Mathematik

Ergänzende

Aufgaben

für Leistungsklassen

9/10

Vorwort

Da ich als Schüler lange Vorworte nicht gelesen habe, dieses Aufgabenheft jedoch vor allem für Schüler gedacht ist, will ich mich kurz fassen.

Wenn man wissen möchte, ob man eine Theorie beherrscht, versuche man sich an einem praktischen Problem. Das ist sicher leichter gesagt als getan. In der Mathematik gibt es glücklicherweise einen – wenn auch nicht ganz echten – Ersatz für solche Probleme: die Sach- und Anwendungsaufgaben. In dieser Broschüre sind 23 solcher Aufgaben enthalten. Wenn man etwas genauer hinsieht, sind es sogar bedeutend mehr. Eben wie in der Praxis. Da besteht eine Problemlösung auch nicht nur aus einem einfachen Schritt. Mitunter sind viele Teilaufgaben zu lösen, einfache und schwierige, mit ganz unterschiedlichen Mitteln, nicht fein sortiert nach schulischen Sachgebieten.

Irgendwo habe ich einmal gelesen: Der Anfang ist die Hälfte vom Ganzen. In diesem Sinne wünsche ich Ihnen: Geben Sie nicht auf, auch wenn die Aufgaben sehr umfangreich erscheinen. Erschrecken Sie nicht vor dem (*), mit dem schwierige Aufgabenteile gekennzeichnet sind. Vielleicht finden Sie einen überraschend einfachen Lösungsweg. Den Aufgabenstellungen sind bewußt nur wenige Skizzen beigefügt. Das Sich-Veranschaulichen eines Problems ist nun mal ein wichtiger Schritt auf dem Weg zur Lösung, den man selber gehen muß.

Und noch etwas: Die Aufgaben sind ganz unterschiedlichen Bereichen entnommen. Da kann es schon einmal vorkommen, daß Sie die Bedeutung eines Begriffes nicht verstehen. Nutzen Sie Nachschlagewerke, schauen Sie in Lexika, mitunter sind solcherart gewonnene Informationen genauso nutzbringend wie die Lösung der Aufgabe.

Am Ende einiger Aufgabenstellungen finden Sie ein (H). Dann können Sie, falls Sie das wünschen, einen Hinweis in Anspruch nehmen, der die Aufgabenstellung etwas erleichtert. Diese Hinweise sind der Reihenfolge nach im Anschluß an die Aufgaben aufgeführt. Zu einigen, mit (L) gekennzeichneten Aufgaben, enthält die Aufgabensammlung am Schluß auch Lösungen.

Schließlich wurde den Aufgaben 22 und 23 ein kleiner Exkurs zur Zins- und Zinseszinsrechnung vorangestellt – eine sicher notwendige Ergänzung des Schulstoffes bis Klasse 10.

Abschließend möchte ich allen danken, die durch ihre Anregungen zur Entwicklung dieses Materials in nur wenigen Monaten beitrugen, insbesondere den Kollegen der Abteilung Mathematik der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR sowie meiner Tochter, Frau Dipl.-Math. Birgit Hamann.

Den Nutzern dieser Aufgabensammlung wünsche ich viel Erfolg und kluge Ideen. Über Hinweise zu den Aufgaben und Lösungen würde ich mich sehr freuen.

Zittau, Juni 1990

Dr. Gert Thomas

Thomas, G.: Mathematik – Ergänzende Aufgaben für Leistungsklassen 9/10. – 1. Auflage. – Zittau, 1990. – 28 S., 6 Abb.

Druck: Graphische Werkstätten Zittau GmbH.

1. Zahlenrätsel

Ramona, Philipp und Horst spielen „Zahlenraten". Wer eine Aufgabe gelöst hat, darf die nächste stellen. Ramona beginnt:

a) „Nenne die kleinste natürliche Zahl, welche sowohl durch 3, 7, 13 als auch 37 teilbar ist!"

b) Horst hat diese Zahl ganz schnell gefunden. Er nennt gleich noch eine weitere und vermutet, daß alle natürlichen Zahlen der Form **ababab** mit Ziffern a und b diese Eigenschaften haben. Beweisen Sie das! (H)

c) Philipp, dem der Beweis nicht schwerfiel, ergänzt: „Wie viele solche 6-ziffrige Zahlen mit $a \neq b$ und $a \neq 0$ gibt es denn?"

d) Horst darf die nächste Aufgabe stellen. Er will die Anzahl der Ziffern „9" wissen, die in den natürlichen Zahlen von 1 bis 7777 stecken.

e) Ramonas nächste Aufgabe lautet: „Dividiert man die Differenz der Quadrate zweier natürlicher Zahlen durch deren Summe, so erhält man 12. Die eine Zahl beträgt dabei das Dreifache der anderen." Horst, der viele Formeln kennt, löst die Aufgabe im Kopf. Er fährt fort:

f) „Mit Formeln läßt sich vieles einfacher lösen. Ich merke mir eine natürliche Zahl. Dann bilde ich die Summe aus ihrer 2., 3. und 4. Potenz sowie aus ihrem Nachfolger. Diese Summe multipliziere ich mit dem Vorgänger der Zahl. Das Ergebnis ist 242. Wie heißt die Zahl?"

g) Philipp macht es wieder etwas leichter: „Gesucht sind alle zweiziffrigen natürlichen Zahlen, für welche die Summe der Quadrate der beiden Ziffern gleich 100 ist."

h) Ramona nennt nicht nur die Lösung, sondern verallgemeinert: „Welche zweiziffrigen natürlichen Zahlen haben eine durch 10 teilbare Summe der Quadrate ihrer Ziffern?"

i) „Ich weiß etwas ganz Tolles", meint Horst. „Ich merke mir eine Zahl und addiere 10. Von der Summe subtrahiere ich die gedachte Zahl ..." Während Ramona verständnislos guckt, tippt Philipp vielsagend an seine Stirn.

2. Arithmetische Beziehungen – geometrisch veranschaulicht

Wenn man sich das arithmetische Mittel zweier Zahlen geometrisch verdeutlichen will, verwendet man als Hilfsfigur im allgemeinen das Trapez. Bekanntlich hat dessen Mittellinie m eine Länge, die gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der beiden parallelen Seiten a und c ist.

a) Beweisen Sie diese Beziehung!

Neben der Mittellinie gibt es im Trapez weitere interessante Linien. Wir wollen sie als „innere Parallelen" bezeichnen, wenn sie parallel zur Mittellinie verlaufen und wie diese von den Schenkeln des Trapezes begrenzt werden.

b) Veranschaulichen Sie sich die Lage der folgenden „inneren Parallelen" im Trapez:

   b1) die innere Parallele h, welche durch den Schnittpunkt S der beiden Diagonalen des Trapezes verläuft,

   b2) die innere Parallele q, welche das Trapez in zwei flächengleiche Trapeze teilt,

   b3) die innere Parallele g, welche gleich der mittleren Proportionalen der beiden parallelen Seiten ist.

c) Beweisen Sie, daß der Punkt S die innere Parallele h halbiert.

Der Einfachheit halber verwenden wir im folgenden die Variablen h, q und g auch für die Längen der entsprechenden „inneren Parallelen" aus der Aufgabe b).

d) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von a und c) geeignete Formeln für h, g und q (d. h. also für die Längen dieser „inneren Parallelen")! (H), (L)

e) Beweisen Sie die aus b) ablesbare Ordnung zwischen h, m und q. An welcher Stelle ordnet sich g ein?

Man nennt h harmonisches Mittel, q quadratisches Mittel und g geometrisches Mittel von a und c. Die Formeln lassen sich analog zum arithmetischen Mittel für mehr als zwei Zahlen bzw. Größen verallgemeinern.

f) Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen. Wie lautet die Formel zur Berechnung von m? Formulieren Sie eine Vermutung zur Berechnung der Mittelwerte q, g und h dieser n Zahlen!

3. Zahlensysteme

Unter einem p-adischen System versteht man ein Positionssystem mit der Basis p. Im dekadischen System ist $p = 10$, im Dualsystem beträgt $p = 2$, im Oktalsystem 8, im Hexadezimalsystem 16.

Unter dem „kleinen Einmaleins" wollen wir alle Multiplikationsaufgaben $n \cdot m$ mit ganzzahligen Faktoren n und m verstehen, für die im p-adischen System $1 \leqq n, m \leqq p$ gilt. Das kleine Einmaleins läßt sich übersichtlich in einem quadratischen Tableau darstellen.

