Johannes Lehmann

Rechnen und Raten

Ein unterhaltsames Mathe-Magazin

1987 Volk und Wissen Berlin
MSB: Nr. 131
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Adam Ries (1492 bis 1559)

Im Jahr der Entdeckung Amerikas durch C. Columbus wurde Adam Ries in Staffelstein am Main in eine Zeit hineingeboren, die von bedeutenden ökonomischen und politischen Ereignissen gezeichnet war.

Noch vor Ende des 15. Jahrhunderts entdeckte Vasco da Gama den Seeweg nach Indien. Die Reformation reifte heran und fand 1517 mit dem Anschlag der 95 Thesen an die Tür der Schlosskirche zu Wittenberg durch Martin Luther ihre endgültige Auslösung. Territoriale Bauernaufstände trotzten dem Feudaladel wenigstens geringe Verbesserungen ab und führten schließlich zum Bauernkrieg von 1524/25, den Friedrich Engels neben der Reformation als ersten Akt der bürgerlichen Revolution in Europa bezeichnete.

Diese bewegte Zeit brachte für eine Reihe von Städten eine rasche Entwicklung mit sich, so auch für Erfurt und Annaberg, die beide im Leben von A. Ries die bedeutendste Rolle spielten. Der vorübergehende Aufschwung Erfurts fußte vor allem auf den sich festigenden neuen erweiterten Handelsbeziehungen. Annaberg hatte 1496 das Stadtrecht als Zentrum des sächsischen Silberbergbaus erhalten und gehörte kurze Zeit später schon zu den bedeutendsten Städten Deutschlands.
So ist es kein Wunder, dass diese Städte vor allem auf junge Menschen anziehend wirkten, die hier Betätigungs- und Entwicklungsmöglichkeiten suchten.

Der Vater von Adam Ries besaß eine Mühle, einen Weinberg und einige Hausgrundstücke, so dass die zehnköpfige Familie in bescheidenem Wohlstand leben konnte. Er war das zweite Mal verheiratet, seine erste Frau war um 1490 gestorben. Adam und weitere vier Kinder stammten aus zweiter Ehe.

Bereits als 17jähriger verließ Adam Ries sein Elternhaus das erste Mal für längere Zeit. Sein Vater war zu diesem Zeitpunkt bereits seit etwa drei Jahren verstorben.
Am Ende dieser Wanderjahre, während derer Adam Ries 1515 auch die Stadt Annaberg kennengelernt hatte, wurde er im Jahre 1518 in Erfurt sesshaft.

Dort bezeichnete er sich 1522 im Zusammenhang mit der Veröffentlichung des Rechenbuches "Rechenung auff der linihen und federn" erstmalig als Rechenmeister. Ob vorher ein Aufenthalt in Frankfurt (Main) erfolgte, wo Adam Ries auf dem Römer für die Messebesucher mathematische Aufgaben gelöst haben soll, ist ungewiss.
In Erfurt gründete Ries eine Rechenschule und veröffentlichte bereits 1518 sein erstes Buch "Rechnung auff der linihen" und 1522 die bereitserwähnte "Rechenung auff der linihen und federn"; beide erfuhren eine Reihe von Nachauflagen.

Durch G. Stortz, den späteren Rektor der 1392 eröffneten Universität Erfurt, kam Ries mit Humanisten und mit den Lehren Martin Luthers in Berührung.
In der großen Bücherei in Stortzens "Engelsburg" standen Ries viele mathematische Schriften zur Verfügung, zu deren Studium ihm seine ausgezeichneten Kenntnisse der lateinischen Sprache sehr zugute kamen.

Stortz war es vor allem, der Ries zum Schreiben von Rechenbüchern angeregt hat. Beide Männer blieben auch weiterhin freundschaftlich verbunden, als Ries 1523 nach Annaberg umsiedelte, dort 1525 heiratete und den Bürgereid leistete.
Gerade in diesem Jahr nach der Niederschlagung des Bauernkrieges verschärfte sich überall, so auch in Annaberg, die Verfolgung der "Lutheraner" immer mehr, ohne jedoch das Vordringen der neuen Lehre aufhalten zu können, mit der Ries sympathisierte, ohne sich öffentlich für sie zu bekennen.
Über Repressalien, denen er dadurch ausgesetzt war, ist jedoch nichts bekannt.

Adam-Ries-Haus in Annaberg-Buchholz (Erzgeb.)

Vielleicht wäre der Verlust für die Bergwerksherren zu groß gewesen, wenn man Ries, wie viele andere, eingekerkert oder der Stadt verwiesen hätte. In Annaberg versah Ries ab 1525 das Amt des Rezessschreibers.
Dieser Bergwerksberuf wäre aus heutiger Sicht vielleicht vergleichbar mit dem eines Buchhalters im Bergbau.

Der Rezessschreiber prüfte die Bergrechnungen und hatte die geförderte Erzmenge und deren Ausbeute zu erfassen und in das "Rezessbuch" einzutragen. Außerdem erwartete der Eigentümer vierteljährlich eine Aufstellung - den Rezess - über Soll und Ist seines Bergwerksbesitzes, den der Rezessschreiber liefern musste.

Aus dieser Zeit stammen Zehnt- und Münzrechnungen sowie Rezessschreiben aus Riesens Feder. Auch für die Stadtverwaltung von Annaberg war Ries tätig, indem er Berechnungen von Nachlässen und Steuern durchführte.
Für die Stadt Zwickau erarbeitete er einige Brot- bzw. Beckenordnungen. Bereits in Erfurt hatte Ries die Arbeiten an der "Coss" begonnen, die er 1524 in Annaberg vollendete.
Gedruckt wurde dieses Buch nicht.

In Riesens "Coss" sind neben vielen praktischen Aufgaben auch eine große Anzahl mit formalem Charakter enthalten. Dabei übernahm er Beispiele aus den Büchern anderer Cossisten, nicht ohne sie einer kritischen Überarbeitung zu unterziehen und sie vor allem in einfacher Sprache wiederzugeben.
Wie in allen seinen Büchern bezeichnete auch hier Ries die Proben als zur vollständigen Lösung eines Problems gehörig. Der Inhalt der "Coss", also die Aufstellung mathematischer Probleme aus der Praxis und die Lösung algebraischer Gleichungen mittels Algorithmus, das heißt, durch systematische Anwendung der vier Grundrechenoperatio-

nen, wurde von Ries teils in unterrichtender, weiterführender Form, teils in Form von Wiederholungen und Übungen, immer aber so verständlich dargeboten, "... damit der arme gemeyne Mann nicht übersetzt (betrogen) werde".

Von den Proben war seit jeher die Neunerprobe besonders beliebt. Für sie ist von der "Coss" folgendes Beispiel erhalten:

$$\begin{array}{r} 7869 \\ 8796 \\ \hline 16665 \end{array}$$

"Mach ein creutz zum ersten, also x. Nimm die prob von der obernn Zal, als von 7869, setz die in ein veld des creutz, also 3x. Nun nimm die proba von der andernn zal, das ist von 8796 ist auch 3; setz vff das ander veldtt neben vber, also 3x3 .

Addir nun zusammen 3 + 3 wirtt 6, setz obenn wie hi $\begin{array}{c} 6 \\ 3x3 \end{array}$. So du nun die prob von beyden Zalnn oben gesatzt genumen und zusamen addirt hast, so Nime alsdann prob auch von dem, das so auß dem addirnn komen ist, das ist von der vnterstenn Zal vnder der linihen alss 16665. Nim hinweg 9, so offt du magst, pleibn 6 übrig, die setz vnden in das ledige feltt. Ist gleich souil sam oben stett, also $\begin{array}{c} 6 \\ 3x3 \\ 6 \end{array}$.

So weniger oder mer komen wer, so hattest du im nicht recht gethan."

Bei diesem Beispiel ist zu erkennen, dass Ries als 'prob' den Rest der Division einer Zahl durch 9 bezeichnet.
Bis in Riesens Zeit wurde hauptsächlich mit oder besser auf dem Brett gerechnet.

Dazu benötigte man Rechensteine oder Rechenpfennige, die je nach dem Geldbeutel des Besitzers oft recht kunstvoll ausgeführt waren. Die Umschrift auf einem dieser Pfennige "Zwiespalt großes Gut verzehrt - Einigkeit das Wenige mehrt" soll von Adam Ries stammen.
Wirkliche Bretter oder in den Tisch geritzte oder darauf gezeichnete Schemata oder ein entsprechend bemaltes Tischtuch dienten dabei als "Rechenbretter".

Ein solches "Brett" ist zu verstehen als ein Schema für gebündelte Zahlen in Form von Linien. Die Einer, Zehner, Hunderter usw. wurden mit Rechensteinen auf ihnen dargestellt, die Fünfer, Fünfziger, Fünfhunderter usw. zwischen den Linien (in den sogenannten Spatien).

Während das Addieren und Subtrahieren auf dem Rechenbrett noch relativ übersichtlich auszuführen ist, gehören zur Ausführung von Multiplikation und Division gewisse Fertigkeiten, die unter anderem darin bestehen, dass eine mehrstellige Zahl dekadisch aufgespalten wird und die dadurch erhaltenen Teilsummanden einzeln "umgewandelt" werden.
Die so erhaltenen "Ergebnisse" wurden dann wieder in "deutsche Zahlen" (gemeint sind die römischen Zahlzeichen) übertragen.

Seit dem 12. Jahrhundert waren allmählich auch die indischen Ziffern über Arabien

nach Europa vorgedrungen und begannen sich im 14./15. Jahrhundert durchzusetzen. Ries widmete sich in seinem 1522 erschienenen zweiten Buch "Rechenung auff der linihen und federn auff allerley handtierung" sowohl dem Rechnen mit dem Rechenbrett als auch dem schriftlichen Rechnen.
Dieses Buch erlebte bis gegen 1650, also noch fast 100 Jahre nach Riesens Tod, über 60 Auflagen. Der Grund ist unter anderem darin zu suchen, dass dieses Buch in deutscher Sprache geschrieben und somit breitesten Kreisen zugänglich und vorzüglich didaktisch aufgebaut war.

Mit seiner Hilfe konnte der Leser wirklich Rechenfertigkeiten erwerben, indem er die ausführlichen Anleitungen gründlich studierte und die enthaltenen Exempel nachvollzog beziehungsweise Aufgaben löste. Und gerade in Bezug auf die praktische Anwendung der Mathematik bestand ein großes Bedürfnis, dem das in den Hochschulen gelehrte Quadrivium in keiner Weise entsprach.

Erwähnenswert ist noch das 1533 erschienene "Gerechent Büchlein auff den Schöffel, Eimer und Pfundgewicht" als erstes bekanntes Tabellenbuch für die Praxis, das nicht nur mehrere Auflagen, sondern auch viele Nachfolger durch andere Autoren erfuhr. Dabei darf nicht vergessen werden, dass Ries nicht nur Bücher schrieb, sondern auch eine Rechenschule betrieb und vor allem aber für Bergbau und Verwaltung als Rechenmeister tätig war.

Riesens guter Ruf drang bereits zu Lebzeiten weit über Annaberg hinaus. Abgesehen davon, dass er auch für Marienberg in den Jahren von 1529 bis 1537 den Rezess führte und in Freiberg mehrmals der Rechnungslegung der Bergwerke beiwohnen durfte, wurde er 1539 zum "Churfürstlich Sächsischen Hofarithmeticus" ernannt.

Ries konnte sich mit seiner zehnköpfigen Familie ein Leben frei von materiellen Sorgen leisten.
Außerdem erwarb er zwei Häuser und gehörte somit zu den wohlhabenden Bürgern Annabergs. Etwa um 1545 starb seine erste Frau. Einige Jahre danach heiratete er ein zweites Mal. Diese Ehe währte fast noch zehn Jahre.
Am 30. März 1559 starb A. Ries im Alter von 67 Jahren. Die unmittelbare Nachfolge übernahm sein Sohn Abraham.

Der Verlauf des Lebens von Adam Ries zeigt uns, dass er weder das schriftliche Rechnen noch das Einmaleins "erfunden" hat, wie häufig angenommen wird.
Sein großes einmaliges Verdienst besteht darin, die damals hochgeschätzte, aber als noch sehr schwierig empfundene Rechenkunst so "aufbereitet" zu haben, dass sie von jedermann verstanden und angewendet werden konnte.

Dabei verzichtete er nicht auf wissenschaftliche Strenge. Er erkannte die Bedürfnisse seiner Zeit, die für ihn darin bestanden, den breiten Massen Bildung zu vermitteln, um ihre Urteilsfähigkeit zu heben, und befriedigte diese in mathematischer Hinsicht optimal.

Die Redewendung "macht nach Adam Ries ...", nunmehr schon über 400 Jahre gebräuchlich, ehrt den ersten Mathematiklehrer des Volkes zu Recht, auch wenn die

Ergebnisse von Rechenoperationen nach ihm die gleichen blieben wie vor seinem Wirken und Ries selbst keine eigenen Beiträge zur Fortentwicklung der mathematischen Wissenschaften geleistet hat.

Annaberg im 16. Jh. zur Zeit des Wirkens von A. Ries

2 Einige Aufgaben aus der Coß von Adam Ries

Adam Ries (1492 bis 1559) schrieb die Coß, ein Lehrbuch der Algebra, in den Jahren 1523 bis 1524 in Annaberg. Man bezeichnete damals die Algebra oder die Lehre von den Gleichungen mit dem Ausdruck Coß, aus dem italienischen regola de la cosa.
Das italienische Wort cosa (aus dem Lateinischen causa, Ursache) bezeichnete ursprünglich das Ding, die Sache, später im 14. und 15. Jahrhundert eine zu berechnende Größe sowie die Lösung einer Gleichung. Daher wurde auch die Algebra mit Coß bezeichnet, die Algebraiker nannte man Cossisten.

Die Coß von Adam Ries ist im Druck nicht erschienen, da damals das Bedürfnis nach einem Lehrbuch der Algebra in deutscher Sprache nicht so groß war wie das Bedürfnis nach Rechenbüchern.
Dagegen gehörten die Rechenbücher von Adam Ries zu den am weitesten verbreiteten Lehrbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts.

Erst Bruno Berlet konnte 1860 im Programmheft der Annaberger Progymnasial- und Realanstalt einen Auszug aus der ersten Coß-Fassung veröffentlichen und diesen 1892, zum 400. Geburtstag von Adam Ries, nochmals als Sonderdruck herausgeben.[1]

Die Handschrift der Coß von 1524 wird in dem 1984 eingerichteten Adam-Ries-Museum in Annaberg-Buchholz aufbewahrt. Sie enthält die Rechenkunst (das Rechnen mit der Feder wie in den Rechenbüchern von Ries), die Coß (Algebra) und 318 Aufgaben, die überwiegend mit Hilfe linearer Gleichungen zu lösen sind.

[1] Berlet, Bruno: Adam Riese, sein Leben und seine Art zu rechnen. Die Coß von Adam Riese. Leipzig, Frankfurt a. M. 1892. Vergleiche auch Deubner, Fritz: ... nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena: Urania-Verlag 1959.

In dem theoretischen Teil werden die Regeln für das Lösen von Gleichungen, auch von quadratischen Gleichungen, angegeben. Adam Ries benutzte bereits das Zeichen "ꝛ" (aus dem später wahrscheinlich das "x" entstanden ist) für die zu berechnende Zahl bzw. für die Wurzel einer Gleichung.

Zahlen, insbesondere natürliche Zahlen, werden mit dem Zeichen "$\varnothing$" versehen, z. B. bedeutet bei Ries 2 $\varnothing$ die natürliche Zahl 2. Auch für Quadrate, Kuben usw. von Zahlen führt Ries besondere Zeichen ein.
Von den 318 Aufgaben der Coß werden bei Berlet 144 Aufgaben abgedruckt.

2.1 Drei Aufgaben aus der Coß, die mit Hilfe einer linearen Gleichung mit einer Variablen zu lösen sind

Aufgabe 1 (Nr. 5)
Wir geben zunächst diese Aufgabe im Originaltext von Ries wieder:

Item mach mir auß 10 Zwey teyl also, so ich eynenn teyl vom andern hinwegk nim Das 2 vorlasenn ader vberpleiben werdenn.

Lösung von Ries		In moderner Fassung
Setz Die ein Zal sey 1		x
so muß nothalbenn Die grossere Zal seyn 1 ꝛ + 2 $\varnothing$		x+2
addir Zusammen komen 2 ꝛ + 2 $\varnothing$ gleich 10 $\varnothing$.		2x+2=10
Nim hinwegk vff peydenn	-2	
teylenn 2 $\varnothing$ bleiben 2 ꝛ gleich 8 $\varnothing$.	2x =8	
Machs so komen 4 Die kleiner Zal,	x=4	
muß nothalbenn Die ander 6 sein.	x+2=6	

In moderner Fassung lautet diese Aufgabe:
Die Zahl 10 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass die Differenz dieser Summanden gleich 2 ist.

Lösung: Es sei x der kleinere Summand. Dann ist $x + 2$ der größere Summand, und es gilt

$$x + x + 2 = 10$$

also $2x = 8$, $x = 4$ und $x + 2 = 6$.
Der kleinere Summand ist also gleich 4 und der größere Summand gleich 6.

Man sieht, dass Ries der modernen Lösung dieser Aufgabe recht nahe kommt, nur mit dem Unterschied, dass er das Gleichheitszeichen noch nicht benutzt und daher den Sachverhalt sprachlich darstellen muss.

Aufgaben dieser Art, die zu einem ganzzahligen Ergebnis führen, können bereits jüngere Schüler, die das algorithmische Lösungsverfahren für Gleichungen noch nicht kennen, durch inhaltliche Überlegungen lösen. In dem vorliegenden Falle kann die Aufgabe mit der folgenden Tabelle gelöst werden:

kleinerer Summand x	größerer Summand $x+2$	Summe
1	3	4
2	4	6
3	5	8
4	6	10
>4	>6	>10

Nur für $x = 4$ und $x - 2 = 6$ wird die verlangte Summe 10 erreicht.

Aufgabe 2 (Nr. 23)
Ein Vater hat 4 Söhne. Er vermachte dem ersten $\frac{1}{4}$, dem zweiten $\frac{1}{5}$, dem dritten $\frac{1}{6}$ seines Vermögens und dem vierten 92 fl.
Wie groß war das Vaters?

Lösung: Das Vermögen des Vaters betrage x fl. Dann gilt

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 92 = x$$

$$15x + 12x + 10x + 5520 = 60x \to 23x = 5220 \to x = 240$$

Das Vermögen betrug also 240 fl.
fl. (Gulden) ist eine alte Goldmünze; die Abkürzung ist aus dem französischen florin zu erklären.

Hier und bei den folgenden Aufgaben ist der Aufgabentext sprachlich und orthographisch modernisiert worden.
Adam Ries gibt die folgende Lösung an:

Setz des Geldes sei gewesen 1 ꝛ	x
nim hinwegk 1/4 ꝛ 1/5 ꝛ und 1/6 ꝛ	$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{37}{60}x$
pleiben 23/60 gleich 92 ∅	$\frac{23}{60}x = 92$
Machs, so komen 240 die Zal.	$x = 24$

Aufgabe 3 (Nr. 118)
Drei Windmühlen mahlen gleichzeitig. So der Wind geht, werden in 8 Stunden auf der ersten 20 Scheffel, auf der zweiten 17 Scheffel, auf der dritten 15 Scheffel gemahlen.
In wieviel Stunden werden 24 Scheffel von den drei Windmühlen gemahlen?
(Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Getreide mit unterschiedlichem Rauminhalt, 23 l bis 223 l.)

Lösung: In x Stunden werden gemahlen (jeweils in Scheffeln) auf der 1. Windmühle $\frac{20}{8}x$, auf der 2. Windmühle $\frac{17}{8}x$, auf der 3. Windmühle $\frac{15}{8}x$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\frac{20}{8}x + \frac{17}{8}x + \frac{15}{8}x &= 24 \\ 20x + 17x + 15x &= 24 \cdot 8 \\ 52x &= 24 \cdot 8 \\ x &= \frac{24 \cdot 8}{52} = \frac{48}{13} = 3\frac{9}{13}\end{aligned}$$

Also werden 24 Scheffel von den drei 9 Windmühlen in $3\frac{9}{13}$ Stunden gemahlen.

2.2 Eine Optimierungsaufgabe

Aufgabe 4 (Nr. 119)
Ein Münzmeister hat 100 mk. gekorntes Silber, wobei 1 mk. 7 Lot Feinsilber enthält. Ferner hat er 50 mk. gekorntes Silber, wobei 1 mk. 12 Lot Feinsilber enthält.
Wieviel mk. gekorntes Silber, bei dem 1 mk. 10 Lot Feinsilber enthält, kann er daraus höchstens herstellen, wenn er keinen Zusatz nimmt, also weder weitere Mengen an Silber noch an anderen Legierungsmetallen verwenden soll?

mk. (Mark) ist hier eine alte Gewichtseinheit (233,8 g). Lot ist ebenfalls eine alte Gewichtseinheit: 1 Lot $= \frac{1}{16}$ mk. Gekorntes Silber ist eine Silberlegierung ; der Gehalt an Feinsilber wird dabei in Lot je 1 mk angegeben.

Lösung: Verwendet der Münzmeister von der 1. Sorte (7lötiges Silber) x mk. und von der 2. Sorte (12lötiges Silber) y mk., um 10lötiges Silber herzustellen, so gilt

$$7x + 12y = 10(x + y) \tag{1}$$

Dabei ist $x \leq 100$ und $y \leq 50$. Aus (1) folgt $7x + 12y = 10x + 10y$, also

$$2y = 3x \qquad , \qquad x = \frac{2}{3}y$$

Wegen $y \leq 50$ gilt $x = \frac{2}{3}y \leq \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$, also $x + y \leq 50 + 33\frac{1}{3} = 83\frac{1}{3}$.

Der Münzmeister kann also aus den beiden Sorten höchstens $83\frac{1}{3}$ mk. 10lötiges Silber herstellen, wenn er keinen Zusatz nehmen soll.

Die Lösung von Ries ist etwas umständlicher; er benutzt aber ebenfalls die Variable ꝛ. In seiner Lösung kritisiert Ries den Wardein (Münzprüfer) Hans Conrad und den Wardein Scheurlein aus Nürnberg, die sich "vil Rechens vermessen und das geringste exempel der ꝛ nichtt hat machen mugenn", also mit der Variablen nicht arbeiten und daher diese Aufgabe nicht lösen konnten.

In der Originalfassung der Aufgabe von Ries wird das Edelmetall nicht angegeben; es könnte auch Gold gewesen sein.

2.3 Eine Aufgabe aus der Coß, die auf ein lineares Gleichungssystem mit 3.Variablen führt

Aufgabe 5 (Nr. 122)
Drei Personen A, B und C kaufen ein Pferd für 12 fl. Keiner kann es allein bezahlen.
Nun spricht A zu B und C: "Wenn mir jeder von euch 1/2 seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Darauf spricht B zu A und C: "Wenn mir jeder von euch 1/3 seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Schließlich spricht C zu A und B: "Wenn mir jeder von euch 1/4 seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Nun frage ich, wieviel Geld jeder gehabt hat.

Lösung: A möge a fl., B möge b fl. und C möge c fl. gehabt haben. Dann gilt

$$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=12, \qquad \text{also} \qquad 2a+b+c=24 \tag{1}$$
$$b+\frac{c}{3}+\frac{a}{3}=12, \qquad \text{also} \qquad a+3b+c=36 \tag{2}$$
$$c+\frac{a}{4}+\frac{b}{4}=12, \qquad \text{also} \qquad a+b+4c=48 \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $-2b+3c=12$ (4). Aus (2) folgt $2a+6b+2=72$, also wegen (1) $5b+c=48$ (5), $155+3c=144$, also wegen (4) $17b=132$,

$$b=\frac{132}{17}=7\frac{13}{17}$$

Hieraus folgt wegen (5)

$$c=48-5b=9\frac{3}{17}$$

und wegen (2)

$$a=36-3b-c=3\frac{9}{17}$$

Es hatten also A $3\frac{9}{17}$ fl.,B $7\frac{7}{17}$ fl. und C $9\frac{3}{17}$ fl.

Adam Ries gibt auch (in der analogen Aufgabe Nr. 47) ein Lösungsverfahren für derartige Aufgaben an, das zwar in Worten dargestellt wird, im Prinzip aber dem obigen Lösungsverfahren entspricht.
Er bemerkt ferner, dass der Münzprüfer Hans Conrad einem schwarzen Mönch des Prediger-Ordens namens Aquinas für die Lösung dieser Aufgabe einen Gulden gegeben habe, von dem auch der erfahrene Mathematicus Andreas Alexander gelernt habe.

2.4 Adam Ries und die Anwendung der regula falsi

In seiner Coß wendet Adam Ries die regula falsi, die damals von den Rechenmeistern zur Lösung linearer Probleme häufig benutzt wurde, nicht mehr an, da er mit Hilfe der Variablen zu einem besseren Lösungsverfahren gelangte.
In der Practica des großen Rechenbuches von 1550 findet sich aber noch die folgende Aufgabe:

"Gott grüß euch Gesellen all 30." Antwortet einer: "Wenn unser sind noch so viel und halb so viel, so wären unser 30."
Die Frage ist, wie viel ihr gewesen.

Lösung: Aus $x+x+\frac{x}{2}=30$ folgt $4x+x=60$, $5x=60$, also $x=12$.
Es waren also 12 Gesellen.
Adam Ries löst diese Aufgabe wie folgt:

Nimm eine Zahl, die durch 2 teilbar ist, z. B. 16; dann ist 16 + 16 + 16/2 = 40, also 10 zu viel. Nimm 14; dann ist 14 + 14 + 14/2 = 35, also 5 zu viel. Nun nimmt er einen linearen Verlauf an (was nicht bewiesen wird) und erhält durch Extrapolation die Anzahl der Gesellen:

$$\frac{14 \cdot 10 - 16 \cdot 5}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Jüngere Schüler können diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle (durch inhaltliche Überlegungen) lösen, wobei aber nicht extrapoliert wird, sondern die Tabelle fortgesetzt wird, bis der richtige Wert erscheint:

x	$x + x + \frac{x}{2}$
16	40
14	35
12	30
<12	<30

Nur im Falle $x = 12$ ist $x + x + 5 = 30$. Also waren es 12 Gesellen.

3 Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt

3.1 Über das Lösen von Sachaufgaben

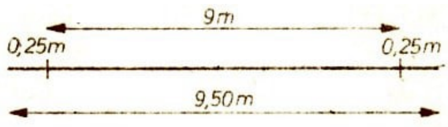
Macht es euch Freude, wenn ihr knobeln könnt, wenn ihr über ein kniffliges Problem nachdenkt, wenn ihr die Lösung einer schwierigen Aufgabe gefunden habt? Ja! Dann gehört ihr zu den vielen Menschen, denen Denken eines der größten Vergnügen ist.
So betrachtet, kann man die Beschäftigung mit der Mathematik als eine reizvolle Sache, vielleicht als ein schönes Hobby ansehen. Die Mathematik dient aber nicht vordergründig dazu, uns die Freude des Denkens, die Freude über die großartige Logik eines gefundenen Lösungsweges zu ermöglichen. Vor allem dient die Mathematik dazu, unser aller Leben zu erleichtern und zu verbessern.

Das wird durch die Anwendungen der Mathematik erreicht. Im täglichen Leben, bei der Arbeit in der Industrie und Landwirtschaft, im Handel und Transportwesen - überall wird die Mathematik angewendet und gebraucht. Kein Weltraumschiff könnte um die Erde kreisen, wenn nicht ein entsprechend hoher Stand der mathematischen Wissenschaft vorhanden wäre!

Wer Sachaufgaben löst, kann sich schon jetzt darin üben, praktische Probleme mit Hilfe der Mathematik zu bewältigen. Auch das kann ein schöner Erfolg sein und Freude und Befriedigung bringen, wenn man ein schwieriges Problem aus der Praxis durch Anwendung seiner mathematischen Kenntnisse gelöst hat.
Die folgenden Aufgaben sollen Angebote für euch sein, eure mathematischen Kenntnisse anzuwenden. Wer denkt und rechnet mit?

15/1 Um eine Dachrinne zu befestigen, müssen Rinnenhalter angebracht werden. Wieviel solcher Rinnenhalter werden benötigt, um eine 9,50 m lange Dachrinne zu befestigen, wenn die äußeren Halter je 0,25 m eingerückt werden und der Abstand der Rinnenhalter höchstens 0,75 m betragen darf?

Lösungshinweise: a) mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung



b) durch Rechnung

Tabelle:

Anzahl der Abstände	1	2	3	...	x
Entfernung in cm	75	150	225	...	900

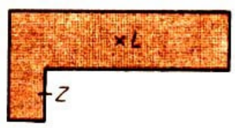
(Solche Tabellen sind ein nützliches Hilfsmittel, um die in der Aufgabe enthaltenen Zusammenhänge aufzudecken!)

Lösungsansatz: $75 \cdot x = 900$
(Die in der Tabelle untenstehenden Zahlen ergeben sich aus den darüberstehenden durch Multiplikation mit 75.)

$$x = 12$$

Auswertung des gefundenen Ergebnisses: Die Anzahl der Halter ist um 1 größer, da der linke (oder rechte) äußere Halter noch dazugerechnet werden muss.
Antwort: Man benötigt 13 Rinnenhalter.

15/2 Zum Verlegen einer Lichtleitung in einem Stallgebäude benötigt man Feuchtraumkabel, das mit Halteschellen an Wand bzw. Decke befestigt wird.
Wieviel Halteschellen werden benötigt, wenn 14,50 m Kabel zu befestigen sind, die beiden äußeren Schellen jeweils 0,20 m eingerückt werden und der Abstand der Schellen höchstens 0,60 m betragen soll?



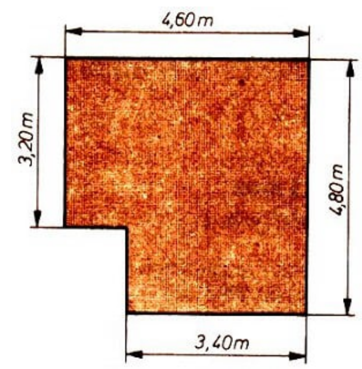
16/1 In einem Kellergang, dessen Grundriss im Maßstab 1:200 angegeben ist (siehe Bild), wird eine Deckenbeleuchtung angebracht. Dazu muss von der Anschlussstelle des Zählers (Z) ein Feuchtraumkabel bis zur anzubringenden Kellerleuchte (L) verlegt werden, das mit Halteschellen an Wand bzw. Decke befestigt wird.
Die Anschlussstelle für das Kabel im Zähler (Z) befindet sich 1,30 m über dem Fußboden. Der Kellerraum ist 2,10 m hoch.

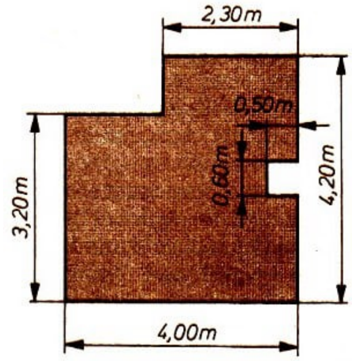
a) Wieviel Meter Feuchtraumkabel werden benötigt, wenn das Kabel stets parallel zu den Begrenzungslinien des Raumes verlegt und dabei der kürzeste Weg gewählt wird?

b) Wie groß ist der durchschnittliche Abstand der Halteschellen zu wählen, wenn insgesamt 15 Schellen zur Verfügung stehen und die beiden äußeren Schellen 20 cm von Z bzw. L entfernt anzubringen sind?

16/2 Ein 2,80 m hohes Wohnzimmer mit dem abgebildeten Grundriss soll tapeziert werden. (Bild links unten)
Im Zimmer befinden sich zwei 1,40 m breite und 1,50 m hohe Fenster, die 80 cm über dem Fußboden beginnen, und eine 1,20 m breite und 2 m hohe Tür.

Wieviel Tapetenrollen von 10 m Länge und 0,50 m Breite müssen eingekauft werden? (Dabei sollen auf den Tapetenbahnen von 0,50 m Breite und 2,80 m Höhe nicht zwei Tapetenstücke aneinandergesetzt werden!)





16/3 Zum Streichen von 20 m^2 Fußboden sind 5 kg Vorstreichfarbe erforderlich. Welche Menge wird zum Streichen eines Fußbodens benötigt, dessen Grundriss durch das Bild oben rechts gegeben ist?

Lösungshinweise: a) Fußbodenfläche:

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$
$$A = 2{,}30 \cdot 1\text{m}^2 + 3{,}20 \cdot 4\text{m}^2 - 0{,}50 \cdot 0{,}60\text{m}^2 = 14{,}8\text{m}^2$$

b) Farbmenge: Tabelle

Fläche in m^2	20	14,8	...	1
Farbmenge in kg	5	x	...	y

(Tabellen über den Zusammenhang von zwei Größen sind oft ein nützliches Hilfsmittel für das Finden des Ansatzes.)

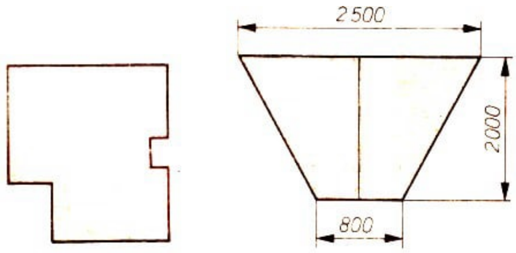
Mathematischer Ansatz:
I. Wenn man wüsste, wieviel kg Farbe (y) für 1 m^2 Fußboden benötigt würde, könnte man die Farbmenge berechnen (Ergänzung der Tabelle durch die letzte Spalte).

$$y = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \qquad \text{(Schließen auf die "Einheit")}$$

$$x = 14{,}8 \cdot \frac{1}{4} = 3{,}7$$

2. Über Verhältnisgleichungen (direkte Proportionalität): $20 : 5 = 14{,}8 : x$
Antwort: Man braucht 3,7 kg Farbe.

17/1 Bei der Instandsetzung einer Altbauwohnung ist in einem Zimmer mit dem untenstehenden Grundriss im Maßstab 1:200 die Dielung zu erneuern.
a) Wieviel Quadratmeter Fußbodenbretter werden verbraucht, wenn man für 1 m^2 Fußbodenfläche wegen Verschnitts mit 1,15 m^2 rechnen muss?
b) Wieviel Meter Kehrleiste sind erforderlich, wenn das Zimmer eine 1,20 m breite Tür (keine Kehrleiste) besitzt und man für einen Meter 5 cm Verschnitt hinzufügen muss?
c) Wieviel Kilogramm Nägel werden benötigt, wenn man für 1 m^2 Fußbodenbelag 0,11 kg und für 1 m Kehrleiste 10 g rechnet?



(Maßangaben wie bei technischen Zeichnungen üblich in mm)

17/2 Für eine Frischwasserleitung ist ein Rohrgraben mit dem im Bild rechts oben dargestellten Profil und einer Länge von 1,85 km auszuheben. In wieviel Stunden wird der Graben mit einem Grabenbagger ausgehoben, wenn in einer Stunde 41 m^2 ausgehoben werden?

Lösungshinweise:
a) Volumen des auszubaggernden Grabens: Formeln: $V_P = A_G \cdot h_P$ (Prisma); $A_G = \frac{a+c}{2} h_T$ (Trapez)
Gegeben: a =0,8 m; $c = 2{,}5$ m; $h_T = 2{,}0$ m; $h_P = 1850{,}0$ m; $V_P = 6105$ m^3

b) Zeit für die Ausbaggerung:
Tabelle:

Zeit in Stunden	1	2	...	x
ausgebaggerte Erde in m^3	41	82	...	V_P

(Solche Tabellen, die den Zusammenhang von zwei "Größen" betreffen, sind ein nützliches Hilfsmittel für das Suchen eines Ansatzes.)

Mathematischer Ansatz: $x \cdot 41 = V_P$
(die Zahlen der unteren Zeile ergeben sich aus den darüberstehenden durch Multiplikation mit 41)
$x = 6105 : 41 \approx 149$
Antwort: In etwa 149 Stunden ist der Graben ausgebaggert.

4 Geometrie hilft der Arithmetik

4.1 Vom "Klammer"-Rechnen

Wir erinnern zunächst an die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b; sie lautet: $A = a \cdot b$.
Bei gleicher Längeneinheit (z. B. 1 cm) und dazugehöriger Flächeneinheit (1 cm^2) ist der Zahlenwert des Flächeninhalts eines Rechtecks gleich dem Produkt der Zahlenwerte der Seitenlängen. Auf diese Weise können wir das Produkt zweier positiver Zahlen durch eine rechteckige Fläche darstellen.

Kann man auf diese Weise Rechenregeln über Produkte von positiven Zahlen erkennen?

Wir beginnen mit dem Produkt $(a + b) \cdot c$.
Dazu können wir uns ein Rechteck mit den Seitenlängen $(a + b)$ und c angeben (siehe Bild 18/1).

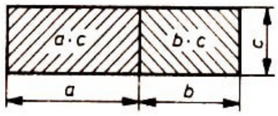


Bild 18/1

Sein Flächeninhalt ist offenbar gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Teilrechtecke mit den Seitenlängen a und c bzw. b und c. Also gilt die Formel

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

die du unter der Bezeichnung Distributivgesetz kennst. Nun kannst du bei den folgenden Aufgaben entsprechend vorgehen.

18/1 Forme $(a+b)\cdot(c+d)$ für positive Zahlen a, b, c, d in eine Summe um!

18/2 Es seien a, b, c positive Zahlen und $a > b$. Forme $(a-b)\cdot c$ um!

Wir formen nun $(a-b)\cdot(c-d)$ um, wobei a, b, c, d positive Zahlen und $a > b$ und $c > d$ sei.
In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und c lässt sich leicht ein Rechteck mit den Längen $a-b$ und $c-d$ angeben; siehe Bild 18/2.

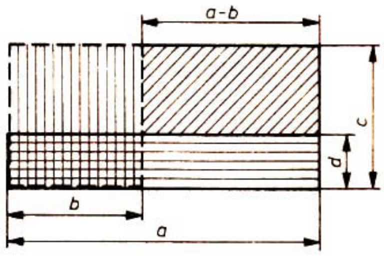


Bild 18/2

Um diese Rechtecksfläche aus der mit den Seitenlängen a und c zu erhalten, schneiden wir die Rechtecksflächen mit den Seitenlängen a und d und mit den Seitenlängen b und c ab.
Dabei wird aber die Rechtecksfläche mit den Seitenlängen b und d zweimal erfasst. Zur Korrektur ist dieser Flächeninhalt am Ende noch zu addieren. Damit erhalten wir folgende Formel:

$$(a-b)\cdot(c-d) = a\cdot c - a\cdot d - b\cdot c - b\cdot d$$

18/3 Betrachte
a) $(a+b)^2$ als Spezialfall der 1. Aufgabe,
b) $(a-b)^2$ als Spezialfall der gerade abgeschlossenen Überlegungen und
c) $(a+b)\cdot(a-b)$!

Die Formeln, die sich in der Aufgabe 18/3 ergeben, nennt man binomische Formeln.

Wir können jetzt solche Überlegungen auch mit Hilfe von Volumenberechnungen anstellen. Wir betrachten einen Würfel und seine im Bild 19/1 angegebenen Zerlegungen.

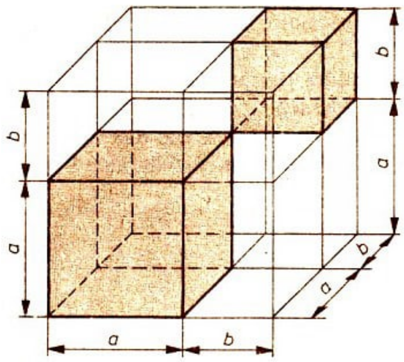


Bild 19/1

Indem man sich das Volumen des gesamten Würfels aus den Volumina der einzelnen acht Quader (davon zwei Würfel) zusammengesetzt denkt, kann man daraus ablesen:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$$

4.2 Rechnen mit Größenvergleichen

Wir betrachten positive Zahlen a, b und c und untersuchen die Frage: Welcher Vergleich von ac und bc ergibt sich aus $a > b$?
Das lässt sich wieder geometrisch beantworten. Anhand des Bildes 19/2 ist sofort zu sehen:
Aus $a > b$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$.

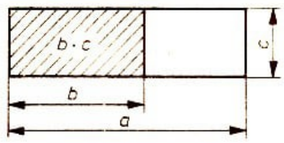


Bild 19/2

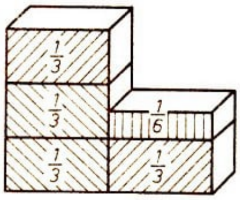
19/1 Man vergleiche $a \cdot c$ und $b \cdot d$, wenn $a < b$ und $c < d$ ist!

19/2 Kann ein Vergleich von $a \cdot c$ und $b \cdot d$ angegeben werden, wenn $a < c$ und $b < d$ gilt?

4.3 Wie viele sammelten?

Eine Schülergruppe geht Kastanien sammeln. Dazu stehen ihr zwei Behälter für den Transport zur Verfügung, von denen einer doppelt so viel fasst wie der andere.
In der ersten halben Stunde schüttet die ganze Gruppe die Kastanien nur in den großen Behälter. In der nächsten halben Stunde füllt eine Hälfte der Gruppe den großen Behälter, die andere Hälfte sammelt in den kleinen Behälter. Bis auf ein Kind müssen die übrigen der Gruppe dann nach Hause. Dieses Kind füllt schließlich in der nächsten Stunde den kleinen Behälter. Wie viele Kinder sammelten?

Wir wollen noch voraussetzen, dass alle Schüler in der gleichen Zeit die gleiche Menge sammeln. Wer von euch mit Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen gearbeitet hat, wird wohl gleich zu dieser Möglichkeit greifen. Doch es geht einfacher und übersichtlicher, wenn man die Aufgabenstellung geometrisch sieht.

Bild 19/3 

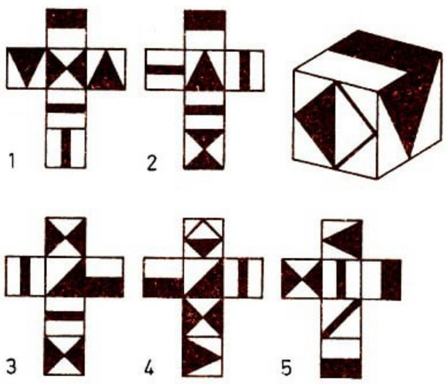
Wir stellen uns die Behälter als Quader mit gleicher Grundfläche vor. Der große Behälter muss dann doppelt so hoch sein wie der kleine (siehe Bild 19/3).
Da zum Füllen des großen Behälters zunächst die ganze Gruppe eine halbe Stunde und eine weitere halbe Stunde die Hälfte der Gruppe gebraucht hat, sammelt die Hälfte der Gruppe in einer halben Stunde $\frac{1}{3}$ des Fassungsvermögens des großen Behälters. Für das letzte Kind bleiben zum Füllen des kleinen Behälters demnach noch

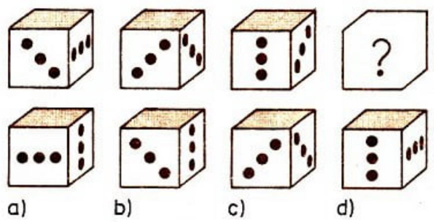
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Fassungsvermögens des großen Behälters übrig. Dafür benötigt es eine Stunde.
Zwei Schüler hätten also in einer Stunde $\frac{1}{3}$ des großen Behälters gefüllt. Die gesamte Gruppe hatte aber in einer Stunde $\frac{4}{3}$ des Volumens des großen Behälters gesammelt (siehe nochmals Bild 19/3), also bestand die ganze Gruppe aus 8 Schülern.

5 Knobelei mit Würfeln

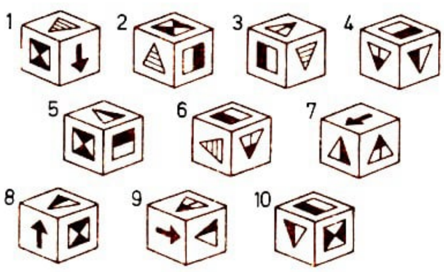
20/1 Welches Netz entspricht dem abgebildeten Würfel? (Abbildung unten links)



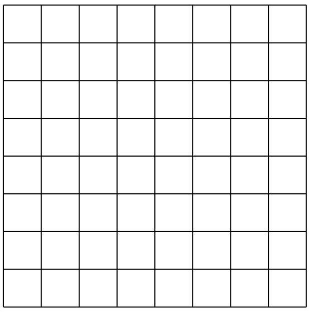


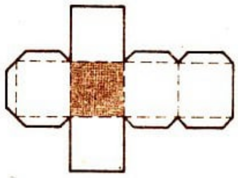
20/2 Welcher Würfel von a bis d gehört an die Stelle des Fragezeichens? (Abbildung oben rechts)

20/3 Die 10 Bildchen zeigen den gleichen Spielwürfel von unterschiedlichen Seiten her. Ein Bild aber ist falsch. Welches ist es und worin liegt der Fehler?



20/4 Würfelspiel: In diesem Spiel braucht man zwei Dinge, ein quadratisches Netz mit 64 quadratischen Feldern und einen Würfel, dessen eine Seitenfläche blau und genau so groß ist wie das quadratische Feld auf dem untenstehenden Bild.





Man darf nun auf dem Netz so vorwärtsschreiten, indem man den Würfel über eine Kante von einem Feld auf das andere wälzt, nach oben, nach unten, nach rechts oder nach links, nur nicht diagonal oder über eine Ecke.

Man lege den Würfel in die linke obere Ecke des Netzes mit der blauen Seite nach oben. Man wälze den Würfel durch alle 64 Felder (jedes nur einmal) und erreiche am Ende die rechte obere Ecke des Netzes mit der blauen Seitenfläche nach oben. Unterwegs darf die blaue Seitenfläche niemals nach oben kommen

6 Ungleichungen

21/1 Welche natürlichen Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?

a) $7 - u > 3$ b) $y \cdot 4 < 11$ c) $3 < x + 4 < 11$
d) $5897 < x < 5903$ e) $27 > 3x - 2$ f) $3z + 3 < 17$
g) $\frac{9}{11} < \frac{x}{2} < \frac{8}{9}$ h) $\frac{3}{5} < \frac{4}{x} < \frac{5}{3}$, mit $x \neq 0$

21/2 Welche Vielfache von 10000 erfüllen die Ungleichung $70000 - a < 20000$?

21/3 Für das Volumen V eines Quaders gilt $V < 12$ cm^3.
Welche Kantenlängen a, b, c (gemessen in cm) mit $a < b < c$ erfüllen diese Ungleichung, wenn die Maßzahlen natürliche Zahlen sind?

21/4 Setze zwischen die folgenden Terme die richtigen Zeichen ($<$; $>$; $=$)!
a) $1{,}83 + 0{,}5 \square 1{,}14 + 1{,}17$
b) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} \square \frac{27}{5} - \frac{22}{7}$

21/5 Es seien a, b, c, d die Längen der Seiten und e, f die Längen der Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$. Weise nach, dass dann stets gilt:

$$e + f < a + b + c + d$$

21/6 Löse die folgenden Ungleichungen im Grundbereich der rationalen Zahlen!

a) $|x| > 2x$ b) $|x| + 2 > 10$
c) $|x + 2| < 12$ d) $|x + 1| > 1$

21/7 Welcher der beiden Brüche $\frac{5678901234}{6789012345}$ und $\frac{5678901235}{6789012347}$ ist größer?

21/8 Stelle ohne Berechnung der Wurzeln oder Nachschlagen in einer Zahlentafel fest, welche der beiden reellen Zahlen

$$\sqrt{7}+\sqrt{10} \text{ und } \sqrt{3}+\sqrt{19}$$

größer ist!

21/9 Löse das folgende lineare Ungleichungssystem!

$$\left.\begin{aligned} 3x-4&=x \\ 8-7x&<25 \end{aligned}\right\}$$

$x \in \mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

21/10 Es ist zu untersuchen, ob die Ungleichung

$$5^{10}+6^{10}<7^{10}$$

eine wahre Aussage darstellt!

21/11 Es ist zu beweisen, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$a+b+c \geq 2\sqrt{c(a+b)}$$

gilt.

21/12 Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und seines Sohnes (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die größer als 50, aber kleiner als 60 ist. Ermittle das Lebensalter von Vater und Sohn!

21/13 Wir betrachten alle möglichen Dreiecke mit Seiten $a \leq 2$ cm, $b \leq 3$ cm, $c \leq 4$ cm.
Bestimme die Länge der größtmöglichen Höhe solcher Dreiecke!

21/14 Auf dem Tisch liegen drei Kärtchen mit Ziffern. Zuerst wurde aus ihnen die größtmögliche dreistellige Zahl gebildet, dann die nächstkleinere. Deren Summe war 1233. Welche Ziffern standen auf den Kärtchen?

7 Unterhaltsame Zahlentheorie

22/1 Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

22/2 Man nehme viermal die Ziffer 7 und bilde unter Verwendung der vier Rechenzeichen Aufgaben, deren Ergebnis $2, 3, 5, ..., 10$ lautet, z.B.

$$1=\frac{77}{77}; \quad 4=\frac{77}{7}-7; ...$$

22/3 Ihr habt vor euch 7 Zeilen mit Ziffern:

$$\begin{array}{ll} 1\,2\,3 & = 1 \\ 1\,2\,3\,4 & = 1 \\ \dots & \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 & = 1 \end{array}$$

Aus jeder dieser Zeilen soll eine wahre Aussage hergestellt werden. Dazu ist gestattet,
- zwischen Ziffern eines der Rechenzeichen "+", "−", "·"oder ":" einzufügen,
- Klammern einzusetzen,
- zwischen Ziffern kein Zeichen einzufügen und sie so als mehrstellige Zahlen aufzufassen.

22/4 Setze die Ziffern 1 bis 9 so in die Kästchen ein, dass alle neun Ziffern verwendet werden und die vorliegenden Gleichungen erfüllt sind!

$$\square \times \square = \square + \square = \square - \square = \square\square : \square$$

22/5 Welche Zahl entspricht der Gleichung $(r + o + m + a)^2 = roma$?

22/6 Bestimme alle Ziffern x, für die gilt:

$$x^x + x = \overline{x0}$$

22/7 Bestimme alle natürlichen Zahlen a, b, c, für die $ab = 144$, $bc = 240$, $ac = 60$ gilt!

22/8 a) Zum Dreifachen einer Zahl die Zahl 3 addiert, ergibt das gleiche wie von der dritten Potenz von 3 das Dreifache der Zahl subtrahiert. Bestimme die Zahl!

b) Zum vierten Teil einer Zahl die 4 addiert, ergibt das gleiche wie vom Vierfachen der Zahl die Zahl 4 subtrahiert. Bestimme die Zahl!

22/9 Abbildung von M_1 in M_2: Gegeben sind die Mengen
$M_1 = \{\alpha, \beta, T, R, A, P, E, Z\}$ und $M_2 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
sowie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha\alpha &= (\alpha\beta)^\alpha + \alpha \\ \alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^T + \alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^R + \alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^A + \alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^P + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^E + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha &= (\alpha\beta)^Z + \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \end{aligned}$$

Bilde die Menge M_1 so in die Menge M_2 ab, dass sämtliche Gleichungen zu wahren Aussagen werden!

22/10 Erik denkt sich eine zweistellige Zahl. Wenn man die Hälfte dieser Zahl mit sich selbst multipliziert, dann erhält man dasselbe, als wenn man die Ziffern der gedachten Zahl vertauscht.

Welche Zahl hat Erik sich gedacht?

22/11 Die folgende Summe ist auf rationelle Weise zu ermitteln:

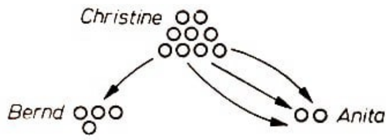
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + ... + 99^2 - 100^2$$

22/12 Welche der beiden Zahlen 15^{30} und 30^{15} ist die kleinere?

8 Das arithmetische Mittel

Anita, Bernd und Christine waren fleißig beim Suchen nach den Ostereiern, die ihre Eltern im Garten versteckt hatten.
Christine, die älteste von den dreien, hatte 9 Eier gefunden, Bernd hatte 4 aufgespürt, aber die kleine Anita hatte nur 2 entdeckt und war natürlich traurig. Christine tröstete sie und schlug vor, ihren Geschwistern so viele ihrer Ostereier abzugeben, dass alle gleich viel besaßen.

Und das tat sie dann auch:
Bernd gab sie ein Osterei und an Anita 3 Eier. Jetzt hatte jeder gleich viel, und alle waren zufrieden.



Was die drei Geschwister hierbei taten, ist ein Vorgang, der sich in ganz anderen Zusammenhängen häufig abspielt, manchmal in wirklicher Ausführung, manchmal in Gedanken. Die drei hatten nämlich von den Anzahlen der Ostereier, also von 9, 2 und 4 den Durchschnitt gebildet.

Diesem Begriff begegnen wir an vielen Stellen. Wir erfahren, dass das Durchschnittsalter einer Fußballmannschaft 23 Jahre beträgt, wir hören, dass die durchschnittliche Körpergröße der Menschen allmählich zunimmt, wir lesen, dass die Durchschnittstemperatur des Monats August unter der üblichen lag.
Um die Qualität einer Ernte einzuschätzen, berechnet man den durchschnittlichen Hektarertrag.

Aber auch dort, wo nicht vom Durchschnitt die Rede ist, bedeuten Zahlenangaben oft einen durchschnittlichen Wert. Angaben über z. B. die Geschwindigkeit von Schiffen, die Leistungen von Betrieben, die Menge der von einem Haushalt verbrauchten Energie und vieles andere mehr sind Durchschnittswerte, ohne dass das in jedem Falle extra betont wird.

Auch die drei Geschwister hätten eine andere Möglichkeit des Ausgleichens gehabt.
Sie hätten nämlich alle gefundenen Ostereier zusammenlegen und in drei gleiche Teile aufteilen können. Dann wären auch auf diese Weise auf jeden 5 Ostereier gekommen.

Christine	○	○	○ ○ ○	9
	○	○	○ ○	
Bernd	○	○		4
	○	○		
Anita	○	○		2
	5	5	5	

Wollte man zum Beispiel im Jahre 1990 prüfen, ob die zu dieser Zeit lebenden Menschen im Durchschnitt größer sind als die, die 1980 lebten, dann müsste man eigentlich zu beiden Zeitpunkten die Größen aller dann lebenden Menschen messen und diese Summe durch ihre Anzahl dividieren.
Das ist nun allerdings weder zweckmäßig (so könnte z. B. zu einem der beiden Zeitpunkte die Zahl der noch nicht erwachsenen Personen beträchtlich größer sein) noch notwendig. Man würde sich also darauf beschränken, die Körpergröße von einer hinreichend großen Zahl von Personen, etwa von 5000, zu ermitteln, hieraus die Durchschnittswerte zu berechnen und diese zu vergleichen.

Wenn der Lehrer den Durchschnitt einer Klassenarbeit errechnet, dann addiert er die erreichten Zensuren und dividiert diese Summe durch die Anzahl der Schüler, die diese Arbeit mitgeschrieben haben.
Angenommen, in einer Arbeit wurden 7 Einsen, 11 Zweien, 8 Dreien, 3 Vieren und 1 Fünf geschrieben, so wäre zu rechnen:

$$1+1+1+1+1+1+1+2+...+4+4+4+5=70$$

und diese Zahl wäre durch die Anzahl der Schüler $7+11+8+3+1=30$ zu dividieren, was den Durchschnitt $2{,}\overline{3}$ ergibt. Es ist allerdings praktischer, statt die 30 Summanden einzeln zu addieren, vereinfacht zu rechnen:

$$7\cdot 1+11\cdot 2+8\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 5=70$$

In der Mathematik nennt man das, was wir hier als Durchschnitt bezeichnet haben, arithmetisches Mittel.

Das arithmetische Mittel der Zahlen 5 und 9 ist also 7, weil

$$(5+9):2=14:2=7$$

ist. Man legt demnach fest:
Unter dem arithmetischen Mittel m_a von n Zahlen $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ versteht man

$$m_a=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

Aus all dem bisher Gesagten ergibt sich folgendes:
Das arithmetische Mittel verschiedener Zahlen liegt stets zwischen der größten und der kleinsten dieser Zahlen, ist also größer als die kleinste und kleiner als die größte von ihnen. Diese Erkenntnis kann zum Beispiel für eine Kontrolle genutzt werden. Sie findet auch bei der Lösung der Aufgabe 24/4 (siehe unten) Anwendung.

Das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen ist stets eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man im allgemeinen aus dem arithmetischen Mittel keine Rückschlüsse auf die Zahlen ziehen, aus denen es gebildet wurde. Der Durchschnitt von 1,7 bei einer Klassenarbeit schließt nicht aus, dass eine ungenügende Leistung dabei war.

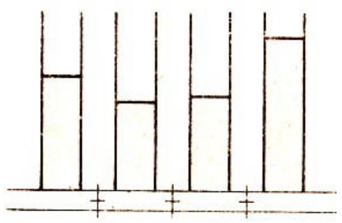
In einem Teich mit einer durchschnittlichen Tiefe von einem halben Meter kann ein Erwachsener ertrinken. Ein Autofahrer, der eine Stunde mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren ist, hat gewiss nicht zu jedem Zeitpunkt innerhalb dieser Stunde diese Geschwindigkeit eingehalten.

Sind allerdings das arithmetische Mittel von n Zahlen und $n-1$ dieser Zahlen (d. h. alle bis auf eine) bekannt, dann lässt sie sich aus diesen Angaben errechnen.

Das arithmetische Mittel von sechs Zahlen, von denen fünf 17; 28; 21; 30 und 19 lauten, sei 25. Dann kann man die sechste Zahl auf folgende Weise finden:
Wenn das arithmetische Mittel von sechs Zahlen 25 beträgt, dann muss die Summe dieser sechs Zahlen 150 betragen. Die Summe der fünf bekannten Zahlen lautet 115. Demnach ist die fehlende Zahl die Zahl 35.
Versuchen wir nun, das arithmetische Mittel zu berechnen!

24/1 Berechne das arithmetische Mittel der Zahlen 76; 78; 82 und 84!

24/2 In vier zylindrischen Gefäßen mit gleichem Durchmesser steht die Wassersäule 15 cm, 12 cm, 13,5 cm bzw. 21,5 cm hoch.



Wie hoch würde die Wassersäule in jedem dieser Gefäße stehen, wenn man die Gefäße unten verbindet, so dass sich die Höhe des Wasserspiegels ausgleicht und in allen vier Gefäßen gleich ist?

24/3 Das arithmetische Mittel von 75 und einer Zahl x ist 81. Wie lautet die Zahl x?

24/4 Von den Zahlen 621, 915, 438 und 530 ist das arithmetische Mittel errechnet worden. Es ist eine der folgenden Zahlen:
a) 916, b) 626, c) 420 und d) 530.
Ermittle die richtige Zahl, ohne das arithmetische Mittel auszurechnen!

25/1 Eine fünfköpfige Schiffsbesatzung hat ein Durchschnittsalter von 28 Jahren. Der Steuermann ist 31 Jahre alt, der Maschinist 28 Jahre, der Mechaniker 23 Jahre und der jüngste Matrose 19 Jahre alt.
Wie alt ist der Kapitän?

25/2 Das Bild zeigt zwei Strecken a und b. Konstruiere das arithmetische Mittel ihrer Maßzahlen, ohne die Strecken zu messen!

25/3 Eine Folge von Zahlen sei so beschaffen, dass jedes Glied (außer dem ersten und letzten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist.
a) Wie ist die Folge 3; 7; ... weiterzuführen, damit sie diese Eigenschaft hat?
b) Gib die ersten 10 Glieder einer solchen Folge an, die mit der Zahl 0,5 beginnt!

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie sich eine Veränderung der Ausgangswerte auf das arithmetische Mittel auswirkt.
a) Wenn einer der Ausgangswerte um eine bestimmte Zahl vergrößert, ein anderer um die gleiche Zahl verkleinert wird und alle anderen Werte unverändert bleiben, ändert sich das arithmetische Mittel nicht.
Es leuchtet ein, dass die Summe der Ausgangszahlen dabei keine Veränderung erfährt. Diese Gesetzmäßigkeit haben wir ausgenutzt, als in unserem ersten Beispiel Christine an ihre Geschwister Ostereier abgab.

b) Wenn jede der Ausgangszahlen um die gleiche Zahl vergrößert wird, dann vergrößert sich auch das arithmetische Mittel um diese Zahl. Das sei am Beispiel dreier Zahlen a, b und c gezeigt.
Das arithmetische Mittel m_1, dieser Zahlen ist

$$m_1 = \frac{a+b+c}{3}$$

Wird nun jede dieser Zahlen um n vergrößert, dann erhält man als arithmetisches Mittel m_2 dieser neuen Zahlen

$$m_2 = \frac{a+n+b+n+c+n}{3} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{3n}{3} = m_1 + n$$

Der Gedankengang lässt sich leicht auf jede andere Anzahl von Ausgangszahlen übertragen. Entsprechendes gilt auch bei Subtraktion der gleichen Zahl von allen Ausgangswerten.

Diese Tatsache lässt sich bei manchen Aufgaben zu einer vorteilhaften Berechnung des arithmetischen Mittels ausnutzen.
Es sei zum Beispiel das arithmetische Mittel der Zahlen 64011; 64029 und 64020 gesucht. Dann ermittelt man im Kopf das Mittel der Zahlen 11; 29 und 20, das ist 20, und addiert dazu 64000. Man erhält so recht einfach den Wert 64020.

c) Wird jede der Ausgangszahlen mit einer bestimmten Zahl n multipliziert, so wird auch das arithmetische Mittel dieser Zahlen n-mal so groß. Auf einen Beweis sei hier verzichtet.

Als Beispiel seien die vier Zahlen 11; 16; 17 und 20 herangezogen, deren arithmetisches Mittel 16 beträgt, während man als entsprechenden Wert für die 10 mal so großen Zahlen 110; 160; 170 und 200 auch das Zehnfache davon, nämlich 160 erhält.

Auch bei Division aller Ausgangswerte durch die gleiche Zahl erhält man einen entsprechend veränderten Wert. Hieraus ergeben sich ebenfalls bisweilen Rechenvorteile.

Dass man in all diesen Fällen vom arithmetischen Mittel und nicht einfach vom Mittel spricht, hat seinen Grund darin, dass es auch Mittelwerte anderer Art gibt. In der Mathematik spielt z. B. noch das geometrische Mittel eine Rolle.

Das geometrische Mittel m_g zweier positiver Zahlen a und b ist definiert als Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Zahlen, es gilt also

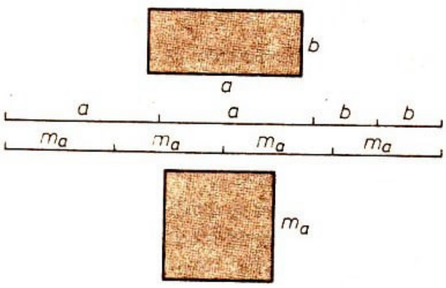
$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

So ist zum Beispiel das geometrische Mittel der Zahlen 2 und 8 die Zahl 4, weil $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ ist.

Beide Mittelwerte lassen sich geometrisch veranschaulichen. Nimmt man zum Beispiel ein Rechteck mit den Seiten a und b, so ist das arithmetische Mittel m_a beider Maßzahlen a und b die Länge der Seiten eines Quadrats, das den gleichen Umfang hat wie das Rechteck. Es gilt dann nämlich

$$4m_a = 2a + 2b, \qquad \text{also} \qquad m_a = \frac{a+b}{2}$$

Diese Quadratseite ist leicht zu konstruieren. Man konstruiert zunächst eine Strecke der Länge $2a + 2b$ und teilt diese (z. B. mit Hilfe der Mittelsenkrechten) in vier gleiche Teile.



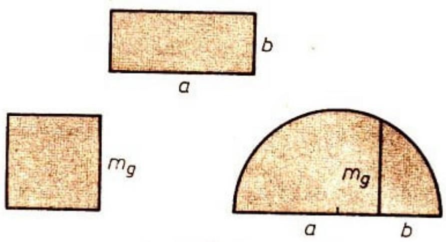
Das geometrische Mittel von a und b erhält man als Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck mit den Seiten a und b. Es gilt nämlich dann

$$m_g^2 = a \cdot b$$

und für positive Zahlen a und b folgt daraus

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Die Seite eines solchen Quadrats lässt sich z. B. unter Benutzung des Höhensatzes oder des Kathetensatzes konstruieren.



Bildet man von mehreren Zahlenpaaren sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel, so fällt auf, dass letzteres stets kleiner ist als das erstere, falls die Zahlen voneinander verschieden sind.
So ist z. B. das arithmetische Mittel der Zahlen 2 und 18 die Zahl $\frac{2+18}{2} = 10$, das geometrische Mittel die Zahl $\sqrt{2 \cdot 18} = 6$.
Es lässt sich beweisen, dass das in jedem Falle so ist.

Da das Quadrat einer von Null verschiedenen Zahl stets positiv ist, muss gelten

$$(a-b)^2 > 0, \qquad \text{d.h.} \qquad a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

Durch Addition von $4ab$ auf beiden Seiten erhält man daraus $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$ und nach Anwendung der ersten binomischen Formel

$$(a+b)^2 > 4ab$$

Für positive Zahlen a und b folgt

$$a + b > 2\sqrt{ab} \qquad ; \qquad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

d. h. also, dass in jedem Falle das arithmetische Mittel von a und b (mit $a \neq b$) größer ist als das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen.

26/1 Ermittle (im Kopf) das arithmetische Mittel der Zahlen 2023; 2029; 2021; 2027 !

26/2 Berechne von den Zahlen 3 und 27 das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel!

26/3 Das geometrische Mittel aus 6 und einer Zahl x sei 18. Ermittle x!

9 Turnierpläne aus mathematischer Sicht

9.1 Ein praktisches Problem

Stellt euch vor, an eurer Schule soll ein Fußballturnier durchgeführt werden. Dabei mögen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Anzahl n der am Turnier teilnehmenden Mannschaften ist gerade. ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, n gerade)
- Im Verlauf des Turniers hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal zu spielen.

Wenn nach der Eröffnung des Turniers durch den Sportlehrer alle teilnehmenden Mannschaften gleichzeitig mit ihren Spielen beginnen sollen, so müssen wir zunächst überlegen, wieviel Sportplätze benötigt werden. Ihr findet die Lösung sicher selbst ganz leicht:

Wir haben n teilnehmende Mannschaften, auf jedem Sportplatz können jeweils genau zwei Mannschaften gegeneinander spielen - wir benötigen also $\frac{n}{2}$ Sportplätze ($\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$).

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir davon ausgehen, dass $\frac{n}{2}$ Sportplätze zur Verfügung stehen.
Das Turnier soll in möglichst kurzer Zeit beendet werden. Damit entsteht die Frage nach einem Turnierplan, bei dem keine Mannschaft in irgendeiner Runde spielfrei ist.

