VOLK UND WISSEN
SAMMELBÜCHEREI
NATUR UND WISSEN

MATHEMATIK

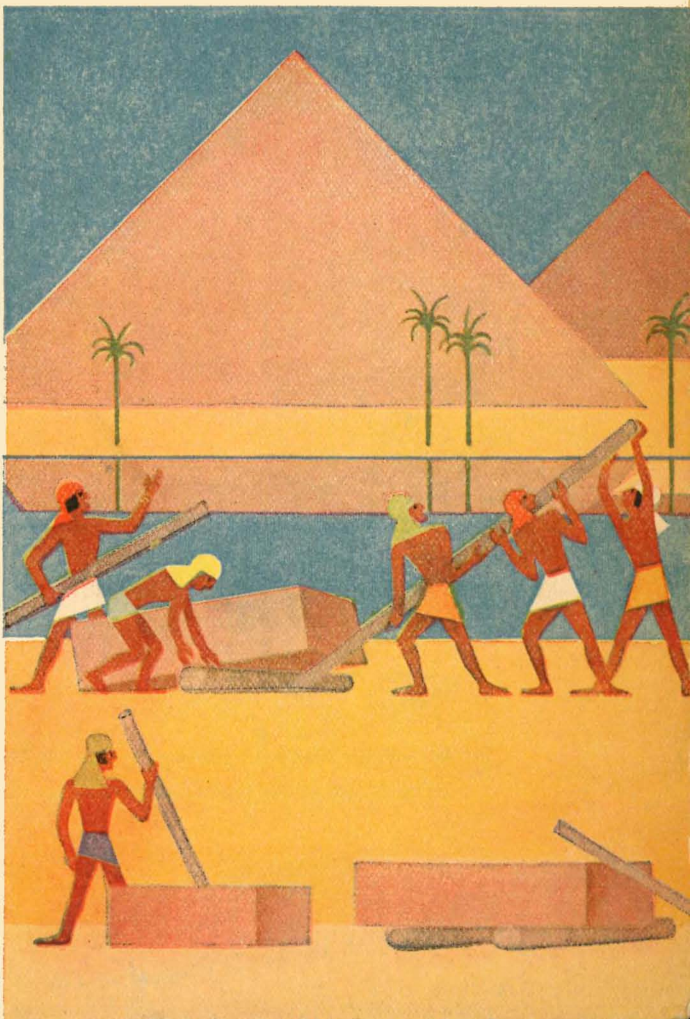
SERIE A • BAND 2
EINZELBAND 60 PFG.

* * * *

NATURGESETZ UND FUNKTIONALE ABHÄNGIGKEIT

EINFÜHRUNG IN DEN BEGRIFF DER MATHEMATISCHEN FUNKTION

Die einfachsten Naturgesetze und ihre praktische Nutzanwendung wurden schon frühzeitig von der Menschheit erkannt und zum Bau unkomplizierter Maschinen genutzt. Das gilt vor allem vom Hebel, ohne dessen Verwendung zum Transport gewaltiger Quader der Bau der Pyramiden, jener erstaunlichen Bauwerke der Ägypter, kaum möglich gewesen wäre. Der große Physiker des Altertums, Archimedes, soll den Ausspruch getan haben: „Gebt mir einen festen Punkt und eine genügend lange Hebelstange, so hebe ich die Welt aus ihren Angeln."



VOLK UND WISSEN
VERLAGS GMBH · BERLIN/LEIPZIG

Der vorliegende Band wurde von Dr. Karl Gey, Leipzig, verfaßt. Die Textillustrationen und das farbige Titelbild stammen von August Tschinkel, Berlin

NATURGESETZ UND FUNKTIONALE ABHÄNGIGKEIT

EINFÜHRUNG IN DEN BEGRIFF DER MATHEMATISCHEN FUNKTION

VOLK UND WISSEN SAMMELBÜCHEREI
NATUR UND WISSEN • SERIE A • BAND 2

VOLK UND WISSEN
VERLAGS GMBH • BERLIN/LEIPZIG

INHALT

In Futura gesetzt von Offizin Haag-Drugulin in Leipzig (M-103) · Druck des Innenteils und Umschlages von Wolfgang Leff, Borsdorf bei Leipzig (M-15)
Bestell-Nr. 12521 Lizenz Nr. 28 100. Tausend 1947

PREIS 60 PFENNIG

VORWORT

Die Aufgabe der Naturwissenschaft besteht darin, die oft genug zunächst wie mit einem dichten Schleier verhängten inneren Zusammenhänge eines Naturvorganges zu ergründen und die Gesetzmäßigkeit festzustellen, die seinem Ablaufe zugrunde liegt.

Dazu ist als erste Voraussetzung notwendig, die Frage oder, wie man zu sagen pflegt, das Problem richtig zu erkennen, das die Natur dem forschenden Geiste durch eine Erscheinung und ihre Auswirkung stellt. Dafür, wie diese Forderung zu erfüllen ist, kann freilich keine allgemeine Regel angegeben werden. Es gibt Probleme genug — denken wir beispielsweise an die Gesetze der Planetenbewegung! —, die von der Menschheit jahrhundertelang in ihrem Wesen nicht erkannt wurden, bis dann einer kam, dem Kraft und Gabe geschenkt waren, die Aufgabe aus der Vielheit der Erscheinungen heraus richtig zu erfassen und auch zu lösen.

Letztlich ist es immer wieder dieses drängende Gefühl,

«Daß ich erkenne, was die Welt
Im Innersten zusammenhält»,

der jene begnadeten Forscher beseelt, die mit unbeugsamem Willen und zäher Verbissenheit in harter und mühevoller Arbeit dem tieferen Grunde der Erscheinungen nachspüren, bis es ihnen endlich gelingt, das Rätsel zu erkennen und in einer Weise zu lösen, deren Schlichtheit und Einfachheit uns mit staunender Bewunderung, wohl aber auch mit Bescheidenheit zu erfüllen vermag.

Daß mit dem Gewinnen neuer Erkenntnisse oft genug praktische Nutzanwendungen von umwälzender Bedeutung verbunden sind, die — wie etwa die Entdeckung der elektrischen Glühlampe, der Röntgenstrahlen — der Menschheit unschätzbare Dienste zu leisten vermögen, sei nur nebenbei bemerkt.

Das Erkennen eines Problems bedeutet bestimmt noch nicht seine Lösung. Zu dieser kann nur eine umfassende und scharfe Beobachtung und die richtige Schlußfolgerung aus ihr führen. Die gewaltigen Fortschritte, die unsere Naturerkenntnis und damit auch die Nutzung der in der Natur schlummernden Kräfte in der Neuzeit gemacht hat, ist in erster Linie dem Umstande zu danken, daß seit dem großen italienischen Naturforscher GALILEO GALILEI (1564—1642) an Stelle der mystischen Vorstellung von der Harmonie der Welt, wie sie das Altertum und Mittelalter beherrschte, die genaue Beobachtung der Vorgänge selbst oder ihrer Nachahmung im Experiment getreten ist. Erst der Vergleich der bei genauen Messungen gewonnenen Beobachtungswerte ermöglicht es, den Grad einer Ursache und ihrer Wirkung richtig zu erkennen und deren inneren Zusammenhang in Form eines allgemein gültigen Gesetzes darzustellen. «Nicht blinde Spekulation», sondern, wie OTTO VON GUERICKE (1602—1686), der Erfinder der Luftpumpe, es gesagt hat, «die Erfahrung allein ist die Löserin aller Zweifel, die Beraterin aller Schwierigkeiten, die einzige Lehrerin der Wahrheit».

