

RECHNE RASCH UND RICHTIG

KURZGEFASSTER LEITFADEN DES PRAKTISCHEN RECHNENS
UND SEINER ANWENDUNGEN

Als sich der Begriff der Zahl, d. h. die Vorstellung einer bestimmten Menge von Dingen, entwickelt hatte, machte sich auch das Rechnen mit diesen Zahlen notwendig. Eine natürliche und brauchbare „Rechenmaschine“ waren dabei die Finger der Hände, die noch heute von Kindern beim Zählen und bei einfachen Rechnungen als anschauliches Hilfsmittel verwendet werden. Das uns geläufige Zahlenrechnen hat sich erst sehr spät im Laufe von Jahrhunderten entwickelt, und es ist ein weiter Weg, der von den „Fingerzahlen“ zu den Rechenverfahren geführt hat, die heute zur Beherrschung des Zahlenreiches gebraucht werden.



Der vorliegende Band wurde von Dr. Karl Gey, Leipzig, verfaßt
Das farbige Titelbild stammt von Alfred Sedelmann, Leipzig

RECHNE RASCH UND RICHTIG!

ANLEITUNG
ZUM PRAKTISCHEN RECHNEN

W. Förster

VOLK UND WISSEN SAMMELBÜCHEREI
NATUR UND WISSEN • SERIE A • BAND 1



V O L K U N D W I S S E N
VERLAGS G M B H • B E R L I N / L E I P Z I G

I N H A L T	Einleitung	3
	Grundregeln für jeden Rechner	3
	Bezeichnungen	4
	Abkürzungen	4
I. Das formale Rechnen		
	A. Das Addieren	5
	B. Das Subtrahieren	7
	C. Das Multiplizieren	7
	D. Das Multiplizieren übers Kreuz	10
	E. Das Wichtigste über Potenzen	13
	F. Das Dividieren	16
	G. Die Teilbarkeit und die Zerlegung der Zahlen	18
	H. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen	20
II. Wichtige Anwendungen des Zahlenrechnens		
	A. Dreisatz- oder Regel-de-tri-Rechnung	25
	B. Die Prozent-(Hundertsatz-)Rechnung	28
	C. Die Verteilungs-(Gesellschafts-)Rechnung	30
	D. Die Zinsrechnung	31
III. Rechenproben		
	A. Die Neunerprobe	34
	B. Die Elferprobe	36
	C. Die Zuverlässigkeit der Neuner- und Elferprobe	38
IV. Das Rechnen mit Vorteilen		
	A. Vorteile bei der Addition	39
	B. Vorteile bei der Subtraktion	40
	C. Vorteile bei der Multiplikation	41
	D. Vorteile bei der Division	47
V. Die Überschlagsrechnung		49
	Fach- und Fremdwörter	51

PREIS 60 PFENNIG

Bestell-Nr. 12502

Gesetzt in der Offizin Haag-Drugulin, Leipzig (M 103)
 Druck des Umschlages und des Innenteils von Druckerei
 Elbe-Saale, Zweigniederlassung Naumburg-Saale (7) 1538
 Lizenz Nr. 334 1.-100.Tausend 1947 Alle Rechte vorbehalten

EINLEITUNG

Der vorliegende Band, der sich an einen breiten Leserkreis wendet, will der Förderung des Zahlenrechnens dienen, sei es als Unterlage für den Selbstunterricht, sei es als Hilfsmittel in der Hand des Lehrers. Er stellt dabei geringe Anforderungen an die Vorkenntnisse des Lesers und vermeidet allgemeine mathematische Ableitungen.

Neben dem formalen Rechenschema werden die für das praktische Leben wichtigsten Anwendungsgebiete des Rechnens, die Rechenproben und, etwas ausführlicher, die wichtigsten Rechenvorteile sowie die Überschlagsrechnung behandelt.

GRUNDREGELN FÜR JEDEN RECHNER

1. Das Ergebnis einer Rechnung hat nur dann einen Wert, wenn Du für seine Richtigkeit unbedingt einstehen kannst. Daher keine Rechnung ohne hinreichende Probe!

2. Das kleine $\ll 1+1 \gg$ und $\ll 1 \times 1 \gg$ mußt du fest und sicher im Kopfe haben, dazu auch möglichst das mittlere $\ll 1 \times 1 \gg$ (1×11 bis 9×19). Mehr auswendig zu lernen hat nur dann einen Wert, wenn Du es jederzeit richtig im Gedächtnis bereit hast.

3. Beachte, daß jede Ziffer einer Zahl stets zwei Werte hat, einen Nenn- und einen Stellenwert!

4. Es ist nützlich, vor jeder Rechnung durch einen Überschlag die Größenordnung des Ergebnisses abzuschätzen. Das bewahrt davor, unwahrscheinliche und sinnlose Ergebnisse als richtig hinzunehmen und vor allem Fehler beim Stellenwert zu begehen.

5. Rechnest Du schriftlich, so schreibe die Zahlen so deutlich wie nur möglich, und möglichst senkrecht! Beim Untersetzen erleichtert das die Übersicht und schützt vor Blickfehlern. Im übrigen bemühe Dich, soviel wie möglich im Kopfe zu rechnen!

6. Vor jeder Rechnung sieh Dir die Zahlen, mit denen Du zu rechnen hast, genau daraufhin an, ob sie nicht irgendeine Eigenart haben, die das Rechnen mit ihnen erleichtert, und Vorteile bieten, deren es gar viele gibt! Das erspart nicht nur Zeit und Mühe, sondern solches «denkendes Rechnen» ist eine anregende Beschäftigung, die Deiner Erfindungsgabe weiten Spielraum läßt gegenüber der eintönigen Anwendung eines starren Rechenschemas.

BEZEICHNUNGEN

1. Addition: $\underbrace{\text{Summand} + \text{Summand} + \text{Summand} + \dots}_{\text{Summe}} = \text{Wert der Summe}$
2. Subtraktion: $\underbrace{\text{Minuend} - \text{Subtrahend}}_{\text{Differenz}} = \text{Wert der Differenz}$
3. Multiplikation: $\underbrace{\text{Multiplikand} \times \text{Multiplikator}}_{\text{Produkt}} = \text{Wert des Produktes}$
Gemeinsamer Name für Multiplikand und Multiplikator: Faktoren
4. Division: $\underbrace{\text{Dividend} : \text{Divisor}}_{\text{Quotient}} = \text{Wert des Quotienten}$
5. Potenzen: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots$ (d. h. n gleiche Faktoren a)
a Basis oder Grundzahl
n Exponent oder Hochzahl
6. Rangzahlen:

$1 = 1^1 = 10^0$	E (Einer)
$10 = 10^1$	Z (Zehner)
$100 = 10^2$	H (Hunderter)
$1000 = 10^3$	T (Tausender)
$10\,000 = 10^4$	ZT (Zehntausender)
$100\,000 = 10^5$	HT (Hunderttausender)
$1\,000\,000 = 10^6$	M (Millioner)

z (Zehntel), h (Hundertstel), t (Tausendstel), zt (Zehntausendstel) usw.

ABKÜRZUNGEN

- NR Neunerrest (Rest, der bei der Division einer Zahl durch 9 bleibt)
 ER Elferrest (Rest, der bei der Division einer Zahl durch 11 bleibt)
 QS Quersumme (Summe der Ziffern einer Zahl)
 QD Querdifferenz (Differenz aus der Summe der ungeradstelligen und der Summe der geradstelligen Ziffern einer Zahl)
 NP Neunerprobe
 EP Elferprobe
 ZE Zehnergänzung

I. DAS FORMALE RECHNEN

Ehe man versuchen kann, beim Rechnen unter Ausnutzung der sich bietenden Vorteile einfachere und kürzere Wege zu gehen, ist es unerlässlich, das für jede Rechenart gültige Normalschema sicher zu beherrschen. Dabei ist es nützlich, die erforderlichen Gedankenschritte — wenn man laut rechnet, gilt das erst recht — so knapp wie nur möglich zu bemessen.

A. Das Addieren

Hierbei schreibt man (möglichst steil und deutlich) die einzelnen Summanden so hin, daß Ziffern gleichen Stellenwertes genau untereinander stehen, also zum Beispiel:

$$\begin{array}{r} 7\ 458 \\ +\ 19\ 236 \\ +\ 8\ 449 \\ +\ 7\ 262 \\ +\ 6\ 474 \\ +\ 42\ 019 \\ +\ 9\ 865 \\ \hline 100\ 763 \end{array}$$

Innerhalb jeder Reihe gleichen Stellenwertes zählt man, von der ersten Ziffer der Einer ausgehend und von oben beginnend, immer um die folgenden Ziffern weiter, bis man unten am Strich angelangt ist. In der nächstfolgenden Reihe beginnt man mit dem Stellenwertüberschuß, falls ein solcher zu übertragen ist, sonst mit der ersten dort stehenden Ziffer usw. Beim oben stehenden Beispiel rechnet man also folgendermaßen:

E-Reihe: 8, 14, 23, 25, 29, 38, 43; 4 (d. h. 3' von 43 wird hingeschrieben, 4 in die Z-Reihe übertragen).

Z-Reihe: 9 (d. h. 4+5), 12, 16, 22, 29, 30, 36; 3 usw.

Auf keinen Fall rechnet man umständlich so: 8 und 6 ist 14, und 9 ist 23, und 2 ist 25 . . . und 5 ist 43, hingeschrieben 3, 4 gemerkt, und dann in der Z-Reihe 4 und 5 ist 9, und 3 ist 12 usw. Man vermeide alles unnütze Gerede — und sei es auch nur in Gedanken —, denn dadurch kommt man nicht sicherer, wohl aber umständlicher vorwärts.

Zur Probe rechnet man jedes Ergebnis noch einmal durch, aber jetzt innerhalb jeder Reihe von unten beginnend, also: 5, 14, 18, 20, 29, 35, 43; 4 usf.

Das Addieren von nur zwei Summanden führt man möglichst immer von links nach rechts durch, also mit dem höchsten vorkommenden Stellenwerte beginnend. Dabei ist es nur notwendig, mit dem Blick etwas vor auszueilen und die nächstniedere Reihe zu überschauen, um festzustellen, ob von ihr etwa ein Überschuß, der immer nur 1 sein kann, mit zu übertragen ist. Man rechnet also z. B.:

48 736	13 (nämlich $8+4=12$, dazu 1 als Überschuß der folgenden Reihe)
+ 85 647	4 (aus $8+5=13$, dazu 1 Überschuß)
134 383	3 (aus $7+6=13$, dazu kein Überschuß)
	8 (aus $3+4=7$, dazu 1 Überschuß)
	3 (aus $6+7=13$)

Diese Art zu rechnen geht bei einiger Übung rascher vonstatten und ermöglicht, das Ergebnis so hinzuschreiben, wie man es beim Schreiben und Lesen der Zahlen gewöhnt ist.

Vermag man dabei gleich Zahlengruppen zu überblicken und dadurch auch das Addieren gruppenweise durchzuführen, so ist damit ein weiterer Zeitgewinn verbunden. Beim oben stehenden Beispiel kann man so gleich die letzten beiden Stellen, also $36+47=83$ addieren; beim folgenden rechnet man:

5 348	$53+72=125$ (kein Übertrag von vorher!)
+ 7 227	$48+27=75$
12 575	

Dieses Aufspalten in Gruppen ist vor allem nützlich, wenn es sich um Zahlen mit nur wenig Stellen handelt. So rechnet man ohne Hinschreiben, also im Kopfe, $376+423$ folgendermaßen: $37+42=79$ und dahinter $6+3=9$, und schreibt das Ergebnis von links nach rechts als 799 auf.

Sind die Summanden Dezimalbrüche, so ist beim Untersetzen besonders darauf zu achten, daß gleiche Stellenwerte untereinander stehen, vor allem Komma unter Komma.

Da es sich bei der praktischen Anwendung des Rechnens in der Regel um benannte Zahlen handelt, ist das Ergebnis oft nur bis auf eine bestimmte Dezimalstelle genau, d. h. auf diese Stelle abgerundet, zu ermitteln. Bei der **Abrundung** einer Zahl auf irgend eine bestimmte Stufe wird grundsätzlich die letzte bleibende Ziffer um 1 erhöht, wenn die erste weggelassene Ziffer größer als 4 ist. So ergibt, auf zwei Stellen abgerundet, die Zahl 61,313 den Wert 61,31, die Zahl 37,687 dagegen den Wert 37,69.

Wird der Wert der Summe mehrerer Dezimalzahlen bis auf eine bestimmte Stelle genau verlangt, so rundet man bei weniger als 10 Summanden die einzelnen Zahlen vor dem Addieren auf eine Stelle, bei 10 und mehr Summanden auf zwei Stellen weiter ab, als gefordert ist, addiert sie und rundet das Ergebnis auf die verlangte Stelle ab.

B. Das Subtrahieren

Hierbei wendet man vorteilhaft möglichst die Ergänzungsmethode an. Sie besteht darin, daß man von der abzuziehenden Zahl, dem Subtrahenden, ausgeht und feststellt, um wieviel diese zu ergänzen ist, um zu der Zahl zu gelangen, von der abgezogen wird (dem Minuenden). Man rechnet also z. B. $8-3=5$ nicht «8 minus 3 ist 5», sondern «3 plus 5 ist 8» und dementsprechend.

$$\begin{array}{r} 8\ 346 \\ - 5\ 452 \\ \hline 2\ 894 \end{array}$$

nämlich 2 plus 4 ist 6; 5 plus 9 ist 14 und, indem man die 1 von 14 zu den 4 H der folgenden Stelle hinzunimmt, 5 plus 8 ist 13, und schließlich 6 plus 2 ist 8. Die hervorgehobenen Zahlen werden dabei jeweils hingeschrieben.

Besonders vorteilhaft erweist sich diese Ergänzungsmethode beim Subtrahieren mehrerer Zahlen. Statt diese erst für sich zu addieren und dann ihre Summe zu subtrahieren, verbindet man beides in eins und rechnet z. B.

$$\begin{array}{r} 98\ 435 \\ - 20\ 348 \\ - 3\ 957 \\ - 4\ 896 \\ - 17\ 835 \\ \hline 51\ 399 \end{array}$$

nämlich

5, 11, 18, 26 plus 9 ist 35; 3 (d. h. 3 ist zu übertragen)
6, 15, 20, 24 plus 9 ist 33; 3
11, 19, 28, 31 plus 3 ist 34; 3
10, 14, 17 plus 1 ist 18; 1
2, 4 plus 5 ist 9

Die jeweils hervorgehobenen Ziffern werden hingeschrieben.

Soll der Wert der Differenz von Dezimalbrüchen nur bis auf eine bestimmte Stellenzahl genau, also abgerundet, berechnet werden, so verfährt man wie bei der Addition.

C. Das Multiplizieren

Bei der Multiplikation zweier Zahlen ist unter Beachtung des Stellenwertes jede Ziffer des einen Faktors mit jeder Ziffer des anderen zu multiplizieren. Dann sind die dabei erhaltenen Teilprodukte, ihrem Stellenwerte nach genau untereinandergesetzt, zu addieren.

Da der Wert eines Produktes von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist, z. B. $57 \cdot 546 = 546 \cdot 57$, wählt man die bequemere Zahl als Multiplikator, kann aber dann durch Umstellen der Faktoren die Rechnung wiederholen. Das ergibt eine gute Rechenprobe, da ja die beiden Ergebnisse übereinstimmen müssen.

An sich ist es gleichgültig, ob man bei der Ermittlung der Teilprodukte mit der höchsten oder tiefsten Stelle des Multiplikators beginnt. Man gewöhne sich zunächst aber daran, immer mit der höchsten Stelle anzufangen, also z. B. bei $467 \cdot 348$ erst mit 3 H, dann mit 4 Z und zuletzt mit 8 E zu multiplizieren.

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 467 \cdot 345 \\
 \hline
 1401 \\
 1868 \\
 2335 \\
 \hline
 161115
 \end{array}$$

nämlich: 21 (d. h. $3 \cdot 7$!) 2 (d. h. 2 ist zu übertragen), da es sich um H handelt, ist die 1 von 21 unter die 4 H von 467 unterzusetzen! Dann 18, 20; 2 (2 ist zu übertragen); 12, 14. Nun folgt die Multiplikation mit den 4 Z, das Untersetzen hat also bei 6 von 467 zu beginnen. 28, 2, 24, 26, 2, 16, 18! Schließlich 35, 3 (5 unter die 7 E untersetzen!), 30, 33, 3, 20, 23! Zum Schluß werden die Teilprodukte addiert.

Auf keinen Fall rechnet man in folgender langatmiger und zeitraubender Weise: « $3 \cdot 7 = 21$, schreibe 1, merke 2! $3 \cdot 6 = 18$ und 2 ist 20, schreibe Null, merke 2» usw.! Auch wenn man das nicht laut ausspricht, opfert man unnütz Zeit und rechnet auch nicht richtiger als bei der knappen Zusammenfassung.

Enthält der **Multiplikator an irgendeiner Stelle eine 0** (z. B. 408), dann wird das zur Null gehörige Teilprodukt nicht hingeschrieben, sondern an das vorhergehende Teilprodukt eine Null angehängt.

Beim **Multiplizieren mit Dezimalbrüchen** kommt es vor allem darauf an, das Komma an die richtige Stelle zu setzen. Als wichtige Regel gibt es dabei zu merken: **Der Wert des Produktes hat so viele Stellen nach dem Komma, wie seine Faktoren zusammen** (z. B. $2,25 \cdot 4,3 = 9,675$).

