
Alfred Hilbert

Matrizenrechnung

1975 Verlag Volk und Wissen
MSB: Nr. 70
Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Der Begriff der „Matrix“	6
1.1 Einführende Beispiele	6
1.2 Definition des Begriffs „Matrix“	9
1.3 Inzidenzmatrizen	12
1.4 Gleichheit zweier Matrizen	14
1.5 Historische Entwicklung des Matrixbegriffs	16
1.6 Aufgaben	16
2 Der Vektorraum der Matrizen gleichen Typs	19
2.1 Addition von Matrizen	19
2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (Operatoranwendung)	23
2.3 Der Vektorraum der Matrizen gleichen Typs	25
2.4 Lineare Abbildungen	25
2.5 Spezielle quadratische Matrizen	26
2.6 Das Transponieren einer Matrix	27
2.7 Aufgaben	30
3 Multiplikation von Matrizen	31
3.1 Das Skalarprodukt zweier Vektoren	31
3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	32
3.3 Multiplikation zweier Matrizen	33
3.4 Rechengesetze für die Multiplikation von Matrizen	36
3.5 Der Ring der quadratischen Matrizen gleicher Ordnung	39
3.6 Berechnung der Produktmatrix	39
3.7 Anwendung der Matrizenmultiplikation	45
3.8 Aufgaben	48
4 Lineare Transformationen durch Matrizen	50
4.1 Die lineare Punktabbildung	50
4.2 Matrizendarstellung einfacher geometrischer Abbildungen der Ebene	53
4.3 Nacheinanderausführung linearer Transformationen	61
4.4 Aufgaben	62
5 Der verkettete Algorithmus	64
5.1 Matrizenschreibweise linearer Gleichungssysteme	64
5.2 Äquivalente Gleichungssysteme	65
5.3 Der Gaußsche Algorithmus	65
5.4 Der verkettete Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme	69
5.5 Bemerkungen zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	77
5.6 Die Bestimmung des Rangs einer Matrix mit Hilfe des verketteten Algorithmus	80
5.7 Die Determinante einer quadratischen Matrix und ihre Berechnung mit Hilfe des verketteten Algorithmus	82
5.8 Aufgaben	83

6	Inversion einer quadratischen Matrix	85
6.1	Matrizeninversion mit Hilfe des verketteten Algorithmus	85
6.2	Das Austauschverfahren zur Bestimmung der inversen Matrix	87
6.3	Die Gruppe der regulären Matrizen	91
6.4	Matrizengleichungen	92
6.5	Aufgaben	94
7	Matrizenmodelle aus außermathematischen Objektbereichen	95
7.1	Bemerkungen zum Modellbegriff	95
7.2	Ökonomische Verflechtungen	96
7.3	Elektrische Gleichstromnetze	100
7.4	Aufgaben	104
8	Lösungen	106

Vorwort

In den letzten Jahrzehnten hat die Matrizenrechnung im Zusammenhang mit der Entwicklung der modernen Rechentechnik in wachsendem Maße vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Ökonomie gefunden. Deshalb ist es erforderlich, dass sich breitere Kreise von Werktätigen mit Problemen der Matrizenrechnung beschäftigen.

Aus diesem Grunde wurde das vorliegende Buch als Monographie so abgefasst, dass sich der Leser auch im Selbststudium eine Einführung in die Matrizenrechnung erarbeiten kann. Insbesondere können sich Werktätige, die sich im Rahmen ihrer beruflichen Qualifizierung mit Matrizenrechnung beschäftigen müssen, mit seiner Hilfe in dieses Stoffgebiet einarbeiten.

Der Bedeutung der Matrizenrechnung entsprechend, wurde auch im Rahmen des fakultativen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in der erweiterten Oberschule der Lehrgang "Matrizenrechnung und ihre Anwendung in Ökonomie und Elektrotechnik" geschaffen.

Bei der inhaltlichen Gestaltung dieses Buches wurde besonderer Wert darauf gelegt, den gesamten Stoff des Plans für den fakultativen Lehrgang "Matrizenrechnung und ihre Anwendung in Ökonomie und Elektrotechnik" ausführlich zu behandeln. Nur dort, wo Abrundungen oder Ausblicke auf weiterführende Betrachtungen nützlich erschienen, wurden ergänzende Ausführungen gemacht.

Das bezieht sich besonders auf die Einführung algebraischer Strukturen und die Behandlung des Austauschverfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix.

Der Leser sei auf die determinantenfreie Darstellung der Matrizenrechnung hingewiesen, wie sie im Plan für diesen Lehrgang gefordert wird. Besonders wurde darauf geachtet, die einzelnen Stoffabschnitte und die erforderlichen Rechenverfahren überzeugend zu motivieren, den Aufbau des Matrizenkalküls in leicht verständlicher, dabei aber in wissenschaftlich einwandfreier Weise zu entwickeln und dadurch den Leser an mathematische Denk- und Arbeitsweisen zu gewöhnen. Gerade die Matrizenrechnung eignet sich vorzüglich dazu, die enge Verbindung einzelner mathematischer Disziplinen zu verdeutlichen, wie das z. B. in der algebraischen Behandlungsweise beim Aufbau des Matrizenkalküls - einschließlich der Beweisführung in der erforderlichen Strenge und der Einführung einfacher algebraischer Strukturen - , in der geometrischen Interpretation der Matrizenrechnung mittels linearer Transformationen und in der Entwicklung von Algorithmen und Programmablaufplänen für numerische Berechnungen zum Ausdruck kommt.

Beispiele verdeutlichen die Ausführungen, Arbeitsaufträge dienen der Vertiefung des Stoffes. Zur Übung werden am Ende eines jeden Kapitels Aufgaben gestellt, deren zum Teil ausführliche Lösung der Leser am Ende des Buches zur Überprüfung seiner Arbeit findet.

Anwendungsaufgaben zu den einzelnen Abschnitten des Buches werden insbesondere dem ökonomischen Objektbereich entnommen. Dadurch soll der Leser stärker mit ökonomischen Fragestellungen - bereits in der Schule - vertraut gemacht werden. Aufgaben zur Berechnung von elektrischen Gleichstromnetzen erfordern umfangreichere Kenntnisse (einschließlich der Bildung der inversen Matrix) und werden deshalb erst am Ende des Buches gestellt.

Auf Aufgaben zur Berechnung von elektrischen Wechselstromnetzen muss verzichtet werden, da die Behandlung komplexer Matrizen nicht Gegenstand des fakultativen Lehrgangs ist. Für das Verständnis der Darlegungen in diesem Buch sind Vorkenntnisse in Mathematik erforderlich, die im wesentlichen dem Stoff der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule entsprechen.

Der im Buch behandelte Stoff bietet vielfältige Möglichkeiten, mathematische Kenntnisse, Fä-

higkeiten und Fertigkeiten aus verschiedenen Stoffgebieten des obligatorischen Unterrichts zu wiederholen und zu vertiefen.

Um eine bessere Übersicht zu gewährleisten, wurden durch die Zeichen

- ▷ Definitionen und Sätze,
- Beispiele,
- Arbeitsaufträge

hervorgehoben. Außerdem wurden die Definitionen, Sätze, Beispiele und Arbeitsaufträge innerhalb jedes Kapitels durchnummeriert; dabei gibt die erste Zahl jeweils die Nummer des Kapitels und die zweite Zahl die Nummer der Definition, des Satzes, des Beispiels bzw. Arbeitsauftrags in dem entsprechenden Kapitel an.

Bei der Abfassung des Manuskripts haben mich Herr Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Helmut Heinrich und Herr Prof. Dr. paed. habil. Wolfgang Lange, Technische Universität Dresden, unterstützt. Dafür möchte ich ihnen sehr herzlich danken, Weiterhin möchte ich Herrn Diplommathematiker Dr. rer. nat. Claude-Joachim Hamann, Technische Universität Dresden, für wertvolle Hinweise Dank sagen.

Alfred Hilbert

1 Der Begriff der „Matrix“

1.1 Einführende Beispiele

Einige Beispiele aus verschiedenen Objektbereichen sollen die Zweckmäßigkeit der Einführung eines neuen mathematischen Gebildes, der Matrix, verdeutlichen.

□ BEISPIEL 1/1:

Zur Berechnung des Bruttolohns der Arbeiter einer Brigade benötigt die Lohnabteilung eines vollseigenen Betriebs bestimmte Angaben. In stark vereinfachter Darstellung müssen

- die Namen der Arbeiter (z. B. A_1, A_2, \dots, A_m) einer Brigade,
- die Art der ausgeführten Arbeiten (z.B. P_1, P_2, \dots, P_n) und
- die Angabe der zur Ausführung der Arbeiten benötigten Zeiten

erfasst werden. Wir können diese Angaben für die monatliche Gesamtabrechnung der Brigade in folgender (ebenfalls stark vereinfachter) Weise zusammenstellen (Tabelle 1):

Tabelle 1

Namen der Arbeiter	Ausgeführte Arbeiten	Anzahl der aufgewendeten Arbeitsstunden
A_1	P_1	a_{11}
	P_2	a_{12}
	\vdots	\vdots
	P_n	a_{1n}
A_2	P_1	a_{21}
	P_2	a_{22}
	\vdots	\vdots
	P_n	a_{2n}
\vdots		
A_m	P_1	a_{m1}
	P_2	a_{m2}
	\vdots	\vdots
	P_n	a_{mn}

Anmerkungen:

1. Das Auftreten der Doppelindizes (z. B. a_{11} - gelesen "a eins eins") bei der Bezeichnung der Anzahl der aufgewendeten Arbeitsstunden erklärt sich aus der Notwendigkeit zu erkennen, auf welchen Arbeiter und auf welche spezielle Arbeit sich die Zeitangabe bezieht.

2. Wurde von einem Arbeiter (z. B. A_2) eine Arbeit (z.B. P_1) nicht ausgeführt, dann ist das Element $a_{21} = 0$ zu setzen.

Die Lohnabteilung des Betriebes berechnet den Bruttolohn jedes Arbeiters, indem die aufgewendeten Arbeitszeiten mit den für die Arbeit geltenden Lohnsätzen der entsprechenden Lohngruppe des Arbeiters, die Tabellen entnommen werden können, multipliziert und alle Produkte addiert werden.

Für die Arbeit P_1 soll der Lohnsatz p_1 , für die Arbeit P_2 der Lohnsatz p_2 usw. gelten. Dann beträgt der Bruttolohn des

1. Arbeiters (A_1) $l_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \dots + a_{1n}p_n$
2. Arbeiters (A_2) $l_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{2n}p_n$

...

$$m\text{-ten Arbeiters } (A_m) \quad l_m = a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \dots + a_{mn}p_n$$

Wie man sieht, ist ein System von m linearen Gleichungen mit n Variablen p_1, p_2, \dots, p_n entstanden. Werden zur Erhöhung der Übersichtlichkeit die Lohnsätze in den folgenden Ausführungen mit x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet und die Seiten vertauscht, so erhält das Gleichungssystem die folgende Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= l_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= l_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= l_m \end{aligned}$$

Anmerkung: Obgleich es noch üblich ist, in linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen die Variablen mit x, y, z zu bezeichnen, erweist sich die hier eingeführte Bezeichnung mit Hilfe von Indizes besonders bei praktischen Problemen, bei denen oft mehr als drei Variable auftreten, als zweckmäßiger.

Die reellen Zahlen a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) sollen die Koeffizienten und die reellen Zahlen l_i ($i = 1, 2, \dots, m$) die (konstanten) rechten Seiten des Gleichungssystems genannt werden.

Bei umfangreichen Gleichungssystemen ist man bestrebt, Schreibarbeit einzusparen. Da es nur darauf ankommt, die Lage der Koeffizienten im Gleichungssystem eindeutig zu kennzeichnen, genügt es, statt der linken Seite des Gleichungssystems die folgende Tabelle zu schreiben (Tabelle 2):

Zeile	Spalte						
	1	2	3	...	k	...	n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...	\vdots
i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	...	a_{ik}	...	a_{in}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...	\vdots
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

Die Koeffizienten tragen doppelte Indizes (z.B. a_{ik}); dabei soll stets der erste Index i die Zeile, der zweite Index k die Spalte angeben.

Die in dieser Tabelle 2 enthaltene Information über das lineare Gleichungssystem kann nach dieser Vereinbarung noch einfacher dadurch dargestellt werden, dass wir nur das Koeffizientenfeld aufschreiben. Um die Zusammengehörigkeit hervorzuheben, schließen wir es durch große Klammern ein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dadurch ist ein neues mathematisches Gebilde entstanden, das man Matrix nennt. Da als Elemente der Matrix die Koeffizienten a_{ik} des Gleichungssystems auftreten, nennt man dieses Gebilde auch Koeffizientenmatrix.

□ Beispiel 1/2:

In dem in der Skizze dargestellten elektrischen Gleichstrom-Netzwerk seien die Urspannungen E_1 , E_2 und die Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4 bekannt (Bild 1).

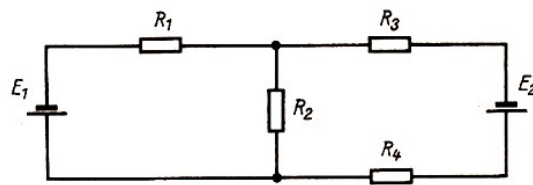


Bild 1

Zur Berechnung der Stromstärken I_1, I_2, I_3, I_4 in den einzelnen Zweigen müssen wir ein Gleichungssystem aufstellen. Bekanntlich besteht ein elektrisches Netzwerk aus Maschen¹, die sich - wie aus Bild 1 ersichtlich - aus Zweigen zusammensetzen.

Die Zweige enden in Knotenpunkten (Verzweigungspunkten) und können Widerstände und Spannungsquellen enthalten. In jedem Zweig fließt ein Strom unterschiedlicher Stärke. Über jedem Widerstand entsteht ein Spannungsabfall. Zur Berechnung der Zweigströme dienen die beiden Kirchhoffschen Sätze der Stromverzweigung:

Knotenpunktsatz: Die Summe der zum Knotenpunkt hinfließenden Ströme ist gleich der Summe der vom Knotenpunkt wegfließenden Ströme.

Maschensatz: Beim Umlauf in einer Masche ist die Summe der vorzeichenbehafteten Urspannungen (E) gleich der Summe der vorzeichenbehafteten Spannungsabfälle (U) über den Widerständen.

Wir legen zunächst die Richtungen der Urspannungen und der Ströme fest, wobei vereinbart sei, dass Stromrichtung und Richtung des Spannungsabfalls über einem Widerstand übereinstimmen sollen (Bild 2).

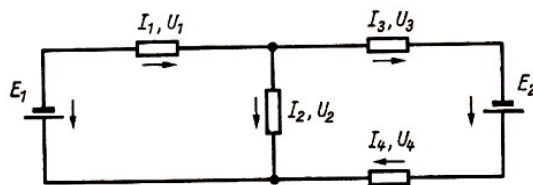


Bild 2

Dann gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ nach dem Knotenpunktsatz}$$

und

$$\left. \begin{aligned} E_1 - U_1 - U_2 &= 0 \\ E_2 - U_2 + U_3 + U_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ nach dem Maschensatz}$$

Berücksichtigt man das Ohmsche Gesetz $U = RI$, so können die Gleichungen des Maschensatzes folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0 \\ E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 &= 0 \end{aligned}$$

¹In der Elektrizitätslehre versteht man unter einer Masche einen geschlossenen Teil eines Stromkreises.

Das gesamte Gleichungssystem lautet in ausführlicher Darstellung:

$$\begin{aligned}1I_1 + (-1)I_2 + (-1)I_3 + 0I_4 &= 0 \\1I_1 + (-1)I_2 + 0I_3 + (-1)I_4 &= 0 \\R_1I_1 + R_2I_2 + 0I_3 + 0I_4 &= E_1 \\0I_1 + R_2I_2 + (-R_3)I_3 + (-R_4)I_4 &= E_2\end{aligned}$$

○ Arbeitsauftrag 1/1:

1. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe eines Ihnen bekannten Verfahrens!
2. Lösen Sie das Gleichungssystem, wenn folgende Größen gegeben sind!

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 3\Omega, \quad R_3 = 1\Omega, \quad R_4 = 2\Omega, \quad E_1 = 4V, \quad E_2 = 2V$$

Sie werden erkennen, dass selbst im Falle dieses besonders einfachen linearen Gleichungssystems von vier Gleichungen mit vier Variablen ein beachtlicher Rechenaufwand notwendig ist.

Um ein zweckmäßiges Verfahren für die Lösung von Gleichungssystemen mit mehr als drei Gleichungen und mehr als drei Variablen in den späteren Ausführungen entwickeln zu können, führen wir hier in Anlehnung an die Darstellungen im Beispiel 1/1 die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & -R_4 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung:

In der gesellschaftlichen Praxis gibt es eine Vielzahl von Sachverhalten unterschiedlicher Art, denen exakt (oder wenigstens näherungsweise) direkte Proportionalitäten zugrunde liegen. Diese linearen Beziehungen sind eine unmittelbare Verallgemeinerung der Proportionalität von Einzelgrößen auf Größensysteme. Ihre mathematische Behandlung führt auf lineare Gleichungssysteme von m Gleichungen mit n Variablen.

Von Bedeutung für die Charakterisierung eines solchen Gleichungssystems sind die Koeffizienten, die in einem rechteckigen Schema zusammengefasst werden können. Das dadurch entstehende neue mathematische Gebilde wird Koeffizientenmatrix genannt.

1.2 Definition des Begriffs „Matrix“

Die einführenden Beispiele machen deutlich, dass die Matrix ein geordnetes Schema von Elementen darstellt. Die Elemente können aus einem der bekannten Zahlenbereiche (natürliche Zahlen, gebrochene Zahlen, rationale Zahlen, ganze Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen) stammen, sie können aber auch Größen, Funktionen oder andere mathematische Gebilde (z. B. selbst: wieder Matrizen) sein.

Wir vereinbaren, dass in unseren Darlegungen - wenn nichts anderes festgelegt wird - die Elemente der Matrizen reelle Zahlen sein sollen.

Weiterhin können wir aus Beispiel 1/2 erkennen, dass in den verschiedenen Zeilen einer Koeffizientenmatrix unterschiedliche mathematische Gebilde auftreten können.

Die Matrix ist eine Kurzform zur klaren Darstellung und übersichtlichen Formulierung linearer Zusammenhänge aus Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Ökonomie. Solche linearen Zusammenhänge können auch in Form von Tabellen erfasst werden. Eine Vielzahl solcher Tabellen sind beispielsweise im Statistischen Jahrbuch der DDR enthalten (Tabelle 3).

Tabelle 3
16. Industrielle Produktion ausgewählter Erzeugnisse²
Wertangaben in konstanten Preisen

Erzeugnis	Einheit	Produktion					
		1955	1960	1965	1970	1972	1973
Metallurgische Erzeugnisse							
Roheisen	1000 t	1516,6	1994,7	2338,0	1994,0	2150,6	2201,6
Rohstahl*	1000 t	2815,9	3749,9	4313,3	5052,7	5670,2	5891,7
Walzstahl, warmgewalzt**	1000 t	1884,1	2613,3	2986,3	3406,5	3708,2	3876,0
Erzeugnisse der II. metallurgischen							
Verarbeitungsstufe	1000 t	312,1	497,5	730,7	1692,4	2053,2	2314,4

* Einschließlich Flüssigstahl für Formguss.

** Einschließlich Halbzeuge für Schmiede- und Pressteile und für Rohre.

Verstehen wir unter einem linearen Zusammenhang (einer linearen Beziehung) Ausdrücke von der Form

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

wobei die Produkte $a_{ik}x_k$ bildbar und für jedes i auch addierbar sein müssen, dann ist die Matrix die angepasste Darstellungsart für lineare Zusammenhänge.

► Definition 1/1:

Das aus m Zeilen und n Spalten bestehende Schema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt die Matrix \mathbf{A} .

In der deutschsprachigen Literatur ist es üblich, die Matrizen durch große Frakturbuchstaben zu symbolisieren. Wir schließen uns jedoch beider Bezeichnung der Matrizen der international üblichen Darstellungsweise an: Matrizen werden im Druck durch fettgedruckte große Antiquabuchstaben, in der Schreifschrift durch unterstrichene große Buchstaben der lateinischen Schrift bezeichnet.

Die Elemente einer Matrix tragen Doppelindizes, z. B. a_{21} (gelesen "a zwei eins"). Gelegentlich benutzen wir unter Verwendung des allgemeinen Elements a_{ik} , eine Kurzschreibweise für die Matrix

$$\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$$

wobei der Zeilenindex i alle natürlichen Zahlen von 1 bis m , der Spaltenindex k alle natürlichen Zahlen von 1 bis n durchlaufen soll. Für Zeilen und Spalten verwendet man die gemeinsame Bezeichnung "Reihen".

Das Zahlenpaar (m, n) ist der Typ der Matrix. Gelegentlich ist auch der Begriff "Format der Matrix" üblich. Dass die Matrix \mathbf{A} den Typ (m, n) hat, bringt man durch $\tau(\mathbf{A}) = (m, n)$ zum Ausdruck.

²Statistisches Jahrbuch 1974 der Deutschen Demokratischen Republik, Staatsverlag der Deutschen Demokratischen Republik, Berlin 1974, S. 126. (Auszug)

Die Matrizen vom Typ (m, n) bilden eine Menge, die wir mit $M_{(m,n)}$ bezeichnen wollen.

Ist $m \neq n$, dann heißt die Matrix rechteckig, ist $m = n$, heißt sie quadratisch. In diesem Falle nennt man $m = n$ die Ordnung der quadratischen Matrix. Zwei Matrizen sind dann und nur dann vom gleichen Typ, wenn sie die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten haben.

□ Beispiel 1/3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$$

\mathbf{A} ist eine rechteckige Matrix vom Typ $(3, 2)$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tau(\mathbf{B}) = (3, 3)$$

\mathbf{B} ist eine quadratische Matrix 3. Ordnung, $m = n = 3$.

Alle Elemente a_{ik} einer quadratischen Matrix mit $i = k$ bilden die Hauptdiagonale. Eine Matrix vom Typ $(m, 1)$ besteht nur aus einer Spalte. Sie kann auch - entsprechend der koordinatenmäßigen Darstellung eines Vektors - als Spaltenvektor aufgefasst werden. Eine Matrix vom Typ $(1, r)$ besteht nur aus einer Zeile. Sie wird in Analogie dazu als Zeilenvektor bezeichnet.

In Anlehnung an die Bezeichnungsweise der Matrizen wollen wir Spaltenvektoren im Druck durch kleine fettgedruckte Antiquabuchstaben, in der Schreibschrift durch unterstrichene kleine lateinische Buchstaben bezeichnen.

□ Beispiel 1/4:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ist ein Spaltenvektor; } (5 \quad 1) \text{ ist ein Zeilenvektor.}$$

Eine Matrix kann auch aus einem einzigen Element bestehen, z. B. (17) . Sie ist vom Typ $(1, 1)$. Dabei ist zu beachten, dass sie ein anderes mathematisches Objekt als die reelle Zahl 17 ist und deshalb in Klammern eingeschlossen werden muss.

Ergänzung:

Da in dieser Darstellung die Elemente der Matrizen dem Bereich der reellen Zahlen entnommen werden sollen, ist es besonders für Beweisführungen vorteilhaft, wenn an dieser Stelle die Grundgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen zusammengestellt werden:

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen, dann gilt stets:

1. Je zwei reellen Zahlen a und b wird durch die Verknüpfung Addition genau eine reelle Zahl zugeordnet, die mit $a + b$ bezeichnet und die "Summe" von a und b genannt wird.
2. Es gilt das Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$
3. Es gilt das Assoziativgesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Menge der reellen Zahlen bezüglich der Addition: $a + 0 = a$
5. Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine reelle Lösung. Diese wird mit $x = b - a$ bezeichnet und "Differenz" genannt.

6. Je zwei reellen Zahlen a und b wird durch die Verknüpfung Multiplikation genau eine reelle Zahl zugeordnet, die mit ab bezeichnet und das "Produkt" von a und b genannt wird.
7. Es gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation: $ab = ba$
8. Es gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation: $(ab)c = a(bc)$
9. Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Menge der reellen Zahlen bezüglich der Multiplikation: $a \cdot 1 = a$
10. Die Gleichung $ax = d$ hat für $a \neq 0$ genau eine reelle Lösung. Diese wird mit $\frac{d}{a}$ bezeichnet und "Quotient" genannt.
11. Es gilt das Distributivgesetz: $(a + b)c = ac + bc$

Hat eine Zahlenmenge mindestens zwei verschiedene Elemente, sind für diese Elemente die Verknüpfungsoperationen Addition und Multiplikation definiert und gelten die oben aufgestellten elf Gesetze, so sagt man, "diese Zahlenmenge bildet einen Körper".

Die Menge der reellen Zahlen ist also bezüglich der in der üblichen Weise erklärten Addition und Multiplikation ein Körper.

"Körper" ist ein algebraischer Strukturbegriff. Solche Strukturen sind für die moderne Betrachtungsweise in der Mathematik typisch. Ist eine Menge von Elementen gegeben und werden auf dieser Menge Rechenoperationen definiert, so wird der Menge eine bestimmte Struktur aufgeprägt.

Man sagt auch: "Die Menge wird strukturiert." Der Vorteil einer solchen Betrachtungsweise liegt darin, dass sich alle Folgerungen, die aus den durch Abstraktion gewonnenen Strukturgesetzen gezogen werden, auf jede andere Menge derselben Struktur übertragen lassen.

○ Arbeitsauftrag 1/2:

Zeigen Sie, dass

a) die Menge der rationalen Zahlen einen Körper,

b) die Menge der ganzen Zahlen keinen Körper bilden,

wenn die Addition und die Multiplikation in der üblichen Weise definiert werden!

Zusammenfassung:

Der Begriff "Matrix" wird als ein aus m Zeilen und n Spalten bestehendes Schema definiert, wobei die Elemente der Matrix in dieser Darstellung reelle Zahlen sein sollen, wenn nichts anderes vermerkt wird. Matrizen werden in diesem Buch in der international üblichen Weise bezeichnet.

Der Typ der Matrix wird durch die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten bestimmt. Die Matrizen vom Typ (m, n) bilden die Menge $M(m, n)$. Vektoren können als einspaltige (bzw. einzeilige) Matrizen aufgefasst werden. - Die Menge der reellen Zahlen bildet einen Körper.

1.3 Inzidenzmatrizen

In Ökonomie und Technologie werden die Zusammenhänge einzelner Objekte in sog. Verflechtungen untersucht. Beispielsweise ist es für die Materialplanung wichtig zu wissen, wie viele Einzelteile verschiedener Art zur Herstellung eines bestimmten Enderzeugnisses benötigt werden. Den stark vereinfachten Sachverhalt kann man durch folgende Darstellung (Bild 3) veranschaulichen:

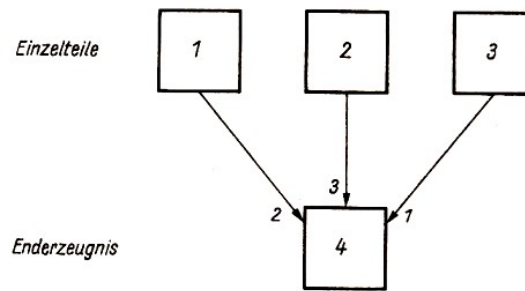


Bild 3

Aus Bild 3 soll hervorgehen, dass zur Herstellung von einem Stück des Enderzeugnisses 4

- 2 Stück des Einzelteils 1,
- 3 Stück des Einzelteils 2 und
- 1 Stück des Einzelteils 3

gebraucht werden. Wir wollen dabei die Einschränkung vornehmen, dass nur solche Verflechtungen betrachtet werden, bei denen Teile des Enderzeugnisses nicht wieder als "Rohstoffe" Verwendung finden, wie z. B. die in chemischen Prozessen frei werdende Energie.

Sehen wir zunächst von der Anzahl der verwendeten Einzelteile ab, dann erkennen wir, dass Zusammenhänge dieser Art durch Kopplungsnetze, sog. Netzwerke, verdeutlicht werden können. Sie stellen Spezialfälle von Graphen³ dar. Ein Graph kann als eine strukturierte Menge aufgefasst werden.

Wir können die Elemente dieser Menge durch Punkte und ihre Beziehungen durch gerichtete (oder ungerichtete) Strecken ("Kanten" genannt) zwischen den Punkten veranschaulichen. Wir sprechen dann von der geometrischen Veranschaulichung eines Graphen. Es ist nur von Interesse, welche Punkte miteinander verbunden sind. Die Länge der Verbindungsstrecke wird nicht berücksichtigt.

Relationen dieser Art könnten in unserem Beispiel sein: "... ist Bauteil für ..." oder "... wird benötigt zur Herstellung von ..." oder, wenn man die Anzahl der verwendeten Einzelteile berücksichtigen wollte: "Vom Bauteil i werden r Stück zur Herstellung von Erzeugnis k benötigt." Wir wollen diesen Sachverhalt mathematisch formulieren:

Es seien zwei Mengen gegeben: Menge M der Knotenpunkte und Menge A der Kanten. Zwischen den Elementen von M und A besteht eine Relation, die "Inzidenz" genannt wird: Jedem Element von $a \in A$ ist eindeutig ein geordnetes Paar von Knotenpunkten $P, Q \in M$ zugeordnet. Das Element $a \in A$ ist mit den beiden Knotenpunkten P, Q inzident, d. h., a verbindet P und Q .

Beim Überführen in die Matrixform ist folgendes zu beachten:

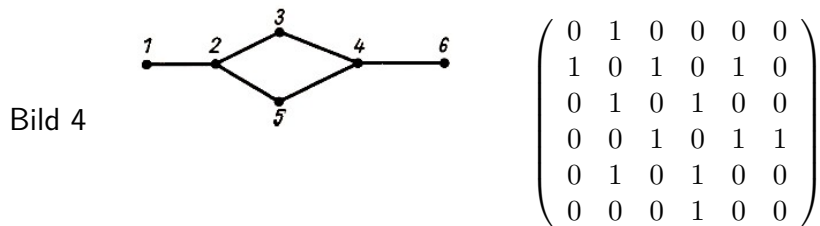
Wenn eine Kante vom i -ten Punkt zum k -ten Punkt führt, wird das Element a_{ik} der Matrix gleich 1 gesetzt; ist aber der i -te Punkt nicht mit dem k -ten Punkt verbunden, so lautet das Element $a_{ik} = 0$.

Dabei wird vorausgesetzt, dass kein Punkt mit sich selbst verbunden sein soll. Auf diese Weise erhalten wir eine quadratische Matrix, die wir die Inzidenzmatrix eines Graphen nennen wollen.

□ Beispiel 1/5:

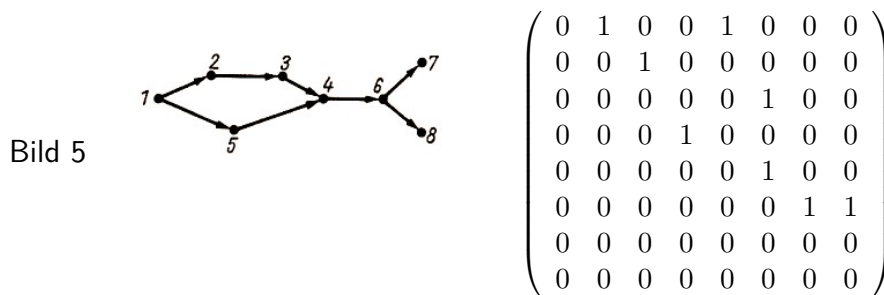
³Die Graphentheorie ist eine sehr junge Disziplin. Sie untersucht mathematische Strukturen der Kombinatorik. Sie wurde 1936 von dem ungarischen Mathematiker D. König begründet, fand aber anfangs nur wenig Beachtung. Erst mit der Untersuchung diskreter Strukturen in Technik und Ökonomie um 1950 erlangte sie große Bedeutung und wurde weiterentwickelt.

Zuordnung einer Inzidenzmatrix zur geometrischen Veranschaulichung eines gegebenen ungerichteten Graphen (Bild 4):



□ Beispiel 1/6:

Zuordnung einer Inzidenzmatrix zur geometrischen Veranschaulichung eines gegebenen gerichteten Graphen (Bild 5):



Die Elemente in der Hauptdiagonalen solcher Inzidenzmatrizen sind auf Grund der Bedingung, dass kein Punkt mit sich selbst verbunden sein soll, Null.

Will man in den Inzidenzmatrizen nicht bloß zum Ausdruck bringen, ob eine Relation zwischen zwei Punkten besteht oder nicht besteht, sondern will man darstellen, dass r Teile des Gegenstands i zur Herstellung des Gegenstands k benötigt werden, so setzt man in der Inzidenzmatrix das Element $a_{ik} = r$. Auf diese Weise entsteht für das Bild 3 die folgende Verflechtungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung:

Ein weiterer, für die Praxis wichtiger Sonderfall einer Matrix ist die Inzidenzmatrix eines Graphen. Sie wird zur mathematischen Beschreibung von Verflechtungen ökonomischer Sachverhalte benötigt.

1.4 Gleichheit zweier Matrizen

In gleicher Weise, wie im obligatorischen Unterricht beispielsweise nach der Definition des Begriffs "gebrochene Zahl" für die Menge der gebrochenen Zahlen Relationen und Operationen eingeführt wurden, um mit diesen Zahlen "arbeiten" zu können, wollen wir für die Menge der Matrizen gleichen Typs Relationen und Operationen festlegen, damit wir mit dem neuen mathematischen Gebilde "Matrix" rechnen können.

Wir wollen den Matrizenkalkül aufbauen, der die Gesamtheit aller Definitionen und die Gesetze für die Gleichheitsrelation und die Rechenoperationen mit Matrizen umfasst.

Wie bei dem bekannten Aufbau der Zahlenbereiche ist zunächst zu untersuchen, ob für Matrizen eine Ordnungsrelation festgelegt werden kann. Der Fall, dass alle oder einige Elemente

einer Matrix \mathbf{A} kleiner als die einer anderen Matrix \mathbf{B} sind, ist in unserem Zusammenhang bedeutungslos: Eine Kleiner- bzw. Größerrelation wollen wir deshalb für Matrizen nicht einführen.

Dagegen muss der Gleichheitsbegriff für Matrizen festgelegt werden. Zwei Matrizen sind gleich, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: Sie müssen sowohl im Typ als auch in den einander entsprechenden Elementen übereinstimmen.

▷ Definition 1/2:

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})_{p,q}$ heißen gleich genau dann, wenn $m = p$ und $n = q$ sowie $a_{ik} = b_{ik}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq k \leq n$ gilt.

Sind zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gleich, gilt die Matrixgleichung $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

□ Beispiel 1/7:

Die beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} sind gleich:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 + 1 & 2^2 \\ 2^3 & 2^0 & 2^3 + 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$, denn $\tau(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{B})$ und $a_{ik} = b_{ik}$ für $i = 1, 2$ und $k = 1, 2, 3$.

□ Beispiel 1/8:

Wenn zwischen den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Gleichheit bestehen soll, dann muss Übereinstimmung im Typ bestehen: $\tau(\mathbf{A}) = (3, 3)$ und $\tau(\mathbf{B}) = (3, 3)$. Diese Bedingung ist erfüllt, Weiterhin muss gelten:

$$a_{11} = 5, a_{21} = 6, a_{31} = 9, a_{12} = 4, a_{22} = 0, a_{32} = 1, a_{13} = 3, a_{23} = 2, a_{33} = 8$$

Der Matrixgleichung $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wobei \mathbf{A} und $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{(m,n)}$ sein sollen, entsprechen $m \cdot n$ skalare Gleichungen.

Ergänzung:

Die Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation die durch folgende Eigenschaften charakterisiert wird: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

Im Falle der Matrixgleichheit gilt:

- Jede Matrix \mathbf{A} ist zu sich selbst gleich, $\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (Reflexivität).
- Wenn $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, dann gilt auch $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ (Symmetrie).
- Sind \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} Matrizen vom gleichen Typ, dann folgt aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ stets $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ (Transitivität).

Eigentlich sind wir erst jetzt berechtigt, das bekannte Gleichheitszeichen auch zwischen Matrizen zu verwenden.

Zusammenfassung:

Für Matrizen kann eine Gleichheitsrelation festgelegt werden, wenn beide Matrizen Elemente der gleichen Menge $M_{(m,n)}$ sind.

