Horst Belkner

Metrische Räume

1972 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 65
Abschrift und LaTex-Satz: 2021 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Das vorliegende Bändchen der MSB, das die Kenntnis des in der gleichen Reihe erschienenen Büchleins "Matrizen" voraussetzt, gibt eine Einführung in die Anfangsgründe der Funktionalanalysis, einer mathematischen Disziplin, die sich erst im 20. Jahrhundert entwickelt hat und Grundbegriffe aus verschiedenen mathematischen Disziplinen vereinigt.

Im ersten Abschnitt erfolgt die Bereitstellung einiger Tatsachen, die zum Verständnis des Folgenden unbedingt erforderlich sind. Im zweiten, dritten und vierten Abschnitt werden die Begriffe Abstandsfunktion und metrischer Raum eingeführt und Folgen in metrischen Räumen behandelt.
Der folgende Abschnitt ist den vollständigen metrischen Räumen gewidmet. Der sechste Abschnitt gipfelt im Banachschen Fixpunktsatz.

Im letzten Abschnitt erfolgt schließlich auf der Grundlage der vorangegangenen Abschnitte eine Einführung in die Theorie der iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme von p Gleichungen mit p Variablen.

Definitionen, Sätze, ausführlich durchgerechnete Beispiele und Ein den Text eingestreute Aufgaben sind jeweils fortlaufend nummeriert. Die Aufgaben dienen nicht nur der Festigung des vorher behandelten Stoffes, sondern sie ergänzen ihn auch. Das Lösen dieser Aufgaben ist daher vor dem jeweiligen Weiterlesen unbedingt erforderlich.

Herrn Prof. Dr. S. Brehmer möchte ich für Ratschläge danken, die er mir nach Durchsicht des Manuskriptes gegeben hat. Gleichzeitig gilt mein Dank Frau D. Ziegler und Frau R. Stachorra vom Verlag BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft für die angenehme Zusammenarbeit.

Potsdam, Frühjahr 1971 Horst Belkner

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

1.1 Ungleichungen

In diesem Abschnitt verstehen wir unter a, b, c, d, falls nicht anders vermerkt, beliebige reelle Zahlen. Zwischen reellen Zahlen a, b besteht genau eine der drei Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ ist kleiner als } b, (a < b) \\ a \text{ ist gleich } b, (a = b) \\ a \text{ ist größer als } b, (a > b) \end{array}\right\} \tag{1}$$

Man bezeichnet $a < b$ bzw. $a > b$ als Ungleichung. Unter $a \leq b$ versteht man "$a < b$ oder $a = b$". Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten die folgenden Grundgesetze:

Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ ist, so folgt $a \leq c$ (2)
Wenn $a \leq b$ ist, so folgt $a + c \leq b + c$ (3)
Wenn $a \leq b$ und $c > 0$ ist, so folgt $ac \leq bc$ (4)

Aus diesen drei Grundgesetzen leiten wir unter Verwendung der als bekannt vorausgesetzten Grundgesetze der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen einige Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen her.

Regel 1. Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$ ist, so folgt $a + c \leq b + d$.

Beweis. Auf Grund von (3) ergibt sich aus $a \leq b$ bzw. $c \leq d$ zunächst

$$a + c \leq b + c \qquad \text{bzw.} \qquad b + c \leq b + d$$

Berücksichtigen wir (2), so erhalten wir die Behauptung.

Regel 2. Wenn $a \leq b$ mit $b > 0$ und $c \leq d$ mit $c > 0$ ist, so folgt $ac \leq bd$.

Beweis. Auf Grund von (4) ergibt sich aus $a \leq b$ bzw. $c \leq d$ zunächst

$$ac \leq bc \qquad \text{bzw.} \qquad bc \leq bd$$

Berücksichtigen wir (2), so erhalten wir die Behauptung.

Regel 3. Wenn $0 < a \leq b$ ist, so folgt $a^2 \leq b^2$.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus Regel 2, wenn wir dort $c = a$ und $d = b$ setzen.

Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, gilt also $a \geq 0$, so gibt es stets eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = a$. Diese nichtnegative reelle Zahl x heißt die Wurzel von a. Sie wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Regel 4. Sind a, b nichtnegative reelle Zahlen mit $a \leq b$, so folgt $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Beweis. Angenommen, es gelte $\sqrt{b} < \sqrt{a}$. Mit Hilfe von Regel 3 folgt hieraus $b < a$, was mit $a > b$ gleichbedeutend ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \leq b$. Demnach muss unsere Annahme falsch gewesen sein. Es gilt also $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Regel 5. Wenn $a \leq b$ und $c < 0$ ist, so folgt $ac \geq bc$.

Beweis. Auf Grund von (3) folgt aus $a \leq b$ zunächst

$$a + (-b) \leq b + (-b) \qquad \text{also} \qquad a - b \leq 0$$

und hieraus auf Grund von (3)

$$a - b + (-a) \leq -a \qquad \text{also} \qquad -b \leq -a$$

Die letzte Ungleichung ist gleichbedeutend mit $-a \geq -b$.
Damit haben wir folgendes Zwischenergebnis erhalten:
Wenn $a \leq b$ ist, so folgt $-a \geq -b$. (5)

Setzen wir $c' = -c$, so ist $c' > 0$, da nach Voraussetzung $c < 0$ ist. Auf Grund von (4) folgt aus $a \leq b$ die Ungleichung

$$ac' \leq bc'$$

Berücksichtigen wir (5), so erhalten wir

$$-ac' \geq -bc'$$

Hieraus folgt '

$$a \cdot (-c') \geq b \cdot (-c') \qquad , \qquad ac \geq bc$$

Regel 6. Wenn $0 < a \leq b$ oder $a \leq b < 0$ ist, so folgt $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung ist $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} > 0$. Wegen (4) gilt dann

$$a \cdot \frac{1}{ab} \leq b \cdot \frac{1}{ab}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Beispiel 1. Es sei a eine reelle Zahl, die der Bedingung $a > -1$ genügt. Wir beweisen, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \tag{6}$$

Diese Ungleichung trägt den Namen des Schweizer Mathematikers Jacob Bernoulli (1654-1705).

Beweis durch vollständige Induktion nach n.
Es ist (6) richtig für $n = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (6) für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 1$ die Gültigkeit von (6) für $n = k + 1$ folgt. Aus der Induktionsvoraussetzung

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka$$

folgt wegen $1+a>0$ auf Grund von (4)

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) \qquad \text{und hieraus} \qquad (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2$$

Da $ka^2 \geq 0$ ist, gilt

$$1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a \qquad \text{und somit} \qquad (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir beweisen nun eine wichtige Ungleichung, die nach dem deutschen Mathematiker Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) benannt wird und Schwarzsche Ungleichung heißt.

Satz 1. Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_p$ und für alle reellen Zahlen $b_1, b_2, ..., b_p$ gilt

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2) \tag{7}$$

Beweis.
Fall 1. Es sei

$$(a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_p = 0) \qquad \text{oder} \qquad (b_1 = 0, b_2 = 0, ..., b_p = 0) \tag{8}$$

Dann gilt offensichtlich (7), da $0 \leq 0$ eine wahre Aussage ist.

Fall 2. Es sei "nicht $(a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_p = 0)$" und "nicht $(b_1 = 0, b_2 = 0, ..., b_p = 0)$" (9)

Dann ist mindestens ein $a_i \neq 0$ (und mindestens ein $b_j \neq 0$, und es ist daher

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2 > 0 \qquad , \qquad b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2 > 0 \tag{10}$$

Für alle reellen Zahlen x gilt stets

$$y = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_px + b_p)^2 \geq 0 \tag{11}$$

da jeder Summand $(a_ix + b_i)^2$ in (11) eine nichtnegative reelle Zahl ist. Aus (11) folgt

$$y = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2) \geq 0 \tag{12}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} a = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2 \\ b = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p \\ c = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2 \end{array}\right\} \tag{13}$$

geht (12) über in

$$y = ax^2 + 2bx + c \geq 0 \tag{14}$$

Wegen (10) ist in (14) der Koeffizient a positiv, also von null verschieden. Die Kurve von ‘

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

ist daher eine Parabel, die wegen $y \geq 0$ die Abszissenachse höchstens berührt. Deshalb kann die quadratische Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \tag{15}$$

auch nicht zwei verschiedene reelle Lösungen besitzen. Aus der Lösungsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

für die quadratische Gleichung (15) ergibt sich, dass dann

$$b^2 - ac \leq 0 \qquad \text{also} \qquad b^2 \leq ac \tag{16}$$

sein muss. Setzen wir (13) in (16) ein, so erhalten wir (7).

Aufgabe 1. Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung genügen:

$$\frac{x}{x-1} \leq 2$$

Aufgabe 2. Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b gilt

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Aufgabe 3. Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_p$ gilt

$$\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_p} \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_p} \tag{17}$$

1.2 Betrag einer reellen Zahl

Definition 1. Ist a eine reelle Zahl, so heißt die durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < \end{cases}$$

definierte nichtnegative reelle Zahl $|a|$ der Betrag von a.

Beispielsweise ist $|3| = 3$, $|-5| = 5$.
Insbesondere gilt offensichtlich für jede reelle Zahl a stets

$$a \leq |a| \tag{1}$$

Ist a eine beliebige reelle Zahl, so ist $a^2 \geq 0$. Auf Grund unserer Ausführungen in 1.1. gilt dann

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{2}$$

Beispielsweise ist also $\sqrt{(-3)^3} = |3| = 3$ bzw. $\sqrt{4^2} = |4| = 3$.
Als Folgerung von Satz 1 erhalten wir eine wichtige Ungleichung, die nach dem deutschen Mathematiker Hermann Minkowski (1864-1909) benannt ist.

Satz 2. Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_p$ und für alle reellen Zahlen $b_1, b_2, ..., b_p$ gilt

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + ... + (a_p+b_p)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2} \tag{3}$$

Beweis.
Aus 1.1.(7) folgt auf Grund von (2) und Regel 4

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2}$$

Da wegen (1) stets

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p \leq |a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p|$$

ist, gilt .

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2} \tag{4}$$

Wegen $2 > 0$ folgt aus (4) unter Berücksichtigung von 1.1.(4)

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p) \leq 2 \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2}$$

Fügen wir auf beiden Seiten der letzten Ungleichung die reelle Zahl

$$(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + ... + (a_p^2 + b_p^2)$$

hinzu, so gilt auf Grund von 1.1.(3)

$$\begin{aligned}(a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2) + ... + (a_p^2 + 2a_pb_p + b_p^2) \leq \\ (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2) + 2 \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2} \\ + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2)\end{aligned}$$

Diese Ungleichung können wir auch in der Form

$$(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + ... + (a_p^2 + b_p^2) \leq (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_p^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_p^2})^2$$

schreiben. Wenden wir auf diese Ungleichung Regel 4 an, so erhalten wir die Behauptung (3).

Satz 3. Für alle reellen Zahlen a, b gilt

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{5}$$

Beweis. Für $p = 1$ lautet (3)

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2} \leq \sqrt{a_1^2} + \sqrt{b_1^2} \tag{6}$$

Setzen wir $a_1 = a, b_1 = b$, so geht (6) unter Berücksichtigung von (2) über in (5), womit der Satz bewiesen ist.

Es seien a, b, c reelle Zahlen. die der Bedingung

$$|a - b| \leq c \tag{7}$$

genügen.
Ist $a - b \geq 0$, so geht (7) über in $a - b \leq c$. (8)
Ist $a - b < 0$, so geht (7) über in $b - a \leq c$. (9)
Aus (8) bzw. (9) folgt

$$a - c \leq b \qquad \text{bzw.} \qquad b \leq a + c$$

Damit lässt sich (7) auch in der Form

$$a - c \leq b \leq a + c \tag{10}$$

schreiben, da umgekehrt aus (10) auch (7) folgt.
Sind a, b feste reelle Zahlen mit $a < b$, so bezeichnet man die Gesamtheit aller reellen Zahlen zu, die der Bedingung $a \leq x \leq b$ bzw. der Bedingung $a < x < b$ genügen, als abgeschlossenes Intervall, in Zeichen $S[a, b]$, bzw. als offenes Intervall, in Zeichen $S(a, b)$.

Aufgabe 4. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_p$ gilt

$$|a_1 + a_2 + ... + a_p| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_p] \tag{11}$$

1.3 Maximum einer endlichen Menge reeller Zahlen

Gegeben seien endlich viele reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_p$, die wir uns zu einer Menge M zusammengefasst denken. Dies schreiben wir in der Form

$$M = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$$

Die reellen Zahlen $x1, x_2, ..., x_p$ heißen die Elemente der Menge M. Für die Aussage "x_i ist ein Element von M" schreiben wir kürzer "$x_i \in M$". Nach dem Mengenbegriff der Mathematik ändert sich M nicht, wenn man einige Elemente von M mehrfach aufzählt. Beispielsweise ist also

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 2, 3, 3\}$$

Definition 2. Eine reelle Zahl a heißt Maximum einer Menge $M = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ von reellen Zahlen, in Zeichen

$$a = \max\{x_1, x_2, ..., x_p\} \tag{1}$$

wenn $a \in M$ ist und für alle $x_i \in M$ gilt $x_i = a$.

Offensichtlich ist a in (1) eindeutig bestimmt. Beispielsweise ist $\max\{1, 3, 4, 2\} = 4$.

Aufgabe 5. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a1, a_2, ..., a_p$ und für alle reellen Zahlen
$b_1, b_2, ..., b_p$ gilt

$$\max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_p + b_p\} \leq \max\{a_1, a_2, ..., a_p\} + \max\{b_1, b_2, ..., b_p\} \tag{2}$$

Ist insbesondere $p = 2$ und

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = |x_1 - z_1|, & b_1 = |z_1 - y_1| \\ a_2 = |x_2 - z_2|, & b_2 = |z_2 - y_2| \end{array}\right\}$$

wobei $x1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, so geht (2) über in

$$\max\{|x_1-z_1|+|z_1-y_1|, |x_2-z_2|+|z_2-y_2|\} \leq \max\{|x_1-z_1|, |x_2-z_2|\} \max\{|z_1-y_1|, |z_2-y_2|\} \tag{3}$$

2 Abstandsfunktionen

2.1 Die Abstandsfunktion d_1

In einer Ebene e sei ein kartesisches xy-Koordinatensystem vorgegeben (Fig. 1). Der Punkt O heißt Ursprung des Koordinatensystems, und die Punkte E_l, E_2 heißen Einheitspunkte der Koordinatenachsen (Fig. 1). Es seien $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ zwei beliebige Punkte von e (Fig. 2).

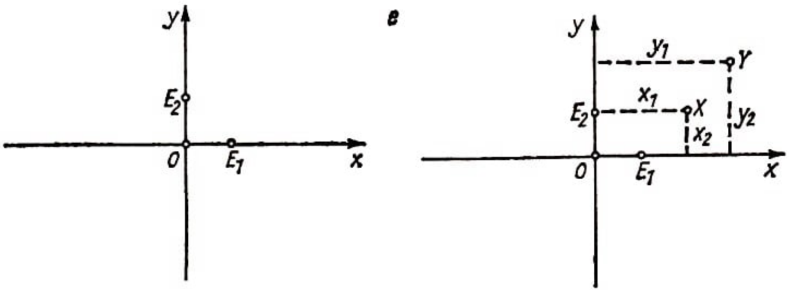


Fig. 1, 2

Dafür sagt man auch, die Punkte X, Y seien Elemente von e, wofür auch die Schreibweise

$$X, Y \in e$$

üblich ist. Zwei Punkte $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ sind gleich genau dann, wenn gilt

$$x_1 = y_1 \qquad , \qquad x_2 = y_2$$

Wir führen nun eine Funktion d_1 ein, die dem Punktepaar $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ von e die reelle Zahl

$$d_1(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 +)x_2 - y_2)^2} \tag{1}$$

zuordnet. Wie aus der Schulmathematik bekannt ist, kann $d_1(X, Y)$ als Abstand der beiden Punkte X, Y gedeutet werden (Fig. 3).

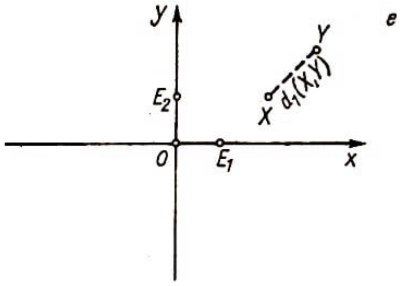


Fig. 3

Ist beispielsweise $X(1, 3)$, $(4, -1)$, so ist

$$d_1(X, Y) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Die Funktion d_1 besitzt folgende Eigenschaften:

A1. Für alle Punkte $X, Y \in e$ gilt: Es ist $d_1(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ ist.

A2. Für alle Punkte $X, Y \in e$ gilt: $d_1(X, Y) = d_1(Y, X)$.

A3. Für alle Punkte $X, Y, Z \in e$ gilt: $d_1(X,Y) \leq d_1(X,Z) + d_1(Z,Y)$ (2)

Beweis von A1. Es sei $d_1(X,Y) = 0$. Aus (1) folgt dann

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$ null werden. Hieraus folgt $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, d.h. es gilt

$$X = Y$$

Es gelte umgekehrt $X(x_1, x_2) = Y(y_1, y_2)$ (3)
Dann folgt $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. (4)
Unter der Voraussetzung (3) gilt wegen (4) somit $d_1(X,Y) = 0$.

Beweis von A2. Stets ist

$$d_1(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d_1(X,Y)$$

Beweis von A3. Wegen

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - y_1 = (x_1 - z_1) + (z_1 - y_1) \\ x_2 - y_2 = (x_2 - z_2) + (z_2 - y_2) \end{array}\right\}$$

gilt stets

$$d_1(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{[(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)]^2 + [(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)]^2} \tag{5}$$

Für $p = 2$ lautet die Minkowskische Ungleichung 1.2.(3):

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{6}$$

Setzen wir

$$a_1 = x_1 - z_1, \quad b_1 = z_1 - y_1, \quad a_2 = x_2 - z_2, \quad b_2 = z_2 - y_2$$

so geht (6) über in

$$\begin{array}{l} \sqrt{[(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)]^2 + [(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)]^2} \leq \\ \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \end{array} \tag{7}$$

Unter Berücksichtigung von (7) folgt aus (5)

$$d_1(X,Y) \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \tag{8}$$

Verstehen wir unter z_1, z_2 die Koordinaten von $Z \in e$, so ist auf Grund von (1) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (8) gleich $d_1(X,Z)$ bzw. gleich $d_1(Z,Y)$. Damit geht (8) über in (2), womit A3 bewiesen ist.

Die unter A1, A2, A3 zusammengefassten Eigenschaften der Funktion d_1 bringen folgende fundamentale Eigenschaften, die man sinnvollerweise einem Abstand zuschreiben möchte, zum Ausdruck:

A1. Der Abstand zweier Punkte verschwindet genau dann, wenn die Punkte zusammenfallen.

A2. Bei der Abstandsbestimmung zweier Punkte sind beide Punkte gleichberechtigt.

A3. Eine Seite eines Dreiecks XYZ kann nicht größer sein als die Summe der beiden anderen Seiten (Fig. 4).

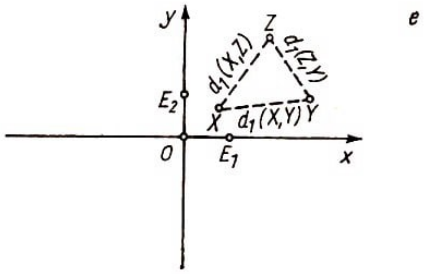


Fig. 4

Die Ungleichung (2) heißt daher Dreiecksungleichung. Jede Funktion d mit den Eigenschaften A1, A2, A3 werden wir als Abstandsfunktion bezeichnen.

Für die Koordinaten x, y der Punkte $P(x, y)$ von e, die vom Ursprung O des Koordinatensystems den Abstand

$$d_(P, O) = 1$$

haben gilt $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$. Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{9}$$

Das ist die Gleichung eines Kreises k_1 mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius eins. Alle Punkte $P(x, y)$, die auf dem Rand des Kreises k_1 (Fig. 5) mit der Gleichung (9) liegen, haben vom Ursprung den Abstand $d_1(P, O) = 1$.

Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Für die Koordinaten x, y der Punkte $P(x, y)$ von e, die von O einen Abstand $d_1(P, O)$ mit

$$d_1(P, O) < a \tag{10}$$

haben, gilt $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$. (11)

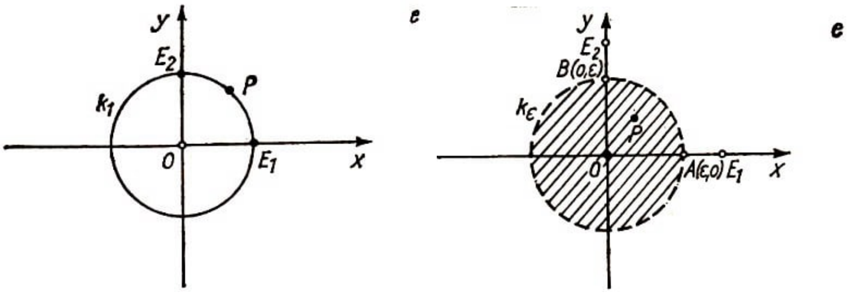


Fig. 5,6

Die Ungleichung (11) besagt, dass alle Punkte $P(x, y)$, die im Innern des Kreises $k\varepsilon$ (Fig. 6) mit O als Mittelpunkt und ε als Radius liegen, der Bedingung (10) genügen.

2.2 Die Abstandsfunktion d_2

Es seien $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$, $Z(z_1, z_2)$ beliebige Punkte einer Ebene e, in der ein kartesisches Koordinatensystem vorgegeben ist.
Wir führen eine Funktion d_2 ein, die dem Punktepaar $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ von e die reelle Zahl

$$d_2(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \tag{1}$$

zuordnet. Ist beispielsweise $X(1, 3)$, $Y(4, -1)$, so ist

$$d_2(X, Y) = \max\{|1 - 4|, |3 + 1|\} = \max\{3, 4\} = 4$$

Wir beweisen, dass auch die Funktion d_2 die Eigenschaften A1, A2, A3 besitzt.

Beweis.
a) Es sei $d_2(X, Y) = 0$. Aus

$$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \qquad \text{folgt} \qquad |x_1 - y_1| = 0, \qquad |x_2 - y_2| = 0$$

und hieraus

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2 \qquad \text{d.h., es gilt} \qquad X = Y$$

Umgekehrt gelte

$$X(x1, x_2) = Y(y_1, y_2) \tag{2}$$

Hieraus folgt $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Unter der Voraussetzung (2) gilt somit

$$d_2(X, Y) = \max\{0, 0\} = 0$$

d.h., die Funktion d_2 besitzt die Eigenschaft A1.

b Wegen

$$\left.\begin{array}{l} |x_1 - y_1| = |y_1 - x_1| \\ |x_2 - y_2| = |y_2 - x_2| \end{array}\right\}$$

gilt stets

$$d_2(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d_2(Y, X)$$

d.h., die Funktion d_2 besitzt auch die Eigenschaft A2.

c) Wegen

$$x_1 - y_1 = (x_1 - z_1(+(z_1 - y_1) \qquad , \qquad x_2 - y_2 = (x_2 - z_2(+(z_2 - y_2)$$

gilt unter Berücksichtigung von Satz 3,

$$\left.\begin{array}{l} |x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \\ |x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \end{array}\right\} \tag{3}$$

Damit ist

$$d_2(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \tag{4}$$

Auf Grund von 1.3.(3) geht (4) über in

$$d_2(X,Y) = \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \max\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\} \tag{5}$$

Verstehen wir unter z_1, z_2 die Koordinaten von $Z \in e$, so ist auf Grund von (1) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (5) gleich $d_2(X,Z)$ bzw. gleich $d_2(Z,Y)$. Somit geht (5) über in

$$d_2(X,Y) \leq d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)$$

Damit ist nachgewiesen, dass d_2 eine Abstandsfunktion ist. Die reelle Zahl $d_2(X,Y)$ können wir daher auch als Abstand der beiden Punkte X, Y bezeichnen.

Für die Koordinaten x,y der Punkte $P(x,y)$ von e, die vom Ursprung O des Koordinatensystems den Abstand $d_2(P,O) = 1$ haben, gilt

$$\max\{|x-0|, |y-0|\} = 1 \qquad \text{also} \qquad \max\{|x|,|y|\} = 1 \tag{6}$$

Hieraus folgt $|x| = 1$, $|y| \leq 1$ oder $|x| \leq 1$, $|y| = 1$.

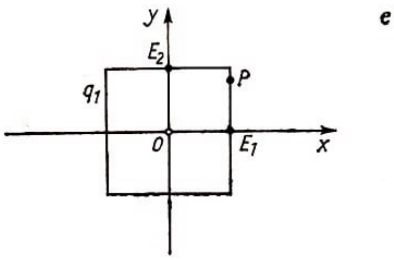


Fig. 7

Demnach wird durch (6) ein Quadrat q_1 (Fig. 7) charakterisiert, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Alle Punkte $P(x,y)$, die auf dem Rand dieses Quadrats liegen, haben vom Ursprung den Abstand $d_2(P,O) = 1$.

Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Für die Koordinaten x,y der Punkte $P(x,y)$ von e, die von O einen Abstand $d_2(P,O)$ mit

$$d_2(P,O) < \varepsilon \tag{7}$$

haben, gilt wegen

$$\max\{|x|,|y|\} < \varepsilon \qquad \text{dann} \qquad |x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon$$

Dies besagt, dass alle Punkte $P(x,y)$, die im Innern des Quadrats q_ε (Fig. 8) liegen, der Bedingung (7) genügen.

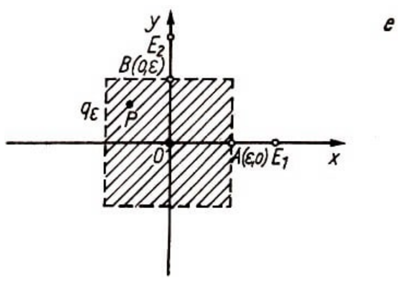


Fig. 8

2.3 Die Abstandsfunktion d_3

Unter $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$, $Z_1(z_1, z_2)$ verstehen wir wieder beliebige Punkte einer Ebene e, in der ein kartesisches Koordinaten- system vorgegeben ist.
Wir führen eine Funktion d_3 ein, die dem Punktepaar $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ von e die reelle Zahl

$$d_3(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{1}$$

zuordnet. Ist beispielsweise $X(1, 3)$, $Y(4, -1)$, so ist

$$d_3(X, Y) = |1 - 4| + |3 + 1| = 3 + 4 = 7$$

Auch diese Funktion besitzt, wie wir anschließend beweisen werden, die Eigenschaften A1, A2, A3.