Hiernach ist es möglich, ein Produkt von Dezimalzahlen zunächst einfach ohne Berücksichtigung des Kommas wie ein Produkt ganzer Zahlen auszurechnen und dann im Ergebnis so viel Stellen durch Setzen des Kommas abzuschneiden, wie sich nach der genannten Regel ergibt. Um aber andere Fehler zu vermeiden, ist es mindestens für den Anfänger erforderlich, die Teilprodukte unter Beachtung der Stellenwerte richtig unterzusetzen. Man rechnet also z. B.:

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 25,64 \cdot 0,0829 \\
 \hline
 2,0512 \\
 5128 \\
 23076 \\
 \hline
 2,125556
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 364,58 \cdot 23,7 \\
 \hline
 7291,6 \\
 1093,74 \\
 255,206 \\
 \hline
 8640,546
 \end{array}$$

Beim Beispiel a) hat man also beim Untersetzen des ersten Teilproduktes um zwei Stellen nach rechts einzurücken, denn man beginnt die Multiplikation mit 8 Hundertsteln, wodurch die Stellenwerte um zwei Stellen erniedrigt werden; hingegen beim Beispiel b) hat man beim Untersetzen des ersten Teilproduktes um eine Stelle nach links vorzurücken, da bei der Multiplikation mit Zehnern die Stellenwerte um eine Stelle erhöht werden. Auf alle Fälle erreicht man durch diese Art, daß **Komma genau unter Komma** steht.

Vielleicht erscheint die Vorschrift, immer mit der höchsten Stelle des Multiplikators beim Rechnen der Teilprodukte zu beginnen, willkürlich, da man ja ebenso gut mit dessen niedrigster Stelle anfangen und dann beim nächsten

Teilprodukt, statt um eine Stelle «einzurücken», um eine Stelle «vorrücken» könnte.

Indessen erweist sich diese Vorschrift besonders nützlich beim **abgekürzten Multiplizieren**, bei dem das Ergebnis nur bis auf eine bestimmte vorgeschriebene Stellenzahl — man denke wieder an benannte Zahlen! — genau zu berechnen ist. Soll z. B. $7,8396 \cdot 235,4$ nur bis auf 2 Stellen nach dem Komma genau berechnet werden, so würde das ungekürzte Ergebnis deren 5 haben. Es genügt also, die Teilprodukte nur um eine Stelle weiter zu berücksichtigen, als für den abgekürzten Wert des Ergebnisses verlangt ist, und dann die tiefer liegenden Stellen unberücksichtigt zu lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 7,8396 \cdot 235,4 \\
 \hline
 1\ 567,92 \\
 235,188 \\
 39,198 \\
 3,136 \\
 \hline
 1\ 845,44
 \end{array}$$

Das erste Teilprodukt beginnt mit $2 \cdot 6 = 12$, wobei die 2 von 12 um zwei Stellen vorzurücken, also unter die 3 des Multiplikanden zu setzen ist, da ja mit 2 H multipliziert wird. Beim nächstfolgenden Teilprodukt, das mit $3 \cdot 6$ anfängt, hat man mit dem Untersetzen in der dritten Stelle nach dem Komma zu beginnen, die ja zunächst noch berücksichtigt werden muß. Beim darauffolgenden Teilprodukt mit

5 E ist nur der Beitrag zu berücksichtigen, den die 6 des Multiplikanden für die dritte Stelle liefert. Hier also (ohne es hinzuschreiben!) $5 \cdot 6 = 30$, wobei nur die 3 als Übertrag zu berücksichtigen ist, die zu $5 \cdot 9$ hinzugefügt wird. Zum Zeichen dafür, daß weiterhin eine Stelle des Multiplikanden außer acht gelassen wird, setzt man zweckmäßig **einen Punkt darüber**. Beim Multiplizieren mit 4 Zehnteln findet nur noch der Einfluß der 9 des Multiplikanden (Punkt darüber!) auf die nächsthöhere Stelle Berücksichtigung, also « $4 \cdot 9 = 36$ » (4 abgerundet zu übertragen!), dann $4 \cdot 3 = 12$, 16 (d. h. 12 + Übertrag 4), wobei die 6 in die dritte Stelle nach dem Komma zu setzen ist. Beim Addieren der Teilprodukte überträgt man nur den Überschuß (abgerundet), den die dritte Stelle (rechts vom senkrechten Strich) auf die nächsthöhere Stelle ergibt.

Bei dem Beispiel $5,6738 \cdot 0,547$, das auf drei Stellen nach dem Komma genau berechnet werden soll, hat, da beim Untersetzen des ersten Teilproduktes in der fünften Stelle zu beginnen ist (es wird mit 5 Zehnteln multipliziert), die 8 des Multiplikanden nur durch den Übertrag Einfluß auf die zunächst noch zu berücksichtigende vierte Stelle. Durch einen Punkt darüber wird das angedeutet, und man rechnet $5 \cdot 8 = 40$ (d. h. 4 ist zu übertragen), dann $5 \cdot 3 = 15$, 19 (d. h. 15 + Übertrag 4), wobei die 9 hingeschrieben, die 1 übertragen wird usw. Beim nächstfolgenden Teilprodukt findet dann nur der von der 3 des Multiplikanden herrührende Übertrag Berücksichtigung (Punkt über die 3), und dann so weiter, also:

$$\begin{array}{r}
 5,6738 \cdot 0,547 \\
 \hline
 2,83619 \\
 22619 \\
 3917 \\
 \hline
 3,104
 \end{array}$$

D. Das Multiplizieren übers Kreuz

Von der angegebenen Weise der Teilproduktbildung weicht ein anderes Verfahren ab, das zwar schon seit Jahrhunderten bekannt ist, aber erst seit einigen Jahrzehnten wieder mehr Anwendung findet. Es ist äußerst zweckmäßig und zeitsparend, vor allem, wenn man dabei möglichst viel im Kopf rechnet.

Ihm liegt folgende Überlegung zugrunde:

Beim Multiplizieren entstehen E aus $E \cdot E$, Z aus $E \cdot Z$ und $Z \cdot E$ (dazu E-Überschuß), H aus $E \cdot H$, $H \cdot E$ und $Z \cdot Z$ (dazu Z-Überschuß), T aus $Z \cdot H$ und $H \cdot Z$ (dazu H-Überschuß), Z · T aus $H \cdot H$, $Z \cdot T$ und $T \cdot Z$ (dazu T-Überschuß) usw. Die Ziffern der einzelnen Faktoren sind also kreuz und quer zu multiplizieren. Die dabei erhaltenen Teilprodukte sind dann unter genauer Beachtung des Stellenwertes zum Ergebnis zusammenzufügen.

Am einfachsten ist das hieraus folgende Rechenschema für die **Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen**, z. B. $73 \cdot 84$. Hierbei schreibt man die beiden Faktoren wie folgt untereinander, wobei man zwischen den Stellen etwas mehr Platz läßt, und multipliziert sie im Sinne der eingezeichneten Pfeile:

$$\begin{array}{rcc} & 7 & 3 \\ c \uparrow & \swarrow & \searrow \\ 8 & & 4 \\ \hline 61 & 3 & 2 \end{array}$$

a) $3 \cdot 4 = 12$ (2 in der E-Reihe geschrieben, 1 als Überschuß zu merken!),

b) $8 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 1 = 53$ (3 in die Z-Reihe geschrieben, 5 als Überschuß zu merken!),

c) $7 \cdot 8 + 5 = 61$ (61 in die H-Reihe zu schreiben).

Besser noch, man rechnet von links nach rechts, nämlich die einzelnen Denkschritte ausführlich angegeben — so:

$$\begin{aligned} 7 \text{ Z} \cdot 8 \text{ Z} &= 56 \text{ H} = 560 \text{ Z} \\ 560 \text{ Z} + 7 \text{ Z} \cdot 4 \text{ E} + 8 \text{ Z} \cdot 3 \text{ E} &= 612 \text{ Z} = 6120 \text{ E} \\ 6120 \text{ E} + 3 \text{ E} \cdot 4 \text{ E} &= 6132 \\ \text{oder kurz } 56, 560, 588, 612, 6120, 6132. \end{aligned}$$

Beim **Multiplizieren zweier dreistelliger Zahlen**, z. B. $356 \cdot 463$, hat man folgende Teilprodukte — der Übersicht wegen getrennt geschrieben — zu bilden und dann zu addieren.

$$\begin{array}{rcc} 3 & 5 & 6 \\ f \uparrow & c \uparrow & a \\ 4 & 6 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} 3 & 5 & 6 \\ e \swarrow & \nearrow & \searrow \\ 4 & 6 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} 3 & 5 & 6 \\ & & d \\ 4 & 6 & 3 \end{array}$$

Hierbei liefern a E, b Z, c und d H, e und f T.

Von rechts nach links verläuft die Rechnung so:

$$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 6 \\ 4 \ 6 \ 3 \\ \hline 16 \ 48 \ 28 \end{array}$$

a) $3 \cdot 6 = 18$ (8 hingeschrieben, 1 gemerkt!),
b) $3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 1 = 52$ (2 hingeschrieben, 5 gemerkt!),
c) d) $5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 = 68$ (8 hingeschrieben, 6 gemerkt!),
e) $3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 = 44$ (4 hingeschrieben, 4 gemerkt!),
f) $3 \cdot 4 + 4 = 16$ (16 hingeschrieben!)

oder, von links nach rechts gerechnet, kurz angedeutet, folgendermaßen:

12, 120, 140, 158, 1580, 1604, 1613, 1643, 16430, 16445, 16481, 164810, 164828.

Bei einiger Übung und leidlichem Zahlengedächtnis sollte es auch dem weniger gewandten Rechner möglich werden, nach diesem vereinfachten und überaus kurzen Schema Multiplikationen durchzuführen, bei denen als unentbehrliche Schreibarbeit nur das Hinschreiben der Faktoren und des Ergebnisses zu leisten ist.

Für denjenigen, dem das Kopfrechnen nicht liegt, ist es schon besser, schriftlich zu rechnen und dabei die folgende Trichteranordnung anzuwenden, welche die Multiplikation übers Kreuz denkbar einfach und übersichtlich gestaltet.

$$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 6 \\ 4 \ 6 \ 3 \\ \hline 123018 \\ 3851 \\ 33 \\ \hline 164828 \end{array}$$

1) Teilprodukte a, c, f
(Produkte der senkrechten Spalten!),
2) Teilprodukte b, e
(Kreuzproduktsumme der benachbarten Spalten!),
3) Teilprodukt d
(Kreuzproduktsumme der nicht benachbarten Spalten!).

Die Teilprodukte sind immer zweistellig zu schreiben, also z. B. 6 als 06 usw. und entsprechend ihrem Stellenwerte einzusetzen. Wenn sich bei einer Kreuzproduktsumme eine dreistellige Zahl ergibt, wie z. B. bei $7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 = 128$, so ist darauf zu achten, daß der Überschuß 1 H von 128 auf die nächsthöhere Kreuzproduktsumme übertragen wird, da die einzelnen Kreuzproduktsummen ebenfalls nur zweistellig geschrieben werden dürfen, um ihrem Stellenwerte gerecht zu werden.

$$\begin{array}{r} 8 \ 4 \ 6 \\ 0 \ 5 \ 7 \\ \hline 002042 \\ 4058 \\ 56 \\ \hline 48222 \end{array}$$

Die Multiplikation einer dreistelligen und zweistelligen Zahl, z. B. $846 \cdot 57$, kann man genau wie beim letzten Beispiel durchführen, indem man die zweistellige Zahl durch Davorsetzen einer Null als dreistellige 057 schreibt und dann rechnet.

Aufgaben dieser Art rechnet man oft auch zweckmäßig in der Weise, daß man die dreistellige Zahl als eine zweistellige auffaßt, wie z. B. 127 als aus 12 Z und 7 E bestehend, und nun so verfährt, als handle es sich um die Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen, mithin

$$\begin{array}{r}
 [12] 7 \\
 \underline{6 \ 8} \\
 7256 \\
 138 \\
 \hline
 8636
 \end{array}$$

[12] bedeutet: 12 Z werden einstellig aufgefaßt.

oder auch, von links nach rechts im Kopf gerechnet, 72, 720, 816, 858, 8580, 8636.

Auf diese Weise kann man z. B. das Produkt $[20]4 \cdot 73$ (d. h. $204 \cdot 73$) leicht im Kopf rechnen, so daß man bloß das Ergebnis hinschreiben braucht, also 140, 1400, 1460, 1488, 14880, 14892.

Das Trichterschema für die Multiplikation zweier vierstelliger Zahlen sieht so aus:

	6 3 8 4	
	5 9 7 8	
1)	<u>30275632</u>	1) Produkte der senkrechten Spalten,
2)	699392	2) Kreuzproduktsummen je zweier benachbarter Spalten,
3)	8260	3) Kreuzproduktsummen je zweier durch eine senkrechte Spalte getrennter Spalten,
4)	68	4) Kreuzproduktsumme der durch zwei senkrechte Spalten getrennten Spalten.
	<u>38163552</u>	

Handelt es sich um die **Multiplikation von Dezimalbrüchen**, dann ist darauf zu achten, daß in den einzelnen Zeilen das Komma an die richtige Stelle und in den Spalten senkrecht untereinander kommt. Man kann auch die Faktoren ohne Rücksicht auf das Komma multiplizieren, wenn man sie vorher durch etwaiges Anfügen von Nullen auf die gleiche Stellenzahl nach dem Komma gebracht hat. Vom Ergebnis sind dann durch das Komma soviel Stellen abzuschneiden, als beide Faktoren zusammen Stellen nach dem Komma haben.

Auch beim **abgekürzten Multiplizieren** ist die Kreuzmethode vorteilhaft. Dabei schreibt man die einzelnen Teilprodukte oder Kreuzproduktsummen nur bis auf eine Stelle über diejenige hinaus, bis auf welche genau gerechnet werden soll, und rundet beim Addieren die letzte Stelle entsprechend ab. So rechnet man z. B. $4,387 \cdot 6,234$ bis auf zwei Stellen genau wie folgt:

$$\begin{array}{r} 4, 3 \ 8 \ 7 \\ 6, 2 \ 3 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

24,06 2 nämlich (von links nach rechts) $4 \cdot 6 = 24$, $2 \cdot 3 = 06$, 2 von $3 \cdot 8 = 24$,

2,62 5 $6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 26$, $2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 25$ ($3 \cdot 7 + 8 \cdot 4$ kommt nicht mehr in Betracht),

60 3 $6 \cdot 8 + 4 \cdot 3 = 60$, 3 von $2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 25$, abgerundet 30, -

5 8 $6 \cdot 7 + 4 \cdot 4 = 58$.

27,35 Die Stellen rechts vom senkrechten Strich werden bei der Addition nur durch ihren Übertrag 2 (aus 18 abgerundet) berücksichtigt.

E. Das Wichtigste über Potenzen

Eine Potenz ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren. Für ein solches Produkt, z. B. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, gebraucht man die abgekürzte Schreibweise

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 \text{ (gesprochen „sieben hoch vier“)}$$

und nennt 7 die Basis (Grundzahl), 4 den Exponenten (Hochzahl) der Potenz.

Als Basis nimmt man also den gleichen Faktor, als Exponent diejenige Zahl, die angibt, wie oft man den gleichen Faktor zu setzen hat.

Da die Fläche eines Quadrates in der Weise berechnet wird, daß man seine Seitenlänge mit sich selbst multipliziert, nennt man Potenzen mit dem Exponenten 2 auch **Quadratzahlen** und spricht z. B. 12^2 „zwölf Quadrat“.

Auf die abgekürzte Weise lassen sich die Stufenzahlen sehr einfach schreiben. So ist

$$\begin{array}{lll} 10 = 10^1 & 10\ 000 = 10^4 & 10\ 000\ 000 = 10^7 \\ 100 = 10^2 & 100\ 000 = 10^5 & 100\ 000\ 000 = 10^8 \\ 1000 = 10^3 & 1\ 000\ 000 = 10^6 & 1\ 000\ 000\ 000 = 10^9, \end{array}$$

d. h. bei diesen **Zehnerpotenzen** gibt, wie die obigen Beispiele zeigen, der Exponent die Anzahl der Nullen an, die man an die Zahl 1 anzuhängen hat, um die Zahl vollständig hinzuschreiben.

Weitere Beispiele für Potenzen:

$$\begin{array}{lll} 4 = 2^2 & 9 = 3^2 & 25 = 5^2 \\ 8 = 2^3 & 27 = 3^3 & 125 = 5^3 \\ 16 = 2^4 & 81 = 3^4 & 625 = 5^4 \\ 32 = 2^5 & 243 = 3^5 & 3\ 125 = 5^5 \quad \text{usw.} \end{array}$$

Daß Rechnen mit Potenzen gestattet in den Fällen, in denen die Basis gleich ist, eine Vereinfachung, indem die Multiplikation und Division auf die einfachere Addition und Subtraktion zurückgeführt werden können, wie sich nachstehend ergibt.

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält; so ist z. B.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7; 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^9; 10^2 \cdot 10^5 = 10^7; 125^4 \cdot 125 = 125^5 \text{ usw.}$$

Um die Potenz einer Potenz zu bilden, hat man die Exponenten zu multiplizieren, d. h. z. B.

$$(2^2)^3 = 2^4 \quad (5^3)^2 = 5^6 \quad (10^2)^5 = 10^{10} \text{ usw.}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält, so ist z. B.

$$3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3; 10^6 : 10^5 = 10^{6-5} = 10^1 = 10; 8^{10} : 8^7 = 8^{10-7} = 8^3 \text{ usw.}$$

Sind dabei die Exponenten von Dividend und Divisor gleich, wie z. B. in $10^5 : 10^5$, so ergibt die Anwendung obiger Regel $10^5 : 10^5 = 10^{5-5} = 10^0 = 1$, d. h. **Potenzen mit dem Exponenten Null haben stets den Wert 1.**

Damit die Divisionsregel auch dann erhalten bleibt, wenn der Exponent des Divisors größer ist als der des Dividenten, wie z. B. in $4^3 : 4^4 = \frac{1}{4}$, (bei Anwendung der Divisionsregel also $4^4 : 4^5 = 4^{4-5} = 4^{-1}$), so gilt die Festsetzung, daß beispielsweise $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$, $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

bedeutet, d. h. **ist der Exponent negativ, so setzt man die entsprechende Potenz mit positivem Exponenten in den Nenner eines Bruches mit dem Zähler 1.**

Die Richtigkeit der oben angegebenen Regeln erkennt man leicht, wenn man die abgekürzte Schreibweise einer Potenz durch das voll hingeschriebene Produkt der gleichen Faktoren ersetzt.

