Gerd Höfner, Wolfgang Klein

Wahrscheinlich ganz einfach

Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung

1986 Urania-Verlag Leipzig, Jena, Berlin
MSB: Nr. 117
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Blicke in die Zukunft unseres Lebens

»Wahrscheinlich ganz einfach« enthält neben einer Wortspielerei, die auf unser Thema zielt, auch ein Versprechen und ein Programm. Wir versprechen unseren Lesern, sie in diesem Mathematikbuch nicht mit der Königin der Wissenschaften zu erschlagen, und wir nehmen uns vor, ihnen Lust auf Mathematik zumachen, indem wir zeigen, dass mathematische Formeln nicht in unerreichbaren Höhen angesiedelt sind, sondern - soweit sie Alltägliches verallgemeinern - auch aus Alltäglichem entwickelt und begriffen werden können.

Auf den ersten Blick wird es ziemlich kunterbunt zugehen auf den folgenden Seiten. Der rote Faden ergibt sich nicht aus der berühmten und bei Nichtfachleuten oft berüchtigten, weil nicht verstandenen wissenschaftlichen Strenge und Folgerichtigkeit der Mathematik. Wir entnehmen auch nicht unsere Beispiele nur einem Schubkasten der Wirklichkeit.

Wir wollen - das sei eingangs ganz deutlich bekannt - für Mathematik werben, und wir versuchen das, indem wir eine Frage zu unserem lockeren Leitmotiv machen und uns mit ihrer Hilfe ein Stück in das unendliche Labyrinth der Mathematik hineinbegeben.

Wir beginnen, wie gesagt, ganz einfach und stellen uns auf unserem Wege wachsenden, aber nirgends unüberwindlichen Schwierigkeiten, ungezwungen mal hierhin und mal dorthin schauend, ohne einen anderen Vorsatz als den, die Art und Weise mathematischen Vorgehens immer tiefer zu verstehen.

Nicht die blanken mathematischen Formeln sind für uns interessant. Wir wollen den Weg nachzeichnen, auf dem die Mathematik zu ihren Formeln gelangt ist - durch die kritische, nüchterne, sachbezogene Analyse der von ihr betrachteten Zusammenhänge, ohne Verklärung, Emotion und reine Glaubenssätze.
Eine solche Art des Denkens, so scheint uns, können auch Nichtmathematiker von der Mathematik lernen - wenn sie auch sonst nichts von ihr behalten sollten.

Die Frage, von der die Rede sein wird, lautet: Kann der Mensch Blicke in die Zukunft seines Lebens werfen? Wir werden dazu einleitend die Versprechungen einer sehr alten und die einer noch fast neuen Art solcher Zukunftsblicke betrachten und wollen dann sehen, in welchem Sinne Mathematik Blicke in unbekannte Zusammenhänge und darunter in die unbekannte Zukunft ermöglicht. Beginnen aber wollen wir historisch.

Der Wunsch der Menschen, in die Zukunft ihres Lebens blicken zu können, ist uralt. Einer der ersten Versuche, ihn zu erfüllen, wurde mit der Beobachtung der Sterne unternommen.
Schon die alten Babylonier versuchten, die Ergebnisse dieser Beobachtungen ihrem großen Verlangen dienstbar zu machen. Sie unterschieden vor fast 5000 Jahren die freundlichen Ge-

stirne Mond (Sin) und Venus (Ischtar) von den unfreundlichen Merkur (Nabu), Mars (Nergal), Jupiter (Marduk) und Saturn (Ninib).

Jeder weiß, welch wichtigen Platz die Astrologie im Spätmittelalter und in der Renaissance einnahm. Die Zusammenfassung der astronomischen Kenntnisse der Antike durch Claudius Ptolemäus in seinem etwa 150/160 u. Z. geschriebenen Almagest, in dem die Erde in den Mittelpunkt der Welt gestellt war, wurde zum Standardwerk der Astrologen, die es an fast jedem Fürstenhof gab und deren Einfluss manchmal nicht geringer war als der des Herrschers selbst.

Erinnert sei nur an den in manchem Kreuzworträtsel gefragten Astrologen Wallensteins, Seni. Friedrich Schiller entsprach durchaus dem Denken seines Helden, wenn er im Prolog seiner Trilogie über den großen Heerführer des Dreißigjährigen Krieges schrieb:

Von der Parteien Gunst und Haß verwirrt,
schwankt sein Charakterbild in der Geschichte,
doch Euren Augen soll ihn jetzt die Kunst,
auch Euren Herzen, menschlich näherbringen.
Denn jedes Äußerste führt sie, die alles
begrenzt und bindet, zur Natur zurück,
sie sieht den Menschen in des Lebens Drang
und wälzt die größre Hälfte seiner Schuld
den unglückseligen Gestirnen zu.

An kritischen Stimmen über die Astrologie hat es gleichzeitig nie gefehlt. Schon im Alten Testament hieß es:

»Wenn eine Seele sich zu den Wahrsagern und Zeichendeutern wenden will..., so willich... . sie aus ihrem Volk ausrotten.« (3. Buch Mose, Kap. 20, Vers 6)

Der Glaube der Christen an die lenkende Allmacht des einzigen Gottes vertrug sich nicht mit der Furcht vor dem bestimmenden Einfluss vieler fremder Götter. Erst als deren Gestalten zu Planetennamen verblasst waren, konnten sie der christlichen Lehre nicht mehr gefährlich und damit von Christen aufgenommen werden.

Erneut aber erhob sich Kritik, wie etwa in dem von Johann Heinrich Zedler von 1732 bis 1750 in Leipzig und Halle verlegten Lexikon in 64 Bänden und mit dem wundervollen, vielversprechenden Titel: »Großes Vollständiges Universal Lexikon Aller Wissenschaften und Künste, welche bisher durch menschlichen Verstand und Witz erfunden und verbessert worden«.

Darin enthalten war auch ein Artikel über »Horoscopus«, in dem es heißt: »Man sieht letztlich, dass alle diese Arten (Horoskope zu erstellen - d. A.), gleich wie die Astrologie über Haupt, trüglich sind.«

Bis heute haben viele das gesehen, und an Widerlegungen der Astrologie fehlt es nicht. Sie erfolgten vom Standpunkt moderner Naturwissenschaften aus wie durch den gesellschaftswissenschaftlich geführten Nachweis, dass das ursprünglich verständliche Streben der Menschen nach Erklärung ihnen unbekannter Zusammenhänge längst dem bewusst betriebenen Dummenfang gewichen ist.
Die rücksichtslose Beutelschneiderei trat dabei ebenso ans Licht wie das Ausnutzen von Angstgefühlen der Menschen in Zeiten persönlicher Bedrängnis oder gesellschaftlicher Krisen.

Verbissenheit, wie sie in angestrengten Kämpfen bisweilen aufkommt, ist der Astrologie gegenüber nicht mehr am Platze. Was gegen sie gesagt wurde, ist so überzeugend, dass es nicht ständig wiederholt werden muss - auch nicht in diesem Buch. Es existiert jedoch zu dieser Feststellung ein doppeltes Aber.

Aber Nummer 1: Noch heute gibt es Länder, und zwar technisch hochzivilisierte, in denen Boulevardzeitungen regelmäßig Horoskope drucken, in denen renommierte Kaffeefirmen meinen, mit dem Abdruck von Horoskopen auf ihren Etiketts den Umsatz steigern zu können, und in denen das Fernsehen Unterhaltungsshows mit Astrologie »anreichert«.

Der Glaube an die Astrologie ist dort offensichtlich immer noch nicht tot, wird sogar unter beträchtlichem Einsatz von Mitteln am Leben erhalten, und auch weit über die Astrologie hinaus gewinnen Irrationalismus und Wissenschaftsfeindlichkeit in letzter Zeit wieder an Boden.

Aber Nummer 2: Auch wo der Astrologie adieu und dem Irrationalismus der Kampf angesagt wurde, besteht der Wunsch weiter, Blicke in die Zukunft zu werfen, die durch das Aufdecken verborgener Zusammenhänge unseres Lebens möglich werden sollen.
Niemand bemüht dazu mehr die Sterne, aber durchaus nicht jeder begnügt sich mit der Feststellung, dass Aussagen über Zukünftiges in der menschlichen Gesellschaft zwar allgemeine Tendenzen als Gesetzmäßigkeiten benennen, nicht aber den konkreten Einzelfall voraussagen können.
Die Suche nach handfesteren Zukunftsgewissheiten geht manchmal merkwürdige Wege.

Ein neues Angebot heißt Biorhythmologie. Erforsche man den Rhythmus von Naturerscheinungen und darunter den des menschlichen Lebens, so konnte man vor wenigen Jahren lesen, so könne man »einen realen Weg zur Voraussage der Zukunft der Natur, also auch der Zukunft des Menschen«, weisen.

Die Arbeitsunfälle im Hafen von Odessa, so wurde mitgeteilt, hätten sich fast um die Hälfte vermindert, seit dort die Belegschaft unter Berücksichtigung ihres Biorhythmus eingesetzt werde: »Die Wissenschaft vom Rhythmus (vermittelt - d. A.) ... philosophische Zuversicht. Vieles lässt sich erklären, wenn man im scheinbaren Chaos die Logik der Rhythmen ermittelt.«

Welche Haltung ist der Absage an die vernünftige und menschliche Einrichtbarkeit der Welt, wie sie im Irrationalismus und der Astrologie zum Ausdruck kommt, entgegenzustellen?

Kann die Rhythmologie den Wunsch erfüllen, in die Zukunft zu blicken, oder ist sie nur ein neues Beispiel für Aberglaube - eine Art Astrologie unserer Zeit?

Das sind keine mathematischen, keine durch Mathematik eindeutig zu beantwortenden Fragen. Eine genauere Betrachtung von Astrologie und Biorhythmus kann aber mit mathematischen Überlegungen durchaus operieren - nicht, um endgültige Beweise zu führen, wohl aber, um Gesichtspunkte beizusteuern, die eine Urteilsbildung über solche Arten von Zukunftsblicken erleichtern.

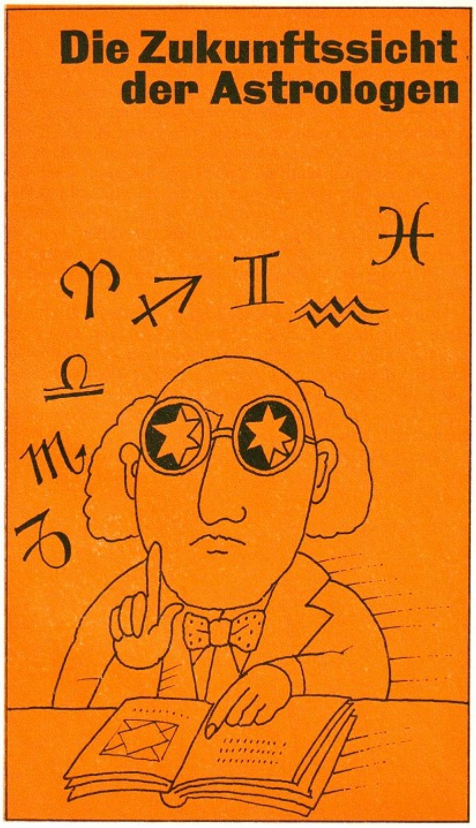
Sie sollen deshalb durchaus selbständig vorgestellt werden, um zugleich als Sprungbrett für unseren späteren Satz in der Mathematik zu dienen. Als solches wären sie sicher auswechselbar, aber wir wollten ja Umwege vorsätzlich nicht unbedingt vermeiden.

Ihr Urteil über Möglichkeiten und Grenzen jeder dieser drei Arten von Zukunftsblicken sollen Sie sich selbst bilden können. Nichts sollte dabei voreilig verurteilt, alles zuerst kritisch geprüft werden - selbst die Astrologie.

Wir erinnern zu Beginn unseres Ganges in die Zukunft an jene olympische Gelassenheit, mit der Johann Wolfgang v. Goethe in den ersten Sätzen seiner Lebenserinnerungen »Dichtung und Wahrheit« den glücklichen Verlauf seines Lebens den Sternen zuschrieb:

»Am 28sten August 1749, Mittags mit dem Glockenschlag zwölf, kam ich in Frankfurt am Main auf die Welt. Die Constellation war glücklich ; die Sonne stand im Zeichen der Jungfrau und culminirte für den Tag; Jupiter und Venus blickten sie freundlich an, Mercur nicht widerwärtig; Saturn und Mars verhielten sich gleichgültig; nur der Mond, der so eben voll ward, übte die Kräfte seines Gegenscheins um so mehr, als zugleich seine Planetenstunde eingetreten war.«

2 Die Zukunftssicht der Astrologen



2.1 Sternzeichen und Schicksale

Dass Nichteingeweihte danach fragen, welchen Regeln die Astrologen beim Erstellen ihrer Voraussagen folgen, hat seit langem deren deutliche Ablehnung hervorgerufen. Sie umgaben sich mit dem Mythos einer Geheimlehre und verkündeten:

»Läßt man nur einmal aus Versehen die Tür zu diesem geheimen Wissen einen schmalen Spalt breit offen, sogleich verspürt man ein peinliches Bedauern über das Zupacken grobnerviger Finger und das Hineinfaseln unklarer Vorstellungen.«

Auch der Arzt - so Frau Schellenberg, Verfasserin eines Heftchens über Sterndeutung, von der dieser aristokratische Satz stammt - solle dem Patienten die Wirkung der verordneten Medikamente ja auf keinen Fall erläutern.

Grobnerviger Finger verdächtigt zu werden soll uns jedoch nicht daran hindern, Frau Schellenbergs Appell an die freiwillige Unwissenheit zu ignorieren (wie auch die Medizin sich kaum nach ihrer Vorschrift richten dürfte) und die naturwissenschaftlichen wie die spekulativen Grundlagen und verschiedene Arten der Horoskopherstellung etwas genauer zu betrachten.

Zuerst muss daran erinnert werden, dass nicht nur, wie schon erwähnt, ein so grundlegendes astronomisches Werk wie der Almagest des Ptolemäus Bedeutung für die Astrologie erlangte, sondern dass bis zum Spätfeudalismus Astrologie, Astronomie und Mathematik nicht voneinander getrennt waren.

Michael Stiefel (etwa 1487-1567) erkannte z. B. nicht nur sehr früh die große Bedeutung der Logarithmen für die Mathematik, sondern sagte auch einige Male als Astrologe den Weltuntergang voraus. Nachdem auch am 3.10.1533 der Jüngste Tag nicht angebrochen war, wurde der

Ärger so groß, dass er gezwungen war umzusiedeln. Er nahm eine Professur an der Universität Jena an.

Es wird berichtet, dass Studenten dort für ihn das schöne Volkslied »Stiefel, Stiefel, du musst sterben...« schufen und es abends bei Fackelschein vor seinem Hause sangen.

Auch von dem großen Astronomen Johannes Kepler (1571-1630) ist bekannt, dass er sich als Astrologe (u. a. für Wallenstein) betätigte - allerdings wohl vor allem, um Geld zu verdienen. Heute trennen Astrologen wie der vor dem zweiten Weltkrieg berühmte A. F. Glahn jedoch zwischen Horoskopberechnung und Horoskopauslegung:

»Der Mathematiker kann oft nur das eine; so gibt es auch Astrologen, die in punkto Mathematik recht schwach sind, die sich aber auf die Auslegung gut verstehen.«
Denn: »Die Astrologie beginnt erst dort, wo die Mathematik aufhört.«

Dieser Vorstellung von der über der Mathematik thronenden Astrologie steht der Satz des sowjetischen Begründers der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsrechnung Andrej Kolmogorow gegenüber: »Die Mathematik ist das, womit die Menschen die Natur und sich selbst steuern.«

Ursprünglich gab es, wie gesagt, einen solchen Gegensatz nicht. Die Astrologen bauten auf gesicherten Erkenntnissen auf, zuerst auf der Tatsache, dass sich unsere Erdkugel in 24 Stunden einmal um ihre Achse dreht. Jeder Ort auf der Oberfläche hat damit die Umdrehung auf einem Vollkreis gemacht, dem ein Winkel von 360° zugeordnet ist.
In einer Stunde dreht sich folglich ein Ort auf der Oberfläche um $360^\circ : 24 = 15^\circ$.

In einem Jahr dreht sich die Erde einmal um die Sonne. Dazu kommen die Bewegungen der anderen Planeten um die Sonne und die der Monde (besonders des Erdmondes) um die Planeten. Die Planetenbahnen lassen sich in ihrem Verhältnis zu den Orten der Erdoberfläche und zu den Fixsternen berechnen. All diese Bewegungen werden in ihren mathematisch-physikalischen Gesetzmäßigkeiten von der Astrologie berücksichtigt.

Der Astrologe stellt zuerst fest, welche Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt (meist dem der Geburt) an einem bestimmten Ort in welchen Sternbildern sichtbar waren.
Indem er zum Ausgangs- und Bezugspunkt seiner Berechnungen bestimmte Orte auf der Erdoberfläche macht, ist er allerdings in gewisser Weise bei dem geozentrischen Weltbild des Ptolemäus stehengeblieben. Außerdem vernachlässigt er die über unser Sonnensystem hinausgehenden Bewegungen im Weltall.

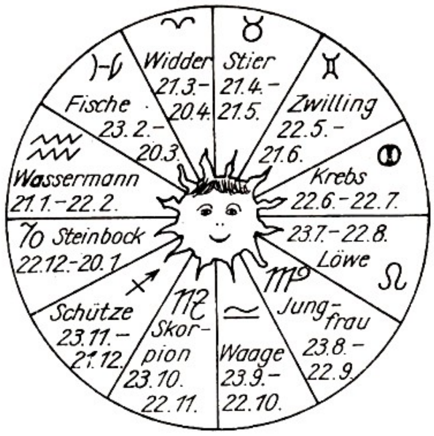
»Fixsterne« gibt es ja genaugenommen nicht. Unser Sonnensystem dreht sich um eine Achse der Milchstraße, und diese wiederum bewegt sich mit riesiger Geschwindigkeit und nach strengen physikalischen Gesetzen durch die unendlichen Weiten des Weltalls.
All das enthält noch ungeahnte Bewegungsreserven, die zukünftige Astrologengenerationen und ihre Geheimlehre aufnehmen können.

Ein erster Schritt auf dem Wege ins Irrationale wird nun mit der Festlegung der Tierkreiszeichen getan. Der Tierkreis, das Zaubermittel der Astrologen, entsteht, indem die Ekliptik, die scheinbare jährliche Bahn der Sonne zwischen den Sternen am Himmel (ein Vollkreis von 360°), in zwölf gleiche Teile zerlegt wird.

Hipparch von Nikäa (etwa 190-125 v. u. Z.), der größte Astronom der Antike, ordnete jedem dieser Teile das ihm am nächsten gelegene Sternbild zu. Er begann damit am Frühlingspunkt, dem 21. März, an dem die Sonne in ihrem scheinbaren Lauf erstmals im Jahr den Himmelsäquator schneidet.

Später wurde jedes Tierkreiszeichen noch in drei Dekanate geteilt, denen damit ein Sektor von je 10° zugeordnet werden kann. Am Sternenhimmel wird der Laie die zu seinem Tierkreiszeichen gehörenden Sterne nur schwer finden. Das hat zwei Gründe.

Zum einen hat der Astronom bessere Beobachtungsmöglichkeiten. Er beschäftigt sich jedoch mit anderen Fragen als:



Tierkreiszeichen

Wie viele Schafe gehören zu einem Widder? Wie groß sind die Hörner des Stiers? Sind die Zwillinge ein- oder zweieiig? Bewegt der Krebs sich vorwärts oder rückwärts ? Hat der Löwe immer genug Fleisch, um keinen Appetit auf die neben ihm sitzende Jungfrau zu bekommen? Ist die Waage richtig geeicht? Wird der Skorpion hinterhältig? Schießt der Schütze auf den Steinbock? Und verträgt sich der Wassermann mit den harmlosen Fischen, denen er im Tierkreis, mit einer Mistgabel bewaffnet, vorangeht ?

Damit wurden die Zeichen des Tierkreises auch schon aufgezählt. Aus den zu jedem Bild gehörenden Sternen die den Namen entsprechenden Bilder zu ersinnen erfordert einige Phantasie.

Der zweite Grund, aus dem z. B. der Widdergeborene sein Sternbild an seinem Geburtstag vergeblich suchen dürfte, ist die Neigung der Erdachse, die dazu führt, dass der Frühlingspunkt auf der Ekliptik nicht stillsteht, sondern wandert (Präzession).
Erst nach 25850 Jahren erreicht er wieder seine Ausgangsposition; jeweils rund 2150 Jahre benötigte er von einem Sternbild des Tierkreises zum nächsten. Heute (über 2000 Jahre nach Hipparch) steht er im Sternbild der Fische.
Einige Grundlagen der Astrologie haben sich also bereits nicht unbedeutend verschoben.

Als sich die primitiven Vorstellungen von Raum und Zeit durch die wissenschaftlichen Erkenntnisse vervollkommneten, trennten sich die Astrologen von der Idee, dass direkt von den Fixsternen eines Tierkreiszeichens geheime Kräfte auf die Menschen ausgingen. Sie ergänzten deren Wirkung durch die der Planeten, die zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmten Sternbild stehen, und machten dabei einen weiteren Schritt von der naturwissenschaftlichen Beobachtung zur reinen Spekulation, indem sie den Planeten bestimmte Verantwortungsbereiche zuordneten:

Objekt	Zeichen	Unter anderem verantwortlich für
Sonne	☉	Geist, Macht und Ruhm ; zu finden beim Vater, in der Regierung und den Behörden
Mond	☽	Psyche und Persönlichkeit; neigt zu häufiger Veränderung
Saturn	♄	entbehrungsreiches Schicksal; Aufopferung für Eltern und alte Leute
Jupiter	♃	Glück durch viel Geld; sichert Wohlergehen vor allem für Priester, Philosophen und Richter
Mars	♂	Lebenslust, die aus Kraft, Mut und Kühnheit, besonders bei jungen Männern, entsteht
Venus	♀	Glück und Geld; bei jungen Mädchen und Geliebten mit Liebe gekoppelt, ebenso bei Frauen, die jedoch nur als Taggeburten Vergnügen daran haben
Merkur	☿	Intellekt bei Handel und Wissenschaft, die beide mit Reisen verbunden werden können; vor allem für Kinder zuständig.

Die heilige Zahl 7 dieser Objekte, die Einfluss auf den Menschen haben sollen, wurde durch die Entdeckung der äußeren Planeten unseres Sonnensystems arg in Frage gestellt.

Herr Glahn, dem wir diese Liste in größerer Ausführlichkeit verdanken, ließ sich jedoch nicht beirren und führte sie munter fort (wobei er sogar Sozialismus und Kommunismus nicht vergaß):

Objekt	Zeichen	Unter anderem verantwortlich für
Neptun	♅	Imagination und Kunst, die jedoch leicht im Chaos enden; auf diesem Planeten wurden die Sozialisten angesiedelt
Uranus	⛢	Intuition und Erfindungen; Reformen, wie sie durch die Elektrifizierung bewirkt wurden; auf dem Uranus bekamen auch die Kommunisten und andere Gesellschaftsveränderer eine Heimat - weitab von der Erde.

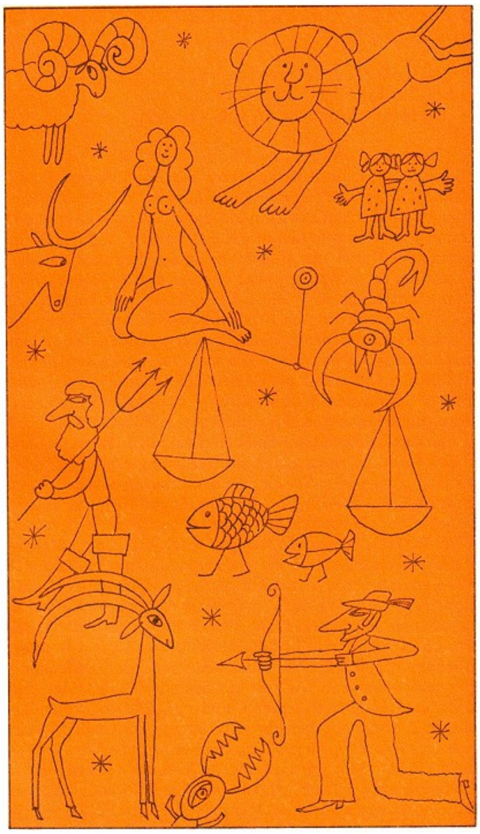
Der Pluto ist bei Glahn frei geblieben, er war noch nicht entdeckt. Und auch die kleinen Planetoiden zwischen der Mars- und der Jupiterbahn stehen noch zur Verfügung.

Ein weites Feld steht den Astrologen also offen, um jeden denkbaren Komplex unterzubringen, der für die Zukunftsbestimmung wichtig werden könnte. Variationen zu dem Vorschlag Glahns, aus dem wir grobnervig einiges ausgewählt haben, sind zahllos denkbar.

Mit der Festlegung der Tierkreiszeichen, der Dekanate und der Planetenbedeutungen sind wir der gehobenen Horoskopherstellung schon recht nahe gekommen. Es fehlt nur noch ein wichtiges Element, die sogenannten Häuser.
Es lohnt sich nicht, ernsthaft über diese architektonische Glanzleistung zu sprechen. Durch die Kopplung der Geburtsstunde mit vornehm lateinisch formulierten, völlig frei erfundenen Merkmalskomplexen und deren sinnreiche Anordnung in zwölf Dreiecken entsteht ein Gerüst, in dem die Tierkreiszeichen und die Planeten erst richtig zur Wirkung gebracht werden können.

Nachdem die entsprechenden Planeten (völlig den astronomischen Gesetzmäßigkeiten ihrer Bewegung folgend) in die Phantasiehäuser eingetragen worden sind, die ihrerseits im Tierkreis genügend Baugrund gefunden haben, ist das Schmuckstück der Astrologen fertig - das an geheimnisvollen Zeichen reiche Horoskop, das nur noch der Eingeweihte lesen kann. Die Symbole für die Planeten, ihre Einordnung in Häuser, die griechischen und römischen Götternamen für die Planeten und ihre Bedeutung in den Tierkreiszeichen erregen so viel Ehrfurcht, wie das heute etwa durch die elektronische Datenverarbeitung erreicht wird.

Ein unverständlicher Kode macht jede Darstellung für Uneingeweihte geheimnisvoll und ehrwürdig. Wir werden gleich sehen, wie ein solches ehrfurchtheischendes Gebilde auch auf weit profanerem Wege zustande kommen kann.
Vorerst aber wollen wir die Weihe des Augenblicks noch erhöhen und zeigen, wie die klassische Dichtung den Kode wieder in Sprache zurückverwandelt hat - wie Wallenstein in Schillers Drama sein Horoskop interpretiert:



Ja, sie (die Venus) ist jetzt in ihrer Erdennäh
und wirkt herab mit allen ihren Stärken.
Glückseliger Aspekt! So stellt sich endlich
die große Drei verhängnisvoll zusammen,
und beide Segensterne, Jupiter
und Venus, nehmen den verderblichen,
den tück'schen Mars in ihre Mitte, zwingen
den alten Schadenstifter, mir zu dienen.
Denn lange war er feindlich mit gesinnt
und schoß mit senkrecht oder schräger Strahlung,
bald im Gevierten, bald im Doppelschein,
die roten Blitze meinen Sternen zu
und störte ihre segenvollen Kräfte.
Jetzt haben sie den alten Feind besiegt
und bringen ihn am Himmel mir gefangen.
Saturns Reich ist aus, der die geheime
Geburt der Dinge in dem Erdenschoß
und in den Tiefen des Gemüts beherrscht
und über allem, was das Licht scheut, waltet.
Nicht Zeit ist's mehr, zu brüten und zu sinnen,
denn Jupiter, der glänzende, regiert
und zieht das dunkel zubereitet Werk
gewaltig in das Reich des Lichts. - Jetzt muß
gehandelt werden, schleunig, eh die Glücksgestalt
mir wieder wegfliegt überm Haupt,
denn stets in Wandlung ist der Himmelsbogen.

Der zuständige Astrologe sagt das an der gleichen Stelle etwas kürzer:

Und beide große Lumina von keinem
Malefico beleidigt! Der Saturn
unschädlich, machtlos, in cadente domo.

Die Erklärung für Laien lautet, dass die Glücksplaneten Venus und Jupiter im gegebenen Moment die für Wallenstein unglücklichen Planeten Mars und Saturn beherrschen. Damit wird er durch den Stand der Gestirne zum Handeln veranlasst.

Durch die größere Umlaufgeschwindigkeit der Venus um die Sonne entflieht diese jedoch so schnell, dass Eile geboten ist. Seni leitet den glückbringenden Aspekt für Wallenstein daraus ab, dass Jupiter und Venus im Tierkreis im gestreckten Winkel von 180° zueinander stehen und dazwischen der Mars mit fast 90° zu beiden seinen feindlichen Charakter nicht entfalten kann.

Man erinnere sich an das Ende Wallensteins - die ganze Tragik des Sternengläubigen und seine unlösbaren Widersprüche sind in den darauffolgenden Szenen in Schillers Stück zu finden. Das Gebäude, dessen Umrisse bisher angedeutet wurden, vermag schon einige Verwirrung hervorzurufen, selbst wenn man nicht ins Detail geht. Gerade für die Nöte der Ungebildeten aber haben die Astrologen das größte Verständnis.

»Das Erstellen eines Horoskopes erfordert bedauerlicherweise bedeutende astronomische und mathematische Kenntnisse, so dass der Laie das Schema der 12 Häuser nicht aufstellen kann«, stellte dann auch ein weiterer ihrer Vertreter in unserem Jahrhundert, Dr. W. Gregorius, fest.

Beim Bedauern ist er jedoch nicht stehengeblieben. Er hat in alten Büchern gestöbert und dabei eine rettende Entdeckung gemacht - rettend für den unwissenden Laien, der das Schema nicht aufstellen kann, und vielleicht sogar für den eiligen Astrologen, dem der Berechnungsaufwand für ein richtiges Horoskop zu groß ist.
Bereits Agrippa von Nettesheim (1486-1535) ist auf andere Weise zur erforderlichen Füllung seiner Häuser gekommen. Seine Methode bestand darin, Kreuze zu zeichnen. Wir stellen sie vor mit der einzigen Hoffnung, unsere Leser mit einem amüsanten Gesellschaftsspiel bekanntzumachen; denn ernst zu nehmen ist das Verfahren nicht, wie Sie gleich sehen werden.

Als Grundlage dient ein Blatt, das in vier Felder geteilt wird. In diese Felder werden, ohne mitzuzählen, je vier Reihen von Punkten eingetragen.

1.	ooooooooooooo	3.	oooooooooo
	ooooooooo		ooooooooooooooooo
	oooooooooooooooo		ooooooo
	ooooooooooooo		ooo
2.	ooooooooooo	4.	oooooo
	oooo		oooooooooo
	oooooooo		oo
	ooooooooooooooo		ooooooooo

Da mit diesen Punkten alle Aussagen schon feststehen, haben die magischen Kräfte, falls sie existieren, nur beim Punktezeichnen eine Chance. Alles andere folgt festen Regeln. Für eine gerade Zahl von Punkten werden zwei Kreuze und für eine ungerade Zahl wird ein Kreuz gezeichnet. Es entstehen vier Figuren, die als die Mütter bezeichnet werden.

1.	13 Punkte		x		3.	10 Punkte	x		x
	9		x			17		x	
	16	x		x		7		x	
	13		x			3		x	
2.	11 Punkte		x		4.	6 Punkte	x		x
	4	x		x		10	x		x
	8	x		x		2	x		x
	15		x			9		x	

Mit diesen vier Figuren können vier Felder des Hauses der Astrologen gefüllt werden. Es gibt davon jedoch, wie wir uns erinnern, zwölf. Für die Bildung der acht fehlenden Figuren gelten folgende Regeln: Zuerst werden aus den untereinandergeschriebenen Zeilen der Mütter die sogenannten Töchter gebildet.

1. Mutter	2. Mutter	3. Mutter	4. Mutter	
x	x	x x	x x	= 1.Tochter
x	x x	x	x x	= 2.Tochter
x x	x x	x	x x	= 3.Tochter
x	x	x	x	= 4.Tochter

Demnach sehen die Töchter so aus:

1. Tochter	2. Tochter	3. Tochter	4. Tochter
x	x	x x	x
x	x x	x x	x
x x	x	x	x
x x	x x	x x	x

Anschließend werden den,Müttern von 1 bis 4 die Häuser I, X, VII, IV zugeordnet. Die Töchter kommen in die jeweils folgenden Häuser: II, XI, VIII, V.

Schließlich werden die nun noch leeren Häuser durch die Kombination der Kreuze aus den bereits besetzten Häusern nach folgendem Schema gefüllt:

I.und	V.Haus ergeben	IX. Haus
X.	II.	VI.
VII.	XI.	III.
IV.	VIII.	XI.

Führt dabei die Addition der Kreuze der Mütter- und Töchterhäuser auf eine gerade Zahl, so erhält das neue sogenannte fallende Haus ein Doppelkreuz; ergibt sich eine ungerade Zahl, so erhält es nur ein Kreuz. Beispiel:

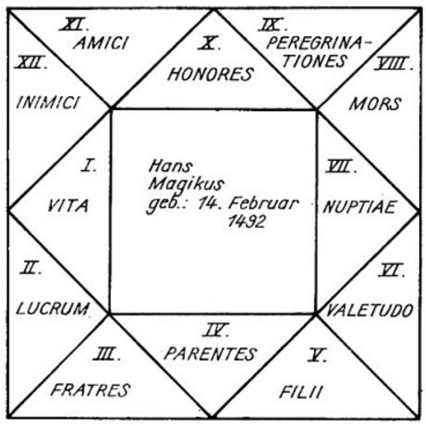
I. Haus	und	V. Haus	ergeben	IX. Haus
x		x		x x
x		x		x x
x x		x		x
x		x		x x

Ist dieses Spielchen für alle vier fallenden Häuser beendet, geht es daran, Bedeutungen für die erhaltenen zwölf Figuren zu finden. Hier waltet erneut die reine Phantasie. Aus den insgesamt sechzehn möglichen Figuren kann die folgende Tabelle entwickelt werden:

<table>
<tr><th>Objekt</th><th>Zeichen</th><th>Figur</th><th>Kurzform</th><th>Name</th><th>Figur</th><th>Kurzform</th><th>Name</th></tr>
<tr><td>Sonne</td><td>☉</td><td>x x</td><td>-</td><td>Großglück</td><td>x</td><td>|</td><td>Kleinglück</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Mond</td><td>☽</td><td>x</td><td>|</td><td>Weg</td><td>x x</td><td>-</td><td>Volk</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Jupiter</td><td>♃</td><td>x x</td><td>-</td><td>Erwerb</td><td>x</td><td>|</td><td>Freude</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Venus</td><td>♀</td><td>x</td><td>|</td><td>Mädchen</td><td>x</td><td>|</td><td>Verlust</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Objekt</th><th>Zeichen</th><th>Figur</th><th>Kurzform</th><th>Name</th><th>Figur</th><th>Kurzform</th><th>Name</th></tr>
<tr><td>Merkur</td><td>☿</td><td>x x</td><td>-</td><td>Verbindung</td><td>x x</td><td>-</td><td>Weißkopf</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Mars</td><td>♂</td><td>x</td><td>|</td><td>Knabe</td><td>x x</td><td>-</td><td>Rotkopf</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>Saturn</td><td>♄</td><td>x</td><td>|</td><td>Gefängnis</td><td>x x</td><td>-</td><td>Trauer</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>Um 1500</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td>Drachenkopf</td><td>x</td><td>|</td><td>Drachenschwanz</td></tr>
<tr><td>noch keine</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>Objekte</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>bekannt</td><td></td><td>x</td><td>|</td><td></td><td>x x</td><td>-</td><td></td></tr>
</table>

Auch die Häuser, die bei der gehobenen Methode der Horoskopherstellung mit lateinischen Namen versehen wurden, werden hier (wohl noch nicht von Agrippa, aber von Dr. Gregorius) volkstümlicher benannt:



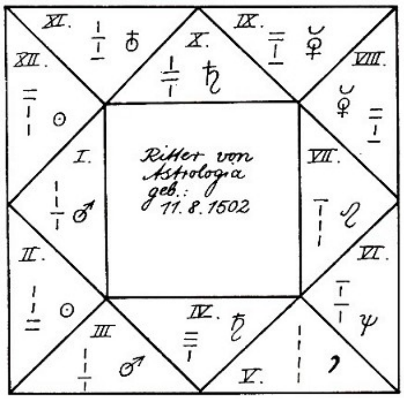
Horoskop nach Agrippa (allgemein)

I	Aufsteigendes Haus	VII	Westliche Angel
II	Haus der unteren Pforte	VIII	Haus des Todes
III	Haus der Brüder	IX	Haus der Weisheit
IV	Haus der Eltern	X	Königliches Haus
V	Haus des Glücks	XI	Haus der Freunde
VI	Haus des Unglücks	XII	Schädliches Haus.

Ordnet man nun entsprechend unserer Tabelle und diesen Benennungen Häuser, Planeten und Figuren einander zu, erhält man das vollständige Horoskop, das diesmal ohne jede Verwendung von Mathematik und Astronomie entstanden ist.
Das sieht doch schon recht magisch aus, wenn man nicht weiß, wie einfach alles zugeht.

Der kundige Leser jedoch kann nun die Ärmel hochkrempeln oder sich in seinem Sessel zurücklehnen und zur Deutung des Horoskops schreiten. Diese Deutung sollte natürlich auf die Person des Fragenden zugeschnitten sein.

Nehmen wir an, der Fragende ist ein Ritter aus dem 15. Jahrhundert. Dr. Gregorius zog für einen solchen aus der Feststellung »Mars (Knabe) im I. Haus« folgende Weissagung:



Horoskop nach Agrippa (alt)

Der Ritter habe ein nicht langes und sehr mühevolles Leben vor sich. Er sei ausgezeichnet geeignet für das Militär durch seine Kraft und Kühnheit, habe starken Körperbau, rötliche Gesichtsfarbe, schwarze Haare und ein schönes Aussehen.
»Saturn (Gefängnis) im X. Haus« ergab: Der Ritter hat lasterhafte Vorgesetzte, deren Laufbahn ein schlimmes Ende nimmt, weil sie ihren Fürstentitel zu einem schlechten Leben missbrauchen; er selbst ist von unechten und ehrlosen Ritterkollegen umgeben.

Eine ehrlose, ehebrecherische und unzüchtige Mutter hat ihn erzogen ; ohne Amt noch Beruf lebt er vom Betteln, von Diebstahl und Raub. Und so weiter und so weiter, bis alle zwölf Häuser gefüllt sind. Wir wollen uns noch einmal erinnern, worauf die Urteile beruhen: auf den Verantwortungsbereichen der Planeten, der Zuordnungstabelle der Kreuzfiguren zu den Planeten und der Festlegung der Bedeutung der Häuser.

Waltete hier schon die reine Subjektivität, so wird man beim Vergleich der vorgegebenen Elemente mit den Aussagen über den Ritter erst richtig erkennen, wie kunst-, um nicht zu sagen, wie phantasievoll die Feststellungen zusammengefügt worden sind. Wer auf dem eingeschlagenen Weg fortfährt, kennt am Ende den Ritter genau - zumindest so genau, wie ein Horoskop das ermöglichen kann.

Um mit der Methode Agrippas Partygäste sinnvoll unterhalten zu können, sind die angebotenen Inhalte der Häuser jedoch vielleicht ein wenig überholt. Wir brauchen uns aber nur daran zu erinnern, wie sie zustande kamen - nämlich durch rein subjektive Festlegung -, um diesen Mangel zu überwinden. Wollen wir Agrippas Kreuze und Punkte zum Gesellschaftsspiel machen, reicht es aus, die Häuser mit anderen Inhalten zu versehen.

(Theoretisch wäre es auch möglich, die Bedeutung der Planeten zu ändern. Diese sind jedoch aus jahrhundertealter Tradition so festgelegt, dass wir zögern, mit diesem Erbe respektlos umzugehen.)

Hier ist Ihre Aktivität gefragt. Bestimmen Sie jene Inhalte der Häuser, die auf die jeweilige Situation und die Mitspieler am besten zugeschnitten sind! Sind die Ausgangspositionen eindeutig definiert, wünschen wir viel Spaß beim Vorhersagen:
Hat man die Inhalte der Häuser bestimmt, die Planetenbedeutungen im Kopf, die Tabelle zur Hand und etwas Phantasie bereit, so entscheidet das Punktezeichnen alles!

Manches ließe sich noch anfügen über die Zukunftsblicke der Astrologen. Wir könnten sicher bereits an dieser Stelle dem Urteil Ihres gesunden Menschenverstandes über die Zuverlässigkeit jener Zukunftssicht der Astrologie vertrauen und gemeinsam mit Ihnen einem Klassiker der Weltliteratur widersprechen, Shakespeare, der König Lear sagen lässt:

»It is the stars, the stars above us govern our conditions - Die Sterne, die Sterne oben lenken unsern Sinn !«

Die Sterne, das zeigt uns jeder kritische Blick auf die Astrologie, sind es wohl kaum! Ob man zu einem Horoskop den schwierigen Weg über die astronomische Beobachtung und Berechnung oder den bequemeren über das Zeichnen von Kreuzen geht, ob man die allgemeine, nichtssagende Fassung eines Zeitungshoroskops oder die auf den Spezialfall zugeschnittene Aussage eines privat konsultierten Astrologen vor sich hat - das Dilemma der Astrologie besteht darin, dass sie objektiv nicht in der Lage zu sein scheint, eine Aussage über die Zukunft zu machen, deren Trefferrate die Zufallsquote überschreitet.
Je allgemeiner dabei die Formulierung der Aussage, um so größer die Chance, dass sie stimmt, um so geringer jedoch auch der eventuelle Nutzen für das Opfer.

