

---

**Rüdiger Thiele**

**Mathematische Beweise**

1979 BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft  
MSB: Nr. 99  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

## Wie soll man das Buch lesen?

Dem Mathematiker ist darum nur gelungen  
so vieles, weil er zieht aus allem Folgerungen.  
Er folgert, wenn er auch nicht sieht, wozu es frommt,  
erwartend, ob es ihm einmal zustatten kommt.  
Auf einmal sieht er, wie Unnützes selber nützt,  
wie Allergrößtes sich auf Allerkleinstes stützt.  
F. Rückert

Der romantische Dichter Novalis (1772-1802), dem das Leben der Götter gleich der Mathematik war, äußerte sich so: "Wer ein mathematisches Buch nicht mit Andacht ergreift ..., der versteht es nicht."

Zu allen Zeiten haben jedoch Mathematiker Beweise nicht mit Andacht, sondern mit dem Bemühen um Verständnis, unterstützt von Bleistift und Papier, gelesen, und dies empfehle ich dem Leser auch.

Der Rolle der Beweise in der Mathematik, den verschiedenen Beweisführungen, was sie bezwecken und wie sie ausgeführt werden, ist dieses Büchlein gewidmet. Der eilige Leser, den spezielle Beweisverfahren mehr als logische Begründungen interessieren, kann ohne Verständnisschwierigkeiten ab Abschnitt 4. beginnen.

Ein tieferes Verständnis von dem, was ein Beweis ist, gewinnt der Leser, wenn er sich mit der axiomatischen Methode vertraut macht, d.h. Vorstellungen von einem Axiomensystem und der gewählten Logik besitzt. Ein Einblick wird in den Abschnitten 2. und 3. gegeben; die Abschnitte 3.5. bis 3.7. enthalten interessante weiterführende Ergebnisse und können beim ersten Lesen überschlagen werden.

Alle Ausführungen werden durch Beispiele und Zitate ergänzt, wobei ich mich um Vielfalt, Abwechslungsreichtum und Originalität bemühte und dabei versuchte, vieles aus anderen Gebieten zu bringen. Das Buch ist keinesfalls als elementares Lehrbuch der Beweistheorie oder als Ersatz für ein solches gedacht, sondern will zur Beschäftigung mit diesem Gegenstand anregen.

Das Buch enthält ungefähr 80 Übungsaufgaben, von denen der Leser wenigstens einen Teil zu lösen versuchen sollte. Aber erst nachdem sich der Leser eine angemessene Zeit mit einer Aufgabe beschäftigt hat, sollte er die Lösung nachschlagen. Das trifft auch für die schwierigeren Aufgaben zu.

Halle, im Mai 1980

Rüdiger Thiele

# Inhaltsverzeichnis

<b>Wie soll man das Buch lesen?</b>	<b>2</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Wodurch lässt sich die Mathematik charakterisieren? . . . . .	5
1.2 Sind Beweise nötig? . . . . .	6
1.3 Die Strenge der Beweise . . . . .	14
<b>2 Collegium logicum</b>	<b>16</b>
2.1 Die Rolle der formalen Logik in der Mathematik . . . . .	16
2.2 Aussagen . . . . .	18
2.3 Aussagenverbindungen . . . . .	21
2.3.1 Die Negation: nicht $A$ . . . . .	24
2.3.2 Die Konjunktion: $A$ und $B$ . . . . .	25
2.3.3 Die Disjunktion: $A$ oder $B$ . . . . .	25
2.3.4 Beziehungen zur Schaltalgebra . . . . .	26
2.3.5 Die Implikation: $A \rightarrow B$ . . . . .	27
2.3.6 Die Umkehrung der Implikation (Konversion) . . . . .	28
2.3.7 Die Äquivalenz: $A \leftrightarrow B$ . . . . .	29
2.4 Logische Gesetze (Tautologien) . . . . .	32
2.5 Wichtige logische Schlussregeln . . . . .	34
2.6 Logisches Schließen (Aussagenlogik) . . . . .	35
2.7 Eine Schlussweise, die nicht zur Aussagenlogik gehört . . . . .	36
2.8 Aussagenfunktionen . . . . .	37
2.9 Verbinden von Aussagenfunktionen . . . . .	38
2.10 Beziehungen zur Mengenalgebra . . . . .	39
2.11 Quantifizierungen . . . . .	40
2.12 Logisches Schließen (Prädikatenlogik) . . . . .	43
2.13 Mathematische Sätze . . . . .	44
2.13.1 Folgerungen in der Mathematik . . . . .	44
2.13.2 Sätze und ihre Umkehrungen . . . . .	46
2.13.3 Geschlossene Systeme von Sätzen . . . . .	51
2.13.4 Notwendige und hinreichende Bedingungen . . . . .	51
<b>3 Die axiomatische Methode</b>	<b>54</b>
3.1 Beweise . . . . .	54
3.2 Das Musterbeispiel: der geometrische Beweis . . . . .	55
3.3 Der axiomatische Aufbau . . . . .	57
3.4 Zwei Beispiele für ein Axiomensystem . . . . .	59
3.4.1 Axiomensystem von Peano für die natürlichen Zahlen . . . . .	59
3.4.2 Ein Axiomensystem für die Gruppentheorie . . . . .	62
3.5 Neue Auffassungen eines Axiomensystems . . . . .	65
3.6 Forderungen an ein Axiomensystem . . . . .	69
3.6.1 Widerspruchsfreiheit . . . . .	69

3.6.2	Vollständigkeit . . . . .	69
3.6.3	Unabhängigkeit . . . . .	71
3.7	Grundlagenfragen . . . . .	72
3.8	Lyrischer Exkurs: Hommage à Gödel . . . . .	79
3.9	Die axiomatische Methode außerhalb der Mathematik . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Beweise</b>	<b>82</b>
4.1	Direkte Beweise . . . . .	82
4.2	Der Rückschluss . . . . .	85
4.3	Indirekte Beweise . . . . .	89
4.3.1	Reductio ad absurdum . . . . .	92
4.3.2	Indirekte Beweise für Implikationen . . . . .	93
4.4	Fallunterscheidungen . . . . .	96
4.5	Gegenbeispiele . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Einige typische mathematische Beweise</b>	<b>103</b>
5.1	Existenzbeweise . . . . .	103
5.1.1	Das Schubkastenprinzip . . . . .	104
5.1.2	Der Intuitionismus . . . . .	105
5.2	Unmöglichkeitsbeweise . . . . .	106
5.3	Eindeutigkeitsbeweise . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Die Induktion als Beispiel für charakteristische Schlussweisen mathematischer Disziplinen</b>	<b>113</b>
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>120</b>
7.1	Über Beweise . . . . .	120
7.2	Psychologischer Exkurs . . . . .	123
7.3	Wie finden Mathematiker Beweise ? . . . . .	126
7.4	Trugschlüsse . . . . .	132
7.5	Worauf beruhen Trugschlüsse ? . . . . .	135
7.6	Paradoxien . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Lösungen</b>	<b>141</b>
<b>9</b>	<b>Literatur</b>	<b>150</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Wodurch lässt sich die Mathematik charakterisieren?

Ars mathematica damnabilis et interdicta est.  
(Die Kunst der Mathematik ist verwerflich und verboten.)  
Römisches Recht

Wer die erhabene Weisheit der Mathematik  
tadelt, nährt sich von Verwirrung.  
L. da Vinci

Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Im Verlauf ihrer etwa zweieinhalbtausendjährigen Geschichte sind auf die Frage, was Mathematik sei, viele Antworten gegeben worden.

Sie reichen von der Feststellung, die Mathematik handle von dem, was sich von selbst verstehe, bis zu der Deutung, dass man in der Mathematik weder wüsste, worüber man spräche, noch ob das Gesagte wahr wäre.

Das Wort Mathematik kommt aus dem Griechischen und bedeutet dort soviel wie Wissenschaft im eigentlichen Sinn (*μαθησις κατ'εξοχην*).

Diese Auffassung der Mathematik als Vorbild jeder Wissenschaft, die auf der unbedingten Gültigkeit mathematischer Aussagen beruht, zieht sich durch die Geschichte. So ist, um ein späteres Beispiel zu nennen, für den Philosophen I. Kant (1724-1804) die Mathematik eine wissenschaftliche Disziplin, die in mustergültiger Weise seit dem Altertum für alle Zeiten den sicheren Gang einer Wissenschaft eingeschlagen hat.

Bemühen wir uns, die so hervorgehobene und ausgezeichnete Mathematik zu charakterisieren, dann können wir es zum einen durch die Aufzählung der Gebiete versuchen, mit denen sich die Mathematik beschäftigt. Das war bis zum 19. Jahrhundert eine relativ einfache Angelegenheit, da die Mathematik im wesentlichen eine Größenlehre (Raum und Zahl) war.

Danach erweiterte sich das Feld mathematischer Forschung (abstrakte Algebra, Mengenlehre, Spieltheorie u. a. m.), so dass wir heute durch eine Aufzählung der verschiedenen Disziplinen dem Wesen der Mathematik nicht sehr nahe kommen.

Weil ein Ende der Entwicklung der Mathematik nicht abzusehen ist, wird jede Erklärung dieser Art bestenfalls nur kurzzeitig völlig zutreffend sein.

So auch die gegenwärtig übliche Charakterisierung der Mathematik als Wissenschaft von den Strukturen. Gegenüber der inhaltlichen Charakterisierung der Mathematik hat sich seit der Entstehung der Mathematik in Griechenland, etwa seit den Zeiten Euklids (um 300 v.u.Z.), an den Ansichten über die mathematische Methode nichts geändert:

Jede Aussage ist zu beweisen (Beweisprinzip). Als Erkenntnis wird in der Mathematik nur das betrachtet bzw. in eine Theorie aufgenommen, was bewiesen worden ist. Das ist der Grund, weshalb wir jede mathematische Erkenntnis unter allen Umständen für wahr halten.

## 1.2 Sind Beweise nötig?

Die Mathematik gefiel mir ganz besonders wegen der augenscheinlichen Gewissheit ihrer Beweisgründe.  
R. Descartes

Wir haben eben auf die Forderung in der Mathematik hingewiesen, jede Aussage zu beweisen. Jedoch wollen wir uns die Frage stellen, ob Beweise in Form von mitunter langen Ketten mathematischer Formeln und logischer Schlüsse wirklich notwendig sind oder ob nicht gesunder Menschenverstand, Anschauung und unsere Erfahrung allein genügen, um richtige mathematische Aussagen machen zu können.

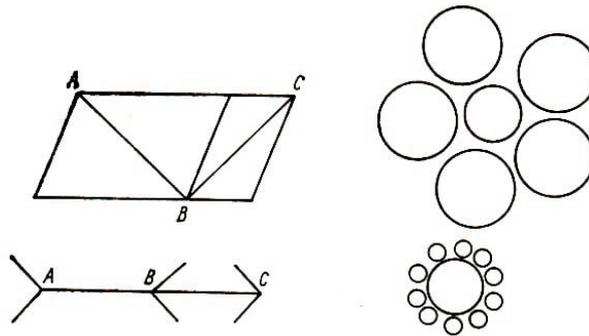


Abb. 1.1. Sandersches Parallelogramm, Müller-Lyersche Pfeiltäuschung  
Ebbinghaussche Kreistäuschung

Auf Grund der Anschauung wird man in der Abbildung 1.1 die Strecken,  $AB$  für länger als die Strecken  $BC$  halten, obwohl beide gleich lang sind. Entsprechend wirken die eingeschlossenen Kreise verschieden groß, obwohl sie den gleichen Flächeninhalt haben.

Die 1789 eingeführte französische Flagge, die längsgestreifte Trikolore in den Farben blau, weiß und rot, muss, um gleiche Streifen vorzutäuschen, Streifenbreiten von 30: 33 : 37 aufweisen. Es gibt noch eine Reihe weiterer sogenannter optischer Täuschungen, die uns in Bezug auf die Anschauung zur Vorsicht mahnen [16].

Eine der raffiniertesten optischen Täuschungen ist die sogenannte Fraser-Spirale, die Bild 2 zeigt. Hier wird eine so weitgehende Umdeutung des realen Sachverhaltes durch die Wahrnehmung vorgenommen, dass Sie ruhig einmal mit dem Zirkel nachprüfen sollten, ob es tatsächlich eine Spirale ist!

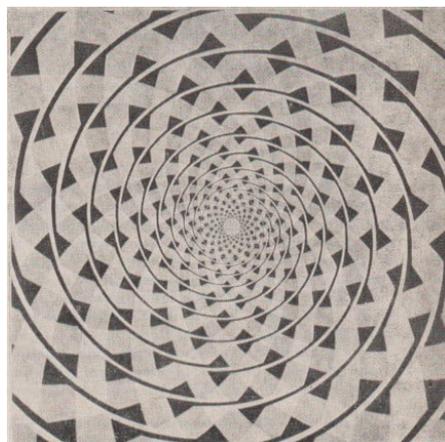


Bild 2. Die Fraser-Spirale

Diese Täuschung fiel Psychologen auf, als sie vor etwa 50 Jahren schwarze und weiße Fäden verdrehten und die faszinierende Wirkung auf geeignetem Untergrund bemerkten.

Der holländische Künstler M. C. Escher schuf 1958 die Lithographie *Belvedere* (d.h. schöne Aussicht), die eine phantastische Welt darstellt.



Bild 1. M.C. Escher (1898-1972), *Belvedere*, Lithographie (1955)

Am rechten Ende der unteren und oberen Säulenhalle sehen wir einen Mann und eine Frau durch zwei direkt übereinander liegende Bogen ins Freie blicken; trotzdem sieht der Mann von uns weg, während die Frau uns schräg anblickt. Escher bemerkt zu seinem Bild:

"Der auf der Bank sitzende Knabe hat eine würfelförmige Absurdität in den Händen. Er betrachtet sinnend den irrationalen Gegenstand und ist sich offenbar nicht bewusst, dass der *Belvedere* hinter seinem Rücken auf dieselbe unmögliche Weise gebaut worden ist.

Auf dem Fußboden der untersten Plattform, also innerhalb des Hauses, steht eine Leiter, auf der zwei Personen nach oben klettern. Nachdem sie aber ein Stockwerk höher angekommen sind, stehen sie wieder im Freien und müssen nochmals das Gebäude betreten.

Ist es ein Wunder, dass sich niemand von den Leuten um das Los des Gefangenen im Souterrain kümmert, der jammernd seinen Kopf durch das Gitter steckt?<sup>1</sup>"

Eine Standardaufgabe in der Differentialrechnung für die Berechnung von Maxima und Minima stellt das Problem dar, bei Vernachlässigung der Dicke einen Baumstamm in

---

<sup>1</sup>"Natürlich sind solche Welten phantastisch, aber sind sie phantastischer als die nichteuklidischen Räume oder  $\sqrt{-1}$  äußert sich zu diesem Bild der bekannte zeitgenössische englische Geometer H. S. M. Coxeter.

waagerechter Lage aus einer Straße mit der Breite  $a$  in eine andere Straße mit der Breite  $b$  zu bringen, die in die erste Straße rechtwinklig einmündet.

Wie lang darf der Baumstamm höchstens sein, damit er um die Ecke geht? Es bedarf einiger Rechnerei, um als größtmögliche Länge des Stammes

$$\sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}$$

zu ermitteln.

Der Dichter A. Strindberg (1849-1912) gibt der Aufgabe folgende experimentelle Wendung:

"Das ist ein artiges Rätsel; aber kein kluger Arbeiter stellt sich hin und rechnet das aus. Er probiert das einfach aus!"

Mit der Selbstsicherheit eines Dilettanten zieht er hieraus die Folgerung:

"Aber dies ist die Mathematik! Ein artiges Spiel für Leute, die nichts zu tun haben. Geduldsspiele, Rätsel und Scharaden lösen, besonders auf gekünstelte Art. Eine einfache Art gilt nicht, obgleich sie besser und schön ist; die ist nicht wissenschaftlich!"

Interessant wäre es, Strindberg auf die gleiche Weise das sogenannte Rundreiseproblem lösen zu lassen. Bei dem Rundreiseproblem geht es darum, dass ein Reisender  $n$  Städte besucht, wobei der Reiseweg minimal zu halten ist.

Für 20 Städte braucht eine elektronische Rechanlage bereits mehr Zeit, als ein Menschenleben währt, um die Lösung zu finden (vgl. 4.4.).

Experimentalmathematik scheidet selbstverständlicherweise damit als Beweismittel aus.

Wir wollen annehmen, dass ein Mensch mit der Körpergröße  $h$  ( $= 1,80$  m) längs des Äquators einmal um die Erde läuft. Dasselbe soll er auf dem zylindrischen Raketenkörper eines Raumschiffs längs eines Kreises tun. Bei welchem Gang ist der vom Kopf mehr als von den Füßen zurückgelegte Weg größer?

Kopf und Füße bewegen sich auf Kreisen, deren Umfänge zu berechnen und zu vergleichen sind (Abb. 1.2). Der Kopf legt bei einer Erdumrundung (Erddurchmesser  $d_E = 12756776$  m)

$$(d_E + 2h)\pi - d_E\pi = 2h\pi (= 3,60\pi \text{ cm} \approx 11,31 \text{ cm})$$

mehr Weg als die Füße zurück. Betrachten wir das Ergebnis, so machen wir die überraschende Feststellung, dass die vom Kopf mehr zurückgelegte Strecke unabhängig ist vom Durchmesser der Erde und allgemeiner unabhängig von dem Kreis, den die Füße durchlaufen.

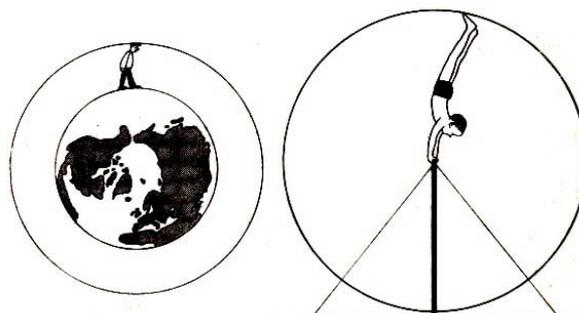


Abb. 1.2

Die Wegdifferenz hängt lediglich von der Körpergröße  $h$  ab. Sie ist damit bei einer Erdumkreisung die gleiche wie bei dem Gang um das Raumschiff oder um den riesigen Planeten Neptun sowie beim Drehen um die an einer Achse befestigt gedachten Füße (Kreis mit dem Durchmesser  $d = 0$ , die rechte Abb. 1.2 zeigt einen realisierbaren ähnlichen Fall).

Wir betrachten eine Aufgabe, die ohne Verwendung von Formeln leicht auf eine falsche Lösung führt.

Eine Flasche  $F$  mit dem Fruchtsaft  $S$  kostet 1,10 M. Dabei kostet der Saft 1 M mehr als die Flasche. Wieviel kostet der Saft ohne Flasche?

Die Antwort 1 M ist falsch! Wenn wir die in der Aufgabe gemachten Angaben hinschreiben, so erhalten wir

$$F + S = 110 \quad , \quad S = F + 100$$

Setzen wir den Ausdruck für  $S$  der zweiten Gleichung in die erste ein, dann erhalten wir  $2F + 100 = 110$ , also  $F = 5$ . Damit kostet der Saft ohne Flasche 1,05 M.

Diese einfachen Beispiele zeigen bereits eine Eigenart der Mathematik. Die Fragen waren in der Umgangssprache formuliert, die anschließenden Überlegungen und Berechnungen bedienten sich teilweise einer "künstlichen Sprache", der Sprache der Symbole und Formeln.

Diese künstliche Sprache der Mathematik ist ein mächtiges und wirkungsvolles Hilfsmittel, wie es andere Naturwissenschaften nicht aufweisen können, auch die Chemie mit ihrem Formelapparat bleibt hier zurück.

Wie günstig ein leistungsfähiger Formalismus ist, zeigt deutlich die universelle Anwendung algebraischer Schreibweisen in allen Zweigen der Mathematik oder die Positionsschreibweise der Zahlen. Alltägliche Multiplikationsaufgaben, die heute jeder Schüler der vierten Klasse lösen kann, stellten noch für die Römer mit ihrem Zahlensystem schwierige Probleme dar, so dass nur besonders ausgebildete Römer damit zurecht kamen.

Die Formelsprache erlaubt der Mathematik eine größere Exaktheit und schließt Irrtümer, Missverständnisse und Vorurteile aus.

In der Umgangssprache wird beispielsweise das Wort 'sein' in drei grundsätzlich verschiedenen Bedeutungen benutzt. Einmal in Sätzen wie 'Ich bin', um zu zeigen, dass etwas vorhanden ist (reale Existenz), zum anderen in Sätzen wie 'Er ist groß', um eine Eigenschaft eines Dinges auszudrücken, und schließlich in Sätzen wie  $2 + 2 = 4$ , um eine Gleichheit zu bezeichnen.

Ein weiterer Vorteil, der sich bei der Benutzung von Formeln ergibt, besteht darin, dass gleiche Formeln verschiedene Sachverhalte beschreiben. Zum Beispiel liefert der Ausdruck

$$a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

sowohl die Summe der ersten  $n - 1$  natürlichen Zahlen als auch die Anzahl der Verbindungsstrecken zwischen  $n$  Punkten sowie die Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  Dingen

gleichzeitig zwei Dinge herauszunehmen.

Neben diesen einfachen Beispielen wollen wir abschließend einige etwas komplizierter zu beweisende verblüffende mathematische Aussagen nennen, die blindes Vertrauen in die Anschauung, Erfahrung und das Denken erschüttern sollen.

Wieviel Platz (d.h. überstrichene Fläche) wird benötigt, um in der Ebene eine Nadel einmal um sich zu drehen? Die Antwort ist erstaunlich: Zu jeder bei einer Bewegung der Nadel um  $360^\circ$  überstrichenen Fläche lässt sich eine andere Bewegung der Nadel ebenfalls um  $360^\circ$  angeben, die eine Fläche kleineren Inhalts überstreicht.

Die Bewegungen setzen sich dabei lediglich aus Verschiebungen und Drehungen zusammen, sind also sehr einfach, sie nehmen jedoch mit sich verringernder überstrichener Fläche enorm zu.

Den Beweis für die Tatsache, dass es bei diesem Problem keinen kleinsten Flächeninhalt gibt, fand der Mathematiker Besikovich 1927.<sup>2</sup>

H. G. Wells (1866-1946) lässt in einer seiner phantastischen Erzählungen<sup>3</sup> den Lehrer Plattner aus unserem dreidimensionalen Raum in den vierdimensionalen Raum gelangen, wobei Plattner bei der Rückkehr in unsere Welt gespiegelt erscheint. Dieses Phänomen ist uns anschaulich nicht zugänglich, jedoch kann eine Analogieüberlegung mit reduzierten Dimensionen den Vorgang plausibel machen.

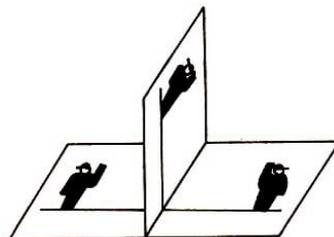


Abb. 1.3

Dazu betrachten wir einen ebenen Mr. Plattner, und wir klappen gemäß Abbildung 1.3 das Stück der Ebene, in dem sich Plattner aufhält, im dreidimensionalen Raum um, wodurch wir Plattner gespiegelt erhalten. Ist es bereits in einem 'zweidimensionalen Raum (d.h. auf einer Fläche) und ohne Ausweichen in den dreidimensionalen Raum möglich, Mr. Plattner zu spiegeln? So unglaublich das erscheint, es geht.

Wir benutzen dazu das in der Abbildung 1.4a gezeigte Band, das wir an den kürzeren Randstücken kreuzweise übereinander kleben (d.h. ein um  $180^\circ$  verdrehtes Band verkleben).<sup>4</sup>

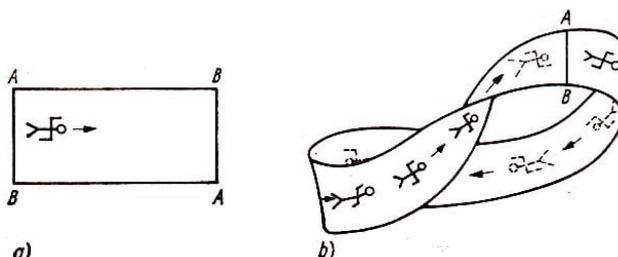


Abb. 1.4 a)

<sup>2</sup>Vgl. z. B. F. v. Krbek: Geometrische Plaudereien. 3. Aufl. Leipzig 1971.

<sup>3</sup>H. G. Wells: Das Kristallei. Leipzig 1979, S.132.

<sup>4</sup>Für das Verdrehen ist allerdings der dreidimensionale Raum erforderlich.

Das Ergebnis wird Möbiussches Band genannt (Abb. 1.4b).

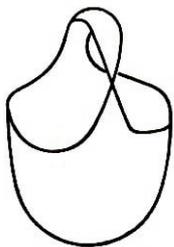
Wir lassen auf dem Band Mr. Plattner eine Rundreise machen, ohne dabei den Rand zu überschreiten. Die Rundreise gilt wegen der Dickelosigkeit des Bandes als beendet, wenn Plattner auf der anderen Seite des Bandes am Ausgangspunkt eintrifft.

Obwohl er den rechten Arm während seiner Reise nicht senkt, kommt er für die Zurückgebliebenen mit gesenktem rechtem Arm an, während der ursprünglich gesenkte linke Arm gehoben ist.

Er schreibt jetzt Spiegelschrift, und sein Herz ist am "rechten Fleck". Mit Plattner ist auch seine Uhr gespiegelt, d.h., die Zeiger drehen sich gerade in entgegengesetzter Richtung wie bei der Abreise.

Auf dem Möbiusschen Band ist also keine Unterscheidung zwischen Rechts- und Linksherum möglich, das Band ist nicht orientierbar. Der Rand des Bandes besteht aus einer geschlossenen Kurve, wie es auch bei einem Luftballon der Fall ist. Es ist unmöglich, den gesamten Luftballon mit einer Farbe anzustreichen, ohne den Rand (Mundstück) zu überschreiten.

Hingegen ist es unmöglich, das Möbiussche Band mit zwei Farben anzustreichen, die durch den Rand getrennt werden.



Diese Eigenschaft des Bandes, einseitig zu sein, findet auch technische Verwendung, wenn gleichmäßige Abnützung auf beiden Seiten eines Transportbandes gewünscht wird. Es ist sogar möglich, eine Tasche ohne Unterscheidungsmöglichkeit zwischen Innen und Außen zu schaffen (Abb. 1.5).

Abb. 1.5

Obwohl wir uns bei diesem oder jenem Gegenstand nicht für zuständig halten, so bildet doch die Logik eine Ausnahme, denn unlogisch denken möchte niemand. Zwar ist es richtig, dass Widersprechendes nicht gedacht werden kann, aber Fehler beim Denken unterlaufen uns doch häufiger, als es uns lieb ist. Nehmen wir die Voraussetzungen

Wenn es nicht regnet, dann gieße ich, (1)

Es regnet und Die Erde ist trocken schließen sich gegenseitig aus (2)

als gültig an. Ist dann aus (1) und (2) die Folgerung

Wenn ich gieße, dann regnet es und die Erde ist nass (3)

logisch möglich? Fraglos ist aber

Wenn ich gieße, dann regnet es nicht (4)

eine einleuchtende Folgerung aus (1). Es ist jedoch gerade umgekehrt. Aus (1) folgt nur, dass ich gieße, wenn es nicht regnet.

Ob ich unnötigerweise bei Regen auch gieße oder es sein lasse, sagt Satz (1) nicht, sondern das ist eine in der Regel unbewusst eingebrachte zusätzliche Voraussetzung. Erst mit Hilfe dieser ungenannten Voraussetzung (Bei Regen gieße ich nicht) ist die Behauptung (4) möglich - aus (1) ergibt sie sich rein logisch nicht (vgl. 2.3.5.).

Wenn wir annehmen, dass es regnet, dann stellt Satz (3) dagegen eine logisch mögliche Folgerung aus (1) und (2) dar. Dann folgt aus (2) der Satz 'Es regnet und die Erde ist nass' (= nicht trocken).

Aus (1) ergibt sich über das Gießen nichts, da durch (1) nur Aussagen gemacht werden, wenn es nicht regnet. Also ist es sowohl möglich, dass ich gieße, als auch, dass ich nicht gieße. Wenn ich aber gieße, dann ist der erste Teil des Satzes (3) erfüllt.

Andererseits (und unabhängig davon) gilt auch der zweite Teil des Satzes (3), also ist der gesamte Satz (3) in diesem Fall wahr.

Der Grund für die Irrtümer liegt darin, dass neben den Voraussetzungen wieder ungenannte Erfahrungen in die Schlussweisen eingebracht werden, denn wer wird schon bei Regen gießen?

Eine Legende besagt, dass der Gott Brahma in den Tempel von Benares einen Turm aus 64 runden, übereinander liegenden und nach oben immer kleiner werdenden Goldplättchen gebracht hat, wobei die Goldplättchen in der Mitte durchlöchert sind und auf einer Nadel stecken.

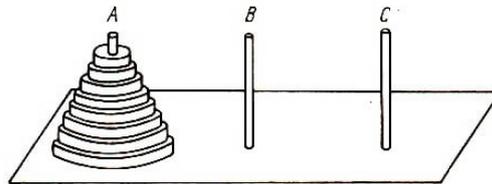


Abb. 1.6

Neben der Nadel, auf der sich der Turm befindet, gibt es noch zwei weitere leere Nadeln. Brahma hat den Priestern geboten, den Turm so auf einer leeren Nadel aufzubauen, dass jeweils nur ein Plättchen bewegt wird und dieses Plättchen nur auf eine freie Nadel oder auf ein größeres Plättchen gebracht werden darf. Unablässig sollen Brahmas Priester seit Jahrtausenden um die Lösung der Aufgabe bemüht sein.

Sobald es ihnen gelungen ist, den etwa 1 cm hohen Turm abzubauen, wird das Ende aller Dinge gekommen sein.

Wenn für jede Übertragung eines Plättchens 5 Sekunden benötigt werden, so sind je Tag 17280 möglich. Wird der Leser noch Zeit haben, sich mit der mathematischen Analyse dieser Kosmogonie im Abschnitt 6. zu beschäftigen oder sich diesem Buch zu widmen?

### Übungen

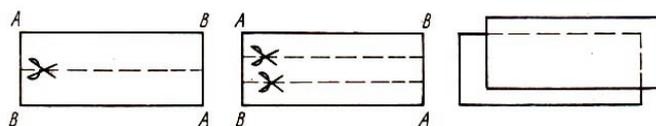


Abb. 1.7

1.1. Man verklebe die beiden ersten in Abb. 1.7 gezeigten Bänder wie im Text beschrieben (oder verdrehe sie noch stärker vor dem Verkleben). Was geschieht, wenn das Band längs der gestrichelt eingezeichneten Linien zerschnitten wird?

1.2. Das in Abb. 1.7 gezeigte doppelte Band soll um  $180^\circ$  gedreht und verklebt werden. Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabe 1.1?

Was für ein Körper ergibt sich, wenn die längeren parallelen Seiten des Bandes verbunden werden (durch Klebstreifen)? Wie verläuft die aus den verbundenen längeren Kanten bestehende Kurve auf diesem Körper?

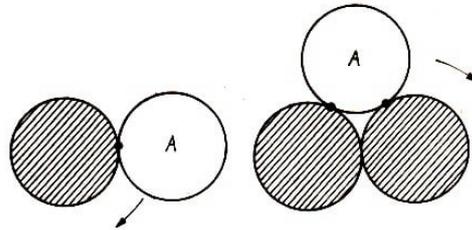


Abb. 1.8

1.3. Die Münzen der Abbildung 1.8 sind alle gleich groß. Wie oft dreht sich die mit  $A$  bezeichnete Münze um sich selbst, wenn sie auf den anderen Münzen abrollt (nicht gleitet), bis sie wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

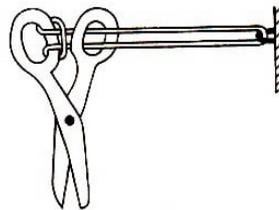


Abb. 1.9

1.4. Die Abbildung 1.9 zeigt eine Schere, die mit einer hinreichend langen Schnur an einer Wand befestigt ist. Ist es möglich, ohne den Faden zu zerschneiden, die Schere zu befreien?

1.5. Alle Knaffs haben die gleiche Form und Größe. Alle grünen Hunkis haben ebenfalls die gleiche Form und Größe. 20 Knaffs passen gerade in einen Plauz. Alle Hemputis enthalten grüne Hunkis. Ein grüner Hunki ist 10% größer als ein Knaff. Ein Hemputi ist kleiner als ein Plauz.

Wenn der Inhalt aller Plauze und aller Hemputis überwiegend rot ist, wie viele grüne Hunkis können dann maximal in einem Hemputi sein?

1.6. In der Seemannskiste des verstorbenen Kapitäns hatte Legrand den Plan für den Piratenschatz gefunden. Er enthielt folgende Erklärung:

"Der Schatz liegt, auf Treasure Island. Gehe die Strecke von der Eiche  $E$  zum verfallenen Leuchtturm  $L$ , von dort unter einem rechten Winkel die gleiche Strecke nach rechts und markiere diesen Punkt  $B$ . Gehe dann von der Eiche zur Quelle  $Q$ , von dort nach links unter einem rechten Winkel die gleiche Strecke wie von der Eiche zur Quelle ( $= S$ ). Der Schatz liegt auf dem Halbierungspunkt der Strecke  $\overline{RS}$ ."

Legrand fand auf der Insel den Leuchtturm und die Quelle, aber die Eiche war verschwunden. Nach einigen Überlegungen fand er den Schatz. Wie?

## 1.3 Die Strenge der Beweise

Euklid hätte uns nur vergebens die schönsten Wahrheiten der Geometrie vorgesagt, wenn er nicht zu unserer Überzeugung hinlängliche Beweise hinzugesetzt hätte, denn auf sein bloßes Wort würden wir sie ihm niemals geglaubt haben.  
L. Euler

Über die Notwendigkeit korrekter Beweise besteht jetzt Klarheit, denn viele Probleme enthalten Fußangeln sowohl für den gesunden Menschenverstand als auch für die Anschauung, und eine gesicherte Ableitung der Ergebnisse ist erforderlich, um die Wahrheit der Aussagen zu garantieren.

Gelegentlich haben übrigens auch Mathematiker diese "Fallen" übersehen und sind zu falschen oder voreiligen Schlüssen geführt worden (vgl. 7.4.).

Beweise durchdringen nicht nur die gesamte Wissenschaft, sondern haben auch Platz im täglichen Leben, denn nicht nur von dem, was wir in der Wissenschaft behaupten, sondern auch von dem, was wir im Alltag anderen mitteilen, meinen wir stets, es auch nachweisen, belegen usw. zu können.

Hier zeigen sich bereits einige Abstufungen in der Auffassung, was ein Beweis ist.

Die Extreme der möglichen Auffassungen finden sich in der Redewendung 'Zahlen beweisen', die auf den Physiker J.F. Benzenberg (1777-1846) zurückgeht, und dem Aphorismus von O. Wilde (1856-1900) 'Sogar Dinge, die wahr sind, können bewiesen werden' (Dorian Gray).

Ein kleines Kind nimmt in der Regel die Aussagen seiner Eltern kritiklos als bewiesen hin, eine Mitteilung von Freunden oder Bekannten über ein Ereignis wird als glaubwürdig betrachtet, der Wetterbericht als zutreffend angesehen usw.

Ein Naturwissenschaftler wird nach einigen Messreihen, die ein von ihm vermutetes Gesetz in einer hinreichenden Anzahl von Fällen bestätigen, dieses Gesetz als gültig betrachten, obwohl er längst nicht alle möglichen Fälle untersucht hat und dazu auch gar nicht in der Lage ist.

Das Wort Beweis wurde in verschiedenen Bedeutungen benutzt, die sich in dem Maß für die logische Strenge unterscheiden.

Ein mathematischer Beweis ist folgernd (deduktiv), d.h., er geht von wahren oder als wahr betrachteten Aussagen aus und führt allein mit Hilfe logischer Schlussregeln zwingend auf die Behauptung, die dann mit Notwendigkeit und unter allen Umständen gilt.

Für das Vertrauen, das Mathematiker in einen Beweis setzen, ist folgende Begebenheit aufschlussreich. Die komplexen Zahlen, die sich als notwendige Erweiterung der reellen Zahlen ergeben, da beispielsweise die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine reellen Lösungen hat, waren den Mathematikern lange Zeit "unheimlich", weil ihnen wichtige mit dem bis

dahin bekannten Zahlenbegriff Verbundene Eigenschaften wie das Anordnen der Größe nach nicht zukamen.

G. W. Leibniz (1646 bis 1716) sprach von ihnen als Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein, und erst C. F. Gauß (1777-1855) verschaffte ihnen durch die geometrische Deutung um 1830 Bürgerrecht in der Mathematik. Eine Gleichung, die bereits L. Euler (1707-1783) bekannt war, verbindet bemerkenswerte reelle und komplexe Größen in einfachster Form

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

B. Peirce (1809-1880), Professor für Mathematik an der Harvard-Universität und Vater des bekannten Logikers C. Peirce, entdeckte sie eines Tages und bemerkte zu seinen Studenten:

"Meine Herren, diese Formel ist in der Tat richtig, sie ist absolut paradox, wir können sie nicht verstehen, und wir wissen nicht, was sie bedeutet; aber wir haben sie bewiesen, und deshalb wissen wir, sie muss wahr sein!"

Bei der heutigen Auffassung und mit der neueren Begründung komplexer Zahlen ist nichts unverständlich oder rätselhaft an dieser Gleichung, die eine der berühmtesten der Mathematik ist.

Deshalb fällt uns das Vertrauen in ihre Herleitung leichter als Peirce vor reichlich 100 Jahren, der trotz der ihm nebelhaften Deutung und Bedeutung dieser Gleichung dem Beweis völlig vertraute.

Mathematische Beweise gründen sich nicht auf Ansichten oder Meinungen, die man laufend ändern kann, oder auf Erfahrungen (Experimente), die laufend verbessert (d.h. umgestoßen) werden können. Das hebt A. Einstein (1879-1955) hervor:

"Die Mathematik genießt vor allen anderen Wissenschaften ein besonderes Ansehen; ihre Sätze sind absolut sicher und unbestreitbar, während die aller anderen Wissenschaften bis zu einem gewissen Grad umstritten und stets in Gefahr sind, durch neu entdeckte Tatsachen umgestoßen zu werden."

Einstein nennt auch den Preis für die erstaunliche Langlebigkeit mathematischer Erkenntnisse, denn "insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."

## 2 Collegium logicum

### 2.1 Die Rolle der formalen Logik in der Mathematik

Wir sehen uns einige mathematische Sätze genauer an. In einem Lehrbuch über elementare ebene Geometrie können wir folgende Aussage finden:

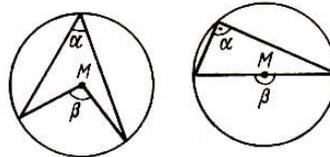


Abb. 2.1

Jeder Winkel an der Peripherie eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen (Abb. 2.1).

Wählen wir den Zentriwinkel gleich  $180^\circ$ , so erhalten wir offenbar die Aussage: Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter.

Wenn wir den eben benutzten Begriff Kreis als die Gesamtheit aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (Mittelpunkt) dieser Ebene den gleichen Abstand haben, erklären wollen, so benötigen wir vier bisher unerklärte Begriffe, nämlich Punkt, Ebene, Abstand und Gesamtheit.

Betrachten wir irgendeinen mathematischen Text, so wird uns rein äußerlich der eben durch einfache Beispiele belegte Sachverhalt auffallen. Aussagen und Begriffe werden aus anderen Aussagen und Begriffen hergeleitet.

Um die Stichhaltigkeit der Ableitungen zum Ausdruck zu bringen, verwenden die Mathematiker Wörter wie "daher, infolgedessen, wegen, folglich, mithin, darum" usw. Die Aussagen und Begriffe stehen nicht zusammenhanglos nebeneinander, sondern sind durch logische Schlüsse aneinander gereiht.

Aussagen werden als Folgen anderer Aussagen gekennzeichnet. Die Einsicht in die bestehenden Beziehungen vermittelt der Beweis. Die Logik ist das Gerüst, das zum Aufbau des Ganzen (einer Theorie) benötigt wird.

Vergleichen wir die in einem Geometriebuch gemachten Aussagen mit Aussagen in einem Lehrbuch über Zahlentheorie, so werden wir finden, dass jeweils einschlägige geometrische Begriffe wie Punkt, Winkel, Kreis oder einschlägige zahlentheoretische Begriffe wie Zahl, Teiler, Summe, aber auch solche Glieder wie oder, nicht, es gilt, für alle in den mathematischen Aussagen benutzt werden.

Die Verwendung der letzten Wörter ist nicht nur auf die Geometrie oder Zahlentheorie beschränkt, diese Ausdrücke erscheinen in den Aussagen aller mathematischen Theorien.

Wie sich die Geometrie mit Punkten, Winkeln oder Kreisen und die Zahlentheorie mit Zahlen, Teilern oder Summen befasst, so beschäftigt sich die formale Logik mit diesen Bestandteilen der mathematischen Aussagen; genauer gesagt, sind die Aussagen der Mathematik schlechthin ein Gegenstand der formalen Logik.

Sie untersucht den Zusammenhang zwischen den Aussagen einer Theorie, also beispiels-

weise, welche Aussagen aus anderen hergeleitet werden können oder ob die Herleitungen korrekt sind.

Dabei sehen wir uns ständig vor die Frage gestellt, mit welchem Recht wir von gültigen Aussagen oder von als gültig angesehenen Aussagen auf andere, wiederum gültige Aussagen schließen können. Kürzer gesagt, wie geht man mit Aussagen um?

Die Feststellung, dass wir das logische Schließen, also den richtigen Umgang mit Aussagen, genauso unbewusst wie die Grammatik unserer Muttersprache erlernt haben und anwenden können, trifft gewiss auf den alltäglichen Erfahrungsbereich weitgehend zu. Wenn wir uns jedoch vom konkreten, anschaulichen Sachverhalt lösen, wie es schlechthin in jeder Wissenschaft notwendig ist, dann besteht das logische Schließen nicht mehr aus "denjenigen Geistesoperationen, die wir von Jugend auf mit größter Bequemlichkeit verrichten" (Goethe), sondern es ist vielmehr F. Engels (1825-1895) beizupflichten, der bemerkt:

"Der gesunde Menschenverstand, ein so respektabler Geselle er auch in dem hausbackenen Gebiet seiner vier Wände ist, erlebt ganz wunderbare Abenteuer, sobald er sich in die weite Welt der Forschung wagt."

Deshalb wollen wir uns in diesem Abschnitt mit wichtigen Grundbegriffen der formalen Logik vertraut machen.

Sehen wir uns aus dem Blickwinkel der Logik nochmals mathematische Aussagen an, so fällt auf, dass zweierlei Arten von Aussagen auftreten. Um z.B. die Gültigkeit der Aussage ' $2^{2^5} - 1$  lässt beim Teilen durch 641 den Rest 639' einzusehen, werden einschlägige Kenntnisse aus der Arithmetik benötigt.

Demgegenüber kann ohne jede Kenntnis, welchen Rest  $2^{2^5} - 1$  beim Teilen durch 641 lässt, die Gültigkeit der Aussage 'Entweder lässt  $2^{2^5} - 1$  beim Teilen durch 641 den Rest 639 oder nicht' behauptet werden.

Die Einsicht in die inhaltliche Gültigkeit der ersten Aussage erfordert arithmetische Überlegungen, während sich die Gültigkeit der zweiten Aussage ohne nähere Untersuchungen der genannten Sachverhalte einfach aus der Form der Aussage erschließt, die die Tatsache beschreibt, dass entweder ein Sachverhalt oder sein Gegenteil besteht. Unabhängig davon, wie im Einzelfall dieser Sachverhalt beschaffen ist, trifft entweder er oder sein Gegenteil zu, denn es handelt sich hier um ein logisches Gesetz (Prinzip der Zweiwertigkeit von Aussagen).

Das logische Gesetz bezieht sich nicht auf die inhaltliche Wahrheit einer besonderen Aussage, sondern allein auf die Gültigkeit der Form der Aussage, mag es sich dabei um einen geometrischen, zahlentheoretischen oder sonstigen (etwa biologischen) Sachverhalt handeln. Die Gesetze der formalen Logik, die es erlauben, wahre Aussagen unangesehen ihres Inhaltes in andere wahre Aussagen zu überführen, sind natürlich für das Beweisen grundlegend.

Die formale Logik ist ein Instrument, Beweise auf Genauigkeit, Lückenlosigkeit und Zuverlässigkeit zu prüfen und Einsichten in formal-logische Zusammenhänge zu gewinnen. Der Schluss, der aus 'Einige Griechen sind Philosophen' und 'Alle Philosophen sind

weise' auf 'Einige Griechen sind weise' führt, ist ein bekanntes Schulbeispiel für einen formal-logischen Schluss.

Der Schluss selbst, d.h. seine Gültigkeit, hängt nur von der Form, nicht vom Inhalt und insbesondere nicht von der Wahrheit der benutzten Aussagen ab.

Wir könnten auch Griechen durch Eskimos oder grüne Hunkis ersetzen, ohne die formale Gültigkeit des Schlusses zu stören.

Ein weiterer formaler Schluss wäre, aus 'Einige Griechen sind Philosophen' die Folgerung zu ziehen 'Einige Philosophen sind Griechen'. Ersetzen wir Griechen und Philosophen durch  $G$  und  $P$ , so folgt formal aus 'Einige  $G$  sind  $P$ ' auch 'Einige  $P$  sind  $G$ '.

Dieser Schluss ist allerdings nur aus logischer Sicht formal, denn in der deutschen Sprache ist der formale Schluss von 'Einige Philosophen sind groß' auf 'Einige groß sind Philosophen' unsinnig, d.h., es gibt in unserer Sprache keine formale Regel, durch welche Wörter die Symbole  $G$  und  $P$  ersetzt werden können.

In der Mathematik hingegen lässt sich das logische Schließen formal besonders gut durchführen.

Die formale Logik verdankt ihre Wirksamkeit in der Mathematik ihrem begrenzten Zweck. Das Verhältnis von Umgangssprache und formaler Logik wurde von dem bedeutenden Logiker G. Frege (1848 bis 1925) mit dem Verhältnis von Auge und Mikroskop verglichen.

Während das Auge beweglich, aber optisch bei wissenschaftlichen Anforderungen nach Schärfe der Unterscheidungen unvollkommen ist, zeigt sich das Mikroskop diesen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, ist aber auf Grund dieser Spezialisierung für andere Zwecke unbrauchbar.

Der ganze Reichtum einer (natürlichen) Sprache wird bei dem Blick durch das Mikroskop der formalen Logik nicht sichtbar. Während sich uns der dreifache Gebrauch des Wortes sein erschließt, entgeht uns jedoch der Sinn der selbstbewussten Zeile 'Ich bin der ich bin' (I am as I am and so I will be ...) eines Renaissancegedichts von Sir Thomas Wyatt<sup>5</sup>, die formal-logisch eine offensichtliche Identitätsaussage darstellt.

## 2.2 Aussagen

Die Vorstellungen, die jeder von uns mit Wörtern der Umgangssprache verbindet, sind in der Regel zu vielschichtig, um den Inhalt eines Wortes oder Begriffes in eindeutiger Weise zu bestimmen. Das ist auch gar nicht möglich, da die Umgangssprache unseren Bedürfnissen ständig Rechnung trägt und sich laufend ändert und an neue Gegebenheiten anpasst.

Bevor wir einiges aus der formalen Logik erörtern, müssen wir klären, was unter dem bis jetzt in unbefangener Weise benutzten Ausdruck Aussage zu verstehen ist, denn der Gebrauch von Wörtern und Begriffen in der Mathematik oder Logik muss, um Missverständnisse auszuschließen, genau festgelegt sein.

---

<sup>5</sup>"Englische Gedichte aus sieben Jahrhunderten". Leipzig 1962, S. 40.

Wir werden unter einer Aussage<sup>6</sup> einen schriftlich fixierbaren Sachverhalt verstehen, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er zutrifft oder nicht. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch (Prinzip der Zweiwertigkeit), d.h. nicht beides zugleich (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch), aber wenigstens eines von beiden (Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Aussagen in diesem Sinn wären

Berlin liegt in Europa,  
 $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ ,  
Der Schnee ist schwarz,  
 $3 + 2 = 6$ .

Die ersten beiden Aussagen sind wahr, während die letzten falsch sind. Aussagen spiegeln Sachverhalte wider. Es wird ausgesagt, dass Dinge eine bestimmte Eigenschaft haben (7 ist Primzahl) oder dass zwischen ihnen gewisse Verhältnisse und Beziehungen bestehen (3 ist kleiner als 7).

Keine Aussagen sind 'Ruhe!', 'Guten Tag', 'Oh!', 'Wie spät ist es?', 'Rechts abbiegen verboten!' oder  $y = x^2$ .

Für die prinzipielle Entscheidung, ob ein Sachverhalt entweder den Wahrheitswert wahr oder den Wahrheitswert falsch hat, also eine Aussage ist, spielt es keine Rolle, wie man zu dieser Einsicht kommt.<sup>7</sup>

So soll der Satz 'Im Jahr 1991 wird man auf der Insel Hawaii eine Sonnenfinsternis beobachten' eine Aussage sein, da wir nicht nur den Astronomen vertrauen, sondern auch 1991 in der Lage sind, die Gültigkeit der Behauptung zu ermitteln.

Auch von der seit 1742 ungelösten Goldbachschen Vermutung, dass sich jede gerade Zahl, die größer als zwei ist, als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt, ist der Wahrheitswert gegenwärtig unbekannt - wir sind aber überzeugt, dass dieser Sachverhalt für alle geraden Zahlen, die größer als zwei sind, zutrifft oder nicht.

Der Wahrheitswert einer Aussage ist objektiv gültig, also unabhängig von der Person, die diese Aussage macht, dem Ort und dem Zeitpunkt, an dem bzw. zu dem eine Aussage gemacht wird.

Deshalb ist der Satz 'Alle Kreter lügen' keine Aussage, da er, wenn er von einem Kreter ausgesprochen wird, auf Widersprüche führt, die keine Entscheidung über die Wahrheit oder Falschheit des Satzes zulassen (vgl. 7.5.).

Gelegentlich scheint die Forderung der objektiven Gültigkeit durchbrochen zu werden, wenn etwa 'Es regnet' als Aussage angesehen wird. Hier handelt es sich jedoch um einen sprachlich unterformulierten Satz, der im benutzten Zusammenhang (Kontext) verständlich ist.

Es wird beim Leser vorausgesetzt, dass er Ort und Zeit des Regnens in Gedanken ergänzt, womit dieser Satz eine Aussage wird.<sup>8</sup>

---

<sup>6</sup>Wörtlich ist mit Aussage etwas Gesagtes gemeint.

<sup>7</sup>Der Wahrheitswert der Aussage 'Heute ist schönes Wetter' ist weitgehend subjektiv, weil sich der Begriff schön nicht genau festlegen lässt. Derartige Schwierigkeiten treten in der Mathematik nicht auf, die nur genau erklärte Begriffe benutzt.

<sup>8</sup>Strenggenommen liegt hier eine Aussagenfunktion vor (vgl. 2.8.).

Auch das Gegenteil tritt auf, nämlich sprachliche Überformulierungen wie z. B. 'weißer Schimmel' oder 'die beiden spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck'. Beide Formulierungsarten ändern nichts am Sachverhalt, sondern weisen nur verstärkt auf gewisse Eigenschaften hin (Tendenz der Aussage) oder lassen an sich klare Voraussetzungen der Kürze halber weg.

Stilistische Änderungen beeinflussen den Inhalt einer Aussage nicht. So bedeuten 'Alle Menschen sind sterblich' und 'Jeder Mensch ist sterblich' dasselbe. Goethes 'Vom Eise befreit sind Strom und Bäche durch des Frühlings holden belebenden Blick' wird im Wetterbericht für die Schifffahrt durch 'Der Strom ist eisfrei' ausgedrückt.

Der Übergang von den Aussagen zu ihren Wahrheitswerten wurde von G. Frege als ein entscheidender Abstraktionsschritt der formalen Logik erkannt.

Aussagen mit dem Wahrheitswert wahr heißen in der Mathematik Sätze (auch Lehrsätze) oder Theoreme (griech. *το μαθημα*), während Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bekannt ist, Vermutungen genannt werden.

Ein Satz im Sinn der Mathematik ist also etwas anderes als ein Satz im Sinn der Grammatik. Eine Aussage ist ebenfalls verschieden von einem grammatischen Satz, obwohl sie sich grammatischer Sätze als Ausdrucksmittel - aber nicht nur dieser - bedienen kann.

Die Feststellung, ob der in der Aussage genannte Sachverhalt gültig ist oder nicht, wird Urteil genannt und ist von der Aussage an sich zu unterscheiden. Jedem Urteil geht ein Beweis voran.

### Übungen

2.1. Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Welche wahre Aussagen? Was für zusätzliche Annahmen sind für einige Sätze notwendig, um ihren Wahrheitswert zu ermitteln?

- a) Der Mond ist ein grüner Käse.
- b) Karl der Große benutzte einen Trockenrasierer.
- c) Alle 2 m großen Menschen sind älter als 200 Jahre.
- d) Diese Aussage ist falsch.
- e) Dieser Satz ist keine Aussage.
- f) Der folgende Satz ist falsch. Der vorangehende Satz ist richtig.
- g) Jeder Satz in diesem Buch ist falsch.
- h) Er liest gern Bücher.
- i) Alle Knaffs enthalten grüne Hunkis.
- j) Der 10000ste Buchstabe in diesem Buch ist ein e.
- k) Die Menschen sind federlose Zweibeiner.
- l)  $2^{2^{17}} + 1$  ist eine Primzahl.

## 2.3 Aussagenverbindungen

In der Umgangssprache ändern wir Sätze oder verbinden mehrere Sätze zu neuen. Das ist auch bei Aussagen möglich. Soll z.B. aus geometrischen Aussagen eine Theorie aufgebaut werden, so sind Aussagenverbindungen unumgänglich (wie ja auch ein Gespräch nicht aus zusammenhangslosen Sätzen bestehen kann). Wir führen einige Beispiele an. So lässt sich die Aussage

$A$ : Es regnet

durch Einfügen des Wortes nicht in

$\bar{A}$  : Es regnet nicht

ändern, und diese Aussage verneint die erste. Wir können die Aussage  $A$  auch durch Voranstellen von 'Es ist möglich, dass' oder 'Es ist wahrscheinlich, dass' sowie 'Es ist notwendig, dass' verändern.

Nehmen wir eine zweite Aussage

$B$ : Die Straße wird nass

hinzu, so können wir mit den Bindewörtern und, oder, weil, trotzdem, während, damit, obwohl u.a. zwischen den Aussagen  $A$  und  $B$  eine Verbindung herstellen, etwa

Es regnet, und die Straße wird nass,  
Es regnet, oder die Straße wird nass,  
Es regnet, damit die Straße nass wird,  
Es regnet, obwohl die Straße nass wird.

Von Interesse ist dabei, ob die aus bekannten Aussagen (mit bekannten Wahrheitswerten) neu geschaffene Verbindung wahr oder falsch ist, also wiederum eine Aussage darstellt. Genauer gesagt, ist es möglich, ohne den Inhalt zu berücksichtigen, nur aus der Kenntnis der Wahrheitswerte der in die Aussagenverbindung eingehenden Aussagen den Wahrheitswert der Aussagenverbindung zu ermitteln, ihn gewissermaßen als logische Funktion der einzelnen Wahrheitswerte der in die Aussagenverbindung eingehenden Aussagen auszudrücken?

Da Aussagenverbindungen Bestandteile mathematischer Sätze oder Beweise sind, ist in der Mathematik die Antwort auf die genannte Frage wichtig.

Die Beantwortung der obigen Frage wird wesentlich von den benutzten Bindewörtern abhängen, die die logische Struktur des Satzes bestimmen. Wir können den Wahrheitswert einer Aussagenverbindung auf die beschriebene Weise nur dann eindeutig ermitteln (d.h. eine zugehörige logische Funktion angeben), wenn der Sinn der Bindewörter genau festgelegt ist.