Beweis.
a) Es sei $d_3(X, Y) = 0$. Wegen (1) gilt dann

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für

$$|x_1 - y_1| = 0 \qquad , \qquad |x_2 - y_2| = 0$$

verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ ist, d.h., es gilt $X = Y$.
Es gelte umgekehrt

$$X(x_1, x_2) = Y(y_1, y_2) \tag{2}$$

Hieraus folgt $x_1 = x_2$. Damit gilt unter der Voraussetzung (2) $d_3X, Y) = 0$. Die Funktion d_3 besitzt also die Eigenschaft A1.

b) Stets gilt

$$d_3(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_3(Y, X)$$

d.h., die Funktion d_3 besitzt die Eigenschaft A2.

c) Berücksichtigen wir 2.2.(3), so geht

$$d_3(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

über in

$$d_3(X, Y) \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

Die letzte Ungleichung können wir auch in der Form

$$d_3(X, Y) \leq (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) \tag{3}$$

schreiben. Verstehen wir unter z_1, z_2 die Koordinaten von $Z \in e$, so ist auf Grund von (1) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (3) gleich $d_3(X, Z)$ bzw. gleich $d_3(Z, Y)$. Damit geht (3) über in

$$d_3(X, Y) \leq d_3(X, Z) + d_3(Z, Y)$$

Somit haben wir bewiesen, dass auch d_3 eine Abstandsfunktion ist. Die reelle Zahl $d_3(X,Y)$ können wir daher auch als Abstand der beiden Punkte X,Y bezeichnen.
Für die Koordinaten x,y der Punkte $P(x,y)$ von e, die vom Ursprung O des Koordinatensystems den Abstand $d_3(P,O) = 1$ haben, gilt

$$|x-0|+|y-0|=1 \qquad \text{also} \qquad |x|+|y|=1 \tag{4}$$

Fall 1. Es sei $x \geq 0, y \geq 0$. Dann geht (4) über in $x+y=1$.
Fall 2. Es sei $x \geq 0, y < 0$. Dann geht (4) über in $x-y=1$.
Fall 3. Es sei $x < 0, y \geq 0$. Dann geht (4) über in $-x+y=1$.
Fall 4. Es sei $x < 0, y < 0$. Dann geht (4) über in $-x-y=1$.

Demnach wird durch (4) ein Quadrat q_1 (Fig. 9) charakterisiert, dessen Eckpunkte in den Koordinatenachsen liegen.

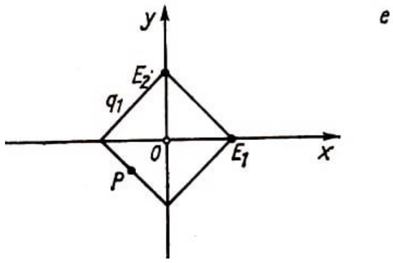


Fig. 9

Alle Punkte $P(x,y)$, die auf dem Rand dieses Quadrats liegen, haben vom Ursprung den Abstand $d_3(P,O) = 1$.

Es sei wieder ε eine beliebige positive reelle Zahl. Für die Koordinaten x,y der Punkte $P(x,y)$ von e, die von O einen Abstand $d_3(P,O)$ mit

$$d_3(P,0) < \varepsilon \tag{5}$$

haben, gilt $|x|+|y| < \varepsilon$.
Dies besagt, dass alle Punkte $P(x,y)$, die im Innern des Quadrats q_ε (Fig. 10) liegen, der Bedingung (5) genügen.

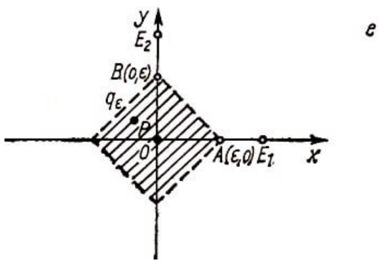


Fig. 10

2.4 Begriff der Abstandsfunktion

Die in 2.1., 2.2. und 2.3. eingeführten Abstandsfunktionen sind auf einer Ebene, also auf einer Menge von Punkten definiert. Man kann aber auch Abstandsfunktionen auf Mengen definieren, deren Elemente beispielsweise Spaltenvektoren oder reelle Zahlen sind.

Lassen wir offen, ob die Elemente einer Menge M Punkte bzw. Spaltenvektoren bzw. reelle Zahlen sind, so bezeichnen wir die Elemente von M mit x, y, z, ...

Definition 3. Eine auf einer nichtleeren Menge M definierte Funktion d, die je zwei Elementen x, y von M eine reelle Zahl $d(x, y)$ zuordnet, heißt Abstandsfunktion, wenn d folgende Eigenschaften besitzt:

Für alle Elemente x, y, z von M gilt:
A1. Es ist $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist;
A2. $d(x, y) = d(y, x)$;
A3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (1)

Die reelle Zahl $d(x, y)$ heißt Abstand der Elemente x, y, und die Ungleichung (1) heißt Dreiecksungleichung.

Im folgenden Abschnitt werden wir auf der Grundlage dieser Definition den Begriff "metrischer Raum" einführen. Zunächst ziehen wir aus der Definition 3 eine wichtige Folgerung.

Satz 4. Ist d eine Abstandsfunktion auf einer Menge M mit den Elementen x, y, ..., so gilt stets $d(x, y) \geq 0$.

Beweis. Ersetzen wir y durch x und z durch y in (1), so erhalten wir die Ungleichung

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) \tag{2}$$

Berücksichtigen wir A1 und A2, so geht (2) über in $0 \leq 2d(x, y)$. Hieraus folgt die Behauptung $d(x, y) \geq 0$.

3 Metrische Räume

3.1 Begriff des metrischen Raums

Definition 4. Ist d eine Abstandsfunktion auf einer Menge M, so heißt das geordnete Paar (M, d) ein metrischer Raum und die Menge M ihr Träger.

Verstehen wir unter e die Menge aller Punkte X, Y, ... einer Ebene, so gilt auf Grund von Definition 4 und dem in 2.1., 2.2., 2.3. Bewiesenen, dass

$$\begin{aligned} &(e, d_1) \quad \text{mit} \quad d_1(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \\ &(e, d_2) \quad \text{mit} \quad d_2(X,Y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \\ &(e, d_3) \quad \text{mit} \quad d_3(X,Y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \end{aligned}$$

metrische Räume sind. Obgleich diese drei metrischen Räume dieselbe Trägermenge e besitzen, sind sie verschiedene metrische Räume, da in ihnen der Abstand zwischen den Elementen unterschiedlich definiert ist.

Definition 5. Ist a ein Element eines metrischen Raumes (M, d) und ε eine positive reelle Zahl, so heißt die Menge aller Elemente x von (M, d), die von a einen Abstand $d(x, a) < \varepsilon$ haben, ε-Umgebung von a, in Zeichen $U_\varepsilon(a)$.
Das Element a bzw. die positive reelle Zahl ε heißt der Mittelpunkt bzw. der Radius von $U_\varepsilon(a)$.

Im metrischen Raum (e, d_1) bzw. (e, d_2) bzw. (e, d_3) besteht beispielsweise $U_\varepsilon(O)$, wie wir in 2.1., Fig. 6, bzw. in 2.2., Fig. 8, bzw. in 2.3., Fig. 10, gezeigt haben, aus allen Punkten, die im Innern eines Kreises bzw. eines Quadrats liegen.
Das folgende Beispiel kann bei einer ersten Lektüre überschlagen werden, da es für das Verständnis des Folgenden nicht erforderlich ist.

Beispiel 2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und

$$f(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x-y)} \tag{1}$$

Wir zeigen, dass (M, f) ein metrischer Raum ist.
Beweis. Dazu müssen wir nachweisen, dass f eine Abstandsfunktion ist. Da nach Voraussetzung (M, d) ein metrischer Raum ist, also d eine Abstandsfunktion ist, gilt auf Grund von Satz 4 stets

$$d(x,y) \geq 0 \qquad \text{also} \qquad 1 + d(x,y) > 0 \tag{2}$$

Damit wird durch (1) je zwei Elementen x, y von M genau eine reelle Zahl $f(x, y)$ zugeordnet.

a) Es sei $f(x, y) = 0$. Dann geht (1) über in

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = 0$$

Hieraus gilt $d(x, y) = 0$. (3)
Auf Grund von A1 ist dann $x = y$ (4)
Umgekehrt gelte (4). Dann folgt auf Grund von A1 aus (4) die Beziehung (3), und (1) geht über in

$$f(x, y) = \frac{0}{1} = 0$$

Die Funktion f besitzt also die Eigenschaft A1.

b) Wegen $d(x, y) = d(y, x)$ gilt stets

$$f(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = f(y, x)$$

d.h., die Funktion f besitzt auch die Eigenschaft A2.

c) Um zu zeigen, dass die Funktion f der Dreiecksungleichung genügt, unterscheiden wir zwei Fälle:
Fall 1. Es sei $x + y$. Dann ist $d(x, y) > 0$. Dividieren wir Zähler und Nenner der rechten Seiten von (1) durch $d(x, y)$, so erhalten wir

$$f(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{d(x,y)} + 1} \tag{5}$$

Da nach Voraussetzung (M, d) ein metrischer Raum ist, genügt die Funktion d der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Hieraus folgt wegen

$$0 < d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

auf Grund von Regel 6,

$$\frac{1}{d(x, y)} \geq \frac{1}{d(x, z) + d(z, y)} \tag{6}$$

Mit Hilfe von (6) geht (5) über in

$$f(x, y) \leq \frac{1}{\frac{1}{d(x,z)+d(z,y)} + 1}$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner der rechten Seite der letzten Ungleichung mit $d(x, z) + d(z, y)$, so erhalten wir

$$f(x + y) \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

Diese Ungleichung lässt sich in der Form

$$f(x + y) \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \tag{7}$$

schreiben. Da stets

$$d(z,y) \geq 0 \qquad , \qquad d(x,z) \geq 0$$

ist, vergrößern wir höchstens die rechte Seite von (7), wenn wir dort im ersten Nenner bzw. im zweiten Nenner den Summanden $d(z,y)$ bzw. den Summanden $d(x,z)$ weglassen:

$$f(x,y) \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \tag{8}$$

Berücksichtigen wir (1), so geht (8) über in

$$f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y) \tag{9}$$

Fall 2. Es sei $x = y$. Dann ist $f(x,y) = 0$. Da ferner stets

$$f(x,z) \geq 0 \qquad , \qquad f(z,y) \geq 0$$

ist, gilt auch (9) für $x = y$.

3.2 Der metrische Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$

Sind $x_1, x_2, ..., x_p$ beliebige reelle Zahlen, so nennen wir

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \tag{1}$$

einen Spaltenvektor. Spaltenvektoren sind spezielle Matrizen. Für Matrizen ist eine als Addition geschriebene Verknüpfung (Matrizen, Definition 2) und eine Verknüpfung mit reellen Zahlen λ (Matrizen, Definition 4) definiert. Wie wir gezeigt haben, wird die Menge $\mathfrak{M}_{p,1}$ aller Spaltenvektoren der Form (1) mit den durch

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_p + y_p \end{pmatrix}$$

$$\lambda\mathfrak{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_p \end{pmatrix}$$

definierten Verknüpfungen zu einem reellen Vektorraum $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$. Aus drucktechnischen Gründen werden wir Spaltenvektoren der Form (1) auch in der Form

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)^\mathsf{T}$$

schreiben.
Auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ definieren wir eine Funktion d_1 durch

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2} \tag{2}$$

Mit Hilfe von (2) wird jedem Vektorpaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ genau eine reelle Zahl $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zugeordnet. So wird durch (2) beispielsweise den beiden Spaltenvektoren

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

des $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}$ die reelle Zahl

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (4-2)^2} = 3$$

zugeordnet.
Wir beweisen, dass d_1 eine Abstandsfunktion, also $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ ein metrischer Raum ist. Der Beweis erfolgt in analoger Form wie in 2.1.

Beweis.
a) Es sei $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$. Aus (2) folgt dann

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2 = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 =, ..., x_p - y_p = 0$$

verschwinden. Dies besagt

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_p = y_p \tag{4}$$

d.h., es gilt auf Grund von Definition 1 (Matrizen)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \tag{5}$$

Es gelte umgekehrt (5). Auf Grund von Definition 1 (Matrizen) ergibt sich aus (5) unmittelbar (4). Aus der Voraussetzung (5) folgt wegen (4) somit $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$.

b) Wegen

$$(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$ gilt stets $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$.

c) Wegen $x_i - y_i = (x_i - z_i) + (z_i - y_i)$ für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$ gilt

$$\begin{aligned} d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_)^2 + ... + (x_p - y_p)^2} \\ &= \sqrt{[(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)]^2 + ... + [(x_p - z_p) + (z_p - y_p)]^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Setzen wir in 1.2.(3),

$$a_i = x_i - z_i \qquad , \qquad b_i = z_i - y_i$$

mit $i \in \{1, 2, ..., p\}$, so geht 1.2.(3) über in

$$\begin{aligned} &\sqrt{[(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)]^2 + ... + [(x_p - z_p) + (z_p - y_p)]^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + ... + (x_p - z_p)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + ... + (z_p - y_p)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Unter Berücksichtigung von (7) folgt aus (6)

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + ... + (x_p - z_p)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + ... + (z_p - y_p)^2} \tag{8}$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{z}$ den Spaltenvektor

$$(z1, z_2, ..., z_p)^\mathsf{T} \tag{9}$$

so ist auf Grund von (2) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (8) gleich $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ bzw. gleich $d_1(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$. Damit geht (8) über in

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + d_1(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. Es ist $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ mit

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2}$$

ein metrischer Raum.

Es seien

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_m &= (a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{pm})^\mathsf{T} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{p-1} \\ \mathfrak{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{pn})^\mathsf{T} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{p-1} \end{aligned}$$

Wir beweisen, dass die Ungleichungen

$$|a_{im} - a_{in}| \leq d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) \leq |a_{1m} - a_{1n}| + ... + |a_{pm} - a_{pn}| \tag{10}$$

mit $i \in \{1, 2, ..., p\}$ gelten.

Beweis. Es ist

$$|a_{im} - a_{in}| = \sqrt{(a_{im} - a_{in})^2} \leq \sqrt{(a_{1m} - a_{1n})^2 + ... + (a_{pm} - a_{pn})^2} \tag{11}$$

Da

$$d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{(a_{1m} - a_{1n})^2 + ... + (a_{pm} - a_{pn})^2}$$

ist, geht (11) über in

$$|a_{im} - a_{in}| \leq d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n)$$

womit der erste Teil von (10) bewiesen ist. Ferner gilt auf Grund von Aufgabe 3 stets

$$d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) \leq \sqrt{(a_{1m} - a_{1n})^2} + ... + \sqrt{(a_{pm} - a_{pn})^2}$$

Hieraus folgt

$$d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) \leq |a_{1m} - a_{1n}| + ... + |a_{pm} - a_{pn}|$$

womit auch der zweite Teil von (10) bewiesen ist.

3.3 Der metrische Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$

Wir gehen wieder von dem reellen Vektorraum $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ aus und definieren auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ eine Funktion d_2 durch

$$d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_p - y_p|\} \tag{1}$$

d. h., mit Hilfe von (1) wird jedem Vektorpaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ genau eine reelle Zahl $d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zugeordnet. Beispielsweise wird durch (1) den beiden Spaltenvektoren 3.2.(3) die reelle Zahl

$$d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \max\{|3 - 2|, |1 - 3|, |4 - 2|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

zugeordnet.
Wir beweisen, dass auch d_2 eine Abstandsfunktion und damit $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ ein metrischer Raum ist. Dieser Beweis erfolgt analog zu 2.2.

Beweis. a) Es sei $d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$. Aus

$$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_p - y_p|\} = 0$$

folgt

$$|x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0, ..., |x_p - y_p| = 0$$

und hieraus

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_p = y_p \tag{2}$$

Dies besagt, dass

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \tag{3}$$

ist.
Umgekehrt ergibt sich aus (3) sofort (2). Aus der Voraussetzung (3) folgt wegen (2) somit

$$d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \max\{0, 0, ..., 0\} = 0$$

b) Wegen

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_|$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$ gilt

$$\begin{aligned} d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_p - y_p|\} \\ &= \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, ..., |y_p - x_p|\} = d_2(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \end{aligned}$$

c) Wegen

$$x_i - y_i = (x_i - z_i) + (z_i - y_i)$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$ gilt unter Berücksichtigung von Satz 3

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

Damit ist

$$d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \max\{|x_1-y_1|,...,|x_p-y_p|\} \leq \max\{|x_1-z_1|+|x_z-y_1|,...,|x_p-z_p|+|z_p-y_p|\} \tag{5}$$

Setzen wir in 1.3.(2)

$$a_i = |x_i - z_i| \qquad , \qquad b_i = |z_i - y_i|$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$, so geht 1.3.(2) über in

$$\begin{aligned}\max\{|x_1 - z_1| + |x_z - y_1|, ..., |x_p - z_p| + |z_p - y_p|\} \leq{} & \max\{|x_1 - z_1|, ..., |x_p - z_p|\} \\ & + \max\{|z_1 - y_1|, ..., |z_p - y_p|\}\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung von (6) folgt aus (5)

$$d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \leq \max\{|x_1 - z_1|, ..., |x_p - z_p|\} + \max\{|z_1 - y_1|, ..., |z_p - y_p|\} \tag{7}$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{z}$ den Spaltenvektor 3.2.(9), so ist auf Grund von (1) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (7) gleich $d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$ bzw. gleich $d_2(\mathfrak{z},\mathfrak{y})$. Damit geht (7) über in

$$d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \leq d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) + d_2(\mathfrak{z},\mathfrak{y})$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. Es ist $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ mit

$$d_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_p - y_p|\} \tag{1}$$

ein metrischer Raum.

3.4 Der metrische Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$

Auch in diesem Abschnitt gehen wir wieder von dem reellen Vektorraum $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ aus und definieren auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ eine Funktion d_3 durch

$$d_3(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p| \tag{1}$$

d. h., mit Hilfe von (1) wird jedem Vektorpaar $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}$ genau eine reelle Zahl $d_3(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ zugeordnet. So wird etwa durch (1) den beiden Spaltenvektoren 3.2.(3) die reelle Zahl

$$d_3(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = |3 - 2| + |1 - 3| + |4 - 2| = 5$$

zugeordnet.
Wir beweisen, dass auch d_3 eine Abstandsfunktion, also $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ ein metrischer Raum ist. Der Beweis erfolgt in Analogie zu 2.3.
Beweis.
a) Es sei $d_3(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$. Dann gilt

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p| = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für

$$|x_1 - y_1|_0, |x_2 - y_2| = 0, ..., |x_p - y_p| = 0$$

verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_p = y_p \tag{2}$$

also

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \tag{3}$$

ist. Umgekehrt ergibt sich aus (3) sofort (2). Aus der Voraussetzung (3) folgt wegen (2) somit $d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$.

b) Offensichtlich gilt stets $d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d_3(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$.

c) Auf Grund von 3.3.(4) gilt stets

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = |x_1 - y_1| + ... + |x_p - y_p| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + ... + |x_p - z_p| + |z_p - y_p|$$

Diese Ungleichung schreiben wir in der Form

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq (|x_1 - z_1| + ... + |x_p - z_p|) + (|z_1 - y_1| + ... + |z_p - y_p|) \tag{4}$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{z}$ wieder den Spaltenvektor 3.2.(9), so ist auf Grund von (1) der erste bzw. der zweite Summand der rechten Seite von (4) gleich $d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ bzw. gleich $d_3(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$. Damit geht (4) über in

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) + d_3(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 7. Es ist $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p-1}, d_3)$ mit

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p|$$

ein metrischer Raum.

3.5 Der metrische Raum (Δ, d_0)

Eingliedrige Spaltenvektoren, das sind Spaltenvektoren der Form $\mathfrak{x} = (x)$, kann man mit den reellen Zahlen x identifizieren, denn die für Spaltenvektoren definierten Verknüpfungen

$$(x) + (y) = (x + y) \qquad , \qquad \lambda(x) = (\lambda x)$$

stimmen in diesem Sonderfall mit der für reelle Zahlen erklärten Addition bzw. Multiplikation überein. Damit ist die Menge aller reellen Zahlen in Verbindung mit der für diese Zahlen erklärten Addition und Multiplikation ein reeller Vektorraum, den wir mit Δ bezeichnen.

Es seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ eingliedrige Spaltenvektoren. Nach unserer obigen Vereinbarung ist dann

$$\mathfrak{x} = (x) = x \qquad , \qquad \mathfrak{y} = (y) = y$$

und 3.2.(2) bzw. 3.3.(1) bzw. 3.4.(1) geht für $n = 1$ über in

$$d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|$$

bzw.

$$d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|\} = |x_1 - y_1|$$

bzw.

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d_3(x, y) = |x_1 - y_1|$$

Im Fall $n = 1$ stimmen also die in 3.2., 3.3. und 3.4. definierten Abstandsfunktionen d_1, d_2, d_3 überein, die wir im Fall $n = 1$ mit d_0 bezeichnen. Damit gilt der

Satz 8. Es ist (Δ, d_0) mit

$$d_0(x, y) = |x_1 - y_1| \tag{1}$$

ein metrischer Raum.

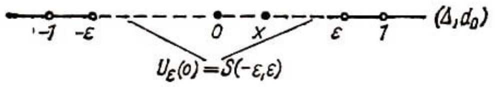


Fig. 11

Im metrischen Raum (Δ, d_0) besteht $U_\varepsilon(0)$ wegen

$$d_0(x, 0) = |x - 0| = |x| < \varepsilon$$

aus allen reellen Zahlen x, die der Bedingung $-\varepsilon < x < \varepsilon$ genügen, also im Innern des in Fig. 11 veranschaulichten offenen Intervalls $S(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen. Die reellen Zahlen ε und $-\varepsilon$ gehören nicht zur ε-Umgebung von O.

4 Folgen in metrischen Räumen

4.1 Begriff der Folge

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Ordnet man der natürlichen Zahl 1 ein Element $a_1 \in M$ zu, der natürlichen Zahl 2 ein Element $a_2 \in M$, der natürlichen Zahl 3 ein Element $a_3 \in M$ usw., so erhält man eine Folge im metrischen Raum (M, d).
Für Folgen verwenden wir die Schreibweise

$$\{n \to a_n\} \tag{1}$$

Die Elemente $a_1, a_2, a_3, ...$ heißen die Glieder der Folge (1). Folgen im metrischen Raum (Δ, d_0) heißen Zahlenfolgen. Handelt es sich beispielsweise um eine Folge im metrischen Raum (e, d_1) bzw. im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{p},1}, \mathfrak{d}_1$, so ist

$$a_n = A_n(a_{1n}, a_{2n}) \qquad \text{bzw.} \qquad a_n = \mathfrak{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{pn})^\mathsf{T}$$

Bei Zahlenfolgen sind die Glieder der Folge reelle Zahlen.

Beispiel 3. Es sei

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)\right\} \tag{2}$$

eine Folge im metrischen Raum (e, d_1). Wir bestimmen die ersten fünf Glieder von (2). Es ist

$$a_n = A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)$$

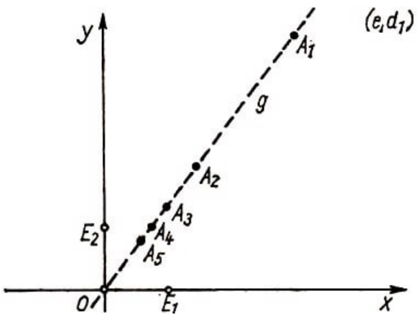


Fig. 12

und damit

$$a_1 = A_1(3,4), \quad a_2 = A_2\left(\frac{3}{2}, 4\right), \quad a_3 = A_3\left(1, \frac{4}{3}\right), \quad a_4 = A_4\left(\frac{3}{4}, 1\right), \quad a_5 = A_5\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

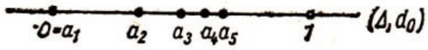
In der Fig. 12 sind die ersten fünf Glieder der Folge (2) in (e, d_1) veranschaulicht. Sie liegen auf einer Geraden g mit der Gleichung

$$4x - 3y = 0$$

Beispiel 4. Wir bestimmen die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n-1}{n+1}\right\}$$

Es ist $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ und damit $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{2}{3}$.

Fig. 13 

In der Fig. 13 sind die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge veranschaulicht.

Beispiel 5. Es sei

$$\left\{n \to \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^\mathsf{T}\right\}$$

eine Folge im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$. Es ist

$$a_n = \mathfrak{a}_n = \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^\mathsf{T}$$

also

$$a_{1n} = 1, a_{2n} = \frac{1+n}{n}, a_{3n} = \frac{1-n}{n}, a_{4n} = -1$$

Die ersten drei Glieder der Folge (3) lauten

$$a_1 = \mathfrak{a}_1 = (1,2,0,-1)^\mathsf{T}, \quad a_2 = \mathfrak{a}_2 = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)^\mathsf{T}, \quad a_3 = \mathfrak{a}_3 = \left(1, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)^\mathsf{T}$$

Neben der Folge (1) wird vielfach die Folge

$$\{k \to a_{n_k}\} \tag{4}$$

betrachtet, in der k die Menge der natürlichen Zahlen durchläuft und

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$$

ist. Da alle Folgenglieder von (4) auch Glieder der Folge (1) sind, heißt (4) eine Teilfolge der Folge (1). Beispielsweise sind die beiden Folgen

$$\left\{k \to A_{2k}\left(\frac{3}{2k}, \frac{2}{k}\right)\right\} \tag{5}$$

$$\left\{k \to A_{2k-1}\left(\frac{3}{2k-1}, \frac{4}{2k-1}\right)\right\} \tag{6}$$

Teilfolgen von (2). Die jeweils ersten drei Folgenglieder von (5) bzw. (6) erhalten wir, indem wir in

$$a_{n_k} = A_{2k}\left(\frac{3}{2k}, \frac{2}{k}\right)$$

bzw. in

$$a_{n_k} = A_{2k-1}\left(\frac{3}{2k-1}, \frac{4}{2k-1}\right)$$

für k der Reihe nach die Zahlen 1, 2 und 3 einsetzen. Es ist

$$a_{n_1} = A_2\left(\frac{3}{2}, 2\right), \quad a_{n_2} = A_4\left(\frac{3}{4}, 1\right), \quad a_{n_3} = A_6\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{bzw.}$$

$$a_{n_1} = A_1(3,4), \quad a_{n_2} = A_3\left(1, \frac{4}{3}\right), \quad a_{n_3} = A_5\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Aufgabe 6. Es sei

$$\left\{n \to A_n\left((-1)^n + \frac{3}{n}, (-1)^n - \frac{4}{n}\right)\right\} \tag{7}$$

eine Folge im metrischen Raum (e, d_1).

a) Man bestimme die ersten zehn Glieder von (7) und veranschauliche dieser Glieder in (e, d_1).

b) Von den beiden Teilfolgen

$$\left\{k \to A_{2k-1}\left(-1 + \frac{3}{2k-1}, -1 - \frac{4}{2k-1}\right)\right\} \tag{8}$$

$$\left\{k \to A_{2k}\left(1 + \frac{3}{2k}, 1 - \frac{2}{k}\right)\right\} \tag{9}$$

der Folge (7) gebe man jeweils die ersten fünf Glieder an.