1.5 Historische Entwicklung des Matrixbegriffs

Der englische Mathematiker James Joseph Sylvester (1814 bis 1897) führte im Jahre 1850 den Begriff "Matrix" zur Bezeichnung einer rechteckigen Anordnung von Zahlen in die Mathematik ein. Sylvester ist dafür bekannt, dass er den mathematischen Objekten phantasievolle Namen gab.

"Matrix" sollte ein Platz sein, in dem etwas sich entwickelt oder entsteht. Wir wollen "Matrix" im Sinne von "Anordnung" verstehen. Eine Matrix sei ein mathematisches Gebilde, das eine sinnvolle schematische Anordnung von mathematischen Gebilden enthält, die zeilenweise in linearen Beziehungen zueinander stehen. Seit 1853 beschäftigte sich William Rowan Hamilton (1805 bis 1865), seit 1858 Arthur Cayley (1821 bis 1895) mit Matrizen.

Die grundlegende Bedeutung dieser Begriffsbildung für die Mathematik wurde erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts erkannt. Maßgeblichen Anteil an der Weiterentwicklung der Matrizenrechnung hatte G. Frobenius (1849 bis 1917).

Die Algebraiker hatten einen Kalkül geschaffen, der 1925 von Werner Heisenberg zur Beschreibung der Quantenmechanik angewendet wurde. 1942 führte Feldtkeller die Matrizenrechnung zur Berechnung elektrischer Netzwerke in die Elektrotechnik ein.

Der Grund dafür, dass die Matrizenrechnung so spät erst in außermathematischen Objektbereichen zur Anwendung gelangte, besteht in der in dieser Epoche zur Verfügung stehenden Rechentechnik. Mit logarithmischer Rechnung ist ein dauernder Wechsel von Multiplikation und Addition bei der Bildung der linearen Zusammenhänge (Skalarprodukte) sehr zeitaufwendig. Rechenmaschinen dagegen eignen sich besonders gut zur Skalarproduktbildung, weil die Produkte im Speicher addiert werden können.

Erst in jüngster Zeit fand die Matrizenrechnung ein großes Anwendungsfeld in der Ökonomie. Beispielsweise ist bei der Planung in Industriebetrieben eine große Anzahl häufig wiederkehrender, massenhaft auftretender Rechenarbeiten zu bewältigen (z. B. die Ermittlung der Aufwendungen an Arbeitszeit und Material für ein vorliegendes Produktionsprogramm).

Solche Multiplikationen der Stückzahlen der Produktion mit den verschiedenartigen Normen für den Aufwand (technische Arbeitsnormen, Lohnfaktoren, Materialverbrauchsnormen u.a.) sind äußerst zeitraubend, können aber sehr rasch mit elektronischen Datenverarbeitungsanlagen bewältigt werden. Unter der Voraussetzung, dass lineare Zusammenhänge vorliegen, ist die Matrizenrechnung zur mathematischen Behandlung solcher ökonomischer und technologischer Probleme gut geeignet.

In den Systemunterlagen für elektronische Datenverarbeitungsanlagen gibt es spezielle Unterprogramme zur Matrizenrechnung und deren Anwendungen in der Ökonomie.

In der Praxis treten aber oft Probleme auf, die nicht linear sind. Weil die als lineare Gleichungssysteme formulierbaren Probleme leicht überschaubar und rechnerisch gut zu behandeln sind, liegt es nahe zu untersuchen, ob nichtlineare Probleme näherungsweise durch lineare Zusammenhänge wiedergegeben werden können. Ist das der Fall, spricht man von einer Linearisierung des betreffenden Problems. Zur Lösung eines linearisierten Problems kann dann die Matrizenrechnung herangezogen werden.

1.6 Aufgaben

1. Wie viele Elemente hat eine quadratische Matrix n -ter Ordnung ?

2. Eine Matrix hat 36 Elemente. Von welchen möglichen Typen kann sie sein ?
3. Eine Matrix hat 11 Elemente. Von welchem Typ kann sie sein ?
4. Es sei A eine quadratische Matrix ($m = n$) mit den Elementen a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Wie viele Elemente stehen a) über, b) in, c) unter der Hauptdiagonalen ?
5. Wie viele Elemente stehen in einer quadratischen Matrix n -ter Ordnung nicht in der Hauptdiagonalen ?
6. Bilden Sie eine Matrix vom Typ $(4,4)$, deren Elemente a_{ik} durch
 a) $a_{ik} = i + k$, b) $a_{ik} = ik$, c) $a_{ik} = (i - k)^2$, d) $a_{ik} = i^2k + ik^2$ gegeben sind!
 Sind die Elemente dieser Matrizen symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen angeordnet ?
7. Suchen Sie einen mathematischen Ausdruck für die Bildung der Elemente a_{ik} der folgenden Matrix!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

8. Wie lauten die Inzidenzmatrizen, die durch folgende Graphen geometrisch veranschaulicht werden ?

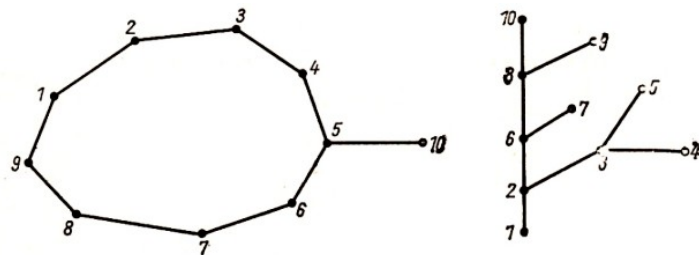


Bild 6,7

9. Zeichnen Sie den ungerichteten Graphen, der durch die folgende Inzidenzmatrix gegeben ist!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der durch die folgende Inzidenzmatrix gegeben ist!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Stellen Sie die Matrix der im Bild 8 gegebenen Verflechtung auf!

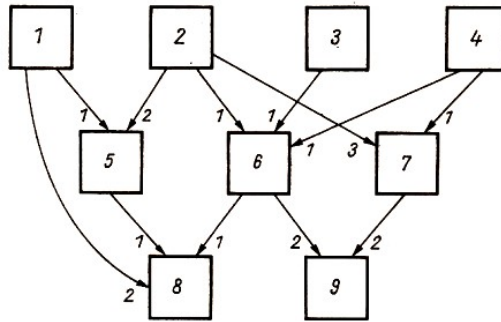


Bild 8

12. Berechnen Sie $x, y, z \in \mathbb{P}$ (\mathbb{P} ... Menge der reellen Zahlen) in folgender Matrixgleichung!

$$\begin{pmatrix} x & 2x + y \\ x + z & 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -22 \end{pmatrix}$$

13. Welche Aussagen sind wahr ?

- a) $(0; 0) = (0; 0; 0)$, b) $(0 - 0; 0) = (0 - 0; 0 - 0)$
 c) $\begin{pmatrix} 1 - 1 & 2 - 2 \\ x - x & 3 - 3 \end{pmatrix} = (0)$ mit $x \in \mathbb{P}$.

2 Der Vektorraum der Matrizen gleichen Typs

Nachdem im ersten Kapitel der Matrixbegriff erarbeitet und die Gleichheit von Matrizen definiert worden sind, sollen nun in den folgenden Abschnitten für das neue mathematische Gebilde "Matrix" Rechenoperationen eingeführt werden.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Menge der Matrizen gleichen Typs bezüglich dieser Rechenoperationen ein Modell für einen Vektorraum bildet.

2.1 Addition von Matrizen

□ Beispiel 2/1:

Zwei Betriebsteile stellen jeweils die gleichen Enderzeugnisse A , B , C in den Qualitätsstufen Q , 1 , 2 her. Aus Tabelle 4 geht die Anzahl der in den Betriebsteilen gefertigten Enderzeugnisse - gegliedert nach Qualitätsstufen - hervor.

Wie groß ist die Gesamtzahl der Enderzeugnisse in den genannten Qualitätsstufen?

Tabelle 4	Qualitätsstufen	Enderzeugnisse					
		Betriebsteil I			Betriebsteil II		
		A	B	C	A	B	C
	Q	250	150	300	300	400	550
	1	120	80	100	100	140	180
	2	15	12	18	25	20	30

Wir können die Anzahlen der Enderzeugnisse des Betriebsteils I als Elemente der Matrix \mathbf{A} , die des Betriebsteils II als Elemente der Matrix \mathbf{B} auffassen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 250 & 150 & 300 \\ 120 & 80 & 100 \\ 15 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 300 & 400 & 550 \\ 100 & 140 & 180 \\ 25 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

Beide Matrizen haben den gleichen Typ $(3, 3)$.

Die Gesamtzahl der Erzeugnisse beider Betriebsteile nach Qualitätsstufen wird durch die Addition der Elemente bestimmt, die sich an einander entsprechenden Stellen in Tabelle 4 befinden. Das bedeutet aber auch die Addition derjenigen Elemente in den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} , die die gleichen Indizes tragen. Dadurch entsteht eine neue Matrix; sie soll \mathbf{C} genannt werden.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 550 & 550 & 850 \\ 220 & 220 & 280 \\ 40 & 32 & 48 \end{pmatrix}$$

Für die Ausführung der Addition von Matrizen ist notwendig, dass die zu addierenden Matrizen vom gleichen Typ sind⁴ und dass jedes Element der Matrix \mathbf{C} durch die Addition der einander entsprechenden Elemente (d.h. die gleichen Doppelindizes tragenden Elemente) der Matrizen

⁴Hinweis bezüglich der Forderung "Matrizen gleichen Typs": Es wäre in praxisbezogenen Aufgaben auch der Fall denkbar, dass z. B. der II keine Erzeugnisse in der Qualitätsstufe 2 herstellt. Dann wäre die Matrix \mathbf{B} zunächst vom Typ $(3, 2)$. Es muss aber berücksichtigt werden, dass alle Elemente der dritten Zeile in der Matrix \mathbf{B} Null sind, so dass doch eine $(3,3)$ -Matrix zur Addition mit der Matrix \mathbf{A} zur Verfügung steht.

A und **B** gebildet wird. Ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

In Kurzschreibweise:

$$(a_{ik})_{m,n} + (b_{ik})_{m,n} = (a_{ik} + b_{ik})_{m,n} = (c_{ik})_{m,n}$$

für $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$

Als Matrixgleichung geschrieben:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Damit können wir jetzt die Addition zweier Matrizen definieren.

▷ Definition 2/1:

Die Matrix $\mathbf{C} \in M_{(m,n)}$, die bei der Addition der gleiche Doppelindizes tragenden Elemente der Matrizen \mathbf{A} und $\mathbf{B} \in M_{(m,n)}$ entsteht, heißt die Summe der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} und wird mit $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ bezeichnet.

□ Beispiel 2/2:

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

dann lautet die Summenmatrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 2/3:

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Da beide Matrizen nicht vom gleichen Typ sind, können sie nicht addiert werden.

Im folgenden wollen wir Eigenschaften der Matrizenaddition untersuchen. Die auftretenden Matrizen seien Elemente der Menge $M_{(m,n)}$.

▷ Satz 2/1:

Die Addition von Matrizen ist kommutativ. (Kommutativgesetz)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Beweis:

Voraussetzung: $a_{ik} + b_{ik} = b_{ik} + a_{ik}$ (Im Körper der reellen Zahlen gilt das Kommutativgesetz der Addition)

Behauptung $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Beweis: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$ nach Definition der Matrizenaddition;

$(a_{ik} + b_{ik}) = (b_{ik} + a_{ik})$ nach Voraussetzung;

$(b_{ik} + a_{ik}) = (b_{ik}) + (a_{ik})$ nach Definition der Matrizenaddition;

$(b_{ik}) + (a_{ik}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ w.z.b.w.

▷ Satz 2/2:

Die Addition von Matrizen ist assoziativ. (Assoziativgesetz)

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

○ Arbeitsauftrag 2/1:

Führen Sie den Beweis für Satz 2/2 unter Beachtung der folgenden Hinweise selbst durch!

1. Gestalten Sie den Beweis so, dass er auf das Rechnen mit reellen Zahlen zurückgeführt wird!

2. Beachten Sie die doppelte Bedeutung der runden Klammern! (b_{ik}) ... Klammerkurzschreibweise für Matrizen

$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = ((b_{ik}) + (a_{ik}))$... Neben der Klammerschreibweise für Matrizen ist noch die Klammer um die Summe $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ zu beachten.

□ Beispiel 2/4:

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Das Assoziativgesetz kann auf eine beliebige Anzahl von Matrizen gleichen Typs erweitert werden. Die Addition von Matrizen ist umkehrbar.

▷ Satz 2/3:

Zu zwei Matrizen \mathbf{A} und $\mathbf{B} \in M_{(m,n)}$ gibt es genau eine Matrix $\mathbf{X} \in M_{(m,n)}$, die die Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ erfüllt.

Beweis:

Der Beweis dieses Satzes besteht aus zwei Teilbeweisen: Zunächst muss bewiesen werden, dass eine solche Lösung existiert; dann muss bewiesen werden, dass es nur diese eine Lösung gibt.

Beweis für die Existenz der Lösung:

Voraussetzung: $a_{ik} + (b_{ik} - a_{ik}) = a_{ik} + b_{ik} - a_{ik} = b_{ik}$ (Addition im Körper der reellen Zahlen)

Behauptung: $\mathbf{X} = (b_{ik} - a_{ik})$ ist Lösung der Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Beweis:

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = (a_{ik}) + (b_{ik} - a_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik} - a_{ik}) = (b_{ik}) = \mathbf{B} \quad \text{w.z.b.w.}$$

Hinweis: Man beachte, dass $(b_{ik} - a_{ik})$ in der Voraussetzung eine reelle Zahl, in der Behauptung und im Beweis eine Matrix bedeutet.

Beweis für die Einzigkeit der Lösung:

Behauptung: Es gibt eine und nur eine Matrix \mathbf{X} , die Lösung der Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ ist.

○ Arbeitsauftrag 2/2:

Führen Sie den (indirekten) Beweis selbst durch!

Es existiert also genau eine Lösung \mathbf{X} der Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Sie lautet $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Dadurch haben wir die Umkehroperation der Addition von Matrizen festgelegt. Die Existenz und Einzigkeit dieser Umkehroperation zur Matrizenaddition wurde oben nachgewiesen. Wir nennen sie in Anlehnung an die Umkehroperation der Addition im Bereich der reellen Zahlen die Subtraktion von Matrizen.

Deshalb können wir jetzt definieren:

▷ Definition 2/2:

Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(m,n)}$, dann heißt die Lösung $\mathbf{X} \in M_{(m,n)}$ der Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ die Differenz der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} . Sie wird mit $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ bezeichnet.

Kurzschreibweise: $\mathbf{X} = (b_{ik} - a_{ik})$ für alle i, k .

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} & \dots & b_{2n} - a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} - a_{m1} & b_{m2} - a_{m2} & \dots & b_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun noch einige Spezialfälle, die aus der Umkehrung der Addition von Matrizen folgen:

1. Die Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{A}$ hat die Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{A}$. Wir bezeichnen sie mit $\mathbf{0}$ und nennen sie Nullmatrix.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{A} und $\mathbf{0}$ sind Elemente derselben Matrizenmenge $M_{(m,n)}$. Die Nullmatrix ist das neutrale Element der Matrizenmenge bezüglich der Addition.

2. Die Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{0}$ hat die Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{0} - \mathbf{A}$. Sie heißt die zu \mathbf{A} entgegengesetzte Matrix und wird mit $-\mathbf{A}$ bezeichnet.

Kurzschreibweise: $(-a_{ik})_{m,n}$

$$-\mathbf{A} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Für sie gilt $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Nach der Einführung der entgegengesetzten Matrix kann die Subtraktion von Matrizen gleichen Typs auf die Addition in folgender Weise zurückgeführt werden:

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A})$$

Ergänzung:

Wir stellen die Eigenschaften der Addition von Matrizen zusammen:

1. Die Matrizenaddition ist in $M_{(m,n)}$ eindeutig ausführbar. Sie ergibt stets eine Matrix vom gleichen Typ: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$
2. Die Matrizenaddition ist assoziativ. Es gilt stets: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

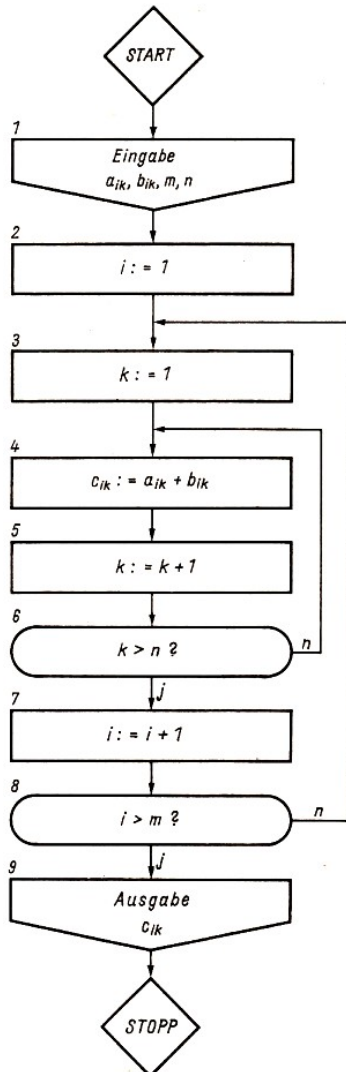


Bild 9

3. Die Matrizenaddition ist umkehrbar. Für beliebige Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M$ ist die Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ eindeutig lösbar. Das neutrale Element der Matrizenaddition ist die Nullmatrix.

Die zu \mathbf{A} entgegengesetzte Matrix ist $-\mathbf{A}$.

4. Die Matrizenaddition ist kommutativ. Es gilt stets: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Durch diese Eigenschaften wird nach dem "Zahlenkörper" (siehe Ergänzungen zu Abschnitt 1.2.) eine weitere algebraische Struktur charakterisiert: Sie wird Modul (additive Abelsche Gruppe) genannt.

Beispiele für weitere Moduln sind:

- die Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition,
- die Menge der rationalen Zahlen bezüglich der Addition,
- die Menge der reellen Zahlen bezüglich der Addition,
- die Menge der Vektoren des dreidimensionalen Raumes bezüglich der Addition.

Für die mit den Symbolen der Rechentechnik vertrauten Leser werden die bei der Addition von Matrizen auszuführenden Rechenschritte in einem Programmablaufplan veranschaulicht (Bild 9).

Zusammenfassung:

In der Menge der Matrizen gleichen Typs kann eine Rechenoperation, die Addition, definiert werden. Die Menge der Matrizen gleichen Typs bildet bezüglich der Addition einen Modul.

2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (Operatoranwendung)

□ Beispiel 2/5:

Die Anzahl der Arbeitsstunden, die für jedes Erzeugnis in den Abteilungen Formerei, Brennerei und Malerei aufgewendet werden, ist aus der Tabelle 5 ersichtlich.

	Abteilung	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2
Tabelle 5	Formerei	1,05	1,10
	Brennerei	24,00	12,00
	Malerei	1,75	2,30

Gesucht wird die Anzahl der Arbeitsstunden für 25 Stück jedes Erzeugnisses. - Man erhält die Gesamtzahl der Arbeitsstunden für 25 Stück jedes Erzeugnisses, indem jedes Element der Tabelle mit 25 multipliziert wird. Wird der Tabelle 5 Matrizenform gegeben, so besteht die Aufgabe darin, jedes Element der Matrix mit einer reellen Zahl zu multiplizieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise für diesen Sachverhalt wird die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl eingeführt.

Wir schreiben in diesem Beispiel

$$25 \begin{pmatrix} 1,05 & 1,10 \\ 24,00 & 12,00 \\ 1,75 & 2,30 \end{pmatrix}$$

Diese Operation wird zweckmäßig so festgelegt, dass jedes Element der Matrix mit der reellen Zahl multipliziert wird.

▷ Definition 2/3:

Wenn \mathbf{A} eine Matrix vom Typ (m, n) und λ eine reelle Zahl ist, dann bezeichnet $\lambda\mathbf{A}$ die Matrix vom Typ (m, n) , in der jedes Element von A mit λ multipliziert worden ist.

Kurzschreibweise: $\lambda(a_{ik}) = (\lambda a_{ik}) = (a_{ik})\lambda$

□ Beispiel 2/6:

Gegeben seien die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und die reelle Zahl $\lambda = 5$. Dann ist

$$\lambda\mathbf{A} = 5 \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -25 & 0 \\ 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}$ mit den reellen Zahlen λ und μ hat folgende Eigenschaften:

1. $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}$
2. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$
4. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$ Assoziativgesetz
5. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ Distributivgesetz
6. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ Distributivgesetz

Die Beweise für die Richtigkeit dieser Aussagen können wiederum durch Zurückführung auf die Rechengesetze für reelle Zahlen erbracht werden. Dazu eignet sich die Kurzschreibweise für Matrizen.

Die Richtigkeit von 1., 2. und 3. ist sofort verständlich, weil jedes Element der Matrix \mathbf{A} mit 1 bzw. mit 0 bzw. mit (-1) multipliziert werden muss.

Beweis zu 4:

Voraussetzung: $(\lambda\mu)a_{ik} = \lambda(\mu a_{ik})$ Assoziativgesetz für die Multiplikation reeller Zahlen

Behauptung: $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$

Beweis: $(\lambda\mu)\mathbf{A} = (\lambda\mu)(a_{ik})$ andere Schreibweise für \mathbf{A} ;
= $((\lambda\mu)a_{ik})$ nach Definition der Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl; die äußeren Klammern kennzeichnen eine Matrix;
= $(\lambda(\mu a_{ik}))$ Assoziativgesetz für das Produkt reeller Zahlen; die äußeren Klammern kennzeichnen eine Matrix;
= $\lambda(\mu a_{ik})$ nach Definition der Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl;
= $\lambda(\mu(a_{ik}))$ nach Definition der Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl; die inneren Klammern kennzeichnen eine Matrix;
= $\lambda(\mu\mathbf{A})$, w.z.b.w.

○ Arbeitsauftrag 2/3:
Führen Sie die Beweise zu 5. und 6. selbständig!

Zusammenfassung:

Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl erfolgt in der Weise, dass jedes Element der Matrix mit der reellen Zahl multipliziert wird. Für sie gelten ein Assoziativgesetz und zwei Distributivgesetze.

2.3 Der Vektorraum der Matrizen gleichen Typs

○ Arbeitsauftrag 2/4:
Wiederholen Sie Ihre Kenntnisse aus dem Stoffgebiet "Vektorrechnung" des obligatorischen Unterrichts über den Begriff "Vektorraum"!

Fassen wir unser bisher erworbenes Wissen über die Operationen mit Matrizen zusammen, dann können wir unter Nutzung unserer Kenntnisse aus dem Stoffgebiet "Vektorrechnung" des obligatorischen Unterrichts erkennen, dass die Matrizen die Forderungen erfüllen, die an die algebraische Struktur "Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen" gestellt werden.

▷ Definition 2/4:

Wenn in einer Menge von Objekten die Operationen Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl definiert werden können, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann heißt diese Menge Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, und ihre Elemente heißen Vektoren.

Bedingungen:

1. Die Menge bildet einen Modul. 2. Für diese Menge gelten die im Abschnitt 2.2. genannten Gesetze für die Multiplikation mit einer reellen Zahl.

Damit können wir feststellen, dass auch die Menge der Matrizen gleichen Typs (m, n) ein Modell des Vektorraums über dem Körper der reellen Zahlen ist.

2.4 Lineare Abbildungen

Gegeben seien zwei Vektorräume \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' . Wird durch die Vorschrift φ jedem Element \mathbf{x} (Original) aus \mathfrak{B} genau ein Bild $\varphi(\mathbf{x})$ in \mathfrak{B}' zugeordnet, dann sprechen wir von einer Abbildung von \mathfrak{B} in \mathfrak{B}' . Werden bei diesen Abbildungen gerade die einen Vektorraum charakterisierenden Eigenschaften der Addition und der Multiplikation mit einer reellen Zahl übertragen, dann

nennen wir sie eine lineare Abbildung.

▷ Definition 2/6:

Eine Abbildung, die den Bedingungen

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}') \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{x}' \text{ (Additivität)}$$

$$\varphi(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \text{ und beliebige } \lambda \text{ (Homogenität)}$$

genügt, heißt lineare Abbildung.

○ Arbeitsauftrag 2/5:

Formulieren Sie die Bedingungen der Definition 2/5 mit Ihren Worten!

Wird wie im Beispiel 1/1 dem Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ der Vektor $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$ aus dem gleichen

Vektorraum \mathfrak{B} vermittelt der Matrix \mathbf{A} zugeordnet ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{l}$), dann entsteht wegen der Gültigkeit der Additivität und der Homogenität eine lineare Abbildung mit der Gleichung $\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Die Matrix \mathbf{A} ist hierbei als linearer Operator aufzufassen. Wie im Kapitel 4 gezeigt wird, bewirkt jede Matrix \mathbf{A} vom Typ (m, n) mit Hilfe der Vorschrift $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung des Vektorraums $\mathfrak{B}^{(n)}$ in den Vektorraum $\mathfrak{B}^{(m)}$.

2.5 Spezielle quadratische Matrizen

Außer den bisher eingeführten besonderen Matrizen,

- der quadratischen Matrix n -ter Ordnung und

- der Nullmatrix vom Typ (m, n) , gibt es weitere Spezialfälle, die hier zusammengestellt werden sollen:

1. Eine quadratische Matrix, deren Elemente a_{ik} mit $i \neq k$ gleich Null sind, nennen wir Diagonalmatrix \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Eine besondere Diagonalmatrix liegt vor, wenn alle Elemente in der Hauptdiagonalen untereinander gleich sind. Wir nennen eine solche Matrix Skalarmatrix \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s \end{pmatrix}$$

Sind in einer Skalarmatrix alle Elemente in der Hauptdiagonalen gleich 1, nennen wir diese Matrix die Einheitsmatrix \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eine quadratische Matrix wird obere (untere) Dreiecksmatrix genannt, wenn alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind. Zum Beispiel ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

\mathbf{A} eine obere Dreiecksmatrix, \mathbf{B} eine untere Dreiecksmatrix.

2.6 Das Transponieren einer Matrix

Für Matrizen gibt es eine Operation, bei der in einer gegebenen Matrix vom Typ (m, n) die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden. Beispielsweise könnten die Eingänge in die Tabelle 4 (im Abschnitt 2.1.) vertauscht worden sein. Dadurch entsteht eine neue Matrix.

▷ Definition 2/6:

Die aus der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten entstehende Matrix vom Typ (n, m) heißt die zu \mathbf{A} gehörige transponierte Matrix und wird mit \mathbf{A}^T bezeichnet.

Bezeichnen wir die Elemente der transponierten Matrix \mathbf{A}^T mit a_{ik}^T , so gilt:

$$\mathbf{A}^T = (a_{ik}^T) = (a_{ki})$$

□ Beispiel 2/7:

Wenn die Matrix \mathbf{A} durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, dann lautet deren transponierte Matrix:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Im Falle einer quadratischen Matrix werden beim Transponieren die Elemente an der Hauptdiagonalen "gespiegelt".

□ Beispiel 2/8: Die zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

gehörige transponierte Matrix \mathbf{A}^T lautet:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

○ Arbeitsauftrag 2/6:

Bilden Sie die zu $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ gehörige transponierte Matrix \mathbf{A}^T .

Für transponierte Matrizen gelten folgende Eigenschaften:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T, \lambda \in \mathbb{P}$

○ Arbeitsauftrag 2/7:

Beweisen Sie die Gültigkeit der Aussagen 1 bis 3! Formulieren Sie diese Sätze mit Worten!

Werden Matrizen vom Typ $(m, 1)$, die als Vektoren aufgefasst werden können, transponiert, dann entstehen Matrizen vom Typ $(1, m)$, die als transponierte Vektoren bezeichnet werden.

▷ Beispiel 2/9:

Zum Spaltenvektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehört als transponierter Vektor der Zeilenvektor $\mathbf{a}^T = (2 \ 1 \ 3)$.

Oft ist es aus drucktechnischen Gründen vorteilhaft, statt des Spaltenvektors seinen zugehörigen transponierten Vektor (einen Zeilenvektor) zu schreiben. Man schreibt dann für den Vektor \mathbf{a} im Beispiel 2/9 $\mathbf{a} = (2 \ 1 \ 3)^T$.

Anmerkung: In diesem Buch soll als Vektor stets ein Spaltenvektor verstanden werden. Wenn für die Elemente einer quadratischen Matrix $a_{ik} = a_{ki}$ gilt, ist diese Matrix ihrer Transponierten gleich. Für sie wollen wir den Begriff "symmetrische Matrix" benutzen.

▷ Definition 2/7:

Wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt, dann heißt die Matrix \mathbf{A} symmetrische Matrix.

□ Beispiel 2/10:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 2 & -4 \\ 1 & b_{22} & 3 & 0 \\ 2 & 3 & b_{33} & 6 \\ -4 & 0 & 6 & b_{44} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T$$

Die Matrix \mathbf{B} ist symmetrisch.

Ergänzung:

▷ Definition 2/8:

Wenn für die Matrix \mathbf{A} gilt $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, dann heißt \mathbf{A} antimetrische oder schiefsymmetrische Matrix.

Für antimetrische Matrizen gilt:

1. $a_{ki} = -a_{ik}$ für alle $i, k = 1, 2, \dots, n$
2. Wenn $i = k$, dann $a_{ii} = 0$.

□ Beispiel 2/11:

Es soll gezeigt werden, dass die Matrix \mathbf{A} antimetrisch ist.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir bilden \mathbf{A}^T und $-\mathbf{A}$ und vergleichen die einander entsprechenden Elemente der

Matrizen \mathbf{A}^T und $-\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$ ist, ist die gegebene Matrix \mathbf{A} antimetrisch.

▷ Satz 2/4:

Für jede quadratische Matrix \mathbf{A} gilt: \mathbf{A} ist die Summe aus einer symmetrischen Matrix \mathbf{A}_s und einer antimetrischen Matrix \mathbf{A}_a

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$$

Beweis:

Wir berechnen die Matrizen \mathbf{A}_s und \mathbf{A}_a :

$$(1) \mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$$

Durch Transponieren von (1) erhält man:

$$(2) \mathbf{A}^T = (\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a)^T = \mathbf{A}_s^T + \mathbf{A}_a^T$$

$$(3) \mathbf{A}_s^T = \mathbf{A}_s \text{ (Definition 2/7)}$$

$$(4) \mathbf{A}_a^T = -\mathbf{A}_a, \text{ (Definition 2/8)}$$

Werden (3) und (4) in (2) eingesetzt, erhält man:

$$(5) \mathbf{A}^T = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a$$

Durch Addition von (1) und (5) erhält man:

$$(6a) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 2\mathbf{A}_s, \quad \mathbf{A}_s = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$$

Durch Subtraktion von (1) und (5) erhält man:

$$(6b) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = 2\mathbf{A}_a, \quad \mathbf{A}_a = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

Die Matrix \mathbf{A} lässt sich eindeutig in die symmetrische Matrix \mathbf{A}_s und die antimetrische Matrix \mathbf{A}_a zerlegen.

▷ Beispiel 2/12:

Die Matrix \mathbf{A} soll in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil zerlegt werden.

$$\text{Gegeben: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung: Die transponierte Matrix lautet } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man erhält:

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

In der Tat ist \mathbf{A}_s eine symmetrische, \mathbf{A}_a eine antimetrische Matrix.

Probe:

$$\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Zusammenfassung:

Durch Vertauschen der Zeilen und der Spalten in einer gegebenen Matrix \mathbf{A} entsteht die zu \mathbf{A} gehörige transponierte Matrix \mathbf{A}^T .

Wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt, heißt die Matrix symmetrisch; wenn $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ gilt, heißt die Matrix antimetrisch.

Jede quadratische Matrix kann eindeutig als Summe aus einer symmetrischen Matrix und einer antimetrischen Matrix dargestellt werden.

2.7 Aufgaben

1. Gegeben sind die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{C}$, b) $\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$, c) $\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B} + \mathbf{C}^T$, d) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}^T + 2\mathbf{C}^T$

2. Vereinfachen Sie durch Ausklammern eines allen Elementen gemeinsamen Faktors!

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,00920 & 0,00011 & 0 \\ 0,00034 & -0,00217 & 0,00024 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x^2 & x^3y & 2x \\ x^3 - x & 3x^2 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

$$c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{2}{15} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie \mathbf{X} und \mathbf{Y} , wenn

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gleichzeitig gelten!

3. Beweisen Sie den Satz: Die Spur der Summe zweier Matrizen ist gleich der Summe der Spuren der einzelnen Matrizen.

Hinweis: Unter der Spur $\text{sp } \mathbf{A}$ einer quadratischen Matrix versteht man die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen.

4. Ist die Summenmatrix stets symmetrisch, wenn die zu addierenden Matrizen symmetrisch sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

3 Multiplikation von Matrizen

3.1 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

□ Beispiel 3/1:

Um die Selbstkosten bei der Herstellung eines Erzeugnisses berechnen zu können, ist es erforderlich, den Aufwand an Arbeit in Stunden für ein Erzeugnis je Arbeitsplatz und je Besteller zu ermitteln.

Zunächst sollen die Betrachtungen für einen Arbeitsplatz und einen Besteller angestellt werden.

Für den Arbeitsplatz 1 sind die Arbeitszeiten in Stunden zur Herstellung einzelner Erzeugnisse in Tabelle 6 erfasst:

Tabelle 6:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">Arbeitsplatz</td> <td colspan="4" style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">Erzeugnisse</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">...</td> <td style="padding: 5px;">n</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">a_1</td> <td style="padding: 5px;">a_2</td> <td style="padding: 5px;">...</td> <td style="padding: 5px;">a_n</td> </tr> </table>	Arbeitsplatz	Erzeugnisse					1	2	...	n	1	a_1	a_2	...	a_n	In Vektordarstellung: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
Arbeitsplatz	Erzeugnisse																
	1	2	...	n													
1	a_1	a_2	...	a_n													

Ein Handelsorgan habe von den angebotenen Erzeugnisse folgende Bestellung aufgegeben (Tabelle 7):

Tabelle 7:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">Erzeugnis</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">Bestellung</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">b_1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">b_2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">\vdots</td> <td style="padding: 5px;">\vdots</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">n</td> <td style="padding: 5px;">b_n</td> </tr> </table>	Erzeugnis	Bestellung	1	b_1	2	b_2	\vdots	\vdots	n	b_n	In Vektordarstellung: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
Erzeugnis	Bestellung											
1	b_1											
2	b_2											
\vdots	\vdots											
n	b_n											

Um den Aufwand an Arbeitszeit am Arbeitsplatz 1 für diese Bestellung zu ermitteln, müssen die Produkte $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n$ gebildet und anschließend summiert werden. Dies entspricht der Skalarproduktbildung der Vektorrechnung in Koordinatendarstellung:

$$k_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

unter Verwendung der Vektorschreibweise:

$$k_1 = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

▷ Definition 3/1: Unter dem Skalarprodukt zweier reeller Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}$ versteht man die reelle Zahl

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

□ Beispiel 3/2: Gegeben seien die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} : $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es soll das Skalarprodukt $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ gebildet werden.

Lösung:

$$k = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = (3 \ 2 \ 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 + 8 + 15 = 26$$

Für das Skalarprodukt zweier reeller Vektoren gelten das Kommutativgesetz

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

und die beiden Distributivgesetze

$$\mathbf{a}^T (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{c} \quad , \quad (\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T) \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c}$$

○ Arbeitsauftrag 3/1:

Beweisen Sie diese Gesetze! Hinweis: Benutzen Sie dabei die Koordinatenschreibweise!

○ Arbeitsauftrag 3/2:

Zeigen Sie, dass das Assoziativgesetz für das Skalarprodukt nicht gilt!

3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

□ Beispiel 3/3: Wir wollen jetzt Beispiel 3/1 dadurch erweitern, dass wir auch die Aufwendungen an Arbeitszeit in Stunden bei der Herstellung der Erzeugnisse $1, 2, \dots, n$ an den Arbeitsplätzen $2, 3, \dots, m$ ergänzen. Dadurch entsteht Tabelle 8.

