Horst Belkner

Reelle Vektorräume

1974 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
MSB: Nr. 84
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Bändchen der MSB gibt eine Einführung in die Anfangsgründe der Theorie der reellen Vektorräume. Reelle Vektorräume spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle.

Das Bändchen ist so angelegt, dass die ersten drei Kapitel (mit Ausnahme des Satzes 32) ohne besondere Vorkenntnisse erfolgreich durchgearbeitet werden können. Für die folgenden Kapitel werden beim Leser das Rechnen mit Absolutbeträgen und Ungleichungen und darüber hinaus einige Grundkenntnisse der Matrizen- und Determinantentheorie im Umfang der in der gleichen Reihe erschienenen beiden Bändchen "Matrizen" und "Determinanten" als bekannt vorausgesetzt.

Definitionen, Sätze, ausführlich durchgerechnete Beispiele und in den Text eingestreute Aufgaben sind jeweils fortlaufend nummeriert. Die Aufgaben dienen nicht nur der Festigung des vorher behandelten Stoffes, sondern sie ergänzen ihn auch. Das Lösen dieser Aufgaben ist daher vor dem jeweiligen Weiterlesen unbedingt erforderlich.

Herrn Prof. Dr. S. Brehmer möchte ich für Ratschläge danken, die er mir nach Durchsicht des Manuskripts gegeben hat. Gleichzeitig danke ich dem Verlag für die angenehme Zusammenarbeit.

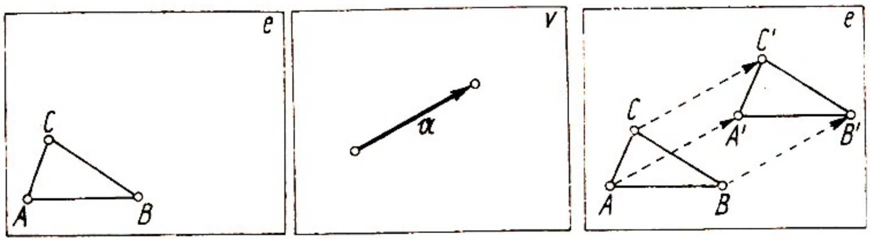
Potsdam, Frühjahr 1973 Horst Belkner

1 Verschiebungen

1.1 Begriffe

Als elementares geometrisches Gebilde betrachten wir den Punkt. Man kann Punkte oder allgemeiner Punktmengen (Figuren) in einer Ebene verschieben. Von dem Begriff der Verschiebung einer in einer Ebene e liegenden Figur (Fig. 1) kann man sich in der folgenden Weise ein geometrisches Bild schaffen.

Fig. 1-3



Wir wählen auf einem zweiten durchscheinenden Blatt v (Verschiebungsblatt) einen festen Punkt und einen von ihm ausgehenden Pfeil (Fig. 2). Wir vereinbaren, dass das Blatt v gegenüber der Ebene e zwar beliebig verschoben, aber nicht gedreht werden darf.
Nun bringen wir den festen Punkt der Ebene v der Reihe nach mit den Punkten A, B, C, ... der zu verschiebenden Figur zur Deckung und markieren die jeweils unter der Pfeilspitze liegenden Punkte A', B', C', ... als Bildpunkte (Fig. 3).

Diesen Prozess nennen wir eine Verschiebung der Figur in der Ebene e. Denken wir uns den für eine Figur geschilderten Verschiebungsprozess für jeden Punkt einer Ebene ausgeführt, so spricht man von einer Verschiebung der Ebene.

Jede Verschiebung einer Ebene kann durch einen bestimmten Pfeil unseres Verschiebungsblattes v charakterisiert werden. Wir bezeichnen Verschiebungen mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,...
Den Bildpunkt P', den wir erhalten, wenn wir die Verschiebung $\mathfrak{a}$ auf einen beliebig vorgegebenen Punkt P von e anwenden, bezeichnen wir mit $P + \mathfrak{a}$;

$$P' = P + \mathfrak{a}$$

Wird eine Verschiebung $\mathfrak{x}$ gesucht, die den Punkt P in den Punkt P' überführt, die also der Gleichung

$$P + \mathfrak{x} = P'$$

genügt, so legen wir wieder den festen Punkt unseres Verschiebungsblattes v auf P; der Endpunkt des gesuchten Pfeiles, also die Pfeilspitze, liegt dann über P'. Wir bezeichnen die so gefundene, eindeutig bestimmte Lösung mit $\mathfrak{x}$.

Die Hilfsebene v, die wir zur begrifflichen Klärung herangezogen haben, erweist sich beim Ausführen von Verschiebungen als überflüssig. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt einer Ebene und $P + \mathfrak{a} = P'$, so ist die Verschiebung $\mathfrak{a}$ durch den Pfeil $\overrightarrow{PP'}$, der eine gerichtete Strecke darstellt, vollständig charakterisiert.
Wir wollen jeden so erhaltenen Pfeil einen Repräsentanten der Verschiebung $\mathfrak{a}$ nennen. Repräsentanten ein- und derselben Verschiebung $\mathfrak{a}$ sind parallel, gleichlang und gleichgerichtet.

Es ist üblich, an jeden Repräsentanten einer Verschiebung $\mathfrak{a}$ den Buchstaben $\mathfrak{a}$ zu schreiben.

Man darf aber nicht die Verschiebung $\mathfrak{a}$ mit irgendeinem sie repräsentierenden Pfeil identifizieren. Dieser Pfeil liefert nur eine geometrische Veranschaulichung der Verschiebung.

Wenden wir auf einen Punkt P eine Verschiebung $\mathfrak{a}$ und auf den Bildpunkt $P+\mathfrak{a}$ eine Verschiebung $\mathfrak{b}$ an, so erhalten wir den Punkt

$$(P+\mathfrak{a})+\mathfrak{b}$$

Denselben Punkt erhalten wir (Fig. 4), wenn wir zuerst auf P die Verschiebung $\mathfrak{b}$ und anschließend auf den Bildpunkt $P+\mathfrak{b}$ die Verschiebung $\mathfrak{a}$ anwenden, d. h., es gilt stets

$$(P+\mathfrak{a})+\mathfrak{b}=(P+\mathfrak{b})+\mathfrak{a}$$

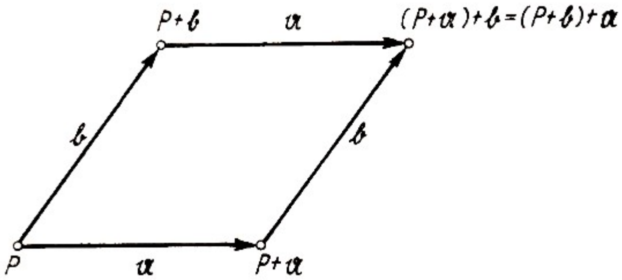


Fig. 4

Der Anschauung haben wir entnommen, dass Verschiebungen folgende Eigenschaften besitzen:

I. Eine Verschiebung $\mathfrak{a}$ ordnet jedem Punkt P einer Ebene genau einen Bildpunkt $P+\mathfrak{a}$ zu.

II. Sind P, Q Punkte einer Ebene, so gibt es genau eine Verschiebung $\mathfrak{x}$, die der Gleichung $P+\mathfrak{x}=Q$ genügt.

III. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Verschiebungen, so gilt für jeden Punkt P einer Ebene

$$(P+\mathfrak{a})+\mathfrak{b}=(P+\mathfrak{b})+\mathfrak{a}$$

Aus I, II, III ziehen wir einige Folgerungen.

Definition 1. Die auf Grund von II eindeutig bestimmte Verschiebung $\mathfrak{x}$, die der Gleichung $P+\mathfrak{x}=Q$ genügt, wird mit $\mathfrak{x}=Q-P$ bezeichnet.

Auf Grund von II und Definition 1 gilt der

Satz 1. Sind P, Q Punkte einer Ebene, so gilt stets

$$P+(Q-P)=Q$$

Satz 2. Aus einer Gleichung der Form

$$P+\mathfrak{a}=P+\mathfrak{b} \qquad \text{folgt stets} \qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{b}$$

Beweis. Die Voraussetzung dieses Satzes lässt sich in der Form

$$P+\mathfrak{a}=Q \quad , \quad P+\mathfrak{b}=Q$$

schreiben. Auf Grund von II folgt hieraus die Behauptung.

Definition 2. Die Verschiebung, die jeden Punkt P einer Ebene in Ruhe lässt, wird mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Sie genügt den Gleichungen

$$P+\mathfrak{o}=P \quad , \quad P-P=\mathfrak{o} \tag{1}$$

und heißt identische Verschiebung.

1.2 Addition von Verschiebungen

Satz 3. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Verschiebungen, so gibt es genau eine Verschiebung $\mathfrak{c}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Punkte P einer Ebene

$$P + \mathfrak{c} = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Es sei P_0 ein fester Punkt einer Ebene. Der Punkt P_0' sei durch

$$P_0' = (P_0 + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} \tag{2}$$

definiert (Fig. 5).

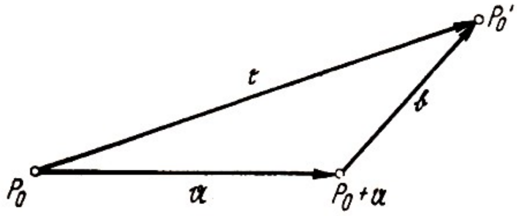


Fig. 5

Die Verschiebung, die den Punkt P_0 unmittelbar in den Punkt P_0' überführt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{c}$ (Fig. 5). Dann gilt

$$P_0' = P + \mathfrak{c} \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) ist

$$P_0 + \mathfrak{c} = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} \tag{4}$$

Wir zeigen, dass die Verschiebung $\mathfrak{c}$, die der Gleichung (4) genügt, auch für alle Punkte P der Gleichung (1) genügt. Es sei P ein beliebiger Punkt. Die Verschiebung, die den Punkt P_0 in den Punkt P überführt, nennen wir $\mathfrak{d}$. Dann gilt

$$P = P_0 + \mathfrak{d} \tag{5}$$

Hieraus folgt

$$P + \mathfrak{c} = (P_0 + \mathfrak{d}) + \mathfrak{c}$$

Berücksichtigen wir III, so gilt

$$P + \mathfrak{c} = (P_0 + \mathfrak{c}) + \mathfrak{d}$$

Machen wir von (4) Gebrauch, so erhalten wir

$$P + \mathfrak{c} = [(P_0 + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}] + \mathfrak{d}$$

Zweimalige Anwendung von III liefert

$$P + \mathfrak{c} = [(P_0 + \mathfrak{a}) + \mathfrak{d}] + \mathfrak{b} = [(P_0 + \mathfrak{d}) + \mathfrak{a}] + \mathfrak{b}$$

Mit Hilfe von (5) geht die letzte Gleichung in (1) über. Damit haben wir gezeigt, dass die durch (4) definierte Verschiebung $\mathfrak{c}$ auch der Gleichung (1) genügt.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass es neben der Verschiebung $\mathfrak{c}$ keine weitere Verschiebung mit dieser Eigenschaft gibt. Dazu nehmen wir an, dass auch die Verschiebung $\mathfrak{c}'$ diese Eigenschaft besitzt. Dann gelten die beiden Gleichungen

$$P + \mathfrak{c} = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} \qquad , \qquad P + \mathfrak{c}' = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}$$

woraus $P + \mathfrak{c} = P + \mathfrak{c}'$ folgt. Auf Grund von Satz 2 ergibt sich hieraus $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$, d.h., es gibt nur eine Verschiebung $\mathfrak{c}$ mit der Eigenschaft (1), womit der Satz bewiesen ist.
Das Ergebnis von Satz 3 führt zur

Definition 3. Die nach Satz 3 zu vorgegebenen Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ existierende und eindeutig bestimmte Verschiebung $\mathfrak{c}$, die der Gleichung (1) genügt, wird mit $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnet. Sie heißt die Summe der Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

In Fig. 6 ist die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ der beiden Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ veranschaulicht.

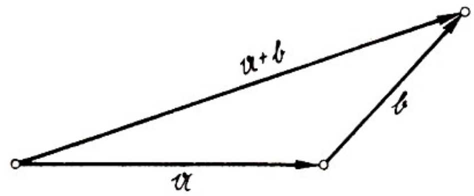


Fig. 6

Wegen Satz 3 und Definition 3 gilt für alle Punkte P einer Ebene die Gleichung

$$P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} \tag{6}$$

die mit

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = [(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}] - P \tag{7}$$

äquivalent ist.

Satz 4. Für die Addition von Verschiebungen gilt das Kommutativgesetz

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{8}$$

Beweis. Auf Grund von (6) gilt

$$P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}$$

Berücksichtigen wir III, so erhalten wir

$$P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (P + \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \tag{9}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich wegen (6) in der Form $P + (\mathfrak{b} + \mathfrak{a})$ schreiben. Damit geht (9) über in

$$P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = P + (\mathfrak{b} + \mathfrak{a})$$

Machen wir von Satz 2 Gebrauch, so erhalten wir die Behauptung (8), womit der Satz bewiesen ist.

Satz 5. Für die Addition von Verschiebungen gilt das Assoziativgesetz

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \tag{10}$$

Beweis. Auf Grund von (6) gilt

$$P + [\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})] = (P + \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

Dreimalige Anwendung von (6) liefert der Reihe nach

$$P + [\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})] = [(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}] + \mathfrak{c} = [P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})] + \mathfrak{c} = P + [(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}]$$

Machen wir von Satz 2 Gebrauch, so erhalten wir die Behauptung (10), womit der Satz bewiesen ist.

Der Satz 5 besagt, dass die beiden Verschiebungen $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ gleich sind. Es kommt also nicht darauf an, auf welche der beiden möglichen Arten man die drei Summanden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch Klammern zusammenfasst, so dass man diese weglassen kann.

Dasselbe gilt analog auch für eine beliebige endliche Anzahl von Verschiebungen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$. Auf den Beweis durch vollständige Induktion wollen wir verzichten.
Für die in Definition 2, Seite 10, eingeführte identische Verschiebung gilt der

Satz 6. Alle Verschiebungen $\mathfrak{a}$ genügen der Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} \tag{11}$$

Beweis. Wegen (7) gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = [(P + \mathfrak{a} + \mathfrak{o}] - P$$

Machen wir von III Gebrauch, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = [(P + \mathfrak{o}) + \mathfrak{a}] - P$$

Berücksichtigen wir 1.1. (1) so gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = (P + \mathfrak{a}) - P \tag{12}$$

Da $(P + \mathfrak{a}) - P = \mathfrak{a}$ ist, geht (12) über in (11), womit der Satz bewiesen ist.

1.3 Subtraktion von Verschiebungen

Wir untersuchen, ob die Addition von Verschiebungen eine umkehrbare Operation ist, d. h., ob die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{1}$$

bei vorgegebenen Verschiebungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ immer eine Verschiebung $\mathfrak{x}$ als Lösung besitzt. Diese Frage beantwortet der

Satz 7. Zu zwei beliebig vorgegebenen Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ existiert genau eine Verschiebung $\mathfrak{x}$, die der Gleichung (1) genügt.

Beweis. Es sei P_0 ein fester Punkt einer Ebene. Die Punkte A und B seien durch

$$A = P_0 + \mathfrak{a} \quad , \quad B = P_0 + \mathfrak{b} \tag{2}$$

definiert (Fig. 7). Die Verschiebung, die den Punkt A in den Punkt B überführt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}$ (Fig. 7).

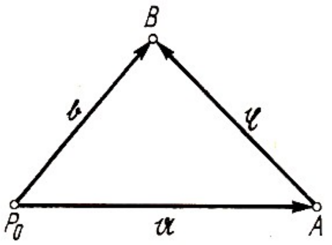


Fig. 7

Dann gilt
$$A + \mathfrak{x} = B \tag{3}$$
Berücksichtigen wir (2), so geht (3) über in
$$(P_0 + \mathfrak{a}) + \mathfrak{x} = P_0 + \mathfrak{b}$$
Diese Gleichung geht wegen 1.2. (6) über in
$$P_0 + (\mathfrak{a} + \mathfrak{x}) = P_0 + \mathfrak{b}$$
Die Anwendung von Satz 2, Seite 9, liefert $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$. Damit haben wir gezeigt, dass die Gleichung (1) eine Lösung $\mathfrak{x}$ besitzt.

Wir müssen noch beweisen, dass es neben der Verschiebung $\mathfrak{x}$ keine weitere Verschiebung mit dieser Eigenschaft gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch $\mathfrak{y}$ eine Lösung von (1). Dann gelten die beiden Gleichungen
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{y} = \mathfrak{b}$$
woraus
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{y} \tag{4}$$
folge. Auf Grund von 1.2. (6) gilt
$$(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{x} = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{x})$$
für alle Punkte P. Berücksichtigen wir (4), so folgt
$$(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{x} = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{y}) \tag{5}$$
Nochmalige Anwendung von 1.2. (6) auf die rechte Seite von (5) liefert
$$(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{x} = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{y}$$
Mit Hilfe von Satz 2, Seite 9, folgt hieraus $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, d.h., es gibt nur eine Lösung der Gleichung (1), womit der Satz bewiesen ist.
Dieser Satz rechtfertigt die

Definition 4. Die nach Satz 7 existierende und eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$.
Sie heißt die Differenz der Verschiebungen $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}$.

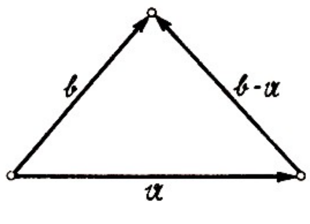


Fig. 8

In Fig. 8 ist die Differenz $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ der Verschiebungen $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}$ veranschaulicht.
Wir fassen Fig. 6 und Fig. 8 zur Fig. 9 zusammen.

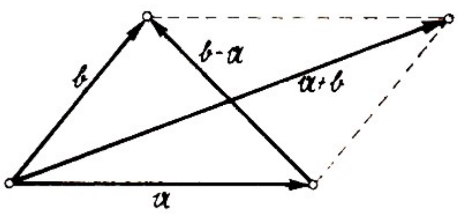


Fig. 9

Aus Fig. 9 entnehmen wir, dass Summe und Differenz zweier Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch die beiden Diagonalen des von den Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms repräsentiert werden.

Die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ besitzt auf Grund von Satz 7 die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}-\mathfrak{a}$, d.h., es ist

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{o} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{o} \tag{6}$$

Für alle Punkte P gilt wegen 1.2. (6) und 1.1. (1)

$$(P + \mathfrak{a}) + (\mathfrak{o} - \mathfrak{a}) = P + [\mathfrak{a} + (\mathfrak{o} - \mathfrak{a})] = P + \mathfrak{o} = P$$

Dieses Ergebnis besagt: Wenden wir auf einen Punkt P die Verschiebung $\mathfrak{a}$ und anschließend auf den Bildpunkt $P + \mathfrak{a}$ die Verschiebung $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}$ an, so erhalten wir den Ausgangspunkt P. Die Verschiebung $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}$ macht also die Verschiebung $\mathfrak{a}$ rückgängig.
Die Verschiebung $\mathfrak{o}-\mathfrak{a}$ heißt daher die zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzte Verschiebung. Sie wird abkürzend mit $-\mathfrak{a}$ bezeichnet. Für alle Verschiebungen $\mathfrak{a}$ gilt demnach

$$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o} \tag{7}$$

Die Fig. 10-13 veranschaulichen die Regeln

$$-(-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \tag{8}$$
$$\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \tag{9}$$
$$-(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \tag{10}$$
$$-(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = -\mathfrak{a} - \mathfrak{b} \tag{11}$$

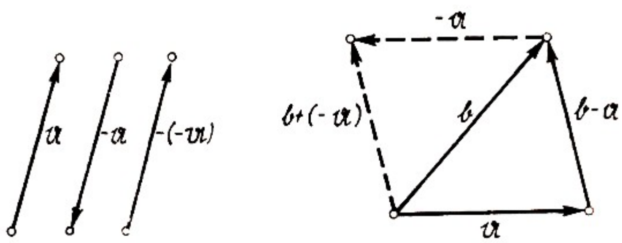


Fig. 10,11

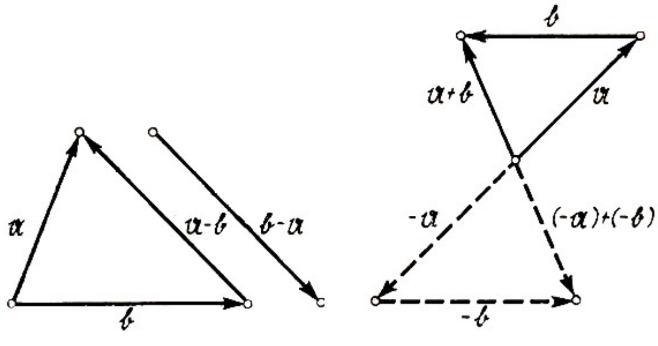


Fig. 12,13

für das Rechnen mit entgegengesetzten Verschiebungen. Diese Regeln werden wir in Satz 20 ohne anschauliche Hilfsmittel beweisen. Die Beziehung (9) liefert ein neues Verfahren für die Konstruktion der Differenz $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$.
Man addiert zur Verschiebung $\mathfrak{b}$ die Verschiebung $-\mathfrak{a}$. Statt $P + (-\mathfrak{a})$ schreiben wir auch kürzer $P - \mathfrak{a}$.

1.4 Ortsverschiebung

Wählen wir einen festen Punkt O einer Ebene e als Ursprung, so können wir jedem Punkt P dieser Ebene die Verschiebung $\mathfrak{r} = P - O$ zuordnen.
Wir bezeichnen diese Verschiebung als Ortsverschiebung des Punktes P. Ist eine Verschiebung $\mathfrak{r}$ vorgegeben, so können wir sie im Ursprung O antragen, und wir erhalten den durch $\mathfrak{r}$ und O eindeutig bestimmten Punkt $P = O + \mathfrak{r}$. Die Verschiebung $\mathfrak{r}$ ist dann die Ortsverschiebung dieses Punktes.

Wir leiten eine wichtige Regel für das Rechnen mit Ortsverschiebungen her. Es sei

$$P' = P + \mathfrak{a}$$

Die Ortsverschiebungen der Punkte P, P' seien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ (Fig. 14).

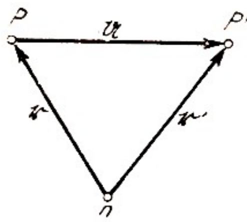


Fig. 14

Dann gilt

$$O + \mathfrak{r} = P' = P + \mathfrak{a} = (O + \mathfrak{r}) + \mathfrak{a} = O + (\mathfrak{r} + \mathfrak{a})$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von Satz 2 die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$$

Stellen wir den beiden Gleichungen

$$P + \mathfrak{a} = P' \qquad , \qquad P' - P = \mathfrak{a}$$

die Gleichungen

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{a} = \mathfrak{r}' \qquad , \qquad \mathfrak{r}' - \mathfrak{r} = \mathfrak{a}$$

gegenüber, so erhalten wir den Satz 8. Gleichungen, in denen Punkte und Verschiebungen auftreten, bleiben richtig, wenn alle auftretenden Punkte durch ihre Ortsverschiebung bezüglich eines beliebig gewählten Ursprungs ersetzt werden.

1.5 Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl

Ist $\mathfrak{a}$ eine Verschiebung und m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so heißt die Summe

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + ... + \mathfrak{a}$$

in der $\mathfrak{a}$ als Summand m-fach auftritt, das m-fache von $\mathfrak{a}$, in Zeichen $m\mathfrak{a}$. Ist $m = 1$, so setzen wir

$$1\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \tag{1}$$

Sind m, n beliebige natürliche Zahlen, so gelten offensichtlich die Beziehungen

$$(mn)\mathfrak{a} = m(n\mathfrak{a}) \tag{2}$$
$$(m+n)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a} \tag{3}$$
$$m(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} \tag{4}$$

Wir überzeugen uns von der Richtigkeit von (4): Es ist

$$m(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \underbrace{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + \ldots + (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}_{m} = \underbrace{(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a})}_{m} + \underbrace{(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}+\ldots+\mathfrak{b})}_{m}$$
$$= m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b}$$

Die Erklärung des Vielfachen einer Verschiebung $\mathfrak{a}$ dehnen wir auf reelle Zahlen λ aus. Es seien $\mathfrak{a}$ eine von der identischen Verschiebung $\mathfrak{o}$ verschiedene Verschiebung und O ein beliebig gewählter Punkt. Mit Hilfe von

$$A = O + \mathfrak{a}$$

definieren wir den Punkt A, der wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ vom Punkt O verschieden ist. Auf der Geraden OA wählen wir den Punkt O als Nullpunkt, den Punkt A als Einheitspunkt (Fig. 15).

Fig. 15

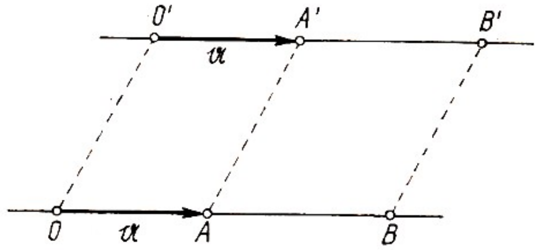

Ist B ein beliebiger Punkt der Geraden OA, so bilden die parallelen Pfeile $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OA}$ ein bestimmtes Streckenverhältnis

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \lambda \tag{5}$$

Die reelle Zahl λ in (5) ist positiv genau dann, wenn die Pfeile $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ gleichgerichtet bzw. negativ genau dann, wenn die Pfeile $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ entgegengesetzt gerichtet sind.
Der Punkt B bestimmt eindeutig die reelle Zahl λ in (5), und umgekehrt bestimmt jede reelle Zahl λ eindeutig den Punkt B der Geraden OA, für den (5) erfüllt ist. Durch die Verschiebung $\mathfrak{a}$ und die reelle Zahl λ wird somit auch die Verschiebung

$$\mathfrak{b} = B - O$$

festgelegt, die, wie Fig. 16 zeigt, nicht von der Wahl O des Nullpunkts abhängt.

Fig. 16


Diese anschaulichen Überlegungen führen zur

Definition 5. Sind $\mathfrak{a} = A - O \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} = B - O$ Verschiebungen und λ eine reelle Zahl, so geht die Verschiebung $\mathfrak{b}$ aus der Verschiebung $\mathfrak{a}$ durch Multiplikation mit der reellen Zahl λ hervor, in Zeichen $\mathfrak{b} = A\mathfrak{a}$, genau dann, wenn die Pfeile $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ parallel sind und (5) erfüllt ist.
Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, so setzen wir $\lambda\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ für alle reellen Zahlen λ.

Auf Grund dieser Definition ist (5) äquivalent mit

$$B - O = \lambda(A - O)$$

Zwei Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ heißen parallel genau dann, wenn eine der beiden Verschiebungen durch Multiplikation mit einer reellen Zahl aus der anderen hervorgeht.

Aus der Fig. 17 entnehmen wir die Beziehung

$$(-1)\mathfrak{a} = -\mathfrak{a} \tag{6}$$

die wir in Satz 21c ohne anschauliche Hilfsmittel beweisen werden.

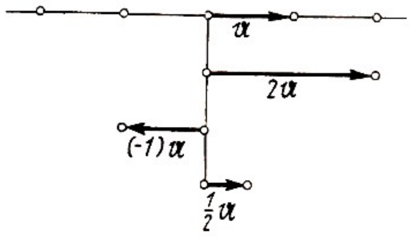


Fig. 17

Satz 9. Für alle Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und für alle reellen Zahlen $\lambda; \mu$ gilt

$$a) 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \tag{7}$$
$$b) (\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a}) \tag{8}$$
$$c) (\lambda+\mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a} \tag{9}$$
$$d) \lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b} \tag{10}$$

Beweis. Offensichtlich gelten (8), (9), (10), falls eine der reellen Zahlen λ, μ gleich null bzw. eine der Verschiebungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gleich der identischen Verschiebung ist. Diesen Fall werden wir beim weiteren Beweis von (8), (9), (10) ausschließen.
Beim Beweis dieser drei Regeln setzen wir das Rechnen mit Streckenverhältnissen und den Strahlensatz mit seinen Umkehrungen als bekannt voraus.

a) Die Beziehung (7) ergibt sich unmittelbar aus der Definition 5 bzw. aus (1).

b) In Fig. 18 gelte

$$Q - P = \mathfrak{a}, \qquad \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\overrightarrow{PQ}} = \mu, \qquad \frac{\overrightarrow{P''Q''}}{\overrightarrow{P'Q'}} = \lambda$$

Damit ist

$$Q' - P' = \mu(Q - P) = \mu\mathfrak{a} \quad , \quad Q'' - P'' = \lambda(Q' - P') = \lambda(\mu\mathfrak{a}) \tag{11}$$

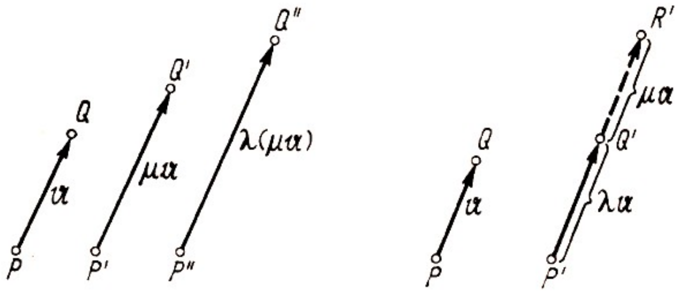


Fig. 18,19

Ferner ist

$$\frac{\overrightarrow{P''Q''}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{P''Q''}}{\overrightarrow{P'Q'}} \cdot \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\overrightarrow{PQ}} = \lambda\mu$$

Dies bedeutet

$$Q'' - P'' = (\lambda\mu)\mathfrak{a} \tag{12}$$

Vergleich von (12) mit (11) liefert die Behauptung (8).

c) In Fig. 19 gelte

$$Q - P = \mathfrak{a}, \qquad \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\overrightarrow{PQ}} = \lambda, \qquad \frac{\overrightarrow{Q'R'}}{\overrightarrow{PQ}} = \mu$$

Dann ist

$$Q' - P' = \lambda(Q - P) = \lambda\mathfrak{a} \quad , \quad R' - Q' = \mu(Q - P) = \mu\mathfrak{a}$$

Weiter ist

$$R' - P' = (Q' - P') + (R' - Q') = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a} \quad \text{und} \tag{13}$$

$$\frac{\overrightarrow{P'R'}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{Q'R'}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\overrightarrow{PQ}} + \frac{\overrightarrow{Q'R'}}{\overrightarrow{PQ}} = \lambda + \mu$$

Dies bedeutet

$$R' - P' = (\lambda + \mu) + (Q - P) = (\lambda + \mu)\mathfrak{a} \tag{14}$$

Vergleich von (14) mit (13) liefert die Behauptung (9).

d) Fall 1. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien parallel. Dann geht eine der Verschiebungen aus der anderen durch Multiplikation mit einer reellen Zahl hervor. Es gelte etwa $\mathfrak{b} = \mu\mathfrak{a}$. Dann können wir mit Hilfe von (1), (8) und (9) folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) &= \lambda(\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}) = \lambda(1\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}) = [\lambda(1 + \mu)]\mathfrak{a} = (\lambda + \lambda\mu)\mathfrak{a} \\ &= \lambda\mathfrak{a} + (\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \lambda(\mu\mathfrak{a}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}\end{aligned}$$

Fall 2. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien nicht parallel. Es sei P ein beliebiger Punkt. Die Punkte Q, R seien durch

$$Q = P + \mathfrak{a} \quad , \quad R = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \tag{15,16}$$

definiert, wobei sich (16) mit Hilfe von (15) auch in der Form

$$R = (P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} = Q + \mathfrak{b} \tag{17}$$

schreiben lässt. Die Punkte Q', R' definieren wir durch

$$\frac{\overrightarrow{PQ'}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{PR}} = \lambda \tag{18}$$

Wegen (18), (15) und (16) gilt

$$Q' - P = \lambda(Q - P) = \lambda\mathfrak{a} \quad , \quad R' - P = \lambda(R - P) = \lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \tag{19,20}$$

Die Punkte P, Q, Q' bzw. P, R, R' liegen auf je einem Strahl eines Büschels, das von den Geraden QR, $Q'R'$ geschnitten wird (Fig. 20).