Und zu der Erfahrung gehört weiter das Denken, das aus den gewonnenen Erfahrungs-(d. h. Beobachtungs-)Werten die richtigen Folgerungen zu ziehen und die zwischen ihnen bestehenden gesetzmäßigen Zusammenhänge aufzudecken vermag.

Richtiges Erkennen der Aufgabe, genaue und zuverlässige Beobachtung und zwingende Schlußfolgerung aus den durch die Erfahrung gewonnenen Feststellungen, diese drei Forderungen bilden die Voraussetzung, um die Gesetzmäßigkeit eines Vorganges zu entdecken und in Form eines Naturgesetzes festzulegen.

DAS PHYSIKALISCHE GESETZ

Ein physikalisches Gesetz ist der eindeutige Ausdruck für den Ablauf zweier Vorgänge oder auch einer Vielheit von Vorgängen, die in der Weise zusammenhängen, daß der eine als die Ursache des anderen anzusehen ist oder, anders ausgedrückt, die in der Weise voneinander abhängen, daß die Beobachtungsgröße des einen sich ändert, wenn die des anderen einer Änderung unterworfen ist.

Eine Größe, die sich notwendig ändert, wenn sich eine andere ändert, die mit ihr in ursächlichem oder kausalem Zusammenhange steht, nennen wir eine Funktion der anderen. Ein physikalisches Gesetz drückt stets eine solche «funktionale Abhängigkeit» meßbarer Größen aus.

Ein Beispiel möge dies erläutern! Die Außentemperatur (d. h. die Temperatur, gemessen an der Oberfläche) eines bestimmten Ofens ist abhängig von der Menge des ihm zugeführten Heizmateriales. Wir wissen aus Erfahrung, daß die erzielte Temperatur um so höher oder tiefer wird, je größer oder kleiner diese Menge ist. Ändern wir also die eine Größe (Menge des Heizmaterials), so ändert sich damit auch die andere (Ofentemperatur).

Zwischen beiden, der Temperatur und der Heizstoffmenge, besteht also ein ursächlicher oder, wie wir sagen wollen, funktionaler Zusammenhang. Soll dieser genauer ergründet werden, so müssen wir eine möglichst umfassende Reihe von Versuchen anstellen. Daß in diesem Falle einem solchen Versuche kaum irgendwelche praktische Bedeutung, sondern lediglich der Wert eines «Gedankenexperimentes» beizumessen ist, das unser Erfassen der begrifflichen Zusammenhänge erleichtern soll, braucht wohl kaum betont zu werden.

Bei diesen Versuchen werden wir dem Ofen zu verschiedenen Zeiten, nachdem er immer wieder abgekühlt ist, wechselnde Brennstoffmengen zuführen, die wir jedesmal abwiegen, und in jedem Falle die damit erzielte Ofentemperatur messen. Auf diese Weise erhalten wir immer zwei einander zugeordnete oder koordinierte Zahlen (Brennstoffmenge und Temperatur). Diese zusammengehörigen Wertepaare können wir der besseren Übersicht wegen in einer

Werte- oder Funktionstabelle übersichtlich zusammenstellen, die etwa so aussieht:

Brennstoffmenge in kg	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
Temperatur in Celsiusgraden	15	19	25	30	35	40	46	50	55	59	65	70	75

Die Tabelle, die sich nach rechts noch durch weitere Versuche erweitern ließe, würde uns in die Lage versetzen, später zu jeder von uns aufgewendeten Brennstoffmenge die zu erwartende Temperatur abzulesen, aber auch die zu jeder von uns gewünschten Temperatur erforderliche Brennstoffmenge, ohne daß wir erst wieder neue Versuche anzustellen brauchten.

Darüber hinaus aber können wir uns den bereits in der Tabelle niedergelegten Zusammenhang unserer beiden Beobachtungsgrößen auch in einer Zeichnung veranschaulichen, wie das bei technischen Dingen sehr oft in Form eines sogenannten Diagrammes geschieht.

Zu dem Zwecke tragen wir auf einer waagerechten geraden Linie von einem beliebig als Nullpunkt 0 gewählten Punkte aus gleichlange Strecken ab, deren Länge je 0,5 kg Brennstoff entsprechen soll, und schreiben unter die dadurch erhaltenen Punkte die Zahlen 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 usw. (Abb. 1).

Durch den Punkt 0 zeichnen wir eine zur ersten Geraden senkrechte gerade Linie, auf der wir vom Nullpunkte aus ebenfalls gleichlange Strecken abtragen, deren jede einer Temperatur von 10° entsprechen soll, so daß wir neben die erhaltenen Streckenendpunkte die Zahlen 0°, 10°, 20°, ... schreiben können.

Die zusammengehörigen Zahlenpaare der Tabelle tragen wir nun in der Weise ein, daß wir in jedem Teilpunkte der waagerechten Geraden eine Senkrechte errichten, der wir mit Hilfe der linken Temperaturskala diejenige Länge erteilen (durch Ziehen einer Parallelen zur waagerechten Geraden), welche die zu der betreffenden Brennstoffmenge gehörige Temperatur angibt. Auf diese Weise erhalten wir eine Anzahl von Punkten, die wir durch einen Linienzug verbinden. Dieser Linienzug heißt die Schaulinie oder Funktionskurve und veranschaulicht uns den Zusammenhang der beiden Beobachtungsgrößen.

Ebenso wie die Tabelle ermöglicht es uns auch die Schaulinie, zu einer bestimmten Brennstoffmenge die dazugehörige Temperatur und andererseits zu einer bestimmten Temperatur die dazugehörige Brennstoffmenge abzulesen. Im ersten Falle gehen wir auf der waagerechten Geraden zunächst zu dem Punkte, welcher der betreffenden Brennstoffmenge entspricht, und von diesem Punkte in senkrechter Richtung aufwärts bis zur Schaulinie. Von dem erhaltenen Punkte der Schaulinie gehen wir in waagerechter Richtung auf die linksstehende Temperaturskala, an der wir die gesuchte Temperatur ablesen. Im zweiten Falle müssen wir gerade den umgekehrten Weg von der Temperaturskala aus gehen.

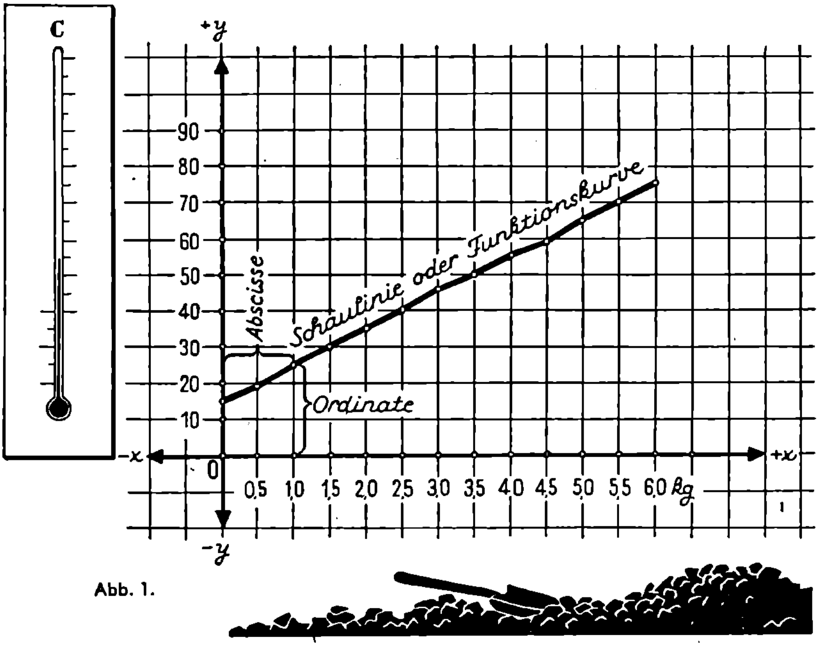


Abb. 1.