4.2 Konvergente Folgen

Zur Vorbereitung der folgenden Definition gehen wir von der Folge des Beispiels 3 aus. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Wir fragen nach der Anzahl der Glieder dieser Folge, die vom Ursprung O einen Abstand haben, der kleiner als ε ist, d. h. also, wieviel Glieder der Folge in $U_\varepsilon(0)$ liegen.

Im metrischen Raum (e, d_1) besteht $U_\varepsilon(0)$, wie wir in 3.1. gezeigt haben, aus allen Punkten, die im Innern des Kreises mit O als Mittelpunkt und ε als Radius liegen.

a) Es sei $\varepsilon = 6$.

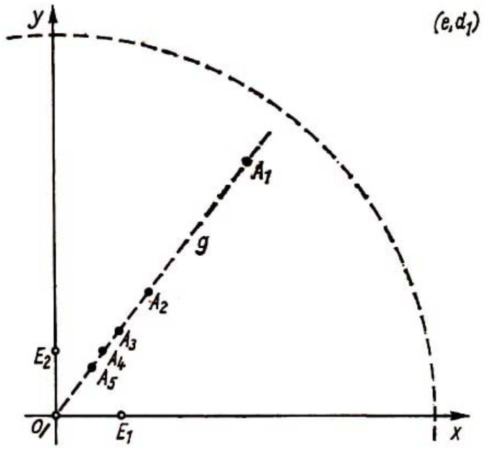


Fig. 14

Wie aus Fig. 14 ersichtlich ist, liegen alle Glieder der Folge in $U_6(O)$. Dies lässt sich auch wie folgt formulieren:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn $n \geq 1$ ist, so folgt $A_n \in U_6(0)$ (1)

b) Es sei $\varepsilon = 2$.

Wie aus Fig. 15 ersichtlich ist, liegen die beiden Folgenglieder A_1 und A_2 nicht in $U_2(0)$, alle übrigen Folgenglieder A_3, A_4, sind jedoch Elemente von $U_2(O)$. Dies lässt sich analog zu (1) wie folgt formulieren:

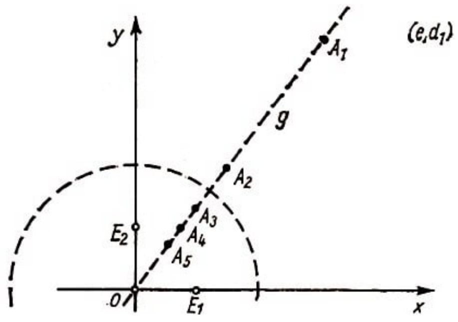


Fig. 15

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn $n \geq 3$ ist, so folgt $A_n \in U_2(O)$ (2)

Wir vermuten, dass für jede positive reelle Zahl ε ein ähnlicher Sachverhalt vorliegt, d. h., dass in jeder ε-Umgebung des Punktes O mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder der Folge liegen. Diese Vermutung können wir folgendermaßen formulieren:

Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine (von ε abhängige) reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $A_n \in U_\varepsilon(O)$ (3)

Im vorliegenden Beispiel ist wegen (1) bzw. (2) etwa $N(6) = 1$ bzw. $N(2) = 3$. Da "$A_n \in U_\varepsilon(O)$" äquivalent ist mit "$d_1(A_n, 0) < \varepsilon$", so lässt sich (3) ersetzen durch:

Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_1(A_n, 0) < \varepsilon$ (4)

Offensichtlich ist der Punkt 0 der einzige Punkt von e mit der Eigenschaft (4), d.h., in jeder ε-Umgebung eines vom Ursprung 0 verschiedenen Punkts P von e liegen höchstens endlich viele Folgenglieder, während alle restlichen Folgenglieder außerhalb von $U_\varepsilon(P)$ liegen. In Fig. 16 ist dieser Sachverhalt für den Punkt $P(1, 2)$ und $\varepsilon = 1$ veranschaulicht.

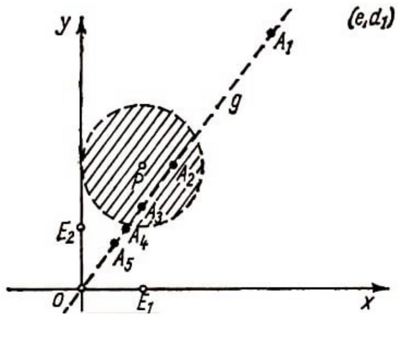


Fig. 16

Definition 6. Eine Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist konvergent genau dann, wenn es in M ein Element a mit der Eigenschaft gibt, dass sich zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ so finden lässt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
Wenn $n \geq_N (\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_n, a) < \varepsilon$. (5)

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent. Durch Kontraposition von (5) erhalten wir:

Wenn $\varepsilon \leq d(a_n, a)$ ist, so folgt $n < N(\varepsilon)$.

Damit gilt der

Satz 9. Eine Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist konvergent genau dann, wenn es in M ein Element a mit der Eigenschaft gibt, dass sich zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ so finden lässt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
Wenn $\varepsilon \leq_d (a_n, a)$ ist, so folgt $n < N(\varepsilon)$.

Wir beweisen den

Satz 10. Zu jeder konvergenten Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) gibt es genau ein $a \in M$ mit der Eigenschaft (5).

Beweis. Auf Grund von Definition 6 existiert zur konvergenten Folge $\{n \to a_n\}$ ein $a \in M$ mit der Eigenschaft (5), d.h., zu jeder positiven reellen Zahl ε lässt sich immer eine reelle Zahl $N_a(\varepsilon)$ so finden, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
Wenn $n \geq N_a(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_n, a) < \varepsilon$. (6)

Wir müssen noch zeigen, dass es neben $a \in M$ kein weiteres Element von M mit der Eigenschaft (5) gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch $b \in M$ ein Element mit dieser Eigenschaft. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε stets eine reelle Zahl $N_b(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
Wenn $n \geq N_b(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_n, b) < \varepsilon$. (7)

Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$$

so gilt wegen (6) und (7):
Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_n, a) + d(a_n, b) < 2\varepsilon$. (8)

Da nach Voraussetzung (M, d) ein metrischer Raum ist, gilt, in (M, d) die Dreiecksungleichung, insbesondere also die Ungleichung

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b) \tag{9}$$

Den ersten Summanden auf der rechten Seite von (9) können wir auf Grund von A2 durch $d(a_n, a)$ ersetzen. Damit geht (9) über in

$$d(a, b) \leq d(a_n, a) + d(a_n, b) \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) lässt sich (8) in folgender Form schreiben:
Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a, b) < 2\varepsilon$
Da a, b feste Elemente sind, so ist auch $d(a, b)$ eine feste nichtnegative reelle Zahl. Da ferner ε eine beliebige positive reelle Zahl ist, also auch beliebig klein gewählt werden kann, so ist

$$d(a, b) < \varepsilon$$

nur richtig, falls $d(a, b) = 0$ ist, also $a = b$ gilt, womit der Satz bewiesen ist. Das Ergebnis von Satz 10 führt zur

Definition 7. Ist $\{n \to a_n\}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (M, d), so heißt das eindeutig bestimmte Element $a \in M$ mit der Eigenschaft (5) der Grenzwert der Folge $\{n \to a_n\}$, in Zeichen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert null, heißt Nullfolge.

Die Definitionen 6 und 7 besagen, dass bei einer konvergenten Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) in jeder ε-Umgebung des Grenzwerts $a \in M$ der Folge $\{n \to a_n\}$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder der Folge $\{n \to a_n\}$ liegen.
Will man in einem metrischen Raum (M, d) eine Folge $\{n \to a_n\}$ mit Hilfe von Satz 9 auf Konvergenz untersuchen, so versucht man, aus der Ungleichung

$$\varepsilon \leq d(a_n, a) \tag{11}$$

eine Ungleichung der Form $n < N(\varepsilon)$ herzuleiten. Dieses Vorgehen setzt allerdings voraus, dass man von einem Element $a \in M$ vermuten muss, dass es der Grenzwert der Folge $\{n \to a_n\}$ ist.

Beispiel 6. Wir untersuchen die Folge des Beispiels 3 auf Konvergenz.
Auf Grund unserer Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts vermuten wir, dass $a = O(0, 0)$ der Grenzwert dieser Folge ist.

Beweis der Vermutung. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 2.1.(1) im metrischen Raum (e, d_1)

$$d_1(A_n, O) = \sqrt{\left(\frac{3}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{n} - 0\right)^2} = \frac{5}{n}$$

ist, lautet (11) im vorliegenden Beispiel

$$\varepsilon \leq d_1(A_n, O) = \frac{5}{n} \tag{12}$$

Wegen $\frac{5}{n} < \frac{6}{n}$ geht (12) über in $\varepsilon < \frac{6}{n}$. Hieraus folgt, da ε und n positive reelle Zahlen sind, unmittelbar

$$n < \frac{6}{\varepsilon}$$

Es ist $\frac{6}{\varepsilon}$ eine von ε abhängige reelle Zahl, die wir mit $N(\varepsilon)$ bezeichnen. Damit haben wir aus der Ungleichung

$$\varepsilon \leq d_1(A_n, O)$$

eine Ungleichung der Form $n < N(\varepsilon)$ hergeleitet. Auf Grund von Satz 9 ist die Folge

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)\right\}$$

im metrischen Raum (e, d_1) konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right) = O(0, 0)$$

Beispiel 7. Wir untersuchen die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n-1}{n+1}\right\} \tag{13}$$

auf Konvergenz. Wegen

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

unterscheiden sich Zähler und Nenner des Folgenglieds a_n für große n nur wenig von eins. Wir vermuten daher, dass $a = 1$ der Grenzwert der Zahlenfolge (13) ist.

Beweis der Vermutung. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 3.5.(1) im metrischen Raum (Δ, d_0)

$$d_0(a_n, 1) = \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

ist, folgt aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, 1) = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$$

unmittelbar $n < \frac{2}{\varepsilon}$.
Es ist $\frac{2}{\varepsilon}$ eine von ε abhängige reelle Zahl, die wir mit $N(\varepsilon)$ bezeichnen. Damit haben wir aus der Ungleichung

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, 1)$$

eine Ungleichung der Form $n < N(\varepsilon)$ hergeleitet. Auf Grund von Satz 9 ist damit die Folge (13) konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

Beispiel 8. Wir untersuchen die Folge

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)\right\} \tag{14}$$

im metrischen Raum (e, d_2) auf Konvergenz. Wegen

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \qquad , \qquad \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

unterscheiden sich die beiden Koordinaten von A_n für große n nur wenig von eins. Wir vermuten daher, dass $a = A(1, 1)$ der Grenzwert der Folge (14) ist.

Beweis der Vermutung. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 2.2.(1) im metrischen Raum (e, d_2)

$$d_2(A_n, A) = \max\left\{\left|\frac{n+1}{n} - 1\right|, \left|\frac{n-1}{n} - 1\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{1}{n}\right|, \left|-\frac{1}{n}\right|\right\} = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$$

ist, folgt aus

$$\varepsilon \leq d_2(A_n, A) = \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$

sofort $n < \frac{2}{\varepsilon}$. Die von ε abhängige reelle Zahl $\frac{2}{\varepsilon}$ bezeichnen wir mit $N(\varepsilon)$. Damit haben wir bewiesen, dass die Folge (14) im metrischen Raum (e, d_2) konvergent ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) = A(1,1)$$

Beispiel 9. Wir untersuchen die Folge

$$\left\{n \to \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^\mathsf{T}\right\} \tag{15}$$

im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$ auf Konvergenz. Wegen

$$\frac{1+n}{n} = 1 + \frac{1}{n} \qquad , \qquad \frac{1-n}{n} = -1 + \frac{1}{n}$$

unterscheiden sich die zweite bzw. die dritte Koordinate des Spaltenvektors

$$\mathfrak{a}_n = \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^\mathsf{T}$$

für große n nur wenig von 1 bzw. -1. Wir vermuten daher, dass der Spaltenvektor

$$\mathfrak{a} = (1, 1, -1, -1)^\mathsf{T}$$

der Grenzwert der Folge (15) ist.

Beweis der Vermutung. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 3.2.(2) im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$

$$d_1(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1+n}{n} - 1\right) + \left(\frac{1-n}{n} + 1\right) + (-1+1)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

ist, folgt aus

$$\varepsilon \leq d_1(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{2}{n} \qquad \text{sofort} \qquad n < \frac{2}{\varepsilon}$$

Die Folge (15) ist also im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^\mathsf{T} = (1, 1, -1, -1)^\mathsf{T}$$

Aufgabe 7. Es sei c eine beliebige, nach Wahl aber feste reelle Zahl. Man beweise, dass die Zahlenfolgen

$$a) \quad \left\{n \to \frac{c}{n}\right\} \qquad , \qquad b) \quad \left\{n \to \frac{c}{2^n}\right\}$$

Nullfolgen sind.

Aufgabe 8. Es sei ε eine beliebige, nach Wahl aber feste reelle Zahl. Man beweise, dass die Zahlenfolge $\{n \to c\}$ den Grenzwert c besitzt.

Aufgabe 9. Man untersuche die Zahlenfolgen

$$a)\quad \left\{n \to \frac{n-3}{n}\right\} \quad , \quad b)\quad \left\{n \to \frac{n+2}{n}\right\} \quad , \quad c)\quad \left\{n \to \frac{n}{2n+1}\right\}$$
$$d)\quad \left\{n \to \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\} \quad , \quad e)\quad \left\{n \to \frac{n-1}{2n}\right\}$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 10. Man beweise, dass die Folge

$$\left\{n \to \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{\mathsf{T}}\right\}$$

in jedem der drei metrischen Räume $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_1)$, $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_2)$, $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_3)$ den Grenzwert

$$\mathfrak{a} = (2,2)^{\mathsf{T}}$$

besitzt.

Aufgabe 11. Man untersuche die Folge

$$\left\{n \to \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^{\mathsf{T}}\right\} \tag{15}$$

im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_2)$ und im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_3)$ auf Konvergenz.

Satz 11. Sind $\{n \to a_n\}$, $\{n \to b_n\}$, $\{n \to c_n\}$ Zahlenfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \qquad \text{und gilt} \qquad a_n \leq b_n \leq c_n \tag{16}$$

für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$, wobei n_0 eine feste natürliche Zahl ist, so ist auch die Folge $\{n \to b_n\}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung in Satz 11 gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen $N_1(\varepsilon)$ bzw. $N_2(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N_1(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0\{a_n, a\} = |a_n - a| < \varepsilon$.
Wenn $n \geq N_2(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0\{c_n, a\} = |c_n - a| < \varepsilon$. (17)

Wegen

$$|a_n - a| = |a - a_n| \qquad , \qquad |c_n - a| = |a - c_n|$$

lässt sich (17) unter Berücksichtigung von 1.2.(7) und 1.2.(10) auch in folgender Form schreiben:

Wenn $n \geq N_1(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
Wenn $n \geq N_2(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. (18)

Setzen wir
$$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), n_0\}$$
so gilt wegen (18) und (16):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$.

Hieraus ergibt sich insbesondere:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$. (19)

Berücksichtigen wir nochmals 1.2.(10), 1.2.(7), so lautet (19):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a - b_n| < \varepsilon$.

Dies besagt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 10. Mit Hilfe von Satz 11 untersuchen wir die Zahlenfolge
$$\{n \to (\sqrt{n^2+n} - n)\} \tag{20}$$
auf Konvergenz und bestimmen gegebenenfalls ihren Grenzwert.
Es ist
$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+n} - n = (\sqrt{n^2+n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Mit
$$a_n = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \qquad , \qquad c_n = \frac{1}{2}$$
gilt wegen
$$1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 1 + \sqrt{1} = 2$$
für alle natürlichen Zahlen n
$$a_n = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = b_n < \frac{1}{2} = c_n$$
also $a_n < b_n < c_n$.
Von den Zahlenfolgen
$$\{n \to a_n\} = \left\{n \to \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right\} = \left\{n \to \frac{2}{2n+1}\right\}, \qquad \{n \to c_n\} = \left\{n \to \frac{1}{2}\right\}$$

haben wir in Aufgabe 9 c und in Aufgabe 8 gezeigt, dass sie konvergent sind und beide den Grenzwert $\frac{1}{2}$ besitzen. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt. Die Zahlenfolge (20) ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$$

Aufgabe 12. Es seien $\{n \to a_n\}$, $\{n \to b_n\}$ konvergente Zahlen folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Ferner gelte $a_n \leq b_n$ für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$, wobei n_0 eine feste natürliche Zahl ist. Man beweise, dass dann auch $a \leq b$ ist.

4.3 Monotone Zahlenfolgen

Definition 8. Eine Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist monoton wachsend genau dann, wenn für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leq a_{n+1}$.

Beispiel 11. Wir zeigen, dass die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n-3}{n}\right\}$$

monoton wachsend ist.
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-3}{n} - \frac{n-2}{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)-n(n-2)}{n(n+1)} = -\frac{3}{n(n+1)} < 0$$

Hieraus folgt $a_n < a_{n+1}$, d. h., die Zahlenfolge ist monoton wachsend.

Definition 9. Eine Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist monoton fallend genau dann, wenn für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \geq a_{n+1}$.

Beispiel 12. Wir zeigen, dass die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n+2}{n}\right\}$$

monoton fallend ist.
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+2}{n} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$$

Hieraus folgt $a_n > a_{n+1}$, d. h., die Zahlenfolge ist monoton fallend.

Definition 10. Eine Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl K derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leq K$. Die reelle Zahl K heißt obere Schranke der Zahlenfolge.

Jede nach oben beschränkte Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, was wir im Rahmen dieses Büchleins nicht beweisen wollen. Diese kleinste obere Schranke heißt das Supremum der Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$, in Zeichen $\sup a_n$.

Beispiel 13. Für die Zahlenfolge
$$\{n \to -n^2\} \tag{3}$$
gilt offensichtlich für alle natürlichen Zahlen n
$$a_n = -n^2 \leq -1$$
d. h., die Zahlenfolge (3) ist nach oben beschränkt. Da für alle natürlichen Zahlen n auch
$$a_n = -n^2 < 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a_n = -n^2 < 5$$
ist, so sind beispielsweise die reellen Zahlen -1, 0, 5 obere Schranken der Zahlenfolge (3). Die kleinste obere Schranke von (3) ist -1, d. h., es gilt
$$\sup(-n^2) = -1$$

Definition 11. Eine Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist nach unten beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl K derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \geq K$. Die reelle Zahl K heißt untere Schranke der Zahlenfolge.

Jede nach unten beschränkte Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ besitzt eine größte untere Schranke, was wir im Rahmen dieses Büchleins auch nicht beweisen wollen. Diese größte untere Schranke heißt das Infimum der Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$, in Zeichen $\inf a_n$.

Beispiel 14. Für die Zahlenfolge
$$\{n \to n^3\} \tag{4}$$
gilt offensichtlich für alle natürlichen Zahlen n: $a_n = n^3 \geq 1$, d. h., die Zahlenfolge (4) ist nach unten beschränkt. Da für alle natürlichen Zahlen n auch
$$a_n = n^3 > 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a_n > n^3 > -7$$
ist, so sind beispielsweise die reellen Zahlen 1, 0, -7 untere Schranken der Zahlenfolge (4). Die größte untere Schranke von (4) ist 1, d. h., es gilt $\inf n^3 = 1$.

Wie man sofort sieht, ist die Zahlenfolge (3) nicht nach unten beschränkt, und die Zahlenfolge (4) ist nicht nach oben beschränkt.

Definition 12. Eine Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl K derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt $|a_n| \leq K$.

Eine Zahlenfolge ist offensichtlich beschränkt genau dann, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 15. Wir zeigen, dass die Zahlenfolge
$$\left\{n \to \frac{n+2}{n}\right\} \tag{5}$$

beschränkt ist.
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|a_n| = \left|\frac{n+2}{n}\right| = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$

Da stets $\frac{2}{n} \leq 2$ ist, folgt $|a_n| \leq 3$, d. h., die Zahlenfolge (5) ist beschränkt. Eine obere bzw. eine untere Schranke von (5) ist 3 bzw. -3. Insbesondere ist

$$\sup \frac{n+2}{n} = 3 \qquad , \qquad \inf \frac{n+2}{n} = 1$$

Will man monotone Zahlenfolgen auf Konvergenz untersuchen, so braucht man, wie der folgende Satz zeigt, von einer reellen Zahl a nicht erst zu vermuten, dass sie der Grenzwert dieser Zahlenfolge ist.

Satz 12. Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$$

bzw. eine monoton fallende, nach unten beschränkte Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$$

Beweis. Es sei $\{n \to a_n\}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Zahlenfolge. Für alle natürlichen Zahlen n gilt dann $a_n \leq a_{n+1}$.
Ferner sei $a = \sup a_n$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da a die kleinste obere Schranke ist, ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke der Zahlenfolge.
Somit gibt es, da $\{n \to a_n\}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge ist, zu ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a_n > a - \varepsilon$ und $a_n < a$.

Dafür lässt sich auch schreiben:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < a_n < a$.

Dann gilt aber erst recht:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. (6)

Auf Grund von 1.2.(10), 1.2.(7) geht (6) über in:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a - a_n| < \varepsilon$.

Damit gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(a_n, a) < \varepsilon$.

Dies besagt, dass die Folge $\{n \to a_n\}$ konvergent und a ihr Grenzwert ist. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es sei $\{n \to a_n\}$ eine monoton fallende, nach unten beschränkte Zahlenfolge. Für alle

natürlichen Zahlen n gilt dann $a_n \geq a_{n+1}$. Ferner sei $a = \inf a_n$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl.
Da a die größte untere Schranke ist, ist $a + \varepsilon$ keine untere Schranke der Zahlenfolge. Somit gibt es, da $\{n \to a_n\}$ eine monoton fallende Zahlenfolge ist, zu ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a_n < a + \varepsilon$ und $a_n > a$.

Dafür lässt sich auch schreiben:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a < a_n < a + \varepsilon$.

Dann gilt aber erst recht:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Dies besagt, dass die Folge $\{n \to a_n\}$ konvergent und a ihr Grenzwert ist, was zu beweisen war.

Beispiel 16. Von der Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n+2}{2}\right\}$$

haben wir in Beispiel 12 und in Beispiel 15 gezeigt, dass sie monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Auf Grund von Satz 12 ist diese Zahlenfolge konvergent, und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2} = \inf \frac{n+2}{2} = 1$$

4.4 Intervallschachtelungen

Definition 13. Zwei Zahlenfolgen $\{n \to a_n\}$ und $\{n \to b_n\}$ bilden eine Intervallschachtelung, in Zeichen $\{n \to a_n/b_n\}$, genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I1. Die Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ ist monoton wachsend.
I2. Die Zahlenfolge $\{n \to b_n\}$ ist monoton fallend.
I3. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $a_n \leq b_n$.
I4. Die Zahlenfolge $\{n \to (b_n - a_n)\}$ ist eine Nullfolge.

Satz 13. Ist $\{n \to a_n/b_n\}$ eine Intervallschachtelung, so gilt für alle natürlichen Zahlen k, l stets $a_k \leq b_l$.

Beweis. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:
Fall 1. Es sei $k \leq l$. Auf Grund von I1 und I3 folgt dann

$$a_k \leq a_l \leq b_l$$

und hieraus die Behauptung.
Fall 2. Es sei $k > l$. Wegen I3 und I2 gilt dann

$$a_k \leq b_k \leq b_l$$

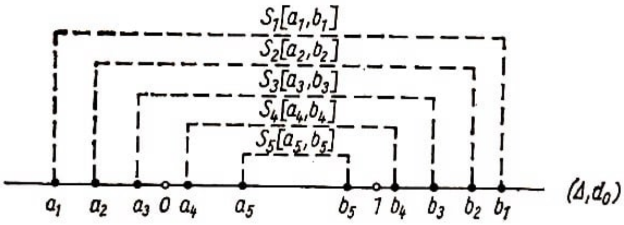
woraus die Behauptung folgt.

Ist $\{n \to a_n/b_n\}$ eine Intervallschachtelung, so können wir uns die Glieder der beiden Folgen im metrischen Raum (Δ, d_0) veranschaulichen. Aus Satz 13 folgt, dass kein Glied der monoton wachsenden Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ größer ist als irgendein Glied der monoton fallenden Zahlenfolge $\{n \to b_n\}$. Folgenglieder mit jeweils gleichem Index, also die Glieder a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 bzw. a_3, b_3 können wir wegen I3 im Fall $a_n < b_n$ als Endpunkte von abgeschlossenen Intervallen

$$S_1 = S_1[a_1, b_1], \quad S_2 = S_2[a_2, b_2], \quad S_3 = S_3[a_3, b_3], ...$$

auffassen, die ineinander geschachtelt sind. Die Forderung I4 besagt, dass die Länge der Intervalle S_n mit wachsendem n gegen null strebt.

Fig. 17



Wir vermuten, dass es genau eine reelle Zahl a gibt, die in allen Intervallen liegt.

Beispiel 17. Wir zeigen, dass

$$\left\{n \to \frac{n-3}{n} \middle| \frac{n+2}{n}\right\} \tag{1}$$

eine Intervallschachtelung ist.