Wieviel Runden müssen wir einplanen?
Jede der n Mannschaften hat gegen jede der übrigen $n-1$ Mannschaften anzutreten. Das gäbe zunächst $n \cdot (n-1)$ Begegnungen. Wenn aber eine Mannschaft A die Mannschaft B zum Gegner hat, so hat natürlich gleichzeitig B den Gegner A. Unsere ermittelte Anzahl der Begegnungen ist also noch durch 2 zu dividieren. Es müssen demnach in unserem Turnier genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Spiele gespielt werden.

(Wer von euch den Begriff "Kombination vom Umfang m aus einer n-elementigen Menge" kennt, ist natürlich schneller zum Ergebnis

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

gekommen.)
In jeder Runde werden genau $\frac{n}{2}$ Spiele durchgeführt - das Turnier besteht somit aus genau $n-1$ Runden

$$\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1$$

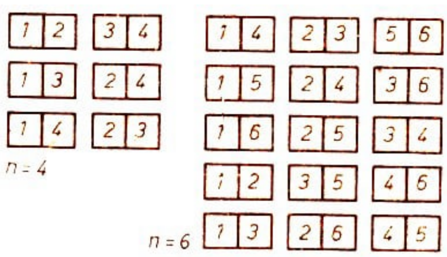
Unsere Aufgabe lautet nun:
Die Mannschaften $1, 2, ..., n$ sind so in ein Schema (siehe unten) einzutragen, dass

(1) in jeder Runde jede Mannschaft genau einmal auftritt. (Jede Mannschaft spielt in jeder Runde.)
(2) in zwei verschiedenen Runden keine gleichen Spiele auftreten. (Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.)

Als gleich gelten auch Spiele $\boxed{i|j}$ und $\boxed{j|i}$

	Sportplatz 1	Sportplatz 2	...	Sportplatz $\frac{n}{2}$
1. Runde	□□	□□		□□
2. Runde	□□	□□		□□
...				
$(n-1)$. Runde	□□	□□		□□

Für 4 bzw. 6 teilnehmende Mannschaften finden wir z. B. folgende mögliche Turnierpläne:



28/1 Sucht noch andere Pläne für $n = 6$! Versucht selbst, einen Turnierplan für $n = 8$ zu finden! Fragt euren Sportlehrer, wie er derartige Turnierpläne aufstellt!

Wir wollen nach einem Verfahren zum Aufstellen solcher Turnierpläne für eine gerade Anzahl n teilnehmender Mannschaften suchen. Dazu erarbeiten wir im nächsten Abschnitt für die praktische Aufgabenstellung eine mathematische Formulierung.

9.2 Mathematische Formulierung des Problems

In einem regelmäßigen, ebenen n-Eck nummerieren wir die Eckpunkte mit den Zahlen $1,2,...,n$. Jeder Eckpunkt steht dann für genau eine an unserem Turnier beteiligte Mannschaft und jeder Mannschaft ist genau ein Eckpunkt zugeordnet.
Wir zeichnen nun alle möglichen Verbindungsstrecken je zweier Eckpunkte in das n-Eck ein.

Verbindet eine Strecke die Eckpunkte i und j, so stellt diese Verbindungsstrecke das Spiel der Mannschaft i gegen die Mannschaft j dar. Nun färben wir die Verbindungsstrecke so, dass alle Spiele, die in derselben Runde ausgetragen werden, dieselbe Farbe bekommen.
Zwei Spiele werden genau dann unterschiedlich gefärbt, wenn sie in verschiedenen Runden stattfinden. Eine mögliche Färbung für unseren obigen Turnierplan für $n = 6$ ist im Bild 28/1 angegeben, wobei die verschiedenen Farben durch unterschiedliche Linienarten symbolisiert werden.

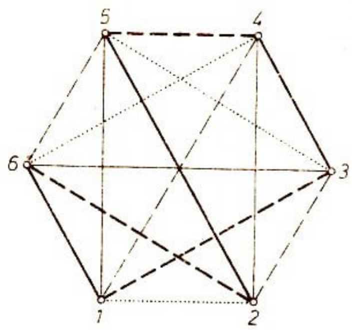


Bild 28/1

28/2 Welche Farbe entspricht welcher Runde? Sucht selbst weitere mögliche Färbungen für $n = 6$ und $n = 8$!

Da die Menge der Runden eindeutig auf die Menge der verwendeten Farben abgebildet wurde, benötigen wir zum Färben der Verbindungsstrecke genau $n - 1$ paarweise verschiedene Farben. Wenn eine Färbung einen möglichen Turnierplan darstellen soll, so müssen die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabenstellung im 1. Abschnitt erfüllt sein.

Dies ist der Fall, wenn an keinem Eckpunkt zwei Verbindungsstrecken gleicher Farbe zusammenstoßen. Ein Objekt aus Eckpunkten und Verbindungslinien dieser Eckpunkte nennt man in der Mathematik einen Graph. Für die Verbindungslinien ist die Bezeichnung Kante üblich.
Sind in einem Graph je zwei beliebige voneinander verschiedene Eckpunkte durch genau eine Kante verbunden, so ist der Graph vollständig. Wir können die Aufgabe nun so

formulieren:

Die Kanten eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten (n gerade) sind mit $n-1$ paarweise verschiedenen Farben so zu färben, dass an keinem Eckpunkt zwei Kanten gleicher Farbe zusammenstoßen.

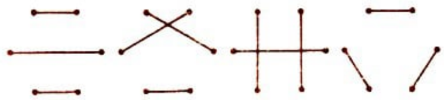
28/3 Überlege, dass dann jeweils genau $\frac{n}{2}$ Kanten dieselbe Farbe enthalten!

Das "Färben" ist der Umgangssprache entnommen. Zur rein mathematischen Formulierung unseres Problems müssen wir noch einen Schritt weiter gehen.
Aus unserem vollständigen Graphen konstruieren wir weitere Graphen - diese werden wir Linearfaktoren nennen:

Die Menge der Eckpunkte eines solchen Linearfaktors stimmt mit der Eckpunktmenge des vollständigen Graphen überein. Die Menge der Kanten des Linearfaktors ist eine Teilmenge der Kantenmenge des vollständigen Graphen.
Sie wird so gebildet, dass von jedem Eckpunkt des Linearfaktors genau eine Kante ausgeht.

Das Bild 29/1 zeigt z. B. 4 Linearfaktoren eines vollständigen 6punktigen Graphen an.

Bild 29/1



Wir können nun jeden Linearfaktor eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten als eine Runde unseres Turniers für n Mannschaften auffassen. Damit erhalten wir eine weitere Formulierung unserer Aufgabenstellung:

Ein vollständiger Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade, $n \neq 0$) ist in $n-1$ Linearfaktoren so zu zerlegen, dass jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.

Eine solche Zerlegung für n = 6 stellt das Bild 29/1 dar, wenn wir die Menge der Kanten einer Farbe mit der zugehörigen Eckpunktmenge als einen Linearfaktor ansehen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sollen die Begriffe der verschiedenen Formulierungen unserer Aufgabenstellung noch einmal gegenübergestellt werden:

Mannschaft	Eckpunkt	
Spiel	Kante	
Runde	Menge der Kanten derselben Farbe mit der Menge der zugehörigen Eckpunkte	Linearfaktor

9.3 Ein Verfahren zum Aufstellen eines Turnierplanes

Im Jahre 1947 wurde von dem Mathematiker W. T. Tutte bewiesen:

Satz: Jeder vollständige Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade) lässt sich so in $n-1$ Linearfaktoren zerlegen, dass jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.

(Genaueres könnt ihr z. B. in Sachs: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I, nachlesen.)

Dieser Satz sagt aus, dass es eine Lösung für unsere Aufgabenstellung gibt. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv geführt wird, gibt er Antwort auf die Frage, wie man solche $n-1$ Linearfaktoren erhalten kann:

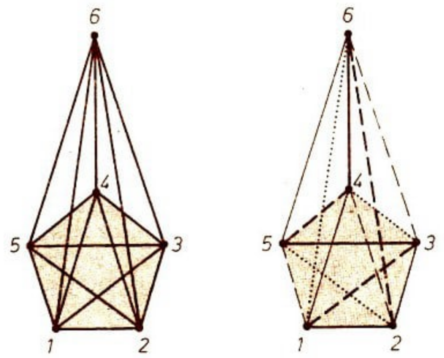


Bild 29/2, 29/3

Wir betrachten eine regelmäßige $(n-1)$-seitige Pyramide. Die Eckpunkte der Pyramide bezeichnen wir mit $1,2,...,n$. Zu den schon vorhandenen Kanten fügen wir noch alle Diagonalen der Grundfläche hinzu (Bild 29/2 für $n=6$).
Dadurch erhalten wir einen vollständigen Graphen mit den Eckpunkten $1, 2, ..., n$.

Wir nehmen nun eine beliebige Seite der Grundfläche der Pyramide (regelmäßiges $(n-1)$-Eck) und alle zu dieser Seite parallelen Diagonalen. Durch diese $\frac{n}{2}-1$-Strecken werden alle Eckpunkte der Grundfläche bis auf einen erfasst.
Die Menge der Kanten eines Linearfaktors besteht nun aus diesen $\frac{n}{2}-1$-Strecken und der Strecke, die den noch "freien" Eckpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet.
Durch die Wahl einer Seite der Grundfläche der Pyramide wird nach obiger Vorschrift genau ein Linearfaktor bestimmt.

Es gibt $n-1$ Seiten der Grundfläche, also auch $n-1$ Linearfaktoren. Diese zerlegen den vollständigen Graphen auch wirklich, denn zu jeder Kante gibt es genau einen Linearfaktor, zu dem sie gehört.
Das Bild 29/3 zeigt eine solche Zerlegung, die den oben angegebenen Turnierplan für $n=6$ liefert.

30/1 Welche Farbe entspricht welcher Runde? Stellt nach diesem Verfahren selbst Spielpläne für $n=4$, $n=6$ und $n=8$ auf! Sucht selbst andere Verfahren zum Aufstellen von Spielplänen!

30/2 Die Schüler einer Klasse trugen ein Tischtennisturnier aus. Jeder Teilnehmer hatte mit jedem anderen genau zwei Spiele zu bestreiten. Insgesamt wurden an 22 Tagen jeweils 6 Spiele ausgetragen. Wieviel Schüler nahmen an diesem Tischtennisturnier teil?

10 Vier in einer Reihe - ein interessantes Spiel zu zweit

Das folgende Spiel könnt ihr zu zweit auf kariertem Papier, auf einem Feld der Größe 6×6 Kästchen, spielen:

Die Spieler zeichnen abwechselnd ihr Zeichen in ein Kästchen, am besten mit verschiedenen Farbstiften. Wer zuerst vier aneinanderliegende Kästchen in einer Reihe (waagerecht, senkrecht oder diagonal) mit seiner Farbe bzw. seinem Zeichen besetzt hat, hat gewonnen (Bild 31/1).

Im Beispiel haben die Spieler „+“ und „O“ schon je zwei Kästchen belegt. Wenn „+ sein Zeichen in das eingerahmte Feld schreibt, hat er drei aneinanderliegende Kästchen in einer Diagonalen besetzt. Im nächsten Zug kann er dann entweder unten oder oben das vierte Kästchen anschließen und ist Sieger.
Nachdem ihr einige Runden gespielt habt, wird euch interessieren, welche Züge zum Gewinn führen.

Aufgabe

a) Wieviel Viererreihen lassen sich mit einem Kästchen in einer Ecke, am Rand bzw. in der Mitte des Feldes bilden? Die Antwort zeigt: Es ist am günstigsten, die Kästchen in der Mitte zuerst zu besetzen.

b) Gibt es für den Spieler, der anfängt, einen Spielplan, der ihn sicher zum Gewinn führt?

Reizvoller und bedeutend komplizierter wird das Spiel, wenn 3 oder 4 Spieler teilnehmen, oder wenn man zu zweit "5 in einer Reihe" (auch Gobang genannt) spielt. Dazu braucht man ein größeres Feld, etwa 15×15.

Lösung

a) Das Ergebnis ist im Bild 31/1 eingetragen.
b) Der erste Spieler „+“ kann bei richtigem Spiel stets gewinnen. Wir geben einen Spielplan für die wichtigsten Fälle an. Die Zeilen des Spielfeldes bezeichnen wir mit Zahlen 1 bis 6 und die Spalten mit den Buchstaben a bis f (wie beim Schach). „+“ besetzt zuerst das Kästchen c4 (Bild 31/2).

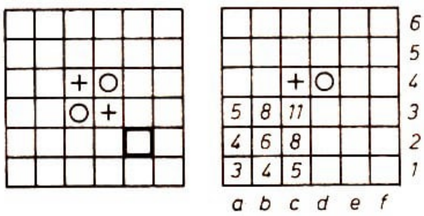


Bild 31/1, 31/2

1. Fall: „O“ besetzt ein Kästchen gerade daneben, dies sei d4 (Bild 31/2).
Dann setzt „+“ d3. Um zu verhindern, dass „+“ vier Kästchen in der Diagonalen bekommt, muss „O“ jetzt e2 (oder b5) besetzen. „+“ antwortet mit c3 (Bild 31/3) und

kann sich im nächsten Zug mit c2 oder e3 eine "nach beiden Seiten offene Dreierreihe" schaffen. Das heißt, „+“ gewinnt im 5. Zug.

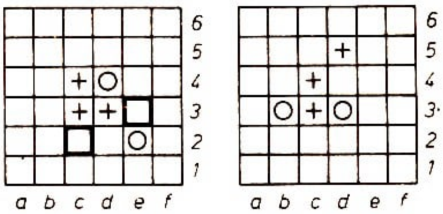


Bild 31/3, 31/4

2. Fall: „O“ besetzt ein Kästchen diagonal daneben, dies sei d3. „+“ setzt d5 (oder b3, andere Züge führen nicht sicher zum Gewinn). Um eine offene Dreierreihe zu verhindern, muss „O“ b3 besetzen und „+“ c3.
Nun droht eine offene Dreierreihe auf der c-Linie (Bild 31/4). Setzt „O“ c2, so antwortet „+“ c5 und c6 oder b5 im nächsten Zug. Setzt „O“ c5, antwortet „+“ d4 und schafft dann mit e4 oder e5 eine offene Dreierreihe. In jedem Fall gewinnt „+“ mit dem 6. Zug.
Alle anderen Fälle erfordern nur kleine Änderungen im Spielplan (aber Vorsicht!).

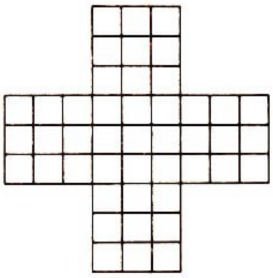


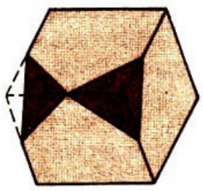
Bild 31/5

Weiterführende Aufgabe:

Löse die gleichen Aufgaben für ein "Steckhalmafeld"! (Bild 31/5) (Sie ist noch etwas interessanter.)

10.1 Knobelei

31/1 Ein Holzwürfel wird an seinen 8 Ecken so abgefeilt, wie es für zwei Ecken im Bild gezeigt ist, d. h., die entstehenden Flächen berühren sich an den Ecken. Es entsteht offensichtlich ein Körper, der Dreiecke und Quadrate als Begrenzungsfläche hat.



Wieviel Dreiecke und Quadrate treten auf?
Wieviel Ecken hat dieser Körper?

11 Axialsymmetrie

Wir versehen ein Blatt Papier mit Tinten- oder Farbflecken und falten es anschließend (Bild 32/1).

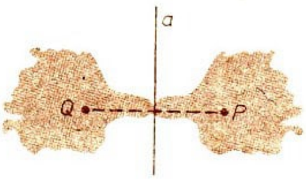


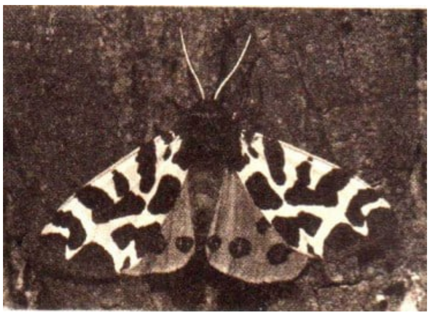
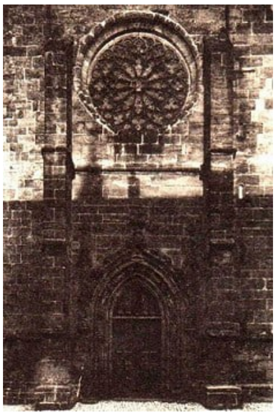
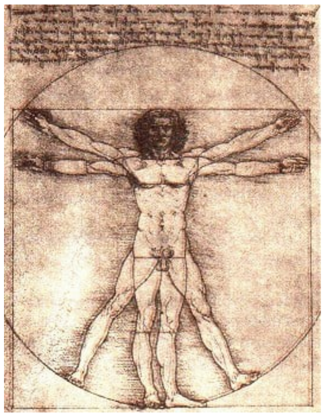
Bild 32/1

Dabei können recht lustige Figuren entstehen. Für sie ist offensichtlich folgende Eigenschaft charakteristisch. Zu jedem Punkt P der Figur F, der nicht auf der Faltlinie a liegt, gibt es einen Punkt Q von F so, dass a die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ ist.
Liegt eine solche Eigenschaft vor, so nennt man die Figur F symmetrisch bezüglich der Geraden a und a eine Symmetrieachse von F.

Vergleichen wir diese Eigenschaft mit der Erklärung der Spiegelung an einer Geraden a, so erkennen wir leicht, dass sie gleichwertig zu folgender Eigenschaft ist: Die Figur F geht bei der Spiegelung an der Geraden a in sich über.
Für die Spiegelung an der Geraden a werden wir im folgenden kurz σ_a schreiben; und R^a soll das Bild von R bei der Spiegelung an a bezeichnen.

Axialsymmetrische Figuren begegnen uns ständig, in der Natur, im technischen Bereich und in der Kunst. Die meisten Tiere zeigen eine symmetrische Körperform, und dies ist uns so selbstverständlich, dass uns Abweichungen davon - wie bei der Flunder - besonders auffällig erscheinen. Da sich diese symmetrischen Formen als Ergebnis einer langen Entwicklung herausgebildet haben, sind sie offenbar optimal unter den gegebenen Umweltbedingungen.

Zweckmäßigkeit (und insbesondere Stabilität) ist der Grund für Symmetrie in sehr vielen technischen Konstruktionen. (Siehe z. B. Draufsicht eines Flugzeuges.)
Die Axialsymmetrie hat für uns auch einen ästhetischen Reiz; in vielen Kunstwerken können wir die Axialsymmetrie herausfinden.

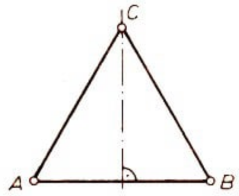




Das Bild (rechts oben) zeigt das Portal der Bergkirche St. Martin in Heiligenstadt. Auch bei vielen Stadtwappen kann man Axialsymmetrie feststellen. Die Vignette (oben) zeigt den "Vitruv-Mann" von Leonardo da Vinci.
Eine Figur F kann mehrere Symmetrieachsen besitzen.

11.1 Aufgaben

33/1 Man bestimme alle Symmetrieachsen eines gleichseitigen Dreiecks ABC!

Lösung: Im gleichseitigen Dreieck ABC geht die Mittelsenkrechte jeder Seite durch die jeweils gegenüberliegende Ecke und ist damit Symmetrieachse. - Ist umgekehrt a eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC, dann können nicht gleichzeitig alle drei Eckpunkte auf a liegen; wir können annehmen, dass die Ecke A nicht auf der Achse a liegt.

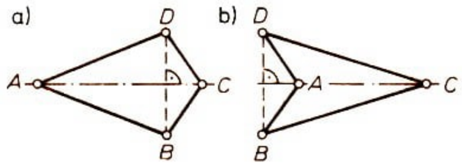


Dann muss das Bild A^a die Ecke B oder C sein, etwa B. Nun muss C auf a liegen, sonst ergäbe C^a eine zusätzliche vierte Ecke. Also ist die Gerade a eine Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite.
Damit gibt es im gleichseitigen Dreieck genau drei Symmetrieachsen.

33/2 Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges n-Eck ($n > 3$)?

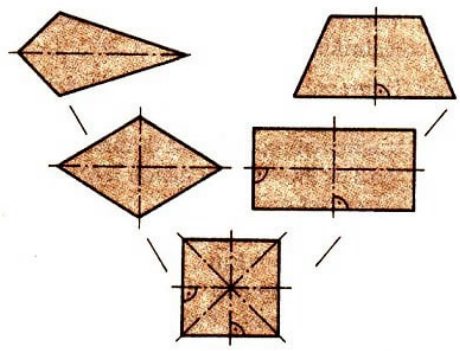
Von Interesse ist das Symmetrieverhalten von speziellen Vierecken. Bekannt ist das Drachenviereck. Es ist dadurch definiert, dass es zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten besitzt.

33/3 Man zeige: Ein Viereck ist ein Drachenviereck genau dann, wenn (wenigstens) eine seiner Diagonalen Symmetrieachse ist!



Lösung: Ist $ABCD$ ein Viereck, das bezüglich der Diagonalen AC symmetrisch ist, dann sind BDA und BDC gleichschenklige Dreiecke und damit $ABCD$ ein Drachenviereck.
-
Umgekehrt folgt aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke BDA und BDC, dass die Mittelsenkrechte von BD Symmetrieachse der beiden Dreiecke ist und damit durch A und C geht. Damit ist die Diagonale AC Symmetrieachse des Vierecks.

33/4 Man gebe mit Axialsymmetrie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Viereck $ABCD$ ein Rhombus bzw. ein Giebel (oder gleichschenkliges Trapez) bzw. ein Rechteck bzw. ein Quadrat ist!
Die folgende Übersicht veranschaulicht die Ergebnisse der Aufgabe 33/4:

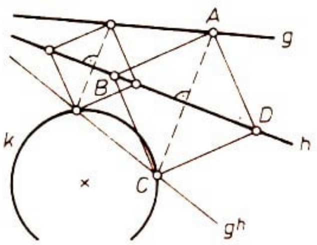


34/1 Warum gibt es keine weiteren axialsymmetrischen Vierecke als die hier genannten?

Für die Lösung einer Konstruktionsaufgabe kann es von Vorteil sein, wenn man erkennt, dass die gewünschte Figur Axialsymmetrie besitzt. Dafür ein Beispiel.

34/2. Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie ein Kreis k. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ derart, dass $A \in g$ und $B, D \in h$ sowie $C \in k$ gilt.

Lösung: Es sei $ABCD$ eine Lösung. Dann ist die vorgegebene Gerade h Symmetrieachse von $ABCD$. Also ist C sowohl Punkt des Kreises k als auch des Bildes g^h der Geraden g.

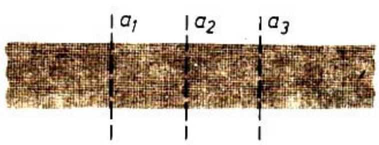


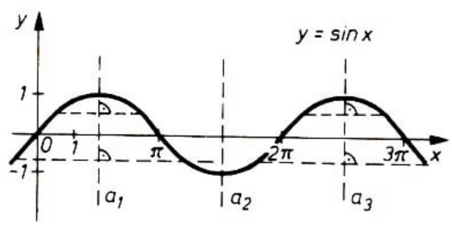
Die Aufgabe besitzt genau zwei, eine bzw. keine Lösung, wenn die Gerade g^h den Kreis schneidet, berührt bzw. meidet und wenn außerdem der Schnittpunkt von g und h (falls er existiert) nicht auf dem Kreis k liegt. -
Für den Fall, dass sich g und h auf k schneiden, ist nun die Lösung auch klar.

Die Ergebnisse in den Aufgaben 33/1 und 33/2 lehren uns, dass wir aus der Existenz von zwei und mehr Symmetrieachsen einer Figur nicht auf die Existenz unendlich vieler Symmetrieachsen dieser Figur schließen dürfen. Man kann jedoch zeigen:

Besitzt eine Figur zwei zueinander parallele Symmetrieachsen, dann hat sie unendlich viele.

Zunächst wollen wir nach Beispielen für derartige Figuren suchen. Einfache Beispiele sind ein Streifen oder der Graph der Sinus-Funktion. Suche weitere!





Sind a_1 und a_2 zwei zueinander parallele Symmetrieachsen einer Figur F, dann wird F sowohl bei der Spiegelung an a_1 als auch bei der Spiegelung an a_2 auf sich abgebildet. Ferner geht die zu a_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an a_2 in eine Figur F^{a_2} über, die zu dem Bild a_3 von a_1 bei σ_{a_2} symmetrisch sein muss. Wegen $F^{a_2} = F$ ist also die Figur F auch zu der Geraden a_3 symmetrisch.
(Vgl. mit den beiden oben stehenden Bildern!)

Übrigens gilt dieser Schluss offenbar auch, wenn wir anstelle der Geradenspiegelung σ_{a_2} irgendeine Bewegung genommen hätten, die F auf sich abbildet.

Nach der geschilderten Weise kann nun mit a_2 und a_3 eine Achse a_4 gefunden werden usw.
Der Nachweis, dass jede auf diese Weise gefundene Symmetrieachse tatsächlich zu den bisherigen verschieden ist, macht einige Mühe und ist günstig mit der Methode der vollständigen Induktion zu führen.

Eine Lösung eines Problems kann mitunter auch durch Herstellen einer symmetrischen Figur gefunden werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Wir wollen als bekannt voraussetzen, dass der Kreis diejenige Figur ist, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt hat. Nach der Sage durfte Dido sich ein Stück Land an der Küste Afrikas kaufen, das nicht größer sein durfte als das, was man mit einer Ochsenhaut umspannen kann.

Dido zerschnitt die Ochsenhaut in schmale Streifen, aus denen sie eine Schnur machte, um damit möglichst viel Land abzugrenzen. Wie musste sie die Abgrenzung des Landes vornehmen, wenn wir annehmen, dass die Begrenzung K durch das Meer geradlinig war?
Spiegeln wir die abgegrenzte Figur an K, so müsste sich im günstigsten Fall (siehe unsere Voraussetzung! ein Kreis ergeben. Also musste Dido (um Karthago zu gründen) einen Halbkreis abgrenzen!

12 Zentralsymmetrie

Zwei Jungen E und J sitzen an einem kleinen Tisch mit quadratischer Tischplatte.
Auf dem Tisch liegt ein großer Stapel mit kreisförmigen Untersetzern (Bierdeckel), so dass alle diese Untersetzer ausreichen würden, um mehr als die ganze Tischfläche zu bedecken. Die Jungen E und J spielen das folgende Spiel:

Abwechselnd legt jeder einen Untersetzer auf den Tisch, ohne dass dieser einen anderen überdeckt. Wer zuerst keinen Platz mehr auf dem Tisch findet, hat das Spiel verloren.

E legt den ersten Untersetzer auf den Mittelpunkt Z des Tisches. Danach legt J einen Untersetzer A. Als nun E einen Untersetzer B so legt, dass er dem Bild von A bei der Drehung um den Punkt Z mit $180°$ entspricht, (vgl. mit dem folgenden Bild 35/1), gibt J nach kurzem Überlegen das Spiel als verloren auf.

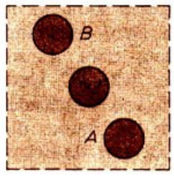


Bild 35/1

Der Junge E hat die Zentralsymmetrie des Quadrats für eine Gewinnstrategie genutzt. Er kann immer bei einem Zug von J einen dazu bezüglich Z zentralsymmetrisch liegenden Platz zum Legen eines Untersetzers finden.
Der Junge J steht schließlich einmal vor der Situation, keinen Platz mehr zu finden, um den nächsten Untersetzer auf die Tischplatte zu legen.

Der springende Punkt bei diesem Spiel war also der Punkt Z. Man nennt eine ebene Figur F symmetrisch bezüglich des Punktes Z und Z ein Symmetriezentrum der Figur F, wenn bei der Drehung der Ebene um Z mit $180°$ die Figur auf sich abgebildet wird.

Bei der Drehung um Z mit $180°$ ist der Punkt Q das Bild des Punktes P $(\neq Z)$ dann und nur dann, wenn Z der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist (vgl. mit dem folgenden Bild 36/1).

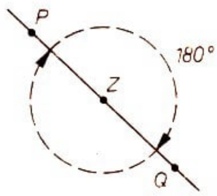


Bild 36/1

Deshalb ist die Bezeichnung Spiegelung an Z für diese Abbildung durchaus treffend. Man prüfe einmal selbst die Figur F im Bild 36/2 auf eine derartige Symmetrie.

Außer Quadraten, Rechtecken und Kreisen, bei denen eine Zentralsymmetrie offensichtlich vorliegt, gibt es eine Fülle weiterer zentralsymmetrischer Figuren.
Ein Dreieck ABC dagegen kann nicht zentralsymmetrisch sein. Denn wäre eine Ecke Symmetriezentrum, etwa A, so wäre A Mittelpunkt der Seite $overlineBC$. Und gäbe es ein von den Ecken verschiedenes Symmetriezentrum, so müsste die Anzahl der Ecken gerade sein, da Ecken in Ecken übergehen müssen. In jedem Falle ergibt sich also ein Widerspruch!

36/1 Ein regelmäßiges n-Eck $(n \geq 3)$ ist zentralsymmetrisch dann und nur dann, wenn n gerade ist. (Das Symmetriezentrum ist dann der Mittelpunkt des Umkreises des n-Ecks.)

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Vierecke zentralsymmetrisch sind. Nach dem Ergebnis der Aufgabe 36/1 gilt dies wenigstens für das Quadrat; auch für ein Rechteck ist dies leicht einsichtig.

36/2 Ein nicht überschlagenes[2] Viereck $ABCD$ ist zentralsymmetrisch genau dann, wenn es ein Parallelogramm ist.

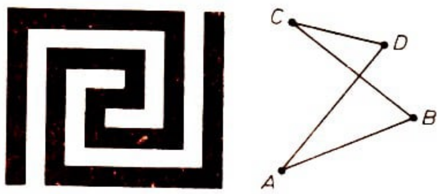


Bild 36/2, 36/3

Wir haben schon die Axialsymmetrie betrachtet. Damit ergibt sich die naheliegende Frage, ob die eine Art der Symmetrie die andere zur Folge haben könnte.
Unsere eingangs betrachtete (zentralsymmetrische) Figur (Bild 35/1) sowie ein (axialsymmetrisches) regelmäßiges Dreieck (vgl. Aufg. 36/1) zeigen, dass ein solcher Schluss in keiner von beiden Richtungen gilt. Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist aber die folgende Eigenschaft 1.

Eigenschaft 1: Besitzt eine Figur F zwei Symmetrieachsen a und b, die senkrecht zueinander sind, dann ist ihr Schnittpunkt S ein Symmetriezentrum von F.

Zum Beweis betrachten wir einen beliebigen Punkt P, der nicht auf den Geraden a und b liegt (Bild 37/1). Es sei Q das Bild von P bei der Spiegelung an der Geraden a und R das Bild von Q bei der Spiegelung an b. Dann ist a die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ und b die Mittelsenkrechte von $\overline{QR}$.

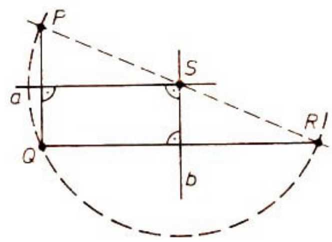


Bild 37/1

Wegen $a \perp b$ ist $\angle PQR$ ein rechter Winkel. Da in jedem rechtwinkligen Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises (dann auch Thaleskreis genannt) mit dem Mittelpunkt der Hypotenuse zusammenfällt, muss S (als Schnittpunkt von a und b und damit Mittelpunkt des Umkreises) der Mittelpunkt von $\overline{PR}$ sein.

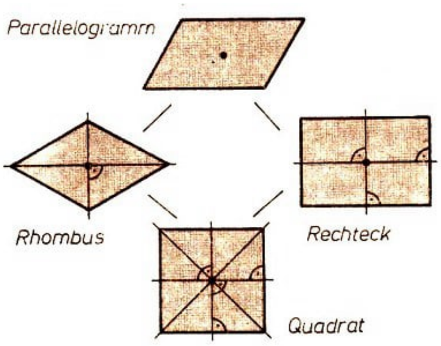
Der Punkt P hat also bei der Nacheinanderausführung der Geradenspiegelungen an a und b das gleiche Bild wie bei der Punktspiegelung an S. Dies gilt - wie man leicht erkennt - auch für die übrigen Lagen von P (d. h., wenn P auf a oder b liegt).

Nach Voraussetzung wird die Figur F bei jeder der Spiegelungen an a bzw. b, also auch bei der Nacheinanderausführung der Spiegelungen an a und b, auf sich abgebildet. Diese Nacheinanderausführung ist aber, wie sich zeigte, gleich der Spiegelung an S. Also ist S ein Symmetriezentrum von F, was zu zeigen war.

Hinsichtlich der Vierecke ist bekannt, dass für einen Rhombus bzw. für ein Rechteck

[2]Ein Viereck heißt "überschlagen", wenn sich zwei seiner gegenüberliegenden Seiten schneiden (Bild 36/3).

charakteristisch ist, dass die beiden Diagonalen zueinander senkrechte Symmetrieachsen bzw. die Mittelsenkrechten zweier aufeinanderfolgender Seiten zueinander senkrechte Symmetrieachsen des Vierecks sind. Damit ergibt sich folgende Übersicht über zentralsymmetrische Vierecke:



Die folgenden Überlegungen sind etwas schwieriger.

37/1 Man bestimme die Symmetriezentren des Graphen der Sinusfunktion (Bild 37/2)! (Übrigens liegen in dieser Figur die Symmetriezentren nicht auf den Symmetrieachsen.)

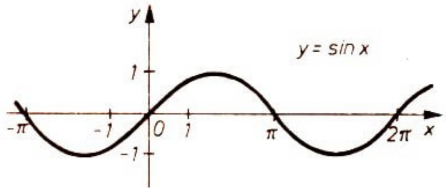


Bild 37/2

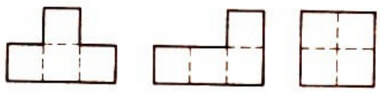
Während eine Figur F mehrere, aber endlich viele Symmetrieachsen haben kann (siehe regelmäßiges n-Eck), ist dies bezüglich der Anzahl der Symmetriezentren anders.

Eigenschaft 2: Hat eine Figur F (wenigstens) zwei Symmetriezentren, dann besitzt sie unendlich viele.

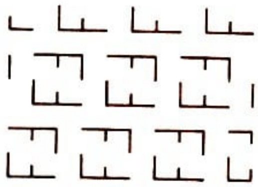
Sind nämlich Z_1 und Z_2 zwei Symmetriezentren der Figur F, dann wird F sowohl bei der Spiegelung an Z_1 als auch an Z_2 auf sich abgebildet.
Es sei Z_3 das Bild von Z_1 bei der Spiegelung an Z_2. Nun geht die bzgl. Z_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an Z_2 in eine Figur F' über, die zum Bild Z_3 von Z_1 symmetrisch sein muss.

Wegen $F = F'$ ist also die Figur F bzgl. eines weiteren Punktes Z_3 symmetrisch. Auf diese Weise kann man mit Z_2 und Z_3 ein weiteres Zentrum Z_4 finden usw. (Man veranschauliche sich diesen Sachverhalt anhand der Figur im Bild 37/2!)
Der Nachweis, dass diese so gefundenen Zentren alle voneinander verschieden sind, macht einige Mühe, kann aber mit der Methode der vollständigen Induktion erbracht werden.

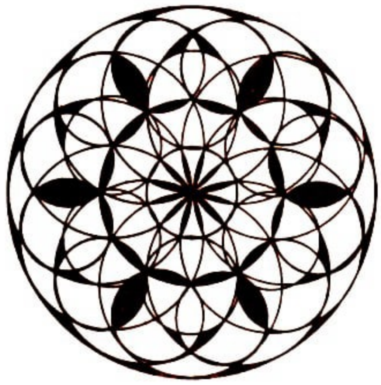
38/1 Das folgende Bild zeigt drei Figuren, die jeweils aus 4 Einheitsquadraten zusammengesetzt sind. Von diesen Figuren stehen jeweils 8 zur Verfügung. Man soll nun mit einem Teil dieser Figuren ein 8 × 8-Felder-Schachbrett so überdecken, dass eine zentralsymmetrische Parkettierung entsteht.



38/2 Das folgende Bild zeigt ein Tapeten- (oder Wand-)-Muster. Man bestimme seine Symmetriezentren. (Es enthält übrigens keine Symmetrieachsen!)

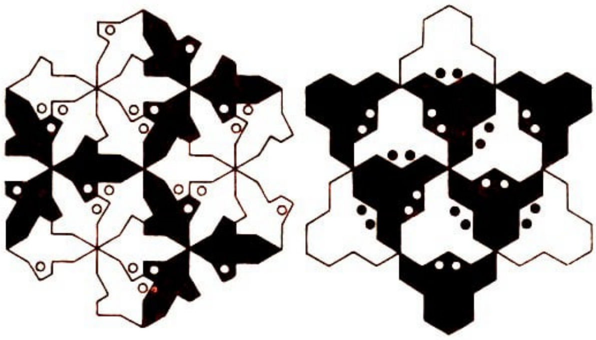


38/3 Wieviel Kreise sind auf dem nachstehenden Bild zu sehen? Zeichne dieses schöne Ornament nach!



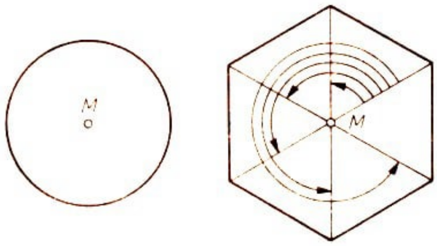
12.1 Drehsymmetrie

Die beiden folgenden Bilder wird man als symmetrische Figuren empfinden. Sie lassen sich jedoch nicht in die Symmetriearten einordnen, mit denen wir uns bereits beschäftigt haben.
Man erkennt, dass sie weder axial- noch zentralsymmetrisch sind; aber sie gehen durch eine Drehung mit $120°$ um einen Punkt in sich über. (Den geeigneten Drehpunkt erkennt man schon gefühlsmäßig.)



Man nennt nun eine Figur F drehsymmetrisch bezüglich des Punktes M, wenn es eine (nicht identische) Drehung ρ um M gibt, die die Figur F auf sich abbildet. Den

Drehwinkel können (und wollen wir dabei immer zwischen $0°$ und $360°$ sowie im gleichen Drehsinn wählen.
Wir betrachten dazu zwei bekannte Figuren, einen Kreis und ein (einfaches) regelmäßiges Sechseck. (Ein n-Eck heißt einfach, wenn sich keine zwei seiner Seiten überschneiden.) Hier gibt es jeweils Drehungen, die die Figur zur Deckung bringen.



Während dies beim Kreis jede Drehung um den Mittelpunkt M leistet, kommen beim Sechseck nur fünf Drehungen um seinen Mittelpunkt M in Frage, nämlich (im gleichen Drehsinn gemessen) mit $60°, 120°, 180°, 240°$ und $300°$, wenn man von der identischen Abbildung absieht, die als spezielle Drehung um M mit $0°$ aufgefasst wird.

39/1 Es sei $A_1, A_2, ..., A_n$ ein (einfaches) regelmäßiges n-Eck ($n \geq= 3$) und M der Mittelpunkt seines Umkreises. Man bestimme alle Drehungen um M, die diese Figur auf sich abbilden!

Lösung: Den Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Ecken mit M bilden, etwa $\angle A_1MA_2$, hat die Größe $\frac{360°}{n}$. Die Drehung ρ um M mit $\left(\frac{360°}{n}\right)^\circ$ bildet nun offensichtlich die Figur auf sich ab. Da bei jeder der gesuchten Drehungen um M Ecken auf Ecken zu liegen kommen müssen, ist ihr Drehwinkel φ ein Vielfaches von $\left(\frac{360°}{n}\right)^\circ$, genauer

$$\varphi = m \cdot \left(\frac{360°}{n}\right)^\circ$$

mit $0 \leq m < n$, m ganzzahlig.

Es gibt also genau n Drehungen um M, die die Figur zur Deckung bringen, wobei wir die identische (mit dem Drehwinkel $\varphi = 0°$) hier und später mit dazuzählen.

Wenn wir bedenken, dass die Nacheinanderausführung $\rho_1 \cdot \rho_2$ zweier Drehungen ρ_1 und ρ_2 um M, die die Figur F zur Deckung bringen, wieder eine Drehung um M mit dieser Eigenschaft ist, so kommen wir zu einer anderen Betrachtung unserer Aufgabe.

Die m-fache Nacheinanderausführung der Drehung ρ um M mit $\left(\frac{360°}{n}\right)^\circ$ führt die Ecke A_1 in die Ecke A_{m+1} $(1 < m < n)$ über; die n-fache Nacheinanderausführung von ρ ist schließlich die identische Drehung, bei der A_1 wieder auf sich abgebildet wird. Die gesuchten Drehungen sind also

$$\rho, \rho \cdot \rho, ..., \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot ... \cdot \rho}_{n-\text{mal}}$$

oder kurz ρ^m mit $1 \leq m \leq n$.

Man erklärt: Eine Figur F hat bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n, wenn es genau n Drehungen um M gibt (einschließlich der identischen), die die Figur F auf sich abbilden. Dabei ist nur n > 2 von Interesse.

So hat also die Eingangsfigur auf Seite 38 eine Drehsymmetrie vom Grad 3, und ein regelmäßiges n-Eck hat bezüglich seines Mittelpunktes eine Drehsymmetrie vom Grad n. Dagegen hat die Drehsymmetrie des Kreises bezüglich seines Mittelpunktes keinen endlichen Grad.

39/2 Man betrachte das Vorderrad des Fahrrades in Draufsicht. Welchen Grad hat die Drehsymmetrie dieses Bildes bezüglich des Punktes, der Bild der Radachse ist?

39/3 Für eine systematische Gliederung der Samenpflanzen ist die Anzahl und Stellung der Blütenteile ein wichtiges Hilfsmittel, die man als Grundriss schematisch in einem sogenannten Blütendiagramm angibt. Welchen Grad der Drehsymmetrie besitzt das Blütendiagramm der Tulpe (oder anderer bekannter Blumen)?

Vielfältige Beispiele für Figuren mit Drehsymmetrie bieten Natur, Kunst und Technik. Besonders beeindruckend sind Schmuckelemente an alten Bauwerken, so zum Beispiel das schöne Kirchenfenster, das als Motiv für eine Briefmarke gewählt wurde.

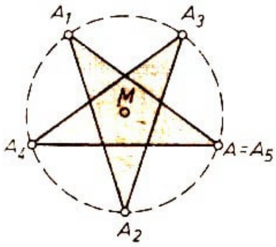
Auch im Erfurter Stadtwappen befindet sich eine drehsymmetrische Figur. Das Röntgenstrahlbeugungsgitter eines Kristalls besitzt eine Drehsymmetrie vom Grad 6.

Zentral- und Drehsymmetrie stehen in einem engen Zusammenhang:
Besitzt eine Figur F bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n, so ist F genau dann zentralsymmetrisch bezüglich M, wenn n gerade ist.

40/1 Es sei ρ eine Drehung um M mit $\frac{k}{n}360°$ und $1 \leq k < \frac{n}{2}$, k,n ganzz.; ferner sei $A \neq M$ ein beliebiger Punkt.
Wir bezeichnen mit A_m das Bild von A bei der m-fachen Nacheinanderausführung von ρ (speziell sei A_1 das Bild von A bei der Drehung ρ) und verbinden A mit A_1, A_1 mit A_2 usw. durch eine Strecke. Welche Streckenzüge entstehen auf diese Weise?

Lösung: Für $m = n$ (> 1) ist die m-fache Nacheinanderausführung von ρ wegen $m\left(\frac{k}{n} \cdot 360°\right) = k \cdot 360°$ die identische Drehung, also $A_n = A$, d. h., der Streckenzug $\overline{AA_1A_2...A_n}$ schließt sich spätestens mit dem Punkt A_n.
Sind k, n teilerfremd, so ist $\overline{AA_1A_2...A_n}$ ein regelmäßiges n-Eck. Dies ist offenbar einfach, wenn $k = 1$ gilt. Für $k > 1$ überschneiden sich die Seiten; ein solches Vieleck heißt ein regelmäßiges Sterneck.

So erhält man für $n = 5$ und $k = 2$ das regelmäßige Sternfünfeck. (Es gibt genau zwei Arten regelmäßiger Sternsiebenecke; warum ?)



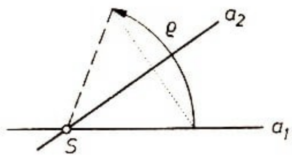
Sind k, n nicht teilerfremd, also der größte gemeinsame Teiler von k und n eine Zahl $t > 1$, dann ist bereits $A_{n/t} = A$,d. h., es entsteht ein regelmäßiges $\left(\frac{n}{t}\right)$-Eck. Nun kann man eine anspruchsvolle Aufgabe lösen:

40/2 Die Nacheinanderausführungen einer Drehung um M mit $t \cdot 180°$ $(0 < t < 1$, reell) erzeugen mit einem Punkt $A \neq M$ ein regelmäßiges Vieleck genau dann, wenn t eine rationale Zahl ist.

Einen bemerkenswerten Zusammenhang gibt es zwischen Axial- und Drehsymmetrie;

41/1 Hat eine Figur F zwei sich schneidende Geraden a_1 und a_2 als Symmetrieachsen, so ist sie bezüglich des Schnittpunktes S von a_1 und a_2 drehsymmetrisch.

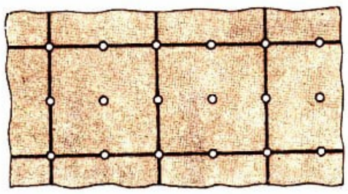
Beweis: Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen σ_1 und σ_2 an den Geraden a_1 und a_2 ist eine Drehung um den Schnittpunkt S von a_1, a_2; der Drehwinkel ρ lässt sich leicht konstruktiv angeben.



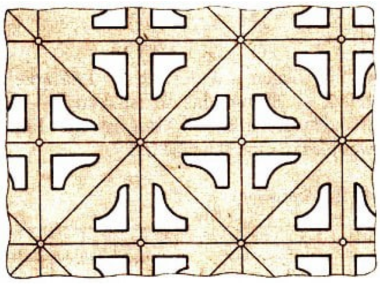
Da σ_1 und σ_2 die Figur jeweils auf sich abbilden, gilt dies dann auch für ρ.

41/2 Gib Figuren an (insbesondere aus dem Mathematikunterricht), in denen die Voraussetzungen von Aufgabe 41/1 gelten!

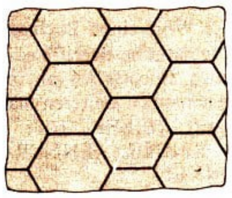
Von Interesse ist, ob eine Figur bezüglich verschiedener Punkte drehsymmetrisch sein kann und welche Zusammenhänge dabei bestehen.



Die Ebene kann man offensichtlich einfach und lückenlos mit kongruenten Quadraten überdecken (vgl. Bild oben).
Diese Figur ist drehsymmetrisch bezüglich der Quadratmitten (Grad 4), der Quadratecken (Grad 4) und der Quadratseitenmitten (Grad 2). Entsprechende Grade der Drehsymmetrie treten auch in dem Wandmuster auf, das im folgenden Bild dargestellt ist.



41/3 Eine Parkettierung der Ebene ist auch
a) mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken



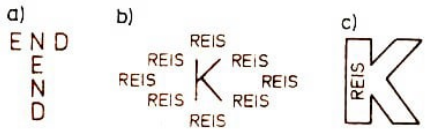
b) mit kongruenten regelmäßigen Sechsecken ("Honigwabenmuster") möglich. Man untersuche jeweils die möglichen Drehsymmetrien!

41/4 Betrachte zu Hause (oder in der Schule) die Tapetenmuster hinsichtlich möglicher Drehsymmetrien und diesbezüglicher Grade!

41/5 Zeichne ein Muster, bei dem mehrere Drehsymmetrien auftreten, aber alle vom Grad 3 sind!

13 Was soll das bedeuten?

42/1



d) $\frac{\text{SCH}}{8}$ $\frac{\text{H}}{\text{O}}$ $\frac{\text{K}}{\pi}$ $\frac{\text{WIL}}{\text{HELM}}$

e) 2g liegen auf der rd. - L4a spielt Kla4. - 8tung, das sn ist fertig. - R riss den ZI nt2. - Man ist nie lam, wenn man eine Run3se m8.

42/2 Wortspiele

a)

J	A	H	R
Z	A	H	L

b)

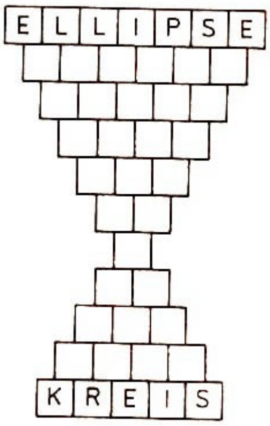
Z	E	I	T
W	E	R	T

c)

R	A	U	T	E
H	A	L	B	E

42/3 Verändere je Wort einen Buchstaben, so dass mathematische Begriffe entstehen! Alle neuen Buchstaben aneinandergereiht ergeben einen weiteren mathematischen Begriff:

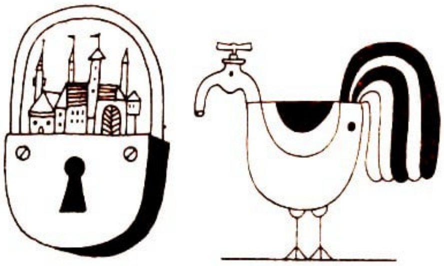
*K*EILER *U*R MÜ*T*ZE TA*L* S*A*HNE *K*ENNER *S*ONNE SCH*I*NKEL

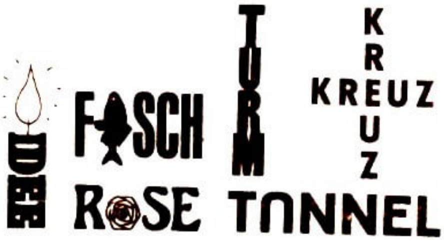


42/4 Rätsel-Metamorphose
Die gesuchten Zwischenbegriffe entstehen entweder durch Streichen oder Hinzufügen eines Buchstabens und durch anschließende geeignete Permutation der derart entstandenen Buchstabenmenge.
Die Begriffe, die hier nicht in der Reihenfolge der Rätselfigur angegeben sind, haben folgende Bedeutung:

Fluss im Harz / tierisches Produkt / Basis des natürlichen Logarithmus / Getreideart / chem. Element, Ordnungszahl 68 (Formelz.) / unterhaltsame Beschäftigung / Sache, Ding (lat.) / Holzstäbchen (Pl.) / Wasser in festem Zustand.

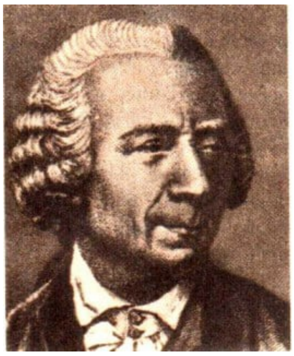
42/5 Gleich und doch verschieden (Abb. links unten)





42/6 Wortspielwiese (Abb. rechts oben)

14 Leonhard Euler



Am 18. September 1983 jährte sich zum 200. Male der Todestag Leonhard Eulers, des, zeitlich gesehen, wohl größten Mathematikers seit Archimedes, Newton und Leibniz. Sein Name lebt in rund 50 nach ihm benannten Formeln, Gleichungen, Sätzen, Zahlen und anderen mathematischen Bezeichnungen fort.

Wenn Alexander von Humboldt vor rund 160 Jahren, fast vier Jahrzehnte nach Eulers Tod, keine bessere Empfehlung für den jungen genialen Mathematiker Dirichlet an Gauß zu geben vermochte als die, dass sich jener "auf den besten Eulerschen Wegen" bewege, so ist in nicht geringerem Grade auch heute noch der Name Leonhard Euler lebendig. Er ist zu einem aus der Mathematik wie aus der geistigen Kultur überhaupt nicht wegzudenkenden Begriff geworden.

Der am 15. 4. 1707 in Basel in der Schweiz geborene Euler erkannte frühzeitig seine Bestimmung: Dem Fortschritt der Mathematik und ihrer Anwendung zu dienen. Ursprünglich dazu ausersehen, den Beruf seines Vaters, das heißt den eines Geistlichen, zu ergreifen, wandte er sich unter dem Eindruck, den die Vorlesungen Johann (I.) Bernoullis auf ihn machten, der Mathematik zu.

Da Euler in der Heimat keine ihm gemäße Stellung finden konnte, ein Los, das er mit manchen talentierten Landsleuten teilte, ging er 1727 an die Petersburger Akademie der Wissenschaften, die, kürzlich gegründet, vielen jungen begabten Gelehrten aus Mittel- und Westeuropa Schaffensmöglichkeiten bot.
In Petersburg wirkte Euler bis 1741 und später von 1766 bis zu seinem Tode im Jahre 1783, also insgesamt über 30 Jahre.

In der ersten Petersburger Periode entstanden diejenigen Arbeiten Eulers, die seinen Namen bald in der Welt bekannt und dann berühmt werden ließen. Während seines zweiten Petersburger Aufenthaltes schuf Euler die reifen Alterswerke, die noch fast 80 Jahre lang nach seinem Ableben die Petersburger Akademie-Veröffentlichungen zieren sollten.
Zwischen 1741 und 1766 liegt Eulers Tätigkeit an der Berliner Akademie der Wissenschaften, seit 1744 als Direktor der mathematischen Klasse und später zeitweise als amtierender Präsident, wenn ihn auch der Preußenkönig nie als solchen bestätigte. Es waren dies Jahre erfolgreichsten Schaffens; Euler wurde zum mathematischen Lehrmeister Europas.

Dass Euler Petersburg verließ, um einem Rufe des Königs Friedrich II. von Preußen nach Berlin zu folgen, hatte seine Ursachen in der unsicheren Lage während der Thronwirren in Russland und in dem Leiter der Petersburger akademischen Kanzlei. In Berlin fühlte sich Euler zunächst sehr wohl.
Des Königs Hoffnung, der Berliner Akademie durch die Mitgliedschaft und Mitarbeit berühmter Gelehrter Glanz und Geltung zu verleihen, die auf ihn selbst zurückstrahlen sollten, wurde von Euler völlig erfüllt.

Er widmete seine ganze Kraft der Akademie. Nicht nur auf wissenschaftlichem, sondern auch auf wissenschaftsorganisatorischem und administrativem Gebiete war der auf der Höhe seiner Jahre stehende, im Geist seines Zeitalters der Aufklärung wirkende Euler ohne Unterlass erfolgreich tätig.

Aber im Laufe der Jahre traten eine Reihe von sich mehr und mehr verstärkenden Unzuträglichkeiten ein, die schließlich zu Eulers Rückkehr nach Petersburg führten
Es würde zu weit gehen, wollten wir an dieser Stelle alle beabsichtigten und unbeabsichtigten Kränkungen und Verstimmungen aufführen, die Eulers Weggang bewirkten. Begnügen wir uns mit der Feststellung, dass Euler, der in diesen Jahren profiliertes- te Vertreter einer Wissenschaft, die Friedrich immer fremd geblieben ist, alles andere als ein amüsanter und unterhaltsamer Plauderer war, wie sie der König in Gestalt der Franzosen, die damals an der Berliner Akademie dominierten, schätzte.

Euler hat übrigens beinahe ohne Unterbrechung die Verbindung zur Akademie in Petersburg von Berlin aus aufrechterhalten:
Er korrespondierte mit M. W. Lomonossow, dem "Vater der russischen Wissenschaft", junge russische Gelehrte wurden in seinem Berliner Heim aufgenommen (Euler beherrschte übrigens die russische Sprache), er veröffentlichte während seiner Berliner Zeit in den Abhandlungen der Petersburger fast die gleiche Anzahl Arbeiten wie in den Schriften der Berliner Akademie.

Nach seiner Rückkehr nach Petersburg, wo ihm von der Zarin Katharina II. glänzende materielle Bedingungen geboten wurden, traf Euler ein schreckliches Unglück. War er 1735 bereits auf einem Auge erblindet, so verlor er nun das Augenlicht nahezu völlig.

Seine wissenschaftliche Produktivität wurde dadurch nicht beeinträchtigt. Diktierend schuf er weiterhin Arbeit nach Arbeit. Allein durch seine der Pariser Akademie eingereichten Preisschriften gewann Euler im Laufe der Zeit rund 30000 Livres.
Am 18. September 1783 starb er, ohne dass ihn ein längeres Leiden gequält hätte.

Bei Leonhard Eulers Tod lebten noch drei seiner Söhne: Johann Albrecht, der, wenn auch in geringerem Umfange, die mathematische Begabung seines Vaters geerbt hatte, Mitglied der Berliner Akademie und seit 1769 Beständiger Sekretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Karl, ein Arzt und Mitglied der Petersburger Akademie, und Christoph, der sich dem Militärdienst gewidmet hatte und den Rang eines russischen Generals erreichte.
Noch heute gibt es Nachfahren Eulers in der Sowjetunion, in denen die mathematische Begabung ihres Ahnen fortlebt.

Man rühmte an Euler einen ausgeglichenen und heiteren Charakter. Ausgesprochener Familiensinn, ökonomisches Denken und natürliches Benehmen waren ihm eigen. Wie viele bedeutende Mathematiker war auch Euler ein großer Freund der Musik. Eine riesige Arbeitskraft, ein erstaunliches Gedächtnis, eine phänomenale Konzentrationsfähigkeit und ein beispielloser Ideenreichtum zeichneten Euler aus.

Euler bereicherte die mathematischen Wissenschaften, begründete ganze Disziplinen, stieß in unerforschtes Neuland vor und wirkte durch seine Lehrbücher in seinen Schülern und Nachfolgern fort.

Eulers Größe ist letzten Endes in der entscheidenden Bedeutung der Mathematik für die exakten Naturwissenschaften, für die Technik und die Wirtschaft, für die Nutzbarmachung der Natur für menschliche Zwecke begründet.
Erwähnt sei das Ergebnis der Realisierung von Vorschlägen Eulers für den Bau einer Wasserturbine: Ihr Wirkungsgrad bleibt um keine 10% hinter dem einer modernen Turbine zurück.

Indem Euler in der Mathematik hervorragende Entdeckungen machte, schuf er Voraussetzungen für den Fortschritt der Menschheit. Er fertigte nicht nur das mathematische Werkzeug, mit dem die großen Naturforscher, Techniker und Mathematiker des vorigen Jahrhunderts operierten, es ständig vervollkommnend und erweiternd, an Strenge der Beweisführung die genialen Induktionen Eulers bald übertreffend, seine epische Breite durch konzentrierte Kürze ersetzend, sondern fühlte sich selbst stets zu den Anwendungen der Mathematik hingezogen.

Er gab der Praxis Impulse und empfing wieder von ihr Anregungen. Gauß, der wohl hervorragendste deutsche Mathematiker, charakterisierte 1847 diese Wechselwirkung, indem er sagte, Euler habe in der Beschäftigung mit Problemen der reinen Mathematik "eine Erholung von und eine Stärkung zu anderen der unmittelbaren praktischen Anwendung näher liegenden Arbeiten" gefunden.


Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.
St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 177[illegible]

Der führende sowjetische Mathematikhistoriker A. P. Juschkewitsch, der bedeutendste Eulerforscher unserer Tage, hat eine Klassifizierung der Arbeiten Eulers vorgenommen, die dies Bild ergibt:

40% der Studien Eulers liegen auf den Gebieten der Algebra, Zahlentheorie und Analysis, 18% sind der Geometrie gewidmet, 28% befassen sich mit Mechanik und Physik, 11% beziehen sich auf astronomische Fragestellungen.

Der Rest verteilt sich auf die Ballistik, die Kartographie, das Schiffs- und das Bauwesen, auf Musiktheorie, Theologie und Philosophie. Sogar landwirtschaftlichen Fragen wandte Euler seine Aufmerksamkeit zu. Zahlreiche Gutachten zeugen von Eulers Beschäftigung mit technischen Aufgaben.

Leonhard Euler war ein beispiellos fruchtbarer Gelehrter. In seinem Heimatland werden seit 1911 seine gesamten, französisch, lateinisch und deutsch abgefassten Werke sowie seine Briefe unter dem Titel "Leonhardi Euleri Opera Omnia" herausgegeben. Die Ausgabe ist auf rund 85 Bände im Lexikonformat mit etwa 40000 Druckseiten veranschlagt.

Die Edition der Werke geht ihrem Ende zu, während die der Briefe noch einige Jahre in Anspruch nehmen wird.
Diese Ausgabe, die die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft durch ihre Euler-Kommission für ihren großen Landsmann unter internationaler Beteiligung veranstaltet, ist ein literarisches Denkmal, würdig der Bedeutung des Genies Leonhard Eulers für die mathematischen Wissenschaften, deren Nutzen dieser einst so charakterisierte:

"Die gesamte Mathematik befasst sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Größen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch andererseits unsere Kenntnisse.
Beides sind Ziele, die gewiss der größten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist."

15 Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei Leonhard Euler

Die ältesten überlieferten mathematischen Texte zeigen, dass sehr früh schon neben den von der Praxis der Arbeit, des Bauens, des Lohnes, der Verteilung von Feldern und Nahrungsmitteln, des Handels und des Tausches, des Wiegens und Messens gestellten Problemen sich andere Aufgaben großer Beliebtheit erfreut haben, die wir als mathematische Rätsel oder mathematische Unterhaltungsaufgaben bezeichnen können.

Sie sollten, wie ihre Verbreiter gelegentlich ausdrücklich sagten, der Schärfung des Verstandes dienen, stellten also eine Art Denksportaufgaben dar. Auch in den dem täglichen Leben entnommenen Aufgaben treten manchmal praxisfremde Bruchteile von Menschen und Tieren oder von Geldstücken auf, aber die Aufgabenstellung selbst ist praxisnahe. Anders bei den Unterhaltungsproblemen - hier entspricht der Einkleidung z. B. bei Verfolgungsaufgaben ("Achilles und die Schildkröte") keine Realität.

Gerade diese Art Aufgaben aber erlaubt es, Schlüsse auf gegenseitige Abhängigkeiten der Aufgabensteller und das Wandern der Probleme zu ziehen, während dies bei den von der gesellschaftlichen Praxis, die bei gleichartigen Produktionsverhältnissen gleich oder doch annähernd gleich ist, veranlassten Problemstellungen selten und nur dann möglich ist, wenn in den Aufgaben gleiche, und zwar nicht zu einfache Zahlenwerte enthalten sind.

Auf welchem Wege sich die dem Training des Geistes dienenden Unterhaltungsaufgaben in der alten Welt verbreitet haben, ob durch Handelskarawanen, durch Reisende, Kriegsgefangene oder Schiffbrüchige, wissen wir im einzelnen nicht.
Tatsache ist, dass solche Probleme überall auftauchten und sich erstaunlich lange gehalten haben.

Sogar bei Leonhard Euler finden wir in seiner zuerst in deutscher Sprache 1770 erschienenen berühmten "Vollständigen Anleitung zur Algebra" derartige Beispiele. Jenes Lehrbuch, das in viele Sprachen übersetzt und noch in der Gegenwart neu aufgelegt worden ist, hatte der erblindete Euler einem ehemaligen Schneidergesellen ohne wissenschaftliche Vorbildung diktiert, um sich von der Verständlichkeit der Darstellung zu überzeugen.
Von Euler haben solche Standardaufgaben ihren Weg in viele Rechenbücher bis an unsere Tage heran gefunden und sind so am Leben geblieben.

Das erste von uns hier gebrachte Beispiel wird in der mathematikhistorischen Literatur nach seiner häufigen Einkleidung das Problem der 100 Vögel genannt.
Zuerst ist es in China im Anfang des 3. Jahrhunderts nachweisbar, danach bei den Indern (3. Jh.), dann gelangte es über die Araber (um 900) nach Europa und Byzanz. In einem byzantinischen Rechenbuch des 15. Jh. findet es sich in folgender Form:

46/1a Ein Herr sandte seinen Diener aus, er solle ihm Vögel dreierlei Art, Tauben, Turteltauben und Sperlinge kaufen. Es kostete die Taube 4 Weißmünzen, die Turteltaube 2 und von den Sperlingen kamen auf die Weißmünze drei.
Und er gab ihm 100 Weißmünzen, dass er 100 Vögel kaufe, weder mehr noch weniger. Ich will wissen, wieviel er von jeder Art kaufen wird.

Euler bringt die Aufgabe im Abschnitt Von der unbestimmten Analytik in dieser Fassung:

46/1b Jemand kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Taler.
Nun kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Taler, eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Taler und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Taler. Wie viele

sind es von jeder Gattung?

Euler behandelte das Problem im Anschluss an Bachet de Meziriac (Lyon 1612), der die Ganzzahligkeit der Lösung verlangt hatte.
Eine weitere alte Aufgabe, die wir vorstellen wollen und die zu einer mit Der Wächter im Apfelgarten bezeichneten Gruppe gehört, führt Euler in seinem Abschnitt Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung vor.
Wir zitieren zunächst wieder die Fassung in jenem byzantinischen Rechenbuch, weil dort die Aufgabe in der Einkleidung gebracht wird, der sie ihre Einordnungsbezeichnung verdankt:

47/1a Es war ein Mann mitten in einem Garten, und jener Garten hatte vier Tore, und es bestand die Vorschrift, wenn er aus allen den Toren herausgehen wollte, solle er so viele Silberstücke mitnehmen, dass er dann an jedem Tor die Hälfte abgebe und ein halbes Silberstück mehr - damit er kein Silberstück zerteilen müsse - und dass ihm dann, wenn er aus allen den Toren herausgegangen sei, 1 Silberstück übrigbleibe. Wie viele Silberstücke musste er mitnehmen?

Bei Euler findet sich eine entsprechende Aufgabe als Forderung nach Verteilung einer Erbschaft, und er sagte, sie sei "von einer ganz besonderen Art und verdient beachtet zu werden":

47/1b Ein Vater hinterlässt einige Kinder und ein Vermögen, das die Kinder in folgender Art unter sich teilen: Das erste nimmt 100 Taler und dazu den zehnten Teil des Restes. Das zweite nimmt 200 Taler und dazu den zehnten Teil des nunmehr erhaltenen Restes. Das dritte nimmt 300 Taler und dazu den zehnten Teil des verbliebenen Restes. Das vierte nimmt 400 Taler und dazu den zehnten Teil des verbleibenden Restes usw.
Hierauf stellt sich heraus, dass das - ganze Vermögen gleichmäßig verteilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen war, wie viele Kinder der Vater hinterließ und wieviel jedes bekam.

Ob das Erbschaftsproblem zuerst bei den Arabern oder in Europa bzw. in Byzanz gestellt worden ist, lässt sich nicht sagen. Belegt ist indessen, dass die Aufgabe in der Apfelgarteneinkleidung bzw. in anderen Einkleidungen zuerst in China (um 250, nach alten Vorlagen), dann in Armenien (um 700) auftrat, danach bei den Indern (um 900) und Arabern (um 1000) gestellt wurde und von den letzteren ihren Weg in die mittelalterlichen Rechenaufgabensammlungen Europas (z. B. Leonardo Fibonacci von Pisa, um 1200) und von Byzanz gefunden hat.