Für $p = 4$ hat dies folgendes Aussehen:

$p = 4$	1	2	3	10
1	1	2	3	10
2	2	10	12	20
3	3	12	21	30
10	10	20	30	100

Für $p > 2$ wollen wir durch die Bedingung $1 \leqq n,m \leqq 2p$ auch ein „großes Einmaleins" definieren. Für $p = 4$ gilt z. B.:

$p = 4$	1	2	3	10	11	12	13	20
1	1	2	3	10	11	12	13	20
2	2	10	12	20	22	30	32	100
3	3	12	21	30	33	102	111	120
10	10	20	30	100	110	120	130	200
11	11	22	33	110	121	132	203	220
12	12	30	102	120	132	210	222	300
13	13	32	111	130	203	222	301	320
20	20	100	120	200	220	300	320	1000

a) Stellen Sie die Multiplikationstableaus für das „kleine" und „große Einmaleins" im Oktalsystem auf! (L)

b*) Stellen Sie das Multiplikationstableau für das „kleine Einmaleins" im Hexadezimalsystem auf. Beachten Sie dabei, daß dessen Ziffern 0, 1, 2, . . . , 9, A, B, C, D, E, F lauten!

c) Um eine Aufgabe aus dem Dezimalsystem in das 4-adische System und zurück zu „übersetzen", kann man die Zahlen folgendermaßen darstellen:

dekadisches System	4-adisches System	Kontrolle im dek. System
$7+5=(1\cdot 4+3)+(1\cdot 4+1)$	$13+11=30$	$3\cdot 4+0=12$
$15-2\cdot 6=(3\cdot 4+3)-[2\cdot(1\cdot 4+2)]$	$33-2\cdot 12=33-30=3$	3
$45+6=(2\cdot 16+3\cdot 4+1)+(1\cdot 4+2)$	$231+12=303$	$3\cdot 16+0\cdot 4+3=51$

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben zunächst im dekadischen System. „Übersetzen" Sie diese dann in das

c1) Dualsystem (Ziffern L und O),

c2) 4-adische System,

c3*) Oktalsystem,

c4*) Hexadezimalsystem,

und lösen Sie die Aufgaben in diesen Systemen. Überprüfen Sie die Richtigkeit!

(1) $25 + 3 \cdot 7 =$ (L)

(2) $16 + 5 \cdot 13 =$

(3) $8 \cdot 6 - 15 =$

(4) $39 + 19 \cdot 23 =$

4. Koordinatenmethode

Für die Lösung zahlreicher geometrischer Probleme ist es von Vorteil, die geometrischen Sachverhalte in die Formelsprache der Algebra zu übersetzen, sie zu „algebraisieren".

Besondere Bedeutung hat dabei die Koordinatenmethode, welche eine der Grundlagen der Analytischen Geometrie darstellt.

Eine einfache Aufgabe besteht z. B. darin, gewisse Punktmengen in einem geeigneten Koordinatensystem mit Hilfe von Gleichungen, Ungleichungen, Doppelungleichungen oder Ungleichungssystemen wiederzugeben. Dies ist auch eine wichtige Voraussetzung für den zielgerichteten Einsatz der Computergeometrie.

Das bekannteste Koordinatensystem ist das kartesische, benannt nach René Descartes (1596–1650), bei dem zwei gleichgeteilte Achsen senkrecht aufeinanderstehen. In einem solchen x, y-System gebe man für folgende Punktmengen die zugehörigen Bedingungen an:

a) die Halbebene „unterhalb" der Geraden durch die Punkte A (1 ; 3) und B (4 ; 1),

b) das Innere des Winkelraums, dessen Scheitelpunkt S (− 2 ; 0) ist und dessen Schenkel durch P (2 ; − 2) und Q (1 ; 3) verlaufen,

c) das Innere des Rechtecks, von dem die drei Eckpunkte A(1 ; − 1), B (5 ; − 1) und C (5 ; 3) gegeben sind,

d) das Innere des Streifens, dessen Ränder parallel zur Winkelhalbierenden des 2. Quadranten verlaufen und auf denen die Punkte D (− 3 ; 5) und E (1 ; 4) liegen.

e) Die Punkte P, Q, S unter b) lassen sich als Eckpunkte von Parallelogrammen auffassen. Wieviele Parallelogramme entstehen? Geben Sie für diese Parallelogramme die Bedingungen für deren innere Punkte an!

Der Abstand eines Punktes P $(x ; y)$ vom Punkt A $(x_a ; y_a)$ wird mit ϱ (P ; A) bezeichnet ,und es gilt

$$\varrho (P ; A) = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2} .$$

f) Beweisen Sie diese Formel!

Geben Sie Bedingungen für folgende Punktmengen an:

g) das Innere des Kreises um A (3 ; 5) mit dem Radius 3,

h) das Innere des Kreisringes um B (− 1 ; 1) mit den Radien 2 bzw. 5.

i) Finden Sie selbst weitere Punktmengen, z. B. gemeinsame Punkte verschiedener Kreise usw.

5. Berechnungen am Dreieck

Vielfältige praktische Fragestellungen führen auf das „mathematische Modell" dreier Punkte in einer Ebene und damit auf ein Dreieck. Die drei Punkte könnten z. B. die Marktplätze dreier Orte sein. Dann erhalten auch weitere „Bestimmungsstücke" des Dreiecks einen praktischen Sinn. Überlegen Sie, was in diesem Fall durch die Dreiecksseiten, durch den Mittelpunkt des Umkreises usw. dargestellt werden könnte.

Ramona und Philipp stellen sich gegenseitig Aufgaben. Bei ihrer Lösung achten sie darauf, daß sich Rechnung und Zeichnung sinnvoll ergänzen. Philipp legt die Koordinaten der drei Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem mit A (− 2 ; − 4), B (6 ; 4) und C (− 4 ; 2) fest.

a) Stellen Sie die Gleichungen der Geraden auf, welche durch je zwei Eckpunkte verlaufen.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Dreiecksseiten.

c*) Wie lauten die Gleichungen der Geraden, welche gleichzeitig Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten sind? (H)

d) Es sind die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U des Dreiecks ABC zu ermitteln.

e*) Zum Schluß meint Ramona, daß es doch möglich sein müßte, eine Bedingung in Form einer Gleichung oder einer Ungleichung aufzustellen, die für genau alle Punkte innerhalb des Umkreises zutrifft.

Finden Sie eine solche Bedingung! (H)

6. Wanderungen

Ramona und Philipp wollen an einer Rundstreckenwanderung teilnehmen. Die Streckenlänge beträgt 30 km, die Route kann in beiden Richtungen durchwandert werden. Ramona legt in der Stunde im Mittel 4,5 km zurück, Philipp schafft 6 km. Während Ramona bereits 8 Uhr starten will, kann Philipp erst eine Stunde später mit der Wanderung beginnen. So beschließen sie, den ersten Teil des Weges getrennt und später gemeinsam zu laufen. Als Philipp am Start eintrifft, hat er vergessen, in welcher Richtung Ramona laufen wollte. So wählt er eine der beiden Möglichkeiten.

a) Nach welcher Zeit und wo werden Ramona und Philipp einander treffen?

b) Falls Philipp die richtige Richtung gewählt hat, wann werden die beiden dann die Wanderung beenden?

c) Falls Philipp die falsche Richtung wählte, wie lange muß dann wer von beiden auf den anderen am Ziel warten?

d*) Im nächsten Jahr ist Horst mit von der Partie. Er ist ein geübter Langstreckenwanderer. Seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 7,5 km/h. Nachdem sie über die Panne des Vorjahres ausgiebig gelacht haben, meint Horst: „Angenommen, wir würden dieses Jahr ab 8 Uhr in jeweils gleichen Zeitabständen starten, ihr in der einen Richtung und ich als letzter in der anderen. Gibt es dann einen Punkt, an dem wir uns zugleich treffen könnten? Wenn ja, wo und wann wäre dies, und wie groß wäre der notwendige Zeitabstand?"

e*) Philipp ergänzt: „Es gibt sicher mehrere Möglichkeiten der Startreihenfolge, wenn wir in gleichen Zeitabständen starten und uns unterwegs an einem Punkt treffen wollen. Wie viele sind das eigentlich? Und gehört zu jeder Startreihenfolge eine ganz bestimmte Zeitdifferenz?"

Helfen Sie Philipp, diese Fragen zu beantworten!