Die Aussagen der Astrologen lassen sich jedoch nicht nur dem Urteil des gesunden Menschenverstandes unterwerfen. Genauer kann die Kritik werden, wenn sie mit den Mitteln der mathematischen Aussagenlogik erfolgt.

2.2 Aussagen und Wahrheitswerte

Erste Ansätze zur Schaffung einer mathematischen Logik gehen schon auf die »Syllogistik« des Aristoteles (384-322 v.u.Z.) zurück. A. de Morgan (1806-1871) und G. Boole (1815-1864) schufen im vorigen Jahrhundert das System der mathematischen Logik als selbständige Disziplin, die fruchtbringend auf die gesamte moderne Mathematik wirkt (etwa in der modernen elektronischen Rechentechnik).
Einige ihrer Grundbegriffe wollen wir nun für die Prüfung von Horoskopen nutzen.

Einschränkend muss gesagt werden, dass der Wahrheitswert eines gesamten Horoskops auch mit den scharfen Mitteln der Aussagenlogik nicht endgültig feststellbar ist, da der Wahrheitswert der Einzelaussagen nicht in jedem Falle eindeutig ist.
Dazu wären umfangreiche statistische Untersuchungen notwendig, bei denen jedoch der zu betreibende Aufwand in keinem Verhältnis zum möglichen Nutzen stände. Unser Ziel ist daher keine solche Gesamtprüfung, sondern ein vertiefter Blick auf Einzelaussagen in Horoskopen.

Wir müssen uns dabei zuerst fragen, was wir unter einer Aussage überhaupt verstehen wollen. Für unsere Zwecke genügen folgende Feststellungen: Aussagen sind solche Sätze, die einen Sinn haben, die einen bestimmten Sachverhalt oder den Zusammenhang mehrerer Sachverhalte ausdrücken.

Ihre für den Mathematiker wichtigste Eigenschaft ist die, wahr oder falsch sein zu können. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Person, die einen Satz ausspricht, unabhängig vom Ort und vom Zeitpunkt, an dem er ausgesprochen wird.
Alle äußeren Bedingungen haben also keinen Einfluss auf die Wahrheit eines Satzes; diese existiert objektiv. Wir alle wissen schließlich, dass es beim heutigen Stand des menschlichen Wissens insgesamt (und mehr noch des individuellen Wissens desjenigen, der eine Aussage macht) in vielen Fällen unmöglich ist, den Wahrheitswert einer Aussage mit Bestimmtheit anzugeben.

Die Aussage: »Auf dem Mars existieren keine Lebensformen« ist ein Beispiel für eine Aussage, deren Wahrheitswert noch nicht eindeutig festgestellt ist.

Die Mathematik geht nun davon aus, dass objektiv alle Aussagen wahr oder falsch sind, unabhängig davon, ob die Einteilung mit den gegebenen Mitteln vorgenommen werden kann oder nicht. Zwischen wahr oder falsch gibt es für sie keine Zwischenstufen.
Unter dieser Voraussetzung hat sie die Möglichkeit, die inneren Beziehungen von Aussagen und Aussagekomplexen formal, also abstrahiert von den jeweiligen konkreten Inhalten und in Formeln, darzustellen.

Und damit zurück zur Astrologie. Ob alle Astrologen bereit wären, mit solchen Maßstäben ihre Horoskope messen zu lassen? Wir wissen es nicht, aber wir zwingen es ihnen auf.
Uns braucht bei solcher Betrachtung der konkrete Wahrheitswert bestimmter Aussagen nicht zu interessieren.
Wir können jene Möglichkeiten von Aussagen erfassen, die trotz großer Gewagtheit die höchste Wahrscheinlichkeit des Eintreffens besitzen. Dazu sieben Thesen über mögliche Wahrheitswerte in Aussagen.

1. Alle Aussagen sind formalisierbar. In einem Horoskop des Herrn Glahn ist z. B. zu lesen: »Dieser Einfluss ist stark wirkend, wenn die Sonne in einem positiven Zeichen über dem Horizonte, Mars unter dem Horizonte, aber nicht in einem Eckhaus steht und Merkur kraftvoll ist.«
Die Mathematik kann diese Aussage mindestens ebenso schwer verständlich, aber wesentlich rationeller darstellen.
Durch Formalisierung wird das schmückende Beiwerk ausgefiltert.
Alle ungewollten, aber auch die vielleicht gewollten Missverständnisse, die immer zugunsten des Astrologen geklärt werden können, sind so unmöglich:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \sim A_3 \wedge A_4) \rightarrow B$$

Dabei bedeuten die großen lateinischen Buchstaben elementare Aussagen. In Glahns Horoskopsatz sind folgende zu finden:

A_1: Die Sonne steht in einem positiven Zeichen über dem Horizont.
A_2: Mars steht unter dem Horizont.
A_3: Mars steht in einem Eckhaus des Horoskops.
A_4: Merkur ist kraftvoll.
B: Der Einfluss wirkt stark.

A_1, A_2, A_3, A_4 bilden die Vorderglieder der Implikation, die Voraussetzungen oder Prämissen. Da sie gleichzeitig gelten, wurden sie in runde Klammern gesetzt. Aus ihnen wird das Nachglied B geschlossen, die sogenannte Konklusion.

Die Zeichen bedeuten verschiedene Möglichkeiten der Verbindung der Elementaraussagen und der Bildung zusammengesetzter Aussagen. Es gibt fünf Möglichkeiten der Verbindung:

Zeichen	Bezeichnung der Verbindung	Bedeutung
$\wedge$	Konjunktion	A und B
$\vee$	Alternative	A oder B
$\sim$	Negation	nicht A
$\rightarrow$	Implikation	wenn A, dann B
$\leftrightarrow$	Äquivalenz	A genau dann, wenn B

Mit diesen Zeichen lassen sich alle Sätze eines Horoskops und allgemein alle Sätze darstellen, soweit sie überhaupt Aussagen enthalten. Das ist ja nicht immer der Fall. Emotional gefärbte Aufschreie wie »O diese Wunderwelt der Astrologie!« oder »Wer glaubt nicht an die Wirkung der Planeten ?« sind zwar grammatisch vollständige Sätze, enthalten aber keine Aussagen, weil sie nicht beanspruchen, wahr oder falsch zu sein. Sätze aus Horoskopen oder auch Sprichwörter unterliegen dagegen den Gesetzen der Aussagenlogik und sind formalisiert darstellbar.
Versuchen Sie es einmal!

Aus Horoskopen des Herrn Glahn:
»Ein schlechter Aspekt von Mars zu Saturn macht gehässig, grausam und unbarmherzig.«
»Zwillingsgeborene haben wenig Kinder, denen es oft recht gut geht und die begabt sind.«

Aus dem Sprichwörterlexikon des Karl Friedrich Wilhelm Wander:

»Es haben nicht alle Hasen lange Ohren.«
»Mancher will ein Fürzlein lassen und bescheißt sich gar.«

2. Nicht die Anzahl der Beteuerungen, sondern die der Verneinungen ist wichtig. Wenn ein verliebter junger Mann seiner Freundin ins Ohr flüstert: »Ja, ja, ich liebe dich immer und ewig!«, so demonstriert er zwar viel Seele und gehobenen Stil, sagt jedoch nicht mehr als: »Ich liebe dich !«

Sagt die Freundin daraufhin: »Nein, ich liebe dich niemals!«, so verneint sie nur, dass sie ihn niemals liebt. Das könnte, muss aber nicht bedeuten, dass auch sie ihn immer liebt.

Die Verneinung einer wahren Aussage macht diese falsch, und die Verneinung einer falschen Aussage macht diese wahr. »Widder sind leidenschaftlich.« Die Wahrheit dieser Aussage einmal vorausgesetzt, ist die Aussage »Widdergeborene sind nicht leidenschaftlich« falsch.
Wenn dagegen - wie in der Antwort der Freundin - die Anzahl der Verneinungen in einer Aussage gerade ist, so bedeutet das nur die ursprüngliche Aussage.

3. Neunundneunzig Wahrheiten und eine Lüge ergeben einen Lügner. Astrologisch gesehen, sind Menschen aus dem Zeichen Steinbock kalte Verstandesmenschen. Die Untersuchung dieser Aussage gliedert sich in vier mögliche Fälle:

- Ein Mensch sagt ja, wenn er zwischen dem 22. 12. und 20.1. geboren wurde und sich als kalter Verstandesmensch richtig eingeschätzt fühlt.
- Ein Mensch sagt nein, wenn er zwar im Zeichen Steinbock geboren wurde, sich aber für einen sensiblen Gefühlsmenschen hält.
- Ein Mensch sagt ebenfalls nein, wenn er sich zwar als kalten Verstandesmenschen sieht, aber nicht im Steinbockzeitraum geboren wurde.
- Die Aussage »Du bist im Zeichen des Steinbocks geboren und ein kalter Verstandesmensch« ist schließlich falsch, wenn die Person nicht in der Zeit zwischen dem 22. 12. und dem 20. 1.

geboren wurde und sich für einen sensiblen Gefühlsmenschen hält.

Verbindungen von elementaren Aussagen durch »und« ($\wedge$) sind demzufolge dann und nur dann wahr, wenn alle Teilaussagen richtig sind.
Wenn versichert wird, dass von Montag bis Sonnabend alle eingegangene Post sofort erledigt wurde, dann aber ein unerledigter Brief vom Dienstag gefunden wird, ist die gesamte Aussage falsch, auch wenn an den anderen Tagen alle Anforderungen gewissenhaft erfüllt wurden.

Ein Sprichwort hat diesen Sachverhalt treffend beschrieben: Wer einmal lügt, dem glaubt man nicht, und wenn er gleich die Wahrheit spricht.

Ist die nicht geringe Anzahl der zur Charakterisierung eines Sternzeichens vom Astrologen vereinigten Eigenschaften durch das Wort »und« zusammengesetzt, so wird die Gesamtaussage des Horoskops demzufolge falsch, wenn auch nur eine Aussage nicht zutrifft.
So hart geht es zu, wenn die Maßstäbe der mathematischen Logik herangezogen werden, um den Wahrheitswert eines Horoskops zu beurteilen. Von der Verwendung der Konjunktion muss Astrologen, die auf ihren Ruf bedacht sind, daher abgeraten werden.

4. Die Verwendung von »oder« hebt den Wahrheitswert zusammengesetzter Aussagen. »Die Geistigkeit der Zwillinggeborenen ist sehr groß, oder Saturn ist beschädigt.«
Eine solche Aussage ist wahr, wenn nur eine ihrer Elementaraussagen stimmt. Das ist der Fall für alle Zwillinggeborenen, die den Anspruch auf hohe Geistigkeit erheben - unabhängig davon, ob Saturn beschädigt ist oder nicht.

Zwillinggeborene stimmen der Aussage jedoch auch zu, wenn sie nicht auf hohe Geistigkeit Anspruch erheben können, aber im Horoskop einen beschädigten Saturn haben.
Ist der allerdings im Horoskop unbeschädigt, hätten sie allen Grund, ihre fehlende hohe Geistigkeit beim Astrologen einzuklagen. Doch immerhin: Wer als Astrologe mit Alternativen arbeitet, erhöht seine Erfolgsaussichten beträchtlich.
Sie erreichen damit aber noch nicht ihren Gipfelpunkt.

5. Falsche Voraussetzungen ermöglichen die gewagtesten Schlüsse.
Verbindungen, in denen eine Voraussetzung (Prämisse) und eine Schlussfolgerung (Konklusion) durch »wenn..., dann...« miteinander verbunden sind, werden, wie schon erwähnt, Implikationen genannt. Wie schaut es bei ihnen mit dem möglichen Wahrheitswert aus ?
Betrachtet werden soll hier folgende Implikation aus einem Horoskop:

»Wenn Reisen des Wassermanngeborenen ins Ausland führen, dann verlaufen sie nicht glücklich.«

Für einen Wassermanngeborenen, der im Ausland einen Unfall hat, ist die Implikation sicher richtig. Die Folgerung von »wahr« aus »wahr« ist »wahr«. Für einen Wassermanngeborenen, der im Ausland nur Glück hat, ist die Aussage ohne Zweifel falsch.
Doch soll er sein Glück deswegen verfluchen? Also vergisst er die Voraussage des Astrologen lieber.
Reist der Wassermanngeborene jedoch überhaupt nicht ins Ausland, so ist die Aussage nach der mathematischen Logik immer richtig - gleichgültig, ob die Schlussfolgerung richtig oder falsch ist. Denn allgemein gilt:

wenn (richtige Voraussetzung), dann (richtige Folgerung) - richtiger Schluss
wenn (richtig), dann (falsch) — falsch
wenn (falsch), dann (richtig) — richtig

wenn (falsch), dann (falsch) — richtig.

Damit sollte ein gewiefter Vorhersager doch allerhand anfangen können!

6. Bei zusammengesetzten Aussagen kann man noch besser mit der Wahrheit hantieren. »Steht Saturn im Sternkreiszeichen Jungfrau, dann besteht Eignung zu Industrie und Landwirtschaft.« Die Zerlegung und Formalisierung ergibt:

A_1: Saturn steht günstig im Zeichen Jungfrau.
A_2: Es besteht Eignung für Industrie.
A_3: Es besteht Eignung für Landwirtschaft.

$$A_1 \to (A_2 \wedge A_3)$$

Alle drei Elementaraussagen der zusammengesetzten Aussage können wahr oder falsch sein. Theoretisch gibt es demzufolge acht mögliche Kombinationen, und es entsteht eine Wahrheitswerttabelle:

A_1	A_2	A_3	$A_2 \wedge A_3$	$A_1 \to (A_2 \wedge A_3)$
W	W	W	W	W
W	W	F	F	F
W	F	W	F	F
W	F	F	F	F
F	W	W	W	W
F	W	F	F	W
F	F	W	F	W
F	F	F	F	W

Zwei Beispiele, die diese Symbole wieder in Normalsprache zurückübersetzen:

2. Zeile: Obwohl der Saturn für den Jungfraugeborenen günstig steht, eignet er sich zwar für Industrie, nicht aber für Landwirtschaft. Die zusammengesetzte Aussage ist falsch.

6. Zeile: Saturn steht ungünstig im Horoskop des Jungfraugeborenen. Er ist geeignet für Industrie, aber nicht für Landwirtschaft. Die Gesamtaussage ist nach den Gesetzen der mathematischen Logik richtig.

Allgemein können wir feststellen: Die vierte Spalte der Tabelle ist nur dann mit W gekennzeichnet, wenn sich bei A_2 und A_3 jeweils zwei W zusammenfinden.
Da die Implikation nur dann falsch ist, wenn ein richtiges A_1 mit einer falschen Konklusion $(A_2 \wedge A_3)$ verbunden ist, ergeben sich in der letzten Spalte mehr als die Hälfte W. Hätte Herr Glahn statt Industrie und Landwirtschaft besser Industrie oder Landwirtschaft gesagt, dann hätten sich mit Ausnahme der 4. Zeile sogar sämtlich W ergeben.
Sollte sich ein Astrologe unter solchen Gesichtspunkten nicht doch mehr mit der mathematischen Logik beschäftigen ?

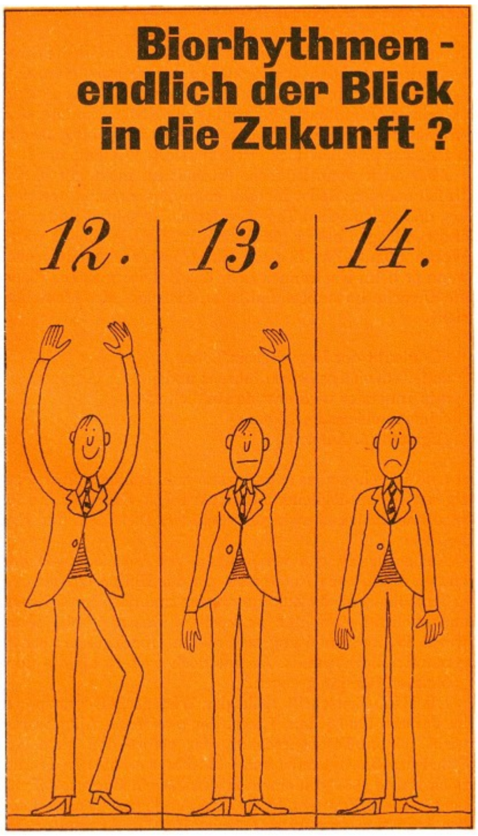
7. Am besten wären Aussagen, die immer richtig sind. Zusammengesetzte Aussagen, die unabhängig vom Wahrheitswert der Einzelaussagen immer richtig sind, gibt es.
Sie werden Tautologien genannt. Beispiele für solche Tautologien sind in allgemeiner mathematischer Fassung:

$A \vee (\sim A)$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$\sim (A \wedge (\sim A))$	Gesetz von der Kontradiktion
$[A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$	Gesetz des Syllogismus
$A \leftrightarrow \sim (\sim A)$	Gesetz der doppelten Negation
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow [(\sim B) \rightarrow (\sim A)]$	Gesetz der Kontraposition

Mit Hilfe der oben erläuterten Zeichen können Sie diese Formeln leicht als Sätze formulieren! Versuchen Sie es einmal!
Wer die Sätze in Horoskopen unter den hier genannten Gesichtspunkten kritisch prüft, kann sie unserer Überzeugung nach kaum noch ernst nehmen. Vielleicht aber - und erst dann wäre unser Ziel ganz erreicht - können Ihnen die Grundbegriffe der mathematischen Aussagenlogik, von denen die Rede war, auch beim kritischen Lesen anderer Texte und beim Formulieren eigener Sätze Anregungen bieten.
Denn Unlogisches, aus Einzelwahrheiten zusammengesetztes Falsches, Überflüssiges usw. findet man noch viel zu oft - und nicht nur in der Astrologie.

Bei unserem Nachdenken über Logisches und Wahrscheinliches wollen wir aber nicht bereits an diesem Punkt stehenbleiben.

3 Biorhythmen - endlich der Blick in die Zukunft?



3.1 Zufall oder Biorhythmus ?

Immer wieder kann man in Berichten über Unfälle im Straßenverkehr, bei der Arbeit oder in der Freizeit lesen, dass der Verunglückte durch falsches Verhalten selbst Schuld an seinem Unfall hatte. Obwohl er die Risiken kannte, den Arbeitsvorgang genau beherrschte, alles schon oft gemacht hatte, war plötzlich doch etwas passiert. Wie kam das?

Aber auch wenn kritische Situationen nicht mit einem Unfall endeten: Jeder Mensch kann an sich selbst feststellen, dass an manchen Tagen einfach alles gelingt und er an anderen Tagen besser gleich früh im Bett geblieben wäre. Woran könnte das liegen? Hat Goethes Egmont recht, wenn er beim Nachsinnen über das Scheitern seiner Pläne die Ursache im unbeeinflussbaren Schicksal des Menschen sieht:

»Es glaubt der Mensch, sein Leben
zu leiten, sich selbst zu führen; und
sein Innerstes wird unwiderstehlich nach
seinem Schicksal gezogen.«
(Egmont, 5. Auftritt.)

Und ist schon alles getan, wenn man Schillers Aufruf zu eigener nachdrücklicher Aktivität folgt: »Nur der Starke wird das Schicksal zwingen« (Schiller, Das Ideal und das Leben)?

Auf solche Fragen versprechen Veröffentlichungen der letzten Jahre neue Antworten, die der Hoffnung Nahrung geben, Blicke in die Zukunft werfen und das eigene Leben entsprechend einrichten zu können. Das magische Wort wurde in der Einleitung zu unseren Überlegungen schon genannt: Biorhythmus.
Es hat noch weitere als die dort genannten Kreise gezogen.

Die BRD-Zeitschrift »Bild der Wissenschaft« versprach im Januar 1980 jedem Leser, der zwei neue Abonnenten wirbt, einen Taschenrechner, der sofort den aktuellen Stand des Biorhythmus seines Besitzers angibt. In Frankreich wurde 1980 von einem Historiker ein Buch veröffentlicht, das ein Foto von Stalin, Roosevelt und Churchill auf der Konferenz von Jalta (Februar 1945) und darunter den

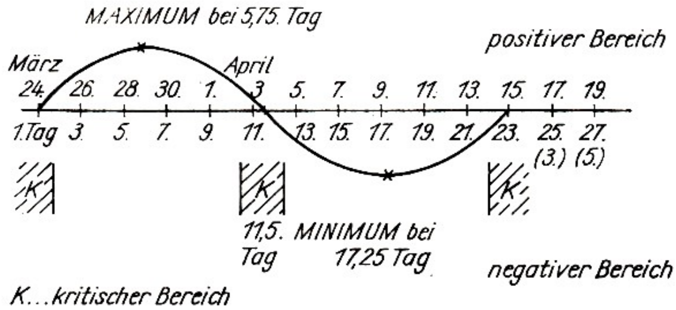
Stand des Biorhythmus der drei Staatsmänner am Tag der Aufnahme enthält. Weitere Belege ließen sich anfügen. Im folgenden soll uns die Frage beschäftigen, wie begründet die Ernsthaftigkeit ist, mit der Biorhythmen in solchen und anderen Veröffentlichungen behandelt werden. Dazu ist zuerst zu klären, worum es sich beim Biorhythmus überhaupt handelt.

Die Grundfeststellung lautet: Das Leben aller Menschen vollzieht sich nach konstanten Schwingungen, die mit der Geburt in Gang gesetzt werden. Dabei sind drei Komponenten zu unterscheiden: eine physische, eine emotionale und eine geistige. Die biologisch vorherbestimmten Schwingungen laufen das ganze Leben lang ohne Störung im Menschen ab, sie können gewissermaßen als biologische Uhr bezeichnet werden.

Betrachten wir nun die drei Komponenten im einzelnen:

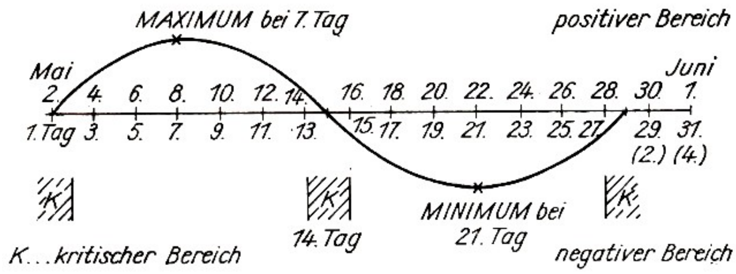
1. Die physische Schwingung hat eine konstante Periodenlänge von 23 Tagen. Diese Periode teilt sich in eine positive und eine negative Phase. In den ersten Tagen der Periode vollbringt der Mensch eine erfolgreiche, fehlerfreie Tätigkeit mit hoher Aktivität und Intensität.
In der Mitte des Zyklus (also am 11.-12. Tag) vollzieht sich der Übergang in eine negative Phase, in der die konzentrierte Arbeit aus der ersten Phase nur noch schwer fortzusetzen ist, Ausdauer und Konzentrationsfähigkeit nachlassen. Dieser Verlauf lässt sich veranschaulichen.

Wichtig sind besonders die zwei Übergänge von der positiven in die negative Phase (11./12. Tag) und zurück (23./1. Tag). Sie bilden die kritischen Momente des Zyklus.

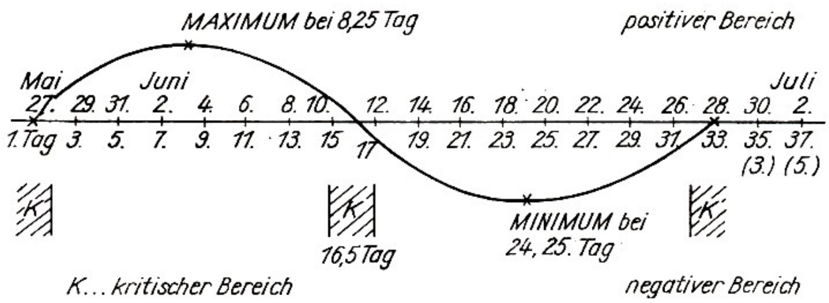


Physische Leistungskurve

2. In gleicher Weise ist der emotionale Zyklus aufgebaut. In seiner ersten Phase bestimmt Optimismus das Leben, der Tag wird mit Freude begonnen, die Kontaktfreudigkeit ist groß usw.
Nach dem kritischen Tag herrscht Pessimismus vor, schlechte Laune, Verschlossenheit. Die Periodenlänge des emotionalen Zyklus beträgt 28 Tage, die kritischen Momente befinden sich also am 14. und am 28. Tag des Zyklus.



Emotionale Leistungskurve

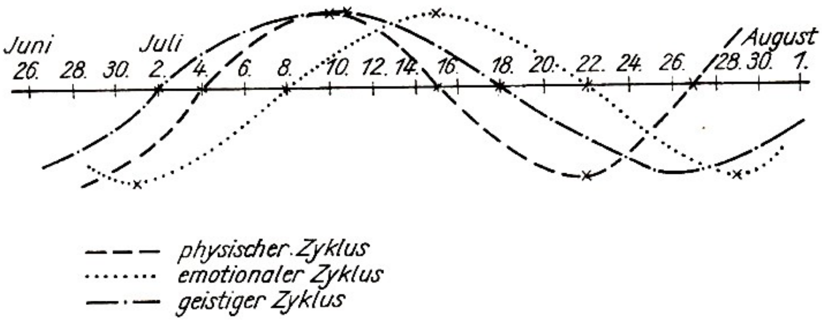


Geistige Leistungskurve

3. Der geistige Zyklus schließlich hat eine Länge von 33 Tagen. In seiner ersten Hälfte werden Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten besonders schnell erworben und gut angewendet.

Nach dem ersten kritischen Tag (16./ 17. Tag des Zyklus) fällt das Lernen schwerer, die geistige Spannkraft und Effektivität sind gemindert, bevor dann mit dem 33. Tag wieder eine positive Phase beginnt.

Diese drei Zyklen überlagern sich nun im Leben eines Menschen. Sie beginnen zwar gleichzeitig mit der Geburt; Maxima, Minima und kritische Tage verschieben sich dann
jedoch entsprechend der unterschiedlichen Periodenlänge. Zu einem bestimmten Zeitpunkt könnte das aussehen wie in der obigen Abbildung.



Mögliche Überlagerung der Biorhythmuskurven

Mathematisch können diese Kurven als die Bilder von Sinusfunktionen mit gleicher Amplitude und unterschiedlicher Frequenz gedacht werden. Die Werte dieser Funktionen:

$$y_{\text{phys}} = \sin\frac{2\pi}{23}t = \sin 0{,}2732t$$
$$y_{\text{emo}} = \sin\frac{2\pi}{28}t = \sin 0{,}2244t$$
$$y_{\text{geist}} = \sin\frac{2\pi}{33}t = \sin 0{,}1904t \qquad (t: \text{Lebensalter in Tagen})$$

interessieren den Biorhythmologen an sich jedoch nicht.

Ihn beschäftigen die kritischen Tage, an denen die Nulllinie überschritten wird, der Organismus sich also tiefgreifend umstellen muss, wodurch er bereits durch Umwelteinflüsse aus dem Gleichgewicht gebracht werden kann, die außerhalb der kritischen Tage kaum zu spürbaren Störungen führen würden.
Besonders kritisch sind demzufolge jene Tage, an denen die kritischen Punkte von zwei oder sogar allen drei Zyklen nebeneinanderliegen. Etwa einmal in drei Jahren kommt es zum Zusammenfallen der kritischen Tage aller drei Zyklen. Das sollen besonders gefährliche Tage sein.

Kritische Tage lassen sich ohne allzu große Mühe berechnen. Ein Beispiel sei gegeben: Der Arbeiter B. Müller sei am 3. 7. 1942 geboren. Wie ist der Stand seines Biorhythmus am 4. 9. 1980?

Alter in Jahren: 38	= 13870 Tage
Schaltjahre	10 Tage
Gelebt im 39. Lebensjahr	64 Tage
	13944 Tage

Der 4. 9. 1980 ist B. Müllers 13944. Lebenstag.
Stand des physischen Zyklus:
13944 : 23 =606,... (606 physische Zyklen abgelaufen); 13944 - 23 · 606 =6.

B. Müller hat im physischen Zyklus am 4.9.1980 den Maximalwert der positiven Phase erreicht.

Stand des emotionalen Zyklus:
$13944 : 28 = 498$; $13944 - 28 \cdot 498 = 0$.
B. Müller hat im emotionalen Zyklus am 4.9.1980 den kritischen Moment des Übergangs von der negativen in die positive Phase erreicht.

Stand des geistigen Zyklus:
$13944 : 33 = 422,...$; $13944 - 33 \cdot 422 = 18$.
Der geistige Zyklus bewegt sich seit dem Vortag im negativen Bereich. Die Intensität der negativen Phase wird sich in den kommenden Tagen verstärken.

Wäre mit diesen Rechenoperationen, die zur Not auch ohne Taschenrechner durchgeführt werden können, der ersehnte Blick in die Zukunft erreichbar ? Können wir die Tage vorausberechnen, die wir besonders gut nutzen oder an denen wir besonders vorsichtig sein sollten ?

Vor einer umfassenden Antwort wollen wir zunächst im Leben einiger historischer Persönlichkeiten nach wichtigen Wendepunkten suchen und nach dem Stand des Biorhythmus an diesen Tagen fragen. Vielleicht können diese Beispiele unsere Hoffnungen weiter stärken.

Als Zusammenfassung des bisher Gesagten und zur besseren Orientierung im folgenden hier noch eine Übersicht über den Stand des Biorhythmus und die zugeordnete Aussage:

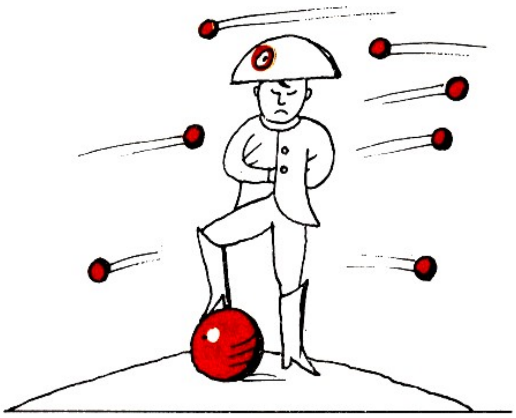
Tag phys.Zykl.	emot.Zykl.	geist. Zykl.	Aussage
071	0/1	0/1	kritischer Tag
2-5	2-6	2-7	positive Phase mit zunehmender Stärke
6	7	8	absolutes Maximum des Zyklus
7-10	8-13	9-15	positive Phase mit abnehmender Stärke
11/12	14	16/17	kritischer Tag
13-16	15-20	18-24	negative Phase mit zunehmender Stärke
17	21	25	absolutes Minimum des Zyklus
18-22	22-27	26-32	negative Phase mit abnehmender Stärke
23	28	33	kritischer Tag

Unser erstes Beispiel sei Wallenstein, der uns schon bei der Betrachtung der Astrologie interessiert hat. Der große Feldherr des Dreißigjährigen Krieges wurde am 24. 9. 1583 geboren. Der Stand seines Biorhythmus an einigen für ihn wichtigen Tagen seines Lebens soll im folgenden übersichtsartig angegeben werden:

Am 25. 4. 1626 hatte er seinen ersten großen Erfolg an der Brücke zu Dessau: Lebenstage 15554 - P: 6; E: 14; G:11.
Das Lehen Mecklenburg erhielt er vom Kaiser am 19. 6. 1629: Lebenstage 16705 - P: 7; E: 17; 6:7.
Die erste Absetzung durch den Kaiser erfolgte am 12. 8. 1630: Lebenstage 17124 - P: 12; E: 16; G: 30.
Bei Lützen griff am 6. 11. 1632 Wallenstein den schwedischen König Gustav Adolf II. an: Lebenstage 17942 - P: 2; E: 22; G: 23.
In der Schlacht fiel zwar Gustav Adolf, insgesamt endete sie jedoch mit einer empfindlichen Schlappe für Wallenstein, die am 15. 11. 1632 besiegelt war: Lebenstage 17951 - P: 11; E: 3; G: 32.

Die Ermordung Wallensteins in Eger (heute Cheb) schließlich geschah am 25.2. 1634, nach 18417 Lebenstagen - P: 17; E: 21; G: 3.

Wertet man die hier gegebenen Werte anhand unserer Tabelle aus, so wird man feststellen, dass sich mindestens bei einem oder zwei der drei Zyklenabläufe Beziehungen zu dem für Wallenstein positiven oder negativen Ausgang des Ereignisses finden lassen. Seine Ermordung z. B. geschah bei vollen geistigen Fähigkeiten, jedoch in einer nicht gerade lebenshungrigen Stimmung und im absoluten Minimum des physischen Zyklus.



Ein weiteres Beispiel: Als Kaiser Napoleon I. am 16. 10. 1813 bei Leipzig in der Völkerschlacht auf die vereinten Truppen seiner Gegner traf, hatte er den 13577. Tag seines Lebens erreicht (er wurde am 15. 8. 1769 geboren).
Sein physischer Zyklus wies einen guten Wert auf (P: 7), die Stimmung muss schlecht gewesen sein (E: 25), die geistige Leistungsfähigkeit lag gerade noch im positiven Bereich (G: 14). Das Ende der Völkerschlacht kam für Napoleon jedoch nicht schnell genug.
Als am 19. 10. 1813 der letzte Tag der Schlacht anbrach, hatten alle Zyklen einen kritischen Tag erreicht oder standen unmittelbar davor: P: 10; E: 28; G: 17.

Eine letzte Chance bei Waterloo hatte Napoleon gar nicht. Am Tag der Schlacht, dem 18. 6. 1815, befand sich zwar seine geistige Leistungsfähigkeit im positiven Bereich (G: 13), der physische und der emotionale Zyklus jedoch hatten einen kritischen Tag erreicht (P:23 und G: 28).

Hätte Napoleon zwei Tage gewartet, bis sich alle Werte seines Biorhythmus im positiven Bereich befanden, wenn er diese Werte gekannt hätte? Und hätte es ihm genutzt?

Heinrich Heine (geboren am 13.12.1797) starb am 17.2.1856 nach genau 21251 Lebenstagen. Alle drei Zyklen seines Biorhythmus standen einen Tag vor dem kritischen Punkt (P: 22; E: 27; G: 32).
Franz Schubert starb am 19. 11. 1828 nach 11616 Lebenstagen an einem kritischen Tag des physischen und des geistigen Zyklus, als sich der emotionale Zyklus im negativen Bereich befand (P: 1, E: 24, G: 33).

Derartige Beispiele ließen sich häufen. Bevor wir beginnen, etwas genauer über: sie nachzudenken, seien drei weitere aus einem anderen Bereich angeführt, über die Dr. Mjasnikow in seinem erwähnten Artikel berichtet. Wir verlassen dabei die Weltgeschichte und kehren in den Alltag zurück:

In einem großen Werk des Maschinenbaus werden aus Eisenbahnwaggons Paletten mit schweren Eisenteilen entladen.

Der Schichtverantwortliche, Kollege U., kann auf eine langjährige unfallfreie Tätigkeit verweisen und besitzt alle notwendigen Qualifikationen und Berechtigungsscheine für Hebezeuge und Elektrostapler.

Doch am frühen Morgen des 31. 8. 1973 fährt er mit den Gabelstaplerschuhen so heftig unter einen Palettenbock, dass der Kollege Sch. eingequetscht und schwer verletzt wird. Ein zweiter Arbeiter, Kollege W., der am Ausladen beteiligt ist, kann sich noch schnell in Sicherheit bringen.
Wo liegen die Ursachen für diese völlig unerklärliche Fehlhandlung des Kollegen U.?!

Warum verunglückte der Kollege Sch., und warum konnte sich Kollege W. in Sicherheit bringen ? Die Biorhythmen der Beteiligten beantworten diese Fragen:

Koll.	geb.	Lebenstage	P	E	G
U.	20. 7. 1928	16478	11	15	12
Sch.	30. 9. 1942	11293	23	9	7
W.	8. 4. 1940	12199	9	19	22

Zuerst werden die kritischen Tage des Unfallverursachers U. sichtbar. Zu dem kritischen Tag im physischen Zyklus kommt die Umstellung des emotionalen Zyklus in die negative Phase.
Auch der physische Zyklus des Verunglückten Sch. hat einen kritischen Tag erreicht. Kollege W. dagegen befindet sich in keinem der drei Zyklen in der Nähe eines kritischen Tages. Hätte man also den Unfall durch rechtzeitige Vorwarnung verhindern können ?

Oder: Am 17.1.1978 fährt ein Pkw von T. nach B. Die Strecke ist kurvenreich, jedoch dem Fahrer hinreichend bekannt, da er sie seit vielen Jahren mehrmals täglich mit dem Betriebsauto durchfahren hat. Doch an diesem Tag verliert der Fahrer K. trotz bester Witterungsverhältnisse in einer Kurve die Gewalt über das Fahrzeug, dieses kommt ins Schleudern und prallt gegen einen Baum.
Der Fahrer verstirbt am Unfallort, am Fahrzeug entsteht Totalschaden.
Die Frage, warum der Unfall gerade an diesem Tag passierte, soll der Stand des Biorhythmus beantworten.

K. war am 30. 8. 1943 geboren worden, der Unfalltag war demnach der 12559. Lebenstag. Im physischen Zyklus liegt mit der Zahl 1 ein kritischer Tag vor. Der Wert 15 für den emotionalen Zyklus zeigt, dass hier gerade ein kritischer Wert durchlaufen worden ist.
Der Wert 19 für den geistigen Zyklus liegt ebenfalls nur wenig vom kritischen Punkt entfernt.

Ein drittes Beispiel: In B. veranlasst der Produktionsbereichsleiter P. die Umsetzung einer schweren Exzenterpresse (Masse 1,5t) mit einem Gabelhubwagen. Der Leiter kann auf eine bis zum 13. 10. 1978 völlig fehlerfreie Tätigkeit verweisen.
Was ihn an diesem Tag bewogen hat, ein völlig ungenügendes Transportmittel für die Umsetzung zu nehmen, ist nicht zu ahnen. Während des Umsetzens fällt die Presse um. Zwei Arbeiter können sich aus dem Fallbereich des Gerätes in Sicherheit bringen.
Unerklärlich bleibt, warum der Leiter P., statt ebenfalls aus dem Unfallbereich zu entfliehen, auf die stürzende Presse zuläuft.
Er wird zerquetscht. Eine Untersuchung des Biorhythmus ergibt den seltenen Fall, dass die Werte aller drei Zyklen im negativen Bereich liegen: Geboren am 12.11. 1943, hatte Kollege P. den 12754. Lebenstag erreicht. Das hieß für die einzelnen Werte: P:12; E: 14; G:16. Alle drei Zyklen gingen am Unfalltag durch die Nullkurve in den negativen Bereich.

Vermöchte die Untersuchung des Biorhythmus überall solch verblüffende Ergebnisse zu erbringen wie in diesen Beispielen, so hätten wir es hier zweifellos mit einer wichtigen Entdeckung zu tun - die modernen Verfechter dieses Verfahrens gehen zweifellos davon aus, dass das so ist.

Wir wollen uns ihnen jedoch - zumindest vorerst - nicht anschließen, sondern zwei kritische Fragen stellen:

1. Wie neu ist dieses als Entdeckung bezeichnete Verfahren wirklich ?
2. Wie weit können Beispiele verallgemeinert werden, was beweisen sie ?

Zur ersten Frage. »Uralt ist die Frage, nach welchen Gesetzen der Ablauf des Lebens sich vollziehe. Mannigfaltig ist die Antwort gewesen. Glaube und wissenschaftliche Ahnung haben abwechselnd die Lösung versucht.
Aber ... immer waren es äußere Ursachen, die in das lebendige Wesen gleichsam störend eingriffen. Nach welcher inneren Ordnung das Leben abrollt, ... wie durch diese innere Ordnung die Generationen miteinander verbunden sind und wie die Stunde des Todes durch sie nicht minder sicher bestimmt wird als die der Geburt, das soll in diesen Blättern zum erstenmal und auf eine ganz neue Weise gezeigt werden.
Durch keine Hypothesen: nur mit den Mitteln der exaktesten mathematischen Analyse.«

Mit diesem großen Versprechen begann Wilhelm Fliess sein 584 Seiten dickes Buch »Der Ablauf des Lebens. Grundlegung zur exakten Biologie«, das im Jahre 1906 erschien.
Der Verfasser eines Werkes über die »Beziehungen zwischen Nase und weiblichen Geschlechtsorganen« entwickelte in seinem neuen Buch mit zahlreichen Rechnungen und einem Anhang mit vielen Hilfstabellen die These, »daß durch alles Leben ein Puls geht und ein Rhythmus«.

Wir wollen uns den Nachvollzug seines Gedankenganges hier schenken. Wichtig ist, dass er bereits vor einem Dreivierteljahrhundert die 23-, 28- und 33-Tage-Perioden erläuterte, mit deren Entdeckung sich die heutigen Biorhythmusexperten brüsten.

Ja mehr noch. Es fand zu Beginn unseres Jahrhunderts bereits ein Gelehrtenstreit darüber statt, wem diese Entdeckung zuerst gelungen sei und welche Inhalte und Konsequenzen sie im einzelnen habe. Außer Fliess spielten Hermann Swoboda und Otto Weininger eine Rolle; auch der Name Sigmund Freud tauchte als damals bereits berühmte Berufungsinstanz auf.