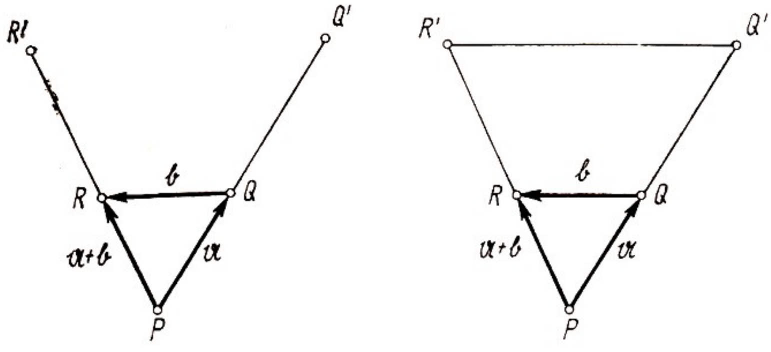


Fig. 20,21

Da sich wegen (18) die Abschnitte des einen Strahls wie die gleichliegenden Abschnitte des anderen Strahls verhalten, sind die beiden Geraden QR, $Q'R'$ parallel. Die Fig. 20 geht demnach über in Fig. 21.

Werden zwei Strahlen eines Büschels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der Parallelen wie die zugehörigen Abschnitte auf den Strahlen. In unserem Fall gilt also

$$\frac{\overrightarrow{Q'R'}}{\overrightarrow{QR}} = \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\overrightarrow{PQ}} \tag{21}$$

Berücksichtigen wir (18), so geht (21) über in

$$\frac{\overrightarrow{Q'R'}}{\overrightarrow{QR}} = \lambda$$

Dann ist

$$R' - Q' = \lambda(R - Q)$$

Wegen (17) erhalten wir

$$R' - Q' = \lambda b \tag{2}$$

Da

$$R' - P = (Q' - P) + (R' - Q') \tag{23}$$

gilt, folgt durch Einsetzen von (20), (19) und (22) in (23) die Behauptung (10).

Durch vollständige Induktion lassen sich die Verallgemeinerungen von (9) und (10) beweisen (Aufgabe 6, Aufgabe 7):

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{a} + ... + \lambda_k\mathfrak{a} \tag{24}$$

$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_k) = \lambda\mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2 + ... + \lambda\mathfrak{a}_k \tag{25}$$

1.6 Beispiele

Beispiel 1. Ist M der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ und sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{m}$ die Ortsverschiebungen der Punkte A, B, M, so gilt

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

Aus der Fig. 22 lesen wir die Gleichung

$$M = A + \frac{1}{2}(B - A)$$

ab. Auf Grund des Satzes 8 können wir zur Gleichung

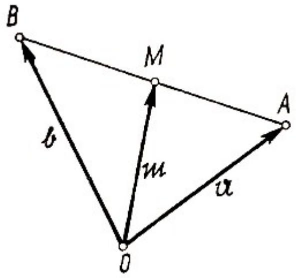
$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$$

übergehen. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{a} + \frac{1}{2}[\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a})] = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}[\mathfrak{b} + (-1)\mathfrak{a}] = \mathfrak{a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[(-1)\mathfrak{a}] \\ &= 1\mathfrak{a} + \frac{1}{2}b + \left[\frac{1}{2}\cdot(-1)\right]\mathfrak{a} = (1 - \frac{1}{2})\mathfrak{a} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\mathfrak{a} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

wobei wir bei diesem einführenden Beispiel die Rechnungen schrittweise ausgeführt haben. In den folgenden Beispielen werden wir entsprechende Rechnungen wesentlich abkürzen.

Beispiel 2. Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks $ABCD$ bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.



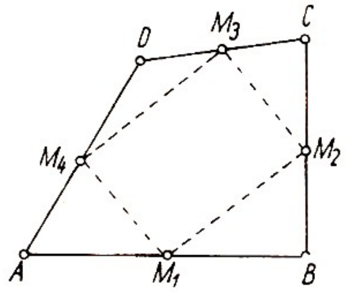


Fig. 22,23

Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Seiten haben nach Beispiel I die Ortsverschiebungen

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), \qquad \mathfrak{m}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \qquad \mathfrak{m}_3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}), \qquad \mathfrak{m}_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})$$

In Fig. 23 sind der Ursprung und die Ortsverschiebungen der Punkte bewusst weggelassen worden. Auf diese Weise entlasten wir die Zeichnung von überflüssigen Hilfslinien. Wir berechnen die Verschiebungen

$$M_2 - M_1 \qquad \text{und} \qquad M_3 - M_4$$

Es ist

$$M_2 - M_1 = \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) \tag{1}$$

$$M_3 - M_4 = \mathfrak{m}_3 - \mathfrak{m}_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{a}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}-\mathfrak{d}-\mathfrak{a}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) \tag{2}$$

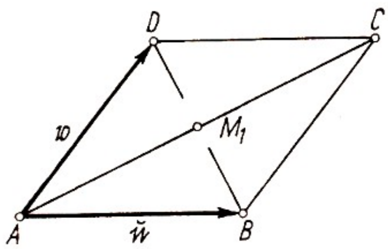
Vergleich von (1) mit (2) liefert

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_4 \tag{3}$$

Da die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 nicht in einer Geraden liegen, besagt (3), dass die Gegenseiten $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$ des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ parallel, gleichlang und gleichgerichtet sind. Das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ist ein Parallelogramm.

Beispiel 3. Ein Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm genau dann, wenn die Diagonalen einander halbieren.

Beweis a) Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ die Verschiebung $B - A$ bzw. $D - A$, mit M_1 den Mittelpunkt der Diagonale $\overrightarrow{AC}$ (Fig. 24) und mit M_2 den Mittelpunkt der Diagonale $\overrightarrow{BD}$ (Fig. 25).



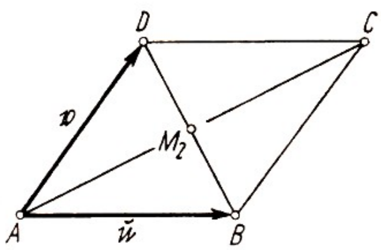


Fig. 24,25

Es ist

$$M_1 = A + \frac{1}{2}(C - A) = A + \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v})$$

und

$$M_2 = B + \frac{1}{2}(D - B) = (A + \mathfrak{u}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{u}) = A + (\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\mathfrak{v} - \frac{1}{2}u) = A + \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = M_1$$

d.h., die Mittelpunkte der beiden Diagonalen sind identisch. Damit ist gezeigt, dass die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren.

b) Es sei $ABCD$ ein Viereck, in dem die Diagonalen einander im Punkt M halbieren (Fig. 26). Mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{m}$ bezeichnen wir die Ortsverschiebungen der Punkte A, B, C, D, M.

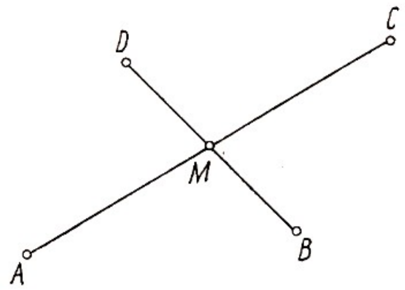


Fig. 26

Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{m} = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{d}) \tag{4,5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{d}) \qquad \text{und hieraus} \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{d} \tag{6}$$

Wir berechnen die Verschiebungen

$$B - A \qquad \text{und} \qquad C - D$$

Es ist

$$B - A = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \qquad , \qquad C - D = \mathfrak{c} - \mathfrak{d} \tag{7}$$

Wegen (7) und (6) gilt

$$B - A = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{d} = C - D \tag{8}$$

Da die Punkte A, B, C, D nicht in einer Geraden liegen, besagt (8), dass die Gegenseiten $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ des Vierecks $ABCD$ parallel, gleichlang und gleichgerichtet sind. Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 1. Man beweise, dass die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese ist.

Aufgabe 2. Man beweise, dass in einem Trapez die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten halb so lang ist wie die Summe der parallelen Seiten.

Aufgabe 3. Unter einer Spiegelung eines Punktes P an einem Punkt A versteht man die Vorschrift, die dem Punkt P als Bildpunkt den Punkt $P' = A + (A - P)$ zuordnet.

Es seien A, B, C drei beliebige, nach Wahl aber feste Punkte einer Ebene e und P ein beliebiger Punkt von e. Spiegelt man P an A, anschließend den so erhaltenen Bildpunkt P' an B und schließlich den auf diese Weise erhaltenen und mit P'' bezeichneten Bildpunkt an C, so erhält man den mit P''' bezeichneten Bildpunkt.

a) Man beweise durch Rechnung, dass sich P unmittelbar durch eine einzige Spiegelung an einem mit D bezeichneten Punkt in den Punkt P''' überführen lässt, indem man den zu bestimmenden Punkt D mit Hilfe der bekannten Punkte A, B, C darstellt.
b) Man beweise, dass $D - A = C - B$ ist.

2 n-gliedrige Zahlenfolgen

2.1 Begriffe

Ein Schema der Form

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \tag{1}$$

wobei $a_1, a_2, ..., a_n$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, wollen wir n-gliedrige horizontale Zahlenfolge nennen. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ in (1) heißen Glieder der Zahlenfolge (1).
Eine horizontale Zahlenfolge besitzt keinen Zahlenwert, sie ist lediglich ein geordnetes Schema von reellen Zahlen. Wir bezeichnen horizontale Zahlenfolgen mit kleinen deutschen Buchstaben und schreiben

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \tag{2}$$

Da eine horizontale Zahlenfolge ein geordnetes Schema von reellen Zahlen ist, liegt folgende Definition nahe.

Definition 6. Zwei n-gliedrige horizontale Zahlenfolgen

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

sind gleich, in Zeichen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, genau dann, wenn

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n \qquad \text{ist.}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir definieren, wie man mit n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen rechnet.

2.2 Addition von n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen

Definition 7. Sind

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

n-gliedrige horizontale Zahlenfolgen, so versteht man unter $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die n-gliedrige horizontale Zahlenfolge

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

Beispiel 4. Sind

$$\mathfrak{a} = (1,2,3,4), \mathfrak{b} = (5,1,-2,0), \qquad \text{so ist} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (6,3,1,4)$$

Satz 10. Für die Addition n-gliedriger horizontaler Zahlenfolgen gilt das Kommutativgesetz

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

Beweis. Wegen der Kommutativität der Addition reeller Zahlen können wir in der n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolge

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

die Glieder

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n \qquad \text{durch} \qquad b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n$$

ersetzen. Wir erhalten

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

Satz 11. Für die Addition n-gliedriger, horizontaler Zahlenfolgen gilt das Assoziativgesetz

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$$

Beweis. Wegen der Assoziativität der Addition reeller Zahlen können wir in der n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolge

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n) \\ &= (a_1 + [b_1 + c_1], a_2 + [b_2 + c_2], ..., a_n + [b_n + c_n]) \end{aligned}$$

die Glieder

$$a_1+[b_1+c_1], a_2+[b_2+c_2], ..., a_n+[b_n+c_n] \quad \text{durch} \quad [a_1+b_1]+c_1, [a_2+b_2]+c_2, ..., [a_n+b_n]+c_n$$

ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= ([a_1 + b_1] + c_1, [a_2 + b_2] + c_2, ..., [a_n + b_n] + c_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) + (c_1, c_2, ..., c_n) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Der Satz 11 besagt, dass die beiden n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$gleich sind. Es kommt also nicht darauf an, auf welche der beiden möglichen Arten man die drei Summanden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch Klammern zusammenfasst, so dass man diese weglassen kann.

Dasselbe gilt analog auch für eine beliebige endliche Anzahl von n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$. Auf den Beweis durch vollständige Induktion wollen wir wieder verzichten.

Beispiel 5. Es seien

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}2{,}0), \mathfrak{a}_2 = (0, 1{,}2), \mathfrak{a}_3 = (1{,}1{,}0), \mathfrak{a}_4 = (1{,}2, 1)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4 &= [(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + \mathfrak{a}_3] + \mathfrak{a}_4 = [(1{,}3{,}2) + (1{,}1{,}0)] + (1{,}2{,}1) \\ &= (2{,}4{,}2) + (1{,}2{,}1) = (3{,}6{,}3) \end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{a}$ eine n-gliedrige horizontale Zahlenfolge und m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so heißt die Summe

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + ... + \mathfrak{a}$$

in der $\mathfrak{a}$ als Summand m-fach auftritt, das m-fache von $\mathfrak{a}$, in Zeichen $m\mathfrak{a}$. Offensichtlich ist dann

$$m(a_1, a_2, ..., a_n) = (ma_1, ma_2, ..., ma_n) \tag{1}$$

2.3 Subtraktion von n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen

Wir untersuchen, ob die Addition von n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen eine umkehrbare Operation ist, d. h., ob die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{1}$$

bei vorgegebenen n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ immer eine n-gliedrige horizontale Zahlenfolge $\mathfrak{x}$ als Lösung besitzt. Diese Frage beantwortet der

Satz 12. Zu zwei beliebig vorgegebenen n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ existiert genau eine n-gliedrige horizontale Zahlenfolge $\mathfrak{x}$, die der Gleichung (1) genügt.

Beweis. Es seien

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

zwei beliebig vorgegebene n-gliedrige horizontale Zahlenfolgen. Wir zeigen, dass die n-gliedrige horizontale Zahlenfolge

$$\mathfrak{x} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) \tag{2}$$

eine Lösung von (1) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} + \mathfrak{x} &= (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1 a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) \\ &= (a_1 + b_1 - a_1, a_2 + b_2 - a_2, ..., a_n + b_n - a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n) = \mathfrak{b} \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz einer Lösung von (1) nachgewiesen. Wir müssen noch beweisen, dass es neben der Lösung

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2}$$

von (1) keine weitere Lösung gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch die n-gliedrige horizontale Zahlenfolge

$$\mathfrak{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

eine Lösung von (1). Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \qquad , \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{y} = \mathfrak{b}$$

woraus $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{y}$ folgt. Die letzte Gleichung ist wegen Definition 7 äquivalent mit

$$(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n) = (a_1 + y_1, a_2 + y_2, ..., a_n + y_n)$$

Auf Grund von Definition 6 ist dies äquivalent mit

$$a_1 + x_1 = a_1 + y_1, a_2 + x_2 = a_2 + y_2, ..., a_n + x_n = a_n + y_n$$

Hieraus folgt

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$$

Das ist aber auf Grund von Definition 6 gleichbedeutend mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Demnach gibt es nur eine Lösung der Gleichung (1), womit der Satz bewiesen ist.
Dieser Satz rechtfertigt die

Definition 8. Die nach Satz 12 existierende und eindeutig bestimmte Lösung (2) der Gleichung (1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$.
Sie heißt die Differenz der n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$.

Auf Grund von Definition 8 gilt somit

$$(b_1,b_2, ..., b_n) - (a_1,a_2,...,a_n) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ...,b_n - a_n) \tag{3}$$

Die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$$

besitzt auf Grund von Satz 12 und (3) die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = (a_1 - a_1,a_2 - a_2,...,a_n - a_n) = (0,0,...,0)$$

für alle n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}$. Diese Zahlenfolge bezeichnen wir abkürzend mit $\mathfrak{o}$. Sie heißt die n-gliedrige horizontale Nullfolge. Demnach ist

$$\mathfrak{o} = (0,0,..,0) \tag{4}$$

und alle n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}$ genügen der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$. (5)
Die Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ besitzt auf Grund von Satz 12 und (3) die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{o} - \mathfrak{a} = (0 - a_1, 0 - a_2, ..., 0 - a_n) = (-a_1, - a_2,..., - a_n)$$

Diese n-gliedrige horizontale Zahlenfolge bezeichnen wir abkürzend mit $-\mathfrak{a}$. Sie heißt die zu a entgegengesetzte n-gliedrige horizontale Zahlenfolge. Für alle n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}$ gilt demnach

$$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o} \qquad \text{wobei} \qquad - \mathfrak{a} = (-a_1, - a_2,..., - a_n) \tag{6,7}$$

ist.
Für das Rechnen mit entgegengesetzten n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen gelten ebenfalls die Regeln 1.3. (8)-(11). Den Beweis werden wir in Satz 20 führen.

2.4 Multiplikation einer n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolge mit einer reellen Zahl

In Anlehnung an 2.2. (1) definieren wir:

Definition 9. Ist $\mathfrak{a}$ eine n-gliedrige horizontale Zahlenfolge und λ eine reelle Zahl, so versteht man unter $\lambda\mathfrak{a}$ die n-gliedrige horizontale Zahlenfolge, die man erhält, wenn man jedes Glied von $\mathfrak{a}$ mit λ multipliziert.

Auf Grund von Definition 9 gilt also

$$\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1,\lambda a_2, ..., \lambda a_n) \tag{1}$$

Beispiel 6. Es sei $\mathfrak{a} = (2, 4, 8, 6)$. Dann ist $\frac{1}{2}\mathfrak{a} = (1,2,4, 3)$.

Wegen $(-1)a_i = -a_i$ gilt auf Grund von 2.3. (7) für alle n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}$ die Beziehung

$$(-1)\mathfrak{a} = -\mathfrak{a} \tag{2}$$

Satz 13. Für alle n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und für alle reellen Zahlen λ, μ gilt

$$a) 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \tag{3}$$
$$b) (\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a}) \tag{4}$$
$$c) (\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a} \tag{5}$$
$$d) \lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b} \tag{6}$$

Beweis. a) Die Beziehung (3) ergibt sich wegen $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ unmittelbar aus (1).

b) Wegen der Assoziativität der Multiplikation reeller Zahlen gilt

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)\mathfrak{a} &= ([\lambda\mu]a_1, [\lambda\mu]a_2, ..., [\lambda\mu]a_n) = (\lambda[\mu a_1], \lambda[\mu a_2], ..., \lambda[\mu a_n])\\ &= \lambda(\mu a_1, \mu a_2, ..., \mu a_n) = \lambda(\mu\mathfrak{a})\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\mathfrak{a} &= ([\lambda + \mu]a_1, [\lambda + \mu]a_2, ..., [\lambda + \mu]a_n)\\ &= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, ..., \lambda a_n + \mu a_n)\\ &= (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n) + (\mu a_1, \mu a_2, ..., \mu a_n) = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) &= \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)\\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, ..., \lambda a_n + \lambda b_n)\\ &= (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n) + (\lambda b_1, \lambda b_2, ..., \lambda b_n) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion lassen sich die Verallgemeinerungen von (5) und (6) beweisen (Aufgabe 6, Aufgabe 7):

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{a} + ... + \lambda_k\mathfrak{a} \tag{7}$$
$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_k) = \lambda\mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2 + ... + \lambda\mathfrak{a}_k \tag{8}$$

Aufgabe 4. Es seien
$\mathfrak{a} = (6{,}5, 4{,}3)$, $\mathfrak{b} = (2, 2{,}0, -2)$, $\mathfrak{c} = (2{,}2, 0{,}4)$.
a) Man berechne $2\mathfrak{a} - 3\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$
b) Man löse die Gleichung $4\mathfrak{a} - 5\mathfrak{x} + \mathfrak{b} = 3\mathfrak{c} - 3\mathfrak{x}$.

2.5 n-gliedrige vertikale Zahlenfolgen

In Analogie zu 2.1. verstehen wir unter

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei $a_1, a_2, ..., a_n$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, eine n-gliedrige vertikale Zahlenfolge. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ in (1) heißen Glieder der Zahlenfolge (1). Wir bezeichnen vertikale Zahlenfolgen ebenfalls mit kleinen deutschen Buchstaben und schreiben

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Definitionen 6, 7 und 9 übertragen wir sinngemäß auf n-gliedrige vertikale Zahlenfolgen:

Definition 10. Zwei n-gliedrige vertikale Zahlenfolgen

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sind gleich, in Zeichen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, genau dann, wenn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$ ist.

Definition 11. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei n-gliedrige vertikale Zahlenfolgen, so versteht man unter $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die n-gliedrige vertikale Zahlenfolge

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

Definition 12. Ist $\mathfrak{a}$ eine n-gliedrige vertikale Zahlenfolge und λ eine reelle Zahl, so versteht man unter $\lambda\mathfrak{a}$ die n-gliedrige vertikale Zahlenfolge, die man erhält, wenn man jedes Glied von $\mathfrak{a}$ mit λ multipliziert.

Für diese Zahlenfolgen gelten auch die in 2.2., 2.3. und 2.4. formulierten Sätze, wobei die dort geführten Beweise unverändert übernommen werden können.

Aufgabe 5. Es seien

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Man berechne $3\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \frac{1}{3}\mathfrak{c}$.
b) Man löse die Gleichung $2\mathfrak{a} + 2\mathfrak{x} + 3\mathfrak{b} = 3\mathfrak{x} + \mathfrak{c}$.

3 Reelle Vektorräume

3.1 Begriff des reellen Vektorraumes

Im folgenden verstehen wir unter V_2 die Menge aller Verschiebungen einer Ebene und unter $M_{1,n}$ die Menge aller n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen mit festem n. Zur Vorbereitung der folgenden Definition stellen wir einige der für Verschiebungen und für n-gliedrige horizontale Zahlenfolgen gefundenen Ergebnisse zusammen:

A 1. In V_2 bzw. $M_{1,n}$ ist eine als Addition geschriebene Verknüpfung definiert, die je zwei Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ eindeutig ein Element $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ zuordnet.

A 2. Es gilt stets $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$

A 3. Zu zwei beliebig vorgegebenen Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ existiert ein Element $\mathfrak{x}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$.[1]

A 4. Es gilt stets $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

B 1: In V_2 bzw. $M_{1,n}$ ist eine Verknüpfung mit reellen Zahlen definiert, die jeder reellen Zahl λ und jedem Element $\mathfrak{a}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ eindeutig ein Element $\lambda\mathfrak{a}$ von V_2 bzw. $M_{1,n}$ zuordnet.

B 2. Es gilt stets $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

B 3. Es gilt stets $(\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a})$.

B 4. Es gilt stets $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$.

B 5. Es gilt stets $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$.

Die Eigenschaften A1-A4 und B1-B5 charakterisieren eine wichtige algebraische Struktur, die als reeller Vektorraum bezeichnet wird. Die Elemente eines reellen Vektorraums heißen Vektoren.

Definition 13. Es sei V eine nichtleere Menge mit den Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, ...$ und es gelte:

A 1. In V ist eine als Addition geschriebene Verknüpfung definiert, die je zwei Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von V eindeutig ein Element $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ von V zuordnet.

A 2. Es gilt stets $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$.

A 3. Zu zwei beliebig vorgegebenen Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von V existiert ein Element $\mathfrak{x}$ von V, das der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ genügt.

A 4. Es gilt stets $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

B 1. In V ist eine Verknüpfung mit reellen Zahlen definiert, die jeder reellen Zahl λ und jedem Element $\mathfrak{a}$ von V eindeutig ein Element $\lambda\mathfrak{a}$ von V zuordnet.

B 2. Es gilt stets $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

B 3. Es gilt stets $(\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a})$.

B 4. Es gilt stets $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$

B 5. Es gilt stets $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$.

Dann heißt V in Verbindung mit den Eigenschaften A1-A4 und B1-B5 reeller Vektorraum und

[1] Es wird in A 3 nur die Existenz einer Lösung von $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ aufgeführt, also weniger als in Satz 7 bzw. in Satz 12 bewiesen wurde.

die Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, ... heißen Vektoren. Reelle Vektorräume bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$.

Auf Grund von Definition 13 gelten die folgenden Sätze:

Satz 14. Die Menge V_2 aller Verschiebungen einer Ebene ist mit den durch Definition 3 und Definition 5 eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum, den wir mit $\mathfrak{B}_2$ bezeichnen.

An Stelle von Ortsverschiebung des Punktes P können wir wegen Satz 14 nun die übliche Bezeichnung Ortsvektor des Punktes P setzen.

Satz 15. Die Menge $M_{1,n}$ aller n-gliedrigen horizontalen Zahlenfolgen ist mit den durch Definition 7 und Definition 9 eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum, den wir mit $\mathfrak{M}_{1,n}$ bezeichnen.

Satz 16. Die Menge $M_{n,1}$ aller n-gliedrigen vertikalen Zahlenfolgen ist mit den durch Definition 11 und Definition 12 eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum, den wir mit $\mathfrak{M}_{n,1}$ bezeichnen.

Für die Elemente von $\mathfrak{N}_{1,n}$ bzw. von $\mathfrak{M}_{n_1}$ führen wir die Bezeichnung n-gliedriger Zeilenvektor bzw. n-gliedriger Spaltenvektor ein. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ in $\mathfrak{a}$ heißen auch die Koordinaten des Zeilen- bzw. des Spaltenvektors. Der Zeilenvektor

$$\mathfrak{o} = (0,0, ..., 0)$$

bzw. der Spaltenvektor

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

heißt Nullvektor.
Eingliedrige Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, das sind Vektoren der Form

$$\mathfrak{a} = (a)$$

kann man mit den reellen Zahlen a identifizieren, denn die für Zeilen- bzw. Spaltenvektoren definierten Verknüpfungen

$$(a) + (b) = (a + b) \qquad , \qquad \lambda(a) = (\lambda a)$$

stimmen in diesem Sonderfall mit der für reelle Zahlen erklärten Addition und Multiplikation überein. Damit gilt der

Satz 17. Die Menge aller reellen Zahlen ist mit der für diese Zahlen erklärten Addition und Multiplikation ein reeller Vektorraum, den wir mit Δ bezeichnen.

3.2 Einige Folgerungen aus den Vektorraumeigenschaften

In diesem Abschnitt werden wir einige Folgerungen aus den Vektorraumeigenschaften ziehen. Dieses Vorgehen hat den Vorzug, dass die so gewonnenen Aussagen nicht auf einen konkreten reellen Vektorraum beschränkt sind, wie dies in 1. und 2. der Fall ist.

Satz 18. In einem reellen Vektorraum $\mathfrak{B}$ gibt es genau einen Vektor $\mathfrak{x}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \tag{1}$$

für alle $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_0$ ein fester Vektor von $\mathfrak{V}$. Dann besitzt die Gleichung

$$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_0 \tag{2}$$

auf Grund von A 3 eine Lösung $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{V}$. Wir müssen zeigen, dass dieser Vektor $\mathfrak{x}$ auch für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ der Gleichung (1) genügt.
Wegen A 3 hat für den speziell gewählten Vektor $\mathfrak{a}_0$ und jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ die Gleichung

$$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{y} = \mathfrak{a} \tag{3}$$

eine Lösung $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{V}$. Berücksichtigen wir (3), so gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{y}) + \mathfrak{x}$$

Indem wir von A 2 und anschließend von A 4 Gebrauch machen, erhalten wir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_0 + (\mathfrak{y} + \mathfrak{x}) = a_0 + (\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$$

Nochmalige Anwendung von A 2 liefert

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{x}) + \mathfrak{y} \tag{4}$$

Berücksichtigen wir (2), so geht (4) über in

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{y} \tag{5}$$

Die rechte Seite von (5) kann wegen (3) durch $\mathfrak{a}$ ersetzt werden. Damit erhalten wir schließlich

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$$

womit gezeigt ist, dass der Vektor $\mathfrak{x}$ der eine Lösung von (2) ist, auch für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ der Gleichung (1) genügt.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass es neben $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{V}$ keinen weiteren Vektor von $\mathfrak{x}'$ mit dieser Eigenschaft gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch $\mathfrak{x}'$ ein Vektor von $\mathfrak{V}$ mit dieser Eigenschaft. Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \qquad , \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{x}' = \mathfrak{a} \tag{6}$$

für alle $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$, insbesondere also auch für $\mathfrak{a} = \mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{a} = \mathfrak{x}'$.
Ersetzen wir $\mathfrak{a}$ in der ersten Gleichung von (6) durch $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{a}$ in der zweiten Gleichung durch $\mathfrak{x}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{x}' + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \qquad , \qquad \mathfrak{x} + \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}$$

Da die linken Seiten dieser beiden Gleichungen wegen A 4 übereinstimmen, ist $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}$. Demnach gibt es nur einen Vektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{V}$ mit der Eigenschaft (1) für alle $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$.
Der Beweis zeigt überdies, dass man diesen Vektor berechnen kann, indem man für irgendeinen festen Vektor $\mathfrak{a}_0$ von $\mathfrak{V}$ die Gleichung (2) löst.
Das Ergebnis von Satz 18 führt zur

Definition 14. Der in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ existierende und eindeutig bestimmte Vektor $\mathfrak{x}$ mit der Eigenschaft (1) für alle $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ wird mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ bezeichnet. Er heißt der Nullvektor des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$.

Für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ gilt demnach

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} \tag{7}$$

Satz 19. In einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist die auf Grund von A 3 existierende Lösung $\mathfrak{x}$ der Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{8}$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir müssen noch zeigen, dass es neben der Lösung $\mathfrak{x}$ keine weitere Lösung von (8) gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch $\mathfrak{y}$ eine Lösung von (8). Dann gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{y} \tag{9}$$

Auf Grund von A 3 gibt es einen Vektor $\mathfrak{z}$, der der Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{z} = \mathfrak{o} \tag{10}$$

genügt. Wegen (7) ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \mathfrak{o}$$

Berücksichtigen wir (10), so erhalten wir

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{z})$$

Indem wir von A 2 und anschließend von A 4 Gebrauch machen, gilt

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x} + \mathfrak{a}) + \mathfrak{z} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{x}) + \mathfrak{z}$$

Wegen (9) geht diese Gleichung über in

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{y} + \mathfrak{a}) + \mathfrak{z} = \mathfrak{y} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{z})$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt wegen (10) und (7) mit $\mathfrak{y}$ überein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Das Ergebnis dieses Satzes führt in Verbindung mit A 3 zur

Definition 15. Die in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ existierende und eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}$ der Gleichung (8) bezeichnen wir mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$. Sie heißt die Differenz der Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}$.