Anmerkung: Zwei zueinander senkrechte gerade Linien 0X und 0Y (Abb. 1), auf die man die Lage eines Punktes auf dem Zeichenblatt bezieht, indem man die Längen seiner Abstände von diesen «Bezugsgeraden» angibt, heißen Koordinatenachsen oder auch ein Achsenkreuz. Ihr Schnittpunkt 0 wird der Nullpunkt oder Anfang der Achsen genannt. Die Abstände eines Punktes von diesen Achsen nennt man seine Koordinaten (von koordinieren = einander zuordnen), und zwar den Abstand von der senkrechten Geraden 0Y (der sogenannten Ordinatenachse) seine Abszisse (d. h. Abgeschnittene), den Abstand von der Waagerechten 0X (der sogenannten Abszissenachse) seine Ordinate (d. h. Zugeordnete). Beide Abstände zusammen bilden die Koordinaten des Punktes. Durch seine Koordinaten in bezug auf ein festliegendes Achsenkreuz ist die Lage eines Punktes auf dem Zeichenblatt eindeutig bestimmt. Hat z. B. der Punkt die Abszisse 2, die Ordinate 3, so trägt man auf der Abszissenachse von 0 aus 2, auf der Ordinatenachse 3 der als Längeneinheit jeder Richtung festgesetzten Strecken ab und zieht durch jeden der dadurch auf den Achsen erhaltenen Punkte je die Parallele zu der anderen Achse. Beide Parallelen schneiden dann einander in dem Punkte mit den gegebenen Koordinaten (2, 3). Andererseits gehören zu jedem Punkte immer nur zwei bestimmte Koordinaten, die man durch seine Abstände von den beiden Achsen mißt. Um allen möglichen Lagen eines Punktes auf dem Zeichenblatt gerecht zu werden, versieht man seine Koordinaten noch je mit einem Vorzeichen. Dabei setzt man den von 0 nach rechts verlaufenden Teil der Abszissenachse als positive oder +X-Achse, den nach links verlaufenden Teil als negative oder —X-Achse fest und ferner den von 0 nach oben verlaufenden Teil der Ordinatenachse als positive oder +Y-Achse, den nach unten verlaufenden Teil als negative oder —Y-Achse fest. Je nachdem die Abszisse eines Punktes auf den positiven oder negativen Teil der Abszissenachse fällt, erhält sie das positive oder negative Vorzeichen, und Entsprechendes gilt für seine Ordinate. Der Koordinatenanfang 0 hat die Koordinaten 0, 0.

Betrachten wir die in Abb. 1 gezeichnete Schaulinie etwas näher, so ergibt sich, daß sie — abgesehen von einigen geringen Abweichungen — die Gestalt einer geraden Linie hat. Im Mittel entspricht jedem Zuwachs der Abszisse um eine Einheit immer ein Zuwachs der Ordinate um 10 Einheiten. Die Schaulinie bringt also einen gleichmäßigen Anstieg zum Ausdruck, der das besondere Kennzeichen einer geraden Linie ist.

Diesen Zusammenhang können wir auch durch einen Rechenansatz zum Ausdruck bringen. Bezeichnen wir allgemein die Temperatur mit t, die zugehörige Brennstoffmenge mit b, so ist, wie die Tabelle zeigt,

für $b=0$ $\quad t=15$

$b=1$ $\quad t=15+10\cdot 1=25$

$b=2$ $\quad t=15+10\cdot 2=35$

$b=3$ $\quad t=15+10\cdot 3=45$ usw.

Allgemein ist also
$$\mathbf{t=15+10\cdot b.}$$

Diese Formel oder Gleichung ermöglicht uns, für jede beliebige Brennstoffmenge b die zu erwartende Temperatur t im voraus zu berechnen. Wir haben nur im Einzelfalle den bestimmten Zahlenwert für b in die Gleichung einzusetzen und den dazu gehörigen bestimmten Wert für t auszurechnen. So ist z. B. für $b=3{,}5$
$$t=15+10\cdot 3{,}5=15+35=50.$$

Geringe Abweichungen, wie sie sich z. B. für $b=4{,}0$, also $t=15+10\cdot 4=55$ statt $t=54$ nach der Tabelle ergeben, sind auf Ungenauigkeit der Beobachtung oder sonstige Fehlerquellen unseres Versuches zurückzuführen.

Den Rechenansatz $t = 15 + 10 \cdot b$

nennen wir die Funktionsgleichung. Er bringt die gesetzmäßige Abhängigkeit der Temperatur von der Menge des Heizstoffes zum Ausdruck, und wir könnten ihn das Gesetz für die Heizung des Ofens nennen.

Die Zahlen b und t sind darin veränderliche Größen, die andere und andere Werte annehmen können. Die Zahlen 15 und 10 sind sogenannte Konstante (d. h. unveränderliche Zahlen), die durch Versuche bestimmt sind; man nennt sie daher auch empirische Konstante. Dabei wurde die erste Zahl (15) von uns willkürlich festgesetzt, da wir ja 15° als Ausgangstemperatur jedes Versuches annahmen. Die zweite Zahl (10) drückt eine dem Versuchsofen eigentümliche Konstante aus, die für andere Öfen oder Heizeinrichtungen durchaus nicht zuzutreffen braucht. Man nennt sie daher auch eine spezifische Konstante.

Im Hinblick auf diese Konstanten müssen wir zu unseren Feststellungen schon allerhand Einschränkungen machen. So muß u. a. die Anfangstemperatur des Ofens bei allen Versuchen die gleiche, nämlich 15° sein. Auch die Güte des Heizmaterials muß immer die gleiche bleiben, d. h. die Beheizung des Ofens muß immer unter den gleichen Bedingungen stattfinden. Insbesondere darf ihm nicht auf andere Weise Wärme entnommen oder zugefügt werden. Vor allem müssen wir unsere Versuche immer mit dem gleichen, unveränderten Ofen durchführen. Kurz, es müssen eben bei allen Vorgängen eine Reihe unveränderlicher Konstanten beibehalten werden, die in der Funktionsgleichung neben den veränderlichen Größen mit vorkommen.

Schon aus diesen Einschränkungen geht hervor, daß wir das gefundene Gesetz keineswegs verallgemeinern, d. h. als für alle Heizanlagen allgemein gültig ansehen dürfen, solange wir dies nicht durch weitere Versuche bewiesen haben. Gleichwohl ist es nützlich und notwendig, bei jeder Untersuchung dieser Art die Frage zu stellen: Kann die beobachtete Erscheinung als Sonderfall einer allgemeineren aufgefaßt werden? Können wir von dem aus, was wir zunächst gefunden haben, zu einem allgemeineren Gesetz weiterschreiten?

Überblicken wir an Hand des erörterten Beispieles noch einmal kurz die Schritte, die wir tun müssen, um zur Feststellung der für einen Vorgang gültigen Gesetzmäßigkeit zu gelangen, so ergibt sich, nachdem wir überhaupt erst die zu lösende Frage, das Problem, erkannt haben, folgendes:

Durch sorgfältige und genaue Beobachtung des Vorganges selbst, oder seiner Nachahmung im Experiment, stellen wir eine möglichst umfassende Übersicht zusammengehöriger Beobachtungs(Meß-)größen in einer Funktionstabelle zusammen. Den Inhalt dieser Tafel übertragen wir durch Zeichnung in eine Schaulinie, indem wir zusammengehörige Wertepaare als Koordinaten von Punkten auffassen und diese Punkte in ein beliebig gewähltes Achsenkreuz eintragen. Die Verbindung der Punkte durch einen Linienzug (Kurve) ergibt die Schaulinie. Durch kritische Betrachtung der Tabelle und der Schaulinie und durch Überlegung versuchen wir, einen Rechenausdruck zu gewinnen, der den funktionalen Zusammenhang zwischen den veränderlichen Beobachtungswerten und den bei der Beobachtung veränderlichen Konstanten darstellt. Alsdann ist zu prüfen, ob die von uns festgestellte Gesetzmäßigkeit nur Einzelbedeutung hat oder auch für andere Vorgänge der beobachteten Art gilt, also allgemeingültig ist.