Dazu müssen wir nachweisen, dass (1) die Eigenschaften I1, I2, I3, I4 besitzt. Die beiden ersten Eigenschaften I1 und I2 wurden bereits in Beispiel 11 und Beispiel 12 nachgewiesen. Um die Gültigkeit von I3 zu zeigen, berechnen wir $a_n - b_n$.
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$a_n - b_n = \frac{n-3}{n} - \frac{n+2}{n} = -\frac{5}{n} < 0$$

Hieraus folgt $a_n < b_n$, womit I3 nachgewiesen ist. Die Folge

$$\{n \to (b_n - a_n)\} = \left\{n \to \frac{5}{n}\right\}$$

ist, wie in Aufgabe 7a gezeigt worden ist, eine Nullfolge. Damit besitzt (1) die vier Eigenschaften I1, I2, I3, I4.

Satz 14. Ist $\{n \to a_n/b_n\}$ eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine reelle Zahl a mit der Eigenschaft

$$a_n \leq a \leq b_n \tag{2}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Ferner gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{3}$$

Beweis. Aus Satz 13 folgt, dass b_1 eine obere Schranke der monoton wachsenden Zahlenfolge $\{n \to a_n\}$ und a_1 eine untere Schranke der monoton fallenden Zahlenfolge $\{n \to b_n\}$ ist. Auf Grund von Satz 12 sind damit beide Folgen konvergent. Ihre Grenzwerte seien a und b. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = n \tag{4}$$

Auf Grund von (4) gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen $N_a(\varepsilon)$ und $N_b(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N_a(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(a_n, a) = |a_n - a| < \varepsilon$. (5)
Wenn $n \geq N_b(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(b_n, b) = |b_n - b| < \varepsilon$.

Da nach Voraussetzung eine Intervallschachtelung vorliegt, gilt auf Grund von 13, dass $\{n \to (b_n - a_n)\}$ eine Nullfolge ist. Dies besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N_0(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N_0(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(b_n - a_n, 0) = |b_n - a_n| < \varepsilon$. (6)

Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon), N_0(\varepsilon)\}$$

so gilt wegen, (5) und (6):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a_n - a| + |b_n - b| + |b_n - a_n| < 3\varepsilon$. (7)

Ferner gilt stets

$$b - a = (b - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - a)$$

Hieraus folgt wegen $|b - b_n| = |b_n - b|$

$$|b - a| \leq |b_n - n| + |b_n - a_n| + |a_n - a| \tag{8}$$

Mit Hilfe von (8) erhält man aus (7):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|b - a| < 3\varepsilon$.

Da ε eine beliebige positive reelle Zahl und $|b - a|$ eine feste nichtnegative reelle Zahl ist, so ist

$$|b - a| < 3\varepsilon$$

nur richtig, falls $|b - a| = 0$, also $b = a$ ist. Damit ist die Existenz einer reellen Zahl a nachgewiesen, die wegen (4) der Bedingung (3) genügt.
Da $\{n \to a_n\}$ eine monoton wachsende nach oben beschränkte Zahlenfolge bzw. $\{n \to b_n\}$ eine monoton fallende nach unten beschränkte Zahlenfolge ist, gilt für den gemeinsamen Grenzwert a dieser beiden Zahlenfolgen $a_n \leq a$ und $a \leq b_n$.
Hieraus folgt unmittelbar (2).

Es bleibt noch zu zeigen, dass es neben der reellen Zahl a keine weitere reelle Zahl mit der Eigenschaft (2) gibt. Dazu nehmen wir an, es gelte für alle natürlichen Zahlen n auch

$$a_n \leq a^* \leq b_n$$

mit $a^* \neq a$. Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $a < a^*$ annehmen. Dann gilt

$$a_n \leq a < a^* \leq b_n$$

Hieraus folgt

$$b_n - a_n \geq a^* - a > 0 \tag{9}$$

Da $a^* - a$ eine feste positive reelle Zahl ist, kann die Zahlenfolge

$$\{n \to (b_n - a_n)\}$$

wegen (9) keine Nullfolge sein. Das ist aber ein Widerspruch zu I4. Also muss unsere Annahme, es existieren zwei verschiedene reelle Zahlen, die der Bedingung (2) genügen, falsch gewesen sein. Es gibt demnach nur eine reelle Zahl a, die (2) erfüllt, womit Satz 14 bewiesen ist.

Beispielsweise wird durch die Intervallschachtelung (1) die reelle Zahl 1 erfasst (vgl. Aufgabe 9a).

Aufgabe 13. Man beweise, dass

$$\left\{n \to \frac{n-1}{2n} / \frac{n+1}{2n}\right\}$$

eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl wird durch diese Intervallschachtelung erfasst?

4.5 Häufungswerte

Zur Vorbereitung des folgenden Begriffs gehen wir von der Folge

$$\left\{n \to A_n\left((-1)^n + \frac{3}{n}, (-1)^n - \frac{4}{n}\right)\right\} \tag{1}$$

im metrischen Raum (e, d_1) aus. Die ersten zehn Glieder dieser Folge sind

$$a_1 = A_1(2, -5), \quad a_2 = A_2\left(\frac{5}{2}, -1\right), \quad a_3 = A_3\left(0, -\frac{7}{3}\right), \quad a_4 = A_4\left(\frac{7}{4}, 0\right),$$
$$a_5 = A_5\left(-\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right), \quad a_6 = A_6\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad a_7 = A_7\left(-\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right),$$
$$a_8 = A_8\left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}\right), \quad a_9 = A_9\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{9}\right), \quad a_{10} = A_{10}\left(\frac{13}{10}, \frac{3}{5}\right)$$

In der Fig. 18 sind diese Folgenglieder veranschaulicht. Die Glieder A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 bzw. $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}$ liegen auf einer Geraden g bzw. h mit der Gleichung

$$4x + 3y = -7 \qquad \text{bzw.} \quad 4x + 3y = 7$$

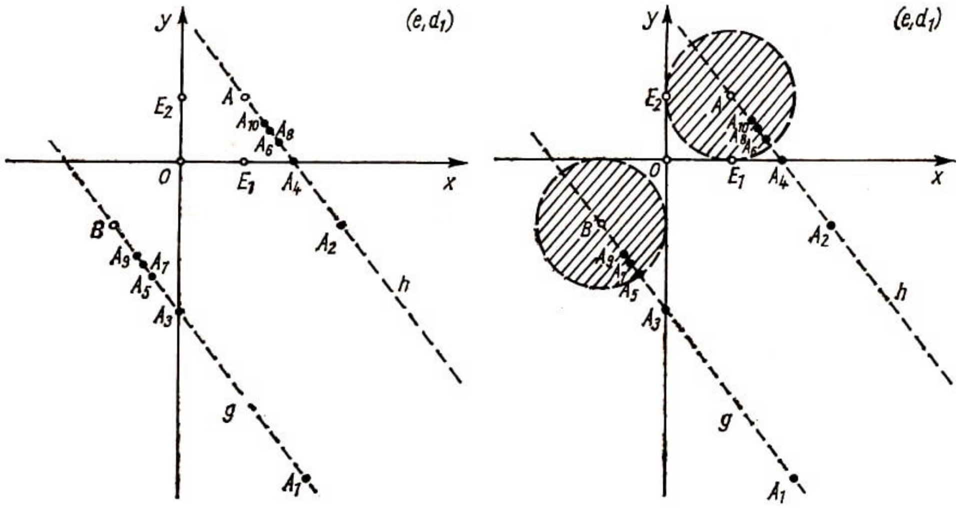


Fig. 18 und 19

Wir fragen nach der Anzahl der Glieder der Folge (1), die vom Punkt $B(-1,-1)$ bzw. vom Punkt $A(1,1)$ einen Abstand haben, der kleiner als ε ist, wobei ε eine beliebige positive reelle Zahl bedeutet.
Diese Fragestellung ist gleichbedeutend damit, wieviel Glieder der Folge (1) in $U_\varepsilon(A)$ bzw. in $U_\varepsilon(B)$ liegen. In der Fig. 19 ist der Sachverhalt für $\varepsilon = 1$ veranschaulicht.

Wir vermuten, dass in jeder ε-Umgebung der beiden Punkte A und B jeweils unendlich viele Glieder der Folge (1) liegen. Punkte mit dieser Eigenschaft heißen Häufungswerte der Folge (1).
Dieser neue Begriff unterscheidet sich vom Begriff "Grenzwert einer Folge" dadurch, dass nichts darüber ausgesagt wird, wieviel Glieder der Folge außerhalb jeder ε-Umgebung von A bzw. von B liegen. Entscheidend ist lediglich, dass in jeder ε-Umgebung von A bzw. von B unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Es ist offensichtlich, dass der Grenzwert einer Folge auch Häufungswert dieser Folge ist, aber umgekehrt braucht nicht jeder Häufungswert einer Folge der Grenzwert dieser Folge zu sein.
Für die Folge (1) ist beispielsweise der Punkt A nicht Grenzwert dieser Folge, da die Bedingung "in jeder ε-Umgebung von A liegen mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder der Folge" nicht erfüllt ist.
Der neue Begriff "Häufungswert einer Folge" kann als eine Verallgemeinerung des Begriffs "Grenzwert einer Folge" aufgefasst werden.

Definition 14. Ein Element $a \in M$ ist Häufungswert einer Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M,d) genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Beispiel 18. Wir zeigen, dass $A(1,1)$ und $B(-1,-1)$ Häufungswerte der Folge (1) sind. Dazu müssen wir nachweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ in $U_\varepsilon(A)$ bzw. in $U_\varepsilon(B)$ unendlich viele Folgenglieder von (1) liegen. Es ist

$$d_1(A_{2k}, A) = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2k} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{2k} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4k^2} + \frac{16}{4k^2}} = \frac{5}{2k}$$
$$d_1(A_{2k-1}, B) = \sqrt{\left(-1 + \frac{3}{2k-1} + 1\right)^2 + \left(-1 - \frac{4}{2k-1} + 1\right)^2} = \frac{5}{2k-1}$$

Für alle natürlichen Zahlen k mit

$$k > \frac{5}{2\varepsilon} \qquad \text{bzw.} \qquad k > \frac{5+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

gilt dann

$$d_1(A_{2k}, A) < \varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad d_1(A_{2k-1}, B) < \varepsilon$$

also

$$A_{2k} \in U_\varepsilon(A) \qquad \text{bzw.} \qquad A_{2k-1} \in U_\varepsilon(B)$$

Damit ist gezeigt, dass in jeder ε-Umgebung von A bzw. von B unendlich viele Folgenglieder von (1) liegen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 14. Man beweise, dass die reellen Zahlen 1 und -1 Häufungswerte der Zahlenfolge

$$\left\{n \to \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

sind.

Wir beweisen nun einen sehr wichtigen Satz, der den Namen des tschechischen Mathematikers Bernhard Bolzano (1781-1848) und des deutschen Mathematikers Karl Weierstrass (1815-1897) trägt.

Satz 15. Jede beschränkte Zahlenfolge enthält eine konvergente Teilfolge, d.h., jede beschränkte Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Beweis. Es sei

$$\{n \to a_n\} \tag{2}$$

eine beschränkte Zahlenfolge. Dann existieren eine untere Schranke r und eine obere Schranke s dieser Zahlenfolge mit $r < s$. In dem Intervall $S[r, s]$ liegen somit alle Glieder von (2).

Wir halbieren das Intervall $S[r, s]$. Mindestens in einer Hälfte dieses Intervalls liegen dann unendlich viele Glieder von (2), da anderenfalls in $S[r, s]$ nur endlich viele Folgenglieder liegen würden. Es sei $S_1[r_1, s_1]$ diejenige Hälfte, die unendlich viele Glieder von (2) enthält.

Enthalten beide Hälften unendlich viele Folgenglieder, so sei $S_1[r_1, s_1]$ eine von ihnen. Anschließend halbieren wir das Intervall $S_1[r1, s_1]$.

Mindestens in einer Hälfte dieses Intervalls liegen unendlich viele Glieder von (2). Es sei $S_2[r_2, s_2]$ eine Hälfte von $S_1[r_1, s_1]$, in der unendlich viele Folgenglieder liegen. Diesen Prozess denken wir uns beliebig weit fortgesetzt.

Nach k schritten erhalten wir ein Intervall $S_k[r_k, s_k]$, das unendlich viele Glieder von (2) enthält.

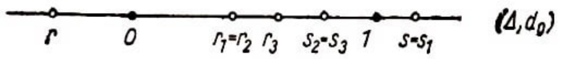


Fig. 20

Die Länge der Intervalle $S_1, S_2, ..., S_k$ ist

$$s_1 - r_1 = \frac{s-r}{2}$$
$$s_2 - r_2 = \frac{s_1 - r_1}{2} = \frac{s-r}{2^2}$$
$$...$$
$$s_k - r_k = \frac{s-r}{2^k}$$

Wir zeigen, dass $\{k \to r_k/s_k\}$ eine Intervallschachtelung ist. Auf Grund der Konstruktion der Intervalle $S_1, S_2, ...$ ist

$$\{k \to r_k\} \tag{3}$$

eine monoton wachsende Zahlenfolge,

$$\{k \to s_k\} \tag{4}$$

eine monoton fallende Zahlenfolge, und für alle natürlichen Zahlen k gilt $r_k \leq s_k$. Ferner ist, wie in Aufgabe 7 b gezeigt wurde, die Folge

$$\{k \to (s_k - r_k)\} = \left\{k \to \frac{s-r}{2^k}\right\}$$

eine Nullfolge, da $s - r$ eine feste reelle Zahl ist. Auf Grund von Satz 14 besitzen dann beide Zahlenfolgen (3) und (4) einen gemeinsamen Grenzwert, den wir mit a bezeichnen. Es ist also

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} s_k = a \tag{5}$$

Wir zeigen, dass die reelle Zahl a der Grenzwert einer noch zu konstruierenden Teilfolge

$$\{k \to a_k\} \tag{6}$$

von (2) ist. Damit haben wir dann aber auch gleichzeitig nachgewiesen, dass a Häufungswert von (2) ist, da ja in jeder ε-Umgebung von a mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Gliedern von (6) alle Glieder von (6) und somit unendlich viele Glieder der Ausgangsfolge (2) liegen.

Als erstes Glied von (6) wählen wir ein Glied a_{n_1} von (2) mit $a_{n_1} \in S_1[r_1, s_1]$. Als zweites Glied von (6) wählen wir ein auf a_{n_1} folgendes Glied a_{n_2} von (2) mit $a_{n_2} \in S_2[r_2, s_2]$. Als k-tes Glied von (6) wählen wir ein auf die Glieder $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_{k-1}}$ folgendes Glied a_{n_k} von (2) mit:

$$a_{n_k} \in S_k[r_k, s_k] \tag{7}$$

Eine derartige Auswahl ist immer möglich, da jedes dieser Intervalle unendlich viele Glieder von (2) enthält. Auf Grund von (7) gilt für alle natürlichen Zahlen k

$$r_k \leq a_{n_k} \leq s_k \tag{8}$$

Wegen (5) und (8) sind die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$$

d. h., a ist der Grenzwert von (6) und damit Häufungswert von (2), womit der Satz bewiesen ist.

5 Vollständige metrische Räume

5.1 Begriff der Fundamentalfolge

Die Untersuchung von Zahlenfolgen auf Konvergenz gestaltet sich, falls eine monotone Zahlenfolge vorliegt, mit Hilfe von Satz 12 relativ einfach. Auch in Satz 11 haben wir für die Konvergenzuntersuchung einer Zahlenfolge, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, ein geeignetes Hilfsmittel.
In allen übrigen Fällen sind wir im Rahmen dieses Büchleins bei der Untersuchung einer vorgegebenen Folge auf Konvergenz in einem metrischen Raum (M, d) auf die Definition 6 oder auf Satz 9 angewiesen.

Dieses Vorgehen ist aber mit einer Schwierigkeit verbunden. Es setzt voraus, dass man von einem Element $a \in M$ vermuten muss, dass es der Grenzwert der zu untersuchenden Folge ist. Wir werden zeigen, dass in gewissen metrischen Räumen die Frage, ob eine Folge konvergent ist, auf anderem Wege beantwortet werden kann. Dazu führen wir zunächst einen neuen Begriff ein.

Definition 15. Eine Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist Fundamentalfolge genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_m, a_n) < \varepsilon$. (1)

Wegen A1 ist (1) trivialerweise erfüllt, wenn $m = n$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ ist. Ferner bedeutet es auf Grund von A2 keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in (1) die Zahl n als die kleinere der beiden Zahlen m, n auffassen. Ist das der Fall, so gibt es stets eine natürliche Zahl k so, dass

$$m = n + k$$

ist. Gilt dann $n \geq N(\varepsilon)$, so ist trivialerweise auch immer die Bedingung $m \geq N(\varepsilon)$ erfüllt. Diese Überlegungen führen zum

Satz 16. Eine Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist Fundamentalfolge genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_{n+k}, a_n) < \varepsilon$. (2)

Durch Kontraposition von (2) erhalten wir:

Wenn $\varepsilon \leq d(a_{n+k}, a_n)$ ist, so folgt $n < N(\varepsilon)$

Damit gilt der

Satz 17. Eine Folge $\{n \to a_n\}$ in einem metrischen Raum (M, d) ist Fundamentalfolge genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:

Wenn $\varepsilon \leq d(a_{n+k}, a_n)$ ist, so folgt $n < N(\varepsilon)$.

Beispiel 19. Wir beweisen mit Hilfe von Satz 17, dass

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)\right\} \tag{3}$$

im metrischen Raum (e, d_1) eine Fundamentalfolge ist.

Beweis. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 2.1.(1) im metrischen Raum (e, d_1)

$$d_1(A_{n+k}, A_n) = \sqrt{\left(\frac{3}{n+k} - \frac{3}{n}\right)^2 + \left(\frac{4}{n+k} - \frac{4}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{9k^2 + 16k^2}{n^2(n+k)^2}} = \frac{5k}{n(n+k)}$$

ist, folgt aus

$$\varepsilon \leq d_1(A_{n+k}, A_n) = \frac{5k}{n+k} < \frac{5k}{5n} = \frac{5}{n}$$

da ε und n positive reelle Zahlen sind,

$$n < \frac{5}{\varepsilon}$$

Die von ε abhängige reelle Zahl $\frac{5}{\varepsilon}$ bezeichnen wir mit $N(\varepsilon)$. Damit haben wir aus der Ungleichung

$$\varepsilon \leq d_1(A_{n+k}, A_n)$$

eine Ungleichung der Form $n < N(\varepsilon)$ hergeleitet. Auf Grund von Satz 17 ist demnach die Folge (3) eine Fundamentalfolge.

Beispiel 20. Wir beweisen, dass die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \frac{n-1}{n+1}\right\} \tag{4}$$

eine Fundamentalfolge ist.

Beweis. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da auf Grund von 3.5.(1) im metrischen Raum (Δ, d_0)

$$d_0(a_{n+k}, a_n) = \left|\frac{n+k-1}{n+k+1} - \frac{n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{2k}{(n+1)(n+k+1)}\right| = \frac{2k}{(n+1)(n+k+1)}$$

ist, folgt aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_{n+k}, a_n) = \frac{2k}{(n+1)(n+k+1)} < \frac{2k}{nk} = \frac{2}{n}$$

sofort $n < \frac{2}{\varepsilon}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 15. Man beweise, dass die Folge

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)\right\} \tag{5}$$

im metrischen Raum (e, d_2) eine Fundamentalfolge ist.

Aufgabe 16. Man beweise, dass die Folge

$$\left\{n \to \left(1, \frac{1+n}{n}, \frac{1-n}{n}, -1\right)^{\mathsf{T}}\right\} \tag{6}$$

im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$ eine Fundamentalfolge ist.

Von den Folgen (3), (4), (5), (6) haben wir gezeigt, dass sie Fundamentalfolgen sind. Wie wir in Beispiel 6, Beispiel 7, Beispiel 8 bzw. Beispiel 9, Seite 49, gesehen haben, sind diese Folgen auch konvergent. Dieses Ergebnis ist nicht etwa zufällig. Vielmehr gilt der

Satz 18. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum (M, d) ist auch eine Fundamentalfolge in (M, d).

Beweis. Es sei

$$\{n \to a_n\} \tag{7}$$

eine konvergente Folge in (M, d) und $a \in M$ der Grenzwert dieser Folge. Dann liegen in jeder ε-Umgebung von a mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder von (7). Offensichtlich liegen dann aber auch in $U_{\varepsilon/2}(a)$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder von (7).
Das letztere bedeutet, dass es zu jeder positiven reellen Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ (8)

Wegen A3 bzw. A2 gilt ferner

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) \qquad \text{bzw.} \qquad d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a_n, a) \tag{9}$$

Unter Berücksichtigung von (8) und (9) gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Dies besagt in Verbindung mit Definition 15 dass (7) eine Fundamentalfolge ist.

Mit Hilfe eines Beispiels zeigen wir, dass die Umkehrung von Satz 18 falsch ist, d. h., nicht jede Fundamentalfolge in einem metrischen Raum (M, d) ist konvergent in (M, d). Zuvor bemerken wir, dass offensichtlich mit (M, d) auch (M_1, d) ein metrischer Raum ist, falls M_1 eine Teilmenge von M ist.

Es sei e eine Ebene, in der ein kartesisches Koordinatensystem vorgegeben ist, und e_1 die Menge aller Punkte von e mit positiven Koordinaten. Der metrische Raum (e_1, d_1) ist in Fig. 21 veranschaulicht. Es ist

$$\left\{n \to A_n\left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)\right\} \tag{10}$$

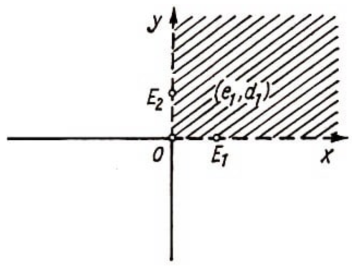


Fig. 21

eine Folge im metrischen Raum (e_1, d_1), da stets $A_n \in e_1$ ist. Diese Folge ist auch eine Fundamentalfolge in (e_1, d_1), da der für die Folge (3) in (e, d_1) schon geführte Beweis unverändert für den metrischen Raum (e_1, d_1) übernommen werden kann.
Die Folge (10) ist in (e, d_1), wie wir schon gezeigt haben, konvergent, ihr Grenzwert ist $O(0, 0)$. Da dieser Punkt nicht zu e_1 gehört, ist (10) keine konvergente Folge in (e_1, d_1).

Wie wir im folgenden Abschnitt zeigen werden, gibt es metrische Räume mit der Eigenschaft, dass in ihnen jede Fundamentalfolge konvergent ist. Derartige metrische Räume heißen vollständige metrische Räume.

Satz 19. Jede Fundamentalfolge in (Δ, d_0) ist beschränkt.

Beweis. Es sei $\{n \to a_n\}$ eine Fundamentalfolge in (Δ, d_0). Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε, insbesondere also zur reellen Zahl $\varepsilon = 1$ eine reelle Zahl $N(1)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(1)$ ist, so folgt $d_0(a_m, a_n) = |a_m - a_n| < 1$. (11)

Ferner gilt stets trivialerweise

$$a_n = a_m + (a_n - a_m)$$

Berücksichtigen wir 1.2.(5) so erhalten wir

$$|a_n| \leq |a_m| + |a_n - a_m| \tag{12}$$

Da $|a_n - a_m| = |a_m - a_n|$ ist, geht (12) über in

$$|a_n| \leq |a_m| + |a_m - a_n| \tag{13}$$

Ist $m = m_0$ in (13) eine beliebige, aber feste natürliche Zahl mit $m_0 \leq N(1)$, so gilt wegen (13)

$$|a_n| \leq |a_{m_0}| + |a_{m_0} - a_n| \tag{14}$$

Wegen (14) und (11) gilt dann für alle natürlichen Zahlen n:

Wenn $n \geq N(1)$ ist, so folgt $|a_n| < |a_{m_0}| + 1$ (15)

Es sei n_1 die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft $n_1 < N(1)$. Ferner sei

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_1}|, |a_{m_0}| + 1\} \tag{16}$$

Dann gilt aber wegen (15) und (16) für alle natürlichen Zahlen n stets $|a_n| \leq K$, d. h., die Fundamentalfolge ist auf Grund von Definition 12 beschränkt, womit der Satz bewiesen ist.

5.2 Begriff des vollständigen metrischen Raums

Definition 16. Ein metrischer Raum ist vollständig genau dann, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergent ist.

Wir beweisen den wichtigen

Satz 20. Die metrischen Räume
a) (Δ, d_0)
b) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$, c) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$, d) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$
e) (e, d_1), f) (e, d_2), g) (e, d_3) sind vollständig.

Beweis von Satz 20a. Die Zahlenfolge

$$\{n \to a_n\} \tag{1}$$

sei eine Fundamentalfolge in $(\Delta, d_0$. Dann gibt es auf Grund von Definition 15 zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N_1(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N_1(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(a_m, a_n) = |a_m - a_n| < \varepsilon$

Offensichtlich gibt es dann aber auch zu jeder positiven reellen Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ eine reelle Zahl $N_2(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N_2(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(a_m, a_n) = |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Da die Zahlenfolge (1) nach Voraussetzung eine Fundamentalfolge ist, so ist sie auf Grund von Satz 19 beschränkt. Damit erfüllt die Zahlenfolge (1) die Voraussetzung des Satzes 15. Die Folge (1) enthält demnach eine konvergente Teilfolge

$$\{k \to a_{n_k}\} \qquad \text{mit} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \tag{3}$$

d. h., in jeder ε-Umgebung von a liegen mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder von (3). Dann liegen aber auch in $U_{\varepsilon/2}(a)$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Folgengliedern alle Glieder von (3). Dies besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N_3(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n_k gilt:

Wenn $n_k \geq N_3(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_0(a_{n_0}, a) = |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4)

Trivialerweise gilt ferner stets

$$a_n - a = (a_n - a_{n_k}) - (a_{n_k} - a)$$

Berücksichtigen wir 1.2.(5), so erhalten wir

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \tag{5}$$

Wegen $|a_n - a_{n_k}| = |a_{n_k} - a_n|$ geht (5) über in

$$|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a_n| + |a_{n_k} - a| \tag{6}$$

Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$$

so gilt wegen (6), (2) und (4), wenn wir m in (2) durch n_k ersetzen, für alle natürlichen Zahlen n_k, n:

Wenn $n_k, n \geq N_3(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Dies besagt, dass die Zahlenfolge (1) konvergent ist, womit der Satz 20a bewiesen ist.