Das ist in der Umgangssprache nicht immer so; oft tragen die Bindewörter durch ihre Stellung zu stilistischen und rhetorischen Effekten wie Betonung, Wohlklang, Mehrdeutigkeit usw. bei. Wie nachlässig die Umgangssprache bei Verneinungen bisweilen ist, zeigen folgende Sätze, von denen jeder formal den anderen verneint, die jedoch i. allg. als sinnlich empfunden werden:

Über Geschmack lässt sich (nicht) streiten.<sup>9</sup>

Das Bindewort während ist im Deutschen doppeldeutig, denn es kann eine Gegenüberstellung

$C$  :  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl, während als Näherungswerte für  $\sqrt{2}$  beim praktischen Rechnen rationale Zahlen genommen werden

bewirken oder zeitlich benutzt werden

$D$  : Descartes schuf die analytische Geometrie, während in Deutschland der 30jährige Krieg tobte.

Beide Aussagenverbindungen sind wahr, jede einzelne in die Aussagenverbindung eingehende Aussage ist ebenfalls wahr. Aber die logischen Strukturen der Aussagenverbindungen sind wesentlich verschieden. Obwohl durch das gegenüberstellende Bindewort während im ersten Satz eine gewisse Betonung ausgedrückt wird, handelt es sich logisch gesehen um eine Aufzählung, so dass während auch durch und ersetzt werden kann.

Wir können in der Aussagenverbindung  $C$  die Aussage ' $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl' durch 'Die Griechen entdeckten, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl' ist ersetzen und erhalten aus den wahren Aussagen wieder eine wahre Aussagenverbindung:

$C^*$  : Die Griechen entdeckten, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, während als Näherungswerte für  $\sqrt{2}$  beim praktischen Rechnen rationale Zahlen genommen werden.

Dagegen ist die aus wahren Aussagen gebildete Aussagenverbindung

$D^*$  : Die Griechen entdeckten, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, während in Deutschland der 30jährige Krieg tobte

falsch. Der Gebrauch des Bindewortes während im logischen Sinn von und ermöglicht es, den Wahrheitswert der Aussagenverbindung unabhängig vom Sinn der einzelnen Aussagen, die durch und (während) verbunden werden (vgl. 2.3.2), formal zu ermitteln, sofern die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen bekannt sind] (extensionaler Gebrauch).

Das ist beim zeitlichen Gebrauch von während nicht möglich. Hier ist eine Aussage über den Wahrheitswert der Aussagenverbindung nur dann möglich, wenn der Sinn der einzelnen Aussagen berücksichtigt wird (intensionaler Gebrauch). In unserem Beispiel muss der Vordersatz einen zur Zeit des 30jährigen Krieges bestehenden Sachverhalt wiedergeben, wenn die Aussagenverbindung wahr sein soll. In allen anderen Fällen ist die Aussagenverbindung falsch, obwohl jede der beiden Aussagen wahr sein kann.

Damit ist klar, welche Einschränkung wir den Bindewörtern auferlegen müssen, wenn wir den Wahrheitswert einer Aussagenverbindung ungeachtet des Inhalts der einzelnen in sie eingehenden Aussagen ermitteln wollen. Die durch extensionale Bindewörter zu einer Aussagenverbindung zusammengefügte Aussagen werden in der logischen Funk-

---

<sup>9</sup>Die doppelte Verneinung gilt heute in der Schriftsprache als Bejahung, im älteren Sprachgebrauch und in den Mundarten ist sie eine verstärkte Verneinung.

tion als Ganzes ohne "innere Struktur" betrachtet.

Nur der jeweilige Wahrheitswert ist von Interesse und dient zur Bestimmung des Wahrheitswertes der Aussagenverbindung. Deshalb bleibt für eine Aussagenverbindung der Wahrheitswert erhalten, wenn irgendeine in sie eingehende Aussage  $A$  durch eine beliebige andere Aussage  $B$  mit dem gleichen Wahrheitswert wie  $A$  ersetzt wird.

Der über den Wahrheitswert der einzelnen Teilaussagen hinausgehende Sinn der Teilaussagen einer Aussagenverbindung ist ohne Einfluss auf den Wahrheitswert der Aussagenverbindung.<sup>10</sup> Aus diesem Grund benutzen die Logiker gern Beispiele mit "sinnlosen" Sätzen wie

Der Mond ist ein grüner Käse, oder die Menschen sind federlose Zweibeiner,

um hervorzuheben, dass für sie die logische Struktur der Satzverbindungen und nicht ihr Inhalt wesentlich ist. Aussagenverbindungen vermitteln aus der Sicht der formalen Logik nur logische, aber keine sachlichen Zusammenhänge. Die logischen Strukturen bilden die Schemata, die dem Denken zugrunde liegen.

Es lässt sich zeigen, dass man in der Mathematik mit den Bindewörtern 'nicht'<sup>11</sup>, und sowie oder auskommt (vgl. auch Übung 2.4).

Die Bindewörter 'wenn ... dann' und 'genau dann, wenn' lassen sich auf sie zurückführen (vgl. 2.3.5. und 2.3.7.). Die genaue Erklärung dieser Bindewörter geben wir im Anschluss. Für uns ist folgendes Resultat wichtig:

Jede aus Aussagen mit Hilfe von 'nicht', 'und', 'oder', 'wenn ... dann' sowie 'genau dann, wenn' gebildete Verbindung ist wiederum eine Aussage, deren Wahrheitswert sich allein aus der logischen Struktur der Aussagenverbindung bestimmt (sich also durch die Wahrheitswerte der einzelnen Teilaussagen angeben lässt). Wir betrachten im weiteren nur noch solche Aussagenverbindungen, die damit insbesondere selbst stets Aussagen sind.

Da die einzelnen Aussagen inhaltlich nicht interessieren, werden wir, genau wie in der Algebra, wo nicht näher bestimmte Zahlen mit  $a, b, c, \dots$  bezeichnet werden, für Aussagen die Buchstaben  $A, B, C, \dots$  benutzen. Dadurch wird die logische Struktur von Aussagenverbindungen sehr deutlich, z.B.

nicht  $A$ ;  $A$  und  $B$ ;  $A$  oder  $B$ ; wenn  $A$ , dann  $B$ .

$A, B, C$ , nennen wir Aussagenvariable. Wir können die Formalisierung noch weiter treiben und, genau wie in der Algebra, wo die Operationen durch Symbole bezeichnet werden (etwa  $+$ ,  $:$  usw.), hier die Bindewörter symbolisieren. Unsere vier Beispiele lassen sich noch kürzer als

$$\bar{A}, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \rightarrow B$$

---

<sup>10</sup>Da es uns nur auf den Wahrheitswert einer Aussage ankommt, betreiben wir die Aussagenlogik nicht über einer Menge von Aussagen, sondern über der Menge der Wahrheitswerte  $W = \{w, f\}$ . Die einstelligen logischen Funktionen (z.B. Identität, Negation) sind Abbildungen von  $W$  auf  $W$ . Die zweistelligen logischen Funktionen (z.B. Disjunktion, Implikation) sind Abbildungen von  $W \times W$  auf  $W$ .

<sup>11</sup>Wir wollen zur Vereinfachung nicht ein Bindewort nennen, obwohl nicht keine Aussagen verbindet, sondern eine Aussage modifiziert.

schreiben ( $\vee$  erinnert an das lateinische Wort *vel* für oder).

Übungen

2.2. Sind die Bindewörter 'weil' und 'entweder ... oder' intensional oder extensional?

2.3. Ist 'Hans und Peter sind Brüder' eine Aussage oder eine Aussagenverbindung?

### 2.3.1 Die Negation: nicht $A$

Die einfachste Art, eine Aussage zu verändern, ist offenbar, den beschriebenen Sachverhalt zu verneinen, d.h. den gegensätzlichen (kontradiktorischen) Sachverhalt zu bejahen.

Die Negation einer Aussage ist genau dann falsch, wenn die Aussage wahr ist, und sie ist genau dann wahr, wenn die Aussage selbst falsch ist. Der Wahrheitswert einer Negation kann damit ohne die Kenntnis des Inhalts der Aussage allein aus ihrem Wahrheitswert ermittelt werden. Das Bindewort nicht wird also extensional gebraucht.

Die Negation einer Aussage ist selbst wieder eine Aussage. Einfache Beispiele sind

Aussage: 7 ist eine Primzahl, 6 ist eine Primzahl,

Negation: 7 ist nicht Primzahl, 6 ist nicht Primzahl.

Wenn  $A$  für eine Aussage steht, so wollen wir ihre Negation durch nicht  $A$  oder  $\bar{A}$  abkürzen. Kennzeichnen wir die Wahrheitswerte wahr und falsch mit  $w$  und  $f$ , dann führt die Erklärung der Negation nicht  $A$  einer Aussage  $A$  auf folgendes übersichtliche Schema (Wahrheitstafel) für die Wahrheitswerte von  $A$  und nicht  $A$ :

Abb. 2.2

$A$	nicht $A$
$w$	$f$
$f$	$w$

Die Negation einer Aussage wird in mathematischen Sätzen und Beweisen häufig benötigt, insbesondere beim indirekten Beweis (vgl. 4.3.). Deshalb ist der sorgfältigen und exakten Formulierung der Verneinung stets Aufmerksamkeit zu widmen, um Irrtümer zu vermeiden.

Sprachlich wird im Deutschen die Verneinung durch ein an passender Stelle eingefügtes nicht gebildet. Wie die Sätze 'Alle kommen nicht zusammen' und 'Alle kommen zusammen nicht' zeigen, kommt es mitunter auch auf die Stellung des Wortes nicht an.

Es gibt auch andere Möglichkeiten der Verneinung, z.B. lässt sich für '6 ist nicht Primzahl' auch '6 ist keine Primzahl' sagen oder 'Es ist nicht der Fall, dass 6 Primzahl ist' oder 'Es ist falsch, dass 6 Primzahl ist' sowie 'Es trifft nicht zu, dass 6 Primzahl ist' usw.<sup>12</sup>

<sup>12</sup>In anderen Sprachen wird die Negation auch komplizierter gebildet. Französisch: Je le vois, mais je ne 10 crois pas (G. Cantor). Englisch: He doesn't understand arithmetic.

### 2.3.2 Die Konjunktion: $A$ und $B$

Die Konjunktion verbindet zwei Aussagen  $A$  und  $B$  zu der neuen Aussage ' $A$  und  $B$ '. Ein Beispiel hierfür ist der bereits benutzte Satz 'Es regnet, und die Straße wird nass'. Dabei soll die Konjunktion  $A$  und  $B$  nur dann richtig sein, wenn  $A$  und  $B$  gleichzeitig wahr sind. In allen anderen Fällen ist die Konjunktion falsch. Damit unser Beispielsatz wahr ist, muss sowohl Regen fallen als auch die Straße nass sein. Ist nur die Straße nass (Sprengwagen) und kein Regen gefallen, so ist die Konjunktion falsch.

Das Bindewort und hat einen stark bindenden Charakter: die Richtigkeit beider Aussagen ist notwendig und hinreichend für die Richtigkeit der Konjunktion. Wir können wie bei der Negation eine Wahrheitstafel angeben (siehe Abb. 2.3).

Sprachlich wird eine Konjunktion häufig verkürzt, indem etwa die Aussagen '11 ist Primzahl und 13 ist Primzahl' zu '11 und 13 sind Primzahlen' zusammengezogen werden.

Allerdings gehört nicht jedes umgangssprachliche und zu einer verkürzten Konjunktion. In den Sätzen '11 und 13 sind Primzahlzwillinge' oder 'Der Punkt  $C$  liegt auf der Geraden  $g$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ ' wird ein Verhältnis zwischen den Zahlen 11 und 13 oder den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  ausgedrückt.

Äquivalente Formulierungen für  $A$  und  $B$  sind: sowohl  $A$  als auch  $B$ ;  $A$  trotzdem  $B$ ;  $A$ , obwohl  $B$ ; nicht nur  $A$ , sondern auch  $B$ ,  $A$ , ebenso auch  $B$ .

### 2.3.3 Die Disjunktion: $A$ oder $B$

Wie aus den Sätzen

Ich fahre morgen nach Prag oder nicht,  
Ich gehe heute Abend vielleicht ins Kino oder Theater,  
Bei Regen oder Nebel werde ich nicht fahren

hervorgeht, wird das Bindewort oder in der Umgangssprache in mehrfacher Bedeutung benutzt. Das erste oder drückt genau eine der zwei Möglichkeiten aus: entweder ich fahre oder ich fahre nicht, ein Drittes gibt es nicht.

Im zweiten Satz ist mit oder gemeint, dass von den zwei Möglichkeiten (Theater oder Kino) höchstens eine zutrifft, keinesfalls beide, möglicherweise aber auch gar keine.

Der Sinn des oder im dritten Satz liegt darin, dass wenigstens eine der Möglichkeiten (Regen oder Nebel), erst recht beide ausreichen, um nicht zu fahren.

In dem letzten, einschließenden Sinn wird das Bindewort 'oder' in der Mathematik und formalen Logik gebraucht. Eine Aussagenverbindung  $A$  oder  $B$  ist schon dann richtig, wenn bereits eine Aussage wahr ist. Die Aussagen

$2 + 2 = 4$  oder 5 ist Primzahl,  
 $2 + 2 = 4$  oder 6 ist Primzahl,  
 $2 + 2 = 3$  oder 5 ist Primzahl

sind alle wahr, dagegen ist

$$2 + 2 = 5 \text{ oder } 6 \text{ ist Primzahl}$$

falsch. In Bezug auf die Wahrheit der Aussagenverbindung ist die Disjunktion schwach bindend, da bereits die Gültigkeit einer Aussage die Disjunktion wahr macht. Nur die Ungültigkeit beider Aussagen führt zu einer falschen Disjunktion.

		A	B	A und B	A oder B
Abb. 2.3		w	w	w	w
		w	f	f	w
		f	w	f	w
		f	f	f	f

Das Bindewort oder wird also stets in dem Sinn benutzt, dass mindestens eine von zwei Aussagen gültig ist. Damit ist die verkürzt geschriebene Disjunktion '0 oder 2 lösen die Gleichung  $x^2 - x = 0$ ' wahr.

Natürlich ist die Disjunktion '0 oder 1 lösen die Gleichung  $x^2 - x = 0$ ' ebenfalls wahr, sachlich treffender ist hier allerdings die Konjunktion '0 und 1 lösen die Gleichung  $x^2 - x = 0$ .

In der Umgangssprache wird das einschließende oder nur bei ungewissen Sachverhalten (Regen oder Nebel) gebraucht. Wir würden nie sagen, dass die Erde oder der Mond ein Planet sei, sondern den schärferen Sachverhalt, dass die Erde ein Planet sei, behaupten. In der Mathematik ist es aber oft von Vorteil, nicht alles zu behaupten oder zu benutzen, was vorausgesetzt ist, wie z.B. die Methode des geometrischen Ortes in der Geometrie zeigt, wo zunächst nur Teile der Voraussetzungen benutzt werden, um geometrische Örter zu konstruieren, und erst am Ende die Gültigkeit aller Voraussetzungen die gesuchten Punkte als Schnitt geometrischer Örter bestimmt.

### 2.3.4 Beziehungen zur Schaltalgebra

Das Zweiwertigkeitsprinzip der formalen Logik für Aussagen ermöglicht, wie bereits um 1910 Ehrenfest erkannte, bemerkenswerte Verbindungen zur Elektrotechnik (Schaltalgebra), denn sowohl für Aussagen als auch für Schalter sind nur zwei Situationen möglich: die Aussagen sind entweder wahr oder falsch, und die Kontakte in den Schaltern sind entweder geschlossen (leitend) oder geöffnet (nicht leitend).

Damit können elektrische Schaltkreise als Modelle für logische Aussagenverbindungen dienen und umgekehrt. Den Wahrheitswerten entsprechen in den Modellen der Stromflussfluss (Lampe brennt) bzw. die Stromunterbrechung (Lampe brennt nicht).

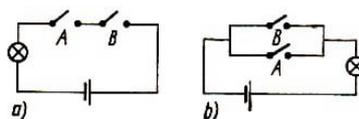


Abb. 2.4. a) Konjunktion A und B; b) Disjunktion A oder B

Die Negation einer Aussagenvariablen in einer Aussagenverbindung wird durch den Übergang zur anderen Schalterstellung des zugehörigen Schalters vorgenommen. Die Konjunktion und Disjunktion werden durch die in der Abb. 2.4 gezeigten Schaltungen realisiert. Sie sind wahr, wenn die Lampe des Modells brennt (vgl. [7]).

### 2.3.5 Die Implikation: $A \rightarrow B$

Mit Hilfe der Negation und Disjunktion lässt sich aus zwei Aussagen  $A$  und  $B$  eine neue Aussagenverbindung, die Implikation

$$(\text{nicht } A) \text{ oder } B \quad (1)$$

bilden, die eine wichtige Rolle in der Mathematik und formalen Logik spielt. Mit den bereits benutzten Aussagen

$A$ : Es regnet,  $B$ : Die Straße wird nass.

erhalten wir die Implikation

$$C: \text{Es regnet nicht oder die Straße wird nass.} \quad (2)$$

Die Aussage  $A$  wird Prämisse, die Aussage  $B$  wird Conclusio genannt, und in der Mathematik sind die Bezeichnungen Voraussetzung und Behauptung üblich.

Wir untersuchen die logische Funktion, die zur Implikation gehört und die uns die Wahrheitswerte der Implikation in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der beiden Aussagen  $A$  und  $B$  vermittelt.

(1) hat die Struktur der Disjunktion. Damit ist die Implikation nur falsch, wenn gleichzeitig beide in sie eingehenden Aussagen nicht  $A$  und  $B$  falsch sind, d.h. wenn  $A$  richtig und  $B$  falsch ist. Wenn  $A$  falsch ist, wird von  $B$  nichts verlangt - die Implikation ist dann stets richtig (vgl. Abb. 2.5).

Damit können wir jede Implikation in der Form 'Immer wenn  $A$  gilt, dann gilt auch  $B$ ' (3) bzw. kürzer

$$\text{Wenn } A, \text{ dann } B \quad (4)$$

ausdrücken. Der Beispielsatz (2) lautet so 'Wenn es regnet, dann wird die Straße nass.' Es ist wichtig zu betonen, dass keine Implikation etwas über das Bestehen der Sachverhalte  $A$  und  $B$  aussagt. Insbesondere wird die Gültigkeit der Aussage  $A$  nicht behauptet. Immer wenn  $A$  wahr ist, dann soll auch  $B$  wahr sein. Mehr ist nicht verlangt!

(Wer  $A$  sagt, muss auch  $B$  sagen.) Wir haben keine Verfahren oder Regeln angegeben, mit deren Hilfe  $B$  aus  $A$  gewonnen werden kann.

Der im Alltag oder in der Mathematik gegebene inhaltliche Zusammenhang der Aussagen tritt bei der formal-logischen Betrachtung völlig zurück. Aus logischer Sicht ist der Zusammenhang zwischen den Aussagen  $A$  und  $B$  der Implikation (1) bzw. (4) durch den Sinn der Bindewörter oder bzw. wenn dann gegeben.

Hierfür ist der umgangssprachliche Satz 'Immer wenn ich Urlaub mache, dann regnet es' ein recht gutes Beispiel, da keine ursächlichen Zusammenhänge, sondern Feststellungen benutzt werden. Weitere Beispiele sind

Wenn  $2 + 2 = 4$  ist, dann ist der Schnee weiß,  
Wenn  $2 + 2 = 5$  ist, dann ist der Schnee weiß,  
Wenn  $2 + 2 = 5$  ist, dann ist der Schnee schwarz,  
Wenn  $2 + 2 = 4$  ist, dann ist der Schnee schwarz.

Die ersten drei Aussagen sind wahr, während die letzte falsch ist. Die Implikation ist das Skelett für alle inhaltsbezogenen Folgerungen im Alltag oder in den Wissenschaften, oder mit anderen Worten gesagt, der logische Sinn der Bindewörter wenn dann liegt allen anderen umgangssprachlichen oder wissenschaftlichen Verwendungen zugrunde, die kausale, konditionale oder andere Bedingungen widerspiegeln.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen der Implikation in der Mathematik und Physik wird durch die Abkürzung

$$A \rightarrow B \quad (5)$$

sehr suggestiv zum Ausdruck gebracht, dass die Aussage  $A$  die Aussage  $B$  bedingt oder die physikalische Ursache  $A$  die Wirkung  $B$  hat. In der Regel zieht man im Alltag bei einer Implikation den Fall, in dem  $A$  falsch ist, nicht in Betracht.

Die Redewendung 'Wenn Weihnachten und Ostern zusammenfallen, dann ...' zeigt jedoch, dass die Umgangssprache auch dann die Implikation für wahr hält. Etwas Falsches impliziert alles!

Die Implikation 'Wenn  $A$ , dann  $B$ ' wird in der Mathematik auch als

Wenn  $A$ , so  $B$ ,  
A impliziert  $B$ ,  
Aus  $A$  folgt  $B$  (auch  $B$  folgt aus  $A$ ),  
A ist hinreichend für  $B$ ,  
B ist notwendig für  $A$ ,  
A zieht  $B$  nach sich,  
Nur wenn  $B$ , dann ist  $A$  möglich,  
Nur wenn  $B$ , dann  $A$ ,  
A nur (dann), wenn  $B$

formuliert. Vom formalen Standpunkt der Logik aus sind nicht alle Redewendungen ganz korrekt, da z.B. kaum  $2 + 2 = 4$  den weißen Schnee zur Folge haben dürfte, vgl. 2.7. (Wenn auch Goethe zu berichten wusste, dass die *Conclusio Ergo bibamus* zu allen Prämissen passe: "Es ist schönes Wetter, ergo bibamus; Es ist hässliches Wetter, ergo bibamus ...")

### 2.3.6 Die Umkehrung der Implikation (Konversion)

In der Disjunktion  $A$  oder  $B$  können die Aussagen  $A$  und  $B$  vertauscht werden, ohne dass sich der Wahrheitswert der Aussagenverbindung ändert. Wenn wir die Voraussetzung  $A$  und die Behauptung  $B$  der Implikation  $A \rightarrow B$  vertauschen, dann erhalten wir die (logische) Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$ . Für die vorhin betrachteten Implikationen lauten die Umkehrungen

Wenn der Schnee weiß ist, dann ist  $2 + 2 = 4$ ,  
Wenn der Schnee weiß ist, dann ist  $2 + 2 = 5$ ,  
Wenn der Schnee schwarz ist, dann ist  $2 + 2 = 5$ ,  
Wenn der Schnee schwarz ist, dann ist  $2 + 2 = 4$ .

Von diesen Implikationen ist die zweite falsch, alle anderen sind wahr. Das zweite Beispiel zeigt, dass die Gültigkeit einer Implikation nicht die Gültigkeit ihrer Umkehrung nach sich ziehen muss.

Wenn eine Implikation  $A \rightarrow B$  einen physikalischen Sachverhalt beschreibt, so wird  $A$  die Ursache von  $B$  genannt. Bei der Umkehrung  $B \rightarrow A$  wird von der Wirkung auf die Ursache zurückgeschlossen.

Dieser Fall kommt in der Physik häufig vor, jedoch zeigt das obige Beispiel, dass der Physiker nicht mit der Logik allein auskommen wird, um einen solchen Schluss im Sinne der Physik als korrekt nachzuweisen.

Benutzen wir wieder die Aussagen  $A$ : 'Es regnet' und  $B$ : 'Die Straße wird nass', so führt der kausale Zusammenhang auf die Implikation  $A \rightarrow B$ : 'Wenn es regnet, dann wird die Straße nass'.

Aus  $B$  folgt nicht ohne weiteres  $A$ , d.h. die Implikation  $B \rightarrow A$ : 'Wenn die Straße nass ist, dann hat es geregnet', da - und das gerade bei fehlendem Regen - ein Sprengwagen die Aussage  $B$  zur Folge haben kann (vgl. Ch. Morgensterns Argumentation in *Bona fide*<sup>13</sup>).

Wir benötigen hier zusätzliche, außerlogische Kenntnisse, um solche Fälle auszuschließen. Folgerungen, die sich aus rein logischen Gründen aus Aussagen ergeben, gehören zu den deduktiven Schlüssen, während die eben benutzte Schlussweise reduktiv genannt wird. Mathematische Schlüsse sind ohne Ausnahme deduktiv.

### 2.3.7 Die Äquivalenz: $A \leftrightarrow B$

Für die Aussagen  $A$ : 'Das Dreieck hat drei gleiche Winkel' und  $B$ : 'Das Dreieck hat drei gleiche Seiten' gilt sowohl  $A \rightarrow B$  als auch  $B \rightarrow A$ .

Wir wollen allgemein den Fall betrachten, dass für zwei gegebene Aussagen  $A$  und  $B$  sowohl die Implikation  $A \rightarrow B$  als auch die Umkehrung  $B \rightarrow A$  dieser Implikation gelten.

Aus  $A \rightarrow B$  ergibt sich: wenn  $A$  wahr ist, so auch  $B$ . Aus der Umkehrung erhalten wir: wenn  $B$  wahr ist, dann auch  $A$ . Mithin sind  $A$  und  $B$  beide gleichzeitig entweder wahr oder falsch. Solche Aussagen werden logisch gleichwertig (äquivalent) genannt. Für  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$  wird kürzer

$$A \leftrightarrow B \tag{6}$$

geschrieben. Die durch (6) symbolisierte Aussagenverbindung heißt logische Äquivalenz. Die Äquivalenz zweier Aussagen  $A$  und  $B$  wird sprachlich durch

$$A \text{ genau dann, wenn } B \tag{7}$$

ausgedrückt. Zwei Beispiele für äquivalente Aussagen sind:

65437 ist durch 3 teilbar genau dann, wenn die Quersumme von 65437 durch 3 teilbar ist,

---

<sup>13</sup>"Ausgewählte Werke". Leipzig 1975, S. 285.

Der Mond ist ein grüner Käse genau dann, wenn die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich ist.

Äquivalenzen werden mathematisch auch folgendermaßen formuliert (einige Ausdrücke sind logisch nicht ganz korrekt, aber mathematisch üblich):

$A$  dann und nur dann, wenn  $B$ ,  
 $B$  dann und nur dann, wenn  $A$ ,  
 $A$  ist notwendig und hinreichend für  $B$ ,  
 Wenn  $A$ , so  $B$  und umgekehrt,  
 $B$  genau dann, wenn  $A$ .

Logisch äquivalent zu sein bedeutet nur, den gleichen Wahrheitswert, jedoch nicht den gleichen Sinn zu haben. Deshalb kann in einer Aussagenverbindung eine Aussage stets durch eine äquivalente Aussage ersetzt werden, ohne den Wahrheitswert der Aussagenverbindung zu ändern.

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Abb. 2.5

### Übungen

2.4. Die Abb. 2.3 und 2.5 sind Beispiele für die Möglichkeiten, durch Festsetzen der Wahrheitswerte w und f zweistellige Aussagenverbindungen zu erklären. Es gibt insgesamt 16 derartige Möglichkeiten, die Wahrheitswerte zu verteilen bzw. zweistellige Aussagenverbindungen zu erklären.

Geben Sie weitere Aussagenverbindungen an und versuchen Sie, diese verbal zu beschreiben!

2.5. Stellen Sie für die Bindewörter 'weder ... noch', 'entweder ... oder' \* und 'zwar ... jedoch nicht' Wahrheitstabeln auf!

2.6. Die Aussagenverbindung  $A|B$  ist durch die Wahrheitstafel

$A$	$B$	$A B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

erklärt (Shefferscher Strich). Auf sie können alle 16 möglichen zweistelligen Aussagenverbindungen zurückgeführt werden. Um welche in diesem Abschnitt beschriebenen Aussagenverbindungen handelt es sich bei

$$A|(A|B) \quad , \quad (A|B)|(A|B)$$

2.7. Bilden Sie die Negation von:

- a) Das Dreieck ist rechtwinklig und gleichschenkelig.
- b)  $A$  kann deutsch oder russisch sprechen.

2.8. Sind die folgenden Aussagenverbindungen wahr?

- a) Wenn ich nicht älter als 200 Jahre bin, dann bin ich größer als 2 m.
- b) Wenn ein Mensch über 2 m groß ist, dann ist er älter als 200 Jahre.
- c) Nur wenn ein Mensch größer als 2 m ist, dann ist er älter als 200 Jahre.
- d) Entweder ist  $5 < 3$ , oder aus  $2 + 3 = 5$  folgt  $3 \cdot 4 = 12$ .
- e) Entweder ist  $5 < 3$ , oder aus  $2 + 3 = 6$  folgt  $3 \cdot 4 = 12$ .
- f) Entweder ist  $5 > 3$ , oder aus  $2 + 3 = 6$  folgt  $3 \cdot 4 = 12$ .
- g) Wenn  $5 > 3$  ist, dann gilt sowohl  $2 + 3 = 6$  als auch  $3 \cdot 4 = 12$ .
- h) Wenn  $5 > 3$  ist, dann gilt sowohl  $2 + 3 = 5$  als auch  $3 \cdot 4 = 12$ .
- i) Wenn  $5 < 3$  ist, dann gilt sowohl  $2^{257} - 1$  ist prim als auch die Goldbachsche Vermutung ist richtig.
- j) Wenn ich groß bin, dann bin ich klein.
- k) Ich bin groß, und ich bin klein.
- l) Ich bin groß, oder ich bin klein.
- m) 7 oder 9 ist Primzahl.
- n) 2 und 4 sind Teiler von 216.
- o) 2 oder 4 ist Teiler von 216.
- p) Entweder 2 oder 4 ist Teiler von 216.

2.9. Sind die folgenden Aussagenverbindungen äquivalent?

- a) Es regnet heute, und morgen scheint die Sonne oder übermorgen scheint die Sonne. Es regnet heute und morgen scheint die Sonne, oder es regnet heute und übermorgen scheint die Sonne.
- b) Es ist nicht der Fall, dass das gekochte Eier sind. Das sind nichtgekochte Eier.

2.10.  $A$  und  $B$  sind gegebene Aussagen. Welche der folgenden Implikationen sind äquivalent?

- a)  $A \rightarrow B$ ; b)  $\bar{A} \rightarrow B$ ; c)  $A \rightarrow \bar{B}$ ; d)  $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$
- e)  $B \rightarrow A$ ; f)  $\bar{B} \rightarrow A$ ; g)  $B \rightarrow \bar{A}$ ; h)  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$

2.11.  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind Personen.  $A$  sagt, dass  $B$  lügt.  $B$  sagt, dass  $C$  lügt.  $C$  sagt, dass  $A$  und  $B$  lügen. Die Aussage von  $A$  bezieht sich auf die Aussage von  $B$ , die von  $B$  auf die Aussage von  $C$  und die Aussage von  $C$  schließlich auf die Aussagen von  $A$  und  $B$ . Wer lügt und wer sagt die Wahrheit? (L. Carroll)

2.12. Im Imperium logicum trifft ein Wanderer, der nach  $A$  will, an einer Wegkreuzung einen Einwohner. Die Einwohner des Imperium logicum sagen entweder stets die Wahrheit oder lügen stets (d.h. verneinen alle Aussagen, bilden dann aber die Aussagenverbindungen korrekt). Mit welcher der zwei Fragen kann der Wanderer garantiert den Weg nach  $A$  ermitteln?

- a) Hätten Sie auch vor einer Stunde gesagt, dass dieser Weg nach  $A$  führt?
- b) Stimmt es, dass der Weg nach  $A$  führt und Sie die Wahrheit sagen?

2.13. Drücken Sie den Satz ohne Negation aus: Ich habe mich stets gegen die Absicht gewandt, die Gegner der Stimmungsmache gegen die Antialkoholbewegung nicht mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln nicht zu unterdrücken !

## 2.4 Logische Gesetze (Tautologien)

Wir haben neben der Implikation  $A \rightarrow B$  auch ihre Umkehrung  $B \rightarrow A$  betrachtet. Wenn wir die Aussagen  $A$  und  $B$  mit ihren Negationen  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  benutzen, so gibt es weitere mit der Implikation  $A \rightarrow B$  verknüpfte Aussagen wie z.B.

$$\bar{A} \rightarrow \bar{B} \quad (\text{Inversion}) \quad (8)$$

$$\bar{B} \rightarrow \bar{A} \quad (\text{Kontraposition}) \quad (9)$$

(vgl. Übung 2.10). Beispielsweise lautet zu der Implikation

Wenn 6 die natürliche Zahl  $n$  teilt, dann teilt auch 3 die natürliche Zahl  $n$

die Umkehrung

Wenn 3 die natürliche Zahl  $n$  teilt, dann teilt 6 auch die natürliche Zahl  $n$ ,

die Inversion (Gegensatz)

Wenn 6 die natürliche Zahl  $n$  nicht teilt, dann teilt auch 3 die natürliche Zahl  $n$  nicht und schließlich die Kontraposition (Gegensatz der Umkehrung)

Wenn 3 die natürliche Zahl  $n$  nicht teilt, dann teilt auch 6 die natürliche Zahl  $n$  nicht.

Auf Grund der Definition (1) der Implikation haben wir für (8) bzw. (9) für beliebige Aussagen  $A$  und  $B$

$$\bar{\bar{A}} \text{ oder } \bar{B} \text{ bzw. } \bar{\bar{B}} \text{ oder } \bar{A}$$

also wegen  $\bar{\bar{A}}$  äquivalent mit  $A$  und  $\bar{\bar{B}}$  äquivalent mit  $B$

$$A \text{ oder } \bar{B} \text{ bzw. } B \text{ oder } \bar{A}$$

Hieraus ergeben sich für beliebige Aussagen  $A$  und  $B$  folgende Äquivalenzen für die Implikation  $A \rightarrow B$  und die mit ihr verknüpften Aussagenverbindungen

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \quad (10)$$

$$(B \rightarrow A) \leftrightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \quad (11)$$

Dagegen gilt die Äquivalenz  $A \leftrightarrow B$  für zwei gegebene Aussagen  $A$  und  $B$  nur dann, wenn die Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Aussagenverbindungen, die durch bestimmte Aussagen erfüllt werden und durch andere nicht, werden erfüllbar genannt.

Die Implikation gehört zu dieser Klasse von Aussagenverbindungen. Im Gegensatz dazu gelten die Aussagenverbindungen (10) und (11) für jede beliebige Aussage  $A$  und

$B$ , denn auf Grund ihrer logischen Struktur ergibt sich stets der Wahrheitswert wahr. Solche allgemeingültige logische Ausdrücke werden logische Gesetze oder Tautologien genannt. Beispiele:

$(A \text{ und } B) \leftrightarrow (B \text{ und } A)$  Kommutativität der Konjunktion,

$[(A \text{ oder } B) \text{ oder } C] \leftrightarrow [A \text{ oder } (B \text{ oder } C)]$  Assoziativität der Disjunktion,

$A \text{ oder } (\text{nicht } A)$  Satz vom ausgeschlossenen Dritten (Tertium non datur),

$A \leftrightarrow \text{nicht}(\text{nicht } A)$  doppelte Negation,

$[(\text{nicht } A) \text{ oder } B] \leftrightarrow (A \rightarrow B)$  Implikation,

$\text{nicht}(A \text{ und } B) \leftrightarrow [(\text{nicht } A) \text{ oder } (\text{nicht } B)]$ ,

$\text{nicht}(A \text{ oder } B) \leftrightarrow [(\text{nicht } A) \text{ und } (\text{nicht } B)]$  de Morgansche Gesetze,

$\text{nicht}(A \text{ und } (\text{nicht } A))$  Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch (Principium contradictionis),

$(\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow A$  Reductio ad absurdum.

Bei einem logischen Gesetz kommt es nicht darauf an, welche Aussagen verbunden werden, sondern wie sie verbunden werden, genau wie es in der Algebra für eine allgemeingültige Formel (eine Identität), etwa

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

nicht darauf ankommt, welche Zahlen für  $x$  und  $y$  eingesetzt werden; denn die Formel gilt auf Grund der Art der Verknüpfung von Zahlen für alle (reellen) Zahlen.

Die Negation einer Tautologie (eines logischen Gesetzes) hat stets den Wahrheitswert falsch und wird Kontradiktion genannt. Aus dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch ergibt sich so z.B. die Kontradiktion

$A \text{ und } (\text{nicht } A)$ .

Ziehen wir wieder den Vergleich zur Algebra, so ist z.B. für alle reellen Zahlen

$$(x + y)^2 > x^2 + 2xy + y^2$$

eine niemals gültige Formel. Erfüllbare Formeln im Sinn der Algebra sind z.B. Bestimmungsgleichungen wie  $2x = 5$  oder  $x^2 - x - 1 = 0$  für reelle Zahlen  $x$ . Tautologien werden nicht unter die Sätze der Mathematik aufgenommen, denn sie bringen inhaltlich keine neue Erkenntnis.

"Ich weiß nichts über das Wetter, wenn ich weiß, dass es regnet oder nicht regnet"(L.Wittgenstein).

Trotzdem werden Tautologien unentwegt beim Beweisen benötigt, so dass gelegentlich sogar die Meinung geäußert wurde, die gesamte Mathematik sei eine einzige Tautologie. Wir teilen diese Meinung nicht.

Tautologien ermöglichen eine logische Umstrukturierung von Aussagen, ohne dabei den Inhalt der Aussagen zu ändern. Ein Beispiel:

Wenn gleiche Kreise Sehnen enthalten, dann gilt, wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt der Kreise gleich.

Wenn die Sehnen in zwei Kreisen gleich sind, aber wenn ihre Abstände vom Mittelpunkt verschieden sind, dann haben die Kreise verschiedene Durchmesser.

## 2.5 Wichtige logische Schlussregeln

Logische Gesetze beschreiben logische Sachverhalte. Die auf ihnen basierenden korrekten Schlussregeln sind dagegen Anleitung zum Handeln (zum Beweisen), da sie angeben, wie man wahre Aussagen umformen darf, um wieder wahre Aussagen zu erhalten.

Eine wichtige Tautologie ist die Implikation

$$(A \text{ und } (A \rightarrow B)) \rightarrow B \quad (12)$$

Die Implikation ist nur falsch, wenn die Voraussetzung in ihr wahr und die Behauptung falsch ist. Die Voraussetzung von (12) ist die Konjunktion  $A$  und  $(A \rightarrow B)$  bzw. (wegen (1))  $A$  und  $((\text{nicht } A) \text{ oder } B)$ , die nur wahr ist, wenn sowohl  $A$  als auch  $(\text{nicht } A)$  oder  $B$  wahr sind.

Wenn aber  $A$  wahr ist, so ist nicht  $A$  falsch, womit der Ausdruck  $(\text{nicht } A)$  oder  $B$  nur wahr sein kann, wenn die Aussage  $B$  wahr ist. Wenn  $A$  wahr ist, muss auch  $B$  wahr sein, um die Gültigkeit der Voraussetzungen der Implikation (12) zu sichern.

Damit ist aber auch die Behauptung, nämlich  $B$ , wahr, also die Implikation gültig. Die Regel zu (12) lautet:

Wenn die Aussage  $A$  wahr ist und wenn die Implikation  $A \rightarrow B$  zutrifft, dann ist auch die Aussage  $B$  wahr. Die Implikation  $A \rightarrow B$  behauptet die Gültigkeit der Aussage  $A$  nicht!

Wir haben durch das logische Gesetz (12) die Möglichkeit, von einer wahren Aussage  $A$  zu einer anderen wahren Aussage  $B$  überzugehen. Da die Aussage  $B$  gewissermaßen aus der Implikation  $A \rightarrow B$  abgetrennt wird, heißt die zum logischen Gesetz gehörige Regel Abtrennungsregel oder modus ponens. Diese Regel hat zwei Prämissen, nämlich  $A$  und  $A \rightarrow B$ .

Ein Beispiel: Wir betrachten die Implikation 'Wenn der Schalter betätigt wurde, dann brennt das Licht' als gültig. Wenn die Aussage 'Der Schalter wurde betätigt' wahr ist, dann ist auch die Aussage 'Das Licht brennt' wahr.

Betrachten wir anstelle der Implikation  $A \rightarrow B$  ihre Kontraposition  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ , so ergibt sich für (12)

$$(\bar{B} \text{ und } (\bar{B} \rightarrow \bar{A})) \rightarrow \bar{A}$$

oder wegen (10)

$$(\bar{B} \text{ und } (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A} \quad (13)$$

Die zu (13) gehörige Regel, der modus tollens, lautet: Wenn  $\bar{B}$  und  $A \rightarrow B$  gelten, dann kann auf  $\bar{A}$  geschlossen werden.

Zusammengefasst haben wir also: Wer eine Implikation akzeptiert, der muss mit der Prämisse auch die Conclusio anerkennen, und wenn er die Conclusio verwirft, muss er dies auch mit der Prämisse tun. Die Tautologie

$$((A \rightarrow B) \text{ und } (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (14)$$

führt auf die Schlussregel: Wenn  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$  gelten, dann kann auf  $A \rightarrow C$  geschlossen werden (Kettenschluss oder modus barbara).

## 2.6 Logisches Schließen (Aussagenlogik)

Wenn die Wahrheit von Aussagen nicht unmittelbar eingesehen werden kann, so muss sie erschlossen werden. Frege bemerkt zum logischen Schließen:

"Es kommt nicht nur darauf an, dass man sich von der Wahrheit des Schlusssatzes überzeugt, sondern man muss sich auch zu Bewusstsein bringen, wodurch diese Überzeugung gerechtfertigt wird. Dazu sind feste Geleise erforderlich, in denen sich das Schließen bewegen muss, und solche sind in den Wortsprachen nicht ausgebildet."

Die Voraussetzungen für das Schließen sind zweifach. Zunächst werden bekannte wahre Aussagen benötigt, sodann müssen Schlussregeln gegeben sein, die es in endlich vielen Schritten erlauben, auf Grund der Wahrheit der bekannten Aussagen auch die erschlossenen Aussagen als wahr anzuerkennen.

Das heißt, die Schlussregeln vererben die Wahrheit der ursprünglichen Aussagen auf die erschlossenen Aussagen (den sogenannten Schluss). Die Reichhaltigkeit und Vielfalt der zulässigen Schlussverfahren ergibt sich aus den zugelassenen Regeln bzw. den ihnen zugrundeliegenden logischen Gesetzen.

Wir haben schon früher darauf hingewiesen, dass die Mathematik mit einigen Arten von Aussagenverbindungen (Negation, Konjunktion und Disjunktion) auskommt.<sup>14</sup> Jede dieser Aussagenverbindungen kann einerseits als Voraussetzung oder andererseits als Behauptung in einem logischen Schluss auftreten.

In der Mathematik werden deshalb Regeln benötigt, wie man einerseits auf eine solche Aussagenverbindung schließt oder andererseits aus einer solchen Aussagenverbindung weiter schließt.

Die Abtrennungsregel ist ein Beispiel für den Schluss aus einer Aussagenverbindung, nämlich den Schluss aus einer Implikation auf deren Behauptung. Auf eine Implikation  $A \rightarrow B$  schließt man, indem man aus den gegebenen Voraussetzungen und der Aussage  $A$  die Behauptung  $B$  ableitet, denn dann ist aus den gegebenen Voraussetzungen bereits die Aussage  $A \rightarrow B$  beweisbar.

Eine weitere wichtige Schlussregel ist die Einsetzungsregel, die folgendes besagt: In einer Aussagenverbindung darf für eine Aussage  $A$  (aber dann überall) eine äquivalente Aussage  $B$  eingesetzt werden.

Dieses Vorgehen ist in allen Zweigen der Mathematik üblich, z.B. kann für eine positive reelle Variable  $u \geq 0$  die reelle Variable  $v^2$  eingesetzt werden.

---

<sup>14</sup>Vgl. Übung 2.6.

Beim Aufstellen eines Systems von Schlussregeln stehen wir vor zwei gegensätzlichen Möglichkeiten. Aus der Sicht der Logik ist es wünschenswert, möglichst wenige Regeln zugrunde zu legen, aus denen sich alle benötigten Regeln ableiten lassen.

Andererseits ist für den mathematischen Gebrauch ein solches System ungeeignet, da die Regeln natürlich möglichst den mathematischen Gegebenheiten angepasst sein sollen. Eine der für die Mathematik interessanten Regeln ist, dass die Implikation 'Wenn  $A$ , so  $B$ ' auch durch den Nachweis der Implikation 'Wenn  $\bar{B}$ , so  $\bar{A}$ ' bewiesen ist.

Mit Hilfe eines Systems von Schlussregeln, das auf einer dem jeweiligen Zweck entsprechenden Auswahl von Tautologien beruht, werden die logischen Schlüsse sehr einfach. (Zum Vergleich: Auch die großartigsten Gebäude werden aus einfachen Bausteinen errichtet.) Durch das Anwenden korrekter Schlussregeln bauen wir eine Kette von Aussagenverbindungen auf, deren erstes Glied eine wahre Aussagenverbindung ist bzw. als solche angesehen wird und deren weitere Glieder sich aus der ersten logisch ergeben, bis schließlich die Behauptung erscheint.<sup>15</sup>

Das Überprüfen der Richtigkeit kompliziertester Denkvorgänge lässt sich so auf eine Reihe einfacher Tätigkeiten zurückführen, indem die Umformungen als mit den Schlussregeln verträglich nachgewiesen werden. Die Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise beim Beweisen einen Fehler zu machen, ist sehr gering.

Praktisch geht der Mathematiker allerdings nicht immer so vor, er benützt abgekürzte Schlüsse, die häufig gebrauchte und deshalb bekannte Schlussweisen verkürzen. Hier schleicht sich natürlich die Möglichkeit ein, durch Weglassen von Voraussetzungen u. ä., Fehler zu machen. Ebenfalls besteht die Gefahr, dass der Schluss für ungeübte Leser unverständlich ist.

Ein verkürzter Schluss aus der Biologie ist Ch. Darwins berühmte Aussage: "Je mehr Katzen wir in England haben, um so besser gedeihen die Schafe auf den Weiden." Etwas ausführlicher lautet die Begründung:

Viele Katzen bedeuten: wenig Mäuse auf den Feldern. Wenig Mäuse aber bedeuten: viele Hummeln, denn die Mäuse sind deren einzige Feinde. Viele Hummeln schließlich bedeuten: viel Klee, denn die Hummeln sind die einzigen Insekten, die mit ihren langen Rüsseln Kleeblüten bestäuben können.

## 2.7 Eine Schlussweise, die nicht zur Aussagenlogik gehört

Ein häufig benutzter Schluss der Mathematik ist in dem folgenden Beispiel zu finden:

Wenn: alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar und 8 ist eine gerade Zahl,  
dann: 8 ist durch 2 teilbar.

Drücken wir den Zusammenhang formal mit Aussagenvariablen aus, so erhalten wir die Aussagenverbindung

---

<sup>15</sup>Wie jedem, der einen Beweis geführt hat, bekannt ist, erweist sich eben gerade das Auffinden passender logischer Schlussketten i. allg. als keine einfache Angelegenheit und erfordert Erfahrung und Phantasie (vgl. 7.1.-7.3.).

Wenn ( $A$  und  $B$ ), dann  $C$  (15)

die kein logisches Gesetz ist. Denn setzen wir für  $A$  und  $B$  die obigen Aussagen und für  $C$  die neue Aussage '8 ist durch 3 teilbar', so ist die Implikation falsch.

Trotzdem besteht zwischen den Aussagen des ersten Beispiels ein Zusammenhang, der uns die Teilbarkeit von 8 durch 2 aus (15) als zwingend logisch erscheinen lässt. Allgemein wird gesagt, wenn alle Elemente einer Menge eine Eigenschaft haben und irgendein Element dieser Menge gegeben ist, so hat es auch diese Eigenschaft. Den hier bestehenden Zusammenhang können wir mit der bisher behandelten Logik der Aussagen (Aussagenlogik) nicht erfassen. Wir werden uns deshalb mit der sogenannten Prädikatenlogik beschäftigen.

## 2.8 Aussagenfunktionen

Bis jetzt hat uns an einer Aussage nur ihr Wahrheitswert interessiert. Wir konnten deshalb eine Aussage als Einheit betrachten und durch eine Aussagenvariable symbolisieren. Im weiteren wollen wir den inneren Aufbau (die Struktur) einer Aussage stärker berücksichtigen, indem wir die Aussagen von dem Gegenstand, über den sie gemacht werden, trennen. An einem Beispiel zeigen wir, was damit gemeint ist.

Wir gehen von der Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... aus. Eine Reihe von Zahlen ist in der Menge der natürlichen Zahlen durch die Eigenschaft gerade zu sein ausgezeichnet. Wir können sagen

2 ist gerade, 4 ist gerade, 6 ist gerade, usw.

Alle Aussagen weisen die gleiche Struktur auf, es wird gewissen natürlichen Zahlen die Eigenschaft, gerade zu sein, zugesprochen. Der Teil der Aussage ist gerade erscheint stets unverändert in allen Aussagen wieder. Nur der Teil der Aussagen, auf den sich ist gerade bezieht, verändert sich ständig.

In solchen Fällen ist es günstig, mit Hilfe einer Variablen, die für die natürlichen Zahlen 2, 4, 6, ... geschrieben wird, alle Aussagen schematisch in dem Satz

$x$  ist gerade

zusammenzufassen. Wir sind zwar von Aussagen ausgegangen, aber der Satz ' $x$  ist gerade' ist selbst keine Aussage, da er weder wahr noch falsch ist (vgl. Es regnet). Er stellt lediglich ein Verfahren zur Gewinnung von Aussagen dar, das darin besteht, die Variable  $x$  durch natürliche Zahlen zu ersetzen. Dadurch erhalten wir alle obigen Aussagen zurück, aber auch die falschen Aussagen

3 ist gerade, 5 ist gerade, usw.

Es ist wichtig, dass dem Satz ' $x$  ist gerade' eine wohlbestimmte Menge von Elementen für die Variable  $x$  zugrunde liegt, aus der sich sinnvolle Aussagen ergeben (also Aussagen, deren Wahrheitswert festgestellt werden kann).

Eine Ersetzung von  $x$  durch Punkte, Blumentöpfe u. a. ist sinnlos. Wir zitieren hierzu B. Russell:

"In der mathematischen Logik wird jedes Symbol, dessen Bedeutung nicht eindeutig bestimmt ist, eine Variable genannt. Die verschiedenen Bestimmungen, die ihre Bedeutung aufnehmen kann, heißen Werte der Variablen.

Machen wir etwa eine Aussage über Herrn A und Herrn B, dann sind Herr A und Herr B Variable, deren Werte auf Menschen beschränkt sind."

Unser Beispiel führt auf folgende Definition:

Wir nennen einen schriftlich fixierten Sachverhalt, in dem eine Variable auftritt, eine Aussagenfunktion, wenn jedes Ersetzen dieser Variablen durch Elemente einer gegebenen Menge Aussagen liefert.

Die Elemente der Menge heißen auch Gegenstände oder Individuen, die Variable wird Individuenvariable genannt.

Das Ersetzen der Variablen durch Elemente der zugrunde liegenden Menge heißt zulässig. Ist  $x$  eine Individuenvariable und  $A$  eine Eigenschaft, die allen Individuen einer gegebenen Menge zugesprochen wird, so schreiben wir  $A(x)$  für die zugehörige Aussagenfunktion, die dann mindestens für die Elemente der gegebenen Menge erklärt ist.

Der Begriff der Aussagenfunktion lässt sich auch auf mehrere Individuenvariablen verallgemeinern. Ein Beispiel ist  $A(x, y) : x$  ist größer als  $y$  mit den Individuenvariablen  $x$  und  $y$  aus der Menge der reellen Zahlen.

Wir setzen stets voraus, dass die Menge der Individuen wenigstens ein Element enthält, so dass sich wenigstens eine Aussage ergibt, wenn wir die Individuenvariable ersetzen.

### Übungen

2.14. In den folgenden Ausdrücken bezeichnet  $x$  eine Variable, die für reelle Zahlen steht. Welche Ausdrücke sind Aussagenfunktionen?

- a)  $6 + x = 10$
- b)  $(1 + x)^2$
- c)  $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$
- d)  $(1 + x)^2 = 1 + x^2$

2.15. Die Variable  $x$  wird auf die Menge der Marsmenschen beschränkt. Ist der Satz ' $x$  ist kleiner als  $4m$ ' eine Aussagenfunktion?

## 2.9 Verbinden von Aussagenfunktionen

Wir nehmen im weiteren an, dass alle Aussagenfunktionen, die in eine Verbindung eingehen, über der gleichen Menge erklärt sind. Wenn wir beachten, dass Aussagenfunktionen durch jedes zulässige Ersetzen ihrer Individuenvariablen in Aussagen übergeben, so können wir die für Aussagen erklärten Aussagenverbindungen auch auf Aussagenfunktionen erweitern.

Wenn  $A(x)$  und  $B(x)$  über der gleichen Menge erklärte Aussagenfunktionen sind, dann können wir

$$\overline{A(x)}, A(x) \text{ und } B(x), A(x) \text{ oder } B(x), A(x) \rightarrow B(x) \text{ und } A(x) \leftrightarrow B(x)$$

als bekannt ansehen. Diese Ausdrücke sind wiederum Aussagenfunktionen. Wir benötigen für die Bezeichnung der Verbindungen von Aussagenfunktionen die gleichen Namen wie für die entsprechenden Aussagenverbindungen.

Als Beispiel betrachten wir die Negation.  $A(x)$  sei die Aussagenfunktion 'x ist gerade' über den natürlichen Zahlen. Dann ist  $\overline{A(x)}$  die Aussagenfunktion 'x ist nicht gerade' oder, da gerade und ungerade bei natürlichen Zahlen entgegengesetzte Begriffe sind, 'x ist ungerade'.

Über der Menge der natürlichen Zahlen liefern  $\overline{A(x)}$ : 'x ist nicht gerade' und  $A_0(x)$ : 'x ist ungerade' die gleiche Aussage bzw.

$$\overline{A(x)} \leftrightarrow A_0(x) \text{ über den natürlichen Zahlen.}$$

Betrachten wir jedoch anstelle der natürlichen Zahlen die Menge der positiven Brüche, so gilt über dieser Menge zwar

$$A_0(x) \rightarrow \overline{A(x)}, \text{ aber nicht } \overline{A(x)} \rightarrow A_0(x)$$

(also erst recht nicht  $\overline{A(x)} \leftrightarrow A_0(x)$ ), da  $A_0(1/2)$  falsch und  $\overline{A(1/2)}$  wahr ist, mithin  $\overline{A(1/2)} \rightarrow A_0(1/2)$  falsch ist.

Weil über der Menge der positiven Brüche gerade und ungerade nicht mehr entgegengesetzte Begriffe sind, stellt  $A_0(x)$  über dieser Menge nicht mehr die Verneinung von  $A(x)$  dar. An diesem Beispiel sehen wir gleichzeitig, dass es von Bedeutung ist, welche Individuenmenge zugrunde liegt.

### Übungen

2.16. Es sei  $x$  eine Variable, die durch

a) reelle Zahlen,

b) reelle Zahlen, die größer als 10 sind,

ersetzt wird. Sind folgende Aussagenfunktionen äquivalent

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \quad , \quad 2x = (x+1) + (x-1) ?$$

2.17. Kann man für die Implikation  $A(x) \rightarrow B(x)$  die Annahme, dass beide Aussagenfunktionen über derselben Individuenmenge erklärt sind, abschwächen?

2.18. Die Individuenvariable  $x$  wird durch reelle Zahlen ersetzt. Negieren Sie die Aussagenfunktion 'x ist größer als 23 oder  $e^\pi$ '!

## 2.10 Beziehungen zur Mengenalgebra

Die Verbindungen von Aussagenfunktionen lassen sich mit sogenannten Venn-Diagrammen geometrisch sehr gut veranschaulichen. Wir benutzen dazu den Zusammenhang einer Aussagenfunktion mit der Menge der zugehörigen Individuen.

Zu jeder Aussagenfunktion gehört eine Menge von Individuen, für die sie wahre Aussagen liefert. Andererseits lässt sich jede Menge durch die Eigenschaft (oder Eigenschaften)

charakterisieren, die ihre Elemente und nur ihre Elemente haben.<sup>16</sup>

Damit werden jedem Element eine oder mehrere Eigenschaften zugesprochen, und diese Zuordnung erfolgt über eine Aussagenfunktion. Also lässt sich umgekehrt zu jeder Menge auch eine Aussagenfunktion angeben.