Die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{o} \tag{11}$$

besitzt auf Grund von Satz 19 die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$. Dieses Ergebnis führt zur

Definition 16. Die in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ existierende und eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$ der Gleichung (11) bezeichnen wir mit $-\mathfrak{a}$. Der Vektor $-\mathfrak{a}$ heißt der zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzte Vektor.

Für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ gilt demnach

$$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o} \tag{12}$$

Wir beweisen

Satz 20. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ gilt
a) $-(-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, (13)
b) $\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, (14)
c) $-(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, (15)
d) $-(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$. (16)

Beweis.
a) Auf Grund der Definition 16 ist der Vektor $-(-\mathfrak{a})$ die Lösung der Gleichung $(-\mathfrak{a}) + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$. (17)
Die Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass der Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ ebenfalls die Gleichung (17) löst. Berücksichtigen wir A 4 und (12), so erhalten wir

$$(-\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$$

b) Da $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ auf Grund von Definition 15 die Lösung der Gleichung (8) ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass auch $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + (-\mathfrak{a})$ der Gleichung (8) genügt. Es gilt

$$\mathfrak{a} + [\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a})] = \mathfrak{a} + [(-\mathfrak{a}) + \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a})] + \mathfrak{b} = \mathfrak{o} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{o} = \mathfrak{b}$$

Dabei haben wir der Reihe nach von A 4, A 2, (12), A 4 und (7) Gebrauch gemacht.

c) Wir zeigen, dass der Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ löst. Es gilt

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) &= -[\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})] + [\mathfrak{b} + (-\mathfrak{a})] = (\mathfrak{a} + [(-\mathfrak{b} + \mathfrak{b}]) + (-\mathfrak{a}) \\ &= (\mathfrak{a} + \mathfrak{o}) + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}\end{aligned}$$

d) Wir zeigen, dass $\mathfrak{x} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ löst. Es gilt

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + (-\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) &= (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + [(-\mathfrak{a}) + (-\mathfrak{b})] = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + [(-\mathfrak{b}) + (-\mathfrak{a})] \\ &= (\mathfrak{a} + [\mathfrak{b} + (-\mathfrak{b})]) + (-\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{o}) + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}\end{aligned}$$

Satz 21. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ und und alle reellen Zahlen λ gilt
a) $0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ (18)
b) $\lambda\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ (19)
c) $(-1)\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}$ (20)

Beweis
a) Berücksichtigen wir B 2, B 4 und nochmals B 2, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} + 0\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} + 0\mathfrak{a} = (1 + 0)\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Hieraus folgt die Behauptung (18), denn aus einer Gleichung der Form $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ folgt stets $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.

b) Es ist

$$\lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{o} = \lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{o}) = \lambda\mathfrak{a}$$

Dabei haben wir der Reihe nach von B 5 und (7) Gebrauch gemacht. Aus der letzten Gleichung folgt die Behauptung (19).

c) Es ist

$$\mathfrak{a} + (-1)\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} + (-1)\mathfrak{a} = [1 + (-1)]\mathfrak{a} = 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \tag{21}$$

Dabei haben wir der Reihe nach von B 2, B 4 und (18) Gebrauch gemacht. Da die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ die eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x} = -\mathfrak{a}$ besitzt, folgt aus (21) die Behauptung (20).

Aufgabe 6. Man beweise durch vollständige Induktion nach k, dass in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{B}$ für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{B}$ und für alle reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ gilt

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{a} + ... + \lambda_k\mathfrak{a} \tag{22}$$

Aufgabe 7. Man beweise durch vollständige Induktion nach k, dass in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{R}$ für alle Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_k$ von $\mathfrak{B}$ und für alle reellen Zahlen λ gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_k) = \lambda\mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2 + ... + \lambda\mathfrak{a}_k \tag{23}$$

In den folgenden Abschnitten führen wir einige fundamentale Begriffe aus der Theorie der reellen Vektorräume ein.

3.3 Linearkombination

Definition 17. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$. Der Vektor $\mathfrak{b}$ ist Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ genau dann, wenn es reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_k$ derart gibt, dass

$$\mathfrak{b} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k$$

ist.

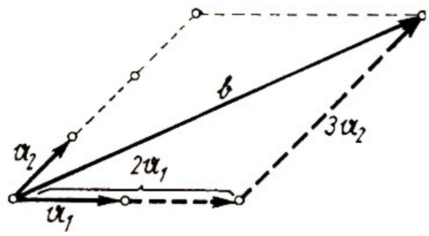


Fig. 27

Wie wir aus Fig. 27 entnehmen, ist beispielsweise der Vektor $\mathfrak{b}$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{B}_2$ da

$$\mathfrak{b} = 2\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_2 \qquad \text{ist.}$$

Beispiel 7. Wir untersuchen, ob der Vektor

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{4,1}$ eine Linearkombination der Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{M}_{4,1}$ ist.
Dazu machen wir den Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b} \tag{1}$$

Durch Einsetzen der Vektoren in (1) erhalten wir

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\5\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\\8\end{pmatrix} \tag{2}$$

Berücksichtigen wir die Definition 12 und anschließend Definition 11, so ist (2) äquivalent mit

$$\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\3x_1+4x_2+5x_3\\5x_1+6x_2+7x_3\\7x_1+8x_2+x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\\8\end{pmatrix} \tag{3}$$

Auf Grund von Definition 10 ist die Vektorgleichung (3) äquivalent mit

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&=3\\3x_1+4x_2+5x_3&=6\\5x_1+6x_2+7x_3&=9\\7x_1+8x_2+x_3&=8\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir untersuchen, ob das Gleichungssystem (4) lösbar ist. Für Leser, die nicht mit dem im Bändchen "Matrizen" hergeleiteten Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme vertraut sind, wollen wir dieses Verfahren ohne Beweis erläutern.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieses System wird schrittweise so in äquivalente Systeme überführt, bis man schließlich ein System erhält, aus dem man, falls das System (5) lösbar ist, alle Lösungen mühelos ablesen kann.
Dabei heißen zwei Gleichungssysteme der Form (5) in den gleichen Variablen äquivalent genau dann, wenn sie entweder beide lösbar sind und die gleichen Lösungen besitzen oder beide nicht lösbar sind. Die folgenden drei Regeln ermöglichen es, aus (5) ein äquivalentes System herzuleiten:

I. Zwei Gleichungen von (5) werden miteinander vertauscht.
II. Beide Seiten einer Gleichung von (5) werden mit derselben von null verschiedenen reellen Zahl multipliziert.
III. Beide Seiten einer Gleichung von (5) werden mit derselben reellen Zahl multipliziert und die Ergebnisse zu den entsprechenden Seiten einer anderen Gleichung von (5) addiert.

Zur Erläuterung wenden wir das Verfahren auf das Gleichungssystem (4) an. Zunächst eliminieren wir aus der zweiten, dritten und vierten Gleichung die Variable x_1, während wir die erste

Gleichung unverändert lassen. Dazu multiplizieren wir zuerst beide Seiten der ersten Gleichung mit -3 und addieren das Ergebnis zu den entsprechenden Seiten der zweiten Gleichung. Wir erhalten das zu (4) äquivalente System

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_2 - 4x_3 &= -3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

In den folgenden Schritten sind Faktoren zur Multiplikation der beiden Seiten einer Gleichung jeweils am Rande angegeben. Die ebenfalls angebrachten Pfeile führen zu der Gleichung, die durch eine andere ersetzt werden soll:

$$\begin{array}{rl|cccc}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 & -5 & | & -7 & | \\
-2x_2 - 4x_3 & = -3 & & | & & | \\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 & = 9 & 1 & \downarrow & & | \\
7x_1 + 8x_2 + x_3 & = 8 & & & 1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 & & & & \\
-2x_2 - 4x_3 & = -3 & -2 & | & -3 & | \\
-4x_2 - 8x_3 & = -6 & 1 & \downarrow & & | \\
-6x_2 - 20x_3 & = -13 & & & 1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 & & & & \\
-2x_2 - 4x_3 & = -3 & -1 & & & \\
0 & = 0 & 1 & & & \\
-8x_3 & = -4 & & & -1 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 8x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Mit (6) haben wir ein zu (4) äquivalentes System erhalten, aus dem wir ablesen, dass das System (6) und damit auch das Ausgangssystem (4) eindeutig lösbar ist. Demnach lässt sich der Vektor $\mathfrak{b}$ auf genau eine Weise als Linearkombination der drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ darstellen.

Soll der Vektor $\mathfrak{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ dargestellt werden, so müssen wir das System (6) lösen. Aus der dritten Gleichung von (6) folgt

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung von (6) ein, so folgt

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Aus der ersten Gleichung von (6) erhalten wir schließlich

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

Somit ist

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (4) und damit auch von (1), und es gilt

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}_3$$

Beispiel 8. Wir untersuchen, ob der Vektor

$$\mathfrak{b} = (2{,}3, 5)$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ eine Linearkombination der Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}2{,}3), \qquad \mathfrak{a}_2 = (3, 4{,}1)$$

von $\mathfrak{M}_{1,3}$ ist.
Dazu machen wir den Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} \tag{7}$$

bzw.

$$x_1(1, 2{,}3) + x_2(3, 4, 1) = (2, 3{,}5) \tag{8}$$

Machen wir von den Definitionen 9, 7 und 6 Gebrauch, so erhalten wir das zu (8) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Auf das System (9) wenden wir das Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme an. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rl|cccc}
x_1 + 3x_2 & = 2 & 2 & | & 3 & | \\
2x_1 + 4x_2 & = -3 & -1 & \downarrow & & | \\
3x_1 + x_2 & = 5 & & & -1 & \downarrow \\ \hline
x_1 + 3x_2 & = 2 & & & & \\
2x_2 & = 1 & 4 & | & & \\
8x_2 & = 1 & -1 & \downarrow & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In dem System (10) tritt die falsche Aussage $0 = 3$ auf. Dieses Ergebnis ist folgendermaßen zu interpretieren:
Wenn wir unsere Umformungen beginnen, dann nehmen wir an, dass das Gleichungssystem (9) eine Lösung besitzt. Ist dies der Fall, so können wir diese Lösung in das System einsetzen, und alle Gleichungen des Systems und die hieraus hergeleiteten Gleichungen sind erfüllt.

Enthält aber eine der hergeleiteten Gleichungen einen Widerspruch, so muss unsere Annahme, es existiere eine Lösung des Systems (9), falsch gewesen sein. Das Gleichungssystem (9) ist nicht lösbar, d. h., der Vektor $\mathfrak{b}$ ist keine Linearkombination der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$.

Aufgabe 8. Man untersuche, ob der Vektor

$$\mathfrak{b} = (1{,}1{,}1{,}1)$$

des reellen Vektorraumes $M_{1,4}$ eine Linearkombination der Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}2{,}3{,}4), \quad \mathfrak{a}_2 = (2{,}3,4,1), \quad \mathfrak{a}_3 = (3{,}4{,}1{,}2), \quad \mathfrak{a}_4 = (4{,}1{,}2{,}3)$$

von $\mathfrak{M}_{1,4}$ ist und stelle gegebenenfalls $\mathfrak{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ dar.

Mit Hilfe der Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \mathfrak{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{m,1}$ lässt sich das lineare Gleichungssystem (5) auf Grund der Definitionen 12, 11 und 10 in der Form

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \tag{11}$$

schreiben. Umgekehrt entspricht der Vektorgleichung (11) das lineare Gleichungssystem (5). Dies besagt:

Satz 22. Das lineare Gleichungssystem (5) ist lösbar genau dann, wenn der Vektor $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n$ ist.

Definition 18. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ sind parallel, in Zeichen $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$, genau dann, wenn einer der beiden Vektoren eine Linearkombination des anderen ist.

3.4 Lineare Abhängigkeit. Lineare Unabhängigkeit

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{o}$ der Nullvektor von $\mathfrak{V}$. Dann besitzt die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2 a\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \tag{1}$$

wegen Satz 21 a und 3.2. (7) stets die Lösung

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_k = 0 \tag{2}$$

Die Lösung (2) heißt die triviale Lösung von (1). Besitzt (1) neben (2) noch eine weitere Lösung, in der nicht alle $x_i = 0$ sind, so heißt diese Lösung eine nichttriviale Lösung von (1).

Definition 19. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ sind linear abhängig genau dann, wenn die Vektorgleichung (1) eine nichttriviale Lösung besitzt. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht linear abhängig sind.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar der

Satz 23. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung (1) nur die triviale Lösung (2) besitzt.

Wie wir aus Fig. 28 entnehmen, sind beispielsweise die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$ linear abhängig, da

$$2\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_2 + (-2)\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

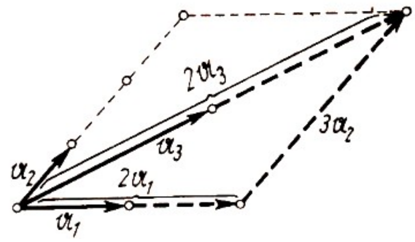


Fig. 28

ist, also die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2 \qquad \text{besitzt.}$$

Beispiel 9. Wir untersuchen, ob die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1,2,3), \qquad \mathfrak{a}_2 = (3,4,1), \qquad \mathfrak{a}_3 = (2,3,5)$$

des reellen Vektorraumes $M_{1,3}$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Aus dem Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

bzw. aus

$$x_1(1,2,3) + x_2(3,4,1) + x_3(2,3,5) = (0,0,0) \tag{3}$$

lesen wir das zu (3) äquivalente homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ab. Wir untersuchen, ob das System (4) neben der Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \tag{5}$$

die die triviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (4) heißt, noch eine weitere Lösung besitzt.

$$\begin{array}{rl|cccc}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 & 2 & | & 3 & | \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 0 & -1 & \downarrow & & | \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 & = 0 & & & -1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 & & & & \\
2x_2 + x_3 & = 0 & 4 & | & & \\
8x_2 + x_3 & = 0 & -1 & \downarrow & & \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 & & & & \\
2x_2 + x_3 & = 0 & & & & \\
3x_3 & = 0 & & & &
\end{array}$$

Das Gleichungssystem (6) besitzt nur die triviale Lösung (5). Demnach besitzt auch das System (4) und damit auch die Vektorgleichung (3) nur die triviale Lösung (5). Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind linear unabhängig.

Beispiel 10. Wir untersuchen, ob die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

des reellen Vektorraumes $M_{4,1}$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.
Aus dem Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 + x_4\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{o} \tag{7}$$

lesen wir das zu (7) äquivalente homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ab. Auf das System (8) wenden wir das Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme an. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rl|cccccc}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = 0 & 3 & | & 5 & | & 7 & | \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = 0 & -1 & \downarrow & & | & & | \\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 & = 0 & & & -1 & \downarrow & & | \\
7x_1 + 8x_2 + x_3 + 8x_4 & = 0 & & & & & -1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = 0 & & & & & & \\
2x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 0 & 2 & | & 3 & | & & \\
4x_2 + 8x_3 + 6x_4 & = 0 & -1 & \downarrow & & | & & \\
6x_2 + 20x_3 + 13x_4 & = 0 & & & -1 & \downarrow & &
\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 8x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Lassen wir in dem System (9) die triviale Gleichung $0 = 0$ weg, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 8x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Das System (10) besitzt unendlich viele Lösungen. Es ist nicht unser Ziel, alle Lösungen von (10) zu bestimmen. Wir ermitteln lediglich eine nichttriviale Lösung von (10). Setzen wir beispielsweise $x_4 = -2$, so geht (10) über in

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 8x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Dieses System besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, also ist

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = -2$$

eine nichttriviale Lösung von (7). Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ sind linear abhängig.

Aufgabe 9. Man untersuche, ob die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1,1,1), \quad \mathfrak{a}_2 = (1,2,3), \quad \mathfrak{a}_3 = (1,3,5)$$

des reellen Vektorraumes $M_{1,3}$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Die folgende Aufgabe kann, falls der Inhalt der Bändchen "Matrizen" und "Determinanten" nicht bekannt ist, überschlagen werden, da sie für das Verständnis des Folgenden nicht erforderlich ist.

Aufgabe 10. Es seien a, b beliebige reelle Zahlen. Man beweise, dass die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (a,b,b), \quad \mathfrak{a}_2 = (b,a,b), \quad \mathfrak{a}_3 = (b,b,a)$$

des reellen Vektorraumes $M_{1,3}$ linear abhängig sind genau dann, wenn $a = b$ oder $a = -2b$ ist.

Satz 24. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind parallel genau dann, wenn sie linear abhängig sind.

Beweis.
a) Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien parallel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Vektor $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination des Vektors $\mathfrak{a}$ ist. Dann gibt es eine reelle Zahl λ derart, dass $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$ gilt. Aus dieser Gleichung folgt

$$\lambda\mathfrak{a} + (-1)\mathfrak{b} = \mathfrak{o} \tag{11}$$

Die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} = \mathfrak{o} \tag{12}$$

besitzt wegen (11) eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = \lambda \quad , \quad x_2 = -1$$

da $x_2 \neq 0$ ist. Dies bedeutet, dass die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ linear abhängig sind.

b) Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien linear abhängig. Dann besitzt die Vektorgleichung (12) eine nichttriviale Lösung x_1, x_2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_2 \neq 0$. Aus (12) folgt dann

$$\mathfrak{b} = \left(-\frac{x_1}{x_2}\right)\mathfrak{a}$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination des Vektors $\mathfrak{a}$ ist, d. h., die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind parallel.
Dieser Satz ist logisch äquivalent mit

Satz 25. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind nicht parallel genau dann, wenn sie linear unabhängig sind.

Beispiel, 11. Mit Hilfe des Begriffs der linearen Unabhängigkeit beweisen wir, dass die Diagonalen eines Parallelogramms $ABCD$ einander halbieren.

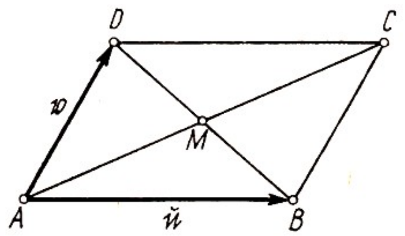


Fig. 29

Verstehen wir unter $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ die Vektoren $B - A$, $D - A$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$, die das Parallelogramm $ABCD$ aufspannen (Fig. 29), so gilt

$$\mathfrak{u} + (M - B) + (A - M) = \mathfrak{o} \tag{13}$$

Bedeuten λ, μ u reelle Zahlen, so ist

$$M - B = \lambda(\mathfrak{v} - \mathfrak{u}) \qquad \text{bzw.} \tag{13a}$$

$$M - A = \mu(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) \qquad , \qquad A - M = -\mu(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) \tag{13b}$$

Mit Hilfe von (13a) und (13b) geht (13) über in

$$\mathfrak{u}u + \lambda(\mathfrak{v} - \mathfrak{u}) - \mu(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = \mathfrak{o}$$

Die linke Seite dieser Vektorgleichung ordnen wir nach $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$:

$$(1 - \lambda - \mu)\mathfrak{u} + (\lambda - \mu)\mathfrak{v} = \mathfrak{o} \tag{14}$$

Da nach Voraussetzung die Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ ein Parallelogramm aufspannen, also nicht parallel und damit auf Grund von Satz 25 linear unabhängig sind, besitzt die Vektorgleichung (14) nur die triviale Lösung

$$1 - \lambda - \mu = 0 \qquad , \qquad \lambda - \mu = 0 \tag{15}$$

d.h., es gilt:

$$\lambda + \mu = 1, \quad \lambda - \mu = 0 \qquad \to \qquad 2\mu = 1$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \mu = \frac{1}{2}$$

Damit ist

$$M - A = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = \frac{1}{2}(C - A) \qquad , \qquad M - B = \frac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{u}) = \frac{1}{2}(D - B)$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 26. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Wenn einer der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ der Nullvektor von $\mathfrak{V}$ ist, so sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$. Auf Grund von Satz 21 b gilt $1\mathfrak{a}_i = 1\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ und wegen Satz 21 a und 3.2. (7) ist somit

$$0\mathfrak{a}_1 + ... + 0\mathfrak{a}_{i-1} + 1\mathfrak{a}_i + 0\mathfrak{a}_{i+1} + ... + 0\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \tag{16}$$

Die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_{i-1}\mathfrak{a}_{i-1} + x_i\mathfrak{a}_i + x_{i+1}\mathfrak{a}_{i+1} + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

besitzt wegen (16) eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = 0, ..., x_{i-1} = 0, x_i = 1, x_{i+1} = 0, ..., x_k = 0$$

da $x_i \neq 0$ ist. Demnach sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig, womit der Satz bewiesen ist.

Durch Kontraposition erhalten wir den zu Satz 26 logisch äquivalenten

Satz 27. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$. Wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängig sind, so ist keiner der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ der Nullvektor von $\mathfrak{B}$.

Ferner gilt der

Satz 28. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ sind linear abhängig genau dann, wenn ein Vektor $\mathfrak{a}_i$ dieser Vektoren eine Linearkombination der restlichen $k-1$ Vektoren $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, ..., \mathfrak{a}_k$ ist.

Beweis.
a) Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ seien linear abhängig. Dann besitzt auf Grund von Definition 19 die Gleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \tag{17}$$

eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, ..., x_k = x_k^*$$

Es sei etwa $x_i^* \neq 0$. Dann gilt

$$x_i^*\mathfrak{a}_i = -x_1^*\mathfrak{a}_1 - ... - x_{i-1}^*\mathfrak{a}_{i-1} - x_{i+1}^*\mathfrak{a}_{i+1} - ... - x_k^*\mathfrak{a}_k$$

woraus

$$\mathfrak{a}_i = \left(-\frac{x_1^*}{x_i^*}\right)\mathfrak{a}_1 + ... + \left(-\frac{x_{i-1}^*}{x_i^*}\right)\mathfrak{a}_{i-1} + \left(-\frac{x_{i+1}^*}{x_i^*}\right)\mathfrak{a}_{i+1} + ... + \left(-\frac{x_k^*}{x_i^*}\right)\mathfrak{a}_k$$

folgt. Diese Gleichung besagt, dass der Vektor $\mathfrak{a}_i$ eine Linearkombination der restlichen Vektoren $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, ..., \mathfrak{a}_k$ ist.

b) Es sei umgekehrt der Vektor $\mathfrak{a}_i$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, ..., \mathfrak{a}_k$, Dann gibt es auf Grund von Definition 17 reelle Zahlen $x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, ..., x_k^*$ derart, dass

$$\mathfrak{a}_i = x_1^*\mathfrak{a}_1 + ... + x_{i-1}^*\mathfrak{a}_{i-1} + x_{i+1}^*\mathfrak{a}_{i+1} + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

ist. Hieraus folgt

$$x_1^*\mathfrak{a}_1 + ... + x_{i-1}^*\mathfrak{a}_{i-1} + (-1)\mathfrak{a}_i + x_{i+1}^*\mathfrak{a}_{i+1} + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \tag{18}$$

Die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_{i-1}\mathfrak{a}_{i-1} + x_i\mathfrak{a}_i + x_{i+1}\mathfrak{a}_{i+1} + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

besitzt wegen (18) eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = x_1^*, ..., x_{i-1} = x_{i-1}^*, x_i = -1, x_{i-1} = x_{i+1}^*, ..., x_k = x_k^*$$

da $x_i \neq 0$ ist. Demnach sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1; \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig.
Der Satz 28 ist logisch äquivalent mit

Satz 29. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn keiner dieser Vektoren eine Linearkombination der restlichen $k-1$ Vektoren ist.

Wir beweisen den

Satz 30. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Wenn der Vektor $\mathfrak{b}$ keine Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ ist, so sind die $k+1$ Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ linear unabhängig.

Beweis. Wir untersuchen die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k + x_{k+1}\mathfrak{b} = \mathfrak{o} \tag{19}$$

Angenommen, es gelte $x_{k+1} \neq 0$. Dann können wir die Gleichung (19) nach $\mathfrak{b}$ auflösen und erhalten

$$\mathfrak{b} = \left(-\frac{x_1}{x_{k+1}}\right)\mathfrak{a}_1 + \left(-\frac{x_2}{x_{k+1}}\right)\mathfrak{a}_2 + ... + \left(-\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)\mathfrak{a}_k$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss unsere Annahme $x_{k+1} \neq 0$ falsch gewesen sein. Daher ist

$$x_{k+1} = 0 \tag{20}$$

und (19) geht über in

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o} \tag{21}$$

Da die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, besitzt die Vektorgleichung (21) nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = ...x_k = 0$ (22)

Wegen (22) und (20) ist auch die Ausgangsgleichung nur trivial lösbar, d. h., die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ...,\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ sind linear unabhängig, womit der Satz bewiesen ist.

3.5 Basis eines Vektorsystems

Es sei $\mathfrak{V}$ ein reeller Vektorraum. Unter einem Vektorsystem von $\mathfrak{V}$ versteht man eine Teilmenge von V in Verbindung mit den beiden in $\mathfrak{V}$ definierten Verknüpfungen.
Ein Vektorsystem von $\mathfrak{V}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$. Auf Grund dieser Vereinbarung ist ein reeller Vektorraum $\mathfrak{V}$ auch ein Vektorsystem von $\mathfrak{V}$.

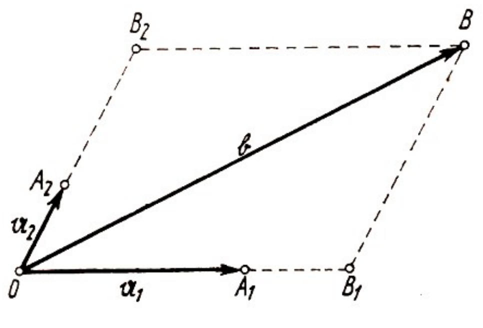


Fig. 30

Zur Vorbereitung der folgenden Definition gehen wir von zwei linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$ aus (Fig. 30) und zeigen, dass sich ein beliebiger Vektor $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{V}_2$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ darstellen lässt.

Wir bestimmen die durch

$$A_1 = O + \mathfrak{a}_1, \quad A_2 = O + \mathfrak{a}_2, \quad B = O + \mathfrak{b}$$

definierten Punkte A_1, A_2, B und zeichnen durch B eine Parallele zu OA_2 und anschließend eine Parallele durch B zu OA_1. Die jeweiligen Schnittpunkte mit der Geraden OA_1 bzw. OA_2 bezeichnen wir mit B_1 bzw. B_2 (Fig. 30). Es sei

$$\frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = x_1 \qquad , \qquad \frac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OA_2}} = x_2$$

Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} B_1 - O = x_1(A_1 - O) = x_1\mathfrak{a}_1 \\ B_2 - O = x_2(A_2 - O) = x_2\mathfrak{a}_2 \end{array}\right\}$$

und damit

$$\mathfrak{b} = (B_1 - O) + (B_2 - O) = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 \tag{1}$$

d.h., der Vektor $\mathfrak{b}$ ist eine Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$. Linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{B}_2$ mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}_2$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ ist, nennt man eine Basis von $\mathfrak{B}_2$.

Wir zeigen noch, dass die reellen Zahlen x_1, x_2 in (1) eindeutig bestimmt sind. Dazu nehmen wir an, es gilt neben (1) auch

$$\mathfrak{b} = y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2 \tag{2}$$

wobei y_1, y_2 reelle Zahlen bedeuten. Aus (1) und (2) folgt

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 = y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2$$

und hieraus

$$(x_1 - y_1)\mathfrak{a}_1 + (x_2 - y_2)\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ linear unabhängig sind, besitzt die Vektorgleichung (3) nur die triviale Lösung

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0 \qquad \text{d.h., es ist} \qquad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2$$

Dieses Ergebnis besagt, dass es nur eine Darstellung der Form (1) gibt. Die eindeutig bestimmten reellen Zahlen x_1, x_2 in (1) heißen die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$.
Durch die Schreibweise $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ wollen wir zum Ausdruck bringen, dass es auf die Reihenfolge der Basisvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ ankommt.
Diese Überlegungen führen zur

Definition 20. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem von $\mathfrak{B}$. Es ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ sind linear unabhängig.
b) Jeder Vektor von $\mathfrak{S}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$.

Aus den Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts folgt, dass jedes linear unabhängige Vektorpaar $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ eine Basis von $\mathfrak{B}_2$ ist.

Es gibt reelle Vektorräume, die Basen besitzen, die aus unendlich vielen Vektoren bestehen. Im Rahmen dieses Büchleins beschränken wir uns auf reelle Vektorräume, die Basen mit endlich vielen Vektoren besitzen.

Beispiel 12. Wir zeigen, dass $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ mit

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}2{,}3), \quad \mathfrak{a}_2 = (3,4{,}1), \quad \mathfrak{a}_3 = (2,3{,}5) \tag{4}$$

eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ ist.
Wie wir in Beispiel 9 bewiesen haben, sind die Vektoren (4) linear unabhängig. Damit ist die erste Eigenschaft von Definition 20 bereits nachgewiesen. Als nächstes untersuchen wir, ob jeder Vektor $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}_{1,3}$ eine Linearkombination der Vektoren (4) ist. Dazu wählen wir einen beliebigen Vektor

$$\mathfrak{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

von $\mathfrak{M}_{1,3}$, dessen Koordinaten b_1, b_2, b_3 beliebige reelle Zahlen sind. Aus dem Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b} \tag{5}$$

lesen wir das zu (5) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ab. Wir untersuchen mit Hilfe des Verfahrens zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, ob das System (6) unabhängig von der Wahl der b_1, b_2, b_3 stets lösbar ist. Wir erhalten

$$\begin{array}{rl|rlrl}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = b_1 & 2 & | & 3 & | \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = b_2 & -1 & \downarrow & & | \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 & = b_3 & & & -1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = b_1 & & & & \\
2x_2 + x_3 & = 2b_1 - b_2 & 4 & | & & \\
8x_2 + x_3 & = 3b_1 - b_3 & -1 & \downarrow & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2b_1 - b_2 \\ 3x_3 &= 5b_1 - 4b_2 + b_3 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Das Gleichungssystem (7) ist unabhängig von der Wahl der b_1, b_2, b_3 stets eindeutig lösbar. Dies besagt, dass jeder Vektor $\mathfrak{b}$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ als Linearkombination der Vektoren (4) darstellbar ist. Damit ist auch die zweite Eigenschaft von Definition 20 nachgewiesen.