Beweis von Satz 20b. Die Folge

$$\{n \to \mathfrak{a}_n\} = \{(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{pn})^\mathsf{T}\} \tag{7}$$

sei eine Fundamentalfolge in $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_1(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) < \varepsilon$

Wegen 3.2.(10) gilt dann auch:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a_{im} - a_{in}| < \varepsilon$ (8)

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Auf Grund von Definition 15 besagt (8), dass die p Zahlenfolgen

$$\{n \to a_{1n}\}, \{n \to a_{2n}\}, ..., \{n \to a_{pn}\} \tag{9}$$

Fundamentalfolgen in (Δ, d_0) sind. Wegen Satz 20a sind demnach die Zahlenfolgen (9) konvergent. Ihre Grenzwerte seien

$$a_1, a_2, ..., a_p \tag{10}$$

Dies besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen

$$N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), ..., N_p(\varepsilon) \tag{11}$$

derart gibt, das für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wenn } n \geq N_1(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{1n} - a_1| < \varepsilon \\ \text{Wenn } n \geq N_2(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{2n} - a_2| < \varepsilon \\ ... \\ \text{Wenn } n \geq N_p(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{pn} - a_p| < \varepsilon \end{array}\right\} \tag{12}$$

Dann gibt es aber auch zu jeder positiven reellen Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ reelle Zahlen

$$N'_1(\varepsilon), N'_2(\varepsilon), ..., N'_p(\varepsilon) \tag{13}$$

derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wenn } n \geq N'_1(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{1n} - a_1| < \frac{\varepsilon}{p} \\ \text{Wenn } n \geq N'_2(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{2n} - a_2| < \frac{\varepsilon}{p} \\ ... \\ \text{Wenn } n \geq N'_p(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } |a_{pn} - a_p| < \frac{\varepsilon}{p} \end{array}\right\} \tag{14}$$

Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_1'(\varepsilon), N_2'(\varepsilon), ..., N_p'(\varepsilon)\} \tag{15}$$

so gilt wegen (14):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$|a_{1n} - a_1| + |a_{2n} - a_2| + ... + |a_{pn} - a_p| < \frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon}{p} + ... + \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon \tag{16}$$

Wir zeigen, dass der Spaltenvektor

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_p)^\mathsf{T} \tag{17}$$

dessen Koordinaten die Grenzwerte der Zahlenfolgen (9) sind, der Grenzwert der Folge (7) ist. Dazu berechnen wir $d_1(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a})$. Wegen 3.2.(10) gilt

$$d_1(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = |a_{1n} - a_1| + |a_{2n} - a_2| + ... + |a_{pn} - a_p| \tag{18}$$

In Verbindung mit (18) geht (16) über in:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d_1(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) < \varepsilon$.

Damit haben wir gezeigt, dass der Spaltenvektor $\mathfrak{a}$ der Grenzwert der Fundamentalfolge (7) ist. Die Folge (7) ist also konvergent, womit Satz 20b bewiesen ist.

Beweis von Satz 20c. Die Folge (7) sei eine Fundamentalfolge in $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$d_2(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) = \max\{|a_{1m} - a_{1n}|, ..., |a_{pm} - a_{pn}|\} < \varepsilon$$

Hieraus folgt (8). Wegen (8) sind die p Zahlenfolgen (9) Fundamentalfolgen in (Δ, d_0) und damit auf Grund von Satz 20a konvergent. Ihre Grenzwerte sind die reellen Zahlen (10). Dies besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen (11) derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n die Bedingungen (12) erfüllt sind. Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), ..., N_p(\varepsilon)\}$$

so gilt wegen (12):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a_{in} - a_i| < \varepsilon$ (19)

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Wir zeigen, dass der Spaltenvektor (17) der Grenzwert der Folge (7) ist. Wegen (19) gilt für alle natürlichen Zahlen n:

Wenn $n \geq (\varepsilon)$ ist, so folgt

$$d_2(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = \max\{|a_{1n} - a_1|, ..., |a_{pn} - a_p|\} < \varepsilon$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Spaltenvektor (17) der Grenzwert der Fundamentalfolge (7) ist, womit Satz 20 c bewiesen ist.

Beweis von Satz 20d. Die Folge (7) sei eine Fundamentalfolge in $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$d_3(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_n) = |a_{1m} - a_{1n}| + ... + |a_{pm} - a_{pn}| < \varepsilon$$

Da keiner der p Summanden $|a_{1m} - a_{1n}|, ..., |a_{pm} - a_{pn}|$ negativ ist, folgt hieraus (8). Wegen (8) sind die p Zahlenfolgen (9) Fundamentalfolgen in (Δ, d_0) und damit auf Grund von Satz 20a konvergent.
Ihre Grenzwerte sind die reellen Zahlen (10). Dies besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen (11) derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n die Bedingungen (12) erfüllt sind.

Dann gibt es aber auch zu jeder positiven reellen Zahl $\frac{\varepsilon}{p}$ reelle Zahlen (13) derart, dass für alle natürlichen Zahlen n die Bedingungen (14) erfüllt sind. Bestimmen wir $N(\varepsilon)$ gemäß (15), so gilt (16).
Wir zeigen, dass der Spaltenvektor (17) der Grenzwert der Folge (7) ist. Wegen (16) gilt für alle natürlichen Zahlen n:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$d_3(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = |a_{1m} - a_{1n}| + ... + |a_{pm} - a_{pn}| < \varepsilon$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Spaltenvektor (17) der Grenzwert der Fundamentalfolge (7) ist, womit der Satz 20d bewiesen ist.

Ist (7) eine konvergente Folge in dem metrischen Raum

$$(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1) \quad \text{bzw.} \quad (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2) \quad \text{bzw.} \quad (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$$

so hat die Folge (7), wie die Beweise zu den Sätzen 20b, c, d zeigen, in jedem dieser drei Räume denselben Grenzwert (vgl. auch Aufgabe 10 und Beispiel 9 in Verbindung mit Aufgabe 11).
Dieser Grenzwert ist, wie ebenfalls aus den Beweisen zu diesen Sätzen hervorgeht, ein Spaltenvektor der Form (17), dessen p Koordinaten $a_1, a_2, ..., a_p$ die Grenzwerte der p Zahlenfolgen (9) sind. Diese Zahlenfolgen heißen Koordinatenfolgen der Folge (7). Man sagt daher auch, dass die Konvergenz in diesen drei metrischen Räumen die koordinatenweise Konvergenz ist.

Beispiel 21. Wir untersuchen die Folge

$$\left\{ n \to \left(\frac{n-3}{n}, \frac{n+2}{n}, \frac{n}{2n+1} \right)^{\mathsf{T}} \right\} \tag{20}$$

im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}, d_3)$ auf Konvergenz.

Die Koordinatenfolgen von (20) sind die Zahlenfolgen

$$\left\{n \to \frac{n-3}{n}\right\}, \qquad \left\{n \to \frac{n+2}{n}\right\}, \qquad \left\{n \to \frac{n}{2n+1}\right\}$$

Von diesen Zahlenfolgen haben wir in Aufgabe 9a, b, c gezeigt, dass sie konvergent sind und jeweils die folgenden Grenzwerte besitzen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Demnach ist die Folge (20) im metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}, d_3)$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}, \frac{n+2}{n}, \frac{n}{2n+1}\right)^\mathsf{T} = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)^\mathsf{T}$$

Der Beweis des Satzes 20 e bzw. 20 f bzw. 20 g ist analog dem Beweis des Satzes 20 b bzw. 20 c bzw. 20 d.

Die Ergebnisse von Satz 18 und Satz 20 fassen wir zusammen zum

Satz 21. Eine Folge in dem metrischen Raum (Δ, d_0) bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ bzw. (e, d_1) bzw. (e, d_2) bzw. (e, d_3) ist konvergent genau dann, wenn sie eine Fundamentalfolge ist.

Auf Grund von Satz 21 sind also in den metrischen Räumen, die in Satz 21 aufgezählt sind, die beiden Begriffe "Fundamentalfolge" und "konvergente Folge" äquivalent. Will man beispielsweise in einem dieser metrischen Räume eine Folge auf Konvergenz untersuchen, so versucht man zu zeigen, dass diese Folge eine Fundamentalfolge ist.

Beispiel 22. Mit Hilfe von Satz 21 beweisen wir, dass die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{20}$$

konvergent ist.

Beweis. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_{n-k}, a_n) = |a_{n+k} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+k)^2}$$

folgt wegen

$$\frac{1}{(n+i)^2} < \frac{1}{(n+i-1)(n+i)} = \frac{1}{n+i-1} - \frac{1}{n+i}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., k\}$

$$\varepsilon < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$$

und hieraus $\varepsilon < \frac{1}{n}$. Damit gilt $n < \frac{1}{\varepsilon}$. Die Zahlenfolge (20) ist also eine Fundamentalfolge und auf Grund von Satz 21 ist damit (20) eine konvergente Zahlenfolge.

Aufgabe 17. Mit Hilfe von Satz 21 beweise man, dass die Zahlenfolge

$$\left\{n \to \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right\}$$

konvergent ist.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und M_1 eine Teilmenge von M. Dann ist, wie wir bereits festgestellt haben, auch (M_1, d) ein metrischer Raum. Sind a, b reelle Zahlen mit $a < b$, so ist $(S[a, b], d_0)$ ein metrischer Raum, da $S[a, b]$ eine Teilmenge von Δ ist. Wir beweisen den

Satz 22. Sind a, b reelle Zahlen mit $a < b$, so ist $(S[a, b], d_0)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Die Zahlenfolge

$$\{n \to c_n\} \qquad \text{mit} \qquad c_n \in S[a, b] \tag{21,22}$$

sei eine Fundamentalfolge in $(S[a, b], d_0)$. Dann ist (21) auch eine Fundamentalfolge in dem metrischen Raum (Δ, d_0). Da (Δ, d_0) ein vollständiger metrischer Raum ist, ist die Fundamentalfolge (21) konvergent in (Δ, d_0). Ihr Grenzwert sei c Wir zeigen, dass

$$c \in S[a, b] \tag{23}$$

gilt. Die Beziehung (22) ist äquivalent mit

$$a \leq c_n \leq b \tag{24}$$

Auf Grund von Aufgabe 8 besitzt die Zahlenfolge $\{n \to a\}$ bzw. $\{n \to b\}$ in (Δ, d_0) den Grenzwert a bzw. b. Da c der Grenzwert der Zahlenfolge (21) in (Δ, d_0) ist, so sind in Verbindung mit (24) alle Voraussetzungen von Aufgabe 12 erfüllt, und es gilt daher

$$a \leq c \leq b$$

was mit (23) äquivalent ist. Damit ist gezeigt, dass die Fundamentalfolge (21) in dem metrischen Raum $(S[a, b], d_0)$ konvergent ist, womit der Satz bewiesen ist.

6 Eindeutige Abbildungen eines metrischen Raums in sich

6.1 Begriffe

Gegeben seien der metrische Raum (e, d_1), wobei in e ein kartesisches Koordinatensystem vorgegeben ist (Fig. 22), und das lineare System

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 + 1 \\ x'_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Fassen wir in (1) die x_1, x_2 bzw. die x'_1, x'_2 als kartesische Koordinaten von Punkten $X, X' \in e$ auf, so wird durch die Vorschrift (1) offensichtlich jedem Punkt X des metrischen Raums (e, d_1) genau ein Punkt X' von (e, d_1) zugeordnet (Fig. 22).

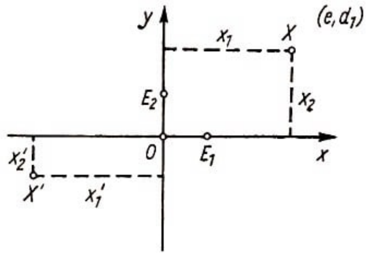


Fig. 22

Hierfür sagt man auch, die Vorschrift (1) vermittelt eine eindeutige Abbildung des metrischen Raums (e, d_1) in sich. Der Punkt X' heißt das Bild des Punkts X.

Beispiel 23. Durch (1) erfolgt eine eindeutige Abbildung des metrischen Raums (e, d_1) in sich. Wir bestimmen das Bild des Punkts $X(1, -1)$. Setzen wir in (1) für x_1, x_2 die Koordinaten von X ein, so erhalten wir

$$x'_1 = 1 + (-1) + 1 = 1 \quad , \quad x'_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 = -4$$

Damit ist $X'(1, -4)$ das Bild von $X(1, -1)$.

Definition 17. Wird jedem Element x eines metrischen Raums (M, d) durch eine Vorschrift ein eindeutig bestimmtes Element x' von (M, d) zugeordnet, so sagt man, es erfolgt eine eindeutige Abbildung des metrischen Raums (M, d) in sich. Wird diese Abbildung mit A bezeichnet, so schreibt man die Zuordnung zwischen den Elementen x und x' in der Form $x' = A(x)$. Das Element x' heißt das Bild des Elements x.

In dem metrischen Raum $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ können wir eine eindeutige Abbildung A des metrischen Raums in sich durch

$$\mathfrak{x}' = A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

definieren, wobei

$$\mathfrak{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_p \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$$

ist. Die Gleichung

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{2}$$

lässt sich ausführlich in der Form (Matrizen, Seite 27 ff)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p \\ ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + b_2 \\ ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + b_p \end{pmatrix}$$

schreiben. Dies ist auf Grund von Definition 1 (Matrizen, Seite 7) äquivalent mit

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + b_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + b_2 \\ ... \\ x'_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + b_p \end{array}\right\} \tag{3}$$

Gilt neben (2) noch

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{b} \tag{4}$$

mit

$$\mathfrak{y}' = (y'_1, y'_2, ..., y'_p)^\mathsf{T} \qquad , \qquad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, ..., y_p)^\mathsf{T}$$

so lässt sich (4) analog in der Form (3) schreiben. Aus beiden Ergebnissen folgt dann unmittelbar

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 - y'_1 = a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) + ... + a_{1p}(x_p - y_p) \\ x'_2 - y'_2 = a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) + ... + a_{2p}(x_p - y_p) \\ ... \\ x'_p - y'_p = a_{p1}(x_1 - y_1) + a_{p2}(x_2 - y_2) + ... + a_{pp}(x_p - y_p) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Von (5) werden wir in 6.3. Gebrauch machen.

Aufgabe 18. Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme jeweils das Bild der Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bei der durch

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{6}$$

definierten eindeutigen Abbildung A von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$ in sich.

6.2 Fixpunkte einer Abbildung

Definition 18. Ein Element x eines metrischen Raumes (M, d), das bei einer eindeutigen Abbildung A von (M, d) in sich mit seinem Bild x' zusammenfällt, heißt Fixpunkt der Abbildung A.

Fixpunkte einer Abbildung A genügen wegen der Forderung $x = x'$ der Gleichung

$$x = A(x) \tag{1}$$

Je nachdem, ob (1) lösbar ist oder nicht, besitzt die Abbildung A Fixpunkte oder nicht. Ist ein Element x Fixpunkt einer Abbildung, so werden wir dieses Element auch mit x^* bezeichnen.

Beispiel 24. Wir untersuchen, ob die durch 6.1.(1) definierte Abbildung A von (e, d_1) in sich Fixpunkte besitzt. Wegen der Forderung

$$X(x_1, x_2) = X'(x_1, x_2)$$

müssen die Koordinaten der Bedingung

$$x'_1 = x_1 \qquad , \qquad x'_2 = x_2 \tag{2}$$

genügen. Unter Berücksichtigung von (2) geht 6.1.(1) über in

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1 + x_2 + 1 \\ x_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 4 \end{aligned}\right\}$$

Dieses Gleichungssystem bringen wir auf die Form

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$.
Damit besitzt die Abbildung A genau einen Fixpunkt, nämlich den Punkt $X^*\left(\frac{5}{2}, -1\right)$.

Aufgabe 19. Man untersuche, ob die in Aufgabe 18 definierte eindeutige Abbildung A von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{4,1}, d_1)$ in sich Fixpunkte besitzt.

6.3 Kontrahierende Abbildungen

In dem metrischen Raum (e, d_1) bzw. (e, d_2) bzw. (e, d_3) haben die beiden Punkte

$$X = X(4, 8) \qquad , \qquad Y = Y(8, 8)$$

die Abstände

$$\left.\begin{aligned} d_1(X, Y) &= \sqrt{(4-8)^2 + (8-8)^2} = 4 \\ d_2(X, Y) &= \max\{|4-8|, |8-8|\} = 4 \\ d_3(X, Y) &= |4-8| + |8-8| = 4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Durch

$$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1 \qquad , \qquad x_2' = \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{8}x_2 + 3$$

erfolgt eine eindeutige Abbildung A von (e, d_1) bzw. von (e, d_2) bzw. von (e, d_3) in sich. Die Bilder von X und Y sind in diesen drei metrischen Räumen die Punkte

$$A(X) = X'(5,5) \qquad , \qquad A(Y) = Y'(7,8)$$

und diese Bildpunkte haben die Abstände

$$\left.\begin{array}{l} d_1(A(X), A(Y)) = \sqrt{(5-7)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{13} \\ d_2(A(X), A(Y)) = \max\{|5-7|, |5-8|\} = 3 \\ d_3(A(X), A(Y)) = |5-7| + |5-8| = 5 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Vergleichen wir (2) mit (1), so erhalten wir das Ergebnis

$$\begin{array}{l} d_1(A(X), A(Y)) < d_1(X,Y) \\ d_2(A(X), A(Y)) < d_2(X,Y) \\ d_3(A(X), A(Y)) > d_3 1(X,Y) \end{array}$$

In den beiden metrischen Räumen (e, d_1) und (e, d_2) bewirkt die Abbildung A, dass die Entfernung der Bildpunkte $X'(5,5)$, $Y'(7,8)$ kleiner wird als die Entfernung der Punkte $X(4,8)$, $Y(8,8)$. Diese Überlegungen führen zu:

Definition 19. Eine eindeutige Abbildung A eines metrischen Raums (M, d) in sich ist eine kontrahierende Abbildung genau dann, wenn es eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ so gibt, dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$d(A(x), A(y)) \leq q d(x,y) \tag{3}$$

Die reelle Zahl q heißt Kontraktionsfaktor.

Ehe wir die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen die durch

$$\mathfrak{x}' = A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{4}$$

definierte eindeutige Abbildung A des metrischen Raums

$$(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1) \quad \text{bzw.} \quad (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2) \quad \text{bzw.} \quad (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$$

in sich eine kontrahierende Abbildung ist, führen wir noch einige Begriffe ein: In der p-reihigen Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

von (4) können wir die p Summen

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = |a_{11}| + |a_{12}| + ... + |a_{1p}| \\ Z_2 = |a_{21}| + |a_{22}| + ... + |a_{2p}| \\ ... \\ Z_p = |a_{p1}| + |a_{p2}| + ... + |a_{pp}| \end{array}\right\} \tag{5}$$

bilden. Diese Summen heißen Zeilensummen der Matrix $\mathfrak{A}$. Die p Summen

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = |a_{11}| + |a_{21}| + ... + |a_{p1}| \\ S_2 = |a_{12}| + |a_{22}| + ... + |a_{p2}| \\ ... \\ S_p = |a_{1p}| + |a_{2p}| + ... + |a_{pp}| \end{array}\right\} \tag{6}$$

nennt man analog Spaltensummen von $\mathfrak{A}$, und schließlich heißt die Summe

$$Q = a_{11}^2 + a_{12}^2 + ... + a_{1p}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + ... + a_{2p}^2 + ... + a_{p1}^2 + a_{p2}^2 + ... + a_{pp}^2 \tag{7}$$

Quadratsumme der Matrix $\mathfrak{A}$.

Beispiel 25. Wir bestimmen von der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix}$$

die Zeilensummen, die Spaltensummen und die Quadratsumme. Es ist

$$Z_1 = 0,08; \quad Z_2 = 0,05; \quad S_1 = 0,04; \quad S_2 = 0,09; \quad Q = 0,0063$$

Satz 23. Die durch die Gleichung (4) definierte eindeutige Abbildung A des metrischen Raums $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ in sich, ist eine kontrahierende Abbildung A, wenn sich für die Matrix $\mathfrak{A}$ in

a) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ eine reelle Zahl q_1 mit $\sqrt{Q} \leq q_1 < 1$, (8)

b) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ eine reelle Zahl $q2$ mit

$$\max\{Z_1, Z_2, ..., Z_p\} \leq q_2 < 1 \tag{9}$$

c) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ eine reelle Zahl q_3 mit

$$\max\{S_1, S_2, ..., S_p\} \leq q_3 < 1 \tag{10}$$

finden lässt.

Beweis von Satz 23 a. Es seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ beliebige Elemente von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1)$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ deren Bilder. Dann gilt

$$(d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})))^2 = (d_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'))^2 = (x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2 + ... + (x_p' - y_p')^2$$

Berücksichtigen wir 6.1.(5) so erhalten wir

$$\begin{aligned}(d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y}))^2 = {} & [a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) + ... + a_{1p}(x_p - y_p)]^2 \\ & + [a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) + ... + a_{2p}(x_p - y_p)]^2 + ... \\ & + [a_{p1}(x_1 - y_1) + a_{p2}(x_2 - y_2) + ... + a_{pp}(x_p - y_p)]^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung 1.1.(7) gilt

$$\begin{aligned}&[a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + ... + a_{ip}(x_p - y_p)]^2 \leq \\ &\quad \leq (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{ip}^2)[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2]\end{aligned} \tag{12}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Da

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2 = (d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2$$

ist, geht (11) wegen (12) über in

$$\begin{aligned}(d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y}))^2 \leq {} & (a_{11}^2 + a_{12}^2 + ... + a_{1p}^2) \cdot (d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2 \\ & + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + ... + a_{2p}^2) \cdot (d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2 + ... \\ & + (a_{p1}^2 + a_{p2}^2 + ... + a_{pp}^2) \cdot (d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2\end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (7)

$$(d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y}))^2 \leq Q \cdot (d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2 \tag{13}$$

Da $d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y}))$, Q, $d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ nichtnegative reelle Zahlen sind, folgt aus (13) auf Grund von Regel 4

$$d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) \leq \sqrt{Q} \cdot d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{14}$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzung (8), so geht (14) über in

$$d_1(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) = q_1 \cdot d_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

Dies besagt auf Grund von Definition 19, dass A eine kontrahierende Abbildung ist.

Beweis von Satz 23 b. Es seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ beliebige Elemente von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2)$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ deren Bilder. Dann gilt

$$d_2(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) = d_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = \max\{|x_1' - y_1'|, |x_2' - y_2'|, ..., |x_p' - y_p'|\}$$

Berücksichtigen wir 6.1.(5), so erhalten wir

$$\begin{aligned}d_2(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) = \max\{ & |a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) + ... + a_{1p}(x_p - y_p)|, \\ & |a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) + ... + a_{2p}(x_p - y_p)|, ..., \\ & |a_{p1}(x_1 - y_1) + a_{p2}(x_2 - y_2) + ... + a_{pp}(x_p - y_p)|\}\end{aligned} \tag{15}$$

Auf Grund von Aufgabe 4 gilt

$$\begin{aligned}&|a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + ... + a_{ip}(x_p - y_p)| \leq \\ &\quad |a_{i1}(x_1 - y_1)| + |a_{i2}(x_2 - y_2)| + ... + |a_{ip}(x_p - y_p)|\end{aligned}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Ferner ist

$$|a_{ij}(x_1 - y_1)| = |a_{ij}| \cdot |x_i - y_i|$$

für alle $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}&|a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + ... + a_{ip}(x_p - y_p)| \leq \\ &\qquad |a_{i1}| \cdot |x_1 - y_1| + |a_{i2}| \cdot |x_2 - y_2| + ... + |a_{ip}| \cdot |x_p - y_p|\end{aligned} \tag{16}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Beachten wir noch, dass

$$|x_i - y_i| \leq d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

ist für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$, so geht (15) schließlich über in

$$\begin{aligned}d_2(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) \leq &\max\{(|a_{11}| + |a_{12}| + ... + |a_{1p}|) \cdot d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ &(|a_{21}| + |a_{22}| + ... + |a_{2p}|) \cdot d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), ..., (|a_{p1}| + |a_{p2}| + ... + |a_{pp}|) \cdot d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\}\end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (5)

$$d_2(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) \leq (\max\{Z_1, Z_2, ..., Z_p\}) \cdot d_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{17}$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzung (9), so besagt (17), dass A eine kontrahierende Abbildung ist.

Beweis von Satz 23 c. Es seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ beliebige Elemente von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3)$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ deren Bilder. Dann gilt

$$d_3(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) = d_3(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = |x'_1 - y'_1| + |x'_2 - y'_2| + ... + |x'_p - y'_p|$$

Berücksichtigen wir 6.1.(5), so erhalten wir

$$\begin{aligned}d_3(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) &= |a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) + ... + a_{1p}(x_p - y_p)| \\ &+ |a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) + ... + a_{2p}(x_p - y_p)| + ... \\ &+ |a_{p1}(x_1 - y_1) + a_{p2}(x_2 - y_2) + ... + a_{pp}(x_p - y_p)|\end{aligned} \tag{18}$$

Berücksichtigen wir (16), so geht (18) über in

$$\begin{aligned}d_3(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) &\leq (|a_{11}| + |a_{12}| + ... + |a_{1p}|) \cdot |x_1 - y_1| \\ &+ (|a_{21}| + |a_{22}| + ... + |a_{2p}|) \cdot |x_2 - y_2| + ... \\ &+ (|a_{p1}| + |a_{p2}| + ... + |a_{pp}|) \cdot |x_p - y_p|\end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (6)

$$\begin{aligned}d_3(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) &\leq S_1 \cdot |x_1 - y_1| + S_2 \cdot |x_2 - y_2| + ... + S_p \cdot |x_p - y_p| \\ &\leq (\max\{S_1, S_2, ..., S_p\}) \cdot (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p|)\end{aligned}$$

Da

$$d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p|$$

ist, gilt

$$d_3(A(\mathfrak{x}), A(\mathfrak{y})) \leq (\max\{S_1, S_2, ..., S_p\}) \cdot d_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{19}$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzung (10), so besagt (19), dass A eine kontrahierende Abbildung ist, womit der Satz 23 c bewiesen ist.