		Arbeitsplatz	Erzeugnisse			
			1	2	...	n
Tabelle 8:	1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	
	2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	

Die zweckmäßige Verwendung der Doppelindizes wird dabei deutlich: Die Tabelle enthält die Arbeitszeit a_{ik} , die am i -ten Arbeitsplatz zur Herstellung für das k -te Erzeugnis aufgewendet wird. Die Tabelle 8 kann in Matrixform gebracht werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{m,n}$$

Berücksichtigen wir, dass die im Beispiel 3/1 genannte Bestellung eines Handelsorgans bestehen bleibt - gegeben durch den Vektor \mathbf{b} -, dann besteht die Aufgabe darin, den Aufwand an Arbeitszeit an allen Arbeitsplätzen durch fortgesetzte Skalarproduktbildung zu berechnen. Unter Verwendung der Matrixelemente (mit Doppelindizes) entsteht am

Arbeitsplatz 1: $k_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n$

Arbeitsplatz 2: $k_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n$

...

Arbeitsplatz m : $k_m = a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n$

Wenn am Arbeitsplatz i kein Beitrag zur Realisierung des k -ten Teils der Bestellung geleistet wird, lautet das Element $a_{ik} = 0$.

Die einzelnen Gleichungszeilen können in einem System zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n &= k_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n &= k_2 \\ &\dots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n &= k_m \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass wegen der Skalarproduktbildung eine Matrix nur dann mit einem Vektor multipliziert werden kann, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix \mathbf{A} gleich der Anzahl der Zeilen des Vektors \mathbf{b} ist.

Wir erkennen darin eine notwendige Bedingung für die Ausführbarkeit der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Wir sagen, Matrix und Vektor müssen (in dieser Reihenfolge) verkettbar sein. Wenn die Bedingung der Verkettbarkeit erfüllt ist, kann das Gleichungssystem durch die folgende Matrixgleichung beschrieben werden:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{k}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 3/4:

Gegeben seien die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es soll $\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{k}$ gebildet werden.

Lösung:

\mathbf{A} und \mathbf{b} sind verkettbar, weil $\tau(\mathbf{A}) = (2, 3)$ und $\tau(\mathbf{b}) = (3, 1)$. Der Vektor \mathbf{k} ist vom Typ $\tau(\mathbf{k}) = (2, 1)$.

Damit ist gezeigt, dass die Multiplikation dieser Matrix \mathbf{A} mit diesem Vektor \mathbf{b} ausgeführt werden kann.

Die Elemente des Vektors \mathbf{k} werden in $\mathbf{A}\mathbf{b}$ durch das Skalarprodukt der Zeilen der Matrix \mathbf{A} mit dem Vektor \mathbf{b} gebildet:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -6 - 1 + 12 = 5$$

$$k_2 = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = -4 + 0 + 18 = 14 \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

○ Arbeitsauftrag 3/3:

Untersuchen Sie, ob für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor das Kommutativgesetz gilt!

3.3 Multiplikation zweier Matrizen

□ Beispiel 3/5:

Wir wollen das Beispiel 3/1 erneut erweitern: Wir wollen jetzt in Betracht ziehen, dass nicht nur ein Handelsbetrieb eine Bestellung, sondern dass mehrere Handelsorgane ihre Bestellungen aufgegeben haben. Dann können wir alle "Bestellvektoren" zu einer Matrix zusammenfassen.

Unter Verwendung der Doppelindizes lautet die Matrix \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Bei der Berechnung der Aufwendungen an Arbeitszeit, die an jedem Arbeitsplatz für jeden Besteller anfallen, müssen mehrere solcher Gleichungssysteme aufgestellt werden; bei p Handelsbetrieben sind es p Gleichungssysteme.

Der Rechenaufwand erhöht sich beträchtlich. Es erscheint nützlich, eine vereinfachte Darstellung der Skalarproduktbildung bei solchen umfangreichen Gleichungssystemen vorzunehmen.

Dazu dient die Multiplikation von zwei Matrizen. Schon im Abschnitt 3.2. haben wir erkannt, dass zur Ausführung der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor die Bedingung der Verkettbarkeit erfüllt sein muss. Das gilt natürlich auch bei der Multiplikation zweier Matrizen. Deshalb definieren wir den Begriff "verkettbar" in folgender Weise.

▷ Definition 3/2:

Die Matrix \mathbf{A} heißt verkettbar mit der Matrix \mathbf{B} , wenn die Anzahl der Spalten der Matrix \mathbf{A} mit der Anzahl der Zeilen der Matrix \mathbf{B} übereinstimmt.

Das heißt: Zwei Matrizen \mathbf{A} vom Typ (m, n) und \mathbf{B} vom Typ (p, q) heißen in der Produktbildung \mathbf{AB} verkettbar, wenn $n = p$ ist.

□ Beispiel 3/6:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sind in der Produktbildung \mathbf{AB} verkettbar, weil $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$ und $\tau(\mathbf{B}) = (2, 4)$ sind.

□ Beispiel 3/7:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

sind in der Produktbildung \mathbf{AB} nicht verkettbar, da $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$ und $\tau(\mathbf{B}) = (3, 2)$ sind.

Unter der Voraussetzung, dass zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} in der Produktbildung \mathbf{AB} verkettbar sind, kann das Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors der Matrix \mathbf{A} mit dem k -ten Spaltenvektor der Matrix \mathbf{B} zur Berechnung des Elements c_{ik} der Produktmatrix \mathbf{C} gebildet werden. Somit können wir die Multiplikation zweier Matrizen definieren.

▷ Definition 3/3:

Wenn die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ mit der Matrix $\mathbf{B} = (b_{ik})_{n,p}$ verkettbar ist, dann heißt die Matrix $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m,p} = \mathbf{AB}$ das Produkt der beiden Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} . Ihre Elemente c_{ik} werden durch das Skalarprodukt der i -ten Zeile $\mathbf{a}_i^T = (a_{i1} \dots a_{in})$ der Matrix \mathbf{A} mit der k -ten Spalte

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \text{ von } \mathbf{B} \text{ gebildet.}$$

Definitionsgleichung:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}, \text{ wobei } c_{ik} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \text{ und } i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p$$

Kurzschreibweise:

$$\mathbf{AB} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{m,p}$$

Der Prozess der fortgesetzten Skalarproduktbildung soll durch folgende Übersicht veranschaulicht werden:

$$\mathbf{A}_{(m,n)} \mathbf{B}_{(n,p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T & - & - & - \\ \mathbf{a}_2^T & - & - & - \\ \dots & & & \\ \mathbf{a}_m^T & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p \\ | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_p \\ \dots & \dots & & \dots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_p \end{pmatrix}$$

○ Arbeitsauftrag 3/4:

Bilden Sie die Produktmatrix **AB**! Gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 3/8:

Die Produktmatrix **AB** soll gebildet werden, wenn $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

Lösung:

Da $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ gesucht wird, muss zunächst die Verkettbarkeit beider Matrizen geprüft werden: $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$; $\tau(\mathbf{B}) = (2, 3)$. Beide Matrizen sind in der geforderten Reihenfolge verkettbar. Die Matrix **C** ist vom Typ $\tau(\mathbf{C}) = (3, 3)$.

Nach Definition 3/3 werden die Elemente c_{ik} der Matrix **C** durch das Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix **A** mit der k -ten Spalte der Matrix **B** gebildet, also

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 2 \\ 4 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

z.B.: $c_{11} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 3$, $c_{12} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 9$ usw.

Die Bildung des Elements c_{32} wurde durch Umrahmung hervorgehoben: $c_{32} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 6 + 4 = 10$

Die Matrix **C** lautet: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 5 & 6 \\ 18 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

□ Beispiel 3/9:

Gegeben seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht wird: $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$

Lösung:

Da $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$ und $\tau(\mathbf{B}) = (3, 2)$ sind, sind beide Matrizen in der geforderten Reihenfolge nicht verkettbar. Deshalb kann die Produktmatrix **AB** nicht gebildet werden. Die Aufgabe ist nicht lösbar.

3.4 Rechengesetze für die Multiplikation von Matrizen

Nach der Definition der Matrizenmultiplikation muss nun überprüft werden, ob die vom Rechnen mit reellen Zahlen her bekannten Gesetze (das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz) für die Matrizenmultiplikation gültig sind.

Zum Kommutativgesetz:

○ Arbeitsauftrag 3/5:

Untersuchen Sie, ob für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz gültig ist!

Anleitung:

(1) Untersuchen Sie zunächst die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für rechteckige Matrizen! Gehen Sie von einem Zahlenbeispiel aus!

(2) Prüfen Sie, ob das Kommutativgesetz für quadratische Matrizen ein und derselben Ordnung gilt!

Aus den Überlegungen im Arbeitsauftrag 3/5 wird verständlich, dass bei der Einführung eines neuen mathematischen Gebildes die vom Rechnen mit reellen Zahlen her bekannten Gesetzmäßigkeiten nicht ohne Beweisführung übertragen werden dürfen.

Nun können wir aber zeigen, dass es doch einige Matrizen gibt, für die gilt:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

□ Beispiel 3/10:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ seien gegeben.

Dann sind

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} gilt $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Solche Matrizen wie im Beispiel 3/10 heißen vertauschbar. Ein Paar vertauschbarer Matrizen ist z.B. jede quadratische Matrix und die Einheitsmatrix gleicher Ordnung. Da $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$ und $\mathbf{EA} = \mathbf{A}$, gilt $\mathbf{AE} = \mathbf{EA}$.

○ Arbeitsauftrag 3/6:

Bilden Sie zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ eine Matrix \mathbf{B} so, dass $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt!

Sind \mathbf{A} und $\mathbf{0}$ verkettbare Matrizen, so gilt stets $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$, wobei gegebenenfalls die vorkommenden Nullmatrizen von verschiedenem Typ sind.

Es gibt aber auch verkettbare Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , für die $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, aber $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ gilt. Solche Matrizen heißen Nullteiler.

Hinweis: Bekanntlich gilt für reelle Zahlen a , b :

$ab = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$. In Zahlkörpern gibt es keine Nullteiler.

□ Beispiel 3/11: Gegeben seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht: \mathbf{AB}

Lösung:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A und **B** sind Nullteiler.

○ Arbeitsauftrag 3/7:

Gilt für die Matrizen aus Beispiel 3/11 auch $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$?

Zum Assoziativgesetz

▷ Satz 3/1:

Wenn **A** mit **B** und **B** mit **C** verkettbar sind, dann gilt für die Multiplikation der Matrizen **A**, **B**, **C** (in dieser Reihenfolge) das Assoziativgesetz:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

○ Arbeitsauftrag 3/8:

Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation von Matrizen!

Da das Assoziativgesetz gilt, kann die Klammerschreibweise entfallen:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$$

Das Assoziativgesetz kann für endlich viele Matrizen erweitert werden, falls sie in der angegebenen Reihenfolge verkettbar sind:

$$((\mathbf{AB})\mathbf{C}) \cdot \dots \cdot \mathbf{M} = \mathbf{ABC} \dots \mathbf{M}$$

□ Beispiel 3/12:

Gegeben seien die Matrizen **A**, **B**, **C**, die in der Produktbildung \mathbf{ABC} verkettbar sind:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Unter Berücksichtigung des Assoziativgesetzes für die Matrizenmultiplikation soll $\mathbf{P} = \mathbf{ABC}$ berechnet werden.

Lösung: Es wird

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 25 & 22 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ 69 & 16 \\ 24 & 8 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ 69 & 16 \\ 24 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gebildet. Es besteht Übereinstimmung.

Wenn eine Matrix quadratisch ist, kann das Produkt aus n Faktoren **A** gebildet werden.

▷ Definition 3/4:

Unter der n -ten Potenz einer quadratischen Matrix **A** versteht man das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}$ aus n Faktoren **A** mit $n > 2$.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ Faktoren}}$$

In Analogie zu den bekannten Potenzgesetzen für reelle Zahlen gilt

$$\mathbf{A}^m \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}$$

▷ Definition 3/5:

Es gilt: $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

□ Beispiel 3/13: Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es sollen \mathbf{A}^2 , \mathbf{A}^3 und \mathbf{A}^5 berechnet werden.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^4 &= \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 60 \\ 20 & 21 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^5 &= \begin{pmatrix} 61 & 60 \\ 20 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 & 183 \\ 61 & 60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits kann man \mathbf{A}^5 durch Bilden des Produkts $\mathbf{A}^2 \mathbf{A}^3$ berechnen:

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 & 183 \\ 61 & 60 \end{pmatrix}$$

Zum Distributivgesetz

▷ Satz 3/2:

Wenn \mathbf{B} und \mathbf{C} vom gleichen Typ und \mathbf{A} mit \mathbf{B} und \mathbf{A} mit \mathbf{C} verkettbar sind, gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Beweis:

$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D} = (d_{ik})$ Wir schreiben das Element d_{ik} :

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = a_{i1}(b_{1k} + c_{1k}) + a_{i2}(b_{2k} + c_{2k}) + \dots + a_{in}(b_{nk} + c_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i1}c_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} + a_{in}c_{nk} \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} + a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} \end{aligned}$$

Das bedeutet in Matrixschreibweise: $\mathbf{D} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, w.z.b.w.

□ Beispiel 3/14: Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es besteht Übereinstimmung.

▷ Satz 3/3:

Wenn **A** und **B** vom gleichen Typ und **A** mit **C** und **B** mit **C** verkettbar sind, gilt:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Auf den Beweis wollen wir verzichten, da er analog zum Beweis des Satzes 3/2 verläuft.

3.5 Der Ring der quadratischen Matrizen gleicher Ordnung

Nach Definition der Operation Multiplikation und nach der Untersuchung der Gültigkeit der bekannten Rechengesetze für die Multiplikation von Matrizen können wir einen weiteren algebraischen Strukturbegriff einführen: den Ring der quadratischen Matrizen gleicher Ordnung. Sind für eine Menge

- die Operationen Addition und Multiplikation erklärt,
- das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition gültig,
- die Umkehrbarkeit der Addition nachgewiesen,
- das Assoziativgesetz der Multiplikation und das Distributivgesetz gültig, dann heißt die Menge ein Ring.

Die Menge der quadratischen Matrizen gleicher Ordnung mit reellen Zahlen als Matrizenelemente erfüllt diese Bedingungen.

Da das Kommutativgesetz der Multiplikation nicht gilt, ist der Matrizenring nicht kommutativ. Er besitzt Nullteiler. Die Einheitsmatrix ist eindeutig bestimmtes neutrales Element der Multiplikation. Beispielsweise bildet die Menge der ganzen Zahlen ebenfalls einen Ring, der jedoch kommutativ ist.

Zusammenfassung:

Zur Ausführung der Multiplikation ist es erforderlich, dass beide Matrizen verkettbar sind. Die Elemente der Produktmatrix werden durch das Skalarprodukt der i -ten Zeile von **A** mit der k -ten Spalte von **B** gebildet.

Die Multiplikation einer Matrix vom Typ (m, n) mit einer Matrix vom Typ (n, p) ergibt eine Matrix vom Typ (m, p) . Es gelten das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz; das Kommutativgesetz gilt nicht.

Die Menge der quadratischen Matrizen gleicher Ordnung bildet einen Ring.

3.6 Berechnung der Produktmatrix

Die Multiplikation von umfangreichen Matrizen, wie sie in der Praxis häufig auftreten, erfordert durch die Bildung der Skalarprodukte einen großen Rechenaufwand.

Waren deshalb früher der Nutzung der Matrizenrechnung Grenzen gesetzt, so bietet sich heute der Einsatz elektronischer Datenverarbeitungsanlagen zur Bewältigung dieser umfangreichen Rechnungen besonders an. Bei der Vorbereitung des Einsatzes solcher Anlagen müssen die im einzelnen auszuführenden Rechenschritte in einem Programmablaufplan veranschaulicht werden.

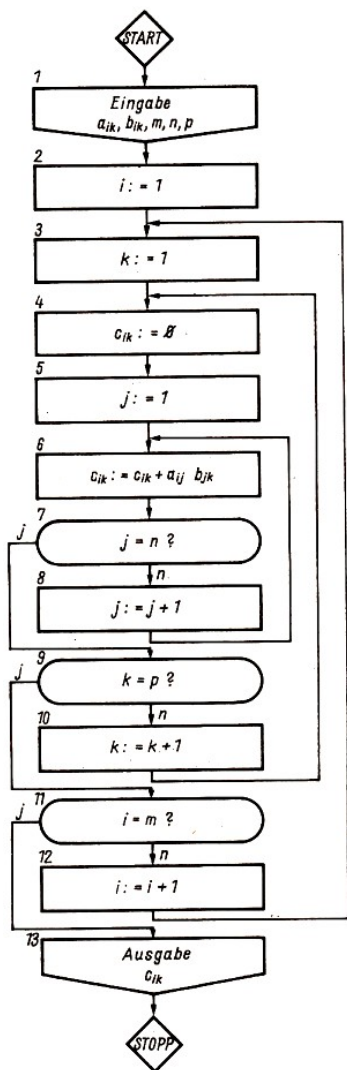


Bild 10

Für die mit den Symbolen der Rechentechnik vertrauten Leser wird der Programmablaufplan für die numerische Berechnung der Produktmatrix **AB** angegeben (Bild 10), wobei $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ und $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n,p}$ (s. Definition 3/3) sind.

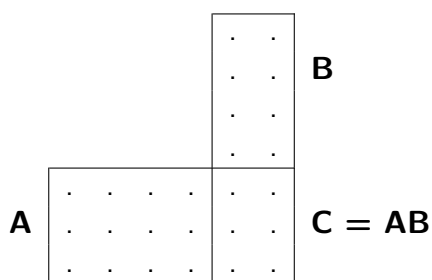
Für die Multiplikation von mehr als zwei Matrizen ohne den Einsatz maschineller Rechenanlagen ist es zweckmäßig, die Matrizen übersichtlich anzuordnen und Rechenkontrollen vorzusehen. Das Falksche Schema erfüllt diese Bedingungen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die zu multiplizierenden Matrizen verkettbar sind.

Falksches Schema für die Multiplikation von zwei Matrizen

Wir ordnen die zu multiplizierenden Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ und $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n,p}$ und das Matrizenprodukt $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ik})_{m,p}$ so an, dass das Element c_{ik} der Produktmatrix **C** im Schnittpunkt der *i*-ten Zeile von **A** mit der *k*-ten Spalte von **B** liegt (Tableau 1).

In Abgrenzung zu einer Tabelle nennen wir diese schematische Darstellung ein Tableau. Zur Vereinfachung der Darstellung seien die Elemente in den Matrizen durch Punkte angedeutet.

Tableau 1



□ Beispiel 3/15: Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht wird die Produktmatrix **C** mit Hilfe des Falkschen Schemas.

Lösung (Tableau 2):

				3	0	2		
				-1	1	0	B	
				-2	2	1		
				1	3	2		
				-1	14	7		
				0	1	2		
				-1	5	2		
A	1	2	-3	2	9	2	3	C = AB
	3	-2	4	0	3	6	10	
	2	1	1	-1	2	0	3	

Im Schema wurde die Berechnung von c_{32} durch Einrahmung hervorgehoben:

$$c_{32} = \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_2 = (1 \ 2 \ -3 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 2 - 6 + 6 = 2$$

Rechenkontrollen sind bei Anwendung des Falkschen Schemas als Summenproben leicht durchzuführen. Zwei Kontrollverfahren sind möglich: die Spaltensummenprobe und die Zeilensummenprobe.

Spaltensummenprobe:

Die Elemente jeder Spalte der Matrix **A** werden addiert und als Spaltensummenvektor \mathbf{s}_A^T unter die Matrix **A** geschrieben. Nun wird das Skalarprodukt des Spaltensummenvektors \mathbf{s}_A^T mit jedem Spaltenvektor der Matrix **B** gebildet. Die dabei auftretenden Skalarprodukte werden jeweils in der betreffenden Spalte unter **C** geschrieben.

Dadurch entsteht unter der Produktmatrix **C** ein Zeilenvektor \mathbf{s}^T . Andererseits können die Elemente jedes Spaltenvektors von **C** addiert werden. Dadurch entsteht der Spaltensummenvektor \mathbf{s}_C^T . Die Übereinstimmung der Vektoren \mathbf{s}_C^T und \mathbf{s}^T ist zu zeigen:

Beweis:

Behauptung: $\mathbf{s}_C^T = \mathbf{s}^T$

Linke Seite:

$$\mathbf{s}_C^T = \mathbf{s}_A^T \mathbf{B}, \text{ wobei } \mathbf{s}_A^T = (a_j) \text{ mit } a_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \text{ mit } j = 1, \dots, n \text{ und } \mathbf{B} = (b_{ik})_{n,p}.$$

$$\text{Also ist } \mathbf{s}_A^T \mathbf{B} = \left(\sum_{j=1}^n a_j b_{jk} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) b_{jk} \right).$$

Auf Grund der Gültigkeit des Distributivgesetzes für reelle Zahlen ist die Multiplikation mit der Summation vertauschbar:

$$\mathbf{s}_A^T \mathbf{B} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{jk}) \right) = \left(\sum_{i=1}^m c_{ik} \right) \quad \text{für } k = 1, \dots, p$$

Rechte Seite:

$$\mathbf{s}^T = (c_k) \text{ mit } c_k = \sum_{i=1}^m c_{ik} \text{ für } k = 1, \dots, p; \text{ also ist } \mathbf{s}^T = \left(\sum_{i=1}^m c_{ik} \right).$$

Übereinstimmung der linken und rechten Seite:

$$\left(\sum_{i=1}^m c_{ik} \right) = \left(\sum_{i=1}^m c_{ik} \right), \text{ d.h. } \mathbf{s}_A^T \mathbf{B} = \mathbf{s}^T \text{ w.z.b.w.}$$

□ Beispiel 3/16:

Für die Aufgabe im Beispiel 3/15 soll die Spaltensummenprobe durchgeführt werden (Tableau 3). $\mathbf{s}_A^T \mathbf{b}_1$ wird ausführlich berechnet: $\mathbf{s}_A^T \mathbf{b}_1 = 15 - 2 - 10 + 5 = 8$. Das erste Element des Spaltensummenvektors von \mathbf{C} , s_1 genannt, wird durch

$$\sum_{i=1}^m c_{i1} = -1 - 5 + 4 + 3 + 2 = 8$$

gebildet und ergibt Übereinstimmung mit $\mathbf{s}_A^T \mathbf{b}_1$.

Tableau 3:

				3	0	2			
				-1	1	0	B		
				-2	2	1			
				1	3	2			
	A	-1	0	1	4	-1	14	7	
		0	1	2	0	-5	5	2	
		1	2	-3	2	9	2	3	C = AB
		3	-2	4	0	3	6	10	
		2	1	1	-1	2	0	3	
	\mathbf{s}_A^T	5	2	5	5	8	27	25	$\mathbf{s}^T = \mathbf{s}_A^T \mathbf{B}$

Hinweis: Wir empfehlen, zuerst das Skalarprodukt $\mathbf{s}_A^T \mathbf{b}_1$ zu bilden und sofort mit s_1 zu vergleichen, bevor man weiterrechnet. Dadurch können mögliche Rechenfehler schnell lokalisiert werden.

Es wäre auch denkbar, dass sich einmal zufällig zwei oder mehrere Rechenfehler gerade aufheben. Deshalb ist es empfehlenswert, auch die Zeilensummenprobe durchzuführen.

Zeilensummenprobe:

Sie wird in Analogie zur Spaltensummenprobe durch eine Schrittfolge beschrieben:

1. Addiere die Elemente jedes Zeilenvektors der Matrix \mathbf{B} . Dadurch entsteht der Spaltenvektor \mathbf{z}_B .
2. Bilde die Skalarprodukte eines jeden Zeilenvektors von \mathbf{A} mit \mathbf{z}_B ! Dadurch entsteht der Spaltenvektor \mathbf{z} .
3. Addiere die Elemente jedes Zeilenvektors von \mathbf{C} . Dadurch entsteht der Spaltenvektor \mathbf{z}_C . Vergleiche die Elemente dieses Vektors \mathbf{z}_C mit denen des Spaltenvektors \mathbf{z} , die im Schritt 2 bestimmt wurden!

Für die Zeilensummenprobe gilt also die Behauptung $\mathbf{z} = \mathbf{z}_C$, d.h. $\mathbf{A}\mathbf{z}_B = \mathbf{z}_C$.

Auf den Beweis der Übereinstimmung dieser Vektoren wollen wir verzichten. Er wird in Analogie zum Beweis der Spaltensummenprobe geführt.

□ Beispiel 3/17:

Für die Aufgabe im Beispiel 3/15 soll die Zeilensummenprobe durchgeführt werden (Tableau 4, siehe nächste Seite).

Zusammengefasst ergibt sich für die Multiplikation von zwei Matrizen folgendes Tableau (Tableau 5, siehe nächste Seite):

Tableau 4:

				3	0	2	5	B
				-1	1	0	0	
				-2	2	1	1	
				1	3	2	6	
A	-1	0	1	4	-1	14	7	20
	0	1	2	0	-5	5	2	2
	1	2	-3	2	9	2	3	14
	3	-2	4	0	3	6	10	19
	2	1	1	-1	2	0	3	5

C=AB

$\mathbf{z}_C = \mathbf{A}\mathbf{z}_B$

Tableau 5:

			·	·	·	·	·
			·	B	·	·	\mathbf{z}_B
			·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	A	·	·	C=AB	·	$\mathbf{z}_C = \mathbf{A}\mathbf{z}_B$
	·	·	·	·	·	·	·
	·	\mathbf{s}_A^T	·	·	$\mathbf{s}_C^T = \mathbf{s}_A^T \mathbf{B}$	·	·

○ Arbeitsauftrag 3/9:

Zeigen Sie an der Aufgabe in den Beispielen 3/16 und 3/17, dass die Summe der Elemente des Zeilenvektors \mathbf{z}_C gleich der Summe der Elemente des Spaltensummenvektors \mathbf{s}_C^T ist! Darin besteht die Möglichkeit einer weiteren Rechenkontrolle.

Falksches Schema für die Multiplikation von mehr als zwei Matrizen

Wir setzen voraus, dass die Multiplikation der gegebenen Matrizen ausführbar ist, d.h., dass die Matrizen in der geforderten Reihenfolge verkettbar sind. In der Darstellung beschränken wir uns auf die Multiplikation von vier Matrizen, aus der die Zweckmäßigkeit der Anordnung bereits ersichtlich ist. Dafür erweitern wir das Falksche Schema.

Es bestehen zwei Möglichkeiten, die Matrizen in dem erweiterten Falkschen Schema anzuordnen:

1. Anordnung nebeneinander:

Man beginnt links und bildet nacheinander die Matrizenprodukte **AB**, **(AB)C**, **(ABC)D**. Es ist zweckmäßig, das Falksche Schema nach rechts fortzusetzen (Tableau 6).

Tableau 6:

		·	·	·	·	·	·
		·	·	·	·	·	·
		·	B	·	C	·	D
	·	·	·	·	·	·	·
	·	A	·	AB	·	ABC	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	\mathbf{s}_A^T	·	\mathbf{s}_{AB}^T	·	\mathbf{s}_{ABC}^T	·
	·	·	·	·	·	·	\mathbf{s}_{ABCD}^T

Die Elemente in den Matrizen werden durch Punkte in der ersten Zeile und in der ersten Spalte verdeutlicht. Daraus wird der Typ der Matrizen ersichtlich.

Um mögliche Rechenfehler beheben zu können, sollte eine Rechenkontrolle (Spaltensummenprobe) durchgeführt werden.

2. Anordnung untereinander:

Man beginnt oben und bildet nacheinander die Matrizenprodukte **CD**, **B(CD)**, **A(BCD)**. Es ist zweckmäßig, das Falksche Schema nach unten fortzusetzen (Tableau 7).

Tableau 7:

		· · · · ·	D	· · · · ·	z_D
	· · · · ·	C	· · · · ·	CD	· · · · ·
	· · · · ·	B	· · · · ·	BCD	· · · · ·
	· · · · ·	A	· · · · ·	ABCD	· · · · ·

Als Rechenkontrolle sollte man wenigstens die Zeilensummenprobe durchführen. *

□ Beispiel 3/18:

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es soll mit Hilfe des erweiterten Falkschen Schemas die Produktmatrix **ABCD** berechnet werden.

Lösung: Anordnung nebeneinander (Tableau 8):

Tableau 8:

			B					D			
			1	3	C			3	4		
			0	3	2	0	2	0	-1		
			2	1	0	1	0	-2	1		
A	3	2	0	3	15	6	15	6	6	15	ABCD
	1	5	2	5	20	10	20	10	10	30	
	0	1	1	2	4	4	4	4	4	16	
	4	8	3	10	39	20	39	20	20	61	
s_A^T			s_{AB}^T		s_{ABC}^T			s_{ABCD}^T		81	

Anordnung untereinander (Tableau 9):

Tableau 9:

					D						
					3	4	7				
					0	-1	-1			z_D	
			C		-2	1	-1				
			2	0	2	2	10	12			z_{CD}
			0	1	0	0	-1	-1			
			1	3	2	7	9				
			B	0	3	0	-3	-3			z_{BCD}
				2	1	4	19	23			
			3	2	0	6	15	21			
			1	5	2	10	30	40			z_{ABCD}
			0	1	1	4	16	20			
			A						81		

3.7 Anwendung der Matrizenmultiplikation

In der Ökonomie findet die Matrizenmultiplikation ein weites Anwendungsfeld, z. B. bei Materialverflechtungen.

Der Produktionsprozess für ein Erzeugnis besteht meist aus mehreren Stufen. So werden beispielsweise in einem sehr einfachen Fall, aus Einzelteilen Baugruppen und aus diesen und Einzelteilen wiederum Enderzeugnisse hergestellt. Auf Grund der bestehenden Technologie wird eine bestimmte Anzahl von Einzelteilen benötigt, um die Baugruppen zusammenzustellen.

Zwischen den Baugruppen und den Einzelteilen bestehen lineare Beziehungen, d.h. eine lineare Abbildung. Diese können in Tabellen gegeben sein, für die sich auch die Darstellung in Matrixform eignet. Werden nun die Baugruppen zu den Enderzeugnissen montiert, so besteht wiederum eine lineare Abbildung zwischen Enderzeugnissen und Baugruppen, die ebenfalls in Tabellen- oder Matrixform dargestellt werden kann.

Wird nun die Anzahl der bereitzustellenden Einzelteile gesucht, so besteht die Aufgabe, diese zwei Tabellen durch eine Tabelle, die eine Aufeinanderfolge linearer Abbildungen zwischen den Enderzeugnissen und den Einzelteilen enthält, zu ersetzen. Dieser Substitution entspricht die Multiplikation der beiden Matrizen, die die Proportionalität zwischen Baugruppen und Einzelteilen sowie zwischen Enderzeugnissen und Baugruppen wiedergibt. Dabei ist die Matrixdarstellung wesentlich übersichtlicher.

□ Beispiel 3/19:

Bei der Herstellung der Erzeugnisse E_1 und E_2 werden die Bauelemente B_1 und B_2 und zu deren Herstellung die Teile T_1 , T_2 und T_3 in der in den Tabellen 9a und 9b angegebenen Anzahl benötigt:

Tabelle 9a	Zur Herstellung von	werden benötigt (in Stück)	
		B_1	B_2
	E_1	2	3
	E_2	1	4

Tabelle 9b	Zur Herstellung von	werden benötigt (in Stück)		
		T_1	T_2	T_3
	B_1	2	1	0
	B_2	1	0	3

Es soll die Anzahl der Teile T_1 , T_2 und T_3 ermittelt werden, die zur Herstellung von je einem Stück des Enderzeugnisses erforderlich sind.

Lösung mit Hilfe der Aufeinanderfolge linearer Abbildungen:

1) Veranschaulichung der Verflechtung durch einen Graphen (Bild 11)

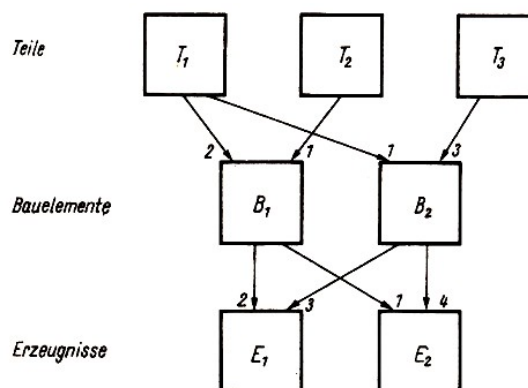


Bild 11

2) Mathematische Formulierung des Problems

$$\begin{aligned}
 I. \quad E_1 &= 2B_1 + 3B_2 \\
 E_2 &= 1B_1 + 4B_2 \\
 II. \quad B_1 &= 2T_1 + 1T_2 + 0T_3 \\
 B_2 &= 1T_1 + 0T_2 + 3T_3
 \end{aligned}$$

3) Nacheinanderausführung der linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 2(2T_1 + 1T_2 + 0T_3) + 3(1T_1 + 0T_2 + 3T_3) \\
 E_2 &= 1(2T_1 + 1T_2 + 0T_3) + 4(1T_1 + 0T_2 + 3T_3) \\
 E_1 &= 7T_1 + 2T_2 + 9T_3 \\
 E_2 &= 6T_1 + 1T_2 + 12T_3
 \end{aligned}$$

4) Ergebnis:

Zur Herstellung von einem Stück des Erzeugnisses E_1 werden 7 Teile T_1 , 2 Teile T_2 , und 9 Teile T_3 , zur Herstellung von einem Stück des Erzeugnisses E_2 werden 6 Teile T_1 , 1 Teil T_2 und 12 Teile T_3 benötigt.

Lösung mit Hilfe der Matrizenmultiplikation:

Wie im Abschnitt 2.4. dargestellt wurde, sind Matrizen geeignet, lineare Abbildungen zu beschreiben. Deshalb kann unter Verwendung der Koeffizientenmatrix

für Tabelle 9a
$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

für Tabelle 9b
$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Der Nacheinanderausführung der linearen Abbildungen entspricht die Multiplikation der Koeffizientenmatrizen in folgender Weise:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

○ Arbeitsauftrag 3/10:

Überprüfen Sie durch Anwendung der Matrizenmultiplikation die Richtigkeit dieser Darstellung! Diese wesentlich kürzere Darstellung führt zum gleichen Ergebnis.

□ Beispiel 3/20:

Bei der Berechnung der Lohnkosten, die bei der Herstellung eines jeden Erzeugnisses für jeden Kunden anfallen, sind folgende Daten gegeben:

Der Arbeitsaufwand in Stunden je Arbeitsplatz und je Erzeugnis durch die "Aufwandsmatrix" **A** in

Tabellenform (Tabelle 10)

Erzeugnis	Aufwand in Stunden am Arbeitsplatz	Matrizenform
	1 2 3 4 5	
a	2 1 4 5 0	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
b	1 4 2 5 2	
c	0 1 0 3 4	

3.8 Aufgaben

1. Sind die folgenden Matrizen in der Produktbildung \mathbf{AB} verkettbar ?

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Geben Sie den Typ der folgenden Matrizen an!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2^2 & 6 \\ 1 & 4 & 3^2 \\ 2 & 5 & 3^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3-a & 4 \\ 2a & 4 & a-1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In welcher Reihenfolge sind beide Matrizen verkettbar?

3. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie!

a) $\mathbf{F} = \mathbf{AB}$; b) $\mathbf{G} = \mathbf{BC}$; c) $\mathbf{H} = \mathbf{CA}$; d) $\mathbf{K} = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$; e) $\mathbf{L} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
f) $\mathbf{M} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$; g) $\mathbf{N} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$; h) $\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$; i) $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}$; k) $\mathbf{R} = (\mathbf{AB})^T$

4. Bilden Sie jeweils die Produktmatrix!

a) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Beweisen Sie die folgenden Sätze! Es wird vorausgesetzt, dass die Matrizen verkettbar sind.

a) Die Transponierte des Produkts zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der Transponierten der beiden Matrizen in umgekehrter Reihenfolge.

(Behauptung: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$)

b) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

(λ beliebige reelle Zahl) Drücken Sie diesen Satz in Worten aus!

6. Gegeben sind die linearen Abbildungen I, II, III. Wie lautet die Abbildung in Matrixform, in

der \mathbf{x} durch \mathbf{z} ausgedrückt wird?

