i u^{i'}(0) = \mathfrak{t}_0$ erfüllt. Das Paar $u^1 = u^1(s)$, $u^2 = u^2(s)$ ist eindeutig.

Beweis. Nach dem Satz 3.11b muss eine Lösung $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ die Differentialgleichungen

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (37)$$

erfüllen. Umgekehrt wird in der Theorie der Differentialgleichungen zu den Anfangsbedingungen $P(u^1(0), u^2(0)) = P_0$, $P_i u^{i'}(0) = \mathfrak{t}_0$ die Existenz genau eines Paares $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ von dreimal stetig differenzierbaren Funktionen gesichert, weil die Koeffizienten Γ_{jk}^i stetig differenzierbar sind. Nach dem Satz 3.11b erhalten wir so eine Geodätische, falls t der natürliche Parameter ist, d. h., falls $g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 1$ für alle t gilt. Wir setzen

$$f(t) := g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

um $f(t) = 1$ für alle t zu zeigen. Es gilt

1. $f(0) = g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j(0) = \mathfrak{t}_0^2 = 1$
- 2.

$$\begin{aligned} \dot{f} &= g_{ij,k} \dot{u}^i \dot{u}^j \dot{u}^k + g_{ij} \ddot{u}^i \dot{u}^j + g_{ij} \dot{u}^i \ddot{u}^j = (P_i P_j)_k \dot{u}^i \dot{u}^j \dot{u}^k + g_{rj} \ddot{u}^r \dot{u}^j + g_{ir} \dot{u}^i \ddot{u}^r \\ &= (P_{ik} P_j + P_i P_{jk}) \dot{u}^i \dot{u}^j \dot{u}^k + g_{rj} \ddot{u}^r \dot{u}^j + g_{ir} \dot{u}^i \ddot{u}^r \\ &= (\Gamma_{ik}^r g_{rj} + g_{ir} \Gamma_{jk}^r) \dot{u}^i \dot{u}^j \dot{u}^k + g_{rj} \ddot{u}^r \dot{u}^j + g_{ir} \dot{u}^i \ddot{u}^r \\ &= (\ddot{u}^r + \Gamma_{ik}^r \dot{u}^i \dot{u}^k) g_{rj} \dot{u}^j + \dot{u}^i g_{ir} (\ddot{u}^r + \Gamma_{jk}^r \dot{u}^j \dot{u}^k) = 0 \end{aligned}$$

nach (37), d. h. $f(t) = 1$ für alle t , w. z. b. w.

Für das weitere spielt der folgende Hilfssatz ebenfalls eine große Rolle.

Hilfssatz 3.16. Es sei $P = P(s) = P(s, 0)$ eine Kurve, die von einer Schar von Geodätischen $P = P(s, t)$ mit dem natürlichen Parameter t geschnitten wird. Dann ist das Skalarprodukt $P'(s, t) \dot{P}(s, t)$ von t unabhängig.

Folglich steht die Geodätische $P(s_0, t)$, wenn auf einer, dann auf allen Parallelkurven $P(s, t_0)$ senkrecht (Abb. 19).

Beweis. Es sei $P(s, t) = P(u^1(s, t), u^2(s, t))$. Für die Geodätischen gilt

$$g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 1 \quad , \quad \ddot{u}^r + \Gamma_{jk}^r\dot{u}^j\dot{u}^k = 0 \quad (38)$$

Aus (38-1) folgt

$$g_{ij,k}\dot{u}^i\dot{u}^j\dot{u}^k = 2g_{ij}\dot{u}^i\ddot{u}^j = 0 \quad (38')$$

so dass wir mit Hilfe von (38') und (38.2)

$$\begin{aligned} (g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)' &= g_{ij,k}u^i\dot{u}^j\dot{u}^k + g_{ij}\dot{u}^i\ddot{u}^j + g_{ij}u^i\ddot{u}^j \\ &= g_{ij,k}u^i\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{u}^i\dot{u}^j\dot{u}^k + g_{ir}u^i(-\Gamma_{jk}^r\dot{u}^j\dot{u}^k) \end{aligned}$$

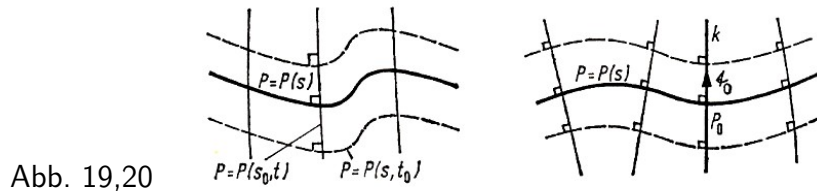


Abb. 19,20

erhalten. Diese Summe verschwindet, denn Umbenennung ergibt

$$\begin{aligned} (g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)' &= \frac{1}{2}(-g_{jk,i} + g_{ki,j} + g_{ij,k})u^i\dot{u}^j\dot{u}^k + g_{ir}\left(-\frac{g^{r\rho}}{2}(-g_{ik,\rho} + g_{k\rho,j} + g_{\rho j,k})u^i\dot{u}^j\dot{u}^k\right) \\ &= \frac{1}{2}(-g_{jk,i} + g_{ki,j} + g_{ij,k})u^i\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{1}{2}\delta_i^\rho(-g_{jk,\rho} + g_{k\rho,j} + g_{\rho j,k})u^i\dot{u}^j\dot{u}^k \\ &= \frac{1}{2}(-g_{jk,i} + g_{ki,j} + g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} - g_{ij,k})u^i\dot{u}^j\dot{u}^k = 0 \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Nunmehr können wir die Konstruktion neuer Parameterlinien erfolgreich in Angriff nehmen:

a) Geodätische Parallelkoordinaten zu gegebener u^1 -Linie k .

Es sei k geodätisch, $P_0 \in k$ und t_0 Tangenteneinheitsvektor von k in P_0 (Abb. 20).

Zunächst wählen wir eine Flächenkurve $P = P(s)$, die in P_0 , auf k senkrecht steht; eine solche Kurve erhalten wir etwa nach dem Hilfssatz 3.15 zu P_0 und $t \times \mathfrak{N}$. Indem wir dann den Hilfssatz 3.15 auf $P(s)$ und $\mathfrak{N} \times P'(s)$ anwenden, erhalten wir eine Schar von Geodätischen, die sämtlich auf $P = P(s)$ senkrecht stehen. Deshalb werden die Parallelkurven zu $P = P(s)$, in Abb. 20 gestrichelt, mit den Geodätischen nach dem Hilfssatz 3.16 ein orthogonales Netz bilden.

Allerdings wird die Schar der Geodätischen nur eine Umgebung U von P_0 schlicht überdecken, nur in einer Umgebung V von P_0 werden je eine Geodätische der Schar und eine Parallelkurve von $P = P(s)$ höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. In $U \cap V$ bilden die Geodätischen der Schar und die Parallelkurven von $P = P(s)$ ein geodätisches System von neuen Parameterlinien; die Parametertransformation ist zulässig.

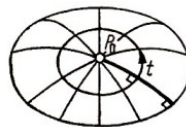


Abb. 21

b) Geodätische Polarkoordinaten.

Es sei P_0 ein beliebiger Punkt der Fläche $P = P(u^1, u^2)$ und ε die Tangentialebene in P_0 . Nach dem Hilfssatz 3.15 existiert durch P_0 in jeder Richtung der Tangentialebene genau eine Geodätische; wir verbinden alle Punkte mit ein und demselben Abstand von P_0 durch einen geodätischen Abstands-⁷ bzw. Entfernungskreis (Abb. 21).

Die Schar der Geodätischen und die Abstandskreise bilden ein orthogonales Netz: Denn ist $P(s, t) = P_0 + sP'(0, t) + s^2\mathfrak{R}$ die Taylorentwicklung von der Geodätischen der durch das Bogenmaß t repräsentierten Richtung (Abb. 20), dann gilt für festen Parameter t

$$|P'(s, t)\dot{P}(s, t)| \leq |\dot{P}(s, t)| = s|\dot{P}'(0, t) + s\dot{\mathfrak{R}}| \rightarrow 0$$

für $s \rightarrow 0$; da $P'(s, t)\dot{P}(s, t)$ nach dem Hilfssatz 3.16 von s unabhängig ist, muss somit $P'(s, t)\dot{P}(s, t) = 0$ bzw. $P'(s, t) \perp \dot{P}(s, t)$ für alle s und t gelten.

Eine Umgebung U von P_0 werden die (auf den natürlichen Parameter s bezogenen) Geodätischen, wenn wir P_0 herausnehmen, schlicht überdecken; in einer Umgebung V von P_0 , werden sich je eine von P_0 ausgehende Geodätische und jeder Abstandskreis in genau einem Punkt treffen. In $U \cap V$ können wir schließlich zu diesem geodätischen System von Parameterlinien übergehen, wobei wir die neuen metrischen Fundamentalgrößen

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$$

mit $u^1 := s$ und $u^2 := t$ erhalten. Dabei müssen wir aber beachten, dass die Parametertransformation in P_0 nicht zulässig ist.

Wegen $\sqrt{g_{22}} = u^1|\dot{P}'(0, u^2) + u^1\dot{\mathfrak{R}}|$, $u^1 > 0$, können wir für $u^1 \rightarrow 0$ einige wichtige Limites gewinnen:

$$\lim_{u^1 \rightarrow 0} \sqrt{g_{22}} = 0 \quad , \quad \lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = 1 \quad (39)$$

$$\lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2} = 0 \quad , \quad \lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\partial^3 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^3} = -K_0 \quad (40)$$

wobei K_0 die Gaußsche Krümmung in P_0 bezeichnet.

Beweis. Die Beziehung (39.1) ist offensichtlich; aus ihr folgt (40.1) nach (20). Es gilt

$$\lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = \lim_{u^1 \rightarrow 0} |\dot{P}'(u^1, u^2) + u^1\dot{\mathfrak{R}}| = |\dot{P}'(0, u^2)|$$

den Betrag des Vektors $\dot{P}'(0, u^2)$ ermitteln wir in der Tangentialebene ε (Abb. 22): Die Einheitsvektoren $P'(0, u^2)$ und $P'(0, u^2 + h)$ schließen einen Winkel der Größe h ein. Nun lässt sich (39.2) wie folgt ermitteln:

$$\lim_{u^1 \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{P'(0, u^2 + h) - P'(0, u^2)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = 1$$

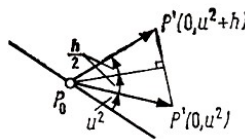


Abb. 22

⁷In Analogie zu dieser Namensbildung könnte man die Parallelkurven von $P = P(s)$ unter a) Abstandslinien nennen. Geodätische Abstandskreise haben im allgemeinen keine konstante geodätische Krümmung. Flächenkurven konstanter geodätischer Krümmung werden geodätische Krümmungskreise genannt; sie sind im allgemeinen nicht geschlossen.

Um (40.2) zu erhalten, gehen wir von (20) aus:

$$\frac{\partial^3 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^3} + \frac{\partial K}{\partial u^1} \sqrt{g_{22}} + K \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} = 0 \quad (41)$$

Beim Grenzübergang $u^1 \rightarrow 0$ ergibt sich nach (39) wie gewünscht (40.2), w. z. b. w.

Da nach (41) auch noch eine weitere Ableitung von $\sqrt{g_{22}}$ nach u^1 existiert, wenn $P = P(u^1, u^2)$ viermal und damit $K = K(u^1, u^2)$ einmal stetig ableitbar ist, können wir für $\sqrt{g_{22}}$ folgende Taylorentwicklung angeben:

$$\sqrt{g_{22}} = u^1 - \frac{K_0}{3!} (u^1)^3 + (u^1)^4(\dots) \quad (42)$$

mit deren Hilfe Umfang U und Flächeninhalt F des Abstandskreises $u^1 = r$ berechnet werden können:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}} du^2 = 2\pi r - \frac{1}{3}\pi K_0 r^3 + r^4(\dots)$$

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{g_{22}} du^1 du^2 = \pi r^2 - \frac{1}{12}\pi K_0 r^4 + r^5(\dots) \quad (44)$$

Indem wir diese Formeln nach K_0 umstellen und r gegen 0 streben lassen, erhalten wir die berühmten Formeln von Bertrand und Puiseux⁸ bzw. Diguet

$$K_0 = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U}{r^3} = \frac{12}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - F}{r^4} \quad (45)$$

Mit diesen Grenzwertformeln wird das Theorema egregium noch einmal ganz augenfällig bestätigt: Wir ermitteln zunächst den Überschuss des Umfangs bzw. des Flächeninhaltes eines Kreises vom Radius r in der Tangentialebene über den Umfang bzw. den Flächeninhalt des geodätischen Abstandskreises vom Radius r .

Da in jedem Fall der Überschuss wie auch die fraglichen Quotienten allein durch Messung in der Fläche ermittelt werden können, gehört K_0 zur inneren Geometrie der Fläche.

Aufgabe

Man beweise, dass die Flächen gleicher konstanter Krümmung lokal isometrisch sind (Minding, 1839), d. h., sind P_0 und \bar{P}_0 Punkte derselben oder verschiedener Flächen konstanter Krümmung K , dann gibt es aufeinander abwickelbare Umgebungen $U(P_0)$ und $U(\bar{P}_0)$.

Anleitung. Wir wählen in P_0 und \bar{P}_0 geodätische Polarkoordinaten, so dass nach (20) folgendes gilt:

- a) $K = \frac{1}{R^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{g_{22}} = a(u^2) \sin \frac{u^1}{R} + b(u^2) \cos \frac{u^1}{R}$
- b) $K = 0 \Rightarrow \sqrt{g_{22}} = a(u^2)u^1 + b(u^2)$
- c) $K = -\frac{1}{R^2} < 0 \Rightarrow \sqrt{g_{22}} = a(u^2) \sinh \frac{u^1}{R} + b(u^2) \cosh \frac{u^1}{R}$.

Nun ist noch (39) zu beachten.

⁸Diese Formeln wurden im Jahre 1848 von Joseph Bertrand (1822-1900) und Victor Alexandre Puiseux (1820-1883) bzw. Diguet gefunden.

3.9 Parallelverschiebung und absolute Ableitungsgleichungen

Für eine Schar von Vektoren (Abb. 9)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = v^i(t)P_i(u^1(t), u^2(t))$$

wobei $\mathbf{v}(t)$ zur Tangentialebene $\varepsilon(t)$ im Punkt $P(u^1(t), u^2(t))$ gehört, hatten wir im Abschnitt 3.3. die absolute Ableitung

$$\frac{D\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_\varepsilon^\perp$$

als tangentialen Teil von $\dot{\mathbf{v}}$ eingeführt. Nach Tullio Levi-Civita (1873 bis 1941) nennen wir Vektoren geodätisch parallel oder längs $P = P(t) = P(u^1(t), u^2(t))$ parallel verschoben genau dann, wenn für alle t

$$\frac{D\mathbf{v}(t)}{dt} = 0 \tag{46}$$

gilt. Für eine Ebene ist (46) gleichbedeutend mit $\dot{\mathbf{v}}(t) = 0$, d. h., $\mathbf{v}(t)$ ist dabei konstant. Für beliebige Flächen hat Levi-Civita 1917 erkannt:

Satz 3.17. Bei einer Parallelverschiebung längs $P = P(t)$ bleiben die Beträge und von Vektoren eingeschlossene Winkel unverändert.

Beweis. Es gelte (46) sowohl für $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ als auch für $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(t)$. Nach der Produktregel für die absolute Differentiation (vgl. Aufgabe 2 zum Abschnitt 3.3.) gilt

$$\frac{D\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{D\mathbf{v}}{dt}\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{D\bar{\mathbf{v}}}{dt} = 0$$

Andererseits wurde absolute Differentiation für eine Ortsfunktion $f = f(u^1, u^2)$ mit der gewöhnlichen Differentiation identifiziert, so dass $(\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}) = 0$ gilt und das Skalarprodukt $\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}$ längs $P = P(t)$ konstant sein muss. Im Fall $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ ergibt das die erste Behauptung, und danach folgt die zweite, w. z. b. w.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von P_1 und P_2 ist (46) nach (15') gleichwertig mit

$$\dot{v}^l + \Gamma_{jk}^l v^j \dot{u}^k = 0 \tag{46'}$$

Ist die Bedingung (46) für die Tangentenvektoren einer Kurve $P = P(s)$ erfüllt, dann kann sie als eine geradeste Kurve oder - nach der Eigenschaft der Tangentenvektoren, selbstparallel zu sein - als eine Autoparallele angesehen werden. Die Bedingung (46') ergibt nach dem Satz 3.11b sofort den

Satz 3.18. Die Geodätischen einer Fläche sind auch ihre geradesten Kurven.

Beispiel

(3.16) Parallelverschiebung längs geschlossener Wege.

Es sei ε die Tangentialebene in einem Punkt P_0 . Jede Parallelverschiebung längs eines geschlossenen Weges durch P_0 ergibt eine Bewegung mit dem Fixpunkt P_0 .

Auf einer Kugel K können wir so gerade alle Drehungen von ε um P_0 realisieren (Abb. 23): Es sei $P_0 = N$.

Wir verschieben längs des Nullmeridians bis zum Äquator, gehen auf ihm bis zum Meridian der geographischen Länge φ und auf ihm zurück zum Nordpol. Dabei erhalten wir eine Drehung mit dem Drehwinkel φ , weil die Orientierung von ε erhalten bleibt. Da auf K jede Parallelverschiebung längs eines geschlossenen Weges durch N die Orientierung von ε erhält, ist jede so erhaltene Bewegung von ε eine Drehung.

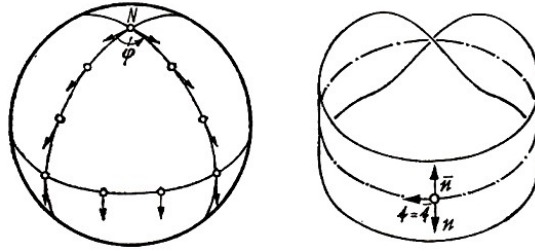


Abb. 23,24

Auf einem Möbiusschen Band⁹ kann die Spiegelung an der Tangente der Mittellinie durch Parallelverschiebung längs der Mittellinie realisiert werden (Abb. 24).

Im Abschnitt 3.6. hatten wir die Frenetschen Formeln der ebenen Kurventheorie kennengelernt. Hier soll nun ihre Verallgemeinerung auf beliebige Flächen dargelegt werden.

In der Fläche $P = P(u^1, u^2)$ sei eine Flächenkurve $u^i = u^i(s)$ gegeben; wir setzen $P(s) := P(u^1(s), u^2(s))$. Die beiden Vektoren $\mathbf{t} := P'(s)$ und $\mathbf{n}_+ := \mathfrak{N}(u^1(s), u^2(s)) \times P'(s)$ gehören zur Tangentialebene $\varepsilon(s)$ im Punkt $P(s)$, wobei

$$\mathbf{t}^2 = 1, \quad \mathbf{t}\mathbf{n}_+ = 0, \quad \mathbf{n}_+^2 = 1 \quad (47)$$

gilt. Hier interessieren wir uns nur für die tangentialen Anteile von \mathbf{t}' und \mathbf{n}'_+ , d. h. für

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n}_+ \quad , \quad \frac{D\mathbf{n}_+}{ds} = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n}_+ \quad (48)$$

Die absolute Differentiation von (47) führt zu

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds}\mathbf{t} + \mathbf{t}\frac{D\mathbf{t}}{ds} = 0, \quad \frac{D\mathbf{t}}{ds}\mathbf{n}_+ + \mathbf{t}\frac{D\mathbf{n}_+}{ds} = 0, \quad \frac{D\mathbf{n}_+}{ds}\mathbf{n}_+ + \mathbf{n}_+\frac{D\mathbf{n}_+}{ds} = 0$$

d. h.

$$a_{11} = \frac{D\mathbf{t}}{ds}\mathbf{t} = 0 = \frac{D\mathbf{n}_+}{ds}\mathbf{n}_+ = a_{22} \quad , \quad a_{21} = \mathbf{t}\frac{D\mathbf{n}_+}{ds} = -\frac{D\mathbf{t}}{ds}\mathbf{n}_+ = -a_{12}$$

Für die Darstellung der Vektoren (48) mit Hilfe des begleitenden Zweibeins $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_+)$, das aus dem Tangentenvektor \mathbf{t} und dem Seitenvektor \mathbf{n}_+ besteht, benötigen wir im wesentlichen an, wobei

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{t}}{ds}\mathbf{n}_+ &= \mathbf{n}_+\frac{D\mathbf{t}}{ds} = (\mathfrak{N} \times \mathbf{t})\frac{D\mathbf{t}}{ds} = (\mathfrak{N} \times P')\frac{DP'}{ds} = (\mathfrak{N} \times P')\left(P'' - \left(P'' - \frac{DP'}{ds}\right)\right) \\ &= (\mathfrak{N} \times P')P'' = k_g \end{aligned}$$

nach (30) gilt, weil $P'' - \frac{DP'}{ds} \parallel \mathfrak{N}$ ist. Zusammenfassend können wir die absoluten Ableitungsgleichungen notieren:

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = k_g\mathbf{n}_+ \quad , \quad \frac{D\mathbf{n}_+}{ds} = -k_g\mathbf{t}$$

sie werden auch Frenetsche Formeln der absoluten Theorie der Flächenkurven genannt.

Aufgaben

1. Man zeige, dass alle von Parallelverschiebungen längs geschlossener Wege durch P_0 erzeugten Bewegungen der Tangentialebene in P_0 eine Gruppe bilden, die sogenannte Holonomiegruppe.
2. Man beweise, dass die Holonomiegruppe der Ebene und aller in die Ebene abwickelbarer Flächen nur aus der identischen Drehung besteht.

⁹Möbius, August Ferdinand (1790-1868).

3.10 Abbildungen von Flächen

Die Darstellung der Erdoberfläche auf ebenen Karten zeigt uns die Notwendigkeit, Abbildungen einer Fläche auf andere zu studieren. Für den Anwender ist ein Bild, bei dem alle (Bogen-) Längen unverändert bleiben, besonders einfach zu handhaben; solche Abbildung setzt Abwikelbarkeit voraus.

Selbst wenn wir noch die maßstäbliche Verkleinerung zulassen, können wir zwar die Erdoberfläche mit invarianten Längenverhältnissen auf einen Globus abbilden, aber nie in die Ebene (der Krümmung $K = 0$).

Wir werden folglich für ebene Karten überprüfen, ob sich schwächere Forderungen wie Winkel-treue - man denke an einen festen Kurs bei der Seefahrt - oder Flächentreue realisieren lassen. Zunächst kommt es darauf an, dass wir diese Forderungen in der Sprache der Flächentheorie formulieren, um die bereits entwickelte Theorie zur Lösung der aufgeworfenen Probleme nutzen zu können.

Wir betrachten eine Abbildung α einer Fläche $P = P(u^1, u^2)$ in eine Fläche $\bar{P} = \bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$. Ist $\bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ das Bild von $P(u^1, u^2)$, dann sind seine Parameter Funktionen von u^1 und u^2 , d. h.

$$\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2) \quad , \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) \quad (49)$$

um wenigstens im Kleinen eindeutige Umkehrbarkeit zu sichern, werden wir die Existenz einer von null verschiedenen Funktionaldeterminante voraussetzen. Dann ist

$$\bar{P}(u^1, u^2) := \bar{P}(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) \quad (50)$$

eine Darstellung der Bildfläche mit $P(u^1, u^2)^\alpha = \bar{P}(u^1, u^2)$ für alle (u^1, u^2) . Dabei gilt $\bar{P}_i = \bar{P}_r \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^i}$ und

$$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{rs} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^j} \quad (50')$$

Diese Formel werden wir im Anhang benutzen.

Beispiel

(3.17) Netzentwurf von Sanson und Flamsteed¹⁰.

Die Bilder der Längen- bzw. Breitenkreise der Kugel, der u^1 - bzw. u^2 -Linien (vgl. Beispiel (3.1)), werden durch

$$\bar{u}^1 = u^2 \sin \frac{u^1}{R} \quad , \quad \bar{u}^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{u^1}{R}$$

dargestellt (Abb. 25). Folglich sind die Bilder der Meridiane Sinuslinien mit Nullstellen in den Bildern der Pole; die Breitenkreise gehen in Strecken über, die parallel zur \bar{u}^1 -Achse verlaufen.

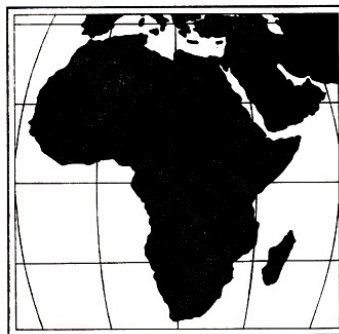


Abb. 25

¹⁰Er wurde 1650 von Nikolaus Sanson (1600-1667) angegeben. John Flamsteed (1646-1719) war erster Direktor der Sternwarte Greenwich, die auf seinen Vorschlag hin gegründet wurde.