7. Produktions- und Transportkosten

Die beiden Zentren des Gemüseanbaus A und B liegen 85 km voneinander entfernt. Bodenqualität und klimatische Besonderheiten führen zu unterschiedlichen Selbstkosten. In A kostet die Produktion einer Tonne Gemüse im Mittel 200 DM, in B dagegen 230 DM. Der Transport kostet je Tonne und Kilometer 1,10 DM. Weitere Kosten fallen nicht an. Beide Erzeuger setzen die gleiche Gewinnspanne an.

a) Die Verbindungsstraße von A nach B führe durch eine dichtbesiedelte Gegend. Es sei P ein beliebiger Punkt an dieser

Straße. Seine Entfernung zu A sei l. Ermitteln Sie eine Bedingung für diejenigen Punkte P, in denen das Gemüse aus A billiger ist als das aus B!

b) Durch Investitionen im Verkehrsnetz ändern sich die Transportkosten von B aus. Sie betragen jetzt nur noch 0,80 DM je Tonne und Kilometer. Welchen Einfluß hat diese Maßnahme auf die Lage der Punkte P?

c) Auf welchen Satz hätten die Transportkosten je Tonne Gemüse von B aus gesenkt werden müssen, damit das Gemüse aus B billiger ist als das aus A, wenn der jeweilige Ort näher an B als an A liegt?

d*) Die Entfernung zwischen A und B sei s Kilometer, die Produktionskosten je Tonne Gemüse in A seien p DM. In B liegen die Kosten um q % höher als in A. Die Transportkosten betragen von beiden Orten aus je Tonne und Kilometer k DM. Ermitteln Sie eine Bedingung für diejenigen Punkte zwischen A und B, in denen das Gemüse aus A billiger ist als das aus B!

e*) Wie ändert sich die Bedingung aus d*), wenn die Transportkosten von A aus je Tonne und Kilometer k DM und von B aus a % davon betragen?

8. Vom Würfelspiel zur linearen Optimierung

a) Philipp, Ramona und Horst vereinbaren ein „Glücksspiel". Philipp hält die Bank. Ramona und Horst würfeln mit zwei Würfeln, die verschiedenfarbig sind. Der weiße zeigt die Gewinnpunkte an, der schwarze Verlustpunkte. Aus der Sicht des Spielers ist der Gewinn demnach positiv, wenn die Augenzahl w des weißen Würfels größer ist als die Augenzahl s des schwarzen, er ist bei gleicher Augenzahl Null und ansonsten negativ.

Die folgenden Fragen beziehen sich stets auf einen Wurf mit beiden Würfeln.

a1) Wieviel verschiedene Kombinationen können die beiden Würfel zeigen?

a2) Stellen Sie die möglichen Kombinationen in einem s, w-Koordinatensystem dar und schreiben Sie an jeden Punkt den zugehörigen Gewinn des Spielers! (H)

a3) Verbinden Sie Punkte mit gleichem Gewinn. Was stellen Sie fest?

a4) Bezeichnet man den Gewinn mit z, so läßt sich die „Gewinnfunktion" mit Hilfe der Punktzahlen s und w angeben.

a5) Welcher maximale und welcher minimale Gewinn ist erreichbar? Beschreiben Sie die Lage der zugehörigen Punkte im s, w-Koordinatensystem im Vergleich zu den Punkten, bei denen $z = 0$ ist!

b) Nachdem Ramona und Horst einige Male gewürfelt haben, protestiert Philipp. Die beiden hatten zuviel Glück. Die Bank ist „gesprengt". Philipp verlangt eine kleine Garantie für die Bank. Die drei vereinbaren, daß zur Augenzahl s des schwarzen Würfels stets 1 addiert wird.

b1) Wie ändert sich dadurch die Gewinnfunktion?

b2) Wie groß sind nun minimaler und maximaler Gewinn?

b3) Scheint Ihnen die von Philipp verlangte „kleine Garantie" genügend sicher zu sein?

b4) Schlagen Sie selbst Möglichkeiten vor, eine Sicherheit für die Bank zu erreichen!

c) Nach einer Zeit wird den dreien das Spiel zu eintönig. Horst schlägt vor, zwei „Glücksräder" zu bauen, ein schwarzes und ein weißes, die sie gleichzeitig drehen wollen. Ramona und Philipp übernehmen die „technische Realisierung". Jeder will eines anfertigen, indem ein Maßband mit cm-Teilung auf eine Kreisscheibe aufgeklebt wird. Als sie sich am nächsten Tag treffen, stellen sie fest, daß Ramona und Philipp unterschiedliche „Glücksräder" hergestellt haben. Ramonas weißes „Gewinnrad" zeigt die Zahlen von 1 bis 30, Philipps schwarzes „Verlustrad" die Zahlen von 1 bis 36. Horst findet einen Ausweg. Er schlägt vor, eine geeignete Gewinnfunktion zu wählen,
z. B. $z = 3w - 2s$.

c1) Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt durch eine geeignete graphische Darstellung! (H)

c2) Für welche Zahlenkombinationen des weißen und des schwarzen Rades ist der Gewinn gleich Null?

c3) Für welche Zahlenkombinationen ist der Gewinn minimal bzw. maximal?

c4) Ist die Gleichung $z = 3w - 2s$ als Gewinnfunktion für ein Spiel mit einem Bankhalter geeignet?

c5) Philipp schlägt als Gleichung der Gewinnfunktion
$z = 4w - 3s$ vor. Untersuchen Sie die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion!

d*) In einem Buch über „lineare Optimierung" stößt Horst auf eine Aufgabe, die ihm ähnlich erscheint. Dort wird verlangt, unter bestimmten Bedingungen den Wert einer Zielfunktion zu optimieren, d. h. das Minimum oder Maximum zu bestimmen.

Bei der graphischen Lösung wird mit Hilfe der Bedingungen zunächst in der x, y-Ebene ein „Bereich" festgelegt. Setzt man den Wert der Zielfunktion gleich Null, so erhält man in der x, y-Ebene die „Spur der Zielfunktion". Mit ihrer Hilfe läßt sich das Optimum leicht ermitteln.

Die Bedingungen in dieser Aufgabe lauten

$$x \geqq 0, \quad (1)$$
$$y \geqq 0, \quad (2)$$
$$x \leqq 5, \quad (3)$$
$$x + 3y \leqq 15, \quad (4)$$
$$3x + 2y \leqq 17. \quad (5)$$

Veranschaulichen Sie sich den durch die Bedingungen (1) bis (5) festgelegten Bereich der x, y-Ebene.

Ermitteln Sie unter Beachtung dieser Bedingungen das Maximum für den Wert der Zielfunktion

d1) $z = -2x + y$,

d2) $z = 2x + 3y$.

9. Funktionen

a) Bei einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis gleich 6 Längeneinheiten (LE). Der Umfang u sei nicht größer als 22 LE. Die Schenkel seien mit x bezeichnet.

a1) Geben Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen x und u in der Form $u = f(x)$ an! Wie lautet der Definitionsbereich von f?

a2) Zeichnen Sie das Bild der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem!

b) Bei einem rechtwinkligen Dreieck sei die eine Kathete um 2 LE kürzer als die andere. Die Summe der Kathetenlängen sei s, der Flächeninhalt werde mit A bezeichnet und in Flächeneinheiten (FE) gemessen.

b1) Wie lauten die Gleichungen der Funktionen $s = g(x)$ und $A = h(x)$, wenn x die längere der Katheten ist?

b2) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von g an, wenn A den Wert von 24 FE nicht überschreitet! Zeichnen Sie die beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b3) Gibt es gemeinsame Punkte der Graphen von g und h? Was bedeuten diese? Berechnen Sie deren Koordinaten!

c*) Über dem Dreieck aus b) sei eine Pyramide errichtet, deren Höhe 2 LE länger ist als die längste der Katheten. Ihr Volumen V werde in Volumeneinheiten (VE) gemessen. Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion $V = k(x)$ und deren Wertebereich. Zeichnen Sie, soweit dies möglich ist, das Bild von k in das Koordinatensystem von b) ein und interpretieren Sie evtl. vorhandene Schnittpunkte der Graphen!

10. Varianten zur „Schwimmeraufgabe"

Die bekannte „Schwimmeraufgabe" lautet:

Ein Schwimmer will einen Fluß überqueren. Er schwimmt im rechten Winkel zur Richtung der Strömung. Gesucht ist die Abdrift, d. h. die Strecke, um die er beim Überqueren den gegenüberliegenden Uferpunkt verfehlt. Bekannt sind die Geschwindigkeit des Schwimmers gegenüber ruhendem Wasser und die Breite des Flusses.

a) Ermitteln Sie die Abdrift, wenn die Geschwindigkeit des Schwimmers in ruhendem Wasser 0,8 m/s und die Breite des Flusses 120 m betragen, wobei die Strömungsgeschwindigkeit überall mit 3 m/s angenommen wird.