Die Potenzform bietet nicht nur bei mathematischen Rechnungen, sondern auch beim gewöhnlichen Zahlenrechnen gar oft die Möglichkeit der Abkürzung und Vereinfachung. So kann man z. B. jeden Dezimalbruch als Produkt einer ganzen Zahl und einer Zehnerpotenz mit negativem Exponenten schreiben, denn es ist

$$\begin{array}{ll} 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1 & 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001 \\ 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01 & 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,00001 \\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 & 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001 \text{ usw.} \end{array}$$

Man beachte, daß hierbei der Exponent der im Nenner stehenden Potenz die Anzahl der Dezimalstellen des Potenzwertes angibt.

Somit läßt sich z. B. das Produkt $6,25 \cdot 17,3$ in folgender Weise schreiben

$$625 \cdot 10^{-2} \cdot 173 \cdot 10^{-1} = 625 \cdot 173 \cdot 10^{-3},$$

d. h. man kann die beiden Dezimalbrüche miteinander multiplizieren, indem man die Multiplikation zunächst ohne Rücksicht auf das Dezimalkomma durchführt und dann das Ergebnis mit derjenigen Zehnerpotenz multipliziert, deren

Exponent negativ gleich der Summe der Dezimalstellen der Faktoren ist. Das heißt aber nichts anderes, als daß man das Ergebnis durch die entsprechende Potenz von 10 zu dividieren und daher durch das Dezimalkomma so viel Stellen abzuschneiden hat, als die Faktoren zusammen Stellen nach dem Komma haben (ein Gesetz, das weiter oben bereits erwähnt wurde).

Bei **technischen und physikalischen Formeln** ist die Potenzschreibweise allgemein gebräuchlich; sie ist auch für die Abschätzung der Größenordnung des Ergebnisses von Wert. Hat man z. B. das Produkt $4,2^2 \cdot 5,738^2 \cdot 0,0387 \cdot 120$ zu berechnen, so kann man statt dessen schreiben

$$(42 \cdot 10^{-1})^2 \cdot (5738 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 387 \cdot 10^{-4} \cdot 12 \cdot 10^1 = (42^2 \cdot 5738^2 \cdot 387 \cdot 12) 10^{-11}$$

und erkennt, daß das genaue Ergebnis elf Stellen nach dem Dezimalkomma haben muß. Eine Abrundung der in der letzten Klammer stehenden Faktoren auf

$$40^2 \cdot 6000^2 \cdot 400 \cdot 10 = 4^2 \cdot 10^2 \cdot 6^2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^1 = 2004 \cdot 10^{11},$$

wodurch der abgerundete Wert des ganzen Produktes in $2004 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-11} = 2004$ übergeht, zeigte, daß der Wert des Produktes die ungefähre Höhe 2000 hat, aber unter diesem Betrage liegt, da bei der Abrundung der Faktoren in stärkerem Maße nach oben abgerundet wurde.

Rechnungen der hier gebotenen Art erfordern bereits umfassendere Übung und Kenntnis der Zahlenzusammenhänge, so daß sie vom Anfänger ohne Schaden für das weitere Verständnis übergangen werden können.

Wer im Aufbau der Zahlen bewandert ist, kann aus der Potenzrechnung auch in anderer Weise Nutzen ziehen. So kann man z. B. das Produkt $243 \cdot 2187$ in der Weise berechnen, daß man $243 = 3^5$, $2187 = 3^7$ setzt, so daß sich $243 \cdot 2187 = 3^5 \cdot 3^7 = 3^{12} = (3^8)^2 = 729^2$ ergibt. Das Quadrat von 729 läßt sich aber, wie alle Quadrate, mit Hilfe der Multiplikation übers Kreuz besonders leicht berechnen, weil die Kreuzproduktsummen leicht bestimmbar sind. Es ist

$$\begin{array}{r} 7 \ 2 \ 9 \\ 7 \ 2 \ 9 \\ \hline 490481 \\ 2836 \qquad 28 \text{ entsteht aus } 2 \cdot (2 \cdot 7), \ 36 \text{ aus } 2 \cdot (2 \cdot 9) \\ 126 \qquad 126 \text{ entsteht aus } 2 \cdot (7 \cdot 9). \\ \hline 531441 \end{array}$$

Die Quadrate der Zahlen 1 bis 1000 findet man überdies in Rechenhilfstafeln übersichtlich zusammengestellt, aus denen sie der Rechner leicht entnehmen kann.

Da es sich hier um keine erschöpfende Darstellung der Potenzrechnung handeln kann, müssen die Betrachtungen über die Potenzen, auf die später noch zurückgegriffen wird, ihren Abschluß finden, wobei noch bemerkt wird, daß die **Umkehrung des Potenzierens das Radizieren (Wurzelziehen)** ist.

So nennt man beispielsweise die Zahl, die, mit sich selbst multipliziert, die Zahl 2 ergibt, die zweite oder die **Quadratwurzel** aus 2, die Zahl, die, mit 3 potenziert (dreimal mit sich selbst multipliziert, die Zahl 5 liefert, die **dritte Wurzel aus 5** usw. Auch die Quadratwurzeln findet man in Rechenhilfstafeln sehr oft übersichtlich angegeben.

F. Das Dividieren

Das **Dividieren** ist die **Umkehrung des Multiplizierens** und erfolgt wie dieses bei größeren Zahlen schrittweise. Hierbei verfährt man zweckmäßig folgendermaßen:

Von der höchsten Stelle des Dividenden beginnend, unterstreicht man zunächst so viele Stellen, als sie der Divisor hat. Ist die dadurch unterstrichene Zahl kleiner als der Divisor, so unterstreicht man noch eine Stelle mehr. Der Stellenwert der nach rechts letzten unterstrichenen Ziffer gibt den Stellenwert der ersten Ziffer des Ergebnisses an, dessen gesamte Stellenzahl vor dem Komma (falls die Rechnung nicht bis zu den Einern aufgeht, hat das Ergebnis die Form eines Dezimalbruches) man dann durch Punkte andeutet. Jeder Punkt muß am Schluß mit einer Ziffer besetzt sein, sonst liegt ein Fehler vor, der einem vor allem dann leicht unterläuft, wenn eine Teildivision Null ergibt.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 316383:647 = 489 \\ \underline{5758} \\ 5823 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

Erläuterung: Der Divisor hat 3 Stellen, die ersten 3 Stellen des Dividenden ergeben die Zahl 316, die kleiner als der Divisor 647 und daher auch nicht durch diesen teilbar ist. Deswegen ist eine weitere Stelle des Dividenden, also insgesamt die Zahl 3163 zu unterstreichen, deren letzte Ziffer den Stellenwert H hat. Die erste Stelle des Ergebnisses hat daher auch den Stellenwert H, dem vor dem Komma — falls dieses nötig ist — zwei weitere Stellen folgen. Hinter dem Gleichheitszeichen sind also für das Ergebnis drei Punkte zu setzen. Nun rechnet man: $3163:647=4$ (4 über den ersten Punkt gesetzt!). Statt jetzt erst $4 \cdot 647$ unter 3163 unterzusetzen und von 3163 zu subtrahieren, verbindet man das Multiplizieren mit dem Subtrahieren nach der Ergänzungsmethode und rechnet $\langle 4 \cdot 7=28$ plus 5 (hingeschrieben 5 unter die 3!) ist 33 (3 zu übertragen!), $4 \cdot 4=16$, 19 (nämlich den Übertrag 3 addiert!) plus 7 (hingeschrieben 7 unter die 6) ist 26» usw. Ohne die bisher in Klammern angefügten Bemerkungen, also: $\langle 28+5=33$; 3; 16, $19+7=26$; 2, $26+5=31$ ». Nun wird die 8 des Dividenden heruntergezogen und die nächste Ziffer des Ergebnisses sowie der

zugehörige Rest in gleicher Weise bestimmt, also $5758:647=8$, « $56+2=58$; **5**; $32, 37+8=45$; **4** usw.», bis die letzte Stelle des Dividenten heruntergezogen ist. Geht die letzte Teildivision nicht auf, so ist entweder der Rest besonders zu vermerken oder die Division durch Anhängen von Nullen an den Dividenten bis auf die verlangte Anzahl von Dezimalstellen fortzusetzen. In diesem Falle ist besonders auf das Dezimalkomma zu achten, das man am besten gleich anfangs hinter den letzten der «Vormerkungspunkte» setzt.

Da das Produkt aus dem Werte des Quotienten und dem Divisor stets den Dividenten angeben muß (z. B. folgt aus $35:7=5$, daß $7 \cdot 5=35$), kann man durch Multiplikation des Ergebnisses mit dem Divisor die Probe auf die Richtigkeit der Rechnung machen.

Bei der **Division durch einen Dezimalbruch** muß man **vorher den Divisor zu einer ganzen Zahl machen**. Da der Wert eines Quotienten ungeändert bleibt, wenn man Divident und Divisor mit der gleichen Zahl multipliziert (z. B. ist $8:2=80:20=800:200$ usw.), geschieht das in der Weise, daß man in Divident und Divisor das Dezimalkomma je um so viel Stellen nach rechts rückt, daß es hinter die letzte Stelle des Divisors gelangt (dort kann es weggelassen werden). So multipliziert man z. B. bei der Aufgabe $0,680118:7,89$ Divident und Divisor mit 100 (Komma je um zwei Stellen nach rechts!) und erhält die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 68,0118:789=0,0862 \\ \underline{4891} \\ 1578 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

Erläuterung: Da im Dividenten vor dem Komma die zu unterstreichende Zahl 68 steht, in der der Divisor 789 nicht enthalten ist, kommt in das Ergebnis eine Null und dahinter sofort das Komma. Durch Unterstreichen einer weiteren Stelle des Dividenten wird die Zahl 680 herausgehoben, die aber noch immer nicht für die Division durch 789 ausreicht, so daß in das Ergebnis hinter das Komma eine weitere Null zu setzen ist. Erst wenn man noch eine Ziffer des Dividenten hinzunimmt, so daß 6801 unterstrichen ist, ist die erste Teildivision ausführbar; sie liefert eine 8 im Ergebnis mit dem Stellenwert Hunderstel. Die weitere Division wird dann in der bereits erläuterten Weise durchgeführt.

Soll eine Division, die nicht restlos aufgeht, nur bis auf eine bestimmte Stellenzahl nach dem Komma durchgeführt werden, so kann man nach dem zu schildernden **Verfahren der abgekürzten Division** viel einfacher zum Ziele gelangen, als wenn man das Ergebnis in der gewöhnlichen, ungekürzten Weise um eine Stelle weiter, als verlangt ist, ausrechnet und dann abrundet.

Ist z. B. $427,83:36,7$ bis auf 4 Stellen nach dem Komma **genau** zu berechnen, so macht man zunächst durch Vorrücken des Dezimalkommas im Divident und

Divisor um je eine Stelle (d. h. durch die Multiplikation mit 10) den Divisor zu einer ganzen Zahl und erhält

$$\begin{array}{r} 4278,3:367 = 11,6575 \\ \underline{608} \\ 2413 \\ \underline{2110} \\ 275 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

Erläuterung: Man deutet zunächst die gesamte Stellenzahl des Ergebnisses durch Punkte an; das gibt hier vor dem Komma 2, dahinter 4 Punkte. Dann führt man die Rechnung zunächst in der gewohnten Weise durch, bis die Anzahl der im Ergebnis noch fehlenden Stellen um 1 kleiner ist als die Stellenzahl des Divisors. Von da ab — das ist beim Teilrest 275 der Fall — hängt man keine weiteren Ziffern durch Herunterziehen, insbesondere auch keine Nullen, an den Rest, sondern läßt statt dessen die letzte Stelle des Divisors, bei jeder folgenden Teildivision je eine weitere Stelle unberücksichtigt, wobei man diese Stelle immer durch einen Punkt darüber kenntlich macht. Man rechnet also beim Teilrest 275 nicht 2750:367, sondern 275:36. Von der überpunkteten Stelle berücksichtigt man jeweils nur ihren Einfluß, den sie auf das vom Reste zu subtrahierende Vielfache des Divisors hat.

Weiteres Beispiel: 578,3453:6,87 (auf eine Stelle genau!)

$$\begin{array}{r} \text{Man rechnet } 57834,53:687 = 84,2 \\ \underline{287} \\ 12 \end{array}$$

Hier ist bereits beim Einzelrest 287 die Zahl der noch fehlenden Stellen des Ergebnisses um 1 kleiner als der Divisor, so daß die 7 des Divisors (Punkt darüber!) nicht mehr berücksichtigt werden braucht.

G. Die Teilbarkeit und Zerlegung der Zahlen

Eine Zahl heißt eine **Primzahl**, wenn sie durch keine andere (außer durch 1 und sich selbst) teilbar ist:

Die ersten 20 Primzahlen sind:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.

Alle anderen Zahlen, die also nicht Primzahlen sind, heißen **zusammengesetzte Zahlen** und können in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden.

Diese Zerlegung ist vor allem beim Rechnen mit **gemeinen Brüchen** erforderlich.

Beispiel: Zerlegung der Zahl 300.

Man spaltet schrittweise, mit der 2 beginnend, die einzelnen vorhandenen Primfaktoren ab, bis zum Schlusse als letzter Faktor eine Primzahl übrigbleibt, also

$$\begin{aligned} 300 &= 2 \cdot 150 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 75 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Daher kann man schreiben $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ oder in Anwendung der Potenzschreibweise

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Bei dieser Zerlegung vor allem größerer Zahlen ist es zweckmäßig, die Teilbarkeit der Zahlen möglichst ohne zeitraubende Divisionen rasch zu erkennen. Dabei spielt die **Quersumme** (QS) und die **Querdifferenz** (QD) eine gewisse Rolle.

Die **Quersumme** einer Zahl ist die **Summe ihrer Ziffern** (z. B. QS von 8457 ist $4+8+5+7=24$).

Die **Querdifferenz** einer Zahl ist die **Differenz der QS ihrer ungeradstelligen und ihrer geradstelligen Ziffern** (z. B. QD von 3768 $= (8+7) - (6+3) = 15 - 9 = 6$).

Bei der Berechnung der QD setzt man zweckmäßig zur besseren Hervorhebung über die ungeraden Stellen Punkte, addiert dabei die überpunkteten Ziffern und subtrahiert von der erhaltenen Summe die anderen, z. B.

$$QD(5\dot{2}\dot{8}7\dot{6}) = (6+8+5-7-2) = 10$$

Regel über die Teilbarkeit der Zahlen:

Eine Zahl ist teilbar durch

- ² a) 2, wenn sie gerade, d. h. ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist,
- b) 3, wenn ihre QS durch 3 teilbar ist,
- c) 4, wenn die Zahl der letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist,
- d) 5, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist,
- e) 9, wenn ihre QS durch 9 teilbar ist,
- f) 11, wenn ihre QD durch 11 teilbar ist.

Die Richtigkeit von a), c) und d) ist ohne weiteres einzusehen, vor allem, wenn man bedenkt, daß in der dritten und in den höheren Stellen H und Vielfache von H stehen, die stets durch 4 teilbar sind.

Um die Richtigkeit von b) und e) zu erkennen, ist zu beachten, daß alle Rangzahlen und ihre Vielfachen sich in folgender Form schreiben lassen:

$$\begin{array}{lll}
 10 = 9 + 1 & \text{und daher} & 20 = 2 \cdot 9 + 2; & 30 = 3 \cdot 9 + 3 \dots \\
 100 = 99 + 1 & & 200 = 2 \cdot 99 + 2; & 300 = 3 \cdot 99 + 3 \dots \\
 1\,000 = 999 + 1 & & 2\,000 = 2 \cdot 999 + 2; & 3\,000 = 3 \cdot 999 + 3 \dots \\
 10\,000 = 9999 + 1 & & 20\,000 = 2 \cdot 9999 + 2; & 30\,000 = 3 \cdot 9999 + 3 \dots \\
 & & \text{usw.} &
 \end{array}$$

Daher kann man beispielsweise die Zahl 4857 folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 4857 &= 4 \cdot 999 + 4 + 8 \cdot 99 + 8 + 5 \cdot 9 + 5 + 7 \\
 &= 4 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 5 \cdot 9 + (4 + 8 + 5 + 7)
 \end{aligned}$$

Die rechts stehenden drei Produkte sind aber bestimmt durch 3 und 9 restlos teilbar, so daß lediglich die in der Klammer stehende Summe, d. h. die QS der Zahl, darüber entscheidet, ob sie durch 3 oder 9 restlos teilbar ist.

Die Richtigkeit von f) beruht darauf, daß man alle Rangzahlen und ihre Vielfache auch in folgender Form schreiben kann:

$$\begin{array}{lll}
 10 = 11 - 1 & \text{und daher} & 20 = 2 \cdot 11 - 2; & 30 = 3 \cdot 11 - 3 \\
 100 = 99 + 1 & & 200 = 2 \cdot 99 + 1; & 300 = 3 \cdot 99 + 3 \\
 1\,000 = 1001 - 1 & & 2\,000 = 2 \cdot 1001 - 2; & 3\,000 = 3 \cdot 1001 - 3 \\
 10\,000 = 9999 + 1 & & 20\,000 = 2 \cdot 9999 + 2; & 30\,000 = 3 \cdot 9999 + 3 \\
 & & \text{usw.} &
 \end{array}$$

So läßt sich beispielsweise die Zahl 3768 in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned}
 3768 &= 3 \cdot 1001 - 3 + 7 \cdot 99 + 7 + 6 \cdot 11 - 6 + 8 \\
 &= 3 \cdot 1001 + 7 \cdot 99 + 6 \cdot 11 - \mathbf{3} + 7 - 6 + 8 \\
 &= 3 \cdot 1001 + 7 \cdot 99 + 6 \cdot 11 + (8 + 7 - 3 - 6)
 \end{aligned}$$

Da die Zahlen 1001, 99, 11 durch 11 restlos teilbar sind und daher auch ihre Vielfache, hängt die Teilbarkeit der Zahl 3768 durch 11 davon ab, ob die in der Klammer stehende Zahl durch 11 teilbar ist, das ist aber die QD von 3768 nicht.

H. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen

Ein Bruch entsteht dadurch, daß man ein Ganzes (die Einheit) in eine Anzahl gleicher Teile teilt und davon einen oder mehrere herausgreift; ebensogut kann man auch eine Vielheit vom Ganzen in eine Anzahl gleicher Teile teilen.

Ein Bruch ist daher nichts anderes als die abgekürzte Schreibweise für eine Divisionsaufgabe, bei welcher der Bruchstrich das Divisionszeichen ersetzt, d. h. z. B. $5:8$ ist gleichbedeutend mit $\frac{5}{8}$, wobei 5 (Zahl über dem Bruchstrich) als der **Zähler**, 8 (Zahl unter dem Bruchstrich) als der **Nenner** bezeichnet wird.

Ein **Stammbruch** ist ein Bruch mit dem Zähler 1; z. B. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$ usw. Gegensatz: ein **Zweigbruch** oder **abgeleiteter Bruch**, z. B. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$ usw. Bei einem **echten Bruch**

ist der **Nenner größer als der Zähler**, z. B. $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{17}$ usw., während bei einem **unechten Bruch** der **Zähler größer als der Nenner** oder ihm gleich ist, z. B. $\frac{9}{5}$, $\frac{4}{4}$ usw. Jede ganze Zahl läßt sich daher in Bruchform schreiben, z. B. $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{16}{4}$ usw.

Eine **gemischte Zahl** besteht aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, z. B. $3\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$ und läßt sich **einrichten**, d. h. als unechten Bruch schreiben, z. B. $3\frac{4}{7} = \frac{25}{7}$, $5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$ usw. Umgekehrt kann man jeden unechten Bruch als eine gemischte Zahl darstellen, z. B. $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$, $\frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$ usw.

Der **reziproke Wert (Kehrwert)** eines Bruches entsteht, indem man seinen Zähler und Nenner vertauscht, z. B. Kehrwert von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{4}{5}$, von $\frac{7}{5}$ ist $\frac{5}{7}$ usw.

Vergrößert man bei unverändertem Nenner den Zähler eines Bruches, so wird der Wert des Bruches größer, z. B. $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$ ($>$ heißt «größer», $<$ «kleiner»), während durch Vergrößern der Nenner bei unverändertem Zähler der Wert des Bruches verkleinert wird, z. B. $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.

Formveränderung der Brüche.

Der **Wert eines Bruches** bleibt **ungeändert**, wenn man **Zähler und Nenner mit derselben Zahl** (Erweiterungszahl) **multipliziert**, den Bruch **erweitert** (z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ usw.) oder **durch dieselbe Zahl** (Kürzungszahl) **dividiert**, den Bruch **kürzt** (z. B. $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ usw. Brüche im Endergebnis einer Rechnung bringt man immer auf die möglichst gekürzte Form.

Brüche mit gleichem Nenner nennt man **gleichnamig**, solche mit **verschiedenem Nenner** **ungleichnamig**

(z. B. gleichnamig $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, ungleichnamig: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$).

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht, indem man ihren **Hauptnenner** bestimmt und sie durch Erweitern auf die Hauptnenner bringt. Dabei ist der **Hauptnenner der kleinste Nenner**, auf den sich mehrere ungleichnamige Brüche durch Erweitern bringen lassen, und dabei die kleinste Zahl (kleinstes gemeinsames Vielfaches), in welcher alle Nenner aufgehen.

Regel zur Bestimmung des Hauptnenners.

a) Man läßt alle Einzelnenner unberücksichtigt, die in einem anderen der vorkommenden aufgehen; bleibt dabei nur ein Nenner übrig, so ist dieser der Hauptnenner, sind die übrigbleibenden Nenner teilerfremd, d. h. ohne gemeinsamen Teiler, so ist ihr Produkt der Hauptnenner.

b) Andernfalls zerlegt man die übrigbleibenden Nenner in ihre Primfaktoren (vgl. S. 18).

c) Man bildet das Produkt aus den höchsten vorkommenden Potenzen der verschiedenen Primfaktoren, und dieser ist der Hauptnenner.

Beispiel: $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{3}{5}$

unberücksichtigt bleiben die Nenner 4 (in 8 enthalten) und 3 (in 9 enthalten). Die Faktorenzerlegung der übrigen ergibt

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$5 = 5^1$$

$$\text{Hauptnenner: } 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$$

Die Erweiterungszahlen für die einzelnen Brüche erhält man, indem man den Hauptnenner durch den jeweiligen Einzelnenner dividiert, z. B. $360:4=90$ ist die Erweiterungszahl für den Bruch mit dem Nenner 4 usw.

Die Gleichnamigmachung der angegebenen Brüche dieses Beispiels ergibt

$$\frac{90}{360}, \frac{300}{360}, \frac{320}{360}, \frac{240}{360}, \frac{315}{360}, \frac{216}{360}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen.

1. Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner unverändert läßt, z. B.

$$\frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{5+11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}; \quad \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

2. Gemischte Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man die Ganzen und die Brüche für sich addiert oder subtrahiert, z. B.

$$3\frac{3}{8} + 4\frac{1}{8} = 3 + 4 + \frac{3+1}{8} = 7\frac{4}{8} = 7\frac{1}{2}; \quad 6\frac{11}{12} - 5\frac{7}{12} = (6-5) + \frac{11-7}{12} = 1\frac{4}{12} = 1\frac{1}{3}.$$

Enthält im Falle der Subtraktion der Minuend keinen Bruch, so entnimmt man von ihm die notwendige Anzahl von Ganzen und verwandelt diese in einen mit dem Subtrahenden gleichnamigen Bruch. Dasselbe Verfahren wendet man auch an, wenn der Minuend einen kleineren Bruch enthält als der Subtrahend. Beispiele:

$$\text{a) } 14 - 10\frac{5}{9} = 13\frac{9}{9} - 10\frac{5}{9} = 3\frac{4}{9}; \quad \text{b) } 12\frac{3}{16} - 11\frac{9}{16} = 11\frac{19}{16} - 11\frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

3. Ungleichnamige Brüche sind vor dem Addieren oder Subtrahieren stets gleichnamig zu machen,

$$\text{z. B. } \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}; \quad 4\frac{7}{8} - 2\frac{2}{3} = 4\frac{21}{24} - 2\frac{16}{24} = 2\frac{5}{24}$$

(vgl. die Regel zur Bestimmung des Hauptnenners!).

Multiplikation und Division von Brüchen.

1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt,

$$\text{z. B. } \frac{2}{9} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{9} = \frac{8}{9}; \quad \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{4} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Ist der Multiplikand eine gemischte Zahl, so multipliziert man die Ganzen und den Bruch für sich,

$$\text{z. B. } 4\frac{2}{7} \cdot 5 = 4 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 5}{7} = 20 + \frac{10}{7} = 20 + 1\frac{3}{7} = 21\frac{3}{7}.$$

2. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man bei unverändertem Zähler den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert,

$$\text{z. B. } \frac{8}{15} : 6 = \frac{8}{15 \cdot 6} = \frac{4}{45}.$$

Ist der Dividend eine gemischte Zahl, so wird diese eingerichtet, wenn in ihren Ganzen der Divisor nicht aufgeht,

$$\text{z. B. } 8\frac{1}{3} : 15 = \frac{25}{3} : 15 = \frac{25}{3 \cdot 15} = \frac{5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}; \quad 6\frac{3}{5} : 3 = 2\frac{1}{5};$$

$$12\frac{5}{8} : 5 = (10 + 2\frac{5}{8}) : 5 = 2\frac{21}{8 \cdot 5} = 2\frac{21}{40}.$$

3. Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, wobei man vor Ausführung der Multiplikation möglichst kürzt,

$$\text{z. B. } \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 12} = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}; \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{15} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 4}{7 \cdot 8 \cdot 15} = \frac{1}{6}.$$

Gemischte Zahlen werden vor Ausführung der Multiplikation eingerichtet,

$$\text{z. B. } 3\frac{4}{7} \cdot 1\frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9}{7 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 9}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}; \quad 13\frac{1}{8} \cdot 6\frac{2}{9} = \frac{105 \cdot 56}{8 \cdot 9} = \frac{35 \cdot 7}{1 \cdot 3} = \frac{245}{3} = 81\frac{2}{3}.$$

Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multiplizieren ist, so kann man diese als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben denken und dann nach der angegebenen Regel multiplizieren, also

$$\text{z. B. } 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$$

4. Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem reziproken Werte multipliziert,

$$\text{z. B. } 5 : \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}; \quad \frac{3}{8} : \frac{5}{12} = \frac{3}{8} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}.$$

Gemischte Zahlen werden vor Ausführung der Division eingerichtet,

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \frac{3}{7} : 2\frac{5}{8} &= \frac{3}{7} : \frac{21}{8} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 21} = \frac{1 \cdot 8}{7 \cdot 7} = \frac{8}{49}; \quad 7\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = \frac{15}{2} : \frac{10}{3} = \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 10} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \\ &= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche.

Man führt die durch den Bruchstrich angedeutete Division aus, d. h. man dividiert den als Dezimalzahl geschriebenen Zähler durch den Nenner, z. B.:

$$\begin{array}{r} \frac{7}{8} = 7,0 : 8 = 0,875 \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{0} \end{array}$$

Geht die Division auf, so erhält man, wie vorstehend, einen endlichen, im anderen Falle einen unendlichen, sogenannten **periodischen** Dezimalbruch, bei dem sich von einer bestimmten Stelle ab dieselbe Zifferngruppe unbegrenzt oft wiederholt, z. B.

$$\begin{array}{r} \frac{15}{22} = 15,0 : 22 = 0,6818181 \dots = 0,6\overline{81} \\ \underline{1,80} \\ 40 \\ \underline{180} \end{array}$$

Dabei wird die sogenannte **Periode**, d. h. die immer wiederkehrende Zifferngruppe, überstrichen.

Es ist nützlich, sich für häufig vorkommende gemeine Brüche ihre gleichwertigen Dezimalbrüche zu merken, nämlich:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} = 0,5 & \frac{1}{5} = 0,2 & \frac{1}{8} = 0,125 \\ \frac{1}{3} = 0,3333 = 0,3\overline{3} & \frac{2}{5} = 0,4 & \frac{3}{8} = 0,375 \\ \frac{1}{4} = 0,25 & \frac{1}{6} = 0,1\overline{6} & \frac{5}{8} = 0,625 \\ \frac{3}{4} = 0,75 & \frac{5}{6} = 0,8\overline{3} & \frac{7}{8} = 0,875 \end{array}$$

Wenn in einer Rechnung Dezimal- und gemeine Brüche nebeneinander vorkommen, so stellt man vor deren Ausführung durch Verwandlung möglichst eine gleiche Buchform her.

II. WICHTIGE ANWENDUNGEN DES ZAHLENRECHNENS

A. Dreisatz- oder Regel-de-tri-Rechnung

Die Aufgaben der Dreisatzrechnung bestehen darin, daß man von einer Vielheit auf eine andere Vielheit schließen muß, d. h. zu drei gegebenen Größen eine vierte zu suchen hat. Diese steht zu den gegebenen Größen in der Weise in einem Abhängigkeitsverhältnis, daß mit einer Veränderung der einen gegebenen Größe notwendig eine Veränderung der gesuchten verbunden ist.

Beispiele: a) Wieviel RM kosten $237\frac{1}{2}$ kg einer Ware, von der $162\frac{1}{2}$ kg 141,70 RM kosten?

b) Gibt A täglich 4,50 RM aus, so reicht er mit seiner Barschaft 14 Tage. Wie lange reicht er mit der gleichen Barschaft bei einer täglichen Ausgabe von 3,50 RM?

Gerades oder direktes Verhältnis.

Vergrößert man beim Beispiel a) die Warenmenge, so vergrößert sich auch der Preis, der dafür zu zahlen ist, während einer Verminderung der Menge eine Verringerung des Preises entspricht. Beide Größen, die Menge und der Preis, ändern sich also unter sonst unveränderten Voraussetzungen stets im gleichen Sinne. Man sagt, sie stehen im **geraden** oder **direkten Verhältnis** zueinander.

Beispiele für direktes Verhältnis: Warenmenge und Preis, Warenmenge und Spesen (Unkosten), Arbeit und Lohn, Kraft und Leistung, Kapital und Ertrag (Zinsen) usw.

Ungerades oder indirektes Verhältnis.

Vergrößert man beim Beispiel b) den Betrag der täglichen Ausgaben, so verringert sich die Zeit, während der man mit der gleichen Barschaft ausreicht; verringert man aber die tägliche Ausgabensumme, so vergrößert man die Zeit des Ausreichens. Hier ändern sich also die beiden Größen, die tägliche Ausgabe und die Zeitdauer, stets in entgegengesetztem Sinne, d. h. z. B., Verdoppeln der einen Größe bedeutet Halbieren der anderen usw. Man sagt in diesem Falle, beide Größen stehen im **ungeraden** oder **indirekten Verhältnis** zueinander.

Beispiele für indirektes Verhältnis: Verbrauch und Zeit des Ausreichens bei gleichem Vorrat, Arbeiterzahl (bzw. arbeitende Kraft) und Zeitdauer einer

bestimmten Arbeit, Länge und Breite ein und derselben Fläche, Geschwindigkeit und Zeit für die Zurücklegung desselben Weges, Kapital und Zeit bei gleichem Ertrage, Kapital und Zinsfuß bei gleichem Ertrage usw.

Lösung der einfachen Regel-de-tri-Aufgabe.

Jede Dreisatzaufgabe läßt sich in einem Bedingungssatz (mit «wenn» beginnend) und einem Folgesatz bzw. Fragesatz (mit «so» beginnend) zerlegen. Die geordnete Übersicht über beide Sätze in Form eines «Ansatzes» ist mindestens für die Anfänger unbedingt erforderlich.

Die Lösung der Aufgabe besteht dann darin, daß man von der Vielheit auf die Einheit und dann von der Einheit auf die Vielheit schließt, wie das die folgenden Ansätze zu den oben angegebenen Beispielen zeigen mögen. Die gesuchte Größe wird, wie üblich, mit x bezeichnet.

Beispiele:

a) Zum Einkauf von 162,5 kg Seife benötigen wir 141,70 RM. Wieviel RM kosten 237,5 kg Seife?

b) Wenn man täglich 4,50 RM ausgibt, reicht man mit seinem Geld 14 Tage lang. Wie lange würde man reichen, wenn man täglich nur 3,50 RM ausgeben würde?

Lösungen:

a)	kg	RM	Sprich bzw. denke:
	162,5	141,70	[Wenn 162,5 kg 141,70 RM kosten, so kostet
	1	$\frac{141,70}{162,50}$	[1 kg den 162,50ten Teil, also $\frac{141,70}{162,50}$ und
	237,5	x	237,5 kg 237,5mal soviel wie 1 kg, also
	$x = \frac{141,70 \cdot 237,5}{162,5} \quad RM = \frac{141,70 \cdot 19}{13} \quad RM = 10,9 \cdot 19 \quad RM = 207,1 \quad RM$		

b)	RM	Tage	Sprich bzw. denke:
	4,50	14	[Wenn man täglich 4,50 RM ausgibt, reicht man 14 Tage,
	1,—	$14 \cdot 4,5$	[gibt man täglich 1 RM aus, so reicht man 4,5mal solange, also
	3,50	x	und wenn man täglich 3,50 RM statt 1 RM ausgibt, nur den
	$x = \frac{14 \cdot 4,5}{3,5} \quad Tg = \frac{14 \cdot 9}{7} \quad Tg = 2 \cdot 9 \quad Tg = 18 \quad Tg.$		

Bei jeder Aufgabe stellt man zunächst fest, wonach gefragt ist, und schreibt die Bezeichnung dieser Größe über die **rechte** Spalte des Ansatzes. Nachdem man die Aufgabe in Form eines Bedingungs- und Fragesatzes formuliert hat, schreibt man die Zahlenangaben des Bedingungssatzes in die erste Zeile des Ansatzes (Benennung der Spalten beachten!). In der gleichen Spalte dürfen nur gleichbenannte Zahlen stehen.

Lösung der zusammengesetzten Regel-de-tri-Aufgabe.

Hierbei handelt es sich um Aufgaben, bei denen mehr als ein Verhältnis auf die Ermittlung der unbekannten Größe Einfluß hat. Aber auch hier zerlegt man bei der Bildung des Ansatzes die Aufgabe in einen Bedingungs- und einen Folge-(Frage)-Satz und schließt dann unter genauer Beachtung der jeweiligen Art des Verhältnisses so oft auf die Einheit, von dieser auf die andere Vielheit, als gegebene Größenpaare vorliegen.

Beispiele:

a) Zur Anfertigung von 152 m eines $1\frac{1}{4}$ m breiten Stoffes braucht man 22,50 kg Wolle. Wieviel m Stoff derselben Art zu 95 cm Breite fertigt man aus 67,50 kg Wolle an?

b) Ein Vorrat reicht für 1500 Verbraucher 60 Tage bei täglich 0,85 kg Einzuteilung. Wieviel erhält jede Person, wenn der gleiche Vorrat für 1600 Verbraucher 75 Tage reichen soll.