Im folgenden vergleichen wir die Länge eines Kurvenstückes mit der Gaußschen Parameterdarstellung $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ mit der Länge des Bildes

$$\frac{\bar{s}}{s} = \frac{\int^t \sqrt{\bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} d\tau}{\int^t \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} d\tau}$$

bzw. die Längenverzerrung $\lambda = \frac{d\bar{s}}{ds}$ in der Richtung (u^1, u^2) . Sie hat eine besonders einfache Darstellung, wenn t natürlicher Parameter s der Originalkurve ist:

$$\lambda = \sqrt{\bar{g}_{ij} u^{i'} u^{j'}} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^2 = \bar{g}_{ij} u^{i'} u^{j'}$$

Wie im Zusammenhang mit der Bestimmung der Hauptkrümmungen - vgl. Abschnitt 1.2.7. - können wir in einem festen Punkt $\lambda = \lambda(\tau)$ als Funktion der durch τ charakterisierten Richtung auffassen und nach deren Extremwerten, die (da λ stets positiv ist) gleichzeitig die Extremwerte von λ , die Hauptverzerrungen, sind. Mit den gleichen Überlegungen wie in Abschnitt 1.2.7. mit \bar{g}_{ij} , statt L_{ij} erhalten wir im betrachteten Punkt:

- a) λ^2 ist genau dann konstant, wenn $(\bar{g}_{ij}) = \lambda^2(g_{ij})$ gilt.
- b) Wenn λ^2 nicht konstant ist, gibt es genau zwei Richtungen extremaler Längenverzerrung, die Hauptverzerrungsrichtungen.
- c) Die Hauptverzerrungsrichtungen stehen aufeinander senkrecht.
- d) Die Extremwerte von $\lambda^2 = \lambda^2(\tau)$ sind Lösungen der Gleichung

$$\lambda^4 - \lambda^2 \frac{1}{g} (g_{11} \bar{g}_{22} + g_{22} \bar{g}_{11} - 2g_{12} \bar{g}_{21}) + \frac{\bar{g}}{g} = 0$$

e) Gehören zu den orthogonalen Hauptverzerrungsrichtungen τ_1 und τ_2 ($\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$) die Hauptverzerrungen λ_1 bzw. λ_2 und gilt in der Tangentialebene des Originalpunktes $\tau = \cos \varphi \tau_1 + \sin \varphi \tau_2$, dann lässt sich die Längenverzerrung in der Richtung t nach der Formel

$$\lambda^2 = \cos^2 \varphi \lambda_1^2 + \sin^2 \varphi \lambda_2^2 \tag{51}$$

berechnen.¹¹

Für die Umkehrabbildung α^{-1} , die in einer Umgebung des betrachteten Punktes P existiert, ist $\bar{\lambda} = \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{\lambda}$ die Längenverzerrung. Aus (51) folgt mit $x := \bar{\lambda} \cos \varphi$ und $y := \bar{\lambda} \sin \varphi$

$$1 = \frac{(\bar{\lambda} \cos \varphi)^2}{\bar{\lambda}_1^2} + \frac{(\bar{\lambda} \sin \varphi)^2}{\bar{\lambda}_2^2} = \frac{x^2}{\bar{\lambda}_1^2} + \frac{y^2}{\bar{\lambda}_2^2}$$

d. h., dass das Urbild des Einheitskreises \bar{k} in der Tangentialebene von \bar{P} in der Tangentialebene von P eine Ellipse ist, eine Tissotsche Indikatrix (Abb. 26a). Da analog zu (51)

$$\bar{\lambda}^2 = \cos^2 \bar{\varphi} \bar{\lambda}_1^2 + \sin^2 \bar{\varphi} \bar{\lambda}_2^2, \quad \bar{\tau} = \cos \bar{\varphi} \bar{\tau}_1 + \sin \bar{\varphi} \bar{\tau}_2$$

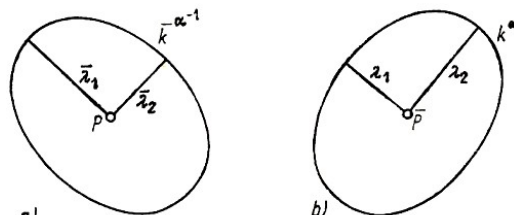


Abb. 26 a)

¹¹Dieses Analogon zum Satz von Euler wurde 1881 von Nicolas Auguste Tissot (1824-1904) gefunden. In einem umfassenden Werk wurden von ihm die Netzentwürfe geographischer Karten behandelt.

gilt, gibt es in der Tangentialebene von \bar{P} eine Ellipse mit den Halbachsen λ_1 und λ_2 als Tissotsche Indikatrix (Abb. 26 b). Nach dem Vorbild der (Haupt-) Krümmungslinien können schließlich Hauptverzerrungslinien (Tissotsche Hauptlinien), deren Tangenten stets Hauptverzerrungsrichtungen sind, eingeführt werden.

Die Tissotschen Indikatrices vermitteln sofort anschauliche Vorstellungen spezieller Abbildungen von Flächen $P = P(u^1, u^2)$ und $\bar{P} = \bar{P}(u^1, u^2)$ gemäß (50):

a) Isometrische Abbildungen oder Abwicklungen. Für alle (u^1, u^2) gilt

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} \quad (52a)$$

Hier sind die Tissotschen Indikatrices Einheitskreise.

Im wesentlichen isometrisch sind die

b) Ähnlichkeitsabbildungen. Bei ihnen werden alle Längen mit einem konstanten positiven Faktor c multipliziert, d. h.

$$\bar{g}_{ij} = c g_{ij} \quad (52b)$$

Die Tissotsche Indikatrix in den Tangentialebenen der Bildfläche ist ein Kreis mit dem Radius c . Für $c = 1$ haben wir eine isometrische Abbildung, für $c \neq 1$ eine eigentliche Ähnlichkeitsabbildung.

c) Winkeltreue oder konforme¹² Abbildungen. Die Winkeltreue ist nach (1.48) gleichbedeutend mit

$$\frac{g_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{g_{ij}\eta^i\eta^j}} = \cos \angle(x, y) = \cos \angle(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{g}_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{\bar{g}_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{\bar{g}_{ij}\eta^i\eta^j}}$$

insbesondere ist die Orthogonalität invariant. Gilt $g_{12} = g_{21} = 0$, dann muss auch $\bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0$ sein; ist etwa $(1, 1) \perp (\eta^1, \eta^2) \neq 0$, dann gilt

$$g_{ij}\xi^i\eta^j = g_{11}\eta^1 + g_{22}\eta^2 = 0 = \bar{g}_{ij}\xi^i\eta^j = \bar{g}_{11}\eta^1 + \bar{g}_{22}\eta^2$$

d. h. $\bar{g}_{ij} = c g_{ij}$. Andernfalls sei $(1, 0) \perp (\eta^1, \eta^2)$; wegen

$$g_{11}\eta^1 + g_{12}\eta^2 = 0 = \bar{g}_{11}\eta^1 + \bar{g}_{12}\eta^2$$

gilt zunächst $\bar{g}_{1i} = c_1 g_{1i}$. Entsprechend erhalten wir noch $\bar{g}_{2j} = c_2 g_{2j}$ und mit $c_1 g_{12} = \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = c_2 g_{21}$ noch $c_1 = c_2$. Aus der Invarianz der Orthogonalität ergibt sich in jedem Fall

$$\bar{g}_{ij} = c(u^1, u^2) g_{ij} \quad (52c)$$

mit $c(u^1, u^2) > 0$. Wie man leicht sieht, folgt umgekehrt aus (52c) die Winkeltreue, so dass (52c) für winkeltreue Abbildungen kennzeichnend ist.

Die Tissotschen Indikatrices in den Tangentialebenen der Bildfläche sind Kreise vom Radius $\sqrt{c(u^1, u^2)}$; dabei ist $c = c(u^1, u^2)$ nur im Fall der Ähnlichkeitsabbildung konstant. Die Winkeltreue ist für Seekarten ausschlaggebend.

d) Inhaltstreue (oder flächentreue) Abbildungen. Aus der Gleichheit von Flächeninhalten

$$\int_B \int \sqrt{g} du^1 du^2 = \int_B \int \sqrt{\bar{g}} du^1 du^2$$

¹²Dieser Name wurde 1844 von Gauß eingeführt.

für alle B folgt

$$\bar{g} = g \tag{52d}$$

und umgekehrt. Tissotsche Indikatrix und Einheitskreis stimmen im Flächeninhalt überein; da eine Ellipse mit a, b als den Halbachsenlängen den Flächeninhalt πab hat, müssen die Hauptverzerrungen reziprok zueinander sein (Abb. 27).

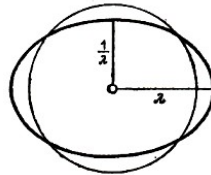


Abb. 27

Im wesentlichen inhaltstreu oder flächentreu sind Abbildungen, die der Gleichung

$$\bar{g} = c^2 g \tag{52e}$$

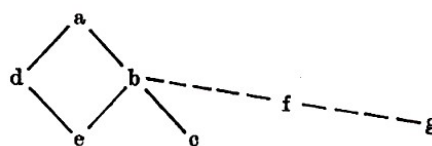
mit einem konstanten Faktor $c^2 > 0$ genügen. Somit sind die Verhältnisse von Flächeninhalten invariant. Diese Eigenschaft wird überwiegend für Landkarten angestrebt.

Angesichts der Forderungen (52 a-e) ist es naheliegend, Abbildungen mit

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \tag{52f}$$

zu betrachten; sie werden affin genannt. Nach dem Satz 3.11b gehen dabei Geodätische in Geodätische über. Schließlich heißen Abbildungen, bei denen das Bild einer Geodätischen geodätisch (52 g) ist, geodätisch.

Offenbar hat jede isometrische Abbildung auch die Eigenschaften b bis g, jede Ähnlichkeit die Eigenschaften c und e bis g. Wie man leicht sieht, folgt a aus b und d, b entsprechend aus c und e. Der logische Zusammenhang der Eigenschaften kann graphisch wie folgt deutlich gemacht werden:



Es lässt sich noch zeigen, dass sich b aus c und g ergibt (vgl. die schwächere Behauptung in der folgenden Aufgabe). Bezüglich der Verträglichkeit von $\neg b, c, e$ und g wollen wir ohne Beweis nur bemerken, dass sie davon abhängt, ob die Flächen in die Ebene abwickelbar sind oder nicht.

Für die Darstellung der Erdoberfläche sind im wesentlichen isometrische und flächentreue Abbildungen (Globen bzw. politische oder statistische Landkarten) sowie die winkeltreuen Abbildungen (Seekarten) die häufigsten Sonderformen. Um eine Übersicht über alle möglichen flächen- bzw. winkeltreuen Abbildungen zu erhalten, können aus e bzw. c Differentialgleichungen für geeignete Parameterlinien aufgestellt und ihre Lösbarkeit diskutiert werden.

Wir wollen uns damit begnügen, im Anhang die üblichen Netzentwürfe für Atlanten anzugeben und auf die Eigenschaften a bis g hin zu untersuchen.

Aufgabe

Man zeige, dass jede konforme und affine Abbildung im wesentlichen isometrisch ist. Anleitung. Man berechne für eine konforme Abbildung die Christoffelsymbole, um nach (52 f)

$$0 = \frac{g^{hr}}{2c}(-c_r g_{ij} + c_i g_{jr} + c_j g_{ri}) = -\frac{g^{hr} c_r}{2c} g_{ij} + \frac{c_i \delta_j^h + c_j \delta_i^h}{2c}$$

zu erhalten. Für $h \neq i = j$ lässt sich die äquivalente Gleichung

$$\frac{\partial c}{\partial u^r} = c_r = 0$$

herleiten, nach der $c = c(u^1, u^2)$ konstant sein muss.

3.11 Anhang. Kartennetzentwürfe

Vor dem Zeitalter der Sputniks und Raumschiffe konnte die Gestalt der Erde nur auf der Grundlage von Messungen auf ihrer Oberfläche bestimmt werden. Die Justierung der Messgeräte erfolgt mit Hilfe von Loten oder Flüssigkeitslibellen und damit letzten Endes mit Hilfe der Schwerkraft.

Auf der ruhend gedachten Oberfläche der Weltmeere ist die Richtung eines physikalischen Lotes in jedem Punkt Flächennormale (= mathematisches Lot), d. h., dass diese Oberfläche Teil einer Niveaufläche des Schwerepotentials ist, welche Geoid genannt wird. Das Geoid ist annähernd ein Rotationsellipsoid

$$P = (A \sin \vartheta \cos \varphi, A \sin \vartheta \sin \varphi, B \cos \vartheta)$$

das mittlere Erdellipsoid. Dabei gilt $(A - B) : A = 1 : 298, 25$.

Die Abweichung von Geoid und mittlerem Erdellipsoid, die mitunter kartenmäßig festgehalten wird, liegt überall weit unter 100 m. Trotzdem spielt das Geoid bei großmaßstäbigen Vermessungen und für Berechnungen in der Raketentechnik eine wichtige Rolle, da seine Grundlage die Schwerkraft bildet, die von der Verteilung und Dichte der Massen abhängt.

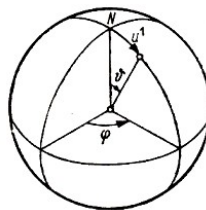


Abb. 28

Im folgenden werden wir wegen der (im Sinne unserer Zielstellung) geringen Abweichungen von Geoid und mittlerem Erdellipsoid beide durch eine Erdkugel mit dem Radius $R \approx 6370$ km ersetzen, obwohl $A - B$ rund 21,476 km beträgt.

Für die Parameterdarstellung einer Kugelfläche sind wir von Polarkoordinaten, von Polabstand ϑ und Azimut φ ausgegangen. Um auf den Meridianen den natürlichen Parameter zu erhalten, wurde $u^1 = R\vartheta$ und $u^2 = \varphi$ mit $0 < \vartheta < \pi$ und $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ gesetzt (Abb. 28);

$$P(u^1, u^2) = (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta)$$

ergibt nach Beispiel (3.1)

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \vartheta$$

Wenn wir bei den in der Kartographie üblichen Breiten- und Längenangaben "nördlich" bzw. "östlich" mit "+" und "südlich" bzw. "westlich" mit "-" identifizieren, dann ist $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ die Breite und φ die Länge.

In der Kartographie wird das Gradnetz einer Kugel (oder eines an den Polen abgeplatteten Rotationsellipsoides) entweder auf eine Tangentialebene (Abb. 29 bis 32 a) oder zunächst auf eine Drehkegel- bzw. -zylinderfläche abgebildet, deren Achse durch den Kugelmittelpunkt geht, um sie dann längs einer Mantellinie aufzuschneiden und in die Ebene abzuwickeln (vgl. etwa Abb. 35); somit haben wir am Kartenrand im allgemeinen keine Stetigkeit.

Bei der Abbildung enthält jede Ebene durch den Berührungsradius g bzw. die Kegel- oder Zylinderachse g neben einem Großkreis auch dessen Bild; von den Bildern der Kleinkreise in den zu g senkrechten Ebenen wird verlangt, dass ihre Bilder konzentrische Kreise bzw. Geraden werden (vgl. z. B. Abb. 30 und 35).

Einige mathematisch abgeleitete Netzentwürfe, die noch eine der eben beschriebenen Eigenschaften besitzen (z. B. konzentrische Kreise als Bilder der oben beschriebenen Kleinkreise, vgl. Abb. 32b und 33), werden in diesem Sprachgebrauch als "unechte" Azimutal-, Kegel- bzw. Zylinderentwürfe klassifiziert. In der Kartographie wird oft allgemein von "Projektionen" gesprochen, obwohl nur einige der Abbildungen Parallel- bzw. Zentralprojektionen sind. Ganz und gar verwerflich ist es, von "längentreuer Projektion" zu sprechen, wenn etwa nur die Meridiane längentreu abgebildet werden.

Im folgenden geben wir einige Beispiele, wobei wir statt \bar{u}^1, \bar{u}^2 hier x, y oder r, φ bei kartesischen bzw. Polarkoordinaten der Ebene schreiben.



Abb. 29

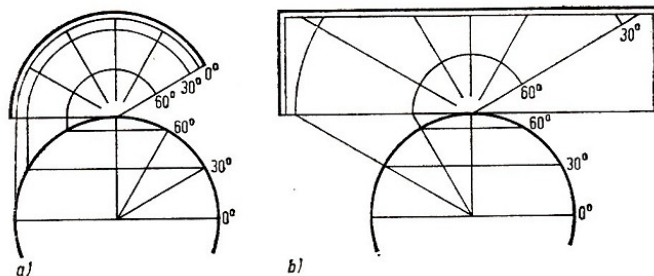


Abb. 30

a) Orthographischer Entwurf

Er entsteht wie in der darstellenden Geometrie bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Tangentialebene, die hier auch orthographische Projektion genannt wird (Abb. 29). Man findet leicht, dass die Abbildung weder winkeltreu (52 c) noch flächentreu (52 e) ist. Da Großkreise,

die nicht durch den Berührungspunkt von Kugel und Tangentialebene gehen, auf Ellipsen abgebildet werden, ist die senkrechte Parallelprojektion auch nicht geodätisch (52g). Somit besitzt sie keine der Eigenschaften a bis g (vgl. Abb. 30a).

b) Gnomonischer Entwurf

Er ist das Ergebnis der Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt auf eine Tangentialebene (Abb. 30b). Weil jeder Großkreis in eine Gerade projiziert wird, ist diese Abbildung geodätisch.



Abb. 31

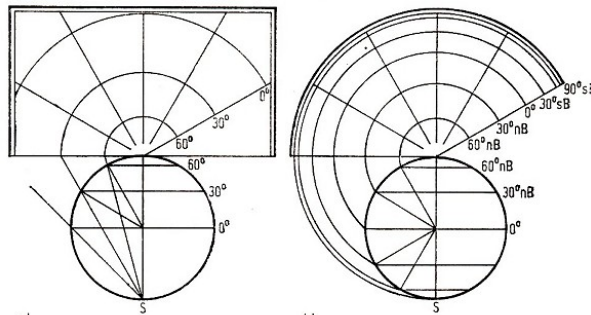


Abb. 32

c) Stereographischer Entwurf

Ist P der Berührungspunkt von Kugel und Tangentialebene ε , so liefert die Zentralprojektion vom Gegenpol Q des Punktes P auf ε (stereographische Projektion) den stereographischen Entwurf als Bild des Gradnetzes (Abb. 31). Für die Polarkoordinaten erhalten wir (Abb. 32 a)

$$r = 2R \tan \frac{\vartheta}{2} = 2R \tan \frac{u^1}{2R}$$

neben $\bar{u}^2 = \varphi = u^2$. Aus den metrischen Fundamentalgrößen der Ebene in Polarkoordinaten (vgl. (1.2.12'))

$$\bar{g}_{11}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = 1, \quad \bar{g}_{12}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = 0, \quad \bar{g}_{22}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = r^2$$

erhalten wir nach (50')

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11}(u^1, u^2) &= \bar{g}_{11}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \left(\frac{\partial r}{\partial u^2} \right)^2 + 2\bar{g}_{12}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \frac{\partial r}{\partial u^1} + \bar{g}_{22}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right)^2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{u^1}{2R}} \\ \bar{g}_{12}(u^1, u^2) &= \bar{g}_{11}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \frac{\partial r}{\partial u^1} \frac{\partial r}{\partial u^2} + \dots + \bar{g}_{22}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} = 0 \\ \bar{g}_{22}(u^1, u^2) &= \bar{g}_{11}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \left(\frac{\partial r}{\partial u^1} \right)^2 + \dots + \bar{g}_{22}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right)^2 = \left(2R \tan \frac{u^1}{2R} \right)^2 \end{aligned}$$

so dass schließlich

$$\bar{g}_{22}(u^1, u^2) = \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} \left(4R^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} R^2 \sin^2 \vartheta$$

folgt. Wir haben

$$\bar{g}_{ij}(u^1, u^2) = c(u^1, u^2) g_{ij}(u^1, u^2), \quad c(u^1, u^2) = \frac{1}{\cos^4 \frac{u^1}{2R}}$$

d. h., dass diese Abbildung winkeltreu ist.

Eine weitere Eigenschaft der stereographischen Projektion ist ihre Kreistreue: Das Bild eines Kreises der Kugelfläche ist wieder ein Kreis oder eine Gerade und umgekehrt.

a) Wir betrachten einen Kreis k in der Kugelfläche und die Kegel- bzw. Zylinderfläche, die die Kugel in k berührt. Die Mantellinien stehen auf k senkrecht, ihre Bilder bilden ein Geradenbündel, das wegen der Winkeltreue von \bar{k} senkrecht durchsetzt wird; \bar{k} ist folglich ein Kreis, wenn sich die Bilder der Mantellinien in einem Punkt M treffen, oder eine Gerade, wenn sie untereinander parallel sind.

b) Die Umkehrung kann gezeigt werden, indem von einem Kreis oder einer Geraden der Tangentialebene drei Punkte und durch ihre Urbilder ein Kreis k betrachtet werden. Man begründe die Behauptung mit Hilfe von a).

d) Lambertscher Azimutalentwurf

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) befasste sich während seiner 1765 beginnenden Tätigkeit an der Berliner Akademie u. a. mit Entwürfen mathematisch exakter Karten. Dabei gab er 1772 eine winkeltreue Verallgemeinerung der stereographischen Projektion, aber auch folgenden inhaltstreuen Azimutalentwurf an (Abb. 32b):

$$r = 2R \sin \frac{\vartheta}{2} = 2R \sin \frac{u^1}{2R}, \quad \varphi = u^2$$

bei dem die Kugeloberfläche ($F = 4\pi R^2$) auf einen Kreis vom Radius $2R$ abgebildet wird. Wegen

$$\bar{g}_{11}(u^1, u^2) = \cos^2 \frac{u^1}{2R}, \quad \bar{g}_{12}(u^1, u^2) = 0, \quad \bar{g}_{22}(u^1, u^2) = r^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{u^1}{2R}$$

erhalten wir mit

$$\bar{g} = 4R^2 \sin^2 \frac{u^1}{2R} \cos^2 \frac{u^1}{2R} = 2R^2 \left(2 \sin \frac{u^1}{2R} \cos \frac{u^1}{2R} \right)^2 = R^2 \sin^2 \frac{u^1}{2R} = g$$

die behauptete Inhaltstreue.

Die folgenden Entwürfe e) bis h) sind ebenfalls flächentreu:

e) Bonnescher Entwurf

Der Entwurf in Abb. 33 ist ein "unechter" Kegelentwurf. Er wurde schon um 150 u. Z. von Klaudios Ptolemaios (85-165) in Alexandria und 1514 von Johann Werner (1468-1528) und Johann Stab (gest. 1522) benutzt, die Flächentreue hat Rigobert Bonne (1727-1795) erkannt

und 1752 eine Abbildungsvorschrift angegeben, die in unserer Bezeichnungsweise folgendes Aussehen hat:

$$r = u^1 - u_0^1 \quad , \quad \varphi = \frac{u^2 \sin \frac{u^1}{R}}{u^1 - u_0^1}$$

Ihre Flächentreue erkennen wir folgendermaßen: Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u^1} & \frac{\partial r}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

die Funktionalmatrix, dann gilt

$$(\bar{g}_{ij}(u^1, u^2)) = B^T A B \quad , \quad \bar{g} = |A| \cdot |B|^2$$



Abb. 33

Wegen $|B| = \frac{1}{r} \sin \frac{u^1}{R}$ haben wir schließlich

$$\bar{g} = r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \sin^2 \frac{u^1}{R} = \sin^2 \frac{u^1}{R} = \frac{1}{R^2} g$$

Auf Befehl Napoleons wurde die Generalstabskarte Frankreichs auf der Grundlage dieses Entwurfes ausgeführt; auch heute werden Karten noch verbreitet auf dieser Grundlage hergestellt. Wegen $r = u^1 - u_0^1$ sind die Bilder der Breitenkreise konzentrische Kreise der Karte.

f) Entwurf von Samson und Flamsteed

Wegen der Abbildungsvorschrift

$$x = u^2 \sin \frac{u^1}{R} \quad , \quad y = \frac{\pi}{2} - \frac{u^1}{R}$$

erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{u^2}{R} \cos \frac{u^1}{R} & -\frac{1}{R} \\ \sin \frac{u^1}{R} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \sin \frac{u^1}{R}$$

die Flächentreue ergibt sich wie folgt:

$$\bar{g} = \frac{1}{R^2} \sin^2 \frac{u^1}{R} = \frac{1}{R^4} g$$

g) Mollweidescher Entwurf

Soll die Halbkugel $-\frac{\pi}{2} \leq u^2 \leq \frac{\pi}{2}$ auf die Fläche des Kreises

$$x = \sqrt{2}R \cos t, \quad y = \sqrt{2}R \sin t$$

und die ganze Oberfläche auf die Fläche der Ellipse mit den Halbachsen $a = 2\sqrt{2}R$, $b = \sqrt{2}R$ abgebildet werden, dann kann das nach Karl Branden Mollweide (1774-1825, 1805) mit Hilfe der Abbildungsgleichungen

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R u^2 \cos t, \quad y = \sqrt{2}R \sin t, \quad \pi \cos^2 \frac{u^1}{R} = 2t + \sin 2t$$

geschehen (Abb. 34a).