Natürlich ist im allgemeinen die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses nicht überall gleich. Die Strömungsverhältnisse lassen sich durch geeignete Messungen exakt ermitteln und mit Hilfe eines „Strömungsprofils" veranschaulichen. Dabei denkt man sich eine Linie quer zur Strömung von einem Ufer zum anderen. Für jeden Punkt dieser Linie wird die Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Entfernung zu einem der Ufer angegeben. Je nach Beschaffenheit des Flusses können Sonderfälle auftreten, die wir näher betrachten wollen.

b) Die Strömungsgeschwindigkeit sei an dem Ufer, von welchem der Schwimmer losschwimmt, gleich Null. Sie wächst linear mit der Entfernung zum Ufer und erreicht am Gegenufer einen Maximalwert von 4 m/s. Berechnen Sie die Abdrift, wenn Geschwindigkeit des Schwimmers im ruhenden Wasser und Breite des Flusses unverändert bleiben. (H)

c) Der Maximalwert von 4 m/s werde in der Strommitte erreicht, nach den Ufern zu geht die Geschwindigkeit bis auf Null linear zurück. Wie groß ist nunmehr die Abdrift?

d*) Schließlich kann man annehmen, daß das Strömungsprofil eine parabolische Form hat (vgl. Abb. 1). Auch in diesem Fall läßt sich die Abdrift (zumindest näherungsweise) berechnen. (H)

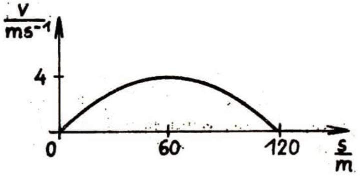

Abb. 1: Strömungsprofil

11. Parameter in Funktionsgleichungen

Philipp und Ramona wollen hinter das „Geheimnis" der Parameter in den Gleichungen von Funktionen kommen. Philipp nennt die Koordinaten dreier Punkte: A (0 ; 1), B (1 ; 2) und C (3 ; 3). Ramona gibt für ganz unterschiedliche Funktionstypen Gleichungen an, die alle über drei „freie Parameter" a, b und c verfügen:

11.1. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

11.2. $y = g(x) = a \cdot \ln(bx + 1) + c$

11.3. $y = h(x) = a \cdot \sin bx + c$

Nun wollen sie in jedem der Fälle diese Parameter so bestimmen, daß die drei Punkte A, B und C auf den Bildern der Funktionen liegen.

Horst, der hinzukommt, meint, die Aufgabe sei nicht schwer, denn einer der Parameter wäre in allen drei Fällen gleich.

a) Überlegen Sie, ob Horst recht hat. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Bestimmen Sie für jede der drei Funktionen die gesuchten Parameter und die Funktionsgleichung. (H)

c*) Nachdem die drei Fälle gelöst sind, meint Horst, ihm sei eine etwas schwierigere Aufgabe eingefallen. Die Punkte A, B und C seien die gleichen wie vorher. Die Funktionsgleichung laute nunmehr

11.4. $y = k(x) = a \cdot e^{bx} + c.$

Bestimmen Sie auch für diesen Fall den Wert der drei Parameter a, b und c. (H)

d) „Die vier Funktionen f, g, h und k haben drei gemeinsame Wertepaare", überlegt Ramona. „Stimmen sie dann für alle Argumente des Intervalls [0 ; 3] oder gar darüber hinaus überein?"

„Das läßt sich leicht beantworten“, erwidert Philipp.
Finden auch Sie eine Möglichkeit, das zu überprüfen! (H)

12. Forstwirtschaftliches

Auf einer Wanderung bemerken Ramona, Philipp und Horst mit Betroffenheit ein verbranntes Waldstück. Ramona erinnert sich der Zeitungsnotiz, daß eine weggeworfene Zigarettenkippe diesen Schaden von 280 fm Fichtenbestand zur Folge hatte. „Wie wird denn so etwas gemessen?“, meint Horst. Als sie bei einem nahegelegenen Holzeinschlag einen Förster treffen, fragen sie ihn danach. Als erstes erklärt er ihnen, daß ein Festmeter (1 fm) ein forstwirtschaftliches Maß für 1 m^3 Holz ist. Dann zeigt er ihnen an einem gefällten und bereits entasteten Stamm, wie dessen Volumen ermittelt wird. Seine Länge, d. h. die ursprüngliche Höhe h, beträgt 31,5 m. In der Mitte zwischen den beiden Enden des Stammes bestimmt der Förster mit einer Kluppe den Durchmesser, den er als Mittendurchmesser d_m bezeichnet. Er beträgt 36 cm. „Das Volumen kann nun mit Hilfe der Formel $V = 0{,}25 \cdot \pi \cdot d_m^{\,2} \cdot h$ berechnet werden“, erläutert der Förster. Horst hat das recht mißtrauisch verfolgt. „Das stimmt doch nicht“, widerspricht er, „nach meiner Meinung müßte man die Durchmesser an den beiden Enden bestimmen.“ Er mißt nach. Sie betragen 62 cm und 9 cm.

a) Offensichtlich gehen der Förster und Horst von unterschiedlichen geometrischen Körpern aus. Ermitteln Sie nach beiden „mathematischen Modellen“ das Volumen des Fichtenstammes!

b) Um wieviel % weicht das durch den Förster berechnete Volumen von dem ab, welches Horst bestimmte? Warum ist die Berechnung des Försters trotzdem sinnvoll?

Dem Förster gefällt das Interesse, mit dem die drei bei der Sache sind. Deshalb will er ihnen noch zeigen, wie der Bestand an stehenden Bäumen ermittelt wird. Im Inneren eines Jungbestandes befestigt er eine Schnur an einem Baum. Gemeinsam markieren sie einen Kreis von 10 m Radius.

„Jetzt zählt mal die Bäume in diesem Kreis“, fordert sie der Förster auf. „Normalerweise wird jeder Baum einzeln ausgemessen. Aber der Bestand ist gleichmäßig gewachsen, und so soll uns einer genügen.“

Mit der Kluppe mißt er in 1,30 m Höhe den sogenannten Brusthöhendurchmesser des Baumes. Er beträgt 7,5 cm. Mit dem Försterdreieck bestimmt er die Höhe zu 6,5 m. Die Anzahl der Bäume in dem Kreis beträgt 112.

c) Wieviel Festmeter Holz stehen in diesem Kreis?

d) Der Förster hat zur Bestandsbestimmung eine Tabelle verwendet. Das Ergebnis multipliziert er mit 30. Er meint, das ergäbe einen guten Überschlag für die Vorratsfestmeter je Hektar.

Begründen Sie ein solches Vorgehen! Wieviel % beträgt die Abweichung?

„Dieser Bestand ist jetzt 22 Jahre alt", erläutert der Förster weiter. „Der jährliche Holzzuwachs ist vom Alter abhängig. Wenn es uns gelingt, die Umweltbedingungen deutlich zu verbessern, beträgt dieser Zuwachs bis zum Alter von 30 Jahren etwa jährlich 13 %, von 31 bis 40 Jahren etwa 7,5 %, bis zu 50 Jahren 4,5 % und bis zu 60 Jahren 3,3 %. In den Folgejahren kann man von etwa 2 % ausgehen." Horst ist schon beim Rechnen.

e*) Das wievielfache des derzeitigen Bestandes würde der Holzvorrat eines 100jährigen Bestandes betragen, wenn nur diese Zuwachsraten berücksichtigt werden?

„So geht das natürlich nicht", meint der Förster. „Die Bäume würden doch viel zu dicht stehen! Wir müssen schon zwischendurch ausforsten. In einem solchen Bestand wollen wir beim Alter von 40 Jahren ca. 65 fm/ha und beim Alter von 60 Jahren ungefähr 150 fm/ha Holz ernten."

f*) Stellen Sie den Bestand (in fm/ha) in Abhängigkeit vom Alter graphisch dar.

13. Berechnungen an einer Schraubenfeder

Ein Federstahldraht von zylindrischem Querschnitt hat einen Durchmesser von 12 mm und eine Länge von 4000 mm. Er wird auf eine Walze von 98 mm Durchmesser aufgewickelt, wobei die lichte Weite zwischen zwei benachbarten Wicklungen 53 mm beträgt. Nach Beendigung des Vorgangs dreht sich der Draht ein Stück zurück, so daß zwischen der Walze und den Wicklungen allseitig ein Spiel von 2 mm entsteht, wodurch die Walze entfernt werden kann.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Wicklungen dieser Feder! (H)

b*) An den Enden der Feder werden Arretierungen angebracht, die ein Verdrehen der Feder bei Belastungen ausschließen. Zur besseren Führung wird ein Rohr mit einer Wandstärke von 4 mm vorgesehen. In ihm soll die Feder bei Druck so belastet werden können, daß die Federwicklungen einander berühren.