Lösungen:

a)	cm	kg	m	Sprich bzw. denke:
	125	22,5	152	[Wenn die Breite 125 cm, die Menge 22,5 kg beträgt, ist die Länge 152 m,
	1	1	$\frac{152 \cdot 125}{22,5}$	[beträgt die Breite 1 cm, die Menge 22,5 kg, so ist die Länge 125mal so groß, beträgt die Breite 1 cm, die Menge 1 kg, so ist die Länge der 22,5te Teil,
	95	67,5	x	[beträgt die Breite 95 cm, die Menge 1 kg, so ist die Länge der 95te Teil, beträgt die Breite 95 cm, die Menge 67,5 kg, so ist die Länge 57,5mal so groß.
$x = \frac{152 \cdot 125 \cdot 67,5}{22,5 \cdot 95} \quad m = \frac{8 \cdot 5 \cdot 675}{9 \cdot 5} \quad m = 8 \cdot 75 \quad m = 600 \quad m$				

b)	Verbr	Tg	kg	Sprich bzw. denke:
	1500	60	0,85	[Wenn 1500 Personen 60 Tage lang bei täglich 0,85 kg Zuteilung reichen, so reicht bzw. reichen
	1	1	$0,85 \cdot 1500 \cdot 60$	[1 Person 60 Tg lang bei täglich 1500mal soviel Zuteilung, 1 Person 1 Tg lang bei täglich 60mal soviel Zuteilung,
	1600	75	x	[1600 Personen 1 Tg lang bei täglich den 1600sten Teil der Zuteilung, 1600 Personen 75 Tg lang bei täglich den 75sten Teil der Zuteilung.
$x = \frac{0,85 \cdot 1500 \cdot 60}{1600 \cdot 75} \quad \text{kg} = \frac{0,85 \cdot 15 \cdot 4}{16 \cdot 5} \quad \text{kg} = \frac{0,85 \cdot 3}{4} \quad \text{kg} = \frac{2,55}{4} \quad \text{kg} = 0,6375 \quad \text{kg}$				

B. Die Prozent-(Hundertsatz-)Rechnung

Wegen der großen Bequemlichkeit, welche die Zahl 100 beim Rechnen bietet, findet sie bei praktischen Aufgaben, z. B. bei der Berechnung von Vergleichszahlen, Gewinn und Verlust, Erträgen, Abzügen und anderen Größen, namentlich im Handels- und Geldverkehr, weitgehend Verwendung.

Ein **Prozent** (1% oder 1 v. H.) einer Zahl bedeutet ihren hundertsten Teil. Der **Prozentsatz** gibt daher stets an, wieviel Hundertstel einer Zahl, genannt **Stammwert**, zu nehmen sind. Das Ergebnis heißt der **Prozentwert** oder kurz die **Prozente**.

Wenn der Prozentsatz sehr klein ist, nimmt man oft statt 100 die Zahl 1000 als Vergleichszahl und bezeichnet als 1‰ (1 **Promille** oder 1 vom Tausend) ein **Tausendstel des Grundwertes**, so sind z. B. 4‰ von 2000 gleich 8.

Einige oft vorkommende Prozentsätze ergeben einen einfachen Bruchteil des Grundwertes G und sind möglichst einzuprägen; es ist

$$\begin{array}{lll} 100\% \text{ von } G = G & 10\% \text{ von } G = \frac{1}{10} G & 16\frac{2}{3}\% \text{ von } G = \frac{1}{6} G \\ 50\% \text{ von } G = \frac{1}{2} G & 33\frac{1}{3}\% \text{ von } G = \frac{1}{3} G & 75\% \text{ von } G = \frac{3}{4} G \\ 25\% \text{ von } G = \frac{1}{4} G & 66\frac{2}{3}\% \text{ von } G = \frac{2}{3} G & 5\% \text{ von } G = \frac{1}{20} G \end{array}$$

Da es sich bei der Prozentrechnung um drei verschiedene Größen, den Grundwert, den Prozentsatz und die Prozente handelt, umfaßt sie drei Hauptaufgaben.

1. **Gesucht die Prozente** (der Prozentwert); gegeben Grundwert und Prozentsatz.

Beispiel: Wieviel sind $6\frac{1}{2}\%$ von 5200?

Lösung: $100\% = 5200$

$$1\% = \frac{5200}{100} = 52$$

$$6\frac{1}{2}\% = 6\frac{1}{2} \cdot 52 = \frac{13 \cdot 52}{2} = 13 \cdot 26 = 338$$

$$\text{Allgemein: } \text{Prozente} = \frac{\text{Grundwert}}{100} \cdot \text{Prozentsatz.}$$

Wenn der um die Prozente vergrößerte Grundwert gesucht wird, kann man erst die Prozente für sich berechnen und dann zum Grundwert addieren. Man kann aber auch gleich auf den um die Prozente vermehrten Grundwert schließen, wie z. B. bei der Aufgabe: Welche Zahl ist um 36% a) größer, b) kleiner als 540?

Man rechnet: a) $100\% = 540$

$$1\% = 5,4, \text{ d. h. } \frac{540}{100}$$

$$136\% = 5,4 \cdot 136 = 734,4$$

b) $100\% = 540$

$$1\% = 5,4$$

$$64\% = 64 \cdot 5,4 = 345,6$$

2. Gesucht der Prozentsatz; gegeben Grundwert und Prozente.

Beispiel: Wieviel % sind 28 von 288?

Lösung: $288 = 100\%$

$$1 = \frac{100}{288} \%$$

$$28 = \frac{100 \cdot 28}{288} \% = \frac{25 \cdot 7}{18} \% = \frac{175}{18} \% = 9\frac{13}{18} \%$$

Allgemein: $\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozente mal Hundert}}{\text{Grundwert}}$

Ist der um die Prozente vermehrte oder verminderte Grundwert gegeben, wie z. B. bei den Aufgaben a) Um wieviel % ist 78 kleiner als 104? b) Um wieviel % ist 536 größer als 450?, so kann man folgendermaßen rechnen:

a) $104 = 100\%$

$$1 = \frac{100}{104} \%$$

[als 104;

$$78 = \frac{100 \cdot 78}{104} \% = \frac{100 \cdot 3}{4} \% = 75\%, \text{ d. h. } 78 \text{ ist um } (100 - 75)\% = 25\% \text{ kleiner}$$

b) $450 = 100\%$

$$1 = \frac{100}{450} \%$$

[= $19\frac{1}{9} \%$ größer als 450.

$$536 = \frac{100 \cdot 536}{450} \% = \frac{2 \cdot 536}{9} \% = \frac{1072}{9} \% = 119\frac{1}{9} \%, \text{ d. h. } 536 \text{ ist um } (119\frac{1}{9} - 100) =$$

Man kann aber auch den Prozentsatz unmittelbar bestimmen, indem man z. B. bei a) $104 - 78 = 26$ rechnet und nun ermittelt, wieviel % 26 von 104 sind.

3. Gesucht der Grundwert; gegeben Prozente und Prozentsatz.

Beispiel: Von welcher Zahl sind 6% gleich 750?

Lösung: $6\% = 750$

$$1\% = \frac{750}{6}$$

$$100\% = \frac{750 \cdot 100}{6} = 125 \cdot 100 = 12500.$$

Allgemein: $\text{Grundwert} = \frac{\text{Prozente mal Hundert}}{\text{Prozentsatz}}$

Ist der um die Prozente vermehrte oder verminderte Grundwert gegeben, wie z. B. bei den Aufgaben: a) Welche Zahl gibt um $3\frac{1}{2}\%$ vermehrt 885,96?, b) Welche Zahl ergibt 869,4, wenn sie um $3,4\%$ vermindert wird?, so kann man folgendermaßen rechnen:

a) $103\frac{1}{2}\% = 885,96$

$$1\% = \frac{885,96 \cdot 2}{207}$$

$$100\% = \frac{885,96 \cdot 2 \cdot 100}{207} = 428 \cdot 2 = 856;$$

b) $96,6\% = 869,4$

$$1\% = \frac{869,4}{96,6}$$

$$100\% = \frac{869,4 \cdot 100}{96,6} = 9 \cdot 100 = 900.$$

C. Die Verteilungs-(Gesellschafts-)Rechnung

Die Verteilungs- oder Gesellschafts-Rechnung findet Anwendung, wenn eine Größe nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen ist. Dabei gilt folgender **Grundsatz**: Entfällt auf die Summe der Verhältnisse der gesamte zu verteilende Betrag, so entfällt auf jede Verhältniszahl der ebensovielte Teil, den sie von der Summe der Verhältniszahlen ausmacht, d. h. die Summe der Verhältniszahlen verhält sich zu jeder einzelnen Verhältniszahl, wie der ganze zu verteilende Betrag zu jedem einzelnen Anteil.

Beispiel: 1200 RM sind im Verhältnis 5:7:8 zu verteilen, d. h. so, daß immer, wenn A 5 RM erhält, B 7 RM, C 8 RM bekommt.

Lösung: Man bestimmt zunächst die Summe der Verhältniszahlen, also $5+7+8=20$, dann schließt man von der Gesamtheit der Teile auf die Einheit und von dieser auf die jedem Anteilempfänger zufallende Vielheit.

Teile	RM
20	1200
1	$\frac{1200}{20} = 60$
5	$60 \cdot 5 = 300$
7	$60 \cdot 7 = 420$
8	$60 \cdot 8 = 480$

Oft sind die Verhältniszahlen nicht unmittelbar gegeben, sondern durch eine vorbereitende Rechnung zu finden, wie in folgenden Beispielen:

a) Ein Posten Arbeitsanzüge von 685 Stück soll an die Belegschaften von 4 Betrieben A, B, C und D entsprechend ihrer Kopfstärke verteilt werden. Wieviel Anzüge entfallen auf jeden Betrieb, wenn in A 210, in B 420, in C 350 und in D 560 Männer in Betracht kommen?

b) Nach einem Testament erhält von einer Erbschaft A ein Legat von 3500 RM, B $\frac{3}{10}$, C $\frac{1}{3}$ und D $\frac{1}{5}$ der Hinterlassenschaft. Wieviel erhält jeder?

Lösungen:

a) Aus der Anzahl der Anwärter auf einen Anzug ergibt sich das Teilungsverhältnis $210:420:350:560=3:6:5:8$, wenn man der Vereinfachung wegen links durch 70 kürzt. Die Summe der Teilungsverhältnisse ist dann $3+6+5+8=22$ und der Ansatz

Teile	Anzüge
22	685
1	31,1
3	$93,3 \approx 93$ (Anteil A)
6	$186,6 \approx 187$ (Anteil B)
5	$155,5 \approx 156$ (Anteil C)
8	$248,8 \approx 249$ (Anteil D).

b) Das Legat für A ist

$1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{30}{30} - \frac{9}{30} - \frac{10}{30} - \frac{6}{30} = \frac{5}{30}$ der Erbschaft, d. h. die Anteile von A, B, C, D an diese, verhalten sich wie 5:9:10:6, und die Summe der Verhältniszahlen ist 30. Der Ansatz lautet

Teile	RM	
5	3500	(Anteil A)
1	$3500:5=700$	✓
9	$9 \cdot 700=6300$	(Anteil B)
10	$10 \cdot 700=7000$	(Anteil C)
6	$6 \cdot 700=4200$	(Anteil D).

D. Die Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist nichts anderes als eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen, wobei die Prozente dem Ertrag (Zinsen) eines Kapitals für ein volles Jahr entsprechen und als weitere in Rechnung zu setzende Größe die Zeit hinzutritt.

Beispielsweise bedeutet 3% Zinsen: für je 100 RM des Kapitals erhält man für die Dauer eines Jahres 3 RM Zinsen; dabei wird in Deutschland, in der Sowjetunion und vielen anderen europäischen Staaten das Jahr zu 360 Tagen, 1 Tag also zu $\frac{1}{360}$ Jahr gerechnet, in anderen Staaten, vor allem in England und Amerika, zu 365 Tagen.

a) Berechnung der Zinsen.

Um die Zinsen für einen kürzeren Zeitraum als ein Jahr zu berechnen, hat man die einjährigen Zinsen mit dem diesem Zeitraum entsprechenden Bruchteil des Jahres (1 Tag = $\frac{1}{360}$ Jahr, 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahr) zu multiplizieren.

Daher gilt die **allgemeine Formel**

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital}}{100} \text{ mal Zinsfuß mal Zeit,}$$

in welcher das Kapital in RM, die Zeit in der Einheit «ein Jahr» einzusetzen ist.

Beispiele: a) Wieviel Zinsen Z bringen 3000 RM zu $3\frac{1}{2}\%$ in einem Jahr?

$$\text{Lösung: } Z = \frac{3000}{100} \cdot 3\frac{1}{2} \text{ RM} = 30 \cdot \frac{7}{2} \text{ RM} = 15 \cdot 7 \text{ RM} = 105 \text{ RM}$$

b) Wieviel Zinsen bringen 1500 RM zu 4% in 66 Tagen?

$$\text{Lösung: } Z = \frac{1500}{100} \cdot 4 \cdot \frac{66}{360} \text{ RM} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 66}{360} \text{ RM} = \frac{4 \cdot 66}{24} \text{ RM} = 11 \text{ RM.}$$

Da der Zinsfuß meist einen bequemen Teil von 360 ausmacht, so läßt er sich oft in der allgemeinen Zinsformel durch Kürzen beseitigen; man nennt dann

die im Nenner auftretende Zahl (360:Zinsfuß) den Zinsdivisor und erhält dadurch die **vereinfachte Zinsformel**

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital mal Tage}}{\frac{100}{\text{Zinsfuß}}} = \frac{\text{Kapital mal Tage}}{\text{Zinsdivisor}}$$

Als Zinsdivisor $\frac{360}{\text{Zinsfuß}}$ ist einzusetzen bei

1 % Zinsfuß. . . . 360	3 % Zinsfuß. . . . 120
$1\frac{1}{2}\%$ " 240	4 % " 90
2 % " 180	$4\frac{1}{2}\%$ " 80
$2\frac{1}{2}\%$ " 144	5 % " 72

Da der Zinsbetrag vom Kapital, dem Zinsfuß und der Zeit abhängig ist, umfassen die Aufgaben der Zinsrechnung auch solche, bei denen das Kapital, der Zinsfuß oder die Zeit gesucht ist, wenn die anderen Größen gegeben sind.

b) Berechnung des Kapitals

$$\text{Allgemeine Formel: Kapital} = \frac{\text{Zinsen mal 100 mal 360}}{\text{Zinsfuß mal Tage}}$$

Beispiel: Welches Kapital K bringt in 7 Monaten 6 Tagen bei $3\frac{1}{2}\%$ Zinsfuß 79,38 RM Zinsen?

$$\text{Lösung: } K = \frac{79,38 \cdot 100 \cdot 360}{3,5 \cdot 216} \text{ RM} = \frac{7938 \cdot 3600}{35 \cdot 216} \text{ RM} = \frac{1134 \cdot 720}{216} \text{ RM} = 3780 \text{ RM}$$

Die Zahl 216 ergibt sich aus $7 \cdot 30 + 6 = 216$ (1 Monat = 30 Tage).

c) Berechnung des Zinsfußes.

$$\text{Allgemeine Formel: Zinsfuß} = \frac{\text{Zinsen mal 100 mal 360}}{\text{Kapital mal Tage}}$$

Beispiel: Bei welchem Zinsfuß p erbringen 1284 RM in der Zeit vom 24. März bis 9. Juni 8,56 RM Zinsen?

Lösung: Vom 24. März bis 9. Juni sind $(3 \cdot 30 - 15)$ Tage = 75 Tage

$$p = \frac{8,56 \cdot 100 \cdot 360}{1284 \cdot 75} \% = \frac{856 \cdot 120}{1284 \cdot 25} \% = \frac{856 \cdot 24}{1284 \cdot 5} \% = \frac{8 \cdot 2}{5} \% = 3\frac{1}{5} \%$$

d) Berechnung der Zeit:

$$\text{Allgemeine Formel: Tage} = \frac{\text{Zinsen mal 100 mal 360}}{\text{Kapital mal Zinsfuß}}$$

Beispiel: In welcher Zeit T erbringen 448 RM Kapital zu $4\frac{1}{2}\%$ 1,40 RM Zinsen?

$$\text{Lösung: } T = \frac{1,40 \cdot 100 \cdot 360 \cdot 2}{448 \cdot 9} \text{ Tage} = \frac{140 \cdot 40}{224} \text{ Tage} = \frac{140 \cdot 5}{28} \text{ Tage} = 5 \cdot 5 \text{ Tage} = 25 \text{ Tage.}$$

III. RECHENPROBEN

Das Ergebnis einer Rechnung ist wertlos, wenn es nicht auf seine Richtigkeit gründlich und durchgreifend nachgeprüft wird. Dabei ist es immer nützlich, ein und dieselbe Rechnung auf zwei verschiedene Arten durchzuführen und dann die Ergebnisse zu vergleichen. So kann man bei der Addition die Summanden in anderer Reihenfolge addieren, bei der Multiplikation die Faktoren vertauschen, bei der Subtraktion die Subtrahenden zum Ergebnis addieren, wobei sich der Minuend ergeben muß, und schließlich bei der Division das Ergebnis mit dem Divisor multiplizieren, was den Dividenten ergeben muß. Das sind Kontrollen, die an sich zeitraubend sind, aber immerhin die Zuverlässigkeit der Rechnung in einem hohen Grade vermehren, soweit man nicht einen und denselben Fehler wiederholt, was aus psychologischen Gründen nicht selten vorzukommen pflegt.

Nun gibt es **Rechenproben**, die nicht auf eine Wiederholung der Rechnung in abgeänderter Form beruhen, sondern denen die Teilbarkeit der Zahlen zugrunde liegt. Sie sind als **Neuner- und Elferprobe** zwar vielfach bekannt, werden aber noch immer nicht in dem Maße praktisch verwendet, wie sie es verdienen. Für sie gelten folgende Gesichtspunkte:

1. Die Summe beliebiger Zahlen gibt bei der Division durch Z den gleichen Rest, den man erhält, wenn man die Summe der Einzelreste bildet, welche die Zahlen bei der Division durch Z liefern, und diese Summe durch Z dividiert.

Beispiel:

$126 + 78 + 177 = 381$. Bei der Division z. B. durch 5 ergibt 381 den Rest 1; die gleiche Zahl 1 erhält man, wenn man die Reste 1, 3 und 2 addiert, die bei der Division von 126, 78 und 177 durch 5 übrigbleiben, und ihre Summe $1 + 3 + 2 = 6$ durch 5 dividiert.

2. Das Produkt beliebiger Zahlen gibt bei der Division durch Z den gleichen Rest, den man erhält, wenn man die Einzelreste multipliziert, welche die Faktoren bei der Division durch Z liefern, und das erhaltene Produkt durch Z dividiert.

Beispiel:

$35 \cdot 26 = 910$. Bei der Division durch 12 z. B. ergibt 910 den Rest 10; die gleiche Zahl erhält man, wenn man die Reste 11 und 2, welche 35 und 25 bei der Division durch 12 übriglassen, multipliziert ($11 \cdot 2 = 22$) und das erhaltene Produkt (22) durch 12 dividiert.