Beispiel 13. Wir zeigen, dass $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_n)$ mit

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ..., \qquad \mathfrak{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{n,1}$ ist.
Wir prüfen zunächst, ob die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_n$ linear unabhängig sind. Dazu machen wir den Ansatz

$$x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + ... + x_n\mathfrak{e}_n = \mathfrak{o}$$

aus dem wir das zur Vektorgleichung äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{array}\right\}$$

ablesen, das nur die triviale Lösung besitzt. Demnach sind die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_n$ linear unabhängig. Als nächstes weisen wir nach, dass jeder Vektor

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

von $\mathfrak{M}_{n,1}$ eine Linearkombination der Vektoren (8) ist. In (9) bedeuten die $b_1, b_2, ..., b_n$ beliebige reellen Zahlen. Aus dem Ansatz

$$x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + ... + x_n\mathfrak{e}_n = \mathfrak{b} \tag{10}$$

lesen wir das zu (10) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \dots \\ x_n = b_n \end{array}\right\}$$

ab, das die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_n = b_n$$

besitzt. Damit ist gezeigt, dass $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_n)$ eine Basis von $\mathfrak{M}_{n,1}$ ist.

Wie wir an diesen beiden Beispielen erkennen, lässt sich jeder Vektor eines Vektorsystems auf genau eine Weise als Linearkombination der Vektoren einer Basis darstellen. Dieses Ergebnis ist nicht zufällig. Vielmehr gilt der

Satz 31. Es seien $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$. Dann lässt sich jeder Vektor von $\mathfrak{S}$ auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n$ darstellen.

Beweis. Es sei $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor von $\mathfrak{S}$. Auf Grund von Definition 20 gibt es reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ derart, dass sich der Vektor $\mathfrak{b}$ als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n$ darstellen lässt:

$$\mathfrak{b} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_n\mathfrak{a}_n \tag{11}$$

Wir müssen noch zeigen, dass es neben (11) keine weitere Darstellung dieser Art gibt. Dazu nehmen wir an, es gilt neben (11) noch

$$\mathfrak{b} = y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2 + ... + y_n\mathfrak{a}_n \tag{12}$$

wo $y_1, y_2, ..., y_n$ reelle Zahlen bedeuten. Aus (11) und (12) folgt

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_n\mathfrak{a}_n = y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2 + ... + y_n\mathfrak{a}_n$$

und hieraus

$$(x_1 - y_1)\mathfrak{a}_1 + (x_2 - y_2)\mathfrak{a}_2 + ... + (x_n - y_n)\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o} \tag{13}$$

Da nach Voraussetzung die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n$ linear unabhängig sind, besitzt die Gleichung (13) nur die triviale Lösung

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = ... = x_n - y_n = 0$$

d. h., es gilt

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$$

Folglich gibt es nur eine Darstellung der Form (11), womit der Satz bewiesen ist.
Dieses Ergebnis führt zur

Definition 21. Es seien $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{b}$ ein Vektor von $\mathfrak{S}$.
Die eindeutig, bestimmten reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ in der Gleichung (11) heißen die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n)$.

Beispiel 14. In Beispiel 12 haben wir gezeigt, dass $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ mit

$$\mathfrak{a}_1 = (1,2,3), \quad \mathfrak{a}_2 = (3,4,1), \quad \mathfrak{a}_3 = (2,3,5)$$

eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ ist. Wir berechnen die Koordinaten des Vektors

$$\mathfrak{b}(1,3,10)$$

von $\mathfrak{M}_{1,3}$ bezüglich dieser Basis. Dazu müssen wir in dem Gleichungssystem (7)

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 10$$

setzen und das entstehende Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

lösen. Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

Die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ sind demnach 2, -1, 1.

Satz 32. Es seien $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_m$ linear unabhängige Vektoren von $\mathfrak{S}$. Dann ist $m \leq k$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $k < m$. Da nach Voraussetzung $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ ist, lässt sich jeder der Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_m$ von $\mathfrak{S}$ auf genau eine Weise als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ darstellen, d. h., in

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_1 &= a_{11}\mathfrak{a}_1 + a_{12}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{1k}\mathfrak{a}_k \\ \mathfrak{b}_2 &= a_{21}\mathfrak{a}_1 + a_{22}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{2k}\mathfrak{a}_k \\ &\qquad ... \\ \mathfrak{b}_m &= a_{m1}\mathfrak{a}_1 + a_{m2}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{mk}\mathfrak{a}_k \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

sind die reellen Zahlen a_{ij} eindeutig bestimmt.

Es seien $x_1, x_2, ..., x_m$ beliebige reelle Zahlen, über die wir später verfügen wollen. Wegen (14) ist

$$\begin{aligned} x_1\mathfrak{b}_1 + x_2\mathfrak{b}_2 + ... + x_m\mathfrak{b}_m &= x_1(a_{11}\mathfrak{a}_1 + a_{12}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{1k}\mathfrak{a}_k) \\ &+ x_2(a_{21}\mathfrak{a}_1 + a_{22}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{2k}\mathfrak{a}_k) + ... \\ &+ x_m(a_{m1}\mathfrak{a}_1 + a_{m2}\mathfrak{a}_2 + ... + a_{mk}\mathfrak{a}_k) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m)\mathfrak{a}_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m)\mathfrak{a}_2 \\ &+ ... + (a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + ... + a_{mk}x_m)\mathfrak{a}_k \end{aligned} \tag{15}$$

Wir untersuchen, ob in (15) die reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$ so gewählt werden können, dass sie nicht alle gleichzeitig null sind und dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m = 0 \\ ... \\ a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + ... + a_{mk}x_m = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

genügen. Da (16) ein homogenes lineares Gleichungssystem von k Gleichungen mit m Variablen ist und wegen $k < m$ in (16) die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Variablen ist, so ist das Gleichungssystem (16) auf Grund von Satz 23 (Matrizen) nichttrivial lösbar. Eine nichttriviale Lösung von (16) sei

$$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, ..., x_m = x_m^* \tag{17}$$

Mit Hilfe von (17) geht (15) wegen

$$0\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}, 0\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}, ...0\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

über in

$$x_1^*\mathfrak{b}_1 + x_2^*\mathfrak{b}_2 + ... + x_m^*\mathfrak{b}_m = \mathfrak{o}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_m$ linear abhängig sind. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Demnach muss unsere Annahme $k < m$ falsch gewesen sein, d. h., es gilt $k \geq m$, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 33. Es seien $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ linear unabhängige Vektoren von $\mathfrak{S}$.
Dann ist auch $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$.

Beweis. Angenommen, die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ bilden keine Basis von $\mathfrak{S}$. Dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$, der keine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ ist.
Wegen Satz 30 gilt dann:

Die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ sind linear unabhängig. (18)

Da nach Voraussetzung $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$ ist und wegen (18) die $k+1$ Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}$ linear unabhängige Vektoren von $\mathfrak{S}$ sind, führt die Anwendung von Satz 32 auf den Widerspruch

$$k + 1leqk$$

Demnach muss unsere Annahme, dass die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ keine Basis von $\mathfrak{S}$ bilden, falsch gewesen sein. Somit ist $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$, womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 11. Es sei $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$.
a) Man beweise, dass auch $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ mit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \qquad , \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1$$

eine Basis von $\mathfrak{V}_2$ ist.
b) Man berechne die Koordinaten von $\mathfrak{a}_2$ bezüglich der neuen Basis $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$.

Aufgabe 12. Es seien $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ eine Basis von $\mathfrak{S}$.
a) Man beweise, dass auch $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_3)$ mit

$$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + 3\mathfrak{a}_3$$

eine Basis von $\mathfrak{S}$ ist.
b) Man berechne die Koordinaten des Vektors

$$\mathfrak{b} = 3\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$$

von $\mathfrak{S}$ bezüglich der neuen Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_3)$.

3.6 Unterraum eines reellen Vektorraumes

Definition 22. Ein nichtleeres Vektorsystem $\mathfrak{S}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ ist ein Unterraum von $\mathfrak{V}$ genau dann, wenn $\mathfrak{S}$ selbst ein reeller Vektorraum ist.

Beispielsweise ist das Vektorsystem $\mathfrak{S}$, das aus den beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1 = (1{,}2)$, $\mathfrak{a}_2 = (2{,}3)$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,2}$ besteht, kein Unterraum von $\mathfrak{M}_{1,2}$ da der der Vektor

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = (3{,}5)$$

nicht Element von $\mathfrak{S}$ ist und somit A 1 nicht erfüllt ist.

Will man mit Hilfe der Definition 13 untersuchen, ob ein Vektorsystem $\mathfrak{S}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ Unterraum von $\mathfrak{V}$ ist, so ist dazu ein erheblicher Rechenaufwand erforderlich. Mit Hilfe des folgenden Satzes lässt sich dieser reduzieren.

Satz 34. $\mathfrak{S}$ sei ein nichtleeres Vektorsystem eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$. Es ist $\mathfrak{S}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$ genau dann, wenn für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ und für alle reellen Zahlen λ die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ wieder Elemente von $\mathfrak{S}$ sind.

Beweis.
a) Es sei $\mathfrak{S}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$. Dann sind, da $\mathfrak{S}$ ein reeller Vektorraum ist, insbesondere die beiden Bedingungen A 1 und B 1 der Definition 13 erfüllt, d. h., für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ und für alle reellen Zahlen λ sind $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ Elemente von $\mathfrak{S}$.

b) Umgekehrt erfülle ein Vektorsystem $\mathfrak{S}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ die Bedingung, dass für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ und für alle reellen Zahlen λ die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ Elemente von $\mathfrak{S}$ sind.

Es sind damit bereits die Bedingungen A 1 und B 1 erfüllt. Ferner sind die Eigenschaften A 2, A 4, B 2, B 3, B 4, B 5 trivialerweise für $\mathfrak{S}$ erfüllt, da sie in $\mathfrak{V}$ gelten. Es bleibt nur noch die Gültigkeit von A 3 nachzuweisen:

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Vektoren von $\mathfrak{S}$. Da diese Vektoren auch Elemente von $\mathfrak{V}$ sind, besitzt die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{1}$$

in $\mathfrak{V}$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$$

die sich wegen Satz 20b und Satz 21c in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + (-1)\mathfrak{a}$$

schreiben lässt. Wir zeigen, dass der Vektor $\mathfrak{x}$ auch ein Element von $\mathfrak{S}$ ist. Da B 1 erfüllt ist, ist $(-1)\mathfrak{a}$ ein Vektor von $\mathfrak{S}$. Auf Grund von A 1 ist der Vektor $\mathfrak{b} + (-1)\mathfrak{a}$ ein Element von $\mathfrak{S}$, womit gezeigt ist, dass die Vektorgleichung (1) in $\mathfrak{S}$ lösbar ist.

Beispiel 15. Mit Hilfe von Satz 34 weisen wir nach, dass das Vektorsystem $\mathfrak{S}$, das aus allen Vektoren der Form

$$(a,b,0) \tag{2}$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ besteht, ein Unterraum von $\mathfrak{M}_{1,3}$ ist. Es seien

$$\mathfrak{a} = (a_1, b_1,0) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (a_2, b_2, 0)$$

beliebige Vektoren von $\mathfrak{S}$ und λ eine beliebige reelle Zahl. Es ist dann

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2,0) \qquad , \qquad \lambda\mathfrak{a} = (\lambda a_1, \lambda b_1,0)$$

Da die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ von der Form (2) sind, gehören sie zum Vektorsystem $\mathfrak{S}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Definition 23. Das Vektorsystem, das aus allen Linearkombinationen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ besteht, heißt lineare Hülle der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$, in Zeichen

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$$

Aus der Definition 23 folgt, dass $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ ist, falls die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängig sind.

Beispiel 16. Es seien

$$\mathfrak{a}_1 = (1,1) \qquad , \qquad \mathfrak{a}_2 = (1,2) \tag{3}$$

Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,2}$. Wir untersuchen, ob der Vektor

$$\mathfrak{b} = (2,5)$$

zur linearen Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ gehört.

Auf Grund von Definition 23 müssen wir überprüfen, ob der Vektor $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination der Vektoren (8) ist. Dazu machen wir den Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} \tag{4}$$

aus dem wir das zu (4) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

ablesen. Wenden wir auf dieses System das Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme an, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Das Gleichungssystem (5) ist lösbar, d. h., der Vektor $\mathfrak{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren (3) und gehört damit zur linearen Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$.
Wir beweisen den

Satz 35. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ Vektoren eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$, so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Vektoren von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ und λ eine beliebige reelle Zahl. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind Linearkombinationen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$, d.h., es gibt reelle Zahlen

$$x_1, x_2, ..., x_k \qquad \text{bzw.} \qquad y_1, y_2, ..., y_k$$

derart, dass

$$\mathfrak{a} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k \qquad , \qquad \mathfrak{b} = y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2 + ... + y_k\mathfrak{a}_k$$

ist. Hieraus folgt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (x_1 + y_1)\mathfrak{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathfrak{a}_2 + ... + (x_k + y_k)\mathfrak{a}_k \tag{6}$$

und

$$\lambda\mathfrak{a} = (\lambda x_1)\mathfrak{a}_1 + (\lambda x_2)\mathfrak{a}_2 + ... + (\lambda x_k)\mathfrak{a}_k \tag{7}$$

Die Beziehungen (6) und (7) besagen, dass die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ Linearkombinationen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ sind. Dies bedeutet, dass die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda\mathfrak{a}$ Elemente von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ sind.
Auf Grund von Satz 34 ist demnach $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$, womit der Satz bewiesen ist.

4 Normierte reelle Vektorräume

4.1 Begriff der Betragsfunktion

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen Vektorräumen, in denen der Begriff Betrag eines Vektors erklärt ist.
In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}_2$ verstehen wir unter dem Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ die Länge der Strecke $\overline{PP'}$, wobei $\overrightarrow{PP'}$ ein Repräsentant von $\mathfrak{a}$ ist (Fig. 31).

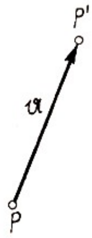


Fig. 31

Den Betrag von $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $\|\mathfrak{a}\|$.
Der Anschauung entnehmen wir, dass für alle Vektoren $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{V}_2$ und für alle reellen Zahlen λ gilt:

N 1. Es ist $\|\mathfrak{a}\| = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.
N 2. $\|\lambda\mathfrak{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\|$
N 3. $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\|$ (1)

Spannen die Vektoren $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein Dreieck auf (Fig. 6, so besagt die Ungleichung (1), dass eine Seite dieses Dreiecks nicht größer sein kann als die Summe der beiden anderen Seiten.
Diese anschaulichen Überlegungen führen zur

Definition 24. Eine Funktion $\| \ \|$, die jedem Vektor $\mathfrak{a}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ eine reelle Zahl $\|\mathfrak{a}\|$ zuordnet, ist eine Betragsfunktion genau dann, wenn für alle Vektoren $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{V}$ und für alle reellen Zahlen λ gilt:

N 1. Es ist $\|\mathfrak{a}\| = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.
N 2. $\|\lambda\mathfrak{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\|$
N 3. $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\|$ (1)

Die reelle Zahl $\|\mathfrak{a}\|$ heißt Betrag oder Norm des Vektors $\mathfrak{a}$.

In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1.n}$ definieren wir eine Funktion $\| \ \|_1$ durch

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \tag{2}$$

Durch (2) wird jedem Vektor $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}_{1,n}$ eindeutig eine reelle Zahl $\|\mathfrak{a}\|_1$ zugeordnet. So wird durch (2) dem Vektor

$$\mathfrak{a} = (1{,}1,-1{,}1)$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,4}$ die reelle Zahl $\|\mathfrak{a}\|_1 = 2$ zugeordnet.
Wir beweisen, dass $\| \ \|$ eine Betragsfunktion ist.

Beweis. a) Es sei $\|\mathfrak{a}\|_1 = 0$. Aus

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = 0 \qquad \text{folgt} \qquad a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für

$$a_1 = a_2 = ... = a_k = 0 \tag{3}$$

verschwinden. Dies besagt, dass

$$\mathfrak{a} = (0,0,...,0) = \mathfrak{o}$$

ist. Umgekehrt ergibt sich aus der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, die sich in der Form

$$(a_1, a_2, ..., a_k) = (0, 0, ..., 0)$$

schreiben lässt, unmittelbar (3). Mit Hilfe von (3) geht (2) über in $\|\mathfrak{a}\|_1 = 0$.

b) Wegen

$$\lambda\mathfrak{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$$

gilt für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}_{1,n}$ und für alle reellen Zahlen λ stets

$$\|\lambda\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + ... + (\lambda a_n)^2} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\|_1$$

c) Wegen

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

ist

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

und somit

$$\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|_1 = \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2} \tag{4}$$

Zunächst beweisen wir, dass für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ die Ungleichung

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \tag{5}$$

gilt.

Fall 1. Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.
Dann gilt offensichtlich (5), da $0 \leq 0$, eine wahre Aussage ist.

Fall 2. Es sei $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$.
Dann ist mindestens ein $a_i \neq 0$ und mindestens ein $b_j \neq 0$, und es ist daher

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0 \qquad , \qquad b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 > 0 \tag{6}$$

Für alle reellen Zahlen x gilt stets

$$y = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2 \geq 0 \tag{7}$$

da jeder Summand $(a_ix + b_i)^2$ in (7) eine nichtnegative reelle Zahl ist. Aus (7) folgt

$$y = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) \geq 0 \tag{8}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} a = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \\ b = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \\ c = b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2 \end{array}\right\} \tag{9}$$

geht (8) über in

$$y = ax^2 + 2bx + c \geq 0 \tag{10}$$

Wegen (6) ist in (10) der Koeffizient a positiv, also von null verschieden. Die Kurve von

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

ist daher eine Parabel, die wegen $y \geq 0$ die Abszissenachse höchstens berührt. Deshalb kann die quadratische Gleichung

$$ax^2 + 2x + c = 0 \tag{11}$$

auch nicht zwei verschiedene reelle Lösungen besitzen. Wenden wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf (11) an, so erhalten wir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Im vorliegenden Fall muss

$$b^2 - ac \leq 0 \qquad \text{also} \qquad b^2 \leq ac \tag{12}$$

sein. Setzen wir (9) in (12) ein, so erhalten wir (5). Aus (5) folgt wegen

$$a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2 \geq 0 \qquad , \qquad b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2 \geq 0$$

die Beziehung

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2} \tag{13}$$

Da stets

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq |a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n|$$

ist, gilt wegen (13) die Ungleichung

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2} \tag{14}$$

Ferner ist

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2 = (a_1^2+...+a_n^2)+2(a_1b_1+...+a_nb_n)+(b_1^2+...+b_n^2) \tag{15}$$

Mit Hilfe von (14) geht (15) über in

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2 \leq \\ \leq (a_1^2 + ... + a_n^2) + 2\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} + (b_1^2 + ... + b_n^2)\end{aligned} \tag{16}$$

Die Ungleichung (16) lässt sich in der Form

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2}\right)^2$$

schreiben. Hieraus folgt wegen

$$\left.\begin{array}{r}(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2 \geq 0 \\ \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \geq 0\end{array}\right\}$$

die Ungleichung

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+...+b_n^2} \tag{17}$$

Unter Berücksichtigung von (4) und (2) geht (17) über in

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|_1 \leq \|\mathfrak{a}\|_1 + \|\mathfrak{b}\|_1$$

womit N 3 nachgewiesen ist.

Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen, die wir zur Menge

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \tag{18}$$

zusammenfassen. Eine reelle Zahl a heißt Maximum von $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, in Zeichen

$$a = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

wenn a ein Element von M ist und für alle a_i von M gilt $a_i \leq a$. Offensichtlich ist a in (18) eindeutig bestimmt. Beispielsweise ist $\max\{1{,}3{,}4{,}2\} = 4$.

Wir definieren in dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,n}$ eine Funktion $\| \ \|_2$ durch

$$\|\mathfrak{a}\|_2 = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} \tag{19}$$

So wird durch (19) dem Vektor $\mathfrak{a} = (1, 3, 4, 2)$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,4}$ die reelle Zahl

$$\|\mathfrak{a}\|_2 = \max 1, 3, 4{,}2 = 4$$

zugeordnet. Wir beweisen, dass auch $\| \ \|_2$ eine Betragsfunktion ist.

Beweis.
a) Es sei $\|\mathfrak{a}\|_2 = 0$. Aus

$$\max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} = 0$$

folgt

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = 0 \qquad \text{und hieraus} \qquad a_1 = a_2 = ...a_n = 0 \tag{20}$$

Dies besagt, dass

$$\mathfrak{a} = (0{,}0{,}..{,}0) = \mathfrak{o}$$

ist. Umgekehrt ergibt sich aus der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ unmittelbar (20). Setzt man dies in (19) ein, so erhält man $\|\mathfrak{a}\|_2 = 0$.

b) Bekanntlich ist

$$|\lambda a_i| = |\lambda| \cdot |a_i|$$

für alle reellen Zahlen $\lambda, a_1, a_2, ..., a_n$. Demnach gilt stets

$$\|\lambda\mathfrak{a}\|_2 = \max\{|\lambda a_1|, |\lambda a_2|, ..., |\lambda a_n|\} = |\lambda| \cdot \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\|_2$$

c) Es sei

$$\left.\begin{array}{l} \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} = |a_k| \\ \max\{|b_1|, |b_2|, ..., |b_n|\} = |b_l| \end{array}\right\} \tag{21}$$

wobei $k,l \ln\{1,2,...,n\}$ ist. Wegen (21) gilt dann

$$|a_i| \leq |a_k|, \quad |b_i| \leq |b_l| \qquad \text{und damit} \qquad |a_i| + |b_i| \leq |a_k| + |b_l| \tag{22}$$

für alle $i \in \{1, 2, ...,n\}$. Da ferner stets

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| \tag{23}$$

ist (vgl. 4.2. (5)), geht (23) mit Hilfe von (22) über in

$$|a_i + b_i| \leq |a_k| + |b_l| \tag{24}$$

für alle $i \in \{1, 2, ...,n\}$. Wegen (24) gilt in Verbindung mit (21) die Ungleichung

$$\max\{|a_1 + b_1|, |a_2 + b_2|, ..., |a_n + b_n|\} \leq \max\{|a_1|,|a_2|,..., |a_n|\} + \max\{|b_1|,|b_2|,..., |b_n|\}$$

Die letzte Ungleichung besagt

$$\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|_2 \leq \|\mathfrak{a}\|_2 + \|\mathfrak{b}\|_2$$

Aufgabe 13. In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,n}$ sei eine Funktion $\| \; \|_3$ durch

$$\|\mathfrak{a}\|_3 = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

definiert. Man beweise, dass $\| \; \|_3$ eine Betragsfunktion ist.

Aus der Definition 24 ziehen wir noch eine wichtige Folgerung.

Satz 36. Ist $\| \; \|$ eine Betragsfunktion in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$, so gilt für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ stets $\|\mathfrak{a}\| \geq 0$.

Beweis. Auf Grund von N 3 gilt

$$\|\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a})\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \| - \mathfrak{a}\| \tag{25}$$

Wegen N 1 ist

$$\|\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a})\| = \|\mathfrak{o}\| = 0 \tag{26}$$

und wegen N 2 gilt

$$\| - \mathfrak{a}\| = \|(-1)\mathfrak{a}\| = | - 1| \cdot \|\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a}\| \tag{27}$$

Mit Hilfe von (26) und (27) geht (25) über in

$$0 \leq 2 \cdot \|\mathfrak{a}\|$$

Hieraus folgt die Behauptung $\|\mathfrak{a}\| \geq 0$.

Im folgenden Abschnitt werden wir auf der Grundlage der Definition 24 den Begriff normierter reeller Vektorraum einführen.

4.2 Begriff des normierten reellen Vektorraumes

Definition 25. Ein reeller Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist ein normierter reeller Vektorraum genau dann, wenn in $\mathfrak{V}$ eine Betragsfunktion definiert ist. Normierte reelle Vektorräume bezeichnen wir mit $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$, der reelle Vektorraum $\mathfrak{V}$ heißt Träger des normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$.

Auf Grund von Definition 25 und dem in 4.1. Bewiesenen gilt der

Satz 37. Es ist $(\mathfrak{M}_{1,n}, \| \ \|_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \| \ \|_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \| \ \|_3)$ mit

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \qquad \text{bzw.} \tag{1}$$

$$\|\mathfrak{a}\|_2 = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + ... + |a_3| \tag{3}$$

ein normierter reeller Vektorraum.

Obgleich die in Satz 37 angegebenen normierten reellen Vektorräume denselben Träger besitzen, sind sie doch verschiedene normierte reelle Vektorräume, da in ihnen der Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ unterschiedlich definiert ist.
Für den Vektor

$$\mathfrak{a} = (1, -2, 2)$$

gilt beispielsweise

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{1+4+4} = 3, \qquad \|\mathfrak{a}\|_2 = \max\{1{,}2{,}2\} = 2, \qquad \|\mathfrak{a}\|_3 = 1+2+2 = 5$$

Es sei $\mathfrak{a}$ ein eingliedriger Zeilenvektor. Nach unseren Vereinbarungen in 3.1. ist

$$\mathfrak{a} = (a) = a$$

und (1) bzw. (2) bzw. (3) geht für $n = 1$ über in

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{a^2} = |a|, \qquad \|\mathfrak{a}\|_2 = \max\{|a|\} = |a|, \qquad \|\mathfrak{a}\|_3 = |a|$$

Im Fall $n = 1$ stimmen die Betragsfunktionen $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_3$ überein, die wir im Fall $n = 1$ mit $\| \ \|_0$ bezeichnen. Damit ist die in dem reellen Vektorraum $\mathfrak{d}$ durch

$$\|\mathfrak{a}\|_0 = |a| \tag{4}$$

definierte Funktion $\| \ \|_0$ eine Betragsfunktion, und wir erhalten den

Satz 38. Es ist $(\Delta, \| \ \|_0)$ mit (4) ein normierter reeller Vektorraum.

In dem normierten reellen Vektorraum $(\Delta, \| \ \|_0)$ besagt N 3 unter Berücksichtigung von (4): Für alle reellen Zahlen a, b gilt

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{5}$$

Satz 39. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ gilt

$$|\|\mathfrak{a}\| - \|\mathfrak{b}\|| \leq \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| \qquad , \qquad |\|\mathfrak{a}\| - \|\mathfrak{b}\|| \leq \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \tag{6,7}$$

Beweis. Trivialerweise ist

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - \mathfrak{b} \tag{8}$$

Auf Grund von N 3 gilt
$$\|\mathfrak{a}\| \leq \|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| + \|-\mathfrak{b}\| \tag{9}$$
Wegen $\|-\mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{b}\|$ geht (9) über in
$$\|\mathfrak{a}\| \leq \|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| + \|\mathfrak{b}\|$$
Hieraus folgt
$$\|\mathfrak{a}\| - \|\mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| \tag{10}$$
Ersetzen wir in (10) den Vektor $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$, so erhalten wir die Ungleichung
$$\|\mathfrak{b}\| - \|\mathfrak{a}\| \leq \|\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\|$$
die wir wegen $\mathfrak{b}+\mathfrak{a} = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ in der Form
$$\|\mathfrak{b}\| - \|\mathfrak{a}\| \leq \|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| \qquad \text{bzw. in der Form} \qquad -(\|\mathfrak{a}\| - \|\mathfrak{b}\|) \leq \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| \tag{11}$$
schreiben. Aus (10) und (11) folgt die Behauptung (6).
Ersetzen wir in (6) den Vektor $\mathfrak{b}$ durch $-\mathfrak{b}$, so erhalten wir wegen
$$\|-\mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{b}\| \qquad , \qquad \mathfrak{a}+(-\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}$$
die Ungleichung (7).

Beispiel 17. Im normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \|_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \|_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \|_3)$ bzw. $(\Delta, \| \|_0)$ führt (6) zu folgenden Aussagen:

a) Für alle reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt
$$|\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2}| \leq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$$

b) Für alle reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt
$$|\max\{|a_1|,|a_2|\} - \max\{|b_1|,|b_2|\} \leq \max\{|a_1+b_1|,|a_2+b_2|\}$$

c) Für alle reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt
$$|a_1|+|a_2|-|b_1|-|b_2| \leq |a_1+b_1|+|a_2+b_2|$$

d) Für alle reellen Zahlen a, b gilt
$$||a|-|b|| \leq |a+b|$$

Definition 26. Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\mathfrak{a}$ eines normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \| \|)$ ist Einheitsvektor von $(\mathfrak{B}, \| \|)$ genau dann, wenn $\|\mathfrak{a}\| = 1$ ist.

Beispiel 18. Es sei $\mathfrak{a}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor eines normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \| \|)$. Wir zeigen, dass der Vektor $\frac{1}{\|\mathfrak{a}\|}\mathfrak{a}$, der mit $\mathfrak{a}^\circ$ bezeichnet wird, ein Einheitsvektor von $(\mathfrak{B}, \| \|)$ ist.
Wegen $\mathfrak{a} \neq 0$ gilt auf Grund von N 1 und Satz 36 $\|\mathfrak{a}\| > 0$. Berücksichtigen wir N 2, so erhalten wir
$$\|\mathfrak{a}^\circ\| = \left\| \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|}\mathfrak{a} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \right| \cdot \|\mathfrak{a}\| = \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \cdot \|\mathfrak{a}\| = 1$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
Geht man von einem vom Nullpunkt verschiedenen Vektor $\mathfrak{a}$ eines normierten reellen Vektorraumes zum Vektor $\mathfrak{a}^\circ$ über, so sagt man, der Vektor $\mathfrak{a}$ ist normiert worden.

Beispiel 19. Indem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_3)$ normieren wir den Vektor $\mathfrak{a} = (3,4)$.

a) In $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_1)$ ist $\|\mathfrak{a}\|_1 = 5$ und damit

$$\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

b) In $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_2)$ ist $\|\mathfrak{a}\|_2 = 4$ und damit

$$\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{4}(3,4) = \left(\frac{3}{4},1\right)$$

a) In $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \, \|_3)$ ist $\|\mathfrak{a}\|_3 = 7$ und damit

$$\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{7}(3,4) = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

Aufgabe 14. In dem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,3}, \| \, \|_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,3}, \| \, \|_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,3}, \| \, \|_3)$ normiere man den Vektor $\mathfrak{a} = (1, -2, 2)$.

5 Metrische reelle Vektorräume

5.1 Begriff der Abstandsfunktion

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen Vektorräumen, in denen der Begriff Abstand zweier Vektoren erklärt ist. Zur Vorbereitung der folgenden Definition gehen wir von einer Ebene e aus, in der ein kartesisches xy-Koordinatensystem (Fig. 32) vorgegeben ist.