Wir können nicht sagen, in welchem Maße die Ausführungen über »Die Perioden des menschlichen Organismus in ihrer psychologischen und biologischen Bedeutung« (so der Titel des Buches von Swoboda aus dem Jahre 1904) für die Entwicklung der Psychoanalyse wichtig geworden sind, die mit dem Namen Freuds verbunden ist und von der wir zweifellos bis heute zu wenig wissen.

Die dogmatische Beschränkung aber, mit der heute aus einem wissenschaftsgeschichtlich offensichtlich komplexeren Vorgang wenige Stichwörter herausgezogen werden, um Biorhythmen zu umfassenden Erklärungsmustern zu erheben, sollte unser Misstrauen erregen. Swoboda z. B. formulierte vorsichtiger: »Jeder (menschliche - d. A.) Organismus ist in seiner Gesamtheit Schwankungen unterworfen, die sich sowohl objektiv als subjektiv kundgeben, die eine physische und eine psychische Seite haben. Diese Schwankungen kehren in regelmäßigem Rhythmus wieder...
Die 23- und die 28tägige Periode sind nicht die kleinsten und nicht die größten. Sie sind nur... leichter zu konstatieren.«

Tatsächlich gibt es solche Schwankungen. Jahreszeitlich bedingte Stimmungsschwankungen, zyklisch veränderliche Hormonspiegel, periodisch ablaufende Wachstumsphasen, eine regelmäßige tägliche Leistungskurve sind gesicherte Ergebnisse der Medizin und Psychologie; sie werden im täglichen Leben immer wieder empfunden. Nur entspricht das natürlich ganz und gar nicht den exakten Normen des Biorhythmus.

Ein Weiteres kommt hinzu. Fliess hatte klar ausgesprochen, dass ihm die »innere Ordnung« des Lebens wesentlicher schien als äußere Einflüsse. Und ein solcher Gedanke liegt ja auch den Biorhythmusüberlegungen zugrunde. Bereits die Alltagserfahrung lehrt aber, dass durchaus Beziehungen zwischen Einflüssen von außen und innerer Verfassung bestehen.

Einerseits werden bestimmte Ereignisse bei guter Stimmung ganz anders verarbeitet als bei schlechter, geht die gleiche Arbeit an einem Tag besser von der Hand als an einem anderen usw.

Andererseits wirken Ereignisse und Erlebnisse auf Stimmung und innere Verfassung zurück, freut ein Lob oder erhöht gutes Wetter beispielsweise die Lebensfreude. Gäbe es diese Wechselwirkung nicht, könnten wir (nach der Struwwelpetergeschichte vom »Hans Guck-in-die-Luft«)

als »Hans Guck-auf-die-Bio-Uhr« unser Leben voller Ruhe angehen.

Und schließlich erhebt sich ein letzter Zweifel. Beispiele sind schön und gut, aber beweisen sie wirklich etwas? Findet sich nicht immer auch ein Gegenbeispiel ? Brauchten wir nicht exaktere Nachweise, um unsere Hypothesen und unsere Zweifel über die Brauchbarkeit von derartigen Biorhythmusuntersuchungen zu überprüfen ?
Auch über solche Fragen haben Mathematiker nachgedacht.

3.2 Beweisverfahren

Dem Mathematiker reicht nicht aus, dass jemand eine Sache »für wahr hält«. Jede Aussage, die er macht, muss auf ihre Richtigkeit überprüft, die Wahrheit muss bewiesen werden.
Ein Beweis kann Wahrheiten nicht schaffen; diese existieren objektiv, unabhängig vom Menschen und seinem Denken.

Aber der Mathematiker verfügt über Beweisverfahren, die die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen zeigen. Erst wenn nach einem theoretischen Beweis die Richtigkeit einer Aussage nachgewiesen wurde - was mit dem klassischen Satz beendet werden kann, der Euklid zugeschrieben wird: »Hoper edei daixai«, woraus dann das lateinische »Quod erat demonstrandum (Was zu beweisen war)« wurde -, steht der umfassenden Anerkennung einer Tatsache oder Anwendung einer Methode nichts mehr im Wege.

Dieses Vorgehen ist in der Mathematik von allen Wissenschaften am weitesten entwickelt; sie ist damit in gewisser Weise zum nachahmenswerten Beispiel für alle anderen Wissenschaften geworden. Sehr schön wird das in einigen hier von J. Churgin übernommenen, nur leicht überspitzten Geschichten gezeigt, in denen er das Vorgehen von Physikern, Technikern und Ärzten bei der Lösung von Problemen einander gegenüberstellt (Gesellschaftswissenschaftler stehen bekanntlich noch für weit schärfere Karikaturen Modell). Das Vorgehen des Physikers beschreibt Churgin folgendermaßen:
Es sei die Behauptung zu beweisen, dass 60 durch alle ganzen Zahlen teilbar ist. Der Nachweis wird geführt für 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dann behauptet der Physiker, dass der Nachweis auch mit zufällig ausgewählten Zahlen wie 10, 15 oder 20 erfolgen kann.

Zum Schluss stellt er fest, dass aufgrund des durchgeprüften Experiments die Annahme der Richtigkeit der geprüften Behauptung geboten ist. Den Techniker stellt Churgin vor die Behauptung:

Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen, also nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar. Der Nachweis gelingt für 1, 3, 5, 7 und misslingt für die 9. Den Techniker stört das nicht weiter, er zeigt die Richtigkeit der Behauptung für die Zahlen 11 und 13. Damit sieht er den Zusammenhang als erwiesen an und klammert die 9 aus, da in diesem Falle Störfaktoren das Experiment beeinträchtigt haben.

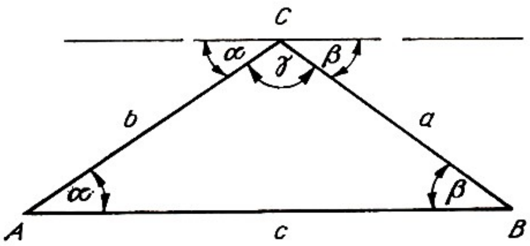
Den Arzt erwischt es noch schlimmer. Einem hoffnungslos Nierenkranken wird Erbsensuppe zum Mittagessen gegeben. Daraufhin wird er überraschend gesund. Der Arzt nutzt das für eine wissenschaftliche Veröffentlichung. Sein Kollege im Nachbarkrankenhaus versucht die gleiche Therapie - der Patient stirbt.
Als der Verfasser der Veröffentlichung davon erfährt, korrigiert er die Schlussfolgerung seiner Arbeit: In 50% der Fälle hilft Erbsensuppe bei Nierenerkrankungen.

Die Grundmethode, mit der die Mathematik solche Entgleisungen zu vermeiden sucht, lässt

sich anhand einiger Begriffe beschreiben. Für die Mathematik gibt es eine geringe Anzahl von Aussagen, die von allen Beteiligten als wahr anerkannt werden. Sie werden Axiome genannt.
Sätze, die sich aus den Axiomen ableiten lassen, heißen Lehrsätze oder Theoreme. Sind diese Theoreme erst einmal aus den Axiomen abgeleitet, dürfen sie für Beweise von anderen Sätzen benutzt werden.

Ein Beispiel hierfür aus dem Gebiet der Geometrie. Ein Axiom sei, dass der gestreckte Winkel einen Wert von $180°$ habe. Vorher wurde an anderer Stelle bewiesen, dass die Wechselwinkel an: geschnittenen Parallelen gleich sind.

Damit lässt sich sofort die Richtigkeit des Satzes zeigen: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $180°$.

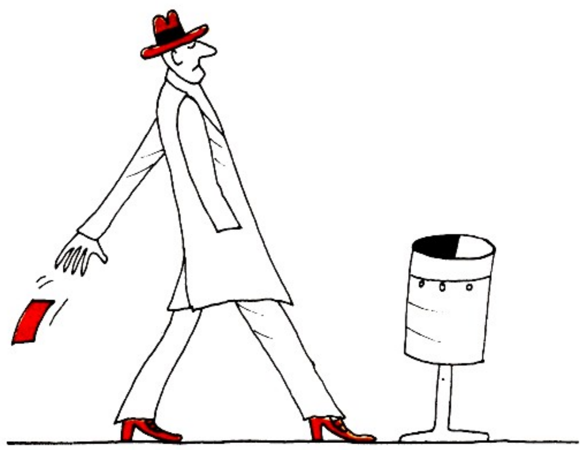


Beweis des Winkelsummensatzes

Beweis: Zur Seite c des Dreiecks wird eine Parallele durch den Punkt C gezeichnet. Der Winkel α entsteht im Punkt C zwischen der Parallelen und der Seite b. Gleichermaßen entsteht der Winkel β am Punkt C.
Da sich die drei Winkel α, β, γ im Punkt C zu einem gestreckten Winkel zusammensetzen, wurde der zu beweisende Satz als richtig bestätigt.

Axiome sind dabei nicht die willkürlichen Produkte der Phantasie des Mathematikers. Jedes vernünftige mathematische Axiom ist Bestandteil eines sinnvollen Bildes der realen Wirklichkeit. Schlussfolgerungen, die aus einem Axiom abgeleitet werden, müssen stets mit den Erscheinungen der Realität verglichen werden.

Axiome und die aus ihnen abgeleiteten Aussagen verbinden sich dann zu einem mathematischen System, wenn jede einzelne Behauptung schlüssig bewiesen ist. Ausnahmen gibt es in einem solchen System nicht; bereits eine einzige würde die Falschheit einer Behauptung zeigen.
Über die Art der verwendeten Beweise wollen wir uns noch kurz Gedanken machen. Sie lässt sich auch durch Beispiele aus dem Alltagsleben erläutern.



Der direkte Beweis wird am häufigsten angewendet, und zwar, um einen einzelnen Sachverhalt zu untersuchen. Es sei z.B. ein Axiom:
Wenn ein Besucher seine Eintrittskarte nicht in den Papierkorb, sondern einfach in die Gegend wirft, verstößt er gegen die Stadtordnung. Sachverhalt:
Der Tourist X hat seine Eintrittskarte neben den Papierkorb geworfen. Folglich hat er gegen die Stadtordnung verstoßen.

Ein anderes Beweisverfahren ist der indirekte Beweis. Dabei wird nicht eine Tatsache untersucht, sondern zwischen zwei Entscheidungen verbindlich gewählt, so dass eine davon verneint, die andere für gültig erklärt werden kann.
Beispiel: Hat meine Frau das Kleid bezahlt oder nicht ?
Annahme: Sie hat es bezahlt. Beweis: Da sie keine Quittung hat, kann die Annahme nicht richtig sein.
Folgerung: Das Kleid muss noch bezahlt werden.

Bei einer solchen Beweisführung sind natürlich sofort Einwände denkbar. Die Frau könnte z.B. die Quittung verloren haben. In der Mathematik müssen solche Einwände ausgeschlossen sein. Alle Erkenntnisse sind durch Beweise zu sichern, jede Feststellung ist abzuleiten. Die Ableitung einer Tatsache durch einen Beweis wird als Deduktion bezeichnet.

Eine Behauptung, die nicht mathematisch exakt (unter Ausschluss aller Einwände und Ausnahmen) bewiesen wurde, ist eine Plausibilitätsbetrachtung oder Induktion. Induktiv gewonnene Ergebnisse und Aussagen können umstritten sein. Manche, z. B. die Gesellschaftswissenschaften, arbeiten mit unvollständigen Induktionen, bei denen die Beweiskette von Ursache zu Wirkung nicht unter Einschluss aller Möglichkeiten geschlossen ist.

Man sollte sich jedoch hüten, aufgrund einer solchen Feststellung induktive Verfahren zu unterschätzen. Experimente, Hypothesen, das Suchen nach neuen Erkenntnissen und damit das Fortschreiten der Wissenschaft überhaupt führen zunächst zu induktiv gewonnenen Ergebnissen, die erst anschließend deduktiv aus Bekanntem abgeleitet und so in das bestehende Gesamtsystem der Erkenntnisse eingeordnet werden können.

Auch der Mathematiker, der als erster seine ganze Wissenschaft deduktiv aufbauen konnte, muss dieses hohe Ross mitunter verlassen, dann nämlich, wenn er neue Erkenntnisse sucht. Für die Mathematik gilt allerdings, dass die anschließende deduktive Sicherung von Tatsachen immer notwendig ist. Sie arbeitet nur mit vollständigen Induktionen.
Je mehr sich dann Einzelwissenschaften mit dem Leben und schließlich mit dem Menschen beschäftigen (über die Biologie bis zu den Gesellschaftswissenschaften), desto weniger gelöst - und vielleicht desto unlösbarer - ist diese deduktive Systematisierung.

Dieses sehr komplizierte Problem braucht uns hier jedoch nicht weiter zu beschäftigen; denn für unsere Ausgangsfrage nach der Leistung von Untersuchungen des Biorhythmus beim Blick in die Zukunft haben wir bereits wichtige Elemente für eine Antwort gewonnen.
Die Stellung des Beweises bei der Klärung wissenschaftlicher Streitfragen ist uns deutlicher geworden. Und wir haben festgestellt:

In rigoroser Anwendung (wie die Mathematik sie fordert) zeigt bereits eine Ausnahme, dass eine Behauptung falsch ist, während eine noch so große Reihe positiver Beispiele die Gültigkeit einer Behauptung nicht zweifelsfrei nachweisen kann.
Je mehr Beispiele vorliegen, desto plausibler ist zwar, dass eine Behauptung für wahr gehalten werden kann. Vor einem deduktiv erbrachten Beweis sind derartige Aussagen jedoch immer

Hypothesen und damit dem Meinungsstreit ausgesetzt.

Vielfach ist in der Geschichte der Wissenschaften über Hypothesen gestritten worden. Von der Intensität dieses Streites hängt der Fortschritt von Wissenschaften sogar wesentlich ab, weil gerade hier neue Ideen entwickelt und überprüft werden. Dabei kann es sogar vorkommen, dass ganz anderes gefunden wird, als zu Beginn diskutiert wurde.

In der Geschichte der Mathematik führte z. B. die Suche nach einem Beweis für das klassische Problem des Fermat zu einem neuen Gebiet der Algebra. Der französische Mathematiker Fermat (1601-1665) hatte in das Buch eines klassischen griechischen Kollegen (es war Diophant, Buch II, 8) geschrieben, dass er für die Behauptung

$$x^n + y^n = z^n$$

für x, y, z, n ganzzahlige Werte und $n > 2$ einen wunderbaren Beweis gefunden habe, der Rand im Buch aber zu schmal sei, um ihn auf die Schnelle zu fassen.

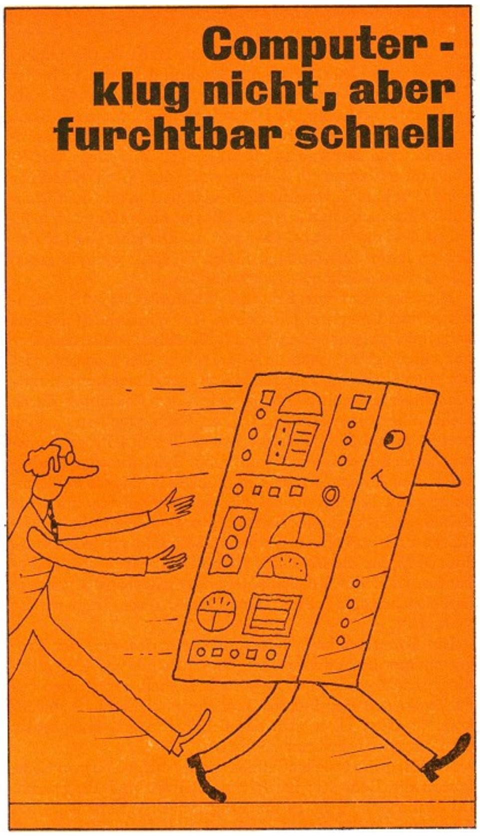
Jahrhundertelanges vergebliches Suchen nach diesem Beweis lässt wohl die Vermutung zu, dass der große Fermat sich hier geirrt hat.
Auf der Suche nach diesem Beweis fand der deutsche Mathematiker Kummer die Theorie der idealen Zahlen - ein anderes Ergebnis als das gesuchte, aber ein sehr wichtiges

Zurück zum Biorhythmus: Wir wollen für die Richtigkeit des im Abschnitt »Zufall oder Biorhythmus« erläuterten Vorgehens deduktiv erarbeitete Beweise nicht unbedingt fordern.
Deutlich geworden ist aber, dass die bisher gebrachten Beispiele bei weitem nicht ausreichen, um auch nur eine Plausibilitätsbetrachtung zu rechtfertigen. Bleibt die Möglichkeit, anhand von vielen zufällig ausgewählten und objektiv bewerteten Beispielen zu zeigen, dass die Aussagen zum Biorhythmus zumindest für wahr gehalten werden können.

Ein solches Vorgehen ist mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Schon die wenigen Beispiele, die oben gebracht wurden, haben gezeigt, dass die Berechnung der Lebenstage und des aktuellen Standes eines Biorhythmus zwar routinemäßig auf ständig gleiche Weise abläuft, aber sehr arbeitsaufwendig ist. Solche Routinetätigkeiten - alle, die sich in zeitlicher Abfolge und logisch richtiger Struktur aufschreiben lassen - können dem Computer übertragen werden. Dieser macht die Angelegenheit nicht unverständlicher oder richtiger, als sie ist, schafft aber Möglichkeiten zu Untersuchungen, die bisher mit hohem Zeitaufwand verbunden waren.

Da Computer in unserem Leben eine wachsende Rolle spielen, wollen wir im folgenden zwei Fliegen mit einer Klappe schlagen: Unsere Überlegungen zum Biorhythmus sollen vorangetrieben, bei dieser Gelegenheit soll aber auch gezeigt werden, auf welchen Wegen Computer überhaupt arbeiten. Auch das ist weniger kompliziert, als man normalerweise befürchtet.

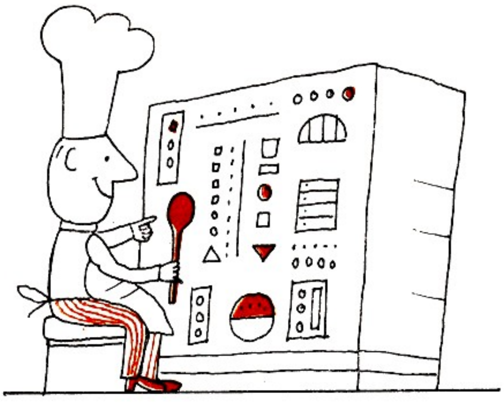
4 Computer - klug nicht, aber furchtbar schnell



4.1 Lohnt sich die Maschine beim Kochrezept ?

Das kommt ganz darauf an! Wenn Kochrezepte papiersparend gespeichert werden müssen und schnell in bester Form abgeschrieben werden sollen, lohnt sich der Einsatz bestimmt.
Der Computer ist auch geeignet, wenn ein Koch aus gewissen konstanten Werten (Zutaten) schnell und umfassend neue Zubereitungsformen oder Mischungsverhältnisse ausprobieren will. Dazu muss der Koch allerdings seine Geschmacksvorstellungen klar und präzis dem Computer eingeben, sonst kommen alle mit diesen Zutaten möglichen Gerichte heraus, darunter auch solche, die bei den Gästen kaum Zustimmung finden dürften, weil sie gegen jede Geschmackskonvention verstoßen.

Mitunter wird von Schachwettkämpfen zwischen Menschen und Computern berichtet. In Wirklichkeit ist das kein Spiel zwischen Mensch und Maschine, sondern wieder nur ein Spiel zwischen zwei Menschen.
Der Computer ist nur so gut wie sein Programmierer. Ist dieser nur ein mittelmäßiger Schachspieler, so wird der Computer durch nichts über diese Mittelmäßigkeit hinauswachsen, jedoch perfekt mittelmäßig spielen.



Alle Fehler des Programmierers werden sich in einer konkreten Spielsituation wiederholen. Der Mitspieler, der eine Fähigkeit hat, die ein Computer nicht besitzt, die des eigenen Mitdenkens, kann die Fehler des Programms erlernen, Situationen bewusst herbeiführen und von einem gewissen Zeitpunkt an jede Partie zum Matt für die Maschine führen.

Nur ein besser aufgebautes, d.h. die Möglichkeiten des Schachspiels genauer berücksichtigendes Programm könnte diese Lage wieder verändern.
Ein Computer kann also immer nur das, was der Programmierer ihm zuvor an Regeln mitgeteilt hat. Das allerdings macht er dann so ungeheuer schnell, sauber und zuverlässig, dass der Mensch ihm darin nicht mehr gleichkommt:

Nur: Über sein Leistungsvermögen entscheidet ein Computer selbst nur bedingt.

Drei Begriffe tauchen immer wieder auf, wenn von Computern die Rede ist: hardware, software und Programm.
Im ersten Falle geht es um Fragen wie: Welche Ein- und Ausgabemöglichkeiten hat der Computer? Wie schnell kann er rechnen ? Wie viele Informationen sind im Rechner zu speichern? Wie groß ist der Computer ? Die Antworten darauf umfassen immer Informationen über die Gerätetechnik, die hardware.

Mindestens ebenso wichtig sind jedoch alle Fragen, die geeignet sind, die Nutzungsfähigkeit zu erkunden. Welche Programme werden vom Hersteller mitgeliefert, um eine schnelle Bedienung und umfassende Nutzung ohne großen Aufwand zu sichern ? Welche Möglichkeiten bestehen, um derartige Unterlagen zu schaffen?

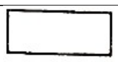
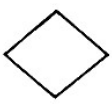
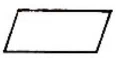
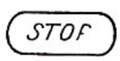
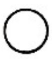
Dieser zweite Teil der Computeranlage, die sogenannte software, die »weiche Ware«, entscheidet letztlich darüber, in welchem Umfang die vielen Möglichkeiten des Computers nun auch genutzt werden können.

Schließlich muss dem Computer ein Programm vorliegen, durch das er für ihn verständliche Befehle erhält, die es ihm ermöglichen, ein Problem zu lösen. Diese Befehle werden dann stur ausgeführt, egal, ob sie zu einem richtigen oder falschen Ergebnis führen.
Ist ein Computer erst einmal so programmiert, das Datum auf der Gaststättenrechnung mit hinzuzurechnen, wird er das auch bei guten Freunden und selbst bei der Preiskontrolle tun. Solche Programme wollen wir etwas näher betrachten.

Ein Programm beinhaltet immer einen Algorithmus. Das ist ein Rechenverfahren, das in einem dem Computer verständlichen Kode angegeben wird. Den Algorithmus bildet eine Menge von Regeln zur Umformung von Zeichen (Zahlen), wobei nach jedem Teilschritt entschieden werden kann, ob das Verfahren abgebrochen wird oder welche Regel beim nächsten Schritt angewendet werden soll.

Liegt der Algorithmus fest, gibt es kein Ausbrechen mehr. Alles läuft nach strengen Gesetzen ab. Ein Algorithmus kann zur Lösung beliebig vieler Aufgaben eines Typs genutzt werden. Die Berechnung der Lebenstage an einem bestimmten Datum ist eine solche Routineaufgabe, wenn das Geburtsdatum feststeht und der Computer die Länge der Jahre kennt.

Die Elemente des Programmablaufplans werden im folgenden festgelegt. Für unsere Zwecke reichen fünf Sinnbilder aus:

Nr.	Sinnbild	Bedeutung
1		Operationen (allgemeine Darstellung einer Operation oder Handlung)
2		Verzweigung aufgrund einer Entscheidung
3		Darstellung einer Ein- oder einer Ausgabe
4		Anfang eines Programmablaufplans
		Ende eines Programmablaufplans
5		Konnektor

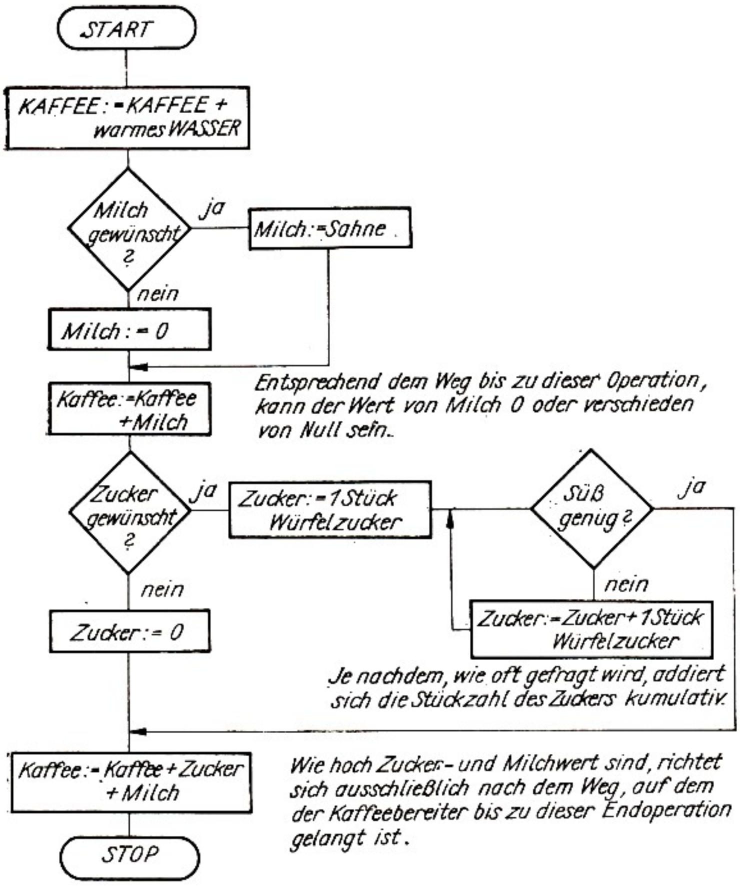
Einige Bemerkungen zu diesen Sinnbildern.
Zu 1: Im Unterschied zur Mathematik stehen in den Kästchen keine Gleichungen bekannter Art. Die hier auftretenden Gleichungen werden Plangleichungen genannt, d. h., dass zuerst die Operationen auf der rechten Seite ausgeführt werden und danach das Resultat der rechten Seite der Variablen auf der linken zugeordnet wird.
Hatte diese Variable vorher einen anderen Wert, so wird dieser durch den gerade ermittelten der rechten Seite überschrieben.

Beispiel:

$$N := A + 3{,}14 \cdot (B - C)$$

Der Wert von C wird von B subtrahiert, die Differenz mit 3,14 multipliziert und zum Wert von A addiert. Das Ergebnis wird unter der Bezeichnung N abgespeichert.

In den Kästchen dürfen alle Operationen auftreten, die der Rechner versteht. Ein Programmablaufplan für Menschen darf demzufolge in diesen Kästchen auch verbale Anweisungen enthalten, die für den Leser eindeutig verständlich sind.



Handlungsablauf: »Kaffeekochen«

Zu 2: Die Fragen, die zur Entscheidung stehen, müssen klare Alternativen enthalten. Es darf nur eine Antwort möglich sein, die entsprechend den Voraussetzungen »ja« oder »nein« lauten kann. Durch dieses Kästchen verzweigt sich ein Programmablaufplan.

Zu 3: Hier werden alle Eingaben von Daten und die Ausgabe der Ergebnisse aufgeschrieben.

Zu 5: Die Sinnbilder werden durch Flusslinien miteinander verbunden, die sich nach Möglichkeit nicht überschneiden sollen. Bei umfangreicheren Programmablaufplänen dienen Konnektoren der übersichtlichen Darstellung.

Nach dieser »weichen Ware« nun ein Kaffee! Wie sähe ein Programmablaufplan zur Kaffeezubereitung aus ? Für das Trinken des Kaffees geben wir keinen Programmablaufplan. Auch wenn die Vorbereitung darauf - wie hier dargestellt - routinemäßig abläuft, sollte das Trinken keine Routineaufgabe werden, sondern ein Genuss bleiben.

4.2 »Weiche Ware« für »hartes Gehirn« - Programmabläufe

Alles, was in unserer Umwelt nach logischen Regeln abläuft, lässt sich als Algorithmus mit klaren Anweisungen und eindeutigen Alternativfragen eines Programmablaufplans darstellen. Diese Darstellung ist übersichtlich und sichert in jedem Falle, dass das angestrebte Ziel durch Elementaroperationen und Alternativfragen erreicht wird. Die Operationen müssen nur logisch richtig und in der rechten Reihenfolge angeordnet sein.

Anhand von drei Märchen der Gebrüder Grimm wollen wir diese Feststellungen verdeutlichen und zugleich verschiedene Typen von Programmablaufplänen vorstellen.
Zu betonen ist dabei, was ein Programmablaufplan nicht kann: all das zu erfassen, was nicht streng logische Abfolge von Handlungen und Entscheidungen ist. Die Poesie der Märchen bleibt auf der Strecke; die Handlung überlebt.

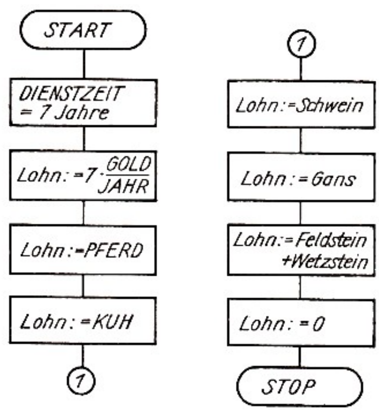
Die einfachste Art eines Programmablaufplans ist die mit linearer Struktur. In einem solchen Plan dürfen keine Fragen vorkommen, die den Weg zerteilen. Alle Anweisungen werden einmal und nur einmal durchlaufen.
So war einmal ein Hans, der seinem Herrn sieben Jahre treu gedient hatte und als Lohn von diesem einen Klumpen Gold bekam, so groß wie sein Kopf. Den Goldklumpen tauschte er gegen ein Pferd, wobei er den Besitzer wegen seines schlechten Tausches noch bemitleidete. Das Pferd war schwer beherrschbar, ein Bauer gab ihm eine Kuh dafür.

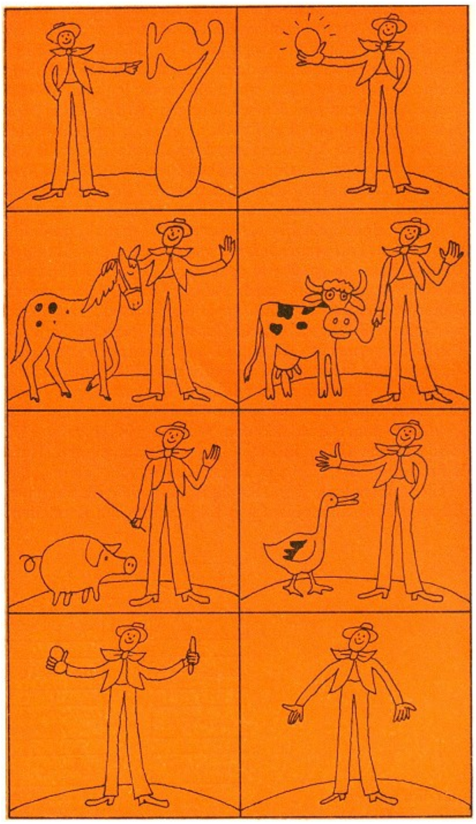
Diese vermochte Hans nicht zu melken; er vertauschte sie gegen ein Schwein, dieses dann mit Hilfe eines Tricks, der für die Handlung nicht interessiert, gegen eine Gans. Die Gans wird schließlich gegen einen Wetzstein und einen Feldstein zum Geradeklopfen von Nägeln eingetauscht.

Beide Steine fallen in einen tiefen Brunnen, und Hans kehrt unbeschwert heim zu seiner Mutter.
Diese Handlung des Märchens lässt sich durch einen linearen Programmablaufplan folgendermaßen darstellen:

Handlungsablauf: »Hans im Glück«

Eines geht in diesem Plan verloren: Hans ist immer glücklich.





Bei einem Programmablaufplan mit Entscheidungen verzweigt sich nach diesen der Weg.
Eine arme Holzfällerfamilie wohnte mit den Kindern Hans und Gretel an einem großen Wald. Um nicht verhungern zu müssen, wollte die Frau die Kinder in den Wald führen und dort verlassen. Mit Hilfe verstreuter Kieselsteine markierte Hans, der das Gespräch darüber belauscht hatte, den Rückweg.
Beim zweitenmal hatte Hans nur Brot zum Markieren des Weges, das von Vögeln aufgepickt wurde. Die Kinder gelangten zum Pfefferkuchenhaus einer Hexe, von dem sie aßen. Nachdem sie die Geräusche einmal auf den Wind schieben konnten, nahm die Hexe sie doch ins Haus.

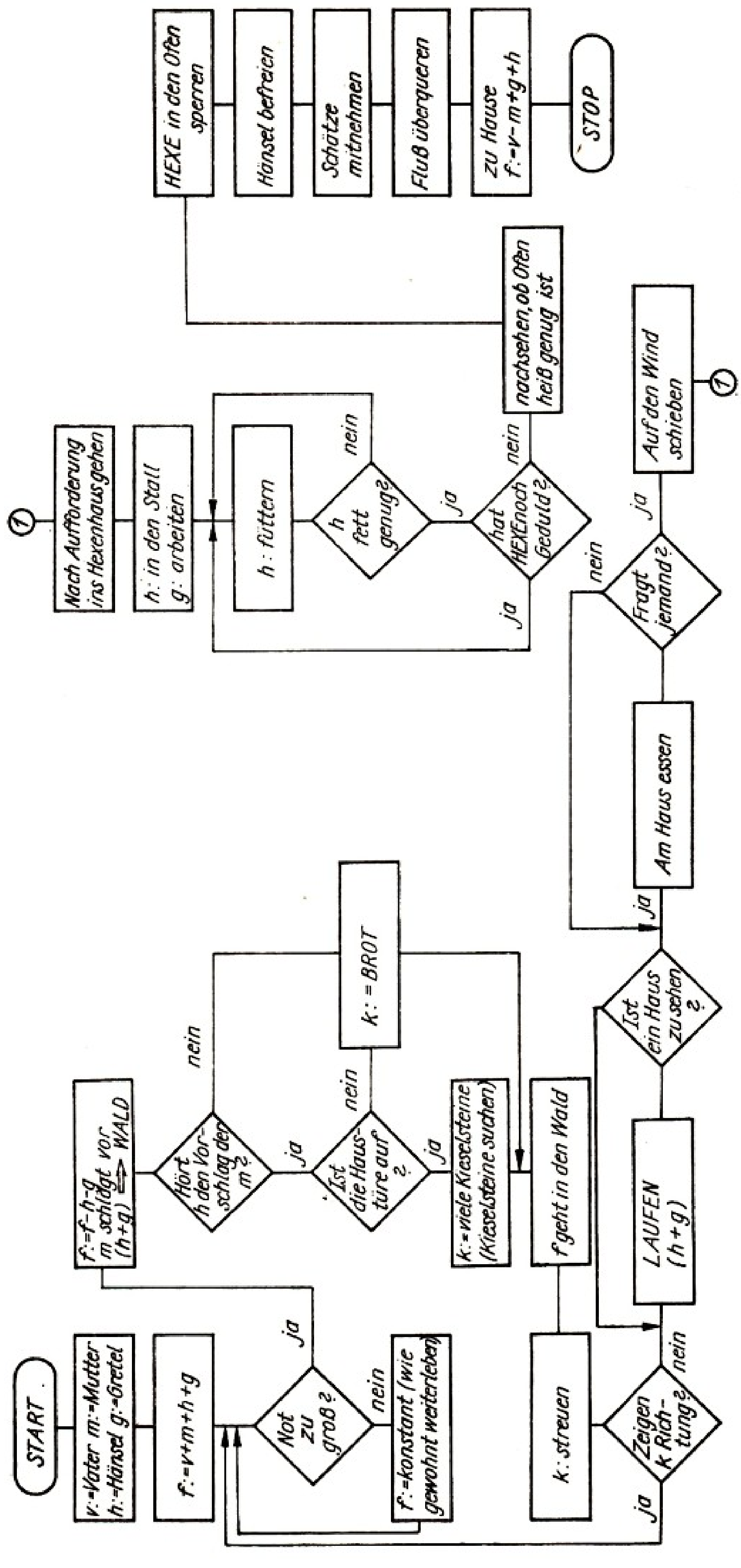
Zuerst war sie freundlich, dann sperrte sie Hans in einen Mastkäfig und beutete Gretel aus. Als sich das Mästen wegen Hänsels Trick mit dem Knochen, den die Hexe für einen Finger hielt, zu lange hinzog, beschloss diese, die Kinder zu fressen. Durch Gretel wurde die Hexe jedoch in den Ofen gestoßen und verbrannt.
Nach der Befreiung des Bruders nahmen die Kinder einige Schätze aus dem Hexenhaus, überquerten mit Hilfe einer Ente einen Fluss und kamen nach Hause, wo sie nach dem Tode der Mutter den Vater allein vorfanden.

Drittens schließlich gibt es zyklische Programmablaufpläne. Diese enthalten Entscheidungen, durch die gewisse Schleifen des Programms so oft durchlaufen werden, bis eine Abbruchbedingung erfüllt ist. Auch hierzu ein märchenhaftes

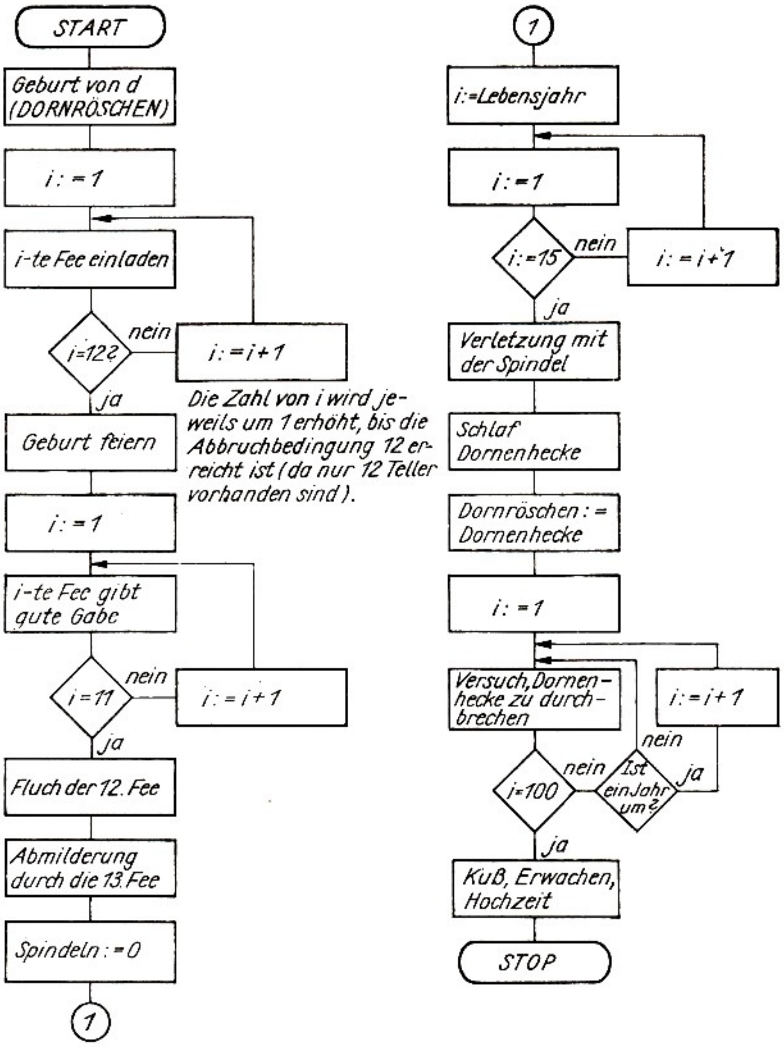
Beispiel:
Einem lange kinderlosen Ehepaar wird ein Mädchen geboren.
Die Zahl der goldenen Teller, die die Eltern besaßen, lag jedoch einen Wert unter der Zahl von weisen Frauen im Königreich. Dadurch wurde eine zur Feier der Geburt nicht eingeladen. Elf weise Frauen hatten der Tochter die schönsten Gaben geschenkt, als die nicht eingeladene Frau hereinkam und der Tochter voraussagte, dass sie sich im 15. Lebensjahr an einer Spindel tödlich verletzen werde.

Die letzte weise Frau konnte diesen Spruch nur noch in einen hundertjährigen Schlaf verwandeln. Trotz der Vorsorge des Vaters, der alle Spindeln vernichten ließ, stach sich die Tochter in einem versteckten Zimmer an einer Spindel und fiel ebenso wie alle anderen in den prophezeiten hundertjährigen Schlaf. Rings um das Schloss ihres Vaters wuchs eine undurchdringliche Dornenhecke, nach der die Schlafende Dornröschen genannt wurde.

Nachdem viele Versuche gescheitert waren, die Hecke zu durchdringen, gelang das nach hundert Jahren einem Königssohn, da die Zeit des Fluches um war. Mit einem Kuss weckte er Dornröschen und alle anderen Bewohner aus dem Schlaf. Kurz darauf wurde Hochzeit gefeiert.



Handlungsablauf: »Hänsel und Gretel«



Handlungsablauf: »Dornröschen«

Doch nun zu einem Algorithmus, der den Stand des Biorhythmus für einen Prognosetag berechnet, wenn Name und Geburtsdatum des Interessenten bekannt sind. Was folgt, sieht auf den ersten Blick komplizierter aus als der Programmablaufplan eines Grimmschen Märchens. Es vollzieht sich aber nach den gleichen logischen Regeln wie dort. Auch die verwendeten Sinnbilder sind keine anderen.