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2u_1 + u_2 - 2u_3 \\ x_2 = u_1 + 3u_3 \\ x_3 = 2u_2 - 2u_3 \end{array} \right\} I \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3 \\ u_2 = 2v_1 + v_2 \\ u_3 = v_1 + 2v_3 \end{array} \right\} II \quad \left. \begin{array}{l} v_1 = -3z_2 + 3z_3 \\ v_2 = 2z_1 + 2z_2 - z_3 \\ v_3 = 3z_1 - z_2 \end{array} \right\} III$$

7. Gegeben seien die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} . Berechnen Sie mit Hilfe des Falkschen Schemas die Produktmatrix \mathbf{ABCD} !

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Zur Berechnung der Lohnkosten, die bei der Herstellung verschiedener Erzeugnisse für jeden Kunden anfallen, sind folgende Daten bekannt (vol. Beispiel 3/20):
Arbeitsaufwand (Tabelle 13):

		Erzeugnis			
		1	2	3	4
Tabelle 13	a	1,2	0,8	2,1	3,0
	b	0,5	1,3	0,2	2,8
	c	1,0	1,1	1,8	2,5

Bedarf (Tabelle 14)

Lohnkosten (Tabelle 15):

Tabelle 14: Kunde	Erzeugnisse in Stück		
	a	b	c
K	3	7	5
L	2	4	0
M	1	6	2

Tabelle 15: Arbeitsplatz	Lohnkosten in M
	1
2	5,60
3	6,70
4	8,10

9. Die Verflechtung einzelner Teile, Baugruppen, die aus Teilen zusammengesetzt sind, und Enderzeugnisse sei durch einen Graphen gegeben (Bild 12).

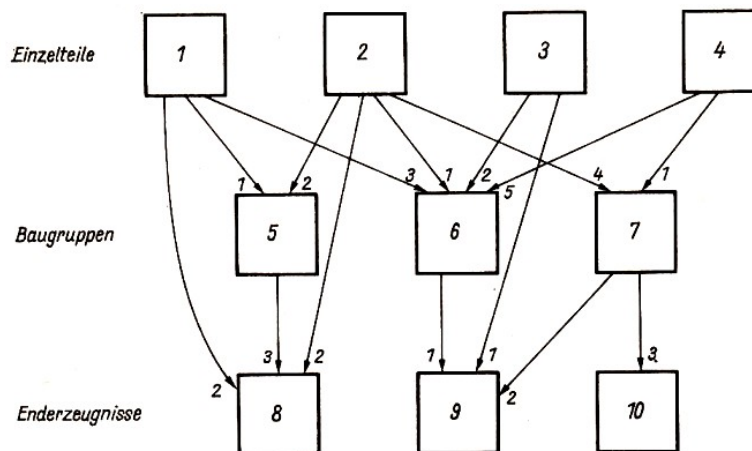


Bild 12

Stellen Sie die Verflechtungsmatrix auf und ermitteln Sie, wie viele Einzelteile zur Herstellung eines jeden Enderzeugnisses benötigt werden

4 Lineare Transformationen durch Matrizen

4.1 Die lineare Punktabbildung

Im Abschnitt 2.4. wurde die lineare Abbildung definiert. Dort konnten wir feststellen, dass jede Matrix \mathbf{A} vom Typ (m, n) mit Hilfe der Vorschrift $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung des Vektorraumes \mathfrak{B}^n in den Vektorraum \mathfrak{B}^m bewirkt.

Wir können hierbei die Matrix \mathbf{A} als einen linearen Operator auffassen.

Wir wenden uns nun speziell dem zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraum zu in der Absicht, der Matrizenrechnung eine geometrische Interpretation zu geben. Fassen wir wiederum die Matrizendarstellung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

als Vorschrift auf und nehmen wir ein geeignetes Koordinatensystem an, so vermittelt die Matrix \mathbf{A} eine lineare Transformation des Vektors \mathbf{x} in den Vektor \mathbf{y} .

Seien die Koordinaten der Punkte X bzw. Y durch die Komponenten der Vektoren \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} beschrieben, dann bildet die durch die quadratische Matrix \mathbf{A} vom Typ $(2, 2)$ bzw. $(3, 3)$ vermittelte lineare Transformation alle Punkte X des zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraumes in Punkte Y desselben Vektorraumes ab.

$$\text{Für } \mathfrak{B}^{(2)} \text{ gilt } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für } \mathfrak{B}^{(3)} \text{ gilt } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Eine rechteckige Matrix vom Typ $(2, 3)$ bewirkt eine Abbildung des dreidimensionalen Vektorraumes in die Ebene. Dafür gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 4/1:

Der Punkt $X(1; 4)$ soll durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.

Lösung:

Für den Originalpunkt $X(1; 4)$ können durch die lineare Transformation

$$y_1 = 2x_1 + x_2 \quad , \quad y_2 = 3x_1 - 2x_2$$

die Koordinaten des Bildpunktes Y berechnet werden:

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -5; \quad Y(6; -5)$$

In Matrizendarstellung: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad y_1 = 6, y_2 = -5$$

Man erhält das gleiche Ergebnis.

Geometrische Veranschaulichung: Dem Vektor \mathbf{x} , der dem Punkt X zugeordnet ist, wird ein Vektor \mathbf{y} und damit der Punkt Y zugeordnet (Bild 13).

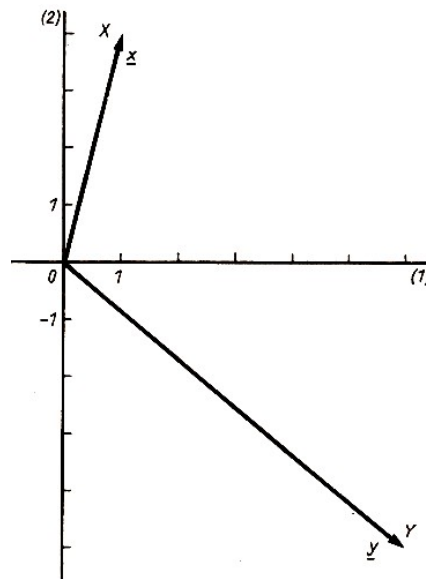


Bild 13

□ Beispiel 4/2:

Der Punkt $X(1; 2; 3)$ soll durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.

Lösung:

Durch die lineare Transformation

$$y_1 = x_2 + 2x_3, \quad y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3, \quad y_3 = -x_1 + x_3$$

können für den Originalpunkt $X(1; 2; 3)$ die Koordinaten des Bildpunktes Y berechnet werden:

$$y_1 = 8, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 2; \quad Y(8; 3; 2).$$

Das gleiche Ergebnis erhält man wesentlich kürzer bei Anwendung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Veranschaulichung (3) in Kavalierperspektive (Bild 14):

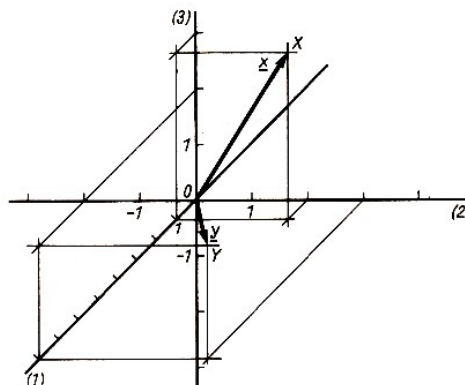


Bild 14

□ Beispiel 4/3:

Der Punkt $X(2; 3; -3)$ soll durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ in die (1),(2)-Ebene abgebildet werden.

Lösung:

Durch die lineare Transformation

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad y_2 = 2x_1 + 2x_3$$

können für den Originalpunkt $X(2; 3; -3)$ die Koordinaten des Bildpunktes Y berechnet werden: $y_1 = 5, y_2 = -2, Y(5; -2)$.

Das gleiche Ergebnis erhält man bei Anwendung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Veranschaulichung (Bild 15):

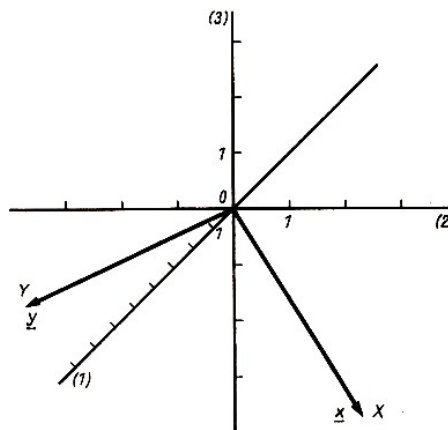


Bild 15

Eine lineare Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ führt nicht nur einen Punkt in seinen Bildpunkt über, sondern alle Originalpunkte einer geometrischen Figur in ihre zugehörigen Bildpunkte. Durch eine lineare Transformation erhält im allgemeinen jede geometrische Figur eine andere Gestalt, und ihr Bild entsteht an einer anderen Stelle des, Koordinatensystems.

□ Beispiel 4/4:

Das Dreieck XYZ soll durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ abgebildet werden. Das Bild soll

Dreieck $X'Y'Z'$ heißen.

Die Eckpunkte des Originals seien gegeben durch $X(1; 2; 3), Y(0; 1; 1), Z(2; 3; 1)$.

Lösung:

Durch die lineare Transformation

$$x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad x'_2 = x_2 + 2x_3, \quad x'_3 = x_1 + 2x_2$$

können für den Punkt $X(1; 2; 3)$ die Koordinaten des Bildpunktes X' berechnet werden. Werden x_i bzw. x'_i durch y_i bzw. y'_i und schließlich durch z_i bzw. z'_i ersetzt, so können auch die

Koordinaten der Bildpunkte Y' (aus Y) und Z' (aus Z) berechnet werden:

$$\begin{aligned} x'_1 = 7, \quad x'_2 = 8, \quad x'_3 = 5; & \quad X'(7; 8; 5) \\ y'_1 = 2, \quad y'_2 = 3, \quad y'_3 = 2; & \quad Y'(2; 3; 2) \\ z'_1 = 8, \quad z'_2 = 5, \quad z'_3 = 8; & \quad Z'(8; 5; 8) \end{aligned}$$

Die Anwendung der Matrizenmultiplikation führt schneller zu dem gleichen Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{x}' : & \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}' = (7; 8; 5)^T \\ \mathbf{Ay} = \mathbf{y}' : & \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}' = (2; 3; 2)^T \\ \mathbf{Az} = \mathbf{z}' : & \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{z}' = (8; 5; 8)^T \end{aligned}$$

Diese Abbildung kann auch durch $\mathbf{D}' = \mathbf{AD}$ dargestellt werden, wobei $\mathbf{D} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ und $\mathbf{D}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ sind (Bild 16).

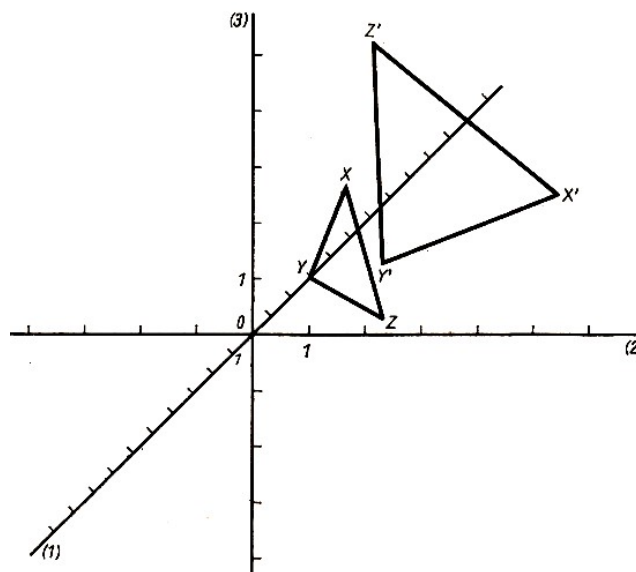


Bild 16

Im dreidimensionalen Raum hat die lineare Abbildung die Eigenschaft, lineare Gebilde wiederum in lineare Gebilde zu überführen, d. h., es werden Geraden in Geraden und Ebenen in Ebenen überführt. Aus diesem Grunde heißt die Abbildung "linear".

4.2 Matrizendarstellung einfacher geometrischer Abbildungen der Ebene

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, durch welche Matrizen bestimmte Abbildungen von Punkten der Ebene bewirkt werden.

Abbildung in den Koordinatenursprung

Durch die Nullmatrix $\mathbf{0}$ werden alle Vektoren \mathbf{x} in den Nullvektor $\mathbf{0}$ abgebildet. Das bedeutet,

dass durch die Nullmatrix alle Punkte der Ebene in den Koordinatenursprung transformiert werden.

$$\mathbf{y} = \mathbf{0x} = \mathbf{o} \quad \text{mit } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Geometrische Veranschaulichung (Bild 17):

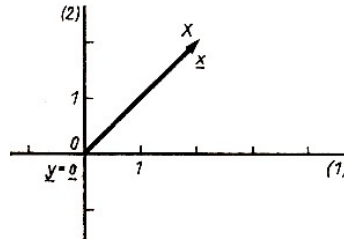


Bild 17

Identische Abbildung

Durch die Einheitsmatrix \mathbf{E} werden alle Vektoren \mathbf{x} in sich selbst abgebildet. Das bedeutet, dass durch die Einheitsmatrix alle Punkte der Ebene in sich selbst transformiert werden.

Geometrische Veranschaulichung (Bild 18):

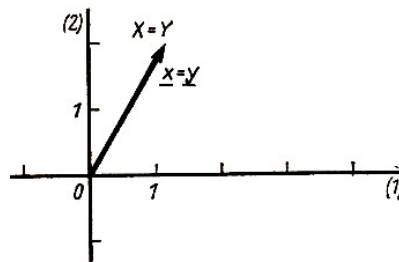


Bild 18

Abbildung durch Verschiebung

Die Vektoraddition $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ bewirkt eine Verschiebung des Vektors \mathbf{x} um den Vektor \mathbf{c} (Bild 19), wobei $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

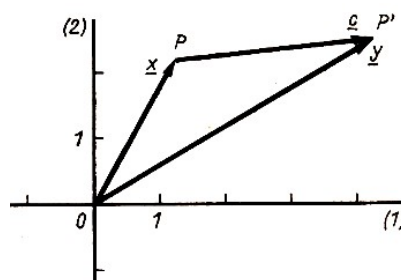


Bild 19

Lineare Transformationen in der Form $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ nennt man homogen. Inhomogene lineare Transformationen enthalten einen Vektor als additives Zusatzglied: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{c}$.

Da die homogenen Transformationen leichter zu handhaben sind, ist man bestrebt, inhomogene lineare Transformationen auf homogene zurückzuführen. Das erfolgt in unserem speziellen Fall $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ zunächst durch Einführung der Einheitsmatrix \mathbf{E} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ex} + \mathbf{c}$$

Ausführlich geschrieben bedeutet das:

$$y_1 = 1x_1 + 0x_2 + c_1 \quad , \quad y_2 = 0x_1 + 1x_2 + c_2$$

Ergänzt man anschließend als dritte Zeile

$$1 = 0x_1 + 0x_2 + 1$$

so entsteht folgende homogene Matrizen­darstellung:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 4/5:

Der Punkt $P(1;3)$ soll durch die Verschiebung um den Vektor $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in den Punkt P' abgebildet werden.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P'(3;4)$$

Geometrische Veranschaulichung (Bild 20):

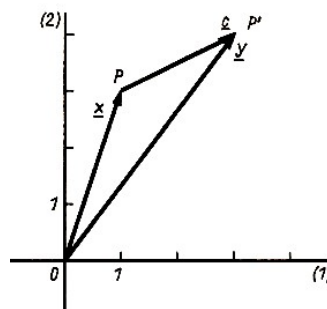


Bild 20

Abbildung durch Spiegelung

Die Spiegelung werde durch die Matrix S in der linearen Transformation $y = Sx$ bewirkt. Wir wollen folgende Fälle unterscheiden:

Spiegelung an	durch die Matrix	Beispiel	Bild
dem Koordinatenursprung	$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	4/6a	21
der (1)-Achse	$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	4/6b	22
der (2)-Achse	$S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	4/6c	23
der Winkelhalbierende des 1. und 3.Quadranten	$S_{W1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	4/6d	24
der Winkelhalbierende des 2. und 4.Quadranten	$S_{W2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	4/6e	25

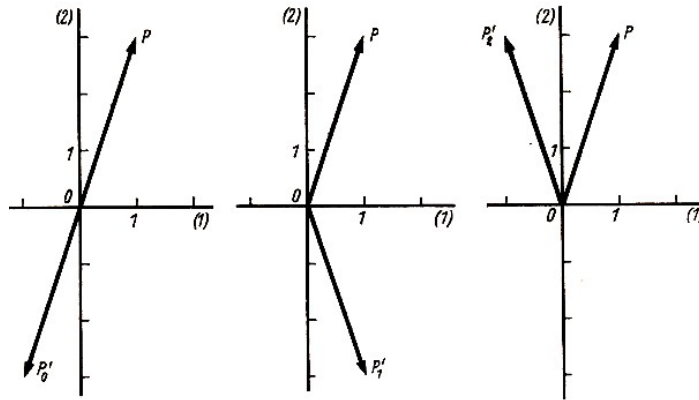


Bild 21, 22, 23

□ Beispiel 4/6:

Gegeben sei der Punkt $P(1;3)$. Es sind die Abbildungen durch die Matrizen S_0 , S_1 , S_2 , S_{W_1} und S_{W_2} durchzuführen.

Lösung:

a) Gegeben: $P(1;3)$ und $S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix S_0 erfolgt die Spiegelung des Punktes P am Koordinatenursprung (Bild 21).

Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{S}_0 \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (-1; -3)^T$ und $P'_0(-1; -3)$.

b) Gegeben: $P(1;3)$ und $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix S_1 erfolgt die Spiegelung des Punktes P an der (1)-Achse (Bild 22). Es gilt:

$\mathbf{y} = \mathbf{S}_1 \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (1; -3)^T$ und $P'_1(1; -3)$.

c) Gegeben: $P(1;3)$ und $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix S_2 erfolgt die Spiegelung des Punktes P an der (2)-Achse (Bild 23). Es gilt:

$\mathbf{y} = \mathbf{S}_2 \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (-1; 3)^T$ und $P'_2(-1; 3)$.

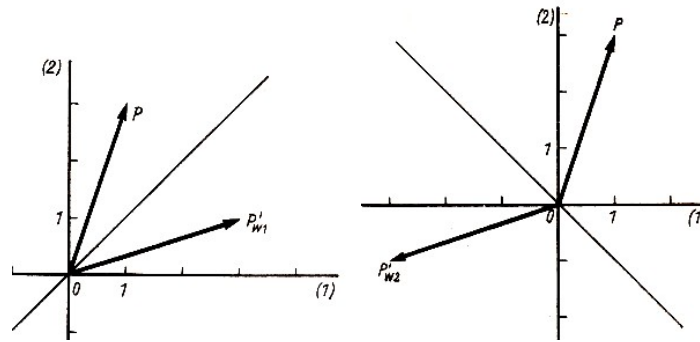
d) Gegeben: $P(1;3)$ und $S_{W_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix S_{W_1} erfolgt die Spiegelung des Punktes P an der Winkelhalbierenden der 1. und 3. Quadranten. Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{S}_{W_1} \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (3; 1)^T$ und $P'_{W_1}(3; 1)$.

Bild 24, 25



e) Gegeben: $P(1; 3)$ und $S_{W_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix S_{W_2} erfolgt die Spiegelung des Punktes P an der Winkelhalbierenden der 2. und 4. Quadranten. Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{S}_{W_2}\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (-3; -1)^T$ und $P'_{W_2}(-3; -1)$.

Abbildung durch Streckung

Die in der Ähnlichkeitslehre behandelte zentrische Streckung vom Ursprung als Streckungszentrum aus erfolgt durch die Skalarmatrix

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

mit $z > 0$ als Streckungsfaktor.

Eine allgemeine Streckung, bei der für die Koordinatenachsen unterschiedliche Streckungsfaktoren gelten, wird durch die Matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

bewirkt. Eine Streckung nur in einer Koordinatenrichtung erfolgt durch die Matrix

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

□ Beispiel 4/7:

Für den Punkt $P(1; 3)$ sollen die Abbildungen durch die Matrizen \mathbf{Z}_0 , \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_1 und \mathbf{Z}_2 mit $z = 2$, $z_1 = 3$ und $z_2 = 2$ ermittelt werden.

Lösung:

a) Gegeben: $P(1; 3)$ und $\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix \mathbf{Z}_0 wird eine Streckung des Vektors \mathbf{x} vom Ursprung aus durchgeführt; da $z = 2$ ist, wird der Betrag des Vektors \mathbf{x} verdoppelt (Bild 26). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{Z}_0\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (2; 6)^T$ und $P'_0(2; 6)$

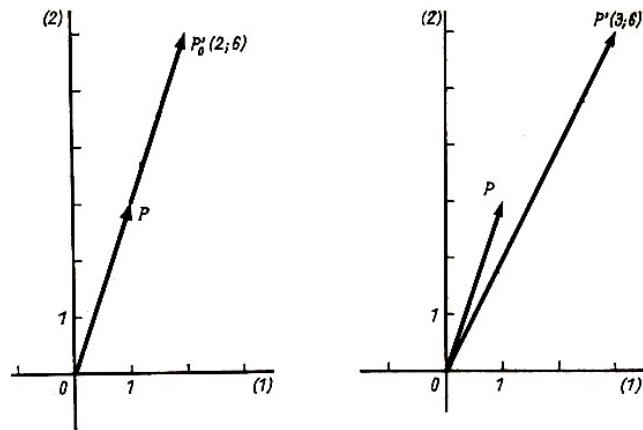


Bild 26, 27

b) Gegeben: $P(1;3)$ und $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Durch die Matrix \mathbf{Z} erfolgt eine allgemeine Streckung des Vektors \mathbf{x} (Bild 27). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (3;6)^T$ und $P'(3;6)$

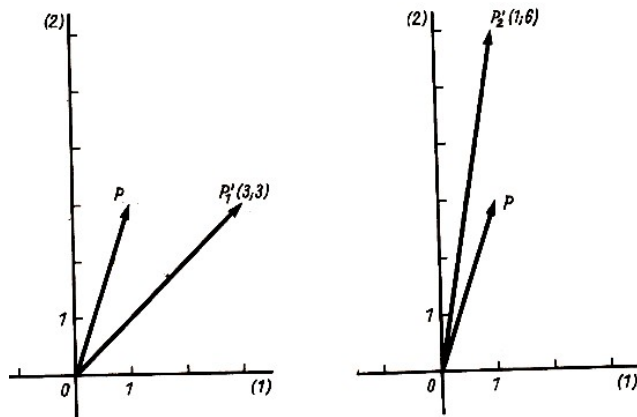


Bild 28, 29

c) Gegeben: $P(1;3)$ und $\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Durch die Matrix \mathbf{Z}_1 erfolgt eine Streckung des Vektors \mathbf{x} nur in Richtung der (1)-Achse (Bild 28). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{Z}_1\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (3;3)^T$ und $P'_1(3;3)$

d) Gegeben: $P(1;3)$ und $\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Durch die Matrix \mathbf{Z}_2 erfolgt eine Streckung des Vektors \mathbf{x} nur in Richtung der (2)-Achse (Bild 29). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{Z}_2\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (1;6)^T$ und $P'_2(1;6)$

Abbildung durch Scherung

Unter einer Scherung versteht man eine Abbildung, bei der jedem Punkt P ein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet wird:

- (1) P' liegt auf einer Parallelen zu einer Koordinatenachse (Scherungsachse).
- (2) Der Abstand des Bildpunktes P' vom Originalpunkt P ist dem Abstand des Originalpunktes von der Scherungsachse proportional.

Bei Scherung parallel zur (1)-Achse ergibt sich nach Bild 30 der Proportionalitätsfaktor als Verhältnis der Differenz der Abszissen beider Punkte und der Ordinate und wird mit r_2 bezeichnet; es gilt also:

$$r_2 = \frac{y_1 - x_1}{x_2}$$

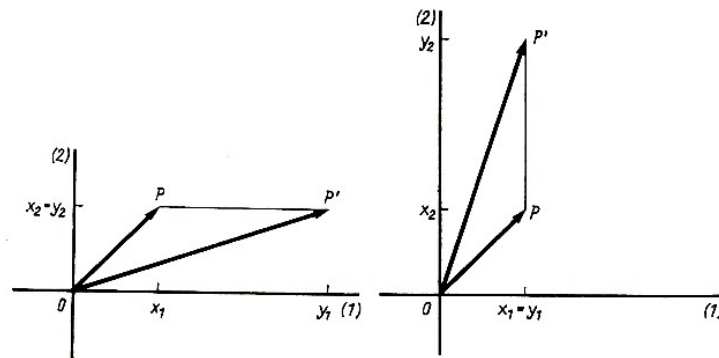


Bild 30, 31

Bei Scherung parallel zur (2)-Achse erhält man nach Bild 31 den Proportionalitätsfaktor, der hierbei mit r_1 bezeichnet wird, entsprechend; es gilt also:

$$r_1 = \frac{y_2 - x_2}{x_1}$$

Eine Scherung parallel zur (1)-Achse wird durch die Matrix (Bild 30)

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Scherung parallel zur (2)-Achse wird durch die Matrix (Bild 31)

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

bewirkt.

□ Beispiel 4/8:

Für den Punkt $P(1; 3)$ sollen die Abbildungen durch die Matrizen \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 mit $r_1 = 2$ und $r_2 = 3$ ermittelt werden.

Lösung:

a) Gegeben: $P(1; 3)$ und $\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Durch die Matrix \mathbf{R}_1 erfolgt eine Scherung parallel zur (1)-Achse (Bild 32). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{R}_1 \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (10; 3)^T$ und $P'_1(10; 3)$

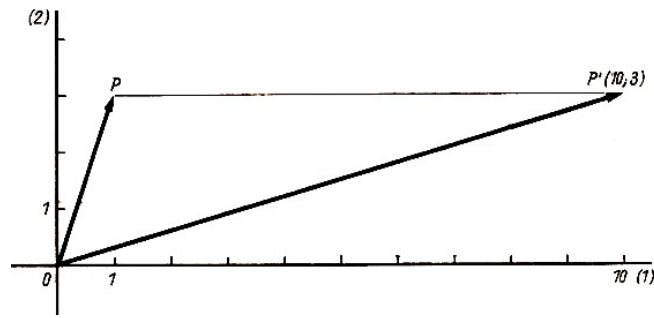


Bild 32

b) Gegeben: $P(1;3)$ und $\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Durch die Matrix \mathbf{R}_2 erfolgt eine Scherung parallel zur (2)-Achse (Bild 33). Es gilt: $\mathbf{y} = \mathbf{R}_2 \mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $\mathbf{y} = (1;5)^T$ und $P'_2(1;5)$

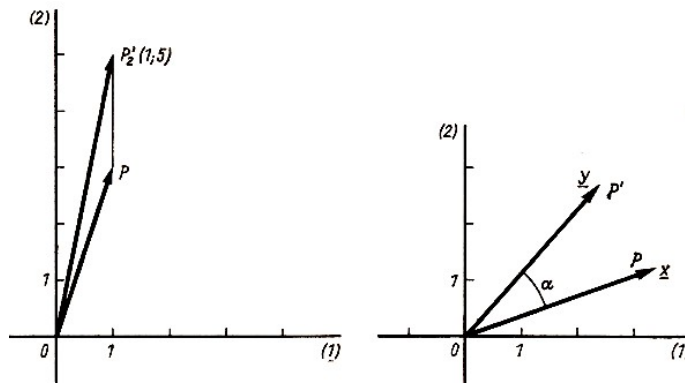


Bild 33, 34

Abbildung durch Drehung

Die Drehung eines Vektors \mathbf{x} um den Koordinatenursprung um den Winkel α erfolgt durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

Geometrische Veranschaulichung erfolgt im Bild 34.

Herleitung der "Drehmatrix":

Aus Bild 35 ist ersichtlich, in welcher Weise y_1 und y_2 durch x_1 und x_2 gebildet werden können.

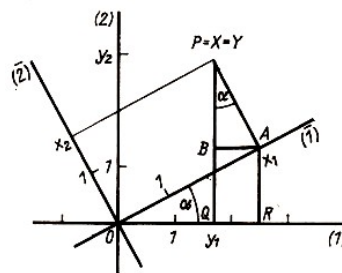


Bild 35

Der Punkt P kann sowohl als Punkt X im (1),(2)-Koordinatensystem durch seine Koordinaten x_1 und x_2 ausgedrückt werden als auch als Punkt Y im (1),(2)-Koordinatensystem durch die

Koordinaten y_1 und y_2 :

$$y_1 = \overline{OQ} = \overline{OR} - \overline{QR} = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \quad \alpha < 90^\circ$$

$$y_2 = \overline{PQ} = \overline{BQ} + \overline{PB} = \overline{AR} + \overline{PB} = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

In Matrizendarstellung:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Eine Drehung um den Winkel $\alpha = 90^\circ$ wird durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bewirkt.

4.3 Nacheinanderausführung linearer Transformationen

Durch die Matrix \mathbf{A} wird mit Hilfe einer linearen Transformation der Vektor \mathbf{x} in den Vektor \mathbf{y} abgebildet. Wird nun auf den Vektor \mathbf{y} eine weitere Transformation durch die Matrix \mathbf{B} angewendet, so entsteht der Bildvektor \mathbf{z} . Es werden zwei Transformationen nacheinander ausgeführt: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ und $\mathbf{z} = \mathbf{By}$.

Sie sind einer Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{BAx} = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$ gleichwertig. Die Nacheinanderausführung linearer Transformationen ist also auf die Matrizenmultiplikation zurückzuführen.

■ Beispiel 4/9:

Gegeben sei der Punkt $P(3; 2)$. Es sind nacheinander folgende Transformationen auszuführen:

1. Transformation: Spiegelung an der (2)-Achse
2. Transformation: Zentrische Streckung vom Ursprung aus mit $z = 2$

Lösung (Bild 36):

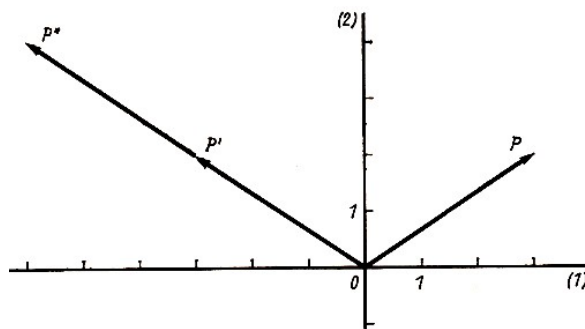


Bild 36

1. $\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P'(-3; 2)$
2. $\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P''(-6; 4)$

Die Matrizenmultiplikation ergibt den Bildvektor \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}_0 \mathbf{S}_2 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Durch zwei nacheinander ausgeführte Drehungen um den Koordinatenursprung (erste Drehung um den Winkel α , zweite Drehung um den Winkel β können die Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinusfunktionen in folgender Weise hergeleitet werden (Bild 37):

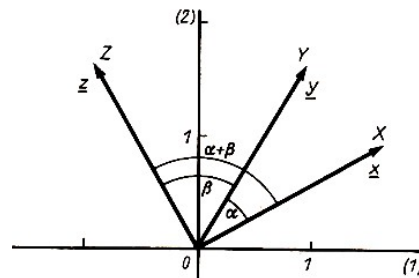


Bild 37

Bei der Drehung um den Winkel α ($-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) wird durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

der Vektor \mathbf{x} in den Vektor \mathbf{y} abgebildet. Anschließend wird durch die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

bei der Drehung um den Winkel β der Vektor \mathbf{y} in den Vektor \mathbf{z} abgebildet. Die resultierende Abbildung wird durch die Matrizenmultiplikation $\mathbf{z} = \mathbf{BAx} = \mathbf{Cx}$ gegeben.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits wurde die Drehung um den Winkel $(\alpha + \beta)$ herbeigeführt, so dass die Transformation des Vektors \mathbf{x} in den Vektor \mathbf{z} durch die Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann.

Vergleichen wir die entsprechenden Elemente der Matrix \mathbf{C} in beiden Darstellungen, so erhalten wir die bekannten Additionstheoreme der Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

4.4 Aufgaben

1. Wenden Sie die Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ auf die gegebenen Punkte an, und zeichnen Sie Original- und Bildpunkt jeder Aufgabe in ein besonderes Koordinatensystem ein!

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; P(4; -3)$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; P(-5; -1; 3)$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P(1; 3; 2)$$

2. Gegeben sei der Punkt $P(3; -1)$. Führen Sie nacheinander folgende Transformationen aus!

(1) Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten

(2) Verschiebung um den Vektor $\mathbf{c} = (3; -1)^T$

(3) Zentrische Streckung vom Ursprung aus um $z = 1,5$

a) Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch!

b) Stellen Sie die Transformationen in Matrizenform dar, bilden Sie die resultierende Transformation mit Hilfe der Matrizenmultiplikation und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeichnerischen Lösung!

Verändern Sie die Reihenfolge der auszuführenden Transformationen, z.B. (3), (1), (2)! Zu welchem Ergebnis gelangen Sie?

3. Durch die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sei (in dieser Reihenfolge) die resultierende Abbildung der Strecke \overline{PQ} bestimmt.

Gegeben: $P(3; 3)$, $Q(5; 1)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie $\overline{P'''Q'''}$ rechnerisch!

b) Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch, indem Sie die Abbildungen nacheinander ausführen!

4. Durch welche Skalarmatrix \mathbf{A} wird der Punkt $P(2; -3)$ in den Punkt $P'(5; -7, 5)$ abgebildet?

5 Der verkettete Algorithmus

5.1 Matrizenschreibweise linearer Gleichungssysteme

In dem einleitenden Beispiel 1/2 (Abschnitt 1.1.) wurde die Aufgabe gestellt, ein lineares Gleichungssystem von vier Gleichungen mit den vier Variablen I_1, I_2, I_3, I_4 zu lösen. Dabei zeigte sich, dass die Lösung dieser Aufgabe unter Verwendung der aus dem obligatorischen Mathematikunterricht bekannten Verfahren sehr aufwendig war. Wir wollen deshalb zur Vereinfachung der Rechnung ein stark schematisiertes Verfahren entwickeln, das auf der Anwendung der Matrizenrechnung basiert.

Bekanntlich beruhen die zur Lösung linearer Gleichungssysteme von zwei bzw. drei Gleichungen mit zwei bzw. drei Variablen in der Schule verwendeten Verfahren (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additionsverfahren) auf der Methode der schrittweisen Elimination der einzelnen Variablen, wobei es dem Lösenden überlassen bleibt, in welcher Weise die Gleichungen zusammengefasst werden.

Bei umfangreichen Gleichungssystemen (z. B. solchen mit 2000 und mehr Gleichungen und ebenso vielen Variablen) sind die genannten Verfahren unzweckmäßig.

Die Eliminationsmethode muss systematisch eingesetzt werden. Wir wollen die von Carl Friedrich Gauß entwickelte Methode zur schrittweisen Elimination der Variablen - den Gaußschen Algorithmus⁵ - in einer übersichtlich angeordneten, rationalen und leicht kontrollierbaren Form, die der polnische Mathematiker T. Banachiewicz im Jahre 1938 eingeführt hat, kennenlernen. Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= k_m \end{aligned}$$

können wir abkürzend die Matrizendarstellung

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$$

schreiben, wobei $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m,n}$ die Koeffizientenmatrix, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ der Vektor der Variablen, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$ der Vektor der konstanten rechten Seiten sind.

Die Aufgabe, das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ zu lösen, bedeutet, bei vorgeschriebener Matrix \mathbf{A} und vorgegebenem Vektor \mathbf{k} denjenigen Vektor \mathbf{x} zu ermitteln, für den die lineare Relation $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ wahr ist.

Es ist nicht möglich, in diesem Zusammenhang die vollständige Theorie über lineare Gleichungssysteme zu entwickeln. Wir wenden uns zunächst dem Spezialfall der quadratischen Koeffizientenmatrix zu. Es sollen n Gleichungen zur Ermittlung von n Variablen gegeben sein, wobei wir fordern, dass die Gleichungszeilen miteinander verträglich und nicht voneinander abhängig⁶ sein sollen.

⁵Unter einem Algorithmus versteht man eine genaue Vorschrift, nach der ein gewisses System von Operationen in einer bestimmten Reihenfolge auszuführen ist und nach der man alle Aufgaben eines gegebenen Typs lösen kann. (Nach Trachtenbrot, B. A.: Wieso können Automaten rechnen? VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.)