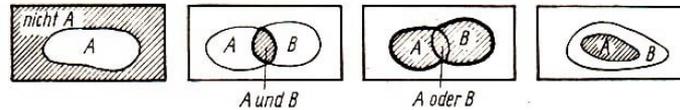


Abb. 2.6. Beziehungen zur Mengenalgebra (Venn-Diagramme)

Wenn wir die Aussagenfunktion  $M(x) : x$  ist Element der Punktmenge (Figur)  $M$  über einem Rechteck, das die Figur  $M$  enthält, betrachten, dann haben wir eine unmittelbare geometrische Veranschaulichung (vgl. Abb. 2.6).

Der Negation entspricht geometrisch die Komplementbildung, der Konjunktion der Durchschnitt, der Disjunktion die Vereinigung, der Implikation die Inklusion und der Äquivalenz die Gleichheit von Mengen.

## 2.11 Quantifizierungen

Aussagenfunktionen selbst haben keinen Wahrheitswert. Für jede Aussagenfunktion gibt es eine Menge von Individuen, so dass beim Ersetzen der Variablen durch diese Individuen die Aussagenfunktion in Aussagen übergeht. Dabei liegt einer der drei Fälle vor:

1. Alle Aussagen sind wahr.
2. Einige, aber nicht notwendig alle Aussagen sind wahr.
3. Keine Aussage ist wahr.

Wir bezeichnen die zur Aussagenfunktion  $A(x)$  gehörige Individuenmenge mit  $M$ . Dann formuliert man in der Mathematik die drei Fälle folgendermaßen:

1. Für alle  $x$  aus  $M$  ist  $A(x)$  wahr,  
Für jedes  $x$  aus  $M$  ist  $A(x)$  wahr,  
Für (ein) beliebiges  $x$  aus  $M$  ist  $A(x)$  wahr<sup>17</sup>  
symbolisch:  $\forall x : A(x)$ .

2. Es gibt (mindestens) ein  $x$  aus  $M$ , für das  $A(x)$  wahr ist,  
Es existiert ein  $x$  aus  $M$ , für das  $A(x)$  wahr ist,  
Es existiert ein  $x$  aus  $M$ , das  $A(x)$  erfüllt (genügt),  
Für wenigstens ein  $x$  aus  $M$  ist  $A(x)$  erfüllt,  
symbolisch:  $\exists x : A(x)$

3. Es existiert kein  $x$  aus  $M$  mit  $A(x)$ .  
Es gibt kein  $x$  aus  $M$ , so dass  $A(x)$  gilt,

<sup>16</sup>Der Fall, dass eine Menge durch Aufzählen ihrer Elemente angegeben werden kann, ist nur bei Mengen mit endlich vielen Elementen möglich.

<sup>17</sup>Im Deutschen ist das Wort ein doppeldeutig, da es sowohl im Sinn von ein jeder als auch ein einziger verwendet werden kann.

Für kein  $x$  aus  $M$  ist  $A(x)$  wahr.

Beispiele hierfür sind:

1. Für alle reellen Zahlen gilt  $x^2 > -1$ .
2. Es gibt reelle Zahlen, für die  $x^2 > 10^4$  ist.
3. Es gibt keine reelle Zahl, für die  $x^2 < -1$  ist.

Jede Aussagenfunktion  $A(x)$  mit einer von der leeren Menge verschiedenen Individuenmenge wird durch 'für alle' oder 'es gibt' usw. hinsichtlich der wahren Aussagen, die sie liefern kann, anzahlmäßig näher bestimmt (quantifiziert).

Ausdrücke wie 'für alle' oder 'es gibt' heißen Quantoren. Wenn ein Quantor vor einer Aussagenfunktion steht, so wird durch ihn die bisher freie Variable der Aussagenfunktion gebunden (quantifiziert), und es entsteht eine Aussage. Der Quantor 'für alle' bzw. 'es gibt' wird All- bzw. Existenzquantor genannt und mit  $\forall$  bzw.  $\exists$  bezeichnet.

Die durch All- bzw. Existenzquantoren aus Aussagenfunktionen gebildeten Aussagen werden All- bzw. Existenzaussagen genannt.

Quantifizierte oder gebundene Variable sind nicht mehr durch jedes Element der Individuenmenge ersetzbar, sondern durch den jeweiligen Quantor auf bestimmte Elementmengen festgelegt, eben gebunden; in den obigen Beispielen in 1. auf alle reellen Zahlen und in 2. auf alle reellen Zahlen  $x$  mit  $|x| > 10^2$ .

Häufig werden Quantoren weggelassen, und es wird vom Leser erwartet, dass er den Gültigkeitsbereich aus dem Zusammenhang erkennt. Im Grunde genommen besteht aber ein Unterschied zwischen der Aussagenfunktion

$$A(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

über der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  und der Aussage

Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1) \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

auch wenn die letztere in der Regel kurz als

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

geschrieben wird, da keine Verwechslung zu befürchten ist. Problematischer wird es, wenn in

$$\text{Für alle reellen Zahlen gilt } x^2 \geq 0$$

die Quantifizierung weggelassen wird oder ungenau durch für alle quantifiziert wird, da für die imaginäre Zahl  $i$  die Beziehung  $i^2 = -1 < 0$  gilt. Kürzen wir  $1 + 2 + \dots + n$  durch  $\sum_{k=1}^n k$  ab, dann ist der Laufindex  $k$  eine gebundene Variable, während  $n$  frei ist. In der obigen Aussage über die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen ist auch  $n$  gebunden.

Es gibt noch andere Quantifizierungen, die in einigen Zweigen der Mathematik besser die typischen Sachverhalte beschreiben können:

Es gibt genau ein  $x$  aus  $M$  mit  $A(x)$ ,  
Es gibt höchstens ein  $x$  aus  $M$ , für das  $A(x)$  wahr ist,  
Für fast alle  $x$  aus  $M$  trifft  $A(x)$  zu,  
Für unendlich viele  $x$  aus  $M$  gilt  $A(x)$ .

Aus einer Aussagenfunktion lassen sich auf folgende Arten Aussagen gewinnen:

1. durch zulässiges Einsetzen der freien Variablen;
2. durch Quantifizierung der freien Variablen.

Alle Sätze der Mathematik sind entweder Aussagen oder quantifizierte Aussagenfunktionen (vgl. die neuere Auffassung der Axiome in 3.5.).

### Übungen

2.19. Geben Sie mit Hilfe des All- bzw. Existenzquantors die Verneinungen von a)  $\exists x : A(x)$ , b)  $\forall x : A(x)$  an!

2.20. Welches ist die richtige Negation von 'Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar'? 'Nicht alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar' oder 'Alle geraden Zahlen sind nicht durch 3 teilbar'?

2.21. Wie lautet die richtige Negation des Satzes 'Es gibt ein Dreieck, in dem die Winkelsumme verschieden von  $180^\circ$  ist'?

- a) Es gibt ein Dreieck, in dem die Winkelsumme gleich  $180^\circ$  ist.
- b) Es gibt kein Dreieck mit der Winkelsumme von  $180^\circ$ .
- c) Es gibt kein Dreieck, in dem die Winkelsumme nicht  $180^\circ$  beträgt.
- d) Für alle Dreiecke beträgt die Winkelsumme  $180^\circ$ .
- e) Für alle Dreiecke gilt nicht, dass die Winkelsumme gleich  $180^\circ$  ist.
- f) Es gibt kein Dreieck, in dem die Winkelsumme verschieden von  $180^\circ$  ist.

2.22. Ist die Implikation 'Wenn alle Menschen sterblich sind und alle ' Menschen Warmblütler sind, dann gibt es keinen Menschen, der nicht sterblich oder nicht Warmblütler ist' wahr?

2.23. Sind die folgenden quantifizierten Aussagenfunktionen äquivalent?

- a) Jeder Mensch ist ein Logiker oder kein Logiker.  
Jeder Mensch ist ein Logiker oder jeder Mensch ist kein Logiker.
- b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.  
Für alle Primzahlen gilt: es gibt keine größte Primzahl.

2.24. Wie lauten die Negationen von

- a) Es gibt weiße Raben.
- b) Alle Primzahlen sind gerade.
- c) Einige natürliche Zahlen sind gerade.
- d) Alle Marsmenschen sind größer als 2 m.

## 2.12 Logisches Schließen (Prädikatenlogik)

Im Abschnitt 2.7. hatten wir durch ein Beispiel gezeigt, dass die in der Aussagenlogik möglichen Schlüsse nicht ausreichen, um alle mathematischen Schlüsse zu vollziehen. Wir haben deshalb Aussagenfunktionen betrachtet und uns damit der sogenannten Prädikatenlogik<sup>18</sup> zugewandt.

Das prädikatenlogische Schließen vollzieht sich auf der Grundlage prädikatenlogischer Gesetze. Ein prädikatenlogisches Gesetz  $A(x)$  ist eine Aussagenfunktion, die für alle Einsetzungen der Individuenvariablen gültige Aussagen liefert.

Hier entfällt die Beschränkung auf einen bestimmten, zur Aussagenfunktion gehörigen Individuenbereich. Eine Einschränkung auf einen bestimmten Individuenbereich würde ja bedeuten, dass nur spezielle Individuen das Gesetz erfüllen, das damit nicht allgemeingültig, also kein Gesetz sein könnte. In dem früher benutzten

Beispiel ' $A(x) : x$  ist eine gerade Zahl' kann folglich  $A(x)$  kein Gesetz der Prädikatenlogik darstellen, da  $A(x)$  nur für Zahlen sinnvoll ist und auch nur für gewisse Zahlen richtig ist.

Wir zeigen an einem Beispiel, dass es überhaupt prädikatenlogische Gesetze gibt. Für jede Aussagenfunktion und alle möglichen Einsetzungen ihrer Individuenvariablen gilt offenbar

$$A(x) \text{ oder } (\text{nicht } A(x)),$$

denn jedes Ersetzen eines völlig beliebigen Individuums  $x_0$  führt auf die Aussage  $A(x_0) = A_0$ , und für Aussagen gilt bekanntlich

$$A_0 \text{ oder } (\text{nicht } A_0) \text{ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten).}$$

Das im Beispiel benutzte Prinzip ist verallgemeinerungsfähig.

Jedes aussagenlogische Gesetz lässt sich zu einem prädikatenlogischen Gesetz erweitern, wenn für jede Aussagenvariable überall die gleiche Aussagenfunktion eingesetzt wird. So ergibt sich für die beliebigen Aussagen  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus dem Kettenschluss  $[(A \rightarrow B)$  und  $(B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$  das prädikatenlogische Gesetz

$$[(A(x) \rightarrow B(x)) \text{ und } (B(x) \rightarrow C(x))] \rightarrow (A(x) \rightarrow C(x))$$

Neben den aus der Aussagenlogik hergeleiteten Gesetzen gibt es weitere spezifische prädikatenlogische Gesetze, auf denen wichtige Schlussregeln beruhen, z.B.:

Wenn für alle Elemente einer Menge  $A(x)$  zutrifft, dann gibt es mindestens ein Element, für das  $A(x)$  wahr ist.

Wenn für ein beliebiges Element einer Menge  $A(x)$  wahr ist, dann ist  $A(x)$  für alle Elemente der Menge wahr.

Wir hatten verlangt, dass der Individuenbereich für Aussagenfunktionen nicht leer ist,

<sup>18</sup>Der Name kommt daher, dass eine beliebige Aussagenfunktion  $A(x)$  (wie  $x$  ist gerade) jedem Individuum  $x$  das Prädikat  $A$  (hier gerade) zuordnet.

um wenigstens eine Aussage aus der Aussagenfunktion gewinnen zu können. Diese Schlussregeln zeigen, dass unsere Forderung notwendig ist. Denn betrachten wir als Individuenmenge die Menge der Engel und als Aussagenfunktion die Eigenschaft der Engel, Flügel zu haben, so gibt es auf Grund der ersten Regel mindestens einen Engel mit Flügeln.

Die Voraussetzung bezieht sich auf eine leere Menge von Dingen (Engel), und die Behauptung kann selbstverständlich nicht mehr hergeben als in der Voraussetzung steckt, also keineswegs die Existenz der Engel mit logischen Mitteln sichern.

Genau wie auch die Aussage, dass die in der Abb. 2.7 gezeigte Art von Körpern 32 Ecken hat, diese um keinen Deut realer macht, oder Morgensterns Beteuerungen bezüglich seines Nasobems<sup>19</sup> diesem nicht ins biologische Dasein verhelfen.

Wir wollen das logische Schließen nicht weiter verfolgen, da uns ein strengerer Aufbau der Logik vom Schließen, wie es in der Mathematik üblich ist, entfernen würde. Wir hatten bereits darauf hingewiesen, dass die Logik symbolisiert werden kann, dass also die logischen Formeln ein ähnliches Aussehen wie in der Algebra erhalten.

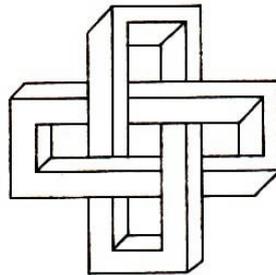


Abb. 2.7.

Mit Hilfe der logischen Schlussregeln können diese Formeln umgeformt werden, wobei wie in der Algebra keinerlei inhaltliches Nachdenken erforderlich ist und die Formeln als "Zeichenreihen" angesehen werden, in denen die Schlussregeln zulässige Umformungen und Zusammenstellungen von Zeichen regeln.

Die Logik kann so ganz formal betrieben werden, indem die Regeln mechanisch beachtet bzw. angewendet werden. Es ist wichtig, darauf zu verweisen, dass in der formalisierten Logik genau wie in der Algebra zwar vom Inhalt abgesehen wird, dass aber weder die formalisierte Logik noch die Algebra deshalb inhaltslos sind.

## 2.13 Mathematische Sätze

### 2.13.1 Folgerungen in der Mathematik

Eine mathematische Arbeit besteht aus Theoremen und Texten zwischen den Theoremen. Ein Theorem unterteilt man in die Voraussetzungen, die Aussage und den Beweis, dass die Aussage unter diesen Voraussetzungen gültig ist.

H. Königsdorf

---

<sup>19</sup>"Ausgewählte Werke". Leipzig 1975, S. 269.

Wir haben im vorangehenden die Gründe dargelegt, die in der Logik dazu geführt haben, für Aussagenverbindungen wie etwa bei der durch die Implikation ausgedrückten Folgebeziehung die weiteste Auffassung als verbindlich zu betrachten. Denn damit wird, kurz gesagt, das psychologischen, konditionalen, kausalen oder anderen Anliegen Gemeinsame erfasst.

Der Preis, der zum einen für die klare Bedeutung und zum anderen für die Allgemeingültigkeit gezahlt werden muss, ist ebenfalls zweifach, denn zum einen wird bereits jeder formale Zusammenhang zwischen Aussagen als sinnvoll angesehen und zum anderen weicht deshalb der logische Sprachgebrauch oft in befremdender Weise vom üblichen Sprachgebrauch ab.

Obwohl die (logische) Implikation eine ausreichende Grundlage für viele komplizierte mathematische Probleme bildet, wird doch in der Mathematik eine engere Folgebeziehung benötigt, die den umgangssprachlichen Vorstellungen eher entspricht.

Häufig wird im Alltag eine Wenn-dann-Verbindung gebraucht, falls irgendein inhaltlicher Zusammenhang besteht, der die Conclusio als eine nichtabwendbare Konsequenz der Prämisse begreift. Ähnlich ist es mit mathematischen Folgerungen, wie das Beispiel zeigt:

Wenn  $a$  und  $b$  reelle Zahlen mit  $a > b > 0$  sind, dann muss für die reellen Zahlen  $a^2$  und  $b^2$  zwangsläufig gelten  $a^2 > b^2 > 0$ .

Als Implikation im Sinne der Logik betrachtet, ergäbe sich die Richtigkeit erst, wenn wir wüssten, ob sowohl Prämisse als auch Conclusio für sich wahr wären. Wie wir dies tatsächlich ermitteln können, interessiert in der Logik nicht, wohl aber in der Mathematik, wo aus der Gültigkeit von  $a > b > 0$  auch die von  $a^2 > b^2 > 0$  erschlossen werden soll. Entsprechend gilt:

Wenn ein Viereck einen Umkreis besitzt, dann ist die Summe gegenüberliegender Winkel des Vierecks gleich zwei Rechten.

Ein Beispiel für eine überraschende Konsequenz der Prämisse: Wenn  $m = 2^{(2^n)} + 1$  eine Primzahl ist, dann ist das regelmäßige  $m$ -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar (C. F. Gauß). In diesem Satz und seinem Beweis zeigt sich das, was G. H. Hardy (1877-1947) als Merkmale für echte Mathematik erschien: "ein hoher Grad von Unerwartetheit, kombiniert mit Überzeugungskraft".

Auch in der Antwort, die der Dichter G. Flaubert (1821-1880) von seiner Schwester 1841 auf nachfolgendes Problem zu hören wünschte, zeigt sich ein hoher Grad von Unerwartetheit:

"Ein Schiff fährt auf dem Meer, es ist mit einer Ladung Baumwolle von Boston abgefahren, es fasst 200 Tonnen. Es segelt nach Le Havre, der große Mast ist gebrochen, ein Schiffsjunge steht am Deck, 12 Passagiere befinden sich an Bord, der Wind bläst aus Ostnordost, die Uhr zeigt ein Viertel nach drei Uhr nachmittags, man ist im Monat Mai - wie alt ist der Kapitän?"

Hier fehlt jede Überzeugungskraft für den Zusammenhang von Voraussetzung und Behauptung, also für das Zustandekommen einer Folgerung (wohl ist eine Implikation

möglich!).

Wir präzisieren nach den Beispielen den Folgerungsbegriff: Eine Aussage  $B$  ist eine Folgerung aus der Aussage  $A$  in der Theorie  $T$ , wenn die Theorie  $T$  zu einer Menge wahrer Aussagen (Grundsätze oder Axiome) enthält und zum anderen korrekte Schlussregeln aufweist, die es in endlich vielen Schritten nachzuweisen erlauben, mit  $A$  auch  $B$  in  $T$  zu haben (vgl. Abschnitt 3.).

Es gibt einige bemerkenswerte Eigenschaften, die Folgerungen von Implikationen unterscheiden und die sich daraus ergeben, dass nur innerhalb einer Theorie gefolgert werden kann, während Implikationen für beliebige Aussagen gebildet werden können. Einmal ist aus einer falschen Aussage im Gegensatz zum *ex falso quodlibet* (etwas Falsches impliziert alles) kraft ihrer Falschheit nichts zu folgern, und ebenso kann eine wahre Aussage nicht aus jeder anderen Aussage gefolgert werden.

In unserem Beispiel aus 2.7. ist  $C$ : '8 ist durch 2 teilbar' eine Folge aus  $A$ : 'Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar' und  $B$ : '8 ist eine gerade Zahl'. Andererseits ist die Implikation  $B \rightarrow C$  wegen der Wahrheit von  $B$  und  $C$  gültig.  $C$  kann jedoch nur aus  $A$  und  $B$  gefolgert werden, aus  $B$  allein nicht - jedoch impliziert  $B$  allein  $C$ .

Voraussetzungen in den Implikationen haben unterschiedlichen Charakter. So überzeugen wir uns leicht, dass  $2^{(2^2)} + 1 = 17$  eine Primzahl ist; keineswegs ist jedoch einzusehen, dass für reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gerade  $a > b > 0$  gelten soll. Hier handelt es sich um eine Annahme, die gemacht wurde, und alle Folgerungen sind an die Gültigkeit dieser Annahme gebunden. Dieses Vorgehen ist typisch für die Mathematik. Wir sind aber verpflichtet, die Berechtigung solcher Annahmen nachzuweisen.

In einer Reihe von Sätzen werden die Voraussetzungen weggelassen, weil sie im Rahmen der jeweiligen Theorie offensichtlich sind, wie die Voraussetzung für die Behauptung (vgl. 4.1.)

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} < \frac{488}{113}$$

oder weil die Voraussetzungen im Zusammenhang mit der Behauptung nicht mehr interessieren, wie etwa bei

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

### 2.13.2 Sätze und ihre Umkehrungen

Mathematische Sätze werden im allgemeinen in Voraussetzungen und Behauptungen gegliedert, also selbst in der Form einer Implikation ausgesprochen. Unsere gerade genannten Beispiele 3 sind von dieser Art:

Wenn für die reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt  $a > b > 0$ , dann gilt auch  $a^2 > b^2 > 0$ .  
(16)

Wenn sich um ein Viereck ein Umkreis zeichnen lässt, dann ist die Summe gegenüberliegender Winkel des Vierecks gleich zwei Rechten. (17)

Es gibt auch Sätze, die nicht diese Form haben:

$$17 \text{ ist eine Primzahl.} \quad (18)$$

Um zu sehen, ob die Behauptung auch die Voraussetzung bedingt, muss die Gültigkeit der Umkehrung untersucht werden. Die Umkehrungen für unsere Beispiele sind:

$$\text{Wenn für die reellen Zahlen } a \text{ und } b \text{ gilt } a^2 > b^2 > 0, \text{ dann gilt auch } a > b > 0. \quad (16')$$

$$\text{Wenn in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten ist, dann lässt sich um das Viereck ein Umkreis zeichnen.} \quad (17')$$

Die Aussage (18) lässt in der angegebenen Form keine Umkehrung zu. Falls wir jedoch (18) durch

Wenn 17 nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist, dann ist 17 Primzahl und umgekehrt

gleichwertig ausdrücken, dann sind Umkehrungen möglich. Die Umkehrung (16') von (16) ist falsch, denn die reellen Zahlen  $a = 2$  und  $b = -1$  genügen zwar den Voraussetzungen, aber nicht der Behauptung. Hingegen ist die Umkehrung (17') von (17) ein gültiger geometrischer Satz, so dass wir formulieren können:

$$\text{Um ein Viereck lässt sich genau dann ein Umkreis zeichnen, wenn die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten ist.} \quad (19)$$

Die Inversionen der Implikationen (16) und (17) sind

$$\text{Wenn für die reellen Zahlen } a \text{ und } b \text{ nicht } a > b > 0 \text{ gilt, dann gilt auch nicht } a^2 > b^2 > 0. \quad (16'')$$

$$\text{Wenn ein Viereck keinen Umkreis besitzt, dann ist die Summe gegenüberliegender Winkel ungleich zwei Rechten.} \quad (17'')$$

(16'') lässt sich mit denselben Zahlen wie bei (16') als falsch nachweisen. (17'') ist eine richtige geometrische Aussage. Wir bilden nun die Kontrapositionen

$$\text{Wenn für die reellen Zahlen } a \text{ und } b \text{ nicht } a^2 > b^2 > 0 \text{ ist, dann gilt auch nicht } a > b > 0. \quad (16''')$$

$$\text{Wenn in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel ungleich zwei Rechten ist, dann hat das Viereck keinen Umkreis.} \quad (17''')$$

Die Kontraposition  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$  einer gültigen Implikation  $A \rightarrow B$  ist wahr, mit (16) und (17) also auch (16''') und (17''').

Es gibt weitere Möglichkeiten, Umkehrungen einer Implikation zu bilden. Dazu einige Beispiele. Es sei in einer Ebene ein Kreis mit dem Radius  $r$  gegeben. Alle betrachteten Punkte sollen stets in der Ebene des Kreises liegen. Der folgende einfache Satz

$$\text{Wenn } P \text{ ein Punkt des Kreises um den Mittelpunkt } M \text{ mit dem Radius } r \text{ ist, so hat er vom Punkt } M \text{ den Abstand } r \quad (20)$$

hat die Kontraposition

Wenn ein Punkt vom Mittelpunkt  $M$  einen Abstand verschieden von  $r$  hat, dann liegt der Punkt nicht auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r$ . (20''')

Da die Aussage verschieden von  $r$  entweder kleiner oder größer als  $r$  bzw. geometrisch innerhalb oder außerhalb des Kreises bedeutet, lässt sich (20''') in die Implikationen

Wenn ein Punkt vom Mittelpunkt einen Abstand größer als  $r$  hat, so liegt der Punkt außerhalb des Kreises,

Wenn ein Punkt vom Mittelpunkt einen Abstand kleiner als  $r$  hat, so liegt der Punkt innerhalb des Kreises

auflösen. Entsprechendes gilt für die Inversion, so dass die Satzgruppe aus dem Ausgangssatz, seiner Umkehrung, der Kontraposition und Inversion insgesamt aus sechs Aussagen besteht.

Dieses Beispiel zeigt, dass in der Mathematik unter Umkehrung eines Satzes nicht immer das rein formale Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung verstanden wird, wie das an den Sätzen (16) und (17) vorgeführt wurde. Oft werden innerhalb einer Theorie für ganze Abschnitte gemeinsame Voraussetzungen gemacht, die in diesen Abschnitten ständig als gültig betrachtet werden.

So wird in der Umkehrung von (20), dem Satz

Wenn ein Punkt von einem gegebenen Punkt  $M$  (Mittelpunkt) den festen Abstand  $r$  hat, dann liegt der Punkt auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r$ ,

stillschweigend angenommen, dass es sich bei allen Punkten um die einer Ebene handelt, anderenfalls genügen auch die Punkte einer Kugel dem Satz. In Sätzen bleiben in der Regel auch die Voraussetzungen ungenannt, die in Bezeichnungen oder Abbildungen eingehen. Wenn das für die Implikation  $A \rightarrow B$  zutrifft und die ungenannten Voraussetzungen mit  $A'$  bezeichnet werden, dann muss die Implikation  $A \rightarrow B$  zu

$$(A \text{ und } A') \rightarrow B \quad (21)$$

vervollständigt werden, da sowohl  $A$  als auch  $A'$  Voraussetzungen für die Behauptung  $B$  sind.

Die beiden folgenden Sätze sind als Implikationen formuliert, wobei die Voraussetzung eine Konjunktion zweier Aussagen ist. Diese Sätze haben die in (21) angegebene Struktur.

Wenn in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und wenn eine der Diagonalen die andere halbiert, dann ist das Viereck ein Drachenviereck. (22)

Wenn sich zwei Geraden in einem Kreis schneiden und wenn zwei einander gegenüberliegende Teile des Umfangs, in die die Geraden den Umfang zerlegen, gleich einem Halbkreis sind, dann stehen die Geraden aufeinander senkrecht. (23)

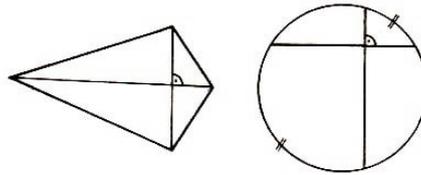


Abb. 2.8.

Im Sinne der Logik ergibt sich die Umkehrung von (22) durch das Vertauschen der beiden Voraussetzungen mit der Behauptung, also

Wenn ein Viereck ein Drachenviereck ist, dann stehen seine beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und eine der Diagonalen halbiert die andere.

Das ist ein wahrer Satz. Die Umkehrung im Sinn der Logik für (23) führt jedoch auf

Wenn zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen, dann schneiden sie sich in einem Kreis und dann sind zwei gegenüberliegende Teile des Umfangs, in die die Geraden den Umfang zerlegt haben, gleich einem Halbkreis. (24)

Es ist aber offensichtlich, dass das Senkrechtstehen von Geraden nichts mit dem Schneiden innerhalb eines Kreises usw. zu tun hat. Diese formal gebildete Umkehrung ist mathematisch ohne Sinn. Mathematisch ist vielmehr der folgende Sachverhalt interessant:

Wenn zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen und wenn ihr Schnittpunkt innerhalb eines Kreises liegt, dann sind zwei gegenüberliegende Teile, in die die Geraden den Kreisumfang zerlegt haben, gleich einem Halbkreis.

Hier ist die Aussage 'Die Geraden schneiden sich innerhalb eines Kreises' weiterhin Voraussetzung geblieben, während die andere Voraussetzung und die Behauptung vertauscht wurden. In einem weiteren Sinn als es in der Logik üblich ist, bezeichnet man in der Mathematik diesen Satz und nicht (24) als Umkehrung von (23).

Fassen wir symbolisch nochmals zusammen, dann haben wir von der Implikation

$$(A \text{ und } A') \rightarrow B \quad (21)$$

im Sinn der Logik die Umkehrung

$$B \rightarrow (A \text{ und } A')$$

zu bilden, während mathematisch im betrachteten Fall (23) die Aussage

$$(A' \text{ und } B) \rightarrow A \quad (25)$$

von Interesse ist und deshalb Umkehrung genannt wird. Wenn  $A'$  eine ungenannte Voraussetzung ist, dann wird die scheinbar im Sinn der Logik ausgeführte Umkehrung der Implikation  $A \rightarrow B$ , wo genauer (21) umzukehren ist, i. allg. die Form (25) haben, weil  $A'$  als ungenannte Voraussetzung "automatisch" stehen bleibt.

Ziehen wir die Möglichkeit in Betracht, dass (21) auch die Vertauschung

$$(A \text{ und } B) \rightarrow A' \quad (25')$$

erlaubt, die auf einen wahren Satz führen kann, so zeigt sich, dass die übliche Art, von der Umkehrung eines Satzes zu sprechen, nicht korrekt ist; zumindest nicht für die Sätze, die mehrere Voraussetzungen enthalten oder deren Behauptung aus mehreren Teilen besteht. Im folgenden Beispiel gibt es zwei Umkehrungen, die wahr sind:

Wenn der Winkel  $ACB$  ein Peripheriewinkel eines Kreises ist und wenn  $\overline{AB}$  ein Durchmesser dieses Kreises ist, dann ist der Winkel  $ACB$  ein rechter Winkel (Satz des Thales).

Die formale Umkehrung des Satzes von Thales ist offensichtlich falsch. Die (stilistisch leicht geänderten) Umkehrungen gemäß (25) und (25') ergeben zwei verschiedene Sätze, die beide richtig sind:

Wenn ein rechter Winkel über einem Durchmesser eines Kreises steht, dann ist der Winkel Peripheriewinkel dieses Kreises.

Wenn ein Peripheriewinkel eines Kreises ein Rechter ist, dann steht er über einem Durchmesser dieses Kreises.

Beide Sätze sind als Umkehrungen des Satzes von Thales anzusehen. Traditionell wird jedoch nur der erste Satz als Umkehrung des Satzes von Thales bezeichnet.

Wenn die Behauptung  $B$  einer Implikation  $A \rightarrow B$  selbst wieder eine Implikation  $C \rightarrow D$  ist, dann sind gegebenenfalls mehrere mathematisch sinnvolle, aber sprachlich hässliche Umkehrungen wegen der Äquivalenz von  $A \rightarrow (C \rightarrow D)$  mit  $C \rightarrow (A \rightarrow D)$ ; oder  $(A \text{ und } C) \rightarrow D$  möglich, wie für (vgl. Übung 2.26)

Wenn gleiche Kreise Sehnen enthalten, dann gilt, wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch ihre Abstände vom Mittelpunkt gleich.

Es gibt Umkehrungen von einfachen Sätzen, die es in sich haben. Der ziemlich harmlose Satz "Wenn ein Dreieck gleichschenkelig ist, dann sind die Winkelhalbierenden der Basiswinkel gleich groß (gemessen von einer Ecke bis zur Gegenseite)" führt auf eine zwar wahre, aber nicht so einfach zu beweisende Umkehrung (vgl. Übung 4.15) "Wenn in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende gleich sind, dann ist es gleichschenkelig", für die bis vor wenigen Jahren nur fehlerhafte Beweise vorlagen.

In seinen Elementen beweist Euklid den Satz "Wenn zwei sich schneidende gerade Linien von einer dritten getroffen werden, dann bildet diese mit den beiden anderen innere Winkel, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind".

Die Frage, ob auch die Umkehrung (genauer: eine der Umkehrungen) dieses Satzes, die Euklid als eine Grundannahme (Axiom) an die Spitze seines geometrischen Systems stellte, gültig ist, hat die Mathematiker etwa 2000 Jahre nicht zur Ruhe kommen lassen.

Sie ist um 1830 gleichzeitig von Bolyai, Gauß und Lobatschewski geklärt werden, indem sie zeigten, dass weder die Umkehrung dieses Satzes noch ihre Negation innerhalb des geometrischen System des Euklid beweisbar sind (vgl. 3.6.2./3.).

### 2.13.3 Geschlossene Systeme von Sätzen

Die Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$  können wir beweisen, wenn wir die Richtigkeit der Implikation  $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$  zeigen (Satz von der Kontraposition). Das System der Implikationen

$$A \rightarrow B \text{ und } \bar{A} \rightarrow \bar{B}$$

weist einige Besonderheiten auf, die verallgemeinerungsfähig sind.

Die Voraussetzungen  $A$  und  $\bar{A}$  erschöpfen alle möglichen Fälle, d.h., es gilt stets  $A$  oder  $\bar{A}$ , und die Behauptungen schließen einander ebenfalls aus. Wir wollen annehmen, dass für das System von Implikationen

$$\text{Wenn } A_i \text{ dann } B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

die Voraussetzungen  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) alle Fälle erschöpfen und die Behauptungen  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) einander ausschließen. Für  $n = 2$  ist  $A_1 = A$  und  $A_2 = \bar{A}$ . Ein solches System von Sätzen wird geschlossen genannt.

Ein Beispiel: In jedem Dreieck gilt (vollständige Trichotomie)

Größeren Seiten liegen größere Winkel gegenüber,  
Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber,  
Kleineren Seiten liegen kleinere Winkel gegenüber.

(Die Sätze sind aus stilistischen Gründen nicht in die wenn dann Form gebracht worden, da klar ist, was Voraussetzung oder Behauptung ist.) Die Voraussetzungen über die Seiten erfassen offenbar alle möglichen Fälle (d.h., es gilt für zwei Seiten  $a$  und  $b$ :  $a > b$  oder  $a = b$  oder  $a < b$ ), und die drei Behauptungen schließen einander ebenfalls aus (denn für zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gilt  $\alpha > \beta$  oder  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha < \beta$ ).

Der Satz über geschlossene Systeme von Sätzen besagt, dass die Umkehrungen von (26), also das System der Sätze

$$\text{Wenn } B_i \text{ dann } A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ebenfalls gültig ist. Für unser Beispiel erhalten wir damit

Größeren Winkeln liegen größere Seiten gegenüber,  
Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber,  
Kleineren Winkeln liegen kleinere Seiten gegenüber.

### 2.13.4 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Wir wollen mathematische Sätze, die als Implikationen formuliert werden, unter dem Aspekt des modus ponens und modus tollens (vgl. 2.5.) betrachten.

Die Implikation  $A \rightarrow B$  drückt aus, dass  $A$  hinreicht, um  $B$  behaupten zu können. Deshalb wird die Voraussetzung  $A$  eine hinreichende Bedingung für  $B$  genannt.

Aus  $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$  (Kontraposition der Implikation  $A \rightarrow B$ ) folgt, dass  $\bar{B}$  hinreichend für  $\bar{A}$  ist, also immer wenn  $\bar{B}$  gilt, muss auch  $\bar{A}$  gelten. Folglich kann  $A$  selbst nur gelten,

wenn  $\bar{B}$  nicht, also  $B$  gilt. Es ist für die Gültigkeit von  $A$  notwendig, dass  $B$  zutrifft.

Die Behauptung  $B$  wird eine notwendige Bedingung für  $A$  genannt. In der Äquivalenz  $A \leftrightarrow B$  sind  $A$  und  $B$  füreinander sowohl notwendig als auch hinreichend.

Die Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$  besagt in dieser Sprechweise, dass  $A$  notwendig für  $B$  sein soll. Aus der Implikation  $A \rightarrow B$  selbst folgt jedoch nur, dass  $A$  hinreichend für  $B$  ist. Mithin wird sich die Umkehrung einer Implikation aus dieser Implikation nur dann ergeben, wenn  $A$  zugleich notwendig und hinreichend für  $B$  ist.

Den Unterschied zwischen notwendig und hinreichend verdeutlichen wir geometrisch an zwei Punktengen  $A$  und  $B$  einer Grundmenge  $X$ , wobei  $A \subset B$  sein soll (Abb. 2.9).

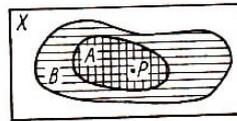


Abb. 2.9.

Wenn ein Punkt  $P$  in der Menge  $A$  enthalten ist, dann gewiss auch in  $B$ .  $P \in A$  ist hinreichend für  $P \in B$ , jedoch nicht notwendig, da  $P$  ja auch in  $B$ , aber nicht in  $A$  liegen kann (d.h. in der Menge, die in der Abbildung waagrecht, aber nicht senkrecht schraffiert ist).

Es wird hier deutlich, dass eine hinreichende Bedingung zu viel verlangt. Wenn ein Punkt  $P$  aus  $A$  sein soll, dann muss er notwendigerweise aus  $B$  sein. Natürlich ist die notwendige Bedingung  $P \in B$  i. allg. nicht hinreichend für  $P \in A$ , da es Punkte von  $B$  gibt, die nicht zu  $A$  gehören.

Eine notwendige Bedingung fordert also andererseits offenbar zu wenig. Ein Punkt  $P \in B$  ist genau dann  $P \in A$ , wenn  $A = B$  ist. Wir betrachten noch zwei Beispiele.

#### 1. Ähnlichkeit von Dreiecken.

- a) Notwendig, aber nicht hinreichend ist die Übereinstimmung in einem Winkel.
- b) Nicht notwendig, aber hinreichend ist die Übereinstimmung in drei Seiten.
- c) Notwendig und hinreichend ist die Übereinstimmung in zwei Winkeln.

2. Ein Kreis ist eine (ebene) Kurve, deren Punkte von einem Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben. Ein Kreis ist also nach allen Richtungen gleich breit oder, wie man sagt, eine Kurve mit konstanter Breite.

Ein Zylinder mit einem kreisförmigen Querschnitt kann zwischen die Backen einer Schiebelehre gebracht und darin gedreht werden, wobei der Zylinder stets die Backen berührt, ohne dass die Backen verstellt werden müssen. Wenn sich nun irgendein zylindrischer Körper, wie eben beschrieben, in einer Schiebelehre drehen lässt, hat er dann stets einen kreisförmigen Querschnitt?

Etwas mathematischer: Ist die Bedingung, eine Kurve konstanter Breite zu sein, hinreichend dafür, dass die Kurve ein Kreis ist? Diese Frage hat auch technische Bedeutung, denn wenn die Bedingung nicht hinreichend ist, dann ist das oben beschriebene Drehverfahren bzw. das Messen gleicher Durchmesser in allen Richtungen nicht für die Entscheidung kreisförmig oder nicht geeignet.

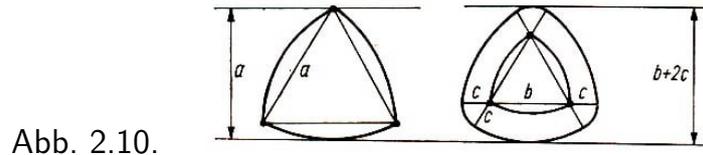


Abb. 2.10.

Wie zwei (von vielen) Gegenbeispiele zeigen, gibt es weitere Kurven mit konstanter Breite (Abb. 2.10), sogenannte Releaux-Kurven.

### Übungen

2.25. Zeigen Sie, dass alle möglichen Lagen von zwei verschiedenen Kreisen mit gemeinsamen Tangenten sich in einem geschlossenen System von Sätzen beschreiben lassen (5 Fälle)!

2.26. Bilden Sie möglichst viele sinnvolle Umkehrungen der Sätze:

- Wenn gleiche Kreise Sehnen enthalten, dann gilt, wenn die Sehnen gleich sind, so sind es auch die Abstände von den Mittelpunkten.
- Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist und wenn die Diagonalen des Vierecks gleich sind, dann ist es ein Rechteck.

2.27. Diskutieren Sie, was mit der Aussage gemeint ist: Wenn Strindberg das Rundreiseproblem bewältigt hat, dann fresse ich einen Besen!

2.28. Diskutieren Sie folgende Beweise, die die Gleichheit der angegebenen Brüche durch Wegstreichen gleicher Ziffern begründen:

$$\frac{23}{35} = \frac{2}{5}, \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{27}{55} = \frac{2}{5}$$

2.29. 3 Spieler spielen 3 Spiele miteinander. Im 1. Spiel verliert der erste, und der zweite und dritte gewinnen gerade so viel, dass sich ihr Geld verdoppelt. Im 2. Spiel verliert der zweite, und die beiden anderen gewinnen gerade so viel, dass sich ihr Geld verdoppelt. Im 3. Spiel schließlich verliert der dritte, und die beiden ersten verdoppeln, durch den Gewinn ihr Geld. Schließlich haben nach dem 3. Spiel alle drei gleich viel, nämlich 24 F1 (= Florin)!

Wieviel hat jeder Spieler zu Anfang gehabt? (L. Euler)

## 3 Die axiomatische Methode

### 3.1 Beweise

Und, dass die Sätze der Mathematik bewiesen werden können, heißt ja nichts anderes, als dass ihre Richtigkeit einzusehen ist, ohne dass das, was sie ausdrücken, selbst mit den Tatsachen auf seine Richtigkeit hin verglichen werden muss.  
L. Wittgenstein

Die griechische Mathematik, die im wesentlichen in den Jahren 400 bis 200 v.u.Z. geschaffen wurde, stellt gegenüber der ägyptischen oder babylonischen Mathematik nicht mehr die Frage, wie die untersuchten Dinge sind, sondern warum sie so sind.

Die Verschiebung der Fragestellung führte dazu, dass empirisch gewonnene Erfahrungen auch theoretisch aus bekannten Tatsachen ableitbar wurden. Zum Beispiel ist die etwa 1000 Jahre vor Pythagoras von den Babyloniern gemachte Erfahrung, dass ein Winkel in jedem Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 ein Rechter ist, für die griechische Mathematik ein Spezialfall (Folgerung) eines allgemeinen Satzes.

Die Folgerungen werden ohne Zuhilfenahme der Erfahrung durch logische Beweisführungen begründet.

Die große Wertschätzung der Griechen für die Mathematik fußt auf deren Möglichkeit, aus gegebenen Sachverhalten zwingend andere folgern zu können. Die selbstbewussten Worte in Platons Akademiepforte "Kein der Geometrie Unkundiger trete ein" (*μηδεις αγνωμετοσητηρητος εισιτω*) zeigen, dass die griechischen Gelehrten tief beeindruckt vom mathematischen Denken waren.

Ein Beweis geht von etwas als wahr Erkanntem, den Voraussetzungen, aus und führt auf eine neue Aussage, die Behauptung.

Es wird bei einem Beweis gezeigt: Die Voraussetzungen gelten, damit ist auch die Behauptung gültig (Wer  $A$  anerkannt hat, muss auch  $B$  anerkennen). Nur in wenigen Fällen ist die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar einzusehen, so dass i. allg. ein Beweis in endlich viele kleine Schritte, deren Richtigkeit unmittelbar erkennbar ist, zerlegt wird.

Die einzelnen Schritte eines Beweises werden auf der Grundlage gegebener korrekter logischer Schlussregeln ausgeführt, wobei aus bereits bekannten Aussagen, den Sätzen der Mathematik, Schlussfolgerungen gezogen werden.

Am Ende der Kette von Schlüssen eines Beweises steht die Behauptung, deren Wahrheit damit nachgewiesen ist, womit sie als Satz in die Theorie aufgenommen wird. Bei einem Beweis, der auf Annahmen beruht (z.B. für alle reellen Zahlen  $x > 1$  oder für die Schnittpunkte zweier Geraden), muss gezeigt werden, dass wir berechtigt sind, diese Annahmen zu machen.

Beweise werden in der Mathematik in der Regel in einer "mathematisch gereinigten" Umgangssprache geführt, selbst in wissenschaftlichen Arbeiten oder im Hochschulunterricht. Es ist aber prinzipiell möglich, sie in der am Ende des Abschnitts 2.12. an-

gedeuteten Weise zu formalisieren, was sogar grundsätzlich als ideale Form betrachtet wird.

Jedoch entspricht das nicht unserer Art zu denken und macht deshalb Beweise schwer verständlich ("Symbolische Darstellung ist etwas, was Maschinen schreiben können und außer Maschinen nur wenige lesen können." P. R. Halmos).

Häufig werden Beweise nach dem gleichen Schema geführt, so dass es eine Reihe standardisierter Verfahren gibt, denen wir uns im 4. Abschnitt zuwenden. Es gibt auch in allen mathematischen Gebieten ständig wiederkehrende Fragestellungen, wie z. B. die nach der Existenz oder Eindeutigkeit von mathematischen Dingen, auf die wir im Abschnitt 5. eingehen.

## 3.2 Das Musterbeispiel: der geometrische Beweis

Die methodischen Prinzipien zur Lösung geometrischer Aufgaben wurden bereits von den Griechen mustergültig entwickelt und sind Vorbild für das Beweisen in allen mathematischen Zweigen geworden, lediglich die Strenge der Beweisführung (d.h. die Ausschaltung anschaulicher und ungenannter Voraussetzungen) wurde ständig verschärft. Das äußerliche Schema einer Beweisführung ist in Voraussetzungen, Behauptung, Beweis gegliedert.

Die geometrische Konstruktionsaufgabe, geschichtlich am Anfang der Geometrie, verlangt die Herstellung einer (ebenen) geometrischen Figur, in der Regel nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal.

Z.B. soll ein gleichseitiges Dreieck so gezeichnet werden, dass seine Eckpunkte auf drei gegebenen und paarweise verschiedenen Parallelen liegen. Die Formulierung weicht von der Gegenüberstellung von Voraussetzungen und Behauptungen im Satz ab.

Diese Gegenüberstellung ist aber auch möglich: Wenn drei paarweise verschiedene Parallelen gegeben sind, dann lässt sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck so zeichnen, dass seine Eckpunkte auf diesen Parallelen liegen.

Bei der Lösung dieser und anderer geometrischer Aufgaben halten sich die Mathematiker seit der Antike an folgendes Schema:

1. Analysis
2. Konstruktion
3. Beweis
4. Determination

Analysis (Auflösung der Aufgabe). Es wird zunächst angenommen, dass die Aufgabe wenigstens eine Lösung hat. Aus dieser Annahme werden rückschließend eine Reihe von bekannten Beziehungen hergeleitet, die für eine Konstruktion (Darstellung) der Lösung notwendig sind.

Der Beweis schließlich zeigt, dass die gefundenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, womit die Konstruktion tatsächlich auf die Lösung führt.

Der griechische Mathematiker Pappos (etwa 300 u.Z.) schreibt:

"Man nehme das Gesuchte an, als ob es schon verwirklicht wäre. Daraus ziehe man Schlüsse und weitere Schlüsse, so lange, bis man beim Gegebenen anlangt. Schließlich versuche man die Schlüsse umzukehren und so vom Gegebenen zum Gesuchten zu kommen."

Aus der Annahme, dass es eine Lösung gibt, können natürlich keine hinreichenden Bedingungen für eine Lösung gewonnen werden, da durch die Annahme nicht gesichert ist, dass eine Lösung existiert. (Zum Vergleich: Aus der Annahme, dass Engel Flügel haben, folgt die reale Existenz der Engel nicht.)

Die abschließende Determination (Bestimmung) untersucht dann, wie viele Lösungen möglich sind. Die lateinisch abgefassten Beweise schlossen stereotyp mit dem Kürzel q.e.d. für 'quod erat demonstrandum', deutsch w.z.b.w. für 'was zu beweisen war' (auch w.z.z.w. für 'was zu zeigen war'). In griechischen Texten steht  $\sigma\pi\epsilon\rho\ \epsilon\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\lambda\epsilon\iota\alpha\iota$  (= w.z.z.w.).

Wir erläutern die einzelnen Punkte einer geometrischen Beweisführung an der bereits genannten Aufgabe: Ein gleichseitiges Dreieck ist so zu zeichnen, dass seine Ecken auf drei gegebenen, paarweise verschiedenen Parallelen liegen. Wir bezeichnen die Ecken des Dreiecks mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  und die Parallelen mit  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3$ .

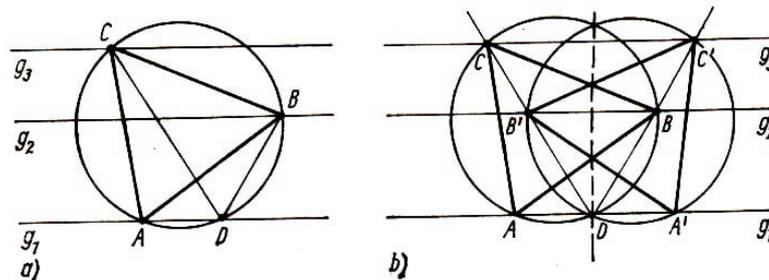


Abb. 3.1.

1. Analysis: Das Dreieck  $ABC$  genüge den geforderten Bedingungen. Wir zeichnen seinen Umkreis, der die Gerade  $g_1$  außer in der Ecke  $A$  noch in einem weiteren Punkt  $D$  schneidet (vgl. Abb. 3.1 a). Nach dem Satz vom Peripheriewinkel sind alle Peripheriewinkel über den Sehnen  $AC$  und  $BC$  einander gleich, also gilt jeweils

$$\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ \quad , \quad \angle BAC = \angle BBC = 60^\circ \quad (1)$$

2. Konstruktion: Auf  $g_1$  wird in einem beliebigen Punkt  $D$  der gestreckte Winkel gedrittelt. Die Schnittpunkte der entstehenden Schenkel mit den Geraden  $g_2$  und  $g_3$  seien  $B$  und  $C$ . Dann sind  $B$  und  $C$  zwei Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks, und der dritte Eckpunkt ergibt sich als Schnittpunkt des durch die Punkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  festgelegten Kreises mit  $g_1$ .

3. Beweis: Der durch den Punkt  $D$  und die konstruierten Punkte  $B$  und  $C$  festgelegte Kreis schneide  $g_1$  in  $A$ . Auf Grund der Konstruktion gilt  $\angle ADC = \angle BDC = 60^\circ$ , nach dem Satz vom Peripheriewinkel ist

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

was zu zeigen war.

4. Determination: Entweder schneidet der Umkreis des Dreiecks  $BCD$  die Gerade  $g_1$  noch in einem weiteren Punkt  $A$ , oder er berührt  $g_1$  in  $D$ . Im letzteren Fall spiegeln wir den Umkreis an der in  $D$  bezüglich  $g_1$  errichteten Senkrechten.

Dann gehen aus Symmetriegründen die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Umkreis ineinander über. Also haben die Punkte  $B$  und  $C$  von  $g_1$  den gleichen Abstand, bzw. sie liegen auf einer Parallelen  $g = g_2 = g_3$  zu  $g_1$ , was unseren Voraussetzungen widerspricht.

Also existiert ein von  $D$  verschiedener Punkt  $A$ , in dem der Umkreis des Dreiecks  $BCD$  die Gerade  $g_1$  schneidet. Da es auf die Bezeichnungen der Parallelen nicht ankommt, benutzen wir die in Abbildung 3.1b gewählte.

Dann haben die Schenkel des im Punkt  $D$  auf  $g_1$  konstruierten Winkels stets genau je einen Schnittpunkt mit  $g_2$  und  $g_3$ , die wir mit  $B$  und  $C'$  bzw.  $B'$  und  $C$  bezeichnen.  $B$  und  $C$  bzw.  $B'$  und  $C'$  sind je zwei Paare von Eckpunkten des gesuchten Dreiecks, so dass es für jeden festgewählten Punkt  $D$  auf  $g_1$  zwei Lösungen der Aufgabe gibt.

Beide Lösungen gehen durch Spiegelungen an der Senkrechten in  $D$  zu  $g_1$  ineinander über. Alle anderen Lösungen, die sich für einen beliebigen Punkt  $D' \neq D$  auf  $g_1$  ergeben, gehen durch Parallelverschiebung aus einer der Lösungen für den Punkt  $D$  hervor. q.e.d.

### 3.3 Der axiomatische Aufbau

Die Gründlichkeit der Mathematik beruht auf Definitionen, Axiomen, Demonstrationen.

I. Kant

Der Leser ist mit einigen mathematischen Theorien, wie ebene Geometrie oder Algebra, vertraut. Die Gegenstände einer mathematischen Theorie sind gewisse Objekte (z.B. Punkte oder Zahlen), deren Eigenschaften und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen (Relationen) sowie die Operationen, die von gegebenen Objekten auf neue führen (z.B. Verbinden von Punkten oder Addieren von Zahlen).

Über die Gegenstände einer Theorie werden möglichst viele Sätze gesammelt.

Die Sätze einer Theorie werden unterschiedlich eingeführt. Um eine Aussage als Satz in eine Theorie aufzunehmen, muss die Aussage innerhalb der Theorie bewiesen werden. In einer idealen Theorie müssten alle Sätze beweisbar sein. Das ist aber nicht zu verwirklichen, denn um einen Satz zu beweisen, greifen wir auf schon bewiesene Sätze als Voraussetzungen zurück.

Zum Beweis dieser Sätze werden abermals bewiesene Sätze benötigt, und so fort. Auf diese Weise schaffen wir entweder eine endlose Kette von Beweisen (regressus in infinitum), oder in unseren Beweisen treten die zu beweisenden Sätze wieder als Voraussetzungen auf (circulus vitiosus).

Ein endloses Zurückgehen beim Beweisen ist praktisch unvollziehbar. Andererseits sind Schlüsse, die zu beweisende Aussagen bereits als Voraussetzung enthalten (sogenannte Zirkelschlüsse), logisch unzulässig. Deshalb werden einige Sätze anders eingeführt.

Sie werden unbewiesen an die Spitze der Theorie gestellt, und in ihnen findet sich alles, was zur Begründung der anderen Sätze erforderlich ist. Diese Sätze heißen Grundsätze oder Axiome. Es sind in der Regel endlich viele Grundsätze, in denen die Grundeigenschaften und -zusammenhänge der Objekte ausgedrückt werden.

Wir teilen zunächst den Standpunkt, dass Axiome unmittelbar einleuchtende Aussagen sind, die keines Beweises bedürfen und fähig sind. B. Pascal (1623-1662) verlangte schon, als Axiome nur Dinge zu fordern, die von sich selbst her vollkommen einleuchtend sind.

Alle Objekte einer Theorie müssen ausreichend erklärt (definiert) werden. Wir stoßen hier auf die gleiche Schwierigkeit wie bei den Sätzen, dass nämlich einige Grundbegriffe wiederum an die Spitze gestellt werden und unerklärt bleiben. Aus diesen undefinierten Begriffen werden alle weiteren einschlägigen Begriffe einer Theorie abgeleitet.

Eine korrekte Erklärung eines Begriffes aus den Grundbegriffen heißt Definition dieses Begriffes. Prinzipiell sind Definitionen entbehrlich, da die definierten Begriffe stets durch einen Ausdruck von undefinierten Begriffen ersetzt werden können. Definitionen erhöhen jedoch wesentlich die Übersichtlichkeit. Die Grundbegriffe sind die in einer Theorie auftretenden nichtlogischen Begriffe, alle anderen Begriffe sind allgemeingültiger Art.

Die Axiome einer Theorie enthalten auch die zugehörigen Grundbegriffe einer Theorie. Die Gesamtheit der Axiome und Grundbegriffe einer Theorie wird ein Axiomensystem dieser Theorie genannt. Um eine Theorie aufzubauen, d. h. um Beweise führen zu können, werden korrekte Schlussregeln benötigt.

Ein Axiom der ebenen Geometrie lautet "Je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade". Die geometrischen Grundbegriffe sind hier Punkt und Gerade. Es ist nicht möglich, sie durch geometrische Objekte zu erklären, die leichter einzusehen sind. Andere geometrische Figuren lassen sich durch diese und weitere Begriffe definieren.

Ein Kreis ist z.B. die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene den gleichen Abstand haben. Dabei kann der Abstand von Punktepaaren so erklärt werden, dass zugehörige Verbindungsstrecken von Punkten kongruent sind, also durch Verschieben zur Deckung gebracht werden können (Verschieben eines Maßstabes).