Genügt eine p-reihige Matrix $\mathfrak{A}$ der Bedingung (8) bzw. (9) bzw. (10), so sagt man, die Matrix $\mathfrak{A}$ erfüllt das Quadratsummen- bzw. das Zeilensummen- bzw. das Spaltensummenkriterium.

Beispiel 26: Wir untersuchen, ob die durch

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix} \tag{20}$$

definierte eindeutige Abbildung A des metrischen Raums $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_1)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_2)$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_3)$ in sich die Eigenschaft (8) bzw. (9) bzw. (10) besitzt, also eine kontrahierende Abbildung ist.
Dazu müssen wir die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix} \tag{21}$$

untersuchen. Wie wir in Beispiel 25 gezeigt haben, ist

$$Q = 0,0063; \quad Z_1 = 0,08; \quad Z_2 = 0,05; \quad S_1 = 0,04; \quad S_2 = 0,09$$

a) Wegen

$$\sqrt{Q} = \sqrt{0,0063} < \sqrt{0,0064} = 0,08 = q_1 < 1$$

erfüllt die Matrix (21) das Quadratsummenkriterium, die Voraussetzung in Satz 23a ist also erfüllt. Die durch (20) definierte eindeutige Abbildung A von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_1)$ in sich ist eine kontrahierende Abbildung.

b) Es ist

$$\max\{Z_1, Z_2\} = \max\{0,08; 0,05\} = 0,08 = q_2 < 1$$

d. h., die Matrix (21) erfüllt das Zeilensummenkriterium. Somit ist die Voraussetzung in Satz 23 b erfüllt. Die durch (20) definierte eindeutige Abbildung A von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_2)$ in sich ist eine kontrahierende Abbildung.

c) Die Matrix (21) erfüllt auch das Spaltensummenkriterium, da

$$\max\{S_1, S_2\} = \{0,04; 0,09\} = 0,09 = q_3 < 1$$

ist. Die Voraussetzung in Satz 23c ist also erfüllt. Die durch (20) definierte eindeutige Abbildung A von $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_3)$ in sich ist eine kontrahierende Abbildung.

Aufgabe 20. Es seien a, b reelle Zahlen. Durch

$$x' = ax + b$$

erfolgt eine eindeutige Abbildung A des vollständigen metrischen Raumes (Δ, d_0) in sich. Man untersuche, für welche reellen Zahlen a, b diese Abbildung A eine kontrahierende Abbildung ist.

Aufgabe 21. Man zeige, dass durch

$$x' = \frac{x^3 + x + 1}{100} \tag{22}$$

eine eindeutige Abbildung A des vollständigen metrischen Raumes $(S[0,1], d_0)$ in sich erfolgt und A eine kontrahierende Abbildung ist.

6.4 Banachscher Fixpunktsatz

Wir formulieren nun einen Satz, der von großer Tragweite ist. Er trägt den Namen des polnischen Mathematikers Stefan Banach (1892-1945) und heißt Banachscher Fixpunktsatz.

Satz 24. Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und A eine kontrahierende Abbildung von (M, d) in sich. Dann existiert genau ein Fixpunkt der Abbildung A.

Beweis. Es sei x_0 ein beliebiges, nach Wahl aber festes Element von (M, d). Ausgehend von x_0 berechnen wir iterativ, d. h. schritt- weise

$$x_1 = A(x_0), x_2 = A(x_1), ..., x_n = A(x_{n-1}), x_{n+1} = A(x_n), ... \tag{1}$$

Für die so bestimmten Elemente $x_1, x_2, ...$ des metrischen Raumes (M, d) gilt wegen 6.3.(3)

$$\left.\begin{array}{l} d(x_2, x_1) = d(A(x_1), A(x_0)) \leq qd(x_1, x_0) = qd(A(x_0), x_0) \\ d(x_3, x_2) = d(A(x_2), A(x_1)) \leq qd(x_2, x_1) \leq q^2 d(A(x_0), x_0) \\ d(x_4, x_3) = d(A(x_3), A(x_2)) \leq qd(x_3, x_2) \leq q^3 d(A(x_0), x_0) \\ ... \\ d(x_{n+1}, x_n) = d(A(x_n), A(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}) \leq q^n d(A(x_0), x_0) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Durch wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung 2.4.(1) erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{l} d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_n) \\ d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + d(x_{n+k-2}, x_n) \end{array}$$

und schließlich

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \tag{3}$$

Wir zeigen mit Hilfe von Satz 17, dass die durch (1) definierte Folge

$$\{n \to x_n\} \tag{4}$$

die Iterationsfolge heißt, eine Fundamentalfolge in (M,d) ist. Es sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Aus

$$\varepsilon \leq d(x_{n+k}, x_n)$$

folgt in Verbindung mit (3) und (2) zunächst

$$\varepsilon \leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + ... + q^n) d(A(x_0), x_0) \tag{5}$$

Da wegen $0 \leq q < 1$

$$\begin{aligned} q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + ... + q^{n+1} + q^n &= q^n (q^{k-1} + q^{k-2} + ... + q + 1) \\ &= q^n \cdot \frac{1-q^k}{1-q} < \frac{q^n}{1-q} \end{aligned} \tag{6}$$

ist, geht (5) mit Hilfe von (6) über in

$$\varepsilon < \frac{q^n}{1-q} d(A(x_0), x_0) \tag{7}$$

Wegen $0 \leq q < 1$ lässt sich q stets in der Form

$$q = \frac{1}{1+a}$$

darstellen, wobei a eine reelle Zahl mit $a > 0$ ist. Dann ist

$$\frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \cdot q^n = \frac{1+a}{a} \cdot \frac{1}{(1+a)^n}$$

Berücksichtigen wir Bernoullische Ungleichung 1.1.(6), so erhalten wir

$$\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1+a}{a} \cdot \frac{1}{1+na}$$

Da stets

$$\frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

ist, folgt schließlich

$$\frac{q^n}{1-q} < \frac{1+a}{a^2} \cdot \frac{1}{n} \tag{8}$$

Mit (8) geht (7) über in

$$\varepsilon < \frac{1+a}{a^2} \cdot d(A(x_0), x_0) \cdot \frac{1}{n} \tag{9}$$

In (9) sind a und $d(A(x_0), x_0)$ feste reelle Zahlen. Damit ist auch

$$\frac{1+a}{a^2} \cdot d(A(x_0), x_0)$$

eine feste reelle Zahl, die wir mit K bezeichnen. Die Ungleichung (9) lautet dann $\varepsilon < \frac{K}{n}$. Hieraus folgt

$$n < \frac{K}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

Auf Grund von Satz 17 ist demnach die Iterationsfolge (4) eine Fundamentalfolge. Da nach Voraussetzung (M, d) ein vollständiger metrischer Raum ist, ist damit (4) eine konvergente Folge in (M, d).

Ihr Grenzwert sei x^*. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(x_n, x^*) < \varepsilon$. (10)

Wir zeigen, dass a^* Fixpunkt der Abbildung A ist. Wegen 2.4.(1), Seite 26, gilt

$$d(x^*, A(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, A(x*)) \tag{11}$$

Da $x_n = A(x_{n-1})$ und A nach Voraussetzung eine kontrahierende Abbildung von (M, d) in sich ist, gilt

$$d(x_n, A(x^*)) = d(A(x_{n-1}), A(x^*)) \leq qd(x_{n-1}, x^*) \tag{12}$$

Mit Hilfe von (12) und unter Berücksichtigung von

$$d(x^*, x_n) = d(x_n, x^*)$$

geht (11) über in

$$d(x^*, A(x^*)) \leq d(x_n, x^*) + qd(x_{n-1}, x^*)$$

Wegen (10) gilt dann für alle natürlichen Zahlen n:

Wenn $n \geq N(\varepsilon) + 1$ ist, so folgt $d(x^*, A(x^*)) < \varepsilon + q\varepsilon < 2\varepsilon$.

Da $d(x^*, A(x^*))$ eine feste nichtnegative reelle Zahl und ε eine beliebige positive reelle Zahl ist, so kann die Ungleichung

$$d(x^*, A(x^*)) < 2\varepsilon$$

nur richtig sein, wenn

$$d(x^*, A(x^*)) = 0 \qquad \text{also} \qquad x^* = A(x^*)$$

gilt. Die letzte Gleichung besagt aber, dass x^* Fixpunkt der Abbildung A ist.

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildung A neben x^* keinen weiteren Fixpunkt besitzt. Dazu nehmen wir an, es sei auch y mit $y \neq x^*$ ein Fixpunkt von A. Dann gelten die beiden Gleichungen $x^* = A(x^*)$ und $y = A(y)$.
Ferner ist

$$d(x^*, y) = d(A(x^*), A(y)) \leq qd(x^*, y) \tag{13}$$

Wegen $x^* \neq y$ ist $d(x^*, y) > 0$. Aus (13) folgt dann $1 \leq q$, also

$$q \geq 1$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $0 \leq q < 1$. Somit gibt es nur einen Fixpunkt x^* von A, womit der Banachsche Fixpunktsatz bewiesen ist.

Sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so kann man, wie der Beweis dieses Satzes überdies zeigt, den eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* iterativ berechnen, indem man von einem beliebigen Element x_0 eines vollständigen metrischen Raums (M, d) ausgeht und gemäß (1) eine Iterationsfolge (4) konstruiert. Da es sich bei (4) um eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x^* handelt, sind die Glieder dieser Folge Näherungswerte von x^*.

Dieses Iterationsverfahren hat den großen Vorteil, dass es selbstkorrigierend ist, d. h., ist ein Glied einer Iterationsfolge falsch berechnet bzw. wird es durch ein anderes Element von (M, d) ersetzt, so leidet darunter nicht die Konvergenz dieser Folge, da man das falsch berechnete Element bzw. das durch ein anderes Element ersetzte Element als Ausgangselement einer neuen Iterationsfolge auffassen kann.

Ist x_n der n-te Näherungswert für den Fixpunkt x^*, so bezeichnet man den Abstand $d(x_n, x^*)$ als Fehler bei der n-ten Näherung. Für den Fehler bei der n-ten Näherung gilt, wie wir beweisen werden, die Abschätzung

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x_n, x_{n-1}) \tag{14}$$

Ist der Kontraktionsfaktor q dem Betrage nach sehr klein, so verkleinert sich auf Grund von (14) bei jedem Iterationsschritt der Fehler $d(x_n, x^*)$ sehr schnell, d.h., die Anzahl der bereits genauen Stellen des zu berechnenden Fixpunktes x^* vergrößert sich in diesem Fall sehr schnell.

Beweis von (14). Wegen

$$x_n = A(x_{n-1}) \qquad \text{und} \qquad x^* = A(x^*)$$

gilt auf Grund von 2.4.(1),

$$d(x_n, x^*) = d(A(x_{n-1}, A(x^*)) \leq d(A(x_{n-1}, A(x_n)) + d(A(x_n), A(x^*)) \tag{15}$$

Berücksichtigen wir die Kontraktionsbedingung 6.3.(3), so geht (15) über in

$$d(x_n, x^*) \leq qd(x_{n-1}, x_n) + q(x_n, x^*)$$

Hieraus folgt

$$(1-q)d(x_n, x^*) \leq qd(x_n, x_{n-1}) \tag{16}$$

Wegen $0 \leq q < 1$ ist $1 - q > 0$. Damit folgt aus (16) die Behauptung (14).
Wir leiten noch eine zweite Abschätzung für den Fehler $d(x_n, x^*)$ her. Aus (2) ergibt sich zunächst

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq q^{n-1} d(A(x_0), x_0) \tag{17}$$

Wegen $x_1 = A(x_0)$ lässt sich (17) auch in der Form

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq q^{n-1} d(x_1, x_0) \tag{18}$$

schreiben. Unter Berücksichtigung von (18) geht (14) dann über in

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) \tag{19}$$

Soll der Fehler $d(x_n, x^*)$ kleiner als eine vorgegebene Schranke sein, so kann mit Hilfe von (19), wenn nach Vorgabe von x_0 das Element $x_1 = A(x_0)$ berechnet werden ist, die Anzahl n der erforderlichen Iterationsschritte abgeschätzt werden.

Da die Abschätzung (14) eine kleinere Schranke für den Fehler liefert als die Abschätzung (19), werden wir für die Fehlerabschätzung stets (14) verwenden.

Zur Erläuterung des Banachschen Fixpunktsatzes bringen wir zwei einfache Beispiele.

Beispiel 27. Durch

$$x' = A(x) = \frac{1}{2}x + 1 \tag{20}$$

erfolgt eine eindeutige Abbildung A des vollständigen metrischen Raums (Δ, d_0) in sich. Diese Abbildung ist wegen $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ auf Grund von Aufgabe 20 eine kontrahierende Abbildung, und $q_0 = \frac{1}{2}$ ist ein Kontraktionsfaktor.

Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind somit erfüllt. Die Abbildung A besitzt damit genau einen Fixpunkt x^*, den wir gemäß der Vorschrift

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 \tag{21}$$

iterativ berechnen wollen, wobei wir das Iterationsverfahren mit $x_0 = 0$ in Gang setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= A(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1 \\ x_2 &= A(x_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\ x_3 &= A(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

und vermuten, dass

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \tag{22}$$

ist. Diese Vermutung beweisen wir durch vollständige Induktion nach n. Wie wir bereits gezeigt haben, ist (22) richtig für $n = 1$.
Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (22) für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 1$ die Gültigkeit von (22) für $n = k + 1$ folgt.

Wegen (21) gilt $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + 1$. Berücksichtigen wir die Induktionsvoraussetzung

$$x_k = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

so folgt

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{2^k} + 1 = 2 - \frac{1}{2^k}$$

womit (22) bewiesen ist. V
Die im Beweis von Satz 24 gemäß (1) konstruierte Iterationsfolge lautet im vorliegenden Beispiel

$$\{n \to x_n\} = \left\{n \to \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\}$$

Von dieser Zahlenfolge haben wir in Aufgabe 9d gezeigt, dass sie den Grenzwert 2 besitzt. Dieser Grenzwert ist auf Grund des Beweises des Banachschen Fixpunktsatzes der Fixpunkt der Abbildung A, d. h.

$$x^* = 2 \tag{23}$$

ist die Lösung der Gleichung

$$x = \frac{1}{2}x + 1 \tag{24}$$

Zu dem Ergebnis (23) gelangen wir bei diesem einfachen Beispiel auf direktem Wege wesentlich schneller. Um die Fixpunkte von A zu bestimmen, brauchen wir nur die Gleichung (24) zu lösen, die offensichtlich die eindeutig bestimmte Lösung (23) besitzt.

Beispiel 28. Durch

$$\mathfrak{x}' = A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfolgt eine eindeutige Abbildung A des vollständigen metrischen Raums

$$(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_1) \text{ bzw. } (\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_2) \text{ bzw. } (\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_3) \tag{25}$$

in sich, die wegen

$$Q = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} = q_1 < 1$$
$$\max\{Z_1, Z_2\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} = q_2 < 1$$
$$\max\{S_1, S_2\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} = q_3 < 1$$

auf Grund von Satz 23 in allen drei Fällen eine kontrahierende Abbildung ist. Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind somit erfüllt. Die Abbildung A besitzt genau einen Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$, den wir iterativ gemäß der Vorschrift

$$\mathfrak{x}_n = A(\mathfrak{x}_{n-1}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{b} \tag{26}$$

berechnen wollen, wobei wir das Iterationsverfahren mit Hilfe des Vektors

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Gang setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 = A(\mathfrak{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{x}_2 = A(\mathfrak{x}_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\mathfrak{x}_3 = A(\mathfrak{x}_2) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^2} \\ 2 - \frac{1}{2^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und vermuten, dass

$$\mathfrak{x}_n = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

ist. Diese Vermutung beweisen wir durch vollständige Induktion nach n. Es ist (27) richtig für $n = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (27) für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 1$ die Gültigkeit von (27) für $n = k + 1$ folgt.
Wegen (26) gilt

$$\mathfrak{x}_{k+1} = A(\mathfrak{x}_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^{k-1}} \\ 2 - \frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2^k} \\ 1 - \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^k} \\ 2 - \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$$

womit (27) bewiesen ist.
Die im Beweis von Satz 24 gemäß (1) konstruierte Iterationsfolge lautet im vorliegenden Beispiel

$$\{n \to \mathfrak{x}_n\} = \left\{ n \to \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)^\mathsf{T} \right\}$$

Diese Folge besitzt, wie wir in Aufgabe 10 gezeigt haben, in den drei metrischen Räumen (25) jeweils den Grenzwert

$$\mathfrak{x}^* = (2, 2)^\mathsf{T} \tag{28}$$

der der Fixpunkt der Abbildung A ist.
Zu dem Ergebnis(28) gelangen wir auch bei diesem Beispiel wesentlich schneller auf direktem Wege. Um die Fixpunkte von A zu bestimmen, gehen wir wegen $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}$ von der Gleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

aus, die wir in der Form

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$$

schreiben. Diese Matrizengleichung ist äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 &= 1 \\ -\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{4}x_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

das die eindeutig bestimmte Lösung (28) besitzt.

Nicht immer wird es möglich sein, den Grenzwert der Iterationsfolge auf so schnellem Wege zu ermitteln, wie es bei diesen beiden einfachen Beispielen der Fall gewesen ist.

Wir können aber den Fixpunkt x^* einer kontrahierenden Abbildung A eines vollständigen metrischen Raums in sich mit jeder beliebig vorgegebenen Genauigkeit berechnen.
Wie wir im folgenden Beispiel und in 7. zeigen werden, ist bei komplizierteren Beispielen der rechnerische Aufwand bei der iterativen Berechnung des Fixpunktes x^* erheblich geringer als bei der direkten Berechnung von x^*.

Beispiel 29. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes untersuchen wir, ob die kubische Gleichung

$$x^3 - 99x + 1 = 0 \tag{29}$$

in dem abgeschlossenen Intervall $S[0,1]$ eine Lösung besitzt.
Dazuschreiben wir die Gleichung (29) in der zu (29) äquivalenten Form

$$100x = x^3 + x + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{x^3 + x + 1}{100}$$

Wie wir in Aufgabe 21 gezeigt haben, erfolgt durch

$$x' = A(x) = \frac{x^3 + x + 1}{100}$$

eine kontrahierende Abbildung A des vollständigen metrischen Raums $(S[0,1], d_0)$ in sich. Ein Kontraktionsfaktor ist $q_0 = 0,04$.
Die Abbildung A besitzt damit genau einen Fixpunkt x^*, der gleichzeitig die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (29) in dem abgeschlossenen Intervall $S[0,1]$ ist. Diese eindeutig bestimmte Lösung x^* wollen wir gemäß der Vorschrift

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}^3 + x_{n-1} + 1}{100}$$

iterativ berechnen, wobei wir das Iterationsverfahren mit

$$x_0 = 0 \in S[0,1]$$

in Gang setzen. Wir erhalten

$$x_1 = A(x_0) = \frac{1}{100} = 0,01$$
$$x_2 = A(x_1) = \frac{0,000001 + 0,01 + 1}{100} = 0,01010001$$

Für den Fehler bei der zweiten Näherung gilt auf Grund von (14) die Abschätzung

$$d_0(x_2, x^*) \leq \frac{q_0}{1 - q_0} \cdot d_0(x_2, x_1)$$

in unserem Fall wegen $q_0 = 0,04$, also

$$[0,01010001 - x^*| \leq \frac{0,04}{0,96} \cdot |0,01010001 - 0,01| = \frac{1}{24} \cdot 0,00010001 < 0,000005$$

Dies bedeutet

$$0,0100 < x^* < 0,0102$$

d. h. die eindeutig bestimmte Lösung von (29) im Intervall $S[0,1]$ ist bis auf drei Dezimalen genau berechnet. Es gilt

$$x^* = 0,010$$

Aufgabe 22. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes untersuche man, ob die quadratische Gleichung

$$x^2 - 99x + 1 = 0 \tag{30}$$

in dem abgeschlossenen Intervall $S[0,1]$ bzw. in dem abgeschlossenen Intervall $S[98,99]$ je eine Lösung besitzt, und bestimme gegebenenfalls die jeweilige Lösung iterativ bis auf drei Dezimalen genau.

Aufgabe 23
a) Man zeige, dass durch

$$x' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \tag{31}$$

eine kontrahierende Abbildung A des vollständigen metrischen Raums $(S[1,2], d_0)$ in sich erfolgt und $\sqrt{2}$ gemäß der Vorschrift

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) \tag{32}$$

iterativ berechnet werden kann.
b) Man berechne für $\sqrt{2}$ Näherungswerte x_1, x_2, indem man mit Hilfe von $x_0 = \frac{7}{5} \in S[1,2]$ das Iterationsverfahren gemäß (32) in Gang setzt. Für x_2 gebe man eine Fehlerabschätzung an.

7 Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme von p Gleichungen mit p Variablen

7.1 Vorbemerkungen

Unter einem linearen Gleichungssystem von p Gleichungen mit p Variablen $x_1, x_2, ..., x_p$ versteht man ein System der Form

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1p}x_p = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2p}x_p = d_2 \\ ... \\ c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + ... + c_{pp}x_p = d_p \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die reellen Zahlen c_{ik} $(i = 1, 2, ..., p;\ k = 1, 2, ..., p)$ heißen die Koeffizienten und die reellen Zahlen $d_1, d_2, ..., d_p$ die Absolutglieder des Gleichungssystems. Ein p-Tupel von reellen Zahlen

$$x_1, x_2, ..., x_p$$

heißt eine Lösung von (1), wenn dieses p-Tupel allen p Gleichungen von (1) genügt. Die Menge aller Lösungen von (1) heißt die Lösungsmannigfaltigkeit von (1).

Man sagt, ein lineares Gleichungssystem G_2 entsteht durch elementare Umformungen eines linearen Gleichungssystems G_1, wenn folgende Umformungen vorgenommen werden:

I. Vertauschung zweier Gleichungen von G_1

II. Beide Seiten einer Gleichung von G_1 werden mit derselben von null verschiedenen reellen Zahl multipliziert.

III. Beide Seiten einer Gleichung von G_1 werden mit derselben reellen Zahl multipliziert und die Ergebnisse zu den entsprechenden Seiten einer anderen Gleichung von G_1 addiert.

Wie wir in Satz 14 (Matrizen, Seite 30) gezeigt haben, besitzt ein lineares Gleichungssystem G_2, das aus einem linearen Gleichungssystem G_1 durch elementare Umformungen hervorgegangen ist, dieselben Lösungen wie G_1, oder beide Systeme sind nicht lösbar.

Prinzipiell lässt sich jedes lineare Gleichungssystem der Form (1) mit Hilfe des in Abschnitt 4. (Matrizen, Seite 46 ff) geschilderten Verfahrens auf Lösbarkeit untersuchen, und im Fall der Lösbarkeit können wir mit Hilfe dieser Methode auch alle Lösungen bestimmen.

Beispiel 30. Wir untersuchen das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} 999x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 337 \\ 9x_1 + 1002x_2 - 7x_3 - 9x_4 = 168 \\ 6x_1 + 12x_2 + 1001x_3 - 18x_4 = 145 \\ 3x_1 + 18x_2 + 7x_3 + 1008x_4 = 117 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

auf Lösbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Lösungsmannigfaltigkeit.

$$\begin{array}{rr|cccccc}
3x_1+18x_2+7x_3+1008x_4= & 117 & 2 & | & -3 & | & 333 & | \\
6x_1+12x_2+1001x_3-18x_4= & 145 & 1 & \downarrow & & | & & | \\
9x_1+1002x_2-7x_3-9x_4= & 168 & & & 1 & \downarrow & & | \\
999x_1+6x_2+14x_3+9x_4= & 337 & & & & & -1 & \downarrow \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|cccc}
3x_1+18x_2+7x_3+1008x_4= & 117 & & & & \\
24x_2-987x_3+2034x_4= & 89 & -79 & | & -499 & | \\
948x_2-28x_3-3033x_4= & -183 & 2 & \downarrow & & | \\
5988x_2+2317x_3+335655x_4= & 38624 & & & 2 & \downarrow \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|cc}
3x_1+18x_2+7x_3+1008x_4= & 117 & & \\
24x_2-987x_3+2034x_4= & 89 & & \\
77917x_3-166752x_4= & -7397 & -7397 & | \\
497147x_3+343656x_4= & 32837 & -11141 & \downarrow \\ \hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rr}
3x_1+18x_2+7x_3+1008x_4= & 117 \\
24x_2-987x_3+2034x_4= & 89 \\
77917x_3-166752x_4= & -7397 \\
-8017658856x_4= & -890850984
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Auf Grund von Satz 30 (Matrizen, Seite 75) ist das System (3) und damit auch das Ausgangssystem (2) eindeutig lösbar. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, war bereits ein erheblicher rechnerischer Aufwand zu leisten. Wir bestimmen noch die eindeutig bestimmte Lösung: Aus der letzten Gleichung von (3) folgt

$$x_4=\frac{890850984}{8017658856}=\frac{1}{9} \tag{4}$$

Setzen wir dies in die vorletzte Gleichung von (3) ein, so erhalten wir

$$77917x_3=11131$$

Hieraus ergibt sich

$$x_3=\frac{11131}{77917}=\frac{1}{7} \tag{5}$$

Mit Hilfe von (4) und (5) geht die zweite Gleichung von (3) über in $24x_2=4$. Damit ist

$$x_2=\frac{1}{6} \tag{6}$$

Schließlich folgt unter Berücksichtigung von (4), (5), (6) aus der ersten Gleichung von (3)

$$x_1=\frac{1}{3}$$

Somit ist

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{9}\right)^{\mathsf{T}}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems (2).