⁶Zwei Gleichungen sind voneinander linear abhängig, wenn die eine Gleichung durch Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Faktor in die andere Gleichung umgeformt werden kann.

Weiter verlangen wir, dass $\mathbf{k} \neq \mathbf{o}$ ist. Wir werden also zunächst inhomogene lineare Gleichungssysteme behandeln.

5.2 Äquivalente Gleichungssysteme

Bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der Eliminationsmethode müssen wir durch geeignete Zusammenfassung einzelner Gleichungszeilen schrittweise die Zahl der Variablen verringern, bis nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrigbleibt, aus der dann diese Variable ermittelt werden kann.

Im Prozess der Umformung entsteht ein zu dem gegebenen äquivalentes "gestaffeltes" Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= l_1 \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= l_2 \\ &\dots \\ b_{nn}x_n &= l_n \end{aligned}$$

▷ Definition 5/1:

Zwei Systeme aus n linearen Gleichungen mit n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n heißen zueinander äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

Wurde aus der letzten Gleichung eines gestaffelten Gleichungssystems x_n berechnet, kann durch Einsetzen der reellen Zahl für x_n in der vorhergehenden Gleichungszeile x_{n-1} ermittelt werden. Durch rückläufiges Einsetzen der berechneten x_i erhält man ein geordnetes n -Tupel reeller Zahlen, das die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems darstellt.

Bei der schrittweisen Elimination der Variablen ist es erforderlich, Linearkombinationen einzelner Gleichungszeilen zu bilden. Unter einer Linearkombination von zwei Gleichungen eines linearen Gleichungssystems wollen wir diejenige Gleichung verstehen, die entsteht, wenn wir die gegebenen Gleichungen mit reellen Zahlen multiplizieren und anschließend addieren.

□ Beispiel 5/1: Aus den Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 = 4 & & | \cdot 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 & & | \cdot 1 \end{array}$$

erhalten wir durch Multiplikation mit den angegebenen Faktoren und anschließender Addition beider Gleichungen die Linearkombination $4x_1 + 5x_2 = 11$.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems erfüllt auch jede Linearkombination des Systems.

Aus einem Gleichungssystem entsteht ein dazu äquivalentes System, wenn

- zwei oder mehrere Gleichungen miteinander vertauscht werden,
- eine Gleichung mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl multipliziert wird,
- zu einer Gleichung des Systems das Vielfache einer anderen Gleichung dieses Systems addiert wird.

5.3 Der Gaußsche Algorithmus

Der in der Praxis tätige Mathematiker ist bestrebt, den Prozess der Lösung eines linearen Gleichungssystems in eine endliche Folge von Einzelschritten zu zerlegen, die eindeutig aus-

föhrbar sind. Er gibt für alle Aufgaben einer Art eine genaue Vorschrift an, nach der gewisse Operationen in einer bestimmten Reihenfolge auszuführen sind. Wir sagen, er entwickelt einen Algorithmus.

Das von Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) entwickelte Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht in der systematischen schrittweisen Umformung eines gegebenen Gleichungssystems in ein dazu äquivalentes gestaffeltes Gleichungssystem.⁷

Aus $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ oder

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= k_m \end{aligned}$$

soll folgen $\mathbf{Bx} = \mathbf{l}$ oder

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= l_1 \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= l_2 \\ &\dots \\ b_{nn}x_n &= l_n \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{B} ist eine obere Dreiecksmatrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Im einzelnen bestehen folgende Aufgaben:

1. Es ist eine Rechenvorschrift zu entwickeln, die angibt, wie man vom gegebenen zum gestaffelten Gleichungssystem gelangt.
2. Aus der letzten Zeile des gestaffelten Systems findet man sofort die Lösung x_n . Die anderen Lösungen x_{n-1}, \dots, x_2, x_1 erhält man durch rückläufiges Einsetzen der bereits gefundenen Lösungen in die vorangehenden Gleichungszeilen des gestaffelten Gleichungssystems.

Wir wollen die erste Aufgabe am Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen vorbereiten und am Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen erläutern.

□ Beispiel 5/2:

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 & (a_{11} \neq 0) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2 \end{aligned}$$

Wir bilden eine Linearkombination, indem wir die erste Zeile mit $\frac{a_{21}}{-a_{11}}$ und die zweite Zeile mit

⁷Interessierten Lesern wird die Lektüre von Wussing, H.: Carl Friedrich Gauss. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974, empfohlen.

1 multiplizieren und anschließend beide Gleichungen addieren:

$$\begin{array}{r} \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{12}x_2 = \frac{a_{21}}{-a_{11}}k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = k_2 \\ \hline \left(\frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{12} + a_{22} \right) x_2 = \frac{a_{21}}{-a_{11}}k_1 + k_2 \end{array}$$

Schreibt man abkürzend für

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22} = b_{22} \quad \text{und für} \quad -\frac{a_{21}}{a_{11}}k_1 + k_2 = l_2$$

und setzt man die Koeffizienten der ersten Zeile des gegebenen Gleichungssystems $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $k_1 = l_1$, so entsteht das gestaffelte Gleichungssystem

$$\begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = l_1 \\ b_{22}x_2 = l_2 \end{array}$$

x_2 kann sofort aus der zweiten Zeile berechnet werden; x_1 folgt aus der ersten Zeile durch Einsetzen von x_2 .

□ Beispiel 5/3:

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit drei Variablen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1 \tag{I}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2 \tag{II}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3 \tag{III}$$

Ziel der Umformung ist es, ein gestaffeltes Gleichungssystem zu entwickeln.

Lösung:

In der ersten Eliminationsstufe bilden wir folgende zwei Linearkombinationen:

- Wir multiplizieren (I) mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{11}}$ und addieren dieser Gleichung zu (II).

- Wir multiplizieren (I) mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{31} = \frac{a_{31}}{-a_{11}}$ und addieren dieser Gleichung zu (III).

Im einzelnen erhalten wir:

$$\begin{array}{r} \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{21}}{-a_{11}}k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2 \\ \hline \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22} \right) x_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} + a_{23} \right) x_3 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}k_1 + k_2 \end{array} \tag{II'}$$

sowie

$$\begin{array}{r} \frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{31}}{-a_{11}}k_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3 \\ \hline \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} + a_{32} \right) x_2 + \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} + a_{33} \right) x_3 = -\frac{a_{31}}{a_{11}}k_1 + k_3 \end{array} \tag{III'}$$

(II) und (III') bilden ein Zwischengleichungssystem. Wir wollen abkürzend schreiben:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = k'_2 \quad (II')$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = k'_3 \quad (III')$$

In der zweiten Eliminationsstufe bilden wir folgende Linearkombination: Wir multiplizieren (II') mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{32} = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}$ und addieren diese Gleichung und (III').

Im einzelnen:

$$\begin{array}{r} \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}a'_{22}x_2 + + \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}a'_{23}x_3 = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}k'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = k'_3 \\ \hline \left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{22} + a'_{33} \right) x_3 = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}k'_2 + k'_3 \end{array} \quad (III'')$$

Wir wollen dafür abkürzend wie folgt schreiben: $a''_{33}x_3 = k''_3$ Das gestaffelte Gleichungssystem erhalten wir, wenn wir jeweils die ersten Gleichungen der Zwischengleichungssysteme zu einem neuen Gleichungssystem zusammenfassen:

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = k'_2 \\ a''_{33}x_3 = k''_3 \end{array}$$

Wenn wir die Koeffizienten des gestaffelten Gleichungssystems mit b_{ik} und die Konstanten auf den rechten Seiten mit l_i bezeichnen, dann erhalten wir:

$$\begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = l_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = l_2 \\ b_{33}x_3 = l_3 \end{array}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Variablen x_i erfolgt wiederum durch rückläufiges Einsetzen der bereits ermittelten Variablen in die jeweils vorangehende Gleichung.

Wir wollen die Lösung eines linearen Gleichungssystems mittels des Gaußschen Algorithmus nunmehr an einem Zahlenbeispiel verdeutlichen.

□ Beispiel 5/4:

Der Lösungsvektor des Gleichungssystems

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \quad (I)$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \quad (II)$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \quad (III)$$

soll ermittelt werden.

Lösung:

1. Eliminationsstufe:

Wir bilden eine Linearkombination, indem wir Zeile (I) mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{11}} = \frac{2}{-1} = -2$ multiplizieren und zu Zeile (II) addieren. Daraus erhalten wir

$$-3x_2 - 2x_3 = 2 \quad (II')$$

Wir bilden eine weitere Linearkombination, indem wir die Zeile (I) mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{31} = \frac{a_{31}}{-a_{11}} = -1$ multiplizieren und zu Zeile (III) addieren. Daraus erhalten wir

$$-7x_2 - 5x_3 = 4 \quad (\text{III}')$$

Das Zwischengleichungssystem lautet also:

$$-3x_2 - 2x_3 = 2 \quad (\text{II}')$$

$$-7x_2 - 5x_3 = 4 \quad (\text{III}')$$

2. Eliminationsstufe:

Aus dem Zwischengleichungssystem bilden wir eine Linearkombination, indem wir die Zeile (II) mit dem "Eliminationskoeffizienten" $c_{32} = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}} = -\frac{7}{3}$ multiplizieren und zu Zeile (III') addieren. Wir erhalten:

$$-\frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \quad (\text{III}''')$$

Das gestaffelte Gleichungssystem lautet dann:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$

$$-3x_2 - 2x_3 = 2$$

$$-\frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Variablen x_1, x_2, x_3 erfolgt rückläufig, mit der 3. Zeile beginnend: $x_3 = 2$.

Zur Berechnung von x_2 setzt man $x_3 = 2$ in die Zeile (II') ein: $x_2 = 2$.

x_1 berechnet man unter Verwendung von x_2 und x_3 aus Zeile (I): $x_1 = 3$.

Die Probe wird in (II) und (III) des gegebenen Gleichungssystems durchgeführt, Der Lösungsvektor dieser Aufgabe lautet: $\mathbf{x} = (3; -2; 2)^T$.

Zusammenfassung:

Der Gaußsche Algorithmus besteht aus folgenden Schritten:

1. Festlegen der Eliminationszeile. Das wird im allgemeinen die erste Zeile sein.
2. Elimination der Variablen x_1 aus sämtlichen Gleichungen durch Multiplikation der Zeile (I) mit dem Eliminationskoeffizienten c_{i1} und nachfolgender Addition zur i -ten Zeile. Dadurch entsteht das erste Zwischengleichungssystem mit $(n - 1)$ Gleichungen und $(n - 1)$ Variablen.
3. Elimination der weiteren Variablen x_2, x_3, \dots, x_{n-1} aus den vorangehenden Zwischengleichungssystemen, bis nur noch eine Gleichung mit der Variablen x_n verbleibt.
4. Zusammenfassung der ersten Gleichungszeilen eines jeden Zwischengleichungssystems zum gestaffelten Gleichungssystem.
5. Auflösung des gestaffelten Gleichungssystems nach den Variablen $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ durch rückläufiges Einsetzen der bereits ermittelten Variablen in die jeweils vorangehende Gleichung.

5.4 Der verkettete Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Da der Aufwand an Schreibearbeit bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus durch das Niederschreiben der Zwischengleichungssysteme noch be-

trächtlich groß ist, wenden wir uns der verketteten Form des Gaußschen Algorithmus zu, wie sie von dem polnischen Mathematiker Tadeus Banachiewicz entwickelt wurde.

Er hatte erkannt, dass sich bei der Umformung eines linearen Gleichungssystems in ein gestaffeltes Gleichungssystem aus einer quadratischen Koeffizientenmatrix \mathbf{A} eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{B} bilden lässt und dass die Eliminationskoeffizienten zu einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{C} zusammengefasst werden können.

□ Beispiel 5/6:

Die Koeffizientenmatrix des Gleichung im Beispiel 5/4 lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

die obere Dreiecksmatrix des gestaffelten Gleichungssystems heißt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

die Matrix der Eliminationskoeffizienten ist eine untere Dreiecksmatrix, deren Elemente in der Hauptdiagonalen zweckmäßigerweise gleich -1 gesetzt werden:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir die Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{B} ,

$$\mathbf{CB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

so erhalten wir die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} mit negativem Vorzeichen. Wir vermuten also, dass

$$\mathbf{CB} = -\mathbf{A} \quad \text{oder} \quad -\mathbf{CB} = \mathbf{A} \quad (*)$$

gilt.

▷ Satz 5/1:

Zu jeder (regulären⁸) quadratischen Matrix \mathbf{A} gibt es genau eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{B} und genau eine untere Dreiecksmatrix \mathbf{C} , für die gilt:

$$-\mathbf{CB} = \mathbf{A}$$

Auf den Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten.

Übertragen wir diese Erkenntnis auf die Matrizendarstellung linearer Gleichungssysteme, so gilt für die Umformung des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ in das dazu äquivalente gestaffelte Gleichungssystem $\mathbf{Bx} = \mathbf{l}$:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ ist wegen Satz 5/1 gleichbedeutend mit $-\mathbf{CBx} = \mathbf{k}$. Andererseits gilt wegen $\mathbf{Bx} = \mathbf{l}$ die Beziehung $-\mathbf{CBx} = -\mathbf{Cl}$. Folglich ist $\mathbf{k} = -\mathbf{Cl}$. (**)

⁸Der Begriff "regulär" wird in Definition 5/3 noch festgelegt.

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des verketteten Algorithmus verwenden wir ein erweitertes Tableau, in das außer den Elementen der Koeffizientenmatrix auch die Elemente des Vektors der konstanten rechten Seiten eingetragen werden. Es ist zweckmäßig, im Tableau die rechten Seiten von der Koeffizientenmatrix zu trennen und eine Kontrollspalte anzuschließen (Tableau 12).

Unter das Tableau für das gegebene Gleichungssystem werden in der im Tableau 12 angegebenen Weise die Elemente der oberen Dreiecksmatrix (Koeffizientenmatrix des gestaffelten Gleichungssystems) und der unteren Dreiecksmatrix (Matrix der Eliminationskoeffizienten) sowie der Vektor der konstanten rechten Seiten des gestaffelten Gleichungssystems eingetragen und die Kontrollspalte vorgesehen.

Die Elemente $c_{ii} = -1$ der Eliminationskoeffizienten werden aus Platzgründen nicht aufgeschrieben. Sie müssen aber bei den späteren Rechnungen berücksichtigt werden. Für ein Gleichungssystem von drei Gleichungen und drei Variablen (vgl. Beispiel 5/3) hat das Tableau folgendes Aussehen (Tableau 12):

Tableau 12

a_{11}	a_{12}	a_{13}	k_1	Kontroll- spalte
a_{21}	a_{22}	a_{23}	k_2	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	k_3	
b_{11}	b_{12}	b_{13}	l_1	
c_{21}	b_{22}	b_{23}	l_2	
c_{31}	c_{32}	b_{33}	l_3	
x_1	x_2	x_3	-1	

Die Elemente der Matrizen **C** und **B** werden zur übersichtlichen Darstellung des Tableaus durch einen Linienzug voneinander getrennt. Die Aufgabe der Lösung eines linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen und drei Variablen besteht aus zwei Teilen:

- Teil 1: Berechnung der Elemente der Matrizen **C** und **B** sowie des Vektors **I**.
- Teil 2: Berechnung der Elemente des Lösungsvektors **x**.

Teil 1:

Die Berechnung der Elemente der Matrizen **C** und **B** sowie des Vektors **I** erfolgt abwechselnd: Zuerst werden die Elemente c_{ik} für eine Zeile ermittelt, dann werden mit ihnen die Elemente b_{ik} und l_i der gleichen Zeile des Tableaus berechnet. Wir haben zwei Möglichkeiten, die Elemente der Matrizen **C** und **B** bzw. des Vektors **I** zu ermitteln:

1. Vergleich der Darstellungen in der Übersicht "Gegenüberstellung des Gaußschen Algorithmus und des verketteten Algorithmus"
2. Nach den Gleichungen (*) und (**) gelten folgende Zusammenhänge:

$$-\mathbf{CB} = \mathbf{A} \quad \text{und} \quad -\mathbf{CI} = \mathbf{k}$$

Im einzelnen: $-\mathbf{CB} = \mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bzw. $-\mathbf{CI} = \mathbf{k}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln zum besseren Verständnis des Zusammenhangs von Gaußschem Algorithmus und verkettetem Algorithmus einerseits und der Matrizendarstellung andererseits für die Berechnung der Elemente der Matrizen **C** und **B** sowie des Vektors **l** eine Schrittfolge (Vergleichen Sie dazu die nachfolgende Übersicht:

Gegenüberstellung des Gaußschen Algorithmus und des verketteten Algorithmus

Gaußscher Algorithmus

(1) Gegeben:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1 \quad | \cdot \frac{a_{21}}{-a_{11}} \quad | \cdot \frac{a_{31}}{-a_{11}} \quad \text{(I)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2 \quad \text{(II)}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3 \quad \text{(III)}$$

(2) 1. Eliminationsstufe

$$\frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{21}}{-a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{21}}{-a_{11}}k_1 \quad \text{(I)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2 \quad \text{(II)}$$

$$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22}\right)x_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} + a_{23}\right)x_3 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}k_1 + k_2$$

mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = c_{21}$:

$$\begin{aligned} (c_{21}a_{12} + a_{22})x_2 + (c_{21}a_{13} + a_{23})x_3 &= c_{21}k_1 + k_2 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= k'_2 \end{aligned} \quad \text{(II')}$$

$$\frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{11}x_1 + \frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{31}}{-a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{31}}{-a_{11}}k_1 \quad \text{(I)}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3 \quad \text{(III)}$$

$$\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} + a_{32}\right)x_2 + \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} + a_{33}\right)x_3 = -\frac{a_{31}}{a_{11}}k_1 + k_3 \quad \text{(III')}$$

mit $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = c_{31}$:

$$\begin{aligned} (c_{31}a_{12} + a_{32})x_2 + (c_{31}a_{13} + a_{33})x_3 &= c_{31}k_1 + k_3 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= k'_3 \end{aligned} \quad \text{(III')}$$

(3) Zusammenfassung im Zwischengleichungssystem:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = k'_2 \quad | \cdot \frac{a'_{32}}{-a'_{22}} \quad \text{(II')}$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = k'_3$$

Verketteter Algorithmus

a_{11}	a_{12}	a_{13}	k_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	k_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	k_3

mit $c_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	k_1
c_{21}	a'_{22}	a'_{23}	k'_2

mit

$$a'_{22} = c_{21}a_{12} + a_{22} = b_{22}$$

$$a'_{23} = c_{21}a_{13} + a_{23} = b_{23}$$

$$k'_2 = c_{21}k_1 + k_2 = l_2$$

und $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $k_1 = l_1$

b_{11}	b_{12}	b_{13}	l_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	l_2

$c_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$:

$$a'_{32} = c_{31}a_{12} + a_{32}$$

$$a'_{33} = c_{31}a_{13} + a_{33}$$

$$k'_3 = c_{31}k_1 + k_3$$

(4) 2. Eliminationsstufe

$$\frac{a'_{32}}{-a'_{22}}a'_{22}x_2 + \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}a'_{23}x_3 = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}}k'_2$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = k'_3$$

$$\left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{22} + a'_{33}\right)x_3 = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}k'_2 + k'_3$$

mit $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}} = c_{32}$:

$$(c_{32}a'_{23} + a'_{33})x_3 = c_{32}k'_2 + k'_3$$

$$a''_{33}x_3 = k''_3 \quad (\text{III}')$$

$$c_{32} = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}} = -\frac{c_{31}a_{12} + a_{32}}{b_{22}};$$

b_{11}	b_{12}	b_{13}	l_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	l_2
c_{31}	c_{32}	a'_{33}	k''_3

mit

$$a''_{33} = c_{32}a'_{23} + a'_{33}$$

$$= c_{32}b_{23} + c_{31}a_{13} + a_{33}$$

$$= c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + a_{33} = b_{33}$$

$$k''_3 = c_{32}k'_2 + k'_3$$

$$= c_{32}l_2 + c_{31}k_1 + k_3$$

$$= c_{31}l_1 + c_{32}l_2 + k_3$$

b_{11}	b_{12}	b_{13}	l_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	l_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	l_3

Bestimmung des Lösungsvektors

Die Berechnung der Elemente des Lösungsvektors erfolgt aus dem gestaffelten Gleichungssystem: Aus

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = l_1$$

$$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = l_2$$

$$b_{33}x_3 = l_3$$

folgt

$$x_3 = \frac{l_3}{b_{33}}$$

$$x_2 = \frac{l_2 - b_{23}x_3}{b_{22}}$$

$$x_1 = \frac{l_1 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2}{b_{11}}$$

b_{11}	b_{12}	b_{13}	l_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	l_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	l_3
x_1	x_2	x_3	-1

Multiplikation der Elemente des Vektors **I** der rechten Seiten mit (-1), da durch die negativen Diagonalelemente dividiert werden muss:

$$\frac{(-1)l_3}{-b_{33}} = x_3$$

$$\frac{(-1)l_2 + x_3b_{23}}{-b_{22}} = x_2$$

$$\frac{(-1)l_1 + x_3b_{13} + x_2b_{12}}{-b_{11}} = x_1$$

Schritt 1:

Die erste Zeile von **B** ist der ersten Zeile von **A** gleich, weil die erste Zeile des gegebenen Gleichungssystems in die erste Zeile des gestaffelten Systems übernommen wird. Es gilt also $a_{1k} = b_{1k}$ für $k = 1, \dots, n$.

Schritt 2:

Für die erste Eliminationsstufe gilt: Im Gaußschen Algorithmus wurde der Eliminationskoeffizient c_{21} durch $c_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{11}} = \frac{a_{21}}{-b_{11}}$ bestimmt.

Andererseits erhält man das Element c_{21} aus der Skalarproduktbildung der 2. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit der 1. Spalte von **B**: Aus

$$-c_{21}b_{11} = a_{21} \quad \text{folgt} \quad c_{21} = \frac{a_{21}}{-b_{11}}$$

In entsprechender Weise findet man die weiteren Eliminationskoeffizienten der 1. Spalte von

C:

$$c_{i1} = \frac{a_{i1}}{-b_{11}} \quad \text{für } i = 3, 4, \dots, n$$

Schritt 3:

Für die erste Eliminationsstufe gilt überdies:

1. Die Elemente der 2. Zeile der Matrix **B** können sowohl der vorhergehenden Übersicht entnommen werden:

$$\begin{aligned} c_{21}a_{12} + a_{22} &= a'_{22} = b_{22} & \text{bzw.} & & b_{22} &= c_{21}b_{12} + a_{22} \\ c_{21}a_{13} + a_{23} &= a'_{23} = b_{23} & \text{bzw.} & & b_{23} &= c_{21}b_{13} + a_{23} \end{aligned}$$

als auch durch Skalarproduktbildung der 2. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit der 2. bzw. 3. Spalte von **B** ermittelt werden:

$$\begin{aligned} -c_{21}b_{12} + b_{22} &= a_{22} & ; & & b_{22} &= c_{21}b_{12} + a_{22} \\ -c_{21}b_{13} + b_{23} &= a_{23} & ; & & b_{23} &= c_{21}b_{13} + a_{23} \end{aligned}$$

2. Die Umformung des Elements k_2 in das Element l_2 erfolgt analog. Der Darstellung in der Übersicht kann entnommen werden:

$$c_{21}k_1 + k_2 = k'_2 = l_2 \quad ; \quad l_2 = c_{21}l_1 + k_2$$

Andererseits erhält man das Element l_2 durch Skalarproduktbildung der 2. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit dem Vektor **I**:

$$-c_{21}l_1 + l_2 = k_2 \quad ; \quad l_2 = c_{21}l_1 + k_2$$

Für die zweite Eliminationsstufe werden die Schritte 2 und 3 analog durchgeführt (siehe Übersicht).

Schritt 2':

In der Übersicht kann aus der Gegenüberstellung des Gaußschen Algorithmus und des verketteten Algorithmus

$$c_{32} = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}} = \frac{c_{31}a_{12} + a_{32}}{-a'_{22}} = \frac{c_{31}b_{12} + a_{32}}{-b_{22}}$$

entnommen werden.

Andererseits erhalten wir das Element c_{32} , durch Skalarproduktbildung der 3. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit der 2. Spalte von **B**:

$$-c_{31}b_{12} - c_{32}b_{22} = a_{32} \quad , \quad c_{32} = \frac{c_{31}b_{12} + a_{32}}{-b_{22}}$$

Schritt 3':

1. Das Element b_{33} der Matrix **B** entnehmen wir der Gegenüberstellung (Übersicht):

$$a''_{33} = c_{32}a'_{23} + a'_{33}$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$a''_{33} = c_{32}b_{23} + c_{31}b_{13} + a_{33} = c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + a_{33} = b_{33}$$

Andererseits finden wir das Element b_{33} durch die Skalarproduktbildung der 3. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit der 3. Spalte von **B**:

$$-c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23} + b_{33} = a_{33} \quad , \quad b_{33} = c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + a_{33}$$

2. Das Element l_3 entnehmen wir der Gegenüberstellung:

$$k_3'' = c_{32}k_2' + k_3' = c_{32}l_2 + c_{31}k_1 + k_3 = c_{31}l_1 + c_{32}l_2 + a_{33} = l_3$$

Andererseits finden wir das Element l_3 durch die Bildung des Skalarprodukts der 3. Zeile von $-\mathbf{C}$ mit dem Vektor \mathbf{l} :

$$-c_{31}l_1 - c_{32}l_2 + l_3 = k_3 \quad , \quad l_3 = c_{31}l_1 + c_{32}l_2 + k_3$$

Zusammenstellung der Beziehungen zur Berechnung der Elemente der Dreiecksmatrizen \mathbf{C} und \mathbf{B} beim verketteten Algorithmus:

1. Zeile: $a_{1k} = b_{ik}; k = 1, \dots, n$

1. Spalte: $c_{i1} = \frac{a_{i1}}{-b_{11}}; i = 2, \dots, n$

Eliminationskoeffizienten:

$$c_{ik} = \frac{a_{ik} + \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij}b_{jk}}{-b_{kk}}; \quad i = 3, \dots, n; \quad k = i - 1$$

Elemente der Matrix \mathbf{B} :

$$b_{ik} = a_{ik} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}b_{jk}; \quad i = 2, \dots, n; \quad k = i, \dots, n$$

Elemente des Vektors \mathbf{l} :

$$l_i = k_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}l_j; \quad i = 1, \dots, n$$

Merkregel für die Berechnung der Elemente der Dreiecksmatrizen \mathbf{B} und \mathbf{C} :

1. Die Eliminationskoeffizienten c_{ik} entstehen als Summe aus dem Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix \mathbf{C} mit der k -ten Spalte der Matrix \mathbf{B} und dem Element a_{ik} , dividiert durch das negative Diagonalelement von \mathbf{B} .

2. Die Elemente der Matrix \mathbf{B} , b_{ik} , werden als Summe aus dem Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix \mathbf{C} mit der k -ten Spalte der Matrix B und dem Element a_{ik} gebildet.

3. Die Elemente des Vektors l_i der konstanten rechten Seiten werden als Summe aus dem Skalarprodukt der i -ten Zeile von \mathbf{C} mit dem Vektor \mathbf{l} und dem Element k_i gebildet.

Teil 2: Die Berechnung der Elemente des Lösungsvektors \mathbf{x} erfolgt aus dem gestaffelten Gleichungssystem. Die Übersicht zeigt die Gegenüberstellung des Gaußschen Algorithmus mit dem verketteten Algorithmus.

Wir berechnen x_3 , indem wir (-1) mit l_3 multiplizieren und durch $-b_{33}$ dividieren.

Wir berechnen x_2 , indem wir (-1) mit l_2 und x_3 mit b_{23} multiplizieren und die Summe der Produkte durch $-b_{22}$ dividieren.

Wir berechnen x_1 , indem wir (-1) mit l_1 , x_3 mit b_{13} und x_2 mit b_{12} multiplizieren und die Summe der Produkte durch $-b_{11}$ dividieren.

Die Elemente des Lösungsvektors werden in die untere Zeile des Tableaus eingetragen.

□ Beispiel 5/6:

Die Aufgabe des Beispiels 5/4 soll mit Hilfe des verketteten Algorithmus gelöst werden.
Gegeben:

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \\x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5\end{aligned}$$

Lösung (Tableau 13):

Tableau 13:

A	1	4	3	1	k
	2	5	4	4	
	1	-3	-2	5	
B	1	4	3	1	l
	-2	-3	-2	2	
C	-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	i
	x^T	3	-2	2	

Der Lösungsvektor \mathbf{x} lautet: $\mathbf{x} = (3; -2; 2)^T$

Erläuterung der Rechnung:

$$\begin{aligned}c_{21} &= \frac{2}{-1} = -2, & c_{31} &= \frac{1}{-1} = 1 \\b_{22} &= (-2) \cdot 4 + 5 = -8 + 5 = -3 \\b_{23} &= (-2) \cdot 3 + 4 = -6 + 4 = -2 \\l_2 &= (-2) \cdot 1 + 4 = -2 + 4 = 2 \\c_{32} &= \frac{(-1) \cdot 4 - 3}{-(-3)} = -\frac{7}{3} \\b_{33} &= (-1) \cdot 3 + \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (-2) - 2 = -\frac{1}{3} \\l_3 &= (-1) \cdot 1 - \frac{7}{3} \cdot 2 + 5 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Berechnung der Elemente des Lösungsvektors:

$$\begin{aligned}\frac{(-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{-\left(-\frac{1}{3}\right)} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 = x_3 \\ \frac{(-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2)}{-(-2)} &= -2 = x_2 \\ \frac{(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 4}{-1} &= 3 = x_1\end{aligned}$$

Rechenkontrolle:

Um mögliche Rechenfehler schnell lokalisieren zu können, berechnet man die Elemente der Kontrollspalte auf zwei verschiedenen Wegen:

1. Man bildet die Summe der Elemente einer Zeile der um das Element des Vektors der rechten Seiten erweiterten Matrix **B**.
2. Man bildet das Skalarprodukt der Eliminationskoeffizienten einer Zeile mit den Elementen der Kontrollspalte. Vergleich mit **l**.

□ Beispiel 5/7:

Wir führen für das Beispiel 5/6 die Rechenkontrolle durch (Tableau 14):

Tableau 13:

				Kontrollspalte	
A	1	4	3	1	9
	2	5	4	4	15
	1	-3	-2	5	1
B	1	4	3	1	9
	-2	-3	-2	2	-3
C	-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
	x^T	3	-2	2	-1

Erläuterung der Rechenkontrolle:

2. Zeile: Zeilensumme -3

Skalarprodukt $(-2) \cdot 9 + 15 = -18 + 15 = -3$ Der Vergleich zeigt Übereinstimmung.

3. Zeile: Zeilensumme -1

Skalarprodukt $(-1 \cdot 9 + (-\frac{7}{3}) \cdot (-3) - 1) = -9 + 7 + 1 = -1$ Der Vergleich zeigt Übereinstimmung.

Die Probe muss durch Einsetzen der Lösungen in das gegebene Gleichungssystem erfolgen.

○ Arbeitsauftrag 5/1:

Entwickeln Sie aus der Skalarproduktbildung die Zusammenhänge zur Berechnung der Eliminationskoeffizienten, der Elemente der oberen Dreiecksmatrix **B** und des Vektors **I** für ein lineares Gleichungssystem von 4 Gleichungen und 4 Variablen! Stellen Sie die Beziehungen zur der Berechnung der Elemente des Lösungsvektors für dieses Gleichungssystem auf!

Zusammenfassung:

Der verkettete Algorithmus ermöglicht eine sehr übersichtliche Form der Darstellung und Einsparung von Schreibearbeit bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. Durch eine Rechenkontrolle ist die schnelle Lokalisierung von Rechenfehlern möglich.

Tableau 15:

	A	k	z
	B	l	z'
C			
	x^T	-1	

Die Rechnung erfolgt zweckmäßig in nebenstehendem Tableau (Tableau 15).

5.5 Bemerkungen zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

In den bisherigen Ausführungen über lineare Gleichungssysteme hatten wir wesentliche Einschränkungen gemacht. Sie bestanden darin, dass

- die Gleichungssysteme aus n Gleichungen mit n Variablen bestehen,
- die Gleichungszeilen voneinander unabhängig und miteinander verträglich sein sollten.

Überdies trat in den bisher behandelten Beispielen nie der Fall ein, dass in der oberen Dreiecksmatrix **B** des gestaffelten Gleichungssystems ein Diagonalelement Null war. Das hätte bei der Ermittlung des Lösungsvektors zu Schwierigkeiten geführt, weil bei der Berechnung der Elemente des Lösungsvektors auch das negative Diagonalelement dividiert werden muss.

Auf diese Weise erreichten wir, dass nur solche Gleichungen behandelt wurden, die eindeutig lösbar waren.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall inhomogener linearer Gleichungssysteme ($\mathbf{k} \neq \mathbf{o}$) zu:

Wenn m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Variablen eines Systems sind, so müssen wir die Fälle $m < n$, $m = n$ und $m > n$ unterscheiden. Zur Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme führen wir den Rangbegriff ein: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren heißt Rang der Matrix.

▷ Satz 5/2:

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (ohne Beweis).

Bei der Umformung eines Gleichungssystems in ein gestaffeltes System werden Linearkombinationen aus zwei Gleichungszeilen gebildet, so dass der Gaußsche Algorithmus (in seiner verketteten Form) zur Rangbestimmung verwendet werden kann.

▷ Satz 5/8:

Ist \mathbf{B} eine Matrix mit $b_{ik} = 0$ für $i > k$, so ist der Rang von \mathbf{B} gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Elemente b_{ii} .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \times & . & . & \dots & . \\ 0 & \times & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \times & \dots & . \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \times \end{pmatrix}$$

mit *times* bedeutet: Das Element ist ungleich Null, . bedeutet: Das Element ist größer, gleich oder kleiner als Null, 0 bedeutet: Das Element ist Null.

Auf den Beweis wird verzichtet.

Wenn $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}$ die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems und (\mathbf{A}, \mathbf{k}) die um den Vektor der konstanten rechten Seiten erweiterte Matrix (Systemmatrix) sind, so ist der Rang der Koeffizientenmatrix $\text{Rg}(\mathbf{A}) < \min(m, n)$ und der Rang der Systemmatrix $\text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) \leq \min(m, n + 1)$.

Bei der Untersuchung der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems ist festzustellen, ob der Rang der Systemmatrix mit dem Rang der Koeffizientenmatrix übereinstimmt oder nicht.

Ohne Beweis sei mitgeteilt:

▷ Satz 5/4:

Dann und nur dann, wenn $\text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = \text{Rg}(\mathbf{A}) = r$ ist, ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem lösbar (Lösbarkeitsbedingung).

Ist diese Bedingung erfüllt, dann bedeutet $r \leq \min(m, n)$, dass $r \leq m$ und $r \leq n$ ist. Deshalb müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

- a) Ist $r = m = n$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar (Normalfall).
- b) Ist $r < m$, so gibt es $(m - r)$ überzählige Gleichungen.
- e) Ist $r < n$, so gibt es $(n - r)$ freie Parameter. Das Gleichungssystem hat eine $(n - r)$ -fache Lösungsmannigfaltigkeit.

□ Beispiel 5/8:

Es sei (\mathbf{B}, \mathbf{l}) eine durch Anwendung des verketteten Algorithmus entstandene erweiterte Matrix des gestaffelten Gleichungssystems. Dann kann (\mathbf{B}, \mathbf{l}) folgende Form haben:

Fall a: z.B. $m = 4, n = 4, r = 4$

$$(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \times & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \times & \cdot \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \cdot \leq 0 \\ 0 := 0 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

Fall b: z.B. $m = 4, n = 3, r = 3$

$$(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \times & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \times & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, es gibt eine überzählige Gleichung.

Fall c: z.B. $m = 3, n = 4, r = 3$

$$(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \times & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; es gibt einen freien Parameter (z. B. x_4). Die Lösungsmanigfaltigkeit ist einfach.

Es ist aber auch möglich, in der Matrix (\mathbf{B}, \mathbf{l}) sowohl freie Parameter als auch überzählige Gleichungen zu erkennen: Wenn $m = 4, n = 6, r = 2$, so gibt es vier freie Parameter (x_3, \dots, x_6) und zwei überzählige Gleichungen:

$$(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

In diesen Schemata äußert sich die Bedingung $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$ darin, dass in den Nullzeilen von \mathbf{B} auch im Vektor \mathbf{l} der rechten Seiten Null steht.