Dabei sei noch bemerkt, daß es auch dann, wenn es trotz sorgfältigster Arbeit nicht gelingt, bis zur Feststellung eines Gesetzes vorzudringen, trotzdem möglich ist, zu neuen Erkenntnissen zu gelangen, indem man die Gründe des Mißlingens untersucht, hinter denen sich unter Umständen das gesuchte oder auch ein anderes Geheimnis verbirgt.

Im folgenden wollen wir nun an einigen praktischen Beispielen verfolgen, wie man zum Auffinden funktionaler Abhängigkeiten verschiedener Art gelangen kann, nachdem wir den Weg kennengelernt haben, der im großen und ganzen einzuschlagen ist.

BEISPIELE FUNKTIONALER ABHÄNGIGKEIT

1. DAS HOOKESCHE GESETZ

(direkt proportionale Abhängigkeit)

a) Hinleitung zur Aufgabenstellung

Die Erfahrung zeigt, daß vor allem feste Stoffe im allgemeinen einer Formveränderung durch Dehnung einen Widerstand entgegensetzen, zu dessen Überwindung eine bestimmte Kraft erforderlich ist. Nach dem Aufhören dieser deformierenden Kraft nehmen die Körper infolge der ihnen innewohnenden «Elastizität» wieder die ursprüngliche Gestalt an. Diese elastische Wirkung ist besonders stark, wenn man dem Körper die Gestalt einer Spiralfeder gibt, wobei die Frage entsteht: Welcher funktionale Zusammenhang besteht zwischen der Dehnung und der dehnenden Kraft einer solchen Feder? Die Antwort hierauf suchen wir zunächst durch Versuche zu gewinnen.

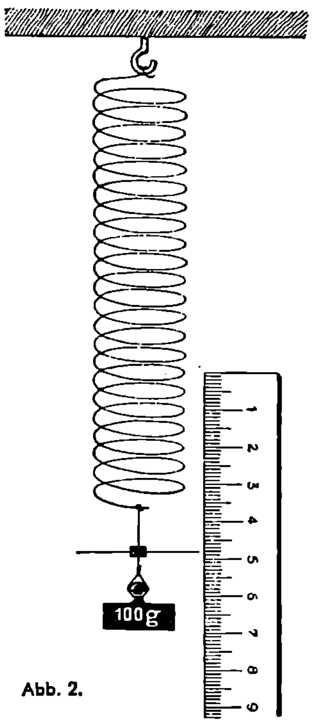


Abb. 2.

b) Versuchsanordnung

Wir verwenden eine Spiralfeder aus Stahldraht. Diese befestigen wir am oberen Ende an einer Aufhängevorrichtung, während wir das untere Ende der freihängenden Feder mit einem Gewichte G belasten, dessen Größe wir beliebig ändern können. Hinter oder neben die Feder, an deren unterem Ende wir außerdem einen Zeiger anbringen, stellen wir einen Maßstab auf (Abb. 2), vor welchem dieser Zeiger frei spielen kann. Bei jeder Belastung durch G (gemessen in Gramm) erleidet dann die Feder eine Dehnung von der Größe d (gemessen in Zentimetern), die wir am Maßstab ablesen.

Um festzustellen, ob die Feder nach Beseitigung der Belastung wieder ihre ursprüngliche Länge annimmt, also hinreichend elastisch ist, prüfen wir die Stellung des Zeigers mehrmals nacheinander bei belasteter und unbelasteter Feder.

Nunmehr hängen wir der Reihe nach immer größere und größere Gewichte G an die Feder und lesen an der Skala des Maßstabes jedesmal die dazugehörige Dehnung d der Feder ab. Zur Kontrolle unserer Messungen vermindern wir die Belastung in dem gleichen Maße, wie wir sie vorher vergrößerten, und prüfen erneut die Einstellung des Zeigers an der Skala. Auf diese Weise erhalten wir aus den einzelnen Versuchen eine Reihe zusammengehöriger Wertepaare von d und G, die wir übersichtlich zusammenstellen.

c) Wertetabelle

In Ergänzung der gefundenen Versuchswerte d und G berechnen wir noch das Verhältnis d:G jedes einzelnen Versuches und bilden am Schlusse den Mittelwert dieses Verhältnisses, indem wir die einzelnen Verhältniszahlen addieren und die erhaltene Summe durch die Anzahl der Versuche dividieren. Die dem Physikalischen Arbeitsbuch von GÜNTHER entnommene Tabelle erhält dadurch folgendes Aussehen, wobei noch bemerkt sei, daß bei der Ablesung der Dehnung die Zehntelmillimeter geschätzt sind:

Belastung G in g	Dehnung d in cm	Quotient d : G = k
50	2,40	0,0480
100	4,81	0,0481
150	7,19	0,0478
200	9,62	0,0481
250	12,00	0,0480
300	14,42	0,0481
350	16,83	0,0481
400	19,18	0,0479 (Mittel 0,0480)

d) Graphische Darstellung

Den Inhalt der ersten beiden Spalten der vorstehenden Tabelle übertragen wir als Punkte in ein Achsenkreuz, wobei wir auf die Abszissenachse die einzelnen Belastungen G und auf die Ordinatenachse die Dehnungen d durch Strecken in einem passend gewählten Maßstab aufzeichnen. Je zwei zusammengehörige oder, wie man sagt, einander zugeordnete Werte von G und d werden als Koordinaten von Punkten aufgefaßt, die Punkte eingezeichnet und durch einen Linienzug verbunden (Abb. 3).

Wir erkennen bereits aus der Tabelle, daß mit wachsender Belastung G auch die Dehnung d wächst und daß diese beiden Größen im Durchschnitt ein un-

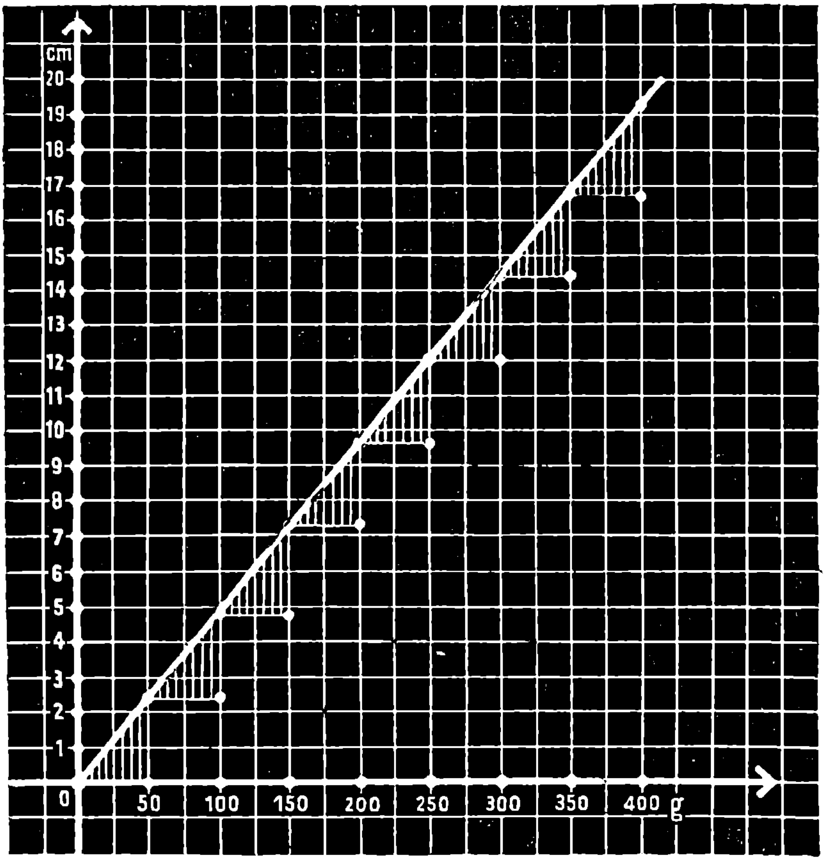


Abb. 3.

veränderliches Verhältnis d : G = 0,0480 zueinander haben. Wir sagen, die Dehnung sei der Belastung **direkt proportional** und nennen den Quotienten d : G den **Proportionalitätsfaktor**.