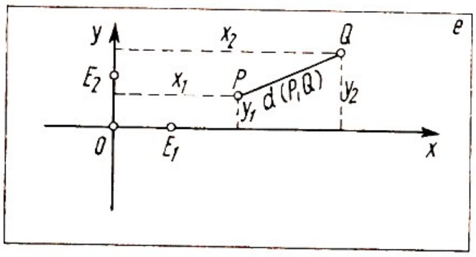


Fig. 32

Der Punkt 0 heißt Ursprung des Koordinatensystems und die Punkte E_1, E_2 heißen Einheitspunkte der Koordinatenachsen (Fig. 32).
Es seien $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ zwei beliebige Punkte von e. Wir führen eine Funktion d ein, die dem Punktepaar $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ von e die reelle Zahl

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1}$$

zuordnet. Wie aus der Schulmathematik bekannt ist, kann $d(P,Q)$ als Abstand der beiden Punkte P, Q gedeutet werden (Fig. 32). Ist beispielsweise

$$P(1,3), \qquad Q(4,-1)$$

so ist

$$d(P,Q) = \sqrt{(1-4)^2 + (3+1)^2} = 5$$

Der Anschauung entnehmen wir, dass für alle Punkte P, Q, R von e gilt:

A1. Es ist $d(P,Q) = 0$ genau dann, wenn $P = Q$ ist.
A2. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
A3. $d(P,Q) < d(P,R) + d(R,Q)$ (2)

Die unter A 1, A 2, A 3 zusammengefassten Eigenschaften der Funktion d bringen folgende fundamentale Eigenschaften, die man sinnvollerweise einem Abstand zuschreiben möchte, zum Ausdruck:

A 1.Der Abstand zweier Punkte ist null genau dann, wenn die Punkte zusammenfallen.
A 2. Bei der Abstandsbestimmung zweier Punkte sind beide Punkte gleichberechtigt.
A 3. Eine Seite eines Dreiecks PQR kann nicht größer sein als die Summe der beiden anderen Seiten (Fig. 33).

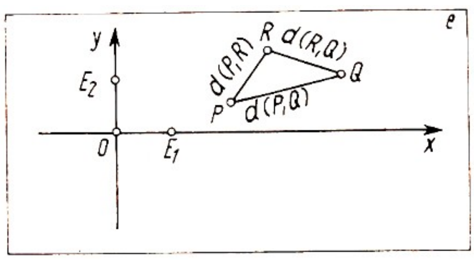


Fig. 33

Die Ungleichung (2) heißt Dreiecksungleichung.
Diese anschaulichen Überlegungen führen zur

Definition 27. Eine Funktion d, die je zwei Elementen P, Q einer Menge M eine reelle Zahl $d(P,Q)$ zuordnet, ist eine Abstandsfunktion genau dann, wenn für alle Elemente P, Q, R von M gilt:

A 1. Es ist $d(P,Q) = 0$ genau dann, wenn $P = Q$ ist.
A 2. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
A 3. $d(P,Q) < d(P,R) + d(R,Q)$. (3)

Die reelle Zahl $d(P,Q)$ heißt Abstand der Elemente P, Q, und die Ungleichung (3) heißt Dreiecksungleichung.

Im folgenden zeigen wir, dass sich in jedem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ eine Abstandsfunktion d mit Hilfe von $\| \ \|$ definieren lässt. In Hinblick auf die Definition 27 ist in diesem Fall $M = (\mathfrak{V}, \| \ \|)$, und die Rolle der Elemente P, Q, R übernehmen die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.
Da in einem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ stets der Vektor $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ existiert, können wir in $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ eine Funktion d durch

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \tag{4}$$

definieren. Durch (4) wird jedem Vektorpaar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ eindeutig eine reelle Zahl $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zugeordnet. So wird durch (4) den beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = (1,2,3) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (1,3,2)$$

des normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,3}, \| \ \|)$ wegen

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (0, -1,1)$$

die reelle Zahl

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|_2 = \max\{0,1,1\} = 1$$

zugeordnet.
Wir beweisen, dass die in $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ durch (4) definierte Funktion d eine Abstandsfunktion ist.

Beweis.
a) Auf Grund von N 1 gilt:
Es ist $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ist.
Hieraus folgt die Behauptung A 1:
Es ist $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist.

b) Da $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (-1)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$ ist, gilt wegen N 2

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| = \|(-1)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\| = |-1| \cdot \|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}\| = d(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$$

womit A 2 nachgewiesen ist.

c) Wegen $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$ gilt auf Grund von N 3 stets

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \|(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b})\| \leq \|\mathfrak{a} - \mathfrak{c}\| + \|\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\| = d(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) + d(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$$

womit auch die Gültigkeit von A 3 gezeigt ist.
Im folgenden Abschnitt werden wir auf der Grundlage der Definition 27 den Begriff metrischer reeller Vektorraum einführen.

5.2 Begriff des metrischen reellen Vektorraumes

Definition 28. Ein reeller Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist ein metrischer reeller Vektorraum genau dann, wenn in $\mathfrak{V}$ eine Abstandsfunktion d definiert ist.
Metrische reelle Vektorräume bezeichnen wir mit $(\mathfrak{V}, d)$, der reelle Vektorraum $\mathfrak{V}$ heißt Träger des metrischen reellen Vektorraumes.

Auf Grund des in 5.1. Bewiesenen gilt der

Satz 40. In jedem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ kann durch

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \tag{1}$$

ein Abstand der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ definiert werden, d. h., jeder normierte reelle Vektorraum ist wegen (1) auch ein metrischer reeller Vektorraum $(\mathfrak{V}, \| \ \|; d)$.

Auf Grund von (1) gilt der

Satz 41. Es ist $(\mathfrak{M}_{1,n},d_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n},d_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n},d_3)$ mit

$$d_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2} \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$d_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|\} \qquad \text{bzw.} \tag{3}$$

$$d_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| \tag{4}$$

ein metrischer reeller Vektorraum.

Aufgabe 15. Man bestimme den Abstand der beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = (5{,}0{,}5{,}9) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (1{,}2, 3, 4)$$

in dem metrischen reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,n},d_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n},d_2)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n},d_3)$.

Da in jedem reellen Vektorraum $\mathfrak{V}$ der eindeutig bestimmte Nullvektor $\mathfrak{o}$ existiert und für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}$ stets

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} - \mathfrak{o}$$

ist, erhalten wir in Verbindung mit (1) die Gleichung

$$\|\mathfrak{a}\| = d(\mathfrak{a},\mathfrak{o}) \tag{5}$$

Die Beziehung (5) besagt, dass in jedem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$ die Norm eines Vektors $\mathfrak{a}$ als Abstand des Vektors $\mathfrak{a}$ vom Nullvektor $\mathfrak{o}$ gedeutet werden kann.

Wir zeigen, dass nicht in jedem metrischen reellen Vektorraum $(\mathfrak{V}, d)$ die reelle Zahl $d(\mathfrak{a},\mathfrak{o})$ als Norm des Vektors $\mathfrak{a}$ gedeutet werden kann.
In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,2}$ definieren wir eine Funktion d_4 durch

$$d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{|a_1 - b_1|}{1 + |a_1 - b_1|} + \frac{|a_2 - b_2|}{1 + |a_2 - b_2|} \tag{6}$$

Mit Hilfe von (6) wird jedem Vektorpaar

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2)$$

von $\mathfrak{M}_{1,2}$ genau eine reelle Zahl $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ zugeordnet. So wird beispielsweise den beiden Vektoren $\mathfrak{a} = (1,2)$, $\mathfrak{b} = (2,3)$ die reelle Zahl

$$d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \frac{|1-2|}{1+|1-2|} + \frac{|2-3|}{1+|2-3|} = 1$$

zugeordnet.
Wir beweisen, dass die in dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,2}$ durch (6) definierte Funktion d_4 eine Abstandsfunktion ist, also $(M_{1,2}, d_4)$ ein metrischer reeller Vektorraum ist.

Beweis.
a) Es sei $d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{v}) = 0$. Aus (6) folgt dann

$$\frac{|a_1-b_1|}{1+|a_1-b_1|} + \frac{|a_2-b_2|}{1+|a_2-b_2|} = 0 \tag{7}$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur null werden, wenn jeder Summand der linken Seite von (7) verschwindet. Das ist aber nur möglich, wenn

$$|a_1-b_1| = 0 \quad , \quad |a_2-b_2| = 0 \quad \text{also}$$

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \tag{8,9}$$

ist. Umgekehrt ergibt sich aus (9) sofort (8). Mit Hilfe von (8) geht (6) über in

$$d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 0$$

b) Wegen

$$|a_1-b_1| = |b_1-a_1| \quad \text{und} \quad |a_2-b_2| = |b_2-a_2|$$

gilt stets

$$d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = d_4(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$$

c) Zunächst beweisen wir die Ungleichung

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a-c|}{1+|a-c|} + \frac{|c-b|}{1+|c-b|} \tag{10}$$

in der a, b, c beliebige reelle Zahlen bedeuten.

Fall 1. Es sei $a = b$. Dann gilt offensichtlich (10).
Fall 2. Es sei $a \neq b$. Dann ist $|a-b| > 0$. Stets gilt

$$a-b = (a-c)+(c-b)$$

Berücksichtigen wir 4.2. (5) so erhalten wir

$$0 < |a-b| \leq |a-c| + |c-b|$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{|a-b|} \geq \frac{1}{|a-c|+|c-b|}$$

Addition von eins auf beiden Seiten liefert die Ungleichung

$$\frac{1}{|a-b|} + 1 \geq \frac{1}{|a-c|+|c-b|} + 1 \qquad \text{bzw.}$$

$$\frac{1+|a-b|}{|a-b|} \geq \frac{1+|a-c|+|c-b|}{|a-c|+|c-b|} \tag{11}$$

Aus (11) folgt

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a-c|+|c-b|}{1+|a-c|+|c-b|} = \frac{|a-c|}{1+|a-c|+|c-b|} + \frac{|c-b|}{1+|a-c|+|c-b|} \tag{12}$$

Da stets

$$|a-c| \geq 0 \qquad , \quad |c-b| \geq 0$$

ist, vergrößern wir höchstens die rechte Seite von (12), wenn wir dort im ersten Nenner den Summanden $|c-b|$ und im zweiten Nenner den Summanden $|a-c|$ weglassen. Auf diese Weise erhalten wir die Ungleichung (10).

Es seien $a-1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ beliebige reelle Zahlen. Auf Grund von (10) gelten dann die beiden Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|a_1-b_1|}{1+|a_1-b_1|} \leq \frac{|a_1-c_1|}{1+|a_1-c_1|} + \frac{|c_1-b_1|}{1+|c_1-b_1|} \\ \frac{|a_2-b_2|}{1+|a_2-b_2|} \leq \frac{|a_2-c_2|}{1+|a_2-c_2|} + \frac{|c_2-b_2|}{1+|c_2-b_2|} \end{array}\right\}$$

Hieraus folgt durch Addition entsprechender Seiten die Ungleichung

$$\frac{|a_1-b_1|}{1+|a_1-b_1|} + \frac{|a_2-b_2|}{1+|a_2-b_2|} \leq \frac{|a_1-c_1|}{1+|a_1-c_1|} + \frac{|c_1-b_1|}{1+|c_1-b_1|} + \frac{|a_2-c_2|}{1+|a_2-c_2|} + \frac{|c_2-b_2|}{1+|c_2-b_2|} \tag{13}$$

Mit Hilfe der Vektoren

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2), \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2), \qquad \mathfrak{c} = (c_1, c_2)$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,2}$ geht (13) wegen (6) über in

$$d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \leq d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) + d_4(\mathfrak{c},\mathfrak{b})$$

d. h., die Funktion d_4 genügt auch der Dreiecksungleichung.
Damit ist bewiesen, dass $(\mathfrak{M}_{2,1}, d_4)$ ein metrischer reeller Vektorraum ist.

Ist speziell $\mathfrak{b} = \mathfrak{o} = (0{,}0)$, so geht (6) über in

$$d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) = \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} \tag{14}$$

Wir zeigen, dass in dem metrischen reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{2,1}, d_4)$ nicht für alle Vektoren $\mathfrak{a}$ und alle reellen Zahlen λ die Bedingung

$$d_4(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) = |\lambda| \cdot d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{o})$$

also N 2 erfüllt ist. Den Nachweis führen wir durch Angabe eines Gegenbeispiels. Wählen wir

$$\mathfrak{a} = (1{,}1), \quad \lambda = 2 \qquad \text{so ist} \qquad 2\mathfrak{a} = (2{,}2)$$

und wegen (14) gilt

$$\left.\begin{array}{l} d_4(2\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ |2| \cdot d_4(\mathfrak{a},\mathfrak{o}) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 \end{array}\right\} \tag{15}$$

Aus (15) folgt

$$d_4(2\mathfrak{a}, \mathfrak{o}) \neq |2| \cdot d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{o})$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Damit ist gezeigt, dass in dem metrischen reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{2,1}, d_4)$ die reelle Zahl $d_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{o})$ nicht als Norm des Vektors $\mathfrak{a}$ gedeutet werden kann.

Mit diesem Beispiel haben wir gleichzeitig bewiesen, dass in einem reellen Vektorraum nicht jede Abstandsfunktion durch eine Betragsfunktion erzeugt werden kann.

In dem folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen Vektorräumen, in denen neben den Begriffen Betrag eines Vektors, Abstand zweier Vektoren auch der Begriff Winkel zwischen zwei Vektoren erklärt ist.

6 Euklidische Vektorräume

6.1 Anschauliche Vorbemerkungen

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ vom Nullvektor verschiedene Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$, und $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$ ein Repräsentant von $\mathfrak{a}$ bzw. von $\mathfrak{b}$ (Fig. 34).

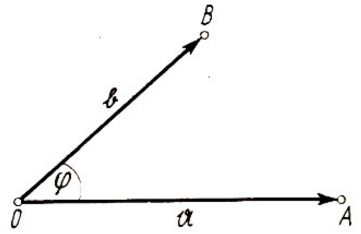


Fig. 34

Unter dem Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, in Zeichen $\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, verstehen wir den Winkel φ, um den die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OA}$ mit O als Drehzentrum auf dem kürzesten Wege gedreht werden muss, bis sie in $\overrightarrow{OB}$ fällt.
Unter dem Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$, in Zeichen $\|\mathfrak{a}\|$, verstehen wir wie in 4.1. die Länge der Strecke $\overline{OA}$. Der Betrag des Nullvektors $\mathfrak{o}$ ist null.

Definition 29. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$, so heißt die durch

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \begin{cases} \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) & \text{falls } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o} \text{ und } \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o} \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \text{ oder } \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \end{cases} \qquad (1)$$

definierte reelle Zahl $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

Aus der Definition 29 ergibt sich unmittelbar der

Satz 42. Das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle$ zweier Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ ist null genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2}$ ist.

Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ heißen orthogonal, in Zeichen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, genau dann, wenn das Skalarprodukt $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gleich null ist.

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ Repräsentanten von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.
Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ können einen spitzen, stumpfen oder rechten Winkel $\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \varphi$ einschließen (Fig. 35, 36, 37).

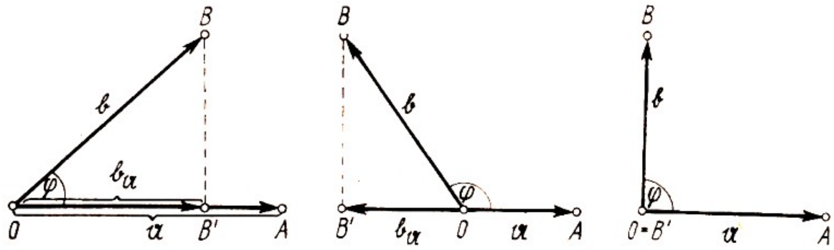


Fig. 35-37

Von B fällen wir das Lot auf die Gerade OA. Den Fußpunkt bezeichnen wir mit B' und den Vektor $B' - O$ mit $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$. Der Vektor $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ heißt Parallelkomponente des Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich des Vektors $\mathfrak{a}$.

Wir entnehmen folgende Beziehung aus Fig. 35

$$\|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\varphi$$

bzw. aus Fig. 36

$$\|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\varphi$$

Auf Grund von (1) ist im ersten Fall

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a}\rangle = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\| \cdot \cos 0 = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\varphi = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\langle$$

bzw. im zweiten Fall

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a}\rangle = \|\mathfrak{a}\|\cdot\|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\|\cdot\cos\pi = \|\mathfrak{a}\|\cdot\|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\|\cdot(-1)\|\mathfrak{a}\|\cdot(-\|\mathfrak{b}\|\cdot\cos\varphi)\cdot(-1) = \|\mathfrak{a}\|\cdot\|\mathfrak{b}\|\cdot\cos\varphi = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\langle$$

Schließen die beiden Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ einen rechten Winkel ein (Fig. 37), so ist

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = B' - O = \mathfrak{o}$$

und auf Grund von Satz 42 gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a}\rangle = 0 \qquad , \qquad \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0$$

Hieraus folgt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$$

Auf analoge Weise lässt sich für $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ die Beziehung

$$\langle \mathfrak{a}_\mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$$

herleiten. Damit erhalten wir den

Satz 43. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Vektoren des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, so bleibt das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ unverändert, wenn einer der Vektoren durch seine Parallelkomponente bezüglich des anderen ersetzt wird, d. h., es gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a}\rangle = \langle \mathfrak{a}_\mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle$$

Wir beweisen den

Satz 44. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$ und für alle reellen Zahlen λ gilt

a) $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle$ (2)
b) $\langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ (3)
c) $\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$ (4)
d) $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \geq 0$ (5)
e) Es ist $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist. (6)

Beweis. Wegen Satz 42 gelten offensichtlich (2), (3) und (4), falls einer der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ der Nullvektor ist. Diesen Fall wollen wir beim weiteren Beweis ausschließen.

a) Die Behauptung (2) folgt unmittelbar aus Definition 29.

b) Fall 1. Es sei $\lambda > 0$. Wegen

$$\|\lambda\mathfrak{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\| = \lambda \cdot \|\mathfrak{a}\| \qquad \text{und} \qquad \cos\angle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos\angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

gilt

$$\langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = \|\lambda\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \lambda\|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$$

Fall 2. Es sei $\lambda < 0$. Dann ist $|\lambda| = -\lambda$ und es gilt

$$\|\lambda\mathfrak{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\| = -\lambda \cdot \|\mathfrak{a}\|$$

Ferner ist

$$\cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \cos[\pi - \angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})] = -\cos\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle &= \|\lambda\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = -\lambda\|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot [-\cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b})] \\ &\lambda\|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\| \cdot \cos\angle(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \end{aligned}$$

Fall 3. Es sei $\lambda = 0$. Dann ist $\lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0$. Wegen $\lambda\mathfrak{a} = 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ gilt

$$\langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0 \qquad \text{und wir erhalten} \qquad \langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$$

c) Fall 1. Es sei $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$. Wegen Satz 42 ist

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = 0, \qquad \langle \mathfrak{a},\mathfrak{o}\rangle = 0, \qquad \langle \mathfrak{b},\mathfrak{o}\rangle = 0$$

Hieraus folgt

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{o}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{o}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{o}\rangle$$

d.h., die zu beweisende Beziehung gilt für $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$.

Fall 2. Es sei $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$. Berücksichtigen wir Satz 43, so ist

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle \tag{7}$$

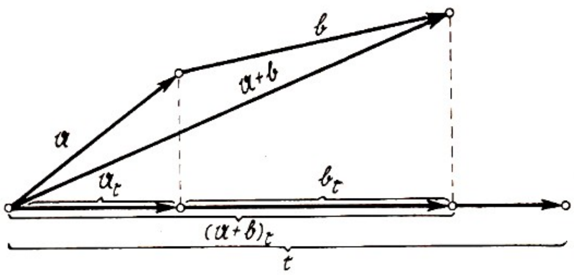


Fig. 38

Der Anschauung entnehmen wir (Fig. 38) die Beziehung

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_\mathfrak{c} + \mathfrak{b}_\mathfrak{c} \tag{8}$$

Mit Hilfe von (8) geht (7) über in

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a}_\mathfrak{c},\mathfrak{b}_\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle \tag{9}$$

Da die Vektoren $\mathfrak{a}_\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ parallel zum Vektor $\mathfrak{c}$ sind, gibt es reelle Zahlen λ,μ derart, dass

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{c} \qquad , \qquad \mathfrak{b}_\mathfrak{c} = \mu\mathfrak{c} \tag{10}$$

ist. Setzen wir (10) in (9) ein, so erhalten wir

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle \lambda\mathfrak{c}+\mu\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle = \langle (\lambda+\mu)\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle$$

Wegen Satz 44b ist

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = (\lambda+\mu)\langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle + \mu\langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle$$

Nochmalige Anwendung von Satz 44b und anschließende Berücksichtigung von (10) und Satz 43 liefert

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle \lambda\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mu\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a}_\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b}_\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle$$

d) Die Beziehungen (5) und (6) folgen unmittelbar aus Definition 29.

Es sei zunächst $\mathfrak{c}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$. Mit Hilfe von (1) erhalten wir die Beziehung

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = \|\mathfrak{a}\|^2 \tag{11}$$

die wegen $\|\mathfrak{o}\| = 0$ auch für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ gilt. Auf Grund von (11) können wir den Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{V}_2$ durch

$$\|\mathfrak{a}\| = \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \tag{12}$$

ausdrücken.

Aufgabe 16. Man beweise, dass für alle Vektoren $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$ gilt:
a) $\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$
b) $\langle \mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$
c) $\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$

Beispiel 20. Wir zeigen, dass in jedem Parallelogramm $ABCD$ die Summe der Diagonalenquadrate gleich der Summe der vier Seitenquadrate ist.
Mit $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ bezeichnen wir die Vektoren $D-A$, $B-A$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{V}_2$, die das Parallelogramm $ABCD$ aufspannen (Fig. 39).

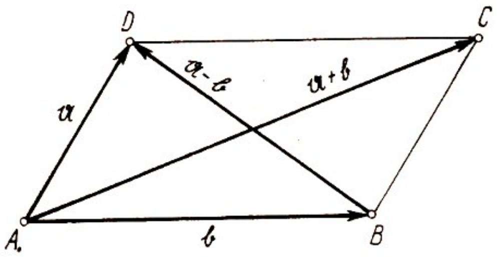


Fig. 39

Die Diagonalenquadrate sind $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2$, $\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2$. Berücksichtigen wir (12) und Aufgabe 16 a bzw. Aufgabe 16 b, so erhalten wir

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 = \langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$$
$$\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2 = \langle \mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$$

Hieraus folgt

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2 = 2(\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle)$$

Nochmalige Anwendung von (12) liefert die Behauptung

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2 = 2(\|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2) \tag{13}$$

Die Gleichung (13) heißt Parallelogrammgleichung.

Beispiel 21. Wir zeigen, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate ist.

Mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ bezeichnen wir die Vektoren $B - C$, $A - C$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}_2$, die den rechten Winkel des Dreiecks ABC einschließen (Fig. 40).

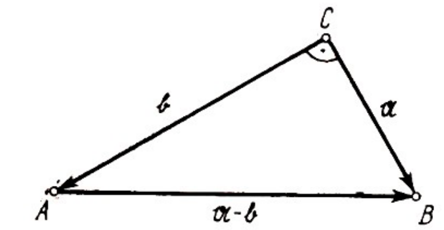


Fig. 40

Das Hypotenusenquadrat ist

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle - 2\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle^2 \tag{14}$$

Wegen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ gilt $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$, und (14) geht über in

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2$$

Damit haben wir bewiesen:
Wenn $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ ist, so folgt $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2$ (15)
Man bezeichnet (15) als Satz des Pythagoras.

Aufgabe 17. Man beweise, dass die Diagonalen eines Vierecks $ABCD$ aufeinander senkrecht stehen genau dann, wenn die Summe der Quadrate der Gegenseiten übereinstimmen.

In diesem Abschnitt haben wir in dem reellen Vektorraum $\mathfrak{B}_2$ das Skalarprodukt zweier Vektoren unter Verwendung des Winkelbegriffs definiert.
In dem folgenden Abschnitt werden wir einen anderen Weg einschlagen. Motivation für die Definition des Skalarprodukts wird der Satz 44 sein.

6.2 Begriff des Skalarproduktes

Definition 30. Eine Funktion $\langle\ \rangle$, die je zwei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}$ eine reelle Zahl $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ zuordnet, ist eine Skalarproduktfunktion genau dann, wenn für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von $\mathfrak{B}$ und für alle reellen Zahlen λ gilt

S 1. $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle$
S 2. $\langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$
S 3. $\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle$
S 4. $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle \geq 0$
S 5. Es ist $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.

Die reelle Zahl $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ heißt Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Beispiel 22. In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,n}$ definieren wir eine Funktion $\langle\ \rangle_1$ durch

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \tag{1}$$

Durch (1) wird jedem Vektorpaar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}_{1,n}$ eindeutig eine reelle Zahl $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ zugeordnet. Den beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = (3, 1,4) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (2,3, 2)$$

des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ wird durch (1) die reelle Zahl

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$$

zugeordnet. Wir beweisen, dass $\langle\ \rangle$ eine Skalarproduktfunktion ist.

Beweis. a) Stets gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_n a_n = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle_1$$

b) Stets gilt

$$\langle \lambda \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = (\lambda a_1) b_1 + (\lambda_2 a_2) b_2 + ... + (\lambda a_n) b_n = \lambda (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \lambda \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1$$

c) Wegen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \qquad \text{ist}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle_1 &= (a_1 + b_1(c_n + (a_2 + b_2) c_2 + ... + (a_n + b_n) c_n \\ &= (a_1 c_1 + ... + a_n c_n)(b_1 c_1 + ... + b_n c_n) = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle_1 + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle_1 \end{aligned}$$

d) Stets gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle_1 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq 0$$

e) Es sei $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle_1 = 0$. Wegen (1) ist dann

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$$

Diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen kann nur für

$$a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_n = 0 \tag{2}$$

verschwinden. Dies besagt, dass

$$\mathfrak{a} = (0,0,.,0) = \mathfrak{o}$$

ist. Umgekehrt ergibt sich aus der Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$

unmittelbar (2). Es ist dann

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle_1 = \langle \mathfrak{o}, \mathfrak{o} \rangle_1 = 0 \cdot 0 + ... + 0 \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 18. Es seien $k_1, k_2, ..., k_n$ beliebige, nach Wahl aber feste positive reelle Zahlen. In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,n}$ sei eine Funktion $\langle\ \rangle_5$ durch

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_5 = k_1 a_1 b_1 + k_2 a_2 b_2 + ... + k_n a_n b_n$$

definiert. Man beweise, dass $\langle\ \rangle_5$ eine Skalarproduktfunktion ist.

Aufgabe 19. In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,2}$ sei eine Funktion $\langle\ \rangle_6$ durch

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_6 = a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + 2b_2)$$

definiert. Man beweise, dass $\langle\ \rangle_6$ eine Skalarproduktfunktion ist.

Aufgabe 20. In dem reellen Vektorraum $\mathfrak{M}_{1,2}$ sei eine Funktion f durch

$$f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$$

definiert. Man untersuche, ob f eine Skalarproduktfunktion ist.

Im folgenden Abschnitt werden wir auf der Grundlage der Definition 30 den Begriff euklidischer Vektorraum einführen.

6.3 Begriff des euklidischen Vektorraumes

Definition 31. Ein reeller Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist ein euklidischer Vektorraum genau dann, wenn in $\mathfrak{V}$ eine Skalarproduktfunktion definiert ist. Euklidische Vektorräume bezeichnen wir mit $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$, der reelle Vektorraum $\mathfrak{V}$ heißt Träger des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$.

Auf Grund von Definition 31 und dem in 6.2. Bewiesenen gilt der

Satz 45. Es ist $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_5)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_6)$ mit

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \qquad \text{bzw.} \tag{1}$$

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_5 = k_1a_1b_1 + k_2a_2b_2 + ... + k_na_nb_n \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

wobei $k_1, k_2, ..., k_n$ beliebige, nach Wahl aber feste positive reelle Zahlen bedeuten, bzw.

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_6 = a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + 2b_2) \tag{3}$$

ein euklidischer Vektorraum.

Offensichtlich sind auch $(\mathfrak{M}_{n,1}, \langle\ \rangle_1)$ mit (1) und $(\mathfrak{V}_2, \langle\ \rangle)$ mit 6.1. (1) euklidische Vektorräume. Wir ziehen aus der Definition 31 einige Folgerungen.

Satz 46. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ und für alle reellen Zahlen λ gilt
a) $\langle \mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$,
b) $< \mathfrak{a},\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle$,
c) $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{o}\rangle = \langle \mathfrak{o},\mathfrak{a}\rangle = 0$.
d) Es ist $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle > 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ist.

Beweis.
a) Auf Grund von S 4 und S 2 gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}\rangle = \langle \lambda\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$$

b) Wegen S 1 und S 3 gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{b} + \mathfrak{c},\mathfrak{a}\rangle = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle \mathfrak{c},\mathfrak{a}\rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle$$

c) Setzen wir $\lambda = 0$ in (a), so erhalten wir $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{o}\rangle = 0$. Wegen S 1 ist auch $\langle \mathfrak{o}, \mathfrak{a}\rangle = 0$.

d)S 5 ist logisch äquivalent mit:
Es ist $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle \neq 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ist.
Berücksichtigen wir S 4, so erhalten wir die Behauptung.

Aufgabe 21. Man beweise durch vollständige Induktion nach k, dass in einem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ für alle Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ und für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_k$ gilt

$$\langle \mathfrak{b}, x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k\rangle = x_1\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1\rangle + x_2\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_2\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_k\rangle \tag{4}$$

6.4 Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung

In euklidischen Vektorräumen gilt eine sehr wichtige Ungleichung, die nach dem französischen Mathematiker Augustin Cauchy (1789-1857), dem deutschen Mathematiker Herman Amandus Schwarz (1843-1921) und dem russischen Mathematiker Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1804 bis 1889) benannt wird.

Satz 47. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ gilt die Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle^2 \leq \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \cdot \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \tag{1}$$

Beweis.
Fall 1. Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.
Dann gilt auf Grund von Satz 46 c die Ungleichung (1), da $0 \leq 0$ eine wahre Aussage ist.

Fall 2. Es sei $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$.
Wegen Satz 46 d ist dann

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle > 0 \qquad , \qquad \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle > 0 \tag{2}$$

Für alle reellen Zahlen x gilt wegen S 4 stets

$$y = \langle x\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, x\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\rangle \geq 0$$

Hieraus folgt

$$y = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle x^2 + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle x + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \geq 0 \tag{3}$$

Wegen (2) ist in (3) der Koeffizient $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle$ positiv, also von null verschieden. Die Kurve von

$$y = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle x^2 + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle x + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$$

ist daher eine Parabel, die wegen $y > 0$ die Abszissenachse höchstens berührt. Deshalb kann die quadratische Gleichung

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle x^2 + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle x + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle = 0 \tag{4}$$

auch nicht zwei verschiedene reelle Lösungen besitzen. Wenden wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf (4) an, so erhalten wir

$$x = \frac{-\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \pm \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle^2 - \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \cdot \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}}{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle}$$

Im vorliegenden Fall muss

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle^2 - \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \cdot \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \leq 0$$

also

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle^2 \leq \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle \cdot \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle$$

sein, womit die Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung bewiesen ist.

Der Nutzen des soeben bewiesenen Satzes besteht u. a. darin, dass man durch Anwendung dieser Ungleichung auf spezielle euklidische Vektorräume wichtige Ungleichungen erhält, die eines gesonderten Beweises dann nicht mehr bedürfen.