Aus Satz 5/4 folgt, dass ein inhomogenes lineares Gleichungssystem nicht lösbar ist, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der Systemmatrix nicht übereinstimmt, d. h., wenn gilt: $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$.

□ Beispiel 5/9:

Es sei \mathbf{B} eine durch Anwendung des verketteten Algorithmus entstandene Koeffizientenmatrix, (\mathbf{B}, \mathbf{l}) eine in gleicher Weise gebildete Systemmatrix eines gestaffelten Gleichungssystems, dann steht im Falle $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$ in mindestens einer Nullzeile von \mathbf{B} rechts eine von Null verschiedene Zahl:

$$(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{array} \right)$$

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ von m Gleichungen mit n Variablen hat stets die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, wenn die Koeffizientenmatrix den Rang $r = n$ hat. Ist jedoch im Falle $m < n$ der Rang $r < n$, so ist das Gleichungssystem nicht trivial lösbar, d. h., es gibt $(n - r)$ freie Parameter.

5.6 Die Bestimmung des Rangs einer Matrix mit Hilfe des verketteten Algorithmus

Wir wollen die Rangbestimmung mit Hilfe des verketteten Algorithmus an einigen Beispielen zeigen.

□ Beispiel 5/10: Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ hat den Rang $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 3$; denn es gilt (Tableau 16):

Tableau 16:

1	4	3
2	5	4
1	-3	-2
1	4	3
-2	-3	-2
-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Die Berechnung der einzelnen Elemente der Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{C} wurde im Beispiel 5/6 durchgeführt. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

hat wegen $r = n = 3$ nur die triviale Lösung $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

□ Beispiel 5/11:

Der Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist kleiner als n , denn (Tableau 17):

Tableau 17:

2	3	-1
1	-2	-3
1	5	2
2	3	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{1}{2}$	1	0

Die dritte Zeile ist als Linearkombination aus erster und zweiter Zeile aufzufassen. Der Rang ist $r = 2$.

Da $r < n$ ist, besteht in dem homogenen linearen Gleichungssystem Abhängigkeit Die Lösungsmannigfaltigkeit ist $(n - r)$ -fach, hier einfach.

In dem homogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

kann die Variable x_3 beliebig vorgegeben werden. Wählen wir z. B. $x_3 = 1$, dann werden $x_2 = -\frac{5}{7}$ und $x_1 = \frac{11}{7}$.

Da wir für x_3 jede beliebige reelle Zahl einsetzen können, gibt es eine unendliche Anzahl nichttrivialer Lösungen. Setzen wir $x_3 = 0$, dann werden auch $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$, d.h., wir erhalten die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

□ Beispiel 5/12:

Der Rang der Systemmatrix des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

beträgt $r = 2$; denn der verkettete Algorithmus (Tableau 18) ergibt $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = r$.

Tableau 18:

1	-3	2	10
3	-2	-1	9
2	1	-3	-1
1	-3	2	10
-3	7	-7	-21
-2	-1	0	0

Die Lösungsmannigfaltigkeit ist $(n-r)$ -fach. Die Variable x_3 kann beliebig vorgegeben werden. Wählen wir z. B. $x_3 = 1$, so erhalten wir $x_2 = -2$ und $x_1 = 2$.

□ Beispiel 5/13:

Bei dem folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystem besteht Ungleichheit zwischen dem Rang der Koeffizientenmatrix und dem Rang der Systemmatrix des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= -11 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Der verkettete Algorithmus ergibt (Tableau 19):

Tableau 19:

1	1	-4	-11
2	-1	7	20
3	1	-2	-10
1	1	-4	-11
-2	-3	15	42
-3	$-\frac{2}{3}$	0	-5

Da $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Zusammenfassung:

Mit Hilfe des verketteten Algorithmus kann über die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme entschieden und der Rang von Matrizen bestimmt werden.

5.7 Die Determinante einer quadratischen Matrix und ihre Berechnung mit Hilfe des verketteten Algorithmus

Jeder quadratischen Matrix A kann eine reelle Zahl $\det A$, die Determinante dieser Matrix, zugeordnet werden, die in bestimmter Weise gebildet werden kann.

Die Lehre von den Determinanten soll im Rahmen dieser Darstellung nicht behandelt werden. Wir wollen in diesem Zusammenhang die Determinante so definieren, dass wir die bisher erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten der Matrizenrechnung anwenden können. Schließlich wollen wir Determinanten mit Hilfe des verketteten Algorithmus berechnen.

▷ Definition 5/2: Die der quadratischen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

zugeordnete Zahl, die bei Anwendung des verketteten Algorithmus durch das Produkt der Diagonalelemente b_{ii} der oberen Dreiecksmatrix \mathbf{B} gebildet wird, heißt Determinante der Matrix \mathbf{A} und wird mit

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Bemerkung: Diese Definition befindet sich mit anderen Definitionen der Determinante in Einklang.

▷ Definition 5/3:

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} heißt regulär, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$, sie heißt singular, wenn $\det \mathbf{A} = 0$ ist.

Die Determinante einer quadratischen Matrix \mathbf{A} ist genau dann Null, wenn mindestens ein Diagonalelement der oberen Dreiecksmatrix bei Anwendung des verketteten Algorithmus Null ist und auch nach Umstellen der Gleichungen. Null bleibt. Das heißt aber, dass der Rang der Matrix kleiner als n ist.

Im Unterschied zur Gleichheit zweier Matrizen, bei der die an gleicher Stelle stehenden Elemente gleich sein müssen, können zwei Determinanten gleich sein, wenn ihre Elemente verschieden sind.

Da bei der Umwandlung der Koeffizientendeterminante des gegebenen in die des gestaffelten Gleichungssystems Linearkombinationen der Gleichungszeilen gebildet werden, ändert sich auf Grund der Determinantengesetze ihr Wert nicht; es gilt also:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$$

Bei der Berechnung der Determinante einer quadratischen Matrix \mathbf{A} muss

- der verkettete Algorithmus auf die gegebene Matrix \mathbf{A} zur Entwicklung einer oberen Dreiecksmatrix \mathbf{B} angewendet und
- anschließend das Produkt der Diagonalelemente der Matrix \mathbf{B} gebildet werden.

□ Beispiel 5/14:

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Gesucht wird $\det \mathbf{A}$.

Lösung: Verketteter Algorithmus (Tableau 20):

Tableau 20:

1	3	2
-1	0	4
2	9	7
1	3	2
1	3	6
-2	-1	-3

Berechnung der Determinante:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^3 b_{ii} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) = -9$$

5.8 Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen!

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Untersuchen Sie die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme!

$$a) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

3. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 4 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -9 \\ -x_1 + 4x_3 = 9 \\ 2x_1 + 9x_2 + 7x_3 = -21 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ -2x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 15x_3 = 72 \end{cases}, \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 100 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad f) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -17 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}, \quad h) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 37x_3 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 50x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen!

$$a)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b)\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d)\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad e)\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Inversion einer quadratischen Matrix

6.1 Matrizeninversion mit Hilfe des verketteten Algorithmus

Im Abschnitt 5.1. wurde bereits auf die Problematik der Lösung eines linearen Gleichungssystems in der Matrixdarstellung $\mathbf{Ax} = \mathbf{k}$ hingewiesen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Matrixgleichung nach \mathbf{x} aufzulösen.

Wir werden diese Betrachtungen auf Grund der Lösbarkeitsbedingung (Satz 5/4) nur für den Normalfall ($r = m = n$) durchführen können.

Wir fassen die Gleichungen

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{k}_1, \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{Ax}_n = \mathbf{k}_n$$

zu

$$\mathbf{A} \underbrace{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)}_{\mathbf{k}} \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{AX} = \mathbf{K}$$

zusammen.

Wir untersuchen zunächst den Sonderfall $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$.

Dabei wollen wir in Analogie zu der symbolischen Darstellungsweise bei der Lösung der linearen Gleichung $ax = 1$ (mit $a \neq 0$) durch $x = a^{-1}$ für den Sonderfall $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ symbolisch als Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ schreiben.

Da diese Matrix \mathbf{A}^{-1} die Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ erfüllen soll, muss $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ gelten.

Zunächst müssen wir fragen, ob diese Matrix \mathbf{A}^{-1} existiert und ob für die Multiplikation mit der Matrix \mathbf{A}^{-1} das Kommutativgesetz gilt. (Da die Matrix \mathbf{A} quadratisch ist, sind die Matrizen verkettbar.) Anschließend ist für diese Matrix \mathbf{A}^{-1} ein Name einzuführen und ein Weg zur Berechnung dieser Matrix zu entwickeln.

▷ Satz 6/1:

Für den Normalfall linearer Gleichungssysteme gibt es genau eine Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, die die Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ erfüllt.

Beweis (indirekt):

Wir nehmen an, es gäbe nicht genau eine Matrix, die die Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ erfüllt, dann würde es zwei quadratische Matrizen \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 von der gleichen Ordnung wie die Matrix \mathbf{A} geben, für die gilt:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{AB}_2 = \mathbf{E} \quad (1,2)$$

Wird (1) von rechts mit \mathbf{B}_2 und (2) von links mit \mathbf{B}_1 multipliziert, dann werden

$$(\mathbf{B}_1\mathbf{A})\mathbf{B}_2 = \mathbf{EB}_2 = \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{AB}_2) = \mathbf{B}_1\mathbf{E} = \mathbf{B}_1 \quad (1',2')$$

Da die Multiplikation quadratischer Matrizen gleicher Ordnung stets eindeutig ausführbar ist und da das Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation gilt, ist

$$(\mathbf{B}_1\mathbf{A})\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{AB}_2 = \mathbf{B}_1(\mathbf{AB}_2) \quad \text{also} \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$$

d.h., es gibt genau eine Matrix, die die Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ erfüllt, w.z.b.w.

▷ Definition 6/1:

Die zu einer regulären Matrix \mathbf{A} gebildete Matrix \mathbf{X} , die die Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ erfüllt, heißt die zu \mathbf{A} inverse Matrix (oder die Inverse zu \mathbf{A}) und wird mit $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Bei der Bestimmung der inversen Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, d.h. bei der Auflösung der Matrixgleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ nach \mathbf{X} , sind n Gleichungssysteme zu lösen, die alle die gleiche Koeffizientenmatrix \mathbf{A} , aber unterschiedliche rechte Seiten haben:

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{Ax}_n = \mathbf{e}_n,$$

□ Beispiel 6/1:

Bei gegebener Koeffizientenmatrix \mathbf{A} sind für $n = 3$ die drei Gleichungssysteme aus $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ aufzustellen.

Lösung:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sind die drei Gleichungssysteme zu lösen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & \begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} &= 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} &= 0 \end{aligned} \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & \begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} &= 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} &= 0 \end{aligned} \\ \mathbf{Ax}_3 = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; & \begin{aligned} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} &= 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} &= 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Zur Lösung eines solchen Gleichungssystems dient der verkettete Algorithmus.

Der Vorteil der Anwendung dieses Verfahrens bei der Bestimmung der inversen Matrix besteht darin, dass die Umformung der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} in die obere Dreiecksmatrix \mathbf{B} der Koeffizienten des gestaffelten Gleichungssystems und die Bildung der unteren Dreiecksmatrix \mathbf{C} der Eliminationskoeffizienten nur einmal vorgenommen zu werden braucht.

Im Tableau 21 ist die Bestimmung der inversen Matrix durch Zusammenfassung der n Gleichungssysteme angegeben, an das die Kontrollspalte für die Zeilensummen angefügt ist.

Tableau 21:

	A	E	z
B		O	
C			z'
$(\mathbf{A}^{-1})^T$		-E	

Bei der Umformung der Gleichungssysteme können wir die rechten Seiten zu einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} zusammenfassen. Die Berechnung der Lösungsvektoren erfolgt dem verketteten Algorithmus entsprechend mit Hilfe der Matrix $-\mathbf{E}$.

□ Beispiel 6/2:

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Gesucht wird die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} .

Lösung: Anfertigung des Tableaus zur Anwendung des verketteten Algorithmus (Tableau 22):

Tableau 22:

A	1	3	2	1	0	0	7	z
	2	5	3	0	1	0	11	
	-3	-8	-4	0	0	1	-14	
B	1	3	2	1	0	0	7	z'
C	-2	-1	-1	-2	1	0	-3	
	3	1	1	1	1	1	4	
$(\mathbf{A}^{-1})^T$	-4	1	1	-1	0	0	L	
	4	-2	1	0	-1	0	-E	
	1	-1	1	0	0	-1		

Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} lautet:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist zu beachten, dass im verketteten Algorithmus die inverse Matrix in ihrer transponierten Form entsteht.

Probe:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Zusammenfassung:

Die Problematik der Auflösung eines linearen Gleichungssystems führt zur Umkehrung der Matrizenmultiplikation. Für den Normalfall linearer Gleichungssysteme (reguläre Matrix \mathbf{A}) gibt es genau eine Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, die die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}$ erfüllt. Diese Matrix \mathbf{A}^{-1} heißt die zu \mathbf{A} inverse Matrix. Ihre Berechnung erfolgt zweckmäßig in einem Tableau (Tableau 21).

6.2 Das Austauschverfahren zur Bestimmung der inversen Matrix

Ein anderes in der Praxis häufig angewendetes Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix ist das Austauschverfahren. Es beruht auf der Umformung des Gleichungssystems $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ in das System $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ durch schrittweisen Austausch der i -ten Zeile gegen die j -te Spalte des Systems $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Wir verdeutlichen das Austauschverfahren zunächst am Beispiel eines Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen:

Für das Gleichungssystem $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, das ausführlich geschrieben

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad , \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{I}$$

lautet, sei das Schema

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & a_{11} & a_{12} \\ y_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}$$

eingeführt. Es soll in das System $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ umgeformt werden, das ausführlich geschrieben

$$x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \quad , \quad x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \quad (\text{II})$$

lautet. Es besteht damit die Aufgabe, das System (I) durch schrittweisen Austausch der Variablen x_i, y_j in das System (II) umzuformen und für die Durchführung eines solchen Austauschschrittes Umformungsregeln zu entwickeln.

Die Wahl eines Austauschschrittes ist beliebig. Wie noch ersichtlich werden wird, bestimmen jedoch rechnerische Vorteile den ersten Austauschschritt. Soll beispielsweise die i -te Zeile gegen die j -te Spalte ausgetauscht werden, so bilden

- das Element a_{ij} das Hauptelement, auch Pivotelement⁹ genannt,
- die Elemente der i -ten Zeile die Hauptzeile (Pivotzeile) und
- die Elemente der j -ten Spalte die Hauptspalte (Pivotspalte).

Wählen wir zur Vereinfachung der Darstellung im ersten Austauschschritt das Element a_{11} , als Hauptelement (d.h., wir tauschen y_1 gegen x_1 aus), dann erhalten wir aus der ersten Zeile des Systems (I)

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{1}{a_{11}}y_1 + \frac{a_{12}}{-a_{11}}x_2$$

Dabei wird deutlich, dass das Pivotelement $a_{11} \neq 0$ gefordert werden muss. Im Zwischensystem erhalten wir

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}} \quad \text{und} \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{-a_{11}}$$

Setzen wir x_1 in die zweite Zeile des Systems (I) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{21} \left(\frac{y_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 \right) + a_{22}x_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1 - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{22}x_2 \\ &= \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + \left[a_{22} + a_{21} \left(\frac{a_{12}}{-a_{11}} \right) \right] x_2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir im Zwischensystem

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \text{und} \quad b_{22} = a_{22} + a_{21} \left(\frac{a_{12}}{-a_{11}} \right) = \frac{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}}{-a_{11}}$$

(Man vergleiche b_{22} im Beispiel 5/2!)

Das Zwischensystem hat in schematischer Darstellung folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & x_2 \\ \hline x_1 & \frac{1}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{-a_{11}} \\ y_2 & \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} + a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{-a_{11}} \end{array}$$

Hieraus lassen sich für einen Austauschschritt die Umformungsregeln formulieren:

1. Das Hauptelement: $b_{st} = \frac{1}{a_{st}}$ mit $a_{st} \neq 0$
2. Die Elemente der Hauptzeile: $b_{sk} = \frac{a_{sk}}{-a_{st}}$ mit $k \neq t$
3. Die Elemente der Hauptspalte: $b_{it} = \frac{a_{it}}{a_{st}}$ mit $i \neq s$
4. Für alle übrigen Elemente gilt: $b_{ik} = a_{ik} + b_{sk}a_{it}$ mit $i \neq s, k \neq t$

⁹pivot - franz. Angel-, Dreh- oder Hauptpunkt, Hauptstütze

Für die Berechnung des Produkts $b_{sk}a_{it}$ ist es zweckmäßig, die neue Hauptzeile b_{sk} unter dem vorangehenden System als "Kellerzeile" anzubringen.

Nach den obigen Regeln muss nun in einem weiteren Schritt y_2 gegen x_2 ausgetauscht werden.

□ Beispiel 6/3:

Mit Hilfe des Austauschverfahrens soll die zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} gesucht werden.

Lösung:

Schematische Darstellung:

	x_1	x_2
y_1	1	3
y_2	2	7
Kellerzeile	1	-3

1. Austauschschritt: a_{11} wird als Hauptelement (eingerahmt) gewählt, da bei der Anwendung der Umformungsregeln die Division rechnerisch erleichtert wird. Es wird also y_1 gegen x_1 ausgetauscht.

Im Zwischensystem lauten

das Hauptelement $b_{11} = \frac{1}{a_{11}} = 1$.

die Hauptzeile $b_{12} = \frac{a_{12}}{-a_{11}} = \frac{3}{-1} = -3$

Beide Elemente werden unter das alte System als "Kellerzeile" geschrieben.

Die Hauptspalte lautet $b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$.

Nun wird das restliche Element dieses Zwischensystems berechnet:

$$b_{22} = a_{22} + b_{12}a_{21} = 7 + (-3) \cdot 2 = 1$$

Schematische Darstellung:

	y_1	x_2
x_1	1	-3
y_2	2	1
K	-2	1

(Die erst im zweiten Austauschschritt entstehende Kellerzeile wurde bereits eingetragen.)

2. Austauschschritt:

y_2 wird gegen x_2 ausgetauscht, d. h., a_{22} wird Hauptelement (eingerahmt).

Schematische Darstellung:

	y_1	x_2
x_1	1	-3
y_2	2	1

Das Element b_{11} wird hier bestimmt durch $1 + (-2) \cdot (-3) = 1 + 6 = 7$.

Die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} lautet $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Probe:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Für den Fall eines linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen mit drei Variablen soll der erste Austauschschritt durchgeführt werden, wobei a_{11} als Hauptelement gewählt wird: Bei der Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit regulärer Koeffizientenmatrix \mathbf{A} wird die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} gebildet. Im Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

wird die erste Zeile nach x_1 aufgelöst:

$$x_1 = \frac{y_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}}y_1 + \frac{a_{12}}{-a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{-a_{11}}x_3$$

Daraus können wir ablesen:

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}}; b_{12} = \frac{a_{12}}{-a_{11}}; b_{13} = \frac{a_{13}}{-a_{11}}$$

Setzen wir x_1 in die zweite Gleichungszeile ein,

$$\begin{aligned}y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{21} \left(\frac{1}{a_{11}}y_1 + \frac{a_{12}}{-a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{-a_{11}}x_3 \right) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\&= \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + a_{21} \frac{a_{12}}{-a_{11}}x_2 + a_{21} \frac{a_{13}}{-a_{11}}x_3 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\&= \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + \left(a_{22} + a_{21} \frac{a_{12}}{-a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} + a_{21} \frac{a_{13}}{-a_{11}} \right) x_3\end{aligned}$$

so können wir daraus

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}; b_{22} = a_{22} + a_{21} \frac{a_{12}}{-a_{11}}; b_{23} = a_{23} + a_{21} \frac{a_{13}}{-a_{11}}$$

ablesen. (Man vergleiche die Koeffizienten $b_{22} = a'_{22}$ und $b_{23} = a'_{23}$ in der Zeile II' des Beispiels 5/3).

Wir setzen x_1 in die dritte Gleichungszeile ein:

$$\begin{aligned}y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{31} \left(\frac{1}{a_{11}}y_1 + \frac{a_{12}}{-a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{-a_{11}}x_3 \right) + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\&= \frac{a_{31}}{a_{11}}y_1 + \left(a_{32} + a_{31} \frac{a_{12}}{-a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} + a_{31} \frac{a_{13}}{-a_{11}} \right) x_3\end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab:

$$b_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}; b_{32} = a_{32} + a_{31} \frac{a_{12}}{-a_{11}}; b_{33} = a_{33} + a_{31} \frac{a_{13}}{-a_{11}}$$

(Man vergleiche die Koeffizienten $b_{32} = a'_{32}$ und $b_{33} = a'_{33}$ in III' des Beispiels 5/3.)

Schematische Darstellung des Zwischensystems:

	y_1	x_2	x_3
x_1	$\frac{1}{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{-a_{11}}$
y_2	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	$a_{22} + a_{21} \frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$a_{23} + a_{21} \frac{a_{13}}{-a_{11}}$
y_3	$\frac{a_{31}}{a_{11}}$	$a_{32} + a_{31} \frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$a_{33} + a_{31} \frac{a_{13}}{-a_{11}}$

□ Beispiel 6/4:

Die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} ist mit Hilfe des Austauschverfahrens zu bilden.

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}$. (vgl. Beispiel 6/2)

Lösung:

Schematische Darstellung:

	x_1	x_2	x_3
y_1	1	3	2
y_2	2	5	3
y_3	-3	-8	-4
K	1	-3	-2

Hauptelement sei $a_{11} = 1$

Die Kellerzeile wurde bereits aus dem ersten Austauschschritt übernommen.

1. Austauschschritt: y_1 wird gegen x_1 ausgetauscht

	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-3	-2
y_2	2	-1	-1
y_3	-3	1	2
K	2	-1	-1

Hauptelement sei $a_{22} = -1$

2. Austauschschritt: y_2 wird gegen x_2 ausgetauscht

	y_1	y_2	x_3
x_1	-5	3	1
x_2	2	-1	-1
y_3	-1	-1	1
K	-4	4	-1

Hauptelement sei $a_{33} = 1$

3. Austauschschritt: y_3 wird gegen x_3 ausgetauscht

	y_1	y_2	y_3
x_1	-4	4	1
x_2	1	-2	-1
x_3	1	1	1

Die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Probe wurde im Beispiel 6/2 durchgeführt.

6.3 Die Gruppe der regulären Matrizen

Wir können alle quadratischen n -reihigen regulären Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind, zu der Menge M_n zusammenfassen. Diese Menge M_n hat folgende Eigenschaften:

1. Das Produkt zweier Matrizen aus M_n ist wieder eine Matrix aus M_n .
2. Es gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation (vgl. Abschnitt 3.4.).
3. M_n enthält die Einheitsmatrix \mathbf{E} mit der Eigenschaft $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$ für jede Matrix \mathbf{A} aus M_n . \mathbf{E} ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation.
4. Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in M_n$ existiert in M_n genau eine Matrix \mathbf{A}^{-1} , inverse Matrix genannt, mit der Eigenschaft $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$.

Wenn für die Elemente einer Menge eine Rechenoperation (hier die Multiplikation) definiert ist und wenn diese Menge die Eigenschaften 1) bis 4) besitzt, dann heißt diese strukturierte Menge eine Gruppe.

Die Menge M_n der quadratischen regulären Matrizen bildet demnach hinsichtlich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Ein weiteres Beispiel für eine Gruppe ist die Menge der positiven rationalen Zahlen hinsichtlich der Multiplikation. Diese Gruppe ist sogar kommutativ.

○ Arbeitsauftrag 6/1:

- a) Weisen Sie nach, dass die Menge der positiven rationalen Zahlen hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe bildet!
- b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit wir bei dieser Gruppe von einer kommutativen Gruppe sprechen können?
- c) Warum bildet die Menge der quadratischen regulären Matrizen hinsichtlich der Multiplikation keine kommutative Gruppe ?

○ Arbeitsauftrag 6/2:

- a) Formulieren Sie die Eigenschaften, die eine Menge haben muss, wenn sie hinsichtlich der Addition eine kommutative Gruppe bilden soll!
- b) Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen hinsichtlich der Addition eine kommutative Gruppe bildet!

6.4 Matrizengleichungen

Nach der Behandlung des Sonderfalls einer Matrizengleichung von der Form $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ in Abschnitt 6.1. können wir uns nun der Lösung der Gleichung

$$\mathbf{AX} = \mathbf{K}$$

zuwenden.

Die Aufgabe besteht darin, mit Hilfe einer Darstellung in Form eines Tableaus n Gleichungssysteme zu lösen:

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{Ax}_n = \mathbf{k}_n$$

In Analogie zu der in Abschnitt 6.1. gegebenen Lösungsmöglichkeit wird der verkettete Algorithmus angewendet (Tableau 23, nächste Seite):

□ Beispiel 6/5:

Gegeben sei die Matrizengleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{K}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 12 \\ 2 & -8 & -4 \\ 6 & -48 & 72 \end{pmatrix}$$

Es soll \mathbf{X} ermittelt werden.

Tableau 23:

	A	K	z
	B	L	z'
C			
	X^T	-E	

Lösung (Tableau 24):

								K
A	-1	-3	4	-4	-6	12	4	z
	-2	8	-6	2	-8	-4	-10	
	3	-5	15	6	-48	72	43	
B	1	-3	4	-4	-6	12	4	
C	2	2	2	-6	-20	20	-2	z'
	-3	-2	-1	30	10	-4	35	
	197	27	-30	-1	0	0		L
X^T	34	0	-10	0	-1	0		-E
	14	6	4	0	0	-1		

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 197 & 34 & 14 \\ 27 & 0 & 6 \\ -30 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Probe: Durch die Multiplikation von **A** mit **X** erhalten wir **K**:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 197 & 34 & 14 \\ 27 & 0 & 6 \\ -30 & -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 12 \\ 2 & -8 & -4 \\ 6 & -48 & 72 \end{pmatrix}$$

Damit können wir uns nun schwierigeren Matrizengleichungen zuwenden, die vor der Lösung mit Hilfe des verketteten Algorithmus erst in geeigneter Weise umgeformt werden müssen.

□ Beispiel 6/6:

Zwischen den gegebenen quadratischen Matrizen $A, B, C \in M_{(n,n)}$ bestehe die Gleichung $\mathbf{AX} - 2\mathbf{BX} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$.

Es soll die Matrix **X** ($\mathbf{X} \in M_{(n,n)}$) ermittelt werden.

Lösung:

Aus $\mathbf{AX} - 2\mathbf{BX} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$ folgt $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$.

Werden beide Seiten der Gleichung von links - das ist besonders zu beachten - mit der Matrix $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1}$ multipliziert,

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

erhält man wegen $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) = \mathbf{E}$ die Matrix **X**:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

In der numerischen Berechnung bildet man zunächst $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \mathbf{G}$ und $\mathbf{C} - \mathbf{B} = \mathbf{H}$ und kann anschließend die Matrizengleichung $\mathbf{X} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ mit Hilfe des verketteten Algorithmus nach

Beispiel 6/3 lösen.

□ Beispiel 6/7:

Gegeben sei die Matrixgleichung $\mathbf{AX} + 2\mathbf{X} - 3\mathbf{C} = -\mathbf{B}$ mit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in M_{(n,n)}$.

Gesucht sei die Matrix $\mathbf{X} \in M_{(n,n)}$.

Lösung:

Nach Ergänzung des zweiten Summanden der linken Seite durch die Einheitsmatrix ist dieser Fall auf eine Gleichungsform des Beispiels 6/6 zurückgeführt:

$$\begin{aligned}\mathbf{AX} + 2\mathbf{EX} &= \mathbf{B} + 3\mathbf{C} \\ (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\mathbf{X} &= \mathbf{B} + 3\mathbf{C}, \quad \text{wobei } \mathbf{E} \in M_{(n,n)} \\ (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\mathbf{X} &= (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{B} + 3\mathbf{C}) \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{B} + 3\mathbf{C})\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Die Lösung von Matrixgleichungen der Form $\mathbf{AX} = \mathbf{K}$ wird auf die Bildung der inversen Matrix mit Hilfe des verketteten Algorithmus zurückgeführt.

Zur Berechnung der Matrix \mathbf{X} dient ein Tableau (Tableau 23).

6.5 Aufgaben

1. Beweisen Sie, dass $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ gilt, wenn $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(n,n)}$ und regulär! Fassen Sie diesen Satz in Worte!

2. Bilden Sie die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} mit Hilfe des verketteten Algorithmus und machen Sie die Probe!

$$a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad b) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Bilden Sie die zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} mit Hilfe des Austauschverfahrens und machen Sie die Probe!

$$a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad b) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Lösen Sie die Gleichung $\mathbf{B} - 2\mathbf{AX} = \mathbf{C} - 3\mathbf{X}$ nach \mathbf{X} auf! Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Durch Umkehrung der Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ mit regulärer Matrix \mathbf{A} entsteht die inverse Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

a) Bilden Sie die inverse Matrix zur Matrix \mathbf{Z}_0 , die eine zentrische Streckung vom Ursprung aus bewirkt (vgl. Abschnitt 4.2., Abbildung durch Streckung)!

b) Wie lautet die inverse Matrix, die die Umkehrung der Verschiebung in Beispiel 4/5 bewirkt?

7 Matrizenmodelle aus außermathematischen Objektbereichen

Nachdem in den Kapiteln 1 bis 6 die Grundlagen des Matrizenkalküls gelegt worden sind, sollen nun einfache Anwendungsaufgaben aus außermathematischen Objektbereichen behandelt werden. Da die Aufbereitung praxisbezogener Aufgaben gründliche Sachkenntnis voraussetzt, erscheint es zweckmäßig, leicht überschaubare Problemstellungen aus der Ökonomie und aus der Physik des Gleichstromkreises zu betrachten. Einleitend möchten wir einige Bemerkungen zum Modellbegriff machen.

7.1 Bemerkungen zum Modellbegriff

Der Modellbegriff wird in der Mathematik in unterschiedlicher Weise gebraucht. Wie wir im Abschnitt 2.3. gezeigt haben, nennt man jede Interpretation einer algebraischen Struktur ein Modell. Dort wurde erwähnt, dass beispielsweise die Menge der geordneten Zahlenpaare, zwischen denen bestimmte Verknüpfungen festgelegt sind, ein Modell dieser Struktur "Vektorraum" ist.

Andererseits wird von der Seite der Anwender der Mathematik der Modellbegriff im Sinne des Ergebnisses eines Abstraktionsprozesses verstanden. Bei den komplizierten Erscheinungen der objektiven Realität wird bei der Bildung eines Modells von vielen Nebensächlichkeiten abstrahiert, indem nur diejenigen wesentlichen Seiten der Wirklichkeit, die unter einem spezifischen Aspekt von Bedeutung sind, berücksichtigt werden.

Dadurch entsteht ein vereinfachtes und damit ein nützliches (praktikables) Abbild der Realität, das auch Modell genannt wird. Beispiele für solche Modelle sind ähnlich gestaltete Nachbildungen technischer Gegenstände: Um bestimmte physikalische Eigenschaften (Strömungseigenschaften) studieren zu können, werden in hydro- oder aerotechnischen Anlagen ähnlich gestaltete Körper gewissen Bedingungen, wie sie in der Realität existieren, ausgesetzt.

Um eine Diskussionsgrundlage für die zweckmäßigste Gestaltung des Aufbaus eines neuen Stadtteils zu geben, schafft der Architekt ein Modell in verkleinerter Darstellung, aus der die Lage- und Größenverhältnisse entnommen werden können.

Werden zur Formulierung des Modells mathematische Ausdrucksmittel verwendet, erhöht sich seine Allgemeingültigkeit infolge der der Mathematik innewohnenden hohen Abstraktionsstufe.

Oft benötigt man ein System mathematischer Gleichungen bzw. Ungleichungen, um die Verhältnisse zwischen den die Sachverhalte charakterisierenden Größen und ihre örtliche und zeitliche Änderung beschreiben zu können. Wir bezeichnen dann das System mathematischer Gleichungen und Ungleichungen als mathematisches Modell des betreffenden Sachverhalts.

Der Vorteil der mathematischen Modellbildung gegenüber anderen wissenschaftlichen Methoden besteht vor allem in dem hohen Abstraktionsgrad. Mit dem gleichen Modell lassen sich u. U. analoge Sachverhalte aus verschiedenen Wissenschaftszweigen charakterisieren. Die aus dem Modell gezogenen Schlussfolgerungen sind immer richtig, wenn die Voraussetzungen richtig waren, auf denen das Modell entwickelt wurde.

In der Praxis wird die Beschreibung quantitativer Zusammenhänge häufig durch lineare Relationen angestrebt. Im Abschnitt 1.5. wurde bereits auf die Möglichkeit der Linearisierung eines praktischen Problems hingewiesen. Die linearen Zusammenhängen angepasste Darstellungsart ist aber die Matrix und der Matrizenkalkül.

Es ist also möglich, mit ein und demselben Modell, dem Matrizenmodell, unterschiedliche Sachverhalte der objektiven Realität zu beschreiben. So eignet sich die Matrizenrechnung sowohl zur Lösung von Aufgaben aus der Mechanik (Biegeproblem, Schwingungen) als auch zur Berechnung von Gleichstrom- und Wechselstromnetzen in der Elektrotechnik. Die Ökonomen benutzen den Matrizenkalkül zur Beschreibung von Materialverflechtungen, zur Darstellung von betrieblichen und volkswirtschaftlichen

Verflechtungen und zur Lösung von Optimierungsaufgaben. Aus der Vielzahl der Anwendungsmöglichkeiten sollen in dieser Darstellung nur ökonomische Verflechtungen und elektrische Gleichstromnetze behandelt werden.

7.2 Ökonomische Verflechtungen

Die wissenschaftliche Planungs- und Leitungstätigkeit in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft erfordert die mathematische Modellierung im gesamten Bereich der Volkswirtschaft.

Die ersten Untersuchungen über die Organisation der Volkswirtschaft wurden 1939 von dem sowjetischen Mathematiker J. W. Kantorowitsch durchgeführt. Er erkannte das Problem, das Problem der Linearoptimierung, und gab Wege zu seiner Lösung an.

In der ökonomischen Praxis werden Verflechtungen der gesamten Volkswirtschaft, die sehr umfangreich sein können, aufgestellt und mit Hilfe von Matrizen untersucht.

Aber auch Verflechtungen von Teilbereichen der Volkswirtschaft, z. B. solche einer VVB, und von Betrieben werden mit Hilfe von Matrizen dargestellt und Material-, Energie- und Arbeitskräftebilanzen aufgestellt. Die Matrizenrechnung gestattet nicht nur eine übersichtliche Darstellung komplizierter linearer Zusammenhänge ökonomischer Probleme, sondern soll darüber hinaus zu neuen Erkenntnissen führen. Damit Rechenautomaten eingesetzt werden können, müssen die Rechnungen schematisiert werden. Auf diese Weise wird die Planung rationalisiert.

Einfaches Modell einer Produktionsplanung

In unseren Darstellungen wollen wir ein deterministisches System betrachten. In diesem ist eine bestimmte Anzahl von Erzeugnissen (Einzelteile, Halbfertigfabrikate, Baugruppen) gegeben, die zur Produktion von anderen Erzeugnissen, besonders von Enderzeugnissen, benötigt werden.

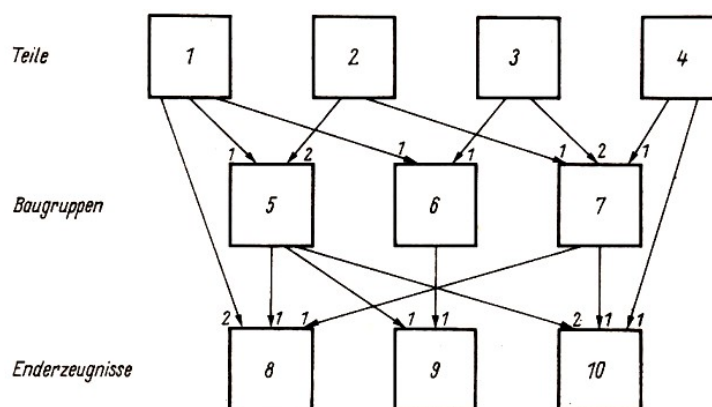


Bild 39

Zur Vereinfachung des Problems wollen wir annehmen, dass zwischen den Größen lineare Beziehungen bestehen. Wir setzen fest, dass alle Verbrauchsmengen der Bruttoproduktion proportional sind. Wir bezeichnen die einzelnen Erzeugnisse (Einzelteile, Halbfertigfabrikate, Baugruppen, Enderzeugnisse) mit $i = 1, \dots, n$.