Wir haben es also Euler zu verdanken, dass die Tradition der Unterhaltungsmathematik mit neuem Leben erfüllt wurde und das unterhaltsame Element des Rätsels mit dem nützlichen Element der Anwendung und Ausbildung mathematischen Wissens verbunden blieb.

Quellen:
Leonhard Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra. Neu hrsg. v. Jos. E. Hofmann. Reclam, Stuttgart 1959.
Herbert Hunger und Kurt Vogel: Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts.

Österr. Akad. d. Wissenschaften, Phil.-hist. Kl., Bd. 78, Abh. 2, Wien 1963.
Kurt Vogel: Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrh. Österr. Akad. d. Wissenschaften. Wiener byzantinist. Studien, Bd. 6, Wien 1968.

15.1 Aufgaben aus „Vollständige Anleitung zur Algebra“ von Leonhard Euler

Im Jahre 1770 gab Euler, der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus.
Es erschien zunächst in deutscher Sprache in Petersburg und wurde in viele Sprachen übersetzt. Das Buch war mehr als 100 Jahre lang eines der beliebtesten und meist gelesenen Lehrbücher.
Die folgenden Aufgaben wurden diesem Buch entnommen:

48/1 Suche zwei natürliche Zahlen, deren Summe 15 und deren Differenz 7 beträgt!

48/2 Zerlege 7 derart in zwei Summanden, dass der eine um 3 größer ist als der andere!

48/3 Ein Maurer verdient täglich 10 Groschen. Wieviel Taler zu 24 Groschen erhalten 12 Maurer, die 50 Tage lang gearbeitet haben?

48/4 Es wird die kleinste natürliche Zahl gesucht, die bei Division durch 11 und Rest 3, bei Division durch 19 den Rest 5 lässt.

48/5 Insgesamt 20 Männer und Frauen besuchten ein Gasthaus. Jeder Mann gibt 8 Groschen, jede Frau 7 Groschen aus, und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Taler.
Wieviel Männer bzw. wieviel Frauen sind es gewesen? (1 Taler wurde damals mit 24 Groschen berechnet.)

48/6 Ich habe einige Ellen Tuch gekauft und für 5 Ellen 7 Taler bezahlt, davon wieder 7 Ellen für 11 Taler verkauft und dabei 100 Taler gewonnen. Wieviel Ellen Tuch sind es gewesen?

48/7 Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: "Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 8 Stück abzähle, so bleiben 7 übrig."
Die zweite sagt: "Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 10 Stück abzähle, so bleiben mir auch 7 übrig."
Wie viele Eier hat jede der beiden Bäuerinnen?

48/8 Ein Wechsler hat zweierlei Münzen. Von der ersten Sorte gelten 10 Stück, von der zweiten Sorte 20 Stück einen Taler. Jemand verlangt 17 Münzen für einen Taler. Wieviel Münzen jeder Sorte bekommt er?

48/9 Eine Bäuerin vertauschte Käse gegen Hühner. Sie gibt je zwei Käse für je drei Hühner. Die Hühner legen Eier; jedes $\frac{1}{3}$ soviel wie es Hühner sind.
Mit den Eiern geht sie auf den Markt. Sie gibt je neun Eier für soviel Pfennig, wie ein Huhn Eier gelegt hat. Der Erlös beträgt 72 Pfennig. Wieviel Käse hat die Bäuerin gegen Hühner eingetauscht?

48/10 Jemand kauft eine gewisse Anzahl Tücher, das erste für 2 Taler, das zweite für 4 Taler, das dritte für 6 Taler, immer 2 Taler mehr für das folgende. Er bezahlt für alle Tücher 110 Taler.
Wieviel Tücher sind es gewesen ?

48/11 Insgesamt 20 Männer und Frauen sind in einem Gasthaus. Die Männer geben zusammen 24 Gulden, die Frauen geben zusammen ebenfalls 24 Gulden aus. Es stellt sich heraus, dass jeder der Männer einen Gulden mehr als jede der Frauen hat zahlen müssen.
Wieviel Männer bzw. Frauen waren es?

48/12 Gesucht sind die drei kleinsten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe ihrer Kubikzahlen ergibt eine weitere Kubikzahl.

16 Rund um das Schachbrett

16.1 Weizenkörner auf einem Schachbrett

Das Schachspiel ist wahrscheinlich in Indien erfunden worden. Über die Perser lernten auch die Völker der arabischen Kalifate das Spiel kennen.
Der Historiker al-Ja'qubi, der dort im 9. Jahrhundert lebte, berichtete über die Erfindung des Schachspiels.

Nach seinem Bericht erbat sich der Erfinder des Schachspiels von der Tochter des Königs Balhait als Geschenk die Menge aller Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn, auf das zweite zwei, auf das dritte vier und so auf jedes folgende die doppelte Anzahl der Körner legt, die das vorhergehende Feld enthält.

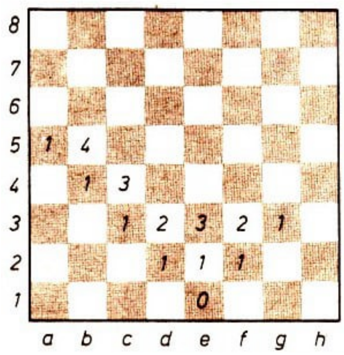
In der von al-Ja'gubi überlieferten Anekdote heißt es weiter: "Da sagte sie: Und wieviel ist der Betrag hiervon? Hierauf befahl sie, dass der Weizen herbeigebracht werde. Und es genügt nichts dafür, bis die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Getreide in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war.
Da dies nun viel war, sagte er: Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut. Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte."
Wie groß war die Zahl?

Es sei erwähnt, dass diese Aufgabe später auch bei anderen Gelehrten der arabischen Kalifate gestellt wurde. Im Jahre 1202 formulierte Leonardo Fibonacci in seinem Liber abaci die Aufgabe, ohne die Anekdote zu nennen.
Der Mathematiklehrer am Jesuitenkolleg in Rom, Christoph Clavius (1573 bis 1612), berechnete nicht nur die Anzahl der Getreidekörner, sondern auch noch die Anzahl von Schiffen, die benötigt würden, um das Getreide bzw. das Geld zu transportieren, ferner auch den Anteil der Erdkugel, den das Getreide ausfüllen würde.

16.2 Die vielen Wege des Königs

Die Frage, in wieviel Zügen und auf wieviel verschiedenen Wegen ein König von einem bestimmten Feld des Schachbretts auf ein anderes gelangen kann, ist recht interessant. Als Beispiel diene der einfache Fall, dass der König auf kürzestem Wege von e1 nach e8 wandert.

Es ist leicht zu sehen, dass die Mindestanzahl der Züge 7 beträgt. Wie groß ist aber die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen?

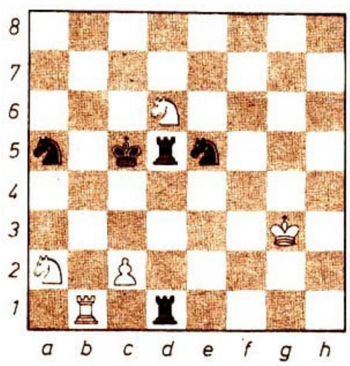


16.3 Eine Schachstudie: Intellektuelles Boxen

Dr. Emanuel Lasker (1868 bis 1941) ist als großartiger Schachpraktiker bekannt; er ist der Weltmeister, der die Krone von allen dreizehn Schachkönigen am längsten trug, nämlich 27 Jahre, von 1894 bis 1921!
Lasker, der 1902 promovierte, legte längere Turnierpausen ein und arbeitete an wissenschaftlichen Werken. Er galt als bedeutender Mathematiker und Philosoph.

Das Schach betrachtete er als Geistessport, als "intellektuelles Boxen", als Kampf der schöpferischen Individualitäten.
Dr. Lasker, der aus Berlinchen stammt und lange Zeit in Berlin lebte, machte auch auf dem Gebiet des Problemschachs von sich reden. Er löste nicht nur gern Aufgaben und Studien, sondern komponierte auch.

In der nachstehenden Studie hat Schwarz einen Turm mehr, doch findet Weiß eine geistreiche Möglichkeit, das gegnerische Übergewicht so zu wandeln, dass Schwarz nicht gewinnen kann.



Dr. Emanuel Lasker, 1905, Weiß zieht und macht remis

17 Über den Rösselsprung von Euler

Euler war ein guter Schachspieler. In Berlin, das Euler als sehr schachfreudig kennzeichnete, hat er das Spiel erlernt, und er sagt: "Ich habe ... es so weit gebracht, dass ich ihm (dem Lehrer) die meisten Partien abgewinne."

Wie wir einem Brief aus dem Jahre 1751 entnehmen können, bedauerte er die wegen einer Affaire notwendige plötzliche Abreise des Schachmeisters Philidor aus Potsdam, "sonst würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben, mit ihm zu sprechen". Philidors Bauernführung ("Der Bauer ist die Seele des Schachs") hat die Spielweise im Schach stark beeinflusst.
Euler besaß 1751 bereits Philidors 1749 in London erschienenes Buch "Analyse des Schachspiels".

In den Memoiren der Berliner Akademie von 1759 findet sich eine 22seitige Abhandlung über den Rösselsprung:

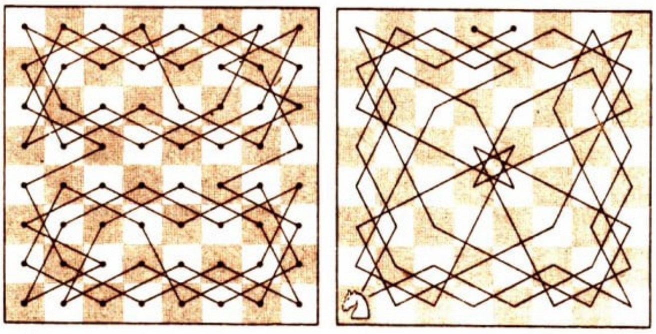
"Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft, als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, mit einem Springer bei gegebenem Anfangsfeld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal, zu passieren ...
Diejenigen, die die Aufgabe für ziemlich leicht hielten, machten mehrere nutzlose Versuche, ohne zum Ziel zu gelangen. Hierauf gab derjenige, der die Frage aufgeworfen hatte, eine Route so an, dass eine vollständige Lösung entstand.

Die Menge der Felder ließ indessen nicht zu, die gewählte Route dem Gedächtnis einzuprägen, und erst nach mehreren Versuchen gelang es mir, eine der Aufgabe genügende Route zu finden, sie galt auch nur für ein bestimmtes Anfangsfeld."

Vermutlich ist die Rösselsprungaufgabe so alt wie das Schachspiel selbst, aber erst Euler gab ihr, wenn auch nicht eine Theorie, so doch ein praktikables Lösungsverfahren. Er geht dabei zunächst aufs Geratewohl voran, bis der Rösselsprung sich nicht weiter ausführen lässt.
Dann wird der Rösselsprung in zwei Teile zerlegt sowie auf neue Art miteinander wieder verbunden, so dass alle früheren Felder wieder besetzt sind, aber ein neuer Endpunkt zustande kommt, von dem möglicherweise eines der freien Felder erreichbar ist.

Die geschickten Zerlegungen Eulers in den Beispielen machen es glaubhaft, dass man stets zum Ziel kommen könne, bewiesen wird es nicht. Jean Paul schreibt im Hesperus:

"Gegen den Eulerschen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlägel zu Felde", woraus zumindest hervorgeht, dass auch Euler den Rösselsprung populär gemacht hatte.
Das Bild zeigt einen in sich geschlossenen Rösselsprung Eulers, der zweiteilig genannt wird, da er zuerst auf der einen und dann auf der anderen Hälfte des Bretts ausgeführt wird.



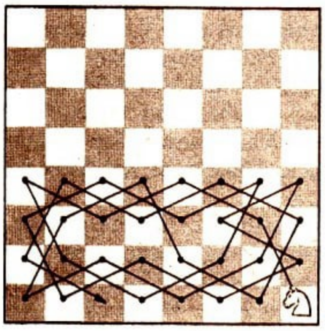
Zweiteiliger geschlossener Rösselsprung von Leonhard Euler

Von dieser Art gibt es übrigens 31054144 Lösungen, wie die Mathematiker katalogisierend ermittelt haben. Euler untersuchte auch rechteckige und andersartige Bretter in Bezug auf den Rösselsprung.
Er zeigte z. B., dass es auf Brettern vom Format 3×5 keine Rösselsprünge gibt, auf dem Format 3×7 sind keine geschlossenen Rösselsprünge möglich.

Ein Rösselsprung setzt sich aus mehreren Springerzügen zusammen. Die Anzahl der möglichen geschlossenen (der Rösselsprung führt zum Ausgangspunkt wieder zurück) und offenen Rösselsprünge ist sehr groß, und die Methoden, einen solchen aufzubauen, sind mannigfaltig.
Am bekanntesten ist der Rösselsprung als Rätsel, bei dem die auf die Felder eines Schachbrettes oder einer beliebigen Figur in der Gangart des Springers verteilten Silben, Wörter oder Buchstaben eines Gedichts oder Sinnspruchs zusammengesetzt sind.

Das rechte Bild oben zeigt uns einen offenen Rösselsprung auf dem Schachbrett, der auf dem Feld d8 oder e8 beginnt und dem entsprechend auf e8 bzw. d8 endet.
In seiner grafischen Darstellung lässt sich mit etwas Phantasie eine Blumenblüte erkennen!

Für die Blume wird eine Vase gesucht!
Versuche, mit Hilfe eines geschlossenen Rösselsprungs, der auf dem Feld al des Schachbrettes beginnt und endet, eine phantasievolle Vase darzustellen! Nutze dazu ein leeres Diagramm.



Ein offener Rösselsprung von Leonhard Euler auf dem halben Schachbrett.

Als Hilfe seien einige Punkte des gesuchten Rösselsprungs vorgegeben:
Im 3. Zug wird das Feld b7, im 8. - e7, im 14. - e3, im 22.- f4, im 29. - h1, im 37. - d7, im 45. - f3 und im 52. - h4 berührt.

Anmerkung: Kein Feld des Brettes darf zweimal durch den Rösselsprung berührt werden!

18 Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen

Die ständig zunehmende Verbreitung von Computern in allen Gebieten von Wissenschaft und Technik, in allen Zweigen der Volkswirtschaft hat außerordentlich bedeutsame Auswirkungen auf die Gestaltung von Arbeitsplätzen und -weisen, auf die zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden zur Lösung von Problemen des jeweiligen Wissenschaftsgebietes.

Besonders enge Beziehungen bestehen dabei zwischen Informatik und Methoden der Mathematik. Zum Teil entstehen völlig neue Teilgebiete innerhalb der Mathematik, zum Teil verschieben sich die zu lösenden Teilaufgaben, da u. a. die Arbeitsgeschwindigkeit der Computer ein wesentlicher Faktor wird.
Diesen Problemkreis wollen wir hier an einem klassischen Beispiel erläutern und dabei einige Überlegungen zur algorithmischen Lösung von Problemen und deren Formulierung durch Programmiersprachen anstellen.
Folgende Aufgabe sei gestellt:

52/1 Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so zu postieren, dass keine Dame eine andere bedroht. Wie viele derartige Positionen existieren?

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass sich die Damen horizontal, vertikal und diagonal bewegen können. Eine Dame gilt dann als bedroht, wenn sie sich in der Zugrichtung einer anderen Dame befindet.

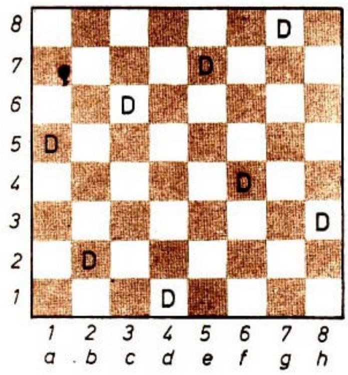
Dieses Problem wurde in vergangenen Jahrhunderten viel untersucht (u. a. auch von Gauß) - man fand 92 Lösungen, zum Teil mit sehr feinsinnigen Überlegungen zur Geometrie des Schachbrettes, zu möglichen Symmetrien, Spiegelungen, Drehungen usw.
Wie stellt sich nun diese Aufgabe unter Berücksichtigung der Verwendung eines Computers dar?

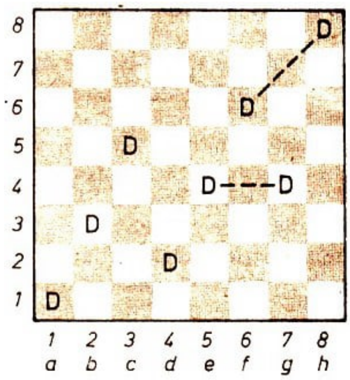
Es genügt eine kurze Überlegung, um feststellen zu können, dass in jeder Horizontalen (jeder Reihe) und in jeder Vertikalen (jeder Linie) genau eine Dame stehen muss. Gäbe es eine Reihe oder Linie ohne Dame, so müssten in einer anderen zwei Damen stehen, die sich aber dann gegenseitig bedrohen würden.
Die Bilder auf der nächsten Seite zeigen eine im Sinne der Aufgabe gültige und eine ungültige Aufstellung.

Zur Beschreibung der Verteilung der 8 Damen auf dem Brett nummerieren wir die acht Linien von 1 bis 8 und definieren einen Vektor Position, dessen Komponenten den acht Linien zugeordnet sind; die Werte der Komponenten bezeichnen das Standfeld auf der zugehörigen Linie. Die Positionen in den Abbildungen werden durch die beiden Vektoren

$$[5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3] \quad \text{bzw.} \quad [1, 3, 5, 2, 4, 6, 4, 8]$$

beschrieben.





links: a) korrekte Position; rechts: b) falsche Position

Ein erstes, für derartige kombinatorische Probleme sehr typisches Lösungsverfahren ist die vollständige Durchmusterung aller möglichen Positionen. Dieses Verfahren besteht aus zwei wesentlichen Schritten:

a) sukzessive Eng aller möglichen Positionen;
b) Überprüfung aller Positionen und Aussonderung der geeigneten.

Für den Schritt a) ist wichtig, dass keine Position vergessen und möglichst keine doppelt erzeugt wird. Um dies zu erreichen, verwendet man die lexikographische Anordnung der Positionen.
Dieses Prinzip, dem tatsächlich die Anordnung der Stichworte in einem Lexikon folgt, machen wir uns an der Aufzählung aller dreibuchstabigen Wörter aus den Buchstaben a, b, c klar:

aaa aab aac	aba abb abc	aca acb acc
baa bab bac	bba bbb bbc	bca bcb bcc
caa cab cac	cba cbb cbc	cca ccb ccc

Es ist $a < b < c$ ($<$ bezeichne die Vorgängerrelation im Alphabet), und man setzt alle Komponenten auf den kleinsten Wert (aaa). Anschließend durchläuft die letzte Komponente in der vorgeschriebenen Reihenfolge alle möglichen Werte (aaa, aab, aac). Ist man mit einer Komponente am Ende angelangt, wird die vorhergehende um ein Element erhöht, und alle weiteren werden wieder auf den Anfang zurückgesetzt (aba). Dies wird solange wiederholt, bis sämtliche Komponenten den höchstmöglichen Wert angenommen haben (ccc).

Überträgt man diese Methode auf die möglichen Aufstellungen der acht Damen, so erhält man folgende Vektoren:

11111111, 11111112, ..., 11111118, 11111121, ..., 11111188, 11111211, ..., 18888888, 21111111, ..., 88888888

Durch diese Aufzählung wird gewährleistet, dass keine Position fehlt und keine doppelt vorkommt. Als Anzahl möglicher Positionen erhält man somit

$$n = 8^8 = 2^{24} = 16777216$$

Die Prüfung der Korrektheit führen wir in drei Etappen durch. Zwei (oder mehr) Damen in einer Reihe sind dann vorhanden, wenn in einem Positionsvektor eine Zahl mehrfach vorkommt.
Etwas schwieriger gestaltet sich die Prüfung, ob sich zwei Damen auf der gleichen Diagonale befinden. Hierzu betrachten wir die folgenden Bilder.

Summe und Differenz von Zeilen- und Spaltennummer

a) Summe

9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9

b) Differenz

7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	0	-1
5	4	3	2	1	0	-1	-2
4	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

Im ersten Diagramm enthält jedes Feld die Summe, im zweiten die Differenz von Horizontale und Vertikale. Absteigende Diagonalen werden also durch konstante Summen, aufsteigende durch konstante Differenzen charakterisiert.

In der obigen Beschreibung einer Position durch Vektoren muss man also für eine bestimmte Dame Summe bzw. Differenz von Komponentennummer und Komponentenwert bilden und prüfen, ob sich diese Werte, die die auf und die absteigende Diagonale charakterisieren, für weitere Komponenten wiederholen.

Betrachten wir noch ein zweites Lösungsverfahren, das sich ergibt, wenn man nicht "gar zu viele unnötige" Positionen prüfen will, sondern "konstruktiv möglichst gute" Positionen zu erzeugen versucht.
Für nicht zu große Problemkomplexität ist die vollständige Durchmusterung zwar völlig legitim, bei ansteigender Komplexität gerät man aber auch schnell an die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Computer, auch bei sehr hohen Arbeitsgeschwindigkeiten.

Die Idee zur Konstruktion von Lösungen besteht in folgender Vorgehensweise: In jeder Vertikalen (von links nach rechts) wird das niedrigste zulässige Feld als Damenposition ausgewählt. Kommt man auf diese Weise bis zur 8. Komponente, so ist eine korrekte Position gefunden.

Gelangt man in eine Sackgasse (gibt es in der nächsten Vertikalen keine Setzungsmöglichkeit mehr), so nimmt man die letzte Setzung zurück, verwendet dort die nächsthöhere Möglichkeit und "probiert sein Glück" aufs neue. Diese Methoden werden als Backtrack-Verfahren bezeichnet. Sie bilden in der Informatik eine gut untersuchte, weitverbreitete Lösungsmethodik. Betrachten wir dazu den Beginn des Lösungsweges.

1. POSITION [1] = 1;
2. POSITION [2] = 3;
3. POSITION [3] = 5;

4. POSITION [4] = 2;
5. POSITION [5] = 4.

An dieser Stelle versucht man vergeblich, eine Dame auf der 6. Linie unterzubringen, alle Felder sind bedroht.
Deshalb wird die letzte Setzung zurückgenommen und das nächste freie Feld auf der 5. Linie probiert. Da auch dies nicht zum Erfolg führt, geht man zurück zur 4. Linie, Feld 2 - mit dieser Setzung war nämlich die 6. Linie bereits blockiert.
Das nächste freie Feld auf der 4. Linie ist 7:

4. POSITION [4] = 7;
5. POSITION [5] = 2;
6. POSITION [6] = 4;
7. POSITION [7] = 6.

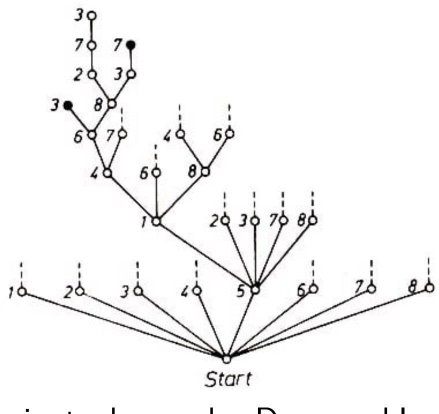
Es ist fast geschafft, aber auf der 8. Linie ist nunmehr kein freies Feld mehr vorhanden; also geht es wieder zurück. Die erste im Sinne der Aufgabenstellung korrekte Position erhält man mit:

POSITION [1] = 1; POSITION [2] = 5; POSITION [3] = 8; POSITION [4] = 6;
POSITION [5] = 3; POSITION [6] = 7; POSITION [7] = 2; POSITION [8] = 4.

Damit hat man eine Lösung gefunden und strebt die nächste ebenfalls durch Backtracking an.

Diese Methode wird häufig bei der Programmierung von Spielen zur Konstruktion von Varianten (Spiel- oder Variantenbaum), bei Suchprozessen (Suchbaum) u. a. verwendet. Betrachtet man nämlich die Konstruktion einer gewünschten Position als Spiel und schreibt als Spielregeln vor, dass die Linien von 1 bis 8 nacheinander durchlaufen werden, so hat man für den 1. Zug die Felder 1, 2, ..., 8 zur Verfügung.

Hat man etwa den 1. Zug POSITION [1] = 5 ausgeführt, so sind für den 2. Zug die Felder 1, 2, 3, 7, 8 möglich usw.
Das folgende Bild zeigt einen Ausschnitt aus dem zu dieser Aufgabe gehörenden Spielbaum.



Variantenbaum des Dameproblems

Durch • sind Situationen markiert, in denen keine regelgerechte Fortsetzung mehr möglich ist. Der Sinn des Backtracking besteht nun einfach darin, dass man von einem solchen Punkt aus rückwärts geht und einen neuen möglichen Weg sucht.
Dabei wird nur soweit zurückgegangen, wie es unbedingt erforderlich ist. So führt beispielsweise die Folge 5-1-4-6-3 zu keinem Erfolg - man geht zurück und wählt 5-1-4-6-8... usw.

Probiert man dieses Verfahren einmal "mit Hand" durch, so stellt man fest, dass der Aufwand, einen erfolgreichen Weg zu finden, immer noch beträchtlich ist, aber doch bedeutend geringer als bei vollständiger Durchmusterung.
Der Vorteil, dass hierbei alle Lösungen erfasst werden, bleibt aber erhalten.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Lösungen für $n = 1, ..., 9$
Tabelle: Die Anzahl der Lösungen für das n-Damen-Problem

	Anzahl der Positionen	Anzahl der Lösungen	
n=1	1	1	100%
n=2	4	0	0%
n=3	27	0	0%
n=4	256	2	0,781%
n=5	3125	10	0,320%
n=6	46656	4	0,00857%
n=7	826973	40	0,00484%
n=8	16777216	92	0,00054%
n=9	387420489	352	0,00009%

19 Dialoge

• „Hast Du Brüder?“
„Ja, einen.“
„Komisch“, sagte Helmut, „Deine Schwester sagte mir neulich, sie hätte zwei!“

• Kurerfolg: „Klappt es denn mit dem Abnehmen, seitdem Du die Kalorien zählst?“
„Mit dem Abnehmen nicht, aber mit dem Rechnen geht's besser!“

• „Herr Doktor, Sie möchten bitte zu meiner Schwester kommen, sie hat Fieber!“
„Wie hoch ist es denn“
„Zwei Treppen!“

• Er: „Welches Datum haben wir eigentlich heute?“
Sie: „Weiß ich auch nicht, aber schau doch mal in der Zeitung nach!“
Er: „Zwecklos, die ist doch von gestern.“

• „Hör mal“, sagt Monika zu Marie- Luise, „warum antwortest du auf jede Frage mit einer Gegenfrage?“
„Tu ich das wirklich?“

• „Vati, heute mussten wir in der Schule den gemeinsamen Nenner suchen.“

„Was, den haben sie immer noch nicht gefunden? Den mussten wir doch auch schon suchen!“

• Eine Frau kommt in ein Fischwarengeschäft. Es ergibt sich der folgende Dialog:
Frau: „Morgen!“
Verkäuferin: „Morgen!“
Frau: „Karpfen?“
Verkäuferin: „Morgen!“
Frau: „Morgen?“
Verkäuferin: „Morgen!“
Frau: „Morgen!“
Verkäuferin: „Morgen!“

• Sie kocht. Er denkt. Er irrt, wenn er denkt, dass sie kocht. Er kocht, als er merkt, dass sie denkt. Sie kocht, da er kocht, weil sie denkt. Nun kochen beide.

20 Auf Fehlersuche

20.1 Eine Aufgabe - verschiedene Lösungen

Bei einem mathematischen Wettbewerb wurde folgende Aufgabe gestellt:

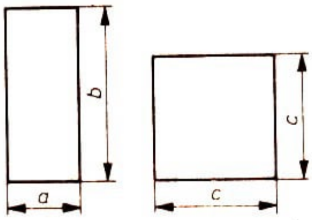
57/1 Ein Rechteck habe die Seitenlängen a und b. Der Flächeninhalt eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat, ist durch die Längen a und b auszudrücken.

34 Teilnehmer gaben die nachfolgenden Lösungen ab; davon sind 9 Lösungen falsch. Welche sind es?

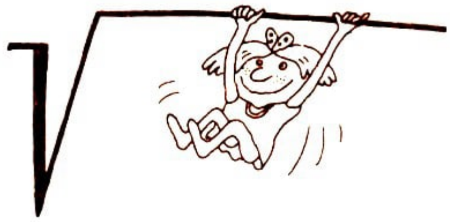
(1) $[0{,}5(a+b)]^2$
(2) $4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)$
(3) $\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2}$
(4) $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$
(5) $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$
(6) $\left(\frac{2a+b}{4}\right)^2$
(7) $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$
(8) $\frac{(a+b)^2}{2^2}$
(9) $\frac{2(a+b)}{4}$
(10) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$
(11) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}b^2$
(12) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
(13) $[2(a+b) : 4]^2$
(14) $\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{4}$
(15) $\frac{a^2}{4} + \frac{a \cdot b}{2}$
(16) $\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}$
(17) $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$
(18) $((a+b) : 2)^2$
(19) $\frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{2}$
(20) $0{,}25 \cdot (a+b)^2$
(21) $\frac{a+a+b+b}{4} \cdot \frac{a+a+b+b}{4}$
(22) $\left(\frac{2a+2b}{4}\right) \cdot \left(\frac{2a+2b}{4}\right)$
(23) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2$
(24) $[(a+b) : 2] \cdot [(a+b) : 2]$
(25) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$
(26) $((2a+2b) : 4)^2$
(27) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2$
(28) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$
(29) $\frac{(a+b)^2}{4}$
(30) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$
(31) $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$
(32) $\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$
(33) $\left(\frac{2(a+b)}{4}\right)^2$
(34) $A_Q = c^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2$

Abbildung zu (34) nächste Seite

Abbildung zu (34):



21 Ferienzeit



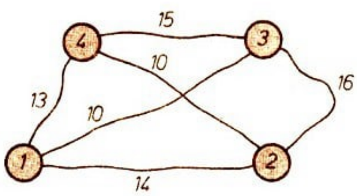
58/1 Ein Wanderer begegnete einer Schulklasse, die einen Ausflug machte.
Er grüßte: "Guten Tag, ihr einhundert Schüler."
Ein Schüler antwortete darauf:
"Wären wir noch einmal soviel und noch $\frac{1}{2}$mal soviel und noch $\frac{1}{4}$mal soviel Schüler wie wir sind, und würden wir Sie noch hinzurechnen, dann wären wir genau 100 Personen."
Wie viele Schüler machten einen Ausflug?

58/2 Die Schüler einer Klasse unterhielten sich über ihre Ferienerlebnisse. Dabei stellte sich folgendes heraus:

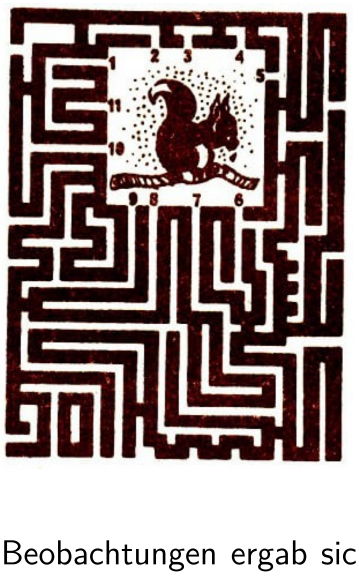
a) Genau 13 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal an der Ostsee.
b) Genau 15 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal im Harz.
c) Genau 6 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
d) Genau 4 Schüler dieser Klasse waren während ihrer Ferien weder an der Ostsee noch im Harz.

Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an, wenn es außer den unter a) bis d) genannten Schülern keinen weiteren Schüler gibt, der dieser Klasse angehört?

58/3 Gegeben sind 4 Städte, jede ist mit jeder durch eine Straße bekannter Länge verbunden, und ein Wanderer will von der Stadt 1 aus alle Städte auf einer kürzesten Route aufsuchen und wieder zur Stadt 1 zurückkehren.



Welches ist die kürzeste Länge des Wanderweges?



58/4 Durch welchen Ausgang findet das Eichhörnchen aus seinem Bau heraus?

58/5 In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich

folgende Scherzaufgabe:
$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.
Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

58/6 Ein Professor auf Reisen bemerkte, dass der Platz in dem kleinen Verschlag, in dem er übernachten sollte, für ihn nicht ausreichte.
Deshalb überlegte er: "Ich muss mich quer legen."
Er maß den Raum aus, der 1,65 m lang und 88 cm breit war. Nachdem er einen Moment überlegt hatte, sagte er zu sich selbst:
"Das reicht; wenn ich mich quer lege, habe ich noch 7 cm mehr Platz als ich brauche."Wie groß war der Professor?

59/1 Ein Fotofan vergrößert eine Wanderkarte mit den Abmessungen 20 cm $\times$ 35 cm und einem Maßstab 1:10000 maßstabgerecht auf ein Format von 50 cm $\times$ 87,5 cm.
Welchen Maßstab besitzt die neu angefertigte Wanderkarte?

59/2 Die Herren Schneider, Meier, Krause und Müller spielen Karten. Ihre Vornamen sind (in anderer Reihenfolge) Jürgen, Uwe, Mario und Roger.
Mario spielt aus; Herr Müller sticht; Herr Krause wirft ab; Roger muss bedienen.
Zum Schluss des Kartenspiels ist Mario der Erste, Herr Schneider Zweiter, Jürgen Dritter und Herr Krause Vierter. Wie heißen die Kartenspieler mit Vor- und Zunamen?

59/3 Ein Skatfan fragt: Der niedrigste Augenstich beim Skat beträgt zwei Augen (1 Bube, 2 leere Karten).
Sind alle Augenstiche durchgehend von 2 bis 33 möglich?

59/4 Larry gab Mike $\frac{1}{2}$ seiner Murmeln. Mike gab Tom $\frac{1}{2}$ der Murmeln, die Larry ihm gab. Tom gab Sam $\frac{1}{2}$ der Murmeln, die Mike ihm gab.
Welchen Bruchteil von Larrys Murmeln hatte Sam?

59/5 Zwei Fußballmannschaften A und B trugen zwei Freundschaftsspiele aus. Insgesamt wurden 13 Tore geschossen.
Das erste Spiel verlief unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte Mannschaft A im zweiten Spiel doppelt soviel Tore wie Mannschaft B.
Es sind die Ergebnisse beider Spiele zu ermitteln.

59/6 Zwischen den folgenden beiden Bildern, gezeichnet von einem Graphiker, gibt es viele kleine Unterschiede. Welche?

59/7 "Steinpilze habe ich mit dem Hasen nach dem Regen gesammelt", erzählte der Bär, "und wir konnten sie kaum nach Hause tragen, aber in der Hauptsache haben wir Wasser getragen, denn die frisch gesammelten Pilze enthalten 90% Wasser. Als aber die Pilze ein wenig abgetrocknet waren, wurden sie um 15kg leichter, denn sie enthielten nur noch 60% Wasser."
Wieviel Kilogramm Pilze brachten Bär und Hase aus dem Wald?

59/8 Auf einer Weide grasen Pferde, Schafe und Ziegen; es sind zusammen mehr als 30, aber weniger als 36 Tiere.
Es sind zwei Ziegen weniger und 11 Pferde mehr als Schafe. Wieviel Pferde, Schafe bzw. Ziegen grasen auf dieser Weide?

22 Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi

Auf Empfehlung der UNESCO wurde 1983 in vielen Ländern der Welt der 1200. Geburtstag des führenden Universalgelehrten Muhammad ibn Musa-al-Hwarizmi begangen.

Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi gemalt von dem arabischen Arzt Mali Nabiew (1982)

Die Festveranstaltung der sowjetischen wissenschaftlichen Öffentlichkeit fand aus diesem Anlass in Moskau, im Säulensaal des Hauses der Gewerkschaften statt. Dieser Saal ist einer der Festsäle, in denen offizielle Feiern und Empfänge stattfinden.

Die Jubiläumsveranstaltung wurde vom Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Akademiemitglied P. N. Fedoseev, eröffnet. Anschließend setzten die Teilnehmer der Konferenz ihre Arbeit in Taschkent sowie Urgentsch, der heutigen Hauptstadt des Gebietes Chorezm in der Usbekischen Sozialistischen Sowjetrepublik, fort.

Die Konferenz vereinte Wissenschaftshistoriker und Vertreter anderer wissenschaftlicher Disziplinen aus der DDR, der CSSR, Ungarn, Österreich, der Bundesrepublik Deutschland, Belgien, den Niederlanden und den USA sowie sowjetische Wissenschaftler aus Moskau, Leningrad, Kiew, Taschkent, Duschanbe, Baku und anderen wissenschaftlichen Zentren.

Es sind nur wenige biographische Angaben über al-Hwarizmi erhalten. Gewöhnlicherweise nimmt man an, dass er 783 geboren worden ist und um 850 verstarb. Sein Geburtsort liegt in Chorezm, einem großen Gebiet Mittelasiens, durch das der Amudarja fließt, der in den Aralsee mündet.
Heute gehört es zur Usbekischen Republik (der nordwestliche Teil) und zur Turkmenischen Sowjetrepublik (der nördliche Teil). Auf dem Territorium Chorezmiens sind Überreste eines gewaltigen, alten Bewässerungssystems gefunden worden und Ruinen zahlreicher Festungen, Paläste und anderer Bauten. Ihre Ausmaße und ihre Bauweise nötigen uns auch noch heute Bewunderung ab.

Seine Ausbildung erhielt al-Hwarizmi bei sich in der Heimat. Bald erreichte sein wissenschaftlicher Ruf ein solches Niveau, dass er bereits im Alter von etwa 30 Jahren nach Merw (heute in der Turkmenischen Republik), dem Zentrum der arabischen Gouverneure für ganz Mittelasien, berufen wurde.
Nach wenigen Jahren nur lud man ihn nach Bagdad ein, der Hauptstadt des Abbasidenkalifats.

Dort wurde er das Haupt des "Hauses der Weisheit", dem grundlegenden wissenschaftlichen Zentrum der Länder des Islam, an dem es ein astronomisches Observatorium und eine reiche Handschriftenbibliothek gab.
Viele seiner Werke zur Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Astronomie, Geodäsie, Geographie und Geschichte wurden uns überliefert.

Erhalten sind auch seine Schriften über die Konstruktion astronomischer Beobachtungsgeräte: Astrolabien, Quadranten und Sonnenuhren. Er war in der Tat ein vielseitiger Gelehrter, ein Enzyklopädist.

Besonders wertvoll ist al-Hwarizmis Beitrag zur Entwicklung der Mathematik.
Überaus interessant ist sein arithmetisches Traktat "Buch über die indische Rechnung", in dem er das damals in Indien übliche Rechensystem beschreibt - das dezimale Positionssystem, das jetzt in der ganzen Welt benutzt wird.

Das Verdienst al-Hwarizmis besteht darin, dass er als erster dieses Zahlensystem in arabischer Sprache beschrieb, es sehr ausführlich darlegte und anhand zahlreicher Beispiele erläuterte. Wegen der großen wissenschaftlichen und didaktischen Leistungen wurde gerade dieser Text in der Mitte des 12. Jh. ins Lateinische übersetzt, wodurch es einem weiten Kreis von Gelehrten im christlichen Mittel- und Westeuropa bekannt wurde.

Die lateinische Übersetzung beginnt mit den Worten "Dixit Algorizmi", was bedeutet: "Al-Hwarizmi sagte". Mitunter schrieb man den Namen des Gelehrten auf lateinisch auch Algorismus oder Algorithmus.
Dieses arithmetische Lehrbuch erlangte in Europa bald Popularität, und der Name seines Verfassers wurde auf andere Dinge übertragen. Die mittelalterlichen Mathematiker begannen, das ganze "indische" System der Zahlenschreibung "Algorismus"oder "Algorithmus" zu nennen, d. h., das dezimale Positionssystem.

Der Begriff "Algorithmus" ging in den ewigen Bestand der Mathematik ein und wurde zu einem der wichtigsten Termini der modernen Mathematik.

Al-Hwarizmi benutzte als erster in der arabischsprachigen Literatur einen festen Begriff für den Sinus eines Winkels. In seinen Arbeiten sind Sinus-, Tangens- und Kotangenstabellen enthalten. Er gibt Klassifikationen von Kurven an und beschäftigt sich mit dem Unendlichen.
Selbst das Wort "Algebra" entstand aus der Bezeichnung seines Werkes zur Lösung von Gleichungen.

Das arabische Äquivalent ist "aldschabr". Es bezeichnete die Operation, mit der die Glieder einer Gleichung so umgruppiert wurden, dass zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur noch Glieder mit gleichem, i. allg. positivem, Vorzeichen übrigblieben.

Bereits jeder Schüler weiß heute, wie eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen ist.
Hierbei sind a, b, c gegebene Zahlen. Eine beliebige davon kann positiv oder negativ, b oder c können auch gleich Null sein. Aber in der Zeit al-Hwarizmis benutzte man negative Zahlen nicht ("Zahlen, die kleiner als nichts sind".[3]

In den "Mathematischen Schriften" al-Hwarizmis, die 1983 in Taschkent in russischer Sprache herausgegeben worden sind, werden solche Gleichungen wie $x^2 + 5x = 6$ und $x^2 + 6 = 5x$ einzeln betrachtet.
Für jede von ihnen gibt al-Hwarizmi eine "eigene" Lösungsmethode an. Dabei wird die negative Wurzel einer Gleichung überhaupt nicht beachtet.

Für die erste der beiden Gleichungen führt al-Hwarizmi nur die Wurzel $x = 1$ an (die Lösung $x = -6$ galt in dieser Zeit als "unmöglich")[4].
Zwei Lösungen konnte es bei jenen Fällen geben, in denen sie beide positiv waren.

Es folgt ein Beispiel aus der Abhandlung al-Hwarizmis, das sich in der Folgezeit in vielen arabischen und lateinischen Texten findet.

"Ein Quadrat und die Zahl einundzwanzig sind gleich zehn Wurzeln", sagt al- Hwarizmi.
In moderner Form bedeutet das:

$$x^2 + 21 = 10x$$

"Teile die Zahl der Wurzeln, es ergibt fünf", weist der Autor an. "Multipliziere diese Zahl mit sich selbst, das ergibt fünfundzwanzig. Subtrahiere davon einundzwanzig, es bleiben vier. Ziehe daraus die Wurzel. Das sind zwei. Ziehe diese von der Hälfte der Zahl der Wurzeln ab, d. h. von fünf, dann bleiben drei.

Das ist eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde. Ihr Quadrat ist neun. Man kann die Wurzel auch zur Hälfte der Zahl der Wurzeln addieren und man erhält sieben. Das ist ebenfalls eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde.
Ihr Quadrat ist neunundvierzig."

[3] Das betrifft nicht die Mathematik in Indien und China in dieser Zeit.

[4] Negative Lösungen von Gleichungen wurden in der chinesischen Algebra nicht grundsätzlich ausgeschlossen.

In moderner Bezeichnungsweise lässt sich das alles bedeutend kürzer aufschreiben:

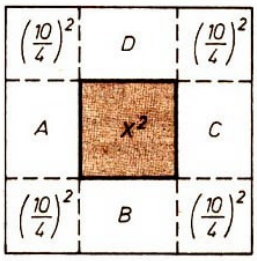
$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad , \quad x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm 2$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 7$$

Al-Hwarizmi führt "in geometrischer Sprache" auch den Beweis für die Richtigkeit der Lösung.

Sei beispielsweise die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ zu lösen, sagt al-Hwarizmi (seine Erklärungen werden jetzt in moderner Form angeführt):

Wir stellen ein Quadrat mit der Seite x dar, d. h. mit der Fläche x^2. An die Verlängerung seiner Seiten setzen wir Quadrate mit Seiten, die gleich der Hälfte der Hälfte "der Zahl der Wurzel" sind, d. h. mit Seiten $\frac{10}{4}$.
Wir erhalten auch vier Rechtecke mit Seiten x und $\frac{10}{4}$, d.h. Rechtecke A, B, C, D.



Im Ergebnis dessen erhalten wir ein neues großes Quadrat, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen aller Figuren ist:

$$x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Aber weil laut Voraussetzung $x^2 + 10x = 39$ ist, so finden wir, nachdem wir die ersten beiden Summanden gleich 39 gesetzt haben, dass die Fläche des neuen großen Quadrates gleich $39 + 25 = 64$ und die Seite gleich 8 sind. Entsprechend der Konstruktion ist letztere auch gleich

$$x + 2 \cdot \frac{10}{4} \quad \text{d.h.} \quad x + 2 \cdot \frac{10}{4} = 8$$

Daraus folgt $x = 3$.

Al-Hwarizmi drückt die Lösungsvorschrift für alle sechs Formen quadratischer Gleichungen (jetzt würden wir sagen, dass sich diese "Formen" durch die Vorzeichen der Koeffizienten a, b und c unterscheiden) wörtlich und anschaulich aus, d. h., er zeigt dem Leser geometrisch ihre Richtigkeit.

Viele Aufgaben aus dem Buch von al-Hwarizmi gehören zur Vermögensteilung, z. B. laut. Testamenten. Die folgende ist eine solche Aufgabe.

"Du teilst einen Dirham[5] zwischen irgendwelchen Leuten, jeder von ihnen erhält einen gewissen Teil. Dann wird ihnen (ein) Mann hinzugefügt und du sollst erneut einen Dirham zwischen ihnen teilen, wobei jeder ein Sechstel Dirham weniger als beim ersten Mal erhält."

Wenn man die ursprüngliche Zahl der Leute, nach der in der Aufgabe gefragt wird, mit x bezeichnet, so gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$$

Als Lösung der Aufgabe erhält al-Hwarizmi, dass der erste Dirham zwischen zwei Leuten und der zweite zwischen drei Leuten geteilt worden ist.
Die Wissenschaftler des arabisch-islamischen Mittelalters leisteten einen bemerkenswerten Beitrag zur Entwicklung wissenschaftlicher Vorstellungen über die uns umgebende Welt, darunter auch über Gesetze der Mathematik.

23 Aus der Schule geplaudert

63/1 Uwe und seine jüngere Schwester Karin haben den gleichen Schulweg. Karin braucht von zu Hause bis zum Schultor 30 Minuten. Uwe 20 Minuten. An einem Tage ging Karin 5 Minuten vor Uwe aus dem Haus.
Nach wieviel Minuten holte Uwe seine Schwester ein?

63/2 Es sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang. Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm.
Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen, Abstand haben.
a)Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

63/3 In einer Klasse, der mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler angehören, wurde eine Klassenarbeit in Mathematik geschrieben, an der alle Schüler teilnahmen.
Der 9. Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, der 3. Teil die Note 2, der 6. Teil die Note 4; kein Schüler erhielt die Note 5.
Wieviel Schüler erhielten die Note 3?

63/4a) Welches Stundenthema wurde im Mathematikunterricht behandelt?

WIM KLUNG
ESSEN

HELI C. BRUZ
EDAM

b) Welche Rechengesetze standen zur Debatte?

DR. STEVE T. GITZ,SIBIU

ASTA J.GESSOV, ZEITZ

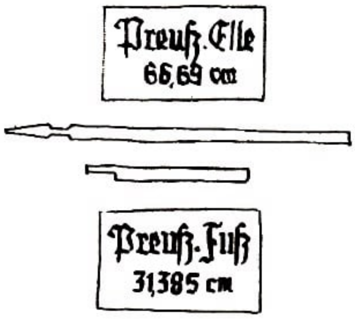
[5] Dirham ist eine alte arabische Geldeinheit.

24 Aus der Geschichte der Längenmaße

In der Mitte des 19. Jahrhunderts, also vor über 100 Jahren, wurden in verschiedenen deutschen Einzelstaaten noch unterschiedliche Längenmaße verwendet.
Das zeigt folgende Übersicht, in der diese Maße in heutige Einheiten umgerechnet wurden:

	1 Zoll	1 Fuß	1 Elle	1 Rute	1 Meile
Baden	3,0 cm	30 cm	60 cm	3,00 m	8,88 km
Bayern	2,4 cm	29 cm	83 cm	2,92 m	7,42 km
Preußen	2,6 cm	31 cm	67 cm	3,77 m	7,50 km
Sachsen	2,4 cm	28 cm	57 cm	4,30 m	9,06 km
Württemberg	2,9 cm	29 cm	61 cm	2,85 m	7,45 km

Die Angaben in dieser Tabelle sind gerundet. Es bestanden zum Teil erhebliche regionale Unterschiede. Die Tabelle wurde dem folgenden Buch entnommen:
Erna Padelt, Menschen messen Zeit und Raum, VEB Verlag Technik, Berlin 1971, S. 72.



In Bad Langensalza an der Rathauswand findet man die "Preuß. Elle" und den "Preuß. Fuß".

64/1 Zeichne je einen Nagel mit der Länge von 3 Zoll, der
a) in Baden,
b) in Preußen,
c) in Sachsen angefertigt wurde!

64/2 Welches Seil war am längsten:
a) Ein Seil mit der Länge von 25 Ellen aus Bayern oder
b) ein Seil mit der Länge von 30 Ellen aus Preußen oder
c) ein Seil mit der Länge von 35 Ellen aus Sachsen?

64/3 Mit welcher Länge wurde ein Balken von 12 Fuß von Zimmerleuten
a) in Baden,
b) in Bayern,
c) in Preußen,
d) in Sachsen angefertigt, gemessen in unseren heutigen Längeneinheiten?

64/4 Auf einen Ballen wurde Stoff mit einer Länge von 49,80 m aufgewickelt. Welche Länge würde man

a) mit einer Elle aus Baden,
b) mit einer Elle aus Bayern messen?

64/5 Welche Länge hat ein Seil von 20 Ellen nach unseren heutigen Längenmaßen mindestens (höchstens), wenn es bei einem Händler aus Baden, Bayern oder Preußen gekauft wurde?

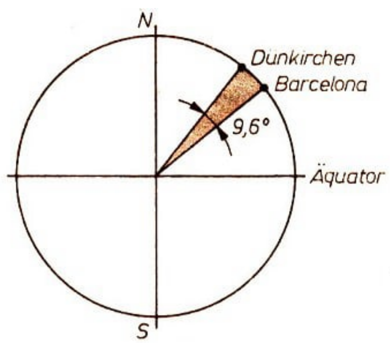
64/6 Wieviel Quadratmeter Flächeninhalt hatte ein rechteckiges Feld der Länge 50 Ruten und der Breite 20 Ruten
a) in Baden,
b) in Sachsen?

64/7 Auf einem Wegweiser in Potsdam stand: bis Meißen 30 Meilen. Auf dem entgegengesetzten Wegweiser in Meißen stand jedoch: bis Potsdam 25 Meilen.
Wie kamen diese unterschiedlichen Entfernungsangaben zustande? Beachte, Potsdam gehörte zu Preußen, Meißen dagegen zu Sachsen! Rechne die angegebenen Entfernungen in Kilometer um!

64/8 Überlege, welche Probleme die unterschiedlichen Längenmaße mit sich brachten! Warum forderte man damals einheitliche Maße?

Die Aufgaben zeigen deutlich, dass die unterschiedlichen Längenmaße unnötige Schwierigkeiten für Handel und Verkehr mit sich brachten. In den verschiedenen Ländern Europas wurde deshalb im 19. Jahrhundert wiederholt gefordert, einheitliche Längenmaße einzuführen.
Die erforderlichen Voraussetzungen dazu wurden in Frankreich nach der Französischen Revolution geschaffen. Auf Vorschlag einer Kommission von Wissenschaftlern wählte man den vierzigmillionsten Teil des Erdumfanges als Längeneinheit und nannte diese Länge ein "Meter".

Eine genaue Bestimmung des Erdumfangs war hierfür notwendig. Die erforderlichen Vermessungsarbeiten erfolgten zwischen Dünkirchen an der französischen Nordküste und Barcelona an der spanischen Nordostküste. Das sind zwei Orte, die auf dem gleichen Längenkreis liegen.



Die Differenz der geographischen Breite der beiden Orte beträgt ungefähr 9,6°. Für ihre Entfernung ergaben die Vermessungsarbeiten rund 547279 Toise, in der damals in Frankreich üblichen Maßeinheit.

Für den Erdumfang u_E, ergab sich hieraus

$$u_E = \frac{547279 \text{ Toise} \cdot 360^\circ}{9{,}6^\circ} = 20522962 \text{Toise}$$

Der vierzigmillionste Teil hiervon, also ein Meter, ist 0,513074 Toise. Umgekehrt beträgt 1 Toise ungefähr 1,95 m. Damit war es möglich, die Länge von einem Meter als Maßstab anzugeben.

Im Juni 1799 waren die Arbeiten beendet. Dem französischen Staatsarchiv wurde eine Verkörperung des Meters in Form eines Metallstabes übergeben, auf dem durch zwei Striche die Länge des Meters festgelegt war. Man nennt diesen Stab das Urmeter!

Das neue Maßsystem auf der Grundlage des Meters setzte sich in vielen Ländern jedoch nur langsam durch. Nach der Gründung des Deutschen Reiches wurde das metrische System erst ab 1. Januar 1872 für den ganzen Staat verbindlich.
Nach dem 1. Januar 1876 durften in Deutschland keine alten Maße mehr im Handel und im Verkehr benutzt werden.

65/1 Aus dem Mathematikunterricht sind folgende Umrechnungen der Längenmaße bekannt:

1km = 1000 m
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm

Auf welche Schwierigkeiten stößt man, wenn man in ähnlicher Weise Meilen in Ruten, Ruten in Ellen, Ellen in Fuß und Fuß in Zoll umrechnen will? Worin liegen die Vorteile des Maßsystems auf der Grundlage des Meters?

65/2 Der Umfang der Erde wurde ursprünglich mit 40000000 m festgelegt.
a) Rechne um in Kilometer!
b) Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung vom Pol bis zum Äquator?
c) Die Entfernung vom Pol zum Äquator entspricht der geographischen Breite von 90°. Welche Entfernung, gemessen auf einem Längenkreis, gehört ungefähr zur Änderung der geographischen Breite um 1°?
d) Wieviel Kilometer beträgt ungefähr die zu 9,6° gehörende Entfernung der Orte Dünkirchen und Barcelona?
e) In der Seefahrt nutzt man als weitere Unterteilung nächstkleinere Einheit eine Sekunde und verwendet das Zeichen 1'. Ein Winkel der Größe 1' hat den sechzigsten Teil der Größe des Winkels von 1°. Es gilt also 1° = 60'.

Welche Entfernung, gemessen auf einem Längenkreis, gehört zur Änderung der geographischen Breite um 1'?
Vergleiche diesen Wert mit der in der Seefahrt verwendeten Längeneinheit von einer Seemeile, 1 sm = 1,852 km!

Nachdem bessere und genauere Verfahren zur Bestimmung des Erdumfangs entwickelt wurden, stellte man fest, dass das Urmeter nicht genau der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs war. Da sich außerdem auch die Länge des als Urmeter verwendeten Metallstabs durch Temperaturschwankungen und Alterung geringfügig ändern kann, war man weiterhin auf der Suche nach einem zuverlässigen Naturmaß als Grundmaß unseres Maßsystems.

Als solches verwendet man seit 1960 die Wellenlänge des orangefarbenen Lichtes des Edelgases Krypton 86 und legte fest:
Das Meter ist gleich 1650763,73 Vakuumwellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus $2p_{10}$ und $5d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht.
Durch diese Festlegung gelang es, das Meter wesentlich genauer zu bestimmen als durch ein körperliches Urmeter.

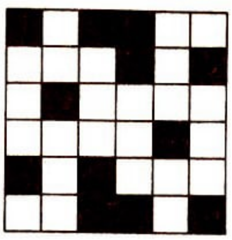
25 Rätsel

66/1 Silbenrätsel
Aus den Silben a, a, a, an, bruch, by, der, der, di, dop, e, e, go, i, in, kos, le, na, null, me, ok, pel, punkt, ri, rith, schew, ta, te, tik, tsche, va sind acht Wörter zusammenzustellen, die folgende Bedeutung haben:

1. Teilgebiet der Mathematik, das die verschiedenen Zahlenarten und ihre Rechengesetze behandelt,
2. Verbindungsstrecke zweier nichtbenachbarter Ecken eines Vielecks,
3. Gemeiner Bruch, dessen Zähler und Nenner selbst wieder Brüche sind,
4. Ein regelmäßiges Polyeder (Zwanzigflächner),
5. Russischer Mathematiker (1821 bis 1894),
6. Funktion, Zahl oder Eigenschaft, die bei Abbildungen unverändert bleibt,
7. Ein regelmäßiger Polyeder (Achtflächner),
8. Ein bestimmter Punkt auf der Zahlengeraden.

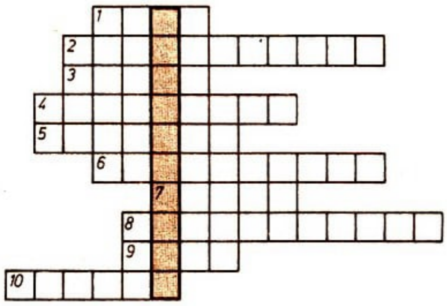
Die ersten und letzten Buchstaben der Lösungswörter, beide von oben nach unten gelesen, ergeben die Namen zweier Begriffe aus der Mathematik.

66/2 Quadratzahlenrätsel
Fülle das Diagramm mit unterschiedlichen zwei-, drei- und vierstelligen Quadratzahlen aus!



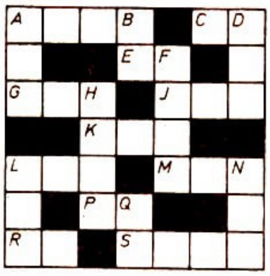
Keine von ihnen darf mit Null beginnen.

67/1 Rätselspaß



1. Linie im Dreieck; 2. trennt Zähler und Nenner; 3. ein Drachenviereck hat sie immer; 4. Dreieck hat keine, Viereck hat zwei, Fünfeck hat fünf ...; 5. Viereck; 6. Festlegung; 7. Seite eines gleichschenkligen Dreiecks; 8. Rechenoperation; 9. wahre Aussage; 10. Körper
Als Lösungswort ergibt sich ein Lurch.

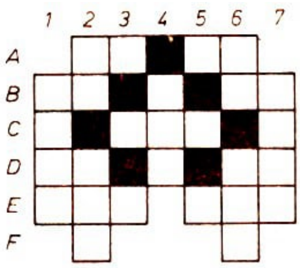
67/2 Kreuzworträtsel: Ermittle die durch 9 teilbare Zahlen! Dividiere sie durch 9 und trage den Quotienten in die entsprechenden Kästchen ein!



Waagerecht
A 914; 9145; C 567; 568; E 557; 558; G 429; 4293; J 369; 3689; K 945; 946; L 1260; 1259; M 2835; 2836; P 730; 729; S 74683; 74682;

Senkrecht
A 1387; 1386; B 594; 595; D 2880; 2879; F 22076; 22077; H 63971; 63972; L 1386; 1385; N 4932; 4933; Q 161; 162.

67/3 Kreuzzahlenrätsel
In die leeren Felder sind natürliche Zahlen bzw. Ziffern einzusetzen, die den nachstehenden Bedingungen entsprechen.



Waagerecht: A $\sqrt{1936}$; größter gemeinsamer Teiler zu 36, 72, 126.
B Lösung der Gleichung $x : 30 = 9 : 10$; größte einziffrige Primzahl; $2 - \{1 - [2 - (1 - 2) - 1] + 2\} + 8$

C Arithmetisches Mittel der Zahlen 1, 1, 3, 7; $\sqrt{152^2 + 714^2}$; Lösung der Gleichung $\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2} - 2$
D Summe der Innenwinkel im Zehneck, ausgedrückt in rechten Winkeln; $0{,}1\sqrt{10^2(58 - 9)}$; Basis unseres Zahlensystems.
E Kleinstes gemeinsames Vielfaches der Zahlen 2, 3, 6, 12, 16, 36; kleinste dreiziffrige Primzahl, die auf 17 endet.

Senkrecht: 1 Primzahl
2 $2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$; $28 \cdot 23$
3 ?, größter gemeinsamer Teiler der Zahlen 21, 56, 63, 84; ?
4 Ein Vielfaches von 67
5 $4 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$; eine Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
6 3^4; drei gleiche Grundziffern
7 Primzahl

26 Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken

1. Auf einem karierten Papier mit quadratischen Karos markieren wir Figuren, die sich aus 5 einzelnen untereinander zusammenhängenden Quadraten bilden lassen. Es entstehen die im Bild 68/1 dargestellten Möglichkeiten für die verschiedenen nicht kongruenten Fälle.

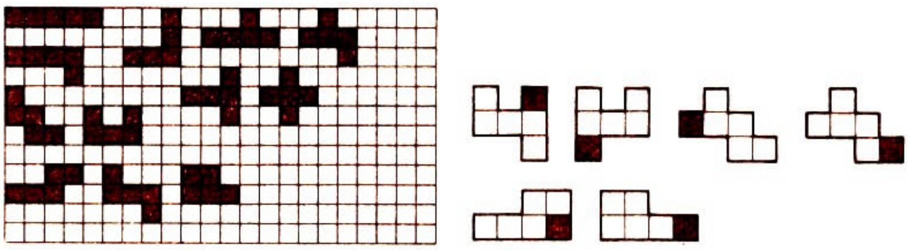


Abb. 68/1, 68/2

Durch Anhängen eines weiteren Karos kann man sich alle denkbaren 6-Zeller aus quadratischen Zellen aufbauen.
Kannst du alle Fälle herausfinden? Dabei muss man beachten, dass aus verschiedenen 5-Zellern durchaus gleiche, d. h. kongruente, 6-Zeller entstehen können.

Das Bild 68/2 zeigt drei solcher Möglichkeiten. Die hinzugenommenen Quadrate sind gekennzeichnet.

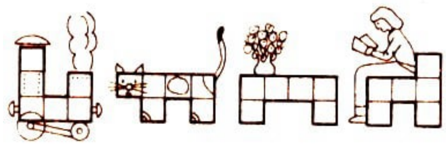


Abb. 68/3

2. Man kann mit den 6-Zellern auch ein 2-Personenspiel spielen. Dazu grenze man sich vorher ein quadratisches oder rechteckiges Feld auf einem karierten Blatt ab, Die Seitenlängen wähle man beliebig aus.

Um das Spiel nicht zu lange andauern zu lassen, schränke man sich etwa zunächst auf ein Spielfeld von 10×10 oder ähnlich ein.

Es werden nun abwechselnd von den Spielern I und II Felder markiert, so dass nach je 3 Zügen von beiden Spielern ein 6-Zeller entstanden ist. Die markierten Karos müssen dabei stets längs einer Quadratseite mit schon markierten zusammenstoßen. Das Spiel wird fortgeführt.
Die entstehenden 6-Zeller sollen alle nichtkongruent sein, und sie sollen sich gegenseitig nicht berühren.

Der Spieler, dem erstmalig keine Fortsetzung in der vorgeschriebenen Weise gelingt, hat verloren. Das Bild 68/4 zeigt ein Spielprotokoll.

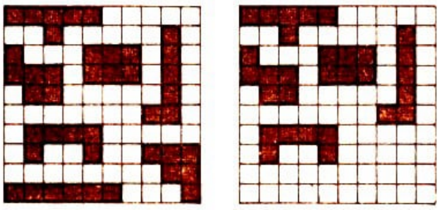


Abb. 68/4, 68/5

Hiernach hätte I verloren. Wäre es im Protokoll 68/5 für Spieler I möglich, so zu ziehen, dass er gewinnt?

3. Aus den 6-Zellern sollen durch Falten und Verkleben räumliche Gebilde hergestellt werden. Das Falten geschehe nur längs einer Quadratseite, ebenso erfolge das (gedachte) Verkleben nur längs zweier Quadratseiten. Was kann alles entstehen? Es sind jedenfalls Würfel möglich.
Die 6-Zeller, die zu Würfeln verklebt werden können, heißen Würfelnetze. Es gibt 11 verschiedene! Ermittle sie!

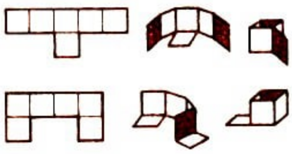


Abb. 69/1

Das Bild 69/1 zeigt zwei Verklebungsmodelle von 6-Zellern, die keine Würfelnetze sind. Es ist im ersten Fall eine eckige Tasse entstanden, während es im zweiten Falle eine eckige Schöpfkelle ist.
Welche 6-Zeller liefern noch alle das Klebemodell einer Tasse und welche das einer Schöpfkelle?

4. Entsprechend zu den Figuren aus Quadraten kombinieren wir nun gleichseitige Dreiecke zu Mehrzellern. Man muss sich zuerst eine Dreiecksfelderung herstellen. Hierzu konstruiert man sich mit Zirkel und Lineal ein großes Parallelogramm aus zwei gleichseitigen Dreiecken und teilt darauf die Seiten in 10 oder mehr gleiche Teile.
Durch Ziehen entsprechender Verbindungslinien bekommt man die gewünschte Felderung aus Dreieckszellen. Von den 5-Zellern gibt es jetzt nur vier verschiedene Typen.

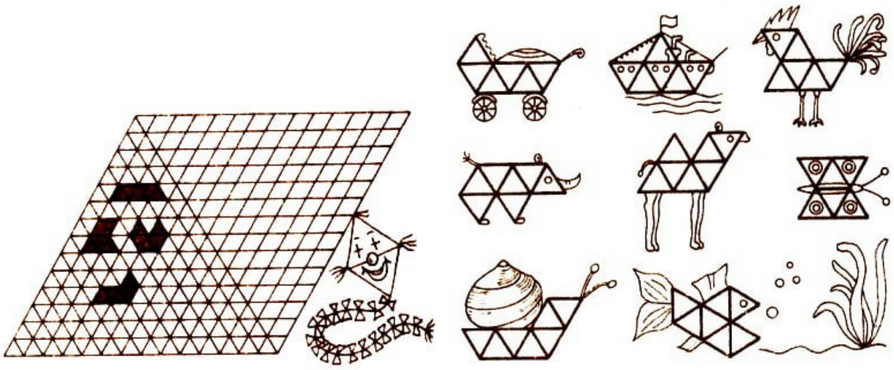


Abb. 69/2, 69/3

Das Bild 69/2 enthält sie. Von den 6-Zellern sind jetzt 12 nichtkongruente möglich. Finde diese durch Anhängen einer weiteren Dreieckszelle, wenn du von den 5-Zellern ausgehst!
Einige phantasievolle Zeichnungen mit 6-Zellern und 7-Zellern zeigt das Bild 69/3. Welche fallen dir noch ein?

Das Bild 69/4 bringt ein Beispiel für ein räumliches Klebemodell aus zwei verschiedenen Dreiecks-5-Zellern. Es ist eine spitze Tüte mit einer Lasche entstanden.