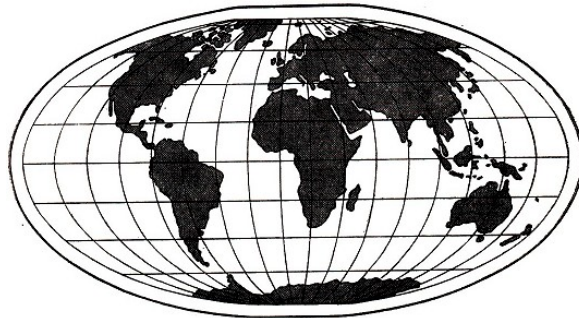


Abb. 34a

Diese Abbildung ist wegen

$$\begin{aligned} \bar{g} &= |A||B|^2 = |B|^2 = \left| \sqrt{2}R \cos t \frac{\frac{\partial x}{\partial u^1}}{\frac{dt}{du^1}} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \cos t \right|^2 = \left(-\frac{4R^2}{\pi} \cos^2 t \frac{dt}{du^1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{4R^2}{\pi} \cos^2 t \frac{\pi \sin \frac{u^1}{R}}{R(2 + 2 \cos 2t)} \right)^2 = \left(R \sin \frac{u^1}{R} \cdot \frac{2 \cos^2 t}{1 + \cos 2t} \right)^2 = R^2 \sin^2 \frac{u^1}{R} = g \end{aligned}$$

inhaltstreu.

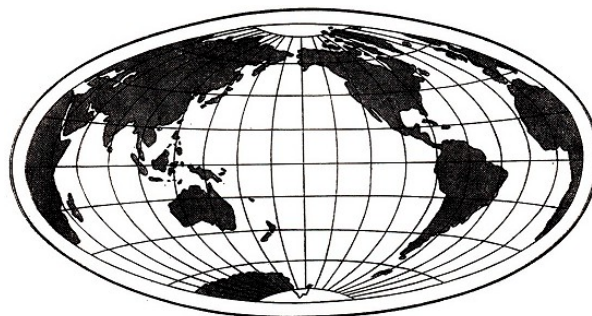


Abb. 34b

Der Mollweidesche Entwurf kann mit Hammers¹³ flächentreuen Planisphäre (Abb. 34b) verglichen werden:

Wird ein Punkt \bar{N} des Äquators als neuer Pol gewählt, so hat jeder Punkt der Kugel einen neuen Polabstand $\bar{\vartheta}$ bzw. Azimut $\bar{\varphi}$. Gemäß d) ergibt das in der Tangentialebene von \bar{N}

$$\bar{r} = 2R \sin \frac{\bar{\vartheta}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = 2R \sin \frac{\bar{\vartheta}}{2} \cos \bar{\varphi}, \quad \bar{y} = 2R \sin \frac{\bar{\vartheta}}{2} \sin \bar{\varphi}$$

¹³Ernst Hammer (1858-1925).

Die Modifikation dieses Lambertschen (äquatorialen) Azimutalentwurfes durch Hammer besteht in der anschließenden Abbildung

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x, y) = (2\bar{x}, \bar{y})$$

die noch flächentreu ist. Nach Sinus- und Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie gilt dabei

$$\cos \bar{\vartheta} = \sin \frac{u^1}{R} \cos u^2, \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{\cos \frac{u^1}{R}}{\sin \vartheta}$$

h) Entwurf von Archimedes (287-212 v. u. Z.) und Lambert

Legen wir um die Kugel eine Zylinderfläche derart, dass sie den Äquator enthält, und projizieren wir die Oberfläche der Kugel auf den Zylinder (Abb. 35 a), dann gilt nach der Abwicklung in die Ebene

$$x = Ru^2, \quad y = R \cos \frac{u^1}{R}$$

Die Seitenlängen des Bildbereiches sind $2\pi R$ und $2R$ (Abb. 35 b). Auch hier ergibt die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin \frac{u^1}{R} \\ R & 0 \end{vmatrix} = R \sin \frac{u^1}{R}$$

wegen

$$\bar{g} = R^2 \sin^2 \frac{u^1}{R} = g$$

sofort die Inhaltstreue. Dieser Entwurf ist in Lamberts "Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" (1765-1772) enthalten; in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften wurde u. a. der Teil "Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten" nachgedruckt.

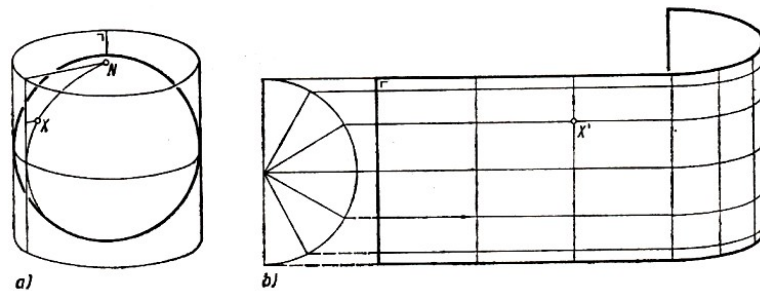


Abb. 35a,b

Auch heute noch kann die von Gerhard Kremer (1512-1594) im Jahre 1569 veröffentlichte Weltkarte (Abb. 36) als faszinierendes Beispiel für den menschlichen Erfindergeist gelten. Ihre Abbildungsgleichungen gab 1645 Henry Bond (1600-1678), ihre mathematische Fundierung erfolgte gar erst 1666 durch Nikolaus Kauffmann (lat. Mercator, 1620-1687) und 1695 durch Edmund Halley (1656-1742). Da die lateinisierte Form von Kremer Mercator lautet, spricht man allgemein vom

i) Mercatorentwurf

Bei ihm hängen die kartesischen Koordinaten folgendermaßen von unseren Parametern u^1, u^2 der Kugel ab (Abb. 35):

$$x = Ru^2, \quad y = R \ln \cot \frac{u^1}{2R}$$

Offenbar ist das Bild der Kugel­fläche ein Streifen der Breite $2\pi R$.

Wie beim Entwurf von Archimedes und Lambert gehen Breiten- und Längenkreise in Parallelen zu den Koordinatenachsen über. Doch was hat diesen Entwurf so berühmt gemacht, warum ist er noch heute die Grundlage der Seekarten?

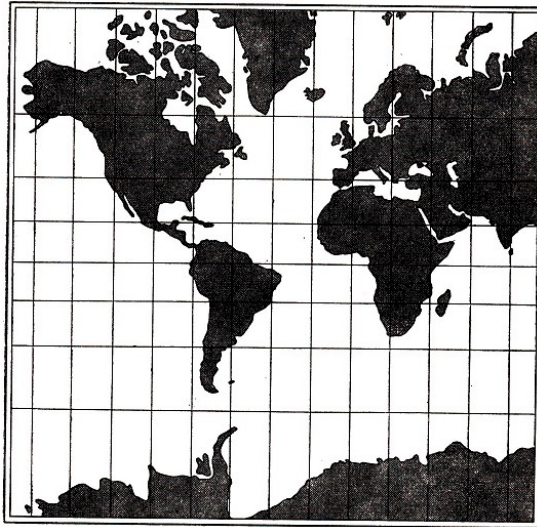


Abb. 36

Er ist, wie wir gleich nachweisen werden, winkeltreu; da die Bilder der Meridiane Parallelen zur y -Achse sind, folgt daraus: Die Kugelloxodromen, die Kurven konstanten Kurses (konstanter Winkel zwischen Meridian und Kurve) sind gerade, d. h., sie können auf der Seekarte mit dem Lineal bestimmt werden.

Da diese für die Anwendung entscheidende Eigenschaft von der Winkeltreue abhängt, geben wir abschließend ihren Nachweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u^1} &= 0 & , & & \frac{\partial x}{\partial u^2} &= R \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} &= \frac{R}{\cot \frac{u^1}{2R}} \cdot \frac{-1}{2R \sin^2 \frac{u^1}{2R}} = \frac{-1}{\sin \frac{u^1}{R}} & , & & \frac{\partial y}{\partial u^2} &= 0 \end{aligned}$$

Somit können wir $\bar{g}_{ij}(u^1, u^2)$ nach (50') berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11}(u^1, u^2) &= 1 \cdot \left(\frac{-1}{\sin \frac{u^1}{R}} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{u^1}{R}} \\ \bar{g}_{12}(u^1, u^2) &= 0 = \bar{g}_{21}(u^1, u^2) \\ \bar{g}_{22}(u^1, u^2) &= 1 \cdot R^2 = R^2 \end{aligned}$$

Folglich ergibt der Vergleich mit den metrischen Fundamentalgrößen der Kugel

$$\bar{g}_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sin^2 \frac{u^1}{R}}$$

der Faktor $c = c(u^1, u^2)$ hängt hier nur vom Polabstand und damit nur von der geographischen Breite ab.

Bemerkung. Mercatorkarten wurden auch von Pedro Nunez Salaciense (1502-1578) schon vor 1559 hergestellt.

Aufgabe

Man bestätige die Inhaltstreue des Mollweideschen Entwurfes.

Anleitung. Aus $f(u^1, t) := \pi \cos \frac{u^1}{R} - 2t - \sin 2t$ lässt sich $\frac{dt}{du^1} = -\frac{f_{u^1}}{f_t}$ ermitteln.

4 Einführung in die Riemannsche Geometrie

Bernhard Riemann (1826 in Breselenz/Hannover geb., 1866 in Selasca/ Lago Maggiore gest.) hat, von der Flächentheorie ausgehend, im Beisein von Gauß in seiner Habilitationsvorlesung "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" wesentliche Gedanken seiner Theorie dargelegt.

Da bei uns bisher die Grundzüge der Flächentheorie vorliegen, befinden wir uns bezüglich des Verständnisses der Riemannschen Geometrie in einer ähnlichen Situation wie die Zuhörer von 1854. Seither wurde die Theorie inhaltlich ausgebaut und methodisch aufbereitet. Davon werden wir im folgenden profitieren.

4.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Das vorige Kapitel hat gelehrt, dass zweidimensionale Geometrie nicht denotwendig ebene euklidische Geometrie sein muss. Ein wesentlicher Aspekt war dort die Möglichkeit, "zweidimensional zu koordinatisieren", d. h. die Angabe einer zulässigen Darstellung $P = P(u^1, u^2)$ mit Hilfe von zwei Parametern. Der andere wesentliche Aspekt bestand in der Berechnung von Längen mit Hilfe der metrischen Fundamentalgrößen $g_{ik} = g_{ik}(u^1, u^2)$.

Zunächst geht es uns um die Verallgemeinerung des ersten Aspektes. Wenn wir den Raum koordinatisieren wollen, müssen wir zwangsläufig eine stillschweigende Voraussetzung des vorigen Kapitels aufgeben, nämlich die Voraussetzung, alle Flächen als Teilmengen des Anschauungsraumes aufzufassen.

Doch welche Eigenschaften besaß dort die Menge der Punkte, die eine sinnvolle Formulierung des Begriffes der zulässigen Parameterdarstellung gestatten?

Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, erinnern wir uns: Eine Parameterdarstellung ist eine Abbildung in die Menge der Punkte, die selbst stetig ist und stetige Ableitungen besitzt. Die Stetigkeit einer Abbildung in die Menge der Punkte wird überprüfbar, wenn wir für jeden Punkt die Menge seiner Umgebungen kennen. Wir werden den Begriff der Umgebung in einer Punktmenge als Grundbegriff verwenden; um einfache Grenzwertaussagen herleiten zu können, formulieren wir zwei Axiome:

Definition. Gegeben sei ein Paar $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$, wobei \mathfrak{P} eine Menge und \mathfrak{U} eine Menge von Teilmengen von \mathfrak{P} ist. Wir nennen $P \in \mathfrak{P}$ Punkt, $U \in \mathfrak{U}$ (offene) Umgebung und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ einen Hausdorffschen Raum¹⁴ genau dann, wenn es

(1) für alle $P \in \mathfrak{P}$ und $U, U' \in \mathfrak{U}$ mit $P \in U, U'$ ein Element $V \in \mathfrak{U}$ mit $P \in V \subseteq U, U'$,

(2) zu jedem $P \in \mathfrak{P}$ ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $P \in U$ und zu je zwei Elementen $P, Q \in \mathfrak{P}$ Elemente $U, V \in \mathfrak{U}$ mit $P \in U, Q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ ¹⁵

gibt. Statt $P \in U \in \mathfrak{U}$ schreiben wir auch kurz U_P oder $U(P)$ und nennen U_P eine Umgebung von P .

Im Hausdorffschen Raum lässt sich Konvergenz erklären: P_n strebt gegen P , kurz $P_n \rightarrow P$, genau dann, wenn jede Umgebung von P fast alle P_n ($n \in \mathbb{N}$) enthält. Zur Rechtfertigung

¹⁴Nach Felix Hausdorff (1868-1942), von dem das Werk "Grundzüge der Mengenlehre" (1914) besonders genannt sei.

¹⁵Der erste Teil von (2) wird nur dann benötigt, wenn \mathfrak{P} höchstens einen Punkt besitzt, der zweite Teil von (2) wird Hausdorffsches Trennungaxiom genannt und mit T_2 bezeichnet.

der Schreibweise

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

beweisen wir, dass unter der Voraussetzung $P_n \rightarrow P$ für keinen von P verschiedenen Punkt Q ebenfalls $P_n \rightarrow Q$ gelten kann: Nach T_2 gibt es disjunkte Umgebungen U_P und U_Q . Wegen $P_n \rightarrow P$ enthält U_P fast alle P_n und folglich U_Q nur endlich viele P_n , d. h., P_n strebt nicht gegen Q .

In einem Hausdorffschen Raum heißt eine Punktmenge M genau dann offen, wenn jeder Punkt aus M eine in M enthaltene Umgebung besitzt. Offenbar ist jede Umgebung U offen, denn für alle $P \in U$ gilt $P \in U \subseteq U$.

Die Menge \mathcal{D} aller offenen Mengen eines Hausdorffschen Raumes nennen wir dessen Topologie.¹⁶ Gemäß der obigen Bemerkung gilt $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{D}$.

Beispiel

(4.1) Es sei $\mathfrak{P} = E^2$ die Menge der Punkte (x, y) der (reellen) euklidischen Koordinatenebene. Wie allgemein üblich sei für $\rho > 0$

$$U_\rho(x_0, y_0) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2\}$$

eine ρ -Umgebung von (x_0, y_0) . Ist \mathfrak{U} die Menge aller ρ -Umgebungen ($0 < \rho < \infty$), dann ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offenbar ein Hausdorffscher Raum. Andererseits können für $\sigma, \tau > 0$ Rechtecksumgebungen

$$U_{\sigma, \tau}(x_0, y_0) = \{(x, y) : -\sigma < x - x_0 < \sigma, -\tau < y - y_0 < \tau\}$$

sowie die Menge $\tilde{\mathfrak{U}}$ aller Rechtecksumgebungen betrachtet werden. Wie man leicht sieht, ist auch $(\mathfrak{P}, \tilde{\mathfrak{U}})$ ein Hausdorffscher Raum.

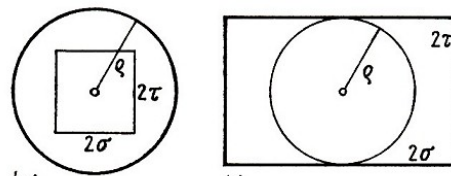


Abb. 37

Schließlich können wir feststellen, dass $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ und $(\mathfrak{P}, \tilde{\mathfrak{U}})$ ein und dieselbe Topologie besitzen: a) Ist M bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offen und $(x_0, y_0) \in M$, dann gibt es eine reelle Zahl $\rho > 0$ mit $U_\rho(x_0, y_0) \subseteq M$. Wir wählen $\sigma = \tau = \frac{\rho}{2}$ und erhalten für $(x, y) \in U_{\sigma, \tau}(x_0, y_0)$ (vgl. Abb. 37 a)

$$(x - x_0)^2 < \sigma^2 \quad , \quad (y - y_0)^2 < \tau^2$$

und somit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$$

d. h. $U_{\sigma, \tau}(x_0, y_0) \subseteq U_\rho(x_0, y_0) \subseteq M$. Folglich ist M auch bezüglich $(\mathfrak{P}, \tilde{\mathfrak{U}})$ offen.

¹⁶Aus (1) und (21) gewinnen wir ohne T_2 folgende Eigenschaften von \mathcal{D} :

1. $\emptyset, \mathfrak{P} \in \mathcal{D}$, 2. $M, N \in \mathcal{D} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{D}$, 3. $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{M} \in \mathcal{D}$.

Beweis. Offensichtlich ist \emptyset offen, während das für \mathfrak{P} nach (2.1) zutrifft. Sind M und N offen und gilt $P \in M \cup N$, dann existieren Umgebungen U und V mit $P \in U \subseteq M$ und $P \in V \subseteq N$; da es nach (1) eine Umgebung W mit $P \in W \subseteq U, V$ gibt, muss $P \in W \subseteq U \cap V \subseteq M \cap N$ gelten und $M \cap N$ offen sein. Ist schließlich $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{D}$ und $P \in \bigcup \mathfrak{M}$, dann finden wir ein Element $M \in \mathfrak{M}$ mit $P \in M$ und wegen $M \in \mathcal{D}$ eine Umgebung U mit $P \in U \subseteq M \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$, d. h. $\bigcup \mathfrak{M} \in \mathcal{D}$ w.z.b.w.

Jedes Paar $(\mathfrak{P}, \mathcal{D})$, bei dem \mathcal{D} die Eigenschaften 1. bis 3. besitzt, heißt topologischer Raum.

b) Ist umgekehrt \tilde{M} bezüglich $(\mathfrak{P}, \tilde{\mathfrak{U}})$ offen und $(x_0, y_0) \in \tilde{M}$, dann existieren positive reelle Zahlen σ, τ mit $U_{\sigma, \tau}(x_0, y_0) \subseteq \tilde{M}$. Für $\rho := \min(\sigma, \tau)$ und $(x, y) \in U_\rho(x_0, y_0)$ gilt (Abb. 37b)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$$

daraus folgt $(x - x_0)^2, (y - y_0)^2 < \rho^2$ und schließlich

$$(x - x_0)^2 < \sigma^2 \quad , \quad (y - y_0)^2 < \tau^2$$

d. h. $U_\rho(x_0, y_0) \subseteq U_{\sigma, \tau}(x_0, y_0) \subseteq \tilde{M}$. Damit ist \tilde{M} bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U}\mathfrak{P})$ offen, weil $(x_0, y_0) \in \tilde{M}$ beliebig gewählt war, w. z. b. w.

Für Stetigkeitsbetrachtungen in der (reellen) euklidischen Koordinaten- ebene sind \mathfrak{U} und $\tilde{\mathfrak{U}}$ als gleichwertig anzusehen.

Satz 4. I. Es sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ ein Hausdorffscher Raum, $M \subseteq \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}_M = \{X \cap M : X \in \mathfrak{U}\}$. Dann gilt:

a) (M, \mathfrak{U}_M) ist ein Hausdorffscher Raum.

b) $X \subseteq M$ ist bezüglich (M, \mathfrak{U}_M) genau dann offen, wenn es eine bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offene Menge Y mit $X = Y \cap M$ gibt.

Zusatz. Wenn M eine offene Teilmenge von \mathfrak{P} ist, dann gilt

$$\mathfrak{D}_M = \{X \subseteq M : X \in \mathfrak{D}\}$$

Beweis. a) Es sei $P \in U, V \in \mathfrak{U}_M$. Dann gibt es Umgebungen $U', V', W \in \mathfrak{U}$ mit $U = U' \cap M, V = V' \cap M$ und $P \in W \subseteq U', V'$. Wegen $P \in W \cap M \subseteq (U' \cap M) \cap (V' \cap M) = U \cap V$ gilt (1) für (M, \mathfrak{U}_M) .

Offensichtlich ist (2.1) erfüllt. Zu zwei Punkten $P, Q \in M$ existieren disjunkte Umgebungen $U_P, U_Q \in \mathfrak{U}$. Dann sind $U_P \cap M$ und $U_Q \cap M$ aus \mathfrak{U}_M disjunkt, und es gilt $P \in U_P \cap M$ und $Q \in U_Q \cap M$. Somit gilt auch (22) für (M, \mathfrak{U}_M) .

b) Es sei Y bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offen und $P \in X = Y \cap M$. Es gibt eine Umgebung $U_P \subseteq Y$. Folglich gilt $P \in U_P \cap M \subseteq X$. Da P beliebiges Element aus X war, ist X bezüglich (M, \mathfrak{U}_M) offen.

Nun sei umgekehrt X bezüglich (M, \mathfrak{U}_M) offen. Von jedem Punkt $P \in X$ gibt es eine Umgebung $U_P \in \mathfrak{U}$ mit $U_P \cap M \subseteq X$. Dann ist $Y := \bigcup_{P \in X} U_P$ bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offen, und es gilt

$$Y \cap M = \bigcup_{P \in X} U_P \cap M = \bigcup_{P \in X} (U_P \cap M) = X$$

Zum Beweis des Zusatzes sei M bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offen. Nach b) gilt $X \in \mathfrak{D}_M$ genau dann, wenn es eine bezüglich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ offene Menge Y mit $X = Y \cap M$ gibt; dabei gilt $X = Y \cap M \in \mathfrak{D}$, w.z.b.w.

Wir fragen nun nach einem Kriterium dafür, dass bei einer Abbildung f eines Hausdorffschen Raumes in einen Hausdorffschen Raum die Konvergenz erhalten bleibt:

Es sei $P_n \rightarrow P$. Um $f(P_n) \rightarrow f(P)$ zu erhalten, betrachten wir eine Umgebung U' von $f(P)$. Wäre nun $f^{-1}(U')$ offen, dann gäbe es eine Umgebung U_P , für die $P_n \in U_P \subseteq f^{-1}(U')$ und damit $f(P_n) \in U'$ für fast alle P_n gälte. Wir erklären deshalb:

Definition. Eine Abbildung f eines Hausdorffschen Raumes \mathfrak{P} in einen Hausdorffschen Raum \mathfrak{P}' heißt stetig genau dann, wenn das Urbild jeder Umgebung und damit auch jeder offenen Menge offen ist.

Eine eindeutige Abbildung f von \mathfrak{P} auf \mathfrak{P}' wird topologisch oder ein Homöomorphismus genannt genau dann, wenn f und f^{-1} stetig sind.

Der Begriff der topologischen Abbildung ist von großer Allgemeinheit. Beispielsweise kann jede einfach zusammenhängende Menge der euklidischen Ebene homöomorph auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden (Abb. 38).

Mit diesem Begriff wird die angestrebte Koordinatisierung beschrieben.

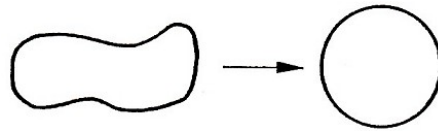


Abb. 38

Wie schon das Beispiel der Kugel lehrt, gibt es keine zulässige Parameterdarstellung der gesamten Oberfläche. Wenn wir eine zulässige Parameterdarstellung "Karte" nennen, dann gelingt aber eine vollständige Beschreibung durch ein System von Karten, einen "Atlas" (Abb. 39).

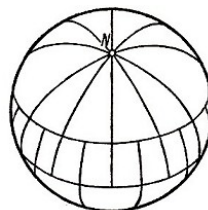


Abb. 39

Die Verallgemeinerung des Flächenbegriffes auf höhere Dimensionen muss auch diesem Aspekt noch Rechnung tragen. Für einen Hausdorffschen Raum mit einem System von Parameterdarstellungen gibt es folgende

Definition. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k ($k = 0, \dots, \infty$) ist ein Hausdorffscher Raum $(\mathfrak{P}, \mathfrak{U})$ mit einem Atlas $(\{f_M\}_{M \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}}$ folgender Eigenschaften:

1. $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M = \mathfrak{P}$, d.h. \mathfrak{M} ist eine Überdeckung von \mathfrak{P} .
2. Vermöge f_M wird M topologisch auf eine offene Menge des n -dimensionalen euklidischen Raumes E^n abgebildet.
3. Gilt $P \in M, N \in \mathfrak{M}$, so gibt es eine Umgebung U von P derart, dass (Abb. 40)

$$\varphi = f_N f_M^{-1} \Big|_{f_M(U)}$$

eine reguläre Koordinatentransformation der Klasse C^k beschreibt, d. h., für $X \in U$ mit

$$f_M(X) = (u^1, \dots, u^n) \quad , \quad f_N(X) = (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$$

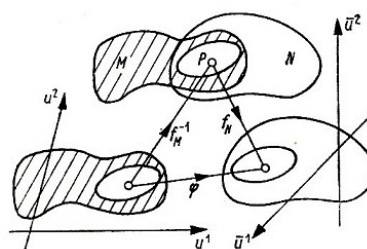


Abb. 40

sind die Koordinatenfunktionen von φ

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$$

k -mal stetig differenzierbar¹⁷, und die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u^n} \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht.