B. Pascal erhob im "Geist der Geometrie" die Forderungen, keine Dinge zu definieren versuchen, die von sich selbst her so bekannt sind, dass man keine noch klareren Begriffe hat, sie zu erklären, und bei der Definition der Begriffe nur vollkommen bekannte oder schon erklärte Wörter zu verwenden und schließlich keine der etwas dunklen oder zweideutigen Begriffe undefiniert zu lassen.

Mit D. Hilbert (1862-1943) und P. Bernays (geb. 1888) nennen wir eine Theorie im weitesten Sinne des Wortes axiomatisch, wenn die Grundbegriffe und Grundsätze als solche an die Spitze gestellt werden und aus ihnen der weitere Inhalt der Theorie mit Hilfe von Definitionen und Beweisen abgeleitet wird. In diesem Sinn ist die Geometrie von Euklid axiomatisch begründet werden.

Eine Theorie ist damit die Menge aller Sätze, die in Übereinstimmung mit den logischen

Grundsätzen aus dem zugehörigen Axiomensystem folgen. Praktisch geht man jedoch i. allg. nicht bis zu den Axiomen zurück, sondern benutzt bereits bewiesene Sätze als Prämissen.

Der erste Satz  $S_1$ , der in einer axiomatischen Theorie bewiesen wird, folgt lediglich aus den Axiomen. Zum Beweis des zweiten Satzes  $S_2$  darf man neben den Axiomen bereits den ersten Satz  $S_1$  benutzen usw.

Den strengen logischen Aufbau der Mathematik verdanken wir den Griechen. Eine andere Betrachtungsart weist die indische Mathematik auf, der die Systematisierung und Abstraktion fehlt. Charakteristisch für viele Beweise sind bei ihr Figuren, selbst für kompliziertere Sätze, in denen geschickt vorgenommene Zerlegungen die Behauptung einsichtig machen, so dass als Kommentar den Abbildungen, wie z.B. 3.2, nur das Wort "Siehe!" beigegeben ist.

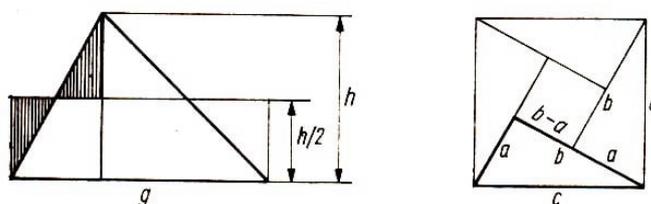


Abb. 3.2. Die indische Art, die Flächenformel für ein Dreieck und den Satz des Pythagoras zu beweisen

Wer Augen hat zum Sehen, der sieht es, nämlich

$$F = \frac{1}{2}gh \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 \left( = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \right)$$

### 3.4 Zwei Beispiele für ein Axiomensystem

#### 3.4.1 Axiomensystem von Peano für die natürlichen Zahlen

Die Entstehung des Begriffs der natürlichen Zahl reicht zurück bis in die Urzeit menschlichen Denkens. Der Zahlbegriff ist einer der abstraktesten und wichtigsten, den das menschliche Denken hervorgebracht hat. Obwohl die natürlichen Zahlen zahlreichen Generationen durch den täglichen Gebrauch in mehr oder minder glücklich gewählten Ziffernsystemen vertraut waren, wurde erst vor noch nicht ganz 100 Jahren für diese uns wohlbekannten Objekte ein Axiomensystem geschaffen.

Die natürlichen Zahlen ergeben sich aus der 1 durch Weiterzählen um jeweils 1. Das ist der Ausgangspunkt für das Axiomensystem. Wir nennen zuerst die Grundbegriffe, nämlich 'natürliche Zahl' und 'unmittelbarer Nachfolger', und geben dann die Axiome an, denen diese Grundbegriffe genügen.

Als natürliche Zahlen bezeichnen wir die Elemente jeder nicht leeren Menge  $N$ , für deren Elemente eine Nachfolgerbeziehung ' $a$  ist unmittelbarer Nachfolger von  $b$ ' erklärt ist, wobei folgende Axiome erfüllt sind:

A 1) Es gibt eine natürliche Zahl 1, die nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl

ist:<sup>20</sup>

A 2) Jede natürliche Zahl  $a$  hat genau einen Nachfolger  $a'$ .

A 3) Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

A 4) Jede Menge  $M$  von natürlichen Zahlen, die

a) die natürliche Zahl 1 enthält und

b) mit jeder natürlichen Zahl  $a$  auch ihren Nachfolger  $a'$  enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen (ist also gleich  $N$ )

Um dem genannten Axiomensystem mehr Anschaulichkeit zu geben, bedienen wir uns der üblichen geometrischen Darstellung von Zahlen durch Punkte einer Geraden.

Das Bild, das wir uns von den natürlichen Zahlen machen, lässt sich so auf folgende Weise wiedergeben (Abb. 3.3 a):

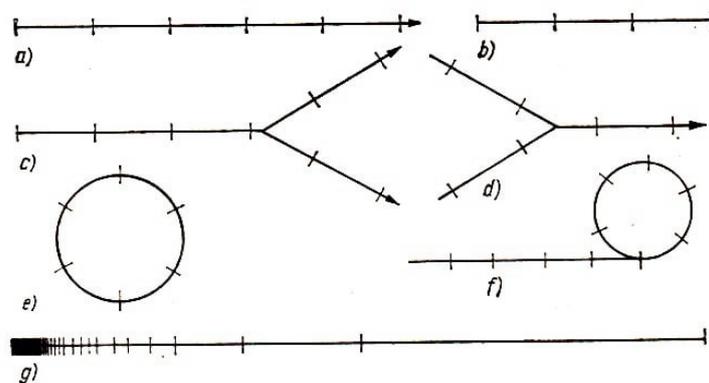


Abb. 3.3. Geometrische Deutung der Peanoschen Axiome

Der Zahl 1, die keinen Vorgänger hat, folgen die natürlichen Zahlen im gleichen Abstand, in einer endlosen Folge aufeinander. "Wie groß eine Zahl auch sei", sagt B. Pascal, "man kann sich immer eine größere vorstellen und weiter noch eine, welche die letzte übersteigt; und so ins Unendliche fort, ohne jemals zu einer zu kommen, die nicht mehr vergrößert werden könnte."

Wir wollen jetzt sehen, wieweit die Axiome A 1 bis A 4 dieser Vorstellung entsprechen. Axiom 2 sagt aus, dass zu jeder Zahl genau ein Nachfolger gehört. Damit werden zwar Verzweigungen wie in Abbildung 3.3c oder eine nach endlich vielen Zahlen abbrechende Reihe (Abb. 3.3 b), die ein Modell für das System "Eins, zwei, viele" ist, ausgeschlossen, jedoch keine kreisförmige Anordnung von natürlichen Zahlen wie in Abbildung 3.3e (da hier jede Zahl genau einen Nachfolger hätte; Modell für die Restklassen beim Teilen).

Das Axiom 3 schließt Rückwärtsverzweigungen wie in Abbildung 3.3d und f aus. Damit bleiben als geometrische Modelle nur noch eine Gerade und der Kreis übrig.

Axiom 1 verlangt eine natürliche Zahl ohne Vorgänger, womit der Kreis und die nach beiden Seiten unbeschränkte Gerade entfallen. Es bleibt nur die in Abbildung 3.3a gezeigte Realisierungsmöglichkeit. Axiom 4 hat eine kompliziertere Struktur, auf die wir

<sup>20</sup>Gelegentlich wird auch 0 als natürliche Zahl angesehen; allerdings muss dann auf das Bild verzichtet werden, dass die natürlichen Zahlen sich durch fortgesetzte Addition der 0 ergeben.

im Abschnitt 6. ausführlich eingehen werden. Kurz gesagt beinhaltet es folgendes: Die natürlichen Zahlen werden durch die Bildung der Nachfolger erzeugt.

Die Axiome haben die Struktur der Menge der natürlichen Zahlen festgelegt. Wir haben jedoch noch nicht erklärt, wie mit natürlichen Zahlen gerechnet werden kann. Für die Addition wollen wir das andeuten. Der Keim der Addition ist bereits in der Nachfolgerbeziehung enthalten. Der Nachfolger  $a'$  einer natürlichen Zahl ist gerade die Zahl, die sich ergibt, wenn um 1 weitergezählt wird bzw. zur Zahl  $a$  die Zahl 1 addiert wird, in uns vertrauter Symbolik

$$a' = a + 1 \text{ für jede natürliche Zahl } a$$

Unser Ziel ist es, nicht nur für die natürlichen Zahlen 1 und  $a$ , sondern für je zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  eine Vorschrift (Addition) zu erklären, die diesen Zahlen ihre Summe zuordnet. Die Schreibweise  $a + b$  bedeutet, dass wir zu  $a$  so oft 1 hinzuzählen, wie es  $b$  angibt, also z.B.

$$a + 2 = (a + 1) + 1$$

$$a + 3 = (a + 2) + 1 = ((a + 1) + 1) + 1$$

usw.

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad \text{für jede natürliche Zahl } a \text{ und } b$$

Dabei ist genau dann klar, was  $a + (b + 1)$  bzw.  $a + b'$  bedeutet, wenn dies für  $a + b$  bereits bekannt ist. Mit Hilfe der vollständigen Induktion lassen sich teilweise nicht ganz einfache Beweise angeben, so dass die uns durch die Rechenerfahrung vertrauten Tatsachen (wie z.B.  $a + b$  ist für alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  wieder eine, und zwar eindeutig bestimmte natürliche Zahl) rein logisch aus dem Axiomensystem und der obigen Festsetzung der Addition gewonnen werden können.

Alle weiteren Gesetze der Addition (z.B.  $a + b = b + a$  usw.) lassen sich ebenfalls auf diese Weise herleiten, so dass Schritt für Schritt aus dem Axiomensystem die gesamte Arithmetik entsteht.

Das Axiomensystem scheint einen Mangel zu haben, denn alle Elemente irgendeiner Menge, die die obengenannten Axiome erfüllen, werden natürliche Zahlen genannt. So wird z.B. die echte Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus den natürlichen Zahlen besteht, die größer als 100 sind und die gleiche Nachfolgerbeziehung mit der 101 als erstem Element aufweist, ebenfalls als natürliche Zahlen zu bezeichnen sein.

Ein geometrisch wesentlich abweichendes Bild liefert z.B. die Menge der Stammbrüche, wobei der Nachfolger von  $\frac{1}{n}$  die Zahl  $\frac{1}{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sein soll (vgl. Abb.3.3g). Für beide Beispiele lassen sich "Addition, Subtraktion" usw. erklären.

Hier ist eine grundsätzliche Bemerkung am Platz. Die natürlichen Zahlen bilden geschichtlich gesehen ein System, zu dem erst nachträglich ein Axiomensystem geschaffen wurde. Deshalb verbinden wir mit dem Axiomensystem verständlicherweise die Erwartung, dass es die uns vertrauten Zahlen in eindeutiger Weise beschreibt.

Die Mathematik untersucht jedoch nicht die Objekte, sondern die zwischen ihnen bestehenden Relationen (H. Poincaré). Das Axiomensystem von Peano beschreibt eine

bestimmte Struktur, nämlich das Aufeinanderfolgen, und alle Mengen mit dieser Struktur sind axiomatisch nicht unterscheidbar.

Das spiegelt den Sachverhalt wider, dass es nicht entscheidend ist, womit man zählt (Finger, Äpfel, Dezimalzahlen, römische Ziffern usw.), sondern wie gezählt wird. Dazu noch ein geometrisches Beispiel:

Wir denken uns in einer Ebene geometrische Figuren (Punkte, Geraden u.a.) gezeichnet, die durch ein nicht näher bestimmtes Axiomensystem beschrieben werden sollen. Wenn wir die Ebene (z.B. eine Gummihaut) stetig verzerren, aber dabei nicht zerreißen, so bleiben gewisse Lagebeziehungen zwischen den geometrischen Figuren erhalten. Natürlich hat der Begriff Gerade nicht mehr die anschauliche Bedeutung wie früher, aber wenn sich zwei Geraden geschnitten haben, so tun sie es jetzt auch in der verzerrten Ebene. Die verzerrten Figuren stehen in den gewissen Beziehungen zueinander wie die unverzerrten. Obwohl beide Systeme durch unterschiedliche Modelle dargestellt werden, kann zwischen beiden Systemen rein begrifflich nicht unterschieden werden.

Zwar unterscheidet sich geometrisch auf einer winkeltreuen Mercatorkarte oder einer flächentreuen Eckertschen elliptischen Projektion von Europa z.B. der Verlauf der Elbe und ihrer Nebenflüsse, aber es wird stets der gleiche geographische Sachverhalt wiedergegeben. Für die Aufgabe der Morphologie, verwandte Formen zu studieren, ist die Deformation von Formen ein wirksames Hilfsmittel, das neuerdings besonders in der Embryologie Anwendung fand. Die in Abbildung 3.4 gezeigte "geringfügige" Deformation eines menschlichen Schädels führt auf einen Schimpansenschädel. Es ist klar, dass weitaus mehr deformiert werden müsste, wenn sich ein Hundeschädel ergeben soll.

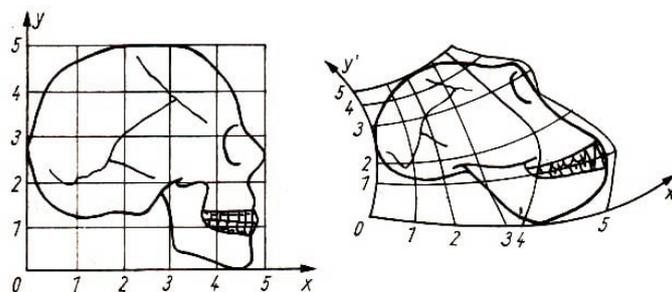


Abb. 3.4. Thompson-Transformationen in der Biologie

#### 3.4.2 Ein Axiomensystem für die Gruppentheorie

Wir untersuchen jetzt ein Axiomensystem, das nicht wie bei den natürlichen Zahlen für eine bereits entwickelte Theorie angegeben worden ist, sondern das von vornherein an die Spitze einer erst zu schaffenden Theorie gestellt wurde. Bevor die Mathematiker ein Axiomensystem für die Gruppentheorie schufen, hatten sie selbstverständlich bereits einige Erfahrungen mit mathematischen Objekten gemacht, von denen wir heute sagen, dass sie eine Gruppe bilden. Die Gruppentheorie selbst war noch nicht entwickelt.

Wir betrachten eine Menge  $M$  von beliebigen Dingen. Elemente dieser Menge könnten z.B. Zahlen, Drehungen, Vektoren u. a. sein. Welche Beschaffenheit die einzelnen Elemente haben, das soll uns im Augenblick nicht interessieren.

Für die Menge  $M$  soll eine Verknüpfungsvorschrift so existieren, dass je zwei Elementen  $a$  und  $b$  aus  $M$  genau ein neues Element  $c$  zugeordnet wird. Im Bereich der Zahlen sind beispielsweise die elementaren Rechenoperationen (Addition, Multiplikation usw.) solche Verknüpfungsvorschriften.

In Anlehnung an die Schreibweise der Multiplikation werden wir die Verknüpfung zweier Elemente  $a$  und  $b$  aus  $M$  mit  $a \circ b$  bezeichnen. Damit die Menge  $M$  eine Gruppe bildet, verlangen wir von der bisher nicht näher bestimmten Verknüpfung folgende Eigenschaften (Gruppenaxiome):

G 1) Die Verknüpfung von je zwei Elementen der Menge  $M$  führt nicht aus  $M$  heraus.

G 2) Für je drei Elemente der Menge  $M$  gilt

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

(Die Elemente  $a$ ,  $b$  und  $c$  müssen nicht alle verschieden sein.)

G 3) Es gibt ein Element  $e$  in  $M$  (Einselement), für das  $e \circ a = a$  für alle Elemente  $a$  aus  $M$  ist.

G 4) Zu jedem Element  $a$  aus der Menge  $M$  gibt es genau ein inverses Element  $a^{-1}$  aus  $M$ , so dass

$$a^{-1} \circ a = e$$

ist.

Wir gehen jetzt einige Beispiele für Gruppen an:

1. Die Menge  $M$  sei die Menge der rationalen Zahlen ohne die Null, die Verknüpfung die übliche Multiplikation. Es ist klar, dass G 1 und G 2 erfüllt sind. Das Einselement ist 1, also gilt auch G 3. Da wir die Null ausgeschlossen haben, gibt es zu jedem Element  $a$  ein inverses Element  $1/a$ . Damit liegt eine Gruppe vor.

2. Die reellen Zahlen ohne die Null bilden hinsichtlich der Multiplikation ebenfalls eine Gruppe, die die Gruppe aus Beispiel 1 umfasst.

3. Die Menge, die aus den Zahlen 1 und -1 besteht, bildet mit der üblichen Multiplikation eine Gruppe. Die möglichen Verknüpfungen  $1 \cdot 1$ ,  $(-1) \cdot 1$ ,  $1 \cdot (-1)$  und  $(-1) \cdot (-1)$  der zwei Elemente führen nicht aus der Menge heraus. G 2 gilt für alle reellen Zahlen, also auch für 1 und -1. Einselement ist 1, und schließlich ist wegen  $1 \cdot 1 = 1$  und  $(-1) \cdot (-1) = 1$  jedes Element zu sich selbst invers!

4. Neben der Multiplikation ist für reelle Zahlen auch eine Addition erklärt, in etwas ungewohnter Bezeichnung  $a \circ b = a + b$ .

Die Addition erfüllt auch alle Gruppenaxiome, wobei als "Einselement" die Null auftritt.

5. Wählen wir als Elementmengen die ganzen oder die rationalen Zahlen und als Verknüpfung die Addition, so ergeben sich wieder Gruppen, die in der Gruppe aus Beispiel 4 enthalten sind.

Die Verknüpfungsvorschrift einer Gruppe erweist sich sowohl als Verallgemeinerung der

Addition als auch der Multiplikation. Der Gruppenbegriff ist jedoch nicht auf Zahlen als Elementmenge beschränkt.

6. Die Drehungen  $D_\alpha$  einer Kreisscheibe um ihren Mittelpunkt um den Winkel  $\alpha$  sollen die Elemente für eine Drehungsgruppe sein. Dabei ist  $\alpha > 0$ , wenn entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht wird, und  $\alpha < 0$  für Drehungen im Uhrzeigersinn.

Die Verknüpfung zweier Drehungen  $D_\alpha$  und  $D_\beta$  soll die Drehung um, den Winkel  $\alpha + \beta$  ergeben, symbolisch  $D_{\alpha+\beta}$ .

Es ist anschaulich klar, dass jede Verknüpfung von zwei Drehungen eine neue Drehung ergibt und dass das Ergebnis dreier Drehungen nicht von der Reihenfolge der Zusammenfassung beim Ausführen abhängt (Axiom 2).

Das Einselement ist die Drehung  $D_0$  um den Winkel 0, die alles unverändert lässt und deshalb im Sinn der Umgangssprache keine Drehung ist. Das inverse Element zur Drehung  $D_\alpha$  ist die Drehung  $D_{-\alpha}$  also die Drehung, die die ausgeführte Drehung rückgängig macht:  $D_\alpha \circ D_{-\alpha} = D_0$ .

Die Anzahl der Elemente dieser Drehungsgruppe ist unendlich groß. Wenn wir ein regelmäßiges  $n$ -Eck ( $n \geq 3$ ) so um seinen Mittelpunkt drehen, dass sich seine Eckpunkte nach der Drehung wieder decken, dann erhalten wir eine Gruppe mit endlicher Elementmenge.

7. Die Bewegungen eines Körpers im Raum, die ihn nicht deformieren, bilden ebenfalls eine Gruppe.

Es lassen sich auch Verknüpfungen auf einer Menge erklären, die nicht alle Gruppenaxiome erfüllen:

Wir betrachten die reellen Zahlen als Elementmenge und erklären als Verknüpfung  $a \circ b = a + b^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b^2) \circ c = (a + b^2) + c^2 = a + b^2 + c^2 \\ a \circ (b \circ c) &= a + (b \circ c)^2 = a + (b + c^2)^2 = a + b^2 + c^4 + 2bc^2\end{aligned}$$

also ist im allgemeinen  $(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$  und Axiom 2 nicht erfüllt.

### Übungen

3.1. Genügt die Menge der positiven geraden Zahlen dem Peanoschen Axiomensystem?

3.2. Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen (d.h.  $a, b > 0$ ). Genügt die Verknüpfung  $a \circ b = a \cdot b$  bzw.  $= \log a + \log b$  den Gruppenaxiomen?

3.3. Zeigen Sie, dass die Funktionen  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^{-1}$  mit der Verknüpfung  $g(x) \circ h(x) = g(h(x))$  eine Gruppe bilden!

### 3.5 Neue Auffassungen eines Axiomensystems

Was die axiomatische Methode sich als wesentliches Ziel setzt,  
ist nun gerade das, was logischer Formalismus allein  
nicht geben kann, nämlich die Durchschaubarkeit der  
Mathematik bis in die Tiefe.  
N. Bourbaki

Die Mathematik entstand aus dem Bedürfnis, etwas über das Verhalten wirklicher Dinge aussagen zu können. Dazu wurden Eigenschaften von Gegenständen in Aussagen (Sätze) gefasst, die gemachten Erfahrungen entsprechen sollten.

Die Axiome, die dem theoretischem System zugrunde liegen, sind auf Beobachtungen gegründet, die klarer als andere erfasst werden und sich seit uralten Zeiten unaufhörlich für die Menschheit wiederholen und bestätigen, so dass wir nicht den geringsten Zweifel an ihrer Wahrheit und unbedingten Gültigkeit haben.

Die Wahrheit der als Axiom gewählten Aussage Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade ist wesentlich offensichtlicher als die Gültigkeit des Satzes

Wenn eine Gerade die Seiten eines Dreiecks schneidet bzw. deren Verlängerungen, so sind die beiden Produkte je dreier nicht anstoßender Abschnitte der Seiten gleich.

So gesehen ist die Geometrie Euklids Kunde vom physikalischen Raum, also eine Naturwissenschaft. Noch G. Frege (1848-1925) weist darauf hin, dass Axiome sich nicht aus der logischen Erkenntnisquelle ergeben, wenn er schreibt:

"Von alters her nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit feststeht, ohne jedoch durch eine logische Schlusskette bewiesen werden zu können."

"Die Mathematiker studieren nicht Objekte, sondern Beziehungen zwischen den Objekten; es kommt ihnen deshalb nicht darauf an, diese Objekte durch andere zu ersetzen, wenn dabei nur die Beziehungen ungeändert bleiben. Der Gegenstand ist für sie gleichgültig, die Form allein hat ihr Interesse."

Dieser Einwand Poincarés zeigt das neue Denken.

Strenge logische Beweise, die der Herleitung von Sätzen dienen, besitzen nun eine über den ursprünglichen Zweck hinausgehende Bedeutung. Wenn es z.B. möglich ist, innerhalb eines Axiomensystems die Gegenstände so zu vertauschen, dass sich wieder wahre Aussagen ergeben, dann bleiben alle früheren Folgerungen der Theorie gültig, wenn in ihnen ebenfalls diese Vertauschungen durchgeführt werden.

Eine mögliche Vertauschung geometrischer Gegenstände in der Ebene besteht in der wechselseitigen Ersetzung von Punkt und Gerade (Dualität). Aus dem Axiom 'Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade' folgt der wahre Satz 'Zwei Geraden bestimmen genau einen Punkt'.<sup>21</sup>

Das Ersetzen von Gegenständen in einem Axiomensystem durch andere braucht sich nicht innerhalb eines gleichen Begriffssystems zu vollziehen. Das Axiomensystem der

---

<sup>21</sup>Wenn der unendlich ferne Punkt nicht als Schnittpunkt paralleler Geraden eingeführt worden ist, dann muss hier der Zusatz 'oder sind parallel' gemacht werden.

Gruppentheorie mit den arithmetischen oder geometrischen Beispielen, also den Zahlen oder Bewegungen als Gegenständen, macht das deutlich. Mengen, deren Elemente als Gegenstände einer Theorie aufgefasst werden können (also alle Axiome einer Theorie erfüllen), werden Modelle des Axiomensystems genannt.

In jedem Modell gelten alle aus dem Axiomensystem gezogenen Folgerungen mit der entsprechenden Deutung der Elemente als Gegenstände des Axiomensystems.

In der Gruppentheorie gilt sowohl für Zahlen als auch für Bewegungen die Regel, dass die Beklammerung in einer Verknüpfung weggelassen werden kann, d.h., dass das Assoziativgesetz gilt:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$$

Indem wir verschiedene inhaltliche Deutungen für die Grundbegriffe in den Axiomen zulassen, verliert sich die ursprüngliche Auffassung, sie seien offensichtliche und wahre Aussagen. Die Grundbegriffe werden zu leeren Begriffsschemata, die Axiome zu Aussagenfunktionen. Als Vergleich kann ein auszufüllender Fragebogen dienen, wo die Begriffsschemata durch Angaben zur Person inhaltlich gefüllt werden.

Vor allem D. Hilbert (1862-1943) war es, der dieser neuen Auffassung, dass sich ein Mathematiker nur für das interessiert, was aus den Axiomen folgt, und nicht für das, was die Axiome bedeuten, in seinem Buch "Grundlagen der Geometrie" (1899) zum Durchbruch verholfen hat. H. Scholz (1884-1956) bemerkt dazu:

"Alle Axiomatiker vor Hilbert haben die Axiome der Euklidischen Geometrie als Wahrheiten aufgefasst, als Wahrheiten, die so einleuchtend sind, dass sie keines Beweises bedürfen. Für Hilbert sind diese Axiome ganz etwas anderes. Sie sind nicht Sätze, sondern Satzgerüste (= Aussagenfunktionen), die erst nachträglich durch eine Deutung der in ihnen vorkommenden Variablen in effektive Sätze übergehen. Satzgerüste sind weder wahr noch falsch, sondern entweder erfüllbar oder unerfüllbar."

Die Zuordnung von wahrnehmbaren Gegenständen zu den Schemata eines Axiomensystems, etwa des starren Körpers zur geometrischen Figur, macht das Axiomensystem mit seinen Folgerungen zu einer naturwissenschaftlichen Theorie. In mathematischen Modellen werden die Begriffsschemata durch Idealisierungen wahrnehmbarer Gegenstände gefüllt, etwa durch Punkt oder Gerade.

Alle Modelle eines Axiomensystems sind mathematisch völlig gleichwertig. Das ist in einer axiomatischen naturwissenschaftlichen Theorie (z.B. Mechanik, Thermodynamik) ganz anders, da nur eine Deutung der Grundbegriffe sinnvoll ist. Lichtstrahlen können zwar als Geraden der euklidischen Geometrie gedeutet werden (so z.B. in Schulbüchern), aber bei dieser Deutung ist es von vornherein nicht selbstverständlich, dass die euklidischen Axiome im physikalisch erfahrbaren Raum gültig sind, wie spätestens die Einführung gekrümmter Räume durch die Relativitätstheorie gezeigt hat. Die Überprüfung jeder empirischen Deutung ist eine reine Frage der Naturwissenschaft.

Dieser Gesichtspunkt erscheint in der Feststellung A. Einsteins (1879-1955):

"Der von der Axiomatik erzielte Fortschritt besteht nämlich darin, dass durch sie das Logisch-Formale vom sachlichen bzw. anschaulichen Gehalt sauber getrennt wurde;

nur das Logisch-Formale bildet gemäß der Axiomatik den Gegenstand der Mathematik, nicht aber der mit dem Logisch-Formalen verknüpfte anschauliche oder sonstige Inhalt."

Gleichzeitig gibt Einstein noch eine Antwort auf die Frage nach der unbedingten Gültigkeit der Mathematik gegenüber der bedingten Gültigkeit naturwissenschaftlicher Theorien:

"Denn es kann nicht wunder nehmen, dass man zu übereinstimmenden logischen Folgerungen kommt, wenn man sich über die fundamentalen Sätze (Axiome) sowie über die Methoden geeinigt hat, vermittels welcher aus diesen fundamentalen Sätzen andere Sätze abgeleitet werden sollen."

Die Axiome stellen in neuerer Auffassung keine offensichtlichen Aussagen über die Grundbegriffe einer Theorie dar, sondern sie erklären im Gegenteil implizit (unentwickelt) die Grundbegriffe, genauer die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen. Aus dieser Sicht ist die am Anfang des Buches zitierte Auffassung B. Russells (1872-1970), "dass die Mathematiker weder wüssten, worüber sie sprächen, noch ob das Gesagte wahr wäre", verständlich.

Das nicht eindeutige Festlegen der Grundbegriffe bedeutet nicht, dass formal aufgefasste Axiomensysteme bedeutungslos oder inhaltslos sind. Sie geben uns vielmehr die Möglichkeit, eine abstrakte Theorie zu entwickeln, die für alle inhaltlichen Deutungen des Axiomensystems zutrifft, also nicht ständig für jede Deutung wiederholt werden muss.

D. Hilbert, der diese neue Auffassung mit einbürgern half, drückte die neue Sicht sehr milieunahe aus, als er während eines Gespräches in einem Berliner Wartesaal sagte:

"Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen Tische, Stühle und Bierseidel sagen können."

Euklids Definition "Ein Punkt ist das, was keine Teile hat (*σημειον, ου μερος ουδεν*)" erklärt strenggenommen gar nicht, was ein Punkt ist.

Auch die Atome der Physik im griechischen Sinn, wo Atom das Unteilbare (*το ατομον*) bedeutet, wären so mathematische Punkte. Die genannte Eigenschaft der Unteilbarkeit ist mathematisch unbrauchbar, wofür Euklid selbst als Zeuge dienen kann, da er in keinem seiner Beweise hierauf zurückgreift. Er will eigentlich nur an die Vorstellungen erinnern, die wir von Punkten haben.

Rund 2000 Jahre später hat ein zeitgenössischer Mathematiker (O. Perron) das sehr drastisch mit den Worten getan "Ein Punkt ist das, was jeder vernünftige und unverbildete Mensch sich darunter vorstellt. Und die Definition der Geraden lautet ebenso."

D. Hilbert beginnt sein berühmtes System der Geometrie mit den Worten:

"Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen. Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte ..., die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden ..., die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen. Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte

wie 'liegen', 'zwischen', 'parallel', 'kongruent', 'stetig'; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie."

Obwohl sich die Mathematiker nur für das interessieren, was aus einem Axiomensystem folgt, machen sie selbstverständlich mehr oder weniger von den Vorstellungen Gebrauch, die sich bei ihnen mit den Grundbegriffen verbinden, um so Beweisideen zu erhalten. Logisch gesehen steht das Axiomensystem vor der Theorie, psychologisch gesehen die gesammelten Erfahrungen und zugehörigen Anschauungen vor einer Theorie oder einem Axiomensystem.

Wir wiesen bei der Einführung der natürlichen Zahlen (3.4.1.) bereits darauf hin, dass es vom axiomatischen Standpunkt gleichgültig ist, welches spezielle Modell der natürlichen Zahlen für das Rechnen gewählt wird. Hier entscheiden praktische Gesichtspunkte, wenn die arabische Ziffernschreibweise der römischen oder anderen vorgezogen wird. Jeder arabisch geschriebenen Zahl entspricht nämlich genau eine mit römischen Ziffern geschriebene Zahl und umgekehrt, wobei diese Zuordnung auch nach ausgeübten arithmetischen Rechenoperationen erhalten bleibt, wie es für die Addition das Beispiel zeigt.

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & + & 7 & = & 11 & & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \text{IV} & + & \text{VII} & = & \text{XI} & & \end{array}$$

Der Sachverhalt, dass Modelle - abstrakt gesehen - gleiche Strukturen besitzen, tritt in der Mathematik oft auf. Deshalb erklären wir, was für beliebige Modelle unter struktureller Gleichheit zu verstehen ist:

Zwei Modelle eines Axiomensystems heißen zueinander isomorph, wenn sich die Gegenstände der beiden Modelle umkehrbar eindeutig so aufeinander abbilden lassen, dass diese Zuordnung erhalten bleibt, wenn die Operationen, die für die Gegenstände in jedem Modell erklärt sind, ausgeübt wurden.

Beispiel: Die Menge der positiven reellen Zahlen mit der Rechenoperation der Multiplikation und die Menge aller reellen Zahlen mit der Rechenoperation der Addition sind isomorphe Systeme, wobei eine Zuordnung durch den Logarithmus gegeben ist:  $a \leftrightarrow \log a$ .

Denn jede reelle Zahl kann als Logarithmus einer positiven reellen Zahl aufgefasst werden, und umgekehrt besitzt jede positive reelle Zahl einen Logarithmus. Auf diese Weise wird dem Produkt  $c = ab$  positiver Zahlen  $a$  und  $b$  wegen  $\log a + \log b = \log ab$  der Logarithmus des Produkts  $c$  zugeordnet und umgekehrt, so dass Isomorphie vorliegt (vgl. Übung 3.2).

Alle Modelle des Peanoschen Axiomensystems der natürlichen Zahlen sind zueinander isomorph. Das Axiomensystem kann also zwischen zwei Modellen natürlicher Zahlen nicht unterscheiden, bzw. die natürlichen Zahlen werden durch das Axiomensystem nur bis auf Isomorphie beschrieben.

Je zwei Modelle eines Axiomensystems brauchen jedoch nicht zueinander isomorph zu

sein, denn wie die Gruppenbeispiele aus 3.4.2. zeigen, können Gruppen auf endlichen oder unendlichen Mengen erklärt werden, so dass bereits deshalb eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen zwei Gruppen nicht möglich zu sein braucht.

Die Axiomensysteme mit nichtisomorphen Modellen sind infolge ihrer breiten Anwendungsfähigkeit in verschiedenen Zweigen der Mathematik von Interesse, da sie ähnliche Sachverhalte in verschiedenen Strukturen beschreiben können.

Beim Aufstellen von Axiomensystemen können wir zwei Ziele verfolgen, indem wir die Axiome so wählen, dass sich bis auf Isomorphie nur ein Modell ergibt oder dass sich möglichst viele Modelle ergeben.

## 3.6 Forderungen an ein Axiomensystem

In der Mathematik werden Axiomensysteme nicht willkürlich gewählt. Wir wollen uns überlegen, welchen Bedingungen sie genügen müssen.

### 3.6.1 Widerspruchsfreiheit

Eine geometrische Theorie, in der sich die Sätze  $S$  "Für jedes Dreieck gilt, dass die Summe der Winkel gleich  $180^\circ$  ist" und nicht  $\bar{S}$  "Es gibt Dreiecke, für die die Summe der Winkel verschieden von  $180^\circ$  ist" gleichzeitig herleiten lassen, ist nutzlos.

Es darf deshalb nicht vorkommen, dass aus einem Axiomensystem sowohl ein Satz  $S$  als auch seine Verneinung nicht  $S$  folgen. Mit der Konstruktion eines Modells, das dem Axiomensystem genügt, kann die Frage der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems auf das Modell verschoben werden. Da es viele Modelle gibt, z.B. die natürlichen Zahlen, die euklidische Ebene oder physikalisch motivierte Modelle, die uns widerspruchsfrei (konsistent) erscheinen, gibt man sich damit in der Regel zufrieden.

Man kann auch die Widerspruchsfreiheit einer Theorie von der einer anderen abhängig machen (relative Widerspruchsfreiheit), wie das in 3.6.3. für euklidische und nichteuklidische Geometrie aufgezeigt wird. Es gibt aber auch ziemlich "anschauliche" Theorien wie die Mengenlehre, in denen man leicht auf Widersprüche stößt (vgl. Abschn. 3.7. und 7.4.).

### 3.6.2 Vollständigkeit

Eine Theorie bzw. das zugehörige Axiomensystem wird widerspruchsfrei genannt, wenn sich von zwei einander widersprechenden Sätzen wenigstens ein Satz in der Theorie nicht beweisen lässt, der innerhalb der Theorie formulierbar ist.

Wir erwarten aber von einer Theorie, dass sie alle wahren einschlägigen Sätze enthält. Deshalb wollen wir stets feststellen können, ob ein Satz bewiesen oder widerlegt werden kann, d.h., dass sich von zwei einander widersprechenden Aussagen einer Theorie<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup>Es ist wesentlich, dass es sich um eine Theorie handelt. Die in jeder geometrischen Theorie einander widersprechenden Sätze 'Für jedes Dreieck gilt, dass die Summe der Winkel  $180^\circ$  beträgt' und 'Für jedes Dreieck gilt, dass die Summe der Winkel nicht  $180^\circ$  beträgt' gelten für sich in der ebenen euklidischen bzw. sphärischen Geometrie.

genau eine beweisen lässt.

Wir sind z.B. der Ansicht, dass die angegebene Goldbachsche Vermutung entweder wahr oder falsch ist, ein Drittes gibt es nicht (*tertium non datur*). Dieser Glaube ist bei im Nachhinein axiomatisierten Theorien, die eine anschaulich motivierte Herkunft (z.B. Physik) haben, historisch bedingt.

Denn nehmen wir an, dass in einer solchen Theorie eine Aussage auftaucht, die weder bewiesen noch widerlegt werden kann, so wird die mit der Theorie verbundene Anschauung oder ein Experiment einen Hinweis geben, ob die fragliche Aussage wahr oder falsch ist.

Dann kann diese Aussage oder ihre Verneinung dem Axiomensystem hinzugefügt werden und vervollständigt es. Und so kann bei entsprechenden weiteren Fällen verfahren werden, womit wir hinsichtlich unserer Anschauung oder Erfahrung Vollständigkeit solcher Theorien erwarten.

Die eben anschaulich motivierte Vollständigkeit gilt allerdings bereits in so einfachen und wichtigen Axiomensystemen wie dem für die Gruppentheorie nicht.

Dazu ein Beispiel: Es sei  $G$  irgendeine Gruppe. Wir betrachten den Satz

$$\text{Für jedes Element } a \text{ der Gruppe } G \text{ gilt } a = a^{-1} \quad (2)$$

Seine Negation lautet: Es trifft nicht zu, dass für jedes Element der Gruppe  $G$   $a = a^{-1}$  ist, bzw.

$$\text{In der Gruppe } G \text{ gibt es wenigstens ein Element } a, \text{ für das } a \neq a^{-1} \text{ ist.} \quad (3)$$

In den Modellen aus den Beispielen 1, 2, 4, 5, 6 und 7 aus 3.4.2. gilt der Satz (3); im Modell aus Beispiel 3 ist jedoch jedes Element zu sich selbst invers, also gilt (2). Wir haben folgendes Resultat:

Dem Axiomensystem der Gruppentheorie genügen sowohl widerspruchsfreie Modelle, in denen (2) erfüllt ist, als auch widerspruchsfreie Modelle, in denen (3) gilt. Wenn das Axiomensystem der Gruppentheorie widerspruchsfrei ist, dann können aber die einander widersprechenden Sätze (1) und (2) nicht gleichzeitig gelten.

Was haben wir bei unserer anschaulichen Motivation vorhin übersehen? Wir haben stillschweigend davon Gebrauch gemacht, dass es nur zueinander isomorphe Modelle für die Gruppentheorie gibt, wie das für eine nachträglich axiomatisierte Theorie, die aus der Erfahrung und Anschauung gewachsen ist, natürlich ist.

Die axiomatisch aufgebaute Gruppentheorie lässt jedoch verschiedenartige Modelle zu, worauf wir bereits hingewiesen haben, und wir haben sowohl Modelle gefunden, in denen der Satz gilt, als auch Modelle, in denen seine Verneinung gilt.

Das angegebene Axiomensystem für die Nachfolgerbeziehung natürlicher Zahlen ist vollständig; auch wenn wir die Addition in der beschriebenen Weise hinzunehmen, bleibt das Axiomensystem vollständig. Lassen wir jedoch die Multiplikation zu, so wird das Axiomensystem so "ausdrucksfähig", dass Unvollständigkeit die Folge ist.

### 3.6.3 Unabhängigkeit

Es kann vorkommen, dass sich unter den Axiomen einige befinden, die sich aus anderen Axiomen herleiten lassen. Sie können damit als Axiome gestrichen und als Sätze in die Theorie aufgenommen werden. Die Unabhängigkeit eines Axioms  $A$  von den restlichen Axiomen eines Axiomensystems  $\mathfrak{A}$  weisen wir nach, indem wir ein Modell für das um  $A$  verminderte Axiomensystem  $\mathfrak{A}$  angeben, in dem alle Axiome außer  $A$  gelten.

Wäre  $A$  eine Folgerung aus den restlichen Axiomen, so müsste diese Folgerung in jedem Modell für das um  $A$  verminderte Axiomensystem  $\mathfrak{A}$  gelten.

Wir beweisen die Unabhängigkeit des Peanoschen Axioms A 2 von den übrigen (Abschn. 3.4.1.) und betrachten dazu die Menge  $N = \{1, a\}$  mit der Nachfolgerbeziehung  $1' = a$ . In diesem Modell sind bis auf A 2 (da  $a$  keinen Nachfolger hat) alle Axiome erfüllt.

Obwohl die Unabhängigkeit der Axiome eines Systems grundsätzlich nicht erforderlich ist, um alle Sätze einer Theorie zu erhalten, liefert das Wissen um die Abhängigkeit und Unabhängigkeit der Axiome aufschlussreiche Einsichten in die Struktur der Theorie. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist die Entdeckung nichteuklidischer Geometrien, die sich aus der jahrtausende alten Frage nach der Abhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen geometrischen Axiomen ergab.

Das Axiomensystem Euklids ist ziemlich umfangreich, aber die in ihm enthaltenen Axiome sind als Aussagen über den erfahrbaren physikalischen Raum alle sehr einsichtig und bedürfen offenbar keines Beweises. Sie betreffen einen zwar als unbegrenzt gedachten Raum, enthalten jedoch keine Aussagen über den Raum, die sich unserer endlichen Erfahrung entziehen. Hierfür drei Beispiele:

Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Um jeden Punkt lässt sich mit jedem beliebigen Radius ein Kreis zeichnen.

Alle rechten Winkel sind gleich.

Lediglich das bedeutend längere Parallelenaxiom (in Euklids Formulierung)

"Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind"

hat eine kompliziertere Struktur.

Die Mathematiker seit Euklid versuchten darum, es aus den anderen und kürzeren (also einfacheren) Axiomen herzuleiten, insbesondere auch deshalb, weil seine Umkehrung beweisbar ist (vgl. 2.13.2.). Die Beweisversuche für die Abhängigkeit des Parallelenaxioms gingen alle so vor sich, dass die Negation des Parallelenaxioms anstelle des Parallelenaxioms als richtig betrachtet wurde.

So wollte man am Ende einer Schlusskette auf einen Widerspruch stoßen, was sich jedoch nicht ereignete. Deshalb kehrten vor etwa 150 Jahren einige Mathematiker den Spieß um, indem sie zu beweisen versuchten, dass eine Geometrie auch ohne Parallelenaxiom möglich ist.

Am Ende des 19. Jahrhunderts wurden schließlich in der euklidischen Ebene Modelle für nichteuklidische Geometrien gefunden, die die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien mit der Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie verbanden. Die Geometrie, die ohne das Parallelenaxiom aufgebaut werden kann, heißt absolute Geometrie.

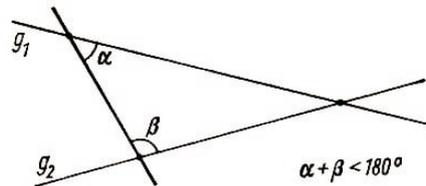


Abb. 3.5. Zum Parallelenaxiom

Diese Geometrie ist natürlich nicht vollständig, da das Parallelenaxiom in ihr weder beweisbar noch widerlegbar ist. Axiomensysteme der Geometrie gabeln sich, je nachdem ob man das Parallelenaxiom hinzunimmt oder nicht.

Wenn die Axiome nicht mehr wahre und offensichtliche Aussagen zu sein brauchen, dann muss ihre Auswahl wenigstens den eben genannten Bedingungen genügen. Dabei bleibt den Mathematikern noch ziemlich viel Spielraum, wenn sie eine Theorie axiomatisieren wollen.

Die zur Beschreibung einer Theorie benötigten Grundbegriffe und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen lassen sich nicht nur auf eine Weise erklären.

$A$  ist der Vater von  $B$  und  $B$  ist der Sohn von  $A$  sind gleichwertige Beschreibungen des einen Sachverhalts, wobei die Beziehung von  $A$  und  $B$  sowohl durch den Grundbegriff Vater als auch Sohn ausgedrückt werden kann.

Wir wissen auch, dass es zu Aussagen bzw. Aussagenfunktionen äquivalente Aussagen bzw. Aussagenfunktionen gibt, so dass jede Theorie mit verschiedenen Axiomensystemen versehen werden kann, die zueinander äquivalent sind.

Die Gründe, die dann zur Bevorzugung oder Ablehnung des einen oder anderen Axiomensystems führen, sind unterschiedlich: ein Axiomensystem soll möglichst wenige Axiome enthalten, ein anderes möglichst offensichtliche oder gut anwendbare Axiome haben (obwohl die letzte Forderung subjektiv ist und von der jeweiligen Erfahrung abhängt) usw.

#### Übung

3.4. Weisen Sie die Unabhängigkeit des Axioms A 3 von den übrigen Axiomen des Peanoschen Systems nach!

### 3.7 Grundlagenfragen

Die menschliche Wissenschaft gleicht einer Kugel, die ununterbrochen wächst. In dem Maße wie ihr Umfang zunimmt, wächst auch die Zahl ihrer Berührungspunkte mit dem Unendlichen.  
B. Pascal

Durch die neue Auffassung der Axiome, wie es im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, entstehen für die Mathematiker neue Probleme. Wenn ein Mathematiker formal ein Axiomensystem aufschreibt, dann ergibt sich sofort die Frage, ob sich die Axiome widersprechen oder nicht, ob die Axiome vollständig sind und was für Modelle das Axiomensystem zulässt (wobei es in der Regel ein oder mehrere Modelle waren, die ihn zur Aufstellung des formalen Axiomensystems inspirierten).

Obwohl der Mengenbegriff einfach zu sein scheint, besitzt er einen hohen Abstraktionsgrad, weshalb die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre nicht über jeden Zweifel erhaben ist bzw. empirisch bestätigt werden kann.

In der Regel enthalten die uns vertrauten Mengen sich nicht selbst als Element, da beispielsweise die Menge aller Bücher kein Buch ist. Betrachten wir jedoch die Menge aller abstrakten Begriffe, dann ist diese Menge selbst wieder ein abstrakter Begriff. Diese Menge besitzt eine eigenartige Eigenschaft, sich selbst als Element zu enthalten.

Es ist also sinnvoll, von Mengen zu sprechen, die sich selbst als Element enthalten. Wenn wir allerdings die Gesamtheit  $M$  aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, daraufhin untersuchen, ob sie sich selbst als Element enthält oder nicht (ein Drittes gibt es nicht!), dann erhalten wir:

Wenn sich die Menge  $M$  selbst enthalten würde, dann wäre sie zufolge der Erklärung von  $M$  eine Menge, die sich nicht selbst enthielte; ist andererseits  $M$  eine Menge, die sich nicht selbst enthält, so ist sie entsprechend unserer Erklärung in der Menge  $M$  enthalten.

Hier verzwirrt sich das Denken (Russellsche Antinomie, 1901).

Jedes Axiomensystem, das solche Mengenbildung zulässt, umfasst zu viele "Mengen", nämlich auch Unmengen. Die Bemühungen der Mathematiker zielen von Anbeginn dieses Jahrhunderts darauf hin, solche Unmengen und die damit verbundenen Widersprüche aus Axiomensystemen auszuschließen. In den bekannten Axiomensystemen der Mengenlehre sind bis jetzt keine Widersprüche entdeckt worden, aber es gibt noch keine Garantie dafür, dass dies nicht doch eines Tages der Fall sein könnte.

Ebenso überraschend wie das Zu-viel-Enthalten eines Axiomensystems ist das durch K. Gödel 1931 entdeckte Zu-wenig-Enthalten von Axiomensystemen, das wir anhand des Peanoschen Axiomensystems aufweisen werden. Da in allen mathematischen Theorien gezählt wird, sind die natürlichen Zahlen für die Grundlagenforschung besonders wichtig. Die natürlichen Zahlen bilden das einfachste Modell für eine Menge mit unendlich vielen Elementen.

Da endliche Mengen - zumindest vom theoretischen Standpunkt - elementweise "durchgesehen" werden können, stellen sich echte Grundlagenfragen erst, wenn unendlich viele Elemente ins Spiel kommen.

Wir beschreiben jetzt, wie jeder mathematische Text (Beweis, Formel, Problem, ...) arithmetisch formuliert werden kann, d.h. zu einem Problem der Arithmetik wird, die dadurch nochmals an Interesse für die Grundlagenforschung gewinnt. Das Verfahren geht in seiner Grundidee auf K. Gödel (1906-1978) zurück, wir geben es, um das Prinzip deutlich zu machen, etwas abgeändert an.

Wir wollen annehmen, dass die mit Hilfe des Peanoschen Axiomensystems entwickelte Arithmetik widerspruchsfrei ist, denn anderenfalls würden alle nachfolgenden Resultate (nebst ihren Verneinungen), trivialerweise gelten. Jeder umgangssprachliche Text kann mit Hilfe des Morsealphabets, d.h. vermittels der Zeichen Strich (-), Punkt (.) und Leerraum ( ), auf umkehrbar eindeutige Weise aufgeschrieben oder, wie man sagt, kodiert werden.

Jeder mathematische Text ist formal gesehen eine Folge von Zeichen, in der die Zeichen nach bestimmten Regeln angeordnet sind.

Da es an sich gleichgültig ist, welche Zeichen benutzt werden, können wir jedes Zeichen und damit letztlich jeden Text durch eine Folge von Zahlen kodieren. Wir müssen nur dafür sorgen, dass eine umkehrbar eindeutige Kodierungsvorschrift zwischen den benötigten mathematischen Zeichen und den natürlichen Zahlen besteht, damit jede kodierte Zahlenfolge rückübersetzt (dekodiert) werden kann.

Die benötigten Zeichen in mathematischen Texten sind in der Regel die großen und kleinen Buchstaben des lateinischen und griechischen Alphabets sowie der Frakturschrift und mathematische Zeichen wie "=" oder "+" usw., insgesamt sicher weniger als 1000.

Damit kann jedem Zeichen eine Dreiergruppe von arabischen Ziffern zugeordnet werden, und umgekehrt entspricht jeder Dreiergruppe von Ziffern ein Zeichen. Diese Zuordnung erfolgt wie im Wörterbuch, ist allerdings unmissverständlich. Ein Ausschnitt aus der Zuordnungsvorschrift könnte wie folgt aussehen:

Zeichen	Kodierung	Zeichen	Kodierung
0	000	n	047
1	001	:	:
:	:	$\varphi$	100
9	009	:	:
:	:	(	110
F	016	)	111
:	:	:	:

Der Ausdruck  $\varphi(n)$  bzw.  $F(1)$  erhält die Kodierung 100 110 047 111 bzw. 016 110 001 111. Die durch Kodierung erhaltenen Dreiergruppen bezeichnen wir als Gödelnummer und können sie als natürliche Zahl auffassen, in deren Schreibweise unüblicherweise zu Anfang Nullen auftreten dürfen.

Wenn wir andererseits gegebenenfalls eine natürliche Zahl wie 16421 oder 1421762 am Anfang durch ein oder zwei Nullen ergänzen, so dass sich ihre Ziffern auf genau eine Weise in Dreiergruppen zerlegen lassen, dann können wir die so abgeänderten natürlichen Zahlen als Gödelnummern betrachten.

Jede natürliche Zahl kann nach dieser Vereinbarung zum einen wie üblich als natürliche Zahl angesehen werden, aber zum anderen auch als kodierte mathematische Aussage betrachtet werden.

Das Dekodieren der meisten natürlichen Zahlen wird allerdings auf unsinnige Zeichenkombinationen führen (als ob ein Affe die Lettern eines Setzkastens zusammengefügt

hätte), andere jedoch werden gelegentlich auf sinnvolle Texte führen (z. B. sowohl auf irgendeine Abhandlung über die Eskimodialekte in allen Varianten, die zudem sämtliche Druckfehler besitzen, als auch auf vernünftige mathematische Aussagen).

Es sei nun  $A$  eine gegebene Aussage mit der Gödelnummer  $N$ , die sich innerhalb des Peanoschen Axiomensystems bilden lässt. Dann kann die Aussage

$A$  mit der Gödelnummer  $N$  ist im Peanoschen Axiomensystem nicht beweisbar  
(4)

im Gödelschen Sinn kodiert werden, wobei sich irgendeine Gödelnummer  $M$  ergibt.

Gödel hat mit Hilfe eines indirekten Beweisverfahrens nachgewiesen, dass es eine Aussage  $A'$  mit der Gödelnummer  $N$  gibt, für die (4) die Gödelnummer  $N$  erhält.<sup>23</sup> Damit behauptet die Aussage (4) ihre eigene Unbeweisbarkeit!

Nun ist aber (4) aus folgenden Gründen tatsächlich nicht beweisbar. Ein Beweis widerspricht der Aussage der Unbeweisbarkeit, und eine Widerlegung von (4) bestätigt gerade die Behauptung von (4), nicht beweisbar zu sein. Obwohl (4) damit eine wahre Aussage ist, kann (4) nicht aus dem Peanoschen Axiomensystem abgeleitet werden, das damit unvollständig ist.

Diese Mangelerscheinung des Axiomensystems ist grundsätzlicher Art, denn wenn wir (4) als neues, unabhängiges Axiom zu den übrigen hinzufügen, dann lässt sich in dem erweiterten Axiomensystem wiederum eine wahre, unbeweisbare Aussage konstruieren usw.

Das Fazit ist, dass sich kein überschaubares Axiomensystem angeben lässt, welches die Arithmetik der natürlichen Zahlen vollständig beschreibt.

Der angedeutete Gödelsche Beweis ist indirekt und kompliziert, so dass der Beweis bis heute noch nicht dazu ausgenutzt werden konnte, den arithmetischen Charakter unbeweisbarer Aussagen angeben zu können, insbesondere ist die Frage nicht geklärt, ob sich unter den unbewiesenen Aussagen wie z.B. der Fermatschen oder der Goldbachschen Vermutung wahre, aber unbeweisbare Aussagen befinden.

In anderen Axiomensystemen sind "interessante" unbeweisbare Aussagen bekannt. Für die absolute Geometrie ist das Parallelenaxiom ein unbeweisbarer Satz, für die Gruppentheorie ist das Kommutativgesetz  $a \circ b = b \circ a$  für alle Gruppenelemente  $a$  und  $b$  ein unbeweisbarer Satz.

Gödel konnte weiter zeigen, dass die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik innerhalb der Arithmetik nicht beantwortet werden kann. Diese kann sich also nicht wie Münchhausen am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen, sondern bedarf äußerer Hilfsmittel dazu.

Bemerkenswert ist jedoch, dass die Mathematik mit ihren eigenen Methoden in der Lage ist, die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit zu beschreiben. Ein von G. Gentzen 1936 geführter Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik enthält erwartungsgemäß Mittel, nämlich die transfiniten Induktion, die nicht zum Peanoschen Axiomensystem gehören.

---

<sup>23</sup>Bei unserer Gödelisierung ist infolge der Vereinfachung allerdings stets  $N < M$ .

Zunächst kann aus den Ergebnissen der scheinbar pessimistische Schluss gezogen werden, dass der Reichtum mathematischer Theorien (und damit die Mathematik als Gesamtheit erst recht) axiomatisch nicht völlig erfasst werden kann. Die Unentscheidbarkeit der Aussagen ist nicht absolut, sondern an das jeweilige Axiomensystem mit der dazugehörigen Logik gebunden.

Wir sind also, und das ist die positive Wendung, aufgefordert, ständig umfassendere Systeme sowohl in Bezug auf die Axiomatik als auch auf die Beweisverfahren zu konstruieren. Wir haben mit einem Axiomensystem nicht schlechthin die mathematische Erkenntnis, den Stein der Weisen, sondern die Erkenntnis will durch Handeln gewonnen sein.

Die Mathematik ist, wie es H. Weyl (1885-1955) sehr bildhaft ausdrückte, kein "Automat, der für 10 Cent ein Paket Axiome, Definitionen und Lemmata ausspuckt und dann reglos bleibt ...".