Für die Zeichnung ergibt sich hieraus, daß die kleinen, schraffierten, rechtwinkligen Dreiecke einander deckungsgleich (kongruent) sind, da immer zu der gleichen Belastungszunahme G_1 die gleiche Zunahme d_1 der Dehnung gehört. Die langen Seiten (Hypotenusen) dieser Dreiecke bilden deshalb alle mit der Waagerechten die gleichen Winkel und ergeben, aneinandergesetzt, als Schaulinie eine gerade Linie.

Die Schaulinie der direkt proportionalen Abhängigkeit ist hiernach immer eine Gerade.

Der Proportionalitätsfaktor $k = d : G$ (in unserem Falle $k = 0{,}0480$) ist eine konstante Größe und ist zugleich ein Maß für die Steigung der geraden Linie. Je kleiner k, desto flacher, je größer k, desto steiler verläuft sie. Da für $G = 0$ auch $d = 0$ ist, geht sie außerdem durch den Koordinatenanfang.

e) Funktionsgleichung

Der Zusammenhang zwischen d und G ist in diesem Falle sehr leicht zu finden, da der Quotient (das Verhältnis) $d : G$ immer den gleichen Wert k hat. Es ist also

$$\frac{d}{G} = k \text{ oder } d = k \cdot G,$$

und dabei bedeutet k eine konstante Zahl, die für die vorliegende Feder den Wert $k = 0{,}0480$ hat, für Federn anderer Art und aus anderem Material aber besonders bestimmt werden muß.

f) Folgerungen

Die Frage, ob die gewonnene Gleichung die Bedeutung eines allgemeinen Gesetzes hat, also auch für Federn jeglicher Art und aus jeglichem Material gilt, kann nur durch weitere Versuche beantwortet werden, scheint aber bei einiger Überlegung schon von vornherein zu bejahen zu sein. Allerdings sind für verschiedene Materialien auch verschiedene Werte von k zu erwarten, so daß der Größe k die Bedeutung einer empirischen Konstanten zukommt.

Eine genauere Untersuchung, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, ergibt in der Tat die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes, allerdings mit einer gewissen Einschränkung insofern, als die formverändernde Kraft G eine bestimmte Größe nicht überschreiten darf. Seine Entdeckung wird dem Engländer ROBERT HOOKE (1635—1703) zugeschrieben.

Daß sich an dieses Gesetz noch weitere Probleme anschließen, wie z. B. die Dehnung eines Drahtes, die Durchbiegung eines Stabes usw., sei nur nebenher erwähnt.

g) Praktische Nutzanwendung

Wie viele andere physikalische Gesetze hat auch das HOOKEsche Gesetz seine praktische Nutzanwendung in der Technik gefunden, indem es zur Konstruktion der sogenannten Federwaage geführt hat.

Aus der Gleichung $d = k \cdot G$ ergibt sich durch Auflösen nach G $\quad G = \frac{1}{k} \cdot d$,

die es gestattet, zu jeder Dehnung d das zugehörige Gewicht G zu berechnen. Die Größe $\frac{1}{k}$ (der reziproke Wert von k) ist dabei die Belastung, welche die Dehnung von 1 cm hervorruft, und hat bei unserem Beispiel den Wert 20,8 g/cm (d. h. 20,8 Gramm pro Zentimeter). Aus der aufgestellten Wertetafel ist es leicht, eine Skala für eine Federwaage aus einer Feder der verwendeten Art zu zeichnen.

2. DAS HEBELGESETZ

(indirekt proportionale Abhängigkeit)

a) Hinleitung zur Aufgabenstellung

Wir beobachten, daß wir z. B. einen zweirädrigen Karren an den Schubstangen stützen müssen, wenn er mit einer Last beladen wird und seine Ladefläche waagerecht bleiben, also nicht umkippen soll. Dabei hängt die Kraft, die wir zum Stützen aufwenden müssen, erfahrungsgemäß außer von der Ladelast davon ab, an welcher Stelle wir die Schubstangen anfassen. Zwischen der Last, der Stützkraft und der Lage ihres Angriffspunktes besteht offenbar ein bestimmter Zusammenhang.

Allgemein nennen wir eine unbiegsame Stange, die um einen festen Stützpunkt drehbar ist, einen H e b e l. Eine Kraft oder eine Last, die irgendwo an der Stange angreift, hat das Bestreben, den Hebel um den Stützpunkt zu drehen. Ihr senkrechter Abstand vom Stützpunkt heißt der H e b e l a r m. Die Vorrichtung dient dazu, durch eine bestimmte Kraft mit einem bestimmten Arm einer gegebenen Last, also einer zweiten Kraft, das Gleichgewicht zu halten. Dabei ergibt sich die Frage: Welche Abhängigkeit besteht zwischen der Kraft, ihrem Arm und der Last? Wir suchen sie zunächst durch Versuche zu beantworten.

b) Versuchsanordnung

Wir benutzen einen sogenannten z w e i a r m i g e n Hebel, indem wir etwa einen Metermaßstab genau in der Mitte durchbohren und mit einer Achse (Stricknadel oder dergleichen) senkrecht zur Stabrichtung versehen (Abb. 4).

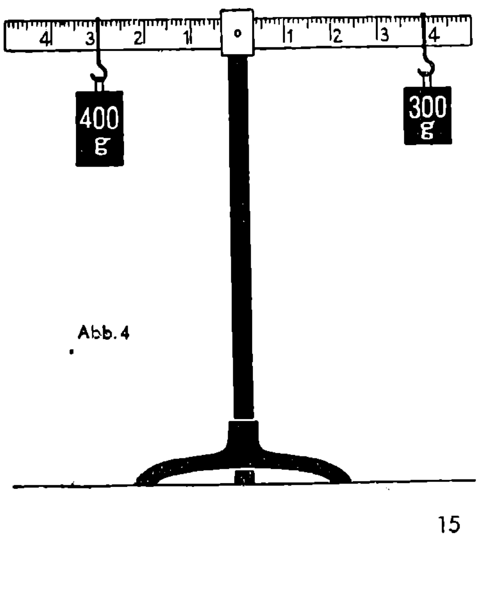


Abb. 4

Auf einem Gestell bringen wir Lager für die Achse an, so daß wir darauf den Stab, um die Achse frei drehbar, aufstellen können. In der Ruhelage muß sich der Stab waagerecht einstellen, falls seine beiden Hälften im Gleichgewicht sind; andernfalls müssen wir durch Austarieren die Gleichgewichtslage herstellen.