4. Eine beliebige Karte g ist genau dann zulässig, wenn für jeden Punkt P des Definitionsbereiches von g wenigstens eine Karte f_m und eine Umgebung $U_P \subseteq M$ derart existieren, dass $gf_M^{-1}|_{f_M(U_P)}$ eine reguläre Koordinatentransformation der Klasse C^k ist.¹⁸

Für $k > 0$ heißt die Mannigfaltigkeit differenzierbar.

Die n -Dimensionalität wird durch den Zusammenhang mit dem n -dimensionalen euklidischen Raum gewährleistet, die Klasse C^k findet in Eigenschaft 3 und vor allem in Eigenschaft 4 ihren Ausdruck. (Wenn der Atlas nur eine Karte enthält, läuft Eigenschaft 3 leer!)

Wir werden zwei Atlanten als gleichwertig ansehen, wenn die Karten des einen jeweils zulässig bezüglich des anderen sind.

Will man sich von der Zufälligkeit der Beschreibung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit freimachen, so kann man den maximalen Atlas, die Menge aller zulässigen Karten betrachten; das ist aber im allgemeinen nicht nötig. Bemerkenswert ist, dass aus jedem maximalen Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Klasse C^k ein Atlas der Klasse C^∞ ausgewählt werden kann (H. Whitney, Ann. of Math. 37 (1936)).

Dagegen gibt es (topologische) Mannigfaltigkeiten der Klasse C^0 , die keinen differenzierbaren Atlas gestatten (M. Kervaire, Comm. Math. Helv. 34 (1960)). Schließlich sei bemerkt, dass eine Mannigfaltigkeit ungleichwertige Atlanten besitzen kann (J. Milnor, Ann. of Math. 64 (1956)).

Aufgaben

1. Man beweise, dass in E^2 alle ρ -Umgebungen des Ursprungs O die Axiome (I) und (2.1) erfüllen, aber nicht $T_2 = (2.2)$. (Neben \emptyset und E^2 sind dann nur noch diese Umgebungen offene Mengen.)

2. Man zeige, dass a.) $E^1 = \mathbb{R}$ und $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$, b.) $(0, \pi)$ und \mathbb{R} vermöge $y = e^x$ bzw. $y = \cot x$ homöomorph sind.

3. In E^{n+1} ist $S_R^n := \{X \in E^{n+1} : |v(OX)| = R\}$, die n -Sphäre um O mit dem Radius R , nach dem Satz 4.18. ein Hausdorffscher Raum. Die stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0, \dots, 0, R)$ bzw. vom Südpol $S = (0, \dots, 0, -R)$ der Punkte $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_R^n$ in den E^n vermöge

$$\bar{x}^i = \frac{Rx_i}{R - x_{n+1}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x}^i = \frac{Rx_i}{R + x_{n+1}}$$

¹⁷Falls alle Funktionen $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$ analytisch, d. h. in Potenzreihen entwickelbar sind, schreibt man C^ω .

¹⁸Für einige Aussagen, die die Mannigfaltigkeit als Ganzes betreffen, für die Riemannsche Geometrie im Großen, werden wir später noch die Verbindbarkeit zweier Punkte durch einen Weg benötigen, den bogenweisen Zusammenhang.

(vgl. Abb. 41) mit den Definitionsbereichen

$$M := S_R^n \setminus \{N\} \quad \text{bzw.} \quad N := S_R^n \setminus \{S\}$$

bilden einen C^∞ -Atlas.

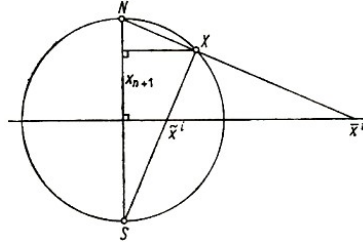


Abb. 41

Anleitung. Es gilt

$$f_N f_M^{-1}((x_1, \dots, x_n)) = \frac{R - x_{n+1}}{R + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

und

$$f_M f_N^{-1}((x_1, \dots, x_n)) = \frac{R + x_{n+1}}{R - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

4.2 Tangentialräume

In jedem Punkt P einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Klasse C^k kann ein n -dimensionaler Tangentialraum $T(P)$ eingeführt werden.

Der Nachweis dieser Tatsache liefert zugleich eine Einordnung der Tangentialebene und absoluten Differentiation in die innere Geometrie einer Fläche. In den folgenden Abschnitten werden nur die wesentlichen Ergebnisse der folgenden Konstruktion benötigt, wie sie zu Beginn des Abschnittes 4.4. zusammengestellt werden.

Der Grundbaustein ist der Begriff der Parameterdarstellung einer Kurve¹⁹ der Mannigfaltigkeit P als einer stetigen Abbildung einer euklidischen Strecke in die Menge der Punkte der Mannigfaltigkeit P

$$P = P(t), \quad t \in (a, b) \tag{53}$$

Wir nennen (53) h -mal stetig differenzierbar ($1 \leq h \leq k$), wenn für alle t eine Karte f_M mit $P(t) \in M$ existiert, so dass $\bar{P} = f_M(P(t))$ an der Stelle t wenigstens h -mal stetig differenzierbar ist. Diese Definition hängt nicht von der speziellen Karte f_M ab, denn gibt es noch eine Karte f_N mit $P(t) \in N$, dann ist

$$\bar{P} = f_N(P(t)) = (f_N f_M^{-1}) f_M(P(t)) \tag{54}$$

nach der Kettenregel an der Stelle t ebenfalls h -mal stetig differenzierbar.

Im folgenden betrachten wir nur stetig differenzierbare Parameterdarstellungen von Kurven. Unter dieser Voraussetzung besitzen $P = P(t)$ und $P = Q(u)$ in $P(t_0) = P_0 = Q(u_0)$

¹⁹Wie in der Kurventheorie des Anschauungsraumes führen Parametertransformationen - beispielsweise $t = c \cdot \tau$ - zu einer neuen Parameterdarstellung derselben Kurve, die am bequemsten als Äquivalenzklasse in der Menge aller zulässigen Parameterdarstellungen (Existenz von Tangentenvektoren ungleich dem Nullvektor für alle t) definiert wird. Die Äquivalenzrelation bestehe genau dann, wenn eine (noch zu präzisierende) zulässige Parametertransformation existiert.

denselben Tangentenvektor per definitionem genau dann, wenn es eine Karte f_M mit $P_0 \in M$ und

$$\left. \frac{d}{dt} f_M(P(t)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{du} f_M(Q(u)) \right|_{u=u_0} \quad (55)$$

gibt. Damit ist eine Relation definiert, mit deren Hilfe "Tangentenvektoren" erklärt werden sollen; solch Situation liegt z. B. vor, wenn zunächst die Relation "gleichlang" gebraucht und später erst "Länge" definiert wird; dabei weist der Name der Relation ebenfalls schon auf den Namen der Äquivalenzklasse hin.

Die oben definierte Relation ist von der speziellen Karte unabhängig, denn gilt für f_N ebenfalls $P_0 \in N$, dann erhalten wir

$$\left. \frac{d}{dt} f_N(P(t)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{du} f_N(Q(u)) \right|_{u=u_0}$$

nach (54) und (55). Aus (55) lesen wir noch ab, dass "in P_0 , denselben Tangentenvektor besitzen" eine Äquivalenzrelation ist. Der zu $P = P(t)$ in P_0 , gehörige Tangentenvektor $\mathfrak{t}_{P_0}^{P(t)}$ ist die Menge aller Parameterdarstellungen $P = Q(u)$, für die es einen Parameter u_0 mit $Q(u_0) = P_0$, und (55) gibt.

Wir können (55) noch durch die Feststellung umformulieren, dass nach obiger Definition zwei Parameterdarstellungen genau dann in $P_0 \in P$ denselben Tangentenvektor besitzen, wenn ihre Bilder bezüglich einer Karte denselben Tangentenvektor in E^n haben.

Nunmehr strukturieren wir die Menge der Tangentenvektoren, indem wir eine Addition und die Vervielfachung mit reellen Zahlen einführen: Um $\mathfrak{t}_{P_0}^{P(t)}$ mit $c \in R$ zu vervielfachen, setzen wir $t = cu$ in (53) ein und erhalten

$$\frac{d}{du} f_M(P(cu)) = \frac{d}{dt} f_M(P(t)) \cdot \frac{dt}{du} = c \frac{d}{dt} f_M(P(t))$$

deshalb setzen wir

$$c \mathfrak{t}_{P_0}^{P(t)} := \mathfrak{t}_{P_0}^{P(cu)} \quad (56)$$

Unter der Voraussetzung $P(u_0) = P_0 = Q(v_0)$ können wir $\mathfrak{t}_{P_0}^{P(t)} + \mathfrak{t}_{P_0}^{Q(v)}$ als die Menge derjenigen Parameterdarstellungen $P = S(t)$ mit $S(t_0) = P_0$, und

$$\left. \frac{d}{dt} f_M(S(t)) \right|_{t=t_0} = \mathfrak{s} := \left. \frac{d}{du} f_M(P(u)) \right|_{u=u_0} + \left. \frac{d}{dv} f_M(Q(v)) \right|_{v=v_0}$$

definieren; diese Menge ist nicht leer, denn sie enthält beispielsweise $P = f_M^{-1}(\overline{P_0} + t\mathfrak{s})$ mit $\overline{P_0} := f_M P_0$, das Urbild des in $f_M(M)$ gelegenen Teils der Geraden der Richtung \mathfrak{s} durch $\overline{P_0}$.

Wenn durch $\overline{P_0}$, die Achsen eines Koordinatensystems gelegt werden, dann erzeugen ihre Urbilder bezüglich der Karte f_M eine Basis für alle Tangentenvektoren in P_0 . Wie man leicht sieht, bilden sie einen n -dimensionalen Vektorraum, den Tangentialraum $T(P_0)$.

Aufgabe

Man gebe zwei Parameterdarstellungen durch einen Punkt $P_0 \in S_R^2$ an, die denselben Tangentenvektor besitzen, und veranschauliche (55) in einer Skizze.

4.3 Tensoralgebra

In diesem Abschnitt werden weitere Begriffe für den Aufbau der Riemannschen Geometrie bereitgestellt. Dazu gehen wir lediglich von einem reellen n -dimensionalen Vektorraum V aus. Wir können feststellen, dass V stets ein weiterer n -dimensionaler Vektorraum zugeordnet werden kann, nämlich sein "dualer Vektorraum". Zunächst erklären wir dessen Elemente:

Definition. Eine Funktion $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften²⁰

$$\begin{aligned} l(x + y) &= l(x) + l(y) && \text{(Additivität)} \\ l(cx) &= cl(x) && \text{(Homogenität)} \end{aligned}$$

heißt lineares Funktional oder Linearform über V .

Beispiel

(4.2) Es sei \mathfrak{B} der Vektorraum des Anschauungsraumes und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$. Die Funktion $l_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $l_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ (Skalarprodukt) hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} l_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) &= \mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{y} = l_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) + l_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) \\ l_{\mathfrak{a}}(c\mathfrak{x}) &= \mathfrak{a}(c\mathfrak{x}) = c(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = cl_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) \end{aligned}$$

d. h. die Eigenschaften eines linearen Funktionals.

Für lineare Funktionale über V lassen sich leicht eine Addition und eine Vervielfachung mit reellen Zahlen einführen: Wir setzen für Linearformen l und m sowie reelle Zahlen c

$$(l + m)(x) := l(x) + m(x) \quad , \quad (cl)(x) := cl(x) \quad (57)$$

Im Beispiel (4.2) läuft die Addition und Vervielfachung der linearen Funktionale auf die Addition und Vervielfachung von Vektoren hinaus:

Es gilt

$$l_{\mathfrak{a}} + l_{\mathfrak{b}} = l_{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \quad , \quad cl_{\mathfrak{a}} = l_{c\mathfrak{a}}$$

wegen

$$(l_{\mathfrak{a}} + l_{\mathfrak{b}})(\mathfrak{x}) = l_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) + l_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{x} = l_{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}(\mathfrak{x})$$

und entsprechend

$$(cl_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{x}) = cl_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = c \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{x} = c\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = l_{c\mathfrak{a}}(\mathfrak{x})$$

für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$. Die Struktur der Linearformen $l_{\mathfrak{a}}$ ist isomorph dem Vektorraum \mathfrak{B} , insbesondere selbst ein Vektorraum. Diese Fakten lassen sich auf die Struktur der linearen Funktionale über einem beliebigen n -dimensionalen Vektorraum V verallgemeinern:

Satz 4.2. Die linearen Funktionale über V bilden mit der durch (57) erklärten Addition und Vervielfachung selbst einen n -dimensionalen Vektorraum, den zu V dualen Vektorraum V^* .

Beweis. Wie man leicht sieht, sind $l + m$ und cl Linearformen. Um Assoziativität, Kommutativität und Umkehrbarkeit der Addition zu zeigen, betrachten wir beliebige Linearformen l und m . Es gilt

$$(l + m)(x) = l(x) + m(x) = m(x) + l(x) = (m + l)(x)$$

für alle $x \in V$, d.h. $l + m = m + l$.

Analog wird die Assoziativität bewiesen (vgl. Aufgabe 1).

²⁰Beide Eigenschaften werden auch unter Linearität zusammengefasst.

Offenbar ist $o : V \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $o(x) = 0$ für alle $x \in V$ eine Linearform; wegen

$$(o + l)(x) = o(x) + l(x) = l(x)$$

für alle $x \in V$, d. h. $o + l = l$, ist o Nullelement.

Außerdem ist $-l : V \rightarrow \mathbb{R}(-l(x) := -(l(x)))$ eine Linearform:

$$\begin{aligned} -l(x + y) &= -(l(x + y)) = -(l(x) + l(y)) = (-l)(x) + (-l)(y); \\ -l(cx) &= -(l(cx)) = -(cl(x)) = c(-l(x)) \end{aligned}$$

Hier gilt

$$(-l + l)(x) = -l(x) + l(x) = 0 = o(x)$$

für alle $x \in V$, d. h., dass $-l$ zu l entgegengesetzt ist.

Es ist genauso leicht, die Eigenschaften der Vervielfachung

$$1 \cdot l = l, \quad (ab)l = a(bl), \quad (a + b)l = al + bl, \quad a(l + m) = al + am \quad (58)$$

für beliebige reelle Zahlen a und b zu beweisen.

Um für V^* eine Basis anzugeben, betrachten wir eine Basis a_1, \dots, a_n von V und setzen

$$a^i(x) = a^i(x^1 a_1 + \dots + x^n a_n) := x^i \quad (59)$$

a^i beschreibt folglich die Projektion von V auf die i -te Koordinatenachse. Speziell gilt

$$a^i(a_k) = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (60)$$

Mit Hilfe der n Projektionen a^1, \dots, a^n , die offensichtlich linear sind, kann jedes lineare Funktional l über V eindeutig dargestellt werden: Es sei $l_i := l(a_i)$. Dann gilt

$$l = l_1 a_1 + \dots + l_n a^n$$

wegen

$$l(x) = l(x^i a_i) = x^i l(a_i) = l_i a^i(x) = (l_i a^i)(x)$$

für alle $x \in V$; damit ist die Darstellbarkeit gezeigt. Um ihre Eindeutigkeit zu erhalten, gehen wir von

$$l_1 a^1 + \dots + l_n a^n = l = \tilde{l}_1 a^1 + \dots + \tilde{l}_n a^n$$

aus. Diese Gleichung muss speziell beim Einsetzen der Basisvektoren a_1, \dots, a_n von V gelten, nach (60) muss die Gleichung

$$l_i = (l_1 a^1 + \dots + l_n a^n)(a_i) = (\tilde{l}_1 a^1 + \dots + \tilde{l}_n a^n)(a_i) = \tilde{l}_i$$

bestehen, w. z. b. w.

Die Elemente von V^* werden auch kovariante Vektoren genannt; die Elemente von V sind dann kontravariante Vektoren.

Wegen $l(x) = x^1 l(a_1) + \dots + x^n l(a_n) = x^1 l_1 + \dots + x^n l_n$ gibt es - vgl. Beispiel (4.2) - folgenden

Darstellungssatz für lineare Funktionale. Ist a_1, \dots, a_n eine Basis von V , dann existiert zu jedem linearen Funktional l ein n -Tupel (l_1, \dots, l_n) mit

$$l(x) = l_i x^i \quad (61)$$

Umgekehrt definiert jedes n -Tupel (l_1, \dots, l_n) über (61) ein lineares Funktional l ; dabei gehören zu $l + m$ und cl die Tupel $(l_1 + m_1, \dots, l_n + m_n)$ bzw. (cl_1, \dots, cl_n) .

Der Beweis der Umkehrung beruht lediglich auf dem Rechnen mit reellen Zahlen: Additivität und Homogenität gelten infolge von

$$\begin{aligned} l_1(x^1 + y^1) + \dots + l_n(x^n + y^n) &= (l_1x^1 + \dots + l_nx^n) + (l_1y^1 + \dots + l_ny^n) \\ l_1(cx^1) + \dots + l_n(cx^n) &= c(l_1x^1 + \dots + l_nx^n) \end{aligned}$$

Außerdem haben wir

$$(l + m)(x) = l_i x^i + m_i x^i = (l_i + m_i)x^i, \quad (cl)x = c(l_i x^i) = (cl_i)x^i$$

w. z. b. w.

Der Darstellungssatz zeigt uns den engen Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt im E_n und den Linearformen. Das Skalarprodukt besitzt aber noch eine andere Verallgemeinerung:

Definition. Eine Funktion $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$b_a : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (b_a(y) := b(a, y)) \quad , \quad b_c : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (b_c(x) := b(x, c))$$

Linearformen sind, heißt Bilinearform über $V \times V$. Eine Bilinearform ist genau dann symmetrisch (schiefsymmetrisch), wenn

$$b(x, y) = b(y, x) \quad (b(x, y) = -b(y, x))$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

Entsprechend werden Bilinearformen über $V \times V^*$ und $V^* \times V^*$ definiert. Bezüglich einer Basis a_1, \dots, a_n ist eine Linearform l nach (61) bereits durch die n Werte $l_i = l(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, völlig bestimmt. Bezüglich einer Bilinearform b gilt nach der Einsteinschen Summenkonvention mit $x = x^i a_i$ und $y = y^j a_j$

$$b(x, y) = x^i b_{ij} y^j = x^i b_{ij} a_j y^j$$

d. h., dass b mit den n^2 Werten $b_{ij} := b(a_i, a_j)$ bereits vollständig bekannt ist. Da umgekehrt Matrizen (b_{ij}) additiv und homogen sind und einen n^2 -dimensionalen Vektorraum bilden, haben wir folgende Aussagen:

Darstellungssatz für Bilinearformen. Bezüglich einer Basis von V (und der dualen von V^*) gibt es zu jeder Bilinearform b über $V \times V$, $V \times V^*$ oder $V^* \times V^*$ eine n -reihige quadratische Matrix (b_{ij}) , (b_j^i) bzw. (b^{ij}) mit

$$b(x, y) = x^i b_{ij} y^j \tag{62.1}$$

bzw. den analogen Darstellungen

$$b(x, l) = x^j b_j^i l_i \quad , \quad b(l, m) = l_i b^{ij} m_j \tag{62.2,3}$$

wobei x^i, y^j bzw. l_i, m_i die Koordinaten der kontravarianten Vektoren x, y bzw. der kovarianten Vektoren l, m bezeichnen. Umgekehrt bestimmt jede n -reihige quadratische Matrix sowohl gemäß (62.1) als auch gemäß (62.2) und (62.3) eine Bilinearform.

Folgerung. Die Bilinearformen über $V \times V$, $V \times V^*$ bzw. $V^* \times V^*$ bilden einen n^2 -dimensionalen

Vektorraum.

Beispiele

(4.3) Im Anschauungsraum ist das Skalarprodukt eine Bilinearform. Bezüglich einer orthonormierten Basis $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ ist die Matrix (b_{ij}) wegen

$$b_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij}$$

die Einheitsmatrix, so dass sich (62.1) auf $x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$ reduziert. Diese Bilinearform ist symmetrisch.

(4.4) Im Anschauungsraum ist das äußere Produkt $\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}$, bezüglich einer Basis durch die Matrix

$$(x^i y^j - y^i x^j) = \begin{pmatrix} 0 & x^1 y^2 - y^1 x^2 & x^1 y^3 - y^1 x^3 \\ x^2 y^1 - y^2 x^1 & 0 & x^2 y^3 - y^2 x^3 \\ x^3 y^1 - y^3 x^1 & x^3 y^2 - y^3 x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert, eine (schiefsymmetrische) Bilinearform über $V^* \times V^*$. Bei einer orthonormierten Basis besteht ein Zusammenhang zum Vektorprodukt $\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = (v_1, v_2, v_3)$, nämlich

$$(x^i y^j - y^i x^j) = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trotzdem besteht ein Unterschied: Die Darstellungen erweisen sich beim Übergang zu einer anderen Basis nur dann als gleichwertig, wenn beide Basen ein und dieselbe Orientierung bestimmen.

(4.5) Sind l und m zwei Linearformen über einem, beliebigen Vektorraum V , dann ist ihr Produkt

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (b(x, y) := l(x) \cdot m(y))$$

eine Bilinearform über $V \times V$, denn aus $l, m \in V^*$ folgt $b_a = l(a)m = cm \in V^*$ und $b_b = m(b)l = cl \in V^*$.

Alle bisher behandelten Begriffe lassen sich einem Begriff unterordnen, ohne den sich viele physikalische Sachverhalte nicht formulieren lassen, dem Begriff des Tensors. Im Rahmen der Flächentheorie sind uns z. B. die Fundamentalgrößen g_{ij} bzw. L_{ij} , als Tensoren begegnet, ohne dass wir allerdings die abstrakte Beschreibung gesucht hatten:

Definition. Eine Multilinearform über $V_1 \times \dots \times V_m$ ist eine Funktion $f : V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow \mathbb{R}$, bei der für feste Vektoren $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ die m Funktionen

$$f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R} \quad (f_i(x) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m))$$

Linearformen sind. Ein Tensor der Stufe (r, s) oder ein (r, s) -Tensor t über V ist entweder

a) eine reelle Zahl für $r = s = 0$

oder

b) eine Multilinearform über $V_1 \times \dots \times V_{r+s}$ mit $V_i = V$ für $i = 1, \dots, r$ und $V_i = V^*$ für $i = r + 1, \dots, r + s$.

Die $(1, 0)$ -Tensoren sind Linearformen; die Bilinearformen ergeben $(2, 0)$ -, $(1, 1)$ - bzw. $(0, 2)$ -Tensoren. Obwohl wir später meist nur solche Tensoren niedriger Stufe betrachten werden,

haben wir Tensoren beliebiger Stufe definiert, zumal die Ausführbarkeit gewisser Operationen einen unbegrenzten Vorrat an Tensoren erfordert.

Tensoren gleicher Stufe können in Verallgemeinerung von (57) addiert und vervielfacht werden; z. B. ist

$$\begin{aligned}(t + u)(x, y, z; l, m) &:= t(x, y, z; l, m) + u(x, y, z; l, m) \\ (ct)(x, y, z; l, m) &:= ct(x, y, z; l, m).\end{aligned}$$

Tensoren beliebiger Stufen können in Verallgemeinerung des Beispiels (4.5) multipliziert werden²¹; beispielsweise ist für (2, 1)-Tensoren v und (1, 1)-Tensoren w

$$(vw)(x, y, z; l, m) := v(x, y; l) \cdot w(z, m)$$

Die Tensoren ein und derselben Stufe bilden jeweils einen Vektorraum; die Multiplikation von Tensoren ist assoziativ, distributiv und kommutativ.

Ist t ein (r, s) -Tensor, a_1, \dots, a_n eine Basis von V und a^1, \dots, a^n die dazu duale Basis von V^* , dann lässt sich t mit Hilfe der Werte für die Basisvektoren

$$t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = t(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}; a^{j_1}, \dots, a^{j_s}) \quad (63)$$

darstellen.²² Umgekehrt definieren n^{r+s} Zahlen $t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ stets einen Tensor der Stufe (r, s) .²³

Dieser Darstellungssatz umfasst die entsprechenden Sätze für lineare Funktionale und Bilinearformen. Offenbar bestimmen die Koordinaten eines kontravarianten Vektors $x \in V$ einen $(0, 1)$ -Tensor.