Wir wollen uns klar machen, wie viele Beweise denkbar sind und wie viele von uns überhaupt geführt werden können. Da wir aus zeitlichen Gründen einen Beweis nach dem anderen führen müssen, kann die Menge der geführten Beweise abgezählt werden, selbst wenn wir uns für die Zukunft der zeitlichen Beschränkungen entledigen könnten. Schöpfen wir mit der Gesamtheit aller ausführbaren Beweise die Menge aller möglichen Beweise aus?

Jeder Beweis ist eine Anordnung von endlich vielen Zeichen.

Wir hatten uns überlegt, dass bereits 1000 verschiedene Zeichen in ausreichender Menge im Kasten eines Setzers es dem Setzer erlauben, jeden möglichen Beweis zusammenzustellen. Da alle Beweise nur endlich viele Zeichen enthalten, ist ihre Gesamtheit eine Teilmenge der Menge aller möglichen Zeichenkombinationen, in denen nur endlich viele Zeichen vorkommen.

Diese Menge lässt sich aber abzählen.

Dazu überlegen wir uns, dass es jeweils nur endlich viele Mengen gibt, die  $n$  nicht notwendig verschiedene Zeichen enthalten. Die Gesamtheit dieser Mengen ist für jedes  $n$  abzählbar. Die Menge aller möglichen Zeichenkombinationen wird nun wie folgt abgezählt:

zuerst zählen wir alle Mengen, die ein Zeichen enthalten, dann die mit zwei Zeichen usw. Auf diese Weise wird jede Zeichenmenge erfasst. Damit ist auch die Menge aller möglichen Beweise abzählbar.

Die Menge der transzendenten reellen Zahlen, das sind Zahlen, die keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen, ist bekanntlich nicht mehr abzählbar. Um für jede reelle Zahl zu die Gültigkeit der aus der Aussagenfunktion  $x$  ist eine transzendente Zahl gewonnenen Aussage zu überprüfen, sind aber bereits überabzählbar viele Beweise erforderlich.

Die Menge der erforderlichen Beweise enthält die Menge der möglichen Beweise als Teilmenge. Hierauf hat P. Finsler hingewiesen.<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup>Da es uns nur auf die grundsätzlichen Überlegungen ankommt, gehen wir auf den Einwand nicht ein, dass sich unter Umständen für hinreichend große Klassen von Zahlen gemeinsame Beweise

Es gibt in der Mathematik viele Probleme, deren Lösungen über die ursprüngliche Frage hinausgehende Konsequenzen haben.

Das Parallelenproblem führte zur Aufspaltung der Geometrie und verhalf wesentlich der axiomatischen Methode zum Durchbruch.

Für das Fermatsche Problem gelang bis jetzt keine Lösung, jedoch führten die Bemühungen um die Lösung auf wichtige zahlentheoretische Einsichten.

Unerwartete Folgen hat auch das nächste Problem. Seit mehr als 100 Jahren vermuten die Mathematiker, der den Kartographen bekannte Sachverhalt sei wahr, dass zur Färbung des Erdglobus oder jedes beliebigen Teils von ihm (also jeder Landkarte) vier Farben ausreichen - drei jedoch nicht (natürlich mit der für die Mathematik notwendigen Präzisierung, was eine Landkarte usw. sei).

Die Mathematiker haben sich dieser Vierfarbenvermutung mit besonderer Hartnäckigkeit gewidmet (für einige war es bereits der Vierfarbensatz), weil für die komplizierteren geometrischen Körper wie Torus (Autoschlauch) u.a. entsprechende Sätze beweisbar sind, nur die Kugel, und wir leben ja auf einer Erdkugel, bildet die skandalöse Ausnahme!

Der Beweis wurde 1976 von den Mathematikern K. Appel und W. Haken so in Angriff genommen, dass sie im Dialog mit einem Computer diesen zur Abarbeitung langwieriger Fallunterscheidungen einsetzten. Für manche der zu bewältigenden Fallunterscheidungen benötigte selbst der Rechner eine zu große Rechenzeit, so dass nach hinreichend langer Rechenzeit (30 Minuten) auf diese Fälle verzichtet wurde.

Das war möglich, weil in der Beweisführung zahlreiche Varianten für mögliche Fallunterscheidungen vorhanden waren. Nach 1200 Stunden blieb der Rechner stehen und druckte die erfolgreiche Abarbeitung eines vollständigen Systems von möglichen Fällen (etwa 2000) aus, womit die Vierfarbenvermutung zum Vierfarbensatz wurde. Eine zweite, unabhängige Überprüfung hat 1978 das Ergebnis mit einem Zehntel an Rechenzeit bestätigt.

Für die Mathematik ergeben sich wesentliche methodische Fragen. Die naheliegendste ist "Hat die Tätigkeit eines Computers Beweiskraft?"

Wir vertrauen zwar der Rechengenauigkeit eines Computers, Maschinen sind jedoch störanfällig. Daher ist, selbst wenn das Programm und die Daten zur Nachprüfung vollständig veröffentlicht sind, noch keine Gewähr gegeben, dass nicht Lochbänder falsch gelocht oder gelesen wurden - ganz zu schweigen von den obskuren Fehlern<sup>25</sup> der modernen Computer wie beispielsweise nur zeitweilig auftretende Fehler oder so selten auftretende Fehler, dass sie erst nach Jahren entdeckt werden, d. h., bei richtigem Programm und korrekten Daten kann das Resultat falsch sein. (Selbstverständlich ist auch das Überprüfen langer herkömmlicher Beweise nicht unproblematisch und unterliegt subjektiven Fehlern.)

---

führen lassen könnten, so dass die Zahl der Beweise reduziert werden könnte.

<sup>25</sup>Ein im Computerbau mit dem Entwurf der logischen Schaltungen Beschäftigter hatte sich mit seiner Firma überworfen und als schelmenhafte Revanche die Schaltung eines Rechners so ausgelegt, dass zufällig, aber penetrant der Text "Ich bin der unbekannte Glitch" in den Rechenergebnissen mit ausgedruckt wurde. Die Betriebsstörung konnte von seinen ehemaligen Mitarbeitern nicht beseitigt werden.

Aber es ist ein Unterschied, ob der Rechner einen falschen Wert für eine Nullstelle einer Gleichung ausdrückt oder ob ein Text von ihm so zu interpretieren ist, dass jede quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

Eine zweite einschneidende Veränderung zu den üblichen Beweisverfahren entsteht durch den riesigen Anteil von Rechenzeit auf einem Computer. Bis jetzt konnte jeder entsprechend vorgebildete Mathematiker jeden Beweis verstehen, zumindest die Zeit zum Durcharbeiten aufbringen. Nun ist er jedoch gezwungen, entweder dem Rechner blind zu vertrauen oder einen Rechner gleicher Leistungsfähigkeit zur Verfügung zu haben, also insbesondere die Kosten für die Rechenzeit aufbringen zu können.

Dem Argument, dass leistungsfähigere und billigere Rechner in Zukunft vorhanden sein werden, kann damit begegnet werden, dass auch im Kompliziertheitsgrad der Probleme kein Ende abzusehen ist. Ein einfaches Beispiel dieser Art ist im Abschnitt 4.4. angegeben. Mathematisches Beweisen dieser Art erhält eine gesellschaftliche Dimension.

Die Einbeziehung des Hilfsmittels Computer in Beweisverfahren wird die Auffassung von dem, was ein Beweis ist, und von der zugehörigen Strenge in Zukunft sicher verändern. Mit dem Auftauchen elektronischer Taschenrechner "bedarf" z. B. die Frage  $e^\pi > \pi^e$  oder umgekehrt nur einiger Knopfdrücke zur Entscheidung:  $e^\pi \approx 23,1406 > 22,4591 \approx \pi^e$ .

Das Leibnizsche Ideal der mechanischen Bestätigung aller Wahrheiten ist heute nicht nur Wunschbild. Ein zeitgenössischer Mathematiker, B. H. Neumann, prognostiziert bereits: "Nichtsdestoweniger, der Tag kommt, an dem mathematische Forschungsarbeiten vollständig von einem Computer geschrieben werden."

Tröstend fügt er allerdings hinzu: "Mitglied der menschlichen Mathematikergemeinschaft, fasse Mut: der Tag kommt, aber es wird weder dieses noch nächstes Jahr sein."

R. Thom unterstellt die Existenz eines solchen Computers und fragt: "Nun möchten wir nachprüfen, ob eine Formel  $F$  der Theorie richtig ist. Nach  $10^{30}$  Operationen, die in ein paar Sekunden vollzogen werden, gibt uns die Maschine eine positive Antwort. Welcher Mathematiker würde ohne Zögern die Gültigkeit einer solchen Beweisführung akzeptieren, bei der die einzelnen Schritte von ihm unmöglich nachgeprüft werden können?"

Änderungen der Auffassung, was ein Beweis sei, sind nicht neu.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir beispielsweise einige Dinge genauer formulieren als Euklid vorüber 2000 Jahren (Zwischenaxiome). Das Beweisprinzip selbst ist in der Mathematik niemals in Frage gestellt worden. In einer Zeit, in der selbst tiefgreifende Umwandlungen in der Mathematik vor sich gingen, hob F. Klein (1849-1925) hervor:

"Aus der Betrachtung der Geschichte unserer Wissenschaft ergibt sich nämlich, dass 'Strenge' bei alledem etwas Relatives ist, eine Forderung, die sich mit der fortschreitenden Entwicklung erst entwickelt. Es ist interessant zu beobachten, wie in einer auf Strenge gerichteten Periode die Zeitgenossen jedesmal glauben, das Maximum in dieser Richtung geleistet zu haben, und wie dann noch eine spätere Generation in ihren Forderungen und Leistungen über sie hinwegschreitet."

So wurde Euklid überholt, so Gauß, so Weierstraß. Es scheinen der Entwicklung in dieser Richtung so wenig Grenzen gesetzt zu sein, wie sie für die schöpferische Erfindungskraft existieren.

### 3.8 Lyrischer Exkurs: Hommage à Gödel

Münchhausens Theorem, Pferd, Sumpf und Schopf,  
ist bezaubernd, aber vergiss nicht:  
Münchhausen war ein Lügner.

Gödels Theorem wirkt auf den ersten Blick  
etwas unscheinbar, doch bedenk:  
Gödel hat recht.

"In jedem genügend reichhaltigen System  
lassen sich Sätze formulieren,  
die innerhalb des Systems  
weder beweis- noch widerlegbar sind,  
es sei denn das System  
wäre selber inkonsistent."

Du kannst deine eigene Sprache  
in deiner eigenen Sprache beschreiben:  
aber nicht ganz.

Du kannst dein eigenes Gehirn  
mit deinem eigenen Gehirn erforschen:  
aber nicht ganz. Usw.

Um sich zu rechtfertigen  
muss jedes denkbare System sich transzendieren,  
d.h. zerstören.

"Genügend reichhaltig" oder nicht:  
Widerspruchsfreiheit ist eine Mangelerscheinung  
Oder ein Widerspruch.

(Gewissheit = Inkonsistenz)

Jeder denkbare Reiter,  
also auch Münchhausen,  
also auch du bist ein Subsystem  
- eines genügend reichhaltigen Sumpfes.

Und ein Subsystem dieses Subsystems  
ist der eigene Schopf,  
dieses Hebezeug  
für Reformisten und Lügner.

In jedem genügend reichhaltigen System,  
also auch in diesem Sumpf hier,

lassen sich Sätze formulieren,  
die innerhalb des Systems  
weder beweis- noch widerlegbar sind.

Diese Sätze nimm in die Hand  
und zieh!

Hans Magnus Enzensberger

### 3.9 Die axiomatische Methode außerhalb der Mathematik

Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen  
Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft  
angetroffen werden könne, als darin  
Mathematik anzutreffen ist.  
I. Kant

Eingehende Untersuchungen über die axiomatische Methode und ihre Bedeutung finden sich bereits bei den griechischen Philosophen, besonders bei Plato (429?-348? v.u.Z.) und Aristoteles (384-322 v.u.Z.). Der Philosoph des Mittelalters B. Spinoza (1632-1677) hat in seinem Buch "Ethik"<sup>26</sup> den Versuch unternommen, die Ethik nach dem Vorbild der Geometrie (in more geometrico) aufzubauen. Der 72. Lehrsatz des vierten Teils lautet:

"Der freie Mensch handelt niemals arglistig, sondern stets aufrecht."

Er wird, gestützt auf Axiome, Postulate (Forderungen) und Definitionen, bewiesen. Die Definition der Trunksucht erfolgt bei Spinoza so: "Trunksucht ist unmäßige Begierde und Liebe zum Zechen."

Besonders erfolgreich war die Physik in der Anwendung axiomatischer Methoden; die klassische Mechanik wurde durch I. Newton (1642-1727) axiomatisch begründet. Axiomatische Theorien sind in den Naturwissenschaften besonders bedeutungsvoll, wenn mehrere Konzeptionen eines Bereichs, wie z.B. die klassische oder relativistische Mechanik, miteinander verglichen werden, da die Unterschiede sich hier auf wenige Axiome zurückführen lassen und so die Konsequenzen der abgeänderten Axiome sehr deutlich werden.

Der Impulsänderungssatz, der in der Mechanik als Axiom dient, unterscheidet sich je nach Konstanz bzw. Veränderlichkeit der Masse, in Formeln:

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \left( t, v, \frac{dv}{dt} \right) \quad \text{veränderliche Masse} \quad \text{bzw.}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F \left( t, v, \frac{dv}{dt} \right) \quad \text{konstante Masse}$$

( $t$  - Zeit,  $v$  - Geschwindigkeit,  $m$  - Masse,  $F$  - Kraft).

---

<sup>26</sup>"Ethik". Leipzig 1975.

Ein interessantes nichtmathematisches Modell einer axiomatischen Theorie gibt Hilbert in seinem Aufsatz "Naturerkennen und Logik"<sup>27</sup> an:

"Drosophila ist eine kleine Fliege, aber groß ist unser Interesse für sie; sie ist der Gegenstand der ausgedehntesten, der sorgfältigsten und erfolgreichsten Züchtungsversuche gewesen. Diese Fliege ist gewöhnlich grau, rotäugig und fleckenlos, rundflügelig, langflügelig.

Es kommen aber auch Fliegen mit abweichenden Sondermerkmalen vor: statt grau sind sie gelb, statt rotäugig sind sie weißäugig usw. Gewöhnlich sind diese fünf Sondermerkmale gekoppelt, d.h., wenn eine Fliege gelb ist, dann ist sie auch weißäugig und fleckig, spaltflügelig und klumpflügelig. Und wenn sie klumpflügelig ist, dann ist sie auch gelb und weißäugig usw.

Von dieser gewöhnlich statthabenden Koppelung kommen nun aber bei geeigneten Kreuzungen unter den Nachkommen an Zahl geringere Abweichungen vor, und zwar prozentuell in bestimmter, konstanter Weise.

Auf die Zahlen, die man dadurch experimentell findet, stimmen die linearen euklidischen Axiome der Kongruenz und die Axiome über den geometrischen Begriff 'zwischen', und so kommen als Anwendung der linearen Kongruenzaxiome, das heißt der elementaren geometrischen Sätze über das Abtragen von Strecken die Gesetze der Vererbung heraus: so einfach und genau - und zugleich so wunderbar, wie wohl keine noch so kühne Phantasie sie sich ersonnen hätte."

Nehmen wir noch eine Briefstelle Hilberts an Frege hinzu, so wird die Tragweite der axiomatischen Methode innerhalb und außerhalb der Mathematik deutlich.

"Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ... denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen."

---

<sup>27</sup>"Die Naturwissenschaften". 1930, S. 959-963.

## 4 Beweise

Da ist das Problem, suche die Lösung!  
 Du kannst sie durch reines Denken finden,  
 denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.  
 D. Hilbert

### 4.1 Direkte Beweise

Der direkte Beweis einer mathematischen Aussage, der sogenannten Behauptung, besteht darin, dass aus bereits bewiesenen Aussagen (d. h. aus Sätzen) mit einer endlichen Anzahl von korrekten Schlüssen geradewegs die Behauptung gewonnen wird. Direkte Beweise werden in bestimmten Zusammenhängen auch Konstruktionen genannt.

Wir geben einige Beispiele an.

Beispiel 1: Ein Fußgänger läuft abends auf ebener Straße geradlinig an einer brennenden Straßenlampe vorbei. Auf was für einer Kurve bewegt sich der Schatten seines Kopfes?

Mit dem Fußgänger bewegt sich auch sein Kopf geradlinig an der Lampe auf einer Geraden  $g$  vorbei. Die Lichtstrahlen, die von der Lampe ausgehen und durch die Gerade  $g$  verlaufen, begrenzen den Kopfschatten. Da Lichtstrahlen sich geradlinig ausbreiten, legt die Menge aller Strahlen, die von der punktförmigen Lampe durch die Gerade  $g$  gehen, eine Ebene fest. Diese Ebene schneidet die Straßenebene in einer Geraden, die die Begrenzung des Kopfschattens markiert.

Beispiel 2: Ein Flugzeug fliegt mit unveränderlicher Motorleistung von  $A$  nach  $B$  und zurück. Wenn mit konstanter Geschwindigkeit Wind von  $A$  nach  $B$  weht, ist dann bei gleicher Motorleistung die Flugzeit länger oder kürzer als bei Windstille?

Wir bezeichnen die Länge der Strecke von  $A$  nach  $B$  mit  $a$ .

Dann ist bei Windstille und der Geschwindigkeit  $v$  die vom Flugzeug benötigte Zeit für den Hin- und Rückflug  $T_0 = 2a/v$ . Wenn  $v$  durch den Wind während des Hinfluges um  $c > 0$  erhöht wird, dann wird  $v$  während des Rückfluges um  $c$  vermindert. Damit sind die Zeiten für Hin- bzw. Rückflug

$$t_H = \frac{a}{v+c} \quad \text{bzw.} \quad t_R = \frac{a}{v-c}$$

die Gesamtflugzeit bei Wind also

$$T_W = t_H + t_R = \frac{a}{v+c} + \frac{a}{v-c}$$

Für  $c > 0$  ist  $v-c > 0$  notwendig, um zu garantieren, dass sich das Flugzeug überhaupt von  $B$  nach  $A$  fortbewegen kann. Diese Annahme ergibt sich aus der Natur der Aufgabe. Wegen  $v+c > 0$  ist auch  $(v+c)(v-c) = v^2 - c^2 > 0$ . Damit ist für  $c > 0$

$$v^2 > v^2 - c^2 > 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{v^2}{v^2 - c^2} > 1$$

oder

$$2a \frac{v}{v^2 - c^2} > \frac{2a}{v} \quad \text{und} \quad \frac{a(v+c) + a(v-c)}{v^2 - c^2} > \frac{2a}{v}$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{v+c} + \frac{a}{v-c} > \frac{2a}{v}$$

d.h.

$$T_W = t_H + t_R > T_0$$

Gleichheit ist nur möglich, wenn  $v^2 = v^2 - c^2$ , d.h.  $c = 0$  ist. Damit benötigt das Flugzeug bei Wind mehr Zeit als bei Windstille.

Beispiel 3: In jedem gleichseitigen Dreieck gilt, dass die Summe der drei Abstände eines innerhalb des Dreiecks gelegenen Punktes von den Dreiecksseiten unabhängig von der Lage des Punktes ist.

Ein beliebiges Dreieck  $ABC$  sei gleichseitig und  $P$  irgendein Punkt innerhalb des Dreiecks.

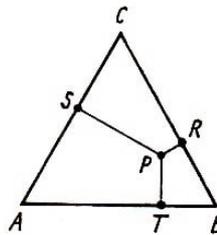


Abb. 4.1.

Die Fußpunkte des Lotes vom Punkt  $P$  auf die Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  seien  $R$ ,  $S$  und  $T$ . Die Fläche des Dreiecks ist gleich der Summe der Flächen der Dreiecke  $PCA$ ,  $PAB$  und  $PBC$  (s. Abb. 4.1). Da  $\overline{PS}$ ,  $\overline{PT}$  und  $\overline{PR}$  Höhen in den entsprechenden Dreiecken sind und wegen der Gleichseitigkeit  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$  ergibt sich für die Gesamtfläche  $F$

$$F = \frac{1}{2}a\overline{PS} + \frac{1}{2}a\overline{PT} + \frac{1}{2}a\overline{PR} = \frac{1}{2}a(\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT})$$

also

$$\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT} = \frac{2F}{a} = \text{const.} \quad (\text{q.e.d.})$$

Beispiel 4: Beweisen Sie für je vier reelle Zahlen  $a_1, a_2$  und  $b_1, b_2$  die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \quad (1)$$

Es seien  $a_1$  und  $a_2$  ungleich null, anderenfalls ist die Ungleichung (1) trivialerweise erfüllt. Das quadratische Polynom

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2$$

ist für alle  $x$  positiv und verschwindet nur, wenn beide Summanden gleichzeitig null sind, also

$$a_1x - b_1 = 0, \quad a_2x - b_2 = 0 \quad \text{also} \quad x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

Damit hat  $P(x)$  höchstens eine reelle Nullstelle.  $P(x)$  lässt sich nach kurzer Rechnung auch als Polynom

$$P(x) = x^2(a_1^2 + a_2^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2)$$

schreiben, dessen Nullstellen sich bekanntlich aus der Formel

$$x_{1,2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1^2 + a_2^2} \pm \sqrt{\frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} - \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2}}$$

ergeben. Es ist dabei nach Voraussetzung  $a_1^2 + a_2^2 > 0$ . Wenn es höchstens eine reelle Nullstelle gibt, dann muss der Radikand negativ sein. Also gilt

$$\frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} - \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \leq 0$$

bzw.

$$a_1^2 + a_2^2)(b_1^3b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

Die Gleichheit gilt nur, wenn die  $a_i$  und  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) so beschaffen sind, dass  $a_1/b_1 = a_2/b_2$  ist.

Beispiel 5 : Beweisen Sie

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} > \frac{468}{113} \quad (2)$$

Es ist  $4,9^2 = 24,01 > 24 = 4 \cdot 6$ , also  $6 > 4 \cdot \left(\frac{6}{4,9}\right)^2 = 4 \left(1 + \frac{11}{49}\right)^2$  bzw.  $4 \cdot 6 > 4^2 \left(1 + \frac{11}{49}\right)^2 > 0$ . Radizieren führt auf

$$2\sqrt{6} > 4 \cdot \left(1 + \frac{11}{49}\right) = 4 + \frac{44}{49} > 4 + \frac{43}{49} = 4 + \frac{42}{49} + \frac{1}{49} = 4 + \frac{6}{7} + \frac{1}{49}$$

Damit gilt auch

$$2 + 3 + 2\sqrt{6} > 9 + \frac{2 \cdot 3}{7} + \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

bzw.

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 > \left(3 + \frac{1}{7}\right)^2 > 0$$

also

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3 + \frac{1}{7} = 3 + \frac{16}{112} > 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

woraus sich die Behauptung leicht ergibt.

Übungen

4.1. Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

Folgerungen: Für positive Zahlen  $a$  und  $b$  gelten  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  und  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

4.2. Für alle positiven Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ .

4.3. Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a, b > 1$  gilt

$$\log_a b + \log_b a \geq 2$$

4.4. Bei einer Balkenwaage (Analysenwaage), die ein Chemiker benutzt, zeigt sich, dass beide Hebelarme nicht gleich lang sind. Da ständig die gleiche Menge eines Stoffes abzuwiegen ist, wird folgendes Verfahren praktiziert.

Um die unterschiedlichen Längen auszugleichen, wird das Wägestück abwechselnd auf die rechte und linke Waagschale gelegt. Wird auf diese Weise nach einer geraden Zahl von Wägungen mehr oder weniger als benötigt erhalten?

4.5. In jedem gleichschenkligen Trapez, dessen Schenkel die Länge  $a$  haben und dessen Grundlinie die Länge  $b$  und die dazu parallele vierte Linie die Länge  $c$  hat, gilt

$$d^2 = a^2 + bc$$

wenn  $d$  die Länge der Diagonalen bezeichnet.

4.6. Beweisen Sie  $6 > \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ .

## 4.2 Der Rückschluss

Der direkte Beweis stellt eine Schlusskette zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten her. Er geht von der Voraussetzung zur Behauptung. Betrachten wir jedoch das Beispiel 5 aus 4.1., so zeigt sich, dass die für den Beweis benötigten Voraussetzungen nicht vollständig formuliert worden waren.

Da für je zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  genau eine der drei Möglichkeiten  $a < b$ ,  $a = b$  oder  $a > b$  in Frage kommt, können wir in diesem Beispiel, ohne Genaueres über die benötigten Voraussetzungen zu wissen, die Behauptung als sinnvoll (d.h. beweis- oder widerlegbar) ansehen.

Ein Beweis kann mit der für reelle Zahlen offensichtlichen Voraussetzung  $4,9^2 > 24$  bzw.  $2400 < 2401$  oder  $0 < 1$  beginnen, die uns durch die Rechenerfahrung geläufig sind und deshalb ungenannt bleiben. Das Weglassen notwendiger Voraussetzungen geschieht zum einen, wenn sie offensichtlich sind (oder so zu sein scheinen, was häufig trügerisch ist) oder, weil sie in ihrer Gesamtheit erst nach dem geführten Beweis zutage treten.

Die Übung 1.6 ist andererseits ein Beispiel für überformulierte Voraussetzungen (Standort der Eiche), wobei es einiger Mühe bedarf, um das zu erkennen.

Schwierigkeiten für das Finden einer Beweisidee ergeben sich häufig daraus, dass die Voraussetzungen im Gegensatz zur Behauptung ziemlich allgemein und ohne besondere Struktur sind, wie etwa im Beispiel 4 aus 4.1. In diesem Beispiel sind die Voraussetzungen im Bereich der reellen Zahlen ganz allgemein, da die  $a_i$  und  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) jede reelle Zahl sein können, während die Behauptung eine spezielle Struktur hat, deren Zusammenhang mit der Voraussetzung nicht ohne weiteres zu erkennen ist.

Mit Zusammenhang ist hier die Schlusskette von der Voraussetzung  $A$  zu der Behauptung  $B$  gemeint. Es ist nun denkbar, dass jeder einzelne Schluss in dieser Kette umkehrbar ist, so dass die Kette insgesamt aus umkehrbaren Schlüssen besteht und damit auch der Schluss von der Voraussetzung  $A$  auf die Behauptung  $B$  selbst umkehrbar ist, d.h. dass  $A$  aus  $B$  folgt.

Dann können wir auch von dem Gesuchten ausgehen und es auf das Gegebene zurückführen. Es ist oft einfacher, eine spezielle Behauptung auf eine allgemeine Voraussetzung zurückzuführen. Dieses Vorgehen ist jedoch dann und nur dann ein Beweis für die Behauptung, wenn die Behauptung und die Voraussetzung (Gegebenes und Gesuchtes) logisch äquivalent sind, m. a. W., wenn die Voraussetzung notwendig und hinreichend für die Behauptung ist.

Deshalb darf das "erfolgreiche" Ausgehen vom Gesuchten nicht dazu verführen, die wesentliche Nebenbedingung der Äquivalenz von Gegebenem und Gesuchtem zu übersehen (vgl. Beispiel 2 in 2.13.4.). Bei sorgfältigem Vorgehen deckt das Ausgehen vom Gesuchten häufig ungenannte und stillschweigend gemachte Voraussetzungen auf.

Wir geben ein einfaches Beispiel an, das deutlich die Konsequenzen eines "erfolgreichen" Vorgehens zeigt. Die falsche Behauptung  $-1 = +1$  geht durch Quadrieren (korrekter Schluss) in  $(-1)^2 = (+1)^2$  bzw. in  $1 = 1$  über, was eine richtige Aussage ist.

Diese richtige Aussage kann niemals die falsche Behauptung stützen. Die Implikation Wenn  $-1 = +1$ , so  $1 = 1$  ist zwar richtig, jedoch ihre Umkehrung nicht.

Die Implikation 'Wenn  $-1 = +1$ , so  $1 = 1$ ' und die Implikation 'Wenn  $-1 = +1$ , so  $0 = 1$ ' zeigen, dass aus einer falschen Voraussetzung sowohl Wahres als auch Falsches folgen kann. (Wenn  $-1 = +1$  ist, so ist auch  $-1 + 1 = 1 + 1 = 2$  und damit nach Division durch 2 auch  $0 = 1$ .)

Wenn wir, um die Kluft zwischen allgemein gehaltenen Voraussetzungen und einer speziellen Behauptung besser überbrücken zu können, auch von der Behauptung ausgehen, so haben wir die Behauptung unter die Voraussetzungen aufgenommen.

Das ist natürlich nicht ohne weiteres statthaft, weil das Gesuchte nicht vorausgesetzt werden darf, sondern zu beweisen ist. Wir können jedoch die Hypothese unterstellen, dass die Behauptung gültig sei, und die gezogenen Schlussfolgerungen an diese Annahme koppeln. Sofern wir am Ende einer Schlusskette die gegebenen Voraussetzungen vorfinden, ist es unsere Aufgabe, die Schlusskette umzukehren, also von den Voraussetzungen zur Behauptung zu gehen.

Das Umkehren einer Schlusskette, die von dem Gesuchten ausging, wird Rückschluss genannt. Wenn wir von dem Gesuchten ausgehen, dann erhalten wir nur notwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Behauptung. Aufgabe des Rückschlusses ist es, zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Wie unser obiges Beispiel 'Aus  $1 = 1$  folgt nicht  $-1 = +1$ ' zeigt, ist das durchaus nicht immer der Fall. Wenn die Bedingungen nur notwendig sind, kann es bei fehlendem Rückschluss unerwünschte (d.h. falsche) Nebenlösungen geben, worauf wir weiter unten eingehen werden.

Die Schlusskette Behauptung - Voraussetzung ist oft für die praktische Beweisführung ein Hilfsmittel, da sie umkehrbar sein kann oder Hinweise auf die Beweisführung gibt.

Beispiel 1: Im Beispiel 4 in Abschnitt 4.1. wurden einige Umformungen durchgeführt, deren Sinn vom Leser erst am Ende des Beweises eingesehen werden kann. Eine praktische Frage lautet hier und in ähnlichen Fällen, wie etwa beim Beispiel 5 aus 4.1., wo die Voraussetzungen fehlen, von denen ausgegangen werden kann, ob derartige Einfälle ("Tricks") in jedem Fall benötigt werden. Eine Möglichkeit besteht immer darin, erst einmal von der Behauptung auszugehen und dann einen Beweis durch Rückschluss zu versuchen. Die Behauptung (1) des Beispiels 4 lautet in leicht geänderter Form

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \geq 0 \quad (3)$$

Angenommen, (3) ist gültig, so auch die durch Ausmultiplizieren erhaltene Ungleichung

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \geq 0 \quad (4)$$

Diese Ungleichung ist gleichwertig mit

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0 \quad (5)$$

die in der Tat für alle reellen Zahlen  $a_i$  und  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) gilt. Hier setzt der Rückschluss ein.

(5) ist für alle reellen Zahlen  $a_i$  und  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) gültig, wobei die Gleichheit nur für  $a_1b_2 = a_2b_1$  bzw. mit  $a_2b_2 \neq 0$  nur für  $a_1/a_2 = b_1/b_2$  eintreten kann. Da (4) die ausquadrierte Form von (5) ist, gilt auch (4).

Wenn wir zu (4) auf der rechten und linken Seite die Glieder  $a_1^2b_1^2$  und  $a_2^2b_2^2$  addieren und danach entsprechend umformen, erhalten wir die Behauptung (3). Bei  $a_2b_2 = 0$  verschwinden sowohl (5) als auch (3).

Auf die gleiche Weise kann beim Beispiel 5 aus 4.1. vorgegangen werden, wobei die Schlusskette, die vom Gesuchten ausgeht, dann umgekehrt wird (genauer: versucht wird), wenn sie auf gültige Voraussetzungen stößt. Das Ausgehen vom Gesuchten liefert, sofern nur der Rückschluss möglich ist, gleichzeitig das Gegebene, nämlich  $4,9^2 > 24$ .

Wir betrachten jetzt einige Beispiele, bei denen nicht alle Schlüsse der Kette Gesuchtes - Gegebenes umkehrbar sind.

Beispiel 2: Gesucht sind die reellen Lösungen der Gleichungen

a)  $\sqrt{x+1} = x - 1 \quad (6)$

b)  $\sqrt{\frac{x}{2}} - 1 - \sqrt{x+1} = 0 \quad (7)$

a) Wir gehen davon aus, dass wenigstens eine Lösung der Gleichung (6) existiert. Dann erfüllt diese Lösung (6) und damit auch die quadrierte Gleichung (6)  $x+1 = (x-1)^2$  bzw.  $x^2 - 3x = 0$  oder  $x(x-3) = 0$ . Wenn es Lösungen der Gleichung (6) gibt, dann können es nur die Zahlen  $x = 0$  oder  $x = 3$  sein.  $x = 3$  erfüllt (6), jedoch  $x = 0$  nicht, da die linke Seite von (6) gleich  $\sqrt{1} = 1$  ist und die rechte Seite  $-1$  lautet.

b) Wir gehen wieder von der Annahme aus, dass es wenigstens eine reelle Lösung der

Gleichung (7) gibt. Diese Lösung erfüllt damit auch die Gleichung  $\sqrt{\frac{x}{2}-1}-\sqrt{x+1}=0$  und die durch Quadrieren sich daraus ergebende Gleichung  $\frac{x}{2}-1=x+1$  bzw.  $x=-4$ . Für Lösungen der Gleichung (7) ist  $x=-4$  eine notwendige Bedingung. Da für  $x=-4$  die Gleichung (7) keinen Sinn hat, ist die für Lösungen von (7) notwendige Bedingung  $x=-4$  nicht hinreichend. Die Gleichung (7) hat im Reellen keine Lösungen.

Die Probe ist bei unseren Beispielen der Rückschluss und folglich mehr als nur eine Rechenkontrolle, als die sie oft angesehen wird. Beim Lösen der quadratischen Gleichung  $x^2+2ax+b=0$  durch die Formel  $x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-b}$  erledigt man den Rückschluss gleich beim Aufstellen der allgemeinen Lösungsformel, so dass dann die Probe tatsächlich nur noch eine Rechenkontrolle ist.

Die Annahme der Existenz von Lösungen einer Gleichung (oder anderer Probleme) kann die tatsächliche Existenz von Lösungen keinesfalls garantieren, sondern nur aus der Menge der Zahlen, für die die Gleichung erklärt ist, lösungsverdächtige Werte aussondern. Für das praktische Rechnen sind stets endlich viele lösungsverdächtige Werte erforderlich, die nacheinander überprüft werden können.

Beispiel 3: Gesucht sind die ganzzahligen Lösungen der Gleichung ( $p$  Primzahl)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

Wenn es überhaupt Lösungen der Gleichung (8) gibt, so sind sie von Null verschieden. Also erfüllen sie auch die Gleichung  $xy - px - py = 0$  bzw.  $(x-p)(y-p) - p^2 = 0$ , also

$$(x-p)(y-p) = p^2$$

Hieraus sehen wir, nur wenn  $x-p$  alle Teiler von  $p^2$  durchläuft, wobei  $y-p$  die komplementären Teiler von  $p^2$  durchläuft, können sich ganzzahlige Lösungen ergeben. Da  $p$  Primzahl sein soll, muss notwendigerweise

$$x-p = 1, p, p^2, -1, -p, -p^2$$

sein. Wegen  $x \neq 0$  entfällt  $x-p = -p$ . Es bleibt

$$x = 1+p, 2p, p+p^2, p-1, p-p^2$$

mit zugehörigem

$$y = p+p^2, 2p, 1+p, p-p^2, p-1$$

Diese Werte sind tatsächlich Lösungen (Probe!), also auch alle.

Wenn wir vom Gesuchten ausgehen, so sind alle Schlussfolgerungen nur notwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Behauptung. Diese notwendigen Bedingungen können mitunter brauchbare Hinweise für den Beweis geben. Dafür zwei Beispiele.

Beispiel 4: Zwei Gläser sind mit der gleichen Menge Wasser bzw. Wein gefüllt. Aus dem Weinglas wird ein Löffel Wein entnommen, in das Wasserglas gegossen und gleichmäßig verrührt.

Aus dieser Mischung wird mit dem Löffel die gleiche Menge des Wasser-Wein-Gemischs in das Weinglas zurückgegossen. Befindet sich im Weinglas mehr Wasser oder im Wasserglas mehr Wein?

Die Aufgabe ist so formuliert, dass sich - die Lösbarkeit angenommen - unabhängig von der Größe des Löffels die gleiche Lösung ergibt. Wenn das so ist, dann ist die Antwort die gleiche wie in dem Fall, wenn der Löffel beim ersten Mal den gesamten bzw. keinen Wein ins Wasser befördert. Der Anteil von Wasser im Wein bzw. Wein im Wasser ist dann in beiden Gläsern gleich.

Beispiel 5: Durch eine beliebige Kugel mit dem Radius  $R$  ist ein zylindrisches Loch der Länge  $2r$  so gebohrt worden, dass die Mittelachse des Zylinders genau durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie groß ist der Inhalt der restlichen Kugel?

Wenn dieses Problem eine Lösung hat, so ist sie gemäß Aufgabenstellung unabhängig vom Durchmesser der Bohrung, was unwahrscheinlich anmutet. Gesetzt, es ist aber so, dann ist das Resultat das gleiche für alle Durchmesser des Lochs, insbesondere auch für die Durchmesser, die gegen null gehen, und schließlich selbst in dem Fall, wenn der Durchmesser null ist.

Dann ist der Radius der Kugel gleich  $r$ , weil das "Loch" die Länge  $2r$  hat, womit das verbleibende Kugelvolumen gleich  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ist.

#### Übungen

4.7. Interpretieren Sie die Gleichungen (6) und (7) geometrisch, indem Sie die Lösungen als Schnitt der Graphen von Funktionen auffassen!

4.8. Welche reellen Zahlen lösen die Gleichung  $\sqrt{x+5} = |x| - 1$  ?

4.9. Neun Kugeln sind völlig gleich, lediglich eine von ihnen ist geringfügig schwerer als die anderen. Mit wieviel Wägungen kann diese Kugel auf jeden Fall mit Hilfe einer Balkenwaage gefunden werden?

4.10. Zeigen Sie, dass die in den Beispielen 4 und 5 angegebenen Bedingungen auch hinreichend für eine Lösung sind!

4.11. Geben Sie eine notwendige Bedingung für die Lage des Schatzes aus Übung 1.6 an!

### 4.3 Indirekte Beweise

.. damit ist es offenbar, dass der Mensch nicht zusammen akzeptieren kann, dass ein und dasselbe Ding existiert und nicht existiert, sonst würde der Mensch gleichzeitig zwei gegenteilige Meinungen haben.  
Aristoteles

Wir haben bereits bei direkten Beweisen erkannt, wie hilfreich es ist, auch von dem

Gesuchten, der Behauptung, auszugehen.

Der indirekte Beweis geht von der Annahme aus, dass die Behauptung  $B$  falsch sei, und folgert daraus, dass dann eine bereits als wahr erkannte Aussage  $A$  ebenfalls falsch sei (reductio ad absurdum; Zurückführung auf das Unsinnige). Es wird also ein direkter Beweis für die Implikation

$$\overline{B} \rightarrow \overline{A} \quad (\text{genauer } \overline{B} \rightarrow (A \text{ und } \overline{A})) \quad (9)$$

geführt. (9) ist die Kontraposition der Implikation

$$A \rightarrow B \quad (\text{genauer } (A \text{ oder } \overline{A}) \rightarrow \overline{B})$$

die auf die Behauptung  $B$  führt.

In der Praxis endet ein indirekter Beweis mit dem Hinweis "Widerspruch", wenn aus der vermeinten Behauptung eine offensichtlich falsche Aussage gewonnen wurde, ohne jedes Mal auf die Kontraposition zu verweisen. Die Negation der Behauptung wird auch Antithese genannt. Beweise, die mit einem Widerspruch enden, werden häufig als Widerspruchsbeweise bezeichnet.

Die Wirksamkeit der indirekten Beweise beruht wesentlich darauf, dass neben den gegebenen Voraussetzungen noch zusätzlich die Falschheit des Behaupteten als Voraussetzung aufgenommen wird, also von mehr Voraussetzungen ausgegangen werden kann. Beim indirekten Beweis wird gewissermaßen vom Gegebenen und Gesuchten (Voraussetzungen und Negation der Behauptung) her geschlossen, und die Aussichten, sich dabei in der Mitte zu treffen, sind oft vorteilhafter als ein direkter Beweis.

Beispiel 1: Die Summe

$$s = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 1000) \quad (10)$$

kann für keine natürliche Zahl  $n$  eine Primzahl sein.

Wir gehen von der Annahme aus, dass  $s$  eine Primzahl ist (Antithese).

Aus (10) folgt, dass  $s > 2$  ist. Weiter besteht  $s$  aus einer Summe von 1000 natürlichen Zahlen, unter denen sich 500 gerade und 500 ungerade Zahlen befinden. Also ist  $s$  selbst eine gerade Zahl, die zudem größer als 2 ist. Das widerspricht der bekannten Tatsache, dass 2 die einzige gerade Primzahl ist.

Wenn die Annahme,  $s$  sei Primzahl, gültig ist, können wir logisch korrekt zwei sich einander widersprechende Sachverhalte herleiten, was gegen den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch verstößt. Der Widerspruch kann nur so gelöst werden, dass wir die Annahme fallen lassen, also ihr Gegenteil behaupten, was zu beweisen war.

Beispiel 2: Beweise für alle reellen  $x$

$$\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$$

Wir gehen von der Annahme aus, dass es eine reelle Zahl  $x_0$  mit  $\sin x_0 + \cos x_0 = 3/2$  gibt. Quadrieren wir diese Gleichung, dann folgt

$$\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 + 2 \sin x_0 \cos x_0 = \frac{9}{4}$$

Nun ist  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  und  $2 \sin x_0 \cos x_0 = \sin 2x_0$  für alle Argumente. Also muss

$$\sin 2x_0 = \frac{5}{4}$$

sein. Das widerspricht jedoch wegen  $5/4 > 1$  der Tatsache  $|\sin x| \leq 1$  für alle  $x$ .

Beispiel 3: Wir zeigen, dass  $\log_2 3$  keine rationale Zahl ist, d.h., es gibt keine ganzen Zahlen  $p$  und  $q$  mit

$$\log_2 3 = \frac{p}{q} \tag{11}$$

Da nach Definition  $\log_2 3$  positiv ist, können wir uns sogar auf natürliche Zahlen  $p$  und  $q$  beschränken. Die Antithese  $\bar{A}$  lautet also: Es gibt natürliche Zahlen  $p$  und  $q$ , für die (11) bzw. gemäß der Erklärung des Logarithmus von 3 zur Basis 2

$$2^{\frac{p}{q}} = 3 \quad \text{oder} \quad 3^q = 2^p$$

( $p, q \geq 1$ , natürlich) gilt.

Weil 2 ein Teiler von  $2^p$  ist, muss 2 auch ein Teiler von  $3^q$ , also von 3 sein. Die Aussage  $\bar{S}$  2 teilt 3 ist offensichtlich falsch. Also ergibt die Kontraposition  $S \rightarrow A$  der Implikation  $\bar{A} \rightarrow \bar{S}$  zusammen mit der Gültigkeit von  $S$  die Gültigkeit der These.

Der indirekte Beweis geht von einer zusätzlichen Voraussetzung (Antithese) aus, die falsch ist. Darum können wir sie uns schlecht veranschaulichen, sondern haben nur über die Negation der wirklichen Behauptung, also über formales und abstraktes Denken, Verbindung zu ihr. Deshalb hinterlassen indirekte Beweise nach ihrer Ausführung oft ein Unbehagen, das durch A. Schopenhauer (1788-1860), dem die gesamte Mathematik noch gleichbedeutend mit der von Euklid aufgestellten war, wie folgt artikuliert wird:

"Dass, was Euklid demonstriert, alles so sei, muss man, durch den Satz vom Widerspruch gezwungen, zugeben: warum es aber so ist, erfährt man nicht. Man hat daher fast die unbehagliche Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der Tat sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise auffallend ähnlich.

Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hintertür herein, indem sie sich per accidens (lat. zufällig) aus irgendeinem Nebenumstand ergibt. Oft schließt ein apagogischer (griech. indirekter) Beweis alle Türen, eine nach der anderen zu, und lässt nur die eine offen, in die man nun bloß deswegen hinein muss.

Oft werden wie im Pythagoreischen Lehrsatz Linien gezogen, ohne dass man weiß warum: hinterher zeigt es sich, dass es Schlingen waren, die sich unerwartet zuziehen und den Assensus (lat. Zustimmung) des Lernenden gefangen nehmen, der nun verwundert zugeben muss, was ihm seinem inneren Zusammenhang nach völlig unbegreiflich bleibt."<sup>28</sup>

Da direkte Beweise häufig auch von Annahmen oder Voraussetzungen ausgehen, deren Sinn erst am Ende des Beweises, nämlich durch den erzielten Erfolg, für den Leser erkennbar wird (vgl. die Beispiele 4 und 5 aus 4.1.), ist diese Ansicht Schopenhauers vom Mausefallencharakter indirekter Beweise nicht völlig gerechtfertigt.

<sup>28</sup>"Die Welt als Wille und Vorstellung". 1. Buch, § 15.

Wir halten ihr deshalb eine Erläuterung Sherlock Holmes, der bekannten Detektivfigur A. C. Doyles (1859-1930), an seinen Mitarbeiter Dr. Watson entgegen:

"Wenn man alle anderen Möglichkeiten ausgeschlossen hat, muss das, was übrig bleibt, und wenn es noch so unwahrscheinlich ist, die Wahrheit sein."

Direkte Beweise sind gegenüber indirekten Beweisen stets konstruktiv. Deshalb Versuchen die Mathematiker in der Regel, indirekte Beweise durch direkte Beweise zu ersetzen. Derartige Tendenzen zeigen sich bereits in den "Elementen" Euklids. Indirekte Beweise werden häufig geführt, wenn die Existenz oder Eindeutigkeit von Dingen gezeigt werden soll (vgl. Abschn. 5.), aber auch bei der Umkehrung von Aussagen.

### 4.3.1 Reductio ad absurdum

Eine besondere Form des indirekten Beweises wollen wir vorführen. Diese reductio ad absurdum basiert auf der Schlussregel:

Wenn aus der Negation der Behauptung die Behauptung gefolgert werden kann, dann ist die Behauptung gültig, symbolisch

$$(\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{ex contrario})$$

wobei  $A$  für die Behauptung steht. (Als Gegenstück kann die Regel in contrarium angesehen werden:  $(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}$ ).

In unserem Fall soll  $A$  die Behauptung "Die Menge der reellen Zahlen lässt sich nicht abzählen" sein.

Mit "abzählbar" ist folgendes gemeint. Wenn wir eine endliche Menge von Dingen abzählen, so wählen wir ein erstes Ding aus und ordnen ihm die 1 zu, einem zweiten Ding wird die 2 zugeordnet usw. bis alle Dinge erfasst worden sind. Dieses Abzählen lässt sich auch auf unendliche Mengen ausdehnen, wenn gesichert ist, dass jedes Element der unendlichen Menge beim Zählen berücksichtigt wird. Dass sich die ganzen Zahlen  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  abzählen lassen, sieht man aus der Anordnung

$$0, -1, +1, -2, +2, \dots$$

sofort. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen lässt sich ebenfalls, wenn auch etwas komplizierter, zeigen. Unsere Behauptung lehrt, dass nicht jede Menge abzählbar ist.

Wir beschränken uns beim Beweis auf die reellen Zahlen, die im Intervall  $(0, 1)$  liegen. Diese Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen, und falls diese Teilmenge nicht abzählbar ist, so ist es die gesamte Menge erst recht nicht. Jede reelle Zahl  $z$  aus diesem Intervall lässt sich als unendlicher Dezimalbruch in der Form

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

schreiben, wobei die  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) irgendwelche der Ziffern 0 bis 9 sind, z.B.  $z = 1/7$  ist in Dezimalschreibweise  $0,1428571428\dots$  mit  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 2$  usw.

Wir können bei unserem Beweis davon absehen, dass die dezimale Schreibweise in Bezug auf die Neunerperiode nicht eindeutig ist (z.B. ist  $0,09999999\dots = 0,1$ ), wenn wir einfach keine Zahlen mit Neunerperioden schreiben.

Wir beginnen jetzt den eigentlichen Beweis und nehmen das Gegenteil der Behauptung an. Wir machen folglich die Annahme, dass sich die reellen Zahlen des Intervalls  $(0,1)$  als Folge

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots \\ z_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots \\ z_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

anordnen lassen. Die Folge  $z_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) enthält gemäß Annahme alle reellen Zahlen aus  $(0,1)$ . Wir konstruieren wie folgt eine reelle Zahl  $z$  aus den Zahlen der Folge.

Die Ziffer vor dem Komma ist 0, ihre erste Stelle nach dem Komma ist 1, wenn  $a_1^{(1)} \neq 1$  ist, und 2, wenn  $a_1^{(1)} = 1$  ist. Die zweite Stelle nach dem Komma ist 1, wenn  $a_2^{(2)} \neq 1$  ist, und 2, wenn  $a_2^{(2)} = 1$  ist usw., die  $n$ -te Stelle nach dem Komma ist 1, wenn  $a_n^{(n)} \neq 1$  ist, und 2, wenn  $a_n^{(n)} = 1$  ist.

Offenbar liegt  $z$  im Intervall  $(0,1)$ . Weiter ist  $z$  so konstruiert, dass sich  $z$  von jeder Zahl  $z_n$  der Folge zumindest an der  $n$ -ten Stelle nach dem Komma unterscheidet. Also kann  $z$  nicht in der Folge  $z_n$  vorkommen, obwohl  $z$  dem Intervall  $(0,1)$  angehört.

Das stellt einen Widerspruch zur Annahme dar, die Folge  $z_n$  enthält alle Zahlen, bzw. die reellen Zahlen im Intervall  $(0,1)$  sind abzählbar. Dieser Widerspruch ist prinzipieller Natur und kann nicht dadurch beseitigt werden, dass wir eine abgeänderte Folge betrachten, deren erstes Element  $z$  ist, weil sich auf die gleiche Weise wiederum eine Zahl aus  $(0,1)$  ergeben würde, die nicht zur Folge gehörte.

Die Annahme, eine solche Folge existiere bzw. die Menge der reellen Zahlen aus  $(0,1)$  und erst recht die Menge aller reellen Zahlen sei abzählbar, ist in sich widerspruchsvoll und kann nicht aufrechterhalten werden.

### 4.3.2 Indirekte Beweise für Implikationen

Viele mathematische Aussagen werden in der Form einer Implikation  $A \rightarrow B$  formuliert. Dann kann der Beweis für die Gültigkeit der Implikation auch über die Kontraposition  $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$  der Implikation geführt werden (vgl. 2.4.). Auch diese Art des Beweisens wird indirekt genannt.

Beispiel 1 : Für alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt: Wenn  $\frac{a-b}{a+b}$  unkürzbar ist, dann ist auch  $\frac{a}{b}$  unkürzbar.

Die Kontraposition dieser Implikation lautet: Für alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt, dass, wenn  $\frac{a}{b}$  gekürzt werden kann, dann auch  $\frac{a-b}{a+b}$  gekürzt werden kann.

Hierfür lässt sich ein direkter Beweis angeben. Wenn  $a$  und  $b$  einen gemeinsamen Teiler  $m$  haben, so ist mit gewissen natürlichen Zahlen  $r$  und  $s$   $a = rm$  und  $b = sm$ . Damit erhalten wir  $a - b = (r - s)m$  und  $a + b = (r + s)m$ , also hat auch der Bruch  $\frac{a-b}{a+b}$  den Teiler  $m$ .

Im obigen Beispiel wurde die Kontraposition der Implikation direkt bewiesen. Es ist natürlich auch möglich, für die Gültigkeit einer Implikation  $A \rightarrow B$  oder ihrer Kontraposition  $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$  zu versuchen, einen Widerspruchsbeweis zu führen.

Die Implikation  $A \rightarrow B$  wird logisch äquivalent durch '(nicht  $A$ ) oder  $B$ ' ausgedrückt. Mit dieser Form lässt sich (nach den Gesetzen von de Morgan, vgl. 2.4.) die Negation 'nicht ( $A \rightarrow B$ )' durch ' $A$  und (nicht  $B$ )' angeben.

Wir haben folglich von der Annahme (Antithese) ' $A$  und  $\overline{B}$ ' auszugehen und zu versuchen, einen Widerspruch zu erzielen. Dabei gibt es drei Möglichkeiten:

- a) Es ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung  $A$ . (Widerspruch zur Antithese)
- b) Es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme nicht  $B$ . (Widerspruch zur Antithese)
- c) Es lassen sich zwei widersprechende Aussagen  $S$  und  $\overline{S}$  herleiten.

Wir nehmen im weiteren an, dass die Voraussetzung  $A$  der Implikation  $A \rightarrow B$  widerspruchsfrei ist. Der Schluss auf die Gültigkeit der Implikation  $A \rightarrow B$  ergibt sich im ersten Fall aus der Gültigkeit der Voraussetzung, im zweiten und dritten Fall durch den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch.

Im folgenden geben wir Beispiele für diese Fälle an.

- a) Für alle reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt: Wenn  $x^2 > y^2 > 0$  ist, so ist auch

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \frac{y^2}{1+y^2}$$

Für die reellen Zahlen  $x$  und  $y$  sei  $x^2 > y^2 > 0$  gültig. Die Antithese lautet: Es gibt reelle Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $x^2 > y^2 > 0$  und  $\frac{x^2}{1+x^2} \leq \frac{y^2}{1+y^2}$ . Hieraus folgt durch Umformen

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}$$

und da die Nenner positiv sind, gilt

$$1 + \frac{1}{y^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Also wieder infolge der positiven Nenner  $x^2 \leq y^2$ . Wir hatten jedoch vorausgesetzt, dass für die reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt  $x^2 > y^2 > 0$ , was mit unserer Schlussfolge unvereinbar ist.

- b) Für alle natürlichen Zahlen  $a, b, c$  gilt: Wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  ist, dann teilt 5 das Produkt  $abc$ .

Wir zeigen zunächst einen Hilfssatz. Wird das Quadrat einer natürlichen Zahl durch 5 geteilt, so können sich nur die Reste 0, 1 und 4 ergeben.

Jede natürliche Zahl  $z$  lässt sich mit einer gewissen natürlichen Zahl  $m$  in der Form  $z = 5m + n$  darstellen, wobei  $n = 0, 1, 2, 3$  oder  $4$  ist. Damit ist

$$z^2 = (5m + n)^2 = 25m^2 + 2 \cdot 5mn + n^2 = 5(5m^2 + 2mn) + n^2$$

also ist der Rest, der beim Teilen durch 5 bleibt, gleich dem Rest, den  $n^2$  beim Teilen durch 5 lässt. Für  $n^2$  kommen nur die Werte  $0, 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9$  und  $4^2 = 16$  in Frage, mithin gibt es nur die Reste  $0, 1$  oder  $4$ .

Die Antithese lautet, dass unter den genannten Voraussetzungen Zahlen  $a, b$  und  $c$  existieren, so dass 5 nicht das Produkt  $abc$  teilt.

Für  $c^2$  sind nach dem obigen nur die Reste  $0, 1$  oder  $4$  möglich. Der Rest  $0$  bedeutet, dass  $c^2$  bzw.  $c$  durch 5 teilbar ist, also auch  $abc$ .

Hat  $c^2$  den Rest  $1$  bzw.  $4$ , so muss wegen  $c^2 = a^2 + b^2$  auch  $a^2 + b^2$  den Rest  $1$  bzw.  $4$  haben. Mit den drei möglichen Werten  $0, 1$  oder  $4$  für die Reste lässt sich jedoch der Rest  $1$  bzw.  $4$  als Summe von zwei Resten nur so darstellen, dass jeweils einer der Reste von  $a^2$  oder  $b^2$  gleich  $0$  ist, also damit  $a^2$  oder  $b^2$  bzw.  $a$  oder  $b$  durch 5 teilbar ist, mithin auch das Produkt  $abc$ .

Das widerspricht der getroffenen Annahme. Damit teilt 5 das Produkt  $abc$ .

c) Wir betrachten eine Landkarte von Europa, auf der je zwei der eingezeichneten Städte verschiedene Entfernungen haben sollen. Wir behaupten dann: Wenn jede Stadt mit der ihr nächstgelegenen verbunden wird, dann besitzt keine Stadt mehr als fünf Verbindungsstrecken zu anderen Städten.