Für den mathematisch geschulten Leser sei der allgemeine Beweis für die Richtigkeit dieser Regeln angegeben.

Mat die Zahl a für den Divisor z den Rest r und die Zahl b für den gleichen Divisor z den Rest s , so ist

$$a = mz + r$$

$$b = nz + s \quad (m \text{ und } n \text{ ganze Zahlen!}),$$

dann ist $(a+b) = (m+n)z + (r+s)$, d. h. $a+b$ ergibt bei der Division durch z den Rest $(r+s)$, welcher die Summe der Einzelreste r und s ist.

Ferner ist $a \cdot b = (mz+r)(nz+s) = z(mnz+rn+sm) + rs$, d. h. $a \cdot b$ ergibt bei der Division durch z den Rest rs , welcher das Produkt der Einzelreste r und s ist.

Diese Regeln liefern Rechenproben, die besonders einfach sind, wenn als Divisor z entweder die Zahl 9 oder die Zahl 11 gewählt wird, weil sich in diesen Fällen die Reste leicht ermitteln lassen. Man spricht daher von einer **Neunerprobe** (NP) und einer **Elferprobe** (EP).

A. Die Neunerprobe

Bei der Behandlung der Teilbarkeit der Zahlen (S. 20) wurde festgestellt, daß eine Zahl durch 9 ohne Rest teilbar ist, wenn dies für ihre QS zutrifft. Andererseits läßt eine Zahl bei der Division durch 9 den gleichen Rest übrig, der bei der Division ihrer QS durch 9 verbleibt.

Diesen Rest bei der Division einer Zahl durch 9 nennt man ihren **Neunerrest** (NR). Man merke:

1. Der NR einer Zahl ist gleich dem NR ihrer QS,

$$\text{z. B. NR}(54213) = 6 \quad \text{QS}(54213) = 15 \quad \text{NR}(15) = 6.$$

2. a) Zahlen, deren QS 9 oder ein Vielfaches von 9 ist, haben den NR Null,

b) Zahlen, deren QS größer als 9 ist, haben als NR die QS ihrer QS.

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} \text{QS}(36) = 9 & \text{NR}(36) = 0 & & \\ \text{QS}(152) = 8 & \text{NR}(152) = 8 & & \\ \text{QS}(657) = 18 & \text{NR}(657) = 0 & \text{QS}(18) = 9 & \text{NR}(9) = 0 \\ \text{QS}(3758) = 23 & \text{NR}(3758) = 5 & \text{NR}(23) = 5 & = \text{QS}(23). \end{array}$$

c) Bei der Berechnung des NR aus der QS einer Zahl kann man die Ziffer 9 oder Ziffern, deren Summe 9 ist, außer acht lassen.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{NR}(9812) = 2 \text{ (weglassen 9 und } 8+1=9\text{)} \\ \text{NR}(5472) = 0 \text{ (weglassen 5+4=9 und } 7+2=9\text{)} \\ \text{NR}(946531) = 1 \text{ (weglassen 9, } 4+5=9, 6+3=9\text{)}. \end{array}$$

Mit Hilfe des NR, dessen Berechnung also sehr einfach ist, wird die Neunerprobe (NP) in folgender Weise durchgeführt:

1. **Bei der Addition:** Man schreibt rechts neben die Summanden und ihre Summe die einzelnen NRNR. Der NR der Summe muß dann gleich dem NR der Summe der NRNR der Summanden sein.

Beispiel:		NR
	1098	0
	+ 456	6
	+ 2738	2
	+ 6733	1
	+ 4657	4
	15682	4

Die NP stimmt, da $\text{NR } (0+6+2+1+4)=4$ und $\text{NR } (15682)=4$.

2. **Bei der Subtraktion** beachte man, daß das Ergebnis, vermehrt um die Summe der Subtrahenden, den Minuenden ergeben muß. Es muß also der NR des Ergebnisses, vermehrt um die NRNR der Subtrahenden, gleich dem NR des Minuenden sein.

Beispiel:		NR
	9216	0
	- 836	8
	- 3347	8
	5033	2

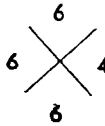
Es ist $\text{NR } (5033)+\text{NR } (3347)+\text{NR } (836)=\text{NR } (9216)$ oder $\text{NR } (2+8+8)=\text{NR } (9216)=0$.

Die Zahlen in den angegebenen Beispielen sind absichtlich verhältnismäßig niedrig gewählt, um die Durchführung der NP zunächst im Grundsatz leicht übersehbar zu machen. Die Wirksamkeit der Probe fällt erst bei einer größeren Anzahl von Summanden eigentlich ins Gewicht.

3. **Bei der Multiplikation.** Man zeichnet, wie bei den folgenden Beispielen, ein Kreuz neben die Rechnung und schreibt in dessen linkes Feld den NR des anderen Faktors, in das obere Feld den NR des Produktes dieser beiden NRNR und schließlich in das untere Feld den NR des errechneten Produktes. Die beiden letztgenannten NRNR müssen bei richtiger Rechnung übereinstimmen.

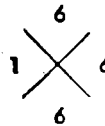
Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 438 \cdot 643 \\ \underline{2628} \\ 1752 \\ \underline{1314} \\ 281634 \end{array}$$

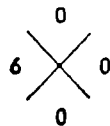


$$\text{d. h. } \begin{array}{r} \text{NR (NR(438) \cdot NR (643))} \\ \text{NR (438) \cdot NR (643)} \\ \hline \text{NR (281634)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 5968 \cdot 654 \\ \underline{35808} \\ 29840 \\ \underline{23872} \\ 3903072 \end{array}$$



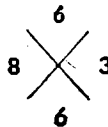
$$\begin{array}{r} \text{c) } 5,64 \cdot 3,78 \\ \underline{16,92} \\ 3,948 \\ \hline 21,3192 \end{array}$$



4. Bei der Division ist zu beachten, daß das Ergebnis, mit dem Divisor multipliziert, den Dividenten ergeben muß. Das unter 3 angegebene Verfahren ist daher in umgekehrter Reihenfolge anzuwenden.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 114945 : 237 = 485 \\ \underline{2014} \\ 1185 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$



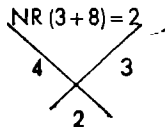
$$\text{d. h. } \begin{array}{r} \text{NR (114945)} \\ \text{NR (485) \cdot NR (237)} \\ \hline \text{NR (NR(237) \cdot NR (485))} \end{array}$$

Für den Fall, daß die Division nicht aufgeht, sondern ein Rest r bleibt, ist zu bedenken, daß man zum Produkt aus dem Ergebnis (ohne Rest) und dem Divisor den Rest r hinzufügen muß, um den Dividenten zu erhalten, also z. B.

$$92783 : 237 = 391 \text{ Rest } 116$$

Es ist also $391 \cdot 237 + 116 = 92783$ und daher

$$\text{NR (391 \cdot 237) + NR (116) = NR (92783)}$$



B. Die Elferprobe

Hinsichtlich der Teilbarkeit einer Zahl durch 11 ergab sich (S. 20), daß eine Zahl durch 11 teilbar ist, wenn in ihrer QD die 11 ohne Rest aufgeht, was ja auch der Fall ist, wenn die QD gleich Null ist. Im anderen Falle gibt die QD den **Elferrest** (ER) an, der bei der Division durch 11 verbleibt.

Nun kann freilich die QD auch kleiner als Null oder, wie man sagt, negativ, z. B. -3 , werden. In diesem Falle bedeutet das, daß noch 8 E (Unter-

schied zwischen 3 und 11) an der restlosen Teilbarkeit der Zahl durch 11 fehlen; der ER ist also dann $11-3=8$. Ist die QD z. B. -13 , dann ist der $ER+9 (=22-13)$, d. h. man muß die negative QD auf das nächsthöhere Vielfache von 11 (in diesem Falle 22) ergänzen.

Hieraus folgt nachstehende **Regel für die Berechnung des ER**:

Man bildet die QD; wird diese kleiner als Null, so addiert man 11 oder soviel mal 11, bis sie positiv wird.

Beispiel: $ER(52876)=10$, d. h. $6+8+5-7-2=10$

$ER(68761)=0$, d. h. $1+7+8-6-8=0$

$ER(5289)=11-13=-2$, d. h. $ER(5289)=9$ (aus $11-2$)

$ER(18296)=9-17=-8$, d. h. $ER(18296)=3$ (aus $11-8$)

$ER(589070)=8-21=-13$, d. h. $ER(589070)=9$ (aus $22-13$)

Dezimalzahlen ergänzt man bei der Berechnung des Elferrestes zweckmäßig (durch Anhängen von Nullen) **auf eine gerade Stellenzahl** nach dem Komma, z. B.

$ER(225,7) = ER(225,70) = 7-9=-2$, d. h. $ER(225,7) = 9$

$ER(60,978) = ER(60,9780) = -16$, d. h. $ER(60,978) = 6$

Die EP wird bei allen Rechnungsarten genau so durchgeführt wie die NP, nur sind eben an Stelle der NR die ERER zu setzen.

Beispiele:

a) Addition

48,560	5
+ 3732,431	1
+ 167,420	0
+ 75,889	0
+ 1009,408	7
+ 378,555	10
+ 2079,985	5
<u>7492,248</u>	6

$ER(7492,248)=6$

$ER(5+1+0+0+7+10+5)=ER(28)=6$.

b) Multiplikation

3684 · 372
<u>11052</u>
25788
<u>7368</u>
1370448

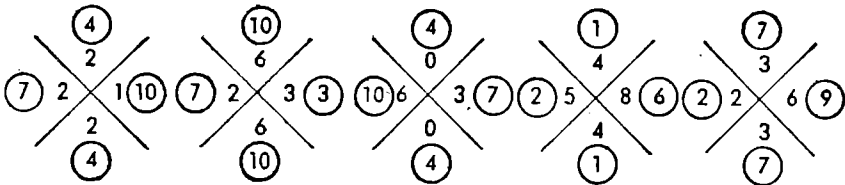
EP

	2 ^{*)}	
10	×	9
	2	

^{*)} d. h. $ER(10 \cdot 9)=2$

Es ist nützlich und ratsam, **zur Kontrolle einer Rechnung beide Proben**, die NP und EP, anzuwenden, was bei einiger Übung nicht sonderlich viel Zeit beansprucht.

Hat man etwa eine größere Produktsumme zu prüfen, so kann dies durch eine **Generalprobe** nach folgendem Muster geschehen, bei welchem die **umringten Zahlen zur EP gehören**.



$$\begin{aligned}
 &58,70 \cdot 49,60 + 78,50 \cdot 42,60 + 184,76 + 225,60 \cdot 4,80 + 3349,52 + 77,90 \cdot 56,60 + 13,88 \cdot 91,50 = 16551,94 \\
 &= 2911,52 + 3344,10 + 184,76 + 1082,88 + 3349,52 + 4409,14 + 1270,02 = 16551,94
 \end{aligned}$$

$$\text{NP } 2 + 6 + 8 + 0 + 8 + 4 + 3 = 31 \quad \text{NR } (31) = 4$$

$$\text{EP } (4) + (10) + (7) + (4) + (2) + (1) + (7) = 35 \quad \text{ER } (35) = 2$$

Da $\text{NR } (31) = \text{NR } (16551,94) = 4$, $\text{ER } (35) = \text{E } (16551,94) = 2$, stimmen beide Proben.

C. Zuverlässigkeit der Neuner- und Elferprobe

Hinsichtlich der Verlässlichkeit beider Proben ist zu sagen:

a) **Stimmen die Proben** (richtig gerechnet) **nicht**, so ist die **Rechnung** auf alle Fälle **falsch**.

b) **Stimmen die Proben**, so kann die **Rechnung trotzdem falsch sein**. Das Stimmen der Proben ist also kein zwingender Beweis für die Richtigkeit der Rechnung.

Der Grund hierfür ist der, daß die QS einer Zahl, auf der ja beide Proben beruhen, die gleiche bleibt, wenn man die Ziffern der Zahl beliebig umstellt, oder wenn man der Zahl Nullen in beliebiger Menge und an beliebigen Stellen hinzufügt. Ferner bleibt der NR einer Zahl der gleiche, wenn man zu ihr beliebige Vielfache von 9 addiert oder von ihr subtrahiert, und Entsprechendes gilt vom ER hinsichtlich der Zahl 11. Das hat aber zu bedeuten, daß die NP Verrechnungen mit 9, die EP solche mit 11 nicht anzeigen.

Immerhin ist die Wahrscheinlichkeit eines falschen Ergebnisses beim Stimmen beider Proben äußerst gering. Aus diesem Grunde wende man stets beide Proben an! Stimmen beide, so kann man fast mit Gewißheit für die Richtigkeit der Rechnung eintreten. Fehler in der Rechnung liegen aber unbedingt vor, wenn schon eine der Proben nicht stimmt.

IV. DAS RECHNEN MIT VORTEILEN

Es gibt eine große Anzahl sogenannter **Rechenvorteile**, die sich vielfach darauf gründen, daß viele Zahlen nicht nur in einem engen Verwandtschaftsverhältnis zueinander, sondern vor allem auch zu den Rangzahlen und deren Vielfachen stehen, mit denen sich ja immer bequemer rechnen läßt. Von den vielen Vorteilen dieser Art, die sich sonst in Lehrbüchern über diesen Stoff finden, sollen hier nur die wichtigsten aufgeführt werden.

Wenn auch die sichere und gründliche Beherrschung des formalen Schemas die notwendige Voraussetzung für jedes zuverlässige Rechnen bildet, so gewöhne man sich dennoch mehr und mehr daran, sich von der starren Bindung an dieses freizumachen, falls die Eigenschaften der jeweils vorliegenden Zahlen die Möglichkeiten bieten, auf kürzerem Wege zum Ziele zu gelangen.

Daher **rechne** man **nie mechanisch**, sondern **mit Überlegung** und **Umsicht**. Dadurch wird zudem das vielgeschmähte Rechnen zu einer anregenden Beschäftigung, die sich über einen toten Formalismus hinaushebt und den Blick über das weite Reich der Zahlen stärkt und schärft.

Dazu ist freilich notwendig, daß man sich vor Beginn jeder Rechnung die Zahlen, mit denen man es zu tun hat, genau ansieht und untersucht, wieweit sie Vorteile dieser oder jener Art bieten, die den Umgang mit ihnen erleichtern.

A. Vorteile bei der Addition

1. Summanden, die gut zusammenpassen, werden zuerst addiert.

Man überblickt die Ziffern, die in jeder Reihe senkrecht untereinanderstehen und faßt erst diejenigen zusammen, deren Summe 10 ergibt, auch wenn sie nicht unmittelbar benachbart sind. Erst dann addiert man die übrigen Ziffern. Kommen gleiche Ziffern vor, so hilft auch Multiplikation rasch weiter.

Beispiel: 742
 + 274
 + 97
 + 486
 + 265
 + 53
 + 225
 + 733

 2875

Rechne in der E-Reihe $(4+6)+(7+3)+(5+5)+2+3=$
 $=35$, die zu übertragende 3 nimm gleich zu der 7
in die Z-Reihe und addiere $(3+7)+(4+6)+9+8+;$
 $(5+2+3)=47$ und schließlich in die H-Reihe
 $(2 \cdot 4+2)+2 \cdot 2+2 \cdot 7=281$

2. Gleiche Ziffern verschiedener Summanden werden gruppenweise zusammengefaßt.

Sind Ziffern der verschiedenen Summanden alle oder gruppenweise gleich, dann ist es nützlich, die gleichen Ziffern durch Multiplizieren zu addieren, z. B. in

$$67 + 57 + 63 + 67 + 57 + 63 + 58 = 432$$

rechnet man von links nach rechts: $(4 \cdot 6 + 3 \cdot 5) Z = 39 Z = 390 E$ und nun $390 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 8 = 432$.

Überhaupt kann man das Addieren von Zahlen, die nicht allzuviel verschiedene Stellen haben, in dieser Weise bequem im Kopfe von links nach rechts vornehmen, ohne daß man sie erst untereinander schreibt, wie z. B. in

$$426 + 538 + 258 + 47 + 139 + 35 = 1443.$$

Hier rechnet man: $(4 + 5 + 2 + 1) H = 120 Z$; $120 Z + (2 + 3 + 5) + 4 + 2 \cdot 3 Z = 140 Z = 1400 E$; $1400 + 6 + 2 \cdot 8 + 7 + 9 + 5 = 1443$.

3. Summanden, die in der Nähe von Rangzahlen bzw. deren Vielfachen liegen, werden ergänzt.

Hat man z. B. die Aufgabe $2365 + 1984 + 996 + 976$, so fällt auf, daß die letzten drei Summanden alle in der Nähe von Rangzahlen oder deren Vielfachen liegen ($1984 = 2000 - 16$, $996 = 1000 - 4$, $976 = 1000 - 24$). Daher rechnet man zuerst

$$2365 + 2000 + 1000 + 1000 = 6365$$

und verbessert dann das Ergebnis um den gemachten Fehler, indem man $16 + 4 + 24 = 44$ subtrahiert. Das ergibt $6365 - 44 = 6321$. Ohne überflüssige Schreiberei, die hier nur zur Erläuterung nötig war, kann man in solchen Fällen die Rechnung vollständig im Kopfe durchführen und das Ergebnis sofort hinschreiben.

B. Vorteile bei der Subtraktion

1. Subtraktion mit Hilfe der Zehnerergänzung (ZE).

Die ZE einer Zahl ist diejenige Zahl, die man zu ihr addieren muß, um sie je nach ihrer Stellenzahl auf die nächsthöhere Rangzahl oder deren Vielfaches zu ergänzen.

Beispiele: Die ZE zu 98 ist 2 (ergänzt zu 1 H), zu 187 ist 13 (ergänzt zu 2 H), zu 9876 ist 124 (ergänzt zu 1 ZT) usw.

Statt nun eine Zahl von einer anderen zu subtrahieren, addiert man ihre ZE und subtrahiert die handlichere Zahl, zu der man ergänzt hat.