Bezüglich einer Basis kann jedem (r, s) -Tensor mit $r, s \geq 1$ folgendermaßen ein $(r-1, s-1)$ -Tensor durch Verjüngung zugeordnet werden:

$$t_{i_1 \dots i_{\rho-1} i_{\rho+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} j_{\sigma+1} \dots j_s} := \sum_{k=1}^n t_{i_1 \dots i_{\rho-1} k i_{\rho+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} k j_{\sigma+1} \dots j_s}$$

Der Nachteil dieser Definition besteht in ihrem Bezug zu einer Basis. Es erweist sich aber, dass es gleichgültig ist, ob wir erst verjüngen und dann eine Koordinatentransformation durchführen oder erst transformieren und dann verjüngen:

$$\bar{t}_{i_1 \dots i_{\rho-1} i_{\rho+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} j_{\sigma+1} \dots j_s} = \sum_{k=1}^n \bar{t}_{i_1 \dots i_{\rho-1} k i_{\rho+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} k j_{\sigma+1} \dots j_s} \quad (64)$$

Bevor wir (64) beweisen, bemerken wir, dass der folgende Sonderfall einer Verjüngung

$$\sum_{k=1}^n u_{g_1 \dots g_{\pi-1} k g_{\pi+1} \dots g_p}^{h_1 \dots h_q} v_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} k j_{\sigma+1} \dots j_s} = \sum_{k=1}^n v_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\sigma-1} k j_{\sigma+1} \dots j_s} u_{g_1 \dots g_{\pi-1} k g_{\pi+1} \dots g_p}^{h_1 \dots h_q}$$

Überschiebung genannt wird; für Bilinearformen handelt es sich hierbei um Matrizenmultiplikation.

²¹Diese Multiplikation darf nicht mit der Multiplikation von Matrizen verwechselt werden.

²²Die Komponenten $t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ ändern sich im allgemeinen beim Übergang zu einer anderen Basis; dabei sind die Transformationsgleichungen (67) zu beachten.

²³Irrtümer können entstehen, wenn ein System von n^{r+s} Zahlen schon ein gewisses Transformationsverhalten besitzt, das von (67) abweicht und auf das nicht verzichtet werden kann (vgl. (73) in Abschnitt 4.4.) ; dann sind besondere Überlegungen erforderlich.

Dem Beweis von (64) stellen wir einige Bemerkungen über Koordinatentransformationen voran: Sind a_1, \dots, a_n und $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ zwei Basen von V mit ihren Dualen a^1, \dots, a^n bzw. $\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^n$, dann gibt es Koeffizienten a_i^j und \tilde{a}_i^j mit

$$\bar{a}_i = a_i^j a_j \quad , \quad \bar{a}^j = \tilde{a}_i^j a^i$$

Die Matrizen (a_i^j) und (\tilde{a}_i^j) sind zueinander invers, denn es gilt nach (60)

$$\delta_i^j = \bar{a}^j(\bar{a}_i) = \tilde{a}_\rho^j a^\rho(a_i^{\sigma} a_\sigma) = a_i^{\sigma} \tilde{a}_\rho^j h^{\rho\sigma} \delta_\sigma^i = a_i^{\sigma} \tilde{a}_\sigma^j \quad (65)$$

Für die Koordinaten eines Vektors $x = x^i a_i = \bar{x}^i \bar{a}_i \in V$ bzw. einer Linearform $l = l_i a^i = \bar{l}^i \bar{a}_i \in V^*$ folgt aus

$$x^i a_i = x = \bar{x}^\rho \bar{a}_\rho = a_\rho^i \bar{x}^\rho a_i$$

bzw. entsprechend aus

$$l_i a^i = l = \bar{l}_\rho \bar{a}^\rho = \tilde{a}_i^\rho \bar{l}_\rho a^i$$

wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von x bzw. l bezüglich der Basis bzw. ihrer Dualen $x^i = a_\rho^i \bar{x}^\rho$, $l_i = \tilde{a}_i^\rho \bar{l}_\rho$ oder, da $(\tilde{a}_i^j) = (a_i^j)^{-1}$ besteht,

$$\bar{x}^j = \tilde{a}_i^j x^i \quad , \quad \bar{l}_j = a_j^i l_i \quad (66)$$

Hieraus ergeben sich die Transformationsgleichungen für einen (r, s) -Tensor t , weil für jedes $(r + s)$ -Tupel der Wert von t von der Basis unabhängig sein muss:

$$\bar{t}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = t_{\rho_1 \dots \rho_r}^{\sigma_1 \dots \sigma_s} a_{i_1}^{\rho_1} \dots a_{i_r}^{\rho_r} \tilde{a}_{\sigma_1}^{j_1} \dots \tilde{a}_{\sigma_s}^{j_s} \quad (67)$$

Nunmehr ist die Gültigkeit von (64) offensichtlich.

Aufgaben

1. Man beweise die Assoziativität der Addition von Linearformen und etwa die Regel (58.4).
2. Man zeige, dass die Projektionen (59) linear sind.
3. Im Anschauungsraum betrachten wir neben der orthonormierten Basis i, j, k noch die Basis $\bar{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{a}_2 = (-1, 1, 1)$ und $\bar{a}_3 = (0, 0, -1)$. Man gebe
 - a) die Matrizen (a_i^j) und (\tilde{a}_i^j) , b) \bar{t}_{ij} für das Skalarprodukt t mit Hilfe von $\bar{t}_{ij} = \bar{a}_i \bar{a}_j$ und gemäß (67) an.

4.4 Tensoranalysis

Wir knüpfen hier an den Schluss von Abschnitt 4.2. an, denn für die Riemannsche Geometrie benötigen wir die Anwendung der Tensorrechnung auf die Tangentialräume $T(P)$. Dabei werden wir uns der Koordinatendarstellungen bedienen, und zwar der Koordinatendarstellungen bezüglich ausgezeichneter Basen:

Zunächst besitzt E^n die ausgezeichnete Basis der Vektoren

$$(0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$$

Bezüglich einer Karte f_M hatten wir in $T(P_0)$ eine Basis eingeführt, indem wir durch das Bild \bar{P}_0 von P_0 Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt und dann ihre Urbilder betrachtet hatten.

Im Zusammenhang mit der Definition von Addition und Vervielfachung im Tangentialraum $T(P_0)$ bedeutet diese Festlegung, dass ein beliebiger Vektor aus $T(P_0)$ und der ihm zugeordnete Vektor in E^n ein und dieselbe Koordinatendarstellung besitzen, nämlich

$$(\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) \quad (68)$$

wenn die Bilder bei f_M die Koordinaten (u^1, \dots, u^n) haben. Eine zulässige Koordinatentransformation

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n) \quad (69)$$

ergibt zwangsläufig

$$\dot{\bar{u}}^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \dot{u}^j \quad (70)$$

oder - mit den Bezeichnungen von (66) -

$$\tilde{a}_j^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}, \quad a_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \quad (66')$$

d. h., dass beim Übergang von einer ausgezeichneten Basis zu einer anderen nur die (zueinander inversen) Funktionalmatrizen (66') zu beachten sind (vgl. auch den Anhang zu Abschnitt I.2.4.).

Die Ableitung der Koordinatenfunktionen führte zu den Koordinaten der Vektoren von $T(P_0)$. Aus der Kurven- und Flächentheorie wissen wir bereits, dass in der Differentialgeometrie höhere Ableitungen nach den Parametern gebraucht werden. Bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entsprechen den zwei Flächenparametern nunmehr n Variable; außerdem haben wir darauf zu achten, dass den zu erklärenden Ableitungen eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zukommen muss. Wir gehen schrittweise vor:

1. Gegeben sei eine (skalarwertige) Funktion

$$f = f(u^1, \dots, u^n) = \bar{f}(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n) \quad (71)$$

für deren partielle Ableitungen nach der Kettenregel

$$f_{,j} = \bar{f}_{,i} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}$$

gilt. Nach (66') können wir sagen, dass dem n -Tupel

$$(f_{,1}, \dots, f_{,n}) \quad (72)$$

eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zukommt, dass die partielle Ableitung dem Skalarfeld (71) das Gradientenfeld (72) zuordnet. Da (72) die Koordinatendarstellung eines Feldes von Linearformen (= kovarianten Vektoren) ist, nennt man den Übergang von (71) zu (72) kovariante Ableitung.

2. Gegeben sei ein kontravariantes Vektorfeld

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$$

Aus $\bar{x}^i = \tilde{a}_j^i x^j$ erhalten wir nach (66') und der Produktregel

$$\bar{x}_{,k}^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} x_{,r}^j \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^k} + \frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^j \partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^k} \cdot x^j \quad (73)$$

diese partiellen Ableitungen transformieren sich leider nicht wie ein $(1, 1)$ -Tensorfeld, da der zweite Summand der rechten Seiten im allgemeinen nicht verschwindet. Der partiellen Ableitung kommt also keine invariante Bedeutung zu.

Dieses Resultat konnten wir jedoch nach den Ergebnissen des Abschnittes 3.3. erwarten: Die Ableitung einer Schar von Vektoren in den jeweiligen Tangentialebenen ergibt nicht automatisch Vektoren der Tangentialebene; mit Hilfe der Christoffelsymbole konnten wir jedoch in (15') eine Differentiation im Rahmen der inneren Geometrie einer Fläche angeben.

Wir machen für eine kovariante Ableitung den Ansatz

$$x^i_{;k} = x^i_{,k} + \Lambda^i_{jk}(u^1, \dots, u^n) \cdot x^j \quad (74)$$

Zunächst können wir feststellen, dass (74) folgende Regel ergibt:

$$(ax^i + by^j)_{;k} = a \cdot x^i_{;k} + b \cdot y^j_{;k}$$

Andererseits ist der Faktor Λ^i_{jk} im Korrekturglied von der Karte f_M abhängig; bezüglich einer anderen Karte wird ein Faktor $\overline{\Lambda^i_{jk}}(\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^n)$ zu verwenden sein.

Der Formel (74) kommt eine vom gewählten Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zu, wenn sich die $x^i_{;k}$ als Koordinaten eines $(1, 1)$ -Tensors erweisen:

$$\overline{x^i_{;k}} = \tilde{a}^i_r x^r_{;s} a^s_k \quad (75)$$

Daraus ergibt sich für die Faktoren $\overline{\Lambda^i_{jk}}$ nach (73)

$$\overline{\Lambda^i_{rk}} \tilde{a}^r_s x^s = \overline{\Lambda^i_{rk}} \overline{x^r} = \overline{x^i_{;k}} - \overline{k^i} = \tilde{a}^i_r x^r_{;t} a^t_k - \tilde{a}^i_r x^r_{,t} a^t_k - \frac{\partial^2 \overline{u}^i}{\partial u^r \partial u^t} a^t_k x^r = \tilde{a}^i_r \Lambda^r_{st} a^t_k x^s - \frac{\partial^2 \overline{u}^i}{\partial u^s \partial u^t} a^t_k x^s$$

für alle kontravariante Vektorkoordinaten x^s , d. h.

$$\overline{\Lambda^i_{rk}} \tilde{a}^r_s = \tilde{a}^i_r \Lambda^r_{st} a^t_k - \frac{\partial^2 \overline{u}^i}{\partial u^s \partial u^t} a^t_k$$

Indem wir beide Seiten der Gleichung mit a^s_j multiplizieren und addieren, erhalten wir wegen $\tilde{a}^r_s a^s_j = \delta^r_j$ schließlich

$$\overline{\lambda^i_{jk}} = \tilde{a}^i_r \Lambda^r_{st} a^s_j a^t_k - \frac{\partial^2 \overline{u}^i}{\partial u^s \partial u^t} a^s_j a^t_k \quad (76)$$

Es genügt also, bezüglich einer Karte geeignete Λ^i_{jk} zu besitzen; denn gemäß (76) lassen sich dann stets $\overline{\lambda^i_{jk}}$ berechnen, so dass (75) erfüllt ist. Die notwendige Überprüfung überlassen wir dem Leser als Aufgabe.

Beispiel

(4.6) In der inneren Geometrie einer Fläche kann $\Lambda^i_{jk} := \Gamma^i_{jk}$ gesetzt werden (vgl. Aufgabe 1). Ist ein Vektorfeld $v^i = v^i(u^1(t), u^2(t))$ längs einer Kurve $u^i = u^i(t)$ gegeben (vgl. Abschnitt 3.3.), dann kann die absolute Ableitung längs der Kurve nach (15') in der Form

$$\frac{D(v(u^j(t)))}{dt} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{jk} v^j \right) \dot{u}^k P_i = v^i_{;k} \dot{u}^k P_i$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\frac{Dv^i}{dt} = v^i_{;k} \dot{u}^k$$

notiert werden. Die Bedingung (46) für die Parallelverschiebung vereinfacht sich zu

$$v^i_{;k} \dot{u}^k = 0$$

und $u^i_{;k} u^k = 0$ kennzeichnet eine Geodätische.

Die kovariante Ableitbarkeit kontravarianter Vektorfelder hängt von der Existenz geeigneter $\Lambda^i_{jk}(u^1, \dots, u^n)$ ab; im allgemeinen sind diese Faktoren nicht eindeutig.

Die Mühsal im Zusammenhang mit der Definition einer kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes braucht keine Furcht vor der Definition der kovarianten Ableitung beliebiger Tensorfelder aufkommen zu lassen. Wie wir sogleich sehen werden, können solche Ableitungen mit Hilfe geeigneter Λ^i_{jk} entsprechend (74) gebildet werden.

3. Gegeben sei ein kovariantes Vektorfeld

$$l_i = l_i(u^1, \dots, u^n) \quad (77)$$

Wir betrachten noch ein beliebiges kontravariantes Vektorfeld x^i . Wir erhalten eine kovariante Ableitung von (77), indem wir die Gültigkeit der Produktregel postulieren: Aus

$$(l_i x^i)_{;k} = [l_{i;k} x^i + l_i x^i_{;k}] = l_{i;j} x^i + l_i (x^i_{;k} + \Lambda^i_{jk} x^j)$$

folgt nach Subtraktion der Gleichung

$$(l_i x^i)_{;k} = [(l_i x^i)]_{;k} = l_{i;k} x^i + l_i x^i_{;k}$$

zunächst $0 = l_{j;k} x^j - l_{j,k} x^j + l_i \Lambda^i_{jk} x^j$ für alle x^j , d. h.

$$l_{j;k} = l_{j,k} - \Lambda^i_{jk} l_i \quad (74')$$

4. Gegeben sei ein (r, s) -Tensorfeld

$$t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(u^1, \dots, u^n)$$

In Verallgemeinerung des Vorgehens im Schritt 3 ergibt sich

$$t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r; k} = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r, k} + \sum \Lambda^{j_\sigma}_{jk} t^{j_1 \dots j_{\sigma-1} j_{\sigma+1} \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} - \sum \Lambda^i_{i_\rho k} t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_{\rho-1} i_{\rho+1} \dots i_r} \quad (78)$$

wodurch nach (76) ein $(r, s + 1)$ -Tensor bestimmt ist. Die leichte, aber aufwendige Durchrechnung in Bezug auf das Transformationsverhalten wollen wir uns ersparen.

Da die kovariante Ableitung (78) wieder einen Tensor ergibt, können wir genau so oft kovariant ableiten, wie $t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r; k}$ partiell differenziert werden kann.

Aufgaben

1. Wenn ein Tensor bezüglich einer Karte konstante Glieder hat, braucht die kovariante Ableitung nicht zu verschwinden. Man zeige jedoch

$$\delta^i_{j;k} = 0$$

($\delta_{ij;k}$ und δ^i_{jk} verschwinden im allgemeinen nicht!)

2. Man bestimme die kovariante Ableitung eines $(1, 1)$ -Tensorfeldes bezüglich

$$\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{jk}(u^1, \dots, u^n).$$

Anleitung. Ist $b_j^i = b_j^i(u^1, \dots, u^n)$ gegeben, dann wende man auf $l_i b_j^i x^j$ die Produktregel an (vgl. den Punkt 3 zur Bestimmung der kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektorfeldes).

3. Man zeige, dass die Christoffelsymbole Γ_{jk}^i das Transformationsverhalten (76) besitzen.

Anleitung. Wegen $P_r = \bar{P}_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^r}$ gilt

$$P_{st} = \bar{P}_{jk} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^s} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^t} + \bar{P}_i \frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^s \partial u^t}$$

Man benutze jetzt die Ableitungsgleichungen von Gauß, beachte $P_r = a_r^i \bar{P}_i$ und vergleiche die Koeffizienten von \bar{P}_i .

4.5 Affin zusammenhängende Räume

Wie wir in den Abschnitten 4.2. und 4.4. gesehen haben, sichert eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k die Existenz der Tangentialräume $T(P)$, aber für $k > 1$ nicht ohne weiteres höhere Ableitungen.

Dazu benötigen wir ein Feld $\Lambda_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i(u^1, \dots, u^n)$ für jede Karte, das das Transformationsverhalten (76) besitzt. In diesem Abschnitt sei nun eine bogenweise zusammenhängende, n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k zusammen mit einem Feld²⁴

$$\Lambda_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i(u^1, \dots, u^n) = \Lambda_{kj}^i \quad (79)$$

für jede Karte, kurz: ein affin zusammenhängender Raum gegeben.

Solche Räume besitzen bereits bemerkenswerte geometrische Eigenschaften. Zunächst wollen wir jedoch die Bedeutung der Symmetrie in den unteren Indizes von Λ_{jk}^i für die Bildung kovarianter Ableitungen herausstellen.

Dabei stoßen wir, die stetige Differenzierbarkeit von Λ_{jk}^i vorausgesetzt, zu einer invarianten Größe in Form eines Tensors für jeden Punkt:

Die kovarianten Ableitungen eines beliebigen Tensorfeldes sind durch $f_{;k} := f_{,k}$ für Skalarfelder, durch (74) und durch die Forderung nach der Gültigkeit der Produktregel vollständig bestimmt. Wegen der Linearität der Korrekturglieder haben wir die Additivität

$$\left(t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + u_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \right)_{;k} = t_{i_1 \dots i_r; k}^{j_1 \dots j_s} + u_{i_1 \dots i_r; k}^{j_1 \dots j_s}$$

Welche Regeln bestehen neben Additivität und Produktregel? Kann die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden? Für kontravariante Vektorfelder gilt

$$\begin{aligned} x^i_{;j;k} &= x^i_{,j;k} + \Lambda_{rk}^i x^r_{;j} - \Lambda_{jk}^s x^i_{,s} \\ &= x^i_{,j;k} + \Lambda_{rj,k}^i x^r - \Lambda_{rj}^i x^r_{,k} + \Lambda_{rk}^i x^r_{,j} + \Lambda_{rk}^i \Lambda_{sj}^r x^s - \Lambda_{jk}^s x^i_{,s} - \Lambda_{jk}^s \Lambda_{ts}^i x^t \end{aligned}$$

und entsprechend

$$x^i_{;k;j} = x^i_{,k;j} + \Lambda_{rk,j}^i x^r - \Lambda_{rk}^i x^r_{,j} + \Lambda_{rj}^i x^r_{,k} + \Lambda_{rj}^i \Lambda_{sk}^r x^s - \Lambda_{kj}^s x^i_{,s} - \Lambda_{kj}^s \Lambda_{ts}^i x^t$$

Auf Grund der Symmetrieeigenschaft $\Lambda_{jk}^i = \Lambda_{kj}^i$ erhalten wir somit

$$x^i_{;j;k} - x^i_{;k;j} = (\Lambda_{sj,k}^i - \Lambda_{sk,j}^i + \Lambda_{rk}^i \Lambda_{sj}^r - \Lambda_{rj}^i \Lambda_{sk}^r) x^s$$

²⁴Die Symmetrie in den unteren Indizes hat invariante Bedeutung, demnach (76) bleibt diese Eigenschaft bei Koordinatentransformationen erhalten.

Indem wir den Klammersausdruck mit (16'') vergleichen, führen wir für ihn die Abkürzung R_{sjk}^i ein. Die rechte Seite bestimmt als Differenz der entsprechenden Glieder zweier Tensoren selbst einen Tensor. Das ergibt

$$\bar{R}_{sjk}^i = \tilde{a}_r^i R_{tuv}^r a_s^t a_j^u a_k^v$$

wegen

$$\bar{R}_{sjk}^i \bar{x}^s = \bar{R}_{sjk}^i \tilde{a}_\rho^s x^\rho = \tilde{a}_r^i R_{\rho uv}^r x^\rho a_j^u a_k^v$$

R_{sjk}^i bestimmt einen Tensor, den Krümmungstensor im betrachteten Punkt.

Wie wir nach (19) vor dem Theorema egregium wissen, verschwindet R_{sjk}^i im allgemeinen nicht, sondern steht für $n = 2$ in einem engen Zusammenhang zur Gaußschen Krümmung der Fläche. Die Bedeutung des Krümmungstensors wird in Abschnitt 4.8. bei beliebiger Dimension noch ausführlich diskutiert.

Neben diesem formalen Zugang zum Krümmungstensor kann auch ein geometrischer angegeben werden. Wir erinnern daran, dass die Holonomiegruppen in Punkten einer Kugel und eines Möbiusschen Bandes charakteristische Unterschiede aufweisen (vgl. Beispiel (3.13)); für Zylinderflächen bestehen die Holonomiegruppen in jedem Punkt nur aus der identischen Abbildung. Wir wollen im folgenden den für diese Aussagen grundlegenden Begriff der Parallelverschiebung längs eines Weges aus Abschnitt 3.9. verallgemeinern. Es sei

$$u^i = u^i(t) \tag{80}$$

ein glatter Weg. Wir nennen Vektoren mit den Koordinaten $x^i = x^i(t)$ längs (80) parallel verschoben genau dann, wenn

$$\frac{Dx^i(t)}{dt} := x^i_{;k} \dot{u}^k = \frac{dx^i}{dt} + \Lambda_{jk}^i x^j \dot{u}^k$$

für alle t verschwindet. Es ist möglich, jeden Vektor x_0^i aus $T(P_0)$ mit $P_0 := P(u^1(t_0), \dots, u^n(t_0))$ längs (80) parallel zu verschieben, indem das Differentialgleichungssystem

$$\frac{D(x^i(t))}{dt} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x^i(t_0) = x_0^i$, gelöst wird. Insgesamt ergibt das eine vom Weg (80) abhängige Abbildung $\alpha(t) : T(P_0) \rightarrow T(P(t))$, die wegen

$$\frac{D(ax^i(t) + by^i(t))}{dt} = (ax^i + by^i)_{;k} \dot{u}^k = ax^i_{;k} \dot{u}^k + by^i_{;k} \dot{u}^k = a \frac{Dx^i}{dt} + b \frac{Dy^i}{dt}$$

linear ist. Deshalb können wir sagen, dass Λ längs beliebiger Wege einen "linearen Zusammenhang" zwischen den für jeden Punkt definierten Tangentialräumen herstellt.²⁵

Besonders interessant ist die Menge der Abbildungen eines Tangentialraumes $T(P_0)$ auf sich, die im Ergebnis der Parallelverschiebung von $T(P_0)$ längs geschlossener, stückweise glatter Wege durch P_0 , entstehen (Abb. 43, aber auch Abb. 23 und 24).

Offenbar ergibt die Nacheinanderausführung und die Umkehrung solcher Abbildungen wieder eine Abbildung derselben Art, so dass eine Abbildungsgruppe, die Holonomiegruppe in P_0 , vorliegt. Für affin zusammenhängende Räume sind die Holonomiegruppen, wie man leicht sieht, vom speziellen Punkt in dem Sinne unabhängig, dass sie isomorph sind (Abb. 42a, b); sie stellen ein Charakteristikum des Raumes dar.

²⁵Wird in (79) auf die Symmetrie in den unteren Indizes verzichtet, dann liegt statt eines affin zusammenhängenden Raumes nur ein linear zusammenhängender Raum vor. Dann ist neben dem Krümmungs- noch der sogenannte Torsionstensor zu beachten. Von diesen Begriffen ausgehend, führt die Spezialisierung (79) zu einem symmetrischen linearen oder torsionsfreien Zusammenhang.