Beispiel 23. Im euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_5)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_6)$ führt

(1) unter Berücksichtigung von Satz 45 zu folgenden Aussagen:

a) Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ gilt

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Diese spezielle Ungleichung haben wir bereits in 4.1. (5) bewiesen. Der in 4.1. für diese Ungleichung geführte Beweis entspricht dem Beweis der Cauchy-Schwarz-Bunjakowskischen Ungleichung (1).

b) Sind $k_1, k_2, ..., k_n$ beliebige, nach Wahl aber feste positive reelle Zahlen, so gilt für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ stets

$$(k_1a_1b_1 + k_2a_2b_2 + ... + k_na_nb_n)^2 \leq (k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + ... + k_na_n^2)(k_1b_1^2 + k_2b_2^2 + ... + k_nb_n^2)$$

c) Für alle reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt

$$[a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + 2b_2)]^2 \leq [a_1(a_1 + a_2) + a_2(a_1 + 2a_2)] \cdot [b_1(b_1 + b_2) + b_2(b_1 + 2b_2)]$$

bzw.

$$(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2)(b_1^2 + 2b_1b_2 + 2b_2^2)$$

Mit Hilfe von Satz 47 leiten wir eine Ungleichung her, die nach dem deutschen Mathematiker Herman Minkowski (1864-1909) benannt wird.

Satz 48. Für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ gilt die Minkowskische Ungleichung

$$\sqrt{\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle} + \sqrt{\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle} \tag{5}$$

Beweis. Es ist

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle \tag{6}$$

Aus (1) folgt

$$|\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} \tag{7}$$

Da stets

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \leq |\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle|$$

ist, gilt wegen (7) die Ungleichung

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \leq \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} \tag{8}$$

Mit Hilfe von (8) geht (6) über in

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle \leq \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + 2\sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle}\sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle$$

Diese Ungleichung lässt sich in der Form

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle \leq (\sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle} + \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle})^2 \tag{9}$$

schreiben. Da stets

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle \geq 0 \qquad , \qquad \sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle} + \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} \geq 0$$

ist, folgt aus (9) die Behauptung (5).

Beispiel 24. Im euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_1)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_5)$ bzw. $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_6)$ führt (5) unter Berücksichtigung von Satz 45 zu folgenden Aussagen:

a) Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ gilt

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$$

Diese spezielle Ungleichung haben wir bereits in 4.1. bewiesen. Der in 4.1 für diese Ungleichung geführte Beweis entspricht dem Beweis der Minkowskischen Ungleichung (5).

b) Sind $k_1, k_2, ..., k_n$ beliebige, nach Wahl aber feste positive reelle Zahlen, so gilt für alle reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ stets

$$\begin{aligned}&\sqrt{k_1(a_1+b_1)^2+k_2(a_2+b_2)^2+...+k_n(a_n+b_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{k_1a_1^2+k_2a_2^2+...+k_na_n^2}+\sqrt{k_1b_1^2+k_2b_2^2+...+k_nb_n^2}\end{aligned}$$

c) Für alle reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a_1+b_1)(a_1+b_1+2a_2+2b_2)+(a_2+b_2)(a_1+b_1+2a_2+2b_2)} \leq \\ &\leq \sqrt{a_1(a_1+a_2)+a_2(a_1+2a_2)}+\sqrt{b_1(b_1+b_2)+b_2(b_1+ba_2)}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+2a_2^2+b_1^2+2b_2^2+2a_1a_2+2a_1b_1+2a_1b_2+2a_2b_1+2a_2b_2+2b_1b_2} \leq \\ &\leq \sqrt{a_1^2+2a_1a_2+2a_2^2}+\sqrt{b_1^2+2b_1b_2+2b_2^2}\end{aligned}$$

Satz 49. In jedem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ kann durch

$$\|\mathfrak{a}\| = \sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle} \tag{10}$$

eine Norm definiert werden, d. h., jeder euklidische Vektorraum ist auf Grund von (10) auch ein normierter reeller Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle; \|\ \|)$.

Beweis.
Dazu zeigen wir, dass die in $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ durch (10) definierte Funktion $\|\ \|$ eine Betragsfunktion ist, also die Eigenschaften N 1, N 2, N 3 besitzt.

a) Es sei $\|\mathfrak{a}\| = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle = 0$. Hieraus folgt

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = 0 \tag{11}$$

Auf Grund von S 5 ist dann

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \tag{12}$$

Es gelte umgekehrt (12). Wegen S 5 gilt dann (11) und damit $\sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle} = 0$ bzw. $\|\mathfrak{a}\| = 0$.

b) Wegen (10), S 2 und Satz 46 ist stets

$$\|\lambda\mathfrak{a}\| = \sqrt{\langle \lambda\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{a}\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} = |\lambda|\cdot\sqrt{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle} = |\lambda|\cdot\|\mathfrak{a}\|$$

c) Auf Grund von (5) gilt unter Berücksichtigung von (10) stets

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\| \leq \|\mathfrak{a}\|+\|\mathfrak{b}\|$$

Damit können wir in jedem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ den Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit Hilfe von (10) definieren. Insbesondere liefert (10) für den Betrag des Vektors

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_1)$ die Beziehung

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

die mit 4.2. (1) übereinstimmt.

Da ein normierter reeller Vektorraum auch ein metrischer reeller Vektorraum ist, können wir wegen 5.2. (1) und (10) in einem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ den Abstand zweier Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sqrt{\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b}\rangle} \tag{13}$$

definieren. Berechnen wir beispielsweise mit Hilfe von (13) den Abstand der beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,n}, \langle\ \rangle_1)$, so erhalten wir die Beziehung

$$d_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

die mit 5.2. (2) übereinstimmt.

Aufgabe 22. Es seien $\mathfrak{a} = (1, -1)$, $\mathfrak{b} = (3, -1)$.
a) Man berechne mit Hilfe von (10) den Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,2}, \langle\ \rangle_6)$.
b) Man berechne mit Hilfe von (13) den Abstand der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,2}, \langle\ \rangle_6)$.

Satz 50. In jedem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ gilt die Parallelogrammgleichung, d. h., für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ gilt

$$\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = 2(\|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2) \tag{14}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 &= \langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle + 2\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle - 2\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\rangle \\ &= 2(\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle + \langle \mathfrak{b} + \mathfrak{b}\rangle) = 2(\|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2)\end{aligned}$$

Da in der Parallelogrammgleichung (14) nur Beträge von Vektoren auftauchen, liegt die Frage nahe, ob die Parallelogrammgleichung auch in jedem normierten reellen Vektorraum gilt. Durch ein Gegenbeispiel zeigen wir, dass dies nicht immer der Fall ist.

Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = (1, -1) \qquad , \qquad \mathfrak{b} = (1,1) \tag{15}$$

des normierten reellen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,2}, \|\ \|_2)$. Wegen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (2,0) \qquad , \qquad \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (0, -2)$$

ist
$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 = \max\{2,0\} = 2, \quad \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2 = \max\{0,2\} = 2,$$
$$\|\mathfrak{a}\|^2 = \max\{1,1\} = 1, \quad \|\mathfrak{b}\|^2 = \max\{1,1\} = 1$$
und
$$\left.\begin{array}{r}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|_2)^2 + (\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|_2)^2 = 8\\ 2[(\|\mathfrak{a}\|_2)^2 + (\|\mathfrak{b}\|_2)^2] = 4\end{array}\right\} \tag{16}$$
Aus (16) folgt, dass in dem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,2}, \| \ \|_2)$ die Vektoren (15) nicht der Parallelogrammgleichung (14) genügen.
Damit haben wir gleichzeitig bewiesen, dass in einem reellen Vektorraum nicht jede Skalarproduktfunktion durch eine Betragsfunktion erzeugt werden kann.
Dagegen gilt der

Satz 51. In jedem normierten reellen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, kann durch
$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2) \tag{17}$$
ein Skalarprodukt definiert werden, d.h., jeder normierte reelle Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, ist ein euklidischer Vektorraum.

Der Beweis dieses Satzes setzt im letzten Teil von (e) Kenntnisse aus dem in der gleichen Reihe erschienenen Bändchen "Metrische Räume" voraus.

Beweis. Wir zeigen, dass die durch (17) definierte Funktion $\langle \ \rangle$ eine Skalarproduktfunktion ist, also die Eigenschaften S 1 - S 5 besitzt. Wir weisen der Reihe nach die Eigenschaften S 1, S 4, S 5, S 3 und S 2 nach.

a) Es ist
$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle &= \frac{1}{4}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\|^2 - \|(-1)(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\|^2 - |-1|^2\|\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\|^2 - \|\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\|^2) = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle\end{aligned}$$
b) Wegen $\|\mathfrak{a}\| \geq 0$ gilt stets
$$\langle \mathfrak{a}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\|^2 - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\|^2) = \frac{1}{4}\|2\mathfrak{a}\|^2 = \|a\|^2 \geq 0 \tag{18}$$
c) Es sei $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle = 0$. Wegen (18) ist dann $\|\mathfrak{a}\|^2 = 0$. Hieraus folgt $\|\mathfrak{a}\| = 0$ bzw. $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. (19)

Es gelte umgekehrt (19). Wegen (17) ist
$$\langle \mathfrak{o},\mathfrak{o}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{o}\|^2 - \|\mathfrak{o}\|^2) = 0$$
d) Es seien $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ beliebige Vektoren von $(\mathfrak{V}, \| \ \|)$. Wegen (17) gilt
$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle &= \frac{1}{4}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\|^2 - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b}+\mathfrak{c}\|^2 - \|\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\|^2)\\ &= \frac{1}{4}[(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b}+\mathfrak{c}\|^2) - (\|\mathfrak{a}-\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\|^2)]\end{aligned} \tag{20}$$
Nach Voraussetzung ist die Parallelogrammgleichung
$$\|\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*\|^2 + \|\mathfrak{a}^* - \mathfrak{b}^*\|^2 = 2(\|\mathfrak{a}^*\|^2 + \|\mathfrak{b}^*\|^2) \tag{21}$$

für alle Vektoren $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*$ von $(\mathfrak{V}, \|\ \|)$ erfüllt. Setzen wir in (21)

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \qquad , \qquad \mathfrak{b}^* = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

bzw.

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} - \mathfrak{c} \qquad , \qquad \mathfrak{b}^* = \mathfrak{b} - \mathfrak{c}$$

so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 = 2(\|\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\|^2) \\ \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 = 2(\|\mathfrak{a} - \mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\|^2) \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \|\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\|^2 = \tfrac{1}{2}(\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2) \\ \|\mathfrak{a} - \mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\|^2 = \tfrac{1}{2}(\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Mit Hilfe von (22) geht (20) über in

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{2}[\frac{1}{4}(\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}\|^2 - \|\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}\|^2)]$$

Berücksichtigen wir (17), so erhalten wir

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, 2\mathfrak{c}\rangle \tag{23}$$

Für $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ lautet (23)

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{o},\mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{a}, 2\mathfrak{c}\rangle \tag{24}$$

Auf Grund von (17) ist

$$\langle \mathfrak{o},\mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathfrak{c}\|^2 - \|\mathfrak{c}\|^2) = 0 \tag{25}$$

Damit geht (24) über in

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{a}, 2\mathfrak{c}\rangle \tag{26}$$

Wegen (26) gilt

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, 2\mathfrak{c}\rangle \tag{27}$$

Setzen wir (27) in (23) ein, und vertauschen wir anschließend beide Seiten der Gleichung miteinander, so erhalten wir die Beziehung

$$\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\rangle \tag{28}$$

die für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von $(\mathfrak{V}, \|\ \|)$ gilt.

e) Ist einer der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ der Nullvektor, so ist auf Grund von (17) stets

$$\langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0 \qquad , \qquad \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0$$

d.h., es gilt

$$\langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \tag{29}$$

Diesen Fall werden wir beim weiteren Beweis ausschließen.

Fall 1. Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion, dass (29) für alle natürlichen Zahlen $\lambda = n$ gilt. Offensichtlich ist wegen

$$\langle 1\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 1\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$$

die Beziehung

$$\langle n\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = n\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \tag{30}$$

richtig für $n = 1$. Wir zeigen, dass aus der Gültigkeit von (30) für eine beliebige natürliche Zahl $n = k \geq 1$ die Gültigkeit von (30) für $n = k + 1$ folgt. Es ist

$$\langle (k+1)\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle k\mathfrak{a} + \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle \tag{31}$$

Auf Grund von (28) gilt

$$\langle k\mathfrak{a} + \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle k\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle \tag{32}$$

Mit Hilfe von (32) geht (31) über in

$$\langle (k+1)\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle k\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle \tag{33}$$

Berücksichtigen wir in (33) die Induktionsvoraussetzung

$$\langle k\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = k\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$$

so erhalten wir

$$\langle (k+1)\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = (k+1)\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle$$

Damit gilt (29) für alle natürlichen Zahlen λ.

Fall 2. Es sei λ eine ganze Zahl. Für positive ganze Zahlen ist (29) soeben bewiesen worden. Ist $\lambda = 0$, so gilt wegen (25)

$$\langle 0\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = \langle \mathfrak{o}, \mathfrak{b}\rangle = 0$$

Da auch $0\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0$ ist, erhalten wir

$$\langle 0\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$$

Diese Gleichung besagt, dass (29) für $\lambda = 0$ gilt.
Es sei λ eine negative ganze Zahl, also $\lambda = -n$, wobei n eine positive ganze Zahl bedeutet. Wegen

$$(-n)\mathfrak{a} = [(-1) \cdot n]\mathfrak{a} = [n \cdot (-1)]\mathfrak{a} = n[(-1)\mathfrak{a}] = n(-\mathfrak{a})$$

und unter Berücksichtigung von (30) gilt

$$\langle (-n)\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = \langle n(-\mathfrak{a}), \mathfrak{b}\rangle = n\langle -\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \tag{34}$$

Da

$$\begin{aligned}\langle -\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle &= \frac{1}{4}(\|-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2) = \frac{1}{4}(\|(-1)(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\|^2 - \|(-1)(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2) = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle \end{aligned}\tag{35}$$

ist, geht (34) mit Hilfe von (35) über in

$$\langle (-n)\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = (-n)\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle \tag{36}$$

Damit ist bewiesen, dass (29) auch für alle ganzen Zahlen λ gilt.

Fall 3. Es sei $\lambda = \frac{m}{n}$ eine rationale Zahl, wobei m und n ganze Zahlen mit $n > 0$ bedeuten. Es ist

$$\frac{m}{n}\mathfrak{a} = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right)\mathfrak{a} = m\left(\frac{1}{n}\mathfrak{a}\right)$$

Unter Berücksichtigung des soeben Bewiesenen gilt

$$\left\langle \frac{m}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle = \left\langle m\left(\frac{1}{n}\mathfrak{a}\right), \mathfrak{b} \right\rangle = m\left\langle \frac{1}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle \tag{37}$$

Wegen $m = \frac{m}{n} \cdot n$ lässt sich (37) in der Form

$$\left\langle \frac{m}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle = \frac{m}{n} \cdot n\left\langle \frac{1}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle \tag{38}$$

schreiben. Da n eine positive ganze Zahl ist, gilt auf Grund von (30) die Beziehung

$$n\left\langle \frac{1}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle \tag{39}$$

Mit Hilfe von (39) geht (38) über in

$$\left\langle \frac{m}{n}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \right\rangle = \frac{m}{n}\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle \tag{40}$$

womit gezeigt ist, dass (29) auch für alle rationalen Zahlen λ gilt.

Fall 4. Es sei λ eine beliebige, nach Wahl aber feste reelle Zahl und

$$\{n \to r_n\} \tag{41}$$

eine gegen λ konvergierende Zahlenfolge rationaler Zahlen r_n, d.h., es ist

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lambda \tag{42}$$

Die Beziehung (42) besagt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine reelle Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Wenn $n > N(\varepsilon)$ ist, so folgt $|r_n - \lambda| < \varepsilon$ (43)

Da r_n eine rationale Zahl ist, gilt wegen (40)

$$\langle r_n\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = r_n\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \tag{44}$$

Berücksichtigen wir (43) und (44), so erhalten wir:

Wenn $n = N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$|\langle r_n\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle - \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle| = |r_n\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle - \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = |r_n - \lambda| \cdot |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle| < |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle| \cdot \varepsilon \tag{45}$$

Da $|\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle|$ eine feste positive reelle Zahl ist, besagt (45), dass

$$\lim_{n\to\infty} \langle r_n\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \lambda\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \tag{46}$$

ist. Es bleibt noch

$$\lim_{n\to\infty} \langle r_n\mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle = \langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \tag{47}$$

zu zeigen. Aus (46) und (47) folgt dann, dass (29) für alle reellen Zahlen λ gilt.

Auf Grund von 4.2. (7) ist

$$||\|r_{\mathfrak{a}} \pm \mathfrak{b}\| - \|\lambda\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\|| \leq \|r_n\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} - \lambda\mathfrak{a} \mp \mathfrak{b}\| = \|(r_n - \lambda)\mathfrak{a}\| = |r_n - \lambda| \cdot \|\mathfrak{a}\| \tag{48}$$

Berücksichtigen wir (43) und (48), so erhalten wir:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$||\|r_n\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\| - \|\lambda\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\|| < \|\mathfrak{a}| \cdot \varepsilon \tag{49}$$

Da $\|\mathfrak{a}\|$ eine feste positive reelle Zahl ist, besagt (49), dass

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\| = \|\lambda\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\| \tag{50}$$

ist. Wegen (50) sind die beiden Zahlenfolgen

$$\{n \to \|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|\} \qquad , \qquad \{n \to \|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|\}$$

konvergent und damit auch beschränkt. Dies bedeutet, dass es positive reelle Zahlen K_1 und K_2 derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| \leq K_1 \qquad , \qquad \|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \leq K_2$$

Setzen wir

$$K_3 = \max\{K_1, K_2\}$$

so gilt für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$\|r_n\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}\| \leq K_3 \tag{51}$$

Wegen (17) ist

$$\begin{aligned}
|\langle r_n\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle - \langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle| &= \frac{1}{4}|\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 - \|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 - \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2| \\
&= \frac{1}{4}|[\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 - \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2] - [\|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 - \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2]| \\
&\leq \frac{1}{4}|\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 - \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2| + \frac{1}{4}|\|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 - \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2]| \\
&= \frac{1}{4}|\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| - \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|| \cdot |\|r_n\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| + \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|| \\
&+ \frac{1}{4}|\|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| - \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|| \cdot |\|r_n\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| + \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\||
\end{aligned} \tag{52}$$

Wegen (49), (51) und (52) gilt:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$\begin{aligned}
|\langle r_n\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle - \langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle| &< \frac{1}{4} \cdot \|\mathfrak{a}\| \cdot \varepsilon \cdot (K_3 + \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| + K_3 + \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \|\mathfrak{a}\| \cdot \varepsilon \cdot (2K_3 + \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| + \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|)
\end{aligned} \tag{53}$$

In (53) ist

$$\|\mathfrak{a}\| \cdot (2K_3 + \|\lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| + \|\lambda\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|)$$

eine feste positive reelle Zahl, die wir mit $4K$ bezeichnen. Damit geht (53) über in:

Wenn $n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt

$$|\langle r_n\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle - \langle \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle| < K\varepsilon \tag{54}$$

Die Beziehung (54) besagt, dass (47) gilt.

6.5 Winkel zwischen zwei Vektoren

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}_2, \langle\ \rangle)$, so folgt aus 6.1. (1) die Beziehung

$$\cos\angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \frac{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle}{\|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\|} \tag{1}$$

Wir zeigen, dass man in jedem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ analog zu (1) für zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\varphi = \angle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ definieren kann.
Wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq 0$ ist wegen Satz 46 d

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle > 0 \qquad \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle > 0$$

und damit auch

$$\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle} > 0 \tag{2}$$

Aus 6.4. (1) folgt

$$|\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle| \leq \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}$$

und hieraus wegen (2) die Ungleichung

$$\frac{|\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle|}{\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}} \leq 1 \tag{3}$$

Die Beziehung (3) lässt sich auch in der Form

$$\left|\frac{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}}\right| \leq 1 \tag{4}$$

schreiben. Die Ungleichung (4) ist äquivalent mit

$$-1 \leq \frac{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}} \leq 1 \tag{5}$$

Für die Kosinusfunktion gilt eine zu (5) analoge Beziehung

$$-1 \leq \cos\varphi \leq 1 \tag{6}$$

Ein Vergleich von (6) mit (5) legt in Analogie zu (1) die Vereinbarung

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}} \tag{7}$$

nahe. Durch die zusätzliche Forderung $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist bei Vorgabe der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ der Winkel φ in (7) eindeutig bestimmt.
Diese Überlegungen führen zur

Definition 32. Unter dem Winkel φ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ versteht man die reelle Zahl φ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$, die der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle}} \tag{8}$$

genügt.

Beispiel 25. In dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_1)$ berechnen wir den Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{a} = (1,1,0)$, $\mathfrak{b} = (1,0,1)$.
Es ist

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$$
$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$$
$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

und damit

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 23. In dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ mit

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle_5 = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

berechne man den Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{a}(5,-1,1)$, $\mathfrak{b} = (1,1,-1)$.

Schließen zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ einen rechten Winkel ein, so folgt wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ aus (8) die Beziehung

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0 \tag{9}$$

Unabhängig davon, ob die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ vom Nullvektor verschieden sind oder nicht, vereinbaren wir auf der Grundlage von (9) die

Definition 33. In einem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ sind zwei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ orthogonal, in Zeichen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$ ist.

Beispiel 26. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}$ Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$. Wir zeigen, dass der Vektor $\mathfrak{b}$ zu allen Linearkombinationen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ orthogonal ist, falls $\mathfrak{b}$ zu den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ orthogonal ist. Es sei

$$\mathfrak{a} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k$$

eine beliebige Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$. Auf Grund von 6.3. (4) gilt

$$\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a} \rangle = x_1\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_1 \rangle + x_2\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_2 \rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_k \rangle$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzung

$$\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_1 \rangle = 0, \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_2 \rangle = 0, ..., \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_k \rangle = 0$$

so erhalten wir die Behauptung $\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a} \rangle = 0$.

Der Satz 46 c besagt, dass in einem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ der Nullvektor $\mathfrak{o}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ orthogonal ist.

Aufgabe 24. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Vektor eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$. Man beweise:
Es ist $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.

Satz 52. In jedem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ gilt der Satz des Pythagoras, d. h., für alle Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ gilt:

Wenn $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ ist, so folgt $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2$. (10)

Beweis. Es ist

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle - 2\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \tag{11}$$

Wegen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ ist $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$, und (11) geht über in

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \tag{12}$$

Mit

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = \|\mathfrak{a}\|^2 \qquad , \qquad \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = \|\mathfrak{b}\|^2$$

führt (12) auf die Gleichung

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 25.
a) Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ orthogonale Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Man beweise, dass

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \|\mathfrak{a}_2\|^2$$

ist.

b) Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ paarweise orthogonale Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Man beweise durch vollständige Induktion nach k, dass

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_k\|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \|\mathfrak{a}_2\|^2 + ... + \|\mathfrak{a}_k\|^2 \tag{13}$$

ist.

Aufgabe 26. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Man beweise:
Es ist $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ genau dann, wenn $\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|] = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|$ ist. (14)

Definition 34. Ein Vektor $\mathfrak{a}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ ist zu einem Vektorsystem $\mathfrak{S}$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ orthogonal, in Zeichen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{S}$, genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ zu jedem Vektor von $\mathfrak{S}$ orthogonal ist.

Beispiel 27. Wir zeigen, dass der Vektor $\mathfrak{a} = (0,0,1)$ des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_1)$ zum Vektorsystem $\mathfrak{S}$ von $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_1)$, das aus allen Vektoren der Form $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, 0)$ besteht, wobei b_1, b_2 beliebige reelle Zahlen bedeuten, orthogonal ist. Aus

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_1 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot 0 = 0$$

folgt die Behauptung.

6.6 Gramsche Matrix

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ seien linear abhängig. Dann besitzt die Gleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

auf Grund von Definition 19 eine nichttriviale Lösung

$$x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, ..., x_k = x_k^* \tag{1}$$

Es ist dann

$$\langle \mathfrak{a}_i, x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_k\mathfrak{a}_k\rangle = \langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{o}\rangle$$

für alle $i \in \{1,2,...,k\}$. Berücksichtigen wir 6.3. (4) und Satz 46 c, so erhalten wir

$$x_1^*\langle \mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_1\rangle + x_2^*\langle \mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_2\rangle + ... + x_k^*\langle \mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_k\rangle = 0 \tag{2}$$

Setzen wir in (2) für i der Reihe nach die Zahlen $1,2,...,k$ ein, so erhalten wir wegen

$$x_j^*\langle \mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j\rangle = \langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j\rangle x_j^*$$

das System

$$\left.\begin{array}{r} \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle x_1^* + \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle x_2^* + ... + \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle x_k^* = 0 \\ \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle x_1^* + \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle x_2^* + ... + \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle x_k^* = 0 \\ ... \\ \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle x_1^* + \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle x_2^* + ... + \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle x_k^* = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle x_1 + \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle x_2 + ... + \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle x_k = 0 \\ \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle x_1 + \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle x_2 + ... + \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle x_k = 0 \\ ... \\ \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle x_1 + \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle x_2 + ... + \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle x_k = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

von k Gleichungen mit k Variablen besitzt wegen (3) eine nichttriviale Lösung (1). Nach Satz 28 ("Determinanten") muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle \end{vmatrix} \tag{5}$$

der quadratischen Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle \end{pmatrix} \tag{6}$$

des Gleichungssystems (4) verschwinden. Die Matrix (6) wird als Gramsche Matrix der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ in Zeichen $\mathfrak{G}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$, bezeichnet.
Die Determinante (5) bezeichnen wir mit $G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ und nennen sie die Gramsche Determinante der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$.
Damit haben wir bewiesen:

Wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ linear abhängig sind, so ist

$$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) = 0 \tag{7}$$

Von (7) gilt auch die Umkehrung:

Wenn für die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ gilt
$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) = 0$, so sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig. (8)

Beweis von (8).
Wegen $G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) = 0$ gilt unter Berücksichtigung von Definition 13 ("Matrizen")

$$\rho[\mathfrak{G}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)] < k \tag{9}$$

Die Beziehung (9) besagt, dass in dem homogenen linearen Gleichungssystem (4) der Rang der Koeffizientenmatrix (6) kleiner ist als die Anzahl k der Variablen. Auf Grund von Satz 24 ("Matrizen") besitzt das homogene lineare Gleichungssystem (4) eine nichttriviale Lösung (1), d. h. es gilt (3). Wenden wir auf jede der Gleichungen von (3) die Beziehung 6.3. (4) an, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{r} \langle \mathfrak{a}_1, x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k\rangle = 0 \\ \langle \mathfrak{a}_2, x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k\rangle = 0 \\ ... \\ \langle \mathfrak{a}_k, x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k\rangle = 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der ersten Gleichung von (10) mit x_1^*, beide Seiten der zweiten Gleichung von (10) mit x_2^*, ..., beide Seiten der k-ten Gleichung von (10) mit x_k^*, so erhalten wir unter Berücksichtigung von S 1

$$\left.\begin{array}{r} x_1^*\langle x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_1\rangle = 0 \\ x_2^*\langle x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_2\rangle = 0 \\ ... \\ x_k^*\langle x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k\rangle = 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Addition aller linken und rechten Seiten von (11) liefert unter Beachtung von 6.3. (4)

$$\langle x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k, x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k\rangle = 0$$

Wegen S 5 ist dies äquivalent mit der Gleichung

$$x_1^*\mathfrak{a}_1 + x_2^*\mathfrak{a}_2 + ... + x_k^*\mathfrak{a}_k = \mathfrak{o}$$

in der nicht alle $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ gleichzeitig verschwinden. Dies bedeutet, dass die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig sind.
Die beiden Teilergebnisse (7) und (8) fassen wir zusammen zu dem

Satz 53. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ sind linear abhängig genau dann, wenn die Gramsche Determinante der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ verschwindet.

Dieser Satz ist logisch äquivalent mit

Satz 54. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Gramsche Determinante der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ nicht verschwindet.

Beispiel 28. Mit Hilfe der Gramschen Determinante untersuchen wir, ob die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1,0,1,0), \quad \mathfrak{a}_2 = (1,1,0,0), \quad \mathfrak{a}_3 = (0,1,1,1) \tag{12}$$

des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Zunächst bestimmen wir die Elemente der Gramschen Matrix (6). Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\rangle_1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2\\
\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\rangle_1 &= \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1\rangle_1 = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1\\
\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3\rangle_1 &= \langle \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_1\rangle_1 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1\\
\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2\rangle_1 &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 2\\
\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\rangle_1 &= \langle \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2\rangle_1 = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1\\
\langle \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_3\rangle_1 &= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

Damit ist

$$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Berücksichtigen wir Rechenregeln für Determinanten, so erhalten wir

$$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1\\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Auf Grund von Satz 54 sind die Vektoren (12) des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ linear unabhängig.

Aufgabe 27. Mit Hilfe der Gramschen Determinante untersuche man, ob die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}1{,}1{,}1), \qquad \mathfrak{a}_2 = (1{,}1{,}1, -1)$$

des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Aufgabe 28. In dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ mit

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_5 = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$$

untersuche man mit Hilfe der Gramschen Determinante, ob die Vektoren
a) $\mathfrak{a}_1, = (1{,}1{,}0), \quad \mathfrak{a}_2 = (1{,}1{,}1)$
b) $\mathfrak{a}_1, = (1{,}2{,}3), \quad \mathfrak{a}_2 = (3{,}4{,}1), \quad \mathfrak{a}_3 = (2{,}3{,}2)$
linear abhängig oder linear unabhängig sind.

6.7 Orthonormierte Vektorsysteme

Es sei $\mathfrak{S}$ ein Vektorsystem mit den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Das Vektorsystem $\mathfrak{S}$ kann die Eigenschaft besitzen, dass die Vektoren paarweise orthogonal sind. Man nennt dann dieses Vektorsystem orthogonal.

Besitzen diese Vektoren darüber hinaus noch die Eigenschaft, dass sie Einheitsvektoren, also normierte Vektoren sind, so nennt man dieses Vektorsystem orthonormiert. Dieser Begriff ist durch Verschmelzung der beiden Begriffe orthogonal und normiert entstanden.

Definition 35. Ein Vektorsystem $\mathfrak{S}$ mit den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ ist orthogonal bzw. orthonormiert genau dann, wenn diese Vektoren paarweise orthogonale Vektoren bzw. paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind.

Ist $\mathfrak{S}$ ein orthonormiertes Vektorsystem mit den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$, so gilt

$$\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j \qquad \text{und} \qquad \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_i \rangle = \|\mathfrak{e}_i\|^2 = 1$$

Diese beiden Beziehungen lassen sich zu

$$\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \tag{1}$$

zusammenfassen. Wir beweisen den

Satz 55. Ist $\mathfrak{S}$ ein orthonormiertes Vektorsystem mit den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$, so sind die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k$ linear unabhängig.