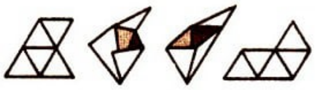


Abb. 69/4

26.1 Gefalztes

Man kniffe einen unbeschriebenen Bogen Papier zweimal, um so ein unaufgeschnittenes "Minitagebuch" zu erhalten.
Nummeriert nun, ohne das Tagebuch zu entfalten, die einzelnen Seiten hintereinander von 1 bis 8! Faltet den Bogen dann auseinander!
Es ergibt sich auf der Vorder- und Rückseite eine bestimmte Anordnung der Zahlen (vgl. Bild 69/5).

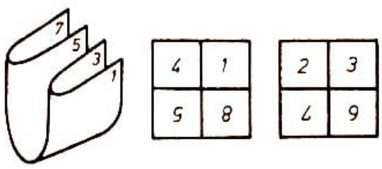


Abb. 69/5

Versucht nun, die Aufgabe in umgekehrter Weise zu bewältigen, indem ihr ein weißes Blatt beiderseits in vier Teile teilt und diese dann so nummeriert, dass beim Zusammenfalten des Bogens die Seiten fortlaufend richtig nummeriert sind!

69/1 Teilt einen unbeschriebenen (größeren) Bogen in 8, 16 oder 32 Teile! Nummeriert dann diese Teile und faltet den Bogen! Wie müsste beispielsweise die Vornummerierung für ein 32seitiges Tagebuch aussehen?

27 Punktanordnungen in einem Quadrat

In einem Betrieb sollen kongruente zylinderförmige Werkstücke mit vorgegebenem Durchmesser d in Kisten mit quadratischer Grundfläche einschichtig verpackt werden. Es sind zu diesem Zwecke Kisten herzustellen, in denen man $n = 2, 3, 4, ...$ dieser Zylinder unterbringen kann, wobei die Grundflächen der Zylinder auf den Böden der Kisten stehen sollen (siehe Bild 70/1).

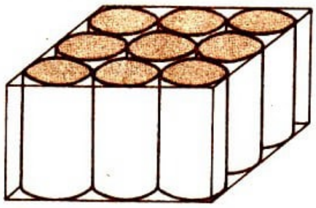


Abb. 70/1

Es ist die Forderung vernünftig, dass die Grundfläche der Kiste bei gegebenem n möglichst klein wird. Daraus leitet sich das folgende mathematische Problem ab:

Es werden diejenigen kleinsten Quadrate gesucht, in denen $n = 2,3,4,...$ Kreise vom Durchmesser d Platz haben, ohne sich gegenseitig zu überlagern.

Wir bezeichnen mit Q'_n das kleinste Quadrat, in welches wir n Kreise mit dem Durchmesser d einlagern können, die Seitenlänge mit x'_n.
Im Bild 70/2 sind solche Quadrate für $n = 2,3,4$ dargestellt:

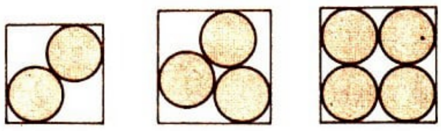


Abb. 70/2

70/1 Berechne die Seitenlängen der Quadrate Q'_2, Q'_3 und Q'_4! Bilde anschließend die Quotienten

$$d_n = \frac{n \cdot \frac{1}{4}d^2}{Q'_n}, \qquad n = 2,3,4$$

Für $n \geq 6$ bereitet die Suche nach den kleinsten Quadraten Q'_n mitunter Mühe bzw. ist bisher für gewisse n nicht erfolgreich gewesen.

Es ist in solchen Fällen eine Arbeitsmethode der Mathematiker, aus der gegebenen Aufgabenstellung auf ein analoges Problem zu schließen, um zunächst die Lösung dieses Problems anzustreben.
Falls die Lösung gelingt, werden dann Rückschlüsse auf die Ausgangsfrage angestrebt. Dieser Weg soll jetzt am Beispiel beschritten werden.

Dazu zeichnen wir zu dem Quadrat Q'_n ein Quadrat Q_n, das in Q'_n enthalten ist und dessen Seiten im Abstand $\frac{1}{2}d$ parallel zu den entsprechenden Seiten von Q'_n sind. Die Seitenlänge ist $x_n = x'_n - d$.

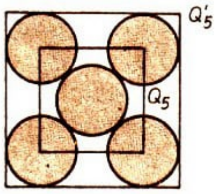


Abb. 70/3

Im Bild 70/3 ist diese Situation für $n = 5$ dargestellt. Wir erkennen, dass die Mittelpunkte der in Q'_n eingelagerten Kreise in Q_n enthalten sind.

Betrachten wir nun allgemein ein Quadrat Q, in dem n Punkte $P_1, P_2, ..., P_n$ verteilt sind, wobei keine zwei Punkte P_i, P_j $(i \neq j)$ zusammenfallen sollen.
Dann gibt es zwischen diesen n Punkten genau

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ Abstände } P_iP_j, \quad i < j, \quad i,j \in \{1,2,...,n\}$$

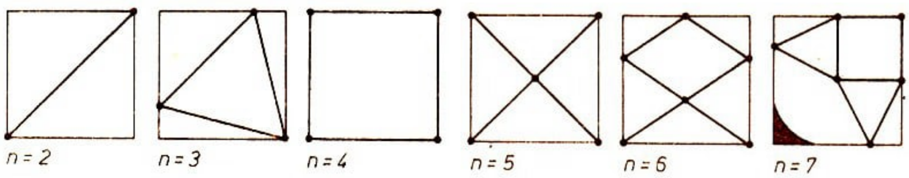
(Beweise diese Formel!)
Den kleinsten dieser Abstände bezeichnen wir als Minimalabstand dieser Punktverteilung in dem Quadrat Q.

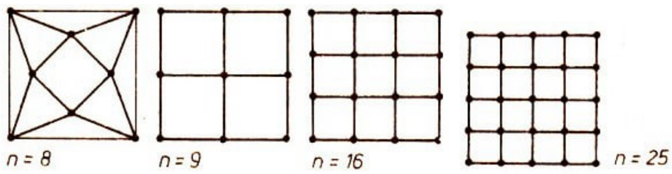
Den Begriff Minimalabstand können wir auf unser gestelltes Problem anwenden. Es entsteht der folgende Zusammenhang:
Wenn Q'_n das kleinste Quadrat ist, in das n Kreise $K_1, K_2, ..., K_n$ vom Durchmesser d eingelagert werden können, dann ist das oben beschriebene Quadrat Q_n, das die Kreismittelpunkte $M_1, M_2, ..., M_n$ enthält, das kleinste Quadrat, in dem n Punkte mit dem Mindestabstand d verteilt werden können und umgedreht. (Beweise diese Aussage!)

Damit steht also die Aufgabe, das kleinste Quadrat Q_n zu bestimmen, das n Punkte $M_1, M_2, ..., M_n$ mit dem Mindestabstand d enthält.
Damit wir für verschiedene n in demselben Quadrat arbeiten können, betrachten wir zu der eben gestellten Aufgabe die äquivalente Aufgabe.

In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 bestimme man eine solche Verteilung von n Punkten $P_1, P_2, ..., P_n$, so dass der Mindestabstand a_n^* dieser Verteilung nicht kleiner ist als der größte Wert der Mindestabstände bei allen anderen Verteilungen der n Punkte in Q.

71/1 Man mache sich diesen Sachverhalt an Bilden mit $n = 3$ klar. Eine Verteilung mit dem Mindestabstand a_n^* nennen wir auch "Beste Verteilung von n Punkten in dem Quadrat Q."
Für $n = 2,3, ..., 9$ wurden die besten Punktverteilungen von J. Schaer und A. Meir (Kanada) gefunden. Für $n = 16$ und $n = 25$ stammt die Lösung von G. Wengerodt (Erfurt). Die folgenden Bilder zeigen die besten Verteilungen für diesen.





Bemerkenswert ist, dass für $n = 7$ ein Punkt in der schraffierten Fläche beweglich ist, obwohl eine beste Verteilung vorliegt.

Für die Beweise der besten Verteilungen von n Punkten in einem Quadrat nutzt man die Kontraposition des folgenden Satzes, der in der Literatur als Basissatz bezeichnet wird.

Ist $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ eine beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat, so liegt auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt von $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$. Aus diesem Satz folgt sofort die beste Verteilung von $n = 2$ Punkten in dem Quadrat Q.

71/2 Beweise, dass $a_2^* = \sqrt{2}$ ist!

Wir haben gesehen, dass bisher nur für sehr wenige Zahlen n die besten Verteilungen gefunden wurden.
Natürlich gibt es für viele andere n Vermutungen für beste Verteilungen dieser n Punkte in einem Quadrat Q.
Es steht also ganz allgemein die Aufgabe, möglichst gute Verteilungen von n Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu suchen.

Eine Orientierung gibt die folgende Tabelle, in der solche Vermutungen zusammengetragen sind.

n	a_n	a_n^*	n	a_n	a_n^*
2		$\sqrt{2}$	3		$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
4		1	5		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
6		$\frac{\sqrt{13}}{2}$	7		$2(2-\sqrt{3})$
8		$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	9		$\frac{1}{2}$
10	$\frac{5}{12}$		11	0,398...	
12		$\frac{\sqrt{34}}{15}$	13	0,36603...	

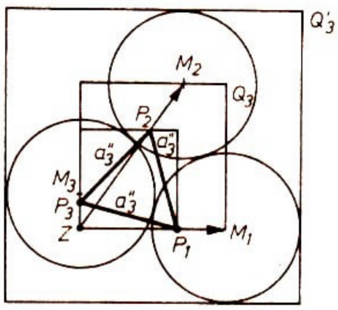
n	a_n	a_n^*	n	a_n	a_n^*
14		$\frac{2(4-\sqrt{3})}{13}$	15		$\frac{4}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
16		$\frac{1}{3}$	17	0,3045	
18	$\frac{\sqrt{13}}{12}$		19	0,290	
20	$\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{2}}{16}$		21	0,2704...	
22	$2-\sqrt{3}$		23	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	
24	$\frac{1}{2+\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}$		25		$\frac{1}{4}$

Wenn es nun für ein gegebenes n gelingt, die beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 zu finden, so haben wir mit der folgenden Überlegung auch das Ausgangsproblem gelöst.

Das zum Quadrat mit der Seitenlänge 1 gesuchte ähnliche Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n, erhält man durch zentrische Streckung mit dem Streckfaktor

$$t = \frac{d}{a_n^*}$$

und dem Zentrum in einem Eckpunkt. Das folgende Bild zeigt den Sachverhalt für $n = 3$.



Die gesuchte minimale Grundfläche der quadratischen Kiste hat dann die Seitenlänge

$$x'_n = x_n + d$$

und das anfangs gestellte Problem ist über diesen Umweg gelöst.
Die in Aufgabe 70/1 für $n = 2, 3, 4$ bestimmten Werte d_n geben Dichten der Kreisanordnungen in den Quadraten Q'_n an und sind damit Zahlenwerte für die Güte der Platzausnutzung in den Kisten.
Für größer werdendes n streben die Werte d_n gegen $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068...$

28 Knacknüsse

Aus einem alten Rechenbuch für Volksschulen mit dem Titel "Knacknüsse für Freunde des Rechnens" Wismar, 1880.

73/1 Vier Schüler Axel, Bernd, Christian und Dieter haben zusammen 13,80 Mark in ihren Geldbörsen. Christian hat 60 Pf, Dieter 80 Pf weniger in seiner Geldbörse als jeder der beiden Schüler Axel und Bernd.
Welchen Geldbetrag hat jeder dieser vier Schüler in seiner Geldbörse?

73/2 Vermehrt ein Schäfer seine Herde um 23 Schafe, dann hat er doppelt so viele Tiere zu betreuen, als wenn er 27 Schafe zum Schlachten abliefert. Wie viele Schafe umfasst diese Herde?

73/3 Der äußere Umfang eines 8 cm breiten rechteckigen Spiegelrahmens beträgt 280 cm. Welche Länge besitzt der innere Umfang dieses Rahmens?

73/4 Das Licht bewegt sich mit einer Schnelligkeit von 300000000 m in einer Sekunde. Wie viele Kilometer ist demnach der Polarstern von der Erde entfernt, wenn das Licht desselben 30 Jahre (zu 365 Tagen) gebraucht, um zur Erde zu gelangen?

73/5 Im westlichen Mecklenburg beträgt die Höhe der durchschnittlichen jährlichen Regenmenge $52\frac{1}{2}$ m. Wie viele Hektoliter sind das auf einem Ar? (1 Ar = 100 m^2)

73/6 Von einem Ballen Tuch, der 30 m enthielt, wurden 4 m Tuch mehr verkauft als übrig blieben. Wie viele Meter Tuch verblieben zum weiteren Verkauf?

73/7 Vater und Sohn sind zusammen 88 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen, wenn der Unterschied ihres Alters 38 Jahre ausmacht?

73/8 Das Alter zweier Kinder, von denen das eine 4 Jahre älter ist als das andere, beträgt zusammen 26 Jahre. Vor wie vielen Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste?

73/9 Zwei Orte A und B liegen 262,5 km voneinander entfernt. Von A geht jemand, der täglich 20 km zurücklegt, nach B. Drei Tage später geht ein anderer, der täglich 25 km zurücklegt, von B nach A. Nach welcher Zeit treffen sich beide Personen? Wie viele Kilometer hat dann jeder von ihnen zurückgelegt?

73/10 Eine Gemeinde hat 856 Einwohner, und zwar $1\frac{1}{10}$mal so viele Frauen wie Männer und $1\frac{1}{3}$ mal so viele Kinder wie Frauen. Wie viele Männer, Frauen bzw. Kinder gehören dieser Gemeinde an?

73/11 Von zwei Uhren geht die erste genau; die zweite geht stündlich $1\frac{1}{2}$ Minuten vor. Angenommen, beide Uhren zeigen die Uhrzeit 12 Uhr an. Welche Zeit vergeht, bis beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit anzeigen?

73/12 Grundlinie und Höhe eines Dreiecks sind zusammen 96 m lang. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks, wenn die Höhe 16 m länger ist als die Grundseite?

73/13 Aus dem Tore einer Stadt ging morgens um 6 Uhr ein Reisender in gleichmäßigem Schritte. Zwei Stunden später fuhr aus demselben Tor ein Postwagen auf derselben Straße. Zu welcher Uhrzeit holte der Postwagen den Reisenden ein, wenn der Postwagen eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 2,7 m, der Reisende von 1,2 m je Sekunde hatte?

29 Chiu Chang Suan Shu - Mathematik in neun Büchern

29.1 Aufgaben aus einem chinesischen Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Han-Zeit (202 v.u.Z. bis 9 u.Z.)

Übersetzt und erläutert von Kurt Vogel, erschienen bei Viehweg, Braunschweig 1968.

Allgemeine Hinweise:
Da keine Einheitlichkeit im Rechnen mit den Maßeinheiten besteht, werden alle Lösun-

gen nur mit den Maßzahlen durchgeführt. Zum besseren Verständnis ist nur in einigen Fällen die Umrechnung der Maßeinheiten angegeben.

Weiterhin besteht auch keine Einheitlichkeit in der Bezeichnung der Masse.
Es werden dafür auch die Begriffe "Gewicht" und "Menge" gebraucht. Auch mit dem Fragewort "wieviel" ist u. U. die Masse gemeint. Ebenso wird für die Menge 1 sowohl die Ziffer „1“ als auch der unbestimmte Artikel "ein" gebraucht.
Folgende Maßeinheiten werden in den Aufgaben verwendet:

Längenmaße: 1 Rolle = 4 Klafter = 40 Fuß = 400 Zoll; 1 Klafter = 10 Fuß = 100 Zoll; 1 Fuß = 10 Zoll.
Flächenmaße: 1 Mou = 240 Pu (240 Quadratschritt).
Hohlmaße: 1 Tou = 10 Sheng.
Gewichtsmaße (Massenmaße): 1 Pfund = 16 Unzen; 1 Hu entspricht der Masse von 2,7 Kubikfuß Hirse.

74/1 Das Ausmessen von rechteckigen Feldern
Jetzt hat man ein Feld; es ist $18\frac{5}{7}$ Schritt breit und $23\frac{6}{11}$ Schritt lang.
Die Frage ist: Wie groß ist das Feld? (Buch I, Aufgabe 24)

Die Antwort sagt: 1 Mou $200\frac{7}{11}$ Pu.
Die Regel lautet:
Jeden Nenner des Bruches multipliziere mit seinem Ganzen; den Zähler des Bruches addiere dazu! Multipliziere beides miteinander; es ist der Dividend! Die Nenner der Brüche werden miteinander multipliziert; es ist der Divisor. Teile den Dividenden durch den Divisor!

74/2 Allgemeine Feldermessung
Jetzt hat man ein bogenförmiges Feld (Kreissegment). Die Sehne ist $78\frac{1}{2}$ Schritt, der Pfeil (Bogenhöhe) $13\frac{7}{9}$ Schritt.
Die Frage ist: Wie groß ist das Feld? (Buch I, Aufgabe 36)

Die Antwort sagt: 2 Mou $155\frac{56}{81}$ Pu
Die Regel lautet:
Mit der Sehne multipliziere den Pfeil, den Pfeil wiederum mit sich selbst. Addiere es und dividiere durch 2!

74/3 Regelung des Tausches von Feldfrüchten
Jetzt hat man 7 Tou 8 Sheng Hirse; gewünscht werden schwarze Bohnen.
Die Frage ist: Wieviel erhält man? (Buch II, Aufgabe 16)

Die Antwort sagt: Es sind 9 Tou $8\frac{7}{25}$ Sheng schwarze Bohnen.
Die Regel lautet: Nimm die Hirse; zum Aufsuchen der schwarzen Bohnen multipliziere es mit 63, und dividiere durch 50!

Zur Regelung des Tausches von Feldfrüchten gab es eine Liste mit Messzahlen. Diese bestimmten die Volumeneinheiten, die man für 50 Einheiten (Grund-) Hirse bekam, z. B.

(Grund-)Hirse 50,
geschälte Hirse 30,
grobe Grütze 54,
Hirse geschält und gekocht 75,
schwarze Bohnen 63.

75/1 Bestimmung des Einzelpreises
Jetzt hat man ausgegeben 720 Geldstücke zum Kauf von 1 Rolle 2 Klafter 1 Fuß Seidenstoff. Man wünscht es für ein Klafter zu berechnen.
Frage: Wieviel kostet ein Klafter? (Buch II, Aufg. 35)

75/2 Proportionale Verteilung
Jetzt hat man folgenden Fall: Ein Tafu, ein Pukeng, ein Tsanyao, ein Shangtsao und ein Kungshi - zusammen 5 Männer - (diese 5 Beamtenklassen sind eingestuft mit einem Wert von 5, 4, 3, 2 und 1) erlegten auf der Jagd gemeinsam 5 Hirsche. Man wünscht, dass man es rangmäßig verteilt,
Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 1)

75/3 Verteilung nach reziproken Anteilen
Jetzt hat man folgenden Fall: A hat bei sich 3 Sheng Hirse, B hat bei sich 3 Sheng geschälte Hirse, C hat bei sich 3 Sheng gekochte geschälte Hirse. Man wünscht, dass man es zusammenlegen und neu verteilen soll.
Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 9)

75/4 Kleinere und größere Breite
Jetzt hat man ein Feld mit einer Breite von 1, einem halben und $\frac{1}{3}$ Schritt. Gewünscht wird ein Feld von 1 Mou.
Frage: Wie groß ist seine Länge? (Buch IV, Aufg. 2)

75/5 Kreisberechnung
Jetzt hat man eine Kreisfläche von $1518\frac{3}{4}$ Pu.
Die Frage ist: Wie groß ist der Kreisumfang? (Buch IV, Aufg. 17)

75/6 Beurteilung der Arbeitsleistung
Jetzt hat man einen Damm. Die untere Breite ist 2 Klafter, die obere Breite 8 Fuß, die Höhe 4 Fuß, die Länge 12 Klafter 7 Fuß.
Frage: Wie groß ist das Volumen? (Buch V, Aufg. 4)
Bei einer Beschäftigung im Winter ist die Arbeitsleistung eines Mannes 444 Kubikfuß.
Frage: Wie groß ist der benötigte Arbeitstrupp?

75/7 Kornhaufen
Jetzt hat man Hirse gespeichert auf ebener Erde. Unten ist der Umfang 12 Klafter; die Höhe ist 2 Klafter. Frage: Wie groß ist das Volumen, und
wieviel Hirse ist es? (Buch V, Aufg. 23)

75/8 Gerechte Steuereinschätzung
Jetzt liegt die gerechte Abgabe einer Getreidesteuer vor. Der Bezirk A mit 10000 Höfen geht einen Weg von 8 Tagen, Bezirk B mit 9500 Höfen geht einen Weg von 10 Tagen,

Bezirk C mit 12350 Höfen geht einen Weg von 13 Tagen, und Bezirk D mit 12200 Höfen geht einen Weg von 20 Tagen, damit jeder den Ort der Ablieferung erreicht. Alle 4 Bezirke geben als schuldige Abgabe 250000 Hu. Es sind 10000 Fuhren nötig.

Gewünscht wird, dass man den Weg in Meilen - ob fern oder nah - und die Zahl der Höfe - ob viel oder wenig - nimmt und es dementsprechend abliefert.
Frage: Wieviel ist beides, die Menge des Getreides und die Zahl der Fuhren?

75/9 Aus dem täglichen Leben
Jetzt hat man einen Teich; 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen I Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig.
Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich? (Buch VI, Aufg. 26)

76/1 Überschuss und Fehlbetrag
Jetzt hat man gemeinsam ein Rind gekauft. Geben 7 Familien zusammen je 190 aus, dann ist der Fehlbetrag 330; geben 9 Familien zusammen je 270 aus, dann ist der Überschuss 30.
Frage: Wieviel ist jedes, die Zahl der Familien und der Preis des Rindes? (Buch VII, Aufg. 4)

76/2 Eine Binse wächst am 1. Tag um eine Länge von 3 Fuß; ein Riedgras wächst am 1. Tag um eine Länge von 1 Fuß. Die Binse wächst täglich die Hälfte ihres Zuwachses vom Tag zuvor, das Riedgras wuchs täglich das Doppelte seines Zuwachses vom Tag zuvor.
Frage: In wieviel Tagen sind sie gleich lang, und wie groß ist die gleiche Länge? (Buch VII, Aufg. 11)

76/3 Man wog 5 Sperlinge und 6 Schwalben. Das Gewicht aller Sperlinge war schwer, das aller Schwalben leicht. Es wurden 1 Sperling und 1 Schwalbe vertauscht, da war das Gewicht gerade gleich. Das Gesamtgewicht der Schwalben und Sperlinge war 1 Pfund.
Frage: Wieviel wog eine Schwalbe und wieviel ein Sperling? (Buch VIII, Aufg. 9)

76/4 Der Durchmesser eines Brunnens ist 5 Fuß; seine Tiefe kennt man nicht. Auf dem oberen Rand des Brunnens steht eine Stange von 5 Fuß. Der Blick von der Spitze der Stange nach dem Rand des Wassers reicht in den Durchmesser um 4 Zoll hinein.
Frage: Wie groß ist die Tiefe des Brunnens? (Buch IX, Aufg: 24)

30 Dialoge

• "Guten Tag! Ich hätte gern einen Film!"
"24 mal 36"
"864. Aber warum fragen Sie?"

• Der Arzt zum Patienten: "Wieviel Stunden schlafen Sie am Tage?" "So ungefähr zwei

Stunden." "Das ist aber sehr wenig."
"Für mich ist es ausreichend", erwidert der Patient. "Ich schlafe ja in der Nacht zehn Stunden."

• Der Mathematiklehrer schreibt an die Tafel 2:2. "Was bedeutet das, Gerald?"
Gerald antwortet: "Unentschieden."

• Auf dem Heimweg erzählt Horst seinem Freund, dass er von einer 12 Meter hohen Leiter gestürzt sei.
Jochen staunt. "Und du hast dich nicht verletzt?"
"Nein, ich stand doch auf der ersten Sprosse!"

• Lehrerin: "Furchtbar, wieder alles falsch gerechnet! Hast du denn keine Schwester oder einen Bruder, der dir ein bisschen helfen könnte?" - "Nein, aber Mutti hat mir gesagt, nächste Woche kriegen wir einen."

• "Was geschah 1759" - "Da wurde Schiller geboren!"- "Gut! Und 1762?" - "Da wurde Schiller drei Jahre alt!"

• "Herr Ober, bringen Sie mir bitte ein Eisbein!" - "Wünschen Sie eins zu drei oder zu fünf Mark?" - "Was ist denn da für ein Unterschied?"- "Zwei Mark, mein Herr..."

• "Hör mal", sagte ein Junge zu seinem Schwesterchen, "die Hälfte von deiner Apfelsine musst du mir abgeben!" -
"Warum?"
"Wenn ich dich nicht am Zopf gezogen hätte, dann hättest du nicht geweint, und Mutti hätte dir keine Apfelsine gegeben."

31 Das Fünfzehnerspiel

In den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts breitete sich in der ganzen Welt ein Geduldsspiel wie eine Seuche aus - etwa so wie heute der Ungarische Würfel. Es war das Fünfzehnerspiel, in Deutschland damals auch unter dem Namen Boss Puzzle bekannt.

Ein Zeitgenosse, der Mathematiker H. Schubert, berichtete: "Monatelang bildeten die an dieses Spiel sich anknüpfenden Erörterungen eine stehende Rubrik in Journalen und Zeitungen. Selbst in Straßenbahnwagen konnte man die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen. Unternehmende Wirte luden zu einem Boss-Puzzle-Turnier ein, in welchem ein vom Wirt gestelltes Problem gegen Auszahlung einer hohen Belohnung gelöst werden sollte."

Schubert erinnerte sich auch, dass in Hamburg "die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlefieber ihrer Angestellten in Verzweiflung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mussten."
Bei S. Günther können wir lesen, "dass um 1880 im Deutschen Reichstagssaale auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Richtungen, darunter würdevolle alte Herren, saßen, die den Rednern gar keine Aufmerksamkeit schenkten, aber eifrig boss puzzleten"

Soll man nun Schlüsse bezüglich der Reden oder mancher Abgeordneten ziehen?
In zahlreichen Artikeln wurde das Spiel mathematisch behandelt, vor allem in den Jahren von 1879 bis 1883, wobei besonders Woolsey Johnson und William E. Story sowie H. Schubert zu nennen wären.

Wer das Fünfzehnerspiel noch nicht kennen sollte, ist bestimmt neugierig geworden, was für ein Spiel solche Spielleidenschaft hervorgerufen hatte:

Fünfzehn mit den Zahlen von 1 bis 15 versehene Steine $S1$, ..., $S15$ werden willkürlich in ein quadratisches Kästchen hineingelegt, so dass ein Feld F frei bleibt. (Die 16 Felder dieses Kästchens wollen wir entsprechend Bild 77/1 durchnummerieren.)

F1	F2	F3	F4
F5	F6	F7	F8
F9	F10	F11	F12
F13	F14	F15	F16

Bild 77/1

Lediglich durch Verschieben (nicht Herausnehmen!) der Steine soll nun versucht werden, die Stellung im Bild 77/2, die wir Stellung I nennen wollen, zu erreichen: S1 auf F1, S2 auf F2,..., S15 auf F15, F16 bleibt unbesetzt.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Bild 77/2

Im Sonntagsblatt einer New Yorker Zeitung bot Samuel Loyd, der als Erfinder dieses Spiels gilt, einen Preis von 1000 $ für die Lösung des folgenden Problems an:

Die Stellung II (Bild 77/3), in der gegenüber der Stellung I nur S14 und S15 vertauscht sind, soll nur durch Verschieben in die Stellung I überführt werden.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Bild 77/3

Als der Verleger zögerte, soll sich Loyd ohne weiteres bereit erklärt haben, den Betrag aus seiner eigenen Tasche zu hinterlegen. Tatsächlich gab es auch niemanden, der diesen Preis in Empfang nehmen konnte, obgleich Tausende von Leuten behaupteten, die gestellte Aufgabe gelöst zu haben. ... Das Geheimnis des Puzzles liegt in der Tatsache, dass sich niemand, der es gelöst hat, nachträglich daran zu erinnern vermag, wie die Lösung zustandegekommen ist.

Ein bekannter Zeitungsmann aus Baltimore berichtete, dass er mittags sein Büro verließ, um essen zu gehen - und von seinen entsetzten Angestellten lange nach Mitternacht aufgefunden wurde, wie er auf einem Teller kleine Tortenstückchen herumschob.

Wer Lust hat, kann sich ja aus kleinen Pappe-Quadraten ein Fünfzehnerspiel schnell herstellen und es auch einmal versuchen. Oder man nimmt ein handelsübliches Spiel und versucht es einmal umgekehrt, nämlich aus der Stellung I die Stellung II zu erhalten.
Nach einigem Probieren kommt ihr bestimmt zu dem Schluss, dass hier gilt: Studieren geht über Probieren!

Immerhin gibt es mehr als 1 Billion Möglichkeiten

$$15! = 1307674368000$$

die 15 Steine im Kästchen so anzuordnen, dass F16 leer ist, und mehr als 20 Billionen

$$16! = 20922789888000$$

Möglichkeiten gibt es, die Steine im Kästchen zu verteilen, wenn es keine Rolle spielt, wo sich das Leerfeld befindet.

(Wenn wir annehmen, dass das Verschieben in eine neue Stellung zwei Sekunden dauert, dann müssten wir mehr als 1 Million Jahre ohne Unterbrechung nur Spielsteine schieben, um alle Stellungen einmal zu erhalten - mal ganz abgesehen davon, dass die Sache noch einen theoretischen Haken hat.)

Versuchen wir es doch einmal mit einem Dreier-Spiel, denn dort haben wir nur $4! = 24$ Möglichkeiten, die drei Steine mit den Nummern 1, 2 und 3 im 2 × 2-Kästchen anzuordnen. Probiert doch einmal aus, was für Stellungen ihr aus der im Bild 78/1 gezeigten Anordnung nur durch Verschieben erhalten könnt!

Bild 78/1

1	2
3	

Bild 78/2

1	3
2	

Ihr werdet feststellen, dass es gar nicht 24, sondern nur 12 sind. Die Stellung im Bild 78/2 könnt ihr z. B. nicht erhalten.
Fangen wir, von dieser Stellung ausgehend, an herumzuschieben, so erhalten wir die restlichen 12.

Damit haben wir zwar für das 4 × 4-Kästchen unseres Fünfzehnerspiels noch nichts bewiesen, aber es kommt die Vermutung auf, dass es dort vielleicht ähnlich ist, dass auch hier die Stellung I nur aus der Hälfte aller Stellungen erreicht werden kann, es also Aufgaben gibt, die unlösbar sind.

Loyd konnte sich seiner Sache auch sicher sein, denn das genannte Problem von ihm gehörte zur Menge der unlösbaren Aufgaben. Unglücklicherweise hatte Sam Loyd auch dem Beamten des Patentamtes eine unlösbare Aufgabe unterbreitet.
Den Vorschriften gemäß musste er, um ein Patent auf das von ihm erfundene Spiel erhalten zu können, ein Arbeitsmodell vorlegen. Als sich der Beamte nach der Lösbarkeit der ihm gestellten Aufgabe erkundigte, musste Loyd zugeben, dass dies unmöglich ist.

"In diesem Fall", so lautete die Antwort, "kann von einem Arbeitsmodell nicht die Rede sein, und wenn kein Arbeitsmodell vorliegt, gibt es auch kein Patent."

Nach dem Spielen im 2×2-Kästchen könnte man auf die Idee kommen, es einmal mit einem 3×3-Kästchen zu versuchen. Wegen der $9! = 362880$ Anordnungsmöglichkeiten der 8 Steine lassen wir das aber lieber sein und versuchen es besser mit einem 2×3-Kästchen.

In diesem Fall gibt es zwar 720 Möglichkeiten, aber vielleicht nützt uns dessen Studium schon etwas, auch wenn wir nicht alle Möglichkeiten durchprobieren.
Wir haben hier also 5 Steine S1, ..., S5 und 6 Felder F1, ..., F6, die analog Bild 77/1 nummeriert seien.

Wir wollen die Felder F1, F2, F4, F5 als "linkes Quadrat" und die Felder F2, F3, F5 sowie F6 als "rechtes Quadrat" bezeichnen. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsstellung können wir es immer so einrichten, dass S4 auf F1 kommt und F4 durch irgendeinen anderen Stein besetzt ist.

Fall a) Befindet sich S2, S3 oder S5 auf F4, so können wir durch Verschieben innerhalb des "rechten Quadrates" S1 auf F2 bringen und erhalten damit die im Bild 79/1 dargestellte Stellung.

Bild 79/1

4	1	

Fall b) Ist F4 mit S1 besetzt, dann verschieben wir die Steine so, dass S4 auf F4, S1 auf F5 kommt und F1 mit irgendeinem Stein besetzt ist.
S1 verschieben wir nun innerhalb des "rechten Quadrats" auf einen der rechten Randplätze F3 oder F6.

Anschließend bringen wir innerhalb des "linken Quadrates" S4 wieder auf F1 (S1 bleibt dabei auf seinem Platz). Jetzt schieben wir innerhalb des "rechten Quadrates" S1 auf F2.

Bild 79/2

1	2	3
4	5	

Bild 79/3

1	2	5
4	3	

In jedem Falle können wir also S4 auf F1 und zugleich S1 auf F2 bringen.
Davon ausgehend können wir also stets S1 und S4 auf ihre richtigen Plätze F1 und F4 bringen.

Aus dem Studium des 2×2-Kästchens wissen wir, dass wir mit den restlichen drei Steinen stets entweder die Stellung im Bild 79/2 oder die Stellung im Bild 79/3 erreichen können.

Wir wenden uns wieder dem 4×4-Feld zu. Wir wissen nun, dass wir in einem 2×3-Feld bzw. 3×2-Feld, in dem das Leerfeld enthalten ist, stets die beiden Randplätze auf einer der Schmalseiten nach Wunsch besetzen können.
Stellen wir uns jetzt im 4×4-Kästchen jeweils nacheinander 2×3- bzw. 3×2-Kästchen abgeteilt vor, so können wir uns überlegen, dass wir von einer beliebigen Anfangsstellung ausgehend erst F1 und F2, dann F3 und F4, dann F5 und F6, dann F7

und F8, dann F9 und F13, schließlich F10 und F14 als "die beiden Randplätze" nehmen und so mindestens zu einer der folgenden beiden Stellungen I oder II gelangen können (natürlich muss man vorher immer erst die beiden jeweiligen Steine in den Sechserblock hineintauschen):

Bild 79/4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Bild 79/5

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	14	12	

Durch Verschieben innerhalb des stark umrandeten 2×3-Feldes des Bildes 79/5 könnt ihr nach einigen Zügen zu der Stellung im Bild 79/6 gelangen. Also gilt folgender

Bild 79/6

10	11	12
15	14	

Satz 1: Aus jeder Anfangsstellung lässt sich durch Verschieben stets die Stellung I oder II erzeugen.

Noch ungeklärt ist, ob sich die Stellungen I und II ineinander durch Verschieben überführen lassen.

Bild 79/7

1	7	5	9
3	12	8	14
2	15	4	10
13	11	6	

Wir stellen uns irgendeine Anfangsstellung vor, z. B. die im Bild 79/7, und notieren die Zahlen in der beim Lesen gewohnten Reihenfolge, wobei das Leerfeld dabei nicht berücksichtigt wird.

Im Beispiel: 1, 7, 5, 9, 3, 12, 8, 14, 2, 15, 4, 10, 13, 11, 6.

Wir führen nun einen Vergleich mit der natürlichen Reihenfolge der Zahlen von 1 bis 15 durch:
Die Zahl 1 steht an richtiger Stelle.
Die Zahl 7 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Das sind 5 Verstöße gegen die natürliche Reihenfolge. Solche Verstöße wollen wir Inversionen nennen.

Wir haben es hier also mit 5 Inversionen zu tun. Die nächste Zahl, die Zahl 5, steht im Widerspruch zur natürlichen Reihenfolge vor den Zahlen 2, 3 und 4. Also liegen 3 Inversionen vor. Die nun folgende Zahl 9 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 6 und 8, d. h. 5 Inversionen.
Insgesamt haben wir

$$0+5+3+5+1+6+3+6+0+5+0+1+2+1=38$$

Inversionen. Diese Inversionen liefern nun den Schlüssel, um zu entscheiden, ob eine Aufgabe des Fünfzehnerspiels lösbar oder unlösbar ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 2: Eine Stellung mit F16 als Leerfeld kann genau dann in die Stellung I überführt werden, wenn die Anzahl aller Inversionen eine gerade Zahl ist.

Diesen Satz 2 werden wir mittels der Sätze 3 und 4 beweisen. Aus Satz 2 folgt dann z. B., dass Stellung I nicht in Stellung II zu überführen ist: Stellung I hat keine Inversionen; Stellung II hat eine Inversion, die 15 steht vor der 14.

Wir wollen durch Satz 3 zunächst einmal die Frage beantworten, wie sich durch das Verschieben eines Steins die Anzahl der Inversionen ändert. Durch waagerechtes Verschieben ändert sich offensichtlich nichts. Schieben wir im Bild 80/1 den Stein mit der Nr. x senkrecht nach oben, so rückt er in der Reihenfolge drei Plätze vor.
Die Nummern der drei übersprungenen Steine (im Bild 80/1 schwarz gerastert) seien a, b, c ($a < b < c$).
Es sind folgende vier Fälle möglich:

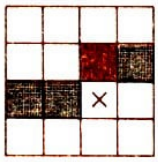


Bild 80/1

1. $x > a, b, c$; 2. $x < a, b, c$; 3. $a < b < x < c$; 4. $a < x < b < c$.

Stand Sx erst hinter den drei Steinen Sa, Sb, Sc, so steht Sx nach dem Hochziehen vor diesen drei Steinen.

Veränderung der Anzahl der Inversionen:
1. 3 neue; 2. 3 weniger; 3. 2 neue (wegen $x > a$,b) und 1 weniger (wegen $x < c$), insgesamt 1 mehr; 4. 2 weniger und 1 mehr, d.h. 1 weniger.

Eine entsprechende Überlegung können wir für den Fall durchführen, dass wir einen Stein senkrecht nach unten schieben. Insgesamt erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 3: Durch das waagerechte Verschieben eines Steines ändert sich die Anzahl der Inversionen nicht, durch das senkrechte Verschieben um eine ungerade Zahl.

Führen wir beim Fünfzehnerspiel einen Zug durch, so wandert dabei das Leerfeld um einen Platz in waagerechter oder senkrechter Richtung. Ist das Leerfeld anfangs auf einem bestimmten Platz und nach einer gewissen Anzahl von Zügen wieder an derselben Stelle, so muss jeder Zug in einer bestimmten Richtung durch einen anderen in entgegengesetzter Richtung aufgehoben worden sein, ein Zug nach rechts z. B. durch einen nach links.

Satz 4: Verschieben wir eine Stellung in eine andere mit dem Leerfeld auf demselben Platz, so haben wir dabei eine gerade Anzahl von waagerechten und eine gerade Anzahl von senkrechten Zügen durchgeführt.

Da eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen geradzahlig ist, können wir aus den Sätzen 3 und 4 schließen, dass sich eine Stellung mit dem Leerfeld auf F16 höchstens dann in Stellung I überführen lässt, wenn die Anzahl aller Inversionen gerade ist.

Ist umgekehrt die Anzahl der Inversionen irgendeiner Anfangsstellung gerade, so ist dann die Stellung II (mit 1 Inversion) nicht erreichbar. Nach Satz 1 müssen wir also in unserem Beispiel durch Verschieben die Stellung I erreichen können. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir haben somit beim Fünfzehnerspiel 2 Gruppen von Anfangsstellungen mit dem Leerfeld auf F16, die "lösbaren" und die "unlösbaren".
(Zu welcher Gruppe die Aufgaben der geschäftstüchtigen Wirte gehörten, können wir uns ja denken.)
Es bleibt uns noch die Vermutung zu bestätigen, dass diese Gruppen gleich groß sind.

Vertauschen wir bei irgendeiner Stellung S14 und S15 miteinander, so ändern wir die Inversionenanzahl um 1. Einer lösbaren (unlösbaren) Aufgabe können wir also genau eine unlösbare (lösbare) Aufgabe zuordnen, indem wir gerade die Steine 14 und 15 vertauschen.
Die der (lösbaren) Stellung im Bild 79/7 auf diese Weise zugeordnete (unlösbare) Stellung ist im Bild 81/1 zu sehen.

Wir können uns überlegen, dass dasselbe auch für die Vertauschung zweier beliebiger Steine gilt, und erhalten dann die folgende Entscheidungsregel für die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit einer Aufgabe, die auch in einigen Büchern über unterhaltsame Mathematik angegeben ist.

Satz 5: Eine beliebige Stellung mit dem Leerfeld auf Platz 16 lässt sich genau dann in die Stellung I verschieben, wenn sich die Stellung I durch eine gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Vertauschungen zweier Steine erhalten lässt.
Im 2 $\times$ 2-Feld haben wir die Steine zwar in alle möglichen Stellungen geschoben, aber wie sieht es dort mit der Gültigkeit der Sätze 1 bis 5 aus? Genauso könntet ihr einmal im 3 $\times$ 3-Kästchen untersuchen, welche Sätze dort in welcher Form gelten.

Ein richtiger Mathematiker hat oft erst dann Ruhe, wenn er allgemein für ein $n \times n$-Feld (n beliebige natürliche Zahl) das Problem gelöst hat.
Bei Wilhelm Ahrens und auch bei Gerhard Kowalewski könnt ihr euch noch ausführlicher über das Fünfzehnerspiel und gewisse Abwandlungen davon belesen. Sicher lag es nicht nur an der durch die Mathematiker geschaffenen Klarheit, dass die Spielwut allmählich wieder abflaute.

1	7	5	9
3	12	8	15
2	14	4	10
13	11	6	

Bild 81/1

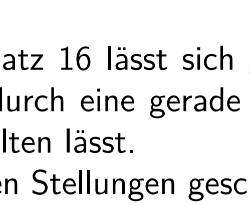


Bild 81/2

Wir wollen uns abschließend folgendem Schiebeproblem, das auch auf Sam Loyd zurückgeht, zuwenden: Wir stellen uns ein wie im Bild 81/2 mit Rechtecken bzw. Quadraten besetztes 4 $\times$ 5-Feld vor und wollen versuchen, das Quadrat 1 in die rechte untere Ecke zu schieben, dorthin, wo sich jetzt die Steine 8 und 9 befinden. Probiert es doch einmal!

Literatur
W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Bd. 2. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1918.
S. Günther: Referat in "Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften"XV, Nr. 3(67), 1916, S. 210.
G. Kowalewski: Mathematica delectans. H. 1: Boss - Puzzle und verwandte Spiele. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1921.

32 Eine Aufgabe und drei Lösungen

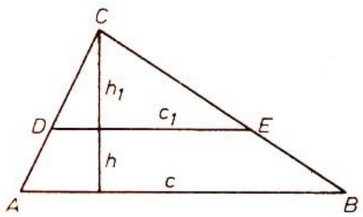
32.1 Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rascher zum Ziel

Rainer, Torsten und Uwe lösen gerne knifflige Mathematikaufgaben. Ihre Temperamente sind aber sehr unterschiedlich, und das zeigt sich auch beim Aufgabenlösen.
Rainer rechnet gerne, und er überlegt nicht lange, ehe er damit beginnt. Daher kommt er oft erst nach manchem Umweg zum Ziel.

Uwe dagegen denkt lange nach, ehe er mit seiner Arbeit beginnt. Er versucht, sich an alles zu erinnern, was mit der Aufgabe in Verbindung stehen könnte. Und auch Torsten versucht zuerst, die Aufgabe gut zu durchdenken, ehe er einen Lösungsversuch macht. Wir wollen sehen, wie sich die drei Freunde bei der Lösung folgender Aufgabe verhalten.

82/1 Ein Dreieck soll durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei Figuren mit gleichem Inhalt zerlegt werden.

Zunächst entwerfen sie gemeinsam eine Skizze (siehe unten) und führen Bezeichnungen für Eckpunkte, Seiten und Höhen ein. Sie erkennen, dass das gegebene Dreieck ABC durch die Parallele DE in ein Trapez $ABED$ und ein Dreieck DEC zerlegt wird. Die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck ABC sei c bzw. h, die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck DEC sei c_1 bzw. h_1.



Sie vereinbaren, dass die Aufgabe dann als gelöst gilt, wenn h_1 bestimmt wurde, d. h. ausgedrückt wurde durch h und evtl. durch c. Dann kann die Höhe des Trapezes als Differenz $h - h_1$ ermittelt werden, man könnte dann auch angeben, in welchem Verhältnis die Höhe h von DE geteilt wird -, kurz, man könnte dann die geforderte Parallele zeichnen.

Und nun setzt jeder für sich die weitere Lösung fort.

1. Rainer überlegt nicht lange und schreibt zunächst einmal Flächeninhaltsformeln auf:

$$A_{Dr} = \frac{g \cdot h}{2} \qquad , \qquad A_{Tr} = \frac{a+c}{2} h$$

In der Aufgabe war verlangt, dass die beiden Teilfiguren inhaltsgleich sein sollen. Er erhält so die Gleichung

$$A_{1,Dr} = A_{Tr}$$

Nun verwendet er die vereinbarten Variablen:

$$\frac{c_1 \cdot h_1}{2} = \frac{c + c_1}{2}(h - h_1)$$

und erhält

$$h_1 = \frac{c + c_1}{c + 2c_1} h \tag{1}$$

Hiermit kann nun Rainer nicht viel anfangen, denn auch c_1 ist nicht bekannt. Er überlegt, ob es nicht eine zweite Gleichung gibt, in der h_1 und c_1 vorkommen.
Diese findet er, indem er berücksichtigt, dass beide Teilfiguren zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie das große Dreieck. Also:

$$A_{1,Dr} + A_{Tr} = A_{Dr} \qquad \text{oder} \qquad \frac{c_1 h_1}{2} + \frac{c + c_1}{2}(h - h_1) = \frac{c \cdot h}{2}$$

und hieraus

$$c_1 = \frac{c \cdot h_1}{h} \tag{2}$$

Rainer rechnet nun unbeirrt weiter und setzt die Gleichung (2) in die Gleichung (1) ein.

$$h_1 = \frac{c + \frac{c \cdot h_1}{h}}{c + 2 \cdot \frac{c \cdot h_1}{h}}$$

Um h_1 zu erhalten, muss er wiederum auflösen, und er erhält schließlich

$$h_1 = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

Rainer wundert sich, dass Torsten und Uwe längst das gleiche Ergebnis gefunden haben. Bei seinen umfangreichen Rechnungen hatte er sich zudem auch noch verrechnet.

2. Torsten führt die Lösung mit folgender Überlegung weiter: Jede der beiden Figuren, Trapez und Dreieck, sollen gleichen Inhalt haben. Dann beträgt der Inhalt jeder von ihnen die Hälfte des Inhaltes vom großen Dreieck.

$$\begin{aligned} A_{1,Dr} &= \frac{1}{2} A_{Dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2}; \qquad \text{d.h.} \quad \frac{c_1 \cdot h_1}{2} \\ A_{Tr} &= \frac{1}{2} A_{Dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2}; \qquad \text{d.h.} \quad \frac{c + c_1}{2}(h - h_1) \end{aligned}$$

Er entschließt sich nun, mit dem kleinen Dreieck weiterzuarbeiten, weil in seiner Flächeninhaltsformel weniger Variable auftreten und weil die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEC$ sich besser miteinander vergleichen lassen als etwa Dreieck und Trapez.
Dieser Vergleich der beiden Dreiecke führt Torsten zu der Erkenntnis, dass nach Konstruktion diese beiden Dreiecke ähnlich sind, und in ähnlichen Dreiecken haben entsprechende Strecken das gleiche Verhältnis. Es gilt insbesondere

$$\frac{c_1}{c} = \frac{h_1}{h} \tag{3}$$

Aus der Gleichung (1) ermittelt er damit schließlich

$$\frac{c \cdot h_1^2}{h_1} = \frac{c \cdot h}{2}; \qquad h_1^2 = \frac{1}{2}h^2; \qquad h_1 = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

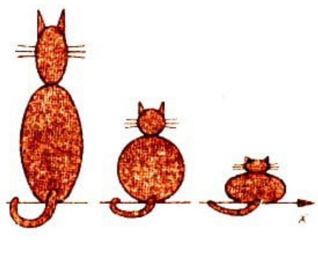
3. Uwe aber überlegt vor der Rechnung lange. Er erkennt dabei:
Es soll eine Parallele zu einer Dreiecksseite gezeichnet werden; dann ist das entstehende Dreieck dem gegebenen Dreieck ähnlich. Die Aufgabe enthält eine Aussage zum Flächeninhalt. Von Flächeninhalten ähnlicher Figuren weiß er, dass sie sich wie die Quadrate entsprechender Strecken in den Figuren verhalten. D.h.

$$\frac{A_{1,Dr}}{A_{Dr}} = \frac{h_1^2}{h^2}$$

Die beiden Teilfiguren sollen gleichen Flächeninhalt haben, also ist der Inhalt des kleinen Dreiecks halb so groß wie der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Das Verhältnis der Flächeninhalte ist $1 : 2$. Er erhält somit sehr rasch

$$\frac{h_1^2}{h^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{und weiter} \qquad h_1 = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

33 Allerlei Gestrecktes



Wir kennen aus dem Mathematikunterricht die zentrische Streckung. Wenn ein Streckungszentrum Z und ein Streckungsfaktor $k \neq 0$ vorgegeben sind, dann wird durch die damit festgelegte zentrische Streckung jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt zugeordnet.
Dabei kann man feststellen:

(1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
(2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.
(3) Das Bild einer Strecke ist k-mal so lang wie die Strecke selbst.
(4) Das Bild eines Winkels ist so groß wie der Winkel selbst.

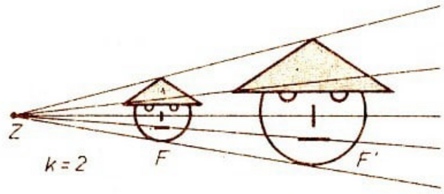


Bild 84/2

Im Bild 84/2 ist eine Figur F und ihr Bild F' bei der zentrischen Streckung $(Z; k = 2)$ dargestellt. Nun wollen wir einmal untersuchen, welche Bilder der Figur F bei anderen Arten von Streckungen zugeordnet werden.

1. Als erstes betrachten wir Streckungen in nur einer Richtung. Sie können festgelegt werden, indem man eine bestimmte Gerade g vorgibt und einen Streckungsfaktor $k > 0$. Das Bild eines Punktes P, der nicht auf g liegt, wird dann wie folgt konstruiert:

a) Man zeichnet durch P eine Senkrechte zu g. Sie werde mit h bezeichnet, ihr Schnittpunkt mit g sei Q.
b) Auf h trägt man von Q aus in Richtung P das k-fache der Strecke $\overline{QP}$ ab und erhält so als Endpunkt das Bild P' von P. Die Punkte von g werden auf sich selbst abgebildet.

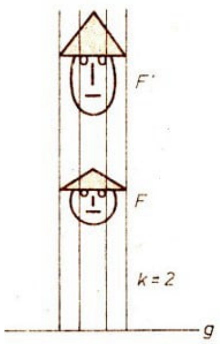


Bild 84/3

Im Bild 84/3 ist die Figur F und ihr Bild F' bei einer Streckung in nur einer Richtung dargestellt (Streckung von g aus mit dem Faktor $k = 2$).
Welche Eigenschaften hat diese Streckung? Wir können aus dem Bild erkennen:

(1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
(2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.
(3) Das Bild einer Strecke ist so lang wie die Strecke selbst oder länger, aber höchstens k-mal so lang.
(4) Das Bild eines Winkels hat im allgemeinen nicht die Größe des Winkels selbst. (Auf Beweise wollen wir verzichten.)

2. Wir untersuchen jetzt, was man durch Nacheinanderausführen zweier Streckungen in zueinander senkrechten Richtungen (mit gleichem Streckungsfaktor k) erhält.

Im Bild 85/1 ist die Figur F zunächst von g aus und danach von h aus mit dem Faktor $k = 2$ gestreckt. Was stellen wir fest?
Das Bild lässt erkennen, dass die Nacheinanderausführung der beiden Streckungen zu demselben Resultat führt wie eine zentrische Streckung, bei der als Streckungszentrum der Schnittpunkt von g und h und als Streckungsfaktor ebenfalls $k = 2$ gewählt wird.

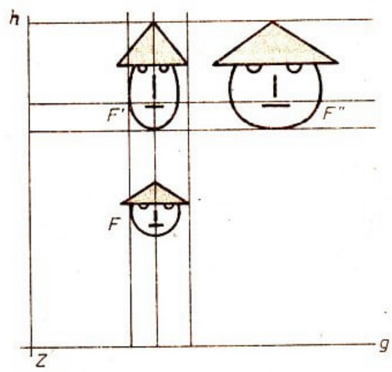
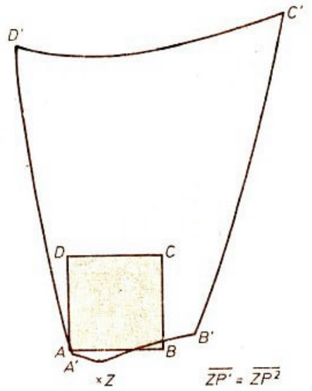


Bild 85/1

3. Als letztes betrachten wir eine zentrische Streckung mit veränderlichem Streckungsfaktor. Dabei legen wir fest, dass zu jedem Punkt P als Streckungsfaktor der Zahlenwert

der Streckenlänge von $\overline{ZP}$ gehört.
Der Faktor k hängt also davon ab, wie weit P vom Streckungszentrum entfernt ist. Wenn P drei Längeneinheiten von Z entfernt liegt, dann ist der Streckungsfaktor für P gleich 3, beträgt die Entfernung eine halbe Längeneinheit, dann ist er $\frac{1}{2}$ usw.
Die Konstruktion des Bildpunktes erfolgt ansonsten wie bei der üblichen zentrischen Streckung.



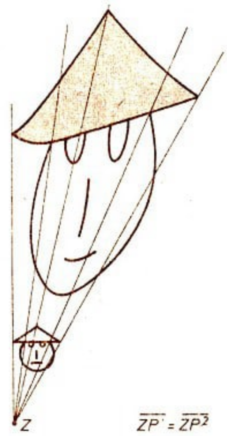
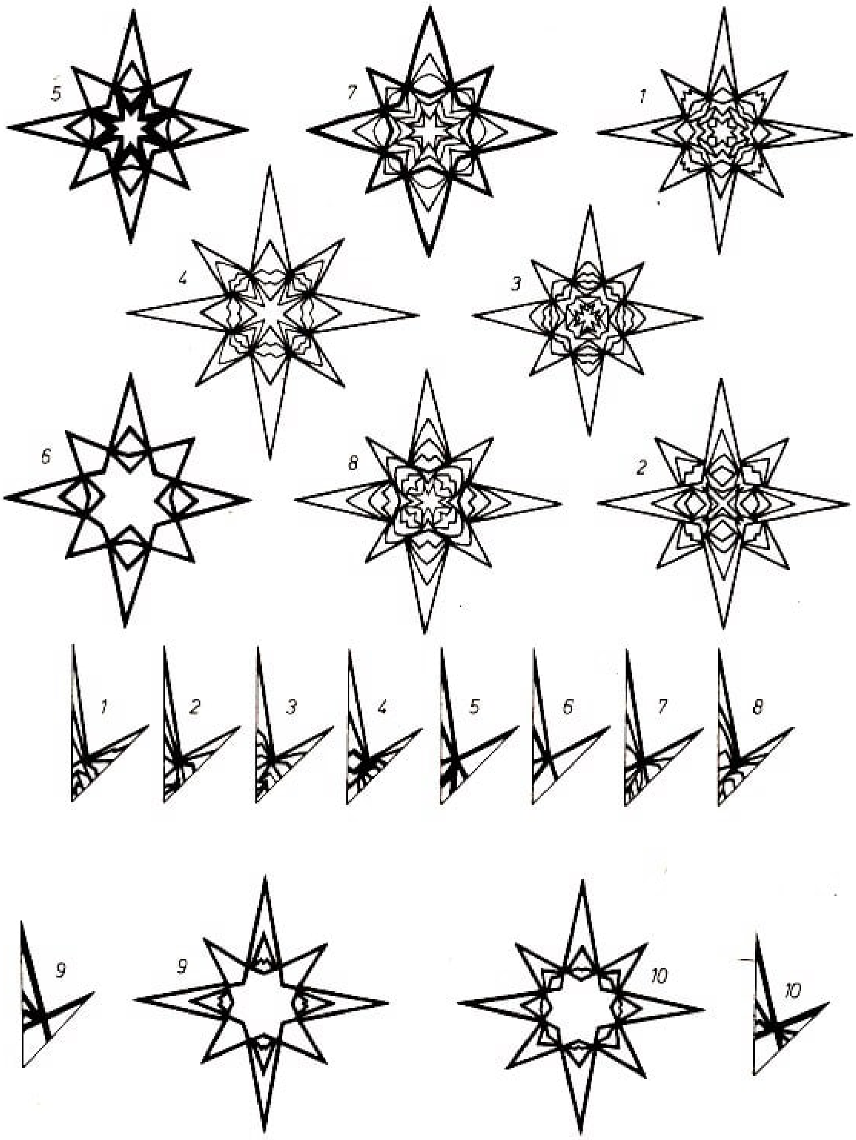


Bild 85/2, 85/3

Wir wählen zunächst einmal ein Quadrat als Originalfigur und konstruieren die Bildfigur (Bild 85/2). Wie man erkennt, ist das Bild einer Strecke (bzw. einer Geraden) im allgemeinen keine Strecke (bzw. Gerade) mehr, die ursprüngliche Figur wird ungleichmäßig verzerrt.

Wendet man eine derartige Streckung auf die Figur F aus den Bildern 84/2 bis 85/1 an, so kann das Ergebnis wie im Bild 85/3 aussehen. (Die Form der Bildfigur hängt dabei sehr von der Lage des Streckungszentrums Z in bezug auf F ab.)

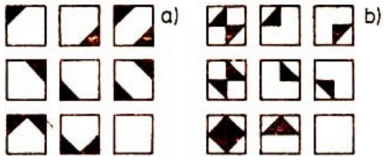
34 Mit Schere und Papier



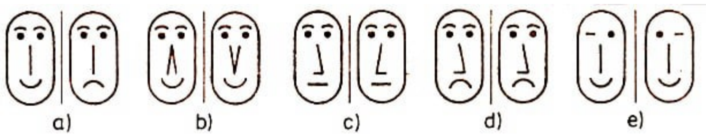
35 Geometrische Plaudereien

Aufgaben

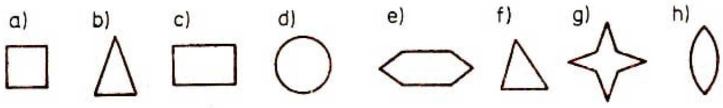
87/1 Setze die passenden Zeichen in die leeren Quadrate der folgenden Bilder!



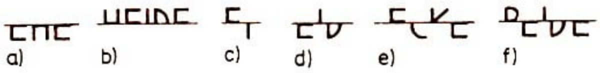
87/2 Untersuche die folgenden Bilder a bis e auf Achsensymmetrie! In welchem Bild ist die eine Figur sicher nicht das Spiegelbild der anderen bezüglich der eingezeichneten Geraden?



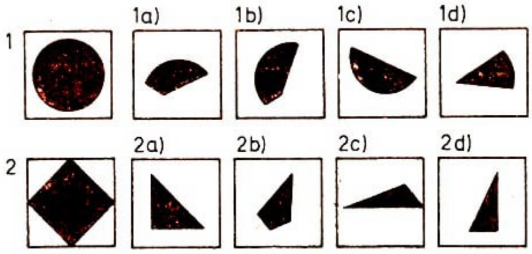
87/3 Zeichne, falls möglich, in jede der angegebenen Figuren alle Symmetrieachsen ein!



87/4 Welches Wort erhält man, wenn man in den folgenden Bildern a bis f jeweils die Buchstabenfragmente an der Geraden spiegelt?



87/5 Das Bild 1 soll aus den Figuren in den Bildern la bis ld zusammengesetzt werden. Welche Bilder werden benötigt? Verfahre entsprechend mit dem Bild 2!

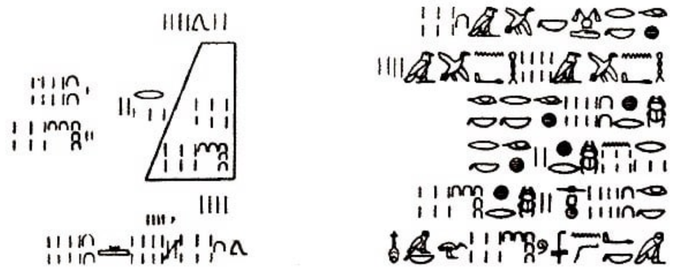


36 Der Moskauer mathematische Papyrus

36.1 Aus der Geschichte der altägyptischen Mathematik

In jener weit zurückliegenden Zeit, als der Moskauer mathematische Papyrus entstand, war das alte Ägypten ein Agrarstaat.
Seine natürliche landwirtschaftliche Nutzfläche war sehr klein und reichte zur Versorgung der Bevölkerung nicht aus. Um sie zu vergrößern, baute man Bewässerungskanäle, legte Sümpfe trocken und errichtete Dämme. Das neu gewonnene Land wurde in Felder aufgeteilt, deren Grenzen bestimmt werden mussten, um das Eigentumsrecht zu klären.

Zur Lagerung des geernteten Getreides wurden Speicher errichtet. Dazu musste man wissen, wie man die Größe der erzielten Ernte berechnet und wie die Ernte zu verteilen war.



Das folgende Bild zeigt zwei Spalten des Moskauer Papyrus mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4, und Höhe 6 Ellen.
Oben: der hieratische Text; unten: die Umschrift in Hieroglyphen. Der Text lautet:
(1) Addiere du zusammen diese 16
(2) mit dieser 8 und mit dieser 4.
(3) Es entsteht 28. Berechne du
(4) 4 von 6. Es entsteht 2.
(5) Rechne du 28 2 mal. Es entsteht 56.
(6) Siehe: er ist 56. Du hast richtig gefunden.

So erwuchsen aus der täglichen Praxis allmählich eine Vielzahl mathematischer Aufgaben. Die dabei geschaffenen mathematischen Methoden gestatteten es den alten Ägyptern, neben den bereits erwähnten Problemen bei der Flächenvermessung von Feldern und beim Bau von Dämmen oder Getreidespeichern auch solche zu lösen, die bei Bauarbeiten, der Erhebung von Steuern, der Umwandlung von Gewichts- und Flüssigkeitsmaßen ineinander u.a.m. auftraten.

Wir besitzen heute nur noch einige wenige Texte mathematischen Inhalts. Sie sind auf sprödem Papyrus geschrieben, einem Material, das aus den Stengeln der gleichnamigen Pflanze hergestellt worden ist.
Von der Vielzahl der einmal wahrscheinlich vorhandenen Werke blieben nur jene erhalten, die in Pyramiden aufbewahrt wurden, damit die Seelen der dahingeschiedenen hochgestellten Persönlichkeiten, die in diesen Gräbern bestattet worden sind, ihre geliebten Bücher auch im Jenseits lesen konnten.

Die umfangreichste, uns bekannte altägyptische Aufgabensammlung ist der Papyrus Rhind. Er erhielt diesen Namen nach seinem Besitzer, einem englischen Archäologen.
Seine Länge beträgt 5,25 m und seine Breite 33 cm. In ihm sind 87 Aufgaben zusammengestellt.
Der Papyrus Rhind ist heute im Britischen Museum in London deponiert.

Ein anderer Text mit einer Länge von 5,44 m, einer Breite von 8 cm und 25 Aufgaben befindet sich im Staatlichen Museum der darstellenden Künste "A. S. Puschkin" in Moskau. Deshalb wird er der Moskauer Papyrus genannt.

Beide Texte gehören etwa in die gleiche Zeit, in die Epoche des Mittleren Reiches (2000 bis 1800 v.u.Z.). Die Kultur des Mittleren Reiches hatte ein hohes materielles und geistiges Niveau erreicht. Schreiber überlieferten im Dienste des Staates oder der Tempel wissenschaftliche Kenntnisse. Sie wurden an Spezialschulen ausgebildet und genossen bestimmte Privilegien. In einem der Papyri kann man über sie lesen:

"Diese Pflicht steht über allen anderen und nichts gleicht ihr in diesem Land."
"Ein Schreiber leitet alle anderen. Die Schreibarbeiten sind nicht mit Steuern belegt." heißt es in einem anderen Text.

Beide mathematische Papyri waren für den Unterricht bestimmt. Der Moskauer Text entstammt der Feder eines Schülers einer Schreiberschule. Er entstand zwischen 1800 und 1600 v. u. Z. und ist eine Kopie einer Vorlage aus etwa dem 20. Jh. v. u. Z.

Der Papyrus Rhind, in dem das Material systematischer angeordnet ist, geht auf ein Werk aus der zweiten Hälfte des 19. Jh. v. u. Z. zurück und wurde in der heutigen Form von einem Schreiber namens A'hmose angefertigt. Neben diesen beiden fraglos wichtigsten mathematischen Papyri sind uns noch einige kleinere Auszüge aus anderen Werken überliefert, auf die wir hier aber nicht eingehen werden.

Da die uns bekannten mathematischen Schriften alle einer Periode angehören, haben wir kaum Vorstellungen über die Entwicklung der altägyptischen Mathematik.
Aber wir wissen, dass es bereits im 3. Jt. v. u. Z. eine entwickelte Schrift, ein Zahlen-, ein Maßsystem und einen Kalender gab. Das Jahr wurde in 12 Monate zu 30 Tagen geteilt. Das Ende des Jahres beschlossen fünf zusätzliche Tage. Diese Jahreseinteilung stammt aus der Zeit, in der die ersten Pyramiden gebaut wurden, die die Griechen zu den sieben Weltwundern zählten.

Betrachtet man die altägyptische Mathematik, so erscheint sie vom Standpunkt selbst der Schulmathematik aus gesehen als ziemlich primitiv, gelangten doch die Ägypter über die Arithmetik gebrochener Zahlen, über lineare und unvollständige quadratische Gleichungen nicht hinaus.

Da ein Begriff für Gleichungen fehlte, waren diese auch nicht von der Art, wie wir es heute gewöhnt sind. In ihrer Mehrheit tragen die Aufgaben einen konkreten Charakter. Im Mittelpunkt des Interesses standen die Rechnungen.

Das Zahlensystem war recht einfach. Spezielle Zeichen gab es lediglich für die Zehnerpotenzen bis zu Zehnmillionen.
Die anderen Zahlen wurden additiv gebildet.

Bei 345 beispielsweise wiederholt sich das Zeichen für Hundert dreimal, das Zeichen für Zehn viermal und das Zeichen für Fünf fünfmal. Addition und Subtraktion werden in den Papyri nicht erläutert, da sie offensichtlich zu einfach waren.
Wenn man addiert, so fügt man dem einen Summanden die Anzahl der Zeichen für die Einer, Zehner, Hunderter usw. des zweiten Summanden einfach hinzu.
Dabei geht man von einer Potenz zur nächst höheren über, wenn zehn Zeichen der niederen geschrieben worden sind.

Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl wurde auf das Verdoppeln und somit auf die Addition zurückgeführt.
Beispiel (mit modernen Zahlzeichen)

29×21	/1	29
	2	58
	/4	116
	8	232
	16	464
	Ergebnis: 21	609

Die Schrägstriche kennzeichnen die notwendigen Summanden. Ihre Summe entspricht dem Produkt der beiden Faktoren.
Mitunter führte man die Multiplikation anstelle mit 2 mit 5 und 10 aus.

Die Division wurde als eine Art Umkehrung der Multiplikation verstanden.
Um 297 durch 11 zu teilen, stellte sich ein Schreiber offenkundig die Frage: Mit welcher Größe muss man 11 multiplizieren, um 297 zu erhalten?
Modern geschrieben ergibt sich:

/1	11
/2	2
4	44
/8	88
/16	176
Ergebnis: 27	297

War der Quotient keine ganze Zahl, sondern eine gemischte Zahl oder ein Bruch, ersetzten die altägyptischen Rechner die Division $m : n$ durch die Multiplikation $m \cdot \frac{1}{n}$.
Dadurch gelangten sie zu einer Klasse von Brüchen, deren Zähler Eins ist.
Derartige Brüche werden Stammbrüche genannt und modern, dem altägyptischen Vorgehen angepasst, als $\overline{n}$ geschrieben.
Zu dieser Klasse zählten die Ägypter auch den Bruch $\frac{2}{3}$, der durch $\overline{\overline{3}}$ gekennzeichnet wird.

Da alle anderen Brüche durch diese Stammbrüche dargestellt wurden, mussten sie in Summen von Stammbrüchen zerlegt werden.
Diese Aufgabe nun hat keine eindeutige Lösung. Aus diesem Grunde entstanden als Hilfsmittel spezielle Tabellen mit derartigen Zerlegungen.

Auf das Potenzieren und Radizieren stießen die Schreiber im alten Ägypten bei der Berechnung quadratischer Flächen, kubischer Körper oder der Seite eines Quadrates aus seiner Fläche. Sie erläuterten diese Operationen jedoch nicht speziell und schufen auch keine besondere Terminologie dafür.

In den Papyri gibt es Aufgaben, die heute im Algebraunterricht in der Schule behandelt werden: lineare Gleichungen mit einer Unbekannten, unvollständige quadratische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen (Folgen).

Beispiel: Aufgabe 19, Moskauer Papyrus
"Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?

Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6. Rechne du mit $1\frac{1}{2}$ um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$. Berechne du von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich. Du hast richtig gefunden."

Modern ausgedrückt bedeutet das:

	$\frac{3}{2}x + 4 = 10$
1.Schritt	$\frac{3}{2}x + 4 - 4 = 10 - 4 = 6$
2.Schritt	$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$
3.Schritt	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$
Lösung	$x = 4$

In der Aufgabe 6 des Moskauer Papyrus werden die Seiten eines Rechtecks gesucht, wenn die Breite 7 der Länge beträgt und die Fläche 12 ist. In moderner Form heißt das, dass die unvollständige quadratische Gleichung $ax^2 = b$ zu lösen ist.

Der altägyptische Rechner bewältigt dieses Problem verbal mit der Methode des "falschen Ansatzes". Den Schreiber nimmt zuerst an, dass die Länge 1 ist. Dann wird die Breite $\frac{3}{4}$.

Ebenso groß wird der Flächeninhalt. Aber in der Aufgabe wurde gefordert, dass er 16 mal größer sein soll, was bedeutet, dass die Länge gleich $\sqrt{16} = 4$ und die Breite 3 sein müssen.

Die Aufgabe 79 im Papyrus Rhind führt zur Summe einer geometrischen Reihe:

"Inventar eines Haushaltes:
7 Häuser 2401 Getreideähren
49 Katzen 16807 hekat (ein Getreidemaß)
343 Mäuse zusammen: 19607."

Diese Aufgabe ist dafür berühmt, dass sie sich mit geringfügigen Änderungen in der Formulierung bei verschiedenen Völkern zu unterschiedlichen Zeiten nachweisen lässt.

In der Geometrie bestimmten die alten Ägypter Flächeninhalte und Volumina von Körpern. Dabei erzielten sie gute Ergebnisse, ohne jedoch die Geometrie zu einer selbständigen mathematischen Disziplin zu entwickeln.
Probleme zur Ermittlung von Flächeninhalten ebener Figuren erwuchsen aus der Praxis der Landvermessung. Da keine Spezialausdrücke wie "Fläche" oder "Figur" vorhanden waren, sprach man in den Aufgaben von Feldern, von Flächenstücken mit festen Grenzen oder mit fester "Breite" und "Länge".

Die Flächen eines Rechtecks, eines Dreiecks oder eines Trapezes werden noch heute nach denselben Formeln ermittelt, wie es damals geschah. Ein beliebiges Viereck berechnete man approximativ

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

wo a und c, b und d die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks sind. Die Kreisfläche bestimmte man mit der Formel

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

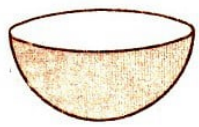
wo d der Durchmesser ist. Das entspricht der ziemlich guten Näherung von 3,1605 für π.

Das Volumen vieler Körper, z. B. des Würfels, des Parallelepipeds, des Prismas oder des Zylinders, berechneten die Ägypter als Produkt von Grundfläche und Höhe. Das war nötig, um die Getreidemengen in Speichern und Lagern derartiger Form feststellen zu können.

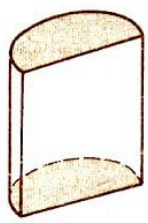
Obwohl seit der Veröffentlichung des Moskauer Papyrus einige Jahrzehnte vergangen sind, streiten sich die Mathematikhistoriker noch heute und stellen Hypothesen auf, wie diese oder jene Regel gefunden worden ist, wie diese oder jene Formulierung einer einzelnen Aufgabe zu deuten ist. Das betrifft z. B. die zehnte Aufgabe des Moskauer Papyrus.

V. V. Struve übersetzte diese Aufgabe so:
"Form der Berechnung eines Korbes, wenn man dir nennt einen Korb mit einer Mündung zu $4\frac{1}{2}$ in Erhaltung. O lass mich wissen seine (Ober)fläche.
Berechne du $\frac{1}{9}$ von 9, weil ja der Korb die Hälfte eines Eies ist. Es entsteht 1. Berechne du den Rest als 8. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 8. Es entsteht $\overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{18}$.
Berechne du den Rest von dieser 8 nach diesen $\overline{\overline{3}} + \overline{6} + \overline{18}$. Es entsteht $7 + \overline{9}$. Rechne du mit $(7 + \overline{9})4\frac{1}{2}$ mal. Es entsteht 32. Siehe: es ist seine (Ober)fläche. Du hast richtig gefunden."

In der Interpretation von V. V. Struve wird der in der Aufgabe genannte "Korb" zu einer Halbkugel, und es ergibt sich die exakte Formel für die Oberfläche der Halbkugel.



Diese Deutung wird von einigen Mathematikhistorikern geteilt. Zu ihnen gehören B. L. van der Waerden und R. Gillings.



E. T. Peet übersetzte die Bedingungen dieser Aufgabe anders. Seiner Meinung nach ist der "Korb" ein halber Zylinder. Damit ergibt sich die richtige Formel für die Mantelfläche eines Halbzylinders:

Eine dritte Erklärung gab O. Neugebauer. Er fasst den "Korb" als einen kuppelförmigen Getreidespeicher auf, wie er auf ägyptischen Zeichnungen abgebildet ist. Die Berechnung interpretiert er als Approximation.

Eine bemerkenswerte Leistung der altägyptischen Mathematik ist die exakte Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche, die in Aufgabe 14 des Moskauer Papyrus enthalten ist:

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

h Höhe; a, b Seiten der Deck- und Grundfläche.

Wir haben gesehen, dass die Mathematik im alten Ägypten sich nicht in Arithmetik, Algebra und Geometrie aufgliederte, sondern sich als eine Menge von Regeln zur Lösung, einfachster Aufgaben, die hauptsächlich aus der Praxis genommen worden sind, darbietet.
Das Ergebnis wird häufig empirisch, durch Versuche gefunden. Dadurch lässt sich die Schwerfälligkeit vieler Regeln sowie die Tatsache erklären, dass die Lösungen nicht immer auf dem kürzesten Weg ermittelt werden.

Gleichzeitig damit wurde Anfang des 2. Jahrt. v. u. Z. eine intensive theoretische Überarbeitung der Lösungsmethoden durchgeführt. Die Aufgaben selbst wurden in zunehmendem Maße verallgemeinert und nahmen einen abstrakten Charakter an. Die Mathematik Altägyptens beeinflusste ohne Zweifel die weitere Entwicklung der Wissenschaft, vor allem die altgriechische Mathematik.

37 Eine historische Mathematikaufgabe

Der im 3. Jahrhundert v. u. Z. lebende Gelehrte Archimedes gilt unbestritten als der bedeutendste Mathematiker der Antike. Er wirkte vorwiegend in seiner Vaterstadt Syrakus und verkehrte dort am Hofe der Könige Hieron II. und Gelon. Mit vielen Gelehrten seiner Zeit stand er im Briefwechsel.

Der Architekt Vitruvius, der etwa 200 Jahre später zur Zeit des Kaisers Augustus in Rom lebte, hat die folgende Anekdote über Archimedes überliefert.

Der König Hieron II. von Syrakus übergibt einem seiner Goldschmiede einen Klumpen reinen Goldes. Der Handwerksmeister soll daraus einen Weihkranz herstellen. Als die Arbeit ausgeführt ist, befürchtet der König jedoch, dass der Schmied im Innern des Kranzes einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt habe.

Er wendet sich an Archimedes und bittet ihn, die Sache zu untersuchen, also festzustellen (ohne das Kunstwerk zu zerbrechen), ob Silber für den Kranz verwendet worden sei.

Der Gelehrte kann das Problem nicht sogleich lösen. Als er sich eines Tages in der Badewanne waschen will, bemerkt er beim Einsteigen in die mit Wasser ganz gefüllte Wanne, dass wohl ebenso viel Wasser überläuft, wie sein Körper verdrängt.
Da kommt ihm plötzlich der Gedanke, dass man die vom König gestellte Aufgabe lösen muss, indem man den Kranz in ein voll mit Wasser gefülltes Gefäß taucht und die überlaufende Wassermenge bestimmt. In der Freude über seine Entdeckung eilt Archimedes nackt aus dem Bade auf die Straße und ruft:

"Heureka, heureka! (Ich hab's gefunden, ich hab's gefunden !)"

Wie konnte Archimedes die Aufgabe lösen? Kann man das Gold-Silber-Mischungsverhältnis des Kranzes berechnen?

Auf dem Gelände der Technischen Hochschule "Otto von Guericke" in Magdeburg wurden Plastiken berühmter Physiker und Mathematiker aufgestellt. Das Bild zeigt Archimedes von Syrakus.

38 Hundert Jahre Nullmeridian und Greenwich-Zeit

Die Beschreibung von Punkten der Erdoberfläche durch geographische Koordinaten (Länge und Breite) geht schon auf die Antike zurück. Während jedoch die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, ist die Bestimmung der geographischen Länge prinzipiell schwieriger, da infolge der Erdumdrehung alle auf einem Breitenkreis liegenden Punkte der Erde in gewissem Sinne gleichberechtigt sind.

So weist die Karte der sich um das Mittelmeer gruppierenden damals bekannten Welt des griechischen Geographen, Astronomen und Mathematikers Klaudios Ptolemaios (um 80 bis um 160) zwar relativ genaue Breitengrade auf, jedoch eine erhebliche Vergrößerung der Längendifferenzen gegenüber der Wirklichkeit.
(Das so ins Mittelalter falsch überlieferte Weltbild täuschte dem Kolumbus und seinen Zeitgenossen eine viel zu geringe Entfernung von Europa in Richtung Westen nach China und Indien vor, ermutigte somit wesentlich zur Fahrt des Kolumbus und bestärkte ihn in seinem Glauben, Teile von Indien entdeckt zu haben.)

Mit zunehmender Hochseeschiffahrt wurde das Problem der Längenbestimmung immer wichtiger. Eine erste Methode bestand darin, bestimmte astronomische Ereignisse, z. B. die Position des Mondes relativ zu benachbarten Sternen, deren Eintreten für einen bestimmten Ort der Erde (im folgenden als Eichort bezeichnet) im voraus bekannt war, am Ort unbekannter Länge zu beobachten und aus der Zeitdifferenz auf die Längendifferenz zum Eichort zu schließen.
(Eine Stunde Zeitdifferenz entspricht 15° Längendifferenz)

Man kann heute einschätzen, dass dieser Anwendungsbereich der Astronomie ihr nächst der unwissenschaftlichen Astrologie über mehr als 1000 Jahre hin als stärkstes Motiv gedient hat.
(Dies bezieht sich auf die mathematische oder Positionsastronomie, die sich nur mit den Bewegungsabläufen auf der gedachten Himmelskugel, aber nicht mit der physikalischen Beschaffenheit der Himmelskörper, ihren tatsächlichen Entfernungen usw. beschäftigt.)

Zur Förderung der britischen Seefahrt wurde 1675 das Königliche Observatorium in Greenwich nahe London gegründet, dessen erstes Gebäude der bedeutende Architekt und Mathematiker Christopher Wren (1632 bis 1723) entwarf. Nach dem ersten Direktor dieses Observatoriums, John Flamsteed (1646 bis 1719), wird dieses Gebäude als Flamsteed House (Flamsteed-Haus) bezeichnet.

Eine britische Briefmarke, die 1975 zum 300. Jahrestag der Eröffnung erschien, zeigt dieses traditionsreiche Gebäude mit dem charakteristischen achteckigen Turm, dessen hohe Fenster möglichst ungehinderte astronomische Beobachtung ermöglichen sollten.

Das Observatorium von Greenwich spielte als Wissenschaftliches Zentrum für Fragen der Positionsastronomie, der Längenbestimmung auf See und der damit zusammenhängenden Zeitmessung über Jahrhunderte eine bedeutende Rolle.
Es diente allen britischen Schiffen als Eichort im oben beschriebenen Sinn. Ein entscheidender Fortschritt in der eigentlichen Kernfrage der exakten und zugleich praktikablen Längenbestimmung konnte jedoch zunächst nicht erzielt werden.

Noch 1752 waren nur von rund 150 Orten der Erde die geographischen Längen relativ zum Greenwich-Meridian einigermaßen genau bekannt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass astronomische Messungen auf schwankenden Schiffen und bei häufig ungünstigen Wetterverhältnissen nur mit geringer Genauigkeit und oft gar nicht ausführbar waren.

Der berühmte britische Entdecker James Cook (1728 bis 1779) bemerkte anlässlich seiner ersten Reise, dass kleine Inseln gar nicht erst in die Karten eingetragen werden sollten, da sie auf Grund der ungenauen Positionsangaben meist nicht wiedergefunden werden konnten.
Es kam jedoch infolge der ungenügend entwickelten kartographischen und navigatorischen Methoden auch zu spektakulären Misserfolgen und Schiffskatastrophen der britischen Seekriegsflotte.

Daher setzte das britische Parlament 1714 den für damalige Zeiten ungeheuren Preis von 20000 Pfund Sterling für Fortschritte in der Längenbestimmung aus, die eine prak-

tische Genauigkeit von mindestens 0,5 Grad garantieren würden.
Daraufhin erfasste weite Teile der britischen Bevölkerung ein regelrechtes "Längenfieber".

Wie zeitgenössische Literatur und Graphik eindrucksvoll dokumentieren, wurde sogar unter Gefängnisinsassen, Geistlichen, Schulkindern und Glücksrittern aller Art über diese Frage eifrigst nachgedacht und diskutiert.
Teile des Preises wurden später an den deutschen Astronomen Tobias Mayer (1723 bis 1763) für seine sehr präzisen Tafeln der Mondbewegung, an Leonhard Euler (1707 bis 1783) für seine, Theorie der Mondbewegung und an den britischen Uhrmacher John Harrison vergeben, der ab 1735 durch wesentliche konstruktive Verbesserungen an den mechanischen Uhren eine solche Ganggenauigkeit erreichte, dass seine Chronometer (Time Keeper) erstmals das Mitnehmen der Ortszeit des Eichortes auf längeren Schiffsreisen und damit einen von astronomischen Beobachtungen unabhängigen Vergleich mit der jeweiligen Ortszeit ermöglichten.

Eines seiner Chronometer soll in 161 Tagen nur um 5 s von der wahren Greenwich-Zeit abgewichen sein. James Cook, der noch auf seiner ersten Reise auf die Mondmethode geschworen hatte, nahm auf seiner zweiten Reise 1772 bis 1775 im Auftrag der britischen Regierung erstmals vier Chronometer mit, um sie im praktischen Gebrauch zu erproben, und erzielte damit hervorragende Ergebnisse.
(Nach der Erfindung der drahtlosen Telegraphie bzw. des Funks wurde es möglich, jederzeit an jedem Ort den Vergleich mit der Greenwich-Zeit durchzuführen. Damit blieb die Methode der Zeitdifferenzen bis zur Einführung der Satellitennavigation Sieger im Kampf um höchste Genauigkeit, und auch heute hat sie ihre praktische Bedeutung noch nicht ganz verloren.)

Es ist nun weiter zu bemerken, dass bis in die zweite Hälfte des 19. Jh. jeder Ort seine eigene Ortszeit hatte. Mit der Entwicklung eines großräumigen Verkehrswesens, insbesondere der Eisenbahnen, wurde diese Situation immer unerträglicher.

Es wurden viele uns heute kurios und umständlich erscheinende Techniken entwickelt, Beziehungen zwischen verschiedenen lokalen Zeitrechnungen herzustellen bzw. eine Landeszeit durch optische und andere Signale möglichst schnell und genau zu übertragen.
Um 1870 tauchte erstmals in den USA der Vorschlag auf, die Erde in Zeitzonen von je 15 Grad des Erdumfanges einzuteilen und in jeder dieser Zonen eine einheitliche Zeit festzulegen, so dass sich die Zeiten verschiedener Zonen nur um volle Stunden voneinander unterscheiden.

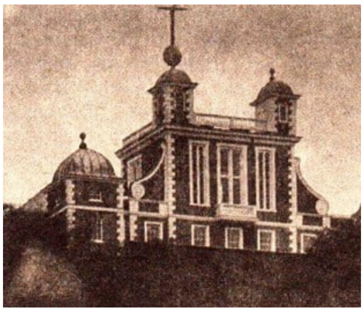
Wo aber sollte man eine solche international einheitliche Zeit- und Längenmessung beginnen?

Dies war unter den damaligen politischen Verhältnissen vor allem eine Prestigefrage für die Großmächte.
Im Oktober 1884 trat in Washington eine Internationale Konferenz zur Fixierung eines einheitlichen Nullmeridians zusammen, an der Vertreter aus 25 Ländern (bezeichnen-

derweise meist Diplomaten, aber nur wenige wissenschaftlich-technische Spezialisten) teilnahmen.
Zu diesem Zeitpunkt gab es Nullmeridiane u. a. durch Greenwich, Paris, Pulkowo bei Petersburg, Neapel, Cadiz, Stockholm, Lissabon, Kopenhagen, Rio de Janeiro.

Insbesondere die Franzosen, die sich mit den großen Gradmessungsexpeditionen des 18. Jh. und dem 1795 gegründeten Pariser Längenbüro große Verdienste um die Erforschung der geometrischen Gestalt der Erde und ihre Vermessung erworben hatten, kämpften in Washington erbittert um ihren ebenfalls traditionsreichen Pariser Meridian, der 1672 von dem berühmten Astronomen G. D. Cassini (1625 bis 1712) fixiert worden war.

Dass schließlich doch der Nullmeridian von Greenwich von allen Teilnehmern akzeptiert wurde, bewirkte die Statistik:
Es konnte nachgewiesen werden, dass zu diesem Zeitpunkt 65% aller Schiffe, die die Weltmeere befuhren, Seekarten auf der Basis des Greenwich-Meridians benutzten.

links: Der weiße Kreidestreifen im Park von Greenwich markiert den Nullmeridian
rechts: Das alte königliche Observatorium

Zum 100. Jahrestag dieser internationalen Vereinbarung gab die britische Post 1984 vier Sondermarken heraus, die den Verlauf unseres Nullmeridians über die Erdkugel, quer durch Frankreich und Großbritannien, durch das Gelände des alten Observatoriums von Greenwich und schließlich durch die Mittellinie des dort befindlichen Zenitteleskops zur Bestimmung des Mittagsdurchgangs der Sonne zeigen.

Es bleibt zu erwähnen, dass die astronomischen Aufgaben des Observatoriums von Greenwich heute zum größten Teil in einem modernen, an einem günstigeren Ort gelegenen Institut durchgeführt werden, während ein Teil des alten Flamsteed House heute das nationale britische Meeresmuseum beherbergt, in dem viele wichtige Sachzeugen der hier skizzierten Entwicklung, u. a. die von Cook mitgeführten Chronometer, aufbewahrt werden.

39 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Mit diesem Beitrag wollen wir euch Hinweise für den Eigenbau von heiteren mathematischen Denksportaufgaben, mathematischen Rätseln, Spielen, Zaubereien, Scherzaufgaben und Logeleien, kurz, von mathematischen Knobelaufgaben geben.
Obwohl wir uns hierbei nur auf die heitere Seite der Mathematik konzentrieren, so gelten die Darlegungen natürlich sinngemäß auch für den Eigenbau von Mathematikaufgaben überhaupt.

Sicher löst auch ihr in eurer Freizeit gern Knobelaufgaben. Doch reizt euch nicht auch der Gedanke, selbst einmal Schöpfer von neuen Knobelaufgaben zu sein? Ein Versuch lohnt sich bestimmt.

Mathematische Knobelaufgaben sind für den Erwerb, die Vertiefung und Festigung mathematischen Wissens und für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht etwa weniger wertvoll als andere, ernsthafte Mathematikaufgaben. So wie alle Problemaufgaben besitzen auch die Knobelaufgaben eine ausgeprägte schöpferische Komponente, die besonders bei der Problemerkennung und im Auffinden von Lösungswegen zum Ausdruck kommt, und sie tragen in hohem Maße bei zur Schulung und Entwicklung solch wichtiger Eigenschaften wie logisches Denkvermögen, Abstraktionsvermögen, Beobachtungs- und Auffassungsgabe, Scharf- und Spürsinn, Findigkeit, Geduld, Ausdauer und Hartnäckigkeit; außerdem schärfen sie den mathematischen Blick für die Umwelt.

Vor allem aber können Knobelaufgaben viele Menschen zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen, da ihre meist heitere Problemstellung oft aus sich selbst heraus beim Betrachter Aufmerksamkeit erzwingt, da sie vielfach auch durch Raten oder Probieren oder einfach mittels gesunden Menschenverstands lösbar sind (obwohl diese Aufgaben größtenteils einen tiefen mathematischen Hintergrund haben), da sie meist einen nur geringen Rechenaufwand erfordern und oft ganz verblüffende Lösungen besitzen (Aha-Effekt), eben, weil sie auf vergnügliche Weise bilden und unterhalten.

Natürlich handelt es sich auch beim Eigenbau von Knobelaufgaben um eine schöpferische Tätigkeit, und für das Wie? einer solchen können wir keine allgemeingültigen Rezepte vorgeben.
Ideen muss man schon haben, und Anregungen für neue mathematische Aufgaben bieten unsere Umwelt, die Mathematik selbst wie auch andere Fachdisziplinen in reicher Fülle.
Doch zeigt die Erfahrung, dass Ideen allein noch nicht genügen, sondern dass man diese dann auch in gute Aufgaben umsetzen können muss, wozu auch eine Portion Handwerk vonnöten ist.

Gemeint ist hiermit ein gezieltes methodisches Vorgehen bei der Ideenfindung und -verarbeitung. Und gerade hierzu wollen wir Erfahrungen vermitteln.
Insofern ist also der Titel unseres Beitrags Ein Besuch in der Knobelwerkstatt natürlich nur im übertragenen Sinne zu verstehen, denn schließlich bauen wir ja die Aufgaben nicht in einer echten Bastler- Werkstatt mit Schraubstock, Hammer, Zange, Nägeln o.

ä. zusammen.

Für den Eigenbau von mathematischen Aufgaben genügen uns meistens schon ein Zettel und ein Bleistift und eventuell noch Werkzeuge wie Lineal, Zeichendreieck, Zirkel oder - dem modernen Stand der Mikroelektronik entsprechend - ein Taschenrechner.

Wir stellen nun zunächst einmal einige typische Klassen von mathematischen Knobelaufgaben vor.
Interessante Knobelaufgaben lassen sich zur Arithmetik, insbesondere zur Arithmetik natürlicher Zahlen, gestalten und dies in erstaunlicher Vielfalt und Variabilität. Hierher gehören Aufgaben zur Darstellung und zu den Eigenschaften von Zahlen, Aufgaben zu den Grundrechenarten (s. Aufg. 98/1), Kryptogramme (s. Aufg. 98/2) und auch magische Quadrate oder allgemeine magische Figuren (s. Aufg. 98/3).

Natürlich spielen die Zahlen auch bei vielen anderen Aufgabentypen eine grundlegende Rolle wie in der Mathematik überhaupt. So etwa bei Aufgaben, die sich mit Hilfe von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen lösen lassen (s. Aufg. 98/4).

Ein breites Spektrum liefern Aufgaben zur Kombinatorik (s. Aufg. 99/1), die bekanntlich Anordnungs- und Auswahlprobleme behandelt. Graphentheoretischer Natur sind Knobelaufgaben wie das Zeichnen einer Figur in einem Zuge (s. Aufg. 99/2), bestimmte Wegeprobleme und auch Labyrinthprobleme (s. Aufg. 99/3).

Ein weites Feld für interessante Knobelaufgaben bietet natürlich die Geometrie. Hier sind etwa Flächenvergleiche (s. Aufg. 99/4), geometrische Teilungsprobleme (s. Aufg. 99/5), Legespiele ähnlich dem Tangram (s. Aufg. 99/6) und Schiebespiele ebenso zu nennen wie die große Klasse der Hölzchenspiele (s. Aufg. 99/7).

Groß ist auch die Vielfalt der logischkombinatorischen Aufgaben, die in den üunterschiedlichsten Bereichen angesiedelt sein können, so etwa logische Vergleichsaufgaben (s. Aufg. 99/8), geometrische Logeleien (s. Aufg. 100/1), Aufgaben zum Erkennen der Bildungsgesetze von Zahlen- bzw. Figurenfolgen (s. Aufg. 100/2), Wägeprobleme (s. Aufg. 100/3), Überfahrtprobleme und andere Logeleien.

Viele interessante Knobelaufgaben kann man auch den bekannten Brett- bzw. Unterhaltungsspielen (Würfeln, Domino, Schach u. a.) entlehnen, etwa die Rösselsprung-Aufgaben (s. Aufg. 100/4).
Natürlich ist mit der obigen kurzen Aufzählung die breite Palette interessanter Knobelaufgaben noch lange nicht erschöpft, und auch eurer Phantasie sind beim Erfinden neuartiger Knobelaufgaben keinerlei Grenzen gesetzt.

39.1 Aufgaben

98/1 Das Jahr 1984
Man setze in die Kästchen Operationszeichen ($+$, $-$, $\cdot$, :) so ein, dass wahre Gleichungen entstehen. Zu beachten ist: Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

$$1\square 9\square 8\square 4 = 19$$
$$1\square 9\square 8\square 4 = 8$$
$$1\square 9\square 8\square 4 = 4$$

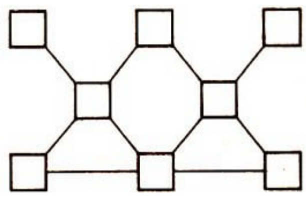
98/2 Sternchenklar

Zu vervollständigen ist folgende Multiplikationsaufgabe, indem die Sternchen durch Ziffern ersetzt werden.

```
456·*7*
-------
    **48
   ****
  ***6
-------
 ******
```

98/3 Magische Figur

Man setze die natürlichen Zahlen von 1 bis 8 so in die Felder ein, dass die Zahlensumme auf jeder geraden Linie 14 beträgt!



98/4. Wie alt?

Das Ehepaar Müller hat 3 Kinder: Jens, Kati und Sven. Herr und Frau Müller sind gleichaltrig, Sven ist 3 Jahre älter als Kati, und Jens ist 3 Jahre älter als Sven. Jens ist so alt wie Kati und Sven zusammen. In drei Jahren wäre der Vater dreimal so alt wie Jens. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

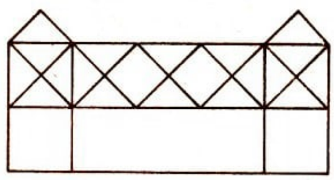
99/1 Mal so, mal so

Wie oft kann man das Wort DEZIMALBRUCH von links oben nach rechts unten auf verschiedene Weise lesen?

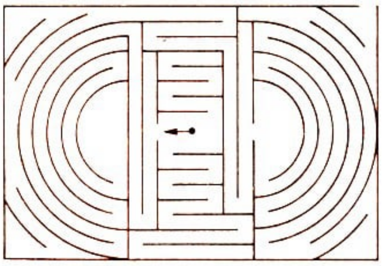
D	E	Z	I	M	A	L	B
E	Z	I	M	A	L	B	R
Z	I	M	A	L	B	R	U
I	M	A	L	B	R	U	C
M	A	L	B	R	U	C	H

99/2 In einem Zuge

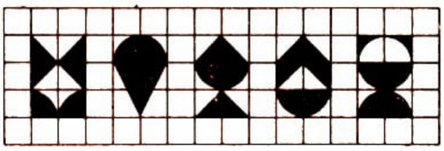
Man zeichne die abgebildete Figur in einem Zuge nach, wobei aber jede Linie nur genau einmal gezogen werden darf!



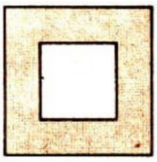
99/3 Im Labyrinth
Auf welchem Weg gelangt die Maus ins Freie?



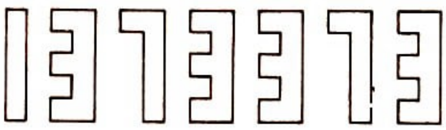
99/4 Flächenvergleich
Welches der fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke im folgenden Bild oben hat den größten Flächeninhalt?



99/5 Zerlegung gesucht
Zerlegt den abgebildeten Quadratring a) durch 2 Geraden in vier, b) durch 3 Geraden in sechs, c) durch 4 Geraden in acht und d) durch 6 Geraden in zwölf kongruente Teilstücke!



99/6 Legespiel
Legt die Ziffern der Zahl 1373373 zu einem lückenlosen Quadrat zusammen!

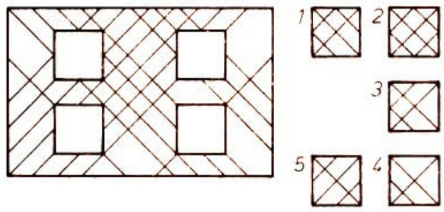


99/7 Stuhl-Akrobatik
Legt 2 Hölzchen so um, dass a) der Stuhl um 90 Grad gedreht wird und b) der Stuhl auf die Lehne gestellt wird! 

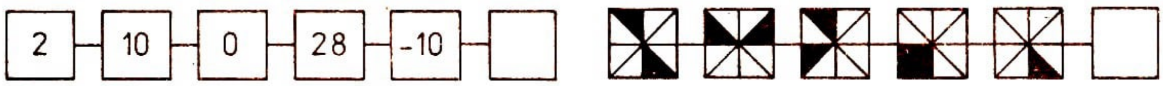
99/8 Rollerrennen
Bei einem Kinderfest wird ein Rollerrennen veranstaltet. Dabei belegen Ben, Dieter, Eva und Katrin die ersten vier Plätze. Ben belegt einen besseren Platz als Eva. Dieter war schlechter platziert als Katrin, er schnitt aber besser ab als Ben. In welcher Reihenfolge

waren die vier Kinder ins Ziel gekommen?

100/1 Gut eingepasst
Vier der fünf abgebildeten Quadrate passen logischerweise in die vier Aussparungen der Figur. Welches Quadrat passt nicht hinein?

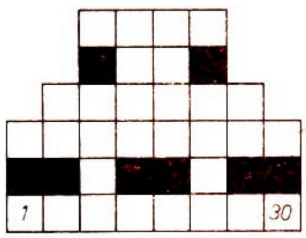


100/2 Fortsetzung gesucht
Findet eine logische Fortsetzung der angegebenen Zahlen- bzw. Figurenfolge!



100/3 Gewusst wie?
Einem Päckchen von 75 g Tee sollen 55 g entnommen werden. Man hat aber lediglich eine Balkenwaage (ohne Wägestücke), ein Gewürzpäckchen von 25 g und ein Puddingpäckchen von 40 g zur Verfügung. Wie kann man die Aufgabe lösen?

100/4 Rösselsprung
Zieht den Springer, der wie beim gewöhnlichen Schach zu setzen ist, innerhalb der abgebildeten Figur vom Feld 1 nach dem Feld 30 derart, dass er zwischendurch jedes andere weiße Feld genau einmal betritt! Die schwarzen Felder dürfen dabei übersprungen, aber nicht betreten werden.



40 Abenteuerlich

Fünf Räuber erbeuteten eine Kassette mit Talern und beschlossen, den Schatz am anderen Morgen gerecht zu teilen. Nachts befürchtete jedoch einer, von den anderen betrogen zu werden. Er versuchte deshalb heimlich, die Beute in fünf gleiche Teile zu zerlegen.

Dabei blieb allerdings ein Silberstück übrig. Er nahm sich einen der Teilhaufen sowie den restlichen Taler und legte sich wieder schlafen.

Nach einer Weile erging es dem zweiten Räuber ebenso. Er stand heimlich auf, bildete aus den in der Kassette liegenden Talern fünf Teilhaufen mit gleicher Taleranzahl, und es blieb ebenfalls ein Taler übrig.
Auch er nahm das einzelne Silberstück und einen Teilhaufen an sich.

Nach ihm holten sich der dritte, vierte und fünfte Räuber den ihnen vermeintlich zustehenden Teil Silberstücke. Den bei jeder gleichmäßigen Aufteilung übriggebliebenen Taler steckten sie sich jeweils ein.

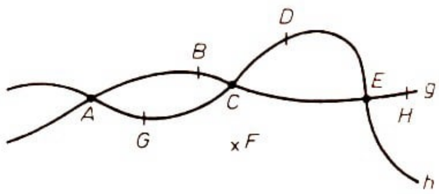
Als die fünf Räuber am anderen Morgen sorgenfrei erwachten, teilten sie die in der Kassette verbliebenen Silberstücke gleichmäßig untereinander auf (dies war nun möglich).

100/5 Wieviel Taler können anfangs in der Kassette gewesen sein?

100/6 Wieviel Taler erhielten die einzelnen Räuber, falls die Kassette höchstens 10000 Silberstücke fasste?

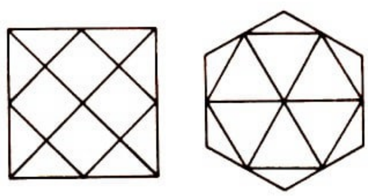
41 Bilderbogen Geometrie

101/1 In der Zeichnung befinden sich die Linien g und h sowie die Punkte A, B,C,D,E,F,G und H.



Gib die Menge aller Punkte an, die a) auf g liegen, b) auf h liegen, c) auf g und h liegen und d) weder auf g noch auf h liegen!

101/2 Wieviel Flächen siehst du?
a) Wieviel Quadrate und Dreiecke findest du in dieser Figur?



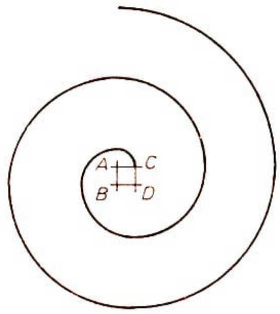
b) Gib die Anzahl der Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme und Sechsecke in dieser Figur an!
Wieviel Vierecke siehst du noch?

101/3 Zeichne drei Geraden so, dass
a) 0 Schnittpunkte entstehen, b) 1 Schnittpunkt entsteht, c) 2 Schnittpunkte entstehen und d) 3 Schnittpunkte entstehen!

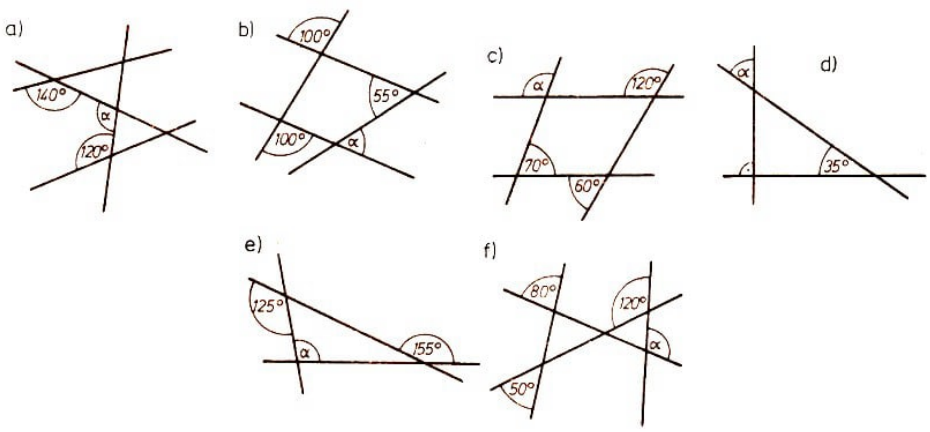
101/4 Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M! Gib auf dem Kreis zwei Punkte

A und B so an, dass der $\angle AMB = 135°$ beträgt! Zeichne auf dem Kreis den Punkt C, so dass $\angle AMC = 60°$ ist!
Berechne $\angle CMB$ und die erhabenen Winkel $\angle AMB$, $\angle AMC$ und $\angle CMB$! Miss mit dem Winkelmesser nach!

101/5 Erkläre die Konstruktion der Kurve in der gezeichneten Figur!

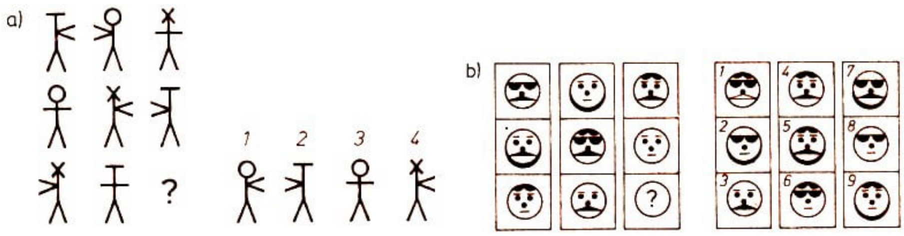


101/6 Bestimme jeweils die Größe des Winkels α!

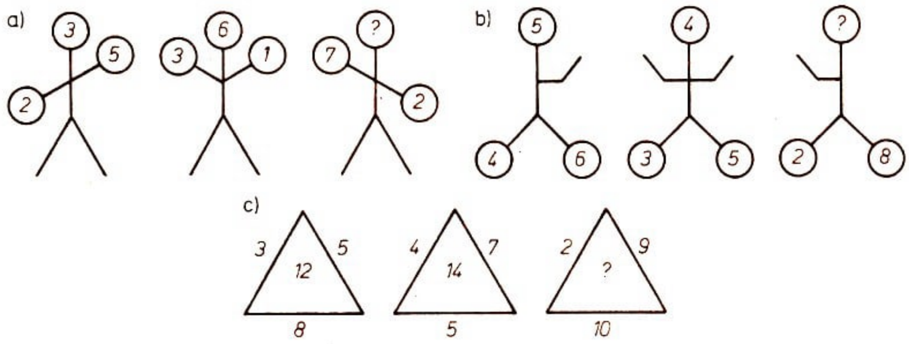


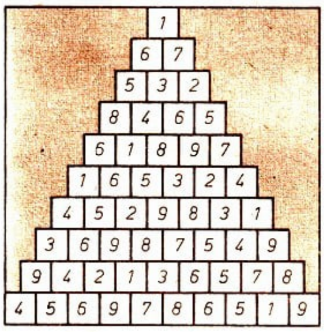
42 Logeleien

102/1 Welche der Figuren a) 1 bis 4, b) 1 bis 9 gehört logischerweise an die Stelle des Fragezeichens?



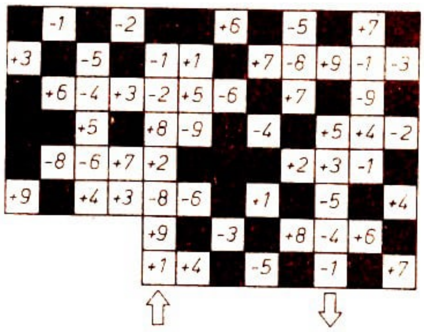
102/2 Es ist eine Gesetzmäßigkeit zu finden, nach der die nachfolgenden Figuren aufgebaut sind.



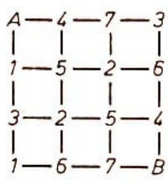


102/3 Man schreite von der Zahl 1 (an der Spitze der Pyramide) so abwärts, dass man immer eines der beiden Quadrate in der darunterliegenden Reihe betritt, welches das Quadrat berührt, in dem man verweilt.
Die Summe der Zahlen der dabei betretenen Quadrate soll möglichst groß werden.

102/4 Das Labyrinth ist durch das Feld (+1) zu betreten und durch das Feld (-1) zu verlassen. Man darf von einem Feld aus jedes Nachbarfeld betreten, auch die Felder in Diagonalrichtung. Es ist ein Weg zu finden, bei dem man bei Ausführung der Addition bzw. Subtraktion als Ergebnis 0 erhält.

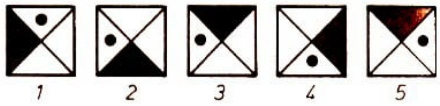


102/5 Findet einen Weg von A nach B derart, dass die Summe der dabei über querten Zahlen 50 beträgt! Dabei darf eine Zahl höchstens einmal überquert werden!



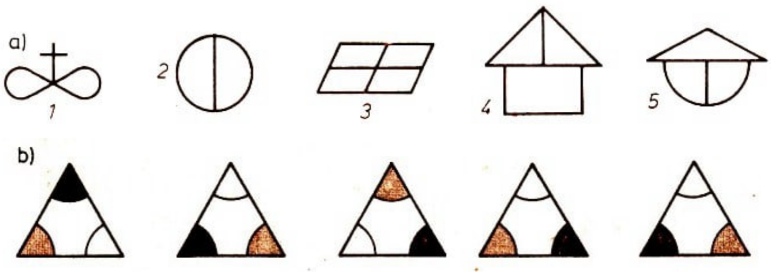
103/1 a) Ersetze das Fragezeichen durch die richtige Zahl!

b) Welche der Figuren durchbricht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?

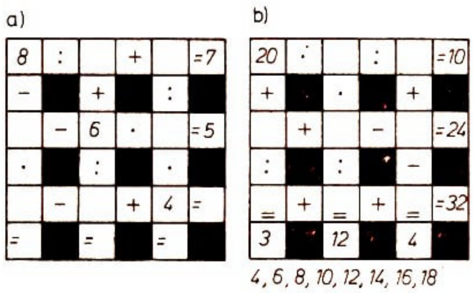


c) Welche Zahl verletzt eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?
625 361 256 197 144

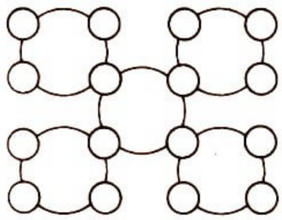
103/2 Es ist diejenige Figur zu finden, die logischerweise nicht in das Schema passt.



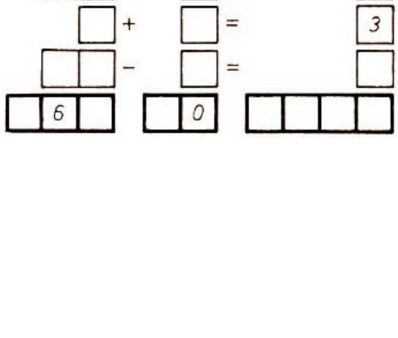
103/3 Setze in die leeren Felder natürliche Zahlen so ein, dass wahre Aussagen entstehen!



103/4 In die Kreisfelder sind die Zahlen 1 bis 16 so einzusetzen, dass sich für jeden Kreis jeweils die Summe 34 ergibt.



103/5 Setze Ziffern so ein, dass richtig gelöste Aufgaben entstehen!



43 Zahlenzauber-Zauberzahlen

$$\begin{array}{rr}
0+1=1 & 1\times 1=1 \\
1+3=4 & 2\times 2=4 \\
4+5=9 & 3\times 3=9 \\
9+7=16 & 4\times 4=16 \\
16+9=25 & 5\times 5=25 \\
25+11=36 & 6\times 6=36 \\
36+13=49 & 7\times 7=49 \\
49+15=64 & 8\times 8=64 \\
64+17=81 & 9\times 9=81 \\
81+19=100 & 10\times 10=100
\end{array}$$

$133=(1+3+3)(1^2+3^2+3^2)$
$315=(3+1+5)(3^2+1^2+5^2)$
$803=(8+0+3)(8^2+0^2+3^2)$
$63=6^2+6\cdot 3+3^2$
$91=9^2+9\cdot 1+1^3$

$153=1^3+5^3+3^3$
$370=3^3+7^3+0^3$
$371=3^3+7^3+1^3$
$407=4^3+0^3+7^3$
$1634=1^4+6^4+3^4+4^4$
$8208=8^4+2^4+0^4+8^4$
$9474=9^4+4^4+7^4+4^4$
$54748=5^5+4^5+7^5+4^5+8^5$
$92727=9^5+2^5+7^5+2^5+7^5$
$93084=9^5+3^5+0^5+8^5+4^5$

In den nachstehenden Gleichungen werden jeweils alle zehn Ziffern verwendet:

$2\cdot 3485=1\cdot 6970$
$4\cdot 1957=38\cdot 206$
$7\cdot 1406=38\cdot 259$
$2\cdot 4589=13\cdot 706$
$5\cdot 2968=40\cdot 371$
$8\cdot 1735=20\cdot 694$
$3\cdot 4158=6\cdot 2079$
$6\cdot 1485=30\cdot 297$
$9\cdot 2754=81\cdot 306$

$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$
$1+3+5+7+9=5^2$
$1+3+5+7+9+11=6^2$
$1+3+5+7+9+1+3=7^2$

$9\times 7=63$
$99\times 77=7623$
$999\times 777=776223$
$9999\times 7777=77762223$
$99999\times 77777=7777622223$

$12345679\cdot 9=111111111$
$12345679\cdot 18=222222222$
$12345679\cdot 27=333333333$

$1\cdot 9+2=11$
$12\cdot 9+3=111$
$123\cdot 9+4=1111$

$9\cdot 9+7=88$
$98\cdot 9+6=888$
$987\cdot 9+5=8888$

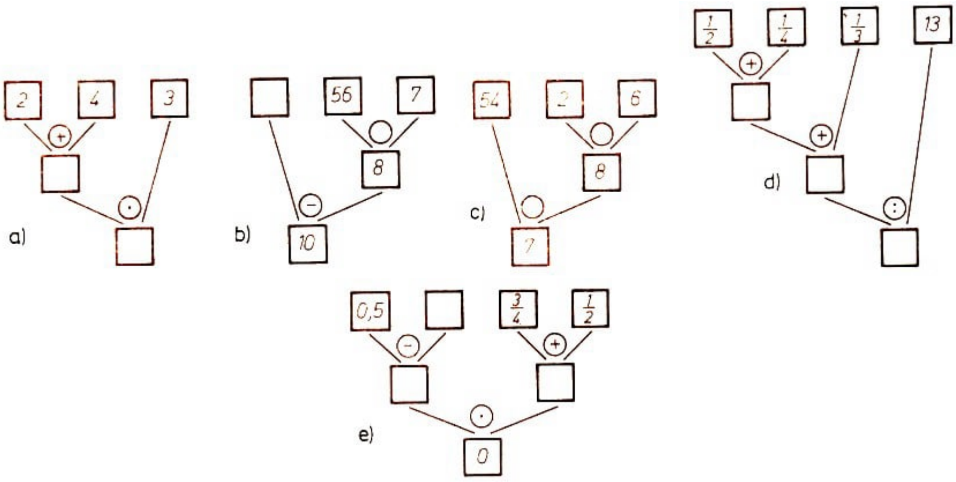
$1\cdot 1=1$
$11\cdot 11=121$
$111\cdot 111=12321$
$1111\cdot 1111=1234321$

Linke und rechte Seite verhalten sich zueinander wie Bild und Spiegelbild -
bis auf die Multiplikationszeichen.

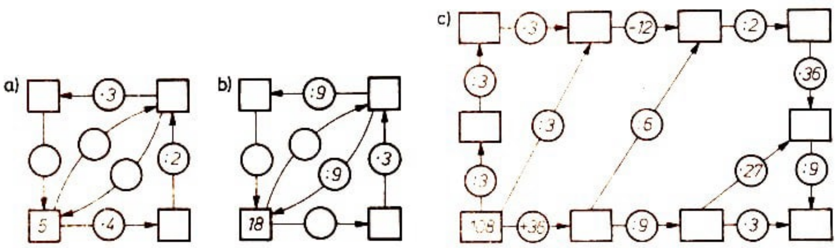
$218\cdot 9=981\cdot 2$
$327\cdot 8=872\cdot 3$
$412\cdot 7=721\cdot 4$
$424\cdot 7=742\cdot 4$
$436\cdot 7=763\cdot 4$
$545\cdot 6=654\cdot 5$
$5\cdot 295=59\cdot 25$
$2\cdot 8919=9\cdot 1982$
$3\cdot 7928=8\cdot 2973$
$5\cdot 5946=6\cdot 4955$
$4\cdot 2317=7\cdot 1324$
$4\cdot 4627=7\cdot 2644$
$4\cdot 6937=7\cdot 3964$
$644\cdot 1=14\cdot 46$

44 Kombiniere!

105/1 Fülle die Leerstellen aus! Gib jeweils den zu berechnenden Term an!



105/2 Führe die angegebenen Rechenoperationen aus!



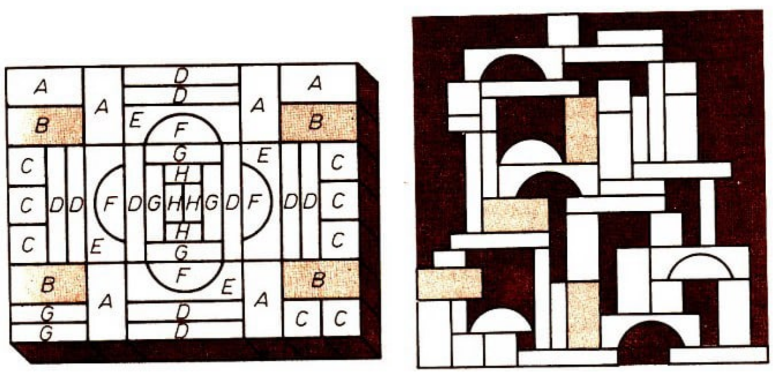
105/3 Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf! Berechne jeweils den Wert des Terms!

a) $2 + 3 \cdot 4$; b) $43 - 9 : \left(\frac{1}{4}\right)$

105/4 Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf! Berechne jeweils den Wert des Terms!

a) $-3 \cdot (-4{,}1 - 1{,}9)$; b) $\sqrt{2^2 \cdot 4 - (\sqrt{25} + 10)}$

105/5 Marie-Luise hat sich ein Märchenschloss aus den Steinen ihres Baukastens gebaut. Einen Stein hat sie nicht verwendet - welchen?



45 Der Satz des Jahrhunderts

45.1 Die Fermatsche Vermutung und der Satz von Mordell-Faltings

In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts formulierte Pierre de Fermat auf dem Rand einer Seite einer Buchausgabe der Arithmetik des Diophant die Vermutung, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt.

Da jede natürliche Zahl $n \geq 3$ durch 4 oder durch eine ungerade Primzahl teilbar ist, genügt es, die Fermatsche Vermutung für die Exponenten $n = 4$ und $n = p$ (ungerade Primzahl) zu beweisen. Die Aussage für den Exponenten $n = 4$ ist der Satz von der Nichtexistenz von rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten ganzzahlige Quadrate sind. (Er wurde zuerst von Fermat bewiesen.)

Man kann sich somit auf die Untersuchung der Gleichung

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

beschränken. (Hier sei der Exponent p eine ungerade Primzahl.) Drei von Null verschiedene ganze Zahlen a, b, c, die der Gleichung (1) mit $x = a$, $y = b$, $z = c$ genügen, heißen Fermatsches Zahlentripel (zum Exponenten p).

Haben zwei Zahlen eines Fermatschen Tripels einen gemeinsamen Teiler t, so teilt t wegen $a^p + b^p = c^p$ auch die dritte Zahl. Wenn es überhaupt Fermatsche Zahlentripel gibt, so genügt es, solche zu suchen, bei denen die Zahlen a, b, c paarweise teilerfremd sind.
(Gibt es solche Zahlentripel nicht, dann gibt es überhaupt keine Fermatschen Tripel.)

Dann ist auch ta, tb, tc (mit einer ganzen Zahl t) ein Fermatsches Tripel.
Zum Nachweis, dass es für einen speziellen Primzahlexponenten p keine Fermatschen Zahlentripel gibt, genügt es, die folgenden zwei Aussagen zu beweisen.

a) Erster Fall der Fermatschen Vermutung:
Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel (a, b, c), so dass die Zahlen a, b, c nicht durch p teilbar sind.

b) Zweiter Fall der Fermatschen Vermutung:
Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel, so dass eine (und dann nur eine) der Zahlen a, b, c durch p teilbar ist.

Für die kleinste ungerade Primzahl $p = 3$ hat Euler die Unlösbarkeit von (1) in ganzen Zahlen bewiesen.
Der französische Mathematiker Legendre hat Eulers Beweis in sein 1798 erschienenes Zahlentheorie-Lehrbuch aufgenommen.

Legendre bewies 1823 die Unlösbarkeit von (1) in ganzen Zahlen für $p = 5$.
Dass $x^{14} + y^{14} = z^{14}$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, zeigte 1832 Dirichlet. Die Unmöglichkeit von (1) für $p = 7$ fand dann 1839 Lame.

Von Kummer wurde um 1850 schließlich das sehr weittragende Ergebnis gefunden, dass die Fermatsche Vermutung für alle sog. regulären Primzahlen als Exponenten richtig ist. (Mit Ausnahme von 37, 59 und 67 sind alle ungeraden Primzahlen $p < 100$ regulär.) Er bekam für seinen Lösungsbeitrag eine an sich für die vollständige Erledigung des Fermatschen Problems 1849 von der Pariser Akademie gestiftete Goldmedaille.

1883 setzte auch die Belgische Akademie der Wissenschaften einen Preis für die Lösung aus. Der Privatgelehrte Wolfskehl (1856 bis 1906) stellte der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften aus seinem Privatvermögen 100000 Mark als Preis für die vollständige Lösung des Problems zur Verfügung (1908 veröffentlicht).

Bis 1908 konnte durch Dickson der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle ungeraden Primexponenten $p < 7000$ erledigt werden.
Ein hervorragendes Ergebnis erzielte 1909 Wieferich. (Er erhielt 100 Mark vom Wolfskehl-Preis). Er zeigte, dass der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen p mit

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Mittels Rechenautomaten konnte bis 1971 nachgewiesen werden, dass es unter den ungeraden Primzahlen $p < 3 \cdot 10^9$ nur zwei Zahlen (1093 und 3571) gib, die der Kongruenz $2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ genügen.)

Frobenius und Mirimanoff bewiesen später, dass der erste Fall der Fermatschen Vermutung auch für alle Primzahlen p mit

$$3^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Hierzu gehören auch die Primzahlen 1093 und 3571.) Jetzt schien es wahrscheinlich, dass die Zahlen 2 und 3 durch andere Primzahlen q $(\neq p)$ ersetzt werden können. Tatsächlich konnte man die Richtigkeit des ersten Falles der Fermatschen Vermutung für alle p mit

$$q^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

beweisen, wobei q $(\neq p)$ eine Primzahl ist, für die $q \leq 43$ gilt (Vandiver, Frobenius, Pollaczek, Morishima, Rosser).

Mittels Rechenautomaten konnte bereits 1941 (vermöge dieser Bedingungen) nachgewiesen werden, dass der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 253747889 sind, richtig ist. 1948 erkannte N. G. Gunderson die Richtigkeit sogar für Primzahlexponenten $< 57 \cdot 10^9$.
Es sind aber auch größere Primzahlen bekannt, für die der erste Fall der Fermatschen Vermutung richtig ist, z. B. für $p = 2^{86243} - 1$; diese Zahl scheint gegenwärtig die größte bekannte Primzahl überhaupt zu sein.

Im Jahre 1954 gab Vandiver ein Kriterium für die Richtigkeit des zweiten Falles der Fermatschen Vermutung an.
Mittels Rechenautomaten konnte nun nachgewiesen werden, dass der zweite Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 5500 sind, richtig ist. Ebenfalls mittels Computer konnte 1976 Samuel S. Wagstaff die Richtigkeit (beider Fälle)

der Fermatschen Vermutung für Primzahlexponenten $p < 125000$ zeigen.

Die Fermatsche Vermutung konnte bisher nicht vollständig bewiesen werden.

Man weiß noch nicht einmal, ob sie für unendlich viele Primzahlexponenten richtig ist. Die Vermutung gehört immer noch zu den bekanntesten ungelösten Problemen der Mathematik.

L. Kronecker schrieb in seinen "Vorlesungen über Zahlentheorie" über die Fermatsche Vermutung, dass sich mit diesem Satz die Mathematiker vielleicht mehr beschäftigt haben als mit irgendeinem anderen, und dass wohl keiner, abgesehen etwa von der Quadratur des Kreises, zu so vielen falschen und irrtümlichen Deduktionen Veranlassung gegeben hat. Es finden sich immer wieder Mathematiker, aber auch Laien, die versuchen, die Vermutung zu beweisen. Es gibt jedoch auch Mathematiker, die sich fragen, ob es überhaupt ein "vernünftiges" Problem ist. Lohnt es sich überhaupt, daran zu arbeiten?

Einmal erscheint es recht aussichtslos, die Lösung zu finden. Zum anderen kann man, selbst wenn ein Beweis gelungen ist, immer wieder neue Gleichungen betrachten, beispielsweise

$$x^p + 2y^p = z^p \qquad , \qquad x^2 + 1001y^p = z^p, \quad ...$$

und nach ganzzahligen Lösungen fragen.
In der Tat, welchen Sinn hätte es, gerade das Fermatsche Problem zu lösen?

Ein offenbar vernünftigeres Problem ergibt sich so: Man kann für die Fermatsche Gleichung auch

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

schreiben. Man fragt dann nach Lösungen der Gleichung

$$t^p + u^p = 1 \tag{2}$$

in rationalen Zahlen t, u.
Betrachtet man nun allgemeiner ein Polynom $f(t, u)$ in zwei Unbestimmten, z.B.

$$f_1(t,u) = t^p + u^p - 1 \qquad , \qquad f_2(t,u) = u^2 - t^3 - t^2$$

so definiert die Gleichung $f(t, u) = 0$ eine Kurve in der Ebene. Man kann fragen, ob es auf der Kurve Punkte mit rationalen Koordinaten (kurz: rationale Punkte) oder sogar mit ganzzahligen Koordinaten gibt. Die Antwort ist auch hier nicht leicht.

Es gibt eine Invariante, die man gewissen (algebraischen, glatten) Kurven zuordnen kann; sie wird als ihr Geschlecht bezeichnet. Geraden und Kegelschnitte (Parabeln, Ellipsen, Hyperbeln) haben das Geschlecht 0. Auf Kurven vom Geschlecht 0 kann es keine, endlich viele oder unendlich viele rationale Punkte geben.

Als Beispiel sei der Kreis

$$t^2 + u^2 = 1 \tag{3}$$

mit dem Radius 1 betrachtet [sein Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung $(t, u) = (0{,}0)$]. Man kann beweisen:[6]
Alle rationalen Punkte auf diesem Kreis werden gegeben durch

$$\left(\frac{g^2-h^2}{g^2+h^2}, \frac{2gh}{g^2+h^2}\right) \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{2gh}{g^2+h^2}, \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2}\right), \quad g{,}h \in \mathbb{Z}$$

Es handelt sich also um unendlich viele rationale Punkte. Hieraus ergeben sich unschwer auch die ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{4}$$

Alle teilerfremden Lösungstripel von (4) werden gegeben durch

$$(g^2 - h^2, 2gh, g^2 + h^2) \qquad \text{oder} \qquad (2gh, g^2 - h^2, g^2 + h^2)$$

sofern g und h teilerfremde ganze Zahlen sind, von denen die eine gerade, die andere ungerade zu wählen ist. Ein beliebiges Lösungstripel von (4) hat die Form (ta, tb, tc), worin (a, b, c) ein teilerfremdes Lösungstripel von (4) und t eine beliebige ganze Zahl ist.

Kurven vom Geschlecht 1 heißen elliptische Kurven. Gleichungen der Form

$$u^2 - t^3 - at^2 - bt - c = 0$$

(mit rationalen Koeffizienten a, b, c derart, dass die Gleichung

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0$$

drei verschiedene Nullstellen besitzt) definieren solche Kurven. Als Beispiele seien die durch die Gleichungen

$$u^2 = t^3 + k \tag{5}$$

definierten Kurven angegeben, worin $k \neq 0$ eine beliebige ganze (in jeder solchen Gleichung festgewählte) Zahl bezeichnet. Die Kurve (mit $k = 1$)

$$u^2 = t^3 + 1$$

hat nur fünf rationale Punkte (t, u), nämlich $(-1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 3)$ (L. Euler).
Die Gleichung mit $k = -1$

$$u^2 = t^3 - 1$$

hat weder in ganzen noch in rationalen Zahlen t, u $(\neq 0)$ Lösungen.

Der englische Zahlentheoretiker L. J. Mordell (1888 bis 1972) bewies 1922, dass für jede ganze Zahl $k \neq 0$ die Gleichung (5) höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. So hat die Gleichung (5) beispielsweise für $k = -3$, -5, 7, 11, 13 überhaupt

[6] Siehe zum Beispiel: Pieper, H.: Die komplexen Zahlen. Theorie - Praxis - Geschichte. Verlag Harri Deutsch (Deutsch Taschenbücher, Band 44), Thun-Frankfurt/M. 1985.

keine ganzzahligen Lösungen. Sie besitzt für $k = -2$ die beiden ganzzahligen Lösungen $t = 3$, $u = \pm 5$.
Die Gleichung

$$u^2 = r^3 + 2$$

hat keine anderen ganzzahligen Lösungen, außer $t = -1$, $u = -1$ (A. Brauer, 1926).
Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 17$$

besitzt genau 16 ganzzahlige Lösungen: $(t,u) = (-2, \pm 3), (-1, \pm 4), (2, \pm 5), (4, \pm 9), (8, \pm 23), (43, \pm 282), (52, \pm 375), (5234, \pm 378661)$ (T. Nagel, 1930). Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 11$$

hat zwar keine ganzzahligen Lösungen, jedoch gibt es rationalzahlige Lösungen, z.B.

$$\left(\frac{19}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^3 + 11$$

Die Identität

$$\left(\frac{27t16 - 36u^2t^3 + 8u^4}{8u3}\right)^2 - \left(\frac{9t^4 - 8u2^t}{4u^2}\right)^3 = u^2 - t^3 = k$$

zeigt: Jede Lösung der Gleichung $u^2 = t^3 + k$ in rationalen Zahlen $u \neq 0$, $t \neq 0$ liefert eine weitere Lösung. Falls die Kurve $u^2 = t^3 + k$ für $k \neq 1$, $-3^3 2^4$ einen rationalen Punkt besitzt, so hat sie sogar unendlich viele rationale Punkte (R. Fueter, 1930).

Auf Kurven vom Geschlecht 1 brauchen keine rationalen Punkte zu liegen. Hat man jedoch einen rationalen Punkt auf einer elliptischen Kurve, so kann man die Tangente an die Kurve in diesem Punkt zeichnen und zeigen, dass der Schnittpunkt der Tangente mit der Kurve wieder ein rationaler Punkt ist. Es gibt Fälle, in denen man so unendlich viele rationale Punkte findet.

C. L. Siegel (1896 bis 1981) bewies 1929, dass auf Kurven vom Geschlecht > 1 nur endlich viele Punkte liegen, deren Koordinaten beide ganzzahlig sind.
L. J. Mordell, der "König der diophantischen Gleichungen", sprach im Jahre 1922 die Vermutung aus, dass auf einer Kurve. mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sogar höchstens endlich viele rationale Punkte liegen.

Viele Mathematiker, darunter in der Welt führende Gelehrte, versuchten seitdem, diese Mordellsche Vermutung zu bestätigen. Im Frühjahr 1983 gelang es dem jungen Mathematiker Gerd Faltings (geb. 1955), die Vermutung Mordells zu beweisen.
Er ist ein Schüler von Professor Nastold in Münster, promovierte 1978, studierte dann ein Jahr an der Harvard University, habilitierte sich 1981 und wurde mit 27 Jahren Mathematikprofessor in Wuppertal.

Sein Arbeitsgebiet ist die Algebraische Geometrie, jenes Teilgebiet der Mathematik, das aus der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen. und der mehrdimensionalen

Geometrie entstanden ist.

Die Arbeiten der Moskauer Schule der Algebraischen Geometrie (I. R. Schafarewitsch, A. N. Parschin, S. Arakelow, J.G. Zarchin) bilden das Fundament für Faltings Beweis der Mordellschen Vermutung.
Sie lieferten die entscheidenden Ideen und Methoden. Ohne die Abhandlungen von Parschin (von 1968), Arakelow (von 1971 und 1974), sowie Zarchin (von 1974) wäre dieser Beweis nicht möglich gewesen.
Eine weitere wichtige Idee scheint Faltings auch dem französischen Mathematiker P. Deligne zu verdanken.

60 Jahre hat der von Mordell ausgesprochene Satz (ein bekannter Mathematiker nannte ihn kürzlich den "Satz des Jahrhunderts") allen Beweisen getrotzt.
Nun konnte G. Faltings den Beweis auf Grund der in den letzten Jahrzehnten in der Algebraischen Geometrie entwickelten Methoden erbringen.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Warschau im August 1983 hat P. Deligne einen Sondervortrag über Faltings' Ergebnisse gehalten. Auf der Tagung "Arithmetik auf Mannigfaltigkeiten" im Oktober 1983 in Greifswald hat Parschin darüber vorgetragen.

Beispiele für Kurven mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sind die "Fermatschen Kurven"

$$t^p - u^p - 1 = 0 \tag{6}$$

für $p > 3$.
Da nach dem Satz von Mordell-Faltings auf einer Kurve mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, höchstens endlich viele rationale Punkte liegen, sind für die Gleichung (6) höchstens endlich viele rationale Lösungen möglich. Dies bedeutet, dass die Gleichung (1) höchstens endlich viele teilerfremde ganzzahlige Lösungen besitzen kann.