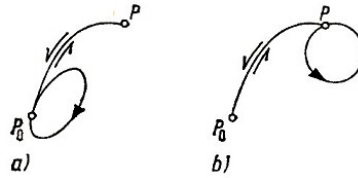


Abb. 42

Wir untersuchen nun wie D. Laugwitz geschlossene Wege, die Urbilder von Parallelogrammen im E^n sind: Unter der Voraussetzung, dass a, b in E^n linear unabhängig sind und o. B. d. A. $P : 0 = P(0, \dots, 0)$ gilt, sei (Abb. 43)

$$u_\varepsilon^i(t) = \begin{cases} \varepsilon t a^i & 0 \leq t \leq 1 \\ \varepsilon(a^i + (t-1)b^i) & 1 \leq t \leq 2 \\ \varepsilon(a^i + b^i - (t-2)a^i) & 2 \leq t \leq 3 \\ \varepsilon(1 - (t-3))b^i & 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad (80')$$

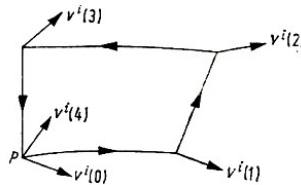


Abb. 43

Da wir für Λ_{jk}^i eine Taylorentwicklung nutzen wollen, setzen wir Λ_{jk}^i als zweimal stetig differenzierbar und o. B. d. A. $\Lambda_{jk}^i(0, \dots, 0) = 0$ voraus.²⁶ Dann gilt

$$\Lambda_{jk}^i(u^1(t), \dots, u^n(t)) = \Lambda_{jk,l}^i(0, \dots, 0)u^l(t) + R_{jk}^i \quad (80a)$$

mit einem Restglied R_{jk}^i .

Wir verschieben einen beliebigen Vektor x_0^i , längs des Weges (80') und erhalten $x^i = x^u(t)$. In jedem der vier t -Intervalle betrachten wir eine Taylorentwicklung vom Anfangspunkt aus:

$$x^i(t_j + h) = x^i(t_j) + \dot{x}^i(t_j^+)h + \frac{1}{2}\ddot{x}^i(t_j^+)h^2 + \dots$$

mit $t_j = 0, 1, 2, 3$ und $0 \leq h \leq 1$. Für $h = 1$ gilt insbesondere

$$x^i(t_j + 1) = x^i(t_j) + \dot{x}^i(t_j^+) + \frac{1}{2}\ddot{x}^i(t_j^+) + \dots \quad (80b)$$

Da es sich um eine Schar paralleler Vektoren handelt, muss in jedem der vier t -Intervalle nach (80a)

$$\dot{x}^i = -\Lambda_{jk}^i x^j \dot{u}^k = -\Lambda_{jk,l}^i(0, \dots, 0)x^j \dot{u}^k \dot{u}^l + \dots \quad (80c)$$

$$\ddot{x}^i = -\Lambda_{jk,l}^i x^j \dot{u}^k \dot{u}^l + \Lambda_{jk}^i \Lambda_{rs}^j x^r \dot{u}^s \dot{u}^k + \dots \quad (80d)$$

²⁶Das ist wegen der Symmetrie in den unteren Indizes möglich: Aus $\bar{\Lambda}_{jk}^i = \bar{\Lambda}_{kj}^i$ folgt mit der Koordinatentransformation $u^i := \bar{u}^i + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_{jk}^i(0, \dots, 0)\bar{u}^j \bar{u}^k$, deren Funktionaldeterminante wegen

$$a_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} = \delta_j^i + \bar{\Lambda}_{jk}^i(0, \dots, 0)\bar{u}^k$$

in P_0 sogar 1 und somit in einer Umgebung U_{P_0} gewiss von null verschieden ist,

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} = \bar{\Lambda}_{jk}^i(0, \dots, 0)$$

Das ergibt $\Lambda_{jk}^i(0, \dots, 0) = 0$ nach (76), w. z. b. w.

gelten, insbesondere

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^i(0^+) &= 0 \\
 \dot{x}^i(1^+) &= -\varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i(0, \dots, 0) x^j(1) b^k a^l + \varepsilon^3(\dots) \\
 \dot{x}^i(2^+) &= \varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i(0, \dots, 0) x^j(2) a^k (a^l + b^l) + \varepsilon^3(\dots) \\
 \dot{x}^i(3^+) &= \varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i(0, \dots, 0) x^j(3) b^k b^l + \varepsilon^3(\dots)
 \end{aligned} \tag{80e}$$

sowie entsprechend

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}^i(0^+) &= -\varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i x^j(0) a^k a^l + \varepsilon^3(\dots) \\
 \ddot{x}^i(1^+) &= -\varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i x^j(1) b^k b^l + \varepsilon^3(\dots) \\
 \ddot{x}^i(2^+) &= -\varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i x^j(2) a^k a^l + \varepsilon^3(\dots) \\
 \ddot{x}^i(3^+) &= -\varepsilon^2 \Lambda_{jk,l}^i x^j(3) b^k b^l + \varepsilon^3(\dots)
 \end{aligned} \tag{80f}$$

Da wir Glieder mit ε^3 vernachlässigen wollen, können wir nach (80b, c, d) in (80e, f) den Vektor $x^i(t_j)$ durch x_0^i ersetzen, speziell erhalten wir dann

$$\ddot{x}^i(2^+) = \ddot{x}^i(0^+) + \varepsilon^3(\dots) \quad \text{und} \quad \ddot{x}^i(3^+) = \ddot{x}^i(1^+) + \varepsilon^3(\dots)$$

Wir interessieren uns abschließend für die Differenz $x^i(4) - x_0^i$. Nach (80b) gilt

$$\begin{aligned}
 x^i(4) - x_0^i &\approx x^i(3) + \dot{x}^i(3^+) + \frac{1}{2} \ddot{x}^i(3^+) - x_0^i \\
 &\approx x^i(2) + \dot{x}^i(3^+) + \dot{x}^i(2^+) + \frac{1}{2} (\ddot{x}^i(3^+) + \ddot{x}^i(2^+)) - x_0^i \\
 &\dots \\
 &\approx \dot{x}^i(3^+) + \dot{x}^i(2^+) + \dot{x}^i(1^+) + \ddot{x}^i(1^+) + \ddot{x}^i(0^+) \\
 &\approx \varepsilon^2 (\Lambda_{jk,l}^i x_0^j a^k b^l - \Lambda_{jk,l}^i x_0^j b^k a^l) \\
 &\approx \varepsilon^2 (\Lambda_{jk,l}^i - \Lambda_{jl,k}^i) x_0^j a^k b^l = \varepsilon^2 R_{jkl}^i x_0^j a^k b^l
 \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$x^i(4) = x_0^i + \varepsilon^2 R_{jkl}^i(0, \dots, 0) x_0^j a^k b^l + \varepsilon^3(\dots)$$

zeigt, dass die Änderung von x_0^i für hinreichend kleine ε im wesentlichen durch den Krümmungstensor bestimmt wird; sie kann auch in der Form

$$\alpha_j^i \approx \delta_j^i + \varepsilon^2 R_{jkl}^i a^k b^l$$

geschrieben werden.

Aufgaben 1. Man berechne für ein kovariantes Vektorfeld $l_i = l_i(u^1, \dots, u^n)$ die Differenz $l_{i;j;k} - l_{i;k;l}$.

2. Man zeige, dass $R_{jkl}^i = 0$ in U_{P_0} genau dann gilt, wenn die Holonomiegruppe für in U_{P_0} verlaufende Wege nur aus der Identität besteht.

4.6 Riemannsche Räume

Zu Beginn des Abschnittes 4.1. hatten wir für die innere Geometrie einer Fläche zwei wesentliche Aspekte hervorgehoben: Angabe einer zulässigen Parameterdarstellung und Berechnung

von Längen. Während ersteres seine Verallgemeinerung in affin zusammenhängenden Räumen findet, ist die Längenmessung nach wie vor noch offen. Da zu einer Metrik in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit stets ein wohlbestimmter affiner Zusammenhang gehört, erklären wir

Definition. Ein Riemannscher Raum ist eine bogenweise zusammenhängende, n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k mit einem symmetrischen (Maß-) Tensorfeld, das bezüglich einer Karte durch

$$g_{ik} = g_{ik}(u^1, \dots, u^n)$$

gegeben sei. Die Länge einer durch $u^i = u^i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ dargestellten Kurve ist per definitionem

$$s = s(t_1) - s(t_0) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k} d\tau$$

Die Länge ist eine (nicht negative) reelle Zahl, wenn $g_{ik} x^i x^k > 0$ für alle Vektoren ungleich dem Nullvektor gilt, wenn g_{ik} eine positiv definite quadratische Form bestimmt. Will man jedoch die Raum-Zeit der Relativitätstheorie von A. Einstein studieren, dann sind nicht reelle Längen zuzulassen.

Außerdem werden wir noch geeignete Differenzierbarkeitsvoraussetzungen festlegen.

Neben der Längenmessung von Kurven besitzen wir sogleich eine Metrik in den Tangentialräumen. Im Fall der positiven Definitheit werden alle Tangentialräume euklidische E^n , und wir haben

$$|x| = \sqrt{g_{ik} x^i x^k} \quad , \quad \cos \angle(x, y) = \frac{g_{ik} x^i y^k}{\sqrt{g_{ik} x^i x^k} \sqrt{g_{ik} y^i y^k}}$$

natürlich können wir auch in der gewohnten Art und Weise Winkel zwischen zwei Kurven in einem Schnittpunkt berechnen. Falls keine positive Definitheit vorliegt, sind pseudo-euklidische Räume zu betrachten; hierauf gehen wir im Rahmen dieser Einführung nicht weiter ein.

Wir wenden uns nun der kovarianten Ableitung von Tensorfeldern in Riemannschen Räumen zu. Nach Abschnitt 4.4. benötigen wir dazu einen linearen Zusammenhang. Wir setzen das Tensorfeld $g_{ik} = g_{ik}(u^1, \dots, u^n)$ als stetig differenzierbar voraus und setzen wie in (14)

$$\Gamma_{ij}^h := \frac{g^{hk}}{2} (-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}) \quad (81)$$

Zunächst überlegen wir uns, dass (81) einen affinen Zusammenhang ergibt:

Gemäß (67) gilt

$$\bar{g}_{ij} = g_{rs} a_i^r a_j^s \quad , \quad \bar{g}^{ij} = g^{rs} \tilde{a}_r^i \tilde{a}_s^j \quad (82)$$

hiernach besitzen die Γ_{ij}^h folgendes Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^h &= \frac{\bar{g}^{hk}}{2} (-\bar{g}_{ij,k} + \bar{g}_{jk,i} + \bar{g}_{ki,j}) \\ &= \tilde{a}_\rho^h \tilde{a}_\sigma^k \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \left(-g_{rs,t} a_i^r a_j^s a_k^t - g_{rs} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^k} a_j^s - g_{rs} a_i^r \frac{\partial^2 u^s}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} + g_{rs,t} a_j^r a_k^s a_i^t + g_{rs} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^i} a_k^s \right. \\ &\quad \left. + g_{rs} a_j^r \frac{\partial^2 u^s}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{u}^i} + g_{rs,t} a_k^r a_i^s a_j^t + g_{rs} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{u}^j} a_i^s + g_{rs} a_k^r \frac{\partial^2 u^s}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^k} \right) \\ &= \tilde{a}_\rho^h \Gamma_{\sigma\tau}^\rho a_i^\sigma a_j^\tau + \tilde{a}_\rho^h \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} = \tilde{a}_\rho^h \Gamma_{\sigma\tau}^\rho a_i^\sigma a_j^\tau - \frac{\partial^2 \bar{u}^h}{\partial \bar{u}^r \partial \bar{u}^s} a_i^r a_j^s \end{aligned}$$

denn aus $\tilde{a}_r^h a_i^r = \delta_i^h$ folgt bei der partiellen Ableitung nach \bar{u}^j

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^h}{\partial u^r \partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^i} a_i^r + \tilde{a}_r^h \frac{\partial^2 u^r}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^i} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{a}_\rho^h \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^i} = -\frac{\partial^2 \bar{u}^h}{\partial u^r \partial u^s a_i^r a_j^s}$$

Damit erfüllen die Γ_{ij}^h die Bedingung (76); sie erzeugen wegen $\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$ einen affinen Zusammenhang, w. z. b. w.

Die Parallelverschiebung längs beliebiger Wege $u^i = u^i(t)$, die mittels Γ erklärt wird, hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie die Länge der Vektoren erhält, dass sie folglich die Tangentialräume $T(P_0)$ und $T(P)$ bezüglich der Punkte P_0 und P des Weges isometrisch aufeinander abbildet.

Beweis. Es sei

$$\frac{Dx^i(t)}{dt} = x_{;k}^i \dot{u}^k = 0 = y_{;k}^i \dot{u}^k = \frac{Dy^i(t)}{dt} \quad (83)$$

Wir bilden die Ableitung

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(u^1, \dots, u^n) x^i y^j = g_{ij,k} x^i y^j \dot{u}^k + g_{ij} \dot{x}^i y^j + g_{ij} x^i \dot{y}^j$$

wegen (83) lässt sich die rechte Seite umformen:

$$g_{ij;k} x^i y^j \dot{u}^k + g_{ij} (-\Gamma_{rs}^i x^r \dot{u}^s) y^j + g_{ij} x^i (-\Gamma_{rs}^j y^r \dot{u}^s) = (g_{ij,k} - g_{ij} \Gamma_{ik}^t - g_{ij} \Gamma_{jk}^t) x^i y^j \dot{u}^k$$

Die letzte Klammer verschwindet nach (81), so dass wir

$$\frac{d}{dt} g_{ij} x^i y^j = 0 \quad (84)$$

erhalten. Aus (84) folgt für $x^i = y^i$ die Konstanz der Längen und danach die Konstanz der Winkelgrößen, w. z. b. w.

Nennen wir einen affinen Zusammenhang Λ_{ij}^h mit der Metrik des Riemannschen Raumes verträglich genau dann, wenn die zugehörigen Parallelverschiebungen Isometrien sind, dann können wir das obige Resultat noch verschärfen:

Die Γ_{ij}^h bestimmen den einzigen mit der Metrik verträglichen affinen Zusammenhang.

Beweis. Wir betrachten die kovariante Ableitung bezüglich $\Lambda_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h$. Wegen der Metrikinvarianz der Parallelverschiebung gilt für beliebige kontravariante Vektorfelder und Wege

$$0 = \frac{D}{dt} (g_{ij} x^i y^j) = g_{ij;k} x^i y^j \dot{u}^k = (g_{ij,k} - g_{rj} \Lambda_{ik}^r - g_{ir} \Lambda_{jk}^r) x^i y^j \dot{u}^k$$

d. h. dann sogar

$$g_{ij,k} - g_{rj} \Lambda_{ik}^r - g_{ir} \Lambda_{jk}^r = 0 \quad (85)$$

Durch Umbenennung erhalten wir noch

$$\begin{aligned} g_{jk,i} - g_{rk} \Lambda_{ji}^r - g_{jr} \Lambda_{ki}^r &= 0 \\ g_{ki,j} - g_{ri} \Lambda_{kj}^r - g_{kr} \Lambda_{ij}^r &= 0 \end{aligned}$$

indem wir (85) von der Summe dieser Gleichungen subtrahieren, bekommen wir

$$-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j} = 2g_{kr} \Lambda_{ij}^r$$

und hieraus

$$\Lambda_{ij}^r = \frac{g^{1hk}}{2}(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}) = \Gamma_{ij}^h$$

in allen Punkten einer Karte, w. z. b. w.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die Geometrie des Riemannschen Raumes die zu Beginn des Kapitels gesuchte Verallgemeinerung der inneren Geometrie einer Fläche darstellt: In ihr ist die n -dimensionale Koordinatisierung und die Gewährleistung der Längenberechnung gelungen.

Insbesondere gilt der

Hauptsatz. Jeder Riemannsche Raum hat bei stetig differenzierbaren g_{ij} genau einen mit der Metrik verträglichen affinen Zusammenhang, nämlich den durch die Christoffelsymbole bestimmten.

Die Formel (85) für die Christoffelsymbole

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - g_{rj}\Gamma_{ik}^r - g_{ir}\Gamma_{jk}^r = 0 \quad (85)$$

ist auch als Lemma von Ricci²⁷ bekannt.

Aufgaben

1. Welche Besonderheit besitzt die Holonomiegruppe eines Riemannschen Raumes?
2. Wie lässt sich E^n als Riemannscher Raum auffassen?
3. Die n -Sphäre um O mit dem Radius R ist ein Riemannscher Raum, wenn g_{ij} mit Hilfe der Metrik des E^{n+1} bestimmt wird (vgl. (103) und (104)).

4.7 Kurventheorie in Riemannschen Räumen

In einem Riemannschen Raum sei $u^i = u^i(s)$ Parameterdarstellung einer Kurve, wobei wir $(m + 1)$ -mal stetige Differenzierbarkeit und $g_{ij}u^{i'}u^{j'} = 1$, d. h. Bogenlänge als Parameter voraussetzen. Wir definieren

$$x_{(1)}^i := \frac{du^i}{ds}, \quad x_{(2)}^i := \frac{Dx_{(1)}^i}{ds}, \quad \dots, \quad x_{(m)}^i := \frac{Dx_{(m-1)}^i}{ds} \quad (86)$$

die Indizes in Klammern beziehen sich dabei nicht auf das Koordinatensystem, sondern stellen eine Nummerierung der Vektoren $x_{(\mu)}$ dar.

Im Kapitel 1 wurden mit Hilfe der Ableitungen einer Darstellung einer Kurve die Frenetschen Formeln entwickelt. Doch welche Eigenschaften besitzen hier die Vektoren $x_{(1)}, \dots, x_{(m)}$? Da s die Bogenlänge ist, muss $x_{(1)}$ ein Einheitsvektor sein:

$$g_{ij}x_{(1)}^i x_{(1)}^j = g_{ij}u^{i'}u^{j'} = 1 \quad (87)$$

Aus (87) erhalten wir durch Differentiation nach s unter Berücksichtigung des Lemmas von Ricci, d. h. von (85'),

²⁷Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925).

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{ds}(g_{ij}u^{i'}u^{j'}) = g_{ij,k}u^{i'}u^{j'}u^{k'} + g_{ij}u^{i''}u^{j''} + g_{ij}u^{i'}u^{j''} \\
 &= g_{ij,k}x_{(1)}^i x_{(1)}^j x_{(1)}^k + g_{ij}(x_{(2)}^i - \Gamma_{rs}^i x_{(1)}^r x_{(1)}^s)x_{(1)}^j + g_{ij}x_{(1)}^i(x_{(2)}^j - \Gamma_{rs}^j x_{(1)}^r x_{(1)}^s) \\
 &= (g_{ij,k} - g_{\rho j}\Gamma_{ik}^\rho - g_{i\sigma}\Gamma_{jk}^\sigma)x_{(1)}^i x_{(1)}^j x_{(1)}^k + 2g_{ij}x_{(2)}^i x_{(1)}^j \\
 &= g_{ij;k}x_{(1)}^i x_{(1)}^j x_{(1)}^k + 2g_{ij}x_{(2)}^i x_{(1)}^j = 2g_{ij}x_{(2)}^i x_{(1)}^j
 \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$x_{(1)} \perp x_{(2)}$$

Wie in der Kurventheorie nennen wir $k_{(1)} := |x_{(2)}|$ die erste Krümmung der Kurve und unterscheiden

Fall 1: $k_{(1)} = 0$ in einem Intervall. Wegen

$$0 = x_{(2)}^i = \frac{Dx_{(1)}^i}{ds} = \frac{Du^{i'}}{ds} = u^{i''} + \Gamma_{rs}^i u^{r'}u^{s'}$$

werden wir - vgl. den Satz 3.11b - das Kurvenstück geodätisch nennen.

Fall 2: $k_{(1)} \neq 0$. Dann führen wir

$$e_1 := x_{(1)} \quad , \quad e_2 := k_{(1)}^{-1}x_{(2)}$$

ein und nennen e_1 Tangenten- und e_2 Hauptnormalenvektor. Allerdings reichen e_1 und e_2 für $n > 3$ noch nicht zur Definition eines begleitenden n - Beines aus. Das gelingt in dem Sonderfall, dass $m = n$ ist und $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ linear unabhängig sind:

Wir definieren $e_{(\nu)}$ nach dem Schmidtschen²⁸ Orthogonalisierungsverfahren, so dass $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind und $e_{(\nu)}$ Linearkombination von $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ ist. In Koordinatendarstellung bedeutet das

$$g_{ij}e_{(r)}^i e_{(s)}^j = \delta_{rs} \quad , \quad e_{(\nu)}^i = \sum_{r=1}^{\nu} b^{ir} x_{(r)}^i \quad (88,89)$$

Indem wir eine Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln suchen, bilden wir

$$\frac{De_{(r)}^i}{ds} = \sum_{s=1}^n a_{rs} e_{(s)}^i \quad (90)$$

Welche Eigenschaften besitzt die Koeffizientenmatrix (a_{rs}) ? Aus (88) erhalten wir nach dem Lemma von Ricci und (90)

$$0 = g_{ij} \frac{De_{(r)}^i}{ds} e_{(s)}^j + g_{ij} e_{(r)}^i \frac{De_{(s)}^j}{ds} = a_{rs} + a_{sr}$$

oder gleichwertig damit $a_{sr} = -a_{rs}$, d. h., dass die Koeffizientenmatrix schiefsymmetrisch ist, insbesondere in der Hauptdiagonale nur Nullen enthält. Nach (89) und (86) kann $\frac{De_{(r)}}{ds}$ als Linearkombination von $x_{(1)}, \dots, x_{(r+1)}$ auch nur Linearkombination von $e_{(1)}, \dots, e_{(r+1)}$ sein, d.

²⁸Erhard Schmidt (1876-1959).

h. nach (90) $a_{rs} = 0$ für $s > r + 1$. Zusammen mit der Schiefsymmetrie ergibt das folgende Gestalt der Matrix (a_{rs}) :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{23} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $k_{(1)} = a_{12}$; setzen wir noch $k_{(\nu)} = a_{\nu,\nu+1}$, dann erhalten wir nach (90) die verallgemeinerten Frenetschen Formeln für die absoluten Ableitungen der Vektoren des begleitenden n -Beines $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$

$$\begin{aligned} \frac{De_{(1)}^i}{ds} &= k_{(1)}e_{(2)}^i \\ \frac{De_{(2)}^i}{ds} &= -k_{(1)}e_{(1)}^i + k_{(2)}e_{(3)}^i \\ &\dots \\ \frac{De_{(\nu)}^i}{ds} &= -k_{(\nu-1)}e_{(\nu-1)}^i + k_{(\nu)}e_{(\nu+1)}^i \\ &\dots \\ \frac{De_{(n)}^i}{ds} &= -k_{(n-1)}e_{(n-1)}^i \end{aligned} \tag{91}$$

Die ν -ten Krümmungen $k_\nu = g_{ij} \frac{De_{(\nu)}^i}{ds} e_{(\nu+1)}^j$ sind als Überschiebungen von Tensoren selbst $(0,0)$ -Tensoren, also invariant.

Im Fall des dreidimensionalen euklidischen Raumes wird $\Gamma_{ij}^h = 0$ und folglich

$$\frac{De_{(\nu)}^i}{ds} = \frac{de_{(\nu)}^i}{ds}$$

wir erhalten die Frenetschen Formeln der Kurventheorie. Im Fall einer Fläche, d. h. $n = 2$, wird $k_{(1)}$ gerade der Betrag der tangentialen Komponente von $(u^i P_i)'$, d. h. von $k_g \mathfrak{e}$; somit ist $k_{(1)}$ bis aufs Vorzeichen die geodätische Krümmung k_g .

Abschließend bemerken wir ohne Beweis, dass $k_{(1)}, \dots, k_{(n-1)}$ ein vollständiges Invariantensystem der Kurve bilden (W. Blaschke, Math. Z. 6 (1920)); im Fall $k_{(\mu)} \neq 0$ für $\mu = 1, \dots, m - 1$, $k_{(m)} = 0$ und $m < n$ existieren nur ein "begleitendes m -Bein" $e_{(1)}, \dots, e_{(m)}$ und m verallgemeinerte Frenetsche Formeln.

Aufgaben

1. Falls nur $x_{(1)}, \dots, x_{(n-1)}$ linear unabhängig sind, kann dennoch lokal ein begleitendes n -Bein erklärt werden.
2. Im E^n mit kartesischen Koordinaten sei $k_{(1)} = \frac{1}{R}$ und $k_{(m)} = 0$ für $m > 1$. Man zeige, dass die gesuchte Kurve ein Kreis im E^n ist.

Anleitung. Es gilt $\frac{D}{ds} = \frac{d}{ds}$. Aus den verallgemeinerten Frenetschen Formeln

$$e_{(1)}^{i'} = \frac{1}{R} e_{(2)}^i \quad , \quad e_{(2)}^{i'} = -\frac{1}{R} e_{(1)}^i$$

erhält man $e_{(2)}^i = Re_{(1)}^{i'}$ und folglich

$$e_{(2)}^{i'} = Re_{(1)}^{i''} = -\frac{1}{R}e_{(1)}^i$$

Bezüglich der Lösung der Differentialgleichung

$$e_{(1)}^{i''} = -\frac{1}{R^2}e_{(1)}^i$$

vgl. Beispiel (3.7), wobei die Integrationskonstanten dadurch eingeschränkt werden, dass $e_{(1)}, e_{(2)}$ paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind. Schließlich ist $e_{(1)}^i = u^{i'}$ zu beachten.