Beweis. Auf Grund von (1) ist

$$G(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Berücksichtigen wir Satz 54, so erhalten wir die Behauptung.

Satz 56. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängige Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$, so besitzt der Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k)$.

Beweis. Es ist

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) \tag{2}$$

eine Basis von $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$. Wir konstruieren in $\mathfrak{H}$ zuerst k paarweise orthogonale Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ nach folgendem Verfahren:

a) Wir setzen $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1$. Es ist damit $\mathfrak{b}_1$ ein Vektor von $\mathfrak{H}$.
b) Wir setzen

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 + t_1 \mathfrak{b}_1 \tag{3}$$

und bestimmen die reelle Zahl t_1 in (3) so, dass $\mathfrak{b}_2 \perp \mathfrak{b}_1$ ist. Die Forderung $\mathfrak{b}_2 \perp \mathfrak{b}_1$ ist äquivalent mit

$$\langle \mathfrak{a}_2 + t_1 \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle + t_1 \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0 \tag{4}$$

Da nach Voraussetzung die Vektoren in (2) linear unabhängig sind, so ist auf Grund von Satz 27 keiner von ihnen der Nullvektor von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Damit ist

$$\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle > 0 \tag{5}$$

und aus (4) erhalten wir wegen (5)

$$t_1 = -\frac{\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle}$$

Somit ist

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle} \mathfrak{b}_1 \tag{6}$$

Der Vektor $\mathfrak{b}_2$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2$ und wegen (a) auch eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, d. h., $\mathfrak{b}_2$ ist ein Vektor von $\mathfrak{H}$.
Angenommen, es sei

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{o} \tag{7}$$

Dann folgt aus (6)

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle} \mathfrak{a}_1$$

Dies lässt sich wegen $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1$ auch in der Form

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle} \mathfrak{a}_1 + 0\mathfrak{a}_3 + ... + 0\mathfrak{a}_k$$

schreiben. Diese Gleichung besagt, dass der Vektor $\mathfrak{a}_2$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3, ..., \mathfrak{a}_k$ ist. Auf Grund von Satz 28 sind demnach die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear abhängig. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Also muss unsere Annahme (7) falsch gewesen sein. Es ist damit $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{o}$ und folglich

$$\langle \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2 \rangle > 0 \tag{8}$$

c) Wir setzen

$$\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3 + t_2\mathfrak{b}_2 + t_1\mathfrak{b}_1 \tag{9}$$

und bestimmen die reellen Zahlen t_1, t_2 in (9) so, dass $\mathfrak{b}_3 \perp \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_3 \perp \mathfrak{b}_2$ ist. Diese Forderungen sind äquivalent mit

$$\left. \begin{array}{c} \langle \mathfrak{a}_3 + t_2\mathfrak{b}_2 + t_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathfrak{a}_3 + t_2\mathfrak{b}_2 + t_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \rangle = 0 \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{c} \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_1 \rangle + t_2\langle \mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1 \rangle + t_1\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_2 \rangle + t_2\langle \mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_2 \rangle + t_1\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \rangle = 0 \end{array} \right\} \tag{10}$$

Wegen

$$\langle \mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1 \rangle = \langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2 \rangle = 0$$

und (8) bzw. (5) geht (10) über in

$$t_1 = -\frac{\langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1 \rangle} \quad , \quad t_2 = -\frac{\langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_2 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_2 \rangle}$$

Setzen wir dies in (9) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3 - \frac{\langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1 \rangle}\mathfrak{b}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_2 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_2 \rangle}\mathfrak{b}_1 \tag{11}$$

Der Vektor $\mathfrak{b}_3$ ist wegen (a) und (b) eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$, d.h., $\mathfrak{b}_3$ ist ein Vektor von $\mathfrak{H}$.
Es ist ferner $\mathfrak{b}_3 \neq \mathfrak{o}$, denn anderenfalls wäre $\mathfrak{a}_3$ eine Linearkombination von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ und damit auch von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, was der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ widerspricht.

d) Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir nach dem k-ten Schritt den vom Nullvektor verschiedenen Vektor

$$\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_k - \frac{\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{b}_{k-1} \rangle}{\langle \mathfrak{b}_{k-1},\mathfrak{b}_{k-1} \rangle}\mathfrak{b}_{k-1} - ... - \frac{\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{b}_1 \rangle}{\langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1 \rangle}\mathfrak{b}_1 \tag{12}$$

von $\mathfrak{H}$. Die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ von $\mathfrak{H}$ sind nach Konstruktion paarweise orthogonal und jeweils vom Nullvektor verschieden.

e) Da wir orthogonale Einheitsvektoren suchen, normieren wir die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, ..., \mathfrak{b}_k$ und setzen

$$\mathfrak{e}_i = \frac{1}{\|\mathfrak{b}_i\|}\mathfrak{b}_i \qquad \text{mit} \qquad \|\mathfrak{b}_i\| = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_i \rangle}$$

Das so konstruierte Vektorsystem $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{H}$ mit den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k$ ist orthonormiert.

f) Wir müssen noch zeigen, dass die Vektoren (13) eine Basis von $\mathfrak{H}$ bilden: Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (13) folgt aus Satz 55. Auf Grund von Satz 33 ist auch $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_k)$ eine Basis von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$.

Das im Beweis dieses Satzes geschilderte konstruktive Verfahren zur Ermittlung einer orthonormierten Basis wird nach dem deutschen Mathematiker Erhard Schmidt (1876-1959) als Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren bezeichnet.

Beispiel 29. Wie wir in dem Beispiel 28 gezeigt haben, sind in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1{,}0{,}1{,}0), \quad \mathfrak{a}_2 = (1{,}1{,}0{,}0), \quad \mathfrak{a}_3 = (0{,}1{,}1{,}1) \tag{14}$$

linear unabhängig. Wir bestimmen in dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ von $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ eine orthonormierte Basis.

a) Wir setzen $\mathfrak{a}_1 = (1{,}0{,}1{,}0)$.
b) Es ist

$$\langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$$

und (6) liefert

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - \frac{1}{2}\mathfrak{b}_1 = (1{,}1{,}0{,}0) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = (\frac{1}{2},1, -\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}(1{,}2, -1{,}0)$$

Da es bei den Vektoren $\mathfrak{b}_i$ nicht auf den Betrag ankommt, rechnen wir mit dem Vektor

$$\mathfrak{b}_2^* = (1{,}2, -1{,}0)$$

weiter.

c) Es ist

$$\langle \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2^* \rangle_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1$$
$$\langle \mathfrak{b}_2^*, \mathfrak{b}_2^* \rangle_1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 6$$
$$\langle \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

und (11) liefert

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_3 &= \mathfrak{a}_3 - \frac{1}{6}\mathfrak{b}_3^* - \frac{1}{2}\mathfrak{b}_1 = (0{,}1{,}1{,}1) - (\frac{1}{6},\frac{1}{3}, -\frac{1}{6},0) - (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)\\ &= (-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},1) = \frac{1}{3}(-2{,}2{,}2{,}3)\end{aligned}$$

Wir rechnen mit

$$\mathfrak{b}_3^* = (-2,2,2,3)$$

weiter. Die Vektoren

$$(1,0,1,0), \quad (1,2,-1,0), \quad (-2,2,2,3) \tag{15}$$

bilden demnach eine orthogonale Basis von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$.

d) Die Normierung der Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2^*, \mathfrak{b}_3^*$ ergibt wegen

$$\|\mathfrak{b}_1\|_1 = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1\rangle_1} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathfrak{b}_2^*\|_1 = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_2^*, \mathfrak{b}_2^*\rangle_1} = \sqrt{6}$$
$$\|\mathfrak{b}_3^*\|_1 = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_3^*, \mathfrak{b}_3^*\rangle_1} = \sqrt{21}$$

die Vektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \qquad \mathfrak{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0), \qquad \mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2,2,2,3)$$

die eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$ in dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ von $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ bilden.

Aufgabe 29. Es seien

$$\mathfrak{a}_1 = (1,1,1), \qquad \mathfrak{a}_2 = (1,1,2)$$

Vektoren des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ mit

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_5 = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$$

Man bestimme in dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ von $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ eine orthonormierte Basis.

6.8 Orthogonalprojektion und Lot

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängige Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Wir untersuchen, ob es zu einem vorgegebenen Vektor $\mathfrak{a}$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ stets Vektoren $\mathfrak{a}_H$ und $\mathfrak{a}_N$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{a}_H \in \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{k}) \quad , \quad \mathfrak{a}_N \perp \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{k}) \tag{1a, 1b}$$

so gibt, dass

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_H + \mathfrak{a}_N \tag{2}$$

ist. In Fig. 41 ist der Fall $k = 1$ in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}_2, \langle\ \rangle)$ veranschaulicht.

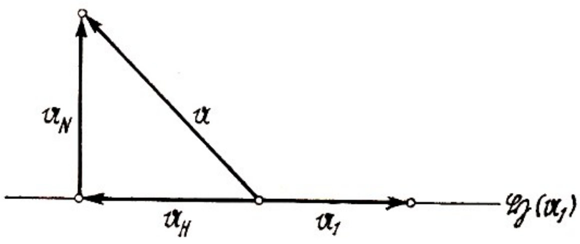


Fig. 41

Setzen wir in
$$\mathfrak{a}_H = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + ... + x_n\mathfrak{a}_k \tag{3}$$
für $x_1, x_2, ..., x_k$ beliebige reelle Zahlen ein, so ist $\mathfrak{a}_H$ stets ein Vektor von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$, da $\mathfrak{a}_H$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ ist. Wir wollen die reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_k$ in (3) so bestimmen, dass der Vektor $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H$ (4)
die Eigenschaft
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H \perp \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H \perp \mathfrak{a}_2, \quad ..., \quad \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H \perp \mathfrak{a}_k \tag{5}$$
besitzt. Wegen (3) ist die Forderung (5) äquivalent mit
$$\left.\begin{array}{r} \langle \mathfrak{a} - x_1\mathfrak{a}_1 - x_2\mathfrak{a}_2 - ... - x_k\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathfrak{a} - x_1\mathfrak{a}_1 - x_2\mathfrak{a}_2 - ... - x_k\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_2\rangle = 0 \\ ... \\ \langle \mathfrak{a} - x_1\mathfrak{a}_1 - x_2\mathfrak{a}_2 - ... - x_k\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k\rangle = 0 \end{array}\right\}$$
bzw.
$$\left.\begin{array}{r} \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}_1\rangle - x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle - x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle - ... - x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}_2\rangle - x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle - x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle - ... - x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle = 0 \\ ... \\ \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}_k\rangle - x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle - x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle - ... - x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle = 0 \end{array}\right\}$$
bzw.
$$\left.\begin{array}{r} x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle + x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle = \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}\rangle \\ x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle + x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_2\rangle = \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}\rangle \\ ... \\ x_1\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle + x_2\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle = \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}\rangle \end{array}\right\} \tag{6}$$
Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (6) ist die Gramsche Matrix 6.6. (6). Da nach Voraussetzung die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängig sind, ist wegen Satz 54 die Koeffizientendeterminante von (6) von null verschieden.
Auf Grund der Cramerschen Regel, Satz 25 ("Determinanten"), besitzt das Gleichungssystem (6) genau eine Lösung, die sich mit Hilfe von
$$x_i = \frac{G_i}{G(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,...,\mathfrak{a}_k)} \qquad (i = 1,2,...,k) \tag{7}$$
berechnen lässt, wobei
$$G_i = \begin{vmatrix} \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_{i-1}\rangle & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}\rangle & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_{i+1}\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_k\rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_{i-1}\rangle & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}\rangle & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_{i+1}\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_k\rangle \\ ... & & ... & ... & ... & & ... \\ \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_1\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_{i-1}\rangle & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}\rangle & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_{i+1}\rangle & ... & \langle \mathfrak{a}_k,\mathfrak{a}_k\rangle \end{vmatrix}$$
bedeutet. Der auf diese Weise eindeutig bestimmte Vektor $\mathfrak{a}_H$ besitzt die Eigenschaft (1a), und der Vektor $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H$ ist orthogonal zu den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ und damit wegen Beispiel 26 auch orthogonal zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$, d. h., es gilt
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H \perp \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) \tag{8}$$
Setzen wir
$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H \tag{9}$$
so besitzt der Vektor $\mathfrak{a}_N$ wegen (8) die Eigenschaft (1 b). Schließlich ist (9) äquivalent zu (2).

Damit haben wir bewiesen den

Satz 57. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängige Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$, so lässt sich jeder Vektor $\mathfrak{a}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ auf genau eine Weise in der Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_H + \mathfrak{a}_N \tag{10}$$

mit

$$\mathfrak{a}_H \in \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k), \qquad a_N \perp \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) \tag{11}$$

darstellen.

Das Ergebnis von Satz 57 führt zur

Definition 36. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ linear unabhängige Vektoren eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$, so heißen die auf Grund von Satz 57 zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ existierenden und eindeutig bestimmten Vektoren $\mathfrak{a}_H, \mathfrak{a}_N$ die den Bedingungen (10) und (11) genügen, die Orthogonalprojektion und das Lot des Vektors $\mathfrak{a}$ auf den Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$.

Beispiel 30. Wie wir in Aufgabe 27 gezeigt haben, sind die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1,1,1,1), \qquad \mathfrak{a}_2 = (1,1,1,-1)$$

des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ linear unabhängig. Wir bestimmen die Orthogonalprojektion und das Lot des Vektors

$$\mathfrak{a} = (1,2,3,4)$$

auf den Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ von $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle)$.
Zur Berechnung der Koordinaten x_1, x_2 von $\mathfrak{a}_H$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ müssen wir ein Gleichungssystem der Form (6) lösen. Wegen

$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\rangle_1 = 4, \qquad \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\rangle_1 = \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1\rangle_1 = 2$$
$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}\rangle_1 = 10, \qquad \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2\rangle_1 = 4, \qquad \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}\rangle_1 = 2$$

lautet das System (6) im vorliegenden Beispiel

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

das wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

schreiben. Zur Lösung eines Gleichungssystems der Form (6) ist es bei konkreten Beispielen zweckmäßiger, das Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme anzuwenden, als die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel zu bestimmen.
Offensichtlich besitzt das System (12) die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -1$$

Demnach ist wegen (3) die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ der Vektor

$$\mathfrak{a}_H = 3\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 = (3,3,3,3) - (1,1,1,-1) = (2,2,2,4)$$

Das Lot von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ ist der Vektor

$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H = (1,2,3,4) - (2,2,2,4) = (-1,0,1,0)$$

Zur Kontrolle berechnen wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_H$, $\mathfrak{a}_N$. Es ist

$$\langle \mathfrak{a}_H, \mathfrak{a}_N \rangle_1 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0$$

d.h., die Vektoren $\mathfrak{a}_H, \mathfrak{a}_N$ erfüllen die Bedingung der Orthogonalität.

Aufgabe 30. Wie wir in dem Beispiel 28 gezeigt haben, sind in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1,0,1,0), \qquad \mathfrak{a}_2 = (1,1,0,0), \qquad \mathfrak{a}_3 = (0,1,1,1)$$

linear unabhängig. Man bestimme die Orthogonalprojektion und das Lot des Vektors

$$\mathfrak{a} = (4,3,2,1)$$

auf den Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ von $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$.

Besonders einfach wird die Ermittlung der Orthogonalprojektion $\mathfrak{a}_H$ eines Vektors $\mathfrak{a}$ eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$ auf einen Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ von $(\mathfrak{B}, \langle\ \rangle)$, wenn die linear unabhängigen Vektoren

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$$

ein orthogonales Vektorsystem bilden. Das Gleichungssystem (6) zur Berechnung der Koordinaten $x_1, x_2, ..., x_k$ von $\mathfrak{a}_H$ bezüglich der orthogonalen Basis

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$$

nimmt in diesem Fall wegen

$$\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j \rangle = 0$$

für $i \neq j$ die einfache Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle x_1 &= \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a} \rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2 \rangle x_2 &= \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a} \rangle \\ &\dots \\ \langle \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k \rangle x_k &= \langle \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a} \rangle \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

an.

Beispiel 31. Von den Vektoren

$$\mathfrak{a}_1^* = (1,0,1,0), \quad \mathfrak{a}_2^* = (1,2,-1,0), \quad \mathfrak{a}_3^* = (-2,2,2,3)$$

haben wir in 6.7. (15) gezeigt, dass sie eine orthogonale Basis des Unterraumes $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ von $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle)$ bilden, wobei

$$\mathfrak{a}_1 = (1,0,1,0), \quad \mathfrak{a}_2 = (1,1,0,0), \quad \mathfrak{a}_3 = (0,1,1,1)$$

ist. Da $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ und $(\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_3^*)$ Basen von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ sind, ist jede Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ auch eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_3^*$, und umgekehrt ist jede Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_3^*$ auch eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$. Dies bedeutet

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_3^*)$$

Wir bestimmen die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{a} = (4{,}3{,}2{,}1)$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_3^*)$. Wegen

$$\langle \mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_1^* \rangle_1 = 2, \quad \langle \mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a} \rangle_1 = 6, \quad \langle \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a}_2^* \rangle_1 = 6$$
$$\langle \mathfrak{a}_2^*, \mathfrak{a} \rangle_1 = 8, \quad \langle \mathfrak{a}_3^*, \mathfrak{a}_3^* \rangle_1 = 21, \quad \langle \mathfrak{a}_3^*, \mathfrak{a} \rangle_1 = 5$$

lautet das System (13) im vorliegenden Beispiel

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = \frac{4}{3}, \qquad x_3 = \frac{5}{21}$$

und wir erhalten

$$\mathfrak{a}_H = 3\mathfrak{a}_1^* + \frac{4}{3}\mathfrak{a}_2^* + \frac{5}{21}\mathfrak{a}_3^* = \left(\frac{27}{7}, \frac{22}{7}, \frac{15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis für $\mathfrak{a}_H$ von Aufgabe 30.

Beispiel 32. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Vektoren des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}_2, \langle\ \rangle)$ mit $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{o}$. Wir zeigen, dass die Gramsche Determinante

$$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \begin{vmatrix} \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle & \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1 \rangle & \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2 \rangle \end{vmatrix}$$

der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ das Quadrat des Flächeninhalts des von den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 42) ist.

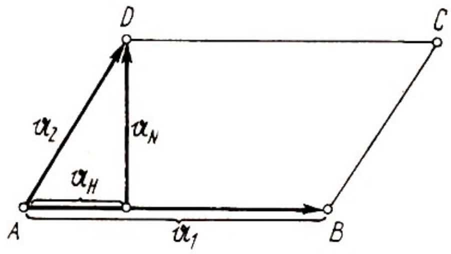


Fig. 42

Es ist

$$G(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) = \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle \cdot \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2 \rangle - \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2 \rangle \cdot \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1 \rangle = \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle \cdot \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2 \rangle - \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2 \rangle^2 \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_N$ bzw. $\mathfrak{a}_H$ das Lot bzw. die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{a}_2$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1)$ und mit $V(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$, so gilt

$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_H \tag{15}$$

$$[V(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)]^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 \cdot \|\mathfrak{a}_N\|^2 = \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1 \rangle \cdot \langle \mathfrak{a}_N, \mathfrak{a}_N \rangle \tag{16}$$

Das Gleichungssystem (6) zur Berechnung der Koordinate x_1 von $\mathfrak{a}_H$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_1)$ von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1)$ lautet im vorliegenden Beispiel

$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle x_1 = \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle \tag{17}$$

Da $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{o}$ ist, folgt aus (17) die Beziehung

$$x_1 = \frac{\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle}{\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle}$$

Damit geht (15) über in

$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle}{\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\rangle}\mathfrak{a}_1$$

Setzen wir dies in (16) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
[V(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)]^2 &= \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle \cdot \left\langle \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle}\mathfrak{a}_1 \right\rangle \\
&= \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle \cdot \left[\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle - 2\frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle}\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle + \frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle^2}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle^2}\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle\right] \\
&= \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle \cdot \left[\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle - 2\frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle^2}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle} + \frac{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle^2}{\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle}\right] \\
&= \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle \cdot \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle - \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle^2 \qquad (18)
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir (14), so geht (18) in die Behauptung

$$[V(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)]^2 = G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$$

über.

Es seien $\mathfrak{a}$ ein vorgegebener Vektor eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ die lineare Hülle der linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$. Ferner sei $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$. Den Vektor

$$\mathfrak{a}_V = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$

bezeichnen wir als einen Verbindungsvektor des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$. In Fig. 43 ist der Fall $k = 1$ in dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{V}_2, \langle\ \rangle)$ veranschaulicht.

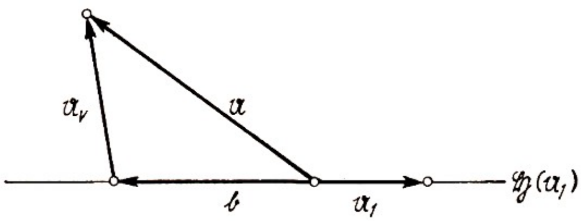


Fig. 43

In dem folgenden Satz beweisen wir, dass von allen Verbindungsvektoren $\mathfrak{a}_V$ des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ das Lot $\mathfrak{a}_N$ von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ im Vergleich zu den anderen Verbindungsvektoren dadurch ausgezeichnet ist, dass sein Betrag am kleinsten ist.

Satz 58. Es seien $\mathfrak{a}$ ein Vektor eines euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ die lineare Hülle der linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$.
Von allen Verbindungsvektoren $\mathfrak{a}_V$ des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ von $(\mathfrak{V}, \langle\ \rangle)$ besitzt das Lot $\mathfrak{a}_N$ von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ die Eigenschaft, dass sein Betrag im Vergleich zu allen anderen Verbindungsvektoren am kleinsten ist.

Beweis. Trivialerweise gilt für alle Vektoren $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ stets

$$\mathfrak{a}_V = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H) + (\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}) \qquad (19)$$

wobei $\mathfrak{a}_H$ die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ bedeutet. Wegen (10) und (11) ist

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H = \mathfrak{a}_N \perp \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k) \qquad (20)$$

Mit (20) geht (19) über in

$$\mathfrak{a}_V = \mathfrak{a}_N + (\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b})$$

Hieraus folgt

$$\|\mathfrak{a}_V\|^2 = \langle \mathfrak{a}_N + (\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}), \mathfrak{a}_N + (\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b})\rangle = \langle \mathfrak{a}_N, \mathfrak{a}_N\rangle + 2\langle \mathfrak{a}_N, \mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_H \mathfrak{b}\rangle \tag{21}$$

Wegen $\mathfrak{b} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ ist auch

$$\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$$

Da $\mathfrak{a}_N \perp \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_k)$ ist, gilt

$$\langle \mathfrak{a}_N, \mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}\rangle = 0 \tag{22}$$

Auf Grund von (22) geht (21) über in

$$\|\mathfrak{a}_V\|^2 = \|\mathfrak{a}_N\|^2 + \|\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}\|^2 \tag{23}$$

Da stets $\|\mathfrak{a}_H - \mathfrak{b}\| \geq 0$ ist, folgt aus (23) die Beziehung

$$\|\mathfrak{a}_V\|^2 \geq \|\mathfrak{a}_N\|^2$$

und hieraus wegen $\|\mathfrak{a}_V\| \geq 0$, $\|\mathfrak{a}_N\| \geq 0$ die Ungleichung

$$\|\mathfrak{a}_V\| \geq \|\mathfrak{a}_N\|$$

womit der Satz bewiesen ist.

6.9 Methode der kleinsten Quadrate

In der Praxis wird man häufig vor die Aufgabe gestellt, eine ganze rationale Funktion der Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{1}$$

durch Messen von y für m verschiedene Werte

$$x_1, x_2, ..., x_m$$

zu bestimmen, wobei wir $m \geq n + 1$ voraussetzen wollen. Die Messresultate bezeichnen wir mit

$$y_1, y_2, ..., y_m$$

Jedes der m Wertepaare

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m,y_m) \tag{2}$$

muss der Gleichung (1) genügen:

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_2^n = y_2 \\ ... \\ a_0 + a_1 x_m + a_2 x_m^2 + ... + a_n x_m^n = y_m \end{array}\right\} \tag{3}$$

Das System (3) ist ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen mit $n+1$ Variablen $a_0, a_1, ..., a_n$.

Fall 1. Ist $m = n+1$, so besitzt das Gleichungssystem (3) die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & & ... \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Von dieser Determinante lässt sich zeigen, dass sie von null verschieden ist, falls $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ voneinander verschiedene reelle Zahlen sind. Auf Grund der Cramerschen Regel, Satz 25 ("Determinanten"), gibt es in diesem Fall genau eine ganze rationale Funktion von höchstens n-tem Grade, die für $n+1$ voneinander verschiedene reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ vorgegebene Werte $y_1, y_2, ...y_{n+1}$ annimmt.

Beispiel 33. Wir bestimmen eine Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(1,1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(3,6)$ geht.
Eine Gleichung der gesuchten Parabel sei

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{4}$$

Die Gleichung (4) muss erfüllt sein, wenn wir die Koordinaten von P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 in (4) einsetzen:

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 6 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Auch hier ist es zweckmäßiger, auf (5) das Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme anzuwenden, als die Lösung von (5) mit Hilfe der Cramerschen Regel zu bestimmen.

$$\begin{array}{r|rlrl}
a_0 + a_1 + a_2 = 1 & -1 & | & -1 & | \\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 & 1 & \downarrow & & | \\
a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 6 & & & 1 & \downarrow \\ \hline
a_0 + a_1 + a_2 = 1 & & & & \\
a_1 + 3a_2 = 2 & -2 & | & & \\
2a_1 + 8a_2 = 5 & 1 & \downarrow & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + 3a_2 = 2 \\ 2a_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems ist

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2}$$

Demnach ist

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

eine Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(1,1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(3,6)$ geht.

Fall 2. Ist $m > n+1$, so wird im allgemeinen das System (3) infolge von Messfehlern nicht lösbar sein, was wir im folgenden voraussetzen wollen. Unser Ziel ist es, die $a_0, a_1, ..., a_n$ in (3) so zu bestimmen, dass die linken Seiten der einzelnen Gleichungen von den rechten Seiten der entsprechenden Gleichungen nur "wenig" voneinander abweichen, In dem System

$$\left.\begin{array}{r} y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2 - ... - a_nx_1^n = c_1 \\ y_2 - a_0 - a_1x_2 - a_2x_2^2 - ... - a_nx_2^n = c_2 \\ ... \\ y_m - a_0 - a_1x_m - a_2x_m^2 - ... - a_nx_m^n = c_m \end{array}\right\} \tag{6}$$

können wir die reelle Zahl c_i als Maß für die Abweichung der rechten Seite von der linken Seite der i-ten Gleichung des Systems (3) deuten. Es liegt nahe zu fordern, dass die Summe

$$c_1 + c_2 + ... + c_m$$

aller Abweichungen einen Wert annimmt, der nahe der reellen Zahl null liegt. Bei dieser Summation können sich aber eventuell auftretende große Abweichungen gegenseitig aufheben, wie das beispielsweise für

$$c_1 = 100, \quad c_2 = 300, \quad c_3 = -400$$

der Fall ist. Bildet man dagegen die Quadratsumme

$$c_1^2 + c_2^2 + ... + c_m^2 \tag{7}$$

der einzelnen Abweichungen und fordert, dass die so gebildete Quadratsumme möglichst klein werden soll, so ist der oben besprochene Mangel beseitigt. Diese Art des Fehlerausgleichs wird als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet und geht auf den deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) zurück.

Unsere Aufgabe besteht, darin, zu den m Wertepaaren (2) reelle Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ so zu bestimmen, dass die Summe (7) möglichst klein wird. Mit Hilfe der Vektoren

$$\mathfrak{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \mathfrak{a}_n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_m^n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{m-1}, \langle\ \rangle_1)$ geht das Gleichungssystem (3) bzw. (6) über in

$$a_0\mathfrak{a}_0 + a_1\mathfrak{a}_1 + ... + a_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{y} \tag{8}$$

bzw.

$$\mathfrak{y} - a_0\mathfrak{a}_0 - a_1\mathfrak{a}_1 - ... - a_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{c} \tag{9}$$

Da nach Voraussetzung das Gleichungssystem (3) nicht lösbar ist, gibt es keine reellen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$, die dem System (3) genügen. Dies bedeutet, dass der Vektor $\mathfrak{y}$ in (8) keine Linearkombination der Vektoren

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n \tag{10}$$

ist. Von den Vektoren (10) wollen wir voraussetzen, dass sie linear unabhängig sind. Setzen wir in

$$\mathfrak{b} = a_0\mathfrak{a}_0 + a_1\mathfrak{a}_1 + ... + .a_n\mathfrak{a}_n \tag{11}$$

für $a_0, a_1, ..., a_n$ beliebige reelle Zahlen ein, so ist stets

$$\mathfrak{b} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n)$$

Der Vektor $\mathfrak{y}$ gehört nicht zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_n)$, da er keine Linearkombination der Vektoren (10) ist. Mit Hilfe von (11) geht (9) über in

$$\mathfrak{y} - \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \tag{12}$$

Den Vektor $\mathfrak{c}$ in (12) können wir als Verbindungsvektor des Vektors $\mathfrak{y}$ mit dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1,..., \mathfrak{a}_n)$ von $(\mathfrak{M}_{m,1}, \langle\ \rangle_1)$ deuten.
Der Betrag des Verbindungsvektors $\mathfrak{c}$ ist, da wir unsere Überlegungen im euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{m,1}, \langle\ \rangle_1)$ durchführen,

$$\|\mathfrak{c}\|_1 = \sqrt{\langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle_1} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_m^2} \tag{13}$$

Auf Grund von Satz 58 nimmt $\|\mathfrak{c}\|_1$ seinen kleinsten Wert an, wenn der Verbindungsvektor von $\mathfrak{y}$ mit dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1,...,\mathfrak{a}_n)$ das Lot von $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n)$ ist, also $\mathfrak{c} = \mathfrak{y}_N$ ist.
Die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1,...,\mathfrak{a}_n)$ ist dann der eindeutig bestimmte Vektor

$$\mathfrak{y}_H = a_0^*\mathfrak{a}_0 + a_1^*\mathfrak{a}_1 + ... + a_n^*\mathfrak{a}_n \tag{14}$$

dessen Koordinaten $a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1, ...,\mathfrak{a}_n)$ von $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n)$ die Eigenschaft besitzen, dass (13) und damit auch (7) seinen kleinsten Wert annimmt.

Die $a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*$ in (14) sind, wie wir in 6.8. gezeigt haben, die eindeutig bestimmte Lösung eines Gleichungssystems der Form 6.8. (6).