Zunächst ist klar, dass es durch die vorausgesetzte Verschiedenheit der Entfernungen der Städte zu jeder Stadt stets genau eine nächstgelegene Stadt gibt. Die Antithese lautet, dass es unter den gemachten Voraussetzungen wenigstens eine Stadt gibt, die mit mehr als fünf Städten verbunden ist.

Wenn diese Stadt mit  $A$  bezeichnet wird, so gibt es also weitere Städte  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $n > 5$ ), mit denen  $A$  verbunden ist. Dabei ist, wenn  $P$  und  $Q$  zwei beliebige Städte aus den Städten  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sind,

$$\overline{AP} < \overline{PQ}$$

weil sonst  $Q$  und  $P$  als nächstgelegene Städte verbunden sein müssten. Entsprechend ist

$$\overline{AQ} < \overline{PQ}$$

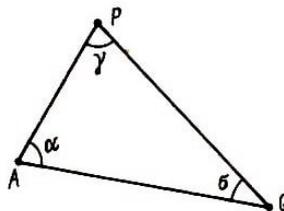


Abb. 4.2.

Betrachten wir das Dreieck  $APQ$  (vgl. Abb. 4.2), so folgt mit den Bezeichnungen der Abbildung, weil größeren Seiten auch größere Winkel gegenüber liegen,

$$\alpha > \gamma \quad , \quad \alpha > \sigma$$

Hiermit ergibt sich, da die Winkelsumme im Dreieck  $APQ$   $180^\circ$  beträgt,

$$180^\circ = \alpha + \gamma + \sigma < \alpha + \alpha + \alpha < 3\alpha$$

bzw.  $\alpha > 60^\circ$ . Damit ist, weil  $P$  und  $Q$  beliebig waren, jeder Winkel, den zwei Verbindungsstrecken  $\overline{AP}$  und  $\overline{AQ}$  im Punkt  $A$  einschließen, größer als  $60^\circ$ .

Es gibt  $n$  Verbindungsstrecken zur Stadt  $A$ , wobei nach Voraussetzung  $n \geq 6$  sein soll. Damit bilden alle Verbindungsstrecken einen Winkel um  $A$  von wenigstens

$$n \cdot \alpha > 6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$$

Dem steht die Tatsache gegenüber, dass der Vollwinkel  $360^\circ$  beträgt. Also ist die Annahme  $n \geq 6$  falsch.

#### Übungen

4.12. Die Gleichung  $x^3 - x - 5 = 0$  hat im Intervall  $[3/2, 2]$  keine rationale Lösung.

4.13. Beweisen Sie den Satz: Wenn  $\frac{a}{b}$  unkürzbar ist, so auch  $(a, b$  natürliche Zahlen)

$$\frac{a-b}{a+b}$$

4.14. Wenn  $n$  keine Quadratzahl ist, so ist  $\sqrt{n}$  keine rationale Zahl.

4.15. Sind in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende (d.h. die Strecke auf ihnen von der Ecke bis zur Gegenseite) gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

(Hinweis: Wenn die Winkel bei  $B$  und  $C$  nicht gleich sind, so sei  $\angle B < \angle C$ . Die gleichen Winkelhalbierenden werden mit  $\overline{BM}$  und  $\overline{CN}$  bezeichnet, und  $P$  sei der Punkt auf  $\overline{AN}$ , für den  $\angle PCN = \frac{1}{2}\angle B$ ;  $Q$  sei der Punkt auf  $\overline{PN}$ , so dass  $\overline{BQ} = \overline{CP}$ . Man vergleiche in den kongruenten Dreiecken  $BMQ$  und  $CNP$  die Winkel bei  $P$  und  $Q$ .)

## 4.4 Fallunterscheidungen

Quantifizierte Aussagenfunktionen (die Aussagen sind) können, sofern der zugehörige Individuenbereich endlich ist, durch Nachprüfen der endlich vielen Variablenbelegungen als richtig nachgewiesen werden.

Es wird ein Fall nach dem anderen untersucht, bis alle Fälle erledigt sind, z.B. wenn gezeigt wird, dass 11 eine Primzahl ist, also 2, 3, 5 und 7 keine Teiler von 11 sind.

Einen solchen Beweis nennt man Verifikation.

Wenn alle Möglichkeiten auf verschiedene Gruppen aufgeteilt werden und der Beweis für jede dieser Gruppen geführt wird, spricht man von einer Fallunterscheidung. Allerdings gibt es bereits bei relativ "einfachen" Problemen erhebliche Schwierigkeiten.

Als Beispiele führen wir das Schachspiel, die Frage, ob  $2^{2^{17}} + 1$  eine Primzahl ist, oder das Rundreiseproblem an, die alle durch endlich viele Fallunterscheidungen bestimmt sind, wobei jeder einzelne Fall keine besonderen Schwierigkeiten bereitet.

Beim Rundreiseproblem besucht ein Reisender von einem Ort aus  $n - 1$  Städte und

anschließend kehrt er an den Ausgangsort zurück, wobei der Reiseweg möglichst klein sein soll. Für die insgesamt  $n$  Städte gibt es  $(n-1)!/2$  Rundreisemöglichkeiten. Die Zahl der Rundreisemöglichkeiten wächst mit der Zahl der Städte enorm an.

Nehmen wir an, dass ein Rechenautomat in  $2n \cdot 10^{-6}$  s eine Rundreise aus den möglichen auswählt und ihre Länge mit der von ihm bisher gefundenen kürzesten Länge vergleicht, dann braucht er für 10 Städte etwa 2 s, für 12 Städte etwa 4 min, für 14 Städte etwa 12 h, für 16 Städte etwa 1/3 Jahr und für 17 bzw. 18 Städte bereits  $5\frac{1}{2}$  bzw. 101 Jahre, um das Problem abzuarbeiten.<sup>29</sup>

Wenn unendlich viele Individuenbelegungen einer Aussagenfunktion möglich sind, dann kann durch Zusammenfassen aller Möglichkeiten in endlich viele Gruppen ein Beweis durch Fallunterscheidung versucht werden.

So hatten wir im Beispiel auf alle Zahlen zusammengefasst, die beim Teilen durch 5 den gleichen Rest hatten. Bei einem Beweis durch Fallunterscheidung können die einzelnen Fälle sowohl direkt als auch indirekt bewiesen werden, wobei einzelne Fälle noch weiter in Unterfälle aufgegliedert werden können usw. Wesentlich ist, dass die Fallunterscheidung vollständig ist (vollständige Disjunktion), also alle möglichen Fälle erfasst werden.

Beispiel 1: Welche natürlichen Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  erfüllen die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (12)$$

Infolge der Symmetrie der Gleichung (12) können wir uns auf Lösungen  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $a \geq b \geq c$  beschränken. Wir unterscheiden zunächst die Fälle:

1. Alle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind größer als 3.
2. Es gibt wenigstens eine Zahl, die kleiner als 4 ist.

1. Fall: Wir haben  $a \geq b \geq c \geq 4$ , also  $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ . Folglich ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3\frac{1}{4} < 1$$

Wenn wir annehmen, dass die Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Gleichung (12) erfüllen, so erhalten wir einen Widerspruch.

2. Fall: Da es wenigstens eine Zahl gibt, die kleiner als 4 ist, können wir wegen der getroffenen Einschränkung  $c < 4$  annehmen. Es gibt damit drei weitere Fälle, die für die Werte von  $c$  möglich sind:

a)  $c = 1$ . Angenommen, es gibt für  $c = 1$  natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , die (12) erfüllen. Dann ist  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$  bzw.  $a = -b$ . Damit ist notwendigerweise eine der Zahlen  $a$  oder  $b$  keine natürliche Zahl, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

b)  $c = 2$ . Wir haben für (12) jetzt  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ . Angenommen, es gibt Lösungen  $a$  und  $b$

---

<sup>29</sup>Um ein Programm zur Ermittlung der minimalen Rundreise abzuarbeiten, benötigte die Zentraleinheit einer modernen Rechenanlage tatsächlich für 7 bzw. 9 bzw. 10 Städte 8 s bzw. 1 min 4 s bzw. 11 min.

dieser Gleichung mit  $a \geq b > 4$  bzw.  $\frac{1}{4} > \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ . Dann ist  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Also muss  $b \leq 4$  sein, infolge der Einschränkung für die Lösung folgt  $2 \leq b \leq 4$ .

Eine kurze Rechnung zeigt, dass für  $c = 2$  die Zahlen  $b = 3$  und  $b = 4$  sowie  $a = 6$  und  $a = 4$  der Gleichung (12) genügen.

c)  $c = 3$ . Dieser Fall führt auf  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$ . Mögliche Lösungen  $a$  und  $b$  dieser Gleichung mit  $a \geq b > 3$  bzw.  $\frac{1}{3} > \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$  entfallen wegen  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{3}$ .

Damit ist  $b \leq 3$  und wegen der Nebenbedingung an die Lösungstripel sogar  $b = 3$  notwendig. Als Lösung ergeben sich für  $c = 3$  die Werte  $a = 3, b = 3$ .

Die Lösungstripel  $(a, b, c)$ , die der zusätzlichen Nebenbedingung  $a \geq b \geq c$  genügen, sind also  $(6, 3, 2)$ ,  $(4, 4, 2)$  und  $(3, 3, 3)$ .

Beispiel 2. Es sind  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gegebene reelle Zahlen mit  $\alpha > \beta > \gamma$ . Für welche reellen Zahlen  $x$  ist

$$D(x) = \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{x - \gamma} > 0$$

Für  $x = \gamma$  ist der Bruch nicht definiert. Damit  $D(x)$  positiv ist, müssen die Vorzeichen der Ausdrücke  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$  und  $x - \gamma$  entweder alle positiv sein oder zwei von ihnen sind negativ, während das dritte positiv ist.

1. Fall:  $x > \alpha$ . Aus  $x > \alpha$  folgt auch  $x \geq \beta \geq \gamma$  bzw.  $D(x) > 0$ .
2. Fall:  $x = \alpha$ . Es ist  $D(x) = 0$ .
3. Fall:  $\alpha > x > \beta$ . Das führt auf  $x - \alpha < 0$  und  $x - \gamma > x - \beta > 0$ , also gilt  $D(x) < 0$ .
4. Fall:  $x = \beta$ . Es ist  $D(x) = 0$ .
5. Fall:  $\beta > x > \gamma$ . Jetzt ist  $x - \alpha < x - \beta < 0$  und  $x - \gamma > 0$ , also  $D(x) > 0$ .
6. Fall:  $x = \gamma$ .  $D(x)$  ist nicht erklärt.
7. Fall:  $x < \gamma$ . Weil jetzt alle drei Ausdrücke negativ sind, ist  $D(x) < 0$ .

Die Abbildung 4.3 fasst die Lösungen übersichtlich zusammen.

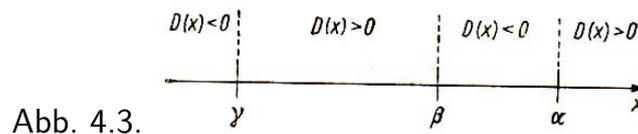


Abb. 4.3.

## Übungen

4.16. Orthopolis ist eine Stadt, in der sich je fünf Straßen waagrecht und senkrecht in gleichen Abständen orthogonal treffen (vgl. Abb. 4.4).

Auf wie viele Möglichkeiten kann auf kürzesten Wegen von einer Ecke zur anderen gegenüberliegenden gefahren werden?

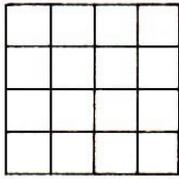


Abb. 4.4.

4.17. Auf wie viele Arten kann ein Schachbrett mit  $4 \times 4$  Feldern halbiert (geviertelt) werden, wobei die Felder selbst nicht zerteilt werden und kongruente Figuren entstehen (vgl. Abb. 4.4)?

4.18. Auf den Ecken eines Schachbretts mit  $3 \times 3$  Feldern stehen Springer. Dabei sollen jeweils zwei weiße und zwei schwarze Springer in einer Reihe stehen. Die schwarzen und weißen Springer, die wie im Schach ziehen, sollen ihre Plätze tauschen!

4.19. Ein bekannter Kindervers befasst sich mit dem Haus vom Nikolaus, das in Abb. 4.5 gezeichnet ist.

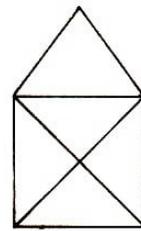


Abb. 4.5.

Es ist in einem Zug und ohne Wiederholung von bereits gezeichneten Strichen zu zeichnen. Beginnen Sie an einer Ecke und untersuchen Sie die dazu gehörigen möglichen Fälle des Weiterzeichnens!

## 4.5 Gegenbeispiele

Eine Allaussage oder eine Eindeutigkeitsbehauptung kann bereits durch ein einziges Beispiel, ein sogenanntes Gegenbeispiel, widerlegt werden. Davon wird in der Mathematik häufig Gebrauch gemacht: sowohl beim logisch-deduktiven Schließen als auch beim Aufstellen von Vermutungen.

"Der Kern der Mathematik besteht aus konkreten Beispielen und konkreten Problemen", sagt P. R. Halmos und fährt fort: "Die Moral ist, dass es das beste ist, Ihre Arbeit um die zentralen entscheidenden Beispiele und Gegenbeispiele herum zu gliedern".

Es gibt eine Reihe berühmter Vermutungen, für die bis heute kein Beweis, aber auch keine Widerlegung durch ein Gegenbeispiel gelang, wie z.B. die erwähnte Goldbachsche Vermutung oder die Behauptung Fermats, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für  $n > 2$  nicht in natürlichen Zahlen lösbar ist. Gegenbeispiele sind also nicht immer einfach zu finden.

Eine Vermutung des französischen Mathematikers A. Legendre (1752-1833) war, dass es keine natürlichen Zahlen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  und  $s$  mit der Eigenschaft

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{r}{s}\right)^3 = 6$$

gabe. Ein englischer Amateur-Mathematiker und Urheber zahlreicher mathematischer Knocheleien, H. Dudeney (1857-1931), fand jedoch

$$\left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3 = 6$$

P. Fermat (1601-1655) vermutete, dass die Zahlen

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(die bei der Konstruktion regelmäßiger  $k$ -Ecke mit Zirkel und Lineal eine, wie C. F. Gauß (1777-1855) zeigte, wichtige Rolle spielen) alle prim seien. Das trifft für  $F_1$  bis  $F_4$  zu, aber L. Euler (1707-1783) gab als Gegenbeispiel die Zerlegung von  $F_5$  an:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Heute sind weitere Gegenbeispiele bekannt, bis  $F_{13}$  liegen keine Primzahlen vor. Ein Teiler von  $F_{13}$  wurde 1960 nach sechsstündigem Rechnen auf einer elektronischen Rechenanlage gefunden.  $F_{36}$  ist bereits so groß, dass sich ein Papierstreifen, auf den die Zahl in üblicher Größe geschrieben wird, um die Erde wickeln lassen würde.  $F_{73}$  hat mehr Ziffern, als alle zur Zeit existierenden Bibliotheksbände Buchstaben enthalten (wenn pausenlos 2 Ziffern in 1 Sekunde geschrieben werden, so verlangt  $F_{73}$  200 Billionen Jahre Schreibzeit). Erstaunlicherweise ist jedoch bekannt, dass  $F_{1945}$  den Teiler  $5 \cdot 2^{1947} + 1$  hat.

Auch eine Vermutung von Euler wurde nach 200jähriger Wartezeit widerlegt. Euler hatte sich mit dem Problem befasst, für 36 Offiziere aus 6 Regimentern mit 6 verschiedenen Dienstgraden (jedes Regiment ist durch genau einen Dienstgrad einmal vertreten) eine quadratische Aufstellung zu finden, so dass Offiziere aus gleichen Regimentern oder mit gleichem Dienstgrad weder in derselben horizontalen noch vertikalen Reihe vorkommen. Für das entsprechende Problem mit 9 Offizieren zeigt Abb. 4.6 eine Lösung (wobei die erste Zahl etwa das Regiment und die zweite den Dienstgrad bezeichnen möge):

Abb. 4.6	11	22	33
	13	31	12
	32	13	21

Für 16 Offiziere ist das Problem auch als eine lösbare Aufgabe über die Anordnung von Spielkarten bekannt. Neben diesen spielerischen Anwendungen besitzt das Problem in der Planung von Versuchen großes Interesse, wenn z.B. der Einfluss von verschiedenen Düngern auf Weizensorten getestet und dabei die schwankende Bodenbeschaffenheit eliminiert werden soll.

Euler vermutete, dass für  $n^2$  Offiziere mit  $n = 4k + 2$  keine Lösung möglich sei. Der Fall  $k = 1$  wurde durch den französischen Mathematiker G. Tarry in harter Kleinarbeit erledigt: er wies durch systematisches Ausprobieren die Unmöglichkeit nach.

Drei Mathematiker, E. T. Parker, R. C. Bose und S. S. Shrinkhande, fanden jedoch 1959 für  $k = 5$  eine Lösung. Später konnten sie sogar zeigen, dass für alle  $k > 1$  Eulers

Vermutung falsch ist.

Ein Beispiel aus der Wissenschaftsgeschichte. G. W. F. Hegel (1770-1831) hatte sich 1801 mit einer Arbeit über die Bahn der Planeten habilitiert und behauptete, dass es nicht mehr als die seinerzeit bekannten sieben Planeten geben könne. 1846 fand man den 8. Planeten Neptun, 1930 den 9. Planeten Pluto.

Der Beweis von G. Cantor (1845-1918) für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen (4.3.1.) oder der Beweis Euklids für die Existenz von unendlich vielen Primzahlen (5.1.) benutzen an entscheidender Stelle ein Gegenbeispiel, indem sie eine nicht erfasste Zahl bzw. eine weitere Primzahl vorweisen. Die lange als wahr angesehene Behauptung, dass jede stetige Funktion auch differenzierbar wäre, wurde ebenfalls durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

Archimedes (287?-212 v.u.Z.) entwickelte die Methode, die Kreisfläche durch Berechnung von ein- und umbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecken, die mit genügend großem  $n$  dem Kreisumfang punktweise beliebig nahekommen, näherungsweise zu berechnen (Exhaustionsmethode).

Dass derartige Schlussverfahren kritisch gehandhabt werden müssen, zeigt folgendes Gegenbeispiel. Die Diagonalen im Einheitsquadrat haben die Länge  $\sqrt{2}$ .

Ein näherungsweise Treppenzug mit gleichhohen Stufen (vgl. Abb. 4.7) hat aber stets die Länge 2, wie oft wir auch die Stufenzahl verdoppeln mögen und obwohl jeder Treppenzug der Diagonalen ebenfalls beliebig nahe kommt.

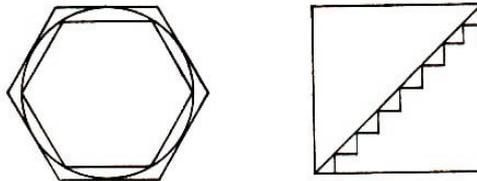


Abb. 4.7.

Neben den genannten komplizierten und wichtigen Gegenbeispielen benutzen Mathematiker ständig einfache Beispiele und Gegenbeispiele, um Vermutungen zu erhärten oder zu widerlegen.

Von D. Hilbert ist überliefert, dass er zu sagen pflegte: "Immer mit den ganz einfachen Beispielen anfangen". Ein Beispiel:

Die Zahlen  $n = 1, 3$  zeigen: sowohl  $2^n > n^3$  als auch  $2^n < n^3$  ist möglich.

Erst nachdem ein Mathematiker einen unbekanntem Sachverhalt auf diese Weise mit Beispielen und Gegenbeispielen untersucht hat, beginnt er die gemachten Erfahrungen so zu verallgemeinern, dass sie logisch unanfechtbar sind, womit er einen Beweis führt.

### Übungen

4.20. Zeigen Sie, dass ein Wurzelgesetz verletzt ist, wenn man definiert:

Für  $a \geq 0$  ist  $\sqrt[n]{a}$  für ungerades  $n$  die Zahl  $x$  und für gerades  $n$  die Zahl  $x \leq 0$ , für die gilt  $x^n = a$ .

4.21. Die Projektion der Seite  $a$  auf die Seite  $c$  eines Dreiecks sei  $p$ . Gilt dann  $a^2 = pc$ ?

4.22. Können Sie ein Gegenbeispiel für den Satz angeben, dass jede quadratische Gleichung

chung höchstens zwei verschiedene Lösungen habe?

4.23. Die Bewohner des Imperium logicum lügen entweder stets oder sagen stets die Wahrheit. Drei Bewohner treffen sich. Der erste murmelt unverständlich. Der zweite sagt: "Der erste behauptete, er sei kein Lügner. Das stimmt, und ich bin auch kein Lügner!" Der dritte entgegnete: "Ich bin kein Lügner, aber die beiden anderen!" Wer ist nun was?

4.24. Es sei

$$P(x) = ax^2 + bx + p$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten  $a$  und  $b$ , die nicht gleichzeitig verschwinden, und  $p$  sei eine Primzahl. Zeigen Sie, dass für keine Wahl der Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $p$  das Polynom  $P(x)$  auf der Menge der natürlichen Zahlen nur Primzahlen liefern kann!

## 5 Einige typische mathematische Beweise

Mathematische Sätze sind aus logischer Sicht Aussagen oder quantifizierte Aussagenfunktionen. Wir wissen, dass über dem zugehörigen Individuenbereich Aussagenfunktionen erfüllbar oder nicht erfüllbar sind.

Mathematische Beweise, die die Erfüllbarkeit oder Nichterfüllbarkeit von Aussagenfunktionen bzw. das Bestehen oder Nichtbestehen von Aussagen aufzeigen, werden Existenz- oder Unmöglichkeitbeweise genannt. Sie finden sich genau wie Untersuchungen der durch für alle oder es gibt genau eine quantifizierten Aussagefunktionen in allen mathematischen Zweigen. Andere Quantifizierungen von Aussagenfunktionen wie für fast alle treten nur in bestimmten Disziplinen auf (z. B. in der Theorie der unendlichen Folgen und Reihen).

### 5.1 Existenzbeweise

Ein Problem einer gewissen Disziplin (Geometrie, Arithmetik usw.) gelöst zu haben, bedeutet, dass die Lösung mit Hilfe korrekter Schlussregeln aus den Axiomen dieser Disziplin abgeleitet wurde. Die Lösung ist in dem zugehörigen Axiomensystem logisch möglich, sie führt in diesem Axiomensystem auf keinen Widerspruch. Der Mathematiker sagt hierfür, es gibt oder es existiert eine Lösung.

Es lässt sich zeigen, dass die Gleichung  $x^2 - 4 = 0$  eine Lösung  $x = 2$  in der zum Peanoschen Axiomensystem gehörigen Theorie hat. Hingegen ist die Gleichung  $x^2 - 2 = 0$  in diesem Axiomensystem nicht mehr lösbar, sondern für die Lösbarkeit wird ein Axiomensystem für reelle Zahlen benötigt.

Der Beweis für die Lösbarkeit eines Problems kann direkt oder indirekt geführt werden. Bei einem direkten Beweis wird die Lösung konstruiert. Im Beispiel 5 aus 4.1. wird direkt gezeigt, welche der Zahlen  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$  und  $\frac{468}{113}$  die größere ist. Ein indirekter Beweis sichert zwar die logische Möglichkeit einer Lösung, gibt jedoch in der Regel keine Hinweise, wie diese Lösung zu finden (d.h. zu konstruieren) ist. Beweise dieser Art werden reine Existenzbeweise genannt.

Beispiel 1: Einer der ältesten Existenzbeweise findet sich bei Euklid, wo gezeigt wird, dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht. Zunächst ist ja nicht klar, ob die für große natürliche Zahlen immer selteneren Primzahlen nicht ganz und gar versiegen. Der Beweis wird von Euklid indirekt geführt.

Er beginnt also mit der Antithese "Es gibt nur endlich viele Primzahlen".

Diese endlich vielen Primzahlen bezeichnen wir mit  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Unter ihnen sind auf jeden Fall die Primzahlen 2, 3 und 5, d.h., es ist  $r \geq 3$ . Wir betrachten nun die Zahl  $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$ , für die  $p > p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) gilt.

Damit kann  $p$  keine Primzahl sein. Andererseits teilt kein  $p_i$ , für  $i = 1, 2, \dots, r$  die Zahl  $p$ , was auf einen Widerspruch führt. Der Beweis zeigt übrigens nicht, dass  $p$  die nächstgrößere Primzahl nach  $p_r$  ist. Er liefert kein Verfahren, systematisch alle Primzahlen zu berechnen.

Beispiel 2: Ein ordentliches Dominospiel besteht aus einem Satz von Steinen, die auf ihren zwei Feldern alle möglichen Anordnungen von null bis sechs Augen aufweisen. Gespielt wird so, dass an jedes Feld eines Steines ein anderes Feld angelegt wird, das die gleiche Augenzahl enthält. Es ist zu zeigen, wie auch das Spiel begonnen wurde, immer besteht die Möglichkeit, den letzten Stein an den ersten Stein wieder anzulegen.

Da alle Kombinationen der Augenzahlen von 0 bis 6 auftreten, also jede Augenzahl mit jeder genau einmal auf einem Stein erscheint, gibt es für jede Augenzahl 7 Kombinationen mit anderen Augenzahlen. Weil es unter diesen Kombinationen genau eine gibt, in der die Augenzahl mit sich selbst erscheint, ist jede Augenzahl achtfach vorhanden. Wir nehmen an, dass das Spiel mit Anlegen an die Augenzahl  $n$  ( $0 \leq n \leq 6$ ) begonnen hat. Damit ist die Augenzahl  $m$ , die am zuerst gelegten Stein frei geblieben ist ( $0 \leq m \leq 6$ ), nur noch siebenfach vorhanden. Wenn im weiteren die siebenfach vorhandene Augenzahl  $m$  durch Anlegen vermindert wird, so wird dazu stets zweimal die Augenzahl  $m$  benötigt. Am Ende des Spiels bleibt damit zwangsläufig ein Feld mit der Augenzahl  $m$  übrig, das entsprechend den Regeln wieder an das erste Feld gelegt werden darf.

### 5.1.1 Das Schubkastenprinzip

Es gibt in Berlin wenigstens zwei Einwohner mit der gleichen Anzahl von Kopfhhaaren. Um das einzusehen, erinnern wir daran, dass die Zahl der Kopfhhaare eines jeden Menschen kleiner als 200000 ist und andererseits Berlin mehr als 200000 Einwohner hat. Unsere Überlegung zeigt weder, welche Einwohner die gleiche Zahl von Haaren am Kopf haben, noch wie viele es sind.

Wir haben eben ein einfaches Prinzip benutzt, das anschaulich folgendermaßen formuliert werden kann:

Wenn  $n$  Dinge auf  $m$  Schubkästen verteilt werden und  $n > m$  ist, dann gibt es wenigstens einen Schubkasten, in dem zwei Dinge sind (Dirichletsches Schubkastenprinzip).

Beispiel 3: Wenn 50 Personen sich in einem  $7 \times 7$  m<sup>2</sup> großen Raum aufhalten, so gibt es wenigstens zwei Personen, die eine kleinere Entfernung als 1,5 m voneinander haben.

Um das Schubkastenprinzip anzuwenden, zerlegen wir den Raum in 49 Quadrate mit der Seitenlänge von 1 m. Dann können 49 Personen so aufgestellt werden, dass jedes Quadrat genau eine Person enthält. Die fünfzigste Person muss sich jedoch auf ein bereits besetztes Quadrat stellen. Dann kann aber die zwischen den im gleichen Quadrat befindlichen Personen bestehende Entfernung nicht größer als die Länge der Diagonalen sein, und diese ist  $\sqrt{2} < 1,5$ .

Beispiel 4: Für jede natürliche Zahl  $n$  ist  $n^3 - n$  durch 6 teilbar.

Aus dem Schubkastenprinzip (auf die beim Teilen entstehenden Reste angewandt) folgt, dass sich unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wenigstens eine durch drei und eine durch zwei teilbare befinden muss. Also lässt sich das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen stets durch 6 teilen. Wegen

$$n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$$

ist alles gezeigt.

### 5.1.2 Der Intuitionismus

Im Rahmen einer axiomatisch aufgebauten Theorie ist die Aussage, dass ein mathematisches Objekt existiert, gleichbedeutend damit, dass dieses mathematische Objekt in der Theorie logisch möglich ist. Dabei ist es gleichgültig, ob dieses Objekt effektiv konstruiert wurde oder ob nur ausgeschlossen wurde, dass ein derartiges Objekt innerhalb der Theorie auf Widersprüche führt.

In diesem Sinn schließt man auf die Existenz von reellen Zahlen, die durch gewisse Eigenschaften charakterisiert werden, wenn sich aus der Negation der besagten Eigenschaft ein Widerspruch ergibt. Dafür ein Beispiel.

Eine reelle Zahl  $x$  heißt algebraisch, wenn sie irgendeiner algebraischen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Koeffizienten  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) genügt. Eine reelle Zahl  $x$  heißt hingegen transzendent, wenn es keine derartige algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten gibt.

$\sqrt{2}$  ist wegen  $x^2 - 2 = 0$  eine algebraische Zahl, jedoch sind  $\pi$  oder  $e$  keine algebraischen, sondern transzendente Zahlen. Es lässt sich zeigen, dass die algebraischen Zahlen abgezählt werden können. Weil die reellen Zahlen nicht abzählbar sind (vgl. 4.3.1.), muss es folglich nicht-algebraische Zahlen, also transzendente reelle Zahlen, geben (und zwar überabzählbar viele).

Der Forderung, dass eine reelle Zahl erst dann als gegeben angesehen werden kann, wenn ihre dezimale Darstellung beliebig genau berechenbar ist, lässt sich bei derartigen Schlüssen nicht immer nachkommen.

In der Mathematik gibt es deshalb eine Richtung, die Intuitionismus genannt wird und in der reine Existenzbeweise nicht als beweiskräftig angesehen werden. Die reelle Zahl  $0, z_1 z_2 z_3 \dots$  mit

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn für } n \text{ die Goldbachsche Vermutung zutrifft} \\ 1 & \text{wenn für } n \text{ die Goldbachsche Vermutung nichtzutrifft} \end{cases}$$

ist für diese Mathematiker nicht existent, da diese Zahl zur Zeit nicht beliebig genau berechnet werden kann. Man könnte einwenden, dass nach der Lösung der Goldbachschen Vermutung eine exakte Berechnung möglich sein wird, jedoch gibt es hinreichend viele ähnliche Probleme (Fermatsche Vermutung usw.) und, wie wir von Gödel wissen, unentscheidbare Probleme (vgl. 3.7.), so dass hier durch den Intuitionismus auf eine Konsequenz reiner Existenznachweise hingewiesen wird.

Intuitionisten haben das populär illustriert, als sie sagten, das Wissen um die Existenz eines vergrabenen Schatzes sei wertlos, wenn man nicht wenigstens wüsste, wo er vergraben sei.

Übungen

5.1. Zeigen Sie: Die Primzahlfolge hat beliebig große Lücken!

5.2. Ein Wanderer steigt bei Sonnenaufgang auf einen Berg und erreicht mit Sonnenuntergang die Spitze. Am nächsten Tag beginnt er nach Sonnenaufgang den Abstieg am gleichen Weg, den er vor Sonnenuntergang beendet. Beweisen Sie, dass es eine Stelle gibt, die der Wanderer zur gleichen Tageszeit beim Auf- und Abstieg passierte!

5.3. Beweisen Sie, dass das abgebildete Straßennetz (Abb. 5.1) mit Straßenbahnen so befahren werden kann, dass keine Straße doppelt befahren wird, aber auch keine ausgelassen wird!

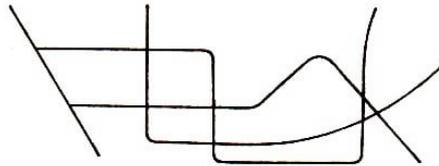


Abb. 5.1.

## 5.2 Unmöglichkeitsbeweise

Loge: ... doch dass ich fände,  
was nie sich fügt,  
was nie gelingt.  
R. Wagner

In der Mathematik gibt es zahlreiche Probleme, deren "Lösung" darin bestand, zu zeigen, dass sie unlösbar sind. Einer der ältesten Unmöglichkeitsbeweise wurde um 450 v.u.Z. von Hippasos von Metapontion geführt und ergab, dass  $\sqrt{2}$  (die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat) keine rationale Zahl ist.

Beispiel 1: Der Beweis des Hippasos, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, beginnt mit der Annahme, dass  $\sqrt{2}$  eine rationale Zahl sei, also die Form  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  natürliche Zahlen) habe.

O.B.d. A. kann dabei vorausgesetzt werden, dass eventuell vorhandene gemeinsame Teiler von  $p$  und  $q$  bereits gekürzt worden sind. Aus  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  folgt  $2q^2 = p^2$ . Die linke Seite dieser Gleichung ist offensichtlich durch 2 teilbar, damit auch die rechte.

Dann muss aber  $p$  durch 2 teilbar sein, also  $p^2$  sogar durch 4. Folglich ist die linke Seite ebenfalls durch 4 teilbar. Also ist auch  $q$  durch 2 entgegen unserer Annahme teilbar (vgl. Übung 4.14).

Die Überzeugung der Pythagoreer, dass sich alles (also auch das Verhältnis der Längen von Seite und Diagonale eines Einheitsquadrates) durch das Verhältnis von natürlichen Zahlen ausdrücken lasse, brach damit zusammen und löste eine Grundlagenkrise der Mathematik aus.

Die Legende berichtet, dass der Meeresherr Poseidon Hippasos zur Strafe von einer Schiffsreise nicht zurückkehren ließ. Nachdem der Zahlenbereich genügend erweitert wurde, vertraten die klassischen Naturwissenschaftler wieder die pythagoreische Lehre "Alles ist Zahl" - denken wir nur an ihre Messapparaturen, die die ihren Überlegungen

zugrunde liegenden Zahlenwerte liefern. Adam Ries (1492-1559) verfasste für seine Rechenkunst den folgenden Werbespruch:

Pitagoras dir sagt fürwar/  
 All ding durch zal wird offenbar.  
 Drumb sih mich an / verschmeh mich nit/  
 Durchließ mich vor / das ich dich bit.  
 Vnd meer zum anfang meiner Lehr/  
 zu reehns kunst dadurch dich kehr.

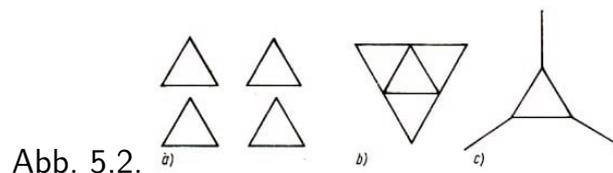
Das Cantorsche Diagonalverfahren (4.3.1.) zeigte ebenfalls die Unmöglichkeit, die reellen Zahlen abzuzählen. Die Quadratur des Kreises (d.h. seine Verwandlung in ein flächengleiches Quadrat) mit Zirkel und Lineal ist nach Lindemann ebenfalls unmöglich.

Da die Fläche eines Kreises mit dem Radius  $r$  gleich  $\pi r^2$  ist, hat ein Quadrat mit den Seitenlängen  $r\sqrt{\pi}$  den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis. Hier ist genau darauf zu achten, was verlangt wird und was unmöglich ist, denn es gibt zwar eine Strecke der Länge  $r\sqrt{\pi}$  und damit ein zugehöriges Quadrat der Fläche  $\pi r^2$ , jedoch lässt sich diese Strecke aus dem Radius  $r$  nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Mit geeigneten anderen Konstruktionsmitteln kann die Aufgabe lösbar sein!

Ein weiteres, einfaches Beispiel soll zeigen, wie genau darauf zu achten ist, was verlangt wird.

Beispiel 2: Mit 12 Hölzern können 4 gleichseitige Dreiecke gebildet werden, so dass jedes Hölzchen als Seite dient. Dies geht mit 9 Hölzchen ebenfalls. Ist das auch mit 6 Hölzchen möglich?

Wenn eine Lösung möglich ist, dann muss sie sich aus der in Abbildung 5.2 c) gezeigten Figur ergeben, denn für ein Dreieck sind genau 3 Hölzchen nötig.

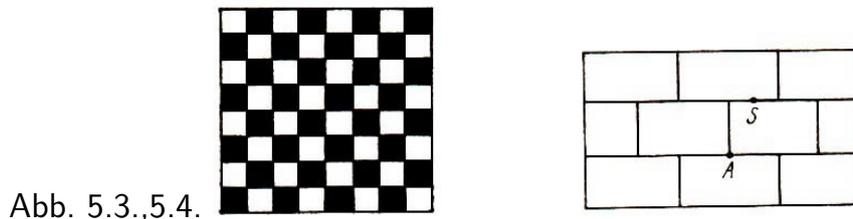


Die restlichen 3 Hölzchen müssen, damit sie die bereits gelegten Hölzchen als mögliche Seite ausnützen, in den Ecken des Dreiecks angelegt werden. Dann ist es jedoch offenbar unmöglich, alle Hölzchen wie in Abbildung 5.2b) zu einem Dreieck zu schließen.

Unmöglich ja, aber nur in der Ebene, was nicht verlangt wurde, sondern durch die vorausgegangenen Konstruktionen automatisch unterstellt wurde. Im Raum bilden die 6 Kanten eines regelmäßigen Tetraeders vier gleichseitige Dreiecke.

Beispiel 3: Es ist unmöglich, auf einem Schachbrett mit dem Springer von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden Ecke zu ziehen und dabei jedes Feld genau einmal zu besetzen (Abb. 5.3).

Die Diagonalen und damit gegenüberliegende Ecken haben die gleiche Feldfarbe. Der Springer wechselt bei jedem Zug die Farbe des Feldes. Ein Schachbrett hat 64 Felder. Angenommen, die Aufgabe ist lösbar, dann benötigt der Springer 63 Züge. Nach einer ungeraden Anzahl von Zügen besetzt der Springer ein Feld, das eine andere Farbe als sein Ausgangsfeld hat. Also auch nach dem 63. Zug. Das widerspricht der Gleichfarbigkeit der auf einer Diagonalen liegenden Ecken.



Beispiel 4: Eine Spinne sitzt auf der in der Abbildung 5.4 gezeigten Mauer an der mit  $S$  markierten Stelle. Die Spinne möchte alle Fugen des gezeichneten Mauerstücks ablaufen (der Rand gehört dazu), ohne eine Fuge zweimal zu durchlaufen. Ist das möglich?

Auf ihrem Rundgang kommt die Spinne an eine Stelle (z.B. den Punkt  $A$ ), wo sich die Fuge "gabelt", so dass sie eine der beiden Fugen auswählen muss. Wenn sie alle Fugen durchlaufen soll, dann muss sie irgendwann auch die an der Gabelung nicht benutzte Fuge passieren.

In dieser Fuge kommt sie aber nur bis zum Gabelungspunkt, weil die beiden anderen Fugen bereits durchlaufen wurden. Also muss ihr Rundgang hier enden. Da es aber mehrere solcher Gabelungen gibt, bleibt die Spinne auf ihrem Rundgang stecken.

### Übungen

5.4. Es ist unmöglich, dass sich bei einer Begrüßung 7 Personen die Hände geben, und zwar so, dass jeder genau zwei Personen nicht die Hand gegeben hat.

5.5. Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist 7 kein Teiler von  $2^n + 1$ .

5.6. Auf einem Schachbrett mit  $3 \times 3$  Feldern befinden sich 9 Figuren, die auf dem gleichen Brett völlig neu aufgestellt werden sollen. Ist eine neue Aufstellung möglich, in der alle ursprünglich benachbarten Figuren wieder benachbart sind?

5.7. Der Bruch  $\frac{21n+4}{14n+3}$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n$  unkürzbar.

5.8. In einem Schachbrett ( $8 \times 8$  Felder) fehlen zwei sich diagonal gegenüberliegende Ecken. Können die restlichen 62 Felder durch 31 Dominosteine, die genau je zwei Felder bedecken, vollständig belegt werden?

5.9. Zu drei Häusern soll in einer Ebene eine Zuleitung des Gaswerkes, des Wasserwerkes und der Elektrizitätsanstalt gelegt werden. Beweisen Sie, dass dies nicht kreuzungsfrei möglich ist!

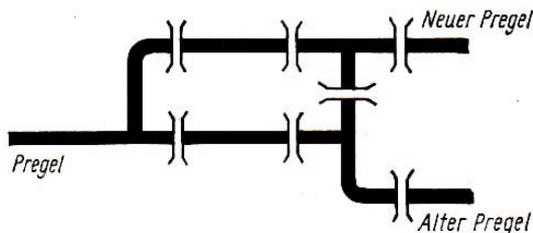


Abb. 5.5.

5.10. Beweisen Sie, dass es unmöglich ist, über die in der Abb. 5.5 gezeichneten Brücken so zu gehen, dass jede Brücke genau einmal benutzt wird (Königsberger Brückenproblem)!

### 5.3 Eindeutigkeitsbeweise

Ene, mene, muh  
und raus bist du!  
Abzählvers

Zur vollständigen Behandlung einer Aufgabe gehört die Untersuchung, ob die gegebenen Voraussetzungen eine oder mehrere Lösungen zulassen. Diese Diskussion erfolgt durch den Eindeutigkeitsbeweis; im engeren Sinn wird der Begriff nur für den Nachweis genau einer Lösung benützt.

Um zu zeigen, dass genau eine Lösung vorhanden ist, geht man häufig so vor, dass man zeigt, es gibt mindestens eine und höchstens eine Lösung.

Zur Eindeutigkeit gibt es eine hübsche (und gut erfundene) Anekdote über den Mathematiker E. Kummer (1810-1893), der u.a. die Fermatsche Vermutung für viele natürliche Zahlen als gültig nachwies, jedoch wie viele Mathematiker kein guter Kopfrechner war.

Als er während einer Vorlesung über Zahlentheorie(!) bei der Multiplikation  $7 \cdot 8$  steckenblieb, wandte er sich hilfeschend an seine Studenten, die ihm eifrig 55 und 57 anboten. "Aber meine Herren", entrüstete sich Kummer, " $7 \cdot 8$  kann doch nur entweder 55 oder 57 sein!"

Beispiel 1: Für alle Primzahlen  $p$  ist der Ausdruck  $p^2 + 2$  genau einmal prim. Es gilt

$$p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3$$

Eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen  $p - 1$ ,  $p$  und  $p + 1$  ist auf jeden Fall durch 3 teilbar. Ist  $p$  eine von 3 verschiedene Primzahl, dann muss entweder  $p - 1$  oder  $p + 1$  durch drei teilbar sein, damit aber auch die Summe  $(p - 1)(p + 1) + 3$ .

Es kann sich also höchstens für  $p = 3$  eine Primzahl ergeben. Wenn  $p = 3$  ist, so ist  $p^2 + 2$  gleich 11. Es gibt also unter den Zahlen  $p^2 + 2$  mindestens eine Primzahl. Zusammengefasst erhalten wir, dass nur  $p = 3$  eine Primzahl ergibt.

Beispiel 2: In der Menge der reellen Zahlen erklären wir für je zwei Zahlen  $a$  und  $b$  eine Verknüpfung  $a \circ b$  durch

$$a \circ b = a + b + ab$$

wobei auf der rechten Seite die bekannte Multiplikation und Addition gemeint ist. Für welche Zahlen  $a$  gibt es im Sinn dieser Verknüpfung genau eine Zahl  $b$  mit  $a \circ b = 1$  (d.h.,  $b$  ist inverses Element zu  $a$ :  $b = a^{-1}$ )?

Angenommen, es existieren zwei verschiedene Zahlen  $b_1$  und  $b_2$  mit

$$a \circ b_1 = a + b_1 + ab_1 = 1 \quad , \quad a \circ b_2 = a + b_2 + ab_2 = 1$$

für ein beliebiges  $a$ . Aus den Gleichungen folgt durch Subtraktion

$$b_1 - b_2 = a(b_2 - b_1)$$

und damit (wegen  $b_1 \neq b_2$  ist die Division durch  $b_1 - b_2$  möglich)  $a = -1$ . Nur wenn  $a = -1$  ist, sind verschiedene Zahlen  $b$  mit  $a \circ b = 1$  möglich. Ist nun  $a = -1$ , so erhalten wir

$$(-1) \circ b = -1 + b - b \neq 1$$

für jede Zahl  $b$ .

Folglich hat im Sinn dieser Verknüpfung jede von -1 verschiedene Zahl  $a$  genau ein inverses Element  $b = (1 - a)(1 + a)^{-1}$ , die -1 selbst hat kein inverses Element.

Beispiel 3 : Zu zeigen ist, dass die Gleichung

$$\sqrt[3]{1 + \log x} + \sqrt[3]{1 - \log x} = 2$$

genau eine Lösung hat.

Wie  $x = 1$  zeigt, hat die Gleichung wenigstens eine Lösung. Um zu zeigen, dass  $x = 1$  die einzige Lösung ist, benutzen wir den folgenden Hilfssatz.

Für drei positive reelle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die nicht sämtlich gleich sind, gilt (vgl. Übung 4.1, Folgerung)

$$\frac{a + b + c}{3} > \sqrt[3]{abc}$$

(das arithmetische Mittel ist größer als das geometrische Mittel). Gleichheit erhalten wir nur für  $a = b = c$ . Es ist

$$\sqrt[3]{1 \pm \log x} = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1 \pm \log x)} < \frac{1 + 1 + 1 \pm \log x}{3} = 1 \pm \frac{1}{3} \log x$$

also

$$\sqrt[3]{1 + \log x} + \sqrt[3]{1 - \log x} < 1 + \frac{1}{3} \log x + 1 - \frac{1}{3} \log x = 2$$

Die Gleichheit kann sich nur ergeben, wenn  $1 = 1 \pm \log x$  ist, also  $\log x = 0$  bzw.  $x = 1$ .

Für reine Existenzbeweise ergibt sich in der Regel die Lösungsmannigfaltigkeit nicht aus dem Beweis. Eine solche reine Existenzaussage ist der sogenannte Igelsatz:

Wie eine behaarte Kugel (Igel) auch gekämmt wird, stets gibt es wenigstens einen Wirbel, in dem das Haar keine bestimmte Richtung hat (vgl. die in Abbildung 5.6 gezeigten Einzelfälle).

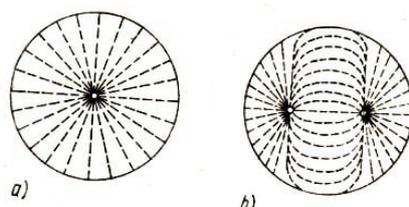


Abb. 5.6. Zwei Möglichkeiten, einen "Igel" zu kämmen (die Abbildungen zeigen jeweils nur eine Hälfte der Kugel)

Die Breiten- bzw. Längskreise können als "Frisuren" der Erdkugel angesehen werden, wobei in beiden Fällen genau zwei Wirbel (Pole) vorhanden sind.

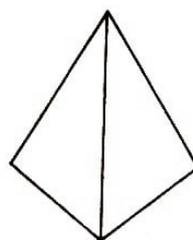


Abb 5.7.

Wenn eine Aufgabe so gestellt wurde, dass sie genau eine Lösung aufweist, dann sagt man, sie sei bestimmt oder sie sei sachgemäß gestellt. Vorausgesetzt, die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Seiten ist möglich, dann ergeben sich genau genommen i. allg. zwei verschiedene Dreiecke (Abb. 5.7), die zueinander spiegelbildlich sind.

In der Geometrie erstreckt sich die Eindeutigkeitsforderung nur auf Eindeutigkeit bis auf Kongruenz, d.h. Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen einer Figur werden als unwesentlich angesehen. Ähnliche Eindeutigkeitsauffassungen "bis auf ..." gibt es auch in anderen mathematischen Disziplinen.

### Übungen

5.11. Sind die Lösungen der Gleichungen

$$a) \sqrt{x^2 - 5} = x - 1 \quad , \quad b) \sqrt{x + 1} = x - 1$$

eindeutig bestimmt?

5.12. Der Musiklehrer sagt zum Mathematiklehrer: "Ich sehe drei Leute in die Schule kommen, die zusammen so alt sind wie du. Multipliziert man ihre Alter miteinander, so ergibt sich 2450."

Der Mathematiklehrer erwiderte darauf, dass ihm das nicht helfe, das Alter zu bestimmen.

Danach hilft ihm der Musiklehrer mit der Bemerkung, dass keiner der drei älter als der Schulleiter sei.

Nun kennt der Mathematiklehrer das Alter der drei Leute. Wie alt ist der Schulleiter?

5.13.  $A$  kennt das Produkt  $p = nm$  und  $B$  die Summe  $s = m + n$  zweier natürlicher Zahlen  $m$  und  $n$  mit  $1 < m \leq n$ .  $A$  weiß, dass  $B$  die Summe  $s$  kennt, und  $B$  weiß, dass  $A$  das Produkt  $p$  kennt. Es ergibt sich folgender Dialog:

$A$ : "Ich kenne die Summe  $s$  nicht."

*B*: "Das wusste ich. Ich gebe dir den Hinweis, dass die Summe  $s$  kleiner als 14 ist."

*A*: "Ich wusste bereits, dass die Summe  $s$  kleiner als 14 ist. Jedoch kenne ich jetzt die Zahlen  $m$  und  $n$ !"

*B*: "Damit kenne ich auch  $m$  und  $n$ ."

Wie lauten die natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$ ?

5.14. Besuchern, die das Lektorat Mathematik des Teubner-Verlages in Leipzig besuchen, wird erklärt: Wenn Sie zwei Stufen auf einmal genommen hätten, dann wäre eine Stufe übrig geblieben. Wenn Sie drei bzw. vier Stufen auf einmal nehmen, dann bleiben zwei bzw. drei Stufen am Ende übrig.

Wenn Sie jedoch fünf Stufen auf einmal nehmen können, dann kommen Sie genau oben an. Insgesamt sind es nicht mehr als 50 Stufen. Ist damit die Zahl der Stufen eindeutig bestimmt?

Kann die Nebenbedingung "nicht mehr als 50 Stufen" weggelassen werden? .

## 6 Die Induktion als Beispiel für charakteristische Schlussweisen mathematischer Disziplinen

Jede mathematische Disziplin hat ihre eigentümlichen Schlussweisen. Die Geometrie bedient sich seit der Antike häufig geometrischer Örter beim Beweisen [11], während die Übersetzung geometrischer Probleme mit Hilfe der analytischen Geometrie in algebraische Formeln ein Ergebnis der neueren Zeit ist.

In der Differential- und Integralrechnung wird laufend folgende Schlussweise (die sogenannte Epsilonantik) angewandt: Jede reelle Zahl, deren absoluter Betrag nicht größer ist als jede beliebige positive Zahl, ist gleich Null. Beispiel:  $1 = 0,999\dots$

In allen mathematischen Disziplinen werden Dinge gezählt und Aussagen gemacht, die von natürlichen Zahlen abhängen.

Von besonderer Wichtigkeit ist daher ein Verfahren, Methode der vollständigen Induktion genannt, das es erlaubt, Aussagen für alle natürlichen Zahlen als wahr nachzuweisen (genauer: die Richtigkeit einer durch für alle quantifizierten Aussagenfunktion mit den natürlichen Zahlen als Individuenbereich zu zeigen).

Wie sich die mathematische oder vollständige Induktion von der naturwissenschaftlichen oder unvollständigen Induktion unterscheidet, wird aus der Bemerkung E. Kummers in einer seiner Vorlesungen klar:

"Meine Herren, 120 ist teilbar durch 1, 2, 3, 4, auch 5; jetzt werde ich schon aufmerksam, ob 120 nicht vielleicht durch alle Zahlen teilbar ist. Ich probiere weiter und finde, sie ist auch durch 6 teilbar; um nun ganz sicher zu gehen, versuche ich es noch mit der 8, dann mit der 10, mit 12, mit der 15, schließlich auch mit 20 und 24.

Wenn ich jetzt Physiker bin, sage ich: Es ist sicher, dass 120 durch alle Zahlen teilbar ist."

L. Euler hat auf die gleiche Weise auf die Notwendigkeit der vollständigen Induktion hingewiesen, indem er bemerkte, dass das Polynom

$$P(x) = x^2 + x + 41$$

für  $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$  nur Primzahlen liefert. Daraus folgt nicht, dass es alle Primzahlen hervorbringt, denn 41 teilt  $P(41)$ .

Die natürlichen Zahlen lassen sich durch fortgesetzte Addition aus der 1 erzeugen. Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen gelten sollen, müssen damit schrittweise von einer Zahl zur nächsten als richtig nachgewiesen werden.

Die Wahrheit der Aussage vererbt sich von Zahl zu Zahl, und aus der Fortsetzbarkeit im Kleinen wird die Gültigkeit im Gesamten erschlossen (Laufmaschenbeweis). Das ist, kurz gesagt, der Grundgedanke der vollständigen Induktion. Wir nennen jetzt den Satz, auf dem die Induktion basiert.

Satz (Rechtfertigungssatz für die vollständige Induktion): Wenn eine für alle natürlichen Zahlen  $n$  erklärte Aussagenfunktion  $A(n)$

a) für die natürliche Zahl 1 eine wahre Aussage liefert und

b) aus der Tatsache, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Gültigkeit von  $A(n)$  auch die von  $A(n + 1)$  nach sich zieht,

dann gilt  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen.

Vor dem Beweis dieses Satzes betrachten wir seine Struktur, die die Form der Implikation Wenn  $p$ , dann  $q$  hat. Die Behauptung (Induktionsbehauptung)  $q$  lautet "Die Aussagenfunktion  $A(n)$  liefert für alle natürlichen Zahlen  $n$  wahre Aussagen". Die Voraussetzungen (Induktionsvoraussetzungen) des Satzes sind unter a) und b) aufgeführt, wozu auch die Aussage, dass  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen erklärt ist, zu rechnen ist.

Der sogenannte Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$ , d.h., der Beweis der Implikation 'Wenn  $A(n)$  für eine beliebige natürliche Zahl gültig ist, so gilt auch  $A(n + 1)$ ' ist eine Voraussetzung (1) des Satzes, deren Gültigkeit benötigt wird, um die Induktionsbehauptung folgern zu können.

Der Schluss des Satzes geht wie in jeder Implikation von der Induktionsvoraussetzung auf die Induktionsbehauptung. Insofern ist die Bezeichnung "Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ " für die Methode der vollständigen Induktion unzutreffend.

Wir gehen noch ein Beispiel für einen Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Beispiel 1: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt, dass 9 den Ausdruck  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  teilt.

Zuerst weisen wir das Erfülltsein der Induktionsvoraussetzungen nach. Der Induktionsanfang ist wegen  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$  gegeben. Bevor wir uns dem Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$  zuwenden, bemerken wir, dass eine kleine Rechnung für alle natürlichen Zahlen  $k$  die Gültigkeit von

$$(k + 3)^3 = k^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$$

ergibt. Wir setzen jetzt voraus, dass 9 die Summe  $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$  teilt, und zeigen, dass dann 9 auch  $(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3$  teilt. Nun ist aber unter Berücksichtigung unserer kleinen Nebenrechnung dieser Ausdruck gleich

$$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$$

also wieder durch 9 teilbar. Damit sind alle Voraussetzungen für den Induktionsschluss erfüllt, folglich gilt die Behauptung.

Wir führen jetzt den Beweis für den Rechtfertigungssatz, der sich wesentlich auf das Induktionsaxiom A 4 aus 3.4.1. stützt:

"Jede Menge von natürlichen Zahlen, die die natürliche Zahl 1 und mit jeder natürlichen Zahl  $n$  auch ihren Nachfolger  $n + 1$  enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen."

Mit  $M$  bezeichnen wir die Teilmenge der natürlichen Zahlen, über der  $A(n)$  gültig ist. Auf Grund der Voraussetzung gehört 1 zur Menge  $M$ . Nach Voraussetzung gehört mit jeder Zahl auch ihr Nachfolger zu  $M$ , also mit der 1 auch deren Nachfolger 2, mit der 2 deren Nachfolger 3 usw.

Nach dem Induktionsaxiom ist deshalb  $M$  gleich der Menge aller natürlichen Zahlen, bzw.  $A(n)$  gilt für alle natürlichen Zahlen.