- Beispiele: a) $354 - 169 = 185$, rechne $354 - 200 + 31 = 185!$
b) $5236 - 3975 = 1261$, rechne $5236 - 4000 + 25 = 1261!$
c) $6225 - 995 - 997 - 992 - 994 = 2247$,
rechne $6225 - 4 \cdot 1000 + 5 + 3 + 8 + 6 = 2247!$
d) $7684 - 996 - 1984 - 875 = 3829$,
rechne $7684 - 1000 - 2000 - 1000 + 4 + 16 + 125 = 3829$.

2. Subtraktion mit Hilfe der Multiplikation.

Liegen die Subtrahenden sämtlich in der Nähe der gleichen Rangzahl oder eines ihrer Vielfachen, so subtrahiert man das entsprechende Vielfache der Rangzahl und verbessert das Ergebnis um den dabei begangenen Fehler, z. B.

$$\text{a) } 1887 - 84 - 76 - 97 - 98 - 105 = 1427$$

Beobachtung: Die Subtrahenden liegen sämtlich in der Nähe von 100.
Rechne daher: $1887 - 5 \cdot 100 + 16 + 24 + 3 + 2 - 5 = 1387 + 40 = 1427$.

$$\text{b) } 9236 - 884 - 892 - 882 - 905 - 915 = 4752$$

Beobachtung: Die Subtrahenden liegen sämtlich in der Nähe von 900.
Rechne daher: $9236 - 5 \cdot 900 + 16 + 8 + 18 - 5 - 15 = 4736 + 22 = 4758!$

3. Verbindung von Addition und Subtraktion.

Auch wenn Addition und Subtraktion in derselben Rechnung nebeneinander vorkommen, kann man oft in der Weise schneller zum Ziele gelangen, daß man die Zahlen erst abrundet und dann das Ergebnis um den bei der Abrundung begangenen Fehler verbessert. So rechnet man z. B.

$$3764 + 97 - 485 - 998 + 997 - 899 + 515 = 2991$$

$$3764 + 100 - 500 - 1000 + 1000 - 900 + 500 - 3 + 15 + 2 - 3 + 1 + 15$$

und, da $-500 + 500 - 1000 + 1000 = 0$

$$3764 - 800 - 6 + 33 = 2991.$$

C. Vorteile bei der Multiplikation

Je nach der Eigenart der Faktoren bieten sich hier die meisten Vorteile; sie gründen sich meist auf den besonderen Aufbau der Faktoren, insbesondere auf deren enge Verwandtschaft mit den Rangzahlen und ihren Vielfachen. Weist ein Faktor solche vorteilhafte Eigenschaften auf, so wählt man ihn zum Multiplikator.

1. Ein Faktor enthält an einer Stelle die Ziffer 1.

Da das zu 1 gehörige Teilprodukt – abgesehen im allgemeinen vom Stellenwert – mit dem Multiplikanden übereinstimmt, wird dieser als Teilprodukt mit benutzt, ohne daß man ihn nochmals hinschreiben braucht. Der übliche Multiplikationsstrich wird dann weggelassen. Besonders gilt es hierbei auf den Stellenwert zu achten, wobei die Teilprodukte nicht mehr in der gewohnten Weise untergesetzt, sondern teils «vor-», teils «eingerückt» werden. Beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen ist zu beachten, daß das ungekürzte Ergebnis nach dem Komma genau soviel Stellen haben muß, wie die beiden Faktoren zusammen.

Beispiele: a) $748 \cdot 178$ b) $94,6 \cdot 81,2$ c) $289,6 \cdot 0,112$

$\begin{array}{r} 5236 \\ 5984 \\ \hline 133144 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7568 \\ 18\ 92 \\ \hline 7681,52 \end{array}$	$\begin{array}{r} 34,752 (= 2896 \cdot 12) \\ \hline 32,4352 \end{array}$
--	---	---

2. Die Ziffern eines Faktors sind multiplikativ verwandt, z. B. ist in 648 $48=8 \cdot 6$, in 287 $28=4 \cdot 7$, in 945 $45=5 \cdot 9$ usw. In solchen Fällen kann man beim Berechnen der Teilprodukte eines einsparen, indem man auf das vorhergehende zurückgreift.

Beispiele: a) $758 \cdot 648$ b) $9,67 \cdot 287$ c) $23,48 \cdot 9,45$

$\begin{array}{r} 4548 \\ 36384 (= 8 \cdot 4548) \\ \hline 491184 \end{array}$	$\begin{array}{r} 67,69 \\ 2707,6 (= 4 \cdot 6769) \\ \hline 2775,29 \end{array}$	$\begin{array}{r} 211,32 \\ 16,5660 (= 5 \cdot 21132) \\ \hline 221,8860 \end{array}$
--	---	---

3. Ein Faktor ist der bequeme Bruchteil einer Rangzahl.

a) Ein Faktor ist 5 (d. h. $10:2$).

Man dividiert das Zehnfache des anderen Faktors durch 2.

Beispiel: $1986 \cdot 5 = 19860:2 = 9930$
 $7,93 \cdot 5 = 79,3:2 = 39,65$

b) Ein Faktor ist 50 (d. h. $100:2$).

Man dividiert das Hundertfache des anderen Faktors durch 2,

Beispiel: $9238 \cdot 50 = 923800:2 = 461900$
 $16,84 \cdot 50 = 1684:2 = 842$

c) Ein Faktor ist 25 (d. h. $100:4$).

Man dividiert das Hundertfache des anderen Faktors durch 4,

Beispiel: $536 \cdot 25 = 53600:4 = 13400$
 $26,87 \cdot 25 = 2687:4 = 671,75$

d) Ein Faktor ist 125 (d. h. $1000:8$),

Man dividiert das Tausendfache des anderen Faktors durch 8,

Beispiel: $456 \cdot 125 = 456000:8 = 57000$

$$9,78 \cdot 1,25 = 0,0978 \cdot 125 = 97,8:8 = 12,225$$

e) Ein Faktor ist 75 (d. h. $300:4$).

Man dividiert das Dreihundertfache des anderen Faktors durch 4,

Beispiel: $828 \cdot 75 = 3 \cdot 82800:4 = 248400:4 = 62100$.

$$13,73 \cdot 75 = 3 \cdot 1373 : 4 = 4119 : 4 = 1029,75.$$

f) Ein Faktor ist 15 (d. h. $10 + \frac{1}{2} \cdot 10$).

Man multipliziert den anderen Faktor mit 10 und addiert die Hälfte des Ergebnisses,

Beispiel: $184 \cdot 15 = 1840 + 920 = 2760$.

$$12,39 \cdot 15 = 123,9 + 61,95 = 185,85.$$

4. Ein Faktor ist 11.

a) Der andere Faktor ist zweistellig.

Man schreibt zwischen die Ziffern des anderen Faktors dessen QS (Z-Überschuß ist dabei auf die zweite Stelle [Z] des Multiplikanden zu übertragen!).

Beispiel: $43 \cdot 11 = 473$, d. h. 4 (4+3) 3

$$97 \cdot 11 = 1067, \text{ d. h. } 9 (9+7) 7 = 1067.$$

b) Der andere Faktor ist mehrstellig.

Man schreibt, mit der höchsten Stelle des Multiplikanden beginnend, an diese der Reihe nach die Summe je zweier folgender Ziffern (Z-Überschüsse dabei übertragen!), zuletzt die letzte Ziffer des Multiplikanden,

Beispiel: $532 \cdot 11 = 5 (5+3) (3+2) 2 = 5852$

$$875 \cdot 11 = 8 (8+7) (7+5) 5 = 9625$$

$$45,327 \cdot 11 = 4 (4+5) (5+3), (3+2) (2+7) 7 = 498,597.$$

5. Die Zahlen 11, 12, 13, 14 und 15 werden als einstellig aufgefaßt.

Beispiele: a) $\begin{array}{r} 237 \cdot 211 \\ 474 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 2607 (= 237 \cdot 11) \\ 50007 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 38,9 \cdot 14,3 \\ 544,6 (= 389 \cdot 14) \\ 11,67 \\ 556,27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 987 \cdot 0,715 \\ 6909 \\ 14805 (= 987 \cdot 15) \\ 705,705 \end{array}$$

6. Ein Faktor lässt sich in ein geeignetes Produkt aufspalten.

z. B. $540 = 6 \cdot 90$; $56 = 7 \cdot 8$; $64 = 8 \cdot 8$ usw.

In solchen Fällen bildet man erst das Teilprodukt mit dem einen Faktor des Multiplikators, das man dann mit dessen anderem Faktor zu multiplizieren und seinem Stellenwert entsprechend zu werten hat.

Beispiele: a)
$$\begin{array}{r} 937 \cdot 540 \\ \underline{5622} \\ 505980 \end{array} \begin{array}{l} (\cdot 6 \\ (\cdot 90 \end{array} \quad \text{b) } \begin{array}{r} 28,54 \cdot 5,6 \\ \underline{199,78} \\ 159,824 \end{array} \begin{array}{l} (\cdot 7 \\ (\cdot 8 \end{array} \quad \text{c) } \begin{array}{r} 135,4 \cdot 0,64 \\ \underline{1083,2} \\ 86,656 \end{array} \begin{array}{l} (\cdot 8 \\ (\cdot 8 \end{array}$$

Andere Zerlegungen solcher Art sind, ohne damit alle Möglichkeiten zu erschöpfen, folgende:

$102 = 6 \cdot 17$; $104 = 8 \cdot 13$; $108 = 9 \cdot 3 \cdot 4$; $501 = 3 \cdot 167$; $504 = 7 \cdot 72$; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $1003 = 17 \cdot 59$; $1005 = 15 \cdot 67$; $1007 = 19 \cdot 53$; $1008 = 7 \cdot 9 \cdot 16$ usw.

Hiernach lassen sich Aufgaben der folgenden Art bequem rechnen:

- a) $17 \cdot 42 = 17 \cdot 6 \cdot 7 = 102 \cdot 7 = 714$ (Vorteil $6 \cdot 17 = 102$),
b) $72 \cdot 56 = 72 \cdot 7 \cdot 8 = 504 \cdot 8 = 4032$ (Vorteil $72 \cdot 7 = 504$),
c) $143 \cdot 84 = 143 \cdot 7 \cdot 12 = 1001 \cdot 12 = 12012$ (Vorteil $143 \cdot 7 = 1001$),
d) $334 \cdot 36 = 2 \cdot 167 \cdot 3 \cdot 12 = 501 \cdot 24 = 12024$ (Vorteil $167 \cdot 3 = 501$),
e) $567 \cdot 864 = 81 \cdot 7 \cdot 144 \cdot 6 = 486 \cdot 1008 = 486000 + 3888 = 489888$
(Vorteil $7 \cdot 144 = 1008$)

oder auch

$$567 \cdot 864 = 567 \cdot 8 \cdot 108 = 4536 \cdot 108 = 453600 + 36288 = 489888.$$

7. Ein Faktor lässt sich in geeignete Summen oder Differenzen aufspalten:

z. B. $225 = 200 + 25$; $395 = 400 - 5$; $592 = 600 - 8$; $1125 = 1000 + 125$ usw.

In solchen Fällen multipliziert man zuerst mit dem bequemsten ersten Summanden und bildet dann das zweite Teilprodukt, das zu addieren oder zu subtrahieren ist, je nachdem der Multiplikator in eine Summe oder Differenz zerlegt wurde.

Beispiele: a)
$$\begin{array}{r} 846 \cdot 225 \\ \underline{1692} (= 846 \cdot 2) \\ + \underline{21150} (= 846 \cdot 25 = 84600 : 8) \\ 190350 \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 7,52 \cdot 3,95 \\ \underline{3008} (= 752 \cdot 4) \\ - \underline{3760} (= 752 \cdot 5, \text{ zwei Stellen eingerückt}) \\ 29,7040 \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} 975 \cdot 0,592 \\ \underline{5850} (= 975 \cdot 6) \\ - \underline{7800} (= 975 \cdot 8, \text{ zwei Stellen eingerückt}) \\ 577,200 \end{array}$$

Andere Zerlegungen solcher Art, bei denen man oft auch zu Zahlen gelangt, die weitere Vorteile bieten, sind folgende:

$95 = 100 - 5$; $96 = 100 - 4$; $97 = 100 - 3$; $98 = 100 - 2$; $99 = 100 - 1$
 $101 = 100 + 1$; $102 = 100 + 2$; $103 = 100 + 3$; $104 = 100 + 4$ usw.
 $111 = 100 + 11$; $112 = 100 + 12$; $113 = 100 + 13$; $114 = 100 + 14$ usw.
 $121 = 125 - 4$; $122 = 125 - 3$; $123 = 125 - 2$; $124 = 125 - 1$; $126 = 125 + 1$ usw.
 $248 = 250 - 2$; $249 = 250 - 1$; $251 = 250 + 1$; $252 = 250 + 2$; $253 = 250 + 3$ usw.
 $1247 = 1250 - 3$; $1248 = 1250 - 2$; $1249 = 1250 - 1$; $1251 = 1250 + 1$; $1252 = 1250 + 2$ usw.
 $1625 = 1500 + 125$; $1626 = 1500 + 125 + 1$ usw.

Hiernach rechnet man z. B.

- a) $358 \cdot 99 = 358 \cdot 100 - 358 = 35800 - 358 = 35442$
- b) $1837 \cdot 248 = 1837 \cdot 250 - 1837 \cdot 2 = 459250$ (d. h. $1837000 : 4$) $- 3674 = 455576$
- c) $5,78 \cdot 253 = 5,78 \cdot 250 + 5,78 \cdot 3 = 1445$ (d. h. $5780 : 4$) $+ 17,34 = 1462,34$
- d) $9,44 \cdot 12,53 = 9,44 \cdot 12,5 + 9,44 \cdot 0,03 = 118$ (d. h. $944 : 8$) $+ 0,2832 = 118,2832$

8. Die Faktoren sind zweistellig und beginnen beide mit derselben Ziffer.

z. B. $28 \cdot 24$; $17 \cdot 19$; $36 \cdot 38$; $49 \cdot 43$; $56 \cdot 57$.

Regel: Addiere die Einer des zweiten Faktors zum ersten, multipliziere die erhaltene Summe mit den Zehnern und addiere zum Ergebnis das Produkt der Einer!

Beispiele: a) $28 \cdot 24 = (28 + 4) \cdot 20 + 4 \cdot 8 = 640 + 32 = 672$
 b) $17 \cdot 19 = (17 + 9) \cdot 10 + 7 \cdot 9 = 260 + 63 = 323$
 c) $36 \cdot 38 = (36 + 8) \cdot 30 + 6 \cdot 8 = 1320 + 48 = 1368$
 d) $49 \cdot 43 = (49 + 3) \cdot 40 + 9 \cdot 3 = 2080 + 27 = 2107$
 e) $56 \cdot 57 = (56 + 7) \cdot 50 + 6 \cdot 7 = 3150 + 42 = 3192$.

Der Beweis für die Richtigkeit der Regel sei für den mathematisch geschulten Leser kurz angegeben. Es sei $m = 10a + b$ und $n = 10a + c$, dann ist $m \cdot n = (10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 10a[(10a + b) + c] + bc = 10a(m + c) + bc$.

Die Multiplikation nach der Regel wird etwas unbequem, wenn beide Faktoren in die Nähe von 100 rücken. Dann ist es zweckmäßig, nach einer der nachstehend angegebenen Regeln zu rechnen.

9. Die Faktoren ergeben vorteilhafte Ergänzungen zu Hundert,

z. B. $98 \cdot 97$; $84 \cdot 96$; $78 \cdot 87$ usw.

Regel: Subtrahiere vom ersten Faktor die H-Ergänzung des zweiten, hänge zwei Nullen an das Ergebnis und addiere das Produkt der H-Ergänzungen beider Faktoren!

- Beispiele: a) $98 \cdot 97 = (98-3) \cdot 100 + 2 \cdot 3 = 9500 + 6 = 9506$
 b) $84 \cdot 96 = (84-4) \cdot 100 + 16 \cdot 4 = 8000 + 64 = 8064$
 c) $78 \cdot 87 = (78-13) \cdot 100 + 22 \cdot 13 = 6500 + 286 = 6786$
 d) $76 \cdot 95 = (76-5) \cdot 100 + 24 \cdot 5 = 7100 + 120 = 7220$

Der Beweis ist ähnlich, wie der zu 8 angegebene. Es sei $m=100-a$, $n=100-b$, dann ist $m \cdot n = 100 \cdot 100 - 100a - 100b + ab = 100[(100-a)-(b)] + ab = 100(m-b) + ab$.

10. Die Faktoren ergeben vorteilhafte Überschüsse über Hundert,

z. B. $103 \cdot 105$; $106 \cdot 118$; $107 \cdot 124$ usw.

Regel: Addiere zum ersten Faktor den Überschuß des zweiten, hänge an das erhaltene Ergebnis zwei Nullen und addiere das Produkt der Überschüsse!

- Beispiele: a) $103 \cdot 105 = (103+5) \cdot 100 + 3 \cdot 5 = 10815$
 b) $106 \cdot 118 = (106+18) \cdot 100 + 6 \cdot 18 = 12508$
 c) $107 \cdot 124 = (107+24) \cdot 100 + 7 \cdot 24 = 13268$.

Der Beweis ist der folgende: Es sei $m=100+a$, $n=100+b$, dann ist $m \cdot n = 100 \cdot 100 + 100a + 100b + ab = 100[(100+a)+b] + ab = 100(m+b) + ab$.

11. Ein Faktor gibt eine vorteilhafte Ergänzung zu Hundert, die andere einen vorteilhaften Überschuß über Hundert,

z. B. $97 \cdot 106$; $95 \cdot 103$; $88 \cdot 113$ usw.

Regel: Addiere zum ersten Faktor den H-Überschuß des zweiten, hänge zwei Nullen an das Ergebnis und subtrahiere das Produkt des Überschusses und der Ergänzung der Faktoren!