Dabei soll für die notwendige Schmierung ein Spiel von mindestens 2 mm zwischen Feder und Rohrwand vorhanden sein. Berechnen Sie die notwendige Länge, den Innendurchmesser und die Masse des Rohres ($\gamma = 7{,}81\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$). (H)

14. Körperberechnung – Rotationskörper

Viele technische Bauteile haben die Form von Rotationskörpern. Bei ihrer Fertigung spielen Drehbewegungen eine große Rolle, z. B. spanabhebende Verfahren auf Drehbänken. Aus mathematischer Sicht kann man sich das Entstehen dieser Körper ganz anders vorstellen: Gegeben ist eine Ebene E und in dieser eine Gerade g sowie eine Fläche F. (Dabei liegen keine „inneren Punkte" von F auf g.) Rotiert nun die Ebene E um die Gerade g, so wird durch Rotation der Fläche F ein Rotationskörper erzeugt.

a) Ein Quadrat der Seitenlänge a rotiert um eine seiner Seiten. Geben Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a an! (L)

b) Ein Rechteck, dessen Seitenlängen a und b mit $a < b$ betragen, rotiere um

b1) die Seite der Länge a,

b2) die Seite der Länge b.

Geben Sie in jedem der Fälle Volumen und Oberfläche an. Ermitteln Sie das Verhältnis der beiden Volumina bzw. der beiden Oberflächen. Welches Volumen bzw. welche Oberfläche ist größer? (L)

c) Die Fläche F habe die Form eines Trapezes mit den Seitenlängen $|AB| = 2a$, $|BC| = |CD| = |DA| = a$.

Ermitteln Sie Volumen und Oberfläche, wenn das Trapez

c1) um AB,

c2) um CD

rotiert und vergleichen Sie Volumina und Oberflächen miteinander!

c3)* Wie groß sind Volumen und Oberfläche, wenn das Trapez um BC rotiert?

d*) Die Fläche F habe die Form eines Trapezes mit $AB \parallel CD$, von dem $|AB| = a$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und dessen Höhe h gegeben sind. Ermitteln Sie Formeln für die Berechnung des Volumens und der Oberfläche bei Rotation des Trapezes um AB.

Wie sind die Werte für $a = 10\,cm$, $\alpha = 53°$, $\beta = 112°$, $h = 8\,cm$?
Hinweis: Aus drucktechnischen Gründen bezeichnen wir die Länge einer Strecke AB mit |AB|.

15. Dachausmittelung

Die Abb. 2 zeigt den Grundriß eines Hauses. Es besteht aus einem Hauptgebäude und einem Anbau. Das Dach wird durch 6 Flächen gebildet, deren Unterkanten (Traufen) alle in gleicher Höhe liegen. Die Neigungen der Dachflächen sind der Abbildung zu entnehmen.

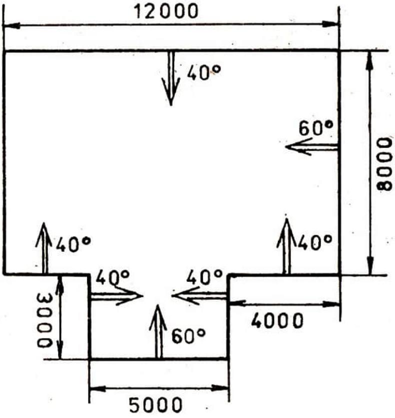

Abb. 2: Grundriß eines Daches mit Neigungswinkeln der Dachflächen

a) Ermitteln Sie den Grundriß der Dachfläche des Hauses! (H)

b*) Das Dach soll neu gedeckt werden. Für diese Neudeckung stehen sogenannte Biberschwänze zur Verfügung. Ermitteln Sie den Materialbedarf, wenn folgende Normative der Kalkulation zu Grunde liegen:

— Für 1 m^2 Dachfläche bis einschließlich 100 % Neigung werden 44 Stück Biberschwänze benötigt, bei mehr als 100 % sind dies 48 Stück. Für Bruch, Grat und Kehlen ist ein Zuschlag von 5 % zu veranschlagen. (H)

— Die beiden Firsten und die vier Grate sollen mit First- und

Gratziegeln gedeckt werden. Jeder dieser Ziegeln ist 40 cm lang, die Ziegeln sollen einander um 8 cm überlappen.

— Für die beiden Kehlen stehen Kehlenbleche von 1 m Länge zur Verfügung. Für Falze werden an jedem Ende 3 cm benötigt.

16. Körperberechnung – Körperdarstellung

Körper, deren Grundrisse im wesentlichen übereinstimmen, können ganz unterschiedliche Formen haben. Um diese näher zu bestimmen, kann man sich z. B. des Höhenmaßstabes bedienen. Das Quadrat in Abb. 3 zeigt einen solchen Grundriß. Außerdem sind 9 Höhenmaßstäbe angegeben. Um für alle Körper den gleichen Grundriß verwenden zu können, wurden am Grundriß die 8 Punkte A bis H, an den Höhenmaßstäben teilweise weniger Punkte angetragen. Für jeden Körper treffen genau die Eckpunkte zu, die am Höhenmaßstab stehen. Die Länge einer Quadratseite betrage a.

a) Stellen Sie die Körper 1 bis 9 in schräger Parallelprojektion dar!

b) Beschreiben Sie diese Körper!

c) Berechnen Sie ihr Volumen sowie ihre Oberfläche!

d*) Skizzieren Sie für jeden dieser Körper ein Netz (eine Abwicklung)!

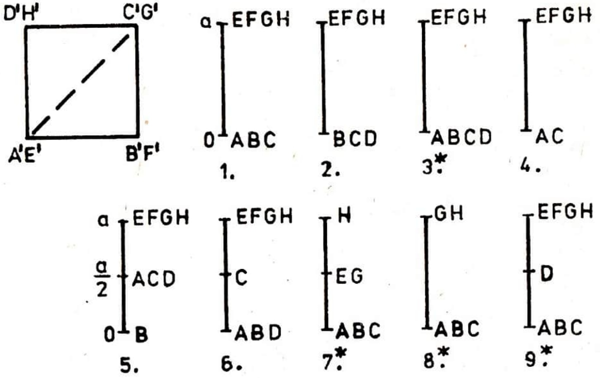

Abb. 3: Grundriß und Höhenmaßstäbe

17. Seeräubergeschichten

Ein reich beladener Kauffahrer segelt auf einem geradlinigen Kurs an der Insel vorbei, die Kapitän Flint und seinen Piraten als Unterschlupf dient. Die kleinste Entfernung des Kurses von der Insel wird 12 sm betragen. Als das Schiff noch 13 sm von der Insel entfernt ist, wird es von den Piraten bemerkt. Diese setzen sofort Segel und nehmen die Verfolgung auf. Da der Kapitän des Handelsschiffes kein Piratenschiff vermutet, behält er seinen Kurs bei. Sein Schiff läuft 6 kn. Kapitän Flint läßt ebenfalls einen geradlinigen Kurs steuern, auf dem er mit einer Geschwindigkeit von 7 kn das Handelsschiff nach einiger Zeit tatsächlich erreicht.

a) Wie lange benötigt Kapitän Flint, um das Handelsschiff einzuholen, und welche Entfernung legt der Kauffahrer in dieser Zeit zurück? (H)

b) Welchen Kurs muß Kapitän Flint gegenüber der Fahrtrichtung des Kauffahrers steuern?

Kapitän Flints Insel liegt auf 30° südlicher Breite. Auf ihr sucht er nach einem geeigneten Versteck für die außerordentlich reiche Beute. Er bemerkt drei hohe Bäume, die in Ost-West-Richtung im gleichen Abstand voneinander stehen. Der Punkt, an dem er den Schatz vergraben läßt, hat von der durch die drei Bäume gebildeten Linie einen Abstand von 55 Fuß. Die Piraten schwitzen beim Graben unter der Nachmittagssonne und sind froh, als für einige Zeit der Schatten des mittleren Baumes auf die Grube fällt. Die Entfernung dieses Baumes von der Grube beträgt 70 Fuß. Kapitän Flint beseitigt nicht nur alle Spuren, sondern im Laufe der Zeit auch alle Zeugen außer dem Schiffsjungen Jonas. Als dieser nach fünf Jahrzehnten mit einer Schar Schatzsucher auf die Insel kommt, stehen von den drei Bäumen nur noch zwei. Um die Leute nicht durch mehrere ergebnislose Versuche gegen sich aufzubringen, beschließt Jonas, an jeder Stelle, an welcher der Schatz liegen könnte, einen Trupp graben zu lassen.

c) Wie viele Trupps muß Jonas bilden?

d) Bestimmen Sie durch eine maßstäbliche Konstruktion, an welchen Stellen gegraben werden muß, wenn der Abstand zwischen den beiden Bäumen 45 Fuß beträgt.