Nunmehr hängen wir auf der einen Seite des Stabes das Gewicht G_1 im Abstande (Arm) l_1 vom Drehpunkt auf und nehmen während des folgenden Versuches auf dieser Seite keinerlei Änderung vor. Auf der anderen Seite hängen wir der Reihe nach Gewichte von verschiedener Größe G auf, deren Abstand (Arm) l von der Achse wir durch Abtasten stets so wählen, daß der Hebel im Gleichgewicht ist, d. h. die Hebelstange sich genau waagerecht einstellt. Die auf diese ermittelten Paare einander zugeordneten Werte von G und l stellen wir nun in einer Tabelle übersichtlich zusammen.

c) Wertetabelle

Außer den Werten G und l schreiben wir in einer dritten Spalte noch das Produkt $G \cdot l$ auf, und wir erhalten für

$$G_1 = 300\ \text{g} \quad l_1 = 4\ \text{cm}.$$

Gewicht G in g	Abstand (Arm) l in cm	Produkt $G \cdot l$
(100)	(120,0)	(12000)
(200)	(60,0)	(12000)
300	40,0	12000
400	30,0	12000
500	24,0	12000
600	20,0	12000
700	17,1	11970
800	15,0	12000
900	13,3	11970
1000	12,0	12000 (Mittelwert 11993)

Die Tabelle zeigt, daß mit wachsendem G der Wert von l abnimmt. Hat sich z. B. das Gewicht G verdoppelt, so ist l auf die Hälfte vermindert, hat sich G verdreifacht, so hat sich l auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes verringert usw. Man sagt in diesem Falle, die Belastung G und der Hebelarm l sind zueinander i n d i r e k t p r o p o r t i o n a l. Aus der dritten Spalte erkennen wir, daß das Produkt $G \cdot l$ dieser beiden Größen stets den gleichen Wert 12000 (im Mittel 11993) hat.

Auf Grund dieser Tatsache sind die in den ersten beiden Zeilen stehenden eingeklammerten Zahlen durch Rechnung ergänzt worden; sie gehören also nicht zu den unmittelbaren Beobachtungswerten.

d) Graphische Darstellung

Welche Schaulinie ergibt nun diese indirekte Proportionalität von G und l? Tragen wir die einander zugeordneten Beobachtungswerte als Koordinaten von Punkten in ein Achsenkreuz ein, so ergibt deren Verbindung durch einen Linienzug die in Abb. 5 gezeichnete Kurve.

Eine Linie von dieser Gestalt wird in der Mathematik eine g l e i c h s e i t i g e H y p e r b e l genannt, die allerdings noch durch einen zweiten, spiegelgleichen Ast im linken unteren Feld des Achsenkreuzes ergänzt wird (gestrichelt angedeutet).

Sind x und y die Koordinaten irgendeines Punktes dieser Kurve, welche stets der Gleichung $y \cdot x = c$ oder $y = \frac{c}{x}$ (c konstante Zahl) genügen, so ergibt die

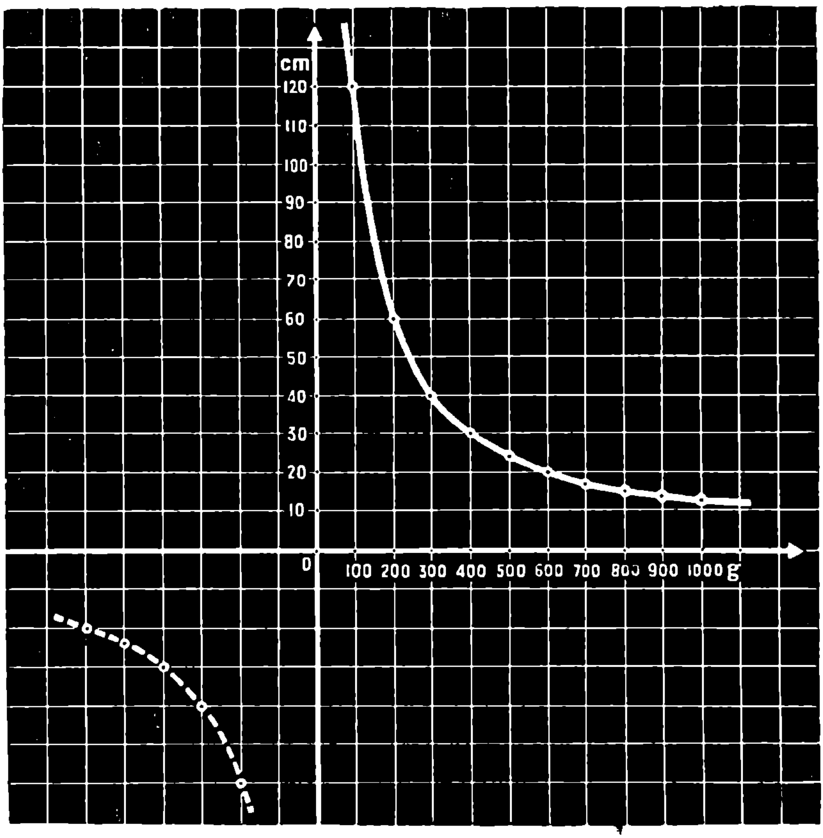


Abb. 5.

Abbildung dieser Funktionsgleichung stets eine gleichseitige Hyperbel als Schaubild. Diese hat die Eigenschaft, daß mit wachsender Abszisse x der zugehörige Ordinatenwert y kleiner und kleiner, mit abnehmendem Abszissenwerte x der zugehörige Ordinatenwert größer und größer wird. Daher nähert sich die Kurve auf beiden Seiten immer mehr den Koordinatenachsen, ohne diese selbst zu erreichen.

e) Funktionsgleichung

Da wir bereits aus der Wertetabelle feststellen konnten, daß die Größen G und l einander indirekt proportional sind, hat die Aufstellung der Funktionsgleichung keine Schwierigkeit. Es ist

$$G \cdot l = k \text{ oder } G = \frac{k}{l},$$

wobei k bei unseren Versuchen den konstanten Wert 12000 hat. Bilden wir das Produkt $G_1 \cdot l_1$ der während der Versuchsreihe festgehaltenen Größen G_1 und l_1, so ergibt dieses ebenfalls den Wert 12000. Dieses Produkt aus der Belastung und dem zugehörigen Hebelarm nennt man in der Physik das Drehmoment oder kurz das Moment des Gewichtes. Mit Hilfe dieses Begriffes können wir das in der gefundenen Funktionsgleichung wiedergegebene Hebelgesetz kurz so ausdrücken: **Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Momente beider Seiten den gleichen Wert haben.**

f) Folgerungen

Um die Allgemeingültigkeit des Gesetzes darzulegen, müßten noch weitere Versuche angestellt werden, vor allem auch mit anderen Werten von G_1 und l_1, die willkürlich abgeändert werden können. Dabei würde sich zwar im Einzelfall die Konstante $k = G_1 \cdot l_1$ ändern, je nach der Größe, die wir G_1 und l_1 erteilen, sonst aber würde stets die indirekte Proportionalität von G und l, d. h. die Funktionsgleichung

$$G = \frac{k}{l},$$

bestehen bleiben, wobei der Konstanten k der Wert $k = G_1 \cdot l_1$ zukommt, der aus G_1 und l_1 berechnet werden kann.

Überdies ließen sich die Versuche auch auf den sogenannten einarmigen Hebel ausdehnen, bei welchem die Belastungen G und G_1 auf derselben Seite der Drehachse angreifen, aber jetzt in Zugrichtungen, die einander entgegengesetzt sind, d. h. die eine senkrecht nach oben, die andere senkrecht nach unten.