Beispiel 34. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen wir eine Gleichung der Geraden, die sich den Punkten $P_1(1,1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(3,6)$ am besten annähert.
Eine Gleichung der gesuchten Geraden sei

$$y = a_0 + a_1x \tag{15}$$

Die Gleichung (15) muss erfüllt sein, wenn wir die Koordinaten von P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 in (15) einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 &= 3 \\ a_0 + 3a_1 &= 6 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Mit Hilfe des Verfahrens zur Auflösung linearer Gleichungssysteme zeigen wir, dass das System (16) nicht lösbar ist:

$$\begin{array}{r|rlrl} a_0 + a_1 = 1 & -1 & | & -1 & | \\ a_0 + 2a_1 = 3 & 1 & \downarrow & & | \\ a_0 + 3a_1 = 6 & & & 1 & \downarrow \\ \hline a_0 + a_1 = 1 & & & & \\ a_1 = 2 & -2 & | & & \\ 2a_1 = 5 & 1 & \downarrow & & \\ \hline a_0 + a_1 = 1 & & & & \\ a_1 = 2 & & & & \\ 0 = 1 & & & & \end{array}$$

Wir bestimmen eine Gleichung der Geraden, die sich den gegebenen drei Punkten am besten annähert. Dazu geben wir zunächst das System (16) in Vektorschreibweise

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

an. Hierin ist

$$\mathfrak{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ sind linear unabhängig, da das zu (16) gehörige homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt.

In dem euklidischen Vektorraum $(\mathfrak{M}_{3,1}, \langle\ \rangle_1)$ ermitteln wir die Koordinaten der Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{y}$ auf den Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ von $(\mathfrak{M}_{3,1}, \langle\ \rangle_1)$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$. Wegen

$$\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0 \rangle_1 = 3, \quad \langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \rangle_1 = 6, \quad \langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{y} \rangle_1 = 10$$

$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0 \rangle_1 = 6, \quad \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle_1 = 14, \quad \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{y} \rangle_1 = 25$$

lautet das System 6.8. (6) im vorliegenden Beispiel

$$\left.\begin{aligned} 3a_0 + 6a_1 &= 10 \\ 6a_0 + 14a_1 &= 25 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung von (17) ist $a_0 = -\frac{5}{3}$, $a_1 = \frac{5}{2}$. Demnach ist

$$y = -\frac{5}{3} + \frac{5}{2}x$$

eine Gleichung der Geraden g, die sich den Punkten $P_1(1{,}1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(3,6)$ am besten annähert (Fig. 44).

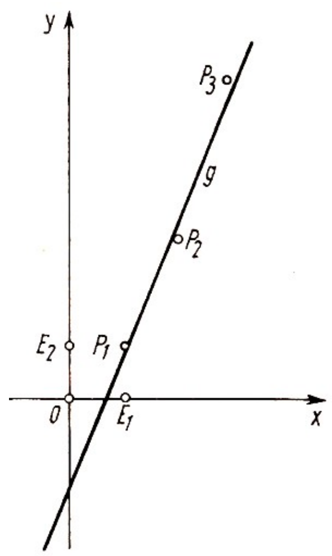


Fig. 44

Aufgabe 31. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man eine Gleichung der Parabel, die sich den Punkten $P_1(-2{,}4)$, $P_2(-1{,}1)$, $P_3(1{,}1)$, $P_4(2{,}5)$ am besten annähert.

7 Lösungen der Aufgaben

1. Es seien A' bzw. B' der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ eines Dreiecks ABC (Fig. 45) und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ die Ortsverschiebungen der Punkte A, B, C, A', B'. Es ist

$$A' - B' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{b}' \qquad , \qquad B - A = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$$

und

$$A' - B' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{b}' = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}(B - A)$$

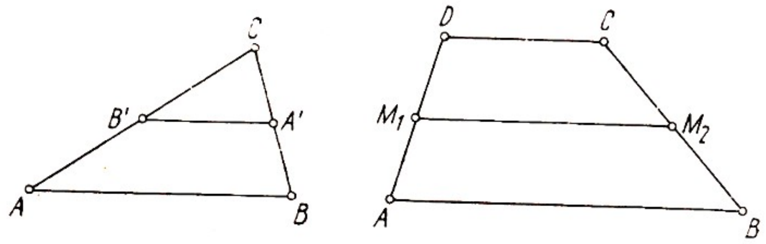


Fig. 45, 46

2. Es seien M_1 bzw. M_2 der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ eines Trapezes $ABCD$ (Fig. 46) und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ die Ortsverschiebungen der Punkte A, B, C, D, M_1, M_2. Es ist

$$B - A = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \qquad , \qquad C - D = \mathfrak{c} - \mathfrak{d}$$

und

$$M_2 - M_1 = \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{d}) = \frac{1}{2}[(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{d})] = \frac{1}{2}[(B - A) + (C - D)]$$

3.a) Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \mathfrak{r}'''$ die Ortsverschiebungen der Punkte A, B, C, P, P', P'', P'''. Es ist

$$P' = A + (A - P)$$

Der Übergang zu Ortsverschiebungen liefert die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{r}) = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{r}$$

Ferner ist

$$P'' = B + (B - P') \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{r}'' = \mathfrak{b} + (\mathfrak{b} - \mathfrak{r}') = \mathfrak{b} + (\mathfrak{b} - 2\mathfrak{a} + \mathfrak{r}) = 2\mathfrak{b} - 2\mathfrak{a} + \mathfrak{r}$$

Schließlich ist

$$P''' = C + (C - P'') \qquad \text{bzw.}$$

$$\mathfrak{r}''' = \mathfrak{c} + (\mathfrak{c} - \mathfrak{r}'') = \mathfrak{c} + (\mathfrak{c} - 2\mathfrak{b} + 2\mathfrak{a} - \mathfrak{r}) = (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a} - \mathfrak{r})$$

bzw.

$$O + \mathfrak{r}''' = [O + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a})] + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a} - \mathfrak{r}) \qquad (1)$$

Den durch

$$O + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a})$$

definierten Punkt bezeichnen wir mit D, die Ortsverschiebung von D sei $\mathfrak{d}$. Da

$$D - P = \mathfrak{d} - \mathfrak{r} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a} - \mathfrak{r}$$

ist, geht (1) wegen $O + \mathfrak{r}''' = P'''$ über in

$$P''' = D + (D - P)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Punkt P''' durch Spiegelung an dem Punkt D hervorgeht.

b) Es ist

$$D = O + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{a}) = O + (\mathfrak{a} + \mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = (O + \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = A + (C - B)$$

und damit

$$D - A = C - B \tag{2}$$

Die Gleichung (2) besagt, dass die Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm (Fig. 47) aufspannen, falls die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden liegen.

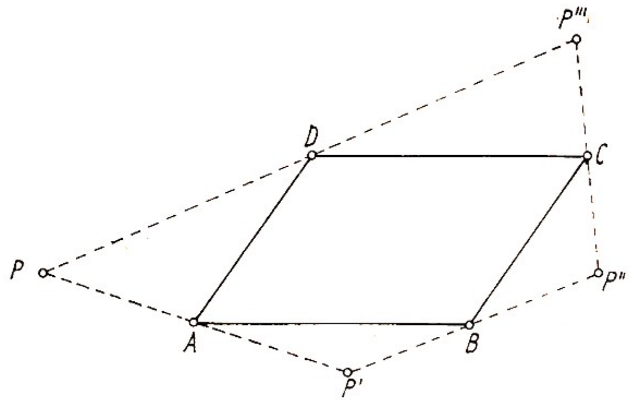


Fig. 47

4.a) $(7,5,8,14)$, b) $\mathfrak{x} = (10,8,8,-1)$.

5.a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$, b) $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

6. Die Beziehung 3.2. (22) ist richtig für $k = 1$. Auf Grund von B 4 gilt

$$(\lambda_1 + ... + \lambda_k + \lambda_{k+1})\mathfrak{a} = (\lambda_1 + ... + \lambda_k)\mathfrak{a} + \lambda_{k+1}\mathfrak{a}$$

Berücksichtigt man die Induktionsvoraussetzung

$$(\lambda_1 + ... + \lambda_k)\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a} + ... + \lambda_k\mathfrak{a}$$

so gilt

$$(\lambda_1 + ... + \lambda_k + \lambda_{k+1})\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a} + ... + \lambda_k\mathfrak{a} + \lambda_{k+1}\mathfrak{a}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

7. Die Beziehung 3.2. (23) ist richtig für $k = 1$. Auf Grund von B 5 gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + ... + \mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_{k+1}) = \lambda(\mathfrak{a}_1 + ... + \mathfrak{a}_k) + \lambda\mathfrak{a}_{k+1}$$

Berücksichtigt man die Induktionsvoraussetzung

$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + ... + \mathfrak{a}_k) = \lambda\mathfrak{a}_1 + ... + \lambda\mathfrak{a}_k$$

so gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}_1 + ... + \mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_{k+1}) = \lambda\mathfrak{a}_1 + ... + \lambda\mathfrak{a}_k + \lambda\mathfrak{a}_{k+1}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

8. $x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 + x_4\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{b}$

$$\begin{array}{r|rlrlrl}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & 2 & | & 3 & | & 4 & | \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 & -1 & \downarrow & & | & & | \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 & & & -1 & \downarrow & & | \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 & & & & & -1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & & & & & & \\
x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1 & -2 & | & 7 & | & & \\
2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 2 & 1 & \downarrow & & | & & \\
7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 3 & & & -1 & \downarrow & & \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & & & & & & \\
x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1 & & & & & & \\
4x_3 - 4x_4 = 0 & -1 & | & & & & \\
4x_3 + 36x_4 = 4 & 1 & \downarrow & & & & \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & & & & & & \\
x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1 & & & & & & \\
4x_3 - 4x_4 = 0 & & & & & & \\
40x_4 = 4 & & & & & &
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Der Vektor $\mathfrak{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$. Die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems ist

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{10}$$

also ist $\mathfrak{b} = \frac{1}{10}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)$.

9. $x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$

$$\begin{array}{r|rlrl}
x_1 + x_2 + x_3 = 0 & -1 & | & -1 & | \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & 1 & \downarrow & & | \\
x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 & & & 1 & \downarrow \\
\hline
x_1 + x_2 + x_3 = 0 & & & & \\
x_2 + 2x_3 = 0 & 2 & | & & \\
2x_2 + 4x_3 = 0 & -1 & \downarrow & & \\
\hline
x_1 + x_2 + x_3 = 0 & & & & \\
x_2 + 2x_3 = 0 & & & &
\end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt nichttriviale Lösungen. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ sind linear abhängig.

10. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind linear abhängig genau dann, wenn die Vektorgleichung

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

eine nichttriviale Lösung x_1, x_2, x_3 besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r}
ax_1 + bx_2 + bx_3 = 0 \\
bx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \\
bx_1 + bx_2 + ax_3 = 0
\end{array}\right\}$$

nichttrivial lösbar ist. Auf Grund von Satz 24 ("Matrizen") ist das genau dann der Fall, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

kleiner als drei ist bzw. für die Determinante dieser Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Da

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (b-a)^2(a+2b)$$

ist, sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ des reellen Vektorraumes $\mathfrak{M}_{1,3}$ linear abhängig genau dann, wenn $a = b$ oder $a = -2b$ ist.

11. a) Auf Grund von Satz 33 braucht nur gezeigt zu werden, dass die Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ linear unabhängig sind. Es ist

$$x_1\mathfrak{u} + x_2\mathfrak{v} = \mathfrak{o} \tag{1}$$

mit

$$x_1(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + x_2(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{o} \qquad \text{bzw.} \qquad (x_1 - x_2)\mathfrak{a}_1 + (x_1 + x_2)\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \tag{2}$$

äquivalent. Da nach Voraussetzung die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ linear unabhängig sind, besitzt die Gleichung (2) nur die triviale Lösung

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad , \qquad x_1 + x_2 = 0 \tag{3}$$

Anwendung des Verfahrens zur Auflösung linearer Gleichungssysteme auf (3) liefert die eindeutig bestimmte Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, d.h., die Vektorgleichung (1) ist nur trivial lösbar. Die Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind linear unabhängig.

b) Es ist $x_1\mathfrak{u} + x_2\mathfrak{v} = \mathfrak{a}_2$ mit

$$x_1(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + x_2(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x_1 - x_2)\mathfrak{a}_1 + (x_1 + x_2 - 1)\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \tag{4}$$

äquivalent. Da die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ linear unabhängig sind, :besitzt die Gleichung (4) nur die triviale Lösung

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad , \qquad x_1 + x_2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Anwendung des Verfahrens zur Auflösung linearer Gleichungssysteme auf (5) liefert: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Demnach ist

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}$$

d.h., die Koordinaten von $\mathfrak{a}_2$ bezüglich der neuen Basis $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

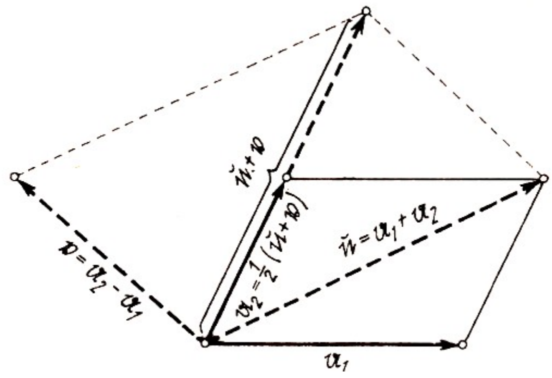


Fig. 48

12. a) Es ist

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o} \tag{1}$$

mit

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2(2\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + 3\mathfrak{a}_3) + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

bzw.

$$(x_1 + 2x_2)\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + (3x_2 + x_3)\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o} \tag{2}$$

äquivalent. Da die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ linear unabhängig sind, besitzt die Gleichung (2) nur die triviale Lösung

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Offensichtlich besitzt (3) und damit auch (1) nur die triviale Lösung, d. h., die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind linear unabhängig.

b) Es ist

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}$$

mit

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2(2\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + 3\mathfrak{a}_3) + x_3\mathfrak{a}_3 = 3\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$$

bzw.

$$(x_1 + 2x_2 - 3)\mathfrak{a}_1 + (x_2 - 2)\mathfrak{a}_2 + (3x_2 + x_3 - 1)\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 3 \\ &x_2 = 2 \\ &3x_2 + x_2 = 1 \end{aligned}\right\}$$

äquivalent. Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$. Demnach ist

$$\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_2 - 5\mathfrak{a}_3$$

d.h., die Koordinaten von $\mathfrak{b}$ bezüglich der neuen Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ sind -1, 2, -5.

13. a) Es sei $\|\mathfrak{a}\|_3 = 0$. Aus

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = 0$$

folgt

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0 \tag{1}$$

bzw. $\mathfrak{a} = (0,0,..,0) = \mathfrak{o}$. (2)

Umgekehrt folgt aus (2) unmittelbar (1) und hieraus $\|\mathfrak{a}\|_3 = 0$.

b) Stets gilt

$$\|\lambda\mathfrak{a}\|_3 = |\lambda a_1| + |\lambda a_2| + ... + |\lambda a_n| = |\lambda|(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|) = |\lambda|\|\mathfrak{a}\|_3$$

c) Stets gilt

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|_3 &= |a_1+b_1| + |a_2+b_2| + ... + |a_n+b_n| \leq |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + ... + |a_n| + |b_n| \\ &= (|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|) + (|b_1| + |b_2| + ... + |b_n|) = \|\mathfrak{a}\|_3 + \|\mathfrak{b}\|_3\end{aligned}$$

14. In $\mathfrak{M}_{1,3}, \|\ \|_1)$ ist $\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{3}(1,-2{,}2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
In $\mathfrak{M}_{1,3}, \|\ \|_2)$ ist $\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{2}(1,-2{,}2) = (\frac{1}{2}, -1{,}1)$
In $\mathfrak{M}_{1,3}, \|\ \|_3)$ ist $\mathfrak{a}^\circ = \frac{1}{5}(1,-2{,}2) = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$

15. $d_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2 + (9-4)^2} = 7$
$d_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \max\{|5-1|, |0-2|, |5-3|, |9-4|\} = 5$
$d_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = |5-1| + |0-2| + |5-3| + |9-4| = 13$

16. a)
$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\rangle &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\rangle = \langle\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle = \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + 2\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle &= \langle\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b}\rangle = \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + 2\langle\mathfrak{a},(-1)\mathfrak{b}\rangle + \langle(-1)\mathfrak{b},(-1)\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + 2\langle(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle - \langle\mathfrak{b},(-1)\mathfrak{b}\rangle = \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle - \langle(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b}\rangle\langle\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{a}+(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle + \langle(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle(-1)\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle \\ &= \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle + \langle\mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle - \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle = \langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - \langle\mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle\end{aligned}$$

17. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B, C, D des Vierecks $ABCD$.

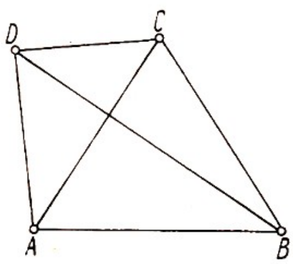


Fig. 49

Es ist

$$\begin{aligned}D-B &= \mathfrak{d}-\mathfrak{b}, \quad C-A = \mathfrak{c}-\mathfrak{a}, \quad A-B = \mathfrak{a}-\mathfrak{b} \\ B-C &= \mathfrak{b}-\mathfrak{c}, \quad D-C = \mathfrak{d}-\mathfrak{c}, \quad A-D = \mathfrak{a}-\mathfrak{d}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|A-B\|^2 + \|D-C\|^2 = \|B-C\|^2 + \|A-D\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{d}-\mathfrak{c}\|^2 = \|\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{a}-\mathfrak{d}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle \mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{d}-\mathfrak{c},\mathfrak{d}-\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{b}-\mathfrak{c},\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{a}-\mathfrak{d},\mathfrak{a}-\mathfrak{d}\langle \\
&\Leftrightarrow \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{d},\mathfrak{d}\rangle - 2\langle \mathfrak{d},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle \\
&\qquad = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle - 2\langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{d}\rangle + \langle \mathfrak{d},\mathfrak{d}\rangle \\
&\Leftrightarrow -2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle - 2\langle \mathfrak{d},\mathfrak{c}\rangle = -2\langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{d}\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle + \langle \mathfrak{d},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{a},\mathfrak{d}\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \mathfrak{d},\mathfrak{c}\rangle - \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle - \langle \mathfrak{d},\mathfrak{a}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \mathfrak{d}-\mathfrak{b},\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{d}-\mathfrak{b} \perp \mathfrak{c}-\mathfrak{a} \\
&\Leftrightarrow D-B \perp C-A
\end{aligned}$$

18.
a) $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_5 = k_1a_1b_1 + k_2a_2b_2 + ... + k_na_nb_n = k_1b_1a_1 + k_2b_2a_2 + ... + k_nb_na_n = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle_5$
b)
$$\begin{aligned}
\langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_5 &= k_1(\lambda a_1)b_1 + k_2(\lambda a_2)b_2 + ... + k_n(\lambda a_n)b_n \\
&= \lambda(k_1a_1b_1 + k_2a_2b_2 + ... + k_na_nb_n) = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_5
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle_5 &= k_1(a_1+b_1)c_1 + k_2(a_2+b_2)c_2 + ... + k_n(a_n+b_n)c_n \\
&= (k_1a_1c_1 + k_2a_2c_2 + ... + k_na_nc_n) + (k_1b_1c_1 + k_2b_2c_2 + ... + k_nb_nc_n) \\
&= \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle_5 + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle_5
\end{aligned}$$

d) $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_5 = k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + ... + k_na_n^2 \geq 0$
e) Es sei $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_5 = 0$. Aus
$$k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + ... + k_na_n^2 = 0$$
folgt wegen $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, ..., k_n \geq 0$ stets
$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{o}$$

Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ die Beziehung $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_5 = 0$.

19. a)
$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_6 &= a_1(b_1+b_2) + a_2(b_1+2b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2 \\
&= b_1(a_1+a_2) + b_2(a_1+2a_2) = \langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}\rangle_6
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\langle \lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_6 &= (\lambda a_1)(b_1+b_2) + (\lambda a_2)(b_1+2b_2) \\
&= \lambda[a_1(b_2+b_2) + a_2(b_1+2b_2)] = \lambda\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_6
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle_6 &= (a_1+b_1)(c_1+c_2) + (a_2+b_2)(c_1+2c_2) \\
&= [a_1(c_1+c_2) + a_2(c_1+2c_2)] + [b_1(c_1+c_2) + b_2(c_1+2c_2)] \\
&= \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle_6 + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle_6
\end{aligned}$$

d)
$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_6 = a_1(a_1+a_2) + a_2(a_1+2a_2) = a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2 = (a_1+a_2)^2 - a_2^2 \geq 0$$

e) Es sei $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle_6 = 0$. Aus
$$(a_1+a_2)^2 + a^2 = 0$$

folgt, dass diese Summe nichtnegativer reeller Zahlen nur für $a_1 + a_2 = 0$ und $s_2 = 0$ verschwindet. Dieses homogene lineare Gleichungssystem besitzt nur die triviale Lösung $a_1 = a_2 = 0$. Dies bedeutet

$$\mathfrak{a} = (0,0) = \mathfrak{o}$$

Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ die Beziehung $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_6 = 0$.

20. a)
$$f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = (b_1 - b_2)(a_1 - a_2) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$$

b)
$$f(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\lambda a_1 - \lambda a_2)(b1 - b_2) = \lambda(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = \lambda f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

c)
$$\begin{aligned} f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}) &= (a_1 + b_1 - a_2 - b_2)(c_1 - c_2) \\ &= (a_1 - a_2)(c_1 - c_2) + (b_1 - b_2)(c_1 - c_2) = f(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) + f(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \end{aligned}$$

d) $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = (a_1 - a_2)^2 \geq 0$
e) Es sei $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0$. Aus $(a_1 - a_2)^2 = 0$ folgt $a_1 - a_2 = 0$. Dies ist beispielsweise auch für $a_1 = a_2 = 1$ erfüllt. Demnach folgt aus $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0$ nicht $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Die Funktion f ist keine Skalarproduktfunktion.

21. Die Beziehung 6.3. (4) ist wegen Satz 46a richtig für $k = 1$. Auf Grund von Satz 46b und Satz 46a gilt

$$\langle \mathfrak{b}, x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_k\mathfrak{a}_k + x_{k+1}\mathfrak{a}_{k+1}\rangle = \langle \mathfrak{b}, x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_k\mathfrak{a}_k\rangle + x_{k+1}\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_{k+1}\rangle$$

Berücksichtigt man die Induktionsvoraussetzung

$$\langle \mathfrak{b}, x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_k\mathfrak{a}_k\rangle = x_1\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_1\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_k\rangle$$

so gilt

$$\langle \mathfrak{b}, x_1\mathfrak{a}_1 + ... + x_k\mathfrak{a}_k + x_{k+1}\mathfrak{b},\mathfrak{a}_{k+1}\rangle = x_1\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_1\rangle + ... + x_k\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_k\rangle + x_{k+1}\langle \mathfrak{b},\mathfrak{a}_{k+1}\rangle$$

die Behauptung bewiesen ist.

22.a) $\|\mathfrak{a}\|_6 = \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_6} = 1$
b)
$$d_6(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|_6 = \|(-2,0)\|_6 = \sqrt{(-2)\cdot(-2) + 0\cdot(-2)} = 2$$

23. Es ist
$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle_5 = 0, \quad \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle_5 = 30, \quad \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b}\rangle_5 = 6$$

und damit $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

24. Die Behauptung folgt aus Definition 33 und S 5.

25. a)
$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\|^2 = \langle \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\rangle = \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle + 2\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle + \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle$$

Da $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\rangle) = 0$ ist, geht die obige Gleichung in die Behauptung

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \|\mathfrak{a}_2\|^2$$

über.

b) Die Beziehung 6.5. (13) ist richtig für $k = 1$. Es ist zu zeigen, dass aus der Gültigkeit von

6.5. (13) für eine beliebige natürliche Zahl $k = r \geq 1$ die Gültigkeit von 6.5. (13) für $k = r+1$ folgt.
Nach Voraussetzung ist der Vektor $\mathfrak{a}_r$ orthogonal zu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_r$ und wegen Beispiel 26 demnach auch orthogonal zu dem Vektor $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_r$. Auf Grund von Aufgabe 25a gilt demnach

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_{r+1}\|^2 = \|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_r\|^2 + \|\mathfrak{a}_{r+1}\|^2$$

Berücksichtigt man die Induktionsvoraussetzung

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_r\|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \|\mathfrak{a}_2\|^2 + ... + \|\mathfrak{a}_r\|^2$$

so gilt

$$\|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + ... + \mathfrak{a}_{r+1}\|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \|\mathfrak{a}_2\|^2 + ... + \|\mathfrak{a}_r\|^2 + \|\mathfrak{a}_{r+1}\|^2$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

26. a) Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ seien orthogonal. Dann gilt $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| - \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| &= \sqrt{\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \rangle} - \sqrt{\langle \mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b} \rangle} \\
&= \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} - \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} \\
&= \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} - \sqrt{\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle} = 0
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\| = \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\| \tag{1}$$

b) Es gelte umgekehrt (1). Hieraus folgt

$$\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|^2$$

Berücksichtigung von 6.4. (10) liefert

$$\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b} \rangle$$

woraus

$$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle + 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{a} \rangle - 2\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{b} \rangle$$

bzw.

$$4\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b} \rangle = 0$$

folgt. Die letzte Gleichung besagt, dass die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ orthogonal sind. In Aufgabe 26 ist Aufgabe 24 als Spezialfall enthalten:
Setzt man $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, so geht die Gleichung in 6.5. (14) in die Gleichung $\|2\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{o}\|$ über, die mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ äquivalent ist.

27. $G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$
Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,4}, \langle\ \rangle_1)$ sind linear unabhängig.

28. a) $G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$
Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ sind linear unabhängig.

$$G(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3) = \begin{vmatrix} 36 & 28 & 32 \\ 28 & 44 & 36 \\ 32 & 36 & 34 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 7 & 11 & 9 \\ 16 & 18 & 17 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ -2 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ des euklidischen Vektorraumes $(\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$ sind linear abhängig.

29. a) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 = (1,1,1)$
b)

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_1\rangle_5}{\langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1\rangle_5} = (1,1,2) - \frac{9}{6}(1,1,1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1,1,-1)$$
$$\mathfrak{b}_2^* = (1,1,-1)$$

c)

$$\|\mathfrak{b}_1\|_5 = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1\rangle_5} = \sqrt{6} \quad , \quad \|\mathfrak{b}_2 *\|_5 = \sqrt{\langle \mathfrak{b}_2^*,\mathfrak{b}_2^*\rangle_5} = \sqrt{6}$$

Die Vektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1) \quad , \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1)$$

bilden eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ in dem Unterraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ von $\mathfrak{M}_{1,3}, \langle\ \rangle_5)$.

30. Wegen

$$\begin{gathered}\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1\rangle_1 = 2, \quad \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\rangle_1 = \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1\rangle_1 = 1, \quad \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_3\rangle_1 = \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}_1\rangle_1 = 1,\\ \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}\rangle_1 = 6, \quad \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2\rangle_1 = 2, \quad \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3\rangle_1 = \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}_2\rangle_1 = 1, \quad \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}\rangle_1 = 7,\\ \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}_3\rangle_1 = 3, \quad \langle \mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}\rangle_1 = 6\end{gathered}$$

lautet das System 6.8. (6)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = \frac{10}{7}, x_2 = \frac{17}{7}, x_3 = \frac{5}{7}$$

Demnach ist

$$\mathfrak{a}_H = \frac{10}{7}\mathfrak{a}_1 + \frac{17}{7}\mathfrak{a}_2 + \frac{5}{7}\mathfrak{a}_3 = \left(\frac{27}{7}, \frac{22}{7}, \frac{15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$
$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_H = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

31. Eine Gleichung der gesuchten Parabel sei

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{1}$$

Die Koordinaten von P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 bzw. P_4 müssen der Gleichung (1) genügen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 - 2a_1 + 4a_2 &= 4 \\ a_0 - a_1 + a_2 &= 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (2) ist nicht lösbar:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 & -1 & | & -1 & | & -1 & | \\
a_0 - a_1 + a_2 = 1 & 1 & \downarrow & & | & & | \\
a_0 + a_1 + a_2 = 1 & & & 1 & \downarrow & & | \\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 5 & & & & & 1 & \downarrow \\
\cline{1-1}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 & & & & & & \\
a_1 - 3a_2 = -3 & -3 & | & -4 & | & & \\
3a_1 - 3a_2 = -3 & 1 & \downarrow & & | & & \\
4a_1 = 1 & & & 1 & \downarrow & & \\
\cline{1-1}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 & & & & & & \\
a_1 - 3a_2 = -3 & & & & & & \\
6a_2 = 6 & -2 & | & & & & \\
12a_2 = 13 & 1 & \downarrow & & & & \\
\cline{1-1}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 & & & & & & \\
a_1 - 3a_2 = -3 & & & & & & \\
6a_2 = 6 & & & & & & \\
0 = 1 & & & & & &
\end{array}
$$

In Vektorschreibweise lautet (2):

$$a_0\mathfrak{a}_0 + a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{y} \qquad \text{mit}$$

$$\mathfrak{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ sind linear unabhängig, da das zu (2) gehörige homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt. Wegen

$$
\begin{array}{llll}
\langle \mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_0 \rangle_1 = 4, & \langle \mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1 \rangle_1 = 0, & \langle \mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_2 \rangle_1 = 10, & \langle \mathfrak{a}_0,\mathfrak{y} \rangle_1 = 11, \\
\langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_0 \rangle_1 = 0, & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1 \rangle_1 = 10, & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2 \rangle_1 = 0, & \langle \mathfrak{a}_1,\mathfrak{y} \rangle_1 = 2, \\
\langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_0 \rangle_1 = 10, & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1 \rangle_1 = 0, & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2 \rangle_1 = 34, & \langle \mathfrak{a}_2,\mathfrak{y} \rangle_1 = 38
\end{array}
$$

lautet das System 6.8. (6) im vorliegenden Beispiel

$$\left.\begin{array}{r} 4a_0 + 10a_2 = 11 \\ 10a_1 = 2 \\ 10a_0 + 34a_2 = 38 \end{array}\right\}$$

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$a_0 = -\frac{1}{6}, \quad a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{7}{6}$$

Demnach ist

$$y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{5}x + \frac{7}{6}x^2$$

eine Gleichung der Parabel, die sich den Punkten $P_1(-2,4)$, $P_2(-1{,}1)$, $P_3(1{,}1)$, $P_4(2,5)$ am besten annähert.

8 Literaturverzeichnis

1. Boseck, H., Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume, 2. Aufl., Berlin 1971.

2. Belkner, H., Determinanten, 2. Aufl., Leipzig 1970, MSB Band 33.

3. Belkner, H., Matrizen, 2. Aufl., Leipzig 1973, MSB Band 48.

4. Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., Berlin 1972.

5. Gantmacher, F. R., Matrizenrechnung I, 2. Aufl., Berlin 1965.

6. Hasse, M., Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, 6. Aufl., Leipzig 1973, MSB Band 2.

7. Wulich, B.S., Einführung in die Funktionalanalysis, Teil 1, Leipzig 1961.