Eines Tages wird Kapitän Flint auf der Schatzinsel von seinen Verfolgern aufgespürt. Auf seinem Segelschiff flüchtet er auf eine nur ihm bekannte benachbarte Insel. Um seine Verfolger zu täuschen, steuert er diese nicht direkt an, sondern befiehlt seinem Rudergänger, einen solchen Kurs zu halten, daß die beiden Inseln stets unter einem Winkel von 40° zu sehen sind. Der Wind dreht während der Fahrt, so daß ihm das Manöver ohne Kreuzen gelingt. Auf der Fahrt legt er 20 sm zurück.

e) Wie weit sind die beiden Inseln voneinander entfernt?

18. Straßenbau

In einem hügeligen Gelände ist durch eine geradlinig verlaufende Straße ein Höhenunterschied von $h = 56{,}4$ m zu überwinden. Die Straße soll eine Steigung S von 8 % erhalten.

a) Wie groß ist der Anstiegswinkel α im Gradmaß? (H)

b) Stark vereinfacht kann man annehmen, daß sich die Straße mit konstanter Neigung bauen läßt. Berechnen Sie für diesen Fall die Basis b (horizontale Projektion) und die Länge l der Straße!

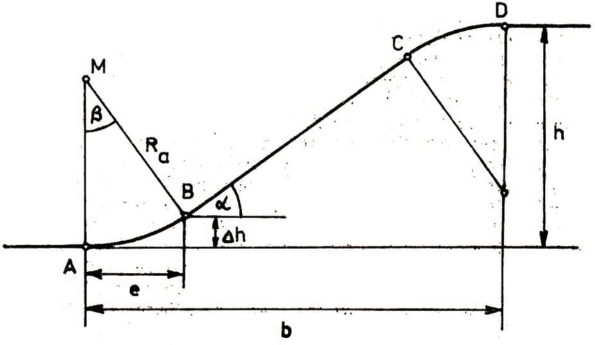

Abb. 4: Skizze (nicht maßstabgerecht)

c*) Praktisch kann man natürlich keine Straße mit einem „Knick" bauen. Der Übergang von der Horizontalen zur geneigten Straße geschieht auf einem Straßenstück, dessen Steigung kontinuierlich zu- bzw. abnimmt. Gewöhnlich wählt man dafür Kreisbögen mit tangentialem Übergang zur Horizontalen bzw. zur geneigten Straße. Der Ausrundungsradius R_a des Kreisbogens richtet sich u. a. nach den Geschwindigkeiten, die auf diesem Straßenabschnitt zu erwarten sind. Innerhalb einer

Ortslage werde für diesen Radius ein Wert $R_{a1} = 400$ m vorgesehen, außerhalb sei $R_{a2} = 1250$ m.

c1) Ermitteln Sie Formeln für die Basis der Ausrundung e und für die Ausrundungshöhe Δh (vgl. Abb. 4). (H)

c2) Berechnen Sie für die beiden Radien R_{a1} bzw. R_{a2} die Länge der Straße (Kurvenzug ABCD) und deren horizontale Projektion b.

19. Kurbelgetriebe

Ein uraltes Problem der Technik besteht darin, Bewegungsformen ineinander umzuwandeln. In alten Hammerwerken, Sägemühlen und anderen technischen Denkmalen kann man sehr beeindruckende Lösungen bestaunen. Insbesondere fallen verschiedenartige Getriebearten auf. Eines der ältesten ist das Schubkurbelgetriebe (Abb. 5). Bei diesem kann die Drehbewegung (Rotation) der Kurbel |OP| in eine Schubbewegung (Translation) des Kreuzkopfes umgewandelt werden. Die beiden Lagen, in denen die Punkte O, P und K auf einer Geraden liegen, nennt man Totlagen (warum?).

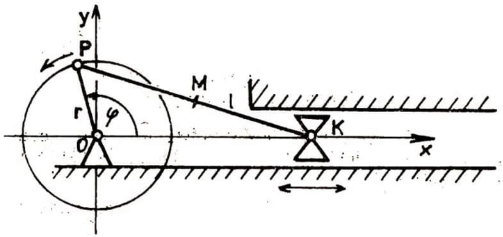

Abb. 5: Prinzip des Schubkurbelgetriebes

a) Legt man wie in Abb. 5 ein Koordinatensystem fest, so läßt sich die Lage x des Kreuzkopfes K in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ, der Länge der Kurbel $|OP| = r$ und der Schubstange $|PK| = l$ angeben. (H)

b*) Geben Sie in gleicher Weise die Koordinaten x und y des Mittelpunktes M der Schubstange an!

Ein weiteres Getriebe ist die Kurbelschwinge (Abb. 6), die zu den ebenen Koppelgetrieben gehört. Wie aus der Abb. ersichtlich, ist die Kurbel der Länge r im Punkt A, die Schwinge der Länge b im

Punkt B drehbar gelagert. Die Punkte A und B verändern ihre Lage nicht. Die Drehbewegung der Kurbel wird mit Hilfe der Koppelstange c in eine Schwingbewegung übertragen. Die Länge der Koppelstange ist mitunter verstellbar.

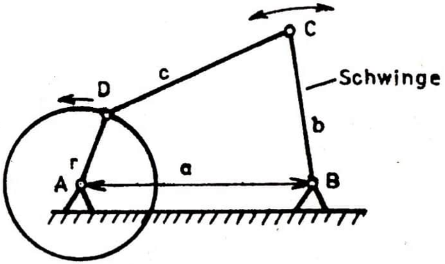

Abb. 6 Prinzip der Kurbelschwinge

c*) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von a, b und d) eine Bedingung für die Länge c dieser Koppelstange DC! (H)

Für die folgenden Aufgaben sei $|AD| = r = 950$ mm, $|AB| = a = 3250$ mm und $|BC| = b = 2010$ mm.

d) Auf welche Länge c muß die Koppelstange DC eingestellt werden, wenn für $\sphericalangle BAD = 60°$ gleichzeitig der Winkel $\sphericalangle ABC$ ein rechter sein soll?

e) Berechnen Sie für diese Länge der Koppelstange und der unter d) vorgegebenen Kurbelstellung den Gelenkpunktabstand $|BD|$.

f*) Ermitteln Sie den Schwenkbereich der Schwinge. (H)

g) Welche Länge c muß die Koppelstange DC haben, damit gleichzeitig sowohl $\sphericalangle ABC = 90°$ als auch $\sphericalangle ADC = 90°$ betragen?

h*) Wie lang muß die Koppelstange sein, wenn $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCB = 90°$ betragen soll?

i*) Eine Kurbelschwinge nennt man zentrisch, wenn die Endpunkte der Schwinge in den beiden Totlagen sowie der Drehpunkt der Kurbel auf einer Geraden liegen. Ermitteln Sie die zugehörige Bedingung für die Länge c der Koppelstange!

k) Lösen Sie die Aufgaben d) bis i*) durch maßstäbliche Konstruktion!

20. Wassergehalt von Pflanzen

In einem Arzneimittelwerk werden frisch geerntete Heilpflanzen verschiedener Sorten getrocknet. Dazu durchlaufen diese mehrfach eine Trockenkammer, in der ihnen jeweils ein Teil der Feuchtigkeit entzogen wird. Dieser Teil hängt von der Art der Pflanzen ab. Pflanzen einer Sorte A bestehen zum Zeitpunkt der Ernte zu 92,3 % ihrer Masse aus Wasser, bei einem Durchlauf werden 30,0 % des jeweiligen Feuchtigkeitsgehaltes entzogen. Im getrockneten Zustand muß ihr Feststoffgehalt mindestens 93,5 % betragen. Für Pflanzen einer Sorte B beträgt der anfängliche Feuchtigkeitsgehalt 85,5 %, der Entzug 28,2 % und der notwendige Feststoffgehalt des Trockengutes 95,5 %.

a) Wie oft müssen die Pflanzen der Sorte A bzw. der Sorte B die Trockenkammer mindestens durchlaufen?

b) Welchen Feststoffgehalt besitzt das Trockengut der Sorten A bzw. B nach der minimalen Anzahl von Durchläufen?

c) Für die Herstellung einer Charge einer bestimmten Kräutermischung werden 120 kg Trockengut der Sorte A, 80 kg Trockengut der Sorte B und 55 kg Trockengut einer Sorte C benötigt, wobei letztere einen Feststoffgehalt von 88,7 % aufweist.
Wie groß ist der Feststoffgehalt (in Masse %) dieser Mischung?