4.8 Krümmung eines Riemannschen Raumes

Um für einen Riemannschen Raum einen ersten Krümmungsbegriff zu gewinnen, erinnern wir daran, dass mit Hilfe der Christoffelsymbole ein affiner Zusammenhang gegeben ist. Damit besitzen wir das Feld der Krümmungstensoren

$$R_{ijk}^s = R_{ijk}^s(u^1, \dots, u^n) = \Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s \quad (92)$$

Wie jedem Tensor kommt (92) eine invariante Bedeutung zu, jedoch dürfte (92) als Krümmungsbegriff noch recht inhaltsarm sein, da wir R_{ijk}^s als Abkürzung eingeführt haben und lediglich über (19), nämlich

$$K = \frac{g_{2s}}{g} R_{112}^s$$

im Fall eines sehr speziellen Riemannschen Raumes, einer Fläche im Anschauungsraum, eine schwache Ahnung von seiner Bedeutung für Krümmungseigenschaften eines beliebigen Riemannschen Raumes besitzen können.

Ich gehe sicher nicht fehl in der Annahme, dass jeder, für den Tensoren Neuland darstellen, ohnehin zu invarianten Skalaren wie etwa der Gaußschen Krümmung K mehr Vertrauen hat als zu den invarianten Tensoren.

Um zu Skalaren zu gelangen, brauchen wir nur die Funktionswerte eines Tensors für gewisse ko- und kontravariante Vektoren zu bestimmen; um dabei nur kontravariante Vektoren, Elemente des Tangentialraumes $T(P)$ im betrachteten Punkt P , berücksichtigen zu müssen, gehen wir - wiederum durch (19), nämlich $g_{2s}R_{112}^s$ angeregt - vom "gemischten" Krümmungstensor R_{ijk}^s zum kovarianten Krümmungstensor

$$R_{hijk} = R_{hjik}(u^1, \dots, u^n) := g_{hs}R_{ijk}^s \quad (93)$$

über. Als Verschiebung von Tensoren erhalten wir tatsächlich in jedem Punkt einen Tensor.

Für spätere Überlegungen erarbeiten wir uns einige Eigenschaften des kovarianten Krümmungstensors. Um neben (93) eine weitere Darstellung von R_{hijk} zu gewinnen, setzen wir (92) in (93) ein und berücksichtigen (81)

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= g_{hs}(\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{rk}^s \Gamma_{ij}^r - \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ik}^r) \\ &= g_{hs} \left(\frac{g_{,k}^{s\sigma}}{2} (-g_{ij,\sigma} + g_{j\sigma,i} + g_{\sigma i,j}) + \frac{g^{s\sigma}}{2} (-g_{ij,\sigma,k} + g_{j\sigma,i,k} + g_{\sigma i,j,k}) \right) \\ &\quad - g_{hs} \left(\frac{g_{,j}^{s\sigma}}{2} (-g_{ik,\sigma} + g_{k\sigma,i} + g_{\sigma i,k}) + \frac{g^{s\sigma}}{2} (-g_{ik,\sigma,j} + g_{k\sigma,i,j} + g_{\sigma i,k,j}) \right) \\ &\quad + g_{hs}(\Gamma_{rk}^s \Gamma_{ij}^r - \Gamma_{rj}^s \Gamma_{ik}^r) \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der rechten Seite bemerken wir $g_{hs}g^{s\sigma} = \delta_h^\sigma$, sowie $0 = \delta_{h,\tau}^\sigma = g_{hs,\tau}g^{s\sigma} + g_{hs}g_{,\tau}^{s\sigma}$; d. h. $g_{hs}g_{,\tau}^{s\sigma} = -g_{hs,\tau}g^{s\sigma}$.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen, der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge und des Lemmas (85') von Ricci gilt

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= -g_{hs,k}\Gamma_{ij}^s + \frac{1}{2}(-g_{ij,h,k} + g_{jh,i,k} + g_{hi,j,k}) + g_{hs,j}\Gamma_{ik}^s - \frac{1}{2}(-g_{ik,h,j} + g_{kh,i,j} + g_{hi,k,j}) \\ &\quad - g_{hs}(\Gamma_{rk}^s\Gamma_{ij}^r - \Gamma_{rj}^s\Gamma_{ik}^r) = \frac{1}{2}(g_{hj,i,k} - -g_{ij,h,k} + -g_{ik,h,j} - -g_{hk,i,j}) \\ &\quad + g_{hs}(\Gamma_{rk}^s\Gamma_{ij}^r - \Gamma_{rj}^s\Gamma_{ik}^r) - (g_{rs}\Gamma_{hk}^r\Gamma_{ij}^s + g_{hr}\Gamma_{sk}^r\Gamma_{ij}^s) + (g_{rs}\Gamma_{hj}^r\Gamma_{ik}^s + g_{hr}\Gamma_{sj}^r\Gamma_{ik}^s) \\ &= \frac{1}{2}(g_{hj,i,k} - g_{ij,h,k} + g_{ik,h,j} - g_{hk,i,j}) + g_{rs}(\Gamma_{hj}^r\Gamma_{ik}^s - \Gamma_{hk}^r\Gamma_{ij}^s) \end{aligned} \quad (94)$$

Aus der Darstellung (94) lesen wir folgende Eigenschaften des kovarianten Krümmungstensors ab (vgl. Aufgabe 4):

$$R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj} = R_{kjih} \quad (95.1)$$

$$R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0 \quad (95.2)$$

Nach (95-1) verschwinden von den n^4 Komponenten des Tensors eine große Anzahl, viele unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Beispiel

(4.7) Kovarianter Krümmungstensor in einem Punkt einer Fläche des Anschauungsraumes.

Nach (19) gilt $K = g^{-1}L = g^{-1}R_{2112}$, also $R_{2112} = L$. Über die $2^4 = 16$ Komponenten R_{hijk} können nach (95) folgende Aussagen gemacht werden:

- a) $R_{11jk} = R_{22jk} = 0$ wegen $R_{hijk} = -R_{ihjk}$, d. h., acht Komponenten verschwinden,
- b) $R_{hi11} = R_{hi22} = 0$ wegen $R_{hijk} = -R_{hikj}$, d. h., weitere vier Komponenten verschwinden,
- c) $R_{2112} = L = R_{1221}$ wegen $R_{hijk} = R_{jkhi}$,
- d) $R_{1212} = -L = R_{2121}$ nach c) wegen $R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{kjhi}$.

Die Regeln (95) haben aber auch interessante Folgerungen bei der Anwendung des Tensors auf Vektoren des Tangentialraumes

$$R(x, x, y, z) = R_{hijk}x^h x^i y^j z^k$$

wenn wir j und k festlassen, dann gilt

$$R_{hijk}x^h x^i = R_{11jk}x^1 x^1 + R_{12jk}x^1 x^2 + R_{21jk}x^2 x^1 + R_{22jk}x^2 x^2 = R_{12jk}x^1 x^2 - R_{12jk}x^2 x^1 = 0$$

$$\text{d. h. } R(x, x, y, z) = 0. \quad (95')$$

$$\text{Ganz analog ergibt sich } R(x, y, z, z) = 0. \quad (95'')$$

Diese Folgerungen aus (95.1), die sich sofort auf den n -dimensionalen Fall übertragen lassen, werden wir auch bald ausnutzen.

Bevor wir zu dem angekündigten Übergang vom kovarianten Krümmungstensor zu Skalaren durch Belegung mit Vektoren aus $T(P)$ kommen, wollen wir (19) unter speziellen Voraussetzungen umdeuten: Wenn im betrachteten Punkt der Fläche P_1 und P_2 zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind, dann gilt $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g = 1$ und

$$R(P_2, P_1, P_1, P_2) = R_{2112} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = R_{2112} = K$$

Sind nun a und b zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren des Tangentialraumes $T(P)$ in einem Punkt P eines beliebigen Riemannschen Raumes, dann setzen wir

$$K(a, b) := R(b, a, a, b) = R_{hijk} b^h a^i a^j b^k \quad (96)$$

Es gilt nun der bemerkenswerte

Satz 4.3. $K(a, b)$ hängt nur von der durch a, b bestimmten Ebene ab, d. h., es gilt

$$K(a, b) = K(\bar{a}, \bar{b})$$

wenn \bar{a}, \bar{b} zueinander senkrechte, von a, b abhängige Einheitsvektoren sind.

Beweis. Es sei $\bar{a} = \alpha a + \beta b$ und $\bar{b} = \gamma a + \delta b$. Da es sich um zueinander senkrechte Einheitsvektoren handelt, gilt

$$\begin{aligned} 1 &= g_{ij} \bar{a}^i \bar{a}^j = \alpha^2 g_{ij} a^i a^j + 2\alpha\beta g_{ij} a^i b^j + \beta^2 g_{ij} b^i b^j = \alpha^2 + \beta^2 \\ 0 &= g_{ij} \bar{a}^i \bar{b}^j = \alpha\gamma + \beta\delta \quad \text{und} \quad 1 = g_{ij} \bar{b}^i \bar{b}^j = \gamma^2 + \delta^2 \end{aligned}$$

Daraus; folgt $(\gamma, \delta) = (\beta, -\alpha)$ oder $(\gamma, \delta) = -(\beta, -\alpha)$; wegen $R(\bar{b}, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}) = R(-\bar{b}, a, a, -\bar{b})$ nach (96) dürfen wir o. B. d. A. $(\gamma, \delta) = (\beta, -\alpha)$ voraussetzen. Dann gilt nach (95)

$$\begin{aligned} K(\bar{a}, \bar{b}) &= R_{hijk} \bar{b}^h \bar{a}^i \bar{a}^j \bar{b}^k = R_{hijk} (\beta a^h - \alpha b^h) (\alpha a^i + \beta b^i) \bar{a}^j \bar{b}^k \\ &= \beta^2 R_{hijk} a^h b^i \bar{a}^j \bar{b}^k - \alpha^2 R_{hijk} b^h a^i \bar{a}^j \bar{b}^k = -\beta^2 R_{hijk} b^i a^h \bar{a}^j \bar{b}^k - \alpha^2 R_{hijk} b^h a^i \bar{a}^j \bar{b}^k \\ &= -R_{hijk} b^h a^i \bar{a}^j \bar{b}^k \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich

$$-R_{hijk} b^h a^i \bar{a}^j \bar{b}^k = R_{hijk} b^h a^i a^j b^k = K(a, b)$$

w. z. b. w.

Die Größe $K(a, b)$ wird Riemannsche Krümmung oder Schnittkrümmung genannt; sie kann nämlich als Gaußsche Krümmung einer Fläche gedeutet werden, für die a und b in P die Tangentialebene aufspannen. So kann man sich einen Eindruck von der durch R_{hijk} repräsentierten Krümmung in P über Schnittkrümmungen verschaffen, wie wir uns die Gaußsche Krümmung in einem Flächenpunkt über die Krümmung von Flächenkurven erarbeitet hatten.

Bei einer gegebenen orthonormierten Basis gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittkrümmungen bezüglich der Koordinatenebenen. Trotzdem können nach (95) die n^4 Komponenten des kovarianten Krümmungstensors mit Hilfe dieser Schnittkrümmungen und der Schnittkrümmungen bezüglich gewisser Symmetrieebenen von Koordinatenebenen bestimmt werden:

Es sei $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ orthonormierte Basis und $R_{hijk} = R(e_{(h)}, e_{(i)}, e_{(j)}, e_{(k)})$. Nach (95') und (95'') gilt

$$R_{iijk} = R_{hijj} = 0 \quad (95^*)$$

Falls bei R_{hijk} nicht nur voneinander verschiedene Indizes vorhanden sind, brauchen wir nach (95*) und (95.1) nur noch den Fall $h = k \neq i, j$ zu betrachten; für $i = j$ ergibt sich $K_{hi} := K(e_{(h)}, e_{(i)})$, für $i \neq j$ wegen $e_{(h)} \perp e_{(i)} + e_{(j)}$, $g(e_{(i)} + e_{(j)}, e_{(i)} + e_{(j)}) = 2$ und

$$R(e_{(h)}, e_{(i)} + e_{(j)}, e_{(i)} + e_{(j)}, e_{(h)}) = R_{hiih} + R_{hijh} + R_{hjih} + R_{hjjh}$$

nach (95.1)

$$R_{hijh} = K \left(e_h, \frac{e_{(i)} + e_{(j)}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2}(K_{hi} + K_{hj}) = R_{ihhj} \quad (95^{**})$$

Falls R_{hijk} nur paarweise verschiedene Indizes besitzt, betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} R(e_{(h)}, e_{(i)} + e_{(j)}, e_{(i)} + e_{(j)}, e_{(k)}) &= R_{hiik} + R_{hijk} + R_{hjik} + R_{hjjk} \\ R(e_{(h)}, e_{(i)} + e_{(k)}, e_{(j)}, e_{(i)} + e_{(k)}) &= R_{hiji} + R_{hijk} + R_{hkji} + R_{hkjk} \\ 0 &= R_{hijk} + R_{hikj} \end{aligned}$$

Nach Addition dieser Gleichungen erhalten wir unter Berücksichtigung von (95.1) und (95.2)

$$\begin{aligned} 3R_{hijk} &= 2 \left(R \left(e_{(h)}, \frac{e_{(i)} + e_{(j)}}{\sqrt{2}}, \frac{e_{(i)}, e_{(j)}}{\sqrt{2}}, e_{(k)} \right) - R \left(e_{(h)}, \frac{e_{(i)} + e_{(k)}}{\sqrt{2}}, \frac{e_{(i)} + e_{(k)}}{\sqrt{2}}, e_{(j)} \right) \right) \\ &\quad - R_{hiik} - R_{hjjk} - R_{hijj} - R_{hkkj} \end{aligned} \quad (95^{***})$$

Nun ist es nicht mehr schwer, R_{hijk} mit Hilfe von Schnittkrümmungen bezüglich der Vektoren $e_{(\alpha)}$ und $\frac{e_{(\beta)} + e_{(\gamma)}}{\sqrt{2}}$, $\beta \neq \gamma$ darzustellen (vgl. (95^{**})), w. z. b. w.

Die Riemannsche Krümmung $K(a, b)$ ist im allgemeinen vom betrachteten Punkt und der von a, b aufgespannten Ebene abhängig. Um einen Krümmungsbegriff zu erhalten, der nur von u^1, \dots, u^n abhängt, können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Es liegt nahe, wie in der Flächentheorie gewisse Mittelbildungen ins Auge zu fassen; diesen Weg werden wir weiter unten beschreiten. Ein anderer Weg nutzt die Mittel der Tensoralgebra aus:

Durch Verjüngung von R_{ijk}^i erhalten wir in Form von den Ricci-Tensor und dann durch Überschiebung und Verjüngung

$$R_{ij} := R_{ijs}^s \quad (98)$$

die skalare Krümmung im betrachteten Punkt, früher meist Krümmungsskalar genannt. Im folgenden sollen beide Bildungen, die als Tensoren Invarianten sind, mit Hilfe von $K(a, b)$ gedeutet werden.

Ein n -Bein $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ in $T(P)$ gibt Anlass, das arithmetische Mittel der Riemannschen Krümmungen $K_{rs} = K(e_{(r)}, e_{(s)})$ für die $n-1$ Koordinatenebenen durch die r -te Achse des n -Beins zu betrachten:

$$K_r := \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^n K_{rs} \quad (99)$$

dabei bezeichnet $K_{rr} := R_{hijk} e_{(r)}^h e_{(r)}^i e_{(r)}^j e_{(r)}^k = 0$.

Satz 4.4. Das arithmetische Mittel (99) ist von $e_{(1)}, \dots, e_{(r-1)}, e_{(r+1)}, \dots, e_{(n)}$ unabhängig, d. h., es gilt

$$K_r := \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^n K(e_{(r)}, \bar{e}_{(s)})$$

wenn $\bar{e}_{(1)}, \dots, \bar{e}_{(n)}$ ein n -Bein mit $\bar{e}_{(r)} = e_{(r)}$.

Zusatz. Es gilt $K_r = \frac{1}{n-1} R_{ij} e_{(r)}^i e_{(r)}^j$

Beweis. Die Koordinaten $e_{(r)}^i$ der Vektoren $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ bilden eine n -reihige quadratische Matrix A . Da es sich um paarweise senkrechte Einheitsvektoren handelt, ist $A^T(g_{ij})A$ gleich

der n -reihigen Einheitsmatrix E_n . Daraus folgt $A^T(g_{ij}) = A^{-1}$, $(g_{ij}) = (A^T)^{-1}A^{-1} = (AA^T)^{-1}$ und schließlich $(g^{hk}) = (g_{ij})^{-1} = AA^T$, d.h.

$$g^{hk} = \sum_{r=1}^n e_{(r)}^h e_{(r)}^k \quad (100)$$

Nun können wir bequem K_r berechnen, indem wir neben (99) noch (96) und (100) benutzen:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^n K_{rs} = \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^n R_{hijk} e_{(s)}^h e_{(s)}^i e_{(s)}^j e_{(s)}^k = \frac{1}{n-1} R_{hijk} g^{hk} e_{(i)}^r e_{(r)}^j \\ &= \frac{1}{n-1} R_{hij}^k e_{(i)}^r e_{(r)}^j = \frac{1}{n-1} R_{ij} e_{(i)}^r e_{(r)}^j \end{aligned}$$

Damit ist der Zusatz bewiesen, aus dem der Satz unmittelbar folgt, w. z. b. w.

Das arithmetische Mittel der $K(e_{(r)}, e_{(s)})$ über alle $\frac{n(n-1)}{2}$ Koordinatenebenen steht in einem engen Zusammenhang zur skalaren Krümmung R , denn es gilt

$$R = \sum_{r,s=1}^n K_{rs} \quad (101)$$

(vgl. Aufgabe 3).

Ricci-Tensor und skalare Krümmung spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie eine bedeutende Rolle, dort wird der Einstein-Tensor

$$E_{ij} := R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} \quad (102)$$

betrachtet. Im Fall $R_{ij} = c g_{ij}$ spricht man von Einsteinräumen.

Aufgaben

1. Man begründe, dass vermöge (102) ein Tensor definiert wird.
2. Man stelle in der Flächentheorie ($n = 2$) die Gaußsche Krümmung mittels des Krümmungsskalars R dar.
3. Man bestätige (101) mit Hilfe des Zusatzes vom Satz 4.4 und der Beziehung (100).
4. Man überprüfe die Gültigkeit von (95).

4.9 Räume konstanter Krümmung

Die Riemannsche Krümmung (96) ist im allgemeinen vom betrachteten Punkt P und der Wahl eines zweidimensionalen Unterraumes (kurz: einer Ebene) von $T(P)$ abhängig. Ein Riemannscher Raum ist genau dann ein (Riemannscher) Raum konstanter Krümmung, wenn $K_P(a, b) = K_{\bar{P}}(\bar{a}, \bar{b})$ für alle Punkte P, \bar{P} und durch a, b bzw. \bar{a}, \bar{b} aufgespannte Ebenen gilt.

Beispiele

(4.8) Die Euklidischen Räume E^n mit $g_{ij} = \delta_{ij}$. Nach (81) verschwinden alle Christoffelsymbole, so dass nach (92) alle Komponenten des Krümmungstensors und nach (93) sämtliche Komponenten des kovarianten Krümmungstensors gleich null sind. Somit gilt nach (96) auch noch $K_P(a, b) = 0$.

Dieses Resultat kann natürlich andererseits unmittelbar gewonnen werden, denn die Ebenen durch P sind Flächen verschwindender Gaußscher Krümmung.

(4.9) Die n -Sphäre S_R^n mit der Metrik δ_{ij} für den E^{n+1} . Da es stets eine Bewegung β gibt, für die bei gegebenen Punkten P, \bar{P} und Tangentenvektoren a, b, \bar{a}, \bar{b} (wegen $|v(OP)| = |v(O\bar{P})| = R$, $a, b \perp v(OP)$ und $\bar{a}, \bar{b} \perp v(O\bar{P})$)

$$\bar{P} = P^\beta, \quad \bar{P} + \bar{a} = (P + a)^\beta, \quad \bar{O} + \bar{b} = (P + b)^\beta$$

gilt, haben wir konstante Krümmung. Ihren Wert können wir etwa im Punkt $(R, 0, \dots, 0)$ für $a = (0, 1, 0, \dots, 0)$ und $b = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ bestimmen. Weil der E^3 mit der Gleichung $u^4 = \dots = u^n = 0$ aus S_R^n die (zweidimensionale) Kugel $(u^1)^2 + (u_2)^2 + (u^3)^2 = R^2$ herausschneidet, die $(R, 0, \dots, 0)$ enthält und für die a, b Tangentenvektoren sind, ist ihre Gaußsche Krümmung, nämlich $1/R^2$, gleichzeitig die konstante Krümmung der n -Sphäre S_R^n .

Eine rechnerische Bestätigung dieses Ergebnisses kann auch folgendermaßen erreicht werden: Wir betrachten etwa für die "nördliche Halbsphäre" eine Karte mit den Parametern u^1, \dots, u^n aus E^n , wobei natürlich

$$(u^{n+1})^2 = R^2 - (u^1)^2 - \dots - (u^n)^2 \quad (103)$$

ist. Für das Tensorfeld $g_{ij} = g_{ij}(u^1, \dots, u^n)$ muss

$$g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = (\dot{u}^1)^2 + \dots + (\dot{u}^{n+1})^2$$

gelten, wobei $(\dot{u}^{n+1})^2$ aus (103) bestimmt wird:

$$2u^{n+1}\dot{u}^{n+1} = -2u^1\dot{u}^1 - \dots - 2u^n\dot{u}^n$$

folglich, wenn wir $a_{ij} := u^i u^j$ setzen,

$$(\dot{u}^{n+1})^2 = (u^{n+1})^{-2}(u^1\dot{u}^1 + \dots + u^n\dot{u}^n)^2 = (u^{n+1})^{-2}a_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$$

d. h. für das zu bestimmende Tensorfeld mit $R^2 = K^{-1}$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \left(\frac{1}{K} - (u^1)^2 - \dots - (u^n)^2 \right)^{-1} u^i u^j \quad (104)$$

Die Ermittlung von K nach (96) ist recht aufwendig, deshalb wollen wir $K(a, b)$ nur im Nordpol ($u^1 = u^2 = \dots = u^n = 0$) errechnen: Zunächst gilt

$$g_{rs,t} = \frac{\delta_{rt}u^s + \delta_{st}u^r}{(u^{n+1})^2} + 2 \frac{u^r u^s u^t}{(u^{n+1})^4}$$

im Nordpol verschwinden diese partiellen Ableitungen, so dass dort nach (81) alle Christoffelsymbole gleich null sind. Somit vereinfacht sich die Berechnung der Komponenten des kovarianten Krümmungstensors gemäß (94): Wir erhalten für $u^1 = u^2 = \dots = u^n = 0$

$$g_{hj,i,k} = K(\delta_{hi}\delta_{jk} + \delta_{hk}\delta_{ij}) = g_{ik,h,j}, \quad g_{jj,h,k} = K(\delta_{hi}\delta_{jk} + \delta_{hj}\delta_{ik}) = g_{hk,i,j}$$

und folglich

$$R_{hijk} = K(\delta_{hk}\delta_{ij} - \delta_{hj}\delta_{ik}) \quad (105)$$

Da im Nordpol für Vektoren des Tangentialraumes $g_{ij}x^i y^j = \delta_{ij}x^i y^j$ gilt, erhalten wir für zueinander senkrechte Einheitsvektoren x und y nach (96)

$$K(x, y) = R_{hijk}y^h x^i x^j x^k = K(\delta_{hk}\delta_{ij} - \delta_{hj}\delta_{ik})y^h x^i x^j x^k = K$$

Bei dieser Rechnung wurde nicht benötigt, dass K positiv ist. Wir erhalten also

(4.10) Räume konstanter negativer Krümmung K , wenn wir (104) mit $K < 0$ verwenden. Dazu gehören

$$(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2 - (u^{n+1})^2 = K^{-1}$$

und

$$g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = (\dot{u}^1)^2 + \dots + (\dot{u}^n)^2 - (\dot{u}^{n+1})^2$$

Zusammenfassend können wir zunächst feststellen, dass zu jeder reellen Zahl K ein Raum konstanter Krümmung K gehört.