Dieses direkt zu beweisen, ist den Zahlentheoretikern bis heute nicht gelungen. Wir haben hier ein neues Beispiel für eine (vom Mathematiker G. Polya beschriebene) paradoxe Erfahrung beim Lösen mathematischer Probleme.
Der Beweis der stärkeren Aussage (hier: der Satz von Mordell-Faltings) erweist sich (zwar als schwer, jedoch) als leichter als der Beweis der schwächeren Aussage (hier: die Aussage für den Sonderfall der Fermatschen Kurven).

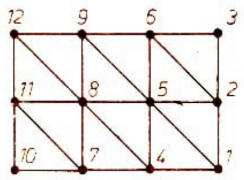
Man kann hoffen, nun auch einmal beweisen zu können, dass (1) überhaupt keine teilerfremden ganzzahligen Lösungen besitzt (Fermatsche Vermutung).

Prof. L. J. Mordell und Prof. Dr. Gerd Faltings

46 Aus dem Alltag

110/1 Drei Jungen mit Vornamen Peter, Martin und Wenzel überprüften ihr Gewicht auf einer Dezimalwaage. Es stellten sich aber jeweils zwei dieser Jungen zugleich auf die Waage. Für Peter und Martin zeigte die Waage 83 kg, für Peter und Wenzel 85 kg, für Martin und Wenzel 88 kg an.
Wieviel wiegt jeder dieser drei Jungen?

110/2 Frau Mildner hat große Wäsche, und sie möchte ihre Wäscheleine zwischen den 12 Pfählen in der abgebildeten Weise ziehen. Wie könnte sie ihre Leine - ausgehend vom Pfahl 1 und endend am Pfahl 12 - so ziehen, dass die Leine zwischen zwei beliebigen Pfählen niemals doppelt oder mehrfach, sondern jeweils nur einfach gespannt ist? Finde mindestens drei verschiedene Möglichkeiten, die Leine in der geforderten Weise aufzuspannen!

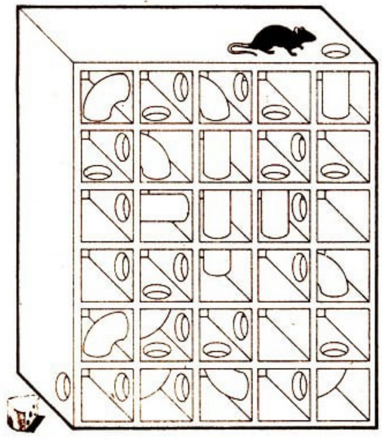


110/3 Auf einer Wäscheleine hängen 8 Fußballjerseys einer Mannschaft. Ermittelt man das arithmetische Mittel dieser sichtbaren Rückennummern, so erhält man die Zahl 7. Die Summe aus den Rückennummern der drei fehlenden Trikots ergibt die Summe 10. Welche Dresse mit welchen Rückennummern fehlen auf der Leine?

110/4 Frau Braun, Frau Schwarz und Frau Weiß haben braunes, schwarzes bzw. weißes Haar, aber keine von ihnen hat eine Haarfarbe, die ihrem Namen entspricht.
Wenn Frau Weiß kein schwarzes Haar hat, welche Farbe hat dann das Haar von Frau Schwarz?

111/1 "Guten Tag! Wie spät ist es?"
"Ganz einfach! Addiere ein Viertel der Zeit von Mittag bis jetzt zur Hälfte der Zeit von jetzt bis Mittag!"

111/2 Welchen Weg muss die Maus nehmen, um zum Käse zu gelangen?

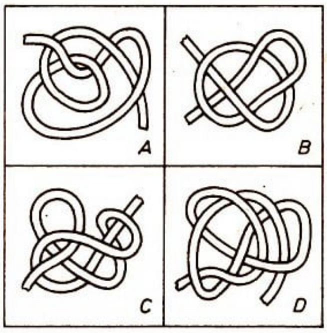


111/3 Eine der vielen Lampen steht in vier Exemplaren auf den Regalen. Wer findet sie am schnellsten?

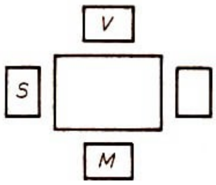
111/4 Ein Kaninchen wiegt mit Kiste 4 kg, eine Ente mit Kiste 5 kg. Ente und Kaninchen wiegen zusammen 3 kg. Welche Masse hat die Kiste?

111/5 Ein Glas Pfirsiche kostet 2,45 Mark. Der Inhalt kostet 1,85 Mark mehr als das Konservenglas. Wieviel kosten die Pfirsiche?

111/6 Wenn man an den Enden der Bänder zieht, wird sich nur bei zwei Verschlingungen ein Knoten bilden - die anderen lösen sich glatt auf. Wo ergeben sich Knoten?



111/7 Eine dreiköpfige Familie (Vater, Mutter und Sohn) kommt in eine Gaststätte und möchte an einem freien Tisch mit 4 Stühlen Platz nehmen.



Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Familie, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen?

47 Pythagoras - Müssen es immer Quadrate sein?

Der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sei D. Die Dreiecke ABC, ADC und BDC sind einander ähnlich (Bild 112/1), und wegen der Verhältnisgleichheit entsprechender Seiten in solchen Dreiecken gilt

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} : \overline{AD} \qquad \text{und} \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB} : \overline{BD} \qquad \text{(Kathetensatz)}$$

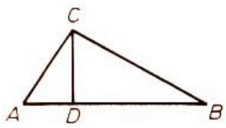


Bild 112/1

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man den Satz des Pythagoras

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}(\overline{AD} + \overline{BD}) = \overline{AB}^2$$

oder, mit anderen Bezeichnungen,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Der Satz besagt, dass die Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen ebenso groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse (Vgl. hierzu Bild 112/2). Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt.

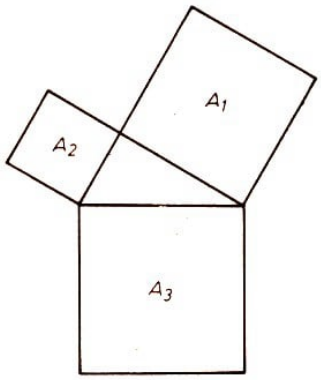


Bild 112/2

Wenn also zwischen den Seiten eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ besteht, dann ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse. Aber auch für die Flächeninhalte der Dreiecke im Bild 112/1 gilt die im Satz des Pythagoras ausgesprochene Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse (Bild 112/3).

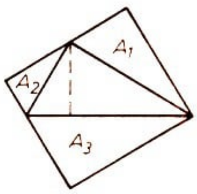


Bild 112/3

Man klappe einfach die Dreiecke nach innen. Das Dreieck ABC ist ja aus den anderen Dreiecken zusammengesetzt.
Bezeichnen wir einmal die Flächeninhalte der Figuren über den Katheten mit A_1 und mit A_2 und den der Figur über der Hypotenuse mit A_3, so gilt auch hier die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$.

Gilt diese Beziehung für jegliche Figuren, die wir über Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zeichnen, oder ist sie an bestimmte Bedingungen gebunden? Gewiss wird man den Figuren bestimmte Bedingungen auferlegen müssen, denn bei willkürlich konstruierten Figuren dürfte für ihre Flächeninhalte kaum die Gleichung $A_1 + A_2 = A_3$, erfüllt sein (Bild 112/4).

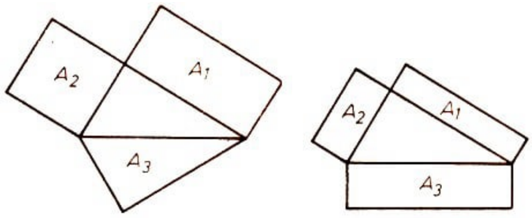


Bild 112/4, 112/5

Andererseits wird man es immer so einrichten können, dass für ein Tripel von Figuren diese Beziehung erfüllt ist (Bild 112/5).

Die Figuren seien Rechtecke mit den Flächeninhalten $A_1 = by$; $A_2 = ax$; $A_3 = cz$. Dann ist die Beziehung erfüllt, wenn man z so wählt, dass gilt

$$z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Betrachten wir die Bilder 112/2 und 112/3 näher, so erkennen wir, dass die über Katheten und Hypotenuse konstruierten Figuren immer einander ähnlich waren. Bei den rechtwinkligen Dreiecken ergab sich das aufgrund ihrer Entstehung; Quadrate dagegen sind stets einander ähnlich.
Es liegt die Vermutung nahe, dass immer dann, wenn die Figuren über Katheten und Hypotenuse ähnliche Figuren sind, für ihre Flächeninhalte die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$ gilt.

Wir wollen unsere Vermutung an weiteren einfachen Beispielen überprüfen. Gleichseitige Dreiecke (Bild 113/1) und auch Halbkreise (Bild 113/2) sind untereinander immer ähnlich.

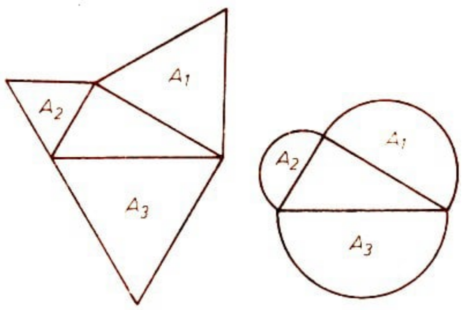


Bild 113/1, 113/2

Die Rechnung bestätigt unsere Vermutung für diese Fälle.

$$A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}; \qquad A_2 = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}; \qquad A_3 = \frac{c^2}{4}\sqrt{3}$$
$$A_1 = \frac{\pi}{8}a^2; \qquad A_2 = \frac{\pi}{8}b^2; \qquad A_3 = \frac{\pi}{8}c^2$$

Mit $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich dann $A_1 + A_2 = A_3$.

Wir wollen die Vermutung bestätigen. Wenn die Figuren ähnlich sind, dann verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken. Das wissen wir aus dem Mathematikunterricht. Also gilt

$$A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$$

denn die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks waren für die Figuren einander entsprechende Strecken. Aus dieser fortlaufenden Proportion bilden wir $A_1 : A_3 = a^2 : c^2$ und $A_2 : A_3, = b^2 : c^2$ und hieraus

$$A_1 = \frac{a^2}{c^2} A_3 \qquad \text{und} \qquad A_2 = \frac{b^2}{c^2} A_3$$

Dann ist

$$A_1 + A_2 = \frac{A_3}{c^2}(a^2 + b^2)$$

Da im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, erhalten wir hieraus $A_1 + A_2 = A_3$.
Also haben wir gefunden:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist und die Figuren über den Katheten und der Hypotenuse sind ähnlich, dann gilt für ihre Flächeninhalte $A_1 + A_2 = A_3$.
Oder in Kurzform:

V 1: Das Dreieck ist rechtwinklig, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$
V 2: Die Figuren sind ähnlich, d.h. $A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$.
B: $A_1 + A_2 = A_3$;

Von diesem Satz kann man auch eine wahre Umkehrung bilden:
Wenn für die Flächeninhalte der Figuren über den Seiten eines Dreiecks gilt $A_1 + A_2 = A_3$ und diese Figuren einander ähnlich sind, dann gilt für die Seiten des Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$ und das Dreieck ist rechtwinklig.

V 1: $A_1 + A_2 = A_3$
V 2: Die Figuren sind ähnlich.
B: $a2 + b^2 = c^2$;

Zum Beweis bilden wir aus V_1 die Gleichung $\frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3} = 1$, aus V_2 hingegen folgt $\frac{A_1}{A_3} = \frac{a^2}{c^2}$ und $\frac{A_2}{A_3} = \frac{b^2}{c^2}$.
Hieraus erhält man $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ und schließlich $a^2 + b^2 = c^2$.

Wie könnte man nun solche Tripel von ähnlichen Figuren konstruieren? Im Falle der Quadrate, Halbkreise und gleichseitigen Dreiecke war das ja sehr einfach. Die Figuren sollen zum Beispiel rechtwinklige Dreiecke sein, und der Flächeninhalt des Dreiecks über der Hypotenuse soll $A_3 = \frac{1}{2}cz$ sein.

Wie im Bild 114/1 angedeutet, ermitteln wir dann die fehlenden Katheten der beiden anderen Dreiecke.

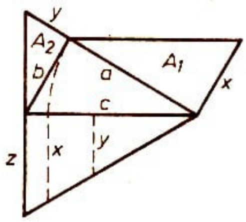


Bild 114/1

Aus $x : a = z : c$ folgt $x = \frac{az}{c}$, und aus $y : b = z : c$ folgt $y = \frac{bz}{c}$.

Dieses Tripel von Dreiecken erfüllt unsere Bedingung, und es gilt demnach auch die Beziehung zwischen den Flächeninhalten. Überzeugt euch durch eine Rechnung!

Es sind aber auch interessante Kombinationen von Figurentripeln möglich, wie sie uns das Bild 114/2 zeigt. In ihm sind die Bilder 112/3 und 113/2 kombiniert worden.

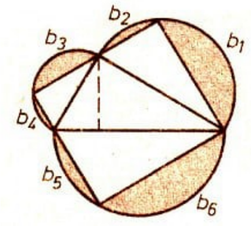


Bild 114/2

Für die Flächeninhalte der Dreiecke gelte $A_3 = A_1 + A_2$, für die Flächeninhalte der Halbkreise $B_3 = B_1 + B_2$. Dann ist

$$B_3 - A_3 = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$$

Somit gilt auch für die Flächeninhalte b_i der sechs entstehenden Kreissegmente die Beziehung

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_5 + b_6$$

Berühmt sind die sogenannten: "Möndchen des Hippokrates". Sie entstehen, wenn man den Halbkreis über der Hypotenuse in die Halbkreise über den Katheten hineinzeichnet (Bild 114/3).

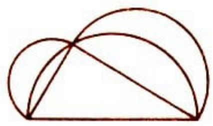


Bild 114/3

Ihren gemeinsamen Flächeninhalt können wir leicht bestimmen. Es ist

$$A_M = A_1 + A_2 + A_{Dr} - A_3$$

A_M, A_{Dr} sind die Flächeninhalte der Möndchen bzw. des Dreiecks.
Wegen $A_1 + A_2 = A_3$, ist also $A_M = A_{Dr}$. Hippokrates zeigte mit diesem Beispiel, dass auch nicht geradlinig begrenzte Figuren quadrierbar sind.

Auch Kreissektoren und Kreissegmente sind ähnlich, wenn sie durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen, d. h., wenn sie gleiche Öffnungswinkel haben. Die Bilder 115/l und 115/2 sowie 115/3 und 115/4 zeigen die jeweils gleichen Flächeninhalte. Wer gern rechnet, mag die Beziehung zwischen ihnen bestätigen.

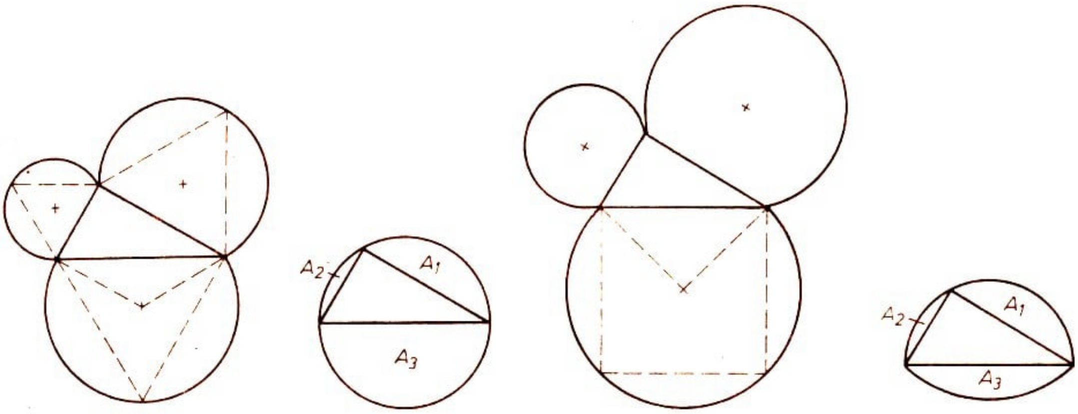


Bild 115/1-4

In den Bildern 115/5 bis 115/8 wird am Beispiel des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks nochmals der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten von Möndchen und dem des Dreiecks veranschaulicht.

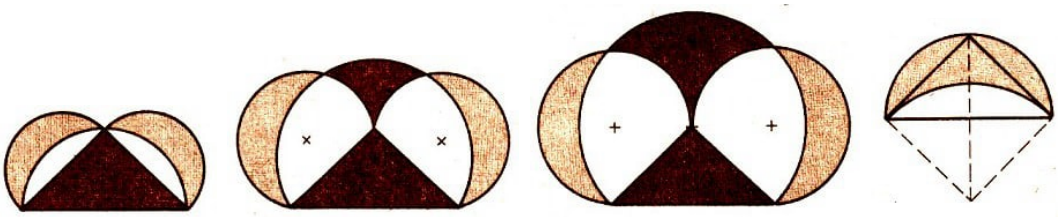
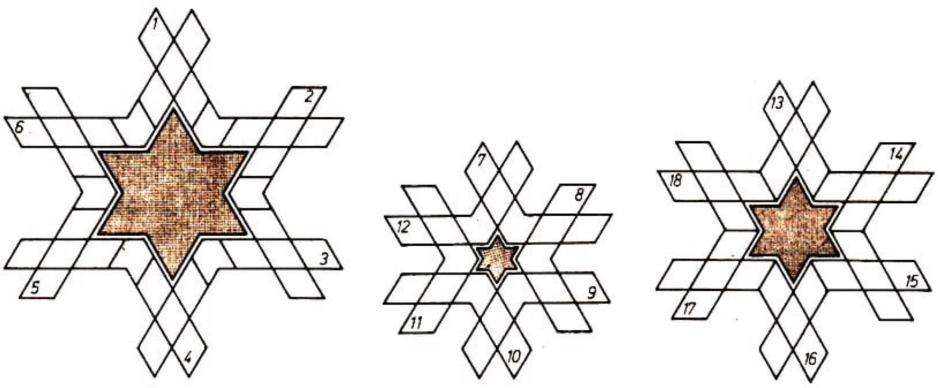


Bild 115/5-8

Anmerkung: Hippokrates von Chios war ein griechischer Mathematiker und lebte um 440 v.u.Z.

48 Rätsel

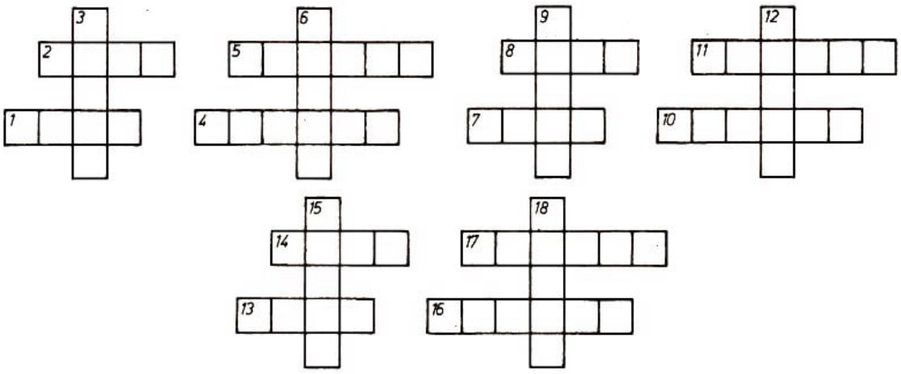
48.1 Rätselsterne



1. graphische Darstellung einer quadratischen Funktion
2. Eigenschaft von Zahlen $x < 0$,
3. Bestandteil einer physikalischen Größe,
4. Teil eines Ganzen,
5. soviel wie "verhältnismäßig"

6. mit Hilfe von Ziffern dargestellt,
7. Seite eines gleichschenkligen Dreiecks,
8. zweigliedriger Term,
9. Einheit der Zeit,
10. Geburtsort des Mathematikers Leonhard Euler (1707 bis 1783),
11. Strecke, deren Randpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen,
12. erster programmgesteuerter elektronischer Rechner (USA 1946),
13. Term mit einem Exponenten,
14. veraltete, nur in der Seefahrt zulässige Geschwindigkeitseinheit,
15. Beleg für die Allgemeingültigkeit einer Aussage,
16. Zahlzeichen,
17. Teil eines Bruches,
18. gerichtete physikalische Größe.

48.2 Doppelkreuze



1. 10^1 (Vorsatz für Einheiten),
2. Zahlwort (diese Zahl darf niemals Divisor sein),
3. geometrisches Grundelement,
4. halber Durchmesser eines Kreises,
5. geometrisches Grundelement,
6. ebene Figur,
7. dt. Rechenmeister (um 1492 bis 1559)
8. 10^{12} (Vorsatz für Einheiten),
9. Körper,
10. allgemeingültige Aussage,
11. Zeiteinheit,
12. Körper,
13. einem Original zugeordnetes Objekt,
14. 10^6 (Vorsatz für Einheiten),
15. veraltete, nur noch in der Seefahrt erlaubte Längeneinheit,
16. Zeichengeräte
17. Wahrheitswert einer Aussage,
18. Teil einer Folge.

49 Rational oder irrational?

Wenn man im Bereich der rationalen Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert (Division durch 0 natürlich ausgeschlossen), dann erhält man als Ergebnis stets wieder eine rationale Zahl.
Führt man diese Rechenoperationen in der Menge der irrationalen Zahlen aus, dann ist das Ergebnis nicht immer eine irrationale Zahl.

Beispiele:
(1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl $\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{12}$ ist eine rationale Zahl.
Die Beispiele (1) und (2) lassen erkennen, dass im Falle der Multiplikation irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen relativ leicht entscheidbar ist, ob das Produkt rational oder irrational ist!

Wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind, dann ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ genau dann rational, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist.
Wir stellen uns nun die Frage, wie es mit der Summe irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen ist.
Dazu betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel:

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3} = \sqrt{5 \cdot 2\sqrt{6}}$

Das ist eine irrationale Zahl, denn: Da $\sqrt{6}$ irrational ist, ist es $2 \cdot 6$ und damit auch $5 + 2\sqrt{6}$.
(Produkt oder Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl können nicht rational sein, weil sonst die irrationale Zahl als Quotient bzw. Differenz rationaler Zahlen darstellbar wäre - im Widerspruch zur anfangs erwähnten Tatsache, dass man beim Rechnen mit rationalen Zahlen nur rationale Zahlen als Ergebnisse erhält.)

Die Wurzel aus $5 + 2\sqrt{6}$ muss dann ebenfalls irrational sein, weil die irrationale Zahl $5+2\sqrt{6}$ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl sein kann. Die allgemeine Frage lautet nunmehr:

In welchen Fällen ist $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rational, in welchen irrational, wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind?
Es stellt sich heraus, dass $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ unter den angegebenen Voraussetzungen stets irrational ist!

Beweis:
In Analogie zum Beispiel (3) kann man $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ in der Form

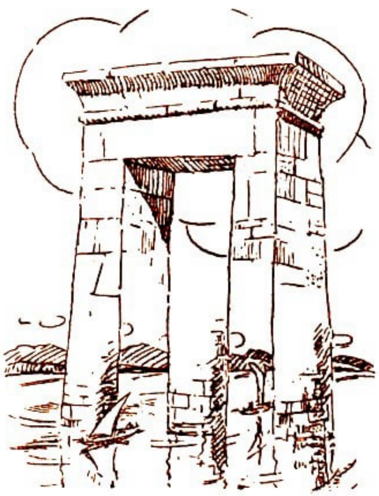
$$\sqrt{a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}}$$

darstellen. Nun lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. $\sqrt{ab}$ ist irrational.
Dann ist auch $a+b+2\sqrt{ab}$ irrational und $\sqrt{a+b+2\cdot\sqrt{ab}}$ ebenfalls (Die Begründung dafür ist bereits im Beispiel (3) gegeben worden.)

2. $\sqrt{ab}$ ist rational.
Dann muss $a\cdot b$ eine Quadratzahl sein, also alle in der Primfaktorzerlegung vorkommenden Primzahlen in gerader Anzahl enthalten. Da a und b keine Quadratzahlen sind (sonst wären $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ ja rationale Zahlen), muss es für a und b folgende Produktdarstellungen geben:

$$a=k^2\cdot P_1\cdot P_2\cdot ...\cdot P_n \qquad \text{und} \qquad b=l^2\cdot P_1\cdot P_2\cdot ...\cdot P_n$$



Dabei sind k^2 und l^2 von 0 verschiedene Quadratzahlen, die nicht weiter zerlegt zu werden brauchen. P_1 bis P_n sind Primfaktoren, die in beiden Produktdarstellungen noch je einmal vorkommen. (Mindestens einen solchen Primfaktor muss es geben, sonst wären a und b Quadratzahlen.)

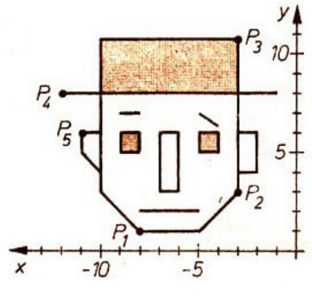
Setzen wir $P_1\cdot P_2\cdot ...\cdot P_n=P$, so gilt:

$$\begin{aligned} a+b+2\cdot\sqrt{ab} &= k^2\cdot P+l^2\cdot P+2\sqrt{k^2\cdot l^2\cdot P^2}\\ &= k^2\cdot P+l^2\cdot P+2kl\cdot P=P(k^2+2kl+l^2)=P\cdot(k+l)^2 \end{aligned}$$

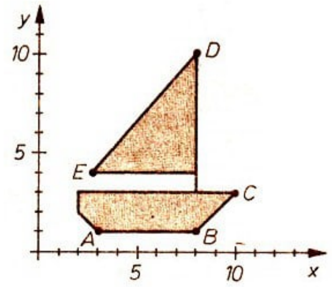
Damit ist $a+b+2\sqrt{ab}$ als Produkt der Quadratzahl $(k+l)^2$ mit den je einmal vorkommenden Primfaktoren $P_1,...,P_n$ dargestellt, ist selbst also keine Quadratzahl. Die Wurzel daraus ist somit irrational.

50 Interessante Koordinaten

118/1 Spiegele an der y-Achse!
Gib die Koordinaten der Punkte P_1', P_2', P_3', P_4' und P_5' an!



118/2 Spiegele an der y-Achse!
Gib die Koordinaten der Punkte A', B', C', D', E' an!



118/3 Stelle folgende Zahlenpaare in einem Koordinatensystem dar! Verbinde jeweils die Punkte im Koordinatensystem, deren Zahlenpaare untereinander stehen!

(2;0)	(3;1)	(5;1)	(8;0)	(11;1)
(2;2)	(3;2)	(5;2)	(8;2)	(11;2)
(3;3)	(4;2)	(6;2)	(9;2)	(12;2)
(7;3)	(4;1)	(6;1)	(9;0)	(12;1)
(7;7)	(3;1)	(5;1)		(11;1)
(8;10)				
(9;7)				
(9;3)				
(13;3)				
(14;2)				
(14;0)				

51 Gitterpunktpolygone - Flächenberechnung einmal anders

51.1 Eine merkwürdige Flächenformel

In diesem Beitrag wollen wir den Flächeninhalt von Gitterpunktpolygonen berechnen. Das sind ebene Figuren, die von einem geschlossenen Streckenzug begrenzt sind, wobei die Ecken Gitterpunkte eines vorgegebenen regelmäßigen Rasters (z. B. klein- oder langkariertes Rechenpapier) sind und die Seiten sich gegenseitig höchstens in den Eckpunkten schneiden (Bild 119/1).

Soll der Flächeninhalt einer solchen Figur bestimmt werden, so würde wohl jeder damit beginnen, sie in Drei- und Rechtecke zu zerlegen, deren Inhalte berechnen und anschließend diese Zahlen addieren.
Eine andere, verblüffende Methode ist folgende: Wir zählen die Gitterpunkte im Inneren der Figur (für Bild 119/1: $i = 21$) und die auf dem Rand ($r = 16$), dann bilden wir $i + \frac{r}{2} - 1 = 28$, welches die Maßzahl des Flächeninhaltes der Figur von Bild 119/1 ist.

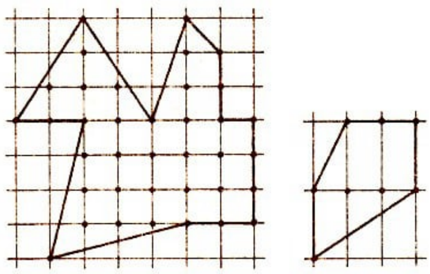


Bild 119/1, 119/2

Die Flächeneinheit ist dabei der Inhalt eines kleinsten Gitterpunktquadrates. Die gleiche Beobachtung macht man bei der Figur im Bild 119/2

$$i = 2, r = 6, \quad i + \frac{1}{2}r - 1 = 4 = A$$

wenn man berücksichtigt, dass die Flächeneinheit jetzt durch ein kleinstes Gitterpunktrechteck bestimmt wird. Zufall oder Gesetzmäßigkeit?
Wir werden im weiteren zeigen, dass für den Flächeninhalt eines Gitterpunktpolygons stets gilt:

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

(Dieser Zusammenhang wurde erstmals 1899 von G. Pick erkannt und bewiesen.)

51.2 Gitterpunktrechtecke

Zunächst untersuchen wir Vierecke, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und deren Seiten parallel zu den Geraden des Gitters verlaufen. Die Bezeichnung Gitterpunktrechteck für solche Figuren ist natürlich nur dann sachgemäß, wenn die nichtparallelen Gitterlinien rechtwinklig zueinander verlaufen.

Wir wollen dies vorläufig annehmen. Alle Aussagen gelten aber ebenso auch für andere Gitter (vgl. Aufgabe 123/1.)
Hat ein Gitterpunktrechteck Seiten der Längen a und b (jeweils in Einheiten der Seitenlänge eines kleinsten Gitterpunktrechtecks), so liegen $r = 2(a + b)$ Gitterpunkte auf dem Rand und $i = (a-1)(b-1)$ im Innern der Figur (vgl. Bild 119/3 mit $a = 6, b = 5$).
Wir erhalten also:

$$i = ab - a - b - +1 = ab - (a + b) + 1 = ab - \frac{r}{2} + 1$$

bzw. $ab = i + \frac{r}{2} - 1$

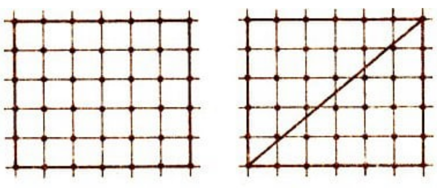


Bild 119/3, 119/4

Nun ist $A = ab$ aber genau der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks, somit gilt unsere Formel $A = i + \frac{r}{2} - 1$ also für jedes Gitterpunktrechteck.

Auch für Gitterpunktdreiecke mit zwei parallel zum Gitter liegenden Seiten gilt die Formel. Solche Dreiecke kann man sich entstanden denken aus der Halbierung eines Gitterpunktrechtecks entlang einer seiner Diagonalen (Bild 119/4).

Besitzen die auf dem Gitter liegenden Seiten die Längen a und b, so schließen wir für das Dreieck folgendermaßen:

$$r = (a + b) + 1 + r_d$$

Dabei ist r_d die Anzahl der auf der dritten Seite (Diagonale des zugehörigen Gitterpunktrechtecks) liegenden Gitterpunkte, die nicht Eckpunkte des Dreiecks sind. Wie das Beispiel aus Bild 119/3 zeigt, kann gelten: $r_d = 0$.

Für eine weitere Aussage über r_d betrachten wir das zugeordnete Gitterpunktrechteck mit Seitenlängen a und b. Es enthält dann $(a - 1)(b - 1)$ Gitterpunkte im Inneren.
Zählen wir diese als Punkte der beiden Teildreiecke, die durch Halbierung entlang einer Diagonalen entstehen, so erhalten wir für diese Zahl $(2i + r_d)$.

Dabei ist noch zu überlegen, dass die beiden Teildreiecke gleichviel innere Punkte enthalten; dies ist aber richtig, da sie durch Geradenspiegelungen an Gittergeraden und Verschiebungen um ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit miteinander zur Deckung gebracht werden können.
Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke für die Anzahl der inneren Gitterpunkte folgt:

$$r_d = (a - 1)(b - 1) - 2i$$

Setzen wir dies weiter oben ein, so ergibt sich:

$$r = a + b + 1 + ab - a - b + 12 - i$$

bzw. $\frac{1}{2}ab = i + \frac{r}{2} - 1$, was wegen $A = \frac{1}{2}ab$ richtig ist.

51.3 Zerlegung in Elementardreiecke

Um die Gültigkeit der Formel für allgemeine Gitterpunktpolygone zeigen zu können, denken wir uns eine solche Figur in eine endliche Anzahl von Teildreiecken zerlegt, die selbst wieder Gitterpunktdreiecke sind.
Sollte es unter diesen Dreiecke geben, die im Inneren noch Gitterpunkte enthalten, so zerlegen wir sie weiter, bis nur noch Gitterpunktdreiecke ohne Gitterpunkte im Inneren vorliegen.
Das gleiche geschieht mit Teildreiecken, die außer den drei Eckpunkten noch weitere Gitterpunkte auf ihren Seiten enthalten.

Damit erhalten wir unsere Ausgangsfigur zerlegt in eine endliche Anzahl von Gitterpunktdreiecken, die nur in ihren Ecken Gitterpunkte aufweisen. Gitterpunktdreiecke mit dieser Eigenschaft nennen wir Elementardreiecke.

Das Bild 120/1 zeigt eine mögliche Unterteilung des Gitterpunktpolygons im Bild 119/1 in Elementardreiecke.

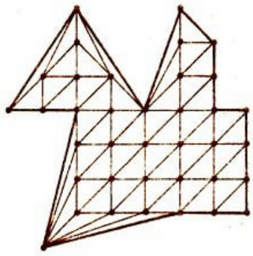


Bild 120/1

Wir zeigen nun, dass unsere Flächenformel für jedes Elementardreieck gilt, d. h., dass jedes derartige Gitterpunktdreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ hat

$$i = 0, r = 3; \quad i + \frac{r}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Für einige Spezialfälle kann man dies sofort nachprüfen; es gibt aber auch allgemeine Lagen (Bild 120/2).

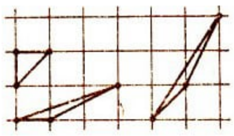


Bild 120/2

Die Kenntnis von der Richtigkeit der Formel für Gitterpunktrechtecke und deren Halbierungsdreiecke wird uns beim Beweis eine große Hilfe sein. Betrachten wir die längste Seite eines Elementardreiecks als Diagonale eines Gitterpunktrechteckes, so kommt das Elementardreieck ganz im Inneren dieses Gitterpunktrechtecks zu liegen.

Ist etwa F_0 ein Elementardreieck (Bild 121/1), so erhalten wir ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b und in ihm Teilfiguren (sämtlich Gitterpunktdreiecke und -rechtecke) F_1, F_2, F_3, F_4 ($b = b_2 + b_3$, $a = a_3 + a_4$ - Nummerierung entsprechend der angrenzenden Flächen).

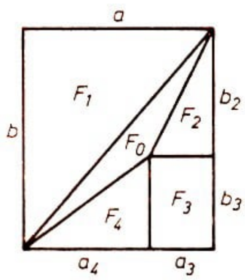


Bild 121/1

Offenbar gilt:

$$A_0 = A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

wobei für alle Flächeninhalte auf der rechten Seite der Gleichung die Flächenformel anwendbar ist. Wir zählen nun für diese Flächen die Gitterpunkte auf den Seiten bzw. im Inneren:

$F_1 : r_1 = a + b + 1$, im Inneren: i_1,
$F_2 : r_2 = a_3 + b_1 + 1$, im Inneren: i_2,
$F_3 : r_3 = 2(a_3 + b_3)$, im Inneren: i_3,

$F_4 : r_4 = a_4 + b_3 + 1$, im Inneren: i_4,
$F : r = a + b + b_2 + b_3 + a_3 + a_4; \quad i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + a_3 + b_3 - 1$

(Man beachte, dass $i_0 = 0$ ist und Punkte auf der gemeinsamen Seite von F_2 und F_3 bzw. von F_3 und F_4 zu inneren Punkten von F werden.) Also gilt:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \\ &+ \frac{1}{2}[a + b + 1 + a_3 + b_2 + 1 + 2(a_3 + b_3) + a_4 + b_3 + 1] - 4 \\ &= (i - a_3 - b_3 + 1) + \frac{1}{2}(r + 3) + a_3 + b_3 - 4 = i + \frac{1}{2}r - 3 + \frac{3}{2} = i + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und somit:

$$A_0 = A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = i + \frac{r}{2} - 1 - \left(i + \frac{r}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

51.4 Zusammenfügung aus Teilfiguren

Uns stehen nun Teilfiguren zur Verfügung, für die die Flächenformel gilt und aus denen sich jedes Gitterpunktpolygon zusammensetzen lässt. Speziell für Elementardreiecke hatten wir im vorhergehenden Abschnitt ein Verfahren angegeben, um eine entsprechende Zerlegung zu finden.

Betrachten wir nun zwei Gitterpunktpolygone F_1 und F_2, für die unsere Flächenformel gilt (also am Anfang etwa Elementardreiecke) und die gemeinsame Punkte auf einer Seite haben (Bild 121/2).

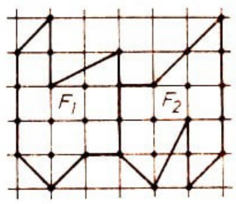


Bild 121/2

Zusammen ergeben sie dann das Gitterpunktpolygon F mit dem Flächeninhalt $A = A_1 + A_2$. Gilt für die Berechnung von A ebenfalls unsere Flächenformel? Ja, denn es ist:

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1 \quad , \quad A_2 = i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1$$

mit $r_1 = r'_k + \overline{r} + 2$ $(k = 1; 2)$, wobei r'_k die Anzahl der Gitterpunkte auf den Seiten von F_k ist, die nicht gleichzeitig zur zweiten Teilfläche gehören. $(\overline{r} + 2)$ Gitterpunkte gehören gleichzeitig zu F_1 und F_2, davon werden $\overline{r}$ beim Zusammenlegen zu inneren Punkten von F.
Es gilt also weiter:

$$r = r'_1 + r'_2 + 2 \quad , \quad i = i_1 + i_2 + \overline{r}$$

Somit ist:

$$i = i_1 + i_2 + \frac{1}{2}[(r_1 + r_1' - 2) + (r_2 - r_2' - 2)] = i_1 + i_2 + \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - 2 - \frac{1}{2}r + 1$$

$$i + \frac{1}{2}r - 1 = \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) + \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right)$$

also:

$$A = A_1 + A_2 = \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) + \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right) = i + \frac{1}{2}r - 1$$

Da wir nun jedes, Gitterpunktpolygon schrittweise aus Teilfiguren zusammensetzen können, für die jeweils die Flächenformel gilt, zeigt uns dieser Schluss, dass die Flächenformel auch für die Gesamtfläche gültig ist.

51.5 Andere regelmäßige Gitter

Neben einem Gitter, das aus Quadraten aufgebaut ist (orthogonales Gitter), existieren nur noch zwei weitere regelmäßige Gitter: das trigonale und das hexagonale (aus regelmäßigen Drei- bzw. Sechsecken).

In einem trigonalen Gitter können wir ohne Mühe je zwei kleinste Teildreiecke so zusammenfassen, dass ein Gitter entsteht, dessen kleinste Teilfiguren Rhomben sind (Bild 122/1).

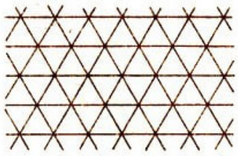
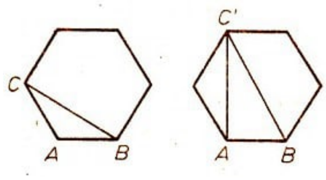


Bild 122/1

Für dieses Gitter gilt die schon bewiesene Flächenformel (vgl. Aufgabe 123/1). Da ein kleinster Teilrhombus den doppelten Flächeninhalt eines Ausgangsteildreiecks besitzt, folgt also für das trigonale Gitter:

$$A = 2\left(i + \frac{1}{2}r - 1\right)$$

Für Gitterpunktpolygone auf dem hexagonalen Gitter kann es keine Flächenformel geben, die nur mit inneren und Randpunkten dieses Gitters arbeitet.
Dazu betrachten wir ein kleinstes Teilsechseck in diesem Gitter und die Gitterpunktdreiecke ABC und ABC' (Bild 122/2).



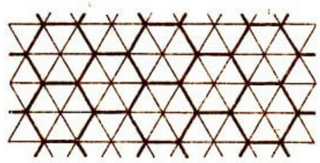


Bild 122/2, 122/3

Beide besitzen die gleiche Anzahl von inneren und Randpunkten, der Flächeninhalt von ABC' ist jedoch doppelt so groß wie der von ABC. Gibt es einen Ausweg?

Naheliegend ist die Zerlegung jedes Teilsechsecks des Gitters in Dreiecke (Bild 122/3). Dabei entsteht ein trigonales Gitter, in dem wir die eben gezeigte Flächenformel verwenden können.
Jeder Gitterpunkt des hexagonalen Gitters ist auch Gitterpunkt im trigonalen Gitter - aber es entstehen noch weitere Gitterpunkte im Symmetriezentrum der Sechsecke, die wir berücksichtigen müssen!

Seien für ein Gitterpunktpolygon i_0 und r_0 die Anzahl dieser zusätzlichen Punkte im Inneren bzw. auf dem Rand der Figur, so erhalten wir, da ein kleinstes Teilsechseck aus sechs Teildreiecken aufgebaut ist:

$$A = \frac{1}{6}\left[2(i+i_0) + \frac{1}{2}(r+r_0) - 1\right] = \frac{1}{3}(i+i_0) + \frac{1}{6}(r+r_0) - \frac{1}{3}$$

Für die Gitterpunktdreiecke in den Bildern 122/2 folgen hieraus mit $i = i_0 = 0$, $r = 3$ und $r_0 = 0$ (in 122/2a) bzw. $r_0 = 1$ (in 122/2b) die richtigen Ergebnisse: $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$.

123/1 Man überlege sich, warum die Formel für orthogonale Gitter auch für Gitterpunktpolygone auf einem Gitter, deren kleinste Teilfigur ein Rhombus ist, gilt. Als Flächeneinheit verwendet man dann die Fläche eines solchen Teilrhombus.

123/2 Zeige für orthogonale Gitter:
Für ein Gitterpunktpolygon F_1, welches ein "Loch" F_2 von der Gestalt eines weiteren Gitterpunktpolygons enthält, berechnet sich der Flächeninhalt A_1 nach:

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

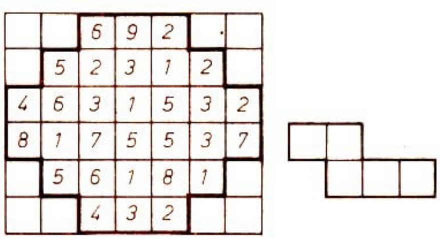
(i_1 - Anzahl der inneren Punkte von F_1; r_1, r_2 - Anzahl der Punkte auf dem äußeren bzw. inneren Rand von F_1, $r_2 \geq 3$)

52 Gute Beobachtungsgabe gefragt!

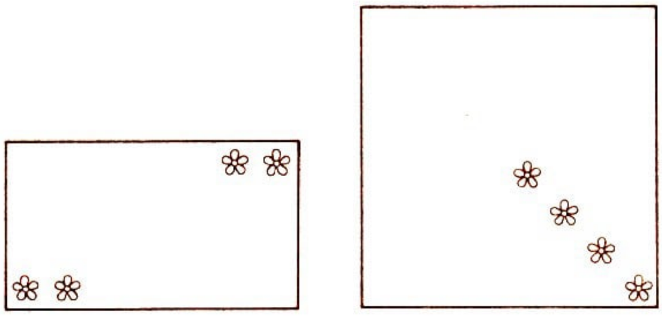
123/3 Die vorliegende Zahlenleiste soll in vier deckungsgleiche Teile zerlegt werden, deren Summe jeweils 35 beträgt.

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

123/4 Lege die Vorlage (bestehend aus 5 kleinen Quadraten) sechsmal so auf das große Quadrat, dass jeweils die Summe 20 erscheint!



123/5 Jede der beiden Figuren ist in vier kongruente (deckungsgleiche) Teile zu zerlegen. In jedem der Teile muss sich eine Blume befinden.



53 Wolf, Ziege und Kohlköpfe

Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache ist Anfang des 9. Jahrhunderts am fränkischen Hof entstanden. Keine der überlieferten Handschriften, die vor allem im 10./11. Jahrhundert mehr oder weniger sorgfältig von Kopisten angefertigt worden sind, nennt einen Autor.
Doch durch die Untersuchungen des Mathematikhistorikers M. Folkerts gewinnt die Vermutung, dass der angelsächsische Mönch Alcuin (735 bis 804) Verfasser dieser Sammlung sei, wieder an Wahrscheinlichkeit.

Alcuin war 781 als Gesandter an den Hof Karls des Großen (Karl I., seit 768 König der Franken) gekommen.
Er machte St. Martin in Tours zu einer der führenden Bildungsstätten des Fränkischen Reiches und amtierte als Leiter der Hofschule in Aachen. Er setzte sich dafür ein, das Wissen des Altertums zu pflegen und weiterzutragen. Die Klöster und Bischofsitze im Frankenreich sollten nach seinen Plänen Schulen erhalten.

In den Elementarschulen sollten Lesen und Schreiben, einfaches Rechnen sowie Religion und Psalmengesang, in den höheren Schulen die Sieben freien Künste gelehrt werden. Zu diesen gehörten die Unterstufe, Trivium genannt, mit Grammatik (der lateinischen Sprache), Rhetorik (Redeübungen auf dem Gebiet des Rechtswesens) und Dialektik (Denklehre, Erörterung wissenschaftlicher Fragen) und die Oberstufe, Quadrivium genannt, mit Arithmetik, Geometrie (zugleich mit Erdkunde und Naturgeschichte), Musik (Theorie und Pflege des Kirchengesangs) und Astronomie.

Die dem Alcuin zugeschriebene Aufgabensammlung enthält 56 Aufgaben. Unmittelbar auf die jeweilige Aufgabe folgt die Lösung.
Die Probleme stehen überwiegend in der römischen Tradition, daneben sind griechisch-byzantinische und arabische Einflüsse anzunehmen. Einige Aufgaben treten erstmals in dieser Aufgabensammlung auf.
Dazu gehören die Aufgaben 17 bis 20, die Transportprobleme behandeln: Bestimmte Lebewesen sind über einen Fluss zu setzen. Die Aufgabe 18 ist besonders populär geworden:

124/1 Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl über einen Fluss hinüberbringen und konnte kein anderes Boot finden, außer ein solches, das nur den Mann und mit ihm entweder den Wolf oder die Ziege oder die Kohlköpfe zu tragen vermochte. Natürlich wollte er alles unverletzt hinüberbringen.

Es durften also weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit den Kohlköpfen allein gelassen werden. Wer es kann, der möge zeigen, auf welche Weise der Mann alles unverletzt hat hinüberbringen können.

In der Aufgabe 19 wollen ein Mann, eine Frau und zwei Kinder über den Fluss (der Kahn trägt aber entweder nur den Mann oder die Frau oder die beiden Kinder); in der Aufgabe 20 handelt es sich um zwei Igel mit ihren Jungen; in der Aufgabe 17 sind drei Männer mit ihren Frauen über den Fluss zu setzen (keine der Frauen soll sich ohne ihren Bruder mit anderen Männern auf demselben Ufer befinden).

Mehrere der mittelalterlichen Aufgabensammlungen sind von der des Alcuin beeinflusst worden. In unterschiedlichen Varianten befinden sich die Transportaufgaben, später z. B. auch bei Chuquet, Tartaglia und Bachet.

54 Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten

Bei praktischen Aufgabenstellungen muss man ausgehend von einem Sachverhalt versuchen, ein mathematisches Modell aufzustellen. (Ein Modell ist dabei eine geeignete mathematische Beschreibung der in der Aufgabenstellung enthaltenen wesentlichsten naturwissenschaftlichen, technischen oder ökonomischen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten.)

Es ist also die vorliegende Aufgabe "in Formeln oder in Gleichungen zu fassen".
Dieses Modell wird dann mit Hilfe eines entsprechenden Verfahrens gelöst. Dabei geht es im allgemeinen um eine zahlenmäßige (numerische) Lösung. Vielfach verwendet man auch Rechenhilfsmittel (z.B. Tabellen, Rechner).

Beim zahlenmäßigen Lösen treten eine Reihe von Problemen auf. Sie sind einerseits bedingt durch die Tatsache, dass die Werte (Daten), die in die Rechnung eingehen, meist Näherungswerte sind (Messdaten, Tabellenwerte usw.), andererseits dadurch, dass man z. B. mit Digitalrechnern arbeitet, bei denen die reellen Zahlen durch eine endliche Ziffernfolge dargestellt werden und in denen nur elementare Operationen (Grundrechenoperationen, Vergleichsoperationen) möglich sind.

Häufig muss man auch die Ausgangsaufgabe durch eine "Ersatzaufgabe" annähern und zur Lösung ein Näherungsverfahren verwenden. Das führt dazu, dass sich Fehler "einschleichen" und fortpflanzen.
So muss man z. B. auch im Laufe der Rechnung ständig runden:

Diese Rundungsfehler können sich aufschaukeln. Einige Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten, sollen hier zusammengestellt und an Beispielen veranschaulicht werden.

Die Problematik soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Aufgabe: Es ist bei gegebenem Flächeninhalt A die Seitenlänge x eines Quadrates auszurechnen.

Modell: Es gilt $x = \sqrt{A}$. Damit erhält man als Gleichung

$$f(x) = x^2 - A = 0$$

Das mathematische Modell ist eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Lösung: Die erhaltene Gleichung kann man z. B. so lösen, dass man $\sqrt{A}$ mit Hilfe einer Näherungsformel berechnet. Mit Hilfe der Binomischen Reihe erhält man

$$\sqrt{A} = \sqrt{k^2 + b} \approx k + \frac{b}{2k} = \frac{1}{2}\left(k + \frac{A}{k}\right)$$

Falls $A = 24$ ist, ergibt sich z. B.

$$\sqrt{24} = \sqrt{16+8} \approx \frac{1}{2}\left(4 + \frac{24}{4}\right) = 5$$

(Tafelwert: 4,899).
Mit Hilfe einer bereits von Newton angegebenen Vorschrift

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{A}{x_i}\right); \qquad i = 0{,}1{,}2{,}...$$

und als Startwert x_0, könnte man schrittweise eine Folge von Näherungen für die Lösung der Gleichung berechnen.
(Man erhält ein sogenanntes Iterationsverfahren. Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Folge der Näherungslösungen gegen die exakte Lösung.)

Man erhält mit $x_0 = 5$:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{24}{5}\right) = 4{,}9 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(4{,}9 + \frac{24}{4{,}9}\right) = 4{,}899$$

Bei der Lösung der Gleichung treten die für das numerische Rechnen typischen Probleme auf: Auswahl eines Verfahrens (meist ein Näherungsverfahren); Rundung; Fortpflanzung von Eingangs- und Rundungsfehlern usw.

54.1 Quellen und Klassifizierung von Fehlern

In einer beliebigen mathematischen Aufgabenstellung treten meist verschiedene Variable und Parameter auf. Um eine konkrete Lösung zu erhalten, müssen für die Variablen und Parameter Werte - Zahlen - eingesetzt werden.

Beispiel: $A_\triangle = \frac{g \cdot h}{2}; g = 5$ cm$, h = 10$ cm; damit $A_\triangle = 25$ cm^2.

Die Gesamtheit aller Werte, die gegeben sein müssen, um die geforderte Lösung einer Aufgabe zu erhalten, heißen Anfangsdaten oder Anfangsinformationen.

Die allgemeine Lösung einer Aufgabe ist somit eine Funktion der Anfangsdaten [z. B.: $A_\triangle = f(g,h)$].

Bei den meisten Aufgaben sind diese Anfangsdaten Näherungswerte. Sie sind mit Fehlern behaftet, da sie z. B. Messergebnisse aus Experimenten, Werte aus Tabellen, durch Runden entstandene Zahlen oder Lösungen anderer Aufgaben sind. Man erhält also bei der Lösung einer Aufgabe Resultate, deren Genauigkeit von den Anfangsdaten abhängt.

Die Abweichung der exakten Lösung x von der Näherungslösung $\tilde{x}$ heißt Fehler $(\tilde{x}-x)$. Fehler, die beim Lösen von Aufgaben durch ungenaue Anfangsdaten entstehen, heißen Eingangsfehler.
Die Eingangsfehler hängen nicht von der mathematischen Theorie ab. Sie pflanzen sich fort, und man muss deren Auswirkungen auf das Resultat untersuchen.

Wenn man eine Aufgabe löst, so muss man diese meistens durch eine andere Aufgabe ersetzen, die praktisch lösbar ist. Sehr oft ist eine analytische Lösung nicht möglich. Außerdem will man auch Rechenhilfsmittel einsetzen. Soll z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl bestimmt werden, verwendet man Näherungsformeln, z. B.

$$\sqrt{A} = \sqrt{k^2+b} \approx \frac{1}{2}\left(k + \frac{A}{k}\right)$$

oder man bestimmt die Wurzel iterativ.
Die Lösung der Ersatzaufgabe muss der der Ausgangsaufgabe benachbart sein.

Es dürfen keine zu großen Abweichungen auftreten. Wenn man genaue Anfangsdaten hat und anstelle der Lösung der Aufgabe die Lösung der Ersatzaufgabe vornimmt, erhält man natürlich nur eine Näherung der exakten Lösung.
Fehler, die dadurch entstehen, dass die Aufgabe durch eine Ersatzaufgabe angenähert wird, heißen Verfahrensfehler.

Bei der zahlenmäßigen Lösung einer Aufgabe erhält man außerdem Fehler durch Ungenauigkeiten im Rechengang selbst. So werden z. B. irrationale Zahlen $(\sqrt{2}, \pi, e)$, die im Rechenprozess benötigt werden, durch Näherungswerte ersetzt.
Außerdem entstehen, da ein Rechner mit Zahlen, die aus endlich vielen Ziffern bestehen, rechnet, weitere Ungenauigkeiten durch das Runden.
Fehler, die durch Ungenauigkeiten im Rechengang entstehen, heißen numerische Fehler.

Der vollständige Fehler einer Lösung $(\tilde{x}-x)$ setzt sich aus Eingangs-, Verfahrens- und numerischen Fehlern zusammen:

vollständiger Fehler

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eingangsfehler (Anfangsdaten)}\\ \text{Verfahrensfehler (Ersatzaufgabe)}\\ \text{numerischer Fehler (Ungenauigkeiten im Rechengang)}\end{array}\right\}\ \text{Lösung}$$

Neben den bisher genannten Erscheinungen können noch weitere Probleme beim numerischen Rechnen auftreten. So können z. B. kleine relative Fehler in den Anfangsdaten zu großen relativen Fehlern im Ergebnis führen.

54.2 Eingangsfehler und deren Fortpflanzung

$\varepsilon = \tilde{x} - x$, wobei $\tilde{x}$ der Näherungswert und x der exakte Wert ist, heißt absoluter Fehler; der Absolutbetrag der maximalen Abweichung vom exakten Wert heißt absolute Fehlerschranke Δx. Es gilt

$$|\varepsilon| = |\tilde{x} - x| = |x - \tilde{x}| \leq \Delta x$$

und $\tilde{x} - \Delta x \leq x \leq \tilde{x} + \Delta x$.
Will man die Fortpflanzung von Fehlern untersuchen, dann muss man davon ausgehen, dass der Wert maximal mit dem Fehler $\pm\Delta x$ behaftet sein kann. Man muss also mit $x = \tilde{x} + \Delta x$ rechnen.

Beispiel: Die Länge eines Eisenträgers sei $x = (134{,}44 \pm 0{,}01)$ m. Die absolute Fehlerschranke ist dann $\Delta x = 0{,}01$ m.
Man kann das Messergebnis nur bis auf eine Genauigkeit von $\pm 0{,}01$ m angeben, x liegt zwischen 134,43 m und 134,45 m.
Die Fortpflanzung von eingangsbedingten Fehlern lässt sich allgemein untersuchen. Hier sollen nur Fehler von Summe, Differenz und Produkt betrachtet werden.

Es seien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ die Näherungswerte, Δx und Δy die absoluten Fehlerschranken, $\varepsilon_x = \tilde{x} - x$ und $\varepsilon_y = \tilde{y} - y$ die absoluten Fehler. Es gilt dann:

$$\varepsilon_{x+y} = (\tilde{x} + \tilde{y}) - (x + y) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

damit

$$|\varepsilon_{x+y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$$

und $\Delta(x + y) \leq \Delta x + \Delta y$.

$$\varepsilon_{x-y} = (\tilde{x} - \tilde{y}) + (-x + y) = \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

damit

$$|\varepsilon_{x-y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$$

und $\Delta(x - y) \leq \Delta x + \Delta y$.

$$(\tilde{x} - \varepsilon_x)(\tilde{y} - \varepsilon_y) = \tilde{x}\tilde{y} - (\varepsilon_x\tilde{y} + \varepsilon_y\tilde{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y)$$

damit

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x\tilde{y} + \varepsilon_y\tilde{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y$$

$$|\varepsilon_{xy}| \leq |\varepsilon_x||\tilde{y}| + |\varepsilon_y||\tilde{x}| + |\varepsilon_x||\varepsilon_y| \leq |\tilde{x}|\Delta y + |\tilde{x}|\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Beispiel: Die Seiten eines Quadrates haben die Länge $(113{,}5 \pm 0{,}1)$ m. Für den Umfang erhält man $(454{,}0 \pm 0{,}4)$ m, für die Fläche als Fehlerschranke $\Delta A = 22{,}7$ m^2.

Man kann sich vorstellen, dass bei vielen Rechenoperationen sich die Eingangsfehler sehr stark aufschaukeln können und damit das Ergebnis verfälschen.

Beim Potenzieren erhält man als Fehlerschranke

$$\Delta(x^n) = n \cdot |\tilde{x}|\Delta x$$

Wenn man ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus löst, muss man eine Vielzahl von Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen) ausführen.
Man kann sich also vorstellen, dass sich bei einem solchen direkten Verfahren, wie es der Gaußsche Algorithmus ist, die Fehler sehr stark fortpflanzen.

54.3 Verfahrensfehler

Bei der Lösung einer Aufgabe können verschiedene Verfahren gleichwertig sein. Sie würden bei exakter Rechnung dasselbe Ergebnis liefern, können aber beim Rechnen mit endlicher Stellenzahl (so wie man in der Praxis tagtäglich rechnet, auch auf Rechnern) völlig verschiedene Ergebnisse bringen.
Die Auswirkungen solcher Verfahrensfehler sollen an zwei Beispielen demonstriert werden.

Beispiel: Es ist

$$S = 1{,}5 \cdot 1{,}3 + 2{,}5 \cdot 0{,}7 + 3{,}5 \cdot 0{,}5 + 3{,}7 \cdot 1{,}5 + 4{,}5 \cdot 0{,}3 + (-1{,}7) \cdot 1{,}3$$

zu berechnen.
Als exakten Wert erhält man $S = 10{,}14$. Wenn man ohne Rundung multipliziert, aufsummiert und anschließend auf eine Kommastelle rundet, erhält man $\tilde{S}_1 = 10{,}1$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_1 - S = -0{,}04$.

Wenn man multipliziert, nach jeder Teilmultiplikation das Produkt rundet und dann summiert, erhält man $\tilde{S}_2 = 10{,}4$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_2 - S = 0{,}26$.
Wenn man auf Einer rundet, anschließend multipliziert und addiert, erhält man $\tilde{S}_3 = 15$ mit dem Fehler $\tilde{S} - S = 4{,}86$.

Beispiel: Für den Ausdruck z gilt

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)^2} = (\sqrt{2}-1)^4 = [(\sqrt{2}-1)^2]^2 \\ &= (3-2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 4 \cdot 2 = 17 - 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Berechnet man den Ausdruck mit Hilfe der vier verschiedenen Verfahren (Formeln), so erhält man mit $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $z_1 = 0{,}0289$, $z_2 = 0{,}0283$, $z_3 = 0{,}0324$ und $z_4 = 0{,}0800$, also unterschiedliche Ergebnisse.
Wenn man mit $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ rechnet, erhält man $z_1 = 0{,}0278$, $z_2 = 0{,}0256$, $z_3 = 0{,}0400$ und $z_4 = 0{,}2000$.

54.4 Kondition eines Problems

Beim numerischen Rechnen spielt auch die Kondition des Problems eine Rolle. Da die Anfangsdaten im Normalfall mit einem Fehler behaftet sind, weist auch bei exakter Rechnung das Ergebnis einen gewissen Fehler auf.

Es kann vorkommen, dass kleine Änderungen in den Ausgangsdaten zu großen Änderungen im Ergebnis führen. Wenn das der Fall ist, spricht man von einem schlechtkonditionierten Problem, sonst von einem gutkonditionierten.
Es handelt sich hierbei um eine Eigenschaft des Problems, nicht aber des verwendeten Algorithmus. Maßzahlen, die die Begriffe gut- und schlechtkonditioniert quantitativ erfassen, heißen Konditionszahlen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 6{,}0001y &= 8{,}0001 \end{aligned}$$

Man erhält $y = 1$ und $x = 1$.
Es werden nun kleine Änderungen in den Koeffizienten des Gleichungssystems (in den Ausgangsdaten) vorgenommen und die Auswirkungen auf das Ergebnis betrachtet:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5{,}9999y &= 8{,}0002 \end{aligned}$$

Man erhält $y = -2$ und $x = 10$.

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5{,}9999y &= 8{,}0001 \end{aligned}$$

Man erhält $y = -0{,}5$ und $x = 5{,}5$. Bei

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5{,}9999y &= 8{,}0004 \end{aligned}$$

erhält man $y = -4$ und $x = 16$.
Es ist deutlich zu erkennen, dass bei diesem Problem kleine Änderungen der Koeffizienten zu wesentlichen Änderungen im Ergebnis führen. Das Gleichungssystem ist schlechtkonditioniert.

54.5 Zusammenfassung

An Beispielen wurden einige Effekte demonstriert, die beim numerischen Rechnen auftreten können. Von solchen Effekten muss man wissen, wenn man zahlenmäßig ein Problem löst.
Man muss auch versuchen, solche Effekte quantitativ zu erfassen, damit man Aussagen über die Güte seiner Ergebnisse machen kann. Das ist für die Praxis von großer Bedeutung.
Es sind also u. a. Fehlerbetrachtungen und Untersuchungen zur Kondition eines Problems notwendig.

Die Numerische Mathematik, eine wichtige Disziplin der Mathematik, die Verfahren zur zahlenmäßigen Lösung von mathematischen Problemen entwickelt und diskutiert unter Beachtung der Verwendung von Rechenanlagen, hat u. a. auch die Aufgabe, die hier zusammengestellten numerischen Effekte (Eigenheiten des numerischen Rechnens) zu untersuchen und quantitativ zu erfassen.

55 Ist 11111111111 eine Primzahl?

55.1 Primzahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... heißen natürliche Zahlen. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl.
Es gibt also natürliche Zahlen, die sich als Produkt wenigstens zweier Zahlen, die größer als 1 sind, darstellen lassen. (Man spricht von zusammengesetzten Zahlen.) Zum Beispiel sind 10, 1001, 5031943 solche Zahlen; es ist nämlich

$10 = 2 \cdot 5,$
$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$
$5031943 = 7 \cdot 449 \cdot 1601.$

Aber es existieren auch von 1 verschiedene natürliche Zahlen, die sich nicht als ein solches Produkt schreiben lassen, beispielsweise 2, 5, 7, 11, 13, 449, 1601. Diese Zahlen heißen Primzahlen.
Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Auch die Zahlen 3041977, $2^{61} - 1$, $2^{19937} - 1$ sind Primzahlen. Die größte bekannte Primzahl scheint gegenwärtig die Zahl $2^{216091} - 1$ zu sein.

Schon der griechische Mathematiker Euklid (um 300 v. u. Z.) konnte beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Ist eine natürliche Zahl keine Primzahl, so kann man sie (schrittweise) in ein Produkt zerlegen, in dem alle Faktoren Primzahlen sind. Das kann sicher auf verschiedenen Wegen geschehen. Überdies kann man die Primzahlfaktoren noch in beliebiger Reihenfolge schreiben.
Doch abgesehen von dieser Willkür in der Anordnung führen verschiedene Wege der Zerlegung immer zur gleichen Produktzerlegung der Zahl in Primzahlen.

Jede natürliche Zahl ist also (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar. Beispiele sind die eingangs angegebenen Produkte. Weitere Beispiele sind

$17 = 17,$
$222 = 2 \cdot 3 \cdot 37,$
$10121804 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 115 \cdot 9557,$
$18021851 = 223 \cdot 77347.$

Würde übrigens die Zahl 1 als Primzahl angesehen werden, so würde die Eindeutigkeit verloren gehen. So hätte z. B. 18 die verschiedenen Zerlegungen

$$2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Die Primzahlen sind nicht nur (im beschriebenen Sinne) die Bausteine für den multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen. Für sie gelten viele (zahlentheoretische) Gesetzmäßigkeiten, die für zusammengesetzte Zahlen falsch sein können.
Als einige Kostproben sollen die folgenden Aussagen (ohne Beweis) dienen.

A 1: (nach Wilson, 1741 bis 1793):
Ist p eine Primzahl, so ist die Zahl $(p-1)!+1$ durch p teilbar.
(Für eine natürliche Zahl n bezeichnet hier $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .... \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.)
Gilt umgekehrt für eine natürliche Zahl m, dass $(m-1)!+1$ durch m teilbar ist, so muss m eine Primzahl sein!

A 2: (nach Fermat, 1601 bis 1665):
Jede Primzahl p der Form 4 + 1 ist eine Summe zweier Quadratzahlen. Beispiele sind $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$.
Die Umkehrung ist nicht richtig; die Summe zweier Quadrate braucht keine Primzahl zu sein: $1^2 + 3^2 = 10$, $3^2 + 9^2 = 90$, $2^2 + 11^2 = 125$.

Nicht jede natürliche Zahl ist als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, z. B. 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 1001, 21, 77.

A 3: (nach Fermat):
Ist p eine Primzahl, so ist für jede natürliche Zahl a die Zahl $a^p - a$ durch p teilbar.

55.2 Fermatscher Satz

Die Aussage A 3 wurde zuerst von Fermat im Jahre 1640 ausgesprochen; er hat jedoch keinen Beweis veröffentlicht. Der erste bekannte Beweis stammt von Leibniz (1646 bis 1716). Wir brauchen den folgenden Spezialfall des Fermatschen Satzes.

Satz 1: Ist p eine Primzahl, so ist $2^p - 2$ durch p teilbar. (Dieses bedeutet, dass 2^p bei der Division durch p den Rest 2 lässt. Beispiele: siehe Tabelle 1.