21. „Ornamente"

Philipp will Ornamente entwerfen. Die interessantesten will er programmieren und ausdrucken lassen. Zunächst legt er einen „Grundbaustein" fest. Durch Drehen, Spiegeln oder Verschieben soll daraus ein „Element" und durch wiederholtes Anwenden dieser geometrischen Operation schließlich das ganze Ornament entstehen.

Als einfachen Grundbaustein wählt er sich das Bild der Funktion f mit $y = f(x)$ im Intervall $[0\,;\,1]$. Er dreht es mit einem Winkel von 180° um den Punkt $P\,(1\,;\,1)$ und spiegelt die entstandene Kurve an der Geraden $x = 2$. Fertig ist das Element.

a) Geben Sie für das Element eine geeignete Funktionsgleichung an! (H), (L)

b*) Verschiebt man dieses Element um ganzzahlige Vielfache einer geeigneten Strecke in Richtung der x-Achse, so entsteht eine geschlossene Kurve, das gesuchte Ornament. Geben Sie die Länge der Strecke an, und ermitteln Sie die Gleichung der Funktion, durch welche das Ornament gebildet wird!

c) Philipp wählt ein größeres „Element", indem er das Element aus Aufgabe a) am Punkt Q (4 ; 0) spiegelt. Ermitteln Sie die neue „Elementengleichung".

d*) Das Ornament entsteht durch eine geeignete Verschiebung wie in Aufgabe b*). Ermitteln Sie die Streckenlänge und die „Ornamentengleichung"!

e) Nun sollen Ornamente entstehen, die unterbrochen sind. Philipp verkürzt deshalb das Element aus Aufgabe a), indem er den letzten Viertelbogen abschneidet, so daß es nur für $0 \leqq x \leqq 3$ definiert ist.

   e1) Wie groß muß er die Verschiebungsweite wählen, damit ein „unterbrochenes Ornament" entsteht?

   e2*) Wie groß muß er die Verschiebungsweite wählen, damit dieses Ornament eine Funktion ist? Wie lauten dann in Abhängigkeit von der Verschiebungsweite deren Definitionsbereich und die Funktionsgleichung?

f*) Wie ändern sich die Ergebnisse der Aufgabenstellungen a) bis e), wenn der Grundbaustein nicht das Intervall [0 ; 1], sondern das Intervall [0 ; a] mit $a > 0$ umfaßt?

g) Suchen Sie selbst nach weiteren geeigneten „Grundbausteinen"!

Grundlagen der Zins- und Zinseszinsrechnung

1. Einfacher Zins

Ein Kapital der Höhe K wird verliehen. Dann erhält der Verleiher oder Gläubiger nach Ablauf eines Jahres vom Schuldner als Entschädigung für die Verleihung p Prozent Zinsen. Den Prozentsatz p bezeichnet man als Zinsfuß. Für die Zinsen nach Ablauf eines Jahres gilt demnach

$$Z = K \cdot \frac{p}{100}.$$

Werden die Zinsen dem Kapital nicht zugeschlagen, selbst also nicht verzinst, betragen sie nach n Jahren

$$Z_n = n \cdot K \cdot \frac{p}{100}.$$

Für sich ständig ändernde Konten ist es üblich, Tageszinsen zu berechnen. Es werden rund $12 \cdot 30 = 360$ Tage zugrunde gelegt, so daß für m Tage die Zinsen

$$Z_m = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{360}$$

betragen.

2. Zinseszins

Werden die am Ende eines Jahres zu zahlenden Zinsen dem Kapital zugeschlagen, so ist das Startkapital für das Folgejahr höher als das Anfangskapital. Bezeichnet man das Anfangskapital mit K_0, so gilt für das Kapital K_1 nach einem Jahr

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Nach zwei Jahren beträgt das Kapital

$$K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Es ist unschwer einzusehen, daß sich dieses Wachstum in gleicher Weise fortsetzt. Für das Endkapital nach n Jahren findet man demnach [1]

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Diese Formel heißt Zinseszinsformel. Die Summe $(1 + p/100)$ nennt man Aufzinsungsfaktor. Dieser wird oft mit q bezeichnet, wodurch die Zinseszinsformel in die Form

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

übergeht.

3. Zinseszins mit jährlichen Zu- oder Rückzahlungen

Wird am Ende jedes Jahres dem Kapital eine feste Rate R hinzugefügt, so beträgt das Kapital nach einem Jahr

$K_{1,R} = K_0 q + R,$

[1] Die allgemeine Formel kann man mit Hilfe des Verfahrens der „Vollständigen Induktion" beweisen.

nach zwei Jahren

$K_{2,R} = K_0q^2 + Rq + R = K_0q^2 + R(q + 1)$,

nach drei Jahren

$K_{3,R} = K_0q^3 + Rq^2 + Rq + R = K_0q^3 + R(q^2 + q + 1)$.

Mit Hilfe eines kleinen „Tricks" wird daraus eine handhabbare Formel. Wegen $q \neq 1$ ist $(q - 1) : (q - 1) = 1$ und somit

$$q^2 + q + 1 = \frac{(q^2 + q + 1)(q - 1)}{q - 1} = \frac{(q^3 + q^2 + q) - (q^2 + q + 1)}{q - 1}$$
$$= \frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Nach drei Jahren hat das Kapital demnach die Größe

$$K_{3,R} = K_0q^3 + R\,\frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Diese Formel läßt sich verallgemeinern.[1]. Nach n Jahren beträgt das Kapital

$$K_{n,R} = K_0q^n + R\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Falls die Rate R am Ende jedes Jahres nicht eingezahlt, sondern abgehoben wird, erhält diese Rate ein negatives Vorzeichen.

22. Eine Aufgabe zur Zinsrechnung

Für die Spareinlagen auf Girokonten betragen die Zinssätze in der Regel 0,5 %, höchstens jedoch 2 %. Andererseits ist die Bank bereit, Überziehungskredite bis zum Dreifachen des monatlichen Nettoeinkommens zu gewähren, welche mit 8 % Überziehungszinsen belegt werden. Wird diese Summe überschritten, werden für den darüber hinaus gehenden Betrag 12 % Zinsen erhoben.

Ramonas Vater hat ein monatliches Nettoeinkommen von 1600 DM. Sein durchschnittliches Guthaben auf dem mit 1,25 % verzinsten Girokonto beträgt 2500 DM. Bei einem größeren Kauf stellt er einen Scheck über 11 000 DM aus.

a) Nach einem Monat gleicht Ramonas Vater die Schulden aus. Wie hoch sind die von der Bank erhobenen Zinsen?

b) Wie hoch wären die Zinsen, wenn er die Hälfte der Schulden bereits nach einem halben Monat bezahlt hätte?

c) Wieviel Tage hätte Ramonas Vater die Schuld bestehen lassen können, wenn er nach dieser Zeit 11 000 DM einzahlt und sich am Jahresende Überziehungszinsen und Zinsen für das durchschnittliche Guthaben gerade aufheben?

---

[1]) Vergleiche Fußnote Seite 23

23. Eine Aufgabe zur Zinseszinsrechnung

Philipp hat im Lotto gewonnen. Gemeinsam mit seinen Freunden überlegt er, wie er das Geld am sinnvollsten verwenden soll. 20 000 DM scheinen ihm ein gutes Anlagekapital zu sein.

Seine im Ort ansässige Sparkasse gewährt bei frei verfügbaren Guthaben Jahreszinsen in Höhe von 3 %, bei jährlicher Kündigung in Höhe von 4,5 % und bei 2jähriger Kündigungsfrist in Höhe von 5,25 %.

a) Ermitteln Sie für jede der drei genannten Sparformen die Zinsen, welche Philipp im Verlauf von 10 Jahren erhält, wenn er

  a1) die Zinsen jedes Jahr abhebt,

  a2) die Zinsen auf dem Konto läßt.

b) Ramona rät Philipp zum Kauf von Wertpapieren. Sie hatte von Anleihen gelesen, die mit einem Nominalwert von 10 000 DM bei einem Zinssatz von 8,75 % und einer Laufzeit von 10 Jahren ausgeschrieben waren. Die Zinsen werden bei Vorlage des entsprechenden Kupons jährlich ausgezahlt.

  b1) Berechnen Sie die im Verlauf von 10 Jahren erzielten Zinsen, wenn Philipp zwei Anleihen zum Nominalwert kaufen kann.

  b2*) Die Anleihe wird zum Zeitpunkt ihrer Auflage mit einem Faktor von 1,095 gehandelt. Philipp will 2 Anleihen erwerben und leiht sich das fehlende Geld mit einem Jahreszins von 6 %. Er will es von den Zinsen der Anleihe zurückzahlen. Die restlichen Zinsen will er frei verfügbar sparen. Wie groß ist sein Gewinn nach Ablauf der 10 Jahre?

c*) Horst macht einen ganz kühnen Vorschlag. „Du richtest mit der Summe von 20 000 DM ein Festgeldkonto ein. Da betragen die Zinsen bis 7 %. Vielleicht kann man den Vertrag so abschließen, daß die Zinsen jährlich dem Festbetrag zugeschlagen werden, so daß er sich ständig erhöht. Nach 40 Jahren kündigst du den Vertrag, da kannst du nach weiteren 5 Jahren über die ganze Summe verfügen. Nun läßt du das Konto frei verfügbar weiterlaufen und hebst jährlich

  c1) 10 000 DM,

  c2) 20 000 DM

  ab. Wie lange reicht das Geld?" (Erst schätzen, dann rechnen!)

d*) Wie hoch wäre die Rate, welche aus dem Guthaben von c*) jährlich zur Verfügung steht, wenn das Geld nach 25 Jahren aufgebraucht sein soll?