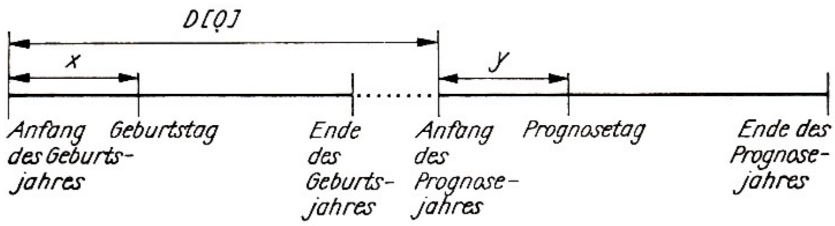
Wir folgen nur den neuen Anforderungen, die unser Ziel für einen logischen Programmablauf stellt, und ersetzen dabei die verbalen Anweisungen der Märchenprogramme durch formalisierte Anweisungen. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$B[0]$: Tag der Geburt	$C[0]$: Tag der Vorhersage
$B[1]$: Monat der Geburt	$C[1]$: Monat der Vorhersage
$B[2]$: Jahr der Geburt	$C[2]$: Jahr der Vorhersage
Z: Hilfsgröße	D: Lebensjahre
L: Lebenstage	

H: 0, wenn Geburtsjahr kein Schaltjahr ist 1, wenn Geburtsjahr ein Schaltjahr ist
I: 0, wenn Prognosejahr kein Schaltjahr ist 1, wenn Prognosejahr ein Schaltjahr ist
J: 1, wenn x berechnet wird 0, wenn y berechnet wird
E: Wert des physischen Zyklus
F: Wert des emotionalen Zyklus

G: Wert des geistigen Zyklus.

Das Verfahren zur Ermittlung der Lebenstage L lässt sich wie folgt veranschaulichen:



Schema zur Berechnung der Lebenstage

In einer Formel heißt das: $L = D[0] - x + y$ (Schaltjahre einbeziehen!).
Eine letzte Vorbemerkung: Eckige Klammern um einen Bruch bedeuten eine "Ganzzahldivision", d.h., es interessiert nur die Zahl vor dem Komma.

Beipiele: $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$; $\left[\frac{100}{51}\right] = 1$

Auf den folgenden Seiten geben wir zuerst links den formalisierten Programmablaufplan und rechts einige verbale Erläuterungen, die nicht eigentlich zum Plan gehören und einem Computer natürlich nicht übermittelt werden könnten und müssten.
Dabei haben wir uns entschlossen zu vergessen, dass die Jahre 1500, 1700, 1800, 1900, 2100 usw. keine Schaltjahre sind; sonst würden wir unseren Plan komplizierter machen, als es uns jetzt nötig erscheint. Das Abarbeiten dieses Plans durch den Computer wird weit schneller als sein Aufstellen erfolgen und ist beliebig wiederholbar. Biorhythmen sehr vieler Beispielpersonen lassen sich so ohne großen Aufwand berechnen.

Wir wollen unseren Programmablaufplan dann mit dem Beispiel von B. Müller aus dem Abschnitt über Beweisverfahren überprüfen. Alle Operationen werden genauso durchgeführt, wie in dem allgemeinen Plan festgelegt.

Hinweise:
(1) Von den Lebenstagen wird entsprechend der Formel x abgezogen und 1 Tag (Geburtstag) addiert.

(2) Zur Berechnung von y müsste der gesamte Plan ab $J := 1$ (Nr. 20) nochmals aufgeschrieben werden. Um Schreibarbeit zu sparen, wird dieser Teil des Planes ein zweites Mal zur Berechnung von y genutzt, da sich die Verfahrensschritte nicht ändern. Nur einige Festlegungen sind auf die neue Situation umzuschreiben.

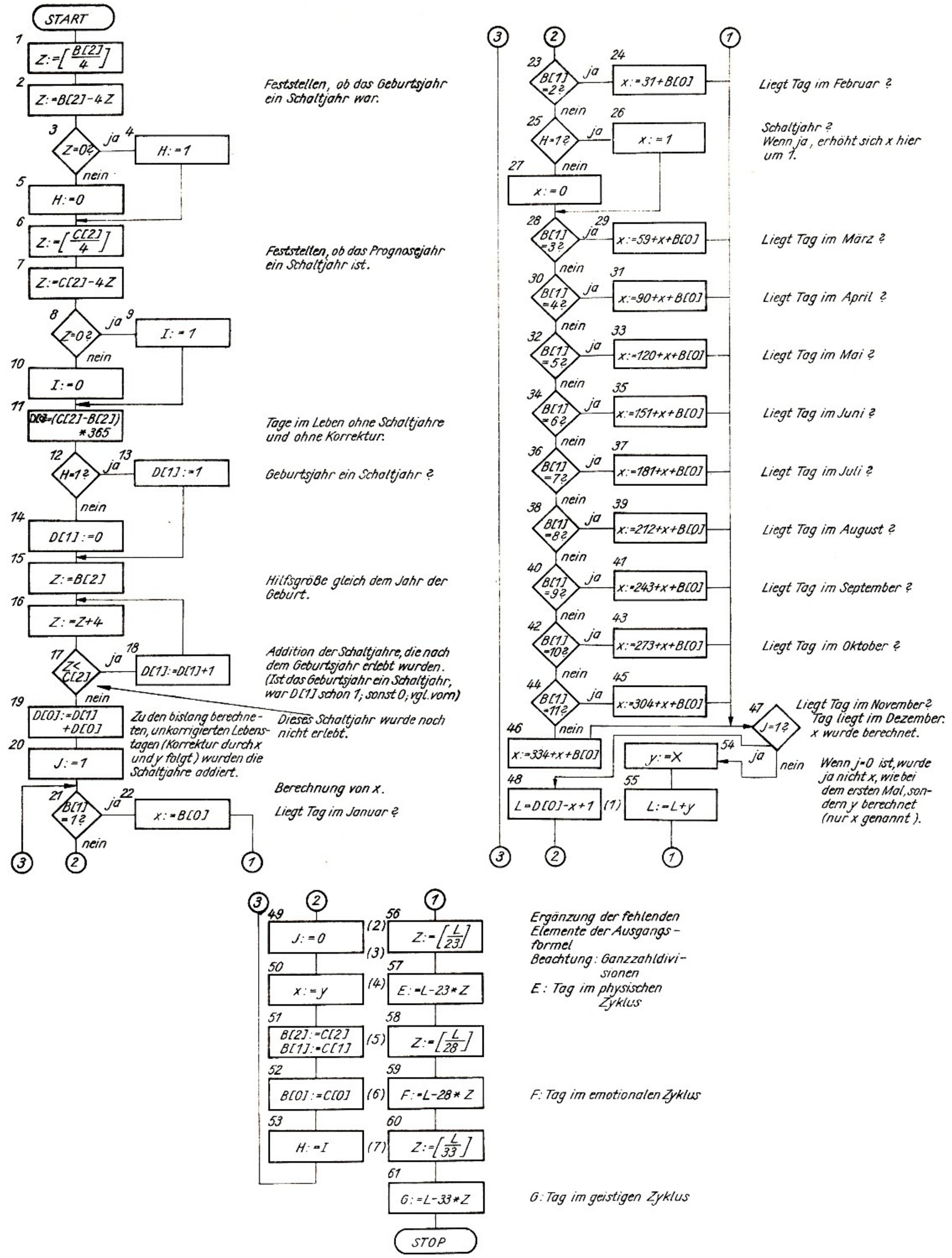
(3) Es wird y berechnet.

(4) Im Programmablauf wird überall statt x der Wert von y berechnet.

(5) Statt des Geburtsjahres und -monats wird Prognosejahr und -monat eingesetzt.

(6) Statt des Geburtstages wird Prognosetag verwendet.

(7) Eventuell Schalttag des Prognosejahres statt Schalttag des Geburtsjahres.



Berechnung der Lebenstage

B. Müller wurde am 3. 7. 1942 geboren, und uns interessiert sein Biorhythmusstand am 4. 9. 1980. Also:

$B[0] := 3$; $C[0] := 4$; $B[1] := 7$; $C[1] := 9$; $B[2] := 1942$; $C[2] := 1980$;

Nr. (von links nach rechts)

1 $Z := \left[\frac{1942}{4}\right] = 485$	2 $Z := 1942 - 485 \cdot 4 = 2$
3 nein	5 $H := 0$
6 $Z := \left[\frac{1980}{4}\right] = 495$	7 $Z := 1980 - 495 \cdot 4 = 0$
8 ja	9 $I := 1$
11 $D[0] := (1980 - 1942) \cdot 365 = 13870$	12 nein
14 $D[1] := 0$	15 $Z := 1942$
16 $Z := 1942 + 4 = 1946$	17 $1946 < 1980$ ja
18 $D[1]. = 0 + 1 = 1$	16 $Z := 1950 + 4 = 1954$
17 $1954 < 1980$ ja	18 $D[1] := 2 + 1 = 3$
16 $Z := 1954 + 4 = 1958$	17 $1958 < 1980$ ja
18 $D[1] := 3 + 1 = 4$	16 $Z := 1958 + 4 = 1962$
17 $1962 < 1980$ ja	18 $D[1] := 4 + 1 = 5$
16 $Z := 1962 + 4 = 1966$	17 $1966 < 1980$ ja
18 $D[1] := 5 + 1 = 6$	16 $Z := 1966 + 4 = 1970$
17 $1970 < 1980$ ja	18 $D[1] := 6 + 1 = 7$
16 $Z := 1970 + 4 = 1974$	17 $1974 < 1980$ ja
18 $D[1] := 7 + 1 = 8$	16 $Z := 1974 + 4 = 1978$
17 $1978 < 1980$ ja	18 $D[1] := 8 + 1 = 9$
16 $Z := 1978 + 4 = 1982$	17 $1982 < 1980$ nein
19 $D[0] := 9 + 13870 = 13879$	20 $J := 1$
21 $7 = 1$ nein	23 $7 = 2$ nein
25 $0 = 1$ nein	27 $x := 0$
28 $7 = 3$ nein	30 $7 = 4$ nein
32 $7 = 5$ nein	34 $7 = 6$ nein
36 $7 = 7$ ja	37 $x = 181 + 0 + 3 = 184$
47 $1 = 1$ ja	48 $L := 13879 - 184 + 1 = 13696$
49 $J := 0$	50 $x := y$
51 $B[1] := C[1] := 9$	52 $B[1] := C[1] := 4$
53 $H := I := 1$	21 $9 = 1$ nein
23 $9 = 3$ nein	25 $1 = 1$ ja
26 $x = 1$	28 $9 = 3$ nein
30 $9 = 4$ nein	32 $9 = 5$ nein
34 $9 = 6$ nein	36 $9 = 7$ nein
38 $9 = 8$ nein	40 $9 = 9$ ja
41 $x := 243 + 1 + 4 = 248$	47 $0 = 1$ nein
54 $y := 248$	55 $L := 13696 + 248 = 13944$
56 $Z := 606$	57 $E := 6$
58 $Z := 498$	59 $F := 0$
60 $Z := 422$	61 $G := 18$

Vergleichen wir die Ergebnisse unter den Nummern 56 bis 61 mit den oben ohne Computer errechneten, so stellen wir Übereinstimmung fest. Unser Programm scheint also brauchbar zu sein. (Bewiesen ist diese Brauchbarkeit durch ein einzelnes Beispiel natürlich nicht, wie wir bereits gesehen haben; wir verzichten aber an dieser Stelle auf strikte Beweisführung.)

Der Nutzen des Computers muss sich aber nicht in diesen Rechenoperationen erschöpfen. Ihm kann noch mehr abverlangt werden. Dazu muss ihm jedoch auch mehr eingegeben werden.

4.3 Biorhythmen und Sterbetage

Unser bisheriges Programm liefert uns, wie gezeigt, die Biorhythmuswerte für alle drei Zyklen. Auch die verbale Interpretation dieser Zahlen lässt sich durch den Computer vornehmen.
Dazu müssen ihm über eine Lochbandeingabe die jeweils angemessenen Interpretationen für bestimmte Zahlenwerte mitgeteilt werden. Diese Texte haben wir bewusst knapp gehalten, um die Ausgabezeit mit der Schreibmaschine zu senken. Prinzipiell sind aber auch wesentlich längere Texte denkbar.

Entsprechend dem jeweiligen Wert von E, F und G werden die Texte dann vom Computer ausgedruckt. Welcher Text in Frage kommt, wird durch Tests der Werte E, F, G bestimmt. So haben wir z.B. festgelegt, dass der Text für $E = 0$ lautet:

Kritischer Tag, da -Phase in +Phase übergeht. Das ist gut.
Der Text für $E = 11$ und $E = 12$ heißt:
Heute ist ein kritischer Tag, da die +Phase in eine -Phase übergeht.
Zusätzlich wird für $E = 0$, $E = 11$ und $E = 12$ bestimmt: Vorsicht ist geboten, da die physische Leistungskurve eine entscheidende Bedeutung hat.

Für $E > 12$ wird formuliert:
Physisch befinden Sie sich in einer -Phase. Spannkraft, Ausdauer, Konzentration, Einsatzfähigkeit sind mehr oder weniger stark eingeschränkt.
Zusätzlich, wenn $E = 17$ oder $E = 18$.
Heute ist das absolute Minimum erreicht. Fehlschläge sind möglich. Zum Trost: Ab heute steigt die physische Leistungsfähigkeit wieder an.

Zusätzlich, wenn $E > 18$:
Die -Phase nimmt an Intensität ab!
Zusätzlich, wenn $12 < E < 17$:
Die Intensität der -Phase nimmt weiter zu.

In ähnlicher Weise wurden Texte für die positive Phase des physischen Zyklus sowie für den emotionalen und den geistigen Zyklus formuliert und dem Computer mitgeteilt.
Vor Beginn der Berechnung der Lebensdaten wird schließlich ein Tabellenkopf eingegeben, der den Namen, Geburtstag und Prognosetag enthält. Damit sind alle Elemente vorhanden, um verbale Aussagen zum Biorhythmusstand durch den Computer zu erhalten. Im Falle von B. Müller, mit dem wir uns eben beschäftigt haben, gleicht die Computerausgabe der Abbildung.

Computerprognose am 4. 9. 1980
Name: B. Mueller
Geburtsdatum: 3. 7. 1942
13944 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
+Phase, die hohe Spannkraft, Ausdauer, Einsatzkraft und intensive, fehlerfreie Taetigkeit bietet.
Heute ist das absolute Maximum erreicht. Es muss einfach alles gelingen!
Emotionales Befinden:
Fuer Sie ist heute in emotionaler Hinsicht ein kritischer Tag. Die -Periode geht in eine +Periode ueber. Ihr Gefuehlsleben stellt sich heute um.
Geistige Leistungsfaehigkeit:

Ihre geistige Leistungskurve befindet sich zur Zeit in einem -Bereich. Die Lernfaehigkeit ist u.a. in dieser Zeit etwas Verringert. Die negative Phase verstaerkt sich.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Wie man sieht, lässt der Computer keine wohlwollenden Interpretationen mehr zu, die etwa heißen: »Dicht vor einem kritischen Tag.«
Er hat genaue Vorgaben und hält sich strikt daran. Mit den standardisierten Textteilen liefert er entsprechend den Zahlenwerten für E, F und G objektivierte Aussagen. Wir vermögen durch ihn also sehr viele Beispiele zu erfassen und sie einheitlich auszuwerten.

Erinnern wir uns der historischen Persönlichkeiten, von denen schon die Rede war. Wir stellten dort eine gewisse Nähe zu kritischen Tagen fest, als wir die Todestage dieser Persönlichkeiten betrachteten. Die Aussagen des Computers zeigen die Abbildungen. Diese Computerausdrucke sind doch - zumindest teilweise - eindrucksvoll.

Computerprognose am 17. 2. 1856
Name: Heine
Geburtsdatums 13. 12. 1797
21251 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
Physisch befinden Sie sich in einer Spannkraft, Ausdauer, Konzentration, Finsatzfaehigkeit sind mehr oder weniger stark eingeschraenkt Die -Phase nimmt an Intensitaet ab!
Emotionales Befinden:
Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt. Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte Laune, weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Die traurige Stimmung laesst nach.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
Ihre geistige Leistungskurve befindet sich zur Zeit in einem -Bereich. Die Lernfaehigkeit ist u.a. in dieser Zeit etwas verringert. Die negative Phase schwaecht sich in der naechsten Zeit ab.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Bei Heine befinden sich alle drei Zyklen in einer negativen Phase. Bei Schubert fällt der kritische Tag der geistigen Kurve besonders auf, daneben auch die negative Phase des emotionalen Befindens. Dass Wallenstein am Tage seiner Ermordung im tiefsten Punkt seiner Stimmungskurve angelangt war und physische Fehlschläge leicht möglich erschienen - sollte das Zufall sein?

Computerprognose am 19. 11. 1828
Name: Schubert
Geburtsdatum: 31. 1. 1797
11616 Lebenstage
Physische Leitstungsfaehigkeit:

+Phase, die hohe Spannkraft, Ausdauer, Einsatzkraft und intensive, fehlerfreie Taetigkeit bietet, Intensitaet nimmt weiter zu.
Emotionales Befinden:
Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt. Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte Laune, weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Die traurige Stimmung laesst nach.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
Eine -Phase wird durch eine positive abgeloest. Die geistige Leistungsfaehigkeit ist in einem kritischen Punkt angelangt.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Und wie schwer es Napoleon bei Waterloo hatte, verdeutlicht die Computerprognose aus bisher nicht bedachter Sicht: Sein Gefühlsleben stellte sich um, und im Hinblick auf den kritischen Tag in seiner physischen Leistungsfähigkeit war ihm Vorsicht geboten.

Zugleich war aus dem Stand der geistigen Kurve zu folgern, dass er sich an alle Probleme heranwagen sollte. Könnten diese Widersprüche, ohne dass der Kaiser sich dessen bewusst war, den Ausschlag gegeben haben für jene Niederlage, der er die lebenslange Verbannung nach St. Helena zu verdanken hatte?

Solche Beispiele sind teilweise frappierend, aber wir wollen ehrlich sein: Es kostete einige Mühe, sie zu finden. Allein, sie beweisen, wir wir inzwischen wissen, nichts. Und klar ist auch, dass ein Zusammenfall kritischer und widersprüchlicher Momente wie etwa im Falle Napoleons nicht mit völliger Sicherheit das Stattfinden einer Schlacht und deren Ausgang oder in den anderen Fällen den Tod vorausbestimmen, sondern bestenfalls in hohem Maße wahrscheinlich machen kann.

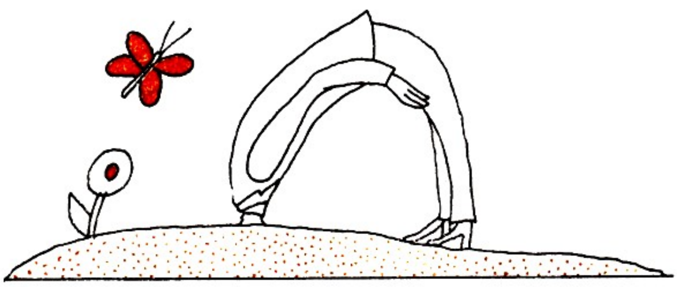
Computerprognose am 25. 2. 1634
Name: Wallenstein
Geburtsdatum: 24. 9. 1583
18417 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
Physisch befinden Sie sich in einer -Phase. Spannkraft, Ausdauer, Konzentration, Einsatzfaehigkeit sind mehr oder weniger stark eingeschraenkt. Heute ist das absolute Minimum erreicht. Fehlschlaege sind leicht moeglich. Zum Trost: Ab heute steigt die physische Leistungsfaehigkeit wieder an.
Emotionales Befinden:
Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt. Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte Laune, weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Im tiefsten Punkt Ihrer Stimmungskurve angelangt! Trost: Die Stimmung bessert sich jetzt zunehmend.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
+Bereich - die kompliziertesten Zusammenhaenge werden sicher verstanden und eingepraegt. Wagen Sie sich an alle anstehenden Probleme! Die positive Phase verstaerkt sich !
Erklaerung:
-Phase = negative Phase

+Phase = positive Phase

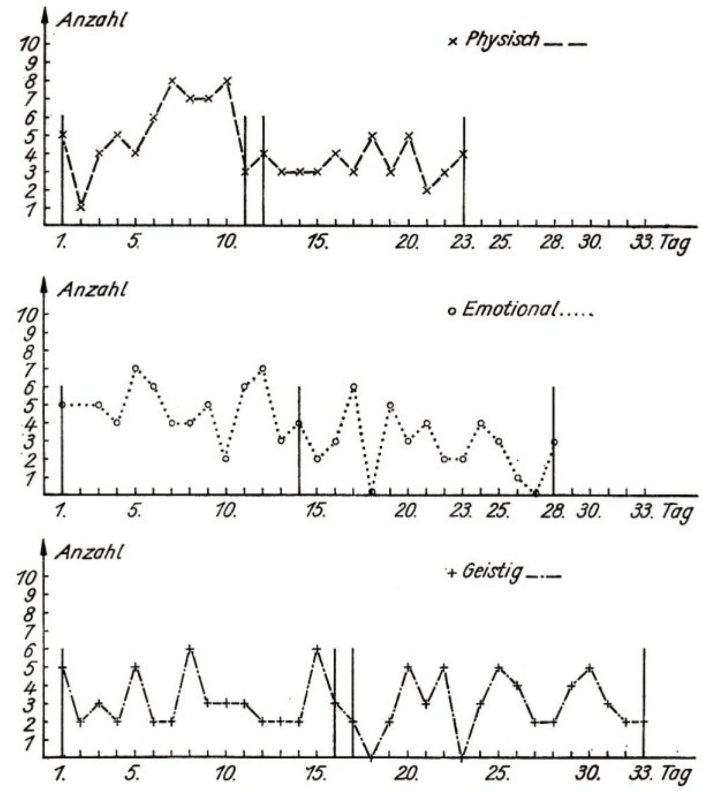
Computerprognose am 18.6. 1815
Name: Napoleon I Waterloo
Geburtsdatum: 15. 8. 1769
16744 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
Kritischer Tag, da -Phase in +Phase uebergeht. Das ist gut! Vorsicht ist geboten, da die physische Leistungskurve eine entscheidende Bedeutung hat.
Emotionales Befinden:
Fuer Sie ist heute in emotionaler Hinsicht ein kritischer Tag. Die -Periode geht in eine +Periode ueber. Ihr Gefuehlsleben stellt sich heute um.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
+Bereich - die kompliziertesten Zusammenhaenge werden sicher verstanden und eingepraegt. Wagen Sie sich an alle anstehenden Probleme! Intensitaet wird sich abschwaechen aber weiter gut bleiben.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Beide Überlegungen führen zu der Schlussfolgerung, dass die Aussagebasis vergrößert werden muss.
Dazu haben wir wieder den Computer genutzt, in einem ersten Schritt die Namen von hundert historischen Persönlichkeiten auf Lose geschrieben und mit Hilfe unseres Programmablaufplans die Biorhythmuswerte von zwölf ausgelosten Persönlichkeiten am jeweiligen Sterbetag analysiert.
Wir geben hier nicht die verbalen Ausgaben wieder, sondern fassen nur in einer Tabelle die Werte für E, F, G zusammen.

Name	E	F	G	Name	E	F	G
Haydn	10	17	3	Luther	22	10	9
Möricke	8	21	31	Gauß	19	4	11
Mozart	10	21	29	Leibniz	14	1	31
Hegel	4	16	19	Händel	8	3	19
Liebig	14	8	2	Hölderlin	17	3	13
Herder	23	21	17	Arndt	17	7	6



Man könnte hier schon sagen: Den Kopf muss in den Sand stecken, wer hiernach noch eine Lanze für die Biorhythmen bricht. Aber wir wollen die Untersuchung noch nicht beenden; denn Skepsis widerlegt natürlich noch keine Theorie.



Häufigkeit des Zyklusstandes

Vom 4. 3. bis 29. 4. 1980 wurden aus der Zeitung hundert Todesanzeigen herausgeschrieben, die Geburts- und Todestag angaben. Die Auswertung mittels Computer führte auf die in der Abbildung enthaltenen Werte für die Häufigkeit des Zyklusstandes an den einzelnen Tagen.

Ohne den Einsatz des Computers wäre diese Berechnung mit sehr hohem Aufwand verbunden gewesen. So aber ist schon nach kurzer Zeit klar, dass in keinem Falle an den sogenannten kritischen Tagen der jeweiligen Zyklen irgendwelche besonders starken Häufungen von Todesfällen erkennbar sind. Es entstehen nichts als Zufallszahlen.

Um die Untersuchung nicht nur auf Todestage zu beschränken, wollen wir uns schließlich noch einmal an die Unfälle erinnern, von denen die Rede war.
Für zwei der Beteiligten am Unfall mit dem Gabelstapler, für den mit dem Auto verunglückten K. und für den Produktionsbereichsleiter P., der beim Umsetzen einer Exzenterpresse tödlich verunglückte, druckt der Computer die unten wiedergegebenen Ausgaben.

Computerprognose am 31. 8. 1973
Name: U.
Geburtsdatum: 20. 7. 1928
16479 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
Heute ist ein kritischer Tag, da die +Phase in eine -Phase uebergeht. Vorsieht ist geboten, da die physische Leistungskurve 'eine entscheidende Bedeutung hat.
Emotionales Befinden:
Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt. Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte Laune, weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Ein weiterer Stimmungsabfall wird sich einstellen.

Geistige Leistungsfaehigkeit:
+Bereich -die kompliziertesten Zusammenhaenge werden sicher verstanden und eingepraegt. Wagen Sie sich an alle anstehenden Probleme! Intensitaet wird sich abschwaechen aber weiter gut bleiben.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Computerprognose am 31. 8. 1973
Names W.
Geburtsdatum: 8. 4. 1940
12199 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
+Phase, die hohe Spannkraft, Ausdauer, Einsatzkraft und intensive, fehlerfreie Taetigkeit bietet. Die +Phase nimmt wieder ab.
Emotionales Befinden:
Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt. Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte Laune, weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Ein weiterer Stimmungsabfall wird sich einstellen.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
Ihre geistige Leistungskurve befindet sich zur Zeit in einem -Bereich. Die Lernfaehigkeit ist u.a. in dieser Zeit etwas verringert, Die negative Phase verstaerkt sich.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Weitere willkürlich ausgewählte Beispiele aus den Unterlagen einer Arbeitsschutzinspektion zeigen, dass der Fall des Kollegen P., bei dem alle Biorhythmuswerte einen kritischen Punkt erreicht hatten, ein seltener Zufall war. Bei sechs schwer Verunglückten ergaben sich folgende Werte:

	E	F	G
A	2	19	10
B	18	17	20
C	7	18	21
D	5	4	6
E	9	19	9
F	22	5	22

Computerprognose am 17. 1. 1978
Name: K.
Geburtsdatum: 30. 8. 1943
12559 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit
+Phase,die hohe Spannkraft, Ausdauer, Einsatzkratt und intensive, fehlerfreie Taetigkeit bietet. Intensitaet nimmt weiter zu.
Emotionales Befinden:

Ihr derzeitiges Befinden ist in einer negativen Phase angelangt.Pessimismus ist die vorherrschende Stimmung. Schlechte weniger kontaktfreudig als sonst, sogar etwas schuechtern ist die Folge. Ein weiterer Stimmungsabfall wird sich einstellen.
Geistige Leistungsfaehigkeit: Ihre geistige Leistungskurve befindet sich zur Zeit in einem -Bereich. Die Lernfaehigkeit ist u.a. in dieser Zeit etwas verringert. Die negative Phase verstaerkt sich.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Computerprognose am 13. 10. 1978
Name: P.
Geburtsdatum: 12. 11. 1943
12754 Lebenstage
Physische Leistungsfaehigkeit:
Heute ist ein kritischer Tag, da die +Phase in eine -Phase uebergeht. Vorsicht ist geboten, da die physische Leistungskurve eine entscheidende Bedeutung hat.
Emotionales Befinden:
Heute ist ein kritischer Tag, da die +Phase in eine -Phase uebergeht.
Geistige Leistungsfaehigkeit:
Ein +Phase wird durch eine negative abgeloest. Die geistige Leistungsfaehigkeit ist in einem kritischen Punkt angelangt.
Erklaerung:
-Phase = negative Phase
+Phase = positive Phase

Ebenfalls rein zufällig (durch Auslosen) wurden zum Abschluss noch zehn Verkehrsunfälle herausgegriffen, und der Stand des Biorhythmus bei den Verursachern wurde berechnet:

	E	F	G	Unfallursache
1	19	26	1	überhöhte Geschwindigkeit
2	8	27	7	Fahren unter Alkohol, Nichtbeachtung der Vorfahrt
3	8	26	25	falsches Überqueren der Fahrbahn
4	20	20	28	unangemessene Geschwindigkeit
5	9	25	20	Nichtbeachten der Fahrbahnverhältnisse
6	19	4	7	Nichtbeachten einer Lichtsignalanlage
7	20	12	3	mangelnde Vorsicht
8	8	16	13	mangelnde Vorsicht
9	5	18	16	Nichtgewähren der Vorfahrt
10	12	1	8	Nichtbeachten der Fahrbahnverhältnisse

Nach diesen für die Theorie der Biorhythmen direkt niederschmetternden Ergebnissen wäre fast die Frage zu untersuchen, warum Unfälle in der Mehrzahl zu Zeiten passieren, die vom Biorhythmus her als stabil bezeichnet werden müssen.

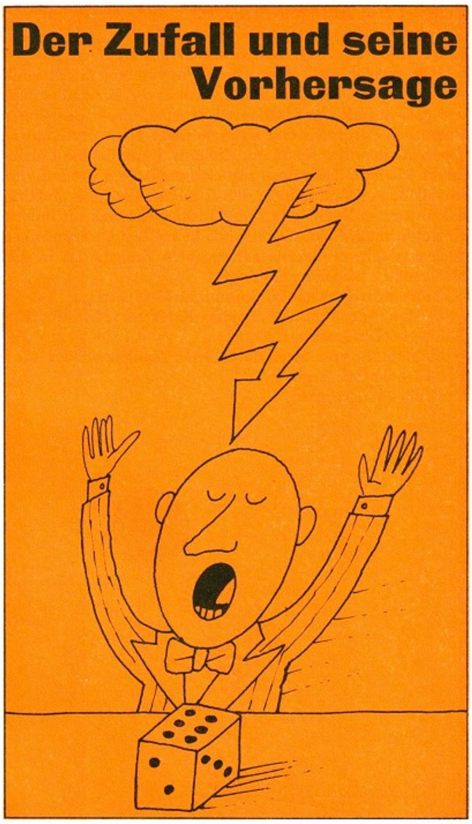
Blicke in die Zukunft - so dürfte nach diesen Beispielen klar sein - sind vom Biorhythmus nicht zu erwarten. Zu befürchten ist von seinem Einfluss nichts, zu erhoffen ebenso wenig.

Und ob er sich als Gesellschaftsspiel eignet ? Der Aufwand ist hoch (wer hat schon einen

Computer zu Hause ?), die Trefferquote gering - die freundliche Gutgläubigkeit von Partygästen wäre damit wahrscheinlich überbeansprucht.

Aber die Begriffe, die jetzt ständig mitschwangen und unseren Zweifel am Nutzen des Biorhythmus begründen halfen - Zufall, Wahrscheinlichkeit, Prognose -, sollen uns noch eine Weile beschäftigen. Es sind Begriffe aus der Mathematik.

5 Der Zufall und seine Vorhersage



5.1 Zufällige und bestimmte Ereignisse

Ein Kind wirft einen Ball in die Luft und fängt ihn geschickt wieder auf. Wer würde da von einem Ereignis sprechen? Vielleicht das Kind, wenn es das Fangen gerade erst gelernt hat.
Der Mathematiker ist in dieser Beziehung wesentlich anspruchsloser als viele Beobachter des Kinderspiels. Er nennt es schon ein Ereignis, wenn der Ball überhaupt wieder auf die Erde zurückkommt. Sein Freund, der Physiker, sagt ihm jedoch, dass damit ein Ereignis eintritt, das unter den Bedingungen der Erdanziehungskraft immer eintreten muss. Solche Ereignisse kennt der Mathematiker auch aus seinem Gebiet.

Ein sicheres Ereignis ist in der Mathematik beispielsweise, dass
- in einem Dreieck die Winkelsumme 180° beträgt,
- die Menge der Punkte auf einem Kreis vom Mittelpunkt den gleichen Abstand hat,
- die Summe von zwei natürlichen Zahlen wieder eine natürliche Zahl ergibt

und vieles andere mehr. Sichere Ereignisse aus der Physik sind, dass

- jeder Stoff fest wird, wenn die Temperatur hinreichend gesenkt wird,
- durch jede Kraft eine gleich große Gegenkraft entsteht,
- durch Reibung Wärme entsteht.

So hat jedes Wissenschaftsgebiet seine sicheren Ereignisse. Der Gegensatz zu einem sicheren Ereignis ist das Unmögliche, also ein Ereignis, das unter gegebenen Bedingungen niemals eintreten kann. Der Ball des Kindes wird niemals als Erdsatellit in eine Umlaufbahn um die Erde einschwenken.
Es ist ausgeschlossen, dass im Urlaub der Sonnenbrand jemanden peinigt, der sich der UV-Strahlung nicht ausgesetzt hat.

Ein sicheres Ereignis ist, dass ein normaler Würfel die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 anzeigt. Unmöglich ist bei einem geprüften Würfel die Augenzahl 2,5. Doch welche der Zahlen von 1 bis 6 im konkreten Falle angezeigt wird, ist keinesfalls sicher. Ereignisse, die so zwischen dem Unmöglichen und dem Sicheren liegen, zwar möglich, aber nicht sicher sind, werden zufällige Ereignisse genannt.

Kehren wir Mathematik und Naturwissenschaft den Rücken und schauen in den uns umgebenden Alltag, so finden wir in der Mehrzahl zufällige Ereignisse. Das Wetter am morgigen Tag ist ein zufälliges Ereignis, auch wenn der Wetterbericht versichert hat, dass es schön wird.
Dass sich ein Paar an der Normaluhr zur verabredeten Zeit trifft, ist Zufall, nicht nur, wenn der weibliche Teil gesagt hat, dass er vielleicht zum Rendezvous kommt.

Ein kritischer Tag des Biorhythmus kann natürlich auch zufällig ein kritischer Tag im Leben sein. Genausowenig kann man es dem Astrologen verübeln, dass er aus den vielen Horoskopen ein zufällig zutreffendes herausgreift und damit für seine Dienste wirbt.

Auch das Ergebnis eines Fußballspiels ist ein Ereignis, dessen Ausgang nur für manche Fans bestimmt ist. Trotzdem gehen sie zum Spiel und werden mitunter im Stadion davon überzeugt, dass doch der Zufall mitgespielt hat. Für echte Fanatiker hat der Zufall allerdings einen Namen, der mit dem des Schieds- oder Linienrichters identisch ist.

Doch der Zufall hat verschiedene Namen und unterschiedliche Gesichter. Wir unterscheiden sie im allgemeinen nach freundlichen und unfreundlichen.

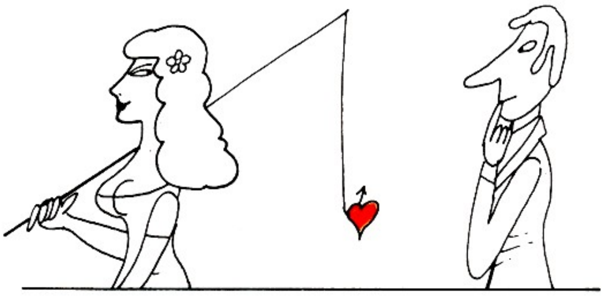
Zufällige Ereignisse haben jedoch noch einen weiteren Unterscheidungsgesichtspunkt. Sie sind nicht nur freundlich oder unfreundlich für den Betroffenen, sondern auch mehr oder weniger möglich.
Einen Arbeitskollegen in einer weit vom Arbeitsort gelegenen Stadt zufällig zu treffen, ist zwar nicht unmöglich, wohl aber weniger möglich als dasselbe Ereignis am Arbeitsort.

Der Zufall mischt in allen unseren Lebensbereichen tüchtig mit. Gefangen und unter Kontrolle gebracht, haben ihn weder Horoskope noch Biorhythmen. Beide können aus keinem zufälligen Ereignis unseres Lebens (Gesundheit, Erfolg, Stimmung) ein sicheres machen.

Sicher kann nur gesagt werden, wie viele Tage ein Mensch bis zu einem Tag gelebt haben wird. Ob er diesen Tag erlebt oder wie er ihn erlebt, darüber gibt auch ein Computer keine Auskunft.

Dazu sind ihm die Regeln und Bedingungen eines bestimmten menschlichen Lebens zu wenig bekannt. Das menschliche Leben läuft nach und mit einer Fülle von zufälligen Ereignissen ab, die mit mehr oder weniger großen Chancen für das Eintreffen ausgestattet sind.
Das heißt jedoch nicht, dass es keine Möglichkeiten gibt, die Chancen für das Eintreffen eines gewünschten Ereignisses zu heben, die eines nichtgewünschten zu senken.

Um nette Menschen kennenzulernen, muss ich sie suchen. Um das Krankheitsrisiko zu mindern, muss ich gesund leben. Die Existenz des Zufalls behindert die Aktivität der Menschen nicht. »Zufall regiert überall: lass immer die Angel nur schweben! Wo du am wenigsten denkst, schwimmt in der Strömung ein Fisch !«



So rät Ovid in seiner »Liebeskunst« allen Frauen, bewusst den Zufall zu nutzen.

Auch ein Hauptgewinn oder der Verlust des Einsatzes beim Lottospiel sind zufällige Ereignisse, die in Abhängigkeit von Spielsystem ungleiche Chancen für das Eintreffen haben. Können diese Chancen gemessen werden?
Diese Frage untersucht ein Teilgebiet der Mathematik, das Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt wird. Mit ihr beschäftigen sich die nächsten Abschnitte.

5.2 Wahrscheinlichkeit und Vorhersage

Es ist durchaus ein zufälliges Ereignis, dass ein auf 5.00 Uhr gestellter Wecker auch wirklich klingelt. Zwar besitzt dieses Ereignis eine große Chance oder Wahrscheinlichkeit des Eintretens, doch kann es dem glücklichen Schläfer auch passieren, dass der Wecker seine Dienste gerade an dem Tag versagt, wo der Schlaf besonders tief ist.

Im »Großen Vollständigen Universal Lexikon Aller Wissenschaften und Künste, Welche bisher durch menschlichen Verstand und Witz erfunden und verbessert worden« - wir erinnern uns an dieses von Johann Heinrich Zedler im 18. Jahrhundert verlegte monumentale Werk - ist im »Zwey und Funfzigsten Band« (1747) folgende Bestimmung zu finden:

»Wahrscheinlichkeit ist eine Möglichkeit, deren Würklichkeit, in Ansetzung ihrer durchgängigen

Übereinstimmung mit den in die Sinne fallenden Umständen des Objektes, zu vermuthen ist. Oder, sie ist die Wahrheit, die nicht nur durch unleugbare Empfindungen der Sinne erkennet noch aus dernselben unumstößlich geschlossen werden kann, sondern anfänglich nur als eine Möglichkeit supponiert wird, welche jedoch nachgebends, aus dem Grunde ihrer Übereinstimmung mit alle dem, was wir, durch die Sinne, an dem Objekte gewahr werden, vor würklich oder wahr gehalten werden verdient, jedoch also, daß wir die Möglichkeit des Gegentheils nicht ganzlich abzulehnen vermögen.«

Weiter wird ausgeführt, dass der Mensch sich zwar wünsche, alle ihm »nützliche Wahrheit« mit »demonstrativer Gewißheit« zu erkennen, der menschlichen Vernunft jedoch Grenzen gesetzt seien, die sie durch die dem Menschen gegebene Intelligenz zu überwinden versuche.

Auch hier werden also Gewissheit (bestimmtes Ereignis) und Zufall als gegensätzliche Begriffe einander gegenübergestellt.
Bei Zedler wird als Beispiel angegeben, dass eine Ehe wahrscheinlich nicht gut und glücklich ablaufen werde, wenn »die Mannsperson sehr alt, geizig, eigensinnig und die Weibsperson sehr jung, wohllüstig, frey erzogen ist und viel Geld vor sich hat«.

Wir pflichten dem bei, obwohl wir auch heute, nach mehr als 200 Jahren, noch immer keine Gewissheit bieten können. Doch nun ein Stück näher an die mathematischen Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeit!

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist zunächst entwickelt worden, um den Glücksspielern bei der Verteilung von Gewinnen oder Verlusten zu helfen.
Eng verbunden mit ihrer Entstehung sind die Namen der französischen Mathematiker Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre Fermat (1601-1665) sowie der des Holländers Christian Huygens (1629-1695).

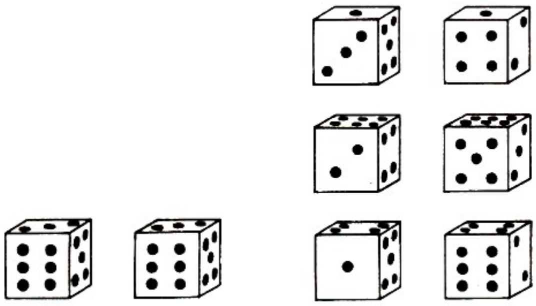
Schon bald dienten die Problemstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnungen nicht mehr nur dem Glücksspiel. Überall, wo Massenerscheinungen untersucht werden sollten - seien es die Bewegungen von Molekülen oder die Produktion bestimmter Massenartikel -, wurden die Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung genutzt, um die Probleme zu erfassen, zu beschreiben und zu berechnen.