7.2 Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf lineare Gleichungssysteme

Aus einem linearen Gleichungssystem der Form 7.1.(1) versuchen wir mit Hilfe elementarer Umformungen ein Gleichungssystem der Form

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + b_2 \\ ... \\ x_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + b_p \end{array}\right\} \tag{1}$$

so herzuleiten, dass die aus den Koeffizienten a_{ik} des Gleichungssystems (1) gebildete Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix}$$

dem Quadrat- oder dem Zeilen- oder dem Spaltensummenkriterium genügt. In diesem Fall sagen wir auch, das Gleichungssystem (1) erfüllt das Quadrat- oder das Zeilen- oder das Spaltensummenkriterium, bzw. das Gleichungssystem (1) liegt in iterierfähiger Form vor.
Mit Hilfe von (2) und den beiden Vektoren

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} \quad , \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{pmatrix}$$

können wir (1) in der Matrizenschreibweise

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{3}$$

angegeben. Wie wir in 6.1. gezeigt haben, wird durch

$$\mathfrak{x}' = A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b} \tag{4}$$

eine eindeutige Abbildung A definiert, die den metrischen Raum

$$(\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_1) \text{ bzw. } (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_2) \text{ bzw. } (\tilde{\mathfrak{M}}_{p,1}, d_3) \tag{5}$$

in sich abbildet. Von diesen drei metrischen Räumen haben wir in Satz 20 b, c, d gezeigt, dass sie vollständig sind. Die Lösungen der Gleichung (3) sind die Fixpunkte der durch (4) definierten eindeutigen Abbildung A.
Diese Abbildung ist auf Grund von Satz 23 eine kontrahierende Abbildung, wenn die Matrix (2) das Quadrat- oder das Zeilen- oder das Spaltensummenkriterium erfüllt. Setzen wir voraus, dass die Matrix $\mathfrak{A}$ einer dieser drei Bedingungen genügt, so sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Auf Grund dieses Satzes besitzt dann A genau einen Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$, d. h., das Gleichungssystem (3) bzw. das System (1) ist eindeutig lösbar.
Damit haben wir folgendes Zwischenergebnis erhalten:

Wenn ein lineares Gleichungssystem der Form (1) das Quadrat- oder das Zeilen- oder das Spaltensummenkriterium erfüllt, so besitzt es genau eine Lösung $\mathfrak{x}^*$.

Wie der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes überdies zeigt, kann die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^\mathsf{T}$$

des Gleichungssystems (1) iterativ nach der Vorschrift

$$\mathfrak{x}_n = A(\mathfrak{x}_{n-1}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{b}$$

berechnet werden. Für den Fehler bei der n-ten Näherung gilt, wie wir in 6.4.(14) gezeigt haben, die Abschätzung

$$d_i(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}^*) \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \cdot d_i(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n-1})$$

wobei

$$\mathfrak{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{pn})^\mathsf{T}$$

bedeutet. Der Kontraktionsfaktor q_i ist davon abhängig, in welchem der drei metrischen Räume (5) wir das Gleichungssystem (1) betrachten.
Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 25. Erfüllt ein lineares Gleichungssystem der Form (1)

a) das Quadratsummenkriterium $\sqrt{Q} \leq q_1 < 1$ oder
b) das Zeilensummenkriterium $\max\{Z_1, Z_2, ..., Z_p\} \leq q_2 < 1$ oder
c) das Spaltensummenkriterium $\max\{S_1, S_2, ..., S_p\} \leq q_3 1$

so besitzt das lineare Gleichungssystem (1) genau eine Lösung $\mathfrak{x}^*$.
Diese eindeutig bestimmte Lösung kann iterativ nach, der Vorschrift

$$\mathfrak{x}_n = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{b}$$

berechnet werden, indem man mit Hilfe eines beliebigen Vektors

$$\mathfrak{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{p0})^\mathsf{T}$$

das Iterationsverfahren in Gang setzt. Für den Fehler bei der n-ten Näherung

$$\mathfrak{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{pn})^\mathsf{T}$$

gilt die Abschätzung
a)

$$\sqrt{(x_{1n} - x_1^*)^2 + (x_{2n} - x_2^*)^2) + ... + (x_{pn} - x_p^*)^2} \leq$$
$$\leq \frac{q_1}{1 - q_1} \sqrt{(x_{1n} - x_{1,n-1})^2 + (x_{2n} - x_{2,n-1})^2 + ... + (x_{pn} - x_{p,n-1})^2}$$

oder b)

$$\max\{|x_{1n}-x_1^*|,|x_{2n}-x_2^*|,...,|x_{pn}-x_p^*|\} \leq$$
$$\leq \frac{q_2}{1-q_2}\max\{|x_{1n}-x_{1,n-1}|,|x_{2n}-x_{2,n-1}|,...,|x_{pn}-x_{p,n-1}|\}$$

oder c)

$$|x_{1n}-x_1^*|+|x_{2n}-x_2^*|+...+|x_{pn}-x_p^*| \leq \frac{q_3}{1-q_3}(|x_{1n}-x_{1,n-1}|+|x_{2n}-x_{2,n-1}|+...+|x_{pn}-x_{p,n-1}|)$$

Beispiel 31. Das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} 99x_1+7x_2=34 \\ 3x_1+98x_2=15 \end{array}\right\} \tag{6}$$

versuchen wir zunächst mit Hilfe elementarer Umformungen auf die iterierfähige Form (1) zu bringen:

$$\begin{array}{rr|l} 100x_1 = & x_1-7x_2+34 & \frac{1}{100} \\ 100x_2 = & -3x_1+2x_2+15 & \frac{1}{100} \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1=0,01x_1-0,07x_2+0,34 \\ x_2=-0,03x_1+0,02x_2+0,15 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Dieses System erfüllt, wie wir in Beispiel 26 gezeigt haben, das Quadrat-, das Zeilen- und das Spaltenkriterium. Es ist nämlich

$$q_1=0,08; \qquad q_2=0,08; \qquad q_3=0,09$$

Die Voraussetzung von Satz 25 a bzw. von Satz 25 b bzw. von Satz 25 c ist also erfüllt. Das Gleichungssystem (6) ist damit eindeutig lösbar. Die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}^*$ ermitteln wir iterativ. Dazu schreiben wir (7) in der Form (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren setzen wir mit

$$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Gang. Wir erhalten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

Als ersten Näherungswert wählen wir

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -0,0071 \\ -0,0072 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3329 \\ 0,1428 \end{pmatrix}$$

Als zweiten Näherungswert wählen wir

$$\mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,143 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,07 \\ -0,03 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,143 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -0,00668 \\ -0,00713 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33332 \\ 0,14287 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_3$$

Für den Fehler bei der dritten Näherung gilt im metrischen Raum
a) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_1)$ die Abschätzung

$$\sqrt{(0,33332 - x_1^*)^2 + (0,14287 - x_2^*)^2} \leq \frac{0,08}{0,92} \cdot \sqrt{0,00032^2 + 0,00013^2}$$

Hieraus folgt

$$(0,33332 - x_1^*)^2 + (0,14287 - x_2^*)^2 < 0,09^2 \cdot 0,0000001193 < 0,09^2 \cdot 0,0000001225$$

Demnach gilt

$$\left.\begin{array}{l} (0,33332 - x_1^*)^2 < 0,09^2 \cdot 0,00035^2 \\ (0,14287 - x_2^*)^2 < 0,09^2 \cdot 0,00035^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} |0,33332 - x_1^*| < 0,09 \cdot 0,00035 < 0,000032 \\ |0,14287 - x_2^*| < 0,09 \cdot 0,00035 < 0,000032 \end{array}\right\}$$

Dies bedeutet

$$\left.\begin{array}{l} 0,3332 < x_1^* < 0,33340 \\ 0,1428 < x_2^* < 0,14291 \end{array}\right\}$$

d. h. die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}^*$ von (6) ist bis auf drei Dezimalen genau berechnet. Es ist also

$$\mathfrak{x}^* = \begin{pmatrix} 0,333... \\ 0,142... \end{pmatrix}$$

b) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_2)$ die Abschätzung

$$\max\{|0,33332 - x_1^*|, |0,14287 - x_2^*|\} \leq \frac{0,08}{0,92} \cdot \max\{0,00032; 0,00013\}$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} |0,33332 - x_1^*| < 0,09 \cdot 0,00032 < 0,00003 \\ |0,14287 - x_2^*| < 0,09 \cdot 0,00032 < 0,00003 \end{array}\right\}$$

Dies bedeutet

$$\left.\begin{array}{r}0,3332 < x_1^* < 0,3334\\ 0,1428 < x_2^* < 0,1429\end{array}\right\}$$

d. h., es gilt

$$\mathfrak{x}^* = \begin{pmatrix} 0,333... \\ 0,142... \end{pmatrix}$$

c) $(\tilde{\mathfrak{M}}_{2,1}, d_3)$ die Abschätzung

$$|0,33332 - x_1^*| - |0,14287 - x_2^*|\} \leq \frac{0,09}{0,91} \cdot (0,00032 + 0,00013) < \frac{0,09}{0,9} \cdot 0,00045 = 0,000045$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{array}{r}|0,33332 - x_1^*| < 0,000045\\ |0,14287 - x_2^*| < 0,000045\end{array}\right\}$$

Dies bedeutet

$$\left.\begin{array}{r}0,33320 < x_1^* < 0,33340\\ 0,14282 < x_2^* < 0,14292\end{array}\right\}$$

d. h., es gilt

$$\mathfrak{x}^* = \begin{pmatrix} 0,333... \\ 0,142... \end{pmatrix}$$

Beispiel 32. Mit Hilfe von Satz 25b untersuchen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r}999x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 337\\ 9x_1 + 1002x_2 - 7x_3 - 9x_4 = 168\\ 6x_1 + 12x_2 + 1001x_3 - 18x_4 = 145\\ 3x_1 + 18x_2 + 7x_3 + 1008x_4 = 117\end{array}\right\} \tag{8}$$

von Beispiel 30 auf eindeutige Lösbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Lösung iterativ bis auf zwei Dezimalen genau.
Zunächst bringen wir das System (8) mit Hilfe elementarer Umformungen auf die iterierfähige Form (1):

$$\begin{array}{rl|l}1000x_1 &= x_1 - 6x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 337 & \frac{1}{1000}\\ 1000x_2 &= -9x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 168 & \frac{1}{1000}\\ 1000x_3 &= -6x_1 - 12x_2 - x_3 + 18x_4 + 145 & \frac{1}{1000}\\ 1000x_4 &= -3x_1 - 18x_2 - 7x_3 - 8x_4 + 117 & \frac{1}{1000}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}x_1 = 0,001x_1 - 0,006x_2 - 0,014x_3 - 0,009x_4 + 0,337\\ x_2 = -0,009x_1 - 0,002x_2 + 0,007x_3 + 0,009x_4 + 0,168\\ x_3 = -0,006x_1 - 0,012x_2 - 0,001x_3 + 0,018x_4 + 0,145\\ x_4 = -0,003x_1 - 0,018x_2 - 0,007x_3 - 0,008x_4 + 0,117\end{array}\right\} \tag{9}$$

Dieses System erfüllt das Zeilensummenkriterium, denn es ist

$$\max\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = \max\{0,03; 0,027; 0,037; 0,036\} = 0,037 = q_2 < 1$$

Die Voraussetzung von Satz 25b ist also erfüllt. Das Gleichungssystem (8) ist eindeutig lösbar. Der Rechenaufwand, der uns zu diesem Ergebnis führte, ist offensichtlich geringer als beim Beispiel 30. Die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}^*$ ermitteln wir iterativ. Dazu schreiben wir (9) in der Form (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001 & -0,006 & -0,014 & -0,009 \\ -0,009 & -0,002 & 0,007 & 0,009 \\ -0,006 & -0,012 & -0,001 & 0,018 \\ -0,003 & -0,018 & -0,007 & -0,008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,168 \\ 0,145 \\ 0,117 \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren setzen wir mit

$$\mathfrak{x}_0 = (0,0,0,0)^\mathsf{T}$$

in Gang. Wir erhalten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,168 \\ 0,145 \\ 0,117 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_1 \tag{10}$$

Wir wollen untersuchen, wieviel Iterationsschritte erforderlich sind, damit für den Fehler die Abschätzung

$$d_2(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}^*) < 0,005$$

gilt. Das ist dann gesichert, wenn gemäß 6.4,(19) gilt

$$\frac{q_2^n}{1-q_2} \cdot d_2(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}^*) < 0,005 \tag{11}$$

Da

$$d2(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_0) = \max\{0,337; 0,168; 0,145; 0,117\} = 0,337$$

ist, geht (11) über in

$$\frac{0,037^n}{0,963} \cdot 0,337 < 0,005 \tag{12}$$

Aus (12) folgt

$$0,037^n < \frac{0,005 \cdot 0,963}{0,337}$$

und hieraus

$$0,037^n < \frac{0,005 \cdot 1,011}{0,337} = 0,005 \cdot 3 = 0,015$$

Die Ungleichung $0,037^n < 0,015$ ist für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 2$ erfüllt. Dieses Ergebnis besagt, dass der Näherungswert $\mathfrak{x}_2$ die in der Aufgabenstellung geforderte Genauigkeit (10) besitzt, wenn die weitere Rechnung mit dem unter (10) berechneten Näherungswert $\mathfrak{x}_1$ fortgesetzt wird.

Um jedoch die folgende Rechnung etwas zu vereinfachen, wählen wir als ersten Näherungswert den gegenüber (10) abgeänderten Vektor

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,17 \\ 0,15 \\ 0,12 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Wir berechnen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,001 & -0,006 & -0,014 & -0,009 \\ -0,009 & -0,002 & 0,007 & 0,009 \\ -0,006 & -0,012 & -0,001 & 0,018 \\ -0,003 & -0,018 & -0,007 & -0,008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,17 \\ 0,15 \\ 0,12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,168 \\ 0,145 \\ 0,117 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -0,00386 \\ -0,00127 \\ -0,00207 \\ -0,00609 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,168 \\ 0,145 \\ 0,117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33314 \\ 0,16673 \\ 0,14293 \\ 0,11091 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_2$$

Für den Fehler bei der zweiten Näherung gilt die Abschätzung

$$\max\{0,33314 - x_1^*|, |0,16673 - x_2^*|, |0,14293 - x_3^*|, |0,11091 - x_4^*|\} \leq$$
$$\leq \frac{0,037}{0,963} \cdot \max\{0,00686; 0,00327; 0,00707; 0,00909\} < \frac{37}{963} \cdot 0,00963 = 0,00037$$

Dies bedeutet

$$0,332 < x_1^* < 0,334, \quad 0,166 < x_2^* < 0,168, \quad 0,142 < x_3^* < 0,144, \quad 0,110 < x_4^* < 0,112$$

d.h., es ist

$$\mathfrak{x}^* = \begin{pmatrix} 0,33... \\ 0,16... \\ 0,14... \\ 0,11... \end{pmatrix}$$

Wie wir an dem Gleichungssystem (6) und dem System (8) erkennen, sind in der jeweiligen Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 99 & 7 \\ 3 & 98 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 999 & 6 & 14 & 9 \\ 9 & 1002 & -7 & -9 \\ 6 & 12 & 1001 & -18 \\ 3 & 18 & 7 & 1008 \end{pmatrix}$$

die Elemente der Hauptdiagonale im Vergleich zu den übrigen Elementen dem Betrag nach groß. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, führt das Iterationsverfahren sehr schnell zum Ziel.

Aufgabe 24. Mit Hilfe von Satz 25 untersuche man das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 9999x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3335 \\ 4x_1 + 10001x_2 + 3x_3 &= 3336 \\ 7x_1 + 2x_2 + 10002x_3 &= 3337 \end{aligned}\right\}$$

auf eindeutige Lösbarkeit und bestimme gegebenenfalls die Lösung iterativ bis auf fünf Dezimalen genau.

7.3 Eine Anwendungsaufgabe

In diesem Abschnitt setzen wir einige Schulkenntnisse aus der Vektorrechnung voraus. Liegen vier Punkte A, B, C, D unseres Anschauungsraumes nicht in einer Ebene, so spannen sie ein Tetraeder $ABCD$ auf (Fig. 23).

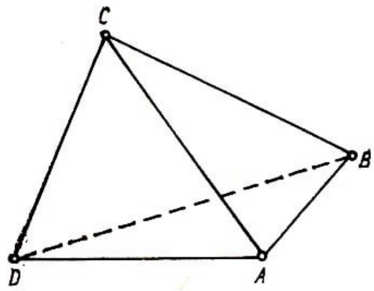


Fig. 23

Wir beweisen zunächst den

Satz 26. Sind im Anschauungsraum die Punkte A, B, C, D Eckpunkte eines Tetraeders $ABCD$ und R ein beliebiger Punkt des Anschauungsraumes, so gibt es stets reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 so, dass gilt

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + x_3\mathfrak{c} + x_4\mathfrak{d} &= \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{r}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B, C, D, R bzgl. des Ursprungs O eines räumlichen kartesischen xyz-Koordinatensystems bedeuten (Fig. 24).
Insbesondere liegt R im Innern des Tetraeders $ABCD$, wenn die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 die (1) erfüllen, nichtnegative reelle Zahlen sind.

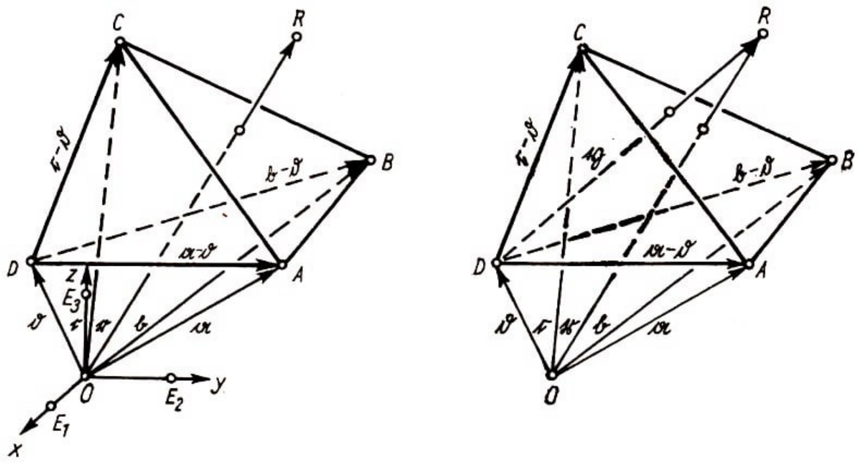


Fig. 24,25

Beweis. Da nach Voraussetzung die Punkte A, B, C, D ein Tetraeder aufspannen, liegen die Vektoren $\mathfrak{a} - \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} - \mathfrak{d}$ nicht in einer Ebene (Fig. 24). Bezeichnen wir den Vektor $\overrightarrow{DR}$ mit $\mathfrak{y}$, so gilt, wie aus Fig. 25 zu entnehmen ist,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{d} + \mathfrak{y} \tag{2}$$

Wir zeigen, dass sich der Vektor $\mathfrak{y}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}-\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}-\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}-\mathfrak{d}$ darstellen lässt. Zunächst entlasten wir die Fig. 25 von einigen Hilfslinien, indem wir zur Fig. 26 übergehen.

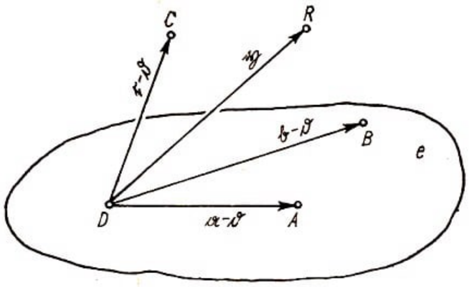


Fig. 26

In der Ebene e liegen die Vektoren $\mathfrak{a}-\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}-\mathfrak{d}$. Durch R ziehen wir eine Parallele zur Geraden DC. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Ebene e sei R' (Fig. 27). Der Vektor $\overrightarrow{R'R}$ ist parallel dem Vektor $\overrightarrow{DC}=\mathfrak{c}-\mathfrak{d}$, d.h., der Vektor $\overrightarrow{R'R}$ ist eine Linearkombination des Vektors $\overrightarrow{DC}$.

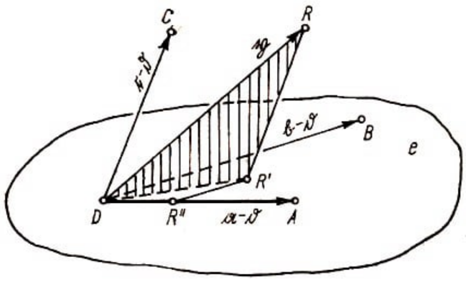


Fig. 27

Dann gibt es eine reelle Zahl, die wir mit x_3 bezeichnen, derart, dass gilt

$$\overrightarrow{R'R}=x_3(\mathfrak{c}-\mathfrak{d}) \tag{3}$$

Anschließend ziehen wir durch R' eine Parallele zur Geraden DB. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Geraden DA sei R'' (Fig. 27). Da der Vektor $\overrightarrow{R''R'}$ parallel dem Vektor

$$\overrightarrow{DB}=\mathfrak{b}-\mathfrak{d}$$

und der Vektor $\overrightarrow{DR''}$ parallel dem Vektor

$$\overrightarrow{DA}=\mathfrak{a}-\mathfrak{d}$$

ist, gibt es reelle Zahlen, die wir mit x_2 bzw. mit x_1 bezeichnen, derart, dass gilt

$$\overrightarrow{R''R'}=x_2(\mathfrak{b}-\mathfrak{d}) \quad , \quad \overrightarrow{DR''}=x_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{d}) \tag{4}$$

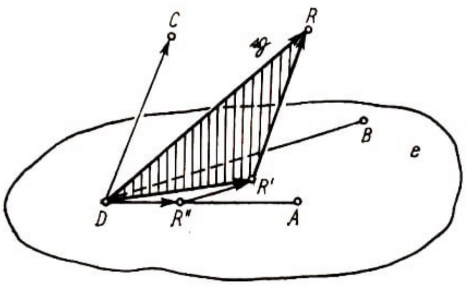


Fig. 28

Aus der Fig. 28 entnehmen wir

$$\mathfrak{y} = \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DR'} + \overrightarrow{R'R}$$

Wegen

$$\overrightarrow{DR'} = \overrightarrow{DR''} + \overrightarrow{R''R'} \qquad \text{gilt} \qquad \mathfrak{y} = \overrightarrow{DR''} + \overrightarrow{R''R'} + \overrightarrow{R'R}$$

Berücksichtigen wir (3), (4), so erhalten wir

$$\mathfrak{y} = x_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{d}) + x_2(\mathfrak{b} - \mathfrak{d}) + x_3(\mathfrak{c} - \mathfrak{d}) \tag{5}$$

Mit (5) geht (2) über in

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{d} + x_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{d}) + x_2(\mathfrak{b} - \mathfrak{d}) + x_3(\mathfrak{c} - \mathfrak{d}) \tag{6}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{r} = x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + x_3\mathfrak{c} + (1 - x_1 - x_2 - x_3)\mathfrak{d} \tag{7}$$

Setzen wir

$$1 - x_1 - x_2 - x_3 = x_4 \tag{8}$$

so erhalten wir aus (8) die erste Gleichung von (1). Mit Hilfe von (8) geht (7) in die zweite Gleichung von (1) über. Damit haben wir gezeigt, dass es reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die dem Gleichungssystem (1) genügen.

Sind die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, die dem System (1) genügen, nichtnegativ, so folgt aus der ersten Gleichung von (1) unmittelbar

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \quad 0 \leq x_4 \leq 1 \tag{9}$$

Lösen wir die erste Gleichung von (1) nach x_4 auf, so erhalten wir

$$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) geht die zweite Gleichung von (1) über in (6). Auf Grund von (9) ergibt sich dann aus (6), dass der Punkt R im Innern des von den drei Winkelräumen der Winkel

$$\sphericalangle ADB, \quad \sphericalangle ADC, \quad \sphericalangle BDC \tag{11}$$

begrenzten räumlichen Gebildes liegt. (Fig. 25). Lösen wir dagegen die erste Gleichung von (1) nach x_3 auf , so folgt

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 - x_4 \tag{12}$$

Mit Hilfe von (12) geht die zweite Gleichung von (1) über in

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + (1 - x_1 - x_2 - x_4)\mathfrak{c} + x_4\mathfrak{d} = \mathfrak{c} + x_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) + x_2(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + x_3(\mathfrak{d} - \mathfrak{c}) \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung von (9) besagt (13), dass der Punkt R im Innern des von den drei Winkelräumen der Winkel

$$\sphericalangle DCA, \quad \sphericalangle DCB, \quad \sphericalangle ACB \tag{14}$$

begrenzten räumlichen Gebildes liegt. Aus (11) und (14) folgt, dass R im Innern des Tetraeders $ABCD$ liegt.

Beispiel 33. Wir untersuchen, ob der Punkt $R(335, 166, 166)$ im Innern des Tetraeders $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(5, -7, 4)$, $B(997, 4, -7)$, $C(8, 1005, 6)$, $D(-2, -3, 996)$ liegt.
Die Ortsvektoren der Punkte A, B, C, D, R sind

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a} = (5, -7, 4)^\mathsf{T} \\ \mathfrak{b} = (997, 4, -7)^\mathsf{T} \\ \mathfrak{c} = (8, 1005, 6)^\mathsf{T} \\ \mathfrak{d} = (-2, -3, 996)^\mathsf{T} \\ \mathfrak{r} = (335, 166, 166)^\mathsf{T} \end{array}\right\} \tag{15}$$

Setzen wir (15) in (1) ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 997x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 335 \\ -7x_1 + 4x_2 + 1005x_3 - 3x_4 = 166 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 996x_4 = 166 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Dieses System versuchen wir mit Hilfe elementarer Umformungen auf die iterierfähige Form 7.2.(1.) zu bringen. Dazu multiplizieren wir zunächst beide Seiten der ersten Gleichung von (16) mit 1002. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rl|rlrlrl} 1002x_1 + 1002x_2 + 1002x_3 + 1002x_4 & = 1002 & 1 & \uparrow & 1 & \uparrow & 1 & \uparrow \\ 5x_1 + 997x_2 + 8x_3 - 2x_4 & = 335 & -1 & | & & | & & | \\ -7x_1 + 4x_2 + 1005x_3 - 3x_4 & = 166 & & & -1 & | & & | \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 996x_4 & = 166 & & & & & -1 & | \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 1000x_1 + 8x_2 - 17x_3 + 11x_4 & = 335 \\ 5x_1 + 997x_2 + 8x_3 - 2x_4 & = 335 \\ -7x_1 + 4x_2 + 1005x_3 - 3x_4 & = 166 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 996x_4 & = 166 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1000x_1 & = -8x_2 + 17x_3 - 11x_4 + 335 \\ 1000x_2 & = -5x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 335 \\ 1000x_3 & = 7x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 166 \\ 1000x_4 & = -4x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 166 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = -0,008x_2 + 0,017x_3 - 0,011x_4 + 0,335 \\ x_2 & = -0,005x_1 + 0,003x_2 - 0,008x_3 + 0,002x_4 + 0,335 \\ x_3 & = 0,007x_1 - 0,004x_2 - 0,005x_3 + 0,003x_4 + 0,166 \\ x_4 & = -0,004x_1 + 0,007x_2 - 0,006x_3 + 0,004x_4 + 0,166 \end{array}\right\} \tag{17}$$

Es ist

$$\max\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = \max\{0,036; 0,018; 0,019; 0,021\} = 0,036 = q_2 < 1$$

Das System (17) erfüllt also das Zeilensummenkriterium. Die Voraussetzung von Satz 25b ist demnach erfüllt. Das Gleichungssystem (16) ist eindeutig lösbar. Die eindeutig bestimmte Lösung ermitteln wir iterativ. Dazu schreiben wir (17) in der Form 7.2.(3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,008 & 0,017 & -0,011 \\ -0,005 & 0,003 & -0,008 & 0,002 \\ 0,007 & -0,004 & -0,005 & 0,003 \\ -0,005 & 0,007 & -0,006 & 0,004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,335 \\ 0,166 \\ 0,166 \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren setzen wir mit

$$\mathfrak{x}_0 = (0, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$$

in Gang. Wir erhalten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,335 \\ 0,166 \\ 0,166 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_1$$

Für den Fehler bei der ersten Näherung gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\max\{|0,335 - x_1^*|, |0,335 - x_2^*|, |0,166 - x_3^*|, |0,166 - x_4^*|\} \leq \\ &\leq \frac{0,036}{0,964} \cdot \max\{0,335, 0,335, 0,166, 0,166\} = \frac{18}{482} \cdot 0,335 < \frac{18}{335} \cdot 0,335 = 0,018 \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$x_1^* > 0, \quad x_2^* > 0, \quad x_3^* > 0, \quad x_4^* > 0$$

Auf Grund von Satz 26 liegt demnach der Punkt S im Innern des Tetraeders $ABCD$.