Experimentell ließe sich das in der Weise verwirklichen, daß wir auf der einen Seite der Hebelstange im Abstande l_1 von der Achse einen Faden befestigen, diesen Faden über eine senkrecht über seinem Befestigungspunkt angebrachte Rolle führen (Abb. 6) und an sein freies Ende das Gewicht G_1 anhängen. Das Moment von G_1 wäre wiederum $G_1 \cdot l_1$, d. h. konstant.

Auch für den einarmigen Hebel ergibt sich das Gesetz der indirekten Proportionalität von Last und Arm, dessen Entdeckung man dem genialen Physiker des Altertums, ARCHIMEDES (287—312 v. Chr.), zuschreibt. Von ihm soll der Ausspruch stammen: «Gebt mir einen festen Punkt und eine genügend lange Hebelstange, so hebe ich die Welt aus ihren Angeln.»

g) Praktische Nutzanwendungen

Die Nutzanwendungen des Hebels sind ungemein umfassend und für unser tägliches Leben und unsere Technik von größter Bedeutung. Bei der Verwendung der Zange, der Schere, des Brotschneiders, der Brechstange, der Schubkarre, um nur einige Beispiele zu nennen, selbst beim Hochheben einer Last durch die Bewegung des Armes machen wir vom Hebelgesetz Gebrauch, ohne uns dessen jedesmal bewußt zu werden. Die gewaltigen Bauten der Pyramiden, deren Anblick uns noch heute in Staunen versetzt, bei denen ungeheure Steinquader bis in große Höhen übereinandergeschichtet wurden, wären undenkbar ohne Verwendung des Hebels (vgl. Text und Bild auf der Titelseite).

Die Technik benutzt das Hebelgesetz u. a. zur Konstruktion von Waagen verschiedener Art, deren einfachste die sogenannten Schnellwaagen sind, die an einem Hebelarm ein verschiebbares Gewicht, am anderen Arm eine feste Waagschale tragen. Auch die Hebekrane modernster Art, mit denen ungeheure Lasten mit erstaunlicher Leichtigkeit emporgehoben werden, gehören in das Gebiet der Anwendung des Hebelgesetzes.

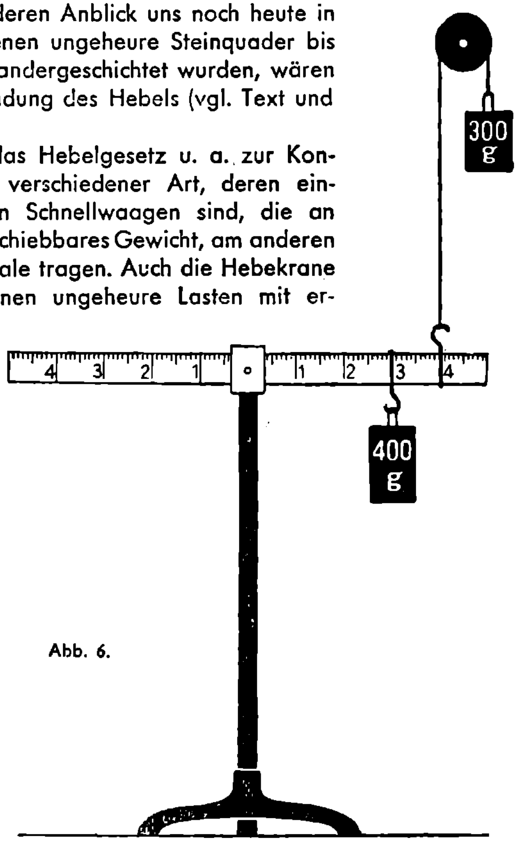


Abb. 6.

3. DIE FALLGESETZE

(quadratische Abhängigkeit)

a) Die gleichförmige und ungleichförmige Bewegung

Im täglichen Leben beobachten wir dauernd Bewegungsvorgänge verschiedener Art, ohne daß wir uns ihrer Eigenarten immer bewußt werden.

Wir nennen die Bewegung eines Körpers gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiträumen gleichlange Wegstrecken zurücklegt. Beispielsweise beruht die Ausbreitung des Schalles in der Luft auf einer gleichförmigen Bewegung, wobei sich der Schall in jeder Sekunde um etwa 333 m weiterbewegt. Im anderen Falle, bei welchem in gleichen Zeiträumen ungleich lange Wegstrecken zurückgelegt werden, reden wir von einer ungleichförmigen Bewegung. So ist z. B. die Bewegung eines Zuges beim Anfahren ungleichförmig, da die Lokomotive erst auf die notwendige Tourenzahl kommen muß und auch noch andere Widerstände zu überwinden sind, bis die Bewegung in eine angenähert gleichförmige übergehen kann.

Bei einer gleichförmigen Bewegung können wir die Geschwindigkeit in einfacher Weise durch die Wegstrecke angeben, die der Körper in der Zeiteinheit (Sekunde, Minute, Stunde usw.) zurücklegt. Diese Wegstrecke pro Zeiteinheit ist immer die gleiche, die Geschwindigkeit also konstant. Legt der Körper in t Sekunden den Weg s zurück, so ist seine Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ unverändert die gleiche. Das Verhältnis von Weg und Zeit ist ein direkt proportionales (vgl. Beispiel I), und die Gleichung

$$s = v \cdot t$$

gibt die funktionale Abhängigkeit des Weges s von der Zeit t wieder. Dabei ist v der Proportionalitätsfaktor; er hat die Benennung cm/sek (gelesen «Zentimeter durch Sekunde») oder auch m/min usw. je nach der verwendeten Längen- und Zeiteinheit. Die zuletzt angeführte Gleichung heißt das Weg-Zeitgesetz der gleichförmigen Bewegung; sie ergibt als Schaulinie eine Gerade.

b) Die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bei einer ungleichförmigen Bewegung indessen ändert sich die in der Zeiteinheit zurückgelegte Wegstrecke dauernd. Nimmt sie zu, so heißt die Bewegung eine beschleunigte, nimmt sie ab, eine verzögerte. Hierbei bietet die Feststellung der Geschwindigkeit gewisse Schwierigkeiten, da ja für jeden Augenblick die zugehörige Wegstrecke eine andere Länge hat.

Wächst die Geschwindigkeit eines in ungleichförmiger Bewegung befindlichen Körpers in der Zeit t_1 bis t_2 vom Betrage v_1 auf den Betrag v_2, so nennen wir das Verhältnis $\overline{b} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

seine durchschnittliche oder mittlere Beschleunigung (bzw. Verzögerung bei abnehmender Geschwindigkeit). Diese wird also durch das Verhältnis der Geschwindigkeitszunahme $v_2 - v_1$ zu der Zeit $t_2 - t_1$, in der sie erfolgt, gemessen und hat daher die Benennung cm/sek² (gelesen «Zentimeter durch Sekunde hoch 2») oder m/sek² usw., je nach der gebrauchten Streckeneinheit.

So hat z. B. ein anfahrender Eisenbahnzug, der 100 sek braucht, bis er die Geschwindigkeit von 20 m/sek erreicht, die durchschnittliche Beschleunigung $\frac{(20-0)\,\text{m/sek}}{100\,\text{sek}} = 0{,}2\,\text{m/sek}^2$. Vermindert der Zug, etwa beim Durchlaufen einer Kurve, seine Geschwindigkeit von 22 m/sek auf 16 m/sek im Verlaufe von 20 sek, so ist seine durchschnittliche Verzögerung $\frac{(22-16)\,\text{m/sek}}{20\,\text{sek}} = 0{,}3\,\text{m/sek}^2$.

Bei dieser Erläuterung haben wir aber wiederum von dem Begriffe «Geschwindigkeit» Gebrauch gemacht, obwohl dieser, da es sich um eine ungleichförmige Bewegung handelt, nicht den gleichen Sinn hat wie bei der gleichförmigen Bewegung. Um diesen Begriff zu klären, wollen wir zunächst den Begriff der mittleren oder durchschnittlichen Geschwindigkeit einführen.