1. b) Durch die Schreibweise **xy** soll die Zifferndarstellung einer Zahl mit den Ziffern **x** und **y** symbolisiert werden. Im dekadischen Positionssystem lautet ihre Summendarstellung $z = 10x + y$.

2. d) Um eine einfache Beziehung für h zu finden, sollten Sie nicht nach h, sondern nach 1/h auflösen.

Die Herleitung für q hat die Schwierigkeit (*).

5. c*) Betrachten Sie die Anstiegsdreiecke zweier zueinander senkrecht verlaufender Geraden. Leiten Sie hieraus eine Beziehung für die Beträge dieser beiden Anstiege ab! Was gilt für das Vorzeichen? Beachten Sie weiterhin, daß Ihnen ein Punkt dieser Geraden bekannt ist.

5. e*) Ermitteln Sie den Radius des Umkreises. Die Beziehung, welche zwischen dem Radius und dem Abstand von U zu einem beliebigen Punkt P (x, y) innerhalb des Kreises gilt, ist die gesuchte Bedingung!

8. a2) Schreiben Sie an eine Achse des Koordinatensystems s, an die andere w. Beide werden mit den Zahlen von 1 bis 6 bezeichnet. Tragen Sie dann ein Netz von einander kreuzenden Koordinatenlinien ein!

8. c1) Wählen Sie wiederum ein s,w-Koordinatensystem und zeichnen Sie einige der „benötigten" Koordinatenlinien ein.

10. b) Überlegen Sie, welche Bewegungsform vorliegt, da einerseits der vom Schwimmer zurückgelegte Weg zur Zeit proportional ist und andererseits die Strömungsgeschwindigkeit mit der Uferentfernung wächst.

10. d*) Teilen Sie die Zeit, die der Schwimmer zum Überqueren benötigt, in eine genügend große Anzahl von Zeitintervallen ein. Ersetzen Sie dann die sich ständig ändernde Geschwindigkeit für jedes dieser Teilintervalle durch eine Geschwindigkeit, die Sie in diesem Intervall als konstant annehmen.

11. b) Wenn Sie die Parameter der Funktionsgleichung 11.1. ermitteln wollen, so setzen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C nacheinander in diese Gleichung ein.

Ein Parameter läßt sich sofort bestimmen. Für die beiden anderen erhalten Sie ein Gleichungssystem, das Sie leicht lösen können.

Im Fall 11.2. läßt sich das entstehende Gleichungssystem unter Anwendung der Logarithmengesetze lösen.

Im Fall 11.3. benutzen Sie die Beziehung

$\sin 3b = 3\sin b - 4\sin^3 b$.

11. c*) Schrittweise Reduktion der Anzahl der Variablen führt auf die Gleichung

$e^{3b} - 2e^b + 1 = 0$.

Zu deren Lösung die Substitution $e^b = z$ verwenden, 1. Lösung findet man durch Probieren, danach Polynomendivision.

11. d) Berechnen Sie die Funktionswerte von f, g, h und k an weiteren Stellen, z. B. für $x = 2$ und $x = 4$.

13. a) Es ist sinnvoll, die Achse des Stahldrahtes in ihrer Länge als konstant anzusehen und für die Rechnung den Zylinder zu betrachten, auf den diese Achse scheinbar aufgewickelt wird. Berechnen Sie zunächst die Länge einer Wicklung.

13. b*) Um die Rohrlänge zu ermitteln, müssen Sie den unbelasteten Zustand annehmen, für den Durchmesser muß der belastete Zustand betrachtet werden.

15. a) Die Grundrisse der Schnittgeraden entsprechender Dachflächen, d. h. der Kehllinien und Gratlinien, ergeben sich, wenn Sie in allen Flächen zu einer bestimmten Höhe die zugehörige Höhenlinie einzeichnen.

15. b* Bezüglich der Neigung siehe Hinweis zu Aufgabe 18. a).

17. a) Zur Berechnung der Geschwindigkeit von Schiffen dient die Einheit 1 Knoten mit 1 kn = 1 sm/1 h.
Beachten Sie, daß beide Schiffe bis zum Zusammentreffen die gleiche Zeit benötigen.

18. a) Es gilt $S = (h/b) \cdot 100\,\%$, wobei h der Höhenunterschied und b die Basislänge (horizontale Projektion) im Anstiegsdreieck bedeuten.

18. c1) Es gibt eine einfache Beziehung zwischen dem Anstiegswinkel α und dem zum Ausrundungsbogen gehörigen Zentriwinkel β. Begründen Sie diese!

19. a) Wählen Sie den Fußpunkt des Lotes von P auf die x-Achse als Hilfspunkt P'. Betrachten Sie die beiden Dreiecke $\triangle$ OP'P und $\triangle$ KP'P!

19. c*) Veranschaulichen Sie sich durch geeignete Skizzen, wie groß $|DC| = c$ sein muß, damit sich die Kurbel drehen kann, wobei die Schwinge mit der Kurbel stets verbunden bleibt.

19. f*) Den Schwenkbereich erhält man, indem man die Größen des Winkels $\sphericalangle$ ABC für die beiden Totlagen ermittelt.

21. a) Die Funktionsgleichung kann für verschiedene Teile des Intervalls aus unterschiedlichen Termen bestehen.

Ausgewählte Lösungen

2. d) $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ $\quad g = \sqrt{a \cdot c}$ $\quad q = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$

3. a)

p = 8	1	2	3	4	5	6	7	10
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	4	6	10	12	14	16	20
3	3	6	11	14	17	22	25	30
4	4	10	14	20	24	30	34	40
5	5	12	17	24	31	36	43	50
6	6	14	22	30	36	44	52	60
7	7	16	25	34	43	52	61	70
10	10	20	30	40	50	60	70	100

c) (1) $25 + 3 \cdot 7 = 25 + 21 = 46$
c1) LLOOL + LL LLL = LLOOL + LOLOL = LOLLLO
c2) $121 + 3 \cdot 13 = 121 + 111 = 232$
c3*) $31 + 3 \cdot 7 = 31 + 25 = 56$
c4*) $19 + 3 \cdot 7 = 19 + 15 = 2E$

14. a) $V = \pi a^3, \quad A_0 = 4\pi a^2.$

b) $V_1 = \pi b^2 a, \quad V_2 = \pi a^2 b \quad \rightarrow V_1 : V_2 = b : a > 1 \quad \rightarrow V_1 > V_2$
$A_{01} = 2\pi b\,(b + a), \quad A_{02} = 2\pi a\,(a + b)$
$\rightarrow A_{01} : A_{02} = b : a > 1 \quad \rightarrow A_{01} > A_{02}$

21. a) Das Bild von $y = f(x) = x^2$ ist für alle x mit $0 \leqq x \leqq 1$ ein nach oben geöffnetes Parabelstück, das in P (1 ; 1) endet. Bei Drehung um P entsteht eine geschlossene Kurve. Der zweite Teil besteht aus einem nach unten geöffneten Parabelstück mit dem Scheitel in S (2 ; 2). Die Gleichung gibt man am besten in der Scheitelpunktform zu $y = -(x-2)^2 + 2$ an. Da S auf der Spiegelachse liegt, gilt diese Gleichung schließlich für $1 \leqq x \leqq 3$. Der letzte Teil des „Elements" hat die Gleichung $y = (x-4)^2$. Zusammengefaßt erhält man die Funktionsgleichung für das erste Element:

$$y = e_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ -(x-2)^2 + 2 & \text{für } 1 \leqq x < 3 \\ (x-4)^2 & \text{für } 3 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$$