8 Lösungen der Aufgaben

1. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:
Fall 1. Es sei $x > 1$
Dann ist $x - 1 > 0$, und die Ausgangsungleichung ist äquivalent mit der Ungleichung

$$x \leq 2(x-1) \qquad \text{bzw.} \qquad -x \leq -2 \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq 2$$

Ferner ist $x > 1$ und ≥ 2 äquivalent mit $x \geq 2$.

Fall 2. Es sei $x < 1$.
Dann ist $x - 1 < 0$, und die Ausgangsungleichung ist äquivalent mit der Ungleichung

$$x \geq 2(x-1) \qquad \text{bzw.} \qquad -x \geq -2 \qquad \text{bzw.} \qquad x \leq 2$$

Ferner ist $x < 1$ und $x \geq 2$ äquivalent mit $x < 1$.
Damit haben wir folgendes Ergebnis erhalten: Alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $x \geq 2$ oder der Bedingung $x < 1$ genügen, sind Lösungen der Ungleichung.

2. Wegen $a \geq 0$, $b \geq 0$ ist offensichtlich

$$a + b \leq a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

Das lässt sich auch in der Form

$$a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

schreiben. Berücksichtigen wir die Regel 4, so folgt hieraus die Behauptung.

3. Beweis durch vollständige Induktion nach p.
Offensichtlich ist 1.1.(17) richtig für $p = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von 1.1.(17) für eine beliebige natürliche Zahl $p = k \geq 1$ die Gültigkeit von 1.1.(17) für $p = k + 1$ folgt. Auf Grund von Aufgabe 2 gilt

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1}} \leq \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_k} + \sqrt{a_{k+1}}$$

Berücksichtigen wir die Induktionsvoraussetzung

$$\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_k} \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_k}$$

so folgt schließlich

$$\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}} \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_{k+1}}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Beweis durch vollständige Induktion nach p.
Offensichtlich ist 1.2.(11) richtig für $p = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von 11.2.(11) für eine beliebige natürliche Zahl $p = k \geq 1$. die Gültigkeit von 1.2.(11) für $p = k + 1$ folgt. Auf Grund von 1.2.(5) gilt

$$|(a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1}| \leq |a_1 + a_2 + ... + a_k| + |a_{k+1}|$$

Berücksichtigen wir die Induktionsvoraussetzung

$$|a_1 + a_2 + ... + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_k|$$

so folgt schließlich

$$|a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_{k+1}|$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

5. Es sei

$$\left.\begin{array}{l} \max\{a_1, a_2, ..., a_p\} = a_k \\ \max\{b_1, b_2, ..., b_p\} = b_l \end{array}\right\} \tag{A}$$

wobei $k, l \in \{1, 2, ..., p\}$ ist. Wegen (A) gilt

$$a_i \leq a_k, \qquad b_i \leq b_l \tag{B}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Auf Grund von Regel 1 ergibt sich aus (B) zunächst

$$a_i + b_i \leq a_k + b_l \tag{C}$$

für alle $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Wegen (C) ist

$$\max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_p + b_p\} \leq a_k + b_l$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (A) die Behauptung.

6. a) Die ersten zehn Glieder der Folge sind schon angegeben und in Fig. 18 veranschaulicht.

b) Die jeweils ersten fünf Glieder von (8) bzw. von (9) sind

$$a_{n_1} = A_1(2, -5), \quad a_{n_2} = A_3\left(0, -\frac{7}{3}\right), \quad a_{n_3} = A_5\left(-\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right),$$
$$a_{n_4} = A_7\left(-\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right), \quad a_{n_5} = A_9\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{9}\right)$$

bzw.

$$a_{n_1} = A_2\left(\frac{5}{2}, -1\right), \quad a_{n_2} = A_4\left(\frac{7}{4}, 0\right), \quad a_{n_3} = A_6\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right),$$
$$a_{n_4} = A_8\left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}\right), \quad a_{n_5} = A_{10}\left(\frac{13}{10}, \frac{3}{5}\right)$$

7. a) Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, 0) = \left|\frac{c}{n}\right| = \frac{|c|}{n} < \frac{2|c|}{n}$$

folgt

$$n < \frac{2|c|}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

b) Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, 0) = \left|\frac{c}{2^n}\right| = \frac{|c|}{2^n} < \frac{|c|}{n}$$

folgt

$$n < \frac{|c|}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

8. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, c) = |c - c| = 0 < \frac{1}{n}$$

folgt

$$n < \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

9. a) Beweis der Vermutung $a = 1$. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, a) = \left|\frac{n-3}{n} - 1\right| = \frac{3}{n} < \frac{4}{n}$$

folgt $n \leq \frac{4}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3}{n} = 1$.

b) Beweis der Vermutung $a = 1$. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, a) = \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n} < \frac{3}{n}$$

folgt $n \leq \frac{3}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

c) Beweis der Vermutung $a = \frac{1}{2}$. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, a) = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{n}$$

folgt $n \leq \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

d) Beweis der Vermutung $a = 2$. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, a) = \left|2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2\right| = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} < \frac{2}{n}$$

folgt $n \leq \frac{2}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$.

d) Beweis der Vermutung $a = \frac{1}{2}$. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_n, a) = \left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} =< \frac{1}{n}$$

folgt $n \leq \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$.

10. Aus

$$\varepsilon \leq d_i(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n} < \frac{4}{n}, & \text{für } i = 1 \\ \max\left\{\left|-\frac{1}{2^{n-1}}\right|, \left|-\frac{1}{2^{n-1}}\right|\right\} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^{n-1}} < \frac{4}{n}, & \text{für } i = 2 \\ \left|-\frac{1}{2^{n-1}}\right| + \left|-\frac{1}{2^{n-1}}\right| = \frac{2}{2^{n-1}} < \frac{4}{n}, & \text{für } i = 3 \end{cases}$$

folgt $n \leq \frac{4}{\varepsilon}) = N(\varepsilon)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

11. Beweis der Vermutung $\mathfrak{a} = (1, 1, -1, -1)^\mathsf{T}$. Aus

$$\varepsilon \leq d_i(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}) = \begin{cases} \max\left\{|0|, \left|\frac{1}{n}\right|, \left|\frac{1}{n}\right|, |0|\right\} = \frac{1}{n} < \frac{3}{n}, & \text{für } i = 2 \\ |0| + \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| + |0| = \frac{2}{n} < \frac{3}{n}, & \text{für } i = 3 \end{cases}$$

folgt $n < \frac{3}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

12. Auf Grund der Voraussetzung gibt es zu jeder positiven reellen Zahl ε reelle Zahlen $N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n \geq N_a(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a_n - a| < \varepsilon$ (A)
Wenn $n \geq N_b(\varepsilon)$ ist, so folgt $|b_n - b| < \varepsilon$ (A)

Angenommen, es gelte $a > b$. (B)
Wegen der Voraussetzung $a_n \leq b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ und der Annahme (B) gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a - b| &\leq |(a - b) + (b_n - a_n)| = |(a - a_n) + (b_n - b)| \leq |a - a_n| + |b_n - b| \\ &= |a_n - a| + |b_n - b| \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

Setzen wir

$$N(\varepsilon) = \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon), n_0\}$$

so gilt auf Grund von (C) und (A):

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|a - b| < 2\varepsilon$

Da ε eine beliebige positive reelle Zahl und $|a - b|$ eine feste nichtnegative reelle Zahl ist, so ist $|a - b| < 2\varepsilon$ nur richtig, falls $|a - b| = 0$, also $a = b$ ist.
Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme (B). Es gilt also $a \leq b$, womit die Behauptung bewiesen ist.

13. Setzen wir

$$a_n = \frac{n-1}{2n} \qquad , \qquad b_n = \frac{n+1}{2n}$$

so gilt für alle natürlichen Zahlen n:
a)

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-1}{2n} - \frac{n}{2(n+1)} = -\frac{1}{2n(n+1)} < 0, \qquad a_n < a_{n+1}$$

b)
$$b_n - b_{n+1} = \frac{n+1}{2n} - \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} > 0, \qquad b_n > b_{n+1}$$

c)
$$a_n - b_n = \frac{n-1}{2n} - \frac{n+1}{2n} = -\frac{1}{n} < 0, \qquad a_n < b_n$$

d) $\{n \to (b_n - a_n)\} = \left\{n \to \frac{1}{n}\right\}$ ist eine Nullfolge. Damit ist bewiesen, dass eine Intervallschachtelung vorliegt. Durch diese Intervallschachtelung wird die reelle Zahl

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

(vgl. Aufgabe 9e) erfasst.

14. Wir beweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ in $U_\varepsilon(1)$ bzw. in $U_\varepsilon(-1)$ unendlich viele Folgenglieder der Zahlenfolge liegen. Es ist

$$d_0(a_{2k}, 1) = |a_{2k} - 1| = \left|(-1)^{2k} + \frac{1}{2k} - 1\right| = \frac{1}{2k}$$

bzw.
$$d_0(a_{2k-1}, -1) = |a_{2k-1} + 1| = \left|(-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} + 1\right| = \frac{1}{2k-1}$$

Für alle natürlichen. Zahlen k mit

$$k > \frac{1}{2\varepsilon} \qquad \text{bzw.} \qquad k > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

gilt
$$d_0(a_{2k}, 1) < \varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad d_0(a_{2k-1}, -1) < \varepsilon$$

d.h., in jeder ε-Umgehung von 1 bzw. von -1 liegen unendlich viele Glieder der Zahlenfolge.

15. Aus

$$\varepsilon \leq d_2(A_{n+k}, A_n) = \max\left\{\left|\frac{n+k+1}{n+k} - \frac{n+1}{n}\right|, \left|\frac{n+k-1}{n+k} - \frac{n-1}{n}\right|\right\}$$
$$= \max\left\{\left|-\frac{k}{n(n+k)}\right|, \left|\frac{k}{n(n+k)}\right|\right\} = \frac{k}{n(n+k)} < \frac{k}{nk} = \frac{1}{n}$$

folgt $n < \dfrac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$.

16. Aus

$$\varepsilon \leq d_1(\mathfrak{a}_{n+k}, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1+n+k}{n+k} - \frac{1+n}{n}\right)^2 + \left(\frac{1-n-k}{n+k} - \frac{1-n}{n}\right)^2 + (-1+1)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}k}{n(n-k)} < \frac{2k}{nk} = \frac{2}{n}$$

folgt $n < \frac{2}{\varepsilon} = N(\varepsilon =.$

17. Aus

$$\varepsilon \leq d_0(a_{+k}, a_n) = \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+k)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+k)!}$$
$$\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$
$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$$

folgt $n < \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$.

18. Es ist

$$\mathfrak{x}'_1 = (6, 7, 10, 12)^\mathsf{T} \qquad , \qquad \mathfrak{x}'_2 = (4, 1, 5, 14)^\mathsf{T}$$

19. Wegen der Forderung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ geht 6.1.(6) über in

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

Diese Gleichung lässt sich wegen $\mathfrak{x} = \mathfrak{E}\mathfrak{x}$ (Matrizen, 3.1.(9), Seite 24) in der Form

$$\mathfrak{E}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

schreiben. Hieraus folgt

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizengleichung ist äquivalent dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 4 \end{array}\right\}$$

Auf dieses System wenden wir das in 4. (Matrizen) erläuterte Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme an. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rl|cccccc} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 1 & 1 & | & 1 & | & 1 & | \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & = 2 & -1 & \downarrow & & | & & | \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 & = 3 & & & -1 & \downarrow & & | \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 & = 4 & & & & & -1 & \downarrow \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ 2x_3 &= -2 \\ 3x_4 &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgt $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$. Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar. Der Spaltenvektor

$$\mathfrak{x}^* = (1, 0, -1, -1)^\intercal$$

ist damit der Fixpunkt der Abbildung A.

20. Es seien x, y beliebige Elemente von (Δ, d_0) und x', y' deren Bilder. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_0(A(x), A(y)) &= d_0(x', y') = |x' - y'| = |ax + b - ay - b| = |a(x-y)| \\ &= |a| \cdot |x - y| = |a| \cdot d_0(x, y) \end{aligned}$$

Gilt $|a| < 1$, so ist A, unabhängig von der Wahl von b, eine kontrahierende Abbildung von (Δ, d_0) in sich. Ein Kontraktionsfaktor ist dann $q_0 = |a|$.

21. Für alle $x \in S[0, 1]$ gilt offensichtlich

$$0,01 \leq x' \leq 0,03$$

d. h., durch 6.3.(22) erfolgt eine eindeutige Abbildung des vollständigen metrischen Raums $(S[0, 1], d_0)$ in sich.
Es seien x, y beliebige Elemente von $(S[0, 1], d_0)$ und x', y' deren Bilder. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_0(A(x), A(y)) &= d_0(x', y') = |x' - y'| = \left|\frac{x^3 + x + 1 - y^3 - y - 1}{100}\right| \\ &= \frac{1}{100}|(x^3 - y^3) + (x - y)| = \frac{1}{100}|(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1)| \\ &= \frac{|x - y|}{100} \cdot |x^2 + xy + y^2 + 1| = \frac{d_0(x, y)}{100} \cdot |x^2 + xy + y^2 + 1| \\ &\leq \frac{d_0(x, y)}{100} \cdot (|x^2| + |xy| + |y^2| + 1) \\ &\leq \frac{d_0(x - y)}{100} \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 0,04 \cdot d_0(x - y) \end{aligned}$$

Es liegt eine kontrahierende Abbildung vor, da $q_0 = 0,04$ ist.

22. Wir schreiben die Gleichung 6.4.(30) in der zu 6.4.(30) äquivalenten Form

$$100x = x^2 + x + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{x^2 + x + 1}{100}$$

Durch

$$x' = A(x) = \frac{x^2 + x + 1}{100} \tag{A}$$

erfolgt eine eindeutige, Abbildung des vollständigen metrischen Raums $(S[0, 1], d_0)$ in sich, da für alle $x \in S[0, 1]$ gilt $0,01 \leq x' \leq 0,03$.

Wir zeigen, dass diese Abbildung eine kontrahierende Abbildung ist: Es seien x, y beliebige Elemente von $(S[0,1], d_0)$ und x', y' deren Bilder. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_0(A(x), A(y)) = d_0(x', y') = |x' - y'| &= \left|\frac{x^2 + x + 1 - y^2 - y - 1}{100}\right| \\ &= \frac{1}{100} \cdot |x^2 - y^2 + x - y| = \frac{d_0(x,y)}{100} \cdot |x + y + 1| \\ &\leq \frac{d_0(x,y)}{100} \cdot (|x| + |y| + 1) \leq \frac{d_0(x,y)}{100} \cdot (1 + 1 + 1) = 0,03 d_0(x,y) \end{aligned}$$

Ein Kontraktionsfaktor ist also $q_0 = 0,03$.
Die Abbildung A besitzt damit genau einen Fixpunkt x_A, der gleichzeitig die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung 6.4.(30) in dem abgeschlossenen Intervall $S[0,1]$ ist. Diese eindeutig bestimmte Lösung x_A berechnen wir gemäß der Vorschrift

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1}{100}$$

iterativ, wobei wir das Iterationsverfahren mit $x_0 \in S[0,1]$ in Gang setzen. Wir erhalten

$$x_1 = A(x_0) = 0,01, \qquad A(x_1) = \frac{0,0001 + 0,01 + 1}{100} = 0,010101$$

Als zweiten Näherungswert wählen wir $x_2 = 0,011$. Wir berechnen

$$x_3 = A(x_2) = \frac{0,000121 + 0,011 + 1}{100} = 0,01011121$$

Für den Fehler bei der dritten Näherung gilt die Abschätzung

$$d_0(x_3, x_A) = \frac{q_0}{1 - q_0} \cdot d_0(x_3, x_2)$$

in unserem Fall also

$$|0,01011121 - x_A| \leq \frac{0,03}{0,97} \cdot 0,00088879 < \frac{3}{97} \cdot 0,00097 = 0,00003$$

Diese bedeutet $0,0100 < x_A < 0,0102$; d. h., die eindeutig bestimmte Lösung x_A von 6.4.(30) im Intervall $S[0,1]$ ist bis auf drei Dezimalen genau berechnet, und es ist $x_A = 0,010...$ eine Lösung der quadratischen Gleichung 6.4.(30).
Durch (A) erfolgt dagegen keine eindeutige Abbildung des vollständigen metrischen Raums $(S[98,99], d_0)$ in sich, da für alle $x \in S[98,99]$ gilt

$$97,03 \leq x' \leq 99,01$$

Für $x \in S[98,99]$ ist 6.4.(30) äquivalent mit

$$x^2 = 99x - 1 \qquad \text{bzw.} \qquad x = 99 - \frac{1}{x}$$

Durch
$$x' = B(x) = 99 - \frac{1}{x}$$
erfolgt eine eindeutige Abbildung des vollständigen metrischen Raums $(S[98,99], d_0)$ in sich, da für alle $x \in S[98,99]$ gilt
$$99 - \frac{1}{98} \leq x' \leq 99 - \frac{1}{99} \qquad \text{bzw.} \qquad 98 < x' < 99$$
Wir zeigen, dass diese Abbildung eine kontrahierende Abbildung ist:
Es seien x, y beliebige Elemente von $(S[98,99], d_0)$ und x', y' deren Bilder: Dann gilt
$$\begin{aligned} d_0(B(x), B(y)) = d_0(x', y') = |x' - y'| &= \left|99 - \frac{1}{x} - 99 + \frac{1}{y}\right| = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \\ &= |x-y| \cdot \frac{1}{|xy|} = d_0(x-y) \cdot \frac{1}{|x| \cdot |y|} \\ &\leq d_0(x,y) \cdot \frac{1}{98^2} < 0,0002 \cdot d_0(x,y) \end{aligned}$$
Ein Kontraktionsfaktor ist $q_0 = 0,0002$.
Die Abbildung B besitzt damit genau einen Fixpunkt x_B, der gleichzeitig die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung 6.4.(30) in dem abgeschlossenen Intervall $S[98,99]$ ist. Diese eindeutig bestimmte Lösung x_B berechnen, wir gemäß der Vorschrift
$$x_n = B(x_{n-1}) = 99 - \frac{1}{x_{n-1}}$$
iterativ, wobei wir das Iterationsverfahren mit
$$x_0 = 98,5 \in S[98,99]$$
in Gang setzen. Wir erhalten
$$B_0 = 99 - \frac{98}{5} = 99 - 0,0101...$$
und, setzen $x_1 = 98,9898$.
Für den Fehler bei der ersten Näherung gilt die Abschätzung
$$|98,9898 - x_B| \leq \frac{0,0002}{0,9998} \cdot 0,4898 < \frac{1}{4999} \cdot 0,4999 = 0,0001$$
Dies bedeutet
$$98,9897 < x_B < 98,9899, \qquad \text{d.h., es ist} \qquad x_B = 98,989...$$
die zweite Lösung der quadratischen Gleichung 6.4.(30).

23. a) Durch 6.4.(31) erfolgt eine eindeutige Abbildung des vollständigen metrischen Raums $(S[1,2], d_0)$ in sich, da für alle $x \in S[1,2]$ gilt
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) \leq x' \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{1}\right), \qquad \text{bzw.} \qquad 1 \leq x' \leq 2$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung eine kontrahierende Abbildung ist:
Es seien x, y beliebige Elemente von $(S[1,2], d_0)$ und x', y' deren Bilder. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_0(A(x), A(y)) = d_0(x', y') = |x' - y'| &= \left| \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| x - y - 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| x - y - \frac{2(x-y)}{xy} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| (x-y)\left(1 - \frac{2}{xy}\right) \right| = \frac{d_0(x,y)}{2} \cdot \left| 1 - \frac{2}{xy} \right| \end{aligned} \tag{A}$$

Da für alle $x, y \in S[1,2]$ gilt

$$-1 = 1 - \frac{2}{1 \cdot 1} \leq 1 - \frac{2}{xy} = 1 - \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

bzw.

$$0 \leq \left| 1 - \frac{2}{xy} \right| \leq 1 \tag{B}$$

so geht (A) unter Berücksichtigung von (B) über in

$$d_0(A(x), A(y)) \leq \frac{1}{2} \cdot d_0(x,y)$$

Damit ist gezeigt, dass eine kontrahierende Abbildung vorliegt. Ein Kontraktionsfaktor ist $q_0 = \frac{1}{2}$.
Die Abbildung A besitzt somit genau einen Fixpunkt x^*, den wir gemäß der Vorschrift 6.4.(32) iterativ berechnen können.
Der eindeutig bestimmte Fixpunkt x^* der Abbildung A ist wegen $x = x'$. die Lösung der Gleichung

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right); \qquad 2x^2 = x^2 + 2; \qquad x^2 = 2$$

in $S[1,2]$. Damit ist $x^* = \sqrt{2}$.

b)

$$x_1 = A(x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{10}{7}\right) = \frac{99}{70} = 1{,}414285...$$

$$A(x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{99}{70} + \frac{140}{99}\right) = \frac{19601}{13860} = 1{,}414213...$$

Als zweiten Näherungswert wählen wir $x_2 = 1{,}414213$.
Für den Fehler bei der zweiten Näherung gilt die Abschätzung

$$d_0(x_2, \sqrt{2}) \leq \frac{q_0}{1 - q_0} \cdot d_0(x_2, x_1)$$

in unserem Fall also

$$|1{,}414213 - \sqrt{2}| \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}000072 < 0{,}00008$$

Dies bedeutet $1,4141 < \sqrt{2} < 1,4143$, d. h., es ist $\sqrt{2} = 1,414...$ auf drei Dezimalen genau berechnet.

24.

$$\left.\begin{array}{l} 10000x_1 = x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3335 \\ 10000x_2 = -4x_1 - x_2 - 3x_3 + 3336 \\ 10000x_3 = -7x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3337 \\ \hline \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0,0001x_1 - 0,0004x_2 - 0,0002x_3 + 0,3335 \\ x_2 = -0,0004x_1 - 0,0001x_2 - 0,0003x_3 + 0,3336 \\ x_3 = -0,0007x_1 - 0,0002x_2 - 0,0002x_3 + 0,3337 \end{array}\right\}$$

Dieses System erfüllt das Zeilensummenkriterium, denn es ist

$$\max\{Z_1, Z_2, Z_3\} = 0,0011 = q_2 < 1$$

Das Gleichungssystem ist auf Grund von Satz 25b eindeutig lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0001 & -0,0004 & -0,0002 \\ -0,0004 & -0,0001 & -0,0003 \\ -0,0007 & -0,0002 & -0,0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3335 \\ 0,3336 \\ 0,3337 \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren setzen wir mit

$$\mathfrak{x}_0 = (0,333; 0,333; 0,333)^\mathsf{T}$$

in Gang. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{b} &= \begin{pmatrix} 0,0001 & -0,0004 & -0,0002 \\ -0,0004 & -0,0001 & -0,0003 \\ -0,0007 & -0,0002 & -0,0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,333 \\ 0,333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3335 \\ 0,3336 \\ 0,3337 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,0001665 \\ -0,0002664 \\ -0,0003663 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3335 \\ 0,3336 \\ 0,3337 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3333335 \\ 0,3333336 \\ 0,3333337 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_1 \end{aligned}$$

Für den Fehler bei der ersten Näherung gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\max\{|0,3333335 - x_1^*|, |0,3333336 - x_2^*|, |0,3333337 - x_3^*|\} \leq \\ &\leq \frac{0,0011}{0,9989} \cdot \max\{0,0003335; 0,0003336; 00003337\} = \frac{0,0011}{0,9989} \cdot 0,0003337 < 0,0000004 \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\left.\begin{array}{l} 0,3333331 < x_1^* < 0,3333339 \\ 0,3333332 < x_2^* < 0,3333340 \\ 0,3333333 < x_3^* < 0,3333341 \end{array}\right\}$$

d. h., es ist

$$\mathfrak{x}^* = \begin{pmatrix} 0,33333... \\ 0,33333... \\ 0,33333... \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

1. BREHMER, S., und H. APELT, Analysis, Teil 2: Zahlbereiche, Räume; Teil 3: Folgen und Reihen, Punktmengen; Lehrbriefe für das Fernstudium der Lehrer, Potsdam 1969

2. Enzyklopädie der Elementarmathematik; Band III, Analysis, 2. Aufl., Berlin 1968

3. FICHTENHOLZ, G. M., Differential- und Integralrechnung I, 5. Aufl., Berlin 1970

4. LJUSTERNIK, L. A., und W. I. SOBOLEW, Elemente der Funktionalanalysis, 4. Aufl., Berlin 1968

5. TUTSCHKE, W., Grundlagen der reellen Analysis, I. Differentialrechnung, Berlin 1971

6. WULICH, B. S., Einführung in die Funktionalanalysis, Teil 1, Leipzig 1961