Tabelle 1

n	2^n	$2^n - 2$	$2^n - 2$ durch n teilbar?
1	2	0	ja
2	4	2	ja
3	8	6	ja
4	16	14	nein
5	32	30	ja
6	64	62	nein
7	128	126	ja
8	256	254	nein
9	512	510	nein
10	1024	1022	nein
11	2048	2046	ja
12	4096	4094	nein
13	8192	8190	ja
14	16384	16382	nein
15	32768	32766	nein

Beweis: Nach dem binomischen Satz ist

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}$$

also wegen $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$

$$2^p - 2 = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + ... + \binom{p}{p-1}$$

Die Zahlen

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p-0}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} ... \frac{p-(k-1)}{k} \quad (0 < k < p)$$

sind ganze Zahlen. Da p nicht den Nenner teilt, muss p den Quotienten teilen, d. h., jede Zahl $\binom{p}{k}$ ist ein Vielfaches von p und damit auch die Summe

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + ... + \binom{p}{p-1} = 2^p - 2$$

Der bewiesene Satz lässt sich auch so formulieren:
Ist für eine natürliche Zahl n die Differenz $2^n - 2$ nicht durch n teilbar, so kann n keine Primzahl sein.

55.3 Ist n eine Primzahl?

Es ist im allgemeinen, insbesondere für große Zahlen, nicht leicht, von einer Zahl n nachzuweisen, dass sie eine Primzahl ist, oder (falls sie keine Primzahl ist) ihre Zerlegung in Primzahlen anzugeben.

Satz 2: Ist eine Zahl n nicht Vielfaches einer Primzahl p, für die $p^2 \leq n$ ist, so ist n eine Primzahl.

Beweis:
Wäre n keine Primzahl, so ließe sich n in (sagen wir $r \geq 2$) Primzahlen zerlegen:

$$n = p_1 \cdot ... \cdot p_r$$

Da n nicht Vielfaches einer Primzahl p ist, für die $p^2 \leq n$ ist, müsste $p_1^2 > n$, $p_2^2 > n$, ..., $p_r^2 > n$ also

$$n^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot ... \cdot p_r^2 > n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$$

sein. Wegen $r > 2$ ist dies aber unmöglich.

Das in Tabelle 2 angegebene "Programm" (basierend auf diesem Satz) ermöglicht es, die Primzahlzerlegung einer ungeraden Zahl r prinzipiell zu finden.
Dabei denken wir uns zwei "Speicher" I und II gegeben. Durch „[I]“ wird die Zahl bezeichnet, die sich im Speicher I befindet. Analog „[II]“.
Der Befehl "Speichere eine Größe in einem Speicher!" bedeutet, dass ein evtl. schon vorhandener Inhalt dieses Speichers gelöscht und durch die neue Größe ersetzt wird.

Die "angezeigten" Zahlen sind die gesuchten Primfaktoren von n.

Die in Tabelle 3 durchgerechneten Zahlenbeispiele werden das Verständnis der Tabelle 2 erleichtern. (Die Anzeige der Primfaktoren erfolgt in den Schritten 08 bzw. 04.)

Man kann den Befehl 09 natürlich auch ersetzen durch 09*:

"Speichere die auf [II] folgende Primzahl im Speicher II!" und so in Tabelle 3 einige Zeilen einsparen.

Tabelle 2[7]

Schritt	Befehl
01	Speichere n im Speicher. Gehe zu Schritt 02.
02	Speichere 3 im Speicher II. Gehe zu Schritt 03.
03	Verzweigung: Ist schon [I] $>\sqrt{[1]}$?
	Nein: Ist [II] $<\sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 05.
	Ja: Ist [II] $>\sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 04.
04	Zeige [I] an. Ende.
05	Dividiere [I] durch [II]. Gehe zu Schritt 06.
06	Verzweigung: Ist FRAC$\left(\frac{[I]}{[II]}\right) = a = 0$?
	Nein: Ist $a > 0$, so gehe zu Schritt 09.
	Ja: Ist $a = 0$, so gehe zu Schritt 07.
07	Speichere $\frac{[I]}{[II]}$ im Speicher I. Gehe zu Schritt 08.
08	Zeige [II] an und gehe zu Schritt 05.
09	Addiere 2 zur Zahl im Speicher II. Gehe zu Schritt 03.

Tabelle 3 (Zahlenbeispiele zur Tabelle 2)

01	02	03	04	05	06	07	08	09
111	3	$3>\sqrt{111}$ nein	-	$\frac{111}{3}=37$	ja	37	3	-
37	3	$3>\sqrt{37}$ nein	-	$\frac{37}{3}=12\frac{1}{3}$	nein	-	-	5
37	5	$5>\sqrt{37}$ nein	-	$\frac{37}{5}=7\frac{2}{5}$	nein	-	-	7
37	7	$7>\sqrt{37}$ ja	37	-	-	-	-	-

Ergebnis: $111 = 3 \cdot 37$

01	02	03	04	05	06	07	08	09
1001	3	$3>\sqrt{1001}$ nein	-	$\frac{1001}{3}=333\frac{2}{3}$	nein	-	-	5
1001	5	$5>\sqrt{1001}$ nein	-	$\frac{1001}{5}=200\frac{1}{5}$	nein	-	-	7
1001	7	$7>\sqrt{1001}$ nein	-	$\frac{1001}{7}=143$	ja	143	7	-
143	7	$7>\sqrt{143}$ nein	-	$\frac{143}{7}=20\frac{3}{7}$	nein	-	-	9
143	9	$9>\sqrt{143}$ nein	-	$\frac{143}{9}=15\frac{5}{8}$	nein	-	-	11
143	11	$11>\sqrt{143}$ nein	-	$\frac{143}{11}=13$	ja	13	11	-
13	11	$11>\sqrt{13}$ ja	13					

Ergebnis: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

Für größere Zahlen n wird man den in Tabelle 2 gegebenen "Algorithmus" mittels Computer anwenden können, um die multiplikative Zerlegung in Primzahlen zu finden. Als

[7] Hinweis zur Funktion FRAC: Während INT$(\frac{n}{m})$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{n}{m}$ bezeichnet, liefert FRAC$(\frac{n}{m})$ für einen Bruch $\frac{n}{m}$ den gebrochenen Teil dieser Zahl. Es gilt FRAC$(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}-INT(\frac{n}{m})$. Der Fall FRAC$(\frac{n}{m}) = 0$, d.h. $\frac{n}{m}$ =INT$(\frac{n}{m})$ tritt genau dann ein, wenn m ein Teiler von n ist.
Beispiele: INT$(\frac{8}{7}) = 1$, FRAC$(\frac{8}{7}) = \frac{1}{7}$, INT$(\frac{100}{5}) = \frac{100}{5} = 20$, FRAC$(\frac{100}{5}) = 0$.

es jedoch elektronische Rechner noch nicht gab, war es im allgemeinen eine mühevolle Arbeit, diese Zerlegung zu bekommen.
Auch nur die Entscheidung, ob eine gegebene Zahl n Primzahl ist oder nicht, ist ebenso mühevoll.

Immerhin erkannte 1876 Lucas (mittels eines besseren als in den Tabellen 2 und 3 beschriebenen Verfahrens), dass

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

eine Primzahl ist. Erst 75 Jahre später mit dem Erscheinen elektronischer Rechenanlagen fand man größere Primzahlen, nämlich die 44ziffrige Zahl

$$\frac{1}{17}(2^{148} + 1)$$

1971 wies Tuckerman mittels Computer nach, dass die 6002ziffrige Zahl $2^{19937} - 1$ eine Primzahl ist.
Im folgenden sollen nun (zunächst ohne Computer) Beispiele natürlicher Zahlen, die als Ziffern nur die 1 enthalten, betrachtet werden:

11 ist eine Primzahl.
111 ist keine Primzahl ($111 = 3 \cdot 37$).
1111 ist keine Primzahl (da $1111 = 11 \cdot 101$).
111111 ist keine Primzahl (da $111111 = 111 \cdot 1001 = 11 \cdot 10101$).
11111111 ist keine Primzahl (da $11111111 = 11 \cdot 1010101$).
111111111 ist keine Primzahl (da z. B. $111111111 = 111 \cdot 1001001$).
1111111111 ist keine Primzahl (da z.B. $1111111111 = 11 \cdot 101010101$).

Für die 5ziffrige Zahl 11111 findet man analog zu Tabelle 3 nach 20 Zeilen (bzw. nach 12 Zeilen, wenn man den Schritt 09 durch den Schritt 09* ersetzt) als Primteiler 41. Es ist $11111 = 41 \cdot 271$, also keine Primzahl.

Für die 7ziffrige Zahl 1111111 muss man bereits 119 (bzw. 51) Zeilen aufschreiben, um die Primzahl 239 als Teiler zu finden. Es ist $1111111 = 239 \cdot 4649$ also auch keine Primzahl.

Ist nun die 11ziffrige Zahl 11111111111 eine Primzahl?

Um dieses zu entscheiden, werden wir nicht den Satz 2, sondern gemäß einer (vom Rechenkünstler und Schnellrechner Z. Dase angeregten) Untersuchung des berühmten Mathematikers Carl Gustav Jacob Jacobi (10. 11. 1804 bis 18. 2. 1,851) den Satz 1 benutzen.

55.4 Der Rechenkünstler Z. Dase

Für viele zahlentheoretische Untersuchungen ist es nützlich, die Primfaktoren der natürlichen Zahlen und die Primzahlen unterhalb einer bestimmten Grenze zu kennen. Man hat sich seit langem darum bemüht, diese in Tabellen zusammenzustellen.

Bis um die Jahrhundertwende besaß man solche Faktorentafeln bis zur 9. Million einschließlich.
Die Faktorentafeln für alle Zahlen der 7., 8. und 9. Million mit den darin vorkommenden Primzahlen wurden von Zacharias Dase (23. 6. 1824 bis 11. 9. 1861) ermittelt. (Sie erschienen in drei Bänden zwischen 1862 und 1865 in Hamburg.)

Bereits mit 15 Jahren trat Dase öffentlich als Schnellrechner und Rechenkünstler in deutschen Städten auf. In Wiesbaden multiplizierte er (im Kopf) eine 60ziffrige Zahl mit einer anderen 60ziffrigen Zahl in 2 Stunden 59 Minuten.
In München berechnete er die Quadratwurzel aus einer 100ziffrigen Zahl in 52 Minuten. Er ermittelte den Kreisumfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 (also die Zahl π) auf 200 Dezimalstellen. Durch sein Rechentalent und Zahlengedächtnis wurde er bei allen öffentlichen Auftritten von seinem Publikum staunend bewundert.

Dem ersten Mathematiker jener Zeit, Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen, wurde die Hilfe des Rechenkünstlers angeboten. Doch Gauß, der selbst eine außergewöhnliche vor allem durch die Beschäftigung mit der Zahlentheorie erworbene Rechenfertigkeit besaß, lehnte die Hilfe von jemand, der bloß mechanische Rechenfertigkeit besäße, entschieden ab.

In einem Brief an seinen Freund, den Astronomen H. C. Schumacher (1780 bis 1850), schrieb er: "Man muss hier zwei Dinge unterscheiden: ein bedeutendes Zahlengedächtnis und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz voneinander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtnis haben, ohne gut rechnen zu können ...
Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechnungsfähigkeit haben ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtnis.

Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel in eminentem Grade; ich gestehe aber, dass ich darauf sehr wenig Wert legen kann. Rechnungsfähigkeit kann nur danach taxiert werden, ob jemand auf dem Papier ebenso viel und mehr leistet als andere."

Gefördert durch A. v. Humboldt (1769 bis 1859) konnte Dase seit Mitte 1846 für etwa $1\frac{1}{2}$ Jahre sein Talent für verschiedene wissenschaftliche Zwecke der Akademie der Wissenschaften in Berlin zur Verfügung stellen. So führte Dase Rechnungen für die Mathematiker C. G. J. Jacobi (1804 bis 1851) und P.G.L. Dirichlet (1805 bis 1859), für den Physiker H. W. Dove (1803 bis 1879) und für den Geodäten J. J. Baeyer (1794 bis 1885) aus.

In diese Zeit fällt sicher auch Dases Erkenntnis, dass die Zahl 11111111111 keine Primzahl ist. Sechs Stunden intensiven Kopfrechnens waren für ihn dazu nötig. Welcher Methode hatte er sich dabei bedient?

55.5 C. G. J. Jacobi

Diese Frage stellte sich auch der nach Gauß größte deutsche Mathematiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, Carl Gustav Jacob Jacobi. In Potsdam geboren, studierte er in Berlin und wirkte dann als Mathematikprofessor in Königsberg (Kaliningrad). Seit 1844 war er an der Akademie der Wissenschaften in Berlin tätig.

Zusammen mit Dirichlet und dem Geometer J. Steiner (1796 bis 1863) entfaltete Jacobi hier eine mathematische Tätigkeit, die würdig die im 18. Jahrhundert durch G. W. Leibniz (1646 bis 1716), L. Euler (1707 bis 1783), J. H. Lambert (1728 bis 1777) und J. L. Lagrange (1736 bis 1813) begründete Tradition fortsetzte. (Berlin wurde wieder eine Hochburg der Mathematik.) Jacobi starb in seinem 47. Lebensjahr.

In seinem Nachlass, der im Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR in Berlin aufbewahrt ist, befindet sich unter zahlreichen unveröffentlichten, meist unvollendeten Manuskripten eines, das der Frage nach dem "Geheimnis" des von Dase erzielten Resultates über die Zahl 11111111111 gewidmet ist.
Auf dem Umschlag findet sich der Titel der Arbeit:

"Untersuchung, ob die Zahl 11111111111 eine Primzahl ist oder nicht. Ein Kuriosum, veranlasst durch Dase."

55.6 Die Idee für den Nachweis, dass 11111111111 keine Primzahl ist

Gewisse Kunstgriffe, deren sich viele Rechenakrobaten bedienen, finden ihre Begründung in dem Fermatschen Satz

(A 3): Ist p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl, so ist stets $a^p - a$ durch p teilbar.

Hier wird nur der Spezialfall $a = 2$ gebraucht: Ist p eine Primzahl, so lässt 2^p durch p dividiert den Rest 2.
Wenn somit (für eine natürliche Zahl n) 2^p durch n dividiert nicht den Rest 2 lässt, so ist n keine Primzahl.

Dieses wird für $n = 11111111111$ gezeigt. Es soll die Methode zunächst für $n = 111$ beschrieben werden. (Es kommt uns dabei nicht darauf an, auf diese - für 111 umständliche - Weise zu zeigen, dass 111 keine Primzahl ist, das ist offensichtlich - 111 ist durch 3 teilbar, vielmehr soll die Methode. an dem Beispiel $n = 111$ verständlich gemacht werden.)

Wir benutzen dabei die folgenden zwei Aussagen I und II.

I. Der Rest eines Produktes bei der Division durch n ist gleich dem Rest des Produktes der Reste der einzelnen Faktoren bei der Division durch n.

Beispiele: $n = 11$. Gesucht ist der Rest des Produktes $13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ bei der Division durch 11.
Die Reste der Faktoren 13, 15, 17 bzw. 19 sind 2, 4, 6 bzw. 8. Der Rest des Produktes $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ der Reste der Faktoren ist 10. Dies ist auch der Rest von $13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ durch 11.

Beweis von I.:

Es sei $a = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_m$ das gegebene Produkt. Haben die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_m$ die Reste $r_1, r_2, ..., r_m$ ($0 \leq r_1 < n$, ..., $0 \leq r_m < n$) bei der Division durch n, so gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 n + r_1 \\ a_2 &= q_2 n + r_2 \\ &\dots \\ a_m &= q_m n + r_m \end{aligned}$$

(mit natürlichen Zahlen $q_1, ..., q_m$)
Daher ist $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_m$ die Summe eines Vielfachen von n und $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_m$:

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_m = qn + r_1 r_2 ... r_m$$

Ist der Rest von $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_m$ bei der Division durch n gleich r ($0 \leq r < n$), so wird

$$r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_m = q'n + r$$

(mit einer natürlichen Zahl q') und damit

$$a = (q + q')n + r$$

d. h., r ist tatsächlich der Rest von a bei der Division durch n.

II. Ist r der Rest der Zahl 2^{2^k} bei der Division durch n ($0 \leq< r < n$), so ist der Rest von $2^{2^{k+1}}$ bei der Division durch n gleich dem Rest von r^2 bei der Division durch n.

Beispiele:

$$2^{2^3} = 2^8 = 256$$

lässt bei der Division durch 11 den Rest 3 ($256 = 23 \cdot 11 + 3$). Der Rest von

$$2^{2^4} = 2^{16} = 65536$$

ist $3^2 = 9$. Der Rest von

$$2^{2^5} = 2^{32} (= 4294967296)$$

ist gleich dem Rest von $9^2 = 81$ bei der Division durch 11, d.h., er ist 4.
Der Rest von $2^{2^6} = 2^{64}$ ist gleich dem Rest von $4^2 = 16$ bei der Division durch 11, d.h., er ist 5.

Beweis von II.:
Die Behauptung folgt aus

$$2^{2^{k+1}} = 2^{2^k \cdot 2} = (2^{2^k})^2$$

und aus I. (angewendet auf die zwei gleichen Faktoren 2^{2^k}).

Wir zeigen nun, dass 2^{111} bei der Division durch 111 den Rest 8 (also nicht den Rest 2) lässt. Es ist

$$111 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

Daraus folgt

$$2^{111} = 2^{2^6} \cdot 2^{2^5} \cdot 2^{2^3} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^0}$$

Mittels der Aussage II erhält man unschwer die Tabelle 4.

Tabelle 4

k	Rest von 2^{2^k} bei der Division des Restes durch 11	Quadrat des Restes
0	2	4
1	4	16
2	16	256
3	34	1156
4	46	2116
5	7	49
6	49	-

Aus ihr ergibt sich (mittels der Aussage I) der Rest von 2^{111} als Rest von $2{\cdot}4{\cdot}16{\cdot}34{\cdot}7{\cdot}49$ bei der Division durch 111, und dieser ist 8 (Tabelle 5).

Tabelle 5

Zahl	Die Zahl Rest hat denselben Rest bei der Division durch 111 wie die Zahl	Rest bei der Division Division durch 111
$2 \cdot 4$	$2 \cdot 4$	8
$2 \cdot 4 \cdot 16$	$8 \cdot 16$	17
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34$	$17 \cdot 34$	23
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7$	$23 \cdot 7$	50
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7 \cdot 49$	$50 \cdot 49$	8

55.7 Jacobis Manuskript

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, die Ausführungen Jacobis zu verstehen. Der Text des nachgelassenen Manuskripts (Jacobi-Nachlass II/27 m, Archiv der AdW der DDR) lautet [Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die nachfolgenden Anmerkungen]:

"Untersuchung, ob die Zahl 11111111111 eine Primzahl ist oder nicht".

Wenn 2^N durch N dividiert nicht den Rest 2 lässt, so ist N keine Primzahl. Setzt man N durch Addition aus Potenzen von 2 zusammen, so hat man, um diesen Rest zu finden, nur nach und nach die Reste der Zahlen von der Form 2^{2^n} zu suchen und diese miteinander zu multiplizieren.
Man wird daher zu wiederholten Malen eine Zahl zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest wieder zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest zu quadrieren haben u. s. f.

Bei der graden Leichtigkeit, mit welcher Herr Dase diese Operationen ausführt, konnte er in 6 Stunden erkennen, dass die Zahl $\frac{10^{11}-1}{9}$ keine Primzahl ist.
Ich will alle hierzu nötigen Rechnungsresultate hersetzen, wie sie von Herrn Dase im Kopf gefunden sind.

Wenn man nach und nach die möglichst höchsten Potenzen von 2 so lange addiert, aber ihre Summe kleiner als $N = 11111111111$ bleibt, so erhält man [1]:

$$\begin{array}{ll}
2^{33} & = 8589934592 \\
2^{31} & = 21... \\ \hline
 & 107... \\
2^{28} & = \quad 26... \\ \hline
 & 1100... \\
2^{26} & = \quad 67... \\ \hline
 & 1107... \\
2^{25} & = \quad 33... \\ \hline
 & 11106... \\
2^{22} & = \quad 41... \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & 111107... \\
2^{18} & = \quad 26... \\ \hline
 & 111109... \\
2^{17} & = \quad 13... \\ \hline
 & 11111104... \\
2^{12} & = \quad 40... \\ \hline
 & 11111108... \\
2^{11} & = \quad 20... \\ \hline
 & 11111110656 \\
2^{8} & = \quad 256 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & 11111110912 \\
2^{7} & = \quad 128 \\ \hline
 & 11111111140 \\
2^{6} & = \quad 64 \\ \hline
 & 11111111104 \\
2^{2} & = \quad 4 \\ \hline
 & 11111111108 \\
2^{1} & = \quad 2 \\ \hline
...10 &
\end{array}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned}11111111111 &= 2^{33} + 2^{31} + 2^{28} + 2^{26} + 2^{25} + 2^{22} + 2^{18} + 2^{17} + 2^{12} \\ &+ 2^{11} + 2^{8} + 2^{7} + 2^{6} + 2^{2} + 2^{1} + 2^{0}\end{aligned}$$

Es folgen jetzt die Reste R, welche die Zahlen 2^{2^n} von 2^{64} an durch N dividiert lassen: neben jedem steht sein vollständiges Quadrat Q.
Den Rest, welchen dasselbe durch N dividiert lässt, gibt das nächstfolgende R (Tabelle 6).

	n	R	Q
Tabelle 6	6	7227352390	52234622569238712100
	32	9765068449	95356561 813655265601
	33	3497720108	NB. Hier keine Zahl

Herr Dase ging hierbei von dem Werte $2^{64} = 184467...$ aus, welcher durch 111... dividiert den Quotienten $166...$ mit dem Rest $722...$ gibt. [2]
Die noch übrige Rechnung besteht darin, dass die Reste, welche die Potenzen $2^{2^{33}}$, $2^{2^{31}}$, etc. durch N dividiert lassen, nach und nach miteinander multipliziert werden, indem man nach jeder Multiplikation wieder den Rest nimmt, welchen das Produkt durch N dividiert lässt.

Diese Produkte und Reste gibt das folgende Schema:

$$\begin{array}{ll}
2^{2^{33}} & \equiv 349... \\
2^{2^{31}} & \equiv 73... \\ \hline
288... & 51129 \\
2^{2^{28}} & \equiv 374... \\ \hline
19... & \\
... & \\
1496324899\ [3] &
\end{array}$$

Man sieht daraus, dass für $N = 11111111111$
$2^N - 1$ durch N dividiert nicht den Rest 1, sondern den Rest 1496324899 [3] lässt, und daher 11111111111 keine Primzahl ist.

Ich bemerke noch, dass für die hier betrachtete Zahl 11111111111 die Divisionen sich auf eine einfache Addition und Subtraktion reduzieren.
Denn, da 10^{11} durch dieselbe dividiert den Rest 1 lässt [4], kann man, wenn man bloß den Rest wissen will, den eine durch 11111111111 dividierte Zahl lässt, von derselben die auf die ersten 11 Stellen folgenden abschneiden und zu der übrigbleibenden Zahl addieren. [5]
Bei der ersten zu dividierenden Zahl [6] 18446 744073709 551616 hat man auf diese Weise

$$\begin{array}{r} 73709551616 \\ +\ 184467440 \\ \hline 73894019056 \\ \text{-}66666666666 \\ \hline \text{Rest } 7227352390 \end{array}$$

wie oben. J.[7]

Anmerkungen [1] Im Manuskript sind die fehlenden Ziffern nicht angegeben. Man vergleiche das Ergebnis mit der Tabelle 7 der Potenzen von 2.
[2] In der Tabelle 8 sind die Reste der Zahlen 2^{2^n} für $n = 0, 1,2, ..., 33$ angegeben.

Tabelle 7 (Potenzen 2^k von 2)

k	2^k	k	2^k	k	2^k
0	1	12	4096	24	16777216
1	2	13	8192	25	33554432
2	4	14	16384	26	67108864
3	8	15	32768	27	134217728
4	16	16	65536	28	268435456
5	32	17	131072	29	536870912
6	64	18	262144	30	1073741824
7	128	19	524288	31	2147483648
8	256	20	1048576	32	4294967296
9	512	21	2097152	33	8589934592
10	1024	22	4194304		
11	2048	23	8388608		

[3] In der Tabelle 9 sind die Reste angegeben. Wir erhalten abweichend von Jacobi 2992649798 als Rest von $2^{11111111111}$ bei der Division durch 11111111111.

Tabelle 8 (Reste von 2^{2^n} bei der Division durch 11111111111)

n	Reste	n	Reste	n	Reste
0	2	12	9 692 349 458		
1	4	13	5 821 199 033	24	9 584 164432
2	16	14	4 361 220 893	25	4 976 889 147
3	256	15	11 063 253 259	26	3 996 304 087
4	65 536	16	7 331 410 141	27	377 052 477
5	4 294 967 296	17	539 580 072	28	3 746 590 548
6	7 227 352 390	18	9 657 992 206	29	1 169 976 378
7	3 094 391 659	19	7 645 070 126	30	2 869 465 109
8	6051 191545	20	9 819 904 626	31	739 609 070
9	3 534 545 105	21	9 144 949 589	32	9 765 068 449
10	10 515 502 227	22	8 409 792 173	33	3 497 720 108
11	9 369 939 622	23	4 870 419 084		

Tabelle 9 (Rest bei der Division durch 11111111111)

Zahl	Rest
2^{2^0}	$2 = r_1$
$r_1 \cdot 2^{2^1}$	$8 = r_2$
$r_2 \cdot 2^{2^2}$	$128 = r_3$
$r_3 \cdot 2^{2^6}$	$2878883707 = r_4$
$r_4 \cdot 2^{2^7}$	$8038661628 = r_5$
$r_5 \cdot 2^{2^8}$	$10289303406 = r_6$
$r_6 \cdot 2^{2^{11}}$	$956387382 = r_7$
$r_7 \cdot 2^{2^{12}}$	$1436213141 = r_8$
$r_8 \cdot 2^{2^{17}}$	$1146986783 = r_9$
$r_9 \cdot 2^{2^{18}}$	$10709789192 = r_{10}$
$r_{10} \cdot 2^{2^{22}}$	$40043007 = r_{11}$
$r_{11} \cdot 2^{2^{25}}$	$6953537925 = r_{12}$
$r_{12} \cdot 2^{2^{26}}$	$684266173 = r_{13}$
$r_{13} \cdot 2^{2^{28}}$	$11027977012 = r_{14}$
$r_{14} \cdot 2^{2^{31}}$	$10797151647 = r_{15}$
$r_{15} \cdot 2^{2^{33}}$	2992649798

Die Werte in den Tabellen 8 und 9 wurden freundlicherweise von Herrn Arlt auf einer EDVA im Rechenzentrum der Sternwarte Babelsberg errechnet.

[4] $10^{11} = 9 \cdot 11111111111 + 1$

[5] Diesen Rechenvorteil kann man auch bei den Divisionen durch 11, 111, 1111, ... anwenden.

Dazu einige Beispiele: Es soll der Rest von 5123 bei der Division durch 11 bestimmt werden. Es ist $10^2 = 9 \cdot 11 + 1$, d.h. $10^2 = 100$ lässt den Rest 1, folglich 200 den Rest 2, ..., 5100 denselben Rest wie 51. Man hat für 5123 den Rest 8:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +51 \\ \hline 74 \\ -66 \\ \hline \text{Rest } 8 \end{array}$$

(In der Tat, es ist $5123 = 465 \cdot 11 + 8$.) Es soll der Rest von 12345678 bei der Division durch 111 bestimmt werden. Es ist
$1000 = 10^3 = 9 \cdot 111 + 1$, d.h., 1000 lässt den Rest 1, folglich 12345000 denselben Rest wie 12345. Man hat für 12345678 den Rest 36:

$$\begin{array}{r} 12345 \\ +678 \\ \hline 13023 \\ -12987 \\ \hline 36 \end{array}$$

(In der Tat, es ist $12345678 = 11122 \cdot 111 + 36$.)
Als Rest von 13023 bei der Division durch 111 ergibt sich $13 + 23 = 36$.

[6] $2^{2^6} = 2^{64} = 2^{32}2^{32} = 18446744073709551616$.

[7] J. — Kurzzeichen für „Jacobi“ (Unterschrift).

55.8 Weitere Primzahlzerlegungen

Die Zahl 11111111111 ist also keine Primzahl. Ihre Primzahlzerlegung ist $21649 \cdot 513239$.
In der Tabelle 10 (nach S. Rösch, Bild der Wissenschaft, Heft 12, 1977), deren Zahlenwerte ebenfalls mit Hilfe des Computers gefunden wurden, werden abschließend die Primzahlzerlegungen der nur aus der Ziffer 1 (bis zu 33ziffrigen) bestehenden Zahlen angegeben. Als Primzahl erweisen sich darunter nur die 19-ziffrige Zahl $\frac{10^{19}-1}{9}$ und die 23ziffrige $\frac{10^{23}-1}{9}$.

Tabelle 10

Ziffern	Zahl	Primzahlzerlegung
2	11	1
3	111	3·37
4	1111	11·101
5	11111	41·271
6	111111	3·7·11·13·37
7	1111111	239·4649
8	11111111	11·73·101·137
9	111111111	3·3·37·333667
10	1111111111	11·41·271·9091
11	11111111111	21649·513239
12	111111111111	3·7·11·13·37·101·9901
13	1111111111111	53·79·265371653
14	11111111111111	11·239·4649·909091
15	111111111111111	3·31·37·41·271·2906161
16	1111111111111111	11·17·73·101·137·5882353
17	11111111111111111	2071723·5363222357
18	111111111111111111	3·3·7·11·13·19·37·52579·333667
19	1111111111111111111	1111111111111111111
20	11111111111111111111	11·41·101·271·3541·9091·27961
21	111111111111111111111	3·37·43·239·1933·4649·10838689
22	1111111111111111111111	11·11·23·4093·8779·21649·513239
23	11111111111111111111111	11111111111111111111111
24	111111111111111111111111	3·7·11·13·37·73·101·137·9901·99990001
25	1111111111111111111111111	41·271·21401·25601·182521213001
26	11111111111111111111111111	11·53·79·859·265371653·1058313049
27	111111111111111111111111111	3·3·3·37·757·333667· 440334654777631
28	1111111111111111111111111111	11·29·101·239·281·4649· 909091·121499449
29	11111111111111111111111111111	3191·16763·43037·62003·77843839397
30	111111111111111111111111111111	3·7·11·13·31·37·41·211·241·271·2161·9109·2906161
31	1111111111111111111111111111111	2791·6943319·57336415063790604359
32	11111111111111111111111111111111	11·17·73·101·137·353· 449·641·1409·69857·5882353
33	111111111111111111111111111111111	3·37·67·21649·5132239·- 1344628210313298373

56 Geometrie pseudoeuklidisch

Auf Grund unserer täglichen praktischen Erfahrungen sind wir es gewohnt, die axiomatisch aufgebaute (euklidische) Geometrie in unserer Vorstellung mit den auf einem Blatt Papier zeichenbaren ebenen Figuren zu verbinden. Zwei Figuren werden als kongruent angesehen, wenn die eine Bild der anderen bei einer Bewegung ist, die dem Bewegen gewöhnlicher Papierschnipsel entspricht.

In unserer Umwelt spielen rechte Winkel eine besondere Rolle. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass sich auch eine Reihe von Sätzen der Geometrie auf rechte Winkel beziehen; einer der wichtigsten davon ist der Satz des Pythagoras (Bild 140/1).

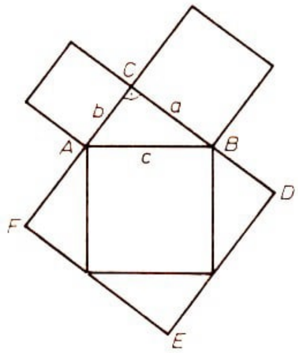


Bild 140/1

Der Satz des Pythagoras
Flächeninhalt des Dreiecks ABC: $A_\triangle = \frac{a\cdot b}{2}$
Flächeninhalt des Quadrats $CDEF$: $A_\square = (a+b)^2$
Es ist $A_\square = c^2 + 4\cdot A_\triangle$, d.h. $(a+b)^2 = c^2 + 2\cdot ab$, also $a^2+b^2=c^2$.

Der Begriff "rechter Winkel" scheint dabei kaum Probleme in sich zu bergen. Wir verbinden mit ihm vor allem zwei Aussagen (Bild 140/2):

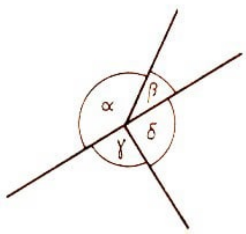


Bild 140/2
Die Teilung des gestreckten Winkels: γ und δ sind rechte Winkel, α und β nicht.

a) Zwei rechte Winkel ergänzen einander stets zu einem gestreckten Winkel.
b) Ein Winkel ist genau dann ein rechter, wenn er zu seinem Nebenwinkel kongruent ist.

Durch die in diesen Aussagen festgehaltenen Eigenschaften wird aus der Menge aller Winkel eine Klasse von Winkeln, eben die Klasse der rechten Winkel, besonders herausgehoben. Es ist jedoch durchaus möglich, anstatt der üblichen auch eine andere Klasse von Winkeln durch Angeben entsprechender Eigenschaften hervorzuheben und ihr den Namen rechter Winkel zu geben.

Dies hat seinen Grund darin, dass der Begriff "kongruent" und der Begriff "rechter Winkel" nicht beide abgeleitet sind, sondern einer axiomatisch gesetzt werden muss, um den anderen finden zu können.
Haben wir festgesetzt, was kongruent sein soll, leiten wir aus der Eigenschaft b den rechten Winkel ab.
Umgekehrt bestimmen wir mit b den Kongruenzbegriff, wenn wir die Klasse der rechten Winkel festlegen.

Definition 1: In der Ebene seien zwei Geraden e und f gegeben, die (im üblichen Sinne) senkrecht aufeinander stehen. Ein Winkel heißt genau dann rechter Winkel, wenn er durch eine der beiden durch seinen Scheitel verlaufenden Parallelen zu e bzw. f (im üblichen Sinne) halbiert wird.

Legt man der Geometrie diese Definition des Begriffs rechter Winkel zugrunde, so ist es üblich, von pseudoeuklidischer Geometrie zu sprechen.
(Um die Schreibweise zu vereinfachen, wollen wir die im Sinne pseudoeuklidischer Geometrie benutzten Begriffswörter kursiv drucken. Nicht kursiv gedruckte Begriffswörter beziehen sich auf die gewöhnlich euklidische Geometrie.)

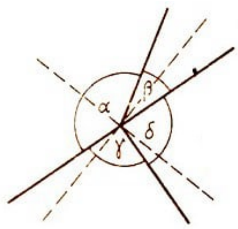


Bild 141/1
Pseudoeuklidische rechte Winkel

Im Bild 141/1 sind nach dieser Definition α und β rechte Winkel, δ und γ aber nicht.

Den Begriff "Flächeninhalt" benutzen wir wie gewohnt.
Das dürfen wir, weil wir entweder zeigen können dass kongruente Dreiecke immer flächengleich sind, oder weil wir mit dieser Maßgabe einen zum Satz des Pythagoras analogen Satz beweisen können. Dies wollen wir im folgenden tun.

Ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, wenn zwei Strahlen, die einen rechten Winkel bilden, von einer Geraden in genau zwei Punkten geschnitten werden.

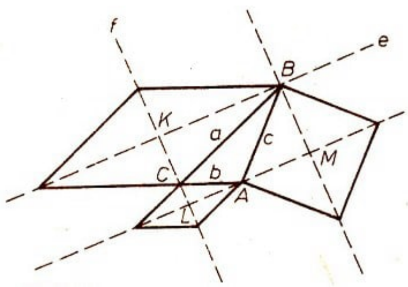


Bild 141/2
Der Satz des Pythagoras in der pseudoeuklidischen Geometrie $c^2 = a^2 + b^2$

Rhomben, deren Diagonalen zu e bzw. f parallel sind, sind in der pseudoeuklidischen Geometrie Quadrate, denn alle ihre Winkel sind rechte Winkel. Im Bild 141/2 sind über allen drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC Quadrate gezeichnet worden.

Benutzen wir die Begriffe Kathete und Hypotenuse analog zu den entsprechenden Begriffen in der üblichen euklidischen Geometrie, so können wir den pseudoeuklidischen Satz des Pythagoras wie folgt formulieren:

Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck unterscheiden sich die Flächeninhalte der Kathetenguadrate genau um den Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.

Beweis: Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei o.B.d. A. $\angle ACB$ der rechte Winkel und $\overline{CA} < \overline{CB}$. (Die Zeichen $<$, $\cong$ und $>$ werden im Sinne der üblichen euklidischen Geometrie gebraucht.)
Die Diagonalschnittpunkte der Quadrate über $\overline{AB}, \overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ seien M, K bzw. L. Das Viereck $BKLM$ ist in der üblichen Geometrie ein Rechteck.
Wir stellen (innerhalb der üblichen Geometrie) eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Teildreiecke $\triangle ACL$, $\triangle CBK$ und $\angle BAM$ des Vierecks $BKLM$ her (Bild 141/3).

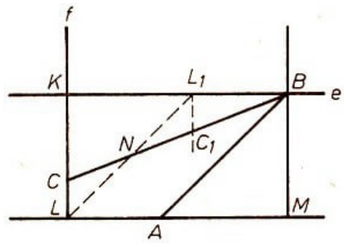


Bild 141/3
Zum Beweis des pseudoeuklidischen Analogons des Satzes des Pythagoras

Durch den Punkt L_1 auf der Strecke $\overline{KB}$, für den $\overline{L_1B} = \overline{AL}$ gilt, zeichnen wir eine Parallele zu BM. Diese schneidet die Strecke $\overline{CB}$ in einem Punkt C_1.
Da die Parallele zu e durch C den Winkel $\angle ACB$ voraussetzungsgemäß halbiert, ist $\angle LCA \cong \angle KCB$ und somit $\triangle CBK \sim \triangle CAL$.
Zusammen mit $\overline{L_1B} \cong \overline{AL}$ folgt daraus

$$\triangle CLA \cong \triangle C_1L_1B \tag{1}$$

Es gilt also

$$A_{KCC_1L} = A_{KCB} - A_{CLA} \tag{2}$$

Weiterhin ist

$$\triangle AMB \cong \triangle L_1KL \tag{3}$$

Ist N der Schnittpunkt von $\overline{LL_1}$ mit $\overline{CB}$, so gilt

$$\triangle LNC \cong \triangle L_1NC_1 \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$A_{KCC_1L} = A_{AMB} \tag{5}$$

was zusammen mit (2)

$$A_{AMB} = A_{KCB} - A_{CLA} \tag{6}$$

ergibt.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (6) mit dem Faktor 4, so erhält man die Behauptung des Satzes.

Wir definieren nun den Begriff Länge einer Strecke in der pseudoeuklidischen Geometrie.

Definition 2: Bezüglich einer festgelegten Einheit ist die Maßzahl der Länge einer Strecke gleich der Wurzel aus der Maßzahl des Flächeninhalts des Quadrats über dieser Strecke. Damit können wir den Satz des Pythagoras auch wie folgt formulieren:

Satz: Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Betrag der Differenz aus den Quadraten der Kathetenmaßzahlen gleich dem Quadrat der Hypotenusenmaßzahl.

Auch zu den übrigen grundlegenden Sätzen der ebenen euklidischen Geometrie (z. B. Satz des Thales, Peripheriewinkelsatz, Sätze über die Schnittpunkte der Höhen, Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden eines Dreiecks, Satz vom Feuerbach-Kreis) lassen sich in der pseudoeuklidischen Geometrie analoge Sätze formulieren und beweisen.

Dies hat seinen tieferen Grund darin, dass euklidische und pseudoeuklidische Geometrie der Ebene Zwillingstöchter der projektiven Geometrie sind, die allerdings über den heutigen Schulstoff hinausgeht. Die pseudoeuklidische Geometrie findet ihre Anwendung als Geometrie der schnellen Bewegungen in der Relativitätstheorie.

Die festen Richtungen e und f kennzeichnen die Lage der Bewegungslinien von Lichtsignalen in ebenen Raum-Zeit-Diagrammen.

56.1 Aufgaben

142/1 Welche Strecken haben die Länge Null?

142/2 Unter welchen Bedingungen haben zwei Strecken die gleiche Länge? Welche Form hat ein pseudoeuklidischer Kreis?

142/3 Beweise, dass sich die pseudoeuklidischen Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden!

142/4 Versuche, weitere von der üblichen euklidischen Geometrie abweichende Tatsachen in der pseudoeuklidischen Geometrie zu finden!

142/5 Formuliere und beweise einige der am Schluss des Abschnitts genannten Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie!

57 2 x 7 - Geometrieaufgaben

57.1 Wir betrachten Flächen

143/1 Ergänze die folgende Tabelle!

a	5 cm	9 mm			
b	7 cm		16 m		
A		108 mm^2	400 m^2	49 cm^2	81 cm^2

Dabei sind a und b die Seitenlängen und A der Flächeninhalt eines Rechtecks.

143/2 Lege aus a) 24, b) 11 Einheitsquadraten ein Rechteck!
Wieviel verschiedene Rechtecke lassen sich jeweils aus diesen Einheitsquadraten legen?

143/3 Lege aus 16 gleich langen Stäbchen die Begrenzung eines Rechtecks, ohne dabei ein Stäbchen zu zerbrechen!
a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?
b) Berechne für jeden dieser Fälle die Anzahl der Quadrate, deren Seitenlänge gleich einer Stäbchenlänge ist und die das Rechteck ausfüllen!
c) In welchem Fall ist diese Anzahl (also der Flächeninhalt) am größten?

143/4 Eine Glasscheibe ist 150 cm lang und 120 cm breit. Wieviel quadratische Glasscheiben lassen sich daraus gewinnen, wenn die Seitenlänge jeder dieser Scheiben 30 cm beträgt?

143/5 Ermittle die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt sich von dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen
a) 16 cm und 4 cm,
b) 16 cm und 5 cm
möglichst wenig unterscheidet!

143/6 Ein Fußballplatz ist mindestens 90 m, höchstens 120 m lang und mindestens 45 m, höchstens 90 m breit. Wie groß ist mindestens und wie groß ist höchstens die Fläche eines Fußballplatzes?

143/7 a) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dreimal so groß wie der eines anderen. Beide haben dieselbe Breite. Was kannst du über die Längen der beiden Rechtecke aussagen?
b) Länge und Breite eines Rechtecks sind jeweils dreimal so groß wie Länge und Breite eines anderen Rechtecks. Was weißt du über die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

57.2 Wir betrachten Körper

143/8 Ergänze die Tabelle!

Quaderlänge (cm)	5			
Quaderbreite (cm)	6	7		
Quaderhöhe (cm)				
Quadervolumen (cm^3)	240	140	100	5

(Die Zahlenwerte der Kantenlängen sollen natürliche Zahlen sein.)

143/9 Wieviel Quader unterschiedlicher Form lassen sich aus
a) 36, b) 7, c) 25 Einheitswürfeln

zusammensetzen?

143/10 In einer Kiste mit den Kantenlängen 24 cm, 36 cm, 48 cm sollen Päckchen mit den Kantenlängen
a) 4 cm, 12 cm, 16 cm;
b) 5 cm, 7 cm, 12 cm

verpackt werden. Wieviel Päckchen passen höchstens in die Kiste?

143/11 a) Das Volumen einer (quaderförmigen) Schachtel ist dreimal so groß wie das einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Länge und die gleiche Breite.
Was weißt du über die Höhen der Schachteln? b) Die Länge einer Schachtel ist doppelt so groß wie die Länge einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Breite und die gleiche Höhe. Was weißt du über die Rauminhalte der Schachteln? c) Länge, Breite und Höhe einer Schachtel sind jeweils doppelt so groß wie Länge, Breite und Höhe einer anderen Schachtel.
Was weißt du über die Rauminhalte der beiden Schachteln?

144/1 Ermittle die Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen sich von dem eines Quaders mit den Seitenlängen
a) 2 cm, 4 cm, 8 cm;
b) 2 cm, 2 cm, 7 cm

möglichst wenig unterscheidet!
Der Zahlenwert (die Maßzahl) der Kantenlänge soll eine natürliche Zahl sein.

144/2 Bei einem Quader, dessen Volumen 200 cm^3 beträgt, haben zwei gegenüberliegende Flächen zusammen einen Flächeninhalt von 100 cm^2. Wie groß ist deren Abstand?

144/3 Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen 12 cm und 8 cm wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge
a) 1 cm,
b) 2 cm,
c) 3 cm,
d) 4 cm
herausgeschnitten und der Rest zu einem offenen Kästchen gebogen. Ermittle dessen Volumen!

58 Geistesgymnastik

Im Jahre 1875 erschien das Buch "Sammlung algebraischer Aufgaben" von Friedrich Schütze.
Aus der Fülle der Aufgaben haben wir - zur Wiederholung von Grundkenntnissen - 16 Aufgaben ausgewählt.

144/4 Jemand kauft eine Mandel Leinwand, von der das Schock 48 Mark kostet. Er gab dafür 7,50 Mark in bar und eine fette Gans.

Welcher Preis wurde für die Gans angerechnet? (1 Mandel sind 15 Stück, 1 Schock sind 4 Mandeln.)

144/53 Wenn man von einer Zahl 30 subtrahiert, so ist die Differenz gleich der Summe aus 28 und 32. Wie lautet diese Zahl?

144/6 Eine Bäuerin brachte Eier auf den Markt zum Verkauf. Nachdem sie durch Unvorsichtigkeit elf Eier zerbrochen hatte, konnte sie die übrigen Eier noch zum Gesamtpreis von 1,70 Mark verkaufen.
Wieviel Eier hatte sie anfangs, wenn sie zwei Eier für 10 Pfennig verkaufte?

144/7 Die Zahl 45 ist so in fünf Summanden zu zerlegen, dass jeder folgende Summand stets um 1 größer ist als der vorhergehende Summand.
Um welche fünf Summanden handelt es sich?

144/8 Subtrahiert man vom Vierfachen einer Zahl 10, so erhält man das Sechsfache von 11. Um welche Zahl handelt es sich?

144/9 Nenne eine Zahl, deren achter Teil um 42 kleiner ist als die Zahl selbst!

144/10 Karl hatte acht Walnüsse. Würde Karl noch den fünften Teil der Anzahl der Walnüsse, die Heinz hat, erhalten, so würde Karl eine Mandel Walnüsse besitzen.
Wieviel Walnüsse hatte Heinz? (1 Mandel sind 15 Stück.)

145/1 Addiert man zum Zweifachen einer Zahl 64, so erhält man das Sechsfache dieser Zahl.
Um welche Zahl handelt es sich?

145/2 Beim Lichten eines Waldes wurden insgesamt 357 Bäume gefällt, und zwar $\frac{1}{3}$mal soviel Buchen wie Tannen, $\frac{3}{5}$mal soviel Eichen wie Buchen, $\frac{2}{3}$mal soviel Lärchen wie Eichen, $\frac{1}{4}$mal soviel Ahorne wie Lärchen.
Wie viele Bäume jeder Art wurden gefällt?

145/3 Jemand verwendete den dritten Teil seines Jahreseinkommens für Ernährung und Miete, den sechsten Teil für Kleidung, den achten Teil für unvorhergesehene Ausgaben. Ihm verblieben danach noch 480 Mark Ersparnisse.
Auf wieviel Mark belief sich das Jahreseinkommen?

145/4 Drei Zahlen, deren Summe 35 beträgt, verhalten sich wie 2:3:5.
Um welche Zahlen handelt es sich?

145/5 Meister Roth ist gegenwärtig siebenmal so alt wie sein Sohn Karl. Der Altersunterschied zwischen beiden beträgt 36 Jahre. Wie alt ist jeder von ihnen?

145/6 Für eine mehrklassige Schule wurden zusammen 300 Lesebücher und Fibeln für 180 Mark gekauft. Ein Lesebuch kostet 0,80 Mark, eine Fibel 0,50 Mark.
Wie viele Lesebücher bzw. Fiebeln wurden gekauft?

145/7 Eine Buchhandlung verkaufte von den vorhandenen Exemplaren eines neu erschienenen Romans am ersten Tag den achten Teil und 10 Stück, am zweiten Tag vom

Restbestand die Hälfte und 15 Stück. Es verblieben danach noch 50 Exemplare. Wieviel Exemplare wurden anfangs zum Verkauf angeboten?

145/8 Jemand hatte sich verpflichtet, ein Darlehen in vier Terminen zu tilgen. Beim ersten Termin wurden der vierte Teil der Schuld und noch 50 Mark getilgt. Beim zweiten Termin wurden von der Restschuld der fünfte Teil und noch 60 Mark getilgt.
Beim dritten Termin wurden von der nun verbliebenen Restschuld die Hälfte und noch 50 Mark getilgt. Mit dem vierten Termin wurden durch den Restbetrag von 200 Mark die Schulden vollständig getilgt.
Wie hoch belief sich das Darlehen?

145/9 Ein Fleischer kaufte fünf Kälber mit unterschiedlichem Gewicht für insgesamt 100 Mark. Der Preis jedes Kalbes richtete sich nach der Rangfolge ihres Gewichtes. Jedes schwerere Tier kostete 2 Mark mehr als das zunächst leichtere Tier.
Wieviel Mark kostete das leichteste Tier, wenn alle 5 Tiere ein unterschiedliches Gewicht hatten?

59 Wissenswertes über das Dreieck

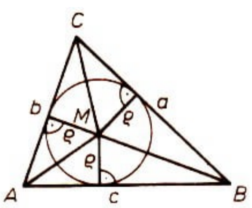
Wir wollen unsere Leser in Form von Aufgaben mit geometrischen Zusammenhängen vertraut machen, die i. a. nicht Gegenstand des Unterrichts der Schule sind. Dabei soll zugleich das Beweisen geübt werden.

Aufgabe
Es seien A der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, a, b und c die Längen seiner Seiten, $2s = a + b + c$ die Länge seines Umfangs, h_a, h_b und h_c die Längen seiner Höhen, α, β und γ die Größen seiner Innenwinkel, ρ die Länge seines Inkreisradius, ρ_a, ρ_b und ρ_c die Längen seiner Ankreisradien; dann gilt

(1) $A = \rho \cdot s$
(2) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
(3) $A = \rho_a \cdot (s-a) = \rho_b \cdot (s-b) = \rho_c \cdot (s-c)$
(4) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$
(5) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$
(6) $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s-a}}; \quad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s-b}}; \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s-c}}$

Diese sechs Formeln wollen wir nun am Beispiel eines spitzwinkligen Dreiecks herleiten. Für stumpfwinklige bzw. rechtwinklige Dreiecke gelten diese Formeln ebenfalls. Die Herleitung dafür wird der interessierte Leser in analoger Weise sicher selbst finden.

Lösungen

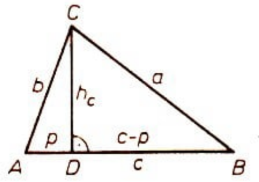


(1) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$A = A_{ABM} + A_{BCM} + A_{CAM} = \frac{1}{2}c \cdot \rho + \frac{1}{2}a \cdot \rho + \frac{1}{2}b \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho \cdot (a+b+c) = \frac{1}{2}\rho \cdot 2s = \rho \cdot s$$

(2) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h_c^2 = b^2 - p^2$ und $h_c^2 = a^2 - (c-p)^2$. Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$b^2 - p^2 = a^2 - (c-p)^2 \Rightarrow 2cp = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$



Aus $h_c^2 = b^2 - p^2 = (b+p)(b-p)$ und $p = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} h_c^2 &= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b+c)^2}{2c} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2c} \cdot \frac{(a+c-b)(a+c-b)}{2c} \end{aligned}$$

Aus $a+b+c = 2s$ folgt

$$a+b-c = 2(s-c), \qquad a+c-b = 2(s-b), \qquad b+c-a = 2(s-a)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

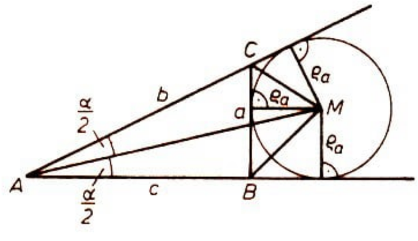
$$\begin{aligned} h_c^2 &= \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2} \\ h_c &= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Nun gilt

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(3) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$\begin{aligned} A &= A_{ABM} + A_{CAM} + A_{CBM} = \frac{c}{2}\rho_a + \frac{b}{2}\rho_a - \frac{a}{2}\rho_a = \frac{1}{2}\rho_a \cdot (b+c-a) \\ &= \frac{1}{2}\rho_2 \cdot 2(s-a) = \rho_2(s-a) \end{aligned}$$



(4) Nach der bereits hergeleiteten Formel (1) gilt $\frac{1}{\rho} = \frac{s}{A}$. Nach Formel (3) gilt

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{s-a}{A} \quad , \quad \frac{1}{\rho_b} = \frac{s-b}{A} \quad , \quad \frac{1}{\rho_c} = \frac{s-c}{A}$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{s-a}{A} + \frac{s-b}{A} + \frac{s-c}{A} = \frac{3s-(a+b+c)}{A} = \frac{3s-2s}{A} = \frac{s}{A}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

(5) Aus $A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ folgt

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2A}, \qquad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2A}, \qquad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2A}$$

Durch Addition erhalten wir

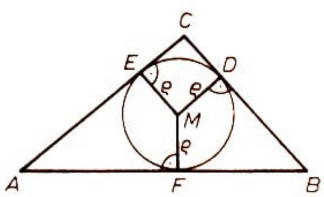
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2A} = \frac{2s}{2A} = \frac{s}{A}$$

Nach Formel (1) gilt $\frac{1}{\rho} = \frac{s}{A}$. Durch Gleichsetzen folgt daraus

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

(6) Wegen $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$ und $\overline{CD} = \overline{CE}$ gilt

$$a+b+c = 2\cdot(\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{CD}) = 2\cdot(\overline{AF}+a) = 2s \quad , \quad \overline{AF} = \overline{AE} = s-a$$

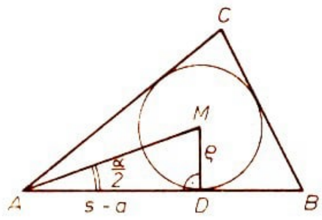


Analog dazu gilt $\overline{BD} = \overline{BF} = s-b$ und $\overline{CD} = \overline{CE} = s-c$. Aus dem nachfolgenden Bild wird folgendes ersichtlich

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$$

Wegen $\rho = \frac{A}{s}$ erhalten wir durch Einsetzen

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{A}{s(s-a)} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$



Analog dazu gilt

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s-b}} \quad , \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s-c}}$$

59.1 Ein Gewichtsproblem des Leonardo Fibonacci

Der allgemeine Stand des mathematischen Wissens und Könnens war im mittelalterlichen Europa bis ins 12. Jahrhundert sehr niedrig. Die Rechenmethoden waren primitiv. Die Kaufleute bedienten sich eines Rechenbrettes, des sogenannten Abakus. Die "indische" Zahlenschreibung, den Gelehrten in den Ländern des Islam seit langem geläufig, war noch unbekannt.

In einem 1202 erschienenen Werk "Liber abaci" (Buch vom Abakus) gab der Italiener Leonardo Fibonacci (der um 1170 wahrscheinlich in Pisa geboren wurde) eine systematische Darstellung des Rechnens mit den 10 indisch-arabischen Ziffern.

Dessen Vater lebte einst als Kaufmann in Algier. Dort lernte der Sohn von einem muslimischen Lehrer das neue Verfahren.
Er reiste durch den Orient, studierte arabische Werke, lernte die Schriften des Euklid, Archimedes und anderer griechischer Mathematiker kennen. Seine umfangreichen mathematischen Erkenntnisse hat er in mehreren Büchern aufgeschrieben.

Sie sind für die Entwicklung der Mathematik sämtlich von großer Bedeutung gewesen. Spätere Gelehrte schöpften aus seinen Werken sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden.

Die folgende Aufgabe aus dem "Liber abaci" findet man in ähnlicher Form beispielsweise in einem byzantinischen Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert, ferner bei Nicolas Chuquet (1484), Michael Stifel (1553), Tartaglia (1556), Bachet (1612), van Schooten (1657) und auch bei Leonhard Euler (1748):

148/1 Jemand hat 4 Gewichte, mit denen er die ganzen Pfunde seiner Waren von einem Pfund an bis 40 Pfund wiegen will; gefragt ist nach dem Gewicht der einzelnen Gewichtssteine.

60 Lösungen

Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt

L 15/2 Es werden 25 Haltestellen benötigt.

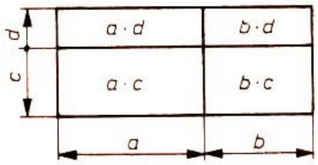
L 16/1 Es werden rund 4,2 m Feuchtraumkabel benötigt. Der Abstand der Haltestellen ist bei rund 27 cm zu wählen.

L 16/2 Es müssen 10 Rollen Tapete eingekauft werden.

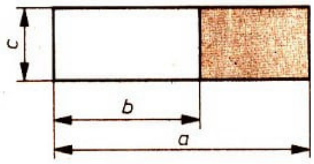
L 17/1 a) Es werden rund 24 m^2 Fußbodenbretter verbraucht.
b) Es sind rund 19 m Scheuerleiste erforderlich.
c) Es werden rund 2,8 kg Nägel benötigt.

Geometrie hilft der Arithmetik

L 18/1 $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$



L 18/2 $(a-b)c = ac - bc$



L 18/3 a) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, b) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, c) $(a+b)(a-c) = a^2-b^2$

L 19/1 Aus $a < b$ und $e < d$ folgt $a \cdot c < b \cdot d$.

L 19/2 Nein. Es gibt Zahlen a, b, c, so dass $a \cdot c < b \cdot d$; $a \cdot c = b \cdot D$ oder $a \cdot c > b \cdot d$ gelten kann.

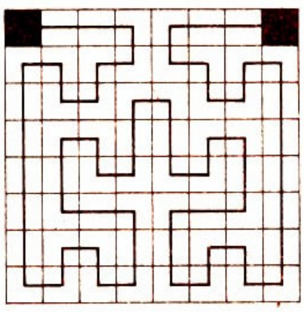
Knobeleien mit Würfeln

L 20/1 Es ist das Netz 4.

L 20/2 Es ist der Würfel a.

L 20/3 Bildchen 6; die dunkle Seite des Rechtecks muss rechts sein (vgl. 2 und 3).

L 20/4



Ungleichungen

L 21/1 a) $u = 0{,}1{,}2{,}3$; b) $y = 0{,}1{,}2$; c) $x = 0{,}1{,}...{,}6$; d) $x = 5898, 5899, 5900, 5901, 5902$
e) $x = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9$; f) $z = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$;
g) $\frac{162}{198} < \frac{99 \cdot x}{198} < \frac{176}{198}$, also $162 < 99 \cdot x < 176$, $L = \varnothing$
h) $3x < 20$ und $12 < 5x$, also $1 \leq x \leq 6$ und $x \geq 3$, also $L = \{3{,}4{,}5, 6\}$.

L 21/2 $a = 60000, 70000$

L 21/3 Es existieren genau drei Zahlentripel (a, b, c); sie lauten $(1, 2, 3)$, $(1{,}2, 4)$ und $(1, 2, 5)$.

L 21/4 a) $1{,}83 + 0{,}5 > 1{,}14 + 1{,}17$, denn $2{,}33 > 2{,}31$
b) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} < \frac{27}{5} - \frac{22}{7}$, denn $\frac{31}{20} < \frac{79}{35}$, weil $31 \cdot 35 < 20 \cdot 79$.

L 21/5 Aus der Dreiecksungleichung folgt $e < a+b$ und $e < c+d$, also $2e < a+b+c+d$ bzw. $f < a+d$ und $f < b+c$; also $2f < a+b+c+d$ und somit $2e+2f < 2a+2b+2c+2d$, also auch $e + f < a + b + c + d$.

L 21/6 a) $x < 0$, b) $x > 8$ oder $x < -8$, c) $-14 < x < 10$, d) $x > 0$ oder $x < -2$

L 21/7 Setzt man $\frac{5678901234}{6789012345} = \frac{x}{y}$, so gilt $\frac{5678901235}{6789012347} = \frac{x+1}{y+2}$ und weiter

$$\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y-2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2 - y > 0$ und wegen $y > 0$ somit $\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} > 0$. Es gilt also

$$\frac{5678901234}{6789012345} > \frac{5678901235}{6789012347}$$

L21/8 Es gilt $\sqrt{57} > \sqrt{49} = 7$. Also ist $4 \cdot 70 = 280 < 253 + 20 \cdot 7 < 253 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57$ und somit

$$(2\sqrt{70})^2 < (5 + 2\sqrt{57})^2$$
$$2\sqrt{70}) < 5 + 2\sqrt{57}$$
$$7 + 2\sqrt{70} + 10 < 3 + 2\sqrt{57} + 19$$

und damit $(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2$, also $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

L21/9 Aus $3x - 4 < x$ folgt $L_1 = \{x < 2; x \in \mathbb{R}\}$; aus $8 - 7x < 25$ folgt $L_2 = \{x > -\frac{17}{7}; x \in \mathbb{R}\}$. Daraus folgt weiter ($\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen)

$$L = L_1 \cap L_2 = \left\{-\frac{17}{7} < x < 2; x \in \mathbb{R}\right\}$$

L 21/10 Aus $5^3 + 6^3 = 125 + 216 = 341$ und $7^3 = 343$ folgt $5^3 + 6^3 < 7^3$.
Durch äquivalentes Umformen erhalten wir daraus $\frac{5^3}{7^3} + \frac{6^3}{7^3} < 1$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$. Wegen

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{10} < \left(\frac{5}{7}\right)^3 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < \left(\frac{6}{7}\right)^3$$

gilt somit

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1$$

also $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$.

L21/11 Da das arithmetische Mittel zweier positiver reeller Zahlen stets größer oder gleich ihrem geometrischen Mittel gilt, ist

$$\frac{(a+b)+c}{2} \geq \sqrt{(a+b)c} \qquad \text{also} \qquad a+b+c \geq 2\sqrt{c(a+b)}$$

L 21/12 Der Sohn sei x Jahre, der Vater also $4x$ Jahre alt; dann gilt $50 < x+4x < 60$, also $50 < 5x < 60$, also $10 < x < 12$, also $x = 11$. Der Sohn ist 11 Jahre, der Vater 44 Jahre alt.

L 21/13 $h = r$, denn die größte Höhe eines Dreiecks ist nicht länger als die mittlere seiner Seiten. Es ist also $h \leq 3$ cm. Für $b = h = 3$ cm und $a = 2$ cm ist $c = \sqrt{13}$ cm < 4 cm

L 21/14 Die drei Ziffern seien a, b, c mit $a \geq b \geq c$. Die beiden Zahlen sind dann $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$, ihre Summe $200a + 11(b+c) = 1233$.
Wegen $b + c \leq 18$, $11(b+c) \leq 198$ muss $a = 6$ sein. Daraus folgt $b + c = 3$, also $b = 2$ und $c = 1$.

Unterhaltsame Zahlentheorie

L 22/1 Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)
$5 \cdot 100 = 500$, an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)
$10 \cdot 55 = 550$, an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)
$1 \cdot 555 = 555$. Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605mal aufgeschrieben.

L 22/2 Zum Beispiel:

$$1 = \frac{77}{77}; \quad 2 = \frac{7}{7} + \frac{7}{7}; \quad 3 = \frac{7+7+7}{7}; \quad 4 = \frac{77}{7} - 7; \quad 5 = 7 - \frac{7+7}{7};$$
$$6 = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7}; \quad 7 = 7 - \frac{7-7}{7}; \quad 8 = \frac{7 + 7 \cdot 7}{7}; \quad 9 = 7 + \frac{7+7}{7}$$

L 22/3 Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
1 &= (1+2) : 3\\
1 &= (12 : 3) : 4\\
1 &= ((1+2)\cdot 3 - 4) : 5\\
1 &= ((12 : 3) : 4 + 5) : 6\\
1 &= (((1+2)\cdot 3 - 4) : 5 + 6) : 7\\
1 &= (((1+2) : 3)\cdot 4 + 5 + 6 - 7) : 8\\
1 &= ((((1+2) : 3 + 4) : 5 + 6) : 7 + 8) : 9
\end{aligned}$$

L 22/4 $1\cdot 7 = 3+4 = 9-2 = 56 : 8$

L 22/5 roma = 2401

L 22/6 Ist $x \geq 4$, so gilt $x^x + x \geq 4^4 + 4 = 260$, d. h, $x^x + x$ ist mindestens dreistellig.
Für $x = 1; 2$ besteht die Gleichung offenbar nicht.
Für $x = 3$ ist $3^3 + 3 = 30$; d.h, $x = 3$ ist die einzige Lösung.

L 22/7 Wir multiplizieren die drei Gleichungen miteinander und erhalten:
$(abc)^2 = (2^5 3^2 5)^2$, also $abc = 2^5 3^2 5$.
Dividieren wir diese Gleichung nacheinander durch die gegebenen Produkte, so erhalten wir $c = 10$, $b = 24$, $a = 6$.

L 22/8 a) $3x + 3 = 3^3 - 3x$, $6x = 27 - 3$, $x = 4$
b) $\frac{x}{4} + 4 = 4x - 4$, $8 = \frac{15}{4}x$, $x = \frac{32}{15}$

L 22/9
(1) Aus der Struktur der Gleichungen folgt, dass die Basis der Potenzen nur auf Null enden kann, also $\beta = 0$ gilt.
(2) Nach äquivalenter Umformung der Gleichung

$$\alpha\alpha = \alpha\beta^\alpha + a \qquad \text{in} \qquad \alpha\alpha - \alpha = \alpha\beta^\alpha$$

und Einsetzen von $\beta = 0$, ergibt sich $\alpha 0 = \alpha 0^\alpha$, woraus $\alpha = 1$ folgt.
(3) Die übrigen Gleichungen liefern entsprechend $T = 3$, $R = 3$, $A = 4$, $P = 5$, $E = 6$, $Z = 1$
(4) Die Proben

$$11 = 10^1 + 1 \qquad ... \qquad 11111111 = 10^7 + 1111111$$

bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

L 22/10 Multipliziert man die Hälfte der gedachten Zahl mit sich selbst, dann muss das Ergebnis eine zweistellige Zahl sein.
Daraus folgt, dass diese Hälfte größer als 3 und kleiner als 10 ist. Die gedachte Zahl ist somit größer als 6 und kleiner als 20.
Da sie zweistellig sein soll, muss sie zwischen 10 und 20 liegen, und ihre erste Ziffer ist eine „1“. Beim Austausch der Ziffern endet damit das Produkt auf „1“.

Von den in Frage kommenden Zahlen erfüllt nur 9 diese Bedingungen. Die gesuchte Zahl ist also 18. Tatsächlich erhält man aus $9 \cdot 9 = 81$ die Ausgangszahl mit ausgetauschten Ziffern.

L 22/11

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 &+ 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 = \\ &= (1+2)(1-2) + (3+4)(3-4) + ... + (99+100)(99-100) \\ &= -(3+7+11+15+19+...+199) = -(202 \cdot 25) = -5050 \end{aligned}$$

L 22/12 Es gilt $30^{15} = (2 \cdot 15)^{15} = 2^{15} \cdot 15^{15}$ und $15^{30} = 15^{15} \cdot 15^{15}$. Daraus folgt weiter $2^{15} \cdot 15^{15} < 15^{15} \cdot 15^{15}$, also $30^{15} < 15^{30}$.