Die Räume konstanter Krümmung besitzen eine ganze Reihe besonderer Eigenschaften, von denen wir die freie Beweglichkeit - zu je zwei Punkten P, \bar{P} und n -Beinen $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ bzw. $\bar{e}_{(1)}, \dots, \bar{e}_{(n)}$ in P bzw. \bar{P} gibt es Umgebungen U_P bzw. $U_{\bar{P}}$ und eine Isometrie α von U_P auf $U_{\bar{P}}$ mit $P^\alpha = \bar{P}$ und $e_{(r)}^\alpha = \bar{e}_{(r)}$ - hier herausstellen möchten.

Vom Standpunkt des Physikers Hermann von Helmholtz (1821-1894) ist die freie Beweglichkeit von Maßstäben die Grundlage jeglicher Längenmessung; danach kämen nur Räume konstanter Krümmung als mathematische Modelle für den Kosmos in Frage. Die Argumentation setzt ein positiv definites Tensorfeld $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2, u^3)$ für den dreidimensionalen Raum voraus.

Die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein (1879-1955) für die vierdimensionale Raum-Zeit kann diese Voraussetzung nicht gestatten; nach ihr führt die Forderung nach freier Beweglichkeit von dreidimensionalen Maßstäben in der vierdimensionalen Raum-Zeit nicht mehr zu Räumen konstanter Krümmung. Das mathematische Modell des Kosmos ist kein Raum konstanter Krümmung.

Mitunter wird die Aussage dahingehend präzisiert, dass im wesentlichen eine euklidische Metrik vorliegt, die lediglich in der Umgebung größerer Massen merklich davon abweicht; daneben wurden auch andere kosmologische Modelle vorgeschlagen und diskutiert. Trotzdem wollen wir uns noch etwas mit den Räumen konstanter Krümmung befassen.

Die obige Behauptung über die lokale freie Beweglichkeit eines Raumes konstanter Krümmung bedarf zu ihrem Beweis einiger Vorbereitungen, denen wir uns zunächst zuwenden. Mit Hilfe des kovarianten Krümmungstensors haben wir die Riemannschen Krümmungen $K(a, b)$ bestimmt; wenn wir ein n -Bein $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ auszeichnen, dann gibt es $n(n-1)/2$ Werte $K_{rs} = K(e_{(r)}, e_{(s)})$.

Wir fragen nun, warum mit Hilfe von diesen Werten und weiteren Schnittkrümmungen die n^4 Komponenten des Krümmungstensors R_{hijk} bestimmt werden konnten?

Die Herleitung von (95*) bis (95***) beruhte ausschließlich auf den Symmetrieeigenschaften (95) des Krümmungstensors. In jedem Riemannschen Raum besitzt der Tensor

$$G_{hijk} := g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}$$

dieselben Symmetrieeigenschaften, es gilt nämlich offenbar

$$G_{hijk} = -G_{ihjk} = -G_{hikj} = -G_{kjih} \quad , \quad G_{hijk} + G_{hjki} + G_{hkij} = 0$$

folglich wird auch er durch seine Schnittkrümmungen vollständig bestimmt:

Ist a, b ein orthonormiertes Vektorpaar aus $T(P)$, dann gilt

$$G(b, a, a, b) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Daraus folgt

Lemma 4.5. Wenn in einem Punkt P eines Riemannschen Raumes²⁹ $K(a, b)$ für $a, b \in T(P)$ stets ein und dieselbe Zahl K ergibt, dann gilt in P

$$R_{hijk} = K \cdot (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) \quad (106)$$

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir den

Satz 4.6. Je zwei n -dimensionale Riemannsche Räume ein und derselben konstanten Krümmung K sind lokal isometrisch.

Folgerung. Jeder Raum konstanter Krümmung ist lokal isometrisch zu einem Raum der Beispiele (4.8) bis (4.10).

Beweis. Es seien P und \bar{P} beliebige Punkte und $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ und $\bar{e}_{(1)}, \dots, \bar{e}_{(n)}$ beliebige n -Beine in $T(P)$ bzw. in $T(\bar{P})$. Wir suchen Umgebungen U_P und $U_{\bar{P}}$ sowie eine isometrische Abbildung α von U_P auf $U_{\bar{P}}$, d. h., wenn α^{-1} die Koordinatendarstellung $u^i = u^i(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ hat, muss nach (82) und (66')

$$\bar{g}_{ij} = g_{rs}a_i^r a_j^s \quad , \quad a_i^r = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^i} \quad (107)$$

gelten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Koordinatensysteme so gewählt, dass P und \bar{P} Koordinatenursprünge und die gegebenen n -Beine die ausgezeichneten Basen sind. Dann haben wir für (107) die Anfangsbedingungen

$$g_{ij}(0, \dots, 0) = \bar{g}_{ij}(0, \dots, 0) = \delta_{ij} \quad , \quad a_i^r(0, \dots, 0) = \delta_i^r \quad (108)$$

Indem wir die Integrierbarkeit von $\frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^i} = a_i^r$, nämlich $a_{i,j}^r = a_{j,i}^r$ voraussetzen, erhalten wir aus (107) wegen

$$\bar{g}_{ij,k} = g_{rs,t} a_k^t a_i^r a_j^s + g_{rs} a_{i,k}^r a_j^s + g_{rs} a_i^r a_{j,k}^s$$

die Gleichungskette

$$\begin{aligned} a_{\beta}^{\alpha} \bar{\Gamma}_{ij}^{\beta} &= a_{\beta}^{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \bar{g}^{\beta k} (-\bar{g}_{ij,k} + \bar{g}_{jk,i} + \bar{g}_{ki,j}) \\ &= \frac{1}{2} a_{\beta}^{\alpha} \bar{a}_{\gamma}^{\beta} \bar{a}_{\delta}^{\gamma} g^{\delta \epsilon} (-g_{rs,t} a_i^r a_j^s a_k^t - g_{rs} a_{i,k}^r a_j^s - g_{rs} a_i^r a_{j,k}^s + g_{rs,t} a_j^r a_k^s a_i^t + g_{rs} a_{j,i}^r a_k^s \\ &\quad + g_{rs} a_j^r a_{k,i}^s + g_{rs,t} a_k^r a_i^s a_j^t + g_{rs} a_{k,j}^r a_i^s + g_{rs} a_k^r a_{i,j}^s) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha \beta} (-g_{rs,\delta} + g_{s\delta,r} + g_{\delta r,s} a_i^r a_j^s + a_{i,j}^{\alpha} = \Gamma_{rs}^{\alpha} a_i^r a_j^s + a_{i,j}^{\alpha} \end{aligned}$$

und damit das Differentialgleichungssystem

$$a_{i,j}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h a_k^h - \Gamma_{rs}^h a_i^r a_j^s \quad , \quad a_i^h = \frac{\partial u^h}{\partial \bar{u}^i} \quad (107')$$

Umgekehrt erfüllt jede Lösung von (107') nach obiger Rechnung zumindest die Beziehung $\bar{g}_{ij} - g_{rs} a_i^r a_j^s = c_{ij}$ mit konstanten Gliedern c_{ij} ; wegen der Anfangsbedingung (108) gilt $c_{ij}(0, \dots, 0) = 0$ und somit (107). Es genügt also, statt der Lösbarkeit von (107) die von

²⁹Werden hier die Komponenten R_{hijk} bezüglich einer orthonormierten Basis $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ bestimmt, dann gilt für $h \neq i$

$$R_{hiih} = K = R_{ihhi} \quad , \quad R_{hihi} = -K = R_{ihih}$$

während alle übrigen Komponenten nach (95*), (95**) und (95***) verschwinden. Die Komponenten bezüglich einer anderen Basis können nach (106) oder einer Koordinatentransformation gewonnen werden.

(107') zu ermitteln.

Um die Gültigkeit der Integrabilitätsbedingungen von (107') festzustellen, betrachten wir $a_{i,j,k}^p - a_{i,k,j}^p$. Da wir die Gleichungen (107) und (107') verwenden dürfen, erhalten wir nach einigen Umformungen

$$a_{i,j,k}^p - a_{i,k,j}^p = a_q^p \bar{R}_{ijk}^q - R_{rst}^p a_i^r a_j^s a_k^t$$

Überschieben wir die rechte Seite mit $g_{op} a_h^o$, dann erhalten wir

$$\bar{R}_{hijk} - R_{orst} a_h^o a_i^r a_j^s a_k^t \quad (109)$$

Da nach Voraussetzung

$$\bar{R}_{hijk} = K(\bar{g}_{hk}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{ik}) \quad , \quad R_{orst} = K(g_{ot}g_{rs} - g_{os}g_{rt})$$

gilt, verschwindet der Ausdruck (109) und damit die Differenz $a_{i,j,k}^p - a_{i,k,j}^p$, d. h., dass die Integrabilitätsbedingungen von (107') erfüllt sind, w. z. b. w.

Als Folgerung erhalten wir nun den

Satz 4.7. Die Räume konstanter Krümmung können durch freie Beweglichkeit charakterisiert werden.

Beweis. Die Räume konstanter Krümmung gestatten nach dem Satz 4.6 freie Beweglichkeit. Besitzt umgekehrt ein Riemannscher Raum die Eigenschaft der freien Beweglichkeit, dann müssen alle Schnittkrümmungen einander gleich sein; mithin ist der Raum von konstanter Krümmung, w. z. b. w.

Anhang. Die Identität von Bianchi und ein Satz von F. Schur über Räume konstanter Krümmung³⁰

Wir setzen im folgenden voraus, dass alle g_{ij} dreimal stetig differenzierbar sind. Für den Beweis des Schurschen Satzes benutzen wir die Identität von Bianchi

$$R_{hijk;l} + R_{hikl;j} + R_{hilj;k} = 0$$

Zum Beweis der Gleichung dürfen wir im betrachteten Punkt P o. B. d. A. $\Gamma_{st}^r = 0$ voraussetzen. Dann stimmt dort die kovariante Ableitung mit der partiellen überein, und nach (94) gilt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge

$$\begin{aligned} -2(R_{hijk;l} + R_{hikl;j} + R_{hilj;k}) &= g_{hk,i,j,l} - g_{hj,i,k,l} + g_{ij,h,k,l} - g_{ik,h,j,l} + g_{hl,i,k,j} \\ &\quad - g_{hk,i,l,j} + g_{ik,h,l,j} - g_{il,h,k,j} + g_{hj,i,l,k} - g_{hl,i,j,k} + g_{il,h,j,k} - g_{ij,h,l,k} = 0 \end{aligned}$$

Als Tensorgleichung hat die Identität von Bianchi invariante Bedeutung, w. z. b. w.

Wenn die Riemannsche Krümmung in jedem Punkt konstant ist, dann gilt nach dem Lemma 4.5

$$R_{hijk} = K(u^1, \dots, u^n)(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik})$$

Unter Berücksichtigung des Lemmas von Ricci verschwindet

$$K_{,l}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + K_{,j}(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il}) + K_{,k}(g_{hj}g_{il} - g_{hl}g_{ij})$$

³⁰Luigi Bianchi (1856-1928); Friedrich Heinrich Schur (1856-1923).

so dass nach Überschiebung mit g^{jh} wegen $g^{jh}g_{hj} = n$

$$\begin{aligned} K_{,l}(g_{ik} - ng_{ik}) + K_{,j}(\delta_l^j g_{ik} - \delta_k^j g_{il}) + K_{,k}(ng_{il} - g_{il}) \\ = -(n-1)K_{,l}g_{ik} + (K_{,l}g_{ik} - K_{,k}g_{il}) + (n-1)K_{,k}g_{il} \\ = (n-2)(K_{,k}g_{il} - K_{,l}g_{ik}) = 0 \end{aligned}$$

folgt. Im Fall $n > 2$ gilt

$$K_{,k}g_{il} = K_{,l}g_{ik}$$

woraus nach Überschieben mit g^{fi}

$$K_{,k}\delta_l^f = K_{,l}\delta_k^f$$

entsteht, d. h. $K_{,l} = 0$ für $f = k \neq l$. Folglich haben wir den

Satz von F. Schur (1886). Ist die Riemannsche Krümmung in jedem Punkt eines Riemannschen Raumes einer Dimension $n > 2$ konstant, dann liegt ein Raum konstanter Krümmung vor.

Hierbei handelt es sich nicht nur um ein bemerkenswertes Kriterium für Räume konstanter Krümmung, sondern auch um eines der zahlreichen Beispiele der Sonderrolle der Dimension 2 in der Geometrie:

Schon für Flächen des Anschauungsraumes gilt $K = K(u^1, u^2)$, aber es gibt Flächen nicht-konstanter Gaußscher Krümmung.

4.10 Finslersche Räume

In den letzten Abschnitten wurde ein Bild von der Geometrie skizziert, die heute zu Ehren von Bernhard Riemann benannt wird.

Es ist bewunderungswürdig, wie er in seiner Probevorlesung den Begriff entwickelt, die wesentlichen Aussagen über die Krümmung unter Einschluss der Bedeutung von $n(n-1)/2$ Schnittkrümmungen und bei positiv definiter Maßbestimmung die Konsequenzen der freien Beweglichkeit darlegt. In [19] lesen wir außerdem:

"... noch kompliziertere Verhältnisse können eintreten, wenn die vorausgesetzte Darstellbarkeit eines Linienelementes durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades nicht stattfindet. ...

Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird."

Die hier erahnte Bedeutung seiner Probevorlesung wurde - wie schon erwähnt - in der allgemeinen Relativitätstheorie von A. Einstein glänzend bestätigt.

Die folgende stürmische Entwicklung der mathematischen Theorie umfasste auch die zu Beginn des Zitates klar herausgestellte Möglichkeit einer allgemeineren Maßbestimmung; so hat schon 1918 Paul Finsler (geb. 1894) in seiner Dissertation "Über Kurven und Flächen in allgemeinen

Räumen" (ebenfalls in Göttingen) eine Verallgemeinerung vorgelegt, die wir im abschließenden Abschnitt erläutern wollen.

Die Riemannsche Maßbestimmung macht jeden Tangentialraum zu einem Euklidischen Raum; insbesondere gilt "im Kleinen" der Satz des Pythagoras. (Falls man auf die positive Definitheit verzichtet, erhält man zumindest noch eine pseudo-euklidische Metrik in jedem Tangentialraum.)

Hier beginnen wir mit der Erläuterung der Geometrie im Tangentialraum $T(O)$ mit einigen Beispielen. Aus Gründen der physikalischen Dimension kann man statt der sich aus dem Satz des Pythagoras ergebenden Formel für den Einheitskreis in der x, y -Ebene (Abb. 44b)

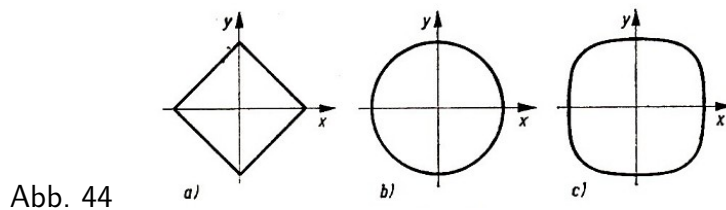
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

eine Bestimmung der Art

$$|x| + |y| = 1$$

(Abb. 44a) oder - wie schon von Riemann genannt -

$$\sqrt[4]{x^2 + y^2} = 1$$



(Abb. 44c) betrachten. Allgemein wird eine richtungsabhängige Abstandsfunktion die Einheitskreise beschreiben; die Forderung nach der Gültigkeit der Dreiecksungleichung (für nicht notwendig nicht-kollineare Punkte) ergibt konvexe Einheitskreise. Für die Vektoren von $T(O)$ haben wir somit eine Norm mit den Eigenschaften

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

sie bestimmt eine Minkowskische Metrik.³¹ Somit haben wir eine Theorie umrissen, die trotz der merkwürdig anmutenden Einheitskugeln (vgl. Abb. 45a, b) dennoch der Euklidischen Geometrie nächststehend ist: Eine Minkowskische Metrik ist nämlich schon dann euklidisch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (vgl. [28]):

- a) Es besteht freie Beweglichkeit.
- b) Es existiert an jeder Geraden eine Spiegelung.
- c) Je zwei von O ausgehende Halbgeraden können ineinander gedreht werden.
- d) Es gilt der Satz des Pythagoras oder die Parallelogrammbeziehung

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem richtungsabhängigen Tensorfeld für jede Karte

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1, \dots, u^n; x^1, \dots, x^n) \tag{110}$$

³¹Eine elementare Einführung in diese Geometrie von Hermann Minkowski (1864-1909) enthält das vierte Kapitel von [28].

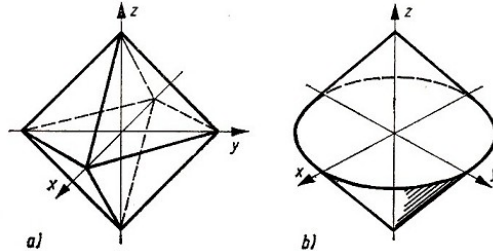


Abb. 45

derart, dass (110) in $T(P(u^1, \dots, u^n))$ eine Minkowskische Metrik induziert, heißt Finslerscher Raum.

In einem Finslerschen Raum wird die Bogenlänge mit Hilfe des Integrals

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(u^1, \dots, u^n; \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) \dot{u}^i \dot{u}^j} dt$$

berechnet. Kürzeste $u^i = u^i(t)$ sind autoparallel

$$\ddot{u}^t + \Gamma_{jk}^i(u^1, \dots, u^n; \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

dabei gilt $\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{ir}}{2}(-g_{jk,r} + g_{kr,j} + g_{rj,k})$, jedoch haben wir die Abhängigkeit von u^i und \dot{u}^i zu beachten. Auf den Beweis können wir aus Raumgründen hier nicht eingehen.

Ein Finslerscher Raum, bei dem für jeden Tangentialraum eine der obigen Bedingungen erfüllt ist, muss ein Riemannsches Raum sein. Falls c) für jeden Tangentialraum zutrifft, ergibt sich also der sogenannte Satz von Helmholtz; mit Hilfe der lokalen freien Beweglichkeit, der freien Beweglichkeit von Maßstäben, kam Helmholtz dann zu einer Charakterisierung der Räume konstanter Krümmung.

Die Riemannschen Räume besitzen genau einen mit der Metrik verträglichen affinen Zusammenhang. Existiert ein solcher für einen Finslerschen Raum, dann können wir die Metrik in einem beliebigen Punkt $P := P(u^1, \dots, u^n)$ aus der Metrik g_{ij} in einem Punkt P_0 mittels einer linearen Abbildung $x_0^k = \alpha_r^k(u^1, \dots, u^n) x^r$ darstellen:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^n; x^1, \dots, x^n) = g_{ij}(\alpha_r^1 x^r, \dots, \alpha_r^n x^r) \quad (111)$$

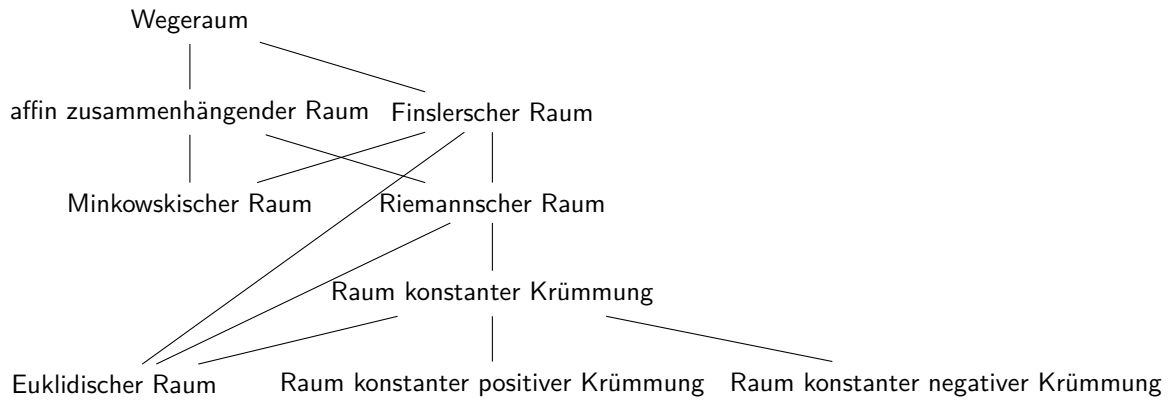
Ohne Beweis teilen wir mit (Satz von H. Weyl³²):

Wenn zu jedem nichtausgearteten Tensorfeld $\alpha_r^k(u^1, \dots, u^n)$ die Metrik (111) einen verträglichen affinen Zusammenhang besitzt, dann ist sie Riemannsch.

Die Riemannschen Räume sind spezielle affin zusammenhängende Räume. Für die Finslerschen Räume existiert eine analoge Verallgemeinerung, der Wegeraum; in ihm gibt es einen ausgezeichneten Differentiationsprozess, und es können Parallelverschiebung und Autoparallele erklärt werden. Bezüglich weiterer Eigenschaften eines Wegeraumes sei auf die Literatur verwiesen.

Die logischen Beziehungen zwischen den genannten Raumformen können folgendermaßen in einer Übersicht deutlich gemacht werden:

³²Hermann Weyl (1885-1955).



Diese Übersicht möge durch einige historische Daten ergänzt werden. Der Begriff des dreidimensionalen Euklidischen Raumes wurde um 300 v.u.Z. in [6] durch Angabe von Axiomen sowie Postulaten formiert und 1899 von D. Hilbert (1862-1943) präzisiert (vgl. [27]).

Die Entdecker der Lobatschewskischen Geometrie, nämlich Gauß (1777-1855), Lobatschewski (1792 bis 1856) und J. Bolyai (1802-1860), sind zwischen 1816 und 1831 auf einen Raum konstanter negativer Krümmung gestoßen. Die berühmte Habilitationsvorlesung von Riemann fand - wie schon oben erwähnt - 1854 statt.

Die Idee der Minkowskischen Metrik finden wir 1896 in dem Buch "Geometrie der Zahlen"; das mathematische Gewand der speziellen Relativitätstheorie hat Minkowski kurz vor seinem Tode entwickelt. Die Dissertation von Finsler lag 1918 vor. Die Betrachtung der Parallelverschiebung geht auf Levi-Civita zurück (1917); daran anknüpfend hat Weyl wesentlich zur mathematischen Klärung des Raumbegriffes beigetragen.

Das Interesse an allgemeinen Raumtypen wie beispielsweise am Finslerschen Raum von seiten der Physik ist die bedeutendste Triebkraft bei ihrer weiteren mathematischen Untersuchung.

Ergänzende Literatur zu Kapitel 4

- [23] AMBARZUMJAN, V. A., B. G. KUSNEZOW, G. I. NAAN, J. A. SMORODINSKI und B. J. STEINMAN, Philosophische Probleme der modernen Kosmologie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [24] EINSTEIN, A., Grundzüge der Relativitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin Pergamon Press, Oxford/Vieweg & Sohn, Braunschweig 1979.
- [25] EINSTEIN, A., Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin/Pergamon Press, Oxford/Vieweg & Sohn, Braunschweig 1979.
- [26] GROMOLL, D., W. KLINGENBEBG und W. MEYER, Riemannsche Geometrie im Großen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968.
- [27] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie, 12. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1968.
- [28] KLOTZEK, B., und E. QUAISSER, Nichteuklidische Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.
- [29] LIEBSCHER, D.-E., Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal, Akademie-Verlag, Berlin 1977.
- [30] RUND, H., The differential geometry of Finsler spaces, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.
- [31] TREDER, H.-J., Elementare Kosmologie, Akademie-Verlag, Berlin 1975.
- [32] WEYL, H., Raum - Zeit - Materie, Verlag von Julius Springer, Berlin 1923 (5. Auflage).
- [33] WEYL, H., Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Bezeichnungen und Symbole

$P = P(u^1, u^2)$	Parameterdarstellung einer Fläche
P_i, P_{ij}	partielle Ableitungen
$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2)$	Normalvektor
\mathfrak{N}_i	partielle Ableitung
$\delta_{ij}, \delta_i^j, \delta^{ij}$	Kroneckersymbol
$g_{ij}, g = g_{ij} $	metrische Fundamentalgrößen
$L_{ij}, L) L_{ij} $	zweite Fundamentalgrößen
$K = \frac{L}{g}$	Gaußsche Krümmung
$K(a, b)$	Riemannsche Krümmung, Schnittkrümmung
k_g	geodätische Krümmung
Γ_{ij}^h	Christoffelsymbole
Λ_{ij}^h	linearer/affiner Zusammenhang
$\frac{D}{dt}$	absolute Ableitung
$g_{ij,k}, \Gamma_{ij,k}^h$	partielle Ableitungen
$x_{;k}^i, l_{i;k}, t_{\dots;k}$	kovariante Ableitungen
f_M	Karte
R_{ijk}^h	gemischter Krümmungstensor
R_{hijk}	kovarianter Krümmungstensor
R_{ij}	Ricci-Tensor
R	Krümmungsskalar
$U_\rho, U_{\sigma,\tau}, U_P$	Umgebungen
T_2	Hausdorffsches Trennungsaxiom