Wir wollen noch einmal aus Zedlers Universal-Lexikon zitieren:

»Die Lehre der Wahrscheinlichkeit ist eine der allernöthigsten und nützlichsten, sowohl in dem gemeinen Leben, als in der Gelehrsamkeit, besonders in der Philosophie. Denn wie das meiste

Thun und Lassen der Menschen aufs künftige gehet, daß man den Schaden abwenden und das nützliche erlangen will, folglich die Haupt Affekten, womit die menschlichen Gemüthe eingenommen, Furcht und Hoffnung sind, also können diese nicht vernünftig eingenommen werden, wenn man nicht weiß, das wahrscheinliche von dem blos möglichen zu unterscheiden, denn vernünftig ist die Hoffnung, wenn man ein wahrscheinlich zu erwartendes Gut hoffet, die Furcht hingegen, wenn man wegen eines wahrscheinlich zu besorgenden Übels bekümmert ist, mithin ist es unvernünftig, wofern man blos mögliche Dinge entweder hoffet oder fürchtet, wodurch man sein Gemüthe beunruhigt und sein Leben unglücklich macht. Solchen Nutzen hat auch die Wahrscheinlichkeit in der Gelehrsamkeit .. .«

Weiter wird in dieser ungewöhnlich guten, wenn auch langen Erläuterung folgendes Beispiel angegeben. Es sei wahrscheinlicher, dass man mit zwei Würfeln die Summe 7 wirft, als dass sich die Augenzahl 12 ergibt, da die 12 nur auf eine Art und die 7 auf dreierlei Art erreicht werden könne.



Darstellung der Würfelsummen
links: Möglichkeit für Summe 12, rechts: Möglichkeiten für Summe 7

Trotz dieses Zahlenbeispiels bietet die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit durch Zedler noch keine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeit quantitativ auszudrücken. Das ist jedoch zur Nutzung aller Möglichkeiten einer solchen Betrachtungsweise und auch zur zureichenden Begründung des Zedlerschen Würfelbeispiels erforderlich.

Die sogenannte klassische Definition der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des zufälligen Ereignisses E bestimmt diese als den Quotienten zwischen der Anzahl m von Möglichkeiten, die für das Eintreten eines Ereignisses günstig sind, dividiert durch die Gesamtzahl der Möglichkeiten n:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Zahlenlotto zufällig eine bestimmte Zahl gezogen wird, beträgt

$$P(E) = \frac{1}{n}$$

wobei n die Gesamtheit der Zahlen ist und 1 für die eine gezogene Zahl steht.

Folgende Schlussfolgerungen lassen sich direkt aus der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit ableiten:

1. Da die Zahl der günstigen Ausgänge m für das Ereignis E nie größer sein kann als die Gesamtzahl der möglichen Ausgänge n für das Ereignis, ist der Zähler des Quotienten höchstens so groß wie der Nenner, niemals überschreitet er dessen Wert.
Das bedeutet, dass der Wert $P(E)$ für die Wahrscheinlichkeit immer zwischen 0 und 1 liegen muss:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

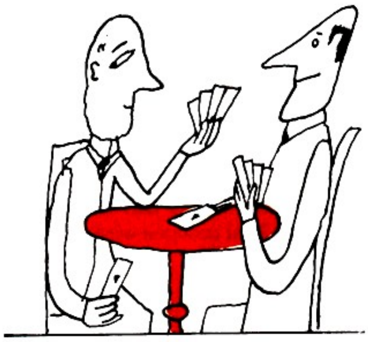
Deshalb wird die Wahrscheinlichkeit auch gern in Prozent angegeben. Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 6 beträgt

$$P(E) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \hat{=} 17\%$$

2. Die Wahrscheinlichkeit für ein sicher eintretendes Ereignis beträgt immer 1 (oder 100%), da in diesem, jedoch nur in diesem Falle die Zahl der günstigen Ausgänge gleich der Gesamtzahl der Möglichkeiten ist.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zwischen einschließlich 1 und 6 zu würfeln, beträgt

$$P(E) = \frac{6}{6} = 1 \hat{=} 100\%$$



3. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines von einander ausschließenden Ereignissen eintritt, ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. (Der Sachverhalt wird Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt.)

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel mit 32 Blatt eine Figur auszuwählen, setzt sich aus der Wahrscheinlichkeit zusammen, einen König (K), eine Dame (D) oder einen Buben (B) zu ziehen. Diese einzelnen Wahrscheinlichkeiten betragen

$$P(K) = P(D) = P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Damit ergibt sich

$$P = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \hat{=} 37{,}5\%$$

Die drei Eigenschaften, die hier für die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nachgewiesen wurden, müssen alle Definitionen der Wahrscheinlichkeit besitzen. Sie werden auch Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt.
(Es gibt außer der klassischen Definition auch weitere Fassungen, die jedoch nur dann für die praktische Anwendung sinnvoll sind, wenn sie die hier angegebenen drei Eigenschaften erfüllen.)

Noch einige Anmerkungen zu diesen Axiomen. Im letzten Beispiel wurden als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, eine Figur aus einem Kartenspiel mit 32 Karten zu ziehen, 37,5% errechnet.
Obwohl dieser Wert über 33%, $\left(\frac{1}{3}\right)$ liegt, heißt das jedoch nicht, dass nach zwei erfolglosen Versuchen unbedingt ein König, eine Dame oder ein Bube gezogen werden muss.

Leider - und das sei nachdrücklich unterstrichen - lassen die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung niemals Schlüsse auf den konkreten Einzelfall zu.

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ dafür, eine 5 oder 6 zu würfeln, bedeutet durchaus nicht, dass jeder dritte Wurf eine 5 oder 6 ist.

Wenn zwei Spieler am Mensch-ärgere-dich-nicht-Brett sitzen und beide schon jeweils fünfzehnmal gewürfelt haben, ohne eine 6 zu bekommen (was allerdings recht unwahrscheinlich ist), braucht ein dritter, neu hinzukommender Spieler deshalb die fünfzehn Würfe nicht nachzuholen.
Der Würfel hat weder »Gerechtigkeitssinn« noch ein »Gedächtnis«. Sowohl für die ersten beiden Spieler als auch für den neu hinzugekommenen beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine 6 immer $\frac{1}{6}$, gleichgültig, wie viele und welche Zahlen sie vorher gewürfelt haben.

Ganz schlaue Lottospieler führen genau Buch darüber, welche Zahlen noch nicht so oft gezogen wurden, und spielen diese, weil sie meinen, sie wären nun auch einmal dran, da alle Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen würden.
Leider hat auch das Ziehungsgerät wie der Würfel keinen Gerechtigkeitssinn. Mit dem Würfel kann dieses Spiel leicht selbst erlebt werden. Wir haben einmal über 250 Würfe Buch geführt.

Augenzahl	Nach 25 Würfen	Relative Häufigkeit	Nach 100 Würfen	Relative Häufigkeit	Nach 250 Würfen	Relative Häufigkeit
1	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$	21	$\frac{21}{100} = 21\%$	42	$16{,}8\%$
2	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16 = 16\%$	17	$\frac{17}{100} = 17\%$	38	$15{,}2\%$
3	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16 = 16\%$	16	$\frac{16}{100} = 16\%$	45	$18{,}0\%$
4	2	$\frac{2}{25} = 0{,}15 = 16\%$	15	$\frac{15}{100} = 15\%$	43	$17{,}2\%$
5	5	$\frac{5}{25} = 0{,}20 = 20\%$	15	$\frac{15}{100} = 15\%$	45	$18{,}0\%$
6	7	$\frac{7}{25} = 0{,}28 = 28\%$	16	$\frac{16}{100} = 16\%$	37	$14{,}8\%$

Auch die 6, die nach 25 Würfen schon so häufig gefallen ist, hat beim 26. Wurf die gleiche Chance wie alle anderen Zahlen. Auffällig ist außerdem, dass die relative Häufigkeit dem Mittelwert von $\frac{1}{6} \widehat{=} 16{,}7\%$ immer näher kommt, je größer die Zahl der Versuche ist.

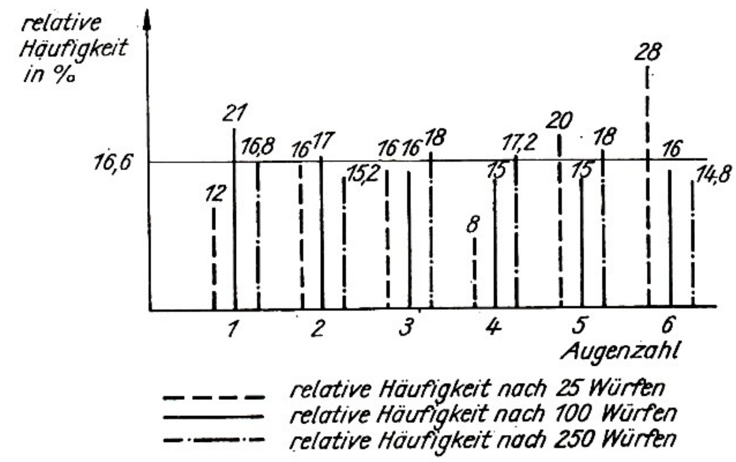
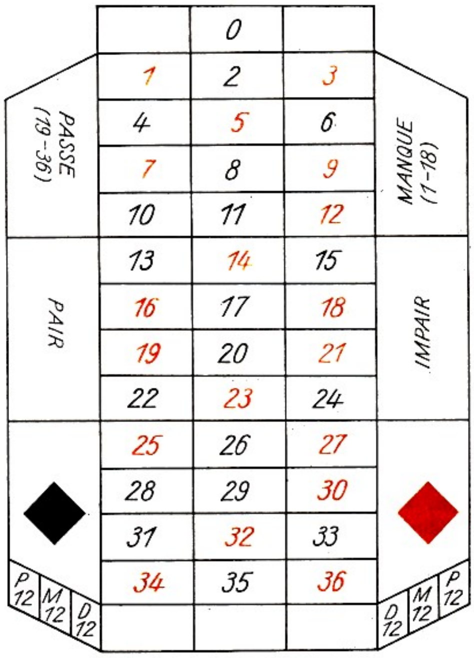


Diagramm relative Häufigkeit

Wir wollen noch auf ein weiteres Spiel eingehen, bei dem gerade Systemspieler besondere Berühmtheit erlangt haben und das schon bei den Edelleuten des 17. Jahrhunderts beliebt war - das Roulette.

Die Möglichkeit, dass die Kugel nach ihrem Lauf gerade in das Fach mit der gesetzten Zahl fällt, beträgt einschließlich der Null

$$P(E) = \frac{\text{gesetzte Zahl}}{\text{mögliche Zahlen}} = \frac{1}{37} \widehat{=} 2{,}7\%$$



Roulette

Der Spieler erhält in diesem Falle einschließlich seines Einsatzes den 36fachen Betrag seines Spielbetrages. Gerecht wäre der 37fache Betrag, aber der Croupier und besonders der Spielbankbesitzer wollen ja auch leben.

Beim Setzen auf zwei miteinander verbundene Zahlen erhält der Spieler, wenn eine der beiden Zahlen fällt, seinen Einsatz zurück und zusätzlich den siebzehnfachen Betrag von diesem Einsatz. Die Gewinnchance beträgt bei zwei günstigen Möglichkeiten (cheval):

$$P(E) = \frac{2}{37} = 5{,}4\%$$

Eine Querreihe von drei Zahlen (transversale pleine) bringt außer dem Einsatz noch den elffachen Betrag:

$$P(E) = \frac{3}{37} = 8{,}1\%$$

Vier Zahlen im Viereck (carre) ergeben außer dem Einsatz den achtfachen Betrag:

$$P(E) = \frac{4}{37} = 10{,}8\%$$

Diese Reihe ließe sich fortsetzen. Je mehr Zahlen gesetzt werden, um so größer wird natürlich die Wahrscheinlichkeit, vom Croupier einen Gewinn zu erhalten. Mit der größeren Chance für das Eintreffen dieses freudigen Ereignisses sinken jedoch die Beträge rapide, die der Spieler für sein Wagnis erhält.

Da alle Gewinnchancen so berechnet wurden, als gäbe es nur 36 Zahlen und als käme die Null gar nicht vor, gewinnt auf die Dauer immer die Bank, auch wenn sogenannte Wandersysteme zufällig einem einzelnen eine Glückssträhne bringen können.

Das freudige Ereignis (E) beim Roulettespiel ist die Tatsache, dass die gesetzte Spielmarke gewonnen hat. Das entgegengesetzte Ereignis bedeutet, daß die Spielmarke vom Croupier diskret eingezogen wird.

Mathematisch wird dieses entgegengesetzte Ereignis mit $(\overline{E})$ bezeichnet. Wird eine Zahl gesetzt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für (E), wie wir gesehen haben, 2,7%. Die Wahrscheinlichkeit für $\overline{E}$ beträgt

$$P(\overline{E}) = \frac{36}{37} = 97{,}3\%$$

da es 36 weitere Zahlen gibt, die für das Eintreffen des Ereignisses »kein Gewinn« günstig sind.

Die Anzahl der Möglichkeiten (m), die für das Ereignis (E) günstig sind, und die Anzahl der Möglichkeiten $(\overline{m})$, die für das entgegengesetzte Ereignis $(\overline{E})$ günstig sind, sind gleich der Gesamtzahl der Möglichkeiten:

$$m + \overline{m} = n$$

Da sich E und $\overline{E}$ gegeneinander ausschließen, ist das zusammengesetzte Ereignis, bei dem entweder das eine oder das andere eintritt, das sichere Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1. Damit kann leicht eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses angegeben werden:

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{m + \overline{m}}{n} = \frac{m}{n} + \frac{\overline{m}}{n}$$

$\frac{m}{n}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, $\frac{\overline{m}}{n}$ ist die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses $\overline{E}$, die aus der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ als die Differenz von 1 berechnet wird:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Beträgt die Chance für einen Gewinn z. B. $\frac{6}{37}$, so die für den Verlust $\frac{31}{37}$. $P(\overline{E})$ wird die Wahrscheinlichkeit des zum Ereignis E komplementären Ereignisses genannt.

Zum Schluss dieser Überlegungen wollen wir noch einmal zum Würfelbeispiel dieses Abschnitts zurückkommen. In der Auswertung der 25, 100 bzw. 250 Würfe werden die Ergebnisse nicht als Wahrscheinlichkeit, sondern als relative Häufigkeit des Auftretens gekennzeichnet. Das hat seinen Grund.

Natürlich steht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ fest, mit der jede Augenzahl erreicht wird. Dieser theoretische Wert wird auch von den tatsächlichen Würfen mit wachsender Versuchszahl immer genauer erreicht, wenn der Würfel unverfälscht ist.
Man sagt, dass die relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit immer näher kommt, je größer die Anzahl der Versuche ist. Das ist die statistische Definition der. Wahrscheinlichkeit, die vor allem bei Qualitätsprüfungen eine große Rolle spielt:

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

»$\lim$« bezeichnet in der Sprache der Mathematiker die Annäherung an einen Grenzwert, in unserem Falle an »unendlich«, da sich die relative Häufigkeit - wie gesagt - bei sehr großen n der Wahrscheinlichkeit zunehmend annähert.

Wird beispielsweise die Brenndauer von Glühlampen getestet, so kann nur eine relative Häufigkeit für die Anzahl von Glühlampen angegeben werden, die nach hundert Stunden noch brennen. Alle Erzeugnisse auf diese Weise zu testen, um der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit gerecht zu werden, hieße, den Gebrauchswert aller Glühlampen um hundert Stunden zu senken, und wäre widersinnig.

Im täglichen Leben ist die »Gesamtzahl der Möglichkeiten« ohnehin oft nur schwer anzugeben, wie folgendes Beispiel zeigt:

In einer Klinik werden geboren

	1. Wo.	Rel. Häuf.%	2. Wo.	Rel. Häuf.%	3. Wo.	Rel. Häuf.%	4. Wo.	Rel. Häuf.%	1 Monat	Rel. Häuf.%
Knaben	17	56,67	15	45,45	11	40,74	9	47,37	52	47,71
Mädchen	13	43,33	18	54,55	16	59,26	10	52,63	57	52,29

Obwohl die relative Häufigkeit in den einzelnen Wochen recht unterschiedlich ist und kein Vater die Geburt eines Stammhalters erwarten sollte, weil zuvor zehn Mädchen das Licht der Welt erblickt haben, stellt sich bei einer hinreichend großen Anzahl von Geburten das natürliche Verhältnis von Jungen- und Mädchengeburten ein, das mit etwa 52 : 48 angegeben wird.

Der Weg von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit führt immer über eine genügend große Anzahl von Versuchen.

5.3 Anzahl der Möglichkeiten

Permutationen beim Aufbau einer Schrankwand

Es war einmal eine Familie, die eine neue Wohnung bezog. In praktischen Dingen selbst wenig bewandert, bestellte sie eine Malerbrigade, um das neue Heim zu tapezieren.
Leider löste sich die Tapete schon nach kurzer Zeit wieder von der Wand. Nach nicht allzu heftigen Kämpfen erklärten sich die Maler zur Nachbesserung bereit, und dieses Spiel wiederholte sich einige Male. Jedesmal waren mit dem Ein- und Auszug der Maler das Aus- und Einräumen einer Schrankwand verbunden. Die Familie nutzte das, um die schönste Anordnung der Wandelemente praktisch auszuprobieren.

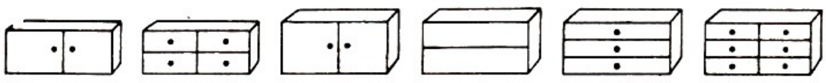
Bei dieser Arbeit nun trat die Ehefrau nach dem dritten Versuch in den Streik. Sie meinte, dass nun wohl alle Möglichkeiten ausprobiert wären, nach denen die Schrankwand aufgestellt werden könnte. Und ohne Tapeten könnte man zur Not auch leben. Und überhaupt wäre sie am Ende und wollte ihre Ruhe haben.

Der tüchtige, unermüdliche Ehemann jedoch griff zu einem Stück Abfalltapete und zeigte seiner Frau, welch verblüffende Anzahl von Möglichkeiten allein durch verschiedenes Stellen der Unterteile der Schrankwand erreichbar war. Sechs verschiedene Unterteile besaß die Wand. Die Oberteile waren sämtlich gleich, sonst hätte sich die Zahl der Variationsmöglichkeiten auch unvorstellbar vergrößert.

Der Ehemann ging systematisch vor. Bei einem Unterteil, so erklärte er seiner Frau, gibt es selbstverständlich nur eine Möglichkeit der Anordnung. Kommt ein zweites hinzu, so kann es vor (links) oder nach (rechts) dem ersten stehen:

$P_2 = 1 \cdot 2 = 2$ Möglichkeiten.

Das hinzukommende dritte Unterteil kann vor dem ersten, in der Mitte der beiden ersten oder nach dem zweiten stehen, also an drei verschiedenen Stellen. Das bedeutet in den bereits ermittelten zwei Anordnungen:



Schrankunterteile

$P_3 = 2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

Das vierte Unterteil kann in den aus drei Unterteilen gebildeten Möglichkeiten an vier verschiedenen Stellen stehen, woraus sich bereits 24 Möglichkeiten ergeben:

$P_4 = 6 \cdot 4 = 24$

Beim hinzukommenden fünften Unterteil gibt es fünf verschiedene Stellmöglichkeiten in den 24 verschiedenen Anordnungen, so dass

$P_5 = 24 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten

existieren, in die das letzte Unterteil an sechs verschiedenen Stellen eingebaut werden kann:

$P_6 = 120 \cdot 6 = 720$ Möglichkeiten.

Zwei Jahre lang könnte die Familie also täglich einmal die Schrankwand umräumen, ohne die Stellmöglichkeiten zu wiederholen, die sich allein aus den Unterteilen ergäben!

Lediglich um die Weihnachtszeit dürfte sie sich eine kleine Pause gestatten. Nicht nur für die Ehefrau, auch für die Schrankwand war diese Aussicht zuviel. Beide hätten den Beanspruchungen nicht standgehalten. Bei P_3 gaben sie auf.

In der Mathematik werden solche Fragestellungen - natürlich mit ernsterem Hintergrund - von der Kombinatorik untersucht. Mit den Formeln und Begriffen der Kombinatorik (aber auch auf anderem Wege) kann im voraus die Anzahl der Möglichkeiten eines Ereignisses berechnet werden, um dann dessen Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Insofern ist die Kombinatorik eine Voraussetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wird, wie in unserer Geschichte von der Schrankwand, eine bestimmte Anzahl von Elementen (Unterteilen) verschiedenartig angeordnet, so sagt man, sie werden permutiert.
Die Anzahl der Permutationen für n Elemente ergibt sich, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist, aus der Formel:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$$

Die Mathematik formuliert abkürzend:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n! \qquad \text{(gelesen: } n \text{ Fakultät)}$$

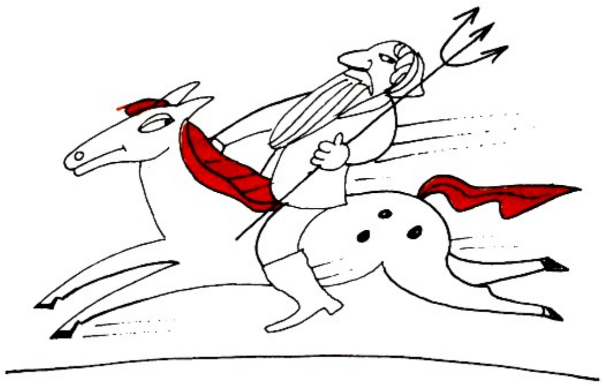
Wird eine Zahl mit dem Ausrufezeichen versehen, heißt sie Fakultät. Das bedeutet, dass die natürlichen Zahlen, die vor dieser Zahl liegen, nacheinander miteinander multipliziert werden, wobei der letzte Faktor die Zahl selbst ist. Besondere Festlegungen sind: $0! = 1$, $1! = 1$.
Fortgesetzt nach der oben angegebenen Definition, erhält man:

$$\begin{aligned}
2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \\
6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \\
7! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 \\
8! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320 \\
9! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880 \\
10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800 \\
11! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 39916800
\end{aligned}$$

Die Zahlenwerte wachsen also mit größer werdendem n sehr rasch an; wir wollen die Tabelle deshalb bei 11! abbrechen und uns anderen Komplexionen zuwenden.

Variationen beim Pferderennen

Am Start eines Pferderennens stehen zwölf Pferde. Ihre Namen sind von Widder bis Fisch die Namen der Tierkreiszeichen.
Müssten Wetten zum Ausgang des Rennens abgeschlossen werden, in denen der richtige Einlauf für alle 12 Pferde vorausgesagt werden soll, so gäbe es: $P_{12} = 12! = 479001600$ Möglichkeiten des Einlaufs.
Die Chancen des Tipps ständen also $\frac{1}{479001600}$. Kein Mensch würde sich auf eine solche Wette einlassen.



Deshalb gibt es eine Wette, bei der die drei ersten Pferde in der richtigen Reihenfolge vorhergesagt werden müssen. Ein solcher Tipp wäre z. B.:

1. Stier
2. Jungfrau
3. Wassermann.

Um die Zahl der Möglichkeiten zu bestimmen, sei folgende Überlegung angestellt: Auf dem ersten Platz wird eines der zwölf Pferde einkommen. Hierfür gibt es also zwölf Möglichkeiten. Für den zweiten Platz bleiben elf Pferde übrig.

Das Produkt $12 \cdot 11 = 132$ ergibt die Anzahl möglicher Wetten für die Vorhersage des ersten und zweiten Platzes. Verbleiben für den dritten Platz noch zehn Pferde und damit zehn zusätzliche Variationsmöglichkeiten.
Die Anzahl möglicher Wetten ergibt sich erneut aus dem Produkt: $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Die Wahrscheinlichkeit P einer richtigen Wette beträgt $\frac{1}{1320}$. Das ist zwar immer noch ein Risiko, steht aber in keinem Verhältnis mehr zur Zahl möglicher Permutationen von zwölf Pferden.

In der verallgemeinernden Sprache der Mathematik wird zu diesem Sachverhalt festgestellt: Werden aus n Elementen (z.B. 12 Pferden) k Elemente herausgegriffen, so bezeichnet man die Zusammenstellungen der k Elemente unter Berücksichtigung der Anordnung als Variation der n Elemente zur k-ten Klasse.
Wichtig hierbei ist die Berücksichtigung der Anordnung der Elemente.

In unserem Beispiel ist es keinesfalls gleichgültig für den Wetterfolg, ob das Pferd Wassermann auf den dritten oder den ersten Platz gesetzt wurde.

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse wird nach folgender Formel berechnet:

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$$

Beispiele:
In unserem Pferderennen war die Vorhersage der ersten drei von zwölf Pferden in der richtigen Reihenfolge gefordert, demnach die Variation von zwölf Elementen zur dritten Klasse. In der Formelsprache sieht das so aus:

$$V_{12}^{(3)} = 12 \cdot 11 \cdot (12-3+1) = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

Sollten drei von fünf Pferden vorhergesagt werden, hieße das:

$$V_5^{(3)} = 5 \cdot ... \cdot (5-3+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Und vier von 14 Elementen in einer bestimmten Reihenfolge ergäben:

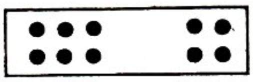
$$V_{14}^{(4)} = 14 \cdot ... \cdot (14-4+1) = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 24024$$

Während also bei Variationen immer nur eine bestimmte Anzahl von Elementen angeordnet wird, sind Permutationen Anordnungen aller möglicher Elemente. Anders ausgedrückt, sind Permutationen spezielle Variationen, in denen $n = k$ ist. Gemeinsam ist Permutationen und Variationen, dass in beiden Fällen die Reihenfolge der Elemente beachtet werden muss.

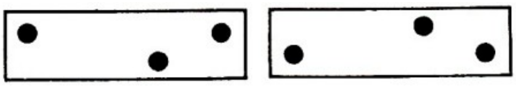
Anhand einiger Probleme aus dem Alltag wollen wir der Frage der Variationen noch etwas nachgehen.
Bei der Fahrscheinentwertung unserer Verkehrsbetriebe hat sich das System der Selbstlochung der Fahrscheine fast völlig durchgesetzt. Doch welch geringe Zahl von Möglichkeiten ergäbe sich, wenn die Verkehrsbetriebe die Alternative stellen würden: »Loch oder kein Loch«!
Eine Kontrolle wäre damit fast sinnlos. Deshalb werden kompliziertere Systeme der Entwertung und Kennzeichnung der Fahrscheine genutzt. Denkbar sind z. B. verschiedene Locharten, die dann permutiert werden könnten. In diesem Beispiel ergäbe das 120 Möglichkeiten.


Fahrscheinvariante

Immer häufiger verwendet wird heute aber ein System, in dem die Frage »Loch oder kein Loch ?« häufig genug wiederholt wird, um das Risiko für Schwarzfahrer genügend hoch zu halten. Ein vollständig ausgelochter Fahrschein könnte wie folgt aussehen:


Ausgelochter Fahrschein

Wieviel Fahrscheine müsste ein Schwarzfahrer in diesem Falle bei sich haben, um bei jeder Kontrolle gewappnet zu sein? Da die Anordnung der Löcher wichtig ist, handelt es sich hier um Variationen.


Lochkombinationen auf Fahrscheinen

Außerdem ist jedoch wichtig, dass die Elemente sich je nach der Einstellung des Entwerters beliebig oft wiederholen können. Man bezeichnet das als Variationen mit Wiederholung. Auch sie lassen sich berechnen.
In der ersten (untersten) Reihe gibt es vier Möglichkeiten der Lochung

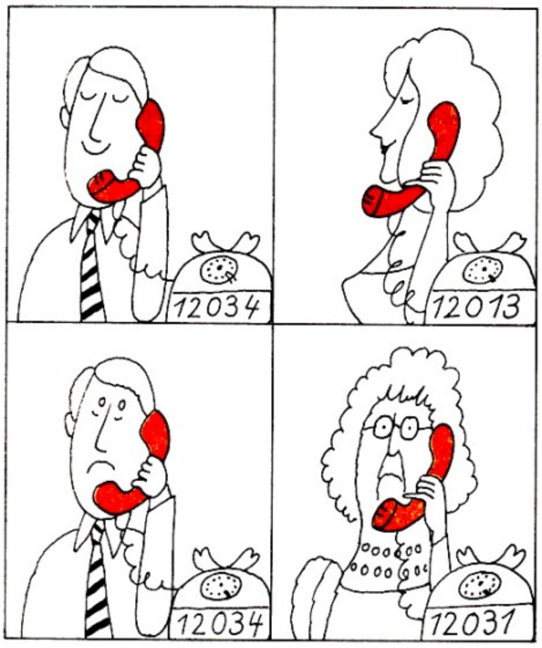
1. oo 2. ox 3. xo 4. xx

Da wir insgesamt fünf Reihen haben, ergibt das $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ Möglichkeiten.
Eine Variante muss allerdings abgezogen werden - die, in der der Fahrschein überhaupt nicht gelocht wurde. Es wird kaum möglich sein, ständig 1023 Fahrscheine mit sich zu führen und dann noch einen Kontrolleur zu finden, der geduldig genug ist, aus diesem Haufen die richtige Variation herauszusuchen!
Da dürfte es besser sein, den Fahrschein ehrlich zu entwerten.

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse berechnet man nach der Formel

$$V_{Wn}^{(k)} = n^k$$

(in unserem Beispiel sind $n = 2$ und $k = 10$).



Beim Telefonieren sind mit den Ziffern der Wählscheibe zehn Elemente gegeben, die zur k-ten Klasse zusammengefasst werden. Die Größe von k richtet sich nach der Zahl der Ziffern im gewünschten Anschluss. Wie wichtig hierbei die richtige Reihenfolge ist, kann im Experiment sofort von jedermann überprüft werden.

Da sowohl die Anordnung wichtig ist, als auch Zahlen wiederholt werden können, handelt es sich auch hier um Variationen von n (10) Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung. Das bedeutet für fünfstellige Nummern, wie sie in Klein- und Mittelstädten zu finden sind (5. Klasse),

$$V_{W10}^{(5)} = 10^5 = 100000 \text{ verschiedene Möglichkeiten}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass dann auch beispielsweise die Nummern 04342 oder extrem 00000 zugelassen wären.

Zieht man die mit 0 beginnenden Nummern ab, ergibt sich für diese:

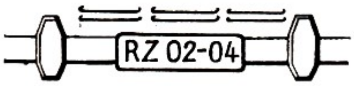
$$V_{W10}^{(4)} = 10^4 = 10000$$

Es bleiben also 90000 verschiedene Anschlüsse, die durch fünfstellige Nummern zu kennzeichnen sind, ohne dass eine Nummer mit Null beginnt. Zieht man auch noch die mit 1 beginnenden Nummern ab (Polizei, Feuerwehr, Auskunft usw.), ergeben sich 80000 Anschlüsse.

Schließlich sei noch auf das Problem der Kennzeichnung von Kraftfahrzeugen verwiesen. In der DDR erhielten die fünfzehn Bezirke zunächst einen Buchstaben zugeordnet, z.B.

A - Rostock
K - Halle
L - Erfurt.

Im Bezirk Dresden wurde die Nummer dann folgendermaßen zusammengesetzt:



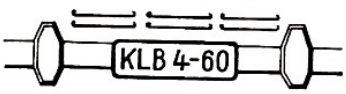
Kraftfahrzeugkennzeichen

Erneut ist die Anordnung wichtig; denn bei einer Geschwindigkeitskontrolle genügt es nicht, wenn die kontrollierende der kassierenden Stelle mitteilt, dass in der Nummer des Verkehrsrowdys zweimal die 7 und je einmal 0 und 8 stehen. Außerdem handelt es sich wieder um zehn Zahlen, die zur vierten Klasse mit Wiederholung variieren:

$$V_{W10}^{(4)} = 10^4 = 10000$$

Allein durch die Zahlen ergäben sich also 10000 verschiedene Kennzeichen für einen Bezirk. Das genügt natürlich keinesfalls. Deshalb wurde rechts neben das Bezirkskennzeichen ein zweiter Buchstabe hinzugesetzt. Somit ergeben sich für die 26 Buchstaben des Alphabets $26 \cdot 10000 = 260000$ verschiedene mögliche Kennzeichen.
Für die großen Bezirke war auch das jedoch bald nicht mehr ausreichend, so dass ein zweiter Buchstabe als Bezirkskennzeichen hinzugenommen wurde (für Dresden z.B. das Y). Dadurch verdoppelte sich die Zahl möglicher Kennzeichen auf 520000.

Auch das aber reicht inzwischen nicht mehr aus, so dass seit einiger Zeit unter Beibehaltung des ersten Buchstabens als Bezirkskennzeichen zwei weitere Buchstaben mit drei Zahlen kombiniert werden. Ein Beispiel aus dem Bezirk Halle kann so heißen:



Die drei Zahlen ergeben mit dem Bezirkskennzeichenbuchstaben

$$V_{W10}^{(3)} = 10^3 = 1000 \text{ Möglichkeiten}$$

Mit einem variablen Buchstaben ergeben sich $26 \cdot 1000 = 26000$ Möglichkeiten, die sich durch den zweiten variablen Buchstaben auf $26000 \cdot 26 = 676000$ neue mögliche Kennzeichnen erhöhen.
Damit ist zumindest von dieser Seite dem Anwachsen der Kraftfahrzeugdichte auf unseren Straßen in absehbarer Zeit keine Grenze mehr gesetzt.

Kombinationen beim Lottospiel

Viele kennen das schöne prickelnde Gefühl, wenn auf dem Fernsehschirm das Ziehungsgerät auftaucht und gleich entschieden sein wird, ob sich das Ankreuzen der Lottoscheine gelohnt hat oder der Einsatz wieder verspielt ist.
Die Mathematik ermöglicht es, die eigenen Chancen bereits vor der Ziehung zu berechnen - allerdings nur auf die Gesamtzahl der Möglichkeiten, nicht auf den persönlichen Einzelfall bezogen. Wir wollen uns näher ansehen, womit wir am Sonntagabend rechnen können und welche Voraussetzungen für einen sicheren Hauptgewinn wir erfüllen müssten.

Bei einer Auswahlwette gilt es beispielsweise auf dem Tippschein, aus 49 Zahlen 6 herauszufinden. Doch es handelt sich dabei nicht um Variationen aus 49 Elementen zur sechsten Klasse. Der Unterschied: Die Reihenfolge der Ziehung der einzelnen Zahlen muss nicht vorausgesagt werden.
Ein Glück, denn sonst könnten wir mit unserer bereits verwendeten Formel schnell feststellen:

$$V_{49}^{(9)} = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10068347520$$

Wer hätte wohl Lust und Geld, über 10 Milliarden Spielscheine zu kaufen, und vor allem Gelegenheit, sie alle mit Kreuzchen zu versehen ? Aber das ist ja nicht unser Problem.

Bei uns können die Zahlen in beliebiger Reihenfolge gezogen werden. Solche Zusammensetzungen von k Elementen aus n gegebenen Elementen, bei denen die Anordnung unberücksichtigt bleibt, werden Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse genannt. Um ihre Anzahl zu ermitteln, ist die Zahl der Variationen durch die Zahl der Permutationen zu dividieren:

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Diese Formel lässt sich weiter vereinfachen. Das geschieht, wie oft im Leben und auch in der Mathematik, durch einen Umweg: Wir multiplizieren Zähler und Nenner des Bruches mit den Faktoren $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 1$. Dabei ergibt sich:

$$C_n^{(k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Wenn wir das kürzen und im Zähler zusammenfassen, erhalten wir

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Mit den hier auftauchenden Fakultätszeichen können sogenannte Binomialkoeffizienten berechnet werden. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}$$

wird »n über k« gelesen. Für uns genügt die Voraussetzung, dass n und k natürliche Zahlen sind, wobei k nicht größer als n sein soll. Die Berechnungsvorschrift lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Beispiele:

1. $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 35$
2. $\binom{14}{9} = \frac{14!}{9!5!} = \frac{10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 2002$
3. $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{0!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{1} = 1$

Fakultätszeichen und Binomialkoeffizienten werden unter anderem zur Berechnung der Anzahl von Kombinationen benötigt.

Wir kehren zu unserem Beispiel zurück und schreiben als Formel zur Ermittlung der Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse:

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

Damit ergibt sich nun für die möglichen Kombinationen bei der Auswahlwette 6 aus 49:

$$C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 13983816$$

Um mit Sicherheit einen Sechser zu erspielen, sind also 13983816 Spielscheine erforderlich.
Kein Wunder, dass eine Wette 5 aus 35 eine wesentlich beliebtere Spielart ist. Die Mathematik kann den Grund dafür klarmachen:

$$C_{35}^{(5)} = \binom{35}{5} = \frac{35!}{5!30!} = \frac{35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 324632$$

Ein Spieler braucht also wesentlich weniger Zeit und nur 324632 Mark Einsatz, um mit Sicherheit einen Fünfer zu erhalten. Daneben werden einige Vierer und eine noch größere Zahl von Dreiern fallen, was allerdings keine Garantie dafür bietet, den Einsatz in voller Höhe wiederzubekommen.
Wer Gewissheit haben will, kann die Probe machen!

Denkbar wäre auch hier eine Spielart, in der Zahlen mehrfach gezogen werden (indem man die Kugeln wieder in das Ziehungsgerät zurückführt), so dass sich Tippscheine wie der folgende ergeben könnten: 1, 1, 4, 30, 30.

Die Anzahl der möglichen Kombinationen unter Zulassung von Wiederholungen berechnet man nach der Formel

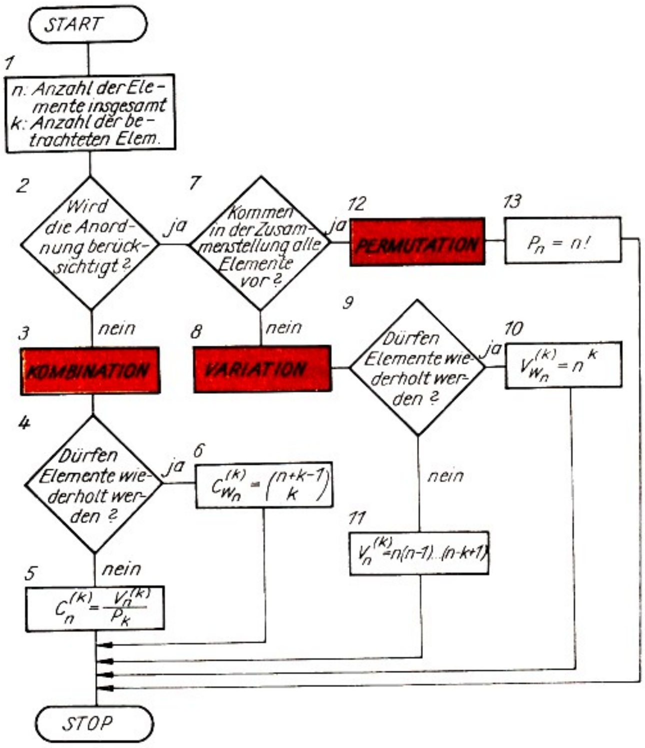
$$C_{Wn}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

Bei der Spielart 5 aus 35 wären das:

$$C_{W35}^{(5)} = \binom{35+5-1}{5} = \binom{39}{5} = \frac{39!}{5!34!} = \frac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 575757 \text{ Möglichkeiten}$$

Komplexionen und ihre Bestimmung

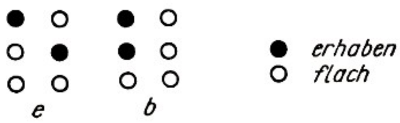
Permutationen, Variationen und Kombinationen werden zusammenfassend Komplexionen genannt. Diese Komplexionen sind Gegenstand der Kombinatorik. Wir haben gesehen, dass sich von den Definitionen her eindeutig entscheiden lässt, um welche Art von Komplexion es sich jeweils handelt.
Bei angewandten Aufgaben erfordert eine solche Entscheidung jedoch einiges Nachdenken; erst wenn man weiß, ob man es mit einer Permutation, einer Variation oder einer Kombination zu tun hat, kann man sie ja richtig berechnen. In dieser Schwierigkeit hilft uns erneut der Algorithmus. Nach einem einfachen Programmablaufplan lässt sich die jeweils vorliegende Art der Komplexion sicher bestimmen:



Entscheidung zur Festlegung der Komplexionsart

Drei Beispiele, um diesen Programmablauf zu verdeutlichen:

1. Der Franzose Louis Braille (1809-1852) erfand im Jahre 1829 die nach ihm benannte Brailleschrift, mit der Blinde schreiben (eindrücken) und lesen (abtasten) können. Jedes Zeichen besteht aus drei Zeilen mit jeweils zwei Zeichen. Diese sechs Stellen können erhaben oder flach sein.



Zeichen der Blindenschrift

Sind mit dieser Anordnung nun alle Buchstaben, Zahlen und Satzzeichen darstellbar, die es im Deutschen gibt ?
Nach dem angegebenen Entscheidungsalgorithmus erhält man folgende Lösung:

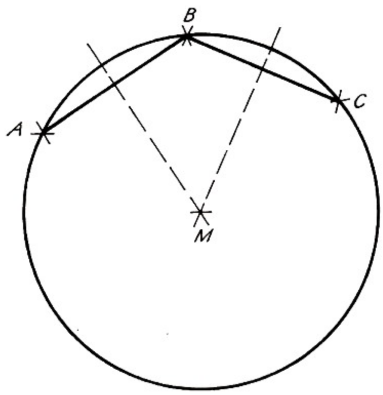
1: $n = 2$ (flach oder erhaben); $k = 6$ (6 Stellen eines Zeichens)
2: ja
7: nein
8: es handelt sich um Variationen
9: ja
10: $V_{W2}^{(6)} = 2^6 = 64.$

Für 26 Buchstaben und 10 Ziffern wird also die gute Hälfte der Möglichkeiten gebraucht. Es bleiben noch 28 Zeichen (minus 1, wenn alle 6 Stellen flach sind) für Satzzeichen u. ä. übrig - eine sicher ausreichende Menge.

2. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte aufgezeichnet, wobei keine drei auf ein und derselben Geraden und keine vier auf einem Kreis liegen. Frage: Wie viele Kreise lassen sich durch die sechs Punkte zeichnen ?

Es sei daran erinnert, dass sich ein Kreis durch jeweils drei Punkte eindeutig konstruieren lässt. Nach dem Entscheidungsalgorithmus ergibt sich:

1: $n = 6$, $k = 3$
2: nein
3: Kombinationen
4: nein
5: $C_6^{(3)} = ...$
6: $C_6^{(3)} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$



Kreiskonstruktion aus 3 Punkten

Konstruktionsbeschreibung:
1. 3 Punkte zeichnen, die nicht auf einer Geraden liegen (beliebig).
2. Je 2 Punkte verbinden.
3. Auf den beiden Geraden die Mittelsenkrechte errichten.
4. Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist Mittelpunkt des Kreises.

Auf die geforderte Weise lassen sich also zwanzig verschiedene Kreise konstruieren.

3. Auf wieviel verschiedene Arten können zehn Personen antreten ?

1: $n = 1$, $k = 10$
2: ja
7: ja
12: Permutationen
13: $P_{10} = 10! = 3628800.$

Benötigen die zehn Personen nur eine halbe Minute, um einmal anzutreten, so wären das 1814400 Minuten, um alle Möglichkeiten durchzuprobieren. Das wiederum sind 30240 Stunden. Bei einem normalen Arbeitstag von 8 Stunden sind das 3780 Tage bzw. 672 Wochen zu je 45 Stunden.
Ohne einmal Urlaub zu machen (allerdings mit regelmäßigem Wochenende und Schlaf), müssten die armen Versuchspersonen fast 13 Jahre lang täglich 8 Stunden antreten. Fast unvorstellbar!

Mit unserem Wissen über Komplexionen und ihre Berechnung wollen wir uns jetzt nochmals den Biorhythmen nähern.
Im Abschnitt »Wahrscheinlichkeit und Vorhersage« wurde ein Computerprogramm entwickelt, um den Stand der drei Komponenten des Biorhythmus zu berechnen. Daran anschließend hatten wir den Computer so programmiert, dass er entsprechend den errechneten Werten

bestimmte Texte als Biorhythmusprognose ausdrucken konnte.

Wie groß ist nun die Chance, dass zwei Personen den gleichen standardisierten Text erhalten ?
Ist ein solcher Fall etwas Besonderes ? Das lässt sich leicht berechnen:

1: $n = 5$ (positive, sich verstärkende Phase; positive, sich abschwächende Phase; kritischer Tag; negative, sich verstärkende und negative, sich abschwächende Phase), $k = 3$ (physische, geistige, emotionale Komponente)
2: ja (die Komponenten dürfen nicht vertauscht werden)
3: nein
4: Variationen
9: ja (auch 3 kritische Tage sind zwar selten, aber möglich)
10: $V_{W5}^{(3)} = 5^3 = 125$.

Mit den von uns gegebenen Vorgaben ist der Computer also in der Lage, 125 unterschiedliche Texte zu drucken. Unter Berücksichtigung, dass auch Maximum und Minimum eines Zyklus angegeben werden, gibt es praktisch $7^3 = 343$ verschiedene Texte.

Es kommt aber noch etwas hinzu. Die möglichen Variationen der Texte haben eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit, Wirklichkeit zu werden. Diese Unterschiede sollen im nächsten Abschnitt berechnet werden.

5.4 Noch einmal Würfelspiel - und etwas mehr

Für diese Berechnung wollen wir uns zuerst an den Additionssatz, die dritte Schlussfolgerung aus der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit, erinnern, von dem im Abschnitt »Mathematik kontra Suggestion« die Rede war und nach dem bei mehreren sich ausschließenden Ereignissen die Wahrscheinlichkeit berechnet werden konnte, mit der mindestens eines dieser Ereignisse eintritt.
Diese Wahrscheinlichkeit ergab sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Wir hatten uns das anhand der Wahrscheinlichkeit verdeutlicht, mit der aus einem Kartenspiel eine Figur ausgewählt wird.

Nun gibt es aber auch Ereignisse, die sich nicht ausschließen, sondern die gleichzeitig eintreten können. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Eintretens solcher (zweier oder mehrerer) Ereignisse dient der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Danach ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens von zwei oder mehreren Ereignissen aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse.

Da deren Wert, wie oben dargelegt, niemals größer als 1 sein kann, wird das Produkt dieser einzelnen Wahrscheinlichkeiten bei der Multiplikation zwangsläufig kleiner.

Erneut wollen wir uns das an einem Beispiel verdeutlichen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln mit drei Würfeln alle drei eine Sechs zeigen ?

Für jeden einzelnen Würfel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{6}$$

Nach dem Multiplikationssatz ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Würfeln von drei Sechsen:

$$P(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{256}$$

Das Ergebnis hätte übrigens auch aus der Gesamtzahl der Möglichkeiten errechnet werden können. Es sind $n = 6$ und $k = 3$. Da die Anordnung bei der Bestimmung der Anzahl eine Rolle spielt, handelt es sich um Variationen mit Wiederholung. Dann gilt:

$$V_{W6}^{(3)} = 6^3 = 216$$

Ein weiteres, weniger spielerisches Beispiel: Eine Maschine, die mit zwanzig voneinander unabhängigen Baugruppen arbeitet, ist nach dem heutigen Stand der Technik keinesfalls besonders hoch entwickelt. Moderne Maschinen überbieten diesen Wert wesentlich.
Garantieren die Hersteller der einzelnen Baugruppen eine Sicherheit von 98%, für ihr Produkt, so arbeitet die zusammengebaute Maschine mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = 0{,}98^{20} = 0{,}67$$

Lohnt sich bei einer solchen Funktionswahrscheinlichkeit von nur 67%, überhaupt der Produktionsaufwand - auch wenn die Einzelwerte von je 98% durchaus respektabel erscheinen?
Solche präzisen Fragen, deren Antworten oft verblüffen können, lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung stellen. In unserem Falle kann die Schlussfolgerung nur lauten: die Funktionssicherheit der einzelnen Baugruppen ist weiter zu erhöhen.

Auch in den Fragen des Biorhythmus kann uns der Multiplikationssatz ein Stück weiterhelfen. Wie im letzten Abschnitt ausgeführt, gibt es 27 Möglichkeiten der Variation von positiver Phase, negativer Phase und kritischem Tag in den drei Zyklen des Biorhythmus. Aus dem Algorithmus im Abschnitt »Wahrscheinlichkeit und Vorhersage« folgen diese Einzelwahrscheinlichkeiten:

	Im phys. Zyklus	Im emot. Zyklus	Im geist. Zyklus
Kritischer Tag	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{33}$
Positive Phase	$\frac{10}{23}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{15}{33}$
Negative Phase	$\frac{10}{23}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{15}{33}$
Summe nach Additionssatz	1	1	1

Werden die Einzelwahrscheinlichkeiten nun jeweils multipliziert, so ergibt sich die Tabelle der nächsten Seite.

Bei 10000 Ausgaben verursacht der Computer also achtmal den Schreck, nur kritische Tage auszudrucken. Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1: 1250! Auch andere Ausgänge lassen sich nun berechnen: Die Wahrscheinlichkeit, zumindest einen kritischen Tag im Biorhythmus zu haben, ergibt sich aus der Summe für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse 3, 6 bis 9, 12, 15 bis 27:

$$P(\text{kritischer Tag}) = 0{,}2658$$

Mindestens einen positiven Wert zu haben (Addition der Ereigniswahrscheinlichkeiten 1 bis 13, 16, 19 bis 22, 25) hat eine Wahrscheinlichkeit von,

$$P(\text{positive Phase}) = 0{,}8351$$

Das Komplementärereignis (keine positive Aussage bei allen drei Ereignissen) hat demzufolge die Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{negative Phase}) = 1 - 0{,}8351 = 0{,}1649$$

Nr.	Phys. Zyklus (P)	Emot. Zyklus (E)	Geist. Zyklus (G)	Wahrsch.
1	positive Phase	positive Phase	positive Phase	0,0918
2	positive Phase	positive Phase	negative Phase	0,0918
3	positive Phase	positive Phase	kritischer Tag	0,0184
4	positive Phase	negative Phase	positive Phase	0,0918
5	positive Phase	negative Phase	negative Phase	0,0918
6	positive Phase	negative Phase	kritischer Tag	0,0184
7	positive Phase	kritischer Tag	positive Phase	0,0141
8	positive Phase	kritischer Tag	negative Phase	0,0141
9	positive Phase	kritischer Tag	kritischer Tag	0,0028
10	negative Phase	positive Phase	positive Phase	0,0918
11	negative Phase	positive Phase	negative Phase	0,0918
12	negative Phase	positive Phase	kritischer Tag	0,0184
13	negative Phase	negative Phase	positive Phase	0,0918
14	negative Phase	negative Phase	negative Phase	0,0918
15	negative Phase	negative Phase	kritischer Tag	0,0184
16	negative Phase	kritischer Tag	positive Phase	0,0141
17	negative Phase	kritischer Tag	negative Phase	0,0141
18	negative Phase	kritischer Tag	kritischer Tag	0,0028
19	kritischer Tag	positive Phase	positive Phase	0,0275
20	kritischer Tag	positive Phase	negative Phase	0,0275
21	kritischer Tag	positive Phase	kritischer Tag	0,0055
22	kritischer Tag	negative Phase	positive Phase	0,0275
23	kritischer Tag	negative Phase	negative Phase	0,0275
24	kritischer Tag	negative Phase	kritischer Tag	0,0055
25	kritischer Tag	kritischer Tag	positive Phase	0,0042
26	kritischer Tag	kritischer Tag	negative Phase	0,0042
27	kritischer Tag	kritischer Tag	kritischer Tag	0,0008
			$\sum$	1,0002.

Das Spielchen lässt sich weitertreiben. Aber wir wissen eigentlich genug. Jeder vierte Tag ist in irgendeiner Beziehung ein kritischer Tag. Und in 84 von 100 Fällen kann man mit zumindest einem positiven Wert rechnen, in 16 mit keinem.
Welcher Mensch wollte wohl sein Leben (und welcher ökonomische Direktor den Betrieb seines Hafens) nach solchen Werten einrichten? Der nüchterne Zugriff der Mathematik löst die magischen Zukunftsvisionen auf.

Wir kehren lieber nochmals zu den Überlegungen über die Wahrscheinlichkeit zurück, die uns in Zedlers Universal-Lexikon so begeistert haben. Dort war vermutet worden, dass man mit zwei Würfeln leichter die Augenzahl 7 als 12 würfelt, ohne dass das exakt berechnet werden konnte.
Dazu genügt jedoch die folgende einfache Aufstellung:

1. Würfel	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
2. Würfel	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Ges. Augen	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9
1. Würfel	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
2. Würfel	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Ges. Augen	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	12

Die Gesamtzahl der möglichen Variationen mit beiden Würfeln beträgt 36. Das kann man leicht auszählen oder auch nach der uns bekannten Formel berechnen:

$$V_{W6}^{(2)} = 6^2 = 36$$

Aus der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Augenzahl ergibt sich:

Augenzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit $\frac{k}{n}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
in %	2,8	5,6	8,3	11,1	13,9	16,7	13,9	11,1	8,3	5,6	2,8

Leider sind wir nicht in der Lage, das andere bei Zedler gegebene Beispiel nachzurechnen, bei dem nach der Wahrscheinlichkeit des Ausgangs einer Heirat zwischen einer sehr alten und geizigen Mannsperson und einer sehr jungen, frei erzogenen Weibsperson gefragt wurde.

Auch die Mathematik hat eben ihre Grenzen. Keine der Definitionen der Wahrscheinlichkeit hilft uns hier weiter.

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gut geeignet, uns glückliche Stunden im Leben eines Lottospielers verständlich zu machen. Bei einer Wette 5 aus 35 einen Hauptgewinn zu erzielen ist - wie wir oben gesehen haben - nicht einfach; die Chancen stehen 1 : 324632. Aber glücklich sind manche auch schon, wenn wenigstens eine der getippten Zahlen gezogen wird. Und dieses Glück lässt sich berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der ersten Zahl keine der angekreuzten fünf Ziffern der gezogenen entspricht, ist $\frac{30}{35}$. Bei der zweiten Zahl ist diese Wahrscheinlichkeit folglich $\frac{29}{34}$ bei der dritten $\frac{28}{33}$, bei der vierten $\frac{27}{32}$, bei der fünften schließlich $\frac{26}{31}$.
Dass diese fünf Ereignisse gleichzeitig eintreten (dass also keine der angekreuzten Zahlen gezogen wird), hat nach dem Multiplikationssatz eine Wahrscheinlichkeit von:

$$P(\overline{E}) = \frac{30}{35} \cdot \frac{29}{34} \cdot \frac{28}{33} \cdot \frac{27}{32} \cdot \frac{26}{31} = 0{,}43892 \hat{=} 43{,}89\%$$

Wenigstens eine Zahl wird demzufolge gezogen mit der Wahrscheinlichkeit von

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 56{,}11\%$$

Wenn dann noch einige Zahlen »dicht dran« liegen, ist der Optimismus für die nächste Ziehung bereits groß genug, um erneut ins Portemonnaie zu greifen und zu tippen.

Wesentlich schwerer hat es da der Astrologe! Wenn er einen Vortrag hält, lebt er schon bei zehn Zuhörern gefährlich, sobald er anfängt, Horoskope zu stellen. Auch diese Gefahr erklärt die Mathematik:

Die Astrologen teilen die zwölf Tierkreiszeichen in jeweils drei Dekanate ein, wie wir uns

erinnern. Das ergibt 36 Grundtexte für Horoskope, die für im gleichen Dekanat geborene Personen sehr ähnlich sein müssen. Sitzen nun in einem Vortrag mehr als 36 Personen, so sind mit Sicherheit mindestens zwei im gleichen Dekanat geboren. Aber auch, wenn weniger als 36 Personen gekommen sind, ist das Risiko erheblich, zwei dem Referenten fremden Menschen ein grundsätzlich gleiches Horoskop anzubieten.
Wir berechnen seine Chancen:

Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt einer Person in einem bestimmten Dekanat beträgt

$$P(E_1) = \frac{1}{36}$$

Dafür, dass eine zweite Person nicht im gleichen Dekanat wie die erste geboren ist, bleiben 35 von 36 Dekanaten übrig. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese zwei Personen nicht im gleichen Dekanat geboren sind, beträgt demnach

$$P(\overline{E}_2) = \frac{36}{36} \cdot \frac{35}{36} = 0{,}9722 \widehat{=} 97{,}22\%$$

Demzufolge sind sie mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(E_2) = 1 - \frac{36}{36} \cdot \frac{35}{36} = 0{,}0278 \widehat{=} 2{,}78\%$$

im gleichen Dekanat geboren. Fassen wir diesen Sachverhalt allgemeiner, so lässt sich sagen, dass bei n Personen ($n \leq 36$) die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht im gleichen Dekanat geboren sind,

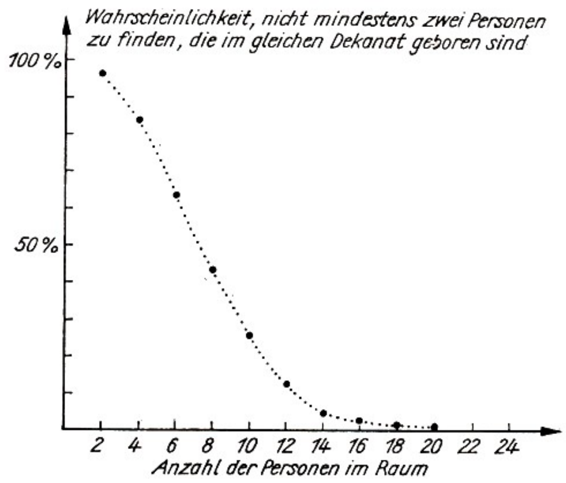
$$P(\overline{E}_n) = \frac{36}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{34}{36} \cdot ... \cdot \frac{36-n+1}{36}$$

und dafür, dass sie im gleichen Dekanat geboren sind,

$$P(E_n) = 1 - P(\overline{E}_n)$$

beträgt. Mit diesen Formeln lässt sich die folgende Übersicht angeben:

Personen im Raum	Wahrscheinlichkeit, nicht mindest. 2 Personen zu finden, die im gleichen Dekanat geboren sind	Wahrscheinlichkeit, mindest. 2 Personen zu finden, die im gleichen Dekanat geboren sind
2	0,9722 = 97,22%	0,0278 = 2,73%
4	0,8417 = 84,17%	0,1583 = 15,83%
6	0,6443 = 64,43%	0,3557 = 35,57%
8	0,4325 = 43,25%	0,5675 = 56,75%
10	0,2522 = 25,22%	0,7478 = 74,78%
12	0,1265 = 12,65%	0,8735 = 87,35%
14	0,0539 = 5,39%	0,9461 = 94,61%
16	0,0192 = 1,92%	0,9808 = 98,08%
18	0,0056 = 0,56%	0,9944 = 99,44%
20	0,0013 = 0,13%	0,9987 = 99,87%
22	0,0002 = 0,02%	0,9998 = 99,98%
24	Wert außerhalb der Stellenzahl	1,0000 = 100,00



Grafische Darstellung zur Tabelle

In der grafischen Darstellung wird das noch klarer. Man sieht, mit welcher erstaunlichen Geschwindigkeit die Wahrscheinlichkeit wächst, dass der Astrologe zwei im gleichen Dekanat geborene Personen sogar in einem sehr kleinen Zuhörerkreis vorfindet. Sind diese dann noch temperamentvoll, kritisch und gegensätzlich veranlagt und erkennen sich gegenseitig, dann ist für den Redner zu fürchten.

Die Mathematik vermag auf diese Weise zu erklären, warum Horoskope entweder in Einzelabfertigung erstellt oder in Zeitungen anonym verbreitet werden: Die Gefahr, dass sich mehrere genasführte Zuhörer protestierend zusammentun, wird so gebannt.
Wie groß diese Gefahr ist, zeigt uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

5.5 Bedingte und totale Wahrscheinlichkeiten

Bisher haben wir angenommen, dass es für das Eintreten oder Nichteintreten eines Ereignisses gleichgültig ist, ob zuvor ein anderes Ereignis eingetreten ist oder nicht. Der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde unter der Voraussetzung angewendet, dass die betrachteten Ereignisse unabhängig voneinander ablaufen.

Ein kritischer Tag im emotionalen Zyklus des Biorhythmus beispielsweise hat keinerlei Einfluss auf den Stand des geistigen Zyklus. Die zu unabhängigen Ereignissen gehörigen Wahrscheinlichkeiten werden unbedingte Wahrscheinlichkeiten genannt; die Bedingungen des einen Ereignisses sind nicht Bedingungen auch des zweiten.

Eine solche Voraussetzung ist jedoch nicht bei allen Ereignissen gegeben. Oft muss die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses E_1 bestimmt werden, dessen Voraussetzung ein zweites Ereignis E_2 ist, das ebenfalls mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eintritt. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit heißt bedingte Wahrscheinlichkeit und wird geschrieben: $P(E_1/E_2)$, gelesen: Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Voraussetzung E_2.

Nehmen wir als Beispiel wieder die Familie, deren Schrankwand uns bereits mit den Permutationen vertraut werden ließ. An einem Sonntag (die Renovierung war lange vergessen) fuhr die Familie in die Pilze. Das Sammlerglück war ihr hold, und in kurzer Zeit waren hundert Pilze gefunden.

Der Mann wusste, dass unter diesen Pilzen 90% essbar und davon wiederum 40% Steinpilze

waren. Bevor er seine Schätze zu Hause genauer sichten konnte, legte er sich zu einem kleinen Schläfchen aufs Sofa.
Die Frau wollte jedoch nicht so lange warten, bereitete sich einen Pilz zu und verzehrte ihn.
Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie einen Steinpilz gegessen?

Hinsichtlich einer Pilzvergiftung wäre ein solcher Blick in die Zukunft ja nicht uninteressant. Zunächst betrachten wir die Ereignisse genauer:

E_1: Ein essbarer Pilz wurde aus dem Korb genommen.

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt $P(E_1) = 0{,}90$.

E_2/E_1: Der essbare Pilz war ein Steinpilz.

Die zugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit beträgt $P(E_2/E_1) = 0{,}40$. Nach dem Multiplikationssatz lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen der Ereignisse E_1 und E_2 (essbarer Pilz und Steinpilz) berechnen:

$$P = P(E_1)P(E_2/E_1) = 0{,}90 \cdot 0{,}40 = 0{,}36$$

Während ihr Mann schlief, hat die Ehefrau also mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % einen Steinpilz gegessen.

Ebenso besteht, wenn eine Pralinenschachtel 70% gefüllte und davon 30%, mit Eierlikör gefüllte Pralinen enthält, beim ersten Zugriff eine Wahrscheinlichkeit von 21%, zufällig eine mit Eierlikör gefüllte Praline zu erwischen.
Hier ist es übrigens anders als beim Lottospiel: Hat man beim erstenmal kein Glück gehabt, so bleibt aufgrund der begrenzten Gesamtmenge der Trost, dass sich die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs für den nächsten Griff erhöht hat.

Eine Wahrscheinlichkeit, bei der die Ereignisse in anderer Weise voneinander abhängig sind als in den letzten beiden Beispielen, wollen wir uns im folgenden Beispiel verdeutlichen.
Wer hat sich nicht schon zitternd und schlaflos nach dem Ausgang einer bevorstehenden Prüfung gefragt?
Ein cleverer Prüfling, der die Prüfungsbedingungen genau kennt und seine eigenen Voraussetzungen objektiv einzuschätzen versteht, könnte sich solche Aufregung ersparen.

Nehmen wir einmal an, dass sechs Schwerpunkte vorgegeben wurden, deren Anteil an der Prüfung folgendermaßen bemessen wird:

1 10%; 2 35%; 3 15%; 4 20%; 5 5%; 6 15%

Da der Prüfling sich genau kennt, weiß er, dass er vom ersten Schwerpunkt 70%, der Fragen, vom zweiten 80%, von den Schwerpunkten 3 und 4 nur 30%, vom Schwerpunkt 5 60% und vom letzten sogar 90% der Fragen beantworten kann. Mit welchem Ereignis er die Prüfung bestehen wird, ist also kein Geheimnis mehr.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E (Durchkommen durch die Prüfung) berechnet man aus der Summe der nachfolgend angegebenen Produkte:

$$P(E) = 0{,}10 \cdot 0{,}70 + 0{,}35 \cdot 0{,}80 + 0{,}15 \cdot 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 0{,}30 + 0{,}05 \cdot 0{,}60 + 0{,}15 \cdot 0{,}90 = 0{,}62$$

Im Durchschnitt wird der Prüfling also 62%, der Fragen beantworten können. Es läuft damit alles auf eine nicht allzu starke Drei hinaus.

Damit wurde ein Satz angewendet, der als Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit bekannt ist. Allgemein heißt er:

Sind n zufällige, einander ausschließende Ereignisse E_1, E_2, ..., E_n (hier 6 Schwerpunkte) gegeben, deren Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ist (da nur die 6 Schwerpunkte geprüft werden, keine anderen), kann die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Ereignis E nach der folgenden Beziehung ermittelt werden:

$$P(E) = P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + ... + P(E_n)P(E/E_n)$$

Erneut treffen wir, um uns diesen Satz noch etwas zu verdeutlichen, die Pilze essende, Schrankwände umbauende Ehefrau. Diesmal steht sie mit einem Kinderwagen an einem Verkehrsknotenpunkt, von dem fünf Buslinien sie nach Hause bringen können, und fragt sich, mit welcher Linie sie wohl mitkommen werde. Sie weiß:

Linie A fährt alle	5 Minuten, zu	60% kommt ein Kinderwagen mit
B	15	80%
C	25	10%
D	30	30%
E	45	50%

Nun nimmt sie Papier und Bleistift und rechnet: Die Wahrscheinlichkeit für das Kommen der Linie E betrage x.
Dann betragen die Wahrscheinlichkeiten für Linien A $9x$, Linie B $3x$, Linie C $\frac{9}{5}x$, Linie D $\frac{3}{2}x$.
Wenn überhaupt ein Bus kommt, so gilt $P = 1$. Also:

$$9x + 3x + 1{,}8x + 1{,}5x + x = 1 \qquad 16{,}3x = 1 \qquad x = 0{,}062$$

Der nächste Wagen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von:

55,2%	ein Wagen der Linie	A sein
18,4%		B
11,0%		C
9,2%		D
6,2%		E

Nun rechnet sie nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(E) &= 0{,}552 \cdot 0{,}6 + 0{,}184 \cdot 0{,}8 + 0{,}110 \cdot 0{,}1 + 0{,}092 \cdot 0{,}3 + 0{,}062 \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}331 + 0{,}147 + 0{,}011 + 0{,}028 + 0{,}031 = 0{,}548 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 54,8%, bietet der nächste Bus die Möglichkeit, einen Kinderwagen mitzunehmen!
Im Laufe der Zeit ist die Frau jedoch vorsichtig geworden.
Sie weiß, dass auch bei dieser hohen Wahrscheinlichkeit von über 50% selbst der übernächste Wagen noch überfüllt sein kann. Vorsorglich überlegt sie weiter:

Dass der nächste Wagen keinen Kinderwagen mitnimmt, hat eine Wahrscheinlichkeit von 45,2%. Nach dem Multiplikationssatz gibt es deshalb für den übernächsten Wagen

$$0{,}452 \cdot 0{,}452 = 0{,}204 \quad (20{,}4\%)$$

und für die nächsten drei Busse

$$0{,}452 \cdot 0{,}452 \cdot 0{,}452 = 0{,}092 \quad (9{,}2\%)$$

Wahrscheinlichkeit, dass sie stehenbleiben muss.
Nachdem sie viermal stehengeblieben war, näherte sie sich dem fünften Bus mit 98,1% iger Gewissheit, dass sie diesmal Glück haben würde. Und die Mathematik täuschte sie nicht.

5.6 Wahrscheinlichkeitsvorhersagen

Was die arme Frau in der Verzweiflung des Wartens versucht hat, kann man zweifellos als eine Art Blick in die Zukunft ansehen. Und jedem steht es frei, in ähnlichen Situationen nach ihrer Methode zu verfahren.
Die Mathematik macht es sich jedoch nochmals schwerer.

Sie schaut genauer hin und stellt fest, dass es ein Unterschied ist, ob man - wie unsere Beispielsfrau - nach der Wahrscheinlichkeit von unbegrenzt vielen zufälligen Ereignissen fragt (mit wie vielen Bussen sie zu tun bekommen würde, wusste sie ja vorher nicht) oder ob es um eine begrenzte, endlich große Menge von Versuchen geht, innerhalb derer nach der Verteilung bestimmter möglicher Ereignisse gefragt wird.
Eine Zahlenangabe über solche betrachteten zufälligen Ereignisse in einer Gesamtmenge von Versuchen nennt der Mathematiker Zufallsgröße und bezeichnet sie mit dem Buchstaben Z.

Mit solchen Zufallsgrößen wollen wir uns im folgenden ein wenig beschäftigen. Nur am Rande erwähnen wir, dass es dabei um sogenannte diskrete Zufallsgrößen geht, was nichts mit besonderer Verschwiegenheit zu tun hat, sondern in der Fachsprache der Mathematiker und Physiker besagt, dass der Betrag dieser Größe sich immer in endlich großen Schritten ändert.

Daneben gibt es auch stetige Zufallsgrößen, die in einem Intervall jeden beliebigen Wert annehmen können (so sind z. B. die Weiten beim Kugelstoßen stetige Werte, die dann nur durch die beschränkte Genauigkeit der Messgeräte und zwecks einfacherer Handhabung auf diskrete Werte, nämlich Zentimeterangaben, zurückgeführt werden).
Mit diskreten Zufallsgrößen haben wir es etwa beim Würfelspiel zu tun. Es kann uns helfen, einige Zusammenhänge der Zufallsgrößen klarzumachen.

Ein Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 kann entweder eine gerade oder eine ungerade Augenzahl anzeigen. Wir bezeichnen das erste Ereignis (gerade Augenzahl 2, 4, 6) mit G, das zweite (ungerade Augenzahl 1, 3, 5) mit U. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind klar:

$$P(G) = P(U) = \frac{1}{2}$$

Uns interessiert nun, wie oft bei einer bestimmten Anzahl von Würfen eine ungerade Zahl fallen wird. Wird z.B. dreimal gewürfelt, so können die Werte für Z zwischen 0 und 3 liegen. Alle möglichen Spielausgänge zeigt die folgende Tabelle:

Möglichkeit	1. Wurf	2. Wurf	3. Wurf	Wert von Z	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
1.	G	G	G	0	$P(G) \cdot P(G) \cdot P(G) = \frac{1}{8}$
2.	G	G	U	1	$P(G) \cdot P(G) \cdot P(U) = \frac{1}{8}$
3.	G	U	G	1	$P(G) \cdot P(U) \cdot P(G) = \frac{1}{8}$
4.	G	U	U	2	$P(G) \cdot P(U) \cdot P(U) = \frac{1}{8}$
5.	U	G	G	1	$P(U) \cdot P(G) \cdot P(G) = \frac{1}{8}$
6.	U	G	U	2	$P(U) \cdot P(G) \cdot P(U) = \frac{1}{8}$
7.	U	U	G	2	$P(U) \cdot P(U) \cdot P(G) = \frac{1}{8}$
8.	U	U	U	3	$P(U) \cdot P(U) \cdot P(U) = \frac{1}{8}$

Für $Z = 0$ ist danach 1 Fall von 8 günstig: Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8} = 0{,}125$.
Für $Z = 1$ ist danach 3 Fälle von 8 günstig: Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8} = 0{,}375$.
Für $Z = 2$ ist danach 3 Fälle von 8 günstig: Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Für $Z = 3$ ist danach 1 Fall von 8 günstig: Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ergibt nach dem Additionssatz wieder 1 - was für die Ermittlung aller Zufallsgrößen einer Gesamtmenge Bedingung ist.
$P(G)$ muss jedoch durchaus nicht immer wie in unserem Würfelspiel gleich $P(U)$ sein. Deshalb müssen wir uns für andere Fälle in einer allgemeineren Fassung die Operation klarmachen, die eben vollzogen wurde:
Nachdem nach dem Multiplikationssatz die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Möglichkeiten in der Tabelle berechnet worden sind, konnten nach dem Additionssatz die Wahrscheinlichkeiten für die Z-Werte bestimmt werden. In der Formelsprache sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(G)\cdot P(G)\cdot P(G) = P(G)^3\\
P(Z=1) &= P(G)\cdot P(G)\cdot P(U) + P(G)\cdot P(U)\cdot P(G) + P(U)\cdot P(G)\cdot P(G)\\
&= 3P(G)^2\cdot P(U)\\
P(Z=2) &= P(G)\cdot P(U)\cdot P(U) + P(U)\cdot P(G)\cdot P(U) + P(U)\cdot P(U)\cdot P(G)\\
&= 3P(G)\cdot P(U)^2\\
P(Z=3) &= P(U)\cdot P(U)\cdot P(U) = P(U)^3
\end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen entdecken wir hier sofort eine der bekannten binomischen Formeln:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

In unserem Falle ist $a = P(G)$ und $b = P(U)$. Mit Binomialkoeffizient geschrieben, lässt sich das Ergebnis endgültig wie folgt fassen: (zur Erinnerung: $a^0 = 1$, wenn $a \neq 0$)

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= \binom{3}{0} P(G)^3\cdot P(U)^0\\
P(Z=1) &= \binom{3}{1} P(G)^2\cdot P(U)^1\\
P(Z=2) &= \binom{3}{2} P(G)^1\cdot P(U)^2\\
P(Z=3) &= \binom{3}{3} P(G)^0\cdot P(U)^3
\end{aligned}$$

Bevor wir uns mit der ungleichen Wahrscheinlichkeit zweier Ausgänge eines Ereignisses noch etwas weiter befassen, können wir an dieser Stelle eine zweite Verallgemeinerung unseres Würfelbeispiels vornehmen:

Es wird nicht dreimal, sondern ganz allgemein n-mal hintereinander gewürfelt. Der Wert von Z liegt dann $0 \leq Z \leq n$.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Z-Wert in diesem Intervall ist nach dem bisher im Beispiel Ausgeführten gleich

$$P(Z) = \binom{n}{z} P(G)^{n-z} P(U)^z$$

Damit können wir z. B. die Frage beantworten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 22 Würfen genau viermal eine ungerade Augenzahl auftritt ? Antwort:

$$P(4) = \binom{22}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{18}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{22!}{18!4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{22} = \frac{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{34}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{22} = 0{,}001744 = 0{,}17\%$$

Nun aber noch ein Stück weiter im Nachdenken über ungleiche Wahrscheinlichkeiten. Dass wir hier nicht lockerlassen, hat seinen praktischen Hintergrund.
Beim Würfelspiel kann uns die gleiche Wahrscheinlichkeit der beiden Ausgänge U und G gleichgültig bleiben. Bei der Gütekontrolle von Armbanduhren etwa wäre es schon ein Debakel, würden einwandfrei funktionierende Uhren und Ausschuss im Verhältnis 1 : 1 produziert.

Für solche Fälle ungleicher Wahrscheinlichkeiten brauchen wir eine möglichst allgemeine Bestimmung. Sie lässt sich aus dem bisher Gesagten leicht entwickeln:

Hat ein Versuch zwei mögliche Ereignisse E_1 und E_2 zum Ausgang, die eine Wahrscheinlichkeit von

$$p = P(E_1) \qquad \text{und} \qquad q = P(E_2)$$

besitzen (hier ist im allgemeinen $p \neq q$, wohl aber $p + q = 1$, da es sich bei E_1 und E_2 immer um Komplementärereignisse handeln muss wie etwa

E_1	E_2
Qualitätsnorm erfüllt	Ausschuss
weibliches Kind geboren	männliches Kind geboren
kritischer Tag des Biorhythmus	kein kritischer Tag usw.)

so berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Einzelversuchen z-mal das Ereignis E_1 eintritt (und demzufolge bei $(n-z)$-mal das Ereignis E_2, nach der Formel

$$P_n(Z) = \binom{n}{z} \cdot p^z \cdot q^{n-z}$$

Dabei kann z die Werte $0, 1{,}2{,}..., (n-1), n$ annehmen.
Als Beispiellieferanten nutzen wir nochmals den Biorhythmus und interessieren uns wie die Hafendirektoren zu Beginn für die kritischen Tage im physischen Zyklus von zehn Arbeitern. Nach dem im Abschnitt Programmabläufe aufgestellten Algorithmus druckt der Rechner für die Tage 0, 11, 12 einen kritischen Tag aus.
Bei insgesamt: 23 Tagen des physischen Zyklus kommt mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(E_1) = \frac{3}{23} = 13{,}04\%$$

in der Rechnerausgabe ein kritischer Tag vor. Demzufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Tag kein kritischer Tag ist,

$$P(E_2) = 86{,}96\%$$

Für die uns interessierenden zehn Arbeiter (wir hätten natürlich auch eine andere Zahl nehmen können) lassen wir nun zehn Computerausdrucke anfertigen. Noch bevor wir diese Ausdrucke haben, können wir mit Hilfe der uns inzwischen geläufigen Verfahren zur Wahrscheinlichkeitsvorhersage feststellen, mit welchen Ergebnissen wir für die Ereignisse von $z = 0$ (kein kritischer Tag in allen 10 Ausdrucken) bis $z = 10$ (kritische Tage in allen 10 Ausdrucken) durchschnittlich zu rechnen haben:

$$P(E_1) = 0{,}130, \qquad P(E_2) = 0{,}870$$
$$P_{10}(Z) = \binom{10}{z} P(E_1)^z P(E_2)^{10-z} = \binom{10}{z} 0{,}130^z \cdot 0{,}870^{10-z}$$

Zusammengestellt sehen die Ergebnisse so aus:

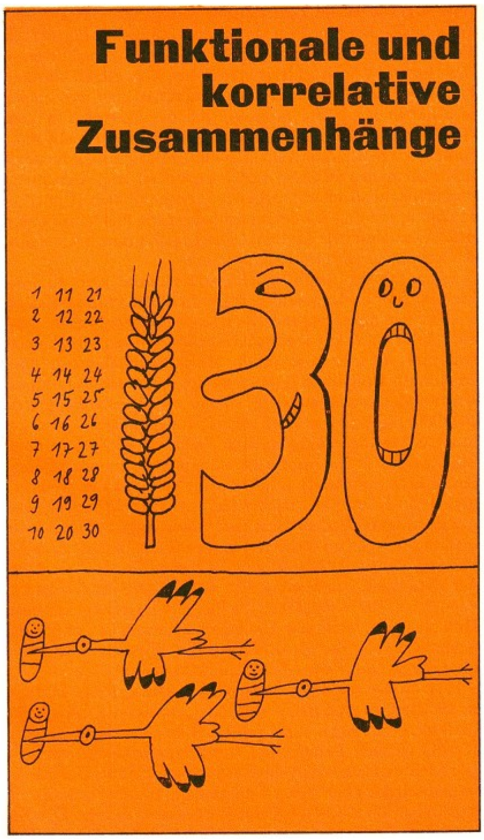
Z	$P_{10}(Z)$	
0	$\binom{10}{0}0{,}130^0 \cdot 0{,}870^{10} = 1 \cdot 0{,}870^{10}$	= 0,2484232
1	$\binom{10}{1}0{,}130^1 \cdot 0{,}870^9 = 10 \cdot 0{,}130^1 \cdot 0{,}870^9$	= 0,3712070
2	$\binom{10}{2}0{,}130^2 \cdot 0{,}870^8 = 45 \cdot 0{,}130^2 \cdot 0{,}870^8$	= 0,2496048
3	$\binom{10}{3}0{,}130^3 \cdot 0{,}870^7 = 120 \cdot 0{,}130^3 \cdot 0{,}870^7$	= 0,0994594
4	$\binom{10}{4}0{,}130^4 \cdot 0{,}870^6 = 210 \cdot 0{,}130^4 \cdot 0{,}870^6$	= 0,0260080
5	$\binom{10}{5}0{,}130^5 \cdot 0{,}870^5 = 252 \cdot 0{,}130^5 \cdot 0{,}870^5$	= 0,0046635
6	$\binom{10}{6}0{,}130^6 \cdot 0{,}870^4 = 210 \cdot 0{,}130^6 \cdot 0{,}870^4$	= 0,0005807
7	$\binom{10}{7}0{,}130^7 \cdot 0{,}870^3 = 120 \cdot 0{,}130^7 \cdot 0{,}870^3$	= 0,0000496
8	$\binom{10}{8}0{,}130^8 \cdot 0{,}870^2 = 45 \cdot 0{,}130^8 \cdot 0{,}870^2$	= 0,0000028
9	$\binom{10}{9}0{,}130^9 \cdot 0{,}870^1 = 10 \cdot 0{,}130^9 \cdot 0{,}870^1$	= 0,0000000
10	$\binom{10}{10}0{,}130^{10} \cdot 0{,}870^0 = 1 \cdot 0{,}130^{10}$	= 0,0000000

Für $Z = 9$ und für $Z = 10$ sind die Ergebnisse mit den von uns berücksichtigten Stellen hinter dem Komma nicht von 0 zu unterscheiden, aber natürlich $\neq 0$.
Unter jeweils zehn Computerausgaben sind demzufolge mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,6% vier Ausgaben mit einem kritischen Tag im physischen Zyklus. Alle zehn Ausgaben enthalten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,00% einen kritischen Tag, und die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den zehn Ausgaben keine mit einem kritischen Tag befindet, beträgt immerhin 24,84%. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben (0,9999990).

Zusammenfassend können wir feststellen: Gibt es bei einem Versuch genau zwei mögliche Ausgänge, deren Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, so kann berechnet werden, wie viele von n Versuchen genau z-mal vorkommen.
Würfel und Biorhythmusvoraussagen sind sicher nicht die wichtigsten Anwendungsbereiche für solche Voraussagen, auch wenn sie uns zu ihrer Verdeutlichung dienten. Die Tragweite dieser Feststellung wird jedoch sofort sichtbar, wenn wir an die Selektion schadhafter Bauteile und an die Probleme der Qualitätskontrolle denken.

Wir erwähnen abschließend zu diesem Abschnitt über Wahrscheinlichkeitsvorhersage, dass sich aus den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen sofort Verteilungsfunktionen aufstellen lassen. Eine diskrete Zufallsgröße wie im Falle der geraden oder ungeraden Würfelergebnisse ergibt auch eine diskrete Verteilungsfunktion.
Im konkreten Beispiel entsteht die Funktion einer Binomialverteilung, die unstetig ist und für die Werte von Z Sprungstellen aufweist. In der entsprechenden Fachliteratur findet man im Bedarfsfalle genauere Hinweise, Beispiele und die Theorie dieses interessanten Problems.

6 Funktionale und korrelative Zusammenhänge



Wir könnten es an dieser Stelle genug sein lassen. Die Mathematik hat uns dazu verholfen, ein bisschen hinter den Vorhang zu blicken, der vor dem Zufall und seiner Vorhersage hängt. Uns ist klarer geworden, was durch mathematische Methoden exakt vorhersagbar ist und was nicht.
Wir haben vor allem gesehen, dass der Spekulation von einzelnen auf einen Blick in ihre Zukunft zwar nicht entsprochen werden kann, dass aber Massenereignisse sehr wohl und sehr genau in ihren mathematischen Aspekten auch vorausschauend charakterisiert werden können. Von der Hoffnung auf den Biorhythmus haben wir uns verabschiedet.
Aber sind wir in den Grundlagen unseres Denkens dadurch nicht eher fester geworden?