- Beispiele: a) $97 \cdot 106 = (97+6) \cdot 100 - 3 \cdot 6 = 10300 - 18 = 10282$
 b) $95 \cdot 103 = (95+3) \cdot 100 - 3 \cdot 5 = 9800 - 15 = 9785$
 c) $88 \cdot 116 = (88+16) \cdot 100 - 12 \cdot 16 = 10400 - 192 = 10208$

Der Beweis ergibt sich aus dem unter 10, wenn man $n=100+b$ setzt. Liegen die Faktoren in der Nähe von 500, 1000 usw., so läßt sich unter entsprechender Abänderung der Regeln 8—12 ebenfalls vorteilhaft mit den Ergänzungen bzw. Überschüssen rechnen.

- Beispiele: a) $509 \cdot 511 = (509+11) \cdot 500 + 9 \cdot 11 = \frac{520}{2} \cdot 1000 + 99 = 260099$
 b) $506 \cdot 532 = (506+32) \cdot 500 + 6 \cdot 32 = \frac{538}{2} \cdot 1000 + 192 = 269192$
 c) $498 \cdot 506 = (498+6) \cdot 500 - 6 \cdot 2 = \frac{504}{2} \cdot 1000 - 12 = 251988$
 d) $1017 \cdot 1018 = (1017+18) \cdot 1000 + 17 \cdot 18 = 1035000 + 306 = 1035306$
 e) $997 \cdot 1012 = (997+12) \cdot 1000 - 3 \cdot 12 = 1009000 - 36 = 1008964$
 f) $4968 \cdot 4996 = (4968-4) \cdot 5000 + 32 \cdot 4 = \frac{4964}{2} \cdot 10000 + 128 = 24820128$

12. Beide Faktoren weichen um den gleichen Betrag nach oben und unten von einer runden Zahl ab, d. h. die runde Zahl ist der Mittelwert beider Faktoren,

z. B. $82 \cdot 78$, d. h. $(80+2)(80-2)$; $305 \cdot 295$, d. h. $(300+5)(300-5)$ usw.

Regel: Subtrahiere vom Quadrat des Mittelwertes das Quadrat der Abweichung [beruht auf der Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$].

Beispiele: a) $82 \cdot 78 = (80+2)(80-2) = 80^2 - 2^2 = 6400 - 4 = 6396$

b) $305 \cdot 295 = (300+5)(300-5) = 300^2 - 5^2 = 90000 - 25 = 89975$.

13. Beide Faktoren sind gleich (d. h. ihr Quadrat ist zu bilden) und liegen in der Nähe einer runden Zahl,

z. B. $84 \cdot 84 = (80+4)(80+4)$; $298 \cdot 298 = (300-2)(300-2)$ usw.

Regel: Man rechnet nach der Formel $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$.

Beispiele: a) $84 \cdot 84 = (80+4)^2 = 6400 + 16 + 2 \cdot 80 \cdot 4 = 7056$

b) $298 \cdot 298 = (300-2)^2 = 90000 + 4 - 2 \cdot 300 \cdot 2 = 88804$

c) $587 \cdot 587 = (600-13)^2 = 360000 + 169 - 2 \cdot 600 \cdot 13 = 344569$.

14. Beide Faktoren weichen wenig voneinander ab.

Regel: Man rechnet nach der Formel $a \cdot b = (a+z)(b-z) + z(a-b+z)$, in der z eine passend zu wählende beliebige Zahl ist.

Beispiele: a) $42 \cdot 36 = (42+8)(36-8) + 8(6+8) = 50 \cdot 28 + 112 = 1512$

b) $158 \cdot 152 = (158+2)(152-2) + 2(158-152+2) = 160 \cdot 150 + 16 = 24016$

c) $9975 \cdot 9967 = (9975+25)(9967-25) + 25(9975-9967+25) =$
 $= 10000 \cdot 9942 + 25(8+25) = 99420825$

D. Vorteile bei der Division

1. Der Divisor ist eine kleine Zahl, deren Einmaleins geläufig ist.

Man führt die Division im Kopfe durch, ohne die Teilprodukte hinzuschreiben, und schreibt nur den Quotienten auf.

Beispiele:

$$\text{a) } \begin{array}{r} 9685:7 \\ 1383\frac{4}{7} \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 8754:12 \\ 729,5 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 936,54:16 \quad (\text{auf 2 Dezimalstellen}) \\ 58,533 \\ = 58,53 \end{array}$$

2. Der Divisor lässt sich in bequeme Faktoren zerlegen,

z. B. $56 = 7 \cdot 8$; $1300 = 13 \cdot 100$; $136 = 8 \cdot 17$ usw.

Man dividiert nacheinander durch diese Faktoren im Kopfe und schreibt nur die einzelnen Ergebnisse auf.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 20944 : 56 \\ \underline{2992} \\ 374 \end{array} \begin{array}{l} (:7 \\ (:8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 8236,14 : 1300 \\ \underline{82,3614} \\ 6,3357 \end{array} (:13$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 54,784 : 13,6 \\ \underline{547,84 : 136} \\ 68,48 \\ = 4,028 \\ = 4,03 \end{array} \begin{array}{l} (:8 \\ (:17 \end{array}$$

3. Der Divisor ist ein Teil von 100 oder 1000,

z. B. $25 = \frac{100}{4}$; $50 = \frac{100}{2}$; $125 = \frac{1000}{8}$; $375 = \frac{3000}{8}$ usw.

Man multipliziert den Dividenten mit dem reziproken Werte des Divisors.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 9526 : 25 \\ = 95,26 \cdot 4 \\ \underline{381,04} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 37315 : 125 \\ = 37,315 \cdot 8 \\ \underline{298,520} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 56432,7 : 375 \\ = 56,4327 \cdot 8 \\ \underline{451,4616} \\ 150,4872 \end{array} (:3$$

Man merke sich allgemein: **Eine Zahl wird dividiert**

- a) durch 5, indem man ihren zehnten Teil verdoppelt,
- b) durch 50, indem man ihren hundertsten Teil verdoppelt,
- c) durch 25, indem man ihren hundertsten Teil vervierfacht,
- d) durch 125, indem man ihren tausendsten Teil verachtfacht.

Viele der vorstehend aufgeführten Rechenvorteile sind geeignet, das schriftliche Rechnen, wenn auch nicht ganz zu vermeiden, so doch wenigstens auf eine geringe Schreibarbeit zu beschränken und die wesentliche Rechnung im Kopfe durchzuführen. Durch fleißige Übung sollte jeder Rechner das Kopfrechnen soviel wie möglich betreiben und gerade dabei jeden Vorteil ausnutzen, der sich bietet.

V. DIE ÜBERSCHLAGSRECHNUNG

Es ist von großer Wichtigkeit, vor der Ausführung einer Rechnung, vor allem wenn sie umfangreicher ist, «überschlagsweise» die ungefähre Größenordnung des zu erwartenden Ergebnisses festzustellen. Der Überschlag bewahrt nicht nur davor, gedankenlos ein Ergebnis als richtig hinzunehmen, das von vornherein als unwirklich erscheinen muß, sondern schützt auch vor groben Fehlern, die namentlich beim Stellenwert leicht unterlaufen. Die auf alle Fälle notwendige Rechenprobe ersetzt er selbstverständlich nicht.

Die Überschlagsrechnung soll so kurz wie möglich sein, sie darf aber auch nicht zu einer zu groben Abrundung des Ergebnisses führen.

1. **Eine ungefähre Schätzung des Ergebnisses** besteht darin, daß man die in der Rechnung vorkommenden Zahlen **auf Rangzahlen und deren Vielfache abrundet**. Aus dem Umfange der dabei vorgenommenen Abrundung kann man auch angenähert beurteilen, ob und wieviel das genaue Ergebnis über oder unter dem errechneten Überschlagswerte liegt.

Bei der Addition und Subtraktion ist ein solcher Überblick leicht zu gewinnen, aber auch bei der Multiplikation und Division verhältnismäßig einfach durchzuführen.

Beispiele: a) $495 \cdot 648 \approx 500 \cdot 600 = 300\,000$ (genaues Ergebnis liegt darüber!)
oder verfeinert: $495 \cdot 648 \quad 500 \cdot 650 = 325\,000$ (genaues Ergebnis liegt darunter!)
(genaues Ergebnis 320 760)

b) $8,239 \cdot 265 \approx 8 \cdot 270 = 2160$ (genaues Ergebnis liegt darüber!)
(genaues Ergebnis 2236,335)

c) $425 \cdot 368 \approx 425 \cdot 360 = 144\,000 + \frac{1}{4} \cdot 36\,000 = 153\,000$ (unterschätzt)
(genaues Ergebnis 156 400)

Bei der **Abschätzung** kann auch die **Prozentrechnung** nützliche Dienste leisten. Beim letzten Beispiel wurde der Faktor 368 auf 360, also um 8, das ist rund $\frac{1}{50} = 2\%$ von 368, zu niedrig angenommen; das Überschlagsergebnis ist daher auch um etwa 2% zu niedrig, d. h. $153\,000 + 3060 = 156\,060$ kommt dem genauen Werte erheblich näher.

Bei der **Division** ist es zweckmäßig, **Dividend und Divisor beide im gleichen Sinne**, d. h. beide nach oben oder beide nach unten, **abzurunden**.

z. B. $320\,760 : 495 \approx 330\,000 : 500 = 660$
(genaues Ergebnis 648)

Beim vorstehenden Beispiel kann man auch daraus Nutzen ziehen, daß $2 \cdot 495 \approx 1000$ ist und überschlagsweise, da $2 \cdot 320765 \approx 642000$ ist, rechnen

$$642000 : 1000 = 642$$

Dabei muß das genaue Ergebnis darüber liegen, da der Divisor stärker nach oben abgerundet wurde, als der Dividend.

Bei $256,35 : 72,8 = 2563,5 : 728$ rechnet man schätzungsweise $2500 : 700 \approx 3,57$ (überschätzt) und kommt dadurch dem genauen Ergebnis 3,52 ziemlich nahe.

2. Ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Abschätzung des Ergebnisses sind die Zehnerpotenzen (vgl. S. 13).

Beispiele: a) $358 \cdot 287 \approx 3,5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^2 = 10,5 \cdot 10^4 = 105000$ (überschätzt um etwa 3%; genaues Ergebnis 102746)

$$\text{b) } 752,6 : 2,65 = 75260 : 265$$

$$75260 : 265 \approx 7,5 \cdot 10^4 : 2,5 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ (überschätzt um etwa 5%; genaues Ergebnis 284).}$$

Außerst vorteilhaft erweisen sich die Zehnerpotenzen bei der Abschätzung von sogenannten Bruchketten, wie sie vor allem bei technischen und physikalischen Rechnungen vorkommen.

Beispiel:
$$\frac{0,2346 \cdot 5,8 \cdot 97,14}{0,000196 \cdot 157,9 \cdot 391} \approx \frac{2 \cdot 10^{-1} \cdot 6 \cdot 10^1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^1}{2 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 10^{-1}} = \frac{3 \cdot 10^1}{32} \approx 10$$

(genaues Ergebnis 10,96).

Für den mit der logarithmischen Rechnung Vertrauten lassen sich Überschlagsrechnungen solcher Art entweder mit dem Rechenstabe oder mit einer handlichen vierstelligen Logarithmentafel besonders rasch erledigen.

FACH - UND FREMDWÖRTER

Abkürzungen: lat = lateinisch; gr = griechisch

Addition	addere (lat) = hinzufügen – Hinzufügung, Hinzuzählen oder Zusammenzählen. Davon das Tätigkeitswort: addieren!
Basis	basis (basis, gr) = Grundlage – hier: Grundzahl, die beim Potenzieren einer Zahl mit sich selbst multipliziert wird.
Dezimal	decem (lat) = zehn – hier: auf die Grundzahl 10 bezogen.
Differenz	differentia (lat) = Verschiedenheit – hier: Verbindung von Zahlen durch das Subtraktionszeichen; Ergebnis der Subtraktion.
Dividend	dividendum (lat) = zu Teilendes – Zahl, die geteilt wird.
Division	divisio (lat) = Verteilung – hier: Verbindung von Zahlen durch das Teilungs-(Divisions-)zeichen. Davon das Tätigkeitswort: dividieren!
Divisor	divisor (lat) = Verteiler – hier: Zahl, durch die eine andere geteilt wird.
Exponent	exponere (lat) = auseinandersetzen – hier: Zahl, die angibt, wie oft eine andere Zahl mit sich selbst zu multiplizieren ist.
Faktor	factor (lat) = eigentlich Macher – hier: jede der Zahlen, die miteinander multipliziert werden.
formal	formalis (lat) = an eine Form gebunden – nach bestimmter Regel vor sich gehend.
Minuend	minuendum (lat) = ein zu Verminderndes – hier: zu verminderte Zahl.
minus	minus (lat) = weniger – weniger.
Multiplikand	multiplicandum (lat) = ein zu Vervielfachendes – zu vervielfachende Zahl.
Multiplikator	multiplicator (lat) = Vervielfacher – Vervielfacher.
Multiplikation	multiplicatio (lat) = Vervielfachung. Davon das Tätigkeitswort: multiplizieren!
Multiplikativ	multiplicare (lat) = vervielfachen – Vervielfältigungszahl.
Potenz	potentia (lat) = Mächtigkeit – hier: Zahlen, die durch Multiplikation mit sich selbst entstehen.
plus	plus (lat) = mehr – mehr.
Produkt	producere (lat) = erzeugen – hier: Verbindung von Zahlen durch das Vervielfachungs-(Multiplikations-)zeichen, Ergebnis einer Multiplikation.

Quotient	quotiens (lat) = wie oft – Ergebnis der Division.
radizieren	radix (lat) = Wurzel – Wurzel ziehen.
reziprok	reciprocus (lat) = wechsel- oder gegenseitig – hier: Zahlen, die bei ihrer Multiplikation 1 ergeben.
Subtraktion	subtrahere (lat) = abziehen – das Abziehen. Davon das Tätigkeitswort: subtrahieren!
Subtrahend	subtrahendum (lat) = das Abzuziehende – Zahl, die abgezogen wird.
Summand	summare (lat) = hinzufügen – Zahl, die einer anderen zugezählt werden soll.
Summe	summa (lat) = das Höchste – Gesamtzahl, Ergebnis der Addition.

GLEICHZEITIG MIT DIESEM BANDE ERSCHEINEN

A	<i>Mathematik</i>	12521	Naturgesetz und funktionale Abhängigkeit
B	<i>Physik</i>	12511	Vom Wesen der Wärme
K	<i>Meteorologie</i>	12501	Das Wetter im Sprichwort
N	<i>Allgemeine Geographie</i> .	12524	Das Gradnetz der Erde
O	<i>Länder und Völker</i> . . .	12518	Die lebende Landkarte
		12509	Steinzeitvölker der Gegenwart

DEMNÄCHST WERDEN FERTIGGESTELLT

B	<i>Physik</i>	12527	Über die Energie
C	<i>Chemie</i>	12503	Die Sprache des Chemikers
D	<i>Allgemeine Biologie</i> . . .	12513	Lebensbündnisse in Tier- und Pflanzenreich
E	<i>Botanik</i>	12546	Frühlingsblüher des Auwaldes
F	<i>Zoologie</i>	12526	Verborgenes Leben
		12530	Gefiederte Freunde in Haus, Hof und Garten
G	<i>Der Mensch</i>	12504	Blut und Lymphe
H	<i>Astronomie</i>	12505	Botschaften aus dem Weltall
		12547	Sonnenflecken
J	<i>Geophysik</i>	12542	Wie alt ist die Erde?
L	<i>Geologie</i>	12535	Eine Sandgrube
N	<i>Allgemeine Geographie</i> .	12517	Die Wegeaufnahme
O	<i>Länder und Völker</i> . . .	12507	Das weiße Land
P	<i>Reisen und Forschungen</i> .	12548	Neun Monate auf treibender Eisscholle
Q	<i>Der junge Naturforscher</i> .	12519	Meine Steinsammlung

Die Zahlen zwischen Serie und Titel sind die Bestellnummern. Weitere noch in Vorbereitung befindliche Bände werden fortlaufend an dieser Stelle angezeigt

DIE GRUPPE II UMFASST FOLGENDE SERIEN:

x	x ²	x	x ²	x	x ²
10	100	40	1600	70	4900
11	121	41	1681	71	5041
12	144	42	1764	72	5184
13	169	43	1849	73	5329
14	196	44	1936	74	5476
15	225	45	2025	75	5625
16	256	46	2116	76	5776
17	289	47	2209	77	5929
18	324	48	2304	78	6084
19	361	49	2401	79	6241
20	400	50	2500	80	6400
21	441	51	2601	81	6561
22	484	52	2704	82	6724
23	529	53	2809	83	6889
24	576	54	2916	84	7056
25	625	55	3025	85	7225
26	676	56	3136	86	7396
27	729	57	3249	87	7569
28	784	58	3364	88	7744
29	841	59	3481	89	7921
30	900	60	3600	90	8100
31	961	61	3721	91	8281
32	1024	62	3844	92	8464
33	1089	63	3969	93	8649
34	1156	64	4096	94	8836
35	1225	65	4225	95	9025
36	1296	66	4356	96	9216
37	1369	67	4489	97	9409
38	1444	68	4624	98	9604
39	1521	69	4761	99	9801

Zahlen von 10 bis 99 (x) mit ihren Quadraten (x²)

A MATHEMATIK

B PHYSIK

C CHEMIE

D ALLGEMEINE BIOLOGIE

E BOTANIK

F ZOOLOGIE

G DER MENSCH

H ASTRONOMIE

I GEOPHYSIK

K METEOROLOGIE

L GEOLOGIE

M MINERALOGIE

N ALLGEMEINE GEOGRAPHIE

O LÄNDER UND VÖLKER

P REISEN UND FORSCHUNGEN

Q DER JUNGE NATURFORSCHER

R SCHÖNHEITEN U. SELTSAMKEITEN

S NOCH NICHT VERFÜGT

T NOCH NICHT VERFÜGT

U GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFT

GRUPPE I / DICHTUNG UND WAHRHEIT
 SCHRIFTFÜHRUNG: PROF. DR. W. HEISE

IN VORBEREITUNG:
GRUPPE III / TECHNIK UND VERSUCH