Das Induktionsprinzip ist aus einem Axiom hergeleitet worden, das manchem Leser vielleicht uneinsichtig ist. Das Induktionsaxiom und damit auch die aus ihm abgeleitete Methode der vollständigen Induktion lassen sich auch aus der durch den praktischen Umgang mit der Zahlenreihe vertrauteren Aussage Jede Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element herleiten. Wir zeigen das indirekt.

Dazu nehmen wir an, dass zwar die Voraussetzungen des Satzes über die vollständige Induktion erfüllt sind, aber nicht seine Behauptung. Es gibt also eine Menge  $M$  von natürlichen Zahlen, für die  $A(n)$  falsche Aussagen liefert.

Diese Menge  $M$  muss nun ein kleinstes Element haben, das wir mit  $m$  bezeichnen. Für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n < m$  gilt also  $A(n)$ . Nun ist nach Induktionsvoraussetzung 1 kein Element von  $M$ , also ist  $m > 1$ . Folglich ist  $m - 1$  eine natürliche Zahl, für die  $A(m - 1)$  gilt. Andererseits ist  $A(m)$  falsch. Das widerspricht der Induktionsvoraussetzung b).

Damit ist die Antithese nicht haltbar, und die Induktionsbehauptung gilt.

Wir zeigen jetzt, dass keine der Voraussetzungen beim Induktionsbeweis weggelassen werden kann.

Beispiel 2 : Für  $q \neq 1$  beträgt die Summe der geometrischen Reihe

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$$

Beweis des Induktionsschritts. Wenn für eine beliebige natürliche Zahl  $n$  gilt

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

so folgt

$$1 + q + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} + q^{n+2} - q^{n+1} - q}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - q}{q - 1}$$

bzw. die Summenformel gilt auch für  $n + 1$ , wenn sie für  $n$  gilt.

Trotzdem hat die Reihe nicht  $(q^{n+1} - q) : (q - 1)$  als Summe, denn der Induktionsanfang fehlt, so dass der Induktionsschritt ins Leere geht. Für  $n = 1$  ist die Summe  $s_1 = 1 + q = \frac{q^2 - 1}{q - 1}$ , während die Formel  $\frac{q^2 - q}{q - 1} = q$  liefert.

Die vollständige Induktion ist mit einer großen Treppe verglichen werden. Auch wenn wir die nötige Kraft haben, sie zu besteigen (Induktionsschritt), so nützt uns das nichts, falls wir sie nicht betreten können, wenn also die erste Stufe bereits abgesperrt ist (kein Induktionsanfang).

Beispiel 3: Je  $n$  natürliche Zahlen sind gleich.

Im Fall  $n = 1$  ist nichts zu zeigen (Induktionsanfang). Wir setzen nun voraus, dass je

$n$  Zahlen gleich sind. Daraus ergibt sich wie folgt, dass dann auch  $n + 1$  natürliche Zahlen gleich sind. Sind nämlich  $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$  die  $n + 1$  Zahlen und streichen wir einmal  $z_1$  und zum anderen  $z_{n+1}$ , so sind die jeweils verbleibenden  $n$  Zahlen nach Induktionsvoraussetzung gleich:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = z_3 = \dots = z_{n+1} = z_n \\ z_2 &= z_3 = \dots = z_{n-1} = z_n = z_{n+1} \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber sofort

$$z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_{n+1} = z_n = z_{n+1}$$

und damit nach dem Induktionsprinzip die Behauptung.

Wo steckt der Fehler? Auch hier fehlt der Induktionsanfang, denn der Fall  $n = 1$  ist nur ein scheinbarer Anfang. Das Prinzip des Vergleichens geht nur für  $n \geq 2$ , und damit fehlt für diese Werte der Induktionsanfang. Es ist klar, dass für  $n > 1$  die Aussage falsch ist.

Im Beispiel 1 hätten wir als Induktionsanfang auch  $n = 0$  wählen können. Die Ungleichung

$$2^n > n^2 \tag{1}$$

ist - von 0 und 1 abgesehen - erst ab  $n = 5$  gültig. Aufgaben, in denen die Induktion erst mit einer natürlichen Zahl  $n_0 > 1$  oder bereits mit einer ganzen Zahl  $n_0 < 1$  beginnen müsste, lassen sich auf das bekannte Prinzip der Induktion zurückführen.

Wenn der Induktionsanfang durch die Zahl  $p$  gegeben ist, so betrachten wir anstelle der natürlichen Zahl  $n$  in der Aussagenfunktion die Zahl  $m$  als veränderlich, die durch  $n = m + p - 1$  erklärt ist und die Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  durchläuft, wenn  $n$  die Zahlen  $p, p + 1, p + 2, \dots$  durchläuft. Die Ungleichung (1) schreibt sich beispielsweise in dieser Art mit  $p = 5$ :

$$2^{m+4} > (m + 4)^2$$

Diese Ungleichung ist für alle natürlichen Zahlen  $m \geq 1$  gültig; das kann man mit dem Satz über die vollständige Induktion zeigen.

Beispiel 4: Alle ganzzahligen Markbeträge, die größer als drei sind, lassen sich aus 2- und 5-Mark-Stücken zusammensetzen.

Bis zum Betrag  $n = 7$  ist wegen  $4 = 2 + 2$ ,  $5 = 5$ ,  $6 = 2 + 2 + 2$  und  $7 = 5 + 2$  die Behauptung sicher richtig. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für ein beliebiges  $n \geq 7$  gültig ist, und zeigen, dass dann die Behauptung auch für  $n + 1$  gilt.

Es sind zwei Fälle möglich: entweder setzt sich der Betrag nur aus 2-Mark-Stücken zusammen oder es gibt wenigstens ein 5-Mark-Stück darunter. Im ersten Fall wird sich ein Betrag  $n \geq 7$  aus wenigstens drei 2-Mark-Stücken zusammensetzen. Um den Betrag  $n + 1$  zusammenzusetzen, werden zwei 2-Mark-Stücke (= 4 Mark) durch ein 5-Mark-Stück ersetzt.

Im zweiten Fall wird das 5-Mark-Stück durch drei 2-Mark-Stücke (= 6 Mark) ersetzt. Damit sind die Induktionsvoraussetzungen als gültig nachgewiesen, folglich gilt die Induktionsbehauptung.

Es gibt eine weitere modifizierte Form der Induktion, die folgende Induktionsvoraussetzungen benutzt. Es sei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, und aus der Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen  $k$  mit  $k < n$  folgt die Gültigkeit der Aussage für die natürliche Zahl  $n$ .

Beweis. Da  $n$  beliebig ist, gilt die Aussage für  $n = 1$  (Induktionsanfang). Wenn die Aussage nicht für alle  $n$  gilt, so gibt es eine Ausnahmemenge mit einem kleinsten Element  $m > 1$ , für das die Aussage falsch ist. Für alle  $k$  mit  $k \leq m - 1$  ist die Aussage allerdings wahr, was der Voraussetzung des modifizierten Satzes widerspricht.

Die Ausnahmemenge ist also leer. Auch bei dieser Form der Induktion kann als Induktionsanfang eine beliebige ganze Zahl dienen.

Beispiel 5: Die Summe  $s_n$  der Innenwinkel eines (konvexen)  $n$ -Ecks beträgt

$$s_n = 2(n - 2) \cdot 90^\circ \quad (2)$$

Wir führen den Beweis der Einfachheit halber nur für konvexe  $n$ -Ecke. Der Induktionsanfang ist für  $n = 2, 3$  und  $4$  gegeben, denn die Winkelsummen von  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $360^\circ$  ergeben sich aus der Formel.

Wir nehmen an, dass (2) für alle natürlichen Zahlen  $k$ ,  $3 \leq k < n$  bei beliebigem natürlichem  $n$  (mit  $n > 3$ ), gilt, und zeigen, dass daraus auch die Gültigkeit von (2) für  $n$  selbst folgt.

Dazu zerlegen wir das  $n$ -Eck von einem Eckpunkt  $A$  durch eine Verbindungsstrecke zu einem  $A$  nicht benachbarten Eckpunkt  $B$  in zwei Vielecke. Diese Zerlegung ist möglich, da das  $n$ -Eck konvex sein sollte und  $n > 3$  ist.

Die beiden entstandenen Vielecke mögen  $p$  und  $q$  Eckpunkte haben, wobei offensichtlich  $p < n$  und  $q < n$  gelten muss. Weil  $A$  und  $B$  in den beiden Vielecken doppelt gezählt werden, gilt

$$p + q = n + 2 \quad (3)$$

Wegen  $p < n$  und  $q < n$  ist in jedem Vieleck die Induktionsvoraussetzung (2) gültig, also

$$\begin{aligned} s_p &= 2(p - 2) \cdot 90^\circ \\ s_q &= 2(q - 2) \cdot 90^\circ = 2(n - p) \cdot 90^\circ \end{aligned}$$

letztere Umformung mit Hilfe von (3). Die Summe der Innenwinkel des  $n$ -Ecks ist offenbar gleich der Summe der Innenwinkel der  $p$ - und  $q$ -Ecke, also

$$s_n = s_p + s_q = 2(p - 2) \cdot 90^\circ + 2(n - p) \cdot 90^\circ = 2(n - 2) \cdot 90^\circ$$

Das ist gerade die Behauptung.

Beispiel 6 : Es wurde schon der angeblich in Benares befindlichen Turm beschrieben,

der auf geheimnisvolle Weise mit dem Ende der Welt verbunden sein soll. Um keine bzw. eine Scheibe von der Nadel  $A$  auf die Nadel  $C$  zu bringen, wird keine bzw. eine Umlegung benötigt. Bei 2 Scheiben legt man zuerst die kleinere Scheibe auf die Nadel  $B$ , dann die größere Scheibe auf die Nadel  $C$  und schließlich die kleinere Scheibe von der Nadel  $B$  auf die Nadel  $C$ , insgesamt also 3 Umlegungen.

Wir nehmen an, dass für  $n$  Scheiben  $u_n$  Umlegungen erforderlich sind. Für  $n + 1$  Scheiben sind dementsprechend  $u_{n+1}$  Umlegungen notwendig. Es ergibt sich  $u_{n+1}$  aus  $u_n$  auf folgende Weise.

Um  $n$  Scheiben von der Nadel  $A$  auf die Nadel  $B$  zu bringen, werden  $u_n$  Umlegungen gebraucht. Dann kann die nächste Scheibe von der Nadel  $A$  auf die Nadel  $C$  gelegt werden, und mit an weiteren Umlegungen können die Scheiben von der Nadel  $B$  ebenfalls auf die Nadel  $C$  gebracht werden, also

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Wir finden

$$\begin{aligned} u_n &= 2u_{n+1} + 1 \\ &= 2(2u_{n-2} + 1) + 1 = 2^2u_{n-2} + 2^1 + 2^0 \\ &\dots \\ &= 2^n u_0 + 2_{n-1} + \dots + 2^1 + 2^0 \end{aligned}$$

und wegen  $u_0 = 0$  ergibt sich die Anzahl der Umlegungen  $u_n$  als Summe der geometrischen Reihe

$$u_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(vgl. auch  $F_n$  aus 4.5.).

Für 8 Scheiben benötigt man 255 Umlegungen, für 64 Scheiben ist die Anzahl 18 446 744 073 709 551 615. Also selbst bei den angenommenen 17280 Umlegungen je Tag werden noch Milliarden von Jahren gebraucht. Was aus der Welt in diesem Zeitraum wird, mag fraglich sein, sicher ist jedoch, dass der Turm selbst diese Belastungen nicht überstehen wird.

Es gibt noch weitere Formen der vollständigen Induktion, die z.B. auf den Schluss von  $n$  und  $n + 1$  auf  $n + 2$  gegründet sind. Auch für reelle Zahlen existiert eine sogenannte transfinite Induktion.

Wir erwähnen abschließend die Rückinduktion. Bei ihr wird zunächst die Gültigkeit der Induktionsbehauptung für eine unendliche Menge  $M$  von natürlichen Zahlen gezeigt. Für jede natürliche Zahl  $n$  kommt damit eine der beiden Möglichkeiten in Betracht:

- a)  $n$  gehört zu  $M$ ,
- b)  $n$  liegt zwischen zwei Zahlen, die zu  $M$  gehören.

Im ersten Fall ist die Gültigkeit der Behauptung bereits gezeigt. Im zweiten Fall erhalten wir sie, indem wir zeigen, dass sich aus dem Bestehen der Aussage für eine

beliebige natürliche Zahl  $n$  auch die Gültigkeit für die natürliche Zahl  $n - 1$  ergibt (Rückinduktion).

Durch dieses Zurückschließen werden die Lücken, die  $M$  auf der Zahlengeraden gelassen hat, geschlossen.

#### Übungen

6.1. Für alle positiven reellen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gilt

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2$$

6.2. Beweisen Sie die Ungleichung von Beispiel 4 aus 4.1. im allgemeinen Fall!

6.3. In wieviel Flächen zerlegen  $n$  Kreise maximal eine Kugeloberfläche (eine Ebene)?

6.4. Jede endliche Menge aus reellen Zahlen enthält sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element.

## 7 Ausblick

### 7.1 Über Beweise

Der sinnvolle Satz sagt etwas aus,  
und sein Beweis zeigt, dass es so ist.  
L. Wittgenstein

Über das Beweisen schreibt der Mathematiker F. Waismann:

"Und mancher wird denken, es sei doch recht überflüssig, etwas lang und breit zu beweisen, was ohnehin kein Mensch bezweifelt. Beweise haben aber nicht die Aufgabe, in uns ein Gefühl der Überzeugung hervorzurufen, sondern einen Einblick in die Abhängigkeit der Sätze zu gewinnen. Die Forderung, alles zu beweisen, was sich beweisen lässt, entstammt nicht einer zweifelsüchtigen Gemütsart, sondern ist Ausdruck des Verlangens, klar die Struktur des Satzgefüges zu sehen, welche Verbindungen die einzelnen Wahrheiten haben."

Obwohl es C. F. Gauß' Devise war, 'Weniges, aber Ausgereiftes' (*Pauca, sed matura*) zu publizieren, kam er auf zentrale und wichtige Sätze immer wieder mit neuen Beweisen zurück, um damit verschiedene Seiten zu beleuchten, die die Tragweite der Ideen besser hervortreten ließen. Für den, sogenannten Fundamentalsatz der Algebra gab Gauß selbst vier Beweise.

Ein wichtiger Satz der Zahlentheorie (quadratisches Reziprozitätsgesetz) wurde insgesamt etwa einhundert Mal bewiesen.

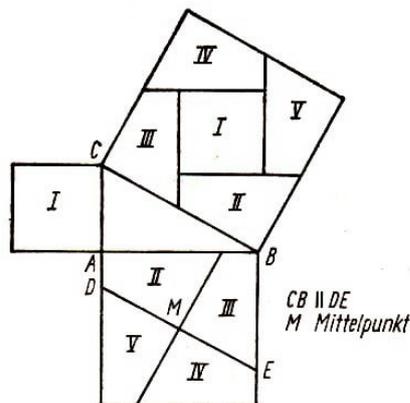


Abb. 7.1.

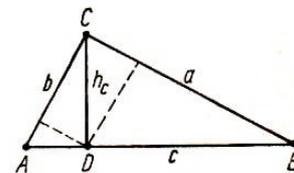


Abb. 7.2.

An der Spitze dürfte der Satz des Pythagoras stehen, für den über 360 verschiedene Beweise geführt werden sind, darunter der indische Beweis aus 3.3., ein Beweis von J. Garfield (1831-1888), dem 20. Präsidenten der USA, oder der 1830 gefundene Beweis des Amateur-Mathematikers H. Perigal, der dessen Visitenkarte schmückte (Abb. 7.1).

Überraschend ist folgende Beweismöglichkeit. Vom Eckpunkt  $C$  des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  wird das Lot mit dem Fußpunkt  $D$  auf die Hypotenuse  $c$  gefällt.

In den Dreiecken  $ABC$ ,  $ADC$  und  $BCD$  stimmen jeweils zwei Winkel überein, sie sind also ähnlich. Auf Grund der Ähnlichkeit gilt, wenn wir im Dreieck  $ABC$  die zur Seite  $c$  gehörige Höhe mit  $h_c$ , die im Dreieck  $ADC$  bzw.  $BCD$  zu den Seiten  $b$  bzw.

$a$  gehörigen Höhen mit  $h_b$  und  $h_a$  bezeichnen (Abb. 7.2)

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c} = \text{const} = \lambda$$

Andererseits gibt die Flächengleichheit der Dreiecke  $ABC$  sowie  $ADC$  und  $BCD$  zu folgender Gleichung Anlass

$$\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \quad (1)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $2\lambda$  und erhalten

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

was zu beweisen war.

Der Satz des Pythagoras lässt sich auch aus dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie herleiten. Dieser lautet für ein beliebiges Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sowie dem Winkel  $\gamma$  zwischen  $a$  und  $b$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

und für  $\gamma = 90^\circ$  bzw.  $\cos 90^\circ = 0$  ergibt sich (2). Ein derartiger Beweis muss zwar akzeptiert werden, widerspricht jedoch dem mathematischen Stilempfinden, das für geometrische Sätze geometrische Beweise verlangt.

Mathematiker beschränken sich gelegentlich in den Beweismitteln, also z.B. beim Satz des Pythagoras auf Beweise durch Ähnlichkeitseigenschaften, Rechnung oder Zerlegungen. In der Geometrie konstruiert man in der Regel mit Zirkel und Lineal (Platons Forderung), aber es ist auch möglich, mit dem Zirkel allein auszukommen (Mohr-Mascheronische Geometrie) oder mit einem Lineal und einem gegebenen Kreis (Steinersche Geometrie).

Beweise werden auch danach unterschieden, ob sie Näherungsverfahren begründen oder auf exakte Lösungen führen. Eine Strecke mit Zirkel und Lineal so zu konstruieren, dass sie gleich dem Umfang  $U$  eines gegebenen Kreises ist, ist bekanntlich unmöglich, näherungsweise aber mit einem Fehler kleiner als  $2r \cdot 10^{-4}$  durch die Konstruktion von Kochanski (1685) möglich (Abb. 7.3):

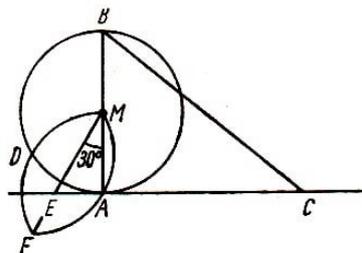


Abb. 7.3.  $\overline{AM} = \overline{AF} = \overline{AD} = \overline{DM} = \overline{DF} = \overline{EC} = 3\overline{AM}$

$$\overline{BC} = \overline{AM} \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx U$$

Aber auch exakte Lösungen sind daraufhin zu prüfen, ob sie "mit bloßer Zunge", wie J. Steiner (1796-1863) sagt, oder wirklich ausgeführt werden können.

Bei geometrischen Konstruktionen können sich z.B. unzugängliche Punkte ergeben (Beschränktheit der Zeichenebene) oder unzumutbar viele Konstruktionsschritte, die die Zeichengenauigkeit stark beeinträchtigen.

Eine Zeichnung ist um so genauer, je weniger Handgriffe sie benötigt. Der Mathematiker F. Lemoine hat 1888 für jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal die wenigen erforderlichen Grundkonstruktionen bewertet, also z.B. dem Einsetzen der Zirkelspitze in einen gegebenen Punkt oder dem Ziehen einer Geraden usw. bestimmte Zahlen zugeordnet.

Aus diesen Zahlen lässt sich der Einfachheits- und Genauigkeitsgrad für jede Konstruktion errechnen. Es zeigte sich überraschenderweise, dass der Einfachheitsgrad bekannter Standardkonstruktionen in der Regel vermindert werden kann.

Die Aufgabe, vier gemeinsame Tangenten an zwei Kreise zu legen, hat beispielsweise für die herkömmliche Konstruktion den Einfachheitsgrad 92, der auf 34 reduziert werden konnte. In Bezug auf die tatsächlich erzielte Genauigkeit stehen Näherungslösungen den exakten Lösungen oft nicht nach.

Ungelöste Probleme bleiben jedoch noch genug, selbst solche, die sehr einfach zu formulieren sind<sup>30</sup> Zahlen, deren sämtliche Teiler zusammengezählt das Doppelte der Zahl ergeben, heißen vollkommen. 6 gehört wegen  $1 + 2 + 3 + 6 = 12$  dazu, desgleichen die geraden Zahlen 28, 496 oder 8128. Gibt es ungerade vollkommene Zahlen?

Ein weiteres offenes Problem: Ist die Gleichung  $(x + y + z)^3 = xyz$  ganzzahlig lösbar?

Mathematik ist nicht, wie es im vorigen Jahrhundert gelegentlich geäußert wurde, eine großartige Unterhaltung des menschlichen Geistes mit sich selbst, sondern Anleitung zum Handeln für das Lösen von Problemen. Damit kommt der Mathematik ein Mitteilungscharakter zu, und wir wollen Beweise aus dieser Sicht betrachten.

Entscheidend für die Lesbarkeit und Verständlichkeit eines Beweises ist nicht immer seine Länge, sondern vor allem die Klarheit und Durchsichtigkeit der Beweisführung. Es gibt berühmte kurze Beweise, die etwa Vierzeiler sind, aber auch sehr, sehr lange, in Hilfssätze und Lemmata aufgespaltene Beweisführungen.

Ein Verfasser (E. Landau, 1877-1938) nannte scherzhaft seinen "endlosen" Beweis eines wichtigen Satzes "ein großes Drama in drei Akten".

Bei langen Beweisen ist Zielstrebigkeit des Beweises erforderlich. Man hat geschätzt, dass der ausführliche Beweis einer Vermutung des indischen Mathematikers ; S. Ramanujan (1887-1920) etwa 2000 Seiten Text benötige (formalisiert noch mehr).

Der Leser muss stets wissen, was warum gemacht wird und an welcher Stelle im Beweis er sich gegenwärtig befindet, und muss stets das Ziel vor Augen haben.

Der französische Mathematiker G. Desargues (1591-1661) dürfte seine wichtige Arbeit zur projektiven Geometrie "Über Ereignisse, die sich begeben, wenn ein Kegel mit einer

---

<sup>30</sup>C. S. Ogilvy: Mathematische Leckerbissen. Über 150 noch ungelöste Probleme. Braunschweig 1969; M. Miller: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. 3. Aufl. Leipzig 1979.

Ebene zusammentrifft" in der unleserlichsten Form "veröffentlicht" haben, da er sie in winzigen Buchstaben auf lose Blätter schrieb, an Freunde verteilte und noch dazu geometrische Begriffe mit botanischen Namen belegte.

Ein anderes Kuriosum bildet eine 1972 in der Mathematischen Zeitschrift erschienene Arbeit von F. Wille als Gedicht a la Wilhelm Busch. Ein Zitat: "Beweisen muss ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös."

Die vorsichtige Äußerung von G. W. Leibniz (1646-1716) über seine Erkenntnisse und ihre Beweise, die nur aus der Zeit mit Prioritätsstreitereien und Gelehrtenzank (Kontroverse mit Newton) heraus verständlich ist, berührt uns merkwürdig:

"Es ist aber guth, daß wann man etwas würcklich exhibiret (lat. herausgeben, darlegen), man entweder keine demonstration (lat. Beweisführung) gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die Schliche kommen."

Ein Beweis muss von anderen Mathematikern gutgeheißen und akzeptiert werden, was sich nicht nur bei eigenwilligen Darstellungen über einige Generationen hinziehen kann. Nützlich ist eine gute und suggestive Bezeichnungsweise.

Zwar geht der Inhalt über die Form, was den Physiker L. Boltzmann (1844-1906) zu der Äußerung "Die Eleganz überlassen wir den Schneidern" veranlasste, jedoch ist die Schönheit oder Eleganz einer Beweisführung Ausdruck für die Verwendung einfacher, prägnanter und sachgemäßer Begriffe in übersichtlicher Weise.

In diesem Sinn soll hier die Ansicht G. H. Hardy's (1877 bis 1947) für viele ähnliche Auffassungen stehen:

"Ein Mathematiker gestaltet wie ein Maler oder Dichter ... Die Formen des Mathematikers wie auch des Malers oder Dichters müssen schön sein, die Begriffe wie die Farben oder Wörter müssen in harmonischer Weise zusammen passen. Schönheit ist der erste Test: Es gibt in der Welt keinen bleibenden Platz für hässliche Mathematik."

## 7.2 Psychologischer Exkurs

Psychologie ist nichts anderes als die Kunst,  
Fragezeichen richtig zu setzen.

A. Wellek

Das Denken strebt Beziehungsordnungen an, wobei der Denkvorgang selbst keinen hohen Grad von Bewusstheit besitzt, obwohl außerhalb der Psychologie Denken i. allg. als höchste Stufe der Bewusstheit gewertet wird.

Selbst der Philosoph und Mathematiker R. Descartes (1596-1650) baute seine Philosophie auf dem Grundsatz 'Cogito, ergo sum' (Ich denke, also bin ich) auf, wo anstelle der Voraussetzung besser 'Es denkt in mir' zu sagen wäre, was allerdings zu anderen Folgerungen führen würde.

(F. Schiller spöttelte: "Oft schon war ich, und hab' wirklich an gar nichts gedacht.")

In der Mathematik ist die formale Logik das Mittel zum Herstellen von Beziehungsordnungen. Das Denken vollzieht sich auf widergespiegelten Ebenen, denen die Wahrneh-

mung durch die Sinne zugrunde liegt. Schon Euler wies darauf hin, dass man sich so oft in seinen Vernunftschlüssen betrüge, dass er sich zu behaupten getraue, der Irrtum im Schließen sei noch häufiger als der Irrtum der Sinne. Einige Ergebnisse der Wahrnehmungspsychologie wollen wir jedoch zunächst nennen.

Jede Wahrnehmung ist von der spontanen Tendenz begleitet, sich zu orientieren, die Eindrücke zu ordnen und zu gestalten. Dabei wird der Wahrnehmung ein Sinn unterlegt (Sterne als Sternbilder gedeutet, im Rattern der Eisenbahn ein Rhythmus gehört), ein Phänomen, das auch im psychologischen Test (Rohrschach) ausgenutzt wird. Der Versuch, die Abbildung 7.4 räumlich zu ordnen, gelingt nicht und wird deshalb nach einiger Zeit als unerträglich empfunden.

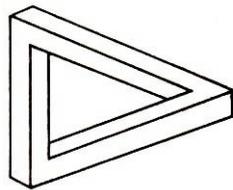


Abb. 7.4. Penrosesches Dreieck

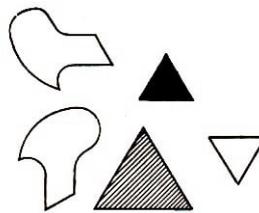


Abb. 7.5. Gestaltdominanz

Ungenauere Wahrnehmungen werden idealisiert. Jeder Blitz ist in Wirklichkeit wellig, in unserer Vorstellung erscheint er jedoch nur gezackt. Ein mehr oder weniger krummlinig und ungenau gezeichnetes Dreieck wird als ideales Dreieck "gesehen". Einprägsame Gestalten dominieren, selbst wenn sie ihre Lage, Größe oder Farbe ändern (Abb. 7.5).

Wird beispielsweise ein rechter Winkel gezeichnet und danach die Lage eines Schenkels langsam geändert, so bleibt der Eindruck des rechten Winkels lange erhalten. Bei Winkeln, die nicht so prägnant sind, etwa  $30^\circ$ , fällt die Änderung wesentlich früher auf. Dominant ist auch die als senkrecht angesehene Richtung in einer Zeichnung, was durch die Wirkung der Schwerkraft bedingt ist. Das um  $15^\circ$  bzw.  $90^\circ$  bzw.  $180^\circ$  gedrehte Quadrat bzw. Tier bzw. der Kopf ergeben einen qualitativen neuen Eindruck (Abb. 7.6), ebenso wird der um  $90^\circ$  gegen die Nord-Süd-Richtung gedrehte, uns vertraute Teil der Erdkarte erst nach Rückdrehung erkannt. Schwer erkennbar sind auch um  $180^\circ$  gedrehte Photos von Personen oder kopfstehende Schrift.

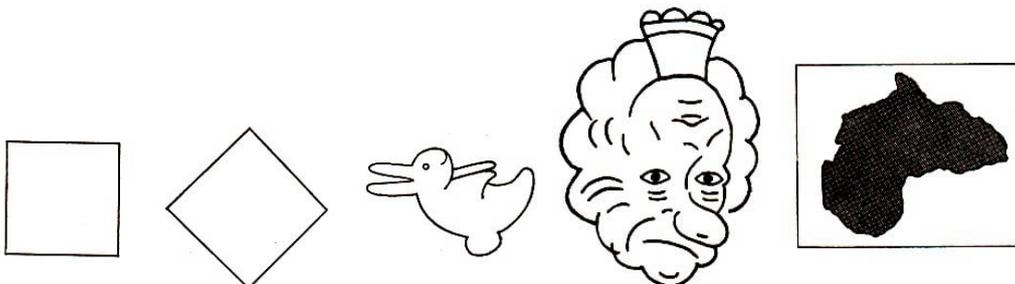


Abb. 7.6. Wahrnehmungsänderungen bei Drehungen

Bilder, auf denen oben und unten vertauscht wurden, fallen sofort auf: wenn rechts und links vertauscht werden, ist das nicht immer der Fall. Durch diese Phänomene haben in geometrischen Figuren vertikale Linien stets ein größeres Gewicht, und, schon deshalb zeichnet man in der Beweisphase Figuren möglichst in mehreren Gestalten und Lagen.

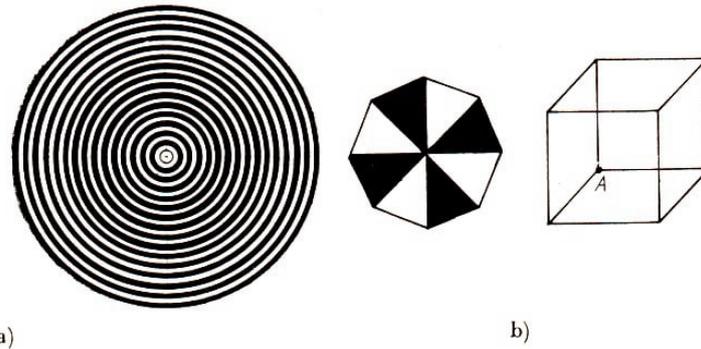


Abb. 7.7. a) Scheinbewegungen werden durch Bewegungen des Kopfes oder Buches erzeugt; b) Kipp-Figuren: Malteserkreuz und Neckerscher Würfel

Das Gesamte ist stets mehr als die Summe seiner Teile. Die Scheinbewegung in der Abbildung 7.7. a) ist in keinem Teil der Figur enthalten. Jeder Teil einer Wahrnehmung ist in seiner Beziehung zum Ganzen zu sehen, das als Hintergrund erscheint.

Die zweite Figur der Abbildung zeigt entweder ein schwarzes oder ein weißes Kreuz, d.h., die Beziehung Figur-Umfeld kann "umkippen". Gleiches trifft für den Würfel zu, bei dem der Punkt *A* entweder als vorderer oder als hinterer Punkt angesehen werden kann.

Schöpferisches Denken verbindet oder strukturiert unbewusst die vorhandenen Elemente (Vorstellungen, Gedanken) zu Lösungsvorschlägen (Einfällen), die uns dann unerwartet treffen.

"Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst" charakterisierte Gauß (1777-1855) diese Situation, die Psychologen sprechen nicht so bildhaft vom Aha-Erlebnis. Nur die Analyse eines Problems ist dem bewussten Denken zugänglich. Das Analysieren einer Situation kann das "Unbewusste" mobilisieren, Vorstellungen auszuwählen, zu kombinieren und zu verknüpfen.

Beim Verbinden von Vorstellungen (Assoziieren) werden z.B. Vorstellungen mit hohem Symmetriegehalt oder großer Prägnanz sowie mit Einfachheit bevorzugt, wie jedem aus Skizzen, die er zur Lösung geometrischer Aufgaben gemacht hat, gegenwärtig ist. Einfälle ergeben sich erst nach einer Orientierungspause, die einsetzt, wenn erkannt wird, dass die üblichen Methoden für die Lösung des Problems ungeeignet sind.

Viele Mathematiker haben angegeben, dass Orientierungspausen häufig mit der subjektiven untrüglichen Gewissheit "Das ist die Lösung" bzw. "So lässt sich die Behauptung beweisen" enden, ohne dass sie die Schlusskette logisch abgesichert haben.

Der englische Mathematiker J. E. Littlewood wies in einem Vortrag nachdrücklich auf die Notwendigkeit von Pausen beim schöpferischen Arbeiten hin. Er gab dabei das interessante Beispiel an, dass er eine Zeit lang nur sonntags nicht gearbeitet habe. Seine Einfälle kamen in der Regel am Montag.

Als er sich auch noch am Sonntag mit Mathematik beschäftigte, erschienen die Einfälle am Dienstag. Solche Orientierungspausen können sich von der Dauer eines Spaziergangs bis über Jahre hinziehen, und in einer entspannten Situation bricht unerwartet die Lösung hervor. Jedoch wies bereits I. Newton (1642-1727) darauf hin, dass man sich nach vollzogener Analyse das Problem beständig vor Augen halten müsse, um Einfälle

zur Lösung zu bekommen.

Einstein erklärte, dass geschriebene oder gesprochene Worte im Denken keinen Einfluss zu haben scheinen (Plato sah im Gegensatz Sprache und Denken als identisch an), sondern Zeichen und Vorstellungen, die reproduzierbar sind und kombiniert werden. Der Dichter P. Valéry hob hervor, dass weniger durch das Kombinieren als durch das Erkennen und Wählen der wesentlichen Kombinationen ein Genie zu charakterisieren sei. Für Einstein ist das kombinatorische Spiel das wesentliche Merkmal produktiven Denkens vor allen Verbindungen mit logischen Konstruktionen in Wort oder anderen Zeichen, die anderen mitgeteilt werden können.

Unser unvollständiger Ausflug kann nicht besser als mit den Worten J. Hadamards aus seinem Essay über mathematisches Entdecken beschlossen werden, wo er schreibt, dass dieser Gegenstand noch viele Mysterien für uns enthalte.

### 7.3 Wie finden Mathematiker Beweise ?

Das Modell der streng axiomatischen Deduktion,  
das die Mathematik aufgrund von Euklids "Elementen"  
solange geprägt hat, bildet die bemerkenswert attraktive Form,  
in der das Endprodukt des mathematischen Denkens oft dargestellt werden kann ;  
Jedoch ist die Hervorhebung dieses Aspektes der Mathematik  
vollkommen irreführend, falls dadurch der Eindruck entsteht,  
dass Konstruktion, imaginative Induktion und Kombination  
sowie der schwer definierbare geistige Vorgang,  
den man Intuition nennt, eine untergeordnete Rolle spielen.  
R. Courant

Für jede Behauptung, die Mathematiker aufstellen, fällt die Beweislast ihnen vollständig zu. Bisher haben wir uns damit beschäftigt, was als beweiskräftig angesehen wird. Wie kommen aber Mathematiker auf Ideen für Beweisführungen? Hierzu sagt F. Klein (1849-1925):

"Der Forscher selbst arbeitet in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft durchaus nicht in dieser streng deduktiven Weise, sondern er benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt, vor."

Wie geht ein Mathematiker vor, wenn es ein Problem zu lösen gilt?

Zuerst macht er sich das Problem klar, er unterscheidet zwischen Voraussetzung und Behauptung und vergegenwärtigt sich die auftretenden Begriffe, er fertigt Skizzen und Zeichnungen an und versucht, alles möglichst übersichtlich zu gliedern.

Am Ende dieser intensiven und bewusst gestalteten Phase hat er die Aufgabe mit allen Daten im Kopf; seine Vorstellungskraft und sein Gedächtnis sind mobilisiert, sie werden ihn zu allen möglichen Zeiten an Sätze und Zusammenhänge erinnern, die diesem Problem ähnlich sind oder ähnlich erscheinen (Analogien), alles, was er über die auftretenden und verwandte Begriffe weiß, zu reproduzieren versuchen und so brauchbare und unbrauchbare Einfälle liefern.

Aus der Geschichte wissen wir z.B., dass Archimedes (287? bis 212 v.u.Z.) seinen Einfall über den Auftrieb (hydrostatisches Grundgesetz) in der Badewanne hatte. H. Poincaré (1854-1912) kam unerwartet eine Einsicht über die Darstellbarkeit von gewissen Funktionen, als er einen Bus betreten wollte, und C.F. Gauß (1777-1855) hatte die Idee zur Konstruierbarkeit regelmäßiger  $n$ -Ecke im Bett vor dem Aufstehen.

Einfälle sind die Folge vorausgegangenen beharrlichen Nachdenkens über das Problem. Sie hängen zweifelsohne von der Erfahrung und Begabung jedes Mathematikers ab. Gauß fand durch ausgedehntes Rechnen dank seines enormen Zahlengedächtnisses zufällig die Übereinstimmung zweier Größen bis zur zehnten Stelle nach dem Komma, und aus diesem numerischen Hinweis gewann er Einsicht in wesentliche theoretische Zusammenhänge.

Zahlentheoretiker haben oft tausende von Zahlen untersucht, um Hinweise auf allgemeine Gesetze zu erhalten. Beispielsweise überprüften G. Cantor und Aubry alle geraden Zahlen bis 1000 bzw. 2000 hinsichtlich der Goldbachschen Vermutung. (Für Gauß scheint das Zahlenrechnen so entspannend gewesen zu sein, wie für manche Kreuzworträtsel.)



Bild 3. A. Rodin (1840-1917), Der Denker (Le Penseur), Bronze 1889/1904

Hier wird anhand "empirischer Induktion" versucht, vom Speziellen auf das Allgemeine zu schließen. Archimedes fertigte angeblich Holzmodelle von Kugeln, Zylindern und Kreiskegeln an, um seine Vermutung über deren Volumina zu erhärten.

Trotz der individuellen Aspekte gibt es für alle Probleme einige ständig wiederkehrende Fragen, die helfen, Einfälle zu finden.

Das Ziel ist, Beziehungen zwischen Voraussetzungen und Behauptung zu finden, die sich zu einem Beweis ausbauen lassen. Erste Hinweise ergeben sich aus der Herkunft des Problems, etwa einem physikalischen Hintergrund. Es ist oft hilfreich, die Voraussetzungen oder die Behauptung in Teile zu zerlegen und zu fragen, ob sich nicht ein Zusammenhang zwischen einzelnen Teilen ergibt.

Dabei werden wir in der Phase des Suchens sowohl vom Gegebenen als auch vom Gesuchten ausgehen oder untersuchen, welchen Einfluss Verneinungen von diesem oder

jenem haben. Die Voraussetzungen oder die Behauptung können variiert werden, d.h., ähnliche Probleme werden untersucht.

Fruchtbar ist auch die Erinnerung an erfolgreiche Methoden in ähnlichen Fällen. Man sucht Zwischenglieder für Beweise, die hypothetisch nützlich erscheinende Aussagen als wahr unterstellen, die also besagen, wenn dieses oder jenes aus den Voraussetzungen folgen würde, dann ließe sich die Lösung angeben (vgl. das unten angeführte Induktionsbeispiel).

Begriffe werden ebenfalls in ihre Bestandteile zerlegt.

Für den Nachweis, dass  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} > \frac{468}{113}$  ist, kann ohne die genaue Kenntnis, wie die Quadratwurzel erklärt ist, sicher nichts erreicht werden. Mit Hilfe gleichwertiger Definitionen oder Sätze kann oft das Problem umformuliert werden, so dass unsere Vorstellungen aus einer verfahrenen Richtung herausgebracht werden und sich neue Einsichten ergeben.

Insbesondere bekannte Probleme, wie etwa die Goldbachsche Vermutung, sind im Denken traditionell festgelegt, so dass oft ein neuer Gesichtspunkt ein wirksames Lösungsmittel ist.

Primzahlen sind durch das Sieb des Eratosthenes charakterisiert, bei dem alle Vielfachen von 2, 3, 5 usw. gestrichen werden (die  $4 = 2 \cdot 2$  ist bereits gestrichen usw.). Bekanntlich bereiten die Primzahlen den Mathematikern große Schwierigkeiten.

Der amerikanische Mathematiker S. Ulam hat mit einem anderen Sieb natürliche Zahlen charakterisiert, die er Glückszahlen nennt. Diese Zahlen haben viele Eigenschaften, die Primzahlen besitzen und von denen man annahm, dass sie nur Primzahlen besitzen würden (selbst eine entsprechende Goldbachsche Vermutung ist bis  $n = 100000$  überprüft worden).

Es ist jetzt ein offenes Problem, ob die Eigenschaften der Primzahlen sich im wesentlichen aus ihrer Charakterisierung durch ein Sieb (Eratosthenes) und nicht durch den Teilbarkeitsbegriff ergeben, also auch für andere durch Siebe beschriebenen Zahlen zutreffen können. Möglicherweise führt die Verschiebung der Fragestellung zu neuen Ergebnissen.

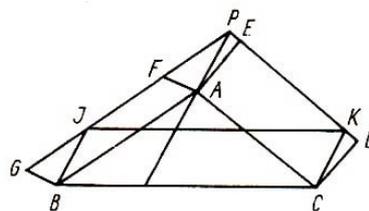


Abb. 7.8. Zum Satz von Pappos. Es sei  $ABC$  ein Dreieck, zu dem  $ACDE$  und  $ABGF$  beliebige Parallelogramme über den Seiten  $\overline{AC}$  und  $\overline{AB}$  sind.  $\overline{BJ}$  und  $\overline{CK}$  sind parallel zu  $\overline{AP}$ . Dann ist  $\overline{JK}$  parallel zu  $\overline{BC}$ , und es gilt (bezüglich der Fläche)

$$BCKJ = ACDE + ABGF.$$

Wirksam ist auch das Vorgehen, die Aufgabe in eine allgemeine Frage einzubetten. Der Satz des Pythagoras ergibt sich beispielsweise als Spezialfall aus dem Satz des Pappos, der Aussagen über die Flächengleichheit von Parallelogrammen über beliebigen Dreiecken macht (vgl. Abb. 7.8).

Die Frage, ob  $e^\pi > \pi^e = e^{e \ln \pi}$  ist, versucht man allgemeiner über Monotonieaussagen der Funktion  $e^x$  zu beantworten. Der Satz des Thales lässt sich aus dem Satz über Peripheriewinkel herleiten (vgl. 2.1.), der eine tiefere Einsicht in die Verhältnisse enthält.

Die Behauptung

$$s_m = \sum_{n=2}^m \frac{1}{(n-1)n} < 1$$

für alle natürlichen Zahlen könnte sich auf Grund ihrer Struktur durch vollständige Induktion beweisen lassen. Beim Induktionsschritt ergibt sich aber eine Schwierigkeit, denn die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung hängt von keiner natürlichen Zahl ab, und die Abschätzung, die aus der für ein beliebiges  $m$  als gültig unterstellten Ungleichung die Ungleichung für  $m+1$  als richtig nachweisen soll, muss deshalb scheitern.

Verschärfen wir aber die Ungleichung, indem wir

$$s_m = \sum_{n=2}^m \frac{1}{(n-1)n} \leq 1 - \frac{1}{m} \quad (< 1)$$

fordern, also ein allgemeineres Problem lösen, dann ist der Induktionsschritt unproblematisch:

$$s_m + \frac{1}{m(m+1)} = s_{m+1} \leq 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}$$

Auf den Gedanken, ein Zusatzglied in dem oben angegebenen Sinn einzuführen, kann man nach dem gescheiterten Induktionsschritt kommen, wenn man sich klar gemacht hat, dass

$$s_m + \frac{1}{m(m+1)} = s_{m+1} < 1 + \frac{1}{m(m+1)} < 1$$

nicht zu erzwingen ist. Durch ein Zusatzglied kann die 1 in Abhängigkeit von  $m$  verändert werden, so dass der Induktionsschritt ausführbar ist.

Aus einer ganz anderen Richtung kommt der Einfall von G. W. Leibniz (1646-1716), der  $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$  bemerkte, womit sofort  $s_m = 1 - \frac{1}{m}$  folgt. Für dieses Beispiel ist der Leibnizsche Einfall vorzuziehen, jedoch beim Nachweis von Behauptungen wie

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < 2$$

für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist er nicht anwendbar, sondern unsere erste Überlegung könnte Erfolg haben.

Der Satz des Thales könnte an dem ihm verwandten Problem auf folgende Weise durch Überlegen als Vermutung aufgestellt worden sein.

Der Mittelpunkt  $M$  jedes Rechtecks hat von den Eckpunkten des Rechtecks den gleichen Abstand, sagen wir  $r$ , da sich die Diagonalen in  $M$  halbieren. Die Ecken liegen also auf einem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r$ . Jede Ecke bestimmt also einen Peripheriewinkel von  $90^\circ$  in einem Kreis, der über dem Durchmesser, den die beiden benachbarten Ecken dieser Ecke bestimmen, steht.

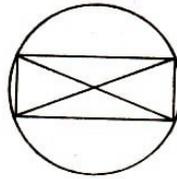


Abb. 7.9.

Wir haben, obwohl wir anschaulich gezeigt haben 'Wenn ein rechter Winkel über dem Durchmesser eines Halbkreises steht, dann ist er Peripheriewinkel dieses Kreises', also gerade die Umkehrung des Satzes von Thales, die innere Gewissheit, dass es auch umgekehrt so ist. Die Überlegungen lassen vermuten, dass es keine anderen Punkte am Halbkreis geben kann als solche, die rechte Winkel über dem Durchmesser des Kreises festlegen (vgl. 2.13.2.).

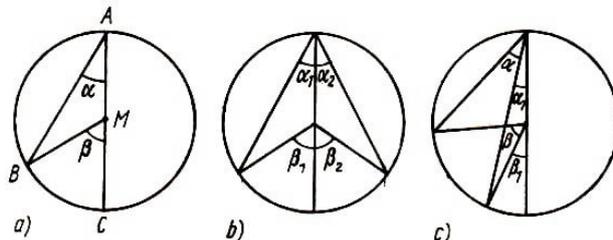


Abb. 7.10.

Bei jeder Vermutung versucht ein Mathematiker, diese durch einfache Fälle zu bestätigen. Der Satz vom Peripheriewinkel ist für die in der Abbildung 7.10a gezeigte Figur, in der der Zentriwinkel und der Peripheriewinkel einen gemeinsamen Schenkel haben, ohne große Mühe zu bestätigen.

Das Dreieck  $ABM$  ist gleichschenkelig mit den gleichen Seiten  $\overline{AM}$  und  $\overline{BM}$ . Also ist der Winkel bei  $A$  gleich dem Winkel bei  $B$ . Der Winkel  $CMB$  ist Außenwinkel des Dreiecks  $ABM$ , also ist er gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel, mithin  $\beta = 2\alpha$ .

Mit Hilfe dieses speziellen Falles lässt sich der allgemeine Fall durch Addition bzw. Subtraktion der Zentri- bzw. Peripheriewinkel ebenfalls als richtig nachweisen (Abb. 7.10b und c).

Die gleiche Situation besteht, wenn wir die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems als Linearkombination von speziellen Lösungen aufbauen, Vektoren durch spezielle Basisvektoren darstellen usw. Es kann also die allgemeine Lösung auch aus speziellen, einfachen Lösungen der gleichen Aufgabe erhalten werden.

Nachdem ein Beweis geführt worden ist, legt ihn ein Mathematiker noch nicht als erledigt beiseite, sondern versucht, ihn zu verbessern. Er wird ihn übersichtlicher gestalten, möglichst vereinfachen und in allgemeinere Zusammenhänge zu stellen versuchen. Diese Nachbetrachtungen dienen auch dazu, die Tragweite der Ideen voll auszuschöpfen.

Nehmen wir uns nochmals den Beweis für den Satz des Pythagoras vor. Multiplizieren wir die Gleichung (1) mit  $\lambda\pi$ , dann gilt

$$\frac{1}{2}\pi c^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi b^2$$

bzw. der Satz des Pythagoras kann auch mit Halbkreisen anstelle von Quadraten ausgesprochen werden. Überlegen wir in dieser Richtung weiter. Dazu noch ein Hilfssatz.

Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt (Abb. 7.2) :

Wenn die Figuren  $F_a, F_b$  und  $F_c$  über den Seiten  $a, b$  und  $c$  des Dreiecks einander ähnlich sind, wobei  $a, b$  und  $c$  homologe Stücke der Figuren sein sollen, dann stehen ihre Flächeninhalte im Verhältnis  $a^2 : b^2 : c^2$ .

Insbesondere stehen auch die Flächeninhalte  $\Delta_1, \Delta_2$  und  $\Delta_3$  der Dreiecke  $BCD, ADC$  und  $ABC$  in diesem Verhältnis. Ist also der Flächeninhalt der Figur  $F_a$  ein  $\mu$ -faches von  $\Delta_a$ , so gilt dies auch für  $F_b$  und  $\Delta_b$  sowie für  $F_c$  und  $\Delta_c$ .

(1) bedeutet  $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b$ .

Multiplikation mit  $\mu$  führt auf die Gleichheit der Flächeninhalte der Figuren  $F_a$  und  $F_b$  mit  $F_c$ :  $F_c = F_a + F_b$ .

Die Nachbetrachtung hat den Beweis auf ähnliche Figuren über den Seiten anstelle von Quadraten erweitert, also wesentlich verallgemeinert.

Einfälle entspringen der mathematischen Phantasie und entziehen sich dem bewussten Denken. Sie beruhen auf Schlüssen, die psychologisch und nicht formal logisch sind. Die wichtige Rolle der Phantasie wird in der folgenden Anekdote herausgestellt, in der D. Hilbert auf die Frage nach einem Schüler die Antwort gibt: "Er hatte zu wenig Phantasie, nun ist er Schriftsteller geworden."

Wir wollen vier kleine Einfälle nennen.

Thales (um 600 v.u.Z.) soll angeblich vor die Aufgabe gestellt worden sein, die Höhe der ägyptischen Pyramiden zu berechnen. Er hatte den Einfall, der die Ähnlichkeit von Dreiecken als Grundlage hat, den Schatten der Pyramide in dem Augenblick zu messen, als sein Schatten genau so groß wie er selbst war.

Betrachten wir die Aufgabe, den tatsächlichen Preis einer Schokoladentafel zu ermitteln, wenn jeder Tafel ein Gutschein beiliegt und für 10 Gutscheine der Käufer kostenlos eine neue Tafel erhält.

Ein Gutschein scheint damit den Wert  $\frac{1}{10}$  Tafel zu haben. Zu dieser  $\frac{1}{10}$  Tafel gehört anteilmäßig wieder  $\frac{1}{10}$  Gutschein, also kommt noch  $\frac{1}{100}$  Tafel hinzu, und so geht es ständig weiter. Wie groß ist also

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Mit einem Einfall kommen wir um die Berechnung dieser unendlichen Reihe herum. Wir kaufen 9 Tafeln und borgen uns eine zehnte Tafel. Auf diese Weise haben wir 10 Gutscheine zur Verfügung, die wir anstelle der geborgten Tafel zurückgeben.

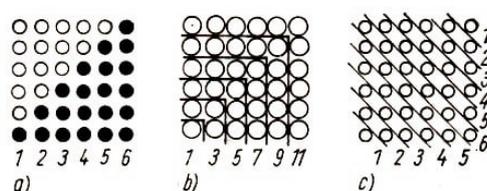


Abb. 7.11. Eine geometrische Art, Summen natürlicher Zahlen zu berechnen (in der Zeichnung ist  $n = 6$ )

$$a) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$b) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

$$c) \quad 1 + 2 + \dots + n - 1 + n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = n^2$$

9 Gutscheine haben also den Wert einer Tafel. Eine Tafel mit Gutscheinen ist damit  $1\frac{1}{9}$  Tafeln ohne Gutscheine gleichwertig.

Wir wollen uns überlegen, dass in einem beliebigen  $n$ -Eck die Summe der Innenwinkel ein Vielfaches von  $180^\circ$  sein muss. Dazu denken wir uns auf eine Seite ein Streichholz mit dem Kopf im Eckpunkt  $A$  gelegt und verschieben es bis zur nächsten Ecke, wo es innerhalb des  $n$ -Ecks so gedreht werden soll, dass es auf die nächste Seite kommt, wo es weiter verschoben wird usw., bis das Streichholz wieder im Punkt  $A$  ankommt.

Dort trifft es mit dem Kopf oder dem anderen Ende ein. Es hat sich also auf jeden Fall um ein Vielfaches von  $180^\circ$  gedreht.

## 7.4 Trugschlüsse

Hering ist gut. Schlagsahne ist gut.

Wie gut muss erst Hering mit Schlagsahne sein.

K. Tucholsky

Am Ende von Abschnitt 2.6. haben wir darauf hingewiesen, dass die logischen Probleme beim Beweisen sehr einfach sind. Trotzdem werden immer wieder Fehler gemacht. ("Mathematik ist die perfekte Methode, sich selbst an der Nase herumzuführen" A. Einstein) Dinge, die nicht vorausgesetzt werden sind, oft sogar offensichtlich zu sein scheinen, werden benutzt oder Gegebenes wird falsch verstanden usw.

Auf die Frage "Wieviel Monate eines Jahres haben 30 Tage?" wird in der Regel nach sorgfältigem Abzählen die Antwort "Vier" gegeben, dabei ist aber die richtige Antwort "Alle, außer Februar."

Häufig sind Schlussketten unvollständig, und gerade in den Lücken ist der Fehler zu suchen. Wir machen dauernd Gedankensprünge, wobei diese Sprünge beim näheren Hinsehen nicht immer logisch abgesichert werden können. Es ist zwar ein Zeichen mathematischer Begabung, Schlussketten gewissermaßen vorher zu erahnen, bevor sie exakt ausformuliert sind, aber die logisch korrekte Form ist das Endziel.

Gegen Redewendungen der Art "Wie man leicht sieht ..." sollte ein gesundes Misstrauen bestehen.

Der große Geometer J. Steiner (1796-1863) zeigte mit einfachen geometrischen Mitteln, dass keine Kurve, die vom Kreis verschieden ist, das Problem lösen kann, bei vorgegebener Länge einen möglichst großen Flächeninhalt zu umschließen. Er schloss daraus, dass der Kreis das Problem löst.

Genaugenommen hat jedoch Steiner nur gezeigt, wenn es überhaupt eine Lösung gibt, so kann es nur noch der Kreis sein. Es fehlt der Nachweis, ob der Kreis wirklich eine Lösung des Problems ist (vgl. das Beispiel von Besikovich in 1.2.).

Der zeitgenössische Mathematiker O. Perron hat die Fragwürdigkeit des Schlusses deutlich aufgezeigt, als er ihn zum "Nachweis" benutzte, dass 1 die größte natürliche Zahl sei. Jede natürliche Zahl kann durch Quadrieren vergrößert werden, ausgenommen ist die 1.

Wenn eine natürliche Zahl so nicht mehr vergrößert werden kann, dann müsste sie bereits die größte sein, also ist 1 die größte. (Schwierigkeiten mit dem Vergrößern der Zahlen hatte der Schriftsteller A. Strindberg (1849-1912), wie wir seiner Argumentation entnehmen können: " $1 \cdot 1 = 1$ , unzweifelhaft. Aber  $1^2$  ist nicht 1, weil das Quadrat einer gegebenen Zahl größer sein muss als die Zahl selbst. Die Wurzel aus 1 kann nicht 1 sein, weil die Wurzel aus einer Zahl kleiner sein muss als die Zahl selbst. Die Mathematik widerspricht in diesem Fall der Logik ...")

Wir beweisen, dass jedes Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig ist (Abb. 7.12).

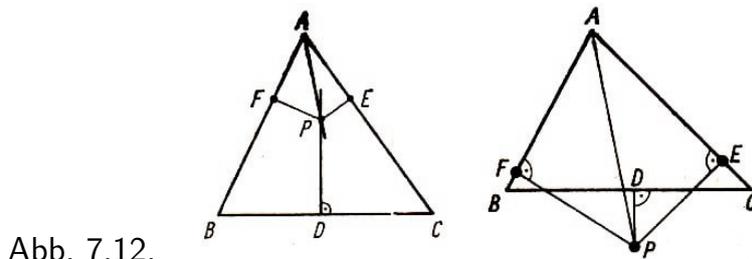


Abb. 7.12.