Wenn wir den Schluss noch etwas hinauszögern, so deshalb, weil wir einen anderen Punkt noch unterstreichen wollen, der unausgesprochen unseren Betrachtungen vorausgesetzt war.

Alle schönen Kenntnisse über Komplexionen und Algorithmen, totale Wahrscheinlichkeiten und bestimmte Ereignisse nützen wenig, wenn man sie nicht anzuwenden versteht, d.h., wenn man nicht fähig ist, Erscheinungen in der Wirklichkeit auf ihr Wesentliches zu untersuchen und dazu sinnvolle Fragen zu stellen.

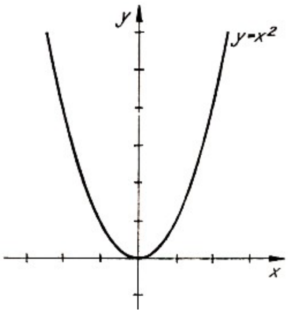
In dem Stück, das wir für unsere Betrachtungen aus der Mathematik herausgeschnitten haben, war es nicht nur wichtig, gesicherte Kenntnisse zu besitzen. Auszurichten war erst etwas, wenn außerdem diese Kenntnisse angewendet, wenn kritische Fragen zu bestimmten Zusammenhängen gestellt wurden, die deren Einordnung in das vorhandene System der Kenntnisse gestatteten.
Ein mathematisches Gesetz zu kennen ist sehr schön. Ohne die Fähigkeit, es zur genaueren Untersuchung konkreter Ereignisse anzuwenden, nutzt die Schönheit zwar der Entwicklung der Wissenschaft, nicht aber allen nichtwissenschaftlichen Fragen.

Was an der angeblich so trockenen und exakten Mathematik studiert und geübt werden kann, ist die Fähigkeit, umfassend zu fragen, nicht nur ein Stück aus einem Ganzen für die eigenen Fähigkeiten zurechtzuschneiden, sondern alle Richtungen eines Problems systematisch auszuforschen, immer wieder neue Fragen zu stellen, ständig kritisch zu ergründen, ob keine Möglichkeit vergessen wurde.
Das ist ein hoher Anspruch, aber auch ein lohnendes Ziel - nicht nur für Mathematiker, sondern für bewusst lebende Menschen überhaupt.

Wir werden wieder konkret: Wer meint, mit den bisherigen Betrachtungen zum Zufall und seiner Vorhersage die möglichen Aspekte mathematischer Zusammenhänge zwischen zwei oder mehreren Ereignissen erfasst zu haben, der irrt. Alle Formeln und Überlegungen, von denen im letzten Kapitel die Rede war, beziehen sich nur auf funktionale Zusammenhänge. Immer konnte gesagt werden:

Wird jedem Wert der unabhängigen Variablen x aus dem Definitionsbereich ein Wert y des Wertbereiches eindeutig zugeordnet, so heißt die Menge der geordneten Paare (x, y) eine Funktion. Wichtig hierbei ist die Betonung der eindeutigen Zuordnung.

Wir geben ein aus dem Schulunterricht bekanntes Beispiel: Durch die Vorschrift $y = x^2$ wird jeder reellen Zahl ihr Quadrat zugeordnet. Ausschnitte dieser Funktion finden sich entweder in der Zahlentafel (Quadrattafel) oder in graphischer Darstellung in der bekannten Normalparabel. Alle Zuordnungen sind eindeutig. Es gibt aber auch andere Zuordnungen zweier oder mehrerer Werte.



Normalparabel

6.1 Zusammenhang zwischen Korngröße und Korngewicht einer Ähre

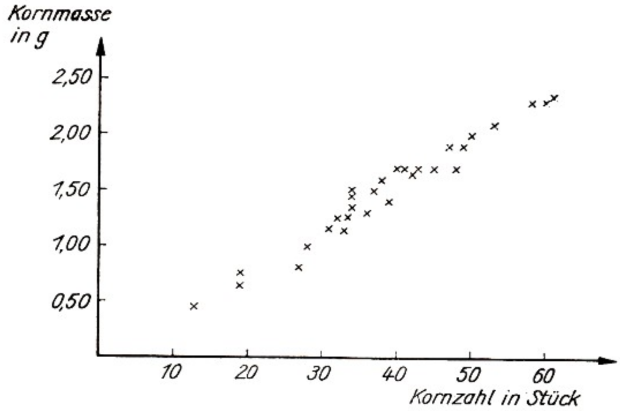
Die Vermutung ist naheliegend, dass eine Weizenähre mit größerer Kornzahl auch eine größere Gesamtkornmasse hat. Hätten wir es mit einem funktionalen Zusammenhang dieser beiden Größen zu tun, so müsste jedes Korn mehr in der Ähre auch eine eindeutige Veränderung des Gesamtgewichts der Ähre bewirken.

Wäre dieser Zusammenhang einmal mathematisch dargestellt, so könnte der Bauer auf ein Feld gehen, die Körner einer Ähre auszählen und dann (wenn er weiß, wie viele Ähren auf einer bestimmten Fläche wachsen) den Ertrag des gesamten Feldes genau berechnen.
Aber könnte es nicht auch sein, dass mit steigender Kornzahl die Körner der Ähre kleiner werden und somit durchaus keine eindeutige Steigerung der Gesamtkornmasse eintritt?

Um die beiden Vermutungen auf eine reale Basis zu bringen, damit wir uns zwischen ihnen begründet entscheiden können, haben wir einen Versuch unternommen.
Die Kornzahl von dreißig zufällig herausgegriffenen Ähren wurde ermittelt und anschließend ihre Massen bestimmt.

Nr.	Kornzahl in St.	Kornmasse in g	Nr.	Kornzahl in St.	Kornmasse in g	Nr.	Kornzahl in St.	Kornmasse in g
1	13	0,45	11	35	1,45	21	43	1,70
2	19	0,85	12	35	1,50	22	45	1,70
3	19	0,75	13	36	1,30	23	47	1,90
4	27	0,80	14	37	1,50	24	48	1,70
5	28	1,00	15	38	1,60	25	49	1,90
6	33	1,15	16	39	1,40	26	50	2,00
7	32	1,25	17	40	1,70	27	53	2,10
8	33	1,15	18	41	1,70	28	58	2,30
9	34	1,25	19	41	1,70	29	60	2,30
10	35	1,35	20	42	1,65	30	61	2,35

Allgemeiner ausgedrückt: Zu einer begrenzten Menge von unabhängigen Variablen (Kornzahl der Ähre) wurden die abhängigen Variablen (Gesamtkornmasse der Ähre) bestimmt. Es entstand die folgende, hier nach der Größe der ermittelten Kornzahlen geordnete Messreihe (siehe vorhergehende Seite).
Die Darstellung der dreißig Werte in einer Grafik zeigt noch einmal anschaulich, dass hier kein funktionaler Zusammenhang vorliegen kann.



Streudiagramm

Gleichzeitig zeigt diese Abbildung jedoch auch, dass zwischen den beiden Variablen sehr wohl ein linearer Zusammenhang vermutet werden kann.
Die Gesamtkornmasse der Ähren hat die Tendenz, proportional zur Kornzahl der Ähren anzusteigen. Ein solcher Zusammenhang, der nur in Form einer Häufigkeitsverteilung besteht, wird stochastisch oder korrelativ genannt.

Die abhängigen Variablen sind nicht mehr deterministisch oder funktional, sondern stochastisch bestimmt, d. h., dass bei gegebenen Werten der unabhängigen Variablen (Kornzahl der Ähre) die Werte der abhängigen Veränderlichen (Gesamtkornmasse der Ähre) nicht völlig bestimmt angegeben werden können, sondern in einem bestimmten Intervall zufallsbedingt streuen.

Das ist, so kann festgestellt werden, gegenüber der Schulmathematik eine völlig neue Betrachtungsweise. Hier ist der Zufall in die Betrachtung einbezogen und bestimmt die Ergebnisse im Detail. (Gäbe es eine universale Weltformel, so müsste sie auf jeden Fall stochastisch sein; denn der Zufall wirkt überall in unserer Umgebung.)

Die zahlenmäßige Größenbestimmung solcher korrelativen Zusammenhänge erfolgt durch einen sogenannten Korrelationskoeffizienten. Wir ersparen uns und den Lesern hier einige Ableitungen und teilen nur mit, dass dieser Koeffizient immer zwischen -1 und $+1$ liegt:

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

Die Formel für die Berechnung des linearen Korrelationskoeffizienten (auf andere Arten von Koeffizienten kommen wir gleich zu sprechen) lautet:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - \overline{x} \sum y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2 - \overline{x} \sum x_i)(\sum y_i^2 - \overline{y} \sum y_i)}}$$

Das sieht zunächst erschreckend aus, aber so schlimm ist es gar nicht. Wir lesen zuerst die Formel und wenden sie dann an, um den linearen Korrelationskoeffizienten für unser Ährenbeispiel anhand der Tabelle zu berechnen.

Der Korrelationskoeffizient zwischen den Variablen x und y ist also ein Bruch. In seinem Zähler

steht eine Differenz, die aus der Summe der Produkte aller Messwertpaare minus dem Produkt aus dem Mittelwert der x-Werte und der Summe aller y-Werte gebildet wird.
(Wir bemerken dabei die Schreibweise der Mathematiker für Mittelwerte - einen Strich über dem Symbol - und für Summen - den griechischen Buchstaben Sigma. Die Bestimmung der Mittelwerte beherrscht jedes Kind: Man addiert alle Werte und dividiert durch die Anzahl.)

Im Nenner des Bruches wird die Wurzel aus einem Produkt gezogen, wobei die einzelnen Faktoren jeweils eine Differenz enthalten. Im ersten Faktor wird von der Summe der quadrierten x-Werte das Produkt aus ihrem Mittelwert und ihrer Summe subtrahiert. Der zweite Faktor macht das gleiche mit den y-Werten.

In unserem Beispiel hatten wir $n = 30$ Messungen durchgeführt. Wir bezeichnen mit x_i die Kornzahl der Ähre, mit y_i die davon stochastisch bestimmte Gesamtkornmenge der Ähre. Für die Mittelwerte der unabhängigen und der abhängigen Variablen ergibt sich:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1169}{30} = 38{,}9\overline{6} \qquad , \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{45{,}25}{30} = 1{,}508\overline{3}$$

Damit können wir die Zahlenwerte in unsere Formel einsetzen (wir lassen die Ermittlung der Summe der x- und der y-Werte hier weg):

$$r_{xy} = \frac{1922{,}70 - 38{,}9\overline{6} \cdot 45{,}25}{\sqrt{(49447 - 38{,}9\overline{6} \cdot 1169)(75{,}0275 - 1{,}508\overline{3} \cdot 45{,}25}} = \frac{159{,}4584}{162{,}4501} = 0{,}982$$

Aus diesem sehr dicht an $+1$ liegenden Korrelationskoeffizienten kann auf eine positive lineare Korrelation zwischen Kornzahl und Gesamtkornmasse einer Ähre geschlossen werden.
Das heißt, dass wachsenden Werten von x (Kornzahl) proportional wachsende Werte von y (Gesamtkornmasse) zugeordnet werden können. Liegt in anderen möglichen Fällen der Zahlenwert des Koeffizienten nahe bei -1, so liegt eine negative Korrelation vor, in der wachsenden Werten von x proportional fallende Werte von y zugeordnet werden können.

Hat der Korrelationskoeffizient einen Wert, der sich nur wenig von Null abhebt, so liegt keine lineare Korrelation vor, ohne dass damit ausgeschlossen wäre, dass überhaupt eine Korrelation vorliegt. Wir kommen auf diese Unterscheidungen gleich zurück.

Sehen wir uns nochmals das Beispiel mit unserem Weizen an: Es gibt spezielle statistische Testverfahren, mit denen bestimmt werden kann, ob r_{xy} in Abhängigkeit von der Zahl der Messwerte »dicht genug« an 1 liegt.
Wir versichern hier nur, dass dieser Test auf jeden Fall positiv ist und mit minimaler Irrtumswahrscheinlichkeit nach unseren dreißig Messungen angenommen werden kann, dass zwischen Kornzahl und Gesamtkornmasse einer Ähre ein positiver korrelativer Zusammenhang besteht.

Aufbauend auf dem Korrelationskoeffizienten, gibt es ein zweites Maß zur Bestimmung des korrelativen Zusammenhangs, das sogenannte Bestimmtheitsmaß. Es gibt an, mit welchem Wert die Größe y durch die Größe x festgelegt wird, und man berechnet es nach der Formel

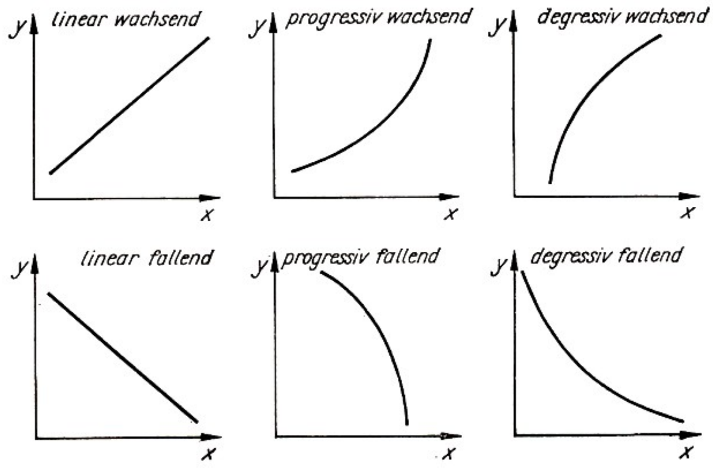
$$B_{xy} = r_{xy}^2$$

Da, wie oben gesagt, r_{xy} zwischen den Werten -1 und $+1$ liegt, hat B einen Wert zwischen 0 und 1 und kann damit günstig in Prozent angegeben werden ($0 \to 0\%$ und $1 \to 100\%$). In unserem Beispiel ist

$$B_{xy} = 0{,}982^2 = 0{,}964 = 96{,}4\%$$

Die Kornzahl bestimmt somit mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,4%, das Gesamtkorngewicht der Ähre.

Kommen wir nun zu den Arten der Unterscheidung von Korrelationen, die bereits mehrfach angekündigt wurden:



Mögliche Grundentwicklungen

1. Der Charakter einer Korrelation kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob zu wachsenden (fallenden) Werten der einen Variablen auch wachsende (fallende) Werte der anderen Variablen gehören oder ob einem fallenden (wachsenden) Wert der einen Veränderlichen ein wachsender (fallender) Wert der anderen zugeordnet ist.
Eine positive Korrelation besteht, wie gezeigt, zwischen Kornzahl und Gesamtkornmasse einer Ähre oder auch zwischen Körpergröße und Gewicht eines Menschen (wobei im zweiten Falle noch wesentlich mehr Faktoren den Korrelationskoeffizienten beeinflussen als im ersten - bis hin zu den Vorstellungen des Ehepartners über ideale Körpermaße).

Eine negative Korrelation liegt z. B. bei der Herstellung von Serien vor, in denen mit wachsendem Serienumfang die Selbstkosten je Erzeugnis sinken. Eine solche Korrelation wird auch als indirekte Korrelation, Gegenläufigkeit oder Antagonismus bezeichnet.

2. Eine Korrelation kann linear oder nichtlinear verlaufen. Wir haben uns nur mit linearen Zusammenhängen beschäftigt. Wie die Abbildungen verdeutlichen, gibt es aber auch andere Zusammenhänge, für die die Korrelationskoeffizienten schwieriger zu berechnen sind.

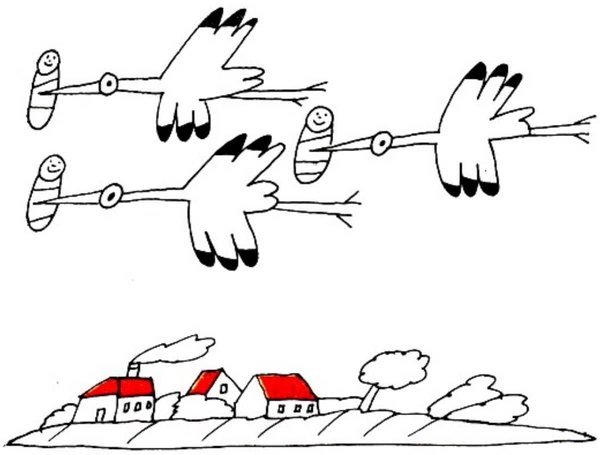
3. Einfache Korrelationen bestehen zwischen zwei Veränderlichen (wie in unserem Körnerbeispiel).
Mehrfache Korrelationen untersuchen ganze Ursache-Wirkungs-Komplexe von Erscheinungen. Zusätzlich unterscheidet man hier noch partielle Korrelationen, in denen der Zusammenhang zwischen zwei Veränderlichen untersucht wird, obwohl noch weitere Veränderliche als Ursachen und Wirkungen auftreten, die in der Betrachtung jedoch ausgeklammert bleiben.

4. Hüten sollte man sich vor Schein- und Nonsenskorrelationen.

Wenn jemandem ständig die Gefahren kritischer Tage ausgemalt werden und dann noch eine einfache Methode erscheint, mit der solche Tage berechnet werden können, so passiert eine Scheinkorrelation. Der informierte Zeitgenosse rechnet sich seine kritischen Tage aus und meidet im Unterschied zum uninformierten an diesen Tagen alle Gefahren.
Wenn nun etwa behauptet wird, durch die Berücksichtigung der kritischen Tage sei die Zahl

der Arbeitsunfälle zurückgegangen, so ist das falsch. In Wirklichkeit wurde nur Leichtsinn vermieden, und die Arbeitsschutzbestimmungen wurden bewusster eingehalten.
Allein damit und nicht durch die Kenntnis von Biorhythmen können Unfallquoten gesenkt werden.

Noch schlimmer, nämlich Nonsens, wird es, wenn rein willkürlich irgendwelche Zahlenreihen darauf überprüft werden, ob zwischen ihnen Korrelationen bestehen.
So wurden einem Statistiker einmal zwei Zahlenreihen vorgelegt, bei denen er nachweisen konnte, dass sie eine starke korrelative Bindung besitzen. Die eine Reihe war die Zahl der besetzten Storchennester in Südschweden, die andere enthielt die Geburtenziffern in den entsprechenden Jahren.



Wer würde daraufhin ernsthaft an den Klapperstorch glauben wollen ?

Ein Beispiel aus dem Leben sei hier abschließend erwähnt.
An einer technischen Schule wurden einmal Zusammenhänge zwischen versäumten Studientagen und den Noten der Studenten gesucht. Da die Suchenden mathematisch gebildet waren, griffen sie zur Korrelationsanalyse und stellten in der Tat in einigen Seminargruppen einen starken Zusammenhang beider Größen fest.
Allerdings war die Korrelation zum Leidwesen der Lehrkräfte stark negativ.

Mit anderen Worten: Jene Studenten erreichten die besten Noten, die am häufigsten fehlten. Die Dozenten machten das Beste aus der Situation. Statt in tiefgründige Diskussionen über die nicht erkannte Art der Korrelation einzutreten (vielleicht ging es hier um mehrfache nichtlineare Korrelationen, die nur nicht erfasst worden waren ?), verhinderten sie die öffentliche Diskussion der mathematisch einwandfrei ermittelten Ergebnisse.

Das zeigt, dass auch die Mathematik keinen Absolutheitsanspruch erheben sollte und bisweilen mit der Praxis in Konflikt geraten kann.

6.2 Was können Korrelations- und Regressionsrechnung?

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal, was die Korrelationsanalyse zu leisten vermag:

1. Sie bestimmt Richtwerte, mit denen der Grad oder die Stärke eines korrelativen Zusammenhangs festgestellt werden kann.

2. Damit können wesentliche und unwesentliche Einflussgrößen einer Erscheinung voneinander unterschieden und getrennt werden.

3. Die Korrelationsrechnung kann eingesetzt werden, um noch unbekannte Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu finden.

Zur Bestimmung wechselseitiger stochastischer Abhängigkeiten leistet die Korrelationsanalyse also Wesentliches. Erneut aber muss gesagt werden: Damit ist nur ein Teilkomplex erfasst. Um Zusammenhänge zwischen zwei oder mehr Veränderlichen zu erfassen, können weitere Fragen wichtig werden:

1. Wie verläuft ein nachgewiesener Zusammenhang (beispielsweise degressiv, progressiv, linear) ?

2. Welche Wirkung hat eine Erscheinung auf eine Folgeerscheinung? (Beispielsweise: Wie erhöht sich die Gesamtkornmasse, wenn die Ähre 1 Korn mehr hat?)

3. Wie lauten noch unbekannte Werte der abhängigen Variablen innerhalb und außerhalb des Messbereiches?

Durch eine Antwort auf diese Frage ließen sich mitunter für noch unbekannte Werte, die einer Messung nur schwer oder gar nicht zugänglich sind, abhängige Zufallsgrößen exakt vorhersagen.

Antworten auf die zuletzt genannten Fragen können durch die Regressionsanalyse gefunden werden. Sie stellt eine einseitige (nicht wechselseitige) stochastische Abhängigkeit durch Gleichung und Bild dar.

So wurde der Zusammenhang zwischen Kornzahl (unabhängiger Variabler) und Gesamtkornmasse (abhängiger Variabler) durch eine Regressionsanalyse untersucht. Dazu haben wir (und das ist das generelle Vorgehen bei solchen Analysen) zuerst die notwendigen Daten erfasst. Wichtig war dabei, dass die Daten zufällig, am besten durch Auslosen, ausgewählt wurden.

Im zweiten Schritt wurden die Daten aus der Urliste, die durch die zufällige Auswahl entstanden war, nach einem Merkmal (bei uns der Kornzahl) größenmäßig angeordnet. Aus der Urliste entstand die Primärliste. Im dritten Schritt wurden die Daten (Wertpaare) aus der Primärliste in ein Streudiagramm eingetragen, wobei erkennbar wurde, dass ein positiver linearer Zusammenhang zwischen den Erscheinungen vorlag.

Diesen Zusammenhang versucht die Regressionsanalyse durch eine lineare Funktion widerzuspiegeln, die zwei Forderungen erfüllen soll: Zum ersten soll sie sich den Messwerten möglichst gut anpassen. Zum zweiten sollen statistische Schwankungen, Saisonschwankungen, Messfehler u.ä. möglichst zu einer glatten Regressionsgeraden ausgeglichen werden.
Es leuchtet sofort ein, dass sich diese beiden Forderungen widersprechen. Entweder folgt man den ermittelten Messwerten, oder man gleicht sie zu einem Mittelwert aus.

Eine Lösung des Problems gab der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) mit seiner Methode der kleinsten Quadratsumme an.

Er forderte, dass die Abweichungen der einzelnen Funktionswerte von den statistisch ermittelten Werten quadriert (damit unterschiedliche Vorzeichen bei der Differenzbildung herausfallen und nur der absolute Wert der Abweichung berücksichtigt wird) und anschließend summiert einen Minimalwert ergeben. Die Summe der Abweichungsquadrate ist ein Maß dafür, wie gut die beiden genannten widersprüchlichen Forderungen erfüllt werden.

Wir übergehen hier wieder einige Ableitungen und begnügen uns zur Illustration des Gaußschen Minimumprinzips mit einem Beispiel:

Bezeichnen wir die Kornzahl mit der Größe x und die Gesamtkornmasse mit y, so liegen durch unseren Test dreißig Wertpaare für die Beziehung zwischen x und y vor. Wir hatten festgestellt, dass eine lineare Funktion zur Darstellung des Zusammenhangs geeignet ist. Deren Funktionsbild ist eine Gerade, die durch zwei Punkte festgelegt ist. Der Ansatz lautet:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x$$

a_1 bestimmt dabei den Anstieg der Regressionsgeraden, a_0 bestimmt den Schnittpunkt mit der y-Achse. Die beiden Unbekannten sind zu ermitteln.
Aus dem Gaußschen Minimumprinzip ergeben sich die Formeln für beide Unbekannten:

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i - \overline{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \overline{x} \sum x_i} \qquad , \qquad a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$$

Die Werte wurden bereits bestimmt und sind hier nur noch einzusetzen:

$$a_1 = \frac{1922{,}70 - 1{,}508\overline{3} \cdot 1169}{49{,}447 - 38{,}9\overline{6} \cdot 1169} = \frac{159{,}4584}{3894{,}967} = 0{,}0409$$
$$a_0 = 1{,}508\overline{3} - 0{,}0409 \cdot 38{,}9\overline{6} = -0{,}0869$$

Wenn die Werte für a_0 und a_1 in den Ansatz eingesetzt werden, ergibt sich die gesuchte Regressionsgerade als

$$\tilde{y} = -0{,}0869 + 0{,}0409x$$

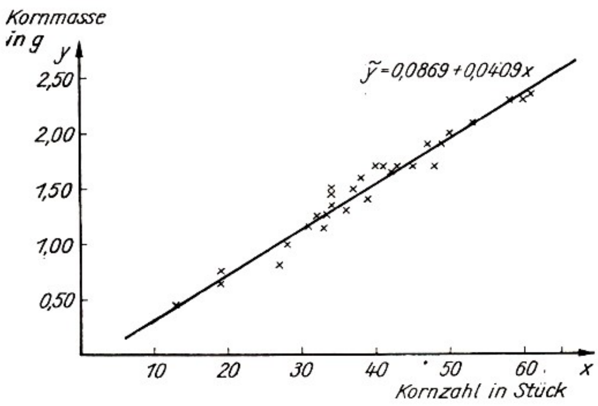
Was lässt sich mit dieser Funktion anfangen ?
Man könnte damit die überflüssig hohe Genauigkeit der Rechnungen zeigen, die bis zu dieser Funktion führten.
Mit dem Wert von x hatten wir bekanntlich die Kornzahl ausgedrückt. Hat eine Ähre kein Korn ($x = 0$), ergibt sich

$$\tilde{y} = 0{,}0869$$

und damit ein Gewicht der Ähre von -0,0869 g. Eine solche Feststellung bringt nicht viel, ja ist sogar widersinnig. Wichtiger ist schon der Wert des Koeffizienten a_1.

$$a_1 = 0{,}0409$$

heißt: Die Gesamtkornmasse einer Ähre wächst im statistischen Durchschnitt um 0,04 g, wenn ein Korn mehr in der Ähre ist. a_1 gibt also den Massezuwachs der Ähre in g je Korn an.



Regressionsgerade im Streudiagramm

Zeichnet man nun die Gerade in das Streudiagramm ein, ergibt sich ein anschauliches Bild der Anpassung der rechnerisch ermittelten Werte y (für die Gesamtkornmasse) an die beobachteten Werte y_i für eine bestimmte Kornzahl.

Durch die Gleichung der Regressionsgeraden können schließlich auch Werte für Kornzahlen außerhalb des Beobachtungsbereiches mit großer Sicherheit vorhergesagt werden.
Für die Kornzahl 29 (wir hatten keine Ähre dieser Art gefunden) ist eine Gesamtkornmasse von

$$\tilde{y}(29) = -0{,}0869 + 0{,}0409 \cdot 29 = 1{,}099 \text{ g}$$

vorherzusagen, und eine Ähre mit 65 Körnern hätte eine Gesamtkornmasse von voraussichtlich

$$\tilde{y}(65) = -0{,}0869 + 0{,}0409 \cdot 65 = 2{,}572 \text{ g}$$

Das sind wieder exakte Angaben über Bereiche, für die Messwerte oder Erfahrungen nicht vorliegen. Die Berechnungen stützen sich auf einen zuvor geführten exakten Nachweis eines Zusammenhangs, der zwar zufallsbedingt schwankt, jedoch in der Praxis objektiv existiert.
Um diesen Zusammenhang in mathematisch einwandfreier Form zu fassen, war es wichtig, wesentliche von unwesentlichen Umständen zu trennen. Erneut zeigte sich: Zu mathematischem Denken gehört nicht nur Formelkenntnis, sondern vor allem die Fähigkeit, Gegebenes kritisch und zielgerichtet zu analysieren.

Eine allerletzte Erweiterung des Feldes unserer Überlegungen gestatten wir uns noch: Es ist theoretisch vorstellbar und wird in der Praxis oft gefordert, die Entwicklung irgendeiner Erscheinung in Abhängigkeit von der Zeit zu untersuchen. Da scheinen wir uns plötzlich wieder ganz nahe an unserer Ausgangsfrage zu befinden: Kann uns die Mathematik doch noch zum Blick in die Zukunft verhelfen ?
Die Antwort ist nüchtern: Wir bleiben bei der Regressionsanalyse, nehmen als unabhängige Variable die Zeit und gelangen damit zu einem weiteren neuen Begriff, dem Trend.

6.3 Ein Blick in die Zukunft - durch den Trend

Trend ist ein Wort, das wir in der Umgangssprache ziemlich häufig verwenden. Wie bei vielen solchen Begriffen fällt es uns auch bei diesem nicht leicht zu sagen, was genau wir unter Trend eigentlich verstehen. (Schließen Sie einmal kurz das Buch und versuchen Sie, »Trend« zu definieren!)

Die Mathematik oder spezieller die Statistik versteht unter Trend die Grundrichtung eines statistisch ermittelten Verlaufs. Dabei ist wichtig, dass es sich nur um die Grundrichtung handelt, kurzfristige (z. B. saisonbedingte) Schwankungen ausgeklammert werden und als wesentliche Aussage nur festgestellt wird, dass eine Entwicklung beispielsweise progressiv steigend, linear steigend oder degressiv fallend verläuft.
Damit ist es durchaus möglich, dass bei einem steigenden Trend die Werte in Teilperioden konstant bleiben oder sogar fallen.

Zur Trendberechnung wird eine Formel oder eine Grafik gesucht, mit der berechnet oder aus der abgelesen werden kann, wie sich eine Erscheinung in einem Monat, einem oder mehreren Jahren entwickeln wird. Grundlage der Untersuchungen sind die auf einen festen Zeitraum oder Zeitpunkt bezogenen Erfahrungen oder Messwerte der interessierenden Erscheinung, die eine sogenannte Zeitreihe bilden.
Es handelt sich um stochastische Zusammenhänge; demzufolge eignen sich Regressionsanalysen, bei denen die unabhängige Variable die Zeit ist, gut zur mathematisch exakten Fassung

von Trends.

Wir kehren ein letztes Mal zu jener Familie zurück, die im Interesse der Erläuterung mathematischer Zusammenhänge schon mehrere Aufregungen über sich ergehen lassen musste. Diese Aufregungen waren überstanden, das Leben war ruhiger geworden. Da ergriff ein Argwohn die Ehefrau: Sie hatte das Gefühl, dicker zu werden.
Ihr höflicher Gatte bestritt das energisch, aber die Frau verließ sich lieber auf die Waage und notierte deren Anzeigen ordentlich an jedem Monatsersten vor dem Frühstück:

1.1.1980 60,000 kg, 1.2.1980 60,450 kg , 1.3.1980 60,300 kg , 1.4.1980 60,600 kg, 1.5.1980 60,900 kg, 1.6.1980 61,150 kg, 1.7.1980 61,400 kg.

An diesem Tag ergriff die Frau endgültig ein wütendes Erschrecken. Als erste Reaktion beschloss sie, die Messungen einzustellen, und warf die bisherigen Ergebnisse ihrem Mann hin.
Ihn erschütterten die Messwerte nun doch so sehr, dass er einen Blick in die Zukunft für wünschenswert hielt. Und da seine Frau nicht mehr bereit war, auf die Waage zu steigen, griff er zur Mathematik.

Zunächst stellte er die ermittelten Werte grafisch dar. Er nannte das ein Säulendiagramm. Die Zunahmen von Monat zu Monat trug er mit roter Farbe ein, was seine Frau nicht nett fand. Deshalb markierte er nur die Säulenmitten, verband die Markierungspunkte miteinander und erhielt so ein Häufigkeitspolygon, das weniger massiv aussah als das Säulendiagramm.

Mathematisch war er damit über das konkret Ermittelte hinausgegangen. Die Funktion bestand aus nur sieben Elementen, den Messwertpaaren aus der Tabelle. Die Verbindung der Punkte untereinander fügte unendlich viele Werte hinzu, die niemals gemessen worden waren.
Um das zu tun, hätte seine Frau ja auf der Waage stehenbleiben müssen.

Die Absicht des Mannes hatte darin bestanden, den typischen Verlauf der Entwicklung, eben den Trend, anzuzeigen. Dieser war auf jeden Fall steigend, darüber konnte auch der Wert vom 1.3.1980 nicht hinwegtäuschen. Um diesen Trend jedoch genau angeben zu können, waren etwas kompliziertere Operationen nötig.

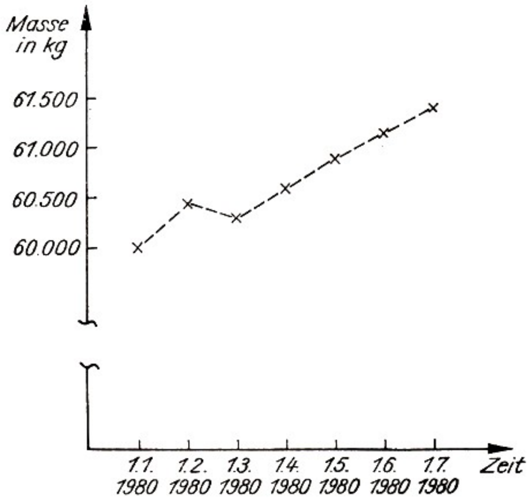
Die Aufgabe des Mannes bestand darin, die sieben Punkte ohne Verbindungsgerade durch eine Funktion auszudrücken.
Ein linearer Ansatz (Gerade) schien gerechtfertigt. Die Gerade sollte sich einerseits möglichst gut an die sieben Punkte anpassen, auf der anderen Seite jedoch kurzfristige statistische Schwankungen ausgleichen und nur den Trend der Entwicklung angeben. Sofort erinnerte sich

der Mann bei diesen Forderungen an die Gaußsche Methode der kleinsten Quadratsumme und formulierte den Ansatz für die Trendfunktion:

$$\tilde{y} = a_1 x + a_3$$

Die Abweichungen zwischen den Werten der Trendfunktion an der Stelle x (Zeitwert) von den Messwerten, die die Frau ermittelt hatte, sollten quadriert und summiert wieder minimal werden:

$$S = \sum (s_i - \tilde{y}_i)^2 \to \min$$



Grafische Darstellung der Gewichtskontrolle

Den Ansatz mit den zwei unbekannten Werten von a_1 und a_0 setzte der Mann in die Bedingung für y_i ein, differenzierte nach a_1 und $a_0$und setzte die zwei partiellen Ableitungen der ersten Ordnung gleich Null. Auf einem Umweg durch die höhere Mathematik, auf dem wir ihm hier nicht folgen wollen, gelangte er dann zu den Normalengleichungen:

$$a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum s_i \qquad , \qquad a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum s_i x_i$$

Hierin waren a_0 und a_1 die gesuchten Parameter der Trendfunktion, die beide genannten Forderungen erfüllten, die der Anpassung an die Messwerte und die des Ausgleiches der Schwankungen.
Mit n wurde die Anzahl der Messwerte ausgedrückt. Die Summen aus den Messwerten ($\sum x_i$; $\sum x_i^2$; $\sum s_i$; $\sum s_i x_i$) werden gleich in einer Tabelle berechnet.

Zuvor noch eine Bemerkung zu den Zeitwerten, die zweckmäßig gewählt werden müssen. Unserem Mann erschien es günstig, den Zeitraum eines Monats (die Messspanne seiner Frau) als Zeitwert x_i zu nehmen, da ihm ein Rechnen mit den realen Daten, obwohl prinzipiell möglich, zu Recht zu umständlich erschien.
Die sieben Daten erhielten so die Zeitwerte $x_i = 1$ bis 7, der 1. 1. 1981 hätte den Zeitwert $x_i = 13$. Will man von den Zeitwerten wieder auf reale Daten zurückkommen, ist das ebenso einfach.

Nun zu der Tabelle für die Hilfsrechnungen zur Bestimmung der Summen aus den Messwerten. Sie enthält folgende Werte:

Datum	Zeitwert x_i	Statist.Wert s_i	$s_i x_i$	x_i^2
1.1.1980	1	60,000	60,000	1
1.2.1980	2	60,450	120,900	4
1.3.1980	3	60,300	180,900	9
1.4.1980	4	60,600	242,400	16
1.5.1980	5	60,900	304,500	25
1.6.1980	6	61,150	366,900	36
1.7.1980	7	61,400	429,800	49

$n = 7$, $\sum x_i = 28$, $\sum s_i = 424{,}00$, $\sum s_i x_i = 1705{,}400$, $\sum x_i^2 = 140$

Hieraus ergeben sich, eingesetzt in die Normalengleichungen, die speziellen Normalengleichungen:

$$7a_0 + 28a_1 = 424{,}800 \qquad , \qquad 28a_0 + 140a_1 = 1705{,}400$$

Der Ehemann wusste, dass er damit ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten a_0 und a_1 vor sich hatte. Damit war der Lösungsweg endgültig vorgezeichnet.
Die erste Gleichung multiplizierte er mit -4, so dass die Koeffizienten von a_0 den gleichen absoluten Wert, jedoch unterschiedliche Vorzeichen erhielten:

$$-28a_0 - 112a_1 = -1699{,}200 \qquad , \qquad 28a_0 + 140a_1 = 1705{,}400$$

Die Addition der beiden Gleichungen brachte die Beziehung

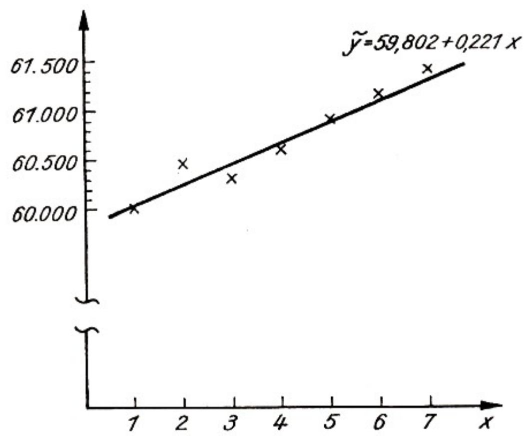
$$28a_1 = 6{,}200 \qquad , \qquad a_1 = 6{,}2000 : 28 = 0{,}221$$

Damit konnte durch Einsetzen in die ursprüngliche erste Gleichung des Systems errechnet werden:

$$a_0 = \frac{434{,}800 - 28 \cdot 0{,}221}{7} = 59{,}802$$

und der Mann konnte die Trendfunktion formulieren:

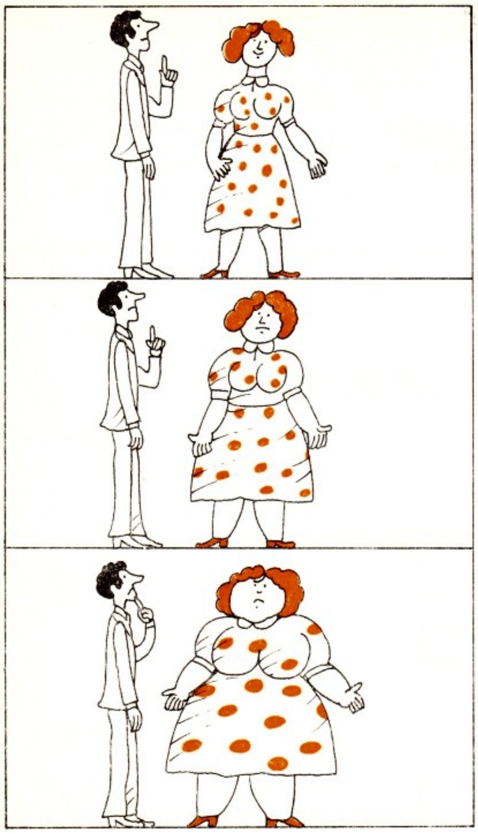
$$\tilde{y} = 59{,}802 + 0{,}221x$$



Trendfunktion im Streudiagramm

Der Wert für a_1 gab die durchschnittliche Massezunahme seiner Frau an: 221 g je Zeiteinheit, also je Monat.
Leicht schaudernd, zeichnete er die Trendfunktion in das Streudiagramm ein und erhielt so einen Blick auf die Zukunftsmasse seiner Frau, der ihm auch durch die Befriedigung über die

hohe Angepasstheit der ermittelten Trendfunktion an die Messwerte nicht viel schöner erschien.



Nach einem Jahr beträgt die Masse voraussichtlich

$$y(13) = 62{,}675 \text{ kg},$$

nach fünf Jahren

$$y(61) = 73{,}283 \text{ kg},$$

Wie viele Jahre würden noch vergehen, bis er mit einer Zweizentnerfrau verheiratet war? $\tilde{y} = 100$ kg, daher galt:

$$100 = 59{,}802 + 0{,}221x \quad , \quad x = \frac{40{,}198}{0{,}221} = 181{,}89$$

Nach knapp 182 Monaten, also gut fünfzehn Jahren, sollte es soweit sein!

Was das Ehepaar nun tat, wollen wir nicht ergründen. Änderte die Frau ihre Essgewohnheiten ? Hofften beide, dass die biologischen Gesetze sich doch stärker als die Mathematik erweisen würden, dass eine siebenmonatige Entwicklung nicht einfach auf fünfzehn Jahre hochgerechnet werden konnte ? War der Mann ein fanatischer Zahlengläubiger und Schlankheitsfan und ließ sich gleich scheiden ? Beschloss das Paar, zwecks körperlichen Trainings einige weitere Permutationen seiner Schrankwand praktisch zu erproben ? Wir überlassen das der Phantasie des Lesers.