Zwischen den einzelnen Erzeugnissen soll die im Bild 39 dargestellte technologische Verflechtung bestehen.

Die bewerteten Pfeile geben bekanntlich an, wie viele Stück vom i -ten Erzeugnis zur Herstellung eines Stückes des k -ten Erzeugnisses notwendig sind. Dem Graph entspricht eine Matrix; wir nennen sie die Matrix der direkten Einsatzkoeffizienten.

Man sagt auch: "Die Matrix \mathbf{B} der direkten Einsatzkoeffizienten ist dem Netzwerk isomorph". Wir können z. B. aus Bild 39 folgende direkte Einsatzkoeffizienten b_{ik} ablesen:

$$b_{15} = 1; \quad b_{25} = 2; \quad b_{5,10} = 2$$

Die Matrix \mathbf{B} hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Durch Einzeichnen von Hilfslinien kann die Matrix \mathbf{B} in "Untermatrizen" zerlegt werden, wobei man der Aufteilung in Teile (4), Baugruppen (3) und Enderzeugnisse (3) folgen sollte. Dadurch vergrößern wir die Übersicht. Noch kürzer:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

Wenn nun außerdem verlangt wird, dass Einzelteile und Baugruppen (Halbfertigfabrikate) als Ersatzteile zum Verkauf zur Verfügung stehen, so ist es zur Aufstellung des mathematischen Modells zweckmäßig, mit

\mathbf{x} den Vektor der Gesamtproduktion und mit

\mathbf{y} den Vektor des Verkaufsprogramms

zu bezeichnen.

So umfasst die Gesamtproduktion sowohl das Verkaufsprogramm als auch die Produktion von einzelnen Teilen, die nach dem Netzplan zur Herstellung der Enderzeugnisse benötigt werden. Für die Gesamtstückzahl des i -ten Erzeugnisses ergibt sich die Beziehung

$$x_i = y_i + \sum_{k=1}^n b_{ik}x_k, \quad \text{wobei } i, k = 1, \dots, n$$

Bei n Erzeugnissen entstehen die folgenden n Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ x_2 &= y_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ &\dots \\ x_n &= y_n + b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise kann dieser Zusammenhang wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{Bx}$$

Wenn der Vektor \mathbf{y} des Verkaufsprogramms gegeben und der Vektor \mathbf{x} der Gesamtproduktion gesucht ist, besteht die Aufgabe, die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{Bx}$$

nach \mathbf{x} aufzulösen.

Zunächst ist es erforderlich, diese Gleichung durch Einführung der Einheitsmatrix \mathbf{E} zu vervollständigen:

$$\mathbf{Ex} - \mathbf{Bx} = \mathbf{y}$$

Soll diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzen, so muss $\mathbf{E} - \mathbf{B}$ regulär vorausgesetzt werden. \mathbf{B} selbst ist singulär. Mit Hilfe des verketteten Algorithmus kann \mathbf{x} ermittelt werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} &= (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y} \end{aligned}$$

□ Beispiel 7/1:

Für das Strukturdiagramm nach Bild 39 laute der Vektor \mathbf{y} für das Verkaufsprogramm

$$\mathbf{y} = \left(2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 3 \ 4 \ 0 \ 5 \ 10 \ 15 \right)^T$$

Gesucht wird der Vektor \mathbf{x} der Gesamtproduktion.

Lösung:

Die Berechnung von $\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}$ erfolgt mit Hilfe des verketteten Algorithmus (Tableau 25):

Tableau 25:

$\mathbf{E} - \mathbf{B}$							\mathbf{y}				
1	0	0	0	-1	-1	0	-2	0	0	2	
0	1	0	0	-2	0	-1	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	-1	-2	0	0	0	5	
0	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	
$\mathbf{0}$				1	0	0	-1	-1	-2	3	
$\mathbf{0}$				0	1	0	0	-1	0	4	
$\mathbf{0}$				0	0	1	-1	0	-1	0	
$\mathbf{0}$				$\mathbf{0}$			1	0	0	5	
$\mathbf{0}$				$\mathbf{0}$			0	1	0	10	
$\mathbf{0}$				$\mathbf{0}$			0	0	1	15	
\mathbf{x}^T	74	116	59	35	48	14	20	5	10	15	-1

Ergebnis:

Der Vektor $\mathbf{x} = (74 \ 116 \ 59 \ 35 \ 48 \ 14 \ 20 \ 5 \ 10 \ 15)^T$ gibt an, wie viele Stücke von jedem Einzelteil, von jeder Baugruppe und von jedem Enderzeugnis anzufertigen sind, damit neben der Produktion nach Netzplan auch das Verkaufsprogramm verwirklicht werden kann.

Modell einer Materialplanung

Berechnung des Gesamtmaterialaufwands

Zur Bereitstellung des benötigten Materials bei der Herstellung eines bestimmten Erzeugnisses soll in einem Betrieb der gesamte Materialaufwand berechnet werden.

Wenn mit a_{jk} der Aufwand in der j -ten Materialposition für eine Einheit des k -ten Erzeugnisses ($j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$), mit a_j der Gesamtaufwand in der j -ten Position und mit \mathbf{x} der Vektor der Gesamtproduktion bezeichnet werden, dann kann a_j dargestellt werden durch .

$$a_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

Fasst man alle a_j zum Vektor \mathbf{a} des Gesamtmaterialaufwands zusammen und stellt die Koeffizienten a_{jk} durch die Matrix \mathbf{A} vom Typ (m, n) dar, dann gilt der Zusammenhang $\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. \mathbf{A} ist die Matrix der Materialverbrauchsnormen.

Nun kann man \mathbf{x} durch $(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}$ ersetzen, so dass der Vektor des gesamten Materialaufwands \mathbf{a} ausgedrückt wird durch

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}$$

Berechnung der Gesamtmaterialkosten

Wenn die Materialverrechnungspreise m_j für $j = 1, \dots, m$ gegeben sind, dann können die Gesamtkosten k_M für das Material wie folgt berechnet werden:

$$k_M = \sum_{j=1}^m m_j a_j = \mathbf{m}^T \mathbf{a} = \mathbf{m}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{m}^T \mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}$$

Der Vektor \mathbf{m} der Materialverrechnungspreise muss als Zeilenvektor geschrieben werden, damit das Skalarprodukt gebildet werden kann.

Berechnung der Materialkosten für jede Materialposition

Werden die Kosten für jede einzelne Materialposition gefordert, dann gibt die Diagonalmatrix der Materialpreise einen zweckmäßigen Ansatz:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

Die Kosten für jede Materialposition im Vektor \mathbf{k} erhält man folgendermaßen:

$$\mathbf{k} = \mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Modell einer Maschinenzeit- und einer Arbeitszeitplanung

Nach der Voraussetzung, dass die erforderlichen Maschinenzeiten den Erzeugnismengen proportional sind, kann in entsprechender Weise die benötigte Maschinenzeit geplant werden. Es sei

T die Matrix der Maschinenzeitnormen,
x der Vektor der Gesamtproduktion und
t der Vektor der Maschinenzeiten.

Dann ist es für die Planung des Produktionsprozesses erforderlich, bei gegebenem Vektor der Gesamtproduktion die Zeit des Einsatzes der Maschinen zu berechnen. Es ist

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{t}$$

Diese Aufgabe ist mit Hilfe der Matrizenmultiplikation zu lösen.

Oft besteht aber auch die Frage, wie bei bekannter Matrix **T** der Maschinenzeitnormen und bei vorgegebenem Vektor **t** der Maschinenzeiten die Gesamtproduktionsmengen der einzelnen Erzeugnisse berechnet werden können. Die Gleichung $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{t}$ ist nach **x** aufzulösen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{t}$$

Werden mit

Z die Matrix der Arbeitszeiten, mit
x der Vektor der Gesamtproduktionsmengen und mit
f der Vektor der erforderlichen Zeitfonds bei den Arbeitsgängen

bezeichnet, dann gilt unter Voraussetzung der Proportionalität zwischen **f** und **x**:

$$\mathbf{f} = \mathbf{Z}\mathbf{x}$$

Auch in dieser Aufgabe kann **f** mit Hilfe der Matrizenmultiplikation bei gegebenem **Z** und **x** berechnet werden.

Bei vorgegebenen Zeitfonds kann mit Hilfe der Matrizeninversion eine Aussage über die Gesamtproduktionsmengen durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{f}$$

gemacht werden.

7.3 Elektrische Gleichstromnetze

Die Berechnung elektrischer Netze beruht auf den linearen Zusammenhängen zwischen Spannungen und Stromstärken. Nichtlineare Schaltelemente sollen näherungsweise durch lineare Elemente ersetzt werden (Linearisierung).

Diese linearen Zusammenhänge können durch lineare Gleichungssysteme beschrieben werden, zu deren theoretischer Formulierung und praktischer Berechnung Matrizen Verwendung finden können.

Wir wollen mit Hilfe der Matrizenrechnung Stromstärken und Spannungsabfälle in einem Gleichstrom-Netzwerk berechnen. Im Beispiel 1/2 wurde der Aufbau eines elektrischen Netzwerkes aus Maschen, die von Zweigen begrenzt werden, erläutert.

Dort wurde gefordert, die Ströme in den Zweigen und die Spannungsabfälle über den Widerständen zu berechnen, wenn die Widerstände und die Urspannungen bekannt sind. In der

Elektrotechnik wird gezeigt, dass bei n Knoten und m Zweigen immer $(m - n + 1)$ unabhängige Maschen auftreten.

Der Ansatz der Gleichungen erfolgt mit Hilfe der im Beispiel 1/2 genannten Kirchhoffschen Sätze der Stromverzweigung. Dabei treffen wir folgende Vereinbarungen:

- Die Richtung der Ströme I_k soll mit der Richtung der Spannungsabfälle U_k übereinstimmen ($k = 1, \dots, m$).
- Die Umlaufströme in einer Masche werden mit x_j bezeichnet. Es gibt ebenso viele Maschenumlaufströme, wie unabhängige Maschen im Netzwerk vorhanden sind.

Wenn nun die Widerstände R_k und die Urspannungen E_l gegeben sind, besteht die Aufgabe, die Maschenumlafströme und daraus die Spannungsabfälle über jedem Widerstand und die Teilströme in den Zweigen rechnerisch zu ermitteln. Die Zusammenhänge (in Vektorform) zwischen den Leiterströmen und den Maschenumlafströmen und zwischen den Urspannungen und den Spannungsabfällen werden durch eine Verknüpfungsmatrix angegeben.

Der Zusammenhang zwischen den Leiterströmen und den Spannungsabfällen über den Widerständen wird durch das Ohmsche Gesetz (in Matrizendarstellung) gegeben.

Zur Bearbeitung der Problematik entwickeln wir eine Schrittfolge, die auf der Anwendung des Maschensatzes beruht. In der Literatur wird dieses Verfahren als Umlaufverfahren bezeichnet.

Schrittfolge

1. Wir nummerieren die Zweige des Netzes und wählen in jedem Zweig die gleiche Richtung (durch Einzeichnen von Pfeilen) für die Leiterstromstärke I_k und die über dem Widerstand R_k abfallende Spannung U_k .
2. Wir ermitteln die voneinander unabhängigen Maschen. Bei m Zweigen und n Knoten gibt es immer $(m - n + 1)$ unabhängige Maschen. In jeder Masche legen wir die Richtung des zugehörigen Maschenumlafstroms x_j fest.
3. Da das elektrische Netzwerk Ohmsche Widerstände enthält, führen wir die Widerstandsmatrix \mathbf{R} ein. Sie ist eine Diagonalmatrix.
4. Wir stellen den linearen Zusammenhang zwischen den Leiterströmen I_k und den Maschenumlafströmen x_j durch die Verknüpfungsmatrix \mathbf{V} her. Ihre Zeilenanzahl ist gleich der Anzahl der Zweige, ihre Spaltenanzahl ist gleich der Anzahl der voneinander unabhängigen Maschen. Eine Zeile der Verknüpfungsmatrix \mathbf{V} gibt durch 1, -1 oder 0 an, ob der Leiterstrom I_k zum Maschenumlafstrom x_j in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung beiträgt oder nicht beiträgt.

Das geschieht am zweckmäßigsten so, dass wir in den einzelnen Spalten von \mathbf{V} aufschreiben, welche Ströme (unter Berücksichtigung ihrer Richtung) zum Maschenumlafstrom beitragen. Die m Gleichungen des linearen Gleichungssystems werden in Matrizendarstellung durch $\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ erfasst, wobei \mathbf{i} der Vektor der Leiterströme und \mathbf{x} der Vektor der Maschenumlafströme sind.

5. Bezeichnen wir mit \mathbf{u} den Vektor der Spannungsabfälle, dann gilt auf Grund des Ohmschen Gesetzes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

Berücksichtigen wir noch den Zusammenhang zwischen Leiterströmen und Maschenumlaf-

strömen in der Beziehung $\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{x}$, dann können wir schreiben:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{x}$$

6. Um die im Netz wirkenden Urspannungen berücksichtigen zu können, führen wir den Vektor \mathbf{e} der Urspannungen ein. Für \mathbf{e} gilt:

$$\mathbf{e} = \mathbf{V}\mathbf{u}$$

7. Damit besteht die Aufgabe, die Matrixgleichung

$$\mathbf{e} = \mathbf{V}^T \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{x}$$

nach \mathbf{x} aufzulösen. Es ist zweckmäßig, zunächst $\mathbf{V}^T \mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{A}$ mit Hilfe des Falkschen Schemas zu berechnen und anschließend $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$ nach \mathbf{x} mit Hilfe des verketteten Algorithmus aufzulösen.

8. Die Leiterströme berechnen wir aus der Gleichung $\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ die Spannungsabfälle durch die Beziehung

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{x}$$

□ Beispiel 7/2:

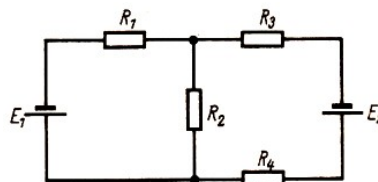


Bild 40

In dem durch Bild 40 dargestellten Netzwerk sind die Leiterströme und die Spannungsabfälle über den Widerständen zu berechnen.

Gegeben: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $E_1 = 4\text{ V}$, $E_2 = 2\text{ V}$.

Lösung unter Anwendung der angegebenen Schrittfolge:

1. und 2. Festlegung der Zweige und der unabhängigen Maschenumlaufströme (Bild 41):

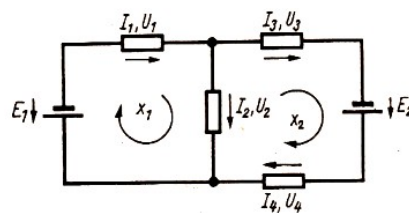


Bild 41

Anzahl der Zweige: $m = 4$

Anzahl der Knoten: $n = 3$

Anzahl der unabhängigen Maschen: $m - n + 1 = 2$

3. Widerstandsmatrix unter Verwendung der

$$\text{Größen } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{pmatrix}, \quad \text{Maßzahlen } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Verknüpfungsmatrix, z. B.

Ergebnis:

Die Maschenumlaufströme betragen $x_1 = \frac{6}{4}$ A und $x_2 = \frac{4}{15}$ A (in entgegengesetzter Richtung als angegeben),

die Leiterströme $I_1 = \frac{6}{5}$ A, $I_2 = \frac{14}{5}$ A, $I_3 = \frac{4}{14}$ A; $I_4 = \frac{4}{15}$ A (in entgegengesetzter Richtung als angegeben),

die Spannungsabfälle $U_1 = \frac{6}{15}$ V, $U_2 = \frac{14}{5}$ V, $U_3 = \frac{4}{15}$ V, $U = \frac{8}{15}$ V (in entgegengesetzter Richtung als angegeben).

(Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung des Arbeitsauftrages 1/1, Punkt 2)

Zusammenfassung:

Die bei ökonomischen und elektrotechnischen Sachverhalten aufgestellten Systeme linearer Gleichungen können mit Hilfe der Matrizenrechnung übersichtlich angeordnet und systematisch gelöst werden.

Weitere praxisbezogene Aufgaben der Mechanik und der Schwingungslehre, z. B. bei der Bestimmung von Eigenfrequenzen, führen auf das Problem der Eigenwerte einer gegebenen Matrix, auf deren Bestimmung im Rahmen dieser Darstellung nicht eingegangen werden kann.

7.4 Aufgaben

1. Um den Gesamtbedarf an Erzeugnissen (Rohstoffe, Zwischenerzeugnisse, Enderzeugnisse) bei der Produktion in einem Betriebsteil zu ermitteln, wurde untenstehendes (vereinfachtes) Materialflussbild aufgestellt (Bild 42):

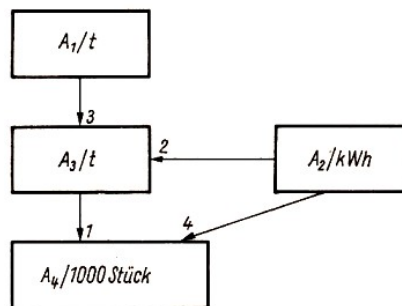


Bild 42

Berechnen Sie den Bedarf an jedem einzelnen Erzeugnis, wenn die Planaufgabe durch den Vektor $\mathbf{y} = (0 \ 0 \ 3 \ 5)^T$ gegeben ist!

2. Berechnen Sie die gesamten Materialkosten für folgende Verflechtung!

Gegeben : Strukturdiagramm (Bild 43)

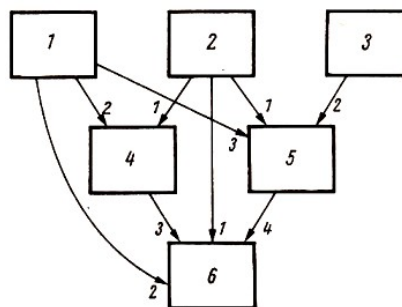


Bild 43

Vektor des Verkaufsprogramms: $\mathbf{y} = (3 \ 1 \ 5 \ 7 \ 9 \ 10)^T$

Matrix des Materialaufwands:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Vektor der Materialverrechnungspreise: $\mathbf{m} = (12 \ 3 \ 6 \ 10 \ 4 \ 3)^T$

3. Im folgenden Netzwerk sind die Urspannungen $E_1 = 1 \text{ V}$ und $E_2 = 2 \text{ V}$ sowie die Ohmschen Widerstände $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$ und $R_4 = 3\Omega$ gegeben (Bild 44).

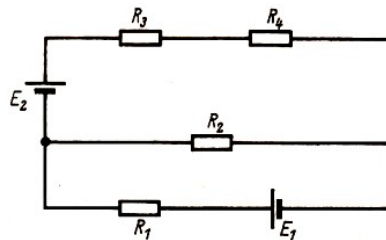


Bild 44

Berechnen Sie die Maschenumlaufströme, die Zweigströme und die Spannungsabfälle über den Widerständen mit Hilfe der Matrizenrechnung!

4. Zur Berechnung der Maschenumlaufströme, der Zweigströme und der Spannungsabfälle über den Widerständen in dem Netzwerk nach Bild 45 sind folgende Daten gegeben:

$$E_1 = 1 \text{ V}, E_2 = 3 \text{ V}, E_3 = 2 \text{ V}, E_4 = 1 \text{ V}$$

$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 3\Omega, R_5 = 2\Omega, R_6 = 2\Omega, R_7 = 1\Omega.$$

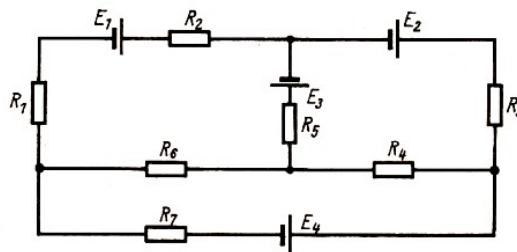


Bild 45

8 Lösungen

Kapitel 1

Arbeitsaufträge:

$$1. 1) I_1 = \frac{(R_3+R_4)E_1+R_2(E_1-E_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$$

$$I_2 = \frac{R_1E_2+(R_3+R_4)E_1}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{R_2E_1-(R_1+R_2)E_2}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$$

$$2) I_1 = \frac{6}{5} \text{ A}, I_2 = \frac{14}{15} \text{ A}, I_3 = I_4 = \frac{4}{15} \text{ A}$$

2. a) Es seien a, b, c, d rationale Zahlen, dann sind für diese Elemente die Verknüpfungsoperationen Addition und Multiplikation definiert, und es gelten stets folgende Gesetze:

$$(1) a + b = c, \quad (2) a + b = b + a, \quad (3) (a + b) + c = a + (b + c), \quad (4) a + 0 = a,$$

$$(5) \text{ Die Gleichung } a + x = b \text{ hat genau eine rationale Lösung } x = b - a.$$

$$(6) a \cdot b = c, \quad (7) a \cdot b = b \cdot a, \quad (8) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad (9) a \cdot 1 = a,$$

$$(10) \text{ Die Gleichung } a \cdot x = d \text{ hat für } a \neq 0 \text{ genau eine rationale Lösung } x = \frac{d}{a}.$$

$$(11) (a + b)c = ac + bc$$

Die Menge der rationalen Zahlen bildet einen Körper.

b) Die Gleichung $ax = d$ hat in der Menge der ganzen Zahlen nicht immer eine ganzzahlige Lösung; deshalb bildet die Menge der ganzen Zahlen keinen Körper.

Aufgaben:

1. Eine quadratische Matrix n -ter Ordnung hat n^2 Elemente.

2. Folgende Typen sind möglich: (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1).

3. (1, 11), (11, 1).

4. a) Über der Hauptdiagonalen stehen $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n}{2}(n - 1)$ Elemente,

b) in der Hauptdiagonalen stehen n Elemente,

c) unter der Hauptdiagonalen stehen $\frac{1}{2}(n - 1)$ Elemente.

5. $n^2 - n = n(n - 1)$ Elemente stehen nicht in der Hauptdiagonalen.

$$6. a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix},$$

$$c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 20 \\ 6 & 16 & 30 & 48 \\ 12 & 30 & 54 & 84 \\ 20 & 48 & 84 & 128 \end{pmatrix}$$

$$7. a_{ik} = k^{i-1}$$

$$8. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

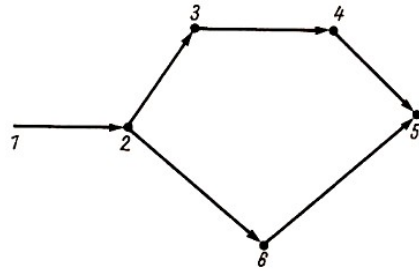
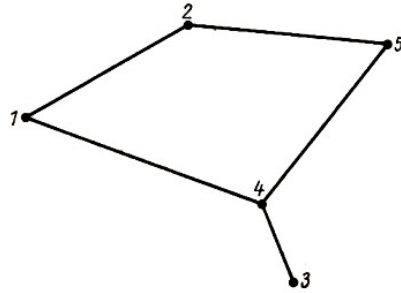


Bild 46, 47

9. Bild 46; 10. Bild 47

$$11. \text{ b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. $x = 6, y = -10, z = -2$

13. a) F b) W c) F

Kapitel 2

Arbeitsaufträge:

1. Beweis des Satzes 2/2:

Voraussetzung: $a_{ik} + (b_{ik} + c_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) + c_{ik}$

(Im Körper der reellen Zahlen gilt das Assoziativgesetz der Addition)

Behauptung: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (a_{ik}) + ((b_{ik}) + (c_{ik})) = (a_{ik} + (b_{ik} + c_{ik})) && \text{(nach Definition)} \\ (a_{ik} + (b_{ik} + c_{ik})) &= ((a_{ik} + b_{ik}) + c_{ik}) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ ((a_{ik} + b_{ik}) + c_{ik}) &= ((a_{ik}) + (b_{ik})) + (c_{ik}) && \text{(nach Definition)} \\ ((a_{ik}) + (b_{ik})) + (c_{ik}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, && \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

2. Beweis für die Einzigkeit der Lösung:

Behauptung: Es gibt genau eine Matrix \mathbf{X} , die Lösung der Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ ist.

Beweis (indirekt): Angenommen, es gäbe eine weitere Matrix \mathbf{Y} (mit $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$), die die angegebene Gleichung erfüllt, dann wäre $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{A} + \mathbf{Y} = \mathbf{B}$. Daraus folgte $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{Y}$, d.h., für alle i, k gilt $a_{ik} + x_{ik} = a_{ik} + y_{ik}$ bzw. $x_{ik} = y_{ik}$.

Das bedeutet wiederum $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, es gäbe eine weitere Lösung dieser Gleichung. Daraus folgt, dass genau eine Lösung \mathbf{X} existiert, w.z.b.w.

3. Beweis der Distributivgesetze:

5) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$

Voraussetzung: $(\lambda + \mu)a_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu a_{ik}$ (Im Körper der reellen Zahlen gilt das Distributivgesetz)

Behauptung: $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\mathbf{A} &= (\lambda + \mu)(a_{ik}) = ((\lambda + \mu)a_{ik}) && \text{(nach Definition)} \\ ((\lambda + \mu)a_{ik}) &= (\lambda a_{ik} + \mu a_{ik}) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ (\lambda a_{ik} + \mu a_{ik}) &= (\lambda a_{ik}) + (\mu a_{ik}) && \text{(nach Definition)} \\ (\lambda a_{ik}) + (\mu a_{ik}) &= \lambda(a_{ik}) + \mu(a_{ik}) = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} && \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

6) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

Voraussetzung: $(\lambda + \mu)a_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu a_{ik}$ (Im Körper der reellen Zahlen gilt das Distributivgesetz)

Behauptung: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda((a_{ik} + (b_{ik}))) = \lambda(a_{ik} + b_{ik}) && \text{(nach Definition)} \\ \lambda(a_{ik} + (b_{ik})) &= (\lambda a_{ik} + \lambda b_{ik}) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ (\lambda a_{ik} + \lambda b_{ik}) &= (\lambda a_{ik}) + (\lambda b_{ik}) && \text{(nach Definition)} \\ (\lambda a_{ik}) + (\lambda b_{ik}) &= \lambda(a_{ik}) + \lambda(b_{ik}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}, && \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

4. Mathematik-Lehrbuch für Klasse 11 (Ausgabe 1969), Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, Seiten 175 und 176.

5. Die Bedingungen der Definition 2/5 lauten kurzgefasst:

1. Das Bild einer Summe von Elementen ist gleich der Summe der Bilder der Elemente.
2. Das Bild eines Vielfachen eines Elements ist gleich dem Vielfachen des Bildes dieses Elementes.

6. Die zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ transponierte Matrix lautet $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

7. Beweis für die Gültigkeit der Eigenschaften transponierter Matrizen:

Voraussetzung: $\mathbf{A} = (a_{ik})_{(m,n)}$

Behauptung: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Beweis:

In Kurzschreibweise gilt $\mathbf{A} = (a_{ik})$.

$\mathbf{A}^T = (a_{ki})$ nach Definition

$(\mathbf{A}^T)^T = (a_{ki})^T = (a_{ik}) = \mathbf{A}$, w.z.b.w.

Satz: Die Transponierte einer transponierten Matrix ist gleich der "ursprünglichen" Matrix.

8. Voraussetzung: $\mathbf{A} = (a_{ik})_{(m,n)}$, $\mathbf{B} = (b_{ik})_{(m,n)}$; a_{ik} und b_{ik} reell

Behauptung: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Beweis:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = ((a_{ik}) + (b_{ik}))^T = (a_{ik} + b_{ik})^T = (c_{ik})^T \quad (\text{nach Definition})$$

$$(c_{ik})^T = (c_{ki}) \quad (\text{nach Definition})$$

$$(c_{ki}) = (a_{ki} + b_{ki}) = (a_{ki}) + (b_{ki}) = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Satz: Die Transponierte einer Summe zweier Matrizen ist gleich der Summe der Transponierten der beiden Matrizen.

3. Behauptung: $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$

Beweis:

$$(\lambda \mathbf{A})^T = (\lambda(a_{ik}))^T = (\lambda a_{ik})^T = \lambda(a_{ik})^T = \lambda \mathbf{A}^T, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Satz: Die Transponierte einer mit einer reellen Zahl multiplizierten Matrix ist gleich der mit dieser reellen Zahl multiplizierten Transponierten dieser Matrix.

Aufgaben:

$$1. \text{ a) } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -7 \\ -1 & -19 & -8 \\ -7 & 17 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -15 \\ 4 & 9 & -1 \\ -5 & -11 & -12 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ 6 & 13 & 19 \\ 9 & 1 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 16 \\ 9 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

2. Mögliche Lösungen:

$$\text{a) } \mathbf{A} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 920 & 11 & 0 \\ 34 & -217 & 24 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{B} = x \begin{pmatrix} x & x^2 y & 2 \\ x^2 - 1 & 3x & x - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{C} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{X} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Voraussetzung: $\text{sp } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$\text{sp } \mathbf{B} = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}$

$\text{sp } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn})$

Behauptung: $\text{sp } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{sp } \mathbf{A} + \text{sp } \mathbf{B}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{sp}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} + b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} = \text{sp} \mathbf{A} + \text{sp} \mathbf{B}, \quad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

5. Ja. Wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, dann $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$.

Unter den genannten Bedingungen ist die transponierte Summenmatrix gleich der Summenmatrix; diese Summenmatrix ist also stets symmetrisch.

Kapitel 3

Arbeitsaufträge:

1. 1) Beweis des Kommutativgesetzes für das Skalarprodukt zweier Vektoren:

Voraussetzung: $a_i b_i = b_i a_i$ (Kommutativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen)

Behauptung: $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$

Beweis:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{a} = (b_1 b_2 \dots b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \mathbf{a}^T \mathbf{b}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

2) Beweis der Distributivgesetze für das Skalarprodukt zweier Vektoren:

a) Voraussetzung: $a_i(b_i + c_i) = a_i b_i + a_i c_i$ (Distributivgesetz für reelle Zahlen)

Behauptung: $\mathbf{a}^T(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{c}$

Beweis:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1 a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \dots + a_n(b_n + c_n)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{c}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

b) Voraussetzung: $(a_i + b_i)c_i = a_i c_i + b_i c_i$ (Distributivgesetz für reelle Zahlen)

Behauptung: $(\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T)\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c}$

Beweis:

$$(\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T)\mathbf{c} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n + b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

2. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl. Deshalb ist eine weitere skalare Multiplikation mit einem Vektor nicht möglich.

3. Für die Multiplikation einer Matrix \mathbf{A} mit einem Vektor \mathbf{b} gilt das Kommutativgesetz nicht, weil die Bedingung der Verkettbarkeit nicht erfüllt ist. Da $\tau(\mathbf{b}) = (m, 1)$ ist, müsste die Matrix vom Typ $\tau(\mathbf{A}) = (1, q)$ sein.

4. Da $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$ und $\tau(\mathbf{B}) = (2, 3)$, sind die Matrizen A und B in dieser Reihenfolge verkettbar. Dann gilt:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

5. (1) Da zur Ausführung der Matrizenmultiplikation die Verkettbarkeit der Matrizen notwendig ist, kann für rechteckige Matrizen das Kommutativgesetz nicht gültig sein. Ein mögliches Zahlenbeispiel:

Wenn $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$ und $\tau(\mathbf{B})$ gegeben sind, dann ist zwar \mathbf{AB} ausführbar, \mathbf{BA} jedoch nicht.

Gelegentlich können zwar im Fall rechteckiger Matrizen beide Matrizenprodukte \mathbf{AB} und \mathbf{BA} gebildet werden (vgl. Beispiel 3/8). Die Produktmatrizen sind aber von unterschiedlichem Typ. Im Beispiel 3/8 ist $\tau(\mathbf{AB}) = (3, 3)$, $\tau(\mathbf{BA}) = (2, 2)$. Wegen $\tau(\mathbf{AB}) \neq \tau(\mathbf{BA})$ können \mathbf{AB} und \mathbf{BA} nicht gleich sein.

(2) Auch für quadratische Matrizen von ein und derselben Ordnung gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation nicht.

Beispiel:

Wir wählen zwei Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und bilden sowohl das Produkt \mathbf{AB} als auch \mathbf{BA} :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

also $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Da bei Allaussagen der Nachweis der Falschheit durch Angabe eines Gegenbeispiels erbracht werden kann, ist bewiesen, dass das Kommutativgesetz auch für die Multiplikation quadratischer Matrizen nicht gilt.

6. Um \mathbf{B} so zu bestimmen, dass gilt $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, setzen wir an:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_{11} + 2b_{21} & 3b_{12} + 2b_{22} \\ -2b_{11} + 3b_{21} & -2b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3b_{11} + 2b_{21} & 3b_{12} + 2b_{22} \\ -2b_{11} + 3b_{21} & -2b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_{11} + (-2)b_{12} & 3b_{11} + 3b_{12} \\ 3b_{21} + (-2)b_{22} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}$$

Wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, muss gelten:

$$\begin{aligned} 3b_{11} + 2b_{21} &= 3b_{11} + (-2)b_{12} \\ 3b_{12} + 2b_{22} &= 3b_{11} + 3b_{12} \\ -2b_{11} + 3b_{21} &= 3b_{21} + (-2)b_{22} \\ -2b_{12} + 3b_{22} &= 2b_{21} + 3b_{22} \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$b_{21} = -b_{12}, \quad b_{22} = b_{11}$$

b_{11} und b_{12} können beliebig gewählt werden.

7. Nein; den $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

8. Beweis des Assoziativgesetzes für die Multiplikation von Matrizen:

Voraussetzung: $\tau(\mathbf{A}) = (m, n)$, $\tau(\mathbf{B}) = (n, p)$, $\tau(\mathbf{C}) = (p, q)$

Behauptung: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

Beweis: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{RC}$ mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1p} + \dots + a_{2n}b_{np} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & \dots & r_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RC} = \begin{pmatrix} r_{11}c_{11} + \dots + r_{1p}c_{p1} & \dots & r_{11}c_{1q} + \dots + r_{1p}c_{pq} \\ r_{21}c_{11} + \dots + r_{2p}c_{p1} & \dots & r_{21}c_{1q} + \dots + r_{2p}c_{pq} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1}c_{11} + \dots + r_{mp}c_{p1} & \dots & r_{m1}c_{1q} + \dots + r_{mp}c_{pq} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}$$

Die ausführliche Berechnung soll nur am Element z_{11} durchgeführt werden:

$$z_{11} = r_{11}c_{11} + \dots + r_{1p}c_{p1} = (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1})c_{11} + \dots + (a_{11}b_{1p} + \dots + a_{1n}b_{np})c_{p1}$$

$$= a_{11}b_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}c_{11} + \dots + a_{11}b_{1p}c_{p1} + \dots + a_{1n}b_{np}c_{p1}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{AS} = \mathbf{Y}$ mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + \dots + b_{1p}c_{p1} & \dots & b_{11}c_{1q} + \dots + b_{1p}c_{pq} \\ b_{21}c_{11} + \dots + b_{2p}c_{p1} & \dots & b_{21}c_{1q} + \dots + b_{2p}c_{pq} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}c_{11} + \dots + b_{np}c_{p1} & \dots & b_{n1}c_{1q} + \dots + b_{np}c_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1q} \\ s_{21} & \dots & s_{2q} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & \dots & s_{nq} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AS} = \begin{pmatrix} a_{11}s_{11} + \dots + a_{1n}s_{n1} & \dots & a_{11}s_{1q} + \dots + a_{1n}s_{nq} \\ a_{21}s_{11} + \dots + a_{2n}s_{n1} & \dots & a_{21}s_{1q} + \dots + a_{2n}s_{nq} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}s_{11} + \dots + a_{mn}s_{n1} & \dots & a_{m1}s_{1q} + \dots + a_{mn}s_{nq} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}$$

Die ausführliche Berechnung soll nur am Element y_{11} durchgeführt werden:

$$y_{11} = a_{11}s_{11} + \dots + a_{1p}s_{p1} = a_{11}(b_{11}c_{11} + \dots + b_{p1}c_{p1}) + \dots + a_{1n}(b_{n1}c_{11} + \dots + b_{np}c_{p1})$$

$$= a_{11}b_{11}c_{11} + \dots + a_{11}b_{p1}c_{p1} + \dots + a_{1n}b_{n1}c_{11} + \dots + a_{1n}b_{np}c_{p1}$$

Durch Umordnen der Summanden und Ausklammern der Faktoren c_{11} und c_{p1} erhält man:

$$y_{11} = (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1})c_{11} + \dots + (a_{11}b_{1p} + \dots + a_{1n}b_{np})c_{p1}$$

Damit ist die Übereinstimmung mit dem Element z_{11} gezeigt.