Dazu ziehen wir die Winkelhalbierende des Winkels bei  $A$  und die Senkrechte im Mittelpunkt  $D$  der Seite  $a$ . Beide Geraden mögen sich in  $P$  schneiden. Wenn kein Schnittpunkt  $P$  existiert, dann sind die Geraden parallel, also steht die Winkelhalbierende auf  $a$  senkrecht.

Dann ist aber bekanntlich das Dreieck gleichschenkelig, was zu zeigen war.

Also betrachten wir den Fall weiter, dass sich die Geraden in  $P$  schneiden. Von  $P$  fällen wir auf die Seiten  $b$  und  $c$  die Lote mit den Fußpunkten  $E$  und  $F$ . Es möge  $P$  innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegen;  $P$  auf  $\overline{BC}$  ist trivial. Mit Hilfe der Kongruenzsätze ergibt sich nacheinander in beiden Fällen

$$\triangle PDB \cong \triangle PDC \quad , \quad \triangle PAF \cong \triangle PAE$$

bzw.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \quad \text{und} \quad \overline{AF} = \overline{AE}, \quad \overline{PE} = \overline{PF}$$

Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke  $BPF$  und  $CPE$ , aus der wiederum  $\overline{BF} = \overline{CE}$  folgt. Also gilt  $\overline{AF} = \overline{AE}$  und  $\overline{BF} = \overline{CE}$ . Addition führt auf

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

w.z.b.w.

Was an diesem Beweis falsch ist, das sind die gezeichneten Figuren, die uns glaubhaft machen, dass zum einen  $P$  innerhalb des Dreiecks liegt, was unmöglich ist, und zum

anderen die Punkte  $E$  und  $F$  auf den Seiten  $b$  und  $c$  liegen, während in Wirklichkeit genau einer der Punkte auf der Verlängerung einer Dreiecksseite liegt. ("Geometrie ist die Kunst, aus falschen Figuren richtige Schlüsse zu ziehen." G. Polya)

Unter der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses versteht man den Quotienten aus der Zahl der für das Eintreffen günstigen Fälle und der Zahl der möglichen Fälle. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem üblichen Würfel eine 1 zu würfeln, ist deshalb  $1/6$ .

Der Mathematiker d'Alembert (1717-1783) beantwortete die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, bei zwei nacheinander ausgeführten Würfeln mit einer Münze, deren Vorder- und Rückseite einen Kopf bzw. ein Wappen aufweise, wenigstens einmal Kopf zu würfeln, wie folgt:

Wenn bereits im ersten Wurf der Kopf fällt, so ist der Wurf günstig, und ich kann aufhören. Fällt dagegen Wappen, so werfe ich weiter, wobei entweder der günstige Fall Kopf oder der ungünstige Fall Wappen möglich ist. Also gibt es zwei günstige und drei mögliche Fälle, die Wahrscheinlichkeit ist damit  $2/3$ .

Nun sieht man leicht, dass bei zwei Würfeln die folgenden Möglichkeiten bestehen:

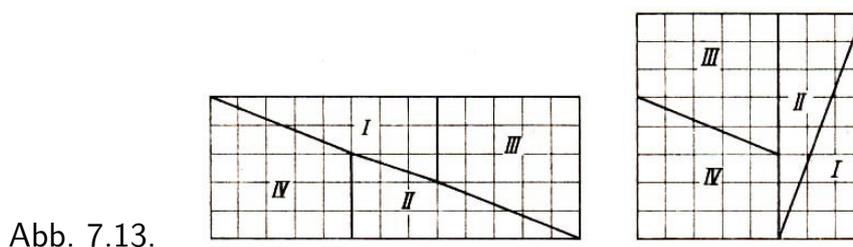
1. Wurf: Kopf Wappen Wappen Kopf
2. Wurf: Kopf Kopf Wappen Wappen

Das sind drei günstige bei vier möglichen Fällen, mithin ist die Wahrscheinlichkeit  $3/4$ . Der Fehler in d'Alemberts Überlegung liegt darin, dass bei ihm nicht alle Würfe gleichberechtigt sind.

Aus der näherungsweise Gleichheit

$$\frac{5}{8} \approx \frac{8}{13} \quad (\text{bzw. } 65 = 5 \cdot 13 \approx 8 \cdot 8 = 64)$$

ergibt sich folgender geometrischer Trugschluss, der in Abbildung 7.13 gezeigt wird.



Drei Kinder haben je 10 M und kaufen sich dafür gemeinsam einen Ball für 30 M. Nach dem Verkauf stellt der Ladeninhaber fest, dass der Ball nur 25 M kostet und schickt seinen Lehrling mit den überzähligen 5 M den Kindern nach.

Der Lehrling gibt jedem Kind 1 M und behält für seine Bemühungen die restlichen 2 M. Damit hat jedes Kind nur 9 M für den Ball gezahlt, insgesamt zahlten die Kinder 27 M. Mit den 2 M des Lehrlings ergibt das aber erst 29 M. Herauszufinden, wo die fehlende Mark ist, überlassen wir dem Leser (Übung 7.4).

Schwieriger ist eine Antwort bei den Angriffen, die auf die Logik an sich unternommen

werden, und als deren Resultat zwei miteinander unvereinbare Sachverhalte erscheinen. Das ist tödlich in der Mathematik, weil eine Theorie, die zwei logisch unvereinbare Sachverhalte enthält, wertlos ist, da sich in ihr jede beliebige Aussage herleiten lässt. ("Wenn du mit deinem Geist an deinem Geist arbeitest, wie kannst du da eine ungeheure Verwirrung vermeiden?" Seng-Ts'au).

Die logischen Trugschlüsse werden Antinomien oder Paradoxien genannt, wobei die letztere Bezeichnung zweideutig ist, da sie auch im Sinn von Abschnitt 7.5. benutzt wird.

In der kürzesten Fassung, die auf den Kreter Epimenides zurückgeht, lautet eine Grundidee "Alle Kreter lügen."

Da Epimenides Kreter ist, muss er gelogen haben. Also hat er doch die Wahrheit gesagt. Damit lügen nicht alle Kreter. Folglich hat Epimenides nicht die Wahrheit gesagt ... Das Denken verfängt sich letztendlich in sich selbst.<sup>31</sup>

In einer alltäglichen Situation kann dieser Widerspruch auftreten, wenn uns ein Fremder rät: "Nehmen Sie nie einen Rat von Fremden an!". Auch in der Literatur taucht er bei Cervantes (1547-1616) in seinem Roman "Don Quijote" auf.

Es gibt dort eine Brücke über einen Fluss, an deren Ende ein Gerichtshaus steht. Die Richter sprechen Recht nach dem eigenartigen Grundsatz: Wenn jemand über die Brücke geht, so soll er erklären, was er wollte. Sagt er die Wahrheit, so kann er gehen. Lügt er, so wird er gehängt. Eines Tages kam ein Wanderer, der sagte: "Ich gehe über diese Brücke, um an jenem Galgen zu sterben."

Mathematisch eingekleidet erscheint dieses Dilemma seit 1901 in Russells Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, wenn gefragt wird, ob sich diese Menge selbst enthält oder nicht.

Entsprechend geht es in den Festlegungen zu, ob sich ein Friseur eines Ortes, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren, nun selbst rasiert oder nicht, bzw. kann Gott als allmächtiges Wesen einen so schweren Stein schaffen, dass er ihn nicht aufheben kann?

## 7.5 Worauf beruhen Trugschlüsse ?

Was ich lehren will, ist: von einem nicht  
offenkundigen Unsinn zu einem offenkundigen übergehen.  
L. Wittgenstein

Es kommt beim Beweisen darauf an, sowohl Regeln korrekt zu befolgen als auch jeden Einfall auf logische Stichhaltigkeit zu prüfen, also insbesondere die Richtigkeit der Voraussetzungen.

Wenn z.B. in einer Rechnung durch einen Ausdruck  $x$  dividiert wird, so ist entspre-

---

<sup>31</sup>Dieses Dilemma des Verfangens in den eigenen Gedanken hat Morgenstern in dem "Gespräch einer Hausschnecke mit sich selbst" beschrieben. "Heimlich träumen Mensch und Erde" . Berlin 1969, S. 65.

chend der Regel  $x = 0$  auszuschließen, und der Fall  $x = 0$  darf nicht etwa am Ende der Überlegungen hieraus gefolgert werden, sondern er ist als getrennter Fall zu betrachten. Sonst lässt sich aus  $2(a - a) = a - a$  die Gleichheit  $2 = 1$  erschließen.

Einfälle sind zwar wünschenswert, aber stets kritisch zu prüfen. Psychologische Tests haben z.B. gezeigt, dass fast jeder von uns auf Grund der Ähnlichkeit von Figur und Klanggestalt die in der Abbildung 7.14 gegebene Zuordnung von Figur und Wort selbst treffen würde.

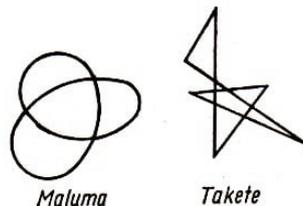


Abb. 7.14.

Ähnlich verhält es sich bei dem Problem:  $A$  ist der Sohn von  $B$ , aber  $B$  nicht der Vater von  $A$ . In welchem Verhältnis stehen  $A$  und  $B$  zueinander? Das Begriffspaar Vater-Sohn der abstrakten Frage verdrängt i. allg. die äußerst einfache Lösung, dass  $B$  die Mutter von  $A$  ist.

Aus der Lerngeschichte des Denkens ergibt sich, dass das verallgemeinernde Denken notwendig für den Erfolg war. Daher rühren einige inzwischen unbewusst eingeschliffene Verfälschungstendenzen des Denkens.

Wenn die Voraussetzungen eines Schlusses bejahend sind, dann neigen wir spontan eher zu bejahenden als zu verneinenden Behauptungen; allgemeine Voraussetzungen wie 'alle  $a$  sind' ziehen eher allgemeine Behauptungen wie 'alle  $b$  sind' als einschränkende Behauptungen 'wie einige  $c$  sind' nach sich.

Gelungene oder schöne Schlüsse sowie Schlüsse, die bereits gemachte Erfahrungen bestätigen bzw. die Behauptung zu stützen scheinen (Wunschdenken), werden von uns bevorzugt. Wir fallen (nach R. Laing) auf Psychologismen wie "Wenn Ihr nette Jungs seid, dann bezahlt einer von Euch die Rechnung" herein, denn aus "Ich bezahle nicht" folgt doch (aber nur psychologisch) "Ich bin nicht nett".

Oder etwas wissenschaftlicher in "Viele Leute glauben, der Sitz der Vernunft sei im Hirn. Seit man Hirne geöffnet hat, wurde dort die Vernunft noch nicht gesehen. Deshalb glauben viele Menschen nicht mehr an die Vernunft."

Trugschlüsse treten oft auf, wenn das Wesen einer Sache noch nicht richtig verstanden wurde, was ja beim Suchen eines Beweises zunächst in der Regel der Fall sein wird. Es ergeben sich so oft von vornherein zum Scheitern verurteilte Lösungsversuche.

Stellen wir uns die einfache Frage, warum ein ebener Spiegel, der rechts und links vertauscht, das nicht auch mit oben und unten tut, was auf Grund der Symmetrieverhältnisse zu erwarten wäre.

Warum bleiben diese Eigenschaften auch nach Drehungen des Spiegels erhalten? Befragte versuchen häufig diesen unangenehmen Fragen auszuweichen, indem sie auf die Beschaffenheit unseres Sehapparates verweisen, sind dann aber durch den Hinweis verblüfft, dass die Spiegeleigenschaften unabhängig von unserer Körperlage sind, also auch für liegende Beobachter ungeändert bleiben.

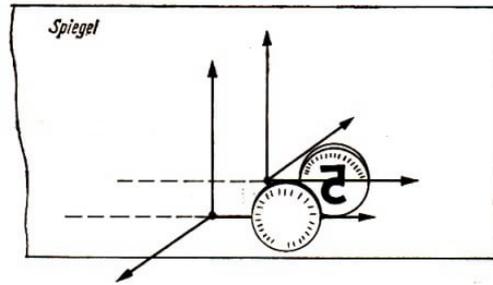


Abb. 7.15. Ein Spiegel vertauscht vorn und hinten (bezüglich der Spiegelebene)

Der Trugschluss, der hier erfolgt, beruht darauf, dass keinesfalls rechts und links bzw. oben und unten vertauscht werden, sondern nur vorn und hinten (bezüglich der Spiegelebene), was in Abbildung 7.15 die jeweiligen Achsen deutlich machen.

Da Menschen äußerlich nahezu rechts-links symmetrisch sind, fällt die Vertauschung von rechts und links besonders ins Auge und bietet sich an, um uns bequem von dem identifizierten Spiegelbild zu unterscheiden.

Antinomien ergeben sich ebenfalls aus mangelnder Einsicht in die theoretischen Verhältnisse und stellen sich um so leichter ein, je abstrakter und unbekannter das betrachtete mathematische Gebiet ist. Dass es unsinnig ist, sich Weihnachtspostkarten im Geschäft als Weihnachtsgeschenk einpacken zu lassen, liegt auf der Hand.

Andererseits schließt die Tatsache, dass es in der Ebene regelmäßige  $n$ -Ecke für jede natürliche Zahl  $n > 2$  gibt, aber die Entsprechung im Raum, die platonischen Körper, auf fünf Grundtypen beschränkt sind, ohne ausreichende räumliche geometrische Erfahrung die Gefahr ein, widersprüchliche Dinge infolge analoger Schlüsse als gesichert zu betrachten.

Auf Grund unserer Rechenerfahrung wird niemand von geraden Primzahlen größer als 10 sprechen, jedoch in der Mengenlehre oder anderen neuen Gebieten fehlen uns anfänglich diese Erfahrungen, so dass wir im Vertrauen auf den "gesunden Menschenverstand" bereits in den Voraussetzungen Antinomien unterstellen bzw. den Keim zu ihnen legen (z.B. Menge aller Mengen) und erst nach Entrichten von hinreichend vielem Lehrgeld die Ursache suchen.

"Später natürlich, so nach zwei bis drei Jahren, erscheint dann keuchend die weise alte Dame, die Erfahrung heißt, und wegen ihrer greisenhaften Schwerfälligkeit immer und überall zu spät kommt." (J. Verdaguer)

## 7.6 Paradoxien

"Es ist gegen die Vernunft", sagte Filby.  
 "Welche Vernunft?", fragte der Zeitreisende.  
 H. G. Wells

Während Trugschlüsse auf Fehlern im Schließen beruhen oder bereits von falschen Voraussetzungen ausgehen, sind Paradoxien richtige Ergebnisse, die uns nicht vertraut und deshalb ungewohnt sind. Was als paradox empfunden wird, ist stets abhängig von der gemachten Erfahrung.

Wenn zwischen zwei sich flächenhaft berührende Papierblätter geblasen wird, dann erwarten wir, dass die Blätter durch das Blasen auseinander gedrückt werden. Es ist aber gerade umgekehrt, da durch den entstehenden Unterdruck der strömenden Luft die Blätter aneinandergedrückt werden, und kein noch so starkes Blasen hilft dem ab.

Galilei erschien es 1638 paradox, dass zwischen allen natürlichen Zahlen und deren Teilmenge der Quadratzahlen eine eindeutige Zuordnung besteht:

1	2	3	4	5	6	7	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	4	9	16	25	36	49	...

(Ein Teil ist gleich dem Ganzen!). Wir, die wir mit der Mengenlehre vertraut sind, finden Zuordnungen dieser Art oder die umkehrbare Zuordnung von  $n$  zu  $n + 1000$  bzw. von  $n$  zu  $2n$  sowie die umkehrbare Zuordnung der Punkte von je zwei beliebigen Strecken, wie sie in Abbildung 7.16 gezeigt wird, nicht mehr ungewöhnlich.

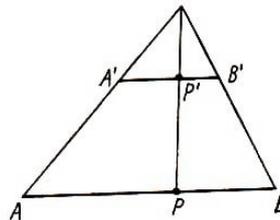


Abb. 7.16.

Wenn wir jedoch diese abstrakten Vorschriften mit Inhalt füllen, wie es D. Hilbert getan hat, dann ist folgendes Beispiel möglich:

Ein Hotel mit unendlich vielen Betten kann, selbst wenn es "voll besetzt" ist, noch 1000 oder sogar unendlich viele Gäste aufnehmen, indem jeder Gast vom Zimmer mit der Nummer  $n$  in das Zimmer mit der Nummer  $n + 1000$  bzw.  $2n$  umzieht. (A. Kertész hat bemerkt, dass er in einem solchen Hotel nicht wohnen möchte, da sich die Gäste in einem dauernden Umzug befänden.)

Bei der ersten Beschäftigung mit der höheren Analysis begegnet jeder auf Schritt und Tritt Paradoxien. Es ist augenscheinlich, dass die Summe  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  beliebig anwächst, wenn ausreichend viele natürliche Zahlen addiert werden. Bei der Summe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \tag{3}$$

würde man dies nicht unbedingt für möglich halten, da ja nach einem winzigen Teil ein noch winzigerer hinzugefügt wird. Wegen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ergeben sich aber beliebig oft Teilsummen, die größer als  $1/2$  sind, so dass auch diese Reihensummen schließlich jede vorgegebene reelle Zahl übertreffen können. Erstaunlicherweise bleibt dieser Sachverhalt bestehen, wenn als Nenner nur Primzahlen zugelassen werden. Wird jedoch über Quadratzahlen als Nenner summiert, so bleibt der Wert stets unter  $\pi^2/6$ .

Denken Sie sich zwei gleiche Ziegelsteine aufeinander gelegt, wobei ihre größten Seitenflächen übereinander liegen sollen. Der obere Stein wird nun längs der größten Kanten verschoben, wodurch ein freitragender Teil des Ziegels entsteht. Der verschobene Ziegel wird so lange stabil auf dem anderen liegen, wie sich sein Schwerpunkt noch über dem unteren Ziegel befindet. Wird der Ziegel auch dann weiter vorgeschoben, wenn sein Schwerpunkt bereits über der Kante des unteren Ziegels liegt (Grenzlage), so wird er abkippen.

Wir nehmen ein System von zwei Ziegeln in der Grenzlage und stellen es wie oben beschrieben auf einen dritten Ziegel gleicher Größe mit dem Ziel, das System der oberen Ziegel so zu bewegen, dass der freitragende Vorschub möglichst groß wird. Dann packen wir dieses Bauwerk auf einen vierten Ziegel usw. Wie groß ist unter idealen Umständen der erzielbare Vorschub?

Wir setzen die längste Ziegelkante gleich  $2a$ , womit der Schwerpunkt eines Ziegels von der kleinsten Kante den Abstand  $a$  hat. Zur Vereinfachung möge die Masse jedes Ziegels gleich 1 sein, so dass im Schwerpunkt eines Systems von  $n$  Ziegeln die Masse  $n$  zu denken wäre.

Es sei an der Abstand des Schwerpunkts eines Systems aus  $n$  Ziegeln von der überstehenden kleinsten Kante des obersten Ziegels. Gemäß der Definition des Schwerpunkts ergibt sich der Abstand  $s_{n+1}$  des Schwerpunkts für ein System von  $n+1$  Ziegeln in der Grenzlage wie folgt:

$$s_{n+1} = \frac{ns_n + (s_n + a)}{n+1} = s_n + \frac{a}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Mit  $s_1 = a$  erhalten wir hieraus

$$s_{n+1} = s_n + \frac{a}{n+1} = s_{n-1} + a \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) = \dots = a \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right)$$

Bis auf den Faktor  $a$  gleicht  $s_{n+1}$  damit der obigen Reihe (3). Also kann der Schwerpunkt einen beliebig großen Abstand von der "vordersten" Ziegelkante haben, bzw. der Überhang der Ziegel lässt sich mit wachsender Ziegelanzahl zwar langsam, jedoch beliebig vergrößern! Sie können sich mit Dominosteinen oder Spielkarten schnell davon überzeugen.

Unvorstellbar ist dem Leser sicher die Tatsache, die S. Banach und A. Tarski 1924 entdeckten, dass eine Kugel in endlich viele Stücke (genauer in endlich viele Punktmengen) zerlegt werden kann und aus diesen Stücken zwei neue Kugeln ohne "Hohlraum" zusammengesetzt werden können, ohne dabei die Stücke zu deformieren, wobei jede der zwei Kugeln genau so groß wie die ursprüngliche ist!

Das Paradoxe liegt in der mit dem Problem verbundenen physikalischen Anschauung, denn hier wird der Satz von der Erhaltung der Masse verletzt. Die mathematische Zerlegung (d.h. Abbildungen von Punktmengen) der Kugel hat aber nichts mit Aufteilung von Massen zu tun, ganz abgesehen davon, dass es sich bei dem Beweis von Banach und Tarski um einen reinen Existenzbeweis handelt.

Interpretieren wir in der Abbildung 7.16 die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{A'B'}$  als Stäbe o.ä., dann erscheint die Paradoxie uns in vertrauterer Umgebung.

Paradox ist uns aber immer noch die Tatsache, die den Unterschied zwischen den Dimensionen aufzuheben scheint, dass nämlich eine umkehrbar; eindeutige Abbildung zwischen den Punkten einer Strecke und dem darüber errichteten Quadrat besteht.

### Übungen

7.1. Ist es möglich, dass ein (grammatischer) Satz und seine formale Verneinung zugleich richtig sind?

7.2. Gibt es eine Formel, die für jede natürliche Zahl  $n$  Primzahlen liefert?

7.3. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck. Mittels einer Zickzacklinie (d.h. einem zusammenhängenden Streckenzug mit End- bzw. Knickpunkten auf den Dreiecksseiten einschl. Eckpunkten) soll das Dreieck in 5 Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt werden!

7.4. Wo ist die fehlende Mark des angegebenen Problems?

7.5. Am Montag betritt der Mathematiklehrer die Klasse mit der Erklärung, dass in dieser Woche eine Arbeit geschrieben wird. Fritz erkundigt sich nach dem genauen Termin und erhält als Antwort, dass die Arbeit nur dann geschrieben wird, wenn Fritz nicht darauf gefasst ist.

Fritz argumentiert: "Sonnabends kann die Arbeit nicht mehr geschrieben werden, weil das die letzte Möglichkeit ist, und das wüsste ich. Der Freitag entfällt auch, denn ist sie bis dahin nicht geschrieben, so kann sie, weil der Sonnabend ausfällt, auch am Freitag nicht mehr geschrieben werden, da ich es dann wieder wüsste.

Donnerstag usw. bis Montag entfallen aus dem gleichen Grund. Also kann die Arbeit überhaupt nicht geschrieben werden."

Ist die Beweisführung korrekt oder kann die Arbeit doch geschrieben werden?

## 8 Lösungen

Im allgemeinen überzeugt man sich durch Gründe, die man selber gefunden hat, besser als durch die, die einem anderen eingefallen sind.

B. Pascal

1.1. -

1.2. Geöffnetes Band ist vierfach verdreht. Verkleben ergibt ein Rohr, danach Torus (Autoschlauch), Kante windet sich zweimal um ihn.

1.3. a) Die bewegte Münze rollt einmal am gleichen Umfang der festen Münze ab, deren Umfang ist jedoch um  $360^\circ$  gedreht: insgesamt 2 Drehungen.

b) Auf jeder festen Münze werden  $2/3$  des Umfangs zurückgelegt, hinzu kommen  $240^\circ$  Drehung des Umfangs: insgesamt  $8/3$  Drehungen (vgl. Abb. L 1).

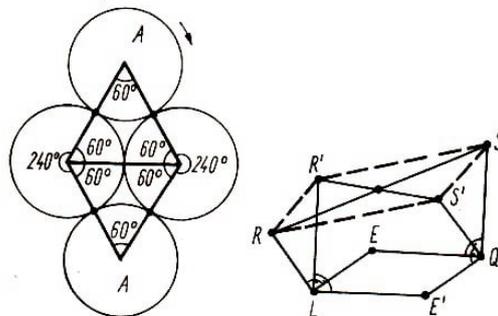


Abb. L.1., L.2.

1.4. Vom linken Griff wird eine Schlaufe so durch den rechten gezogen, dass sie sich über die Schere (von unten nach oben) ziehen lässt.

1.5. 11 Knaffs haben die gleiche Größe wie 10 Hunkis. Wenn 1 Hemputi kleiner als ein Plauz ist, so muss 1 Hemputi weniger als 20 Knaffs, d.h. höchstens  $18\frac{2}{11}$  Hunkis, also 18 Hunkis enthalten. 1 Hemputi enthält mindestens 1 Hunki, jedoch mehr Knaffs. 18 Hunkis haben die gleiche Größe wie 11 Knaffs (= 10 Hunkis) und 8 Hunkis, also maximal 8 Hunkis.

1.6. Die Lösung ist unabhängig vom Standort der Eiche!

Es seien  $E$  und  $E'$  zwei beliebig angenommene Standorte. Dann ist  $\triangle EE'L \cong \triangle LRR'$  und  $\overline{RR'} \perp \overline{EE'}$ ; analog  $\overline{SS'} \perp \overline{EE'}$ . Also  $\overline{RR'} \parallel \overline{SS'}$ .

Weiter ist  $\overline{RR'} = \overline{EE'} = \overline{SS'}$ . Damit ist  $RR'SS'$  ein Parallelogramm, folglich halbieren die Diagonalen einander (Ort des Schatzes) (vgl. Abb. L 2).

2.1. Falsche Aussagen: a, b, c; wahre Aussage: k; Aussagen mit unbekanntem Wahrheitswert: j, l; keine Aussagen: d, e, f, g (führen sowohl als wahr als auch als falsch angesehen auf Widersprüche, vgl. Abschn. 7.4.); i ist grammatisch richtig, aber ohne Sinn; h ist eine Aussagenfunktion (vgl. Abschn. 2.8.).

2.2. 'Weil' intensional: Sie lesen dieses Buch, 'weil' es sie interessiert ('weil' es 1981 gedruckt wurde) ; 'entweder-oder' extensional (vgl. Übung 2.4).

2.3. Aussage (vgl. Absatz vor 2.3.3).

	$A$	w	w	f	f	
	$B$	w	f	w	f	
2.4.		w	f	f	f	$A$ und $B$
		w	w	w	f	$A$ oder (auch) $B$ (Beispielsatz 3 aus 2.3.3.)
		w	f	w	w	wenn $A$ , dann $B$
		f	w	w	f	wenn $B$ , dann $A$
		w	f	f	w	$A$ genau dann, wenn $B$
		f	w	w	f	entweder $A$ oder $B$ (Beispielsatz 1 aus 2.3.3.)
		f	f	w	f	$B$ , aber nicht $A$
		f	w	f	f	$A$ , aber nicht $B$
		f	f	f	w	weder $A$ noch $B$
		f	w	w	w	nicht zugleich $A$ und $B$ (Beispielsatz 2, $A B$ )

Weitere Verknüpfung wie  $wwww$ ,  $ffff$  (unabhängig von  $A$  und  $B$ ) oder  $wwff$ ,  $ffww$  ( $A$  bzw.  $\bar{A}$ ) usw. sind uninteressant. Die Tafel ist bezüglich der Mittellinie antisymmetrisch (Negation). Das beweist die Behauptung.

2.5. Vgl. Übung 2.4.

2.6.  $A|B$  entspricht (nicht  $A$ ) oder (nicht  $B$ ) (Unverträglichkeit von  $A$  und  $B$ );  $A \rightarrow B$ ,  $A$  und  $B$  - Nachweis mit Wahrheitstafel.

2.7. a) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig oder nicht gleichschenkelig.

b)  $A$  kann nicht deutsch und nicht russisch sprechen (vgl. de Morgansche Gesetze in Abschn. 2.4.).

2.8. Ein Mensch ist älter als 200 Jahre ist eine falsche Aussage.

a) Ich bin kleiner oder gleich 2 m (größer); dann Implikation falsch (wahr).

b) Mensch ist kleiner oder gleich 2 m (größer); dann Implikation wahr (falsch).

c) wahr, d) wahr, e) wahr, f) falsch, g) falsch, h) wahr, i) wahr,

j) Ich bin groß (klein); dann Implikation falsch (wahr).

k) falsch (Satz v. ausgeschl. Widerspruch),

l) wahr, m) wahr, n) wahr, o) wahr, p) falsch.

2.9. a) ja, b) nein, vgl. Absatz vor Abschn. 2.3.2.

2.10.  $a = h$ ,  $b = f$ ,  $c = g$ ,  $d = e$  (vgl. Abschn. 2.4.).

2.11.  $B$  sagt die Wahrheit. Anderenfalls lügt  $C$  nicht, dann lügen aber  $A$  und  $B$ , also lügt  $A$ , womit Aussage von  $A$  auf Widerspruch führt.  $C$  und  $A$  lügen.

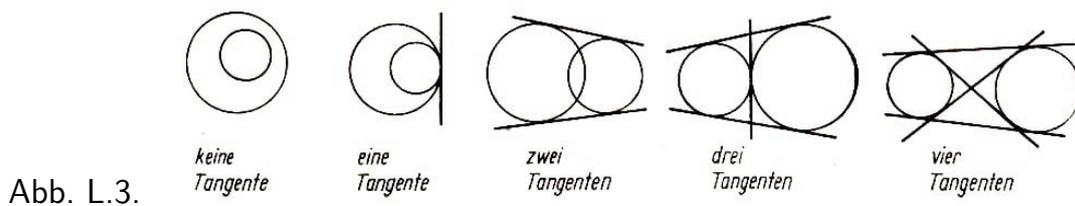
2.12. a) Antwort vor einer Stunde: Weg führt nach  $A$  (nicht nach  $A$ ) - Lügner nein (ja); Wahrheitssager ja (nein) ;

Antwort jetzt: Weg nach  $A$  (nicht nach  $A$ ) - Lügner ja (nein) Wahrheitssager ja (nein).

b) Weg führt nach  $A$  (nicht nach  $A$ ): Lügner nein (ja), Wahrheitssager ja (nein) - keine Entscheidung möglich.

2.13. 7 Negationen: gegen, Gegner, gegen, Antialkoholbewegung, nicht, nicht unterdrücken - also Alkoholgegner.

- 2.14. Aussagenfunktionen: a, c, d; b bezeichnet nur reelle Zahlen.
- 2.15. Nein, da Menge der Marsmenschen leer.
- 2.16. Die erste Aussagenfunktion ist für  $x = \pm 1$  nicht erklärt, für alle anderen Werte folgt die zweite aus ihr. a) nein, b) ja.
- 2.17. Menge, auf der  $A(x)$  erklärt ist, kann Teilmenge der Menge sein, über der  $B(x)$  erklärt ist (vgl. Abschn. 2.10.).
- 2.18.  $x$  ist nicht größer als 23 und  $e^\pi$  (d.h.  $x \leq \min(23, e^\pi) = 23$ ).
- 2.19. a) nicht  $\exists x : A(x) \leftrightarrow \forall x : \overline{A(x)}$ ,  
 b) nicht  $(\forall x : A(x)) \leftrightarrow \exists x : A(x)$ .
- 2.20. Nicht alle geraden ...
- 2.21. e), d), f); vgl. Üb. 2.19.
- 2.22. ja.
- 2.23. a) Nein, da an wesentlich anderen Stellen quantifiziert, b) ja.
- 2.24. a) Es gibt keine weißen Raben,  
 b) Es gibt wenigstens eine ungerade Primzahl,  
 c) Keine natürliche Zahl ist gerade,  
 d) formal: Wenigstens ein Marsmensch ist nicht größer als 2 m; sinngemäß: Wenn überhaupt Marsmenschen existieren, so gibt es wenigstens ... ,
- 2.25. Die Abb. L3 gibt alle möglichen gegenseitigen Lagen von zwei Kreisen an, wobei sich die jeweilige Anzahl der Tangenten von 0 bis 4 ausschließt.



Die Sätze "Wenn zwei Kreise einander umschließen, dann haben sie keine Tangente" usw. ziehen damit die Gültigkeit ihrer Umkehrungen "Wenn zwei Kreise keine gemeinsame Tangente haben, dann umschließen sie einander" usw. nach sich.

- 2.26. a) Wenn für zwei Kreise gilt, dass, wenn ihre Sehnen gleich sind, sie dann die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben, so sind die Kreise gleich.  
 Wenn gilt, dass, wenn gleiche Kreise Sehnen enthalten, sie dann den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, so sind die Sehnen gleich.  
 Wenn Sehnen in zwei Kreisen gleiche Abstände vom Mittelpunkt haben, dann sind sowohl die Sehnen als auch die Kreise einander gleich. (falsch)  
 Wenn gleiche Kreise Sehnen enthalten, dann gilt, wenn sie vom Mittelpunkt gleichen Abstand haben, so sind die Sehnen gleich.

Wenn in zwei Kreisen Sehnen gleich sind, dann gilt, wenn sie den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, so sind die Kreise gleich.

b) Wenn ein Viereck ein Rechteck (also ein Parallelogramm) ist, dann sind die Diagonalen gleich.

Wenn ein Rechteck gleiche Diagonalen hat, dann ist es ein Parallelogramm.

Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann ist es Parallelogramm und die Diagonalen sind gleich.

2.27. Als wahr kann angenommen werden: Ich fresse keinen Besen, ebenfalls können wir die Implikation als richtig unterstellen (sonst bestände keine Grundlage, etwas zu folgern). Die Kontraposition der Implikation liefert dann: Strindberg hat das Rundreiseproblem nicht bewältigt.

2.28. Die ersten drei Beispiele führen auf wahre Ergebnisse mit falschen Schlüssen, das vierte Beispiel zeigt die Falschheit des Vorgehens.

2.29. Wir gehen vom letzten Spiel aus. Dann folgt einfach:

	1. Spieler	2. Spieler	3. Spieler
nach 3. Spiel	24	24	24
nach 2. Spiel	12	12	48
nach 1. Spiel	6	42	24
Anfang	39	21	12

Mit diesen Ausgangswerten werden rückschließend tatsächlich die Endgewinne erreicht.

3.1. Ja, wenn A 1 "Es gibt eine natürliche Zahl 2 ..."

3.2. a) Die positiven reellen Zahlen bilden eine Gruppe.

b)  $a \circ b = \log_r a + \log_r b$ ;  $a = 1$ ,  $b = r^{-1} \rightarrow 1 \circ r^{-1} = -\log_r r = -1 < 0$  G 1 nicht erfüllt.

3.3. Es gilt

$$f_1 \circ f_2 = f_1(f_2) = f_2 = \frac{1}{x}$$

$$f_2 \circ f_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = f_2$$

$$f_1 \circ f_1 = x$$

$$f_2 \circ f_2 = \frac{1}{f_2} = x = f_1$$

also  $f_1 = e$  (G3),  $f_1 = (f_1)^{-1}$  und  $f_2 = (f_2)^{-1}$  (G4) sowie G1 ist erfüllt. G2 durch Nachrechnen aller Möglichkeiten.

3.4. Modell ist z.B. die Menge  $\{1, a, b\}$  mit  $1' = a$ ,  $a' = b$ ,  $b' = a$ , womit 1 und b gleiche Nachfolger haben, restlichen Axiome gelten.

4.1.  $(a - b)^2 \geq 0 \rightarrow (a + b)^2 \geq 2ab$ . Gleichheit nur für  $a = b$ . Folgerungen:  $a^2 + b^2 \geq$

$$2ab \implies (a+b)^2 \geq 4ab \rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$$

4.2. Aus Übung 4.1

$$\frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a} \geq 2 + \frac{b}{b} + \frac{a}{a} = 4 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{a+b}$$

4.3.  $\log_a b = x, \log_b a = y \rightarrow a^x = b, b^y = a \rightarrow a^x = (b^y)^x = b \rightarrow x = \frac{1}{y} > 0$   
Behauptung nach Übung 4.1.

4.4. Hebelarme:  $a_r, a_l$ ; Wägestück:  $G$ ; rechts bzw. links gewogene Menge  $g_r$  bzw.  $g_l$ .  
Hebelgesetz:  $a_l g_l = a_r G$  und  $a_r G = a_r g_r \rightarrow$  (Übung 4.1).

$$g_l + g_r = G \left( \frac{a_r}{a_l} + \frac{a_l}{a_r} \right) > 2G$$

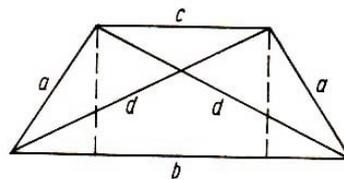


Abb. L.4.

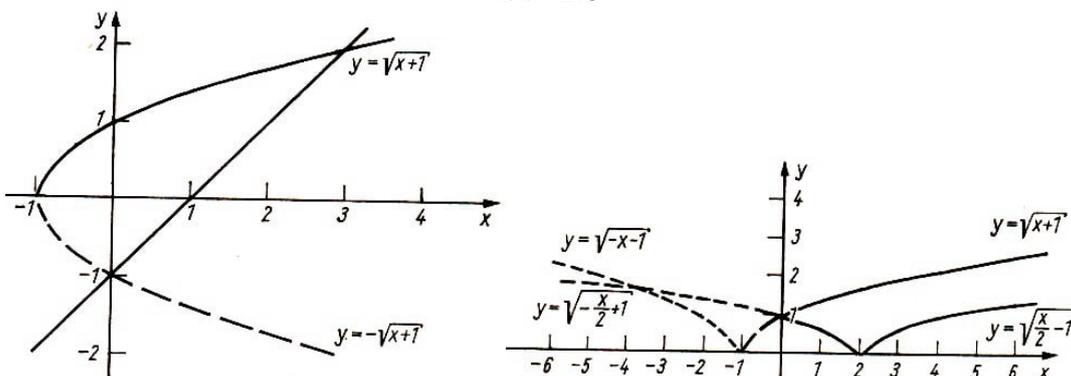
4.5. Abb. L4:  $x = \frac{b-c}{2}, d^2 = h^2 + (b-x)^2 = h^2 + \frac{(b+c)^2}{4}, a^2 = h^2 + \frac{(b-c)^2}{4} \rightarrow d^2 = a^2 + bc.$

4.6. Wegen  $4 \cdot 2 < 9$  ist  $2\sqrt{2} < 3$

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2} < 6$$

4.7. Beim Quadrieren führen  $y = \sqrt{\phantom{x}}$  und  $y = -\sqrt{\phantom{x}}$  auf die gleichen Werte. Daher liefern die "negativen Funktionen" scheinbar Schnittpunkte. Beim Quadrieren kann die erforderliche Einschränkung "Radikand positiv" übersehen werden, so dass z.B. für alle  $x$  die Funktion  $y = \sqrt{|x+1|}$  ( $= \sqrt{-x-1}$  für  $x \leq -1$ ) anstelle von  $y = \sqrt{x+1}$  für  $x \geq -1$  erscheint. Vgl. Abb. L5.

Abb. L.5.



4.8.  $0 < x + 5 = |x|^2 - 2|x| + 1$ .  $x \geq 0$ :  $x + 5 = x^2 - 2x + 1$ ,  $x_{1,2} = 4, -1$ ; nur  $x_1 = 4$  ist Lösung.

$x < 0$ :  $x + 5 = x^2 + 2x + 1$ ,  $x_{3,4} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$ ,  $x < 0$  ist Lösung (mit  $x_3 + 5 > 0$ ),  $x_4 > 0$  entfällt.

4.9. Bei einer Wägung kann von drei Kugeln entschieden werden, welche schwerer ist: zwei auf die Waage, eine wird zurückgelegt, bei Gleichgewicht ist es die zurückgelegte. Bei zwei Wägungen können bei der ersten entsprechend 3 Kugeln zurückgelegt und 6 direkt verglichen werden, insgesamt 9.

4.10. a) Die Menge Wein, die im Wasserglas verbleibt, wird am Löffel durch Wasser ersetzt und in den Wein gebracht.

b) Vom Kugelvolumen  $\frac{4}{3}\pi R^3$  wird der Zylinder  $2r\pi(R^2 - r^2)$  und zweimal der Kugelabschnitt  $\pi h^2(R - \frac{h}{3})$  mit  $h = R - r$  abgezogen. Resultat:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

4.11. Der Standort der Eiche wird direkt in die Quelle gelegt.

4.12. Es sei  $w_0$  eine Lösung im angegebenen Intervall mit  $x_0 = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  teilerfremd).

Dann ist  $p^3 = pq^2 + 5q^3$ .  $p \nmid q$ , aber  $p|5$ , d.h.  $p = 1$  oder  $5$ .

$p = 1$ :  $x_0$  liegt für alle  $q$  nicht im Intervall, für  $p = 5$  liegen  $\frac{5}{1}, \frac{5}{2} (> 2), \frac{5}{4}, \frac{5}{5} (< \frac{3}{2})$  nicht im Intervall.  $x_0 = \frac{5}{3}$  ist keine Lösung.

4.13. Kontraposition: Wenn  $\frac{a-b}{a+b}$  kürzbar, so auch  $\frac{a}{b}$ ;  $a - b = rn$ ,  $a + b = rm \rightarrow 2a = r(n + m)$ ,  $2b = r(m - n) \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{r}{r} \cdot \frac{m+n}{m-n}$ .

4.14. Da  $n$  keine Quadratzahl ist, hat  $n$  wenigstens einen Primfaktor mit ungerader Potenz, etwa  $p^k$ . Aus  $\sqrt{n} = \frac{r}{s}$  ( $r, s$  teilerfremd) folgt  $ns^2 = r^2$ ;  $p^k|n \rightarrow p^k|r^2 \rightarrow p^{k+1}|r^2$  (weil  $k$  ungerade), aber  $p^{k+1} \nmid r^2$  entgegen der Voraussetzung.

4.15.  $\angle P = \angle Q$ , also  $\overline{QM} \parallel \overline{PC}$ . Damit muss  $Q = P = A$  angenommen werden, also  $\angle B = \angle C$ .

4.16. Jeder Weg hat 4 waagerechte und vier senkrechte Wegstücke  $w$  und  $s$ , also sind alle Wege durch die Permutation von  $(4 + 4)$  Elementen gegeben, wobei aber  $4! \cdot 4!$  Wege zusammenfallen, da das Vertauschen von  $w$  bzw.  $s$  untereinander den Gesamtweg nicht ändert. Also  $\frac{8!}{(4!)^2} = 70$ .

4.17. Es gibt 6 Möglichkeiten zu halbieren, 5 zu vierteln (Abb. L 6).

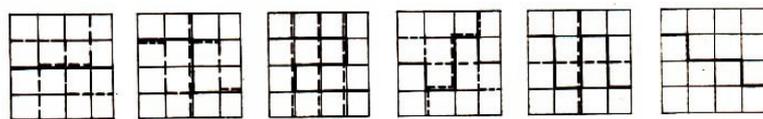


Abb. L.6.

4.18. Das Brett sei in die Felder zerlegt und die 8 nummerierten Randfelder in der angegebenen Weise mit Bindfäden befestigt, die allen möglichen Bewegungen der Springer entsprechen (vgl. Abb. L 7). Der "Kranz" der Randfelder kann geöffnet werden zum Kreis

$$\frac{1}{S} - 6 - \frac{3}{S} - 8 - \frac{5}{W} - 2 - \frac{7}{W} - 4 - 1$$

$S$  und  $W$  markieren die schwarzen und weißen Springer, die jetzt im Kreis verschoben werden, bis sie ihre Plätze getauscht haben.

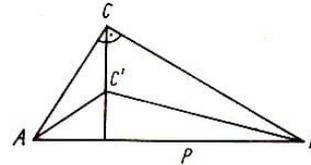
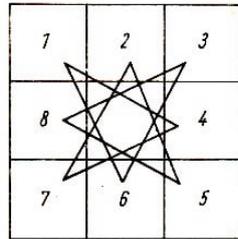


Abb. L.7.,L.8.

4.19 -

4.20.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ;  $n = 4, a = 10^4, b = 5^4 \rightarrow \frac{-10}{-5} = 2 = -2$ .

4.21. Vgl. Abb. L 8:  $\overline{BC} \neq \overline{BC'}$ , aber  $cp$  unverändert.

4.22. Die Aussage ist für algebraische Gleichungen gültig. Die nichtalgebraische Gleichung  $x^2 - |x| = 0$  hat die Lösungen -1, 0 und 1.

4.23. Es gibt 8 mögliche Kombinationen (L Lügner, W Wahrsager)

W	W	W	L	W	L	L	L	1. Einwohner
W	W	L	W	L	W	L	L	2. Einwohner
W	L	W	W	L	L	W	L	3. Einwohner

W W L ist einzige passende Kombination.

4.24. Stets teilt  $p$  die Zahl  $P(p)$ .

5.1. Es sei  $10^m := n$ . Die  $n$  aufeinanderfolgenden Zahlen  $(n+1)!+2, \dots, (n+1)!+(n+1)$  lassen sich der Reihe nach durch 2, ...,  $n + 1$  teilen.

5.2. Man stelle sich vor, dass am gleichen Tag mit dem Aufstieg ein "Double" des Wanderers den Abstieg beginnt; beide würden sich unterwegs treffen.

5.3. Knotenpunkte mit geradzahlig vielen Straßen können unberücksichtigt bleiben (Kreuzungen). Knoten mit ungeradzahlig Straßenzahl sind Anfang oder Ende einer Linie (danach können sie als Kreuzung angesehen werden). Es gibt 6  $\rightarrow$  und 2  $\rightarrow$  3, also insgesamt 8 Anfangs- bzw. Endstellen, damit werden 4 Linien benötigt.

5.4. Wenn  $A$  mit  $B$  einen Händedruck wechselt, so auch  $B$  mit  $A$ . Also ist die Gesamtzahl der Händedrücke stets gerade, aber  $5 \cdot 7 = 35$ .

5.5.  $2 \equiv 1, 2, 4$  modulo 7, also  $2^n + 1 \not\equiv 0$  modulo 7.

5.6. Es gibt 4 weiße und 5 schwarze Felder (oder umgekehrt). Ein zu einem weißen Feld benachbartes ist schwarz und umgekehrt, also keine Aufstellung möglich.

5.7. Wenn  $\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}$  kürzbar ist, so auch  $\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$ , was (wegen  $\frac{1}{7n+1}$  unkürzbar) auf einen Widerspruch führt.

5.8. Die fehlenden Felder haben gleiche Farbe. Die 31 Dominosteine benötigen aber je

31 weiße und schwarze Felder.

5.9. Die Zuleitung vom Gas- und Wasserwerk ist bei beliebiger Werkslage möglich. Die Zuleitungen begrenzen zwei Gebiete in der Ebene.

Gleichgültig, ob das E-Werk innerhalb eines Gebietes oder außerhalb beider liegt, stets muss eine Leitung eine Berandung kreuzen.

5.10. Vgl. Übung 5.3 oder Beispiel 4; da mehr als zwei ungerade Knoten, mehr als ein Weg nötig.

5.11. a)  $x = 3$ , b)  $x = 3$  ( $x = 0$  entfällt).

5.12. Wenn  $m$  das Alter des Mathematiklehrers und  $p_1, p_2, p_3$  das der 3 Personen sind, so gilt:  $p_1 + p_2 + p_3 = m$  und  $p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ .

Für die  $p$ , kommen alle möglichen Aufteilungen der Primfaktoren 2, 5 und 7 in Frage (z.B.  $p_1 = 2 \cdot 5$ ,  $p_2 = 5 \cdot 7$ ,  $p_3 = 7$ ). Da der Mathematiklehrer die  $p_i$  nicht ausrechnen kann, muss es mindestens zwei Aufteilungen mit gleicher Summe geben.

Alle solche sind  $p_1 = 5, p_2 = 10, p_3 = 49$  und  $p_1 = p_2 = 7, p_3 = 50$  mit  $m = 64$ . Für das Alter  $s$  des Schulleiters gilt:  $s \geq p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Wäre  $s \geq 50$ , so würde der Mathematiklehrer zwei Lösungen für  $p_3$  ermitteln, wäre  $s < 49$ , so würde sich keine Lösung ergeben. Also muss  $s = 49$  sein!

5.13. Da  $B$  weiß, dass  $p$  wenigstens drei Primfaktoren enthält ("Das wusste ich ..."), darf  $s$  sich nicht durch Addition von zwei Primzahlen ergeben. Für  $4 \leq s < 16$  ist das nur  $s = 11$ .

$B$  untersucht nun alle Zerlegungen  $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = \dots = 5 + 6$  und betrachtet die zugehörigen Produkte  $1 \cdot 10, 2 \cdot 9, \dots, 5 \cdot 6$ , unter denen sich das gesuchte Produkt  $p$  befindet. Es muss wenigstens drei Primfaktoren enthalten, die sich niemals zu Summanden mit einer Summe  $> 13$  anordnen lassen dürfen. Damit ist  $p = 18 = 2 \cdot 9$ , also  $m = 2, n = 9$ .

5.14. Wenn  $m$  durch  $r$  teilbar ist, so hat  $m - 1$  den Rest  $r - 1$  und umgekehrt. Ist  $n$  die Stufenzahl, dann gilt  $n = 3 \cdot 4k - 1$ . Aus  $n < 50$  folgt (wegen 5 teilt  $n$ ):  $k = 3$  bzw.  $n = 35$ . Entfällt die Nebenbedingung  $n < 50$ , so gibt es weitere Lösungen, z.B. für  $k = 8$ .

6.1.  $n = 1 : \frac{x_1}{x_1} = 1$ ;  $n$  beliebig;

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}) \left( \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}} \right) &= \\ &= (x_1 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) + x_{n+1} \left( \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) + \frac{1}{x_{n+1}} (x_1 + \dots + x_n) + \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}} \\ &\geq n^2 + \frac{x_{n+1}}{x_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_1}{x_{n+1}} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} + 1 \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

(Induktionsvoraussetzung und Übung 4.1).

6.2. Man betrachte das Polynom  $P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$ , Rest analog Beispiel 4.

6.3.  $n$  Kreise mögen  $a_n$  Flächenstücke liefern. Der  $(n + 1)$ -te Kreis  $K$  muss jeden

Kreis möglichst oft schneiden, um viele Flächenteile hinzubringen. Großkreise auf der Kugel schneiden sich höchstens zweimal (oder sind identisch), d.h.,  $K$  kann alle Kreise  $2n$ -mal schneiden (durch jeden Schnittpunkt nur zwei Kreise gehen lassen!).  $K$  geht also durch  $2n$  Flächenstücke und halbiert diese.

Also  $a_{n+1} = a_n + 2n$ . Wegen  $a_1 = 2$  ist  $a_n = n(n - 1) + 2$ . Gleiches Ergebnis für Ebene.

6.4.  $n = 2$ : Für je zwei (verschiedene) reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt entweder  $a < b$  oder  $b < a$ . Es sei  $M$  eine beliebige  $n$ -elementige Menge und die Behauptung gültig.

Für jede  $(n + 1)$ -elementige Menge erhalten wir durch Wegnahme eines beliebigen Elements  $c$  eine  $n$ -elementige Menge mit den größten und kleinsten Elementen, die wie für  $n = 2$  mit  $c$  verglichen werden.

7.1. Dieser Satz besteht aus sechs Wörtern. Dieser Satz besteht nicht aus sechs Wörtern.

7.2. Ja, z.B.  $2 + 1^n$  oder  $2 + (1 + (-1)^n)/2$ . Es war nicht gefordert worden, dass die Formel alle Primzahlen liefert.

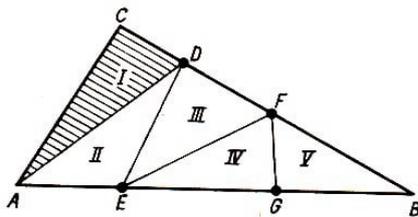


Abb. L.9.

7.3. Man muss von dem Dreieck ausgehen, von dem bereits eine Seite und der Inhalt gegeben sind, d.h. Dreieck I in Abb. L9. Es folgt  $\overline{CD} = \overline{CB}/5$ . Dann Dreieck II mit  $\overline{AE} = \overline{AB}/4$  usw.

7.4.  $25 = 3 \cdot 10 - (3 \cdot 1 + 2)$ , nicht  $3 \cdot 10 - 3 \cdot 1 + 2$ .

7.5. Gerade weil die Beweisführung korrekt ist, kann die Arbeit geschrieben werden, da Fritz auf Grund seines Beweises nicht mehr damit rechnet. Also sind überraschenderweise die Voraussetzungen für das Schreiben wieder gegeben.

## 9 Literatur

Was andere hierzu getrieben,  
sei kurz notiert und aufgeschrieben.  
F. Wille

- [1] Appel, K.; W. Haken : Der Beweis des Vierfarbensatzes. Spektrum der Wissenschaft 1 (1978), S. 83-91.
- [2] Descartes, R. : Ausgewählte Schriften. Leipzig 1980.
- [3] Dörrie, H.: Mathematische Miniaturen. Breslau 1943.
- [4] Einstein, A.: Geometrie und Erfahrung. Berlin 1.921.
- [5] Engel, W. (Herausgeber) : Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. 2 Bände. Berlin 1972 und 1975.
- [6] Gardner, M.: Mathematische Rätsel und Probleme. 3. Aufl. Braunschweig 1975.
- [7] Gardner, M.: Mathematisches Labyrinth. Braunschweig 1979.
- [8] Gradstein, I.: Prjamaja i obrotnaja teoremy. 5. Aufl. Moskva 1972.
- [9] Hadamard, J. S.: The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York 1944.
- [10] Halmos, P.: Wie schreibt man mathematische Texte. Leipzig 1977.
- [11] Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. 3. Aufl. Leipzig 1970.
- [12] Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik. 3. erw. Aufl. Stuttgart 1972.
- [13] Jaglom, I.: Ungewöhnliche Algebra. Leipzig 1976.
- [14] König, H.: Mathematische Sätze und ihre Umkehrungen. Mathematik in der Schule 12 (1968), S. 801-811.
- [15] Lakatos, I. : Beweise und Widerlegungen. Braunschweig 1979.
- [16] Lietzmann, W. : Wo steckt der Fehler? 5. Aufl. Leipzig 1969.
- [17] Manin, Y.I.: A Course on Mathematical Logic. Berlin 1977.
- [18] Meschkowski, H.: Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik. 2. Aufl. Mannheim 1978.
- [19] Meschkowski, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens. 4., erw. Aufl. Braunschweig 1969.
- [20] Monjallon, A.: Einführung in die moderne Mathematik. Leipzig 1970.
- [21] Otte, H. (Herausgeber): Mathematiker über die Mathematik. Berlin 1974.
- [22] Rusza, I. : Die Begriffswelt der Mathematik. Berlin 1976.
- [23] Segeth, W.: Elementare Logik. 8. Aufl. Berlin 1973.
- [24] Steinhaus, H.: 100 Aufgaben. Leipzig 1968

- [25] Stockmeyer, L. J.; A. K. Chandra: Intrinsically Difficult Problems. *Scientific American* 5 (1979), S. 124-132; gekürzte deutsche Übersetzung: Probleme mit nicht auffindbaren Lösungen. *Spektrum der Wissenschaft* 7 (1979), S. 87-90.
- [26] Tarski, A. : Einführung in die mathematische Logik. 5. Aufl. Göttingen 1977.
- [27] Tropicke, J.: Geschichte der Elementar-Mathematik. 2., erw. Aufl. Berlin 1923.
- [28] Vysin, J.: Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben. 2. Aufl. Leipzig 1975.
- [29] van der Waerden, B. L.: Einfall und Überlegung. 3., erw. Aufl. Basel 1973.
- [30] Wille, F.: Galerkins Lösungsnäherungen bei monotonen Abbildungen. *Mathematische Zeitschrift* 127 (1972), S. 10-16.

#### Quellennachweise

Die Wiedergabe der Bilder erfolgt mit Genehmigung der Escher Stiftung, Haags Gemeentemuseum, Den Haag, und der Deutschen Fotothek, Dresden. Eine weiteres Bild wurde mit freundlicher Zustimmung des Verlages John Wiley & Sons, New York, dem Buch von Ralph M. Evans "An Introduction to Color" entnommen.

Für die Abdruckerlaubnis des Gedichtes von H. M. Enzensberger aus dessen Buch "Gedichte 1955-1970" ist dem Suhrkamp-Verlag, Frankfurt/Main, verbindlichst zu danken.