Wer anhand unseres unseriösen Beispiels jedoch Gefallen an Trendberechnungen gefunden hat und diese ernsthaft oder scherzhaft weiterbetreiben möchte, sollte sich durch den hohen Rechenaufwand, der eben getrieben wurde, nicht abschrecken lassen. Wir führen ihm noch einige Vereinfachungen vor, die den Blick in die Zukunft leichter, aber nicht weniger exakt machen.

Eine erste Vereinfachung der Berechnung wurde bereits angewendet, als mit Zeitwerten und nicht mit Daten gerechnet wurde. Das kann in sinnvoller Weise immer gemacht werden (interessieren z.B. nur Jahresetappen, wird 1 Jahr gleich 1 gesetzt).
Später müssen nur Zeitwerte wieder in Daten umgerechnet werden. Eine wesentliche weitere Vereinfachung wird dadurch

erreicht, dass die Zeitwerte nicht mehr, beginnend mit dem ersten Wert gleich 1, fortlaufend erhöht, sondern so gewählt werden, dass

$$\sum x_i = 0$$

wird. Das bringt gleich zwei wesentliche Erleichterungen für die Rechenarbeit. Da die Zeitwerte nun betragsmäßig kleiner werden, ist die Berechnung der Tabelle einfacher.
Zum anderen wird bei Erfüllung von $\sum x_i = 0$ aus den Normalengleichungen ein ganz einfaches

System, aus dem sich a_0 und a_1 sofort berechnen lassen:

$$a_0 n + a_1 \cdot 0 = \sum s_i \qquad \rightarrow \qquad a_0 = \frac{\sum s_i}{n}$$
$$a_0 \cdot 0 + a_1 \sum x_i^2 = \sum s_i x_i \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \frac{\sum s_i x_i}{\sum x_i^2}$$

Um unsere Bedingung zu erfüllen, nach der die Summe der Zeitwerte gleich 0 sein soll, wird bei ungerader Zahl der Messwerte der mittlere Zeitwert (im Falle unseres Ehepaares der 1. 4. 1980) gleich 0 gesetzt.
In der Tabelle, nach oben fortschreitend, werden die Messwerte mit den Zeitwerten $-1, -2, -3, ...$ und, nach unten, mit den Zeitwerten $1, 2, 3, ...$ versehen. Der Abstand zwischen den Zeitwerten beträgt wieder gleichmäßig 1, die Summe - wie gewünscht - Null.

Bei einer geraden Anzahl von Messwerten gibt es zwei mittlere Werte, die die Zeitwerte -1 und $+1$ zugeordnet bekommen. Damit ist der Abstand zwischen zwei Zeitwerten mit 2 festgelegt. Demzufolge erhalten die Beobachtungswerte darüber die Zeitwerte $-3, -5, -7, ...$ und diejenigen darunter die Zeitwerte $3, 5, 7,...$ Wieder ist die Summe der Zeitwerte gleich Null.
Man könnte nun noch zeigen, wie nach der Formel

$$s = \sqrt{\frac{\sum (s_i - \tilde{y}_i)^2}{n-2}}$$

die absolute durchschnittliche Streuung um die Trendfunktion berechnet werden kann, die ein Maß dafür ist, wie gut sich die Trendfunktion an die empirischen Werte des Streudiagramms anpasst, und die bei unserem Beispiel 0,127 kg beträgt.

Man könnte nach einer anderen Formel,

$$v = \frac{s}{\frac{\sum s_i}{n}}$$

die relative Anpassung bestimmen (in unserem Falle 0,21%), die die absolute Streuung auf den durchschnittlichen Messwert bezieht.

Wir wollen das jedoch nicht tun. Zunehmend gerieten wir sonst auf Gebiete, in denen das mathematische Rüstzeug des Normalbürgers zu versagen beginnt und die deshalb auch gern die »höhere« Mathematik genannt werden.
Wir sind durchaus nicht gegen solche Ausweitungen. Ja, wir wollen sogar Lust machen auf Schritte in das Unendliche, von dem hier nicht einmal andeutungsweise die Rede war. Mehr als auffordern dazu aber wollen wir in diesem Buch nicht, sprengen Sie selbst seine Grenzen!

Abbrechen müssen wir deshalb jedoch an dieser Stelle nicht. Auch in dem »niederen« Bereich, in dem wir uns bisher bewegt haben, existieren zahllose weitere Möglichkeiten sinnvollen Fragens. Vielleicht kann Mathematik auch dazu Lust machen: sich nicht zufriedenzugeben, sondern immer weiterzufragen, mit kritischem Denken scheinbare Endzustände immer wieder neu in Frage zu stellen. Zu dem spielerischen Beispiel der dicken Ehefrau ist noch längst nicht alles gesagt. Ein bisschen mehr sei noch vorgeführt.

Die arme Frau, so hatten wir errechnet, nimmt bei Fortsetzung des bisherigen linearen Trends monatlich im Durchschnitt um 221 g zu. Dieser konstante Zuwachs aber, so zeigt uns die Mathematik, hat durchaus relative Seiten, und auch diese lassen sich berechnen.

6.4 Zuwachs - absolut und relativ

Am 1.1.1980, als die Frau 60 kg auf die Waage brachte, bedeuteten 221 g Zunahme

$$\frac{0{,}221}{60} \cdot 100\% = 0{,}37\%$$

Am 1.3. 1995 bedeutet die gleiche absolute Zunahme nur noch

$$\frac{0{,}221}{100} \cdot 100\% = 0{,}22\%$$

Man sieht, die Prozentrechnung - wird sie geschickt angewendet - bietet so manche Interpretationsmöglichkeiten, vielleicht sogar etwas Trost.
Man muss sie allerdings besser verstehen als jene hoffnungslose Mathe-Niete, die ihren ehemaligen Mathematiklehrer nach langer Zeit wiedertrifft und auf die Frage, was sie denn so mache, antwortet: »Ich kaufe Stühle, das Stück für 20 M, von einer Fabrik und verkaufe sie für 27 M weiter. Da Stühle gut gehen, sind die 7% Gewinn je Stuhl eine hervorragende Einkommensquelle.«

Weshalb aber, kann man ernsthafter fragen, ist eine gleiche Gewichtszunahme nicht immer das gleiche, ist einmal viel hochprozentiger als ein andermal ?
Mit einer solchen Frage geraten zwei Begriffe ins Spiel, von denen bisher nicht die Rede war: Zuwachsrate und Zahlenfolge.

Von Zuwachsraten hören wir häufig, besonders im Zusammenhang mit ökonomischen Ergebnissen und Prozessen.
Wir verstehen darunter den prozentualen Zuwachs einer Menge zu einem bestimmten Zeitpunkt x_n im Verhältnis zu einem Basiszeitpunkt x_0. In einer Formel ausgedrückt,

$$Z = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} \cdot 100\%$$

In dem betrachteten Falle der Ehefrau, so hatten wir gesehen, ist diese Zuwachsrate zwischen dem 1.1. 1980 und dem 1.3.1995 gesunken, von 0,37 auf 0,22% im Monat.
So muss man sich hüten, allein aus dem Vergleich von Zuwachsraten allzu weitgehende Schlussfolgerungen zu ziehen. Eine Zuwachsrate von 5%, kann absolut einen wesentlich höheren Zuwachs bedeuten als 20%, bei einer anderen, absolut deutlich kleineren Menge.

Die Industrieproduktion eines hochentwickelten Landes etwa kann mengenmäßig auch dann noch stärker als die z. B. eines Entwicklungslandes anwachsen, wenn dessen Zuwachsrate um das Fünf- oder Zehnfache höher liegt.

Aber weiter in unseren Überlegungen. Das monatliche Ableseergebnis, das fortlaufend in einer Liste festgehalten und dann mittels der Trendrechnung prognostisch bestimmt wird, bildet eine Folge von Zahlenwerten.
Eine Zahlenfolge ist im Verständnis des Mathematikers eine gesetzmäßig - also nicht willkürlich, sondern nach jeweils bestimmten Regeln - gebildete Zahlenmenge; ihre Elemente werden die Glieder der Folge genannt. Jeder Gliednummer (natürlichen Zahl) wird ein Glied der Folge zugeordnet, so dass eine Zahlenfolge auch als spezielle Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ (der natürlichen Zahlenmenge) oder Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert werden kann.
Solche Zahlenfolgen wollen wir etwas genauer betrachten.

Es ist leicht zu sehen, dass wir uns damit von unserem Thema - den Zukunftsblicken des

Mathematikers - nicht entfernen. Wir erkunden deren Gesetzmäßigkeiten etwas näher.

Im Falle der Ehefrau ist das erste Glied ($n = 1$) der Zahlenfolge $x_1 = 60$ kg.
Nach einem Monat ist das zweite Glied ($n = 2$), $x_2 = 60{,}221$ kg, erreicht. Das nachfolgende Glied x_n berechnet man aus dem vorangegangenen durch die Addition des konstanten »Zuwachssummanden« von 221 g.

$$x_n = x_{n-1} + 0{,}221$$

Die Differenz zwischen zwei benachbarten Gliedern ist somit (immer im Durchschnitt der Trendrechnung, nicht anhand der konkreten Wiegeergebnisse gesehen) konstant:

$$x_n - x_{n-1} = 0{,}221$$

Allgemein ist die Differenz zwischen zwei benachbarten Gliedern

$$x_n - x_{n-1} = d$$

Wenn d in diesen Folgen immer konstant ist, unabhängig davon, welche speziellen Nachbarglieder zur Differenzbildung herangezogen werden, spricht man von arithmetischen Zahlenfolgen. Ein beliebiges Glied x_n lässt sich dann, wie folgt, aus dem ersten Glied (x_1) berechnen:

x_1	1. Glied
$x_1 + d$	2. Glied
$(x_1 + d) + d = x_1 + 2d$	3. Glied
$(x_1 + 2d) + d = x_1 + 3d$	4. Glied usw.

Somit kann ohne Beweis geschlussfolgert werden:

$$x_n = x_1 + (n - 1)d$$

Vorn wurde mit Hilfe einer Trendfunktion berechnet, dass 182 Monate (n) notwendig sind, um bei dem konstanten durchschnittlichen Monatszuwachs von 0,221 kg eine Anfangsmasse von 60 kg (x_1) auf den unerwünschten Wert von 100 kg (x_{182}) zu bringen. Die Zahlenfolge bestätigt dieses Ergebnis:

$$x_{182} = 60 + (182 - 1) \cdot 0{,}221 = 100{,}001$$

An dieser Stelle ist der Platz für die wohl berühmteste Anekdote um den vielseitigen deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß. Die Episode wird auf vielfältige Weise erzählt. Wir wollen sie mit Hilfe unserer Erkenntnisse über arithmetische Zahlenfolgen etwas mathematisieren.

Der Lehrer in einer Einklassenschule des 18. Jahrhunderts verdiente nicht allzuviel, so dass er sein Einkommen durch Ziegenhaltung aufbessern wollte. Um Zeit für das Ausmisten des Stalls zu gewinnen, gab er den Schülern aller Altersstufen, darunter auch dem kleinen Carl Friedrich, die Aufgabe, die natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100 zu addieren.
Hier könnte die Geschichte dem mitdenkenden Leser wohl verdächtig erscheinen, da der Lehrer für das Ausmisten damals sicher auch einen Schüler hätte abkommandieren können. Doch sei es, wie es war.

Der Lehrer wollte gerade den Klassenraum verlassen, als der kleine Gauß die Schiefertafel verkehrt herum auf das Katheder legte und rief: »Ligget se!« (hochdeutsch: »Da liegt sie!«)

Als der Lehrer dann auch noch Übereinstimmung mit der von ihm mühsam berechneten Zahl feststellte, war er sehr überrascht. Gauß hatte nicht wie der Lehrer

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$$

gerechnet. Er könnte folgendermaßen überlegt haben:
Die natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Zahlenfolge, bei der sich das nachfolgende Glied aus dem vorangegangenen durch die Addition von 1 ergibt ($d = 1$). Nach unserer Formel:

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot 1, \qquad \text{mit } x_1 = 1$$

Die Summe der Glieder einer solchen Zahlenfolge ergibt sich durch Pärchenbildung zwischen dem ersten und dem letzten Glied:
$x_1 + x_n$, in unserem Falle $1 + 100 = 101$,
dem vorletzten und dem zweiten Glied
$x_2 + x_{n-1}$, in unserem Falle $2 + 99 = 101$ usw.

Insgesamt entstehen $\frac{n}{2} = 50$ Pärchen mit einem konstanten Wert von jeweils 101. Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge berechnet man nach der Formel

$$s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$$

Und daraus ergibt sich für die Gauß gestellte Aufgabe

$$s_n = 50 \cdot (1 + 100) = 5050$$

Ob der Lehrer von Gauß an diesem denkwürdigen Tag noch zum Ziegenstallausmisten gekommen ist, wurde nicht überliefert.

Die Differenz in arithmetischen Zahlenfolgen muss jedoch durchaus nicht in jedem Falle der Abstand zwischen zwei natürlichen Zahlen, also 1, sein. Entscheidend ist nur, dass sie ständig konstant bleibt. In dem folgenden Beispiel hat d einen negativen Wert.

Werden Rohre gestapelt, so liegt stets ein Rohr der oberen Reihe zwischen zweien der darunterliegenden. Wenn die unterste Reihe als erstes Glied der Folge angesehen wird, entsteht auf solche Weise eine arithmetische Zahlenfolge mit $d = -1$.
Die Fragen des Lagerarbeiters lauten nun: Wieviel Rohre sind in die unterste Reihe zu legen, wenn 76 Rohre gestapelt werden müssen und in der obersten Reihe 6 Rohre liegen können ? Aus wieviel Schichten besteht der Stapel? Soll er probieren oder rechnen?

Um ihm das Probieren gehörig zu verleiden, brauchte nur die Gesamtzahl von 76 Rohren spürbar erhöht zu werden. Gerechnet werden kann aber auch schon mit niedrigen Werten. Folgende Voraussetzungen gelten:
$d = -1$, $x_n = 6$, $s_n = 76$. Gesucht werden n sowie x_1. Für die Berechnung dieser Werte nutzen wir unsere Formeln

$$x_n = x_1 + (n-1)d \qquad , \qquad s_n = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$$

Es entsteht ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten x_1 und n. Die erste Gleichung wird nach x_1 aufgelöst und in die zweite Gleichung für x_1 eingesetzt:

$$x_1 = x_n - (n-1)d = x_1 - nd + d$$
$$s_n = \frac{n}{2}(x_n - nd + d + x_n) = nx_n - \frac{d}{2}n^2 + \frac{d}{2}n$$

Das ist eine quadratische Gleichung für n mit den Lösungen $n_1 = 8$, $n_2 = -19$.
Da n eine natürliche Zahl ist und nicht negativ sein kann, entfällt die Lösung n_2. Mit $n = 8$ ergibt sich

$$x_1 = 6 - (-8) - 1 = 13$$

Somit muss die unterste Schicht dreizehn Rohre umfassen, und es müssen insgesamt acht Schichten gelegt werden.

Nicht immer haben wir es jedoch mit arithmetischen Folgen zu tun. Wenn z.B. ein Betrieb seine Produktion fünf Jahre lang jährlich um 5% steigert, so ergibt das insgesamt keineswegs - wie nach arithmetischen Gesetzmäßigkeiten zu vermuten wäre - eine Steigerung von 25%. Das sei an folgendem Beispiel verdeutlicht.

Ein Betrieb stellt die Stühle für den Mann her, der die Prozentrechnung - wie oben erzählt - auf seine individuelle Art betreibt. Es seien in einem Basisjahr 100000 Stück. Die Produktion soll nun jährlich um 5% erhöht werden.
Es ergibt sich:

	Anzahl der Stühle	Steigerung absolut	Steigerung relativ
Basisjahr 0	100000		
		5000	$\frac{105000}{100000} = 1{,}05$ (5 %)
1.Jahr	105000		
		5250	$\frac{110250}{105000} = 1{,}05$ (5 %)
2.Jahr	110250		
		5513	$\frac{115763}{110250} = 1{,}05$ (5 %)
3.Jahr	115763		
		5787	$\frac{121550}{115763} = 1{,}05$ (5 %)
4.Jahr	121550		
		6078	$\frac{127628}{121550} = 1{,}05$ (5 %)
5.Jahr	127628		

In fünf Jahren beträgt die absolute Steigerung also 27628 Stühle. Das bedeutet relativ

$$\frac{127628}{100000} \approx 1{,}2763$$

also 27,63%, bezogen auf das Basisjahr.
Kein Wirtschaftspolitiker sollte nun aber triumphierend feststellen, dass der Betrieb seinen Plan übererfüllt, nämlich $\frac{27{,}63\%}{5} = 5{,}53\%$. Jahreszuwachs erreicht habe. Eine solche Rechnung würde bedeuten, dass die Art der hier vorliegenden Zahlenfolge nicht erkannt wurde.
Der Zuwachs ergibt sich vielmehr aus der Formel:

$$Z = \left(\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} \cdot 100 - 100 \right) \%$$

Dabei sind n: die Anzahl der Jahre, x_n: der Produktionswert im letzten Jahr (absolut), x_0: der Produktionswert im Basisjahr (absolut).
In unserem konkreten Falle folgt daraus, dass der Betrieb seinen Plan genau eingehalten hat:

$$Z = \left(\sqrt[5]{\frac{127628}{100000}} \right) \cdot 100 - 100)\% = 5\%$$

Nach der gleichen Formel lässt sich übrigens auch die durchschnittliche monatliche - in diesem Falle allerdings ungeplante - »Zuwachsrate« der Ehefrau berechnen:

$$Z = \left(\sqrt[182]{\frac{100}{60}} \cdot 100 - 100 \right) \% = 0{,}28\%$$

Diese Beispiele zeigen: Bei prozentualen Steigerungen (mit relativem Zuwachs) ist nicht die Differenz zwischen zwei benachbarten Gliedern einer Zahlenfolge konstant, sondern ihr Quotient. Dieser wird mit q bezeichnet:

$$q = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Derartige Folgen werden geometrische Zahlenfolgen genannt. In ihnen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:
Das nachfolgende Glied berechnet man (durch einfache Umstellung der obigen Gleichung) aus dem vorangegangenen durch Multiplikation mit dem konstanten Quotienten q:

$$x_n = qx_{n-1}$$

Somit berechnet man das n-te aus dem ersten Glied durch

$$x_n = q^{n-1}x_1$$

Da $x_1 = qx_0$ ist, ergibt sich eingesetzt

$$x_n = q^{n-1}qx_0 = q^n x_0$$

wenn z.B. mit dem Basisjahr x_0 gerechnet wird. Wenn nach q aufgelöst wird, ergibt sich die Formel für die Berechnung der Zuwachsrate, von der oben die Rede war, ohne Umrechnung in Prozent:

$$q = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$$

Mit dieser Formel lassen sich stichhaltige Prognosen geben, bei gleichbleibendem Zuwachs beispielsweise eine Stuhlproduktion im siebten Jahr nach dem Basisjahr von

$$x_7 = 100000 \cdot 1{,}05^7 = 140710 \text{ Stühlen}$$

Wenn Sie Lust haben, können Sie damit die Produktionszahlen auch späterer Jahre vorhersagen (unter der Voraussetzung, dass der Zuwachs sich nicht verändert, q also konstant bleibt).

Will man die Summe von n Gliedern einer geometrischen Folge bestimmen, so ist das etwas, aber nicht viel komplizierter als das bei Gauß demonstrierte Vorgehen bei arithmetischen Folgen. Es gilt:

$$s_n = x_1 + qx_1 + ... + q^{n-1}x_1 \tag{1}$$

Diese Summenformel zur Bestimmung von s_n wird auf beiden Seiten mit q multipliziert und geschickt unter die erste geschrieben:

$$qs_n = qx_1 + ... + q^{n-1}x_1 + q^n x_1 \tag{2}$$

Nun wird die Gleichung (1) von (2) auf beiden Seiten subtrahiert. Auf der rechten Seite fallen dabei die meisten Summanden weg, wie deutlich zu erkennen ist:

$$qs_n - s_n = -x_1 + q^n x_1$$

Schließlich wird nach s_n aufgelöst:

$$s_n(q-1) = x_1(q^n - 1)$$

Wir erhalten

$$s_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wenn $q \neq 1$ ist ($q = 1$ entspricht einer arithmetischen Zahlenfolge mit $d = 0$).

Was soll - so kann man mit dieser Formel im Kopf fragen - ein Stiergeborener in reiferen Jahren machen, wenn ihm sein Horoskop für diesen Lebensabschnitt größere finanzielle Erfolge verspricht und ein Makler vor der Tür steht, der ihm Einfamilienhäuser zu scheinbar sehr günstigen Bedingungen zum Kauf anbietet ?

Das erste Haus soll 1 Mark kosten, das zweite 2 Mark, das dritte 4 Mark und das folgende jeweils das Doppelte vom vorangegangenen.
Nehmen wir an, er glaubt an sein Horoskop und kauft eine ganze Straße mit vierzig Häusern. Ein Fischgeborener ist durch sein Horoskop vorsichtiger gestimmt und kauft nur ein Haus zu 1 Mark. Wer hat nun das größte Geschäft gemacht ?

Für alle drei (den Stier, den Fisch und den Makler) handelt es sich um eine geometrische Zahlenfolge mit $q = 2$ (Verdoppelung des Preises) und $x_1 = 1$ (Preis des 1. Hauses).
Für den Fischgeborenen gilt

$$s_1 = 1 \cdot \frac{2^1 - 1}{2 - 1} = 1$$

Beim Stiergeborenen ist $n = 40$, so dass er insgesamt bezahlen muss

$$s_{40} = 1 \cdot \frac{2^{40} - 1}{2 - 1} \sim 1099500000000 \text{ Mark}$$

Das sind für ein Haus 27488000000, also gut 27 Milliarden Mark! Der Stiergeborene ist hoffnungslos bankrott, und der Makler kann seinen Verlust von 99999 Mark (wenn wir einen Hauswert von 100000 Mark annehmen) beim Fischgeborenen mit diesem Gewinn mehr als wettmachen.

Doch auch der Fischgeborene hat seine Möglichkeiten nicht ausgeschöpft; das zweite und dritte Haus hätte er wohl ohne Sorgen noch nehmen können. Wo aber liegt die Grenze, an der Gewinn und Verlust ineinander übergehen ? Auch das lässt sich mit unserer Formel berechnen. Hier seien nur die Ergebnisse genannt.

Anzahl der Häuser (in Stück)	Preis je Haus (in Mark)
18	14564
19	27594
20	52429
21	99864
22	190650
23	364722
24	699050

Bei Geschäften, in denen geometrische Zahlenfolgen die Grundlage darstellen, ist der Glaube an die Versprechungen eines Horoskops also mehr als leichtsinnig. Man sieht, wie rasend schnell sich die Summen vervielfachen.

Die Gesetze dieser Zahlenfolgen gelten - um zu einem weniger konstruierten Beispiel zu kommen, das im Alltagsleben der meisten Menschen eine Rolle spielt - auch bei den Zinsen, die Sparkassen und Banken berechnen. Das ist über längere Fristen ja nicht so einfach, weil die in einem Jahr gezahlten Zinsen dem Kapital zugeschlagen und im folgenden Jahr mit verzinst werden müssen, wenn inzwischen keine Rückzahlung erfolgt ist.
Um diese sogenannten Zinseszinsen zu berechnen, können wir die Summenformel der geometrischen Zahlenfolge direkt verwenden.

Nehmen wir z.B. an, ein Kind wird am 1. 1. 1981 im Steinbockzeichen geboren. Jedes Jahr, beginnend am Tag der Geburt, erhält das Kind 300 Mark von seinen Eltern auf ein Sparbuch eingezahlt. Welche Summe wird bei einem Zinssatz von 3,25%, am 18. Geburtstag ausgezahlt?

$$s_{18} = 1{,}0325 \cdot 300 \cdot \frac{1{,}0325^{18} - 1}{1{,}0325 - 1} = 7418{,}41$$

Das Kind kann also mit 7418,41 Mark rechnen. Davon wurden $18 \cdot 300 = 5400$ Mark von den Eltern eingezahlt, der Rest entstand aus Zinsen und Zinseszinsen.

Die Bestimmung des konstanten Quotienten q erfolgte in diesem Beispiel aufgrund folgender Überlegung: Ein Grundbetrag von G_0 erreicht bei jährlicher Verzinsung nach n Jahren den Betrag G_n, den man nach der Formel

$$G_n = G_0(1 + p\%)^n$$

berechnet; p ist hier das Symbol für den Zinssatz. Bei $p = 3{,}25\%$, (wie bei unseren Sparkassen üblich) ergibt sich der Zinsfaktor des Grundbetrages G_0 als

$$1 + \frac{3{,}25}{100} = 1{,}0325$$

Interessiert einen Sparer nun, wie lange sein Kapital braucht, bis es sich durch Zinsen verdoppelt, also $G_n = 2G_0$ wird, so gilt:

$$2G_0 = G_0(1 + p)^n$$

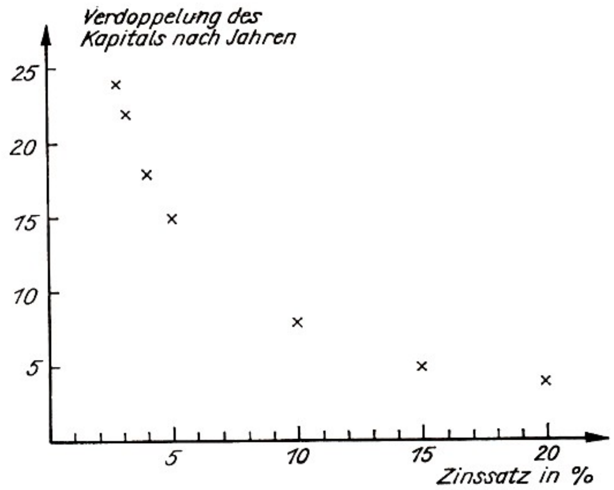
G_0 kürzt sich heraus, so dass unter anderem deutlich wird:
Eine Mark braucht bei gleichem Zinssatz genauso lange, um zwei Mark zu werden, wie es dauert, bis aus 1 Million Mark 2 Millionen werden.

In Abhängigkeit vom Zinssatz benötigt ein Kapital zum Verdoppeln, Verdreifachen und Verzehnfachen nach der gegebenen Formel die folgende Zeitspanne (in Jahren):

p (in %)	Verdopplung	Verdreifachung	Verzehnfachung
3	24	38	78
3,25	22	35	72
4	18	29	59
5	15	23	48
10	8	12	25
15	5	8	17
20	4	6	13

Das Schicksal Ihres Bankkontos können Sie mit diesen Formeln - wenn Sie wollen, d.h. deren Voraussetzungen einhalten - eindeutig voraussagen. Auch andere geometrische Zahlenfolgen, denen Sie begegnen konnten, lassen sich so berechnen.

Ebenso haben wir auf dem begrenzten Gebiet der Zahlenfolgen mit den betrachteten beiden Arten aber noch längst keine Grenzen erreicht. Mit einem letzten Beispiel sei verdeutlicht, dass arithmetische und geometrische Zahlenfolgen nicht die einzigen sind, die existieren.



Kapitalverdopplung in Abhängigkeit vom Zinssatz

Über die Entwicklung der Weltbevölkerung in unserem Jahrhundert liegen folgende Angaben vor:

Jahr	Höhe (in Mrd.)	Abs. Zuwachs (in Mill.)	Rel. Zuwachs (in %)
1910	1,62		
1925	1,86	240	15
1940	2,20	340	18
1955	2,73	530	24
1970	3,62	890	33

Es handelt sich hier - wie leicht zu sehen ist - weder um eine arithmetische Zahlenfolge mit konstantem absolutem Zuwachs noch um eine geometrische Zahlenfolge, bei der der relative Zuwachs in Prozent konstant ist. Die grafische Darstellung der Werte würde zeigen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit ständig zunimmt.
Auch hier lässt sich ein mathematisches Modell aufstellen, das jedoch kein lineares Trendverhalten zugrunde legen darf, um der Entwicklung annähernd zu entsprechen. Versuchsweise gehen wir von einem quadratischen Ansatz für die Trendfunktion aus:

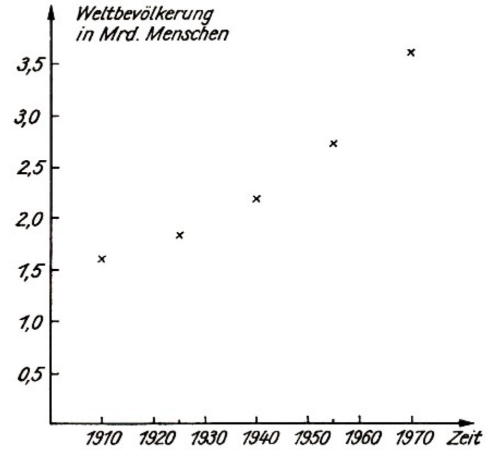
$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Nach unserem bewährten Vereinfachungsprinzip wird 1940 mit dem Zeitwert $x = 0$ versehen; 1955 erhält den Wert $x = 1{,}1925$ den Wert $x = -1$ usw.

Nach dem im Abschnitt über Korrelations- und Regressionsrechnung erläuterten Gaußschen Minimumprinzip ergibt sich nach den entsprechend abzuleitenden Formeln

$$\tilde{y} = 2{,}193 + 0{,}487x + 0{,}106x^2$$

und damit für die angegebenen Jahre durch Berechnung nach diesem quadratischen Modell:



Exponentielles Wachsen der Weltbevölkerung

Jahr	1910	1925	1940	1955	1970
x	-2	-1	0	1	2
Bevölkerung (in Mrd.)	1,643	1,812	2,193	2,786	3,591

Der Vergleich mit den tatsächlichen Zahlen zeigt eine relativ hohe Angepasstheit des gewählten Ansatzes. Völlig befriedigend ist er jedoch noch nicht.

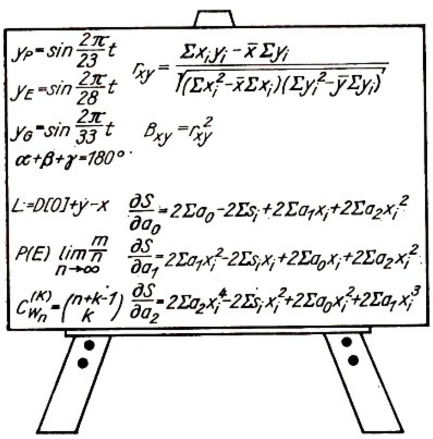
Wenn eine Vorhersage für die Jahre 1985 und 2000 gemacht werden soll, so ergibt sich in diesem Modell für $x = 3$ und $x = 4$ durch Einsetzen:

1985 4,608 Mrd. 2000 5,837 Mrd.

Diese Zahlen liegen unter den Prognosewerten entsprechender internationaler Organisationen (für das Jahr 2000 lautet die Prognose etwa 7 Mrd. Menschen), d. h., dass der gewählte quadratische Ansatz, unser mathematisches Modell, die tatsächliche Entwicklung nicht richtig widerspiegelt.

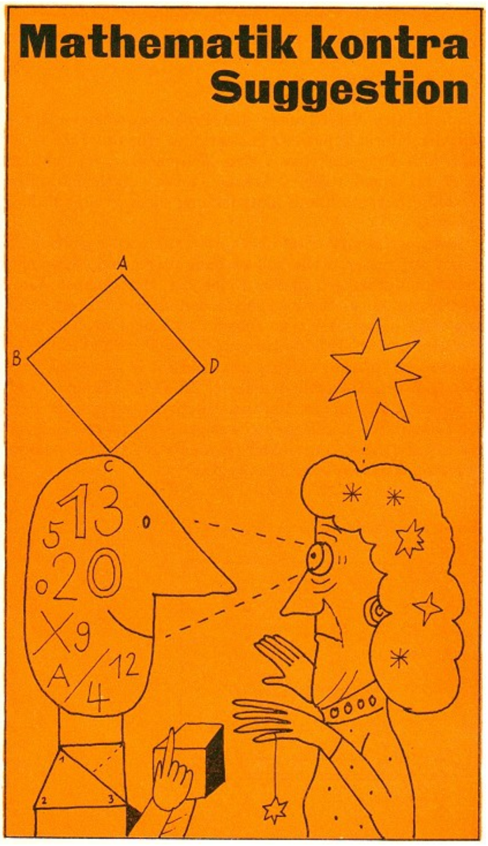
Einen weiteren Anlauf aber unternehmen wir jetzt nicht mehr. An dieser Stelle soll es endgültig genug sein mit unserem Vordringen in das Reich der Mathematik. Vielleicht konnten wir Anreize geben, den Mathematikern noch weiter in dieses Reich zu folgen, wo Ehepaare und Biorhythmen, Würfel und Autokennzeichen, Pilze und Roulette nicht mehr so leicht aufzuspüren sind wie in unseren Überlegungen um Wahrscheinlichkeit, Zufall und Trend.

Und vielleicht konnten wir Mathematik etwas alltäglicher und mathematische Betätigung etwas erstrebenswerter zeigen, als uns die Bilder gefurchter Stirnen vor formelübersäten Wandtafeln das gewöhnlich suggerieren.



Ergebnis eines Mathematikvortrages

7 Mathematik kontra Suggestion



Damit sind wir am Ende unseres an der Mathematik orientierten Nachdenkens über Wahrscheinliches und Zukünftiges angelangt. Blicke in die Zukunft Ihres persönlichen Lebens konnten auch wir Ihnen nicht bieten.
Dass und wie Zukunftsblicke aber bei Massenerscheinungen durchaus möglich sind, wurde sicher deutlich. Von unserer Hilfsfrage können wir uns also an dieser Stelle verabschieden. Blicken wir um uns, so befinden wir uns plötzlich mitten im »Urwald« der Mathematik. Wir hoffen, dass Sie diesen Wald nicht als undurchdinglich erfahren haben.

Vielleicht konnten wir Ihnen, die Sie bis hierher durchgehalten haben, Lust zu weiteren Expeditionen machen, Expeditionen, auf denen Sie Interesse an Mathematik oder auch - ganz unmathematisch - an genauerer gedanklicher Durchdringung Ihrer Lebensumwelt leiten könnte.

Man kann mit Mathematik, so wollten wir zeigen, Alltägliches klarer begreifen. Und es kann Spaß machen, Sachverhalte gedanklich so zu zergliedern, dass sie mathematisch erfassbar werden.
Selbst wenn man sie dann mathematisch gar nicht mehr bearbeitet, vermag die Formalisierung von Vorgängen Erkenntnisse über diese zu produzieren. Mathematik hat auch Alltagsaspekte; denn das ist ja die Voraussetzung allen mathematischen Vorgehens: umfassende und eindeutige Verläufe von Ereignissen zuerst zu bestimmen und dann in Formeln so zu verallgemeinern, dass bei Erfüllung der jeweils festgelegten Bedingungen qualitativ gleiche Verläufe quantitativ immer wieder bestimmt werden können.
Drei Forderungen müssen erfüllt sein, wenn eine solche mathematische Darstellung empirischer Verläufe richtig sein soll:

1. Objektivität: Sie ist gewährleistet, wenn die Ergebnisse unabhängig von Person, Ort und Zeit ihrer Mitteilung gültig sind.

2. Reliabilität (Zuverlässigkeit): Sie ist gewährleistet, wenn eine Wiederholung der Untersuchung in geringem zeitlichem Abstand das gleiche Ergebnis erbringt.

3. Validität (Gültigkeit): Sie ist vorhanden, wenn ein Verfahren Eigenschaften misst und berechnet, die vorher nur in einer Hypothese bezeichnet werden konnten.

»Mathematik kontra Suggestion« heißt damit nicht nur, sich mit Hilfe mathematischer Wahrscheinlichkeitsüberlegungen von der Illusion zu befreien, Blicke in die Zukunft des persönlichen Lebens seien möglich - ob durch Astrologie, Biorhythmen oder sonst wie.

Weit darüber hinaus ist der nüchterne, gliedernde, Wesentliches von Unwesentlichem trennende, analysierende, kritische, auf eindeutige Ergebnisse orientierte Blick des Mathematikers (des idealen Mathematikers) nützlich.

In diesem Sinne zumindest (wenn schon nicht durch die Beherrschung mathematischer Verfahren) sollte in jedem Menschen ein Stück Mathematiker stecken, sollte jeder Illusionen bewusst entgegenwirken, Suggestionen nicht erliegen, selbständig denken.

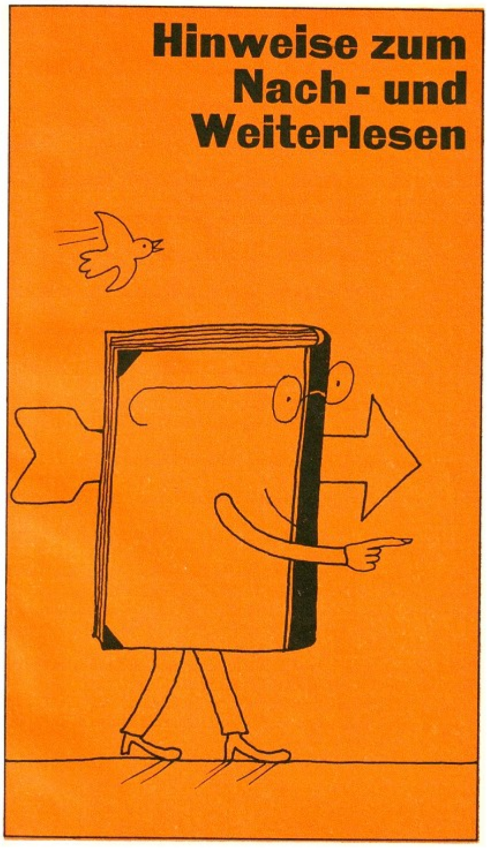
Über die Schranken auch der Mathematik sollte man sich jedoch klar sein: Auch mit noch so hochentwickelten Computern und noch so ausgeklügelten Formeln - gerade mit ihnen - bleibt der zuständige Mensch im Mittelpunkt und an der Basis allen Erkennens und allen Veränderns. Mathematik ist kein Allheilmittel, aber sie kann ein Mittel des Menschen zu Erkenntnis und Veränderung sein.

Die Einschränkung unseres Lobgesangs auf die Mathematik gilt noch in einem anderen Sinne. Bekannt und mit der hohen Autorität des Namens Karl Marx versehen, ist der enthusiastische Satz, dass eine Wissenschaft erst dann voll entwickelt sei, wenn sie dahin gelange, sich der Mathematik zu bedienen.
Wir fügen hinzu, dass - zumindest auf die uns absehbare Zeit - eine Mathematisierung aller Wissenschaften im unmittelbaren Wortsinn unvorstellbar ist.

Je weiter wir in die Problematik gesellschaftlicher Prozesse eindringen, desto deutlicher wird die Unmöglichkeit, deren Vielfalt, ja im Konkreten deren Unendlichkeit durch verallgemeinernde Formalisierung zu erfassen. Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung haben Tendenzcharakter wie manche mathematische Formel.
Aber die Zahl der Einflussgrößen ist so beträchtlich, die Rolle des Zufalls so groß, dass eine - selbst stochastische - mathematische Betrachtung nicht sinnvoll ist. Hier sind der Mathematik Grenzen gesetzt - noch ?

Also: Beschäftigen Sie sich mit Mathematik - ein bisschen oder sehr viel, für einige Freizeitstunden oder für alle Arbeitstage eines Lebens, als Gesellschaftsspiel oder zur Lösung ernsthafter Probleme, lernend oder Neues entdeckend! Und tun Sie das so, wie die Mathematik es erfordert, engagiert, neugierig und kritisch.

8 Hinweise zum Nach- und Weiterlesen



Asser, G.: Einführung in die mathematische Logik. Leipzig 1959.

Ausgewählte Kapitel der Mathematik. Leipzig 1972.

Bader, H./Fröhlich, S.: Mathematik für Ökonomen. Berlin 1965.

Churgin, J.: Formeln - und was dann ? Berlin 1970.

Fliess, W.: Der Ablauf des Lebens. Leipzig, Wien 1906.

Fliess, W.: In eigener Sache. Gegen Weininger und Swoboda. Berlin 1906.

Glahn, A.F.: Erklärung und systematische Deutung des Geburtshoroskopes. Bad Oldesloe 1925.

Glahn, A. F.: Jedermanns Astrologie für das deutsche Volk. Memmingen 1935.

Gregorius, W.: Unser Schicksal in den Sternen. Leipzig 1932/ 33.

Grimm, W., und J.: Kinder- und Hausmärchen. 2 Bde. Berlin 1980.

Gundel, W.: Sternglaube, Sternreligion und Sternorakel. Leipzig 1933.

Hasse, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. Leipzig 1966.

Kleine Enzyklopädie Mathematik. Leipzig 1965.

Körth, H./Förster, E.: Mathematik für Wirtschaftskaufleute. Berlin 1977.

Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. 2 Bde. Leipzig 1977.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. 4 Bde. Berlin 1978.

Monjallon, A.: Einführung in die moderne Mathematik. Braunschweig 1970.

Pässler, G.: Die Sterne lügen nicht. Leipzig, Jena, Berlin 1961. Ptolemäus, C.: Almagestum. 2 Bde. Leipzig 1963.

Scheidemünze. Aus dem deutschen Sprichwörterlexikon des Karl Friedrich Wilhelm Wander. Berlin 1979.

Schellenberg, E.: Sternendeutung. Berlin 1929.

Schröder, K.: Mathematik für die Praxis. 3 Bde. Berlin 1966.

Sputnik, Moskau. Heft 5/1978 und 8/1978.

Swoboda, H.: Die Perioden des menschlichen Organismus in ihrer psychologischen und biologischen Bedeutung. Leipzig, Wien 1904.

Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger. Berlin 1964.