9. Die Summe der Elemente des Zeilensummenvektor \mathbf{z}_C ergibt

$$20 + 2 + 14 + 19 + 5 = 60$$

Die Summe der Elemente des Spaltensummenvektors \mathbf{s}_C^T ergibt

$$8 + 27 + 25 = 60$$

Damit wurde die Übereinstimmung gezeigt.

10. Für I: $E_1 = 2B_1 + 3B_2$, $E_2 = 1B_1 + 4B_2$

Für II: $B_1 = 2T_1 + 1T_2 + 0T_3$, $B_2 = 1T_1 + 0T_2 + 3T_3$

Aufgaben:

1. a) $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$, $\tau(\mathbf{B}) = (2, 2)$; verkettbar
 b) $\tau(\mathbf{A}) = (2, 3)$, $\tau(\mathbf{B}) = (2, 2)$; nicht verkettbar
 c) $\tau(\mathbf{A}) = (2, 2)$, $\tau(\mathbf{B}) = (3, 2)$; nicht verkettbar
 d) $\tau(\mathbf{A}) = (3, 2)$, $\tau(\mathbf{B}) = (2, 4)$; verkettbar
2. $\tau(\mathbf{A}) = (4, 3)$, $\tau(\mathbf{B}) = (3, 3)$; die beiden Matrizen sind in der Reihenfolge \mathbf{A} , \mathbf{B} verkettbar.

3. a) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 11 \\ 5 & 5 & 8 \\ -4 & -9 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 \\ 22 & 13 & 9 \\ 15 & 16 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \\ 11 & 4 & 25 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 51 & 38 & 26 \\ 16 & 16 & 12 \\ -21 & -26 & -10 \end{pmatrix}$; e) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 114 & 86 & 51 \\ 63 & 33 & 29 \\ -47 & -25 & -24 \end{pmatrix}$; f) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 49 & 22 & 22 \\ 33 & 24 & 13 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 36 & 20 & 15 \\ 11 & 11 & 4 \\ -17 & -17 & -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 \\ 22 & 13 & 9 \\ 15 & 16 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{N} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 49 & 22 & 22 \\ 33 & 24 & 13 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 16 \end{pmatrix}$; i) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -4 \\ -6 & 3 & -1 \\ 9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$; k) $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -4 \\ 18 & 5 & -9 \\ 11 & 8 & -5 \end{pmatrix}$;

4. a) $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_4)$, b) $(2x_1 \ 3x_1 + 5x_2 \ -x_1 + 4x_2)$, c) $(0 \ -6 \ 11) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (22)$

5. a) Voraussetzung: $(a_{ik})(b_{ik}) = (c_{ik})$ mit a, b reell

und $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ für $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p$

Behauptung: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Beweis:

$$(\mathbf{AB})^T = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right)^T = (c_{ik})^T = (c_{ki}) = \sum_{j=1}^n a_{ji}b_{kj} = \sum_{j=1}^n b_{kj}a_{ji} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad \text{w.z.b.w.}$$

b) Voraussetzung: \mathbf{A} und \mathbf{B} seien verkettbar; a, b, λ reell

Behauptung: $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

Beweis:

$$\lambda(\mathbf{AB}) = \lambda((a_{ik})(b_{ik})) = (\lambda(a_{ik})(b_{ik})) = \begin{cases} (\lambda a_{ik})(b_{ik}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} \\ (a_{ik})(\lambda b_{ik}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) \end{cases} \quad \text{w.z.b.w.}$$

In Worten: Das Produkt zweier Matrizen multipliziert mit einer reellen Zahl ist gleich dem Produkt aus der mit der reellen Zahl multiplizierten ersten Matrix und der zweiten Matrix oder gleich dem Produkt aus der ersten Matrix und der mit der reellen Zahl multiplizierten zweiten Matrix.

6. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 13 \\ 25 & -21 & 16 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

7. Tableau 29:

						0	2	5	2	1	3
						1	3	4	0	0	2
		4	-8	1	-3	0	1	0	3	3	0
		0	2	1	0	2	5	1	0	1	1
3	1	12	-22	4	-9	-40	-83	-37	36	-115	-250
5	6	20	-28	11	-15	-58	-108	-27	73	-66	-317
2	0	8	-16	2	-6	-28	-60	-30	22	-96	-182
10	7	40	-66	17	-30	-126	-251	-9	131	-277	-749

8. $k = \mathbf{BAy}$ (Tableau 30):

										7,30
						1,2	0,8	2,1	3,0	5,60
						0,5	1,3	0,2	2,8	6,70
						1,0	1,1	1,8	2,5	8,10
3	7	5	12,1	17,0	16,7	41,1	628,33			
2	4	0	4,4	6,8	5,0	17,2	243,02			
1	6	2	6,2	10,8	6,9	24,8	352,85			
6	17	7	22,7	34,6	28,6	83,1	1224,20			

9. Nach Bild 48 gilt:

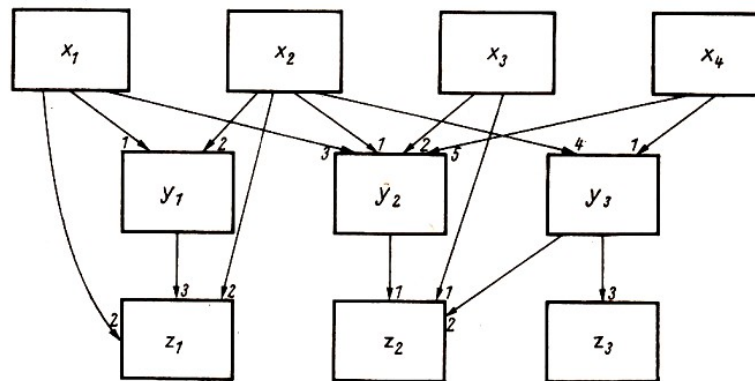


Bild 48

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung des Erzeugnisses Nr. ...	werden ... Einzelteile der Nr. ... gebraucht
	1 2 3 4
8	5 8 0 0
9	3 9 3 7
10	0 12 0 3

Kapitel 4
Aufgaben:

1. a) $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$; $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $P'(5;6)$ (Bild 49)

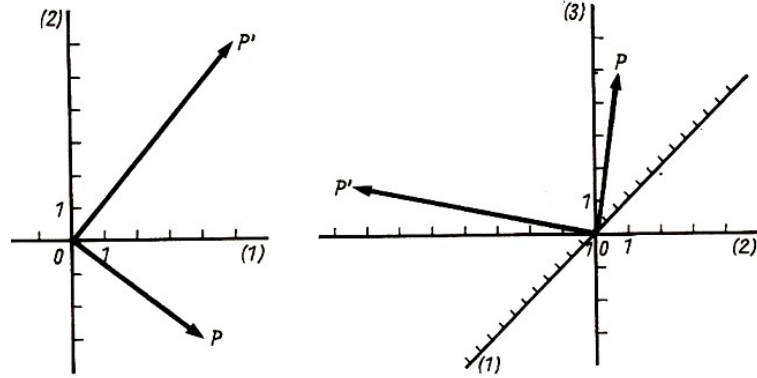


Bild 49, 50

$$b) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P'(-10; -11; -2) \text{ (Bild 50)}$$

$$c) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P'(-3; 1; 2) \text{ (Bild 51)}$$

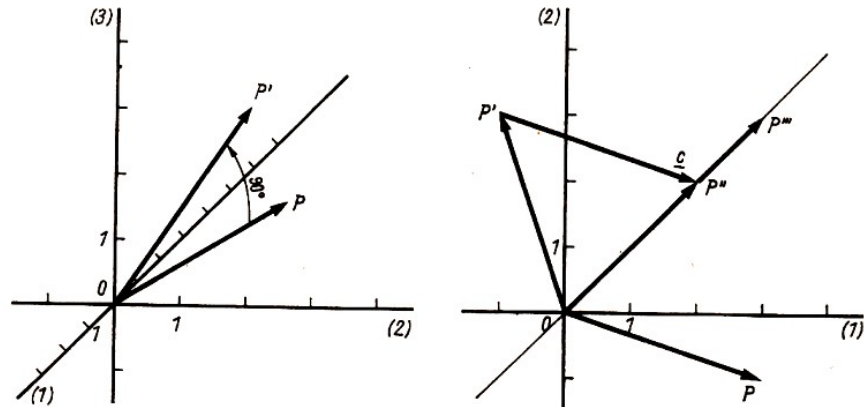


Bild 51, 52

2. a) Bild 52

$$b) 1. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; P'(-1; 3)$$

$$2. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; P''(2; 2)$$

$$3. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; P'''(3; 3)$$

$$c) 3. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$1. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Transformation } \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}; P'''(1,5; 3,5)$$

Die resultierende Transformation stimmt nicht mit der in a) und b) ermittelten überein.

$$3. a) P''' \text{ (Tableau 31): } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Tableau 31:

		1	0	-1	0	3
		0	-1	0	-1	3
0,5	0	0,5	0	-0,5	0	-1,5
0	0,5	0	-0,5	0	0,5	1,5

Tableau 32:

		5
		1
-0,5	0	-2,5
0	0,5	0,5

$$Q''' \text{ (Tableau 32): } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

- b) Durch A erfolgt eine Spiegelung am Koordinatenursprung; $P'(-3; -3)$, $Q'(-5; -1)$
 Durch B erfolgt eine Spiegelung an der (1)-Achse; $P''(-3; 3)$, $Q''(-5; 1)$.
 Durch C erfolgt eine zentrische Streckung vom Ursprung aus um $z = 0,5$; $P'''(-1,5; 1,5)$,
 $Q'''(-2,5; 0,5)$. (Bild 53)

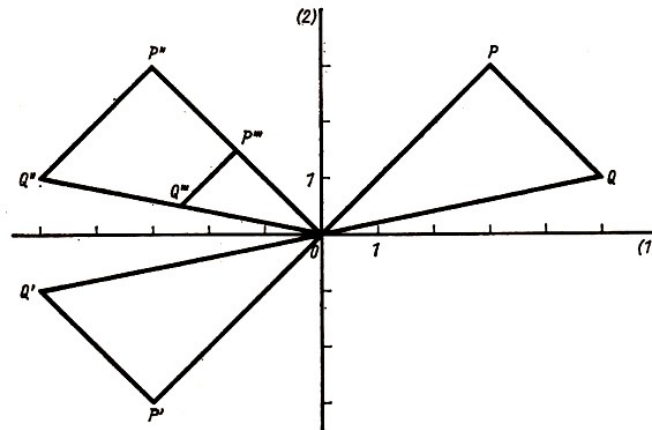


Bild 53

4. Durch die Matrix $Z_0 = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix}$ erfolgt die geforderte Abbildung. Sie bewirkt eine zentrische Streckung vom Ursprung aus um $z = 2,5$.

Kapitel 5

Arbeitsaufträge:

1. Für die Elemente im Tableau 33 gilt: Tableau 33:

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	l_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	l_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	l_3
c_{41}	c_{42}	c_{43}	b_{44}	l_4
x_1	x_2	x_3	x_4	-1

- (1) $b_{1k} = a_{1k}$ für $k = 1, \dots, 4$; $l_1 = k_1$
 (2) $c_{i1} = \frac{a_{i1}}{-b_{11}}$ für $i = 2, 3, 4$
 (3) $-c_{21}b_{12} + 1b_{22} = a_{22}$, daraus $b_{22} = c_{21}b_{12} + a_{22}$
 $-c_{21}b_{13} + 1b_{23} = a_{23}$, daraus $b_{23} = c_{21}b_{13} + a_{23}$
 $-c_{21}b_{14} + 1b_{24} = a_{24}$, daraus $b_{24} = c_{21}b_{14} + a_{24}$
 $-c_{21}l_1 + 1l_2 = k_2$, daraus $l_2 = c_{21}l_1 + k_2$
 (4) $-c_{31}b_{12} - c_{32}b_{22} = a_{32}$, $c_{32} = \frac{c_{31}b_{12} + a_{32}}{-b_{22}}$
 $-c_{41}b_{12} - c_{42}b_{22} = a_{42}$, $c_{42} = \frac{c_{41}b_{12} + a_{42}}{-b_{22}}$

(5) $-c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23} + 1b_{33} = a_{33}$, $b_{33} = c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + a_{33}$
 $-c_{31}b_{14} - c_{32}b_{24} + 1b_{34} = a_{34}$, $b_{34} = c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24} + a_{34}$
 $-c_{31}l_1 - c_{32}l_2 + 1l_3 = k_3$, $l_3 = c_{31}l_1 + c_{32}l_2 + k_3$

(6) $-c_{41}b_{13} - c_{42}b_{23} + c_{43}b_{33} = a_{43}$, $c_{43} = \frac{c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23} + a_{43}}{-b_{33}}$

(7) $-c_{41}b_{14} - c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} + 1b_{44} = a_{44}$, $b_{44} = c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} + a_{44}$
 $-c_{41}l_4 - c_{42}l_2 + c_{43}l_3 + 1l_4 = k_4$, $l_4 = c_{41}l_1 + c_{42}l_2 + c_{43}l_3 + k_4$

(8) Berechnung der Elemente des Lösungsvektors:

$[(-1)l_4] : (-b_{44}) = x_4$
 $[(-1)l_3 + x_4b_{34}] : (-b_{33}) = x_3$
 $[(-1)l_2 + x_4b_{24} + x_3b_{33}] : (-b_{22}) = x_2$
 $[(-1)l_1 + x_4b_{14} + x_3b_{13} + x_2b_{12}] : (-b_{11}) = x_1$

Aufgaben

1.

<p style="text-align: center;">Tableau 34:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>-3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1</td><td>2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>1</td><td>2</td><td>-3</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-3</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Rang $r = 2$</p>	1	2	-3	2	1	-1	1	-1	2	1	2	-3	-2	-3	5	-1	-1	0	<p style="text-align: center;">Tableau 35:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>-6</td><td>-3</td><td>3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>-3</td><td>11</td><td>-6</td><td>-14</td></tr> <tr><td>-2</td><td>$-\frac{2}{11}$</td><td>$\frac{1}{11}$</td><td>$-\frac{104}{11}$</td></tr> <tr><td>-1</td><td>$-\frac{9}{11}$</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Rang $r = 3$</p>	1	3	2	5	3	-2	0	1	2	4	3	-2	1	-6	-3	3	1	3	2	5	-3	11	-6	-14	-2	$-\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{104}{11}$	-1	$-\frac{9}{11}$	1	0
1	2	-3																																																	
2	1	-1																																																	
1	-1	2																																																	
1	2	-3																																																	
-2	-3	5																																																	
-1	-1	0																																																	
1	3	2	5																																																
3	-2	0	1																																																
2	4	3	-2																																																
1	-6	-3	3																																																
1	3	2	5																																																
-3	11	-6	-14																																																
-2	$-\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{104}{11}$																																																
-1	$-\frac{9}{11}$	1	0																																																

2.

Tableau 36:

1	-3	1	-6	-7
2	1	2	6	7
4	-3	-2	0	-1
1	-3	1	-6	-7
-2	7	-4	18	21
-4	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$	0

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Der Lösungsvektor lautet: $\mathbf{x} = (1 \ 2 \ -1)$.

Tableau 37:

1	-4	3	21	21
2	3	-1	-1	3
3	-1	2	20	24
1	-4	3	21	21
-2	11	-7	-43	-39
-3	-1	0	0	0

Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, da $n = 3$ und $r = 2$. Es besteht Abhängigkeit. Es gibt einen freien Parameter. Wird z.B. $x_1 = 4$ gewählt, sind $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

3. Tableau 38:

a)

2	-3	1	2	2
1	2	-1	-1	1
4	-5	-1	4	2
2	-3	1	2	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	0
-2	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{4}{7}$	-2
$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{9}$	-1	x^T

Tableau 39:

b)

1	3	2	-9	-3
-1	0	4	9	12
2	9	7	-21	-3
1	3	2	-9	-3
1	3	6	0	9
-2	-1	-3	-3	-6
-5	-2	1	-1	x^T

Tableau 40:

c)

1	-3	4	12	14
-2	8	-6	-4	-4
3	-5	15	72	85
1	-3	4	12	14
2	2	2	20	24
-3	-2	-1	-4	-5
14	6	4	-1	x^T

Tableau 41:

d)

1	1	1	9	12
1	2	4	15	22
1	3	9	23	36
1	1	1	9	12
-1	1	3	6	10
-1	-2	2	2	4
5	3	1	-1	x^T

Tableau 42:

e)

7	6	7	100	120
1	-2	1	0	0
3	1	-2	0	2
7	6	7	100	120
$-\frac{1}{7}$	$-\frac{20}{7}$	0	$-\frac{100}{7}$	$-\frac{120}{7}$
$-\frac{3}{7}$	$-\frac{11}{20}$	-5	-35	-40
3	5	7	-1	x^T

Tableau 43:

f)

1	-2	1	-2	-2
2	1	-3	11	11
3	2	2	-17	-10
1	-2	1	-2	-2
-2	5	-5	15	15
-3	$-\frac{8}{5}$	7	-35	-28
-1	-2	-5	-1	x^T

Tableau 44:

g)

2	4	6	2	14	28
1	-1	1	-1	10	10
2	3	2	-1	4	10
4	2	-1	2	-4	3
2	4	6	2	14	28
$-\frac{1}{2}$	-3	-2	-2	3	-4
-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-11	$-\frac{50}{7}$
-2	-2	$-\frac{27}{10}$	$\frac{83}{10}$	$-\frac{83}{10}$	0
2	-3	4	-1	-1	x^T

Tableau 45:

h)

0	1	1	1	-2
1	0	-3	-1	0
$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-4
2	-2	-1	0	7

Die Umstellung der Gleichungszeilen ist erforderlich, weil $a_{11} = 0$. Bei der Anwendung des verketteten Algorithmus müsste sonst durch 0 dividiert werden. Eine Möglichkeit der Umstellung des Gleichungssystems ist folgende (Tableau 46):

Tableau 46:

						z
1	0	3	-1	0	-3	
0	1	1	1	-2	1	
2	-2	-1	0	7	6	
$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-4	$-\frac{3}{2}$	
1	0	-3	-1	0	-3	
0	1	1	1	-2	1	
-2	2	7	4	3	14	
$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{14}$	$\frac{25}{14}$	$-\frac{25}{14}$	0	
2	-2	1	-1	-1	x^T	

i) Tableau 47:

Tableau 46:

						z
2	-3	-8	-9			
5	1	-37	-31			
4	11	-50	-35			
2	-3	-8	9			
$-\frac{5}{2}$	$\frac{17}{2}$	-17	$-\frac{17}{2}$			
-2	-2	0	0			

$r = 2$. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist kleiner als n , also ist das homogene Gleichungssystem nicht trivial lösbar. Es gibt $(n - r)$ freie Parameter: $n - r = 3 - 2 = 1$.

Die Darstellung im gestaffelten Gleichungssystem ergibt $\frac{17}{2}x_2 - 17x_3 = 0$. Also $x_2 = 2x_3$. Wird beispielsweise $x_3 = 1$ gewählt, so werden $x_2 = 2$ und $x_1 = 7$. Ein möglicher Lösungsvektor lautet $\mathbf{x} = (7 \ 2 \ 1)^T$.

4.

Tableau 48:

				z
1	3	1		5
-1	0	5		4
2	1	3		6
1	3	1		5
1	3	6		9
-2	$-\frac{5}{3}$	11		11

det $\mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 11 = 33$

Tableau 49:

				z
3	4	2	1	10
1	2	3	5	11
0	1	1	2	4
1	2	4	0	7
3	4	2	1	10
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{23}{3}$
0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{15}{2}$
$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{5}$	-7	-7

det $\mathbf{B} = 35$

Tableau 50:

1	1	2	1	5
2	0	-2	0	0
-2	-2	-2	0	-6
2	1	0	6	9
1	1	2	1	5
-2	-2	-6	-2	10
2	0	2	2	4
-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	6

det $\mathbf{C} = -24$

Tableau 51:

1	0	1	1	1	6
2	1	3	-2	1	5
0	-1	5	4	-2	6
0	1	-2	1	2	2
1	2	1	3	1	8
1	0	1	1	3	6
-2	1	1	-4	-5	-7
0	1	6	0	-7	-1
0	1	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{7}{2}$	$\frac{17}{2}$
-1	-2	$\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$

det $\mathbf{D} = -40$

e) Da \mathbf{F} eine untere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det \mathbf{F} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Kapitel 6

Arbeitsaufträge:

1. a) Die Menge der positiven rationalen Zahlen bildet hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe, weil

- das Produkt zweier positiver rationaler Zahlen a, b wieder eine positive rationale Zahl ist ($a \cdot b = c$),
- für positive rationale Zahlen das Assoziativgesetz der Multiplikation gilt ($(ab)c = a(bc)$),
- ein neutrales Element der Multiplikation vorhanden ist,
- zu jeder positiven rationalen Zahl a genau eine positive rationale Zahl a^{-1} existiert, für die gilt:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad , \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

b) Wir sprechen dann von einer kommutativen Gruppe, wenn das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt ($ab = ba$).

c) Die Menge der quadratischen regulären Matrizen bildet hinsichtlich der Multiplikation keine kommutative Gruppe, weil das Kommutativgesetz der Multiplikation für Matrizen nicht gilt.

2. a) Eine Menge, die hinsichtlich der Addition eine kommutative Gruppe bildet, muss folgende Eigenschaften haben:

- 1) Die Summe zweier Elemente der Menge ist wieder ein Element der Menge: $a + b = c$.
- 2) In der Menge gilt das Assoziativgesetz der Addition: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- 3) Die Menge enthält das neutrale Element 0 mit der Eigenschaft $0 + a = a + 0 = a$.
- 4) Zu jedem Element a der Menge existiert in der Menge genau ein Element $-a$ mit der Eigenschaft $-a + a = a + (-a) = 0$.
- 5) In der Menge gilt das Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$.

b) Die Menge der ganzen Zahlen bildet hinsichtlich der Addition eine kommutative Gruppe, weil für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

- 1) Die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl: $a + b = c$.
- 2) In der Menge der ganzen Zahlen gilt das Assoziativgesetz der Addition: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 3) Die Menge der ganzen Zahlen enthält das neutrale Element 0 mit der Eigenschaft $0 + a = a + 0 = a$
- 4) Zu jeder ganzen Zahl a existiert in der Menge der ganzen Zahlen genau eine ganze Zahl $-a$ mit der Eigenschaft $-a + a = a + (-a) = 0$.
- 5) In der Menge der ganzen Zahlen gilt das Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$.

Aufgaben:

1. Beweis:

Voraussetzung: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(n,n)}$; \mathbf{A}, \mathbf{B} regulär

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (Es gilt das Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation); $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}, \mathbf{EB} = \mathbf{B}$

Behauptung: $\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Beweis:

(1) $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{EB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}$

(2) Setzen wir für $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}$, dann gilt $\mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{E}$.

(3) Da nur die zu einer gegebenen Matrix (\mathbf{AB}) zugehörige inverse Matrix (\mathbf{AB}^{-1}) bei der Multiplikation mit der gegebenen Matrix die Einheitsmatrix \mathbf{E} ergibt, muss $\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^{-1}$ sein.

Satz: Die Inverse der Produktmatrix zweier regulärer (quadratischer) Matrizen ist gleich dem Produkt der Inversen beider Matrizen in umgekehrter Reihenfolge.

2. a) Tableau 52:

1	2	-1	1	0	0	3
-1	4	2	0	1	0	6
2	-2	-2	0	0	1	-1
1	2	-1	1	0	0	3
1	6	-1	1	1	0	9
-2	1	1	-1	1	1	2
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	-1	0	0	
1	0	1	0	-1	0	
$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	-1	

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ Probe wie gewohnt}$$

b) Tableau 53:

2	4	-1	1	0	0	6
3	7	0	0	1	0	11
-1	-2	1	0	0	1	-1
2	4	-1	1	0	0	6
$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	2
7	-3	1	-1	0	0	
-2	1	0	0	-1	0	
7	-3	2	0	0	-1	

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ Probe wie gewohnt}$$

3. a)

	x_1	x_2	x_3
y_1	3	1	-3
y_2	2	1	-3
y_3	1	2	-5
K	-2	1	3

	x_1	y_2	x_3
y_1	1	1	0
x_2	-2	1	3
y_3	-3	2	1
K	3	-2	1

	x_1	y_2	y_3
y_1	1	1	0
x_2	7	-5	3
x_3	3	-2	1
K	1	-1	0

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	-1	0
x_2	7	-12	3
x_3	3	-5	1

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -12 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

	x_1	x_2	x_3
y_1	13	0	3
y_2	-2	-1	1
y_3	0	2	-3
K	-2	-1	1

	x_1	y_2	x_3
y_1	13	0	3
x_2	-2	-1	1
y_3	-4	-2	-1
K	-4	-2	-1

	x_1	y_2	y_3
y_1	1	-6	-3
x_2	-6	-3	-1
x_3	-4	-2	-1
K	1	6	3

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	6	3
x_2	-6	-39	-19
x_3	-4	-26	-13

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -6 & -39 & -19 \\ -4 & -26 & -13 \end{pmatrix}$$

4. Durch Umformung erhält man:

$$3\mathbf{E}\mathbf{X} - 2\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B}, \quad (3\mathbf{E} - 2\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = (3\mathbf{E} - 2\mathbf{A})(\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

Zur Abkürzung schreiben wir $3\mathbf{E} - 2\mathbf{A} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{C} - \mathbf{B} = \mathbf{K}$.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Tableau 54:

-1	2	0	-3	0	-7	-9
-6	3	-4	3	1	2	-1
0	-2	1	-2	-9	0	12
-1	2	0	-3	0	-7	-9
-6	-9	-4	21	1	44	53
0	-2	17	-20	-83	-88	-214
0	-9	9	-9	-9	-9	-9
25	-13	-60	-1	0	0	
17	17	17				
70	35	-83	0	-1	0	
17	17	17				
31	-44	-88	0	0	-1	
17	17	17				

$$\mathbf{x} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 25 & 70 & 31 \\ -13 & 35 & -44 \\ -60 & -83 & -88 \end{pmatrix}$$

5. a) Die inverse Matrix, die zur Matrix \mathbf{Z}_0 gebildet werden kann, lautet:

Tableau 55:

z	0	1	0
0	z	0	1
z	0	1	0
0	z	0	1
1/z	0	-1	0
0	1/z	0	-1

$$\mathbf{Z}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

b)

Tableau 56:

1	0	2	1	0	0	4
0	1	1	0	1	0	3
0	0	1	0	0	1	2
1	0	2	1	0	0	4
0	1	1	0	1	0	3
0	0	1	0	0	1	2
1	0	0	-1	0	0	
0	1	0	0	-1	0	
-2	-1	1	0	0	-1	

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kapitel 7
Aufgaben:

1. Vereinfachte Darstellung (Bild 54):

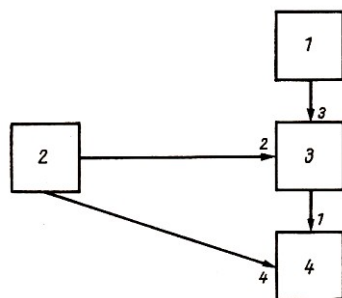


Bild 54

$$\mathbf{x}^T$$

	E-D				y
1	0	-3	0	0	
0	1	-2	-4	0	
0	0	-1	-1	3	
0	0	0	1	5	
24	36	8	5	-1	

Matrix der direkten Einsatzkoeffizienten: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aus $(\mathbf{E} - \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{y}$ folgt $\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{y}$.

$$\mathbf{E} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Bedarf an jedem einzelnen Erzeugnis wird durch den Vektor $\mathbf{x} = (24 \ 36 \ 8 \ 5)^T$ bestimmt.

Mit Worten: Von A_1 werden 24 t, von A_2 16 kWh, von A_3 8 t benötigt, um 5000 Stück von A_4 herzustellen.

2. Aus Bild 43 kann die Matrix B der direkten Einsatzkoeffizienten abgelesen werden:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Vektors \mathbf{x} der Gesamtproduktion ist unter Berücksichtigung des Vektors \mathbf{y} des Verkaufsprogramms die Gleichung $(\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nach \mathbf{x} aufzulösen (Tableau 58):

Tableau 58:

E-B						y	
1	0	0	-2	-3	-2	3	
0	1	0	-1	-1	-1	1	
0	0	1	0	-2	0	5	
0	0	0	1	0	-3	7	
0	0	0	0	1	-4	9	
0	0	0	0	0	1	10	
\mathbf{x}^T	244	97	103	37	49	10	-1

$$\mathbf{x} = (244 \ 97 \ 103 \ 37 \ 49 \ 10)^T$$

Die Berechnung des gesamten Materialaufwandes erfolgt durch $\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 244 \\ 97 \\ 103 \\ 37 \\ 49 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = (1433 \ 1257 \ 799 \ 1044 \ 1215 \ 1436)^T$$

Durch $\mathbf{k}_M = \mathbf{m}^T \mathbf{a}$ werden die Gesamtmaterialekosten berechnet:

$$\mathbf{k}_M = (12 \ 3 \ 6 \ 10 \ 4 \ 3) \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} = 45369$$

Die gesamten Materialekosten betragen 45369 M.

3. (1)

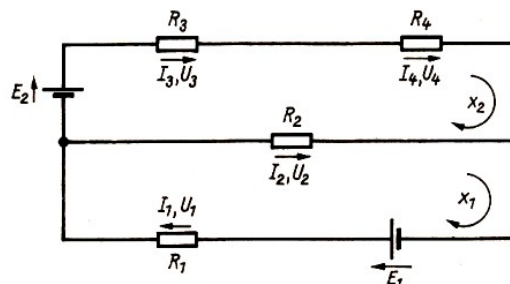


Bild 55

(2) Es existieren $(6 - 5 + 1) = 2$ unabhängige Maschen.

(3) Widerstandsmatrix: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4), (5) Verknüpfungsmatrix: $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{x}$

(6) Vektor der Urspannungen: $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e} = \mathbf{V}^T \mathbf{u}$

(7) Berechnung der Maschenumlaufströme (Tableau 59): $\mathbf{A} = \mathbf{V}^T \mathbf{R}\mathbf{V}$ und $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$

				\mathbf{V}			
				\mathbf{R}			
		\mathbf{V}^T		1	0	0	0
				0	2	0	0
				0	0	2	0
				0	0	0	3
1	1	0	0	1	2	0	0
0	-1	1	1	0	-2	2	3
				\mathbf{A}			
				3	-2	1	2
				$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{25}{3}$
				$\frac{11}{17}$	$\frac{8}{17}$	-1	
				\mathbf{x}^T			

Der Vektor der Maschenumlaufströme lautet: $\mathbf{x} = \left(\frac{11}{17} \quad \frac{8}{17}\right)^T$

(8) Berechnung der Leiterströme durch $\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{i} = \left(\frac{11}{17} \quad \frac{3}{17} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{8}{17}\right)^T$$

Berechnung der Spannungsabfälle über den Widerständen durch $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{11}{17} \quad \frac{6}{17} \quad \frac{16}{17} \quad \frac{24}{17}\right)^T$$

4. Bild 56

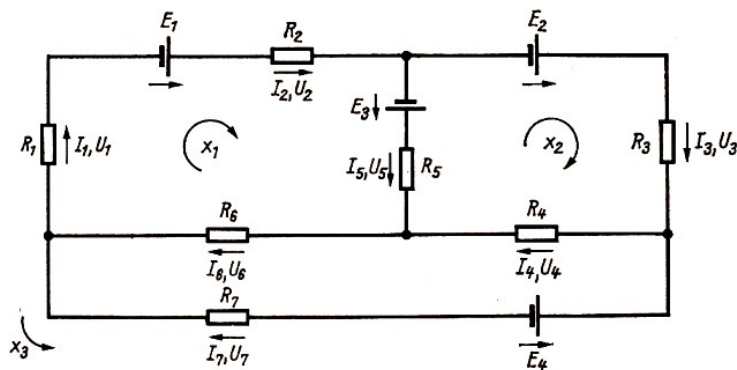


Bild 56

Es existieren 3 unabhängige Maschen.

$$\text{Widerstandsmatrix: } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Verknüpfungsmatrix: } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor der Urspannungen: $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} E_1 + E_3 \\ E_2 - E_3 \\ -E_1 - E_2 + E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Berechnung des Vektors \mathbf{x} der Maschenumlaufströme (Tableau 60):

							R							V				
							1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1		
							0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1		
							0	0	2	0	0	0	0	0	1	-1		
							0	0	0	3	0	0	0	0	1	0		
							0	0	0	0	2	0	0	1	-1	0		
							0	0	0	0	0	2	0	1	0	0		
							0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	e	z
V^T							1	1	0	0	2	2	0	6	-2	-2	3	5
1	1	0	0	1	1	0	0	0	2	3	-2	0	-2	7	-2	1	4	
0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	-2	0	0	1	-2	-2	5	-3	-2	
-1	-1	-1	0	0	0	1								6	-2	-2	3	5
														$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{3}$	$-\frac{8}{3}$	2	$\frac{17}{3}$
														$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{183}{3}$	$-\frac{22}{3}$	$\frac{117}{3}$
														$\frac{3}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{57}{3}$	$-\frac{19}{3}$	$\frac{57}{3}$
														$\frac{53}{122}$	$\frac{10}{61}$	$-\frac{22}{61}$	-1	
														$\frac{122}{122}$	$\frac{61}{61}$	$-\frac{61}{61}$		

Der Vektor der Maschenumlaufströme lautet: $\mathbf{x} = \left(\frac{53}{122} \quad \frac{10}{61} \quad -\frac{22}{61} \right)^T$
 Berechnung des Vektors \mathbf{i} der Leiterströme:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{53}{122} \\ \frac{10}{61} \\ -\frac{22}{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{97}{122} \\ \frac{97}{122} \\ \frac{32}{61} \\ \frac{10}{61} \\ \frac{33}{61} \\ \frac{122}{122} \\ \frac{53}{61} \\ -\frac{22}{61} \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Leiterströme lautet: $\mathbf{i} = \frac{1}{122}(97 \ 97 \ 64 \ 20 \ 33 \ 53 \ -44)^T$.

Berechnung des Vektors u der Spannungsabfälle über den Widerständen (Tableau 61):

										V				
										1	0	-1		
										1	0	-1		
										0	1	-1		
										0	1	0		
										1	-1	0	x	
										1	0	0		
										0	0	1		
										$\frac{53}{122}$	$\frac{10}{61}$	$-\frac{22}{61}$		
										$\frac{97}{122}$	$\frac{97}{122}$	$\frac{61}{64}$		
													u	
R										1	0	-1		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		-1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		-1
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		-2
0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	2		-2
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2		0
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2		0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
										$\frac{97}{122}$	$\frac{97}{122}$	$\frac{30}{61}$	$\frac{33}{61}$	
										$\frac{53}{61}$	$\frac{53}{61}$	$-\frac{22}{61}$	$-\frac{22}{61}$	

Der Vektor der Spannungsabfälle lautet: $u = \frac{1}{122}(97 \ 97 \ 128 \ 60 \ 66 \ 106 \ -44)^T$

Literatur

Autorenkollektiv: Ausgewählte Kapitel der Mathematik. 8. Auflage. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1974.

Autorenkollektiv: Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. 2. Auflage. Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1972.

Autorenkollektiv: Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. Aufgabensammlung. Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1971.

BELKNER, H.: Matrizen. 2. Auflage. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1973.

BREHMER, S., und H. BELKNER: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra. 2. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

DIETRICH, C., und H. STAHL: Matrizen und Determinanten und ihre Anwendung in Technik und Ökonomie. 2. Auflage. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968.

GANTMACHER, F.: Matrizenrechnung Teil I. 3. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970.

WUSSING, H.: Carl Friedrich Gauss. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974.