Das arithmetische Mittel

L 24/1 80

L 24/2 15,5 cm

L 24/3 $x = 87$

L 24/4 b)

L 25/1 39 Jahre

L 25/2 Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

L 25/3 a) $3; 7; 11; 15; 19; ...;$ b) z.B. $0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5; ...;$

L 26/1 2025

L 26/2 $m_g = 9$ m, $m_a = 15$

L 26/3 $x = 54$

Turnierpläne aus mathematischer Sicht

L 30/2 Insgesamt wurden $6 \cdot 22 = 132$ Spiele ausgetragen. Angenommen, es beteiligten sich n Schüler an diesem Tischtennisturnier. Dann musste jeder dieser n Spieler gegen $(n-1)$ Spieler antreten. Nun gilt

$$n(n-1 = 132 = 12 \cdot 1l$$

also $n = 12$. An diesem Turnier nahmen 12 Schüler teil.

Knobelei

L 31/1 Es treten 8 Dreiecke und 6 Quadrate auf. Der Körper hat 12 Ecken.

Zentralsymmetrie

L 38/1 Eine mögliche Lösung zeigt das folgende Bild.

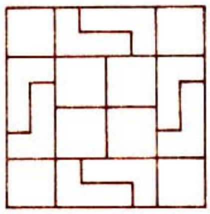


Bild 152/1

L 38/2 Bei dem vorgegebenen Wandmuster liegen (bei unbegrenzter Ausdehnung) die Symmetriezentren so, wie im Bild angegeben.

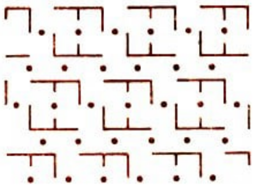


Bild 152/2

Drehsymmetrie

L 39/2 Das Vorderrad eines 28er Tourenrades hat 36 Speichen. Aufgrund der Art der Speichenverspannung kann eine Speiche erst mit der nächsten 4. durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Der Grad der Drehsymmetrie ist also

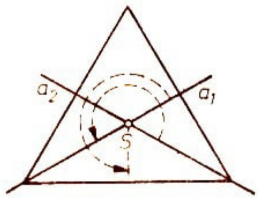
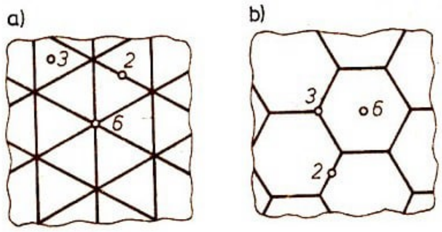


Bild 152/3

L 39/3 Die Lösung ist 3.

L 41/2 Einfache Beispiele sind der Kreis, das Quadrat und das gleichseitige Dreieck Was soll das bedeuten?

L 41/3



L 42/1
a) Taus END, also Tausend
b) um K Reis, also Umkreis
e) Schachtel; Hotel; Kapitel; Wilhelm Tell
f) Zweige liegen auf der Erde. - Elvira spielt Klavier. - Achtung! Das Essen ist fertig. - Er riss den Zettel entzwei. - Man ist nie einsam, wenn man eine Rundreise macht.

L 42/3 TEILER, AR, MÜNZE, TAG, SEHNE, NENNER, TONNE, SCHENKEL. Es ergibt sich Tangente.

L 42/4 Ellipse, Speile, Spiel, Ilse, Eis, Ei, e, Er, Res, Reis, Kreis

L 42/5 Schloss; Hahn

Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei L. Euler

L 46/1a

$$I.\quad 4x + 2y + \frac{z}{3} = 100; \qquad II.\quad x + y + z = 200$$

$11x + 5y = 200$; für $x = 5$ wird $y = 40 - 11 = 29$, somit $z = 66$

L 46/1b Euler: Es sei die Zahl der Schweine gleich p, die der Ziegen gleich q, die der Schafe gleich r; dann hat man folgende zwei Gleichungen:

$$I: \quad p + q + r = 100, \qquad II: \quad 3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit 6, so kommt man auf $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten Gleichung erhält man $r = 100 - p - q$, und setzt man diesen Wert für r in die Gleichung II ein, so ergibt sich $5q = 300 - 18p$.
Daraus folgt dann $q = 60 - \frac{18}{5}p$. Also muss $18p$ durch 5 teilbar sein.
Man setzt also $p = 5s$ und erhält $q = 60 - 18s$ sowie $r = 13s + 40$, wobei für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden darf, doch so, dass q nicht negativ wird. Daher kann s nicht größer als 3 angenommen werden, und damit haben, wenn auch 0 ausgeschlossen wird, nur folgende drei Auflösungen Geltung:

Wenn $s =$	1	2	3
wird $p =$	5	10	15
$q =$	42	24	6
$r =$	53	66	79

L 47/1a Bei n Toren sind mitzunehmen $2(2^n - 1) + 1$ Silberstücke.
Bei 4 Toren also $2(2^4 - 1) + 1 = 2^5 - 1 = 31$ Silberstücke.

L 47/1b Euler: Um die Aufgabe leichter auflösen zu können, setzen wir das ganze hinterlassene Vermögen gleich z Taler, und weil alle Kinder gleich viel bekamen, sei der Anteil eines jeden gleich x; daraus folgt die Anzahl der Kinder zu $\frac{z}{x}$.
Hieraus wollen wir die Auflösung vornehmen:

Das zu teilende Geld	Ordnung der Kinder	Anteil jedes Kindes	Die Differenzen der Anteile
z	das erste	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z - x$	das zweite	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 2x$	das dritte	$x = 300 + \frac{z-3x-300}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 3x$	das vierte	$x = 400 + \frac{z-4x-400}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 4x$	das fünfte	$x = 500 + \frac{z-5x-500}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 5x$	das sechste	$x = 600 + \frac{z-6x-600}{10}$	usw.

In der letzten Spalte sind hier die Differenzen angegeben, die entstehen, wenn man jedes Erbteil von dem folgenden subtrahiert. Weil nun alle Erbteile einander gleich sind, so muss jede dieser Differenzen gleich 0 sein. Da es sich nun so fügt, dass alle Differenzen einander gleich sind, genügt es, dass man eine davon gleich 0 setzt. Daher erhalten wir die Gleichung

$$100 - \frac{x+100}{10} = 0$$

Man multipliziert mit 10 und erhält $1000 - x - 10 = 0$ oder $900 - x = 0$, also $x = 900$. Hieraus ersehen wir schon, dass das Erbteil jedes Kindes 900 Taler betragen wird. Nimmt man nun irgendeine von den Gleichungen in der dritten Spalte, z. B. die erste $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, dann findet man daraus sogleich z. Es wird $z = 8100$; damit wird $\frac{z}{x} = 9$.
Antwort: Es waren 9 Kinder; das hinterlassene Vermögen betrug 8100 Taler, von denen jedes Kind 900 Taler erhielt.

„Vollständige Anleitung zur Algebra“ von L. Euler

L 48/1 Es sei x die größere und y die kleinere der beiden Zahlen. Dann gilt:

$$x + y = 15 \qquad , \qquad x - y = 7$$

Weiter folgt: $2x = 22$, $x = 11$ und $y = 15 - x = 15 - 11 = 4$. Die beiden Zahlen sind also 11 und 4.

L 48/2 Es sei x der größere Summand. Dann ist $7 - x$ der kleinere Summand, und. es gilt $x = 7 - x + 3$; $2x = 10$; $x = 5$; $7 - x = 2$
Die beiden Summanden sind also 5 und 2.

L 48/3 $\frac{10 \cdot 50 \cdot 12}{24} = 250$ In 50 Tagen verdienen 12 Maurer 250 Taler.

L 48/4 Es sei $z = 11a + 3 = 19b + 5$ die gesuchte Zahl. Dann gilt

$$11a = 11b + 8b + 2 \qquad , \qquad a = b + \frac{2(4b+1)}{11}$$

Dabei ist $b = 8$ die kleinste Zahl, für die $a = 14$ ganzzahlig ist. Die gesuchte Zahl ist daher $z = 11 \cdot 14 + 3 = 157$

L 48/5 Angenommen, es waren x Männer, also $(20 - x)$ Frauen; dann gilt

$$8x + 7(20 - x) = 6 \cdot 24 \qquad , \qquad x = 4$$

Das Gasthaus besuchten 4 Männer und 16 Frauen.

L 48/6 Angenommen, es wurden x Ellen Tuch gekauft; dafür wurden dann $\frac{7}{5}x$ Taler bezahlt. Der Stoff wurde für $\frac{11}{7}$ Taler je Elle weiter verkauft; deshalb kosten x Ellen $\frac{11}{7}x$ Taler.
Nun gilt $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$, $x = 583\frac{1}{3}$. Es wurden $583\frac{1}{3}$ 3 Ellen Tuch gekauft.

L 48/7
Die erste Bäuerin hatte $(8x + 7)$ Eier, die zweite $(10y + 7)$ Eier. Nun gilt:

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100, \qquad 8x + 10y = 86, \qquad 4x + 5y = 83$$

Es existieren zwei positive ganzzahlige Lösungen, nämlich $x_1 = 2$, $y_1 = 7$ und $x_2 = 7, y_2 = 3$. Die Bäuerinnen hatten entweder 23 und 77 oder 63 und 37. Eier.

L 48/8 Er erhält 3 Münzen der ersten und 14 Münzen der zweiten Sorte.

L 49/9 Angenommen, es waren x Käse. Dafür erhielt die Bäuerin $\frac{3}{2}x$ Hühner. Jedes Huhn legt $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{x}{2}$ Eier. Zusammen legen die Hühner

$$\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{3}{4}x^2 \quad \text{Eier}$$

Nun kosten 9 Eier $\frac{x}{2}$ Pfennig; daraus folgt

$$\frac{3}{4}x^2 \cdot \frac{x}{18} = 72, \qquad \frac{x^3}{24} = 72, \qquad x^3 = 12^3$$

also $x = 12$. Die Bäuerin hat 12 Käse gegen 18 Hühner eingetauscht.

L 48/10 Aus $s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ und $a = 2$ und $d = 2$ und $s = 110$ folgt

$$100 = \frac{n}{2}[4 + (n-1) \cdot 2]$$

also $n = 10$. Es wurden 10 Tücher gekauft.

L 48/11 Angenommen, es waren x Männer, also $(20-x)$ Frauen. Dann hat jeder Mann $\frac{24}{x}$ Gulden, jede Frau $\frac{24}{20-x}$ Gulden ausgegeben, und es gilt

$$\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$$

Daraus folgt $x = 34 \pm 26$, $x_1 = 60$ (entfällt, da $60 > 20$) und $x_2 = 8$. In dem Gasthaus waren 8 Männer und 12 Frauen.

L 48/12 Es seien $n-1$, n, $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen jede von Null verschieden ist; dann gilt

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3$$

wobei k eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &= k^3 \\ 3n^3 + 6n &= k^3 \\ 3n(n^2 + 2) &= k^3 \end{aligned}$$

Durch systematisches Belegen von n mit $1,2,3,...$ finden wir, dass bereits $n = 4$ die Bedingungen erfüllt. Die drei Zahlen lauten somit 3, 4, 5. Es gilt

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$$

Rund um das Schachbrett

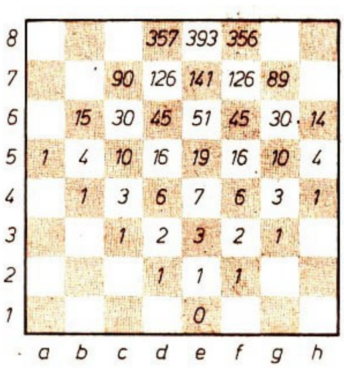
L 49/1 Weizenkörner auf einem Schachbrett
Bezeichnet w_k die Anzahl der Weizenkörner auf dem k-ten Feld, so gilt:

$w_1 = 1; w_2 = 2; w_3 = 4 = 2^2; w_4 = 8 = 2^3; w_5 = 16 = 2^4; w_6 = 32 = 2^5; w_7 = 64 = 2^6;$
$w_8 = 128 = 2^7; w_9 = 256 = 2^8; w_{10} = 512 = 2^9; ...; w_{64} = 2^{63}$

Die gesuchte Anzahl ist

$$s = w_1 + w_2 + ... + w_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$$

Offenbar ist $2s = 2 + 2^2 + ... + 2^{63} + 2^{64}$. Hieraus folgt $s = 2s - s = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$



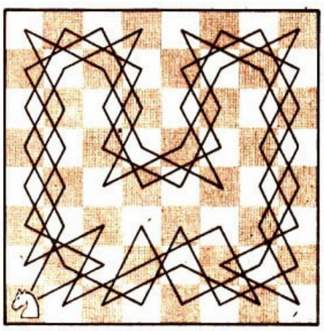
L 49/2 Die vielen Wege des Königs Der König hat 393 verschiedene Möglichkeiten, in 7 Zügen von dem Feld e1 nach dem Feld e8 zu gelangen. Mittels einer einfachen Methode kann man die Anzahl der Wege wie folgt auszählen:
Die Felder d2, e2 und f2 bekommen eine 1, denn sie sind von e1 in 1 Zug nur auf 1 Weg zu erreichen. Das Feld c3 erhält ebenfalls eine 1, denn es besitzt nur 1 Zugangsfeld (d2), das selber nur eine 1 trägt. Hingegen gehören zu dem Feld d3 2 Zugangsfelder, d2 und e2.

Es ist auf zwei Wegen erreichbar und bekommt daher eine 2. Entsprechend erhält das Feld e3 eine 3, und in dieser Weise teilt man allen entfernteren Feldern eine Zahl zu, die jeweils aus der Summe der Zahlen der Zugangsfelder besteht.
In dem Diagramm sind schon einige Werte eingetragen.
Nach der vorgegebenen Methode ist der Wert des Feldes e8 zu ermitteln!
Dieser Wert gibt die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen, an.

L49/3 Intellektuelles Boxen
1. Tb5 + Kd6 2. Td5 + Td5 3. Sc3 (interessant, dass der schwarze Turm kein geeignetes Fluchtfeld hat) 3. ... Sac4, 4. Sd5, und Schwarz kann mit den verbleibenden zwei Springern nicht matt setzen.

Über den Rösselsprung von Euler

L 52/1 Ein offener Rösselsprung von Euler



Auf Fehlersuche

L 57/1 Folgende Lösungen sind falsch: $2; 5; 6; 9; 11; 15; 19; 29; 31$.

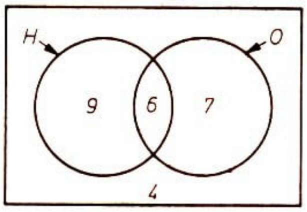
Ferienzeit

L 58/1 Angenommen, n Schüler machten einen Ausflug; dann gilt

$$n + n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + 1 = 100; \qquad \frac{11}{4}n = 99, \qquad n = 36$$

Beim Ausflug beteiligten sich 36 Schüler.

L 58/2 Wir rechnen $13 - 6 = 7$, $15 - 6 = 9$, $7 + 9 + 6 + 4 = 26$. Dieser Klasse gehören genau 26 Schüler an. Das abgebildete Diagramm veranschaulicht diese Lösung.



H bedeutet: Menge der Schüler, die im Harz waren. O bedeutet: Menge der Schüler, die an der Ostsee waren.

L 58/3

Route	Länge der Route in km
12341	58
12431	49
13241	49
13421	49
14231	49
14321	58

Das Optimum liegt bei 49, und dieser Wert wird durch vier Routen realisiert.

L 58/4 Durch Ausgang 7 kommt das Eichhörnchen ins Freie.

L 58/5 In $1\frac{1}{2}$ Tagen würden 3 Hühner doppelt soviel Eier wie $1\frac{1}{2}$ Hühner, also 3 Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, das ist 1 Ei, legen.
Also würden 7 Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen 7 Eier legen. Da 6 Tage viermal so viel sind wie $1\frac{1}{2}$ Tage, würden mithin die 7 Hühner in 6 Tagen 28 Eier legen.

Oder: 1 Huhn würde in $1\frac{1}{2}$ Tagen 1 Ei legen, also 1 Huhn in 6 Tagen (wegen $4 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$) 4 Eier, und 7 Hühner in 6 Tagen $7 \cdot 4 = 28$ Eier.

L 58/6 $l = \sqrt{1{,}65^2 + 0{,}88^2} - 0{,}07 = 1{,}87 - 0{,}07 = 1{,}80$ m. Der Professor ist 1,80 m groß.

L 59/1 Bei einer maßstabsgerechten Vergrößerung der Abmessungen der Wanderkarte wird ihr Maßstab verringert.
Es gilt $20 : 50 = 35 : 87{,}5 = x : 10000$. Hieraus folgt x = 4000; der neue Maßstab ist also 1:4000.

L 59/2 Aus dem dritten Satz der Aufgabe folgt: Mario, aber auch Roger heißen mit dem Zunamen weder Müller noch Krause. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt: Mario hat auch nicht den Zunamen Schneider, also den Zunamen Meier. Somit hat Roger den Zunamen Schneider.
Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt weiter: Jürgen heißt mit dem Zunamen weder Schneider noch Krause. Folglich hat Jürgen den Zunamen Müller, Uwe den Zunamen Krause.

L 59/3 Skatspiel: 27, 28 und 29 Augen sind nicht möglich.

L 59/4 Larry 1/I, Mike 1/2, Tom 1/4, Sam 1/8. Sam hatte ein Achtel von Larrys Murmeln.

L 59/5 Angenommen, im ersten Spiel schoss jede der beiden Mannschaften x Tore; es fielen somit $2x$ Tore. Im zweiten Spiel habe Mannschaft B y Tore, also Mannschaft A $2y$ Tore geschossen; es fielen somit $3y$ Tore. Nun gilt

$$2x + 3y = 13 \qquad , \qquad y = 4 - \frac{2x-1}{3}$$

Nur für $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ und $x_2 = 5$, $y_2 = 1$ besitzt diese Gleichung positive ganzzahlige Lösungen.

Spiele	Torverhältnis	Anzahl der Tore
1. Spiel	2:2	4
2. Spiel	6:3	9

Die zweite Lösung entfällt $(5 : 5, 2 : 1)$, da in diesem Fall im zweiten Spiel weniger Tore fielen als im ersten.

L 59/7 $0{,}9x - 15 = 0{,}6(x - 15) \qquad , \qquad x = 20$
Bär und Hase brachten 20 kg frische Pilze mit nach Hause.

L 59/8 Angenommen, es sind x Schafe, also $(x - 2)$ Ziegen und $(x + 11)$ Pferde; das sind zusammen $(3x + 9)$ Tiere. Nun gilt:
$30 < 3x + 9 < 36 \qquad , \qquad 21 < 3x < 27 \qquad , \qquad 7 < x < 9$, also $x = 8$.
Auf dieser Weide grasen 8 Schafe, 6 Ziegen und 19 Pferde.

Aus der Schule geplaudert

L 63/1. Für die Hälfte des Schulwegs brauchte Uwe 10 Minuten und Karin 15 Minuten. Da Karin 5 Minuten Vorsprung hatte, holte Uwe sie in 10 Minuten ein.

L 63/2 a) $(160 - 2 \cdot 24)$ mm $: 4 = 28$ mm
b) 28 mm - 18 mm - 10 mm

L 63/3 Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muss ein Vielfaches von 9 und von 6, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ trifft dies nur zu für $n = 36$.
Dieser Klasse gehören somit 36 Schüler an. Angenommen, x Schüler haben die Note 3 erhalten; dann gilt

$$x = 36 - \frac{36}{9} - \frac{36}{3} - \frac{36}{6}$$

also x= 14.

L 63/4 a) Winkelmessung; Dezimalbrüche
b) Distributivgesetz; Assoziativgesetz

Aus der Geschichte der Längenmaße

L 64/1 a) Baden: 3 Zoll = 9,0 cm
b) Preußen: 3 Zoll = 7,8 cm
c) Sachsen: 3 Zoll = 7,2 cm

L 64/2 a) Bayern: 25 Ellen = 2075 cm = 20,75 m
b) Preußen: 30 Ellen = 2010 cm = 20,10 m
c) Sachsen: 35 Ellen = 1995 cm

L 64/3 a) Baden: 12 Fuß = 360 cm = 3,60 m
b) Bayern: 12 Fuß = 348 cm = 3,48 m
c) Preußen: 12 Fuß = 372 cm = 3,72 m
d) Sachsen: 12 Fuß = 336 cm = 3,36 m

L 64/4 a) Baden: 49,80 m = 83 Ellen; b) Bayern: 49,80 m = 60 Ellen

L 64/5 Mindestens 12,00 m, höchstens 16,60 m

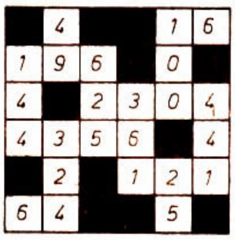
L 64/6 a) Baden: A = 9000 m^2; b) Sachsen: A = 18490 m^2

L 64/7 Preußen: 30 Meilen = 225 km; Sachsen: 25 Meilen = 226,5 km

L 65/2 a) 40000 km; b) 10000 km; c) 111 km; d) 1070 km; e) 1,85 km

Rätsel

L 66/1 Silbenrätsel
1. Arithmetik; 2. Diagonale; 3. Doppelbruch;. 4. Ikosaeder; 5. Tschebyschew; 6. Invariante; 7. Oktaeder; 8. Nullpunkt (Addition, Kehrwert)

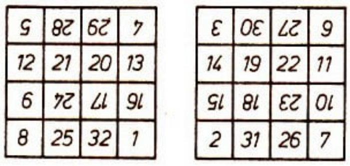
L 66/2


L 67/1 Rätselspaß - Lösungswort: Laubfrosch

L 67/2 Kreuzworträtsel
Waagerecht: A: 1016, C: 63, E: 62, G: 477, J: 410, K: 105, L: 140, M: 315, P: 81, R: 43, S: 8298.
Senkrecht: A: 154, B: 66, D: 320, F: 2435, H: 7108, L: 154, N: 548, Q: 18.

L 67/3 Kreuzzahlenrätsel A 44; 18 B 27,7;13 C 4; 730; 6 D 16;7;10 E 144; 117
1 2311 2 47,644 3 4,7;4 4 737 (= 67·11) 5 1;0 6 81; 111 7 5607

L 69/1 Gefalztes
Die Nummerierung der Seiten für ein 32seitiges Tagebuch muss folgendermaßen aussehen:



13 Knacknüsse

L 73/1 15,20 DM :4 = 3,80 DM
Axel hat 3,80 DM, Bernd 3,80 DM, Christian 3,20 DM und Dieter 3,00 DM in seiner Geldbörse.

L 73/2 Angenommen, die Herde umfasst x Schafe; dann gilt:

$$2 \cdot (x - 27) = x + 23 \qquad 2x - 54 = x + 23 \qquad \text{also} \qquad x = 77$$

Die Herde umfasst 77 Schafe.

L 73/3 Von jeder der vier Seitenlängen gehen 2·8 cm ab. Insgesamt gehen somit 4·16 cm = 64 cm vom äußeren Umfang ab. Der innere Umfang des Rahmens hat eine Länge von 280 cm - 64 cm = 216 cm.

L 73/4 1 h = 60 · 605= 3600 s
1 Tag hat 24 · 3600 s = 86400 s
1 Jahr hat 365 · 86400 s = 31536000 S
In 30 Jahren legt das Licht des Polarsterns somit

$$30 \cdot 31536000 \cdot 300000000 = 283824000000000 \text{ km}$$

zurück, bis es zur Erde gelangt. Dies ist die Entfernung Erde-Polarstern.

L 73/5 1 Ar ist eine Fläche von 100 m^2 oder von 1000000 cm^2. Die jährliche Regenmenge bildet einen Quader von 52,5 cm Höhe und 1000000 cm^2 Grundfläche.
Die Regenmenge hat somit einen Rauminhalt von
$52{,}5 \cdot 1000000$ cm^2 = 52500000 cm^2 = 52500 Liter = 525 Hektoliter.

L 73/6 30 m - 4 m = 26 m; 26 m : 2 = 13 m; 13 m +4 m = 17 m; 13 m + 17 m = 30 m
Es verbleiben 13 m Tuch zum Verkauf.

L 73/7 88 - 38 = 50; 50 : 2 = 25; 25 + 38 = 63. Der Vater ist 63 Jahre, der Sohn 25 Jahre alt.

L 73/8
26 - 4 =22; 22 : 2 = 11; 11 + 4 = 15.
Gegenwärtig sind diese Kinder 11 und 15 alt. Wir stellen eine Tabelle auf.

	Alter des jüngeren Kindes	Alter des älteren Kindes
Gegenwärtig	11	15
vor 1 Jahr	10	14
vor 2 Jahren	9	13
vor 3 Jahren	8	12
vor 4 Jahren	7	11
vor 5 Jahren	6	10
vor 6 Jahren	5	9
vor 7 Jahren	4	8
vor 8 Jahren	3	7

Vor 7 Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste.

L 73/9 Angenommen, x Tage nach dem Aufbruch der ersten Person in A treffen sich beide; dann gilt:

$$20 \cdot x + 25 \cdot (x - 3) = 262{,}5 \qquad , \qquad x = 7{,}5$$

Beide Personen treffen sich nach 7,5 Tagen, gerechnet vom Zeitpunkt des Aufbruchs der ersten Person.
7,5· 20 km = 150,0 km , 4,5· 25 km = 112,5 km
Bis zum Zusammentreffen hat die erste Person 150 km, die andere 112,5 km zurückgelegt.

L 73/10 Angenommen, der Gemeinde gehören x Männer, also $\frac{11}{10}x$ Frauen und $\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{10}x = \frac{44}{30}x$ Kinder an; dann gilt:

$$x + \frac{11}{10}x + \frac{44}{30}x = 856 \qquad , \qquad x = 240$$

Dieser Gemeinde gehören 240 Männer, $\frac{11}{10} \cdot 240 = 264$ Frauen und $\frac{4}{3} \cdot 264 = 352$ Kinder an.

L 73/11
12 h = 720 min; 720 : $1\frac{1}{2}$ = 480. Vorwärts gerechnet kommt die zweite Uhr der ersten in jeder Stunde um $1\frac{1}{2}$ min näher. Nach 480 Stunden, also nach 20 Tagen, zeigen beide Uhren wieder zum selben Zeitpunkt die Uhrzeit 12 Uhr an.

L 73/12 96 m - 16 m = 80 m; 80 m : 2 = 40 m; 40 m + 16 m = 56 m.

$$A = \frac{1}{2}g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 56 = 1120 \text{ m}^2$$

L 73/13
Aus $x \cdot 2{,}7 = (x + 2) \cdot 1{,}2$ folgt: $2{,}7x = 1{,}2x + 2{,}4$ und $x = 1\frac{3}{5}$
Der Postwagen fuhr um 8 Uhr ab. Nach $1\frac{3}{5}$ h, also nach 1 h 36 min, dass heißt um 9^{36} Uhr holte der Postwagen den Reisenden ein.

Aufgaben aus einem alten chinesischen Lehrbuch

L 74/1
$$\frac{(7\cdot 18+5)(11\cdot 23+6)}{7\cdot 11}=440\frac{7}{11}$$
$440\frac{7}{11}$ Pu = 1 Mou $200\frac{7}{11}$ Pu
Heute berechnet man den Flächeninhalt mit Hilfe der Gleichung $A=ab$.

L 74/2
$$\frac{78\frac{1}{2}\cdot 13\frac{7}{9}+13\frac{7}{9}\cdot 13\frac{7}{9}}{2}=635\frac{56}{81}$$
$635\frac{56}{81}$ Pu = 2 Mou 155 $\frac{56}{81}$ Pu
Hier ist die Fläche des Kreissegments durch die eines Trapezes nur angenähert bestimmt. Eigentlich gilt die angegebene Näherungsgleichung $A=\frac{sp+p^2}{2}$ nur für den Halbkreis.
Die exakte Berechnung kann folgendermaßen durchgeführt werden:
$$A=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180^\circ}-\sin\varphi\right)=738{,}52 \text{ Pu}$$

L 74/3
$$\frac{78\cdot 63}{50}=\frac{4914}{50}=98\frac{7}{25}$$
$98\frac{7}{25}$ Sheng = 9 Tou $8\frac{7}{25}$ Sheng
Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe einer Proportion, also z. B. $50:63=7{,}8:x$.

L 75/1 $\frac{10\cdot 720}{61}=118\frac{2}{61}$ Geldstücke

L 75/2 $5+4+3+2+1=15$
$\frac{5\cdot 5}{15}=1\frac{2}{3}$; $\frac{4\cdot 5}{15}=1\frac{1}{3}$; $\frac{3\cdot 5}{15}=1$; $\frac{2\cdot 5}{15}=\frac{2}{3}$; $\frac{1\cdot 5}{15}=\frac{1}{3}$
Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der fortlaufenden Proportion, z. B. $5:4:3:2:1=a:b:c:d:e$, $15:5=5:a$, $15:5=4:b$ usw.

L 75/5
$$\sqrt{1518\frac{3}{4}\cdot 12}=135$$
Die numerische Lösung beim Ziehen der Quadratwurzel, wie sie damals durchgeführt wurde, ist sehr umfangreich, ähnelt aber unserem heutigen Lösungsverfahren.

L 75/6
$$\frac{8+20}{2}\cdot 4\cdot 127=7112,\qquad 7112:444=16\frac{2}{11}$$
Heute berechnet man das Volumen des Dammes ähnlich und zwar nach der Gleichung für ein trapezförmiges Prisma.

L 75/7
$$\frac{12^2\cdot 2}{36}\cdot 1000=8000,\qquad 8000:2\frac{7}{10}=2962\frac{26}{27}$$

Heute berechnet man das Volumen nach der Gleichung $V = \frac{1}{3}\pi r^2$ mit $r = \frac{u}{2\pi}$ also $V = \frac{u^2 \cdot h}{12\pi}$

L 75/8
A: $\frac{10000}{8} = 1250$ bzw. 125
B: $\frac{9500}{10} = 950$ bzw. 95
C: $\frac{12350}{13} = 950$ bzw. 95
D: $\frac{12200}{20} = 610$ bzw. 61
$1250 + 950 + 950 + 610 = 3760$ bzw. 376

Fuhren: A $\frac{10000 \cdot 125}{376} \approx 3324$; B und C: ≈ 2527; D: ≈ 1622
Menge (Masse) des Getreides: A: $3324 \cdot 25 = 83100$; B und C: $= 63175$; D: $= 40550$.
Heute berechnet man die Zahl der Fuhren mit der fortlaufenden Proportion, z.B. $1250 : 950 : 950 : 610 = a : b : c : d$, $3760 : 10000 = 1250 : a$, $3760 : 10000 = 950 : b$ usw.

L 75/9 $3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{74}{15}$; $\quad 1 : \frac{74}{15} = \frac{15}{74}$
Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{x}{1} + \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 1$$

wenn x die Zahl der Tage ist, an denen alle Kanäle gleichzeitig den Teich füllen würden.

L 76/1

$$\frac{\frac{190}{7} \cdot 30 + \frac{270}{9} \cdot 330}{33 + 30} = \frac{\frac{675000}{63}}{360}$$

$$\frac{270}{9} - \frac{190}{7} = \frac{180}{63}; \qquad \frac{675000}{63} : \frac{180}{63} = 3750 \text{ (Preis)}; \quad 360 : \frac{180}{63} = 126 \text{ Familien)}$$

Heute könnte man folgendermaßen rechnen: Wenn jede Familie den Beitrag a_1 beisteuert, ergibt sich ein Überschuss von f_1 (absolut).
Wenn jede Familie den Beitrag a_2 beisteuert, ergibt sich ein Fehlbetrag von f_2 (absolut).
Der richtige Beitrag a ist nun

$$af_1 + af_2 = f_1a_2 + f_2a_1 \qquad \text{also} \qquad a = \frac{f_1a_2 + f_2a_1}{f_1 + f_2}$$

Ist x die Zahl der Familien, dann ist $a_1x - f_1 = a_2x + f_2$, also $x = \frac{f_1+f_2}{a_1-a_2}$. Der Preis y ist dann $y = a \cdot x$.

L 76/2 Man löst diese Aufgabe mit Hilfe geometrischer Reihen.

$$a_1 = a_1\frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1} \qquad , \qquad s_2 = a_2\frac{q_2^n - 1}{q_2 - 1}$$

mit $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$. Da $s_1 = s_2$ gilt, ergibt sich für

$$n = \frac{\log 6}{\log 2} \approx 2{,}59$$

L 76/3 Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 5x + 6y = 16 \\ 4x + y = 5y - x \end{array} \right| \quad \text{wird zu} \quad \left| \begin{array}{l} 5x + 6y = 16 \\ 3x - 4y = 0 \end{array} \right|$$

und daraus die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{sie wird zu} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -38 & 6 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

So ist $y = \frac{48}{38} = 1\frac{5}{19}$ und $x + 5 \cdot 1\frac{5}{19} = 8$, $x = 1\frac{13}{19}$.
Heute löst man dieses Gleichungssystem durch Elimination.

L 76/4 Man löst mit Hilfe des Strahlensatzes $50 : x = 4 : 46$, $x = 575$. Man erhält 5 Klafter, 7 Fuß, 5 Zoll.

Geometrische Plaudereien

L 87/1 a) b)  

L 87/2 a,b,d

L 87/3 a) 4 Symmetrieachsen; b) 1 Symmetrieachse; c) 2 Symmetrieachsen; d) unendlich viele Symmetrieachsen; e) 2 Symmetrieachsen; f) keine Symmetrieachse; g) 4 Symmetrieachsen; h) 2 Symmetrieachsen.

L 87/4 a) EHE; b) HEIDE; c) EI; d) EID; e) ECKE; f) BEIDE

L 87/5 1. b,c,d 2. a,c,d

Ich hab's gefunden

L 93/1 Ein fester Körper, der vollständig in Wasser getaucht wird, verdrängt vom Wasser so viel, wie sein eigenes Volumen beträgt. Bei gleichem Volumen haben verschiedene Stoffe eine unterschiedliche Masse. (So hat 1 cm^3 Gold die Masse 19,3 g und 1 cm^3 Silber 10,5 g.)
Bei gleicher Masse werden verschiedene Stoffe somit ein unterschiedliches Volumen haben. (So hat 1 kg Gold ein Volumen von etwa 52 cm^3 und 1 kg Silber ein Volumen von etwa 95 cm^3.)

Fertigt man nun etwa zwei Würfel von genau gleicher Masse wie der Weihkranz, den einen aus reinem Gold, den anderen aus reinem Silber, und taucht die drei Gegenstände jeweils in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß, so wird beim Würfel aus reinem Silber am meisten Wasser überlaufen, beim Würfel aus reinem Gold am wenigsten.
Ist der Kranz aus Gold und Silber gemischt, so wird die bei ihm überlaufende Wassermenge geringer sein als beim Silberwürfel, aber immer noch größer sein als beim Goldwürfel.

Die vom Silberwürfel, vom Goldwürfel bzw. vom Weihkranz verdrängte Wassermenge

betrage s, g bzw. k cm^3. Der Weihkranz habe (wie auch der Silberwürfel und der Goldwürfel) die Masse a kg, davon seien b kg Silber und c kg Gold, also
(1) $b + c = a$.
Der Silberanteil des Kranzes verdrängt dann $\frac{b}{a}s$ cm^3 Wasser. (In unseren Bezeichnungen verdrängen ja a kg Silber s cm^3 Wasser. Daher verdrängt 1 kg Silber $\frac{s}{a}$ cm^3 Wasser und somit verdrängen b kg Silber $b\frac{s}{a}$ cm^3 Wasser.)
Der Goldanteil des Kranzes verdrängt $\frac{c}{a}g$ cm^3 Wasser. Der Kranz verdrängt somit einerseits k cm^3, andererseits $\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}g$ cm^3 Wasser, also $\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}g = k$, d.h.
(2) $bs + cg = ak$
Aus (1) und (2) folgt $c = a - b$, $bs + (a - b)g = ak$, also $bs - bg = ak - ag$, d.h.

$$b = \frac{k - g}{s - q}a$$

Dies ergibt auch

$$c = a - b = \left(1 - \frac{k - g}{s - g}\right)a = \frac{s - k}{s - g}a$$

Damit sind die Anteile b und c an der Gesamtmasse a aus den bekannten Größen s, g, k, a bestimmt, und es ist

$$\frac{c}{b} = \frac{s - k}{k - g}$$

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

L 98/1 Das Jahr 1984

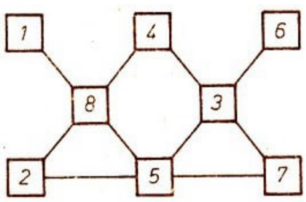
$$1 + 9 \cdot 8 : 4 = 19$$
$$1 + 9 - 8 : 4 = 8$$
$$1 - 9 + 8 + 4 = 4$$

L 98/2 Sternchen klar

456 : 678

3648
3192
2736

309168



L 98/3 Magische Figur

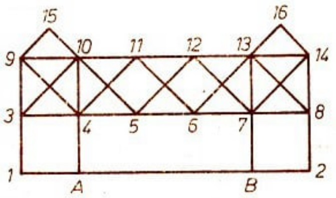
L 98/4 Wie alt? Aus dem Text ergibt sich folgendes Gleichungssystem (V, M, J, K bzw. S bezeichnen das Alter des Vaters, der Mutter, von Jens, Kati bzw. Sven):

$$V = M \quad (1)$$
$$S = K + 3 \quad (2)$$
$$J = S + 3 \quad (3)$$
$$J = S + K \quad (4)$$
$$V + 3 = 3(J + 3) \quad (5)$$

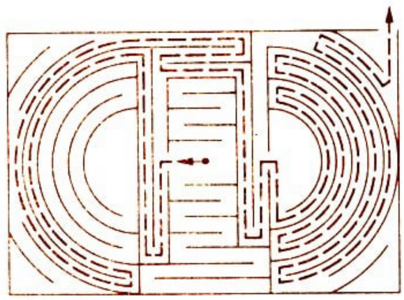
Aus (3) und (4) ergibt sich $K = 3$. Aus (2) folgt $S = 6$. Weiter folgen aus (3) oder (4) $J = 9$, aus (5) $V = 33$ und aus (1) $M = 33$ (Altersangaben in J.)

L 99/1 Mal so, mal so
Für das Wort DEZIMALBRUCH gibt es 330 verschiedene Lesemöglichkeiten
[Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von 11 Elementen - 7 Abschnitte nach links und 4 Abschnitte nach unten - mit der Klassenbildung (7,4); $330 = \frac{11!}{7!4!}$

L 99/2 In einem Zuge
Man muss bei A (bzw. B) beginnen und bei B (bzw. A) enden;
z. B. A-B-7-4-A-1-3-4-9-10-15-9-3-10-4- 11-6-13-10-5-12-7-8-13-14-16-13-7-14-8-2B.

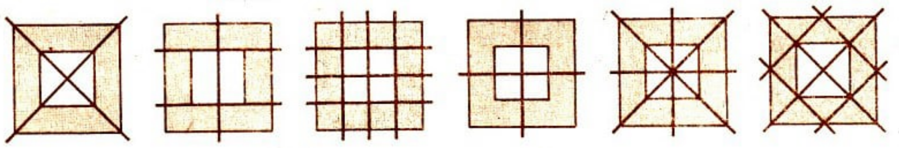


L 99/3 Im Labyrinth



L 99/4 Flächenvergleich
Alle 5 Flächenstücke haben den gleichen Flächeninhalt, der sich aus dem Flächeninhalt eines Halbkreises (Durchmesser entspricht zwei Kästchenseiten) und dem Flächeninhalt von 2 Quadratkästchen zusammensetzt.

L 99/5 Ze



L 99/6 Legespiel

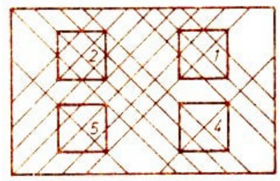
L 99/7 Stuhlakrobatik

L 99/8 Rollerrennen

	1.	2.	3.	4.
a	B	E	K	D
b	B	K	E	D
c	B	K	D	E
d	K	B	E	D
e	K	B	D	E
f	K	D	B	E

Die ersten beiden Aussagen lassen die angegebenen sechs Möglichkeiten zu (B = Ben, D = Dieter, E = Eva, K = Katrin). Die dritte A dass Dieter besser abschnitt als Ben, sondert hieraus eindeutig die Möglichkeit f aus: 1. Platz: Katrin, 2. Platz: Dieter, 3. Platz: Ben, 4. Platz: Eva.

L 100/1 Gut eingepasst
Das Bild zeigt die vervollständigte Figur. Das Quadrat Nr. 3 passt nicht hinein.



L 100/2 Fortsetzung gesucht
Bildungsgesetz der Zahlenfolge:

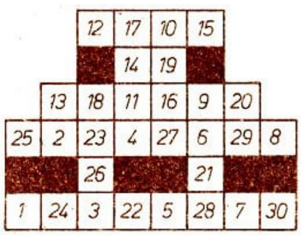
$$a_n = 3n + (-1)^n n^2 \qquad ; \qquad a_6 = 54$$

Bildungsgesetz der Figurenfolge:
Das obere schwarze Dreieck springt jeweils ins nächste Dreieck, das untere schwarze Dreieck jeweils ins übernächste Dreieck (in mathematisch positiver Richtung).

6. Glied: 

k 100/3 Gewusst wie?
Eine Möglichkeit wäre folgende: Durch eine erste Wägung entnimmt man mit Hilfe des Puddingpäckchens 40 g Tee. Dann legt man das Gewürzpäckchen auf die eine und das Puddingpäckchen auf die andere Waagschale und entnimmt durch Zuschütten von Tee zur Schale mit dem Gewürzpäckchen die noch fehlenden 15 g Tee.

L 100/4 Rösselsprung



Abenteuerlich

L 100/5 Es bezeichne M die ursprüngliche Taleranzahl und M_i die Anzahl der Taler, die sich nach der Aufteilung durch den i-ten Räuber in der Kassette befinden ($i = 1, ...,5$). Dann ist

$$M_1 = \frac{4}{5}(M-1) \qquad \text{und} \qquad M_{i+1} = \frac{4}{5}(M_i - 1), \quad i = 1,...,4$$

Aus diesen Formeln folgt

$$M_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 M - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$$

Die letzten fünf Summanden werden addiert (z. B. lässt sich die Summenformel für eine endliche geometrische Reihe anwenden). Somit finden wir

$$M_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 (M+4) - 4$$

Der Problemstellung entsprechend muss M_5 eine natürliche Zahl sein. Weil 4 und 5 teilerfremd sind, ist M_5 genau dann eine natürliche Zahl, wenn $M+4$ ein Vielfaches von 5^5 ist.
Folglich besitzt M die Darstellung $M = k5^5 - 4$, und es ist $M_5 = 4(256k - 1)$, wobei k eine geeignete natürliche Zahl ist.

Nun soll M_5 durch 5 teilbar sein. Wegen $256k - 1 = 255k + (k - 1)$ ist M_5 genau dann durch 5 teilbar, wenn $k - 1$ durch 5 teilbar ist. Für k kommen daher die Zahlen $1, 6, 11, 16, 21, ...$ in Frage, und für alle diese Werte ist das zugehörige M eine Lösung.
Der Kassetteninhalt war also
$(5m + 1)5^5 - 4$ Taler; $m \in \mathbb{Z}$; $m \geq 0$.

L 100/6
Für $m = 1$ ist der Kassetteninhalt 18746 Taler, also bereits größer als 10000. Daher kann nur $m = 0$ sein. In diesem Fall erhalten wir als Gesamtbeute 3121 Taler. Sie wird folgendermaßen aufgeteilt:

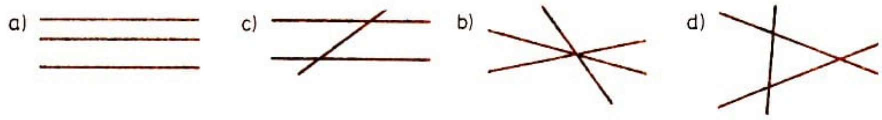
1. Räuber: 624 + 1 + 204 Taler = 829 Taler
2. Räuber: 499 + 1 + 204 Taler = 704 Taler
3. Räuber: 399 + 1 + 204 Taler = 604 Taler
4. Räuber: 319 + 1 + 204 Taler = 524 Taler
5. Räuber: 255 + 1 + 204 Taler = 460 Taler

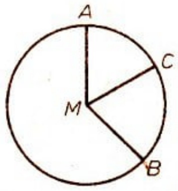
Bilderbogen Geometrie

L 101/1
a) $M = \{A,B,C,E,H\}$, b) $M = \{A,G,C,D,E\}$, c) $M = \{A,C,E\}$, d) $M = \{F\}$

L 101/2 a) Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.
b) Es sind 12 Dreiecke, 6 Trapeze, 4 Parallelogramme und 2 Sechsecke. Es sind noch 6 Vierecke.

L 101/3



L 101/4 

$\angle CMB = 75°$, $\angle AMC = 300°$, $\angle AMB = 25°$, $\angle CMB = 285°$

L 101/5
Man zeichnet um A mit $\overline{AC}$ bei C beginnend einen Viertelkreis. Daran wird anschließend ein Viertelkreis um B mit $2 \cdot \overline{AC}$, dann um D mit $3 \cdot \overline{AC}$, dann um C mit $4 \cdot \overline{AC}$, um A mit $5 \cdot \overline{AC}$ usw. gezeichnet.

L 101/6 a) $\alpha = 100°$ b) $\alpha = 55°$ c) $\alpha = 110°$ d) $\alpha = 55°$ e) $\alpha = 100°$ f) $\alpha = 110°$

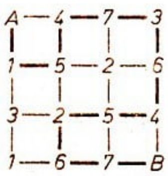
Logeleien

L 102/1
a) Figur 1; b) Figur 7

L 102/2 a) Die Summe ist stets 10, also gehört an Stelle des Fragezeichens eine 1, denn $7 + 2 + 1 = 10$.
b) $(2 + 8) : 5 = 2$, c) $2 \cdot 9 \cdot 10 : 10 = 18$

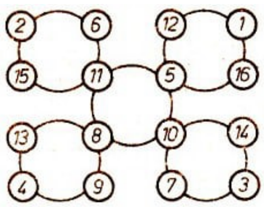
L 102/3
$1 + 7 + 3 + 6 + 8 + 5 + 9 + 7 + 6 + 8 = 60$.

L 102/4
$1+9-8+2+7-6+5-4+3-2+5-6+7-8+9-1-9+4-1+3-5-4-1 = 0$

L 102/5 

L 103/2
a) Außer Nr. 3 haben alle Figuren eine Symmetrieachse. b) Nr. 4 gehört nicht hinein.

L 103/3
a) $(8 : 4) + 5 = 7$; $(7 - 6) \cdot 5 = 5$;
b) $20 \cdot 4 : 8 = 10$; $16 + 18 - 10 = 24$; $12 + 6 + 14 = 32$

L 103/4 

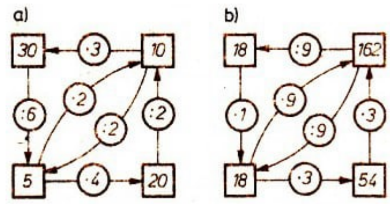
L 103/5

$$\begin{array}{rll} 89 & \cdot\, 11 & = 979 \\ 68 & :\, 7 & = 9 \\ 2 & +\, 1 & = 3 \\ 10 & -\, 1 & = 9 \\ \hline \end{array}$$

Kombiniere!

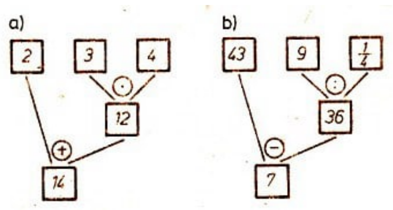
L 105/1
a) $(2+4)\cdot 3$; b) $18-56:7$; c) $54:(2+6)$; d) $\frac{3}{4}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{1}{12}$; e) $(0{,}5-0{,}5)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

L 105/2

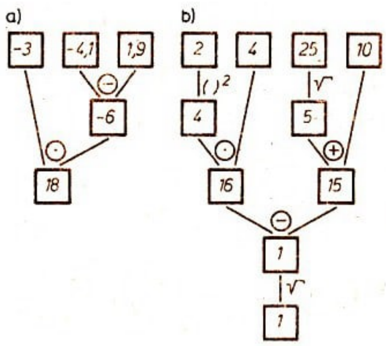


c) Die Schlüsselzahl 48 löst das System.

L 105/3



L 105/4



L 105/5 Ein Baustein der Serie F wurde nicht verwendet.

Aus dem Alltag

L 110/1 Martin wiegt 43 kg, Peter 40 kg, Wenzel 45 kg.

L 110/2 Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Leine wie gefordert aufzuspannen. Drei davon wären:
a) 1-2-5-1-4-5-8-7-8-11-7-0-11-12-8-9-5-6-2-3-6-9-12;

b) 1-2-3-6-2-5-1-4-5-6-9-5-8-4-7-8-9-2-8-11-7-0-11-12;
c) 1-2-3-6-9-2-11-10-7-4-1-5-4-8-7-11-8-5-2-6-5-9-8-12

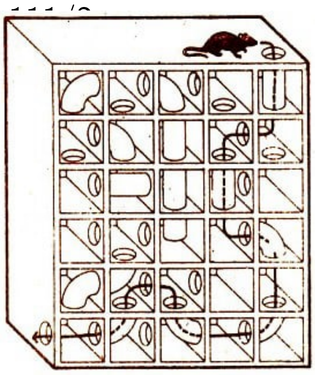
L 110/3 Die Zahlen 1, 4 und 5 erfüllen die Bedingungen.

L 110/4 Da Frau Weiß kein schwarzes Haar hat und auch kein weißes Haar haben kann, muss sie braunes Haar haben. Demzufolge müssen Frau Schwarz weißes Haar und Frau Braun schwarzes Haar haben.

L 111/1 Es sei x die Uhrzeit bzw. die Anzahl der Stunden von Mitternacht an gerechnet. Dann gilt

$$\frac{x+12}{4} + \frac{12-x}{2} = x \qquad , \qquad x = 7\frac{1}{5}$$

Es ist 7 Uhr und 12 Minuten. L



L 111/3 1. Reihe: 6. Lampe;
2. Reihe: 10. Lampe;
5. Reihe: 4. und 8. Lampe sind gleiche Modelle.

L 111/4 Die Masse der Kiste sei x kg. Dann gilt die Gleichung $3 + 2x = 4 + 5$ mit $x = 3$. Die Masse der Kiste beträgt 3 kg.

L 111/5 Der Preis für den Inhalt eines Glases Pfirsiche sei x DM, für das Glas selbst y DM. Das ergibt das Gleichungssystem

$$x + y = 2{,}45 \qquad , \qquad x = y + 1{,}85$$

Lösung: $y = 0{,}30$; $x = 2{,}15$ Die Pfirsiche (ohne Glas) kosten 2,15 DM.

L 111/6
Die Bänder A und D bilden einen Knoten.

L 111/7
Vater (V), Mutter (M) und Sohn (S) besetzen 3 Stühle, der vierte Stuhl bleibt frei. Auf diesen 3 Stühlen können sie in 6 verschiedenen Anordnungen sitzen: (V, M, S), (V, S, M), (M, V, S), (M, S, V), (S, V, M), (S, M, V).

Nun kann aber jeder der vier Stühle einmal frei bleiben, und die übrigen drei Stühle werden besetzt. Da es in jedem dieser vier Fälle 6 Platzierungsmöglichkeiten gibt, so gibt es für die Familie insgesamt 24 = 4·6 Möglichkeiten, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen.

(Es geht bei dieser Aufgabe um die Ermittlung der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von 4 Elementen zur Klasse 3.)

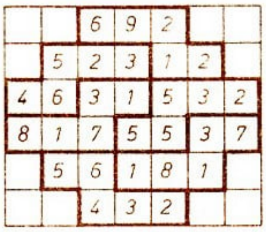
Rätsel

L 116/1 Rätselsterne
1. Parabel, 2. negativ, 3. Einheit, 4. Viertel, 5. relativ, 6. digital, 7. Basis, 8. Binom, 9. Monat, 10. Basel, 11. Sehne, 12. Eniac, 13. Potenz, 14. Knoten, 15. Beweis, 16. Ziffer, 17. Nenner, 18. Vektor.

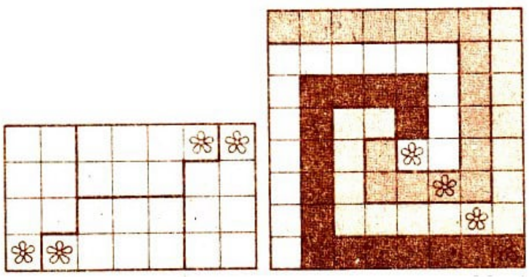
L 116/2 Doppelkreuze
1. Deka, 2. Null, 3. Punkt, 4. Radius, 5. Gerade, 6. Kreis, 7. Ries, 8. Tera, 9. Kegel, 10. Gesetz, 11. Stunde, 12. Kugel, 13. Bild, 14. Mega, 15. Meile, 16. Lineal, 17. falsch, 18. Glied.

Gute Beobachtungsgabe gefragt

L 123/3 

L 123/4 

L 123/5



Wolf, Ziege und Kohlköpfe

L 124/1 Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Abschließend holte er die Ziege.

Geometrie pseudoeuklidisch

L 142/1 Alle Strecken, die auf Geraden liegen, die zu e oder f parallel sind, haben die Länge Null, da das pseudoeuklidische Quadrat entartet.

L 142/2 Zwei Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ haben die gleiche Länge, wenn A und B auf einer gleichseitigen Hyperbel um O mit den Asymptoten parallel zu e und f fliegen.

L 142/3 Wir zeichnen durch alle Punkte des Dreiecks Parallelen zu e und f und erhalten so ein Rechteck, das in vier kleinere zerteilt ist. Jede Dreieckseite ist Diagonale in einem Rechteck der Figur.
Die Mittelsenkrechte auf der Dreieckseite ist die zweite Diagonale des gleichen Rechtecks. Der Schnittpunkt O zweier Mittelsenkrechten vergrößert das Muster auf 9 Rechtecke.

Mit dem bekannten Satz, dass ein Punkt P genau dann auf der Diagonalen eines Rechtecks liegt, wenn die durch die Seitenparallelen durch P erzeugten Nebenrechtecke gleiche Flächen haben, findet man dann, dass durch M auch die dritte Mittelsenkrechte geht.

2 x 7 Geometrieaufgaben

Wir betrachten Flächen
L 143/1
(1) 35 cm^2; (2) 12 mm; (3) 25 m;
(4) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 49 cm, 7 cm und 7 cm;
(5) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 81 cm, 3 cm und 27 cm, 9 cm und 9 cm.

L 143/2
a) Es gibt vier verschiedene Rechtecke.
b) Es gibt genau ein solches Rechteck.

L 143/3 a) Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten; die Seitenlängen können 1 cm und 7 cm, 2 cm und 6 cm, 3 cm und 5 cm, 4 cm und 4 cm sein.
b) Die Anzahl der Quadrate, die das jeweilige Rechteck ausfüllen, ist dann 7 bzw. 12 bzw. 15 bzw. 16.
c) Der Flächeninhalt ist am größten, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

L 143/4 20 Glasscheiben

L 143/5 Die Seitenlängen des Quadrats sind a) 8 cm, b) 9 cm.

L 143/6 Die Fläche des Fußballplatzes hat eine Größe von mindestens 4050 m^2 und höchstens 10800 m^2.

L 143/7
a) Die Länge des einen Rechtecks ist dreimal so groß wie die des anderen.
b) Der Flächeninhalt des einen Rechtecks ist neunmal so groß wie der des anderen.

Wir betrachten Körper

L 143/8 (1) 8 cm;
(2) es gibt verschiedene Möglichkeiten; 1 cm und 20 cm, 2 cm und 10 cm, 4 cm und 5 cm;

(3) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm, 1 cm und 100 cm; 1 cm, 2 cm und 50 cm; 1 cm, 4 cm und 25 cm; 1 cm, 5 cm und 20 cm; 1 cm, 10 cm und 10 cm; 2 cm, 2 cm und 25 cm; 2 cm, 5 cm und 10 cm; 5 cm, 5 cm und 4 cm;

(4) 1 cm, 1 cm und 5 cm.

L 143/9 Es gibt a) 8, b) 1, c) 2 (verschiedene) Quader.

L 143/10 a) 54 bzw. b) 90 Päckchen
(Dabei muss die jeweils längste Kante der Päckchen parallel zu den Kistenkanten der Länge 24 cm, die jeweils kleinste Kante der Päckchen parallel zu den Kistenkanten der Länge 48 cm sein.)

L 143/11
a) Die Höhe der einen Schachtel ist dreimal so groß wie die der anderen.
b) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist doppelt so groß wie der der anderen.
c) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist achtmal so groß wie der der anderen.

L 144/1 Die Würfelkantenlänge beträgt a) 4 cm, b) 5 cm.

L 144/2 Der Abstand beträgt 4 cm.

L 144/3 Das Volumen beträgt
a) 60 cm^2, b) 64 cm^2, c) 36 cm^2, d) Es entsteht kein Kästchen; also 0 cm^2.

Geistesgymnastik

L 144/4
48 Mark : 4 = 12 Mark;
eine Mandel Leinwand kostet 12 Mark.
12,00 Mark - 7,50 Mark = 4,50 Mark; für die Gans wurden 4,50 Mark angerechnet.

L 144/5 Angenommen x ist die gesuchte Zahl; dann gilt

$$x - 30 = 28 + 32 \qquad , \qquad x = 90$$

Es handelt sich um die Zahl 90.

L 144/6
1,70 Mark = 170 Pf; 17 · 10 Pf = 170 Pf; 17 : 2 Eier = 34 Eier;
34 Eier + 11 Eier = 45 Eier. Die Bäuerin hatte anfangs 45 Eier.

L 144/7 $45 : 5 = 9$; $9 - 1 = 8$; $9 - 2 = 7$; $9 + 1 = 10$; $9 + 2 = 11$.
Die fünf Summanden lauten 7, 8, 9, 10 und 11.

L 144/8 Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt

$$4 \cdot x - 10 = 6 \cdot 11 \qquad , \qquad x = 19$$

Es handelt sich um die Zahl 19.

L 144/9 Es sei x die zu nennende Zahl; dann gilt

$$x = \frac{1}{8} \cdot x + 42 \qquad , \qquad x = 48$$

Es handelt sich um die Zahl 48.

L 144/10
$15-8=7$; Karl fehlen noch 7 Walnüsse von einer Mandel.
$7\cdot 5=35$; Heinz hatte 35 Walnüsse.

L 145/1 Es sei n die zu ermittelnde Zahl; dann gilt

$$2\cdot n+64=6\cdot n \qquad , \qquad n=16$$

Es handelt sich um die Zahl 16.

L 145/2 Angenommen, es wurden x Tannen gefällt, also $\frac{1}{3}x$ Buchen, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{5}x$ Eichen, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x$ Lärchen, $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{15}x=\frac{1}{30}x$ Ahorne. So gilt

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{2}{15}x+\frac{1}{30}x &= 357 \\ 30x+10x+6x+4x+x &= 30\cdot 357 \\ x &= 210 \end{aligned}$$

Es wurden 210 Tannen, 70 Buchen, 42 Eichen, 28 Lärchen und 7 Ahorne gefällt.

L 145/3

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8} \qquad ; \qquad 1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

Aus $\frac{3}{8}x=480$ folgt $x=1280$. Das Jahreseinkommen betrug 1280 Mark.

L 145/4 Aus $a:b:c=2:3:5$ folgt $b=\frac{3}{2}a$ und $c=\frac{5}{2}a$. Durch Einsetzen in $a+b+c=35$ erhalten wir

$$a+\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}a=35 \qquad , \qquad a=7$$

Daraus folgt

$$b=\frac{3}{2}\cdot 7=10\frac{1}{2} \qquad , \qquad c=\frac{5}{2}\cdot 7=17\frac{1}{2}$$

Es handelt sich um die Zahlen 7, $10\frac{1}{2}$ und $17\frac{1}{2}$.

L 145/5 Angenommen, Karl ist x Jahre, sein Vater also $7x$ Jahre alt. Nun gilt $7x-x=36$ und $x=6$. Karl ist gegenwärtig 6 Jahre, sein Vater 42 Jahre alt.

L 145/6 Angenommen, es waren x Lesebücher, also $(300-x)$ Fibeln; dann gilt

$$0{,}8x+0{,}5(300-x)=180 \qquad , \qquad x=100$$

Es wurden 100 Lesebücher und 200 Fibeln gekauft.

L 145/7
Angenommen, anfangs waren es n Exemplare. Am ersten Tag wurden $\frac{n}{8}+10$ Exemplare verkauft. Es verblieb ein Rest von

$$n-\left(\frac{n}{8}+10\right)=\frac{7}{8}n-10$$

Exemplaren. Am zweiten Tag wurden

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}n-10\right)+15=\frac{7}{16}n+10$$

Exemplare verkauft. Nun gilt

$$n=\frac{n}{8}+10+\frac{7}{16}n+10+50=\frac{9}{16}n+70$$

also $n = 160$. Anfangs wurden 160 Exemplare des Romans angeboten.

L 145/8 Angenommen, das Darlehen belief sich auf x Mark. Zum ersten Termin wurden $\frac{x}{4}+50$ Mark getilgt. Es verblieb eine Restschuld von

$$x-\left(\frac{x}{4}-50\right)\text{ Mark }=\frac{3}{4}x-50\text{ Mark}$$

Zum zweiten Termin wurden

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3x}{4}-50\right)+60\text{ Mark }=\frac{3}{2}x+50\text{ Mark}$$

getilgt. Es verblieb eine Restschuld von

$$\frac{3x}{4}-50-\left(\frac{3}{20}x+50\right)\text{ Mark }=\frac{3}{5}x+100\text{ Mark}$$

Nun gilt

$$x=\frac{x}{4}+50+\frac{3}{20}x+50+\frac{3}{10}x+200$$

und weiter

$$x-\frac{1}{4}x+\frac{3}{20}x-\frac{3}{10}x=300 \qquad , \qquad x=1000$$

Das Darlehen belief sich auf 1000 Mark.

L 145/9 Angenommen, das leichteste Kalb kostete n Mark; dann kosteten die vier übrigen Kälber $(n+2)$ Mark, $(n+4)$ Mark, $(n+6)$ Mark, $(n+8)$ Mark. Nun gilt

$$n+(n+2)+(n+4)+(n+6)+(n+8)=100 \qquad , \qquad n=16$$

Das leichteste Kalb kostete 16 Mark.

Ein Gewichtsproblem des Leonardo Fibonacci

L 148/1 Es dürfen beide Waagschalen mit Wägesteinen belastet werden. Dies bedeutet, dass auch Wägestücke subtrahiert werden können. Die Frage ist somit:
Welche vier Zahlen a, b, c, d sind so beschaffen, dass jede natürliche Zahl bis 40 teils durch Addition, teils durch Subtraktion wenigstens einer und höchstens vier dieser vier Zahlen erhalten werden kann?
Die Zahlen $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 27$ leisten das Verlangte:

61 Quellenverzeichnis

Die Beiträge dieses Buches wurden einzelnen Heften der mathematischen Schülerzeitschrift "Alpha", die zweimonatlich im volkseigenen Verlag Volk und Wissen, Berlin, erscheint, entnommen und von Johannes Lehmann zusammengestellt.
Die Beiträge wurden von folgenden Autoren verfasst:

Adam Ries (1492 bis 1559)
Wolfgang Arnold, Berlin

Einige Aufgaben aus der Coß von Adam Ries
Dr. Rolf Lüders, Berlin

Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt
Dr. Klaus Reichold, Karl-Marx-Stadt

Ungleichungen
Johannes Lehmann, Leipzig und Theodor Scholl, Berlin

Das arithmetische Mittel
Karlheinz Lehmann, Berlin

Turnierpläne aus mathematischer Sicht
Dr. Uwe Feiste, Greifswald

Vier in einer Reihe
Dr. Christoph Bandt, Greifswald

Geometrie hilft der Arithmetik, Axialsymmetrie, Zentralsymmetrie und Drehsymmetrie
Dr. Erhard Quaisser, Potsdam und Dr. Hans-Jürgen Sprengel, Potsdam

Leonhard Euler und Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei L. Euler
Prof. Dr. Kurt-R. Biermann, Berlin

Über den Rösselsprung von L. Euler
Harald Rüdiger, Grünheide b. Berlin

Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen
Prof. Dr. Christian Babe Karl-Marx-Stadt

Auf Fehlersuche
Johannes Lehmann, Leipzig und Theodor Scholl, Berlin

Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi und Der Moskauer mathematische Papyrus
Alexander Halameisär und Dr. Alexander Volodarskij, Moskau sowie Dr. Sonja Brentjes, Leipzig (Übersetzung und Bearbeitung)

Aus der Geschichte der Längenmaße
Dr. Uwe Sonnemann, Grabow

Bilderbogen Geometrie und Rätsel
Helmut Begander, Leipzig

Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken
Prof. Dr. Jürgen Flachsmeyer, Greifswald

Punktanordnungen in einem Quadrat
Dr. Klaus Kirchner, Erfurt und Dr. Michael Schmitz, Erfurt

Geistesgymnastik, Zahlenzauber - Zauberzahlen, 13 Knacknüsse, Knobeleien mit Würfeln und Zahlentheorie
Johannes Lehmann, Leipzig

Chiu Chang Suan Shu: Mathematik in neun Büchern
Helmut Begander, Leipzig und Johannes Lehmann, Leipzig

Das Fünfzehnerspiel
Dr. Monika Deweß, Leipzig

Pythagoras - Müssen es immer Quadrate sein? und Eine Aufgabe und drei Lösungen
Prof. Dr. Werner Jungk, Köthen

Rational oder irrational und Allerlei Gestrecktes
Prof. Dr. Werner Walsch, Halle

Geometrische Plaudereien
Dr. Lothar Flade, Halle, und Dr. Hartmut Knopf, Halle

Der Satz des Jahrhunderts, Eine historische Mathematikaufgabe, Wolf, Ziege, Kohlkopf und Ist 11111111111 eine Primzahl?
Dr. Herbert Pieper, Berlin

Hundert Jahre Nullmeridian und Greenwich-Zeit
Dr. Peter Schreiber, Stralsund

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt
Dr. Roland Mildner, Leipzig

Abenteuerlich
Dr. Werner Schmidt, Greifswald

Interessante Koordinaten und Kombiniere!
Dr. Lothar Flade, Halle, und Johannes Lehmann, Leipzig

Rätselsterne
Lutz Clausnitzer, Obercunnersdorf

Gitterpunktpolygone
Dr. Roland Werner, Schkeuditz

Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten
Dr. Johannes Gronitz, Karl-Marx-Stadt

Geometrie pseudoeuklidisch
Prof. Dr. Liebscher, Potsdam

2 x 7 Geometrieaufgaben
Dr. Manfred Rehm, Berlin

Wissenswertes über das Dreieck
Dr. Dieter Hetsch, Halle, und Theodor Scholl, Berlin