Hat der bewegte Körper vom Ausgangspunkt 0 seiner Bewegung aus bis zum Punkte A seiner Bahn zum Zeitpunkte t_1 den Weg s zurückgelegt, hingegen bis zum Punkte B zum Zeitpunkte t_2 den Weg s_2, so gäbe das Verhältnis $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ des Wegzuwachses $s_2 - s_1$ zum Zeitzuwachs $t_2 - t_1$ seine Geschwindigkeit an, wenn er sich gleichförmig bewegt hätte. Da aber, wie wir annehmen, die Bewegung ungleichförmig sein soll, kommt dem Werte $\overline{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ nur die Bedeutung der durchschnittlichen Geschwindigkeit während der Zeit $t_2 - t_1$ zu, niemals aber die Bedeutung der tatsächlichen Geschwindigkeit in jedem Augenblicke zwischen den Zeiten t_1 und t_2. Diese tatsächliche Augenblicksgeschwindigkeit nennen wir die Momentangeschwindigkeit v an einem bestimmten Bahn- oder Zeitpunkt.

Je kleiner wir nun $t_2 - t_1$ und damit auch $s_2 - s_1$ wählen, um so mehr nähert sich der Quotient dem Werte der Momentangeschwindigkeit im Punkte A. Man sagt daher, die Momentangeschwindigkeit v sei der Grenzwert oder Limes (von lat. limes = Grenze) dieses Quotienten für den Fall, daß sich t_1 unbegrenzt t_2, also $t_2 - t_1$ unbegrenzt dem Werte Null nähert. Da man sehr kleine Größen mit dem griechischen Buchstaben Δ (Delta) zu bezeichnen pflegt, für $t_2 - t_1$ also Δ t, für $s_2 - s_1$ entsprechend Δ s schreibt, so gebrauchen wir für v die übliche Schreibweise

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Wenn wir auch die Momentangeschwindigkeit nicht messen können, so können wir doch den obengenannten Grenzwert unter bestimmten Voraussetzungen genau ausrechnen. Wie das in einfacher Weise geschieht, kann an dieser Stelle nicht erörtert werden. Angenähert erhalten wir die Momentangeschwindigkeit um so genauer, je kleiner wir Δt in diesem Rechenausdruck wählen.

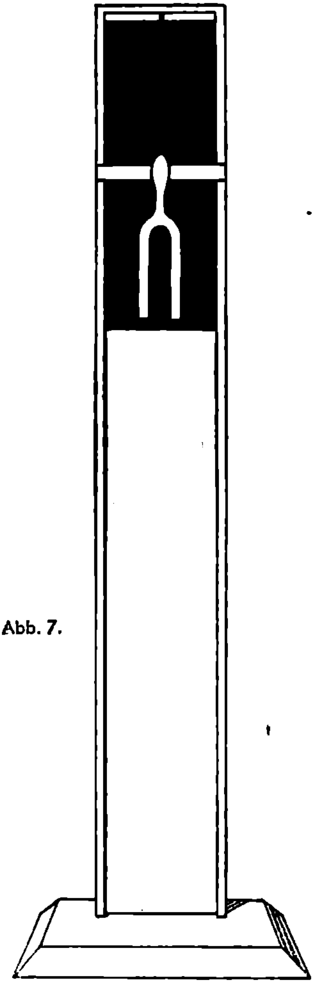


Abb. 7.

Hat die Beschleunigung immer den gleichen Wert, ist also das Verhältnis $b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ konstant, so nennen wir die Bewegung eine *gleichmäßig beschleunigte*. Bei einer solchen ist der Geschwindigkeitszuwachs in jeder Sekunde immer der gleiche und hat den konstanten Wert b cm/sek^2. Ist zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$, so ist sie nach einer Sekunde $v_1 = b$ cm/sek^2, nach 2 Sekunden $v_2 = 2 \cdot b$ cm/sek^2, nach 3 Sekunden $v_3 = 3 \cdot b$ cm/sek^2 usw., allgemein nach t Sekunden

$$v = b \cdot t \text{ cm/sek}^2.$$

Diese Gleichung drückt das *Geschwindigkeitszeitgesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung* aus. Da es eine direkt proportionale Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit angibt, ist die zugehörige Schaulinie eine Gerade.

c) Hinleitung zur Aufgabenstellung

Beobachten wir die Bewegung eines frei herabfallenden Körpers, z. B. eines Steines oder eines anderen schweren Gegenstandes, so stellen wir fest, daß die Bewegung immer rascher und rascher vor sich geht, die Geschwindigkeit also von Augenblick zu Augenblick zunimmt. Dabei drängt sich die Aufgabe auf, die Gesetzmäßigkeit einer solchen beschleunigten Bewegung zu ergründen. Bei der Lösung dieser Aufgabe bedienen wir uns zunächst des Versuches.

d) Versuchsanordnung

Der Entdecker des Fallgesetzes, der bereits eingangs erwähnte GALILEI, hat seine Versuche am 55 m hohen schiefen Turm in Pisa mit frei fallenden Körpern, also durch direkte Beobachtung des natürlichen

Fallvorganges, durchgeführt. Dabei bestand eine besondere Schwierigkeit bei der Messung kleiner Zeitstrecken, die im Hinblick auf die damals verfügbaren Zeitmesser reichlich ungenau durchzuführen war.

Die GALILEIschen Versuche könnten wir durch Fallversuche etwa in einem hinreichend hohen Treppenhause wiederholen, indem wir Steine aus verschiedenen Höhen herabfallen lassen und die zugehörigen Fallzeiten mit einer Stoppuhr abstoppen. Da wir aber im allgemeinen einen Versuchsraum mit ausreichender Höhe nicht zur Verfügung haben, können wir uns damit helfen, daß wir kleinere Fallräume und daher auch kürzere Fallzeiten verwenden. Als Zeitmesser verwenden wir ein gutes Metronom, dessen Laufgewichtsstellung wir so regulieren, daß der zwischen dem ersten und zweiten Anschlag des Metronoms vom fallenden Körper zurückgelegte Weg gerade einen Meter lang ist. Die dadurch von uns festgesetzte Zeiteinheit beträgt dann 0,45 sek. Lassen wir also genau bei einem bestimmten Anschlag des Metronoms den Stein fallen, so beträgt die Fallstrecke bis zum nächstfolgenden Anschlag gerade 1 m. In den ersten beiden aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten beobachten wir dann einen Fallweg von 4 m, der sich in den ersten drei Zeiteinheiten auf 9 m, in den ersten vier Zeiteinheiten auf 16 m usw. erhöht. Aus diesem Ergebnis erkennen wir, daß sich die Fallhöhen wie die Quadrate der zugehörigen Fallzeiten verhalten.

Eine andere Versuchsanordnung (vgl. GRIMSEHL-TOMASCHEK, Lehrbuch der Physik) benutzt zur Zeitmessung die Schwingungen einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl (d. h. Zahl der Schwingungen in einer Sekunde). Auf einem etwa 2 m langen, lotrecht aufgestellten Brett (Abb. 7) werden parallel zu den Längskanten zwei Führungsleisten angebracht, in welchen eine etwa 60 cm lange, rechteckige Glasplatte frei fallen kann. Die Glasplatte wird am oberen Ende mit einem Faden am Brett befestigt und an ihrer Vorderseite berußt. Alsdann bringen wir noch vor der Platte eine Stimmgabel an, an deren unterem Ende eine Schreibspitze so befestigt ist, daß sie die berußte Fläche der Platte lose berührt. Die in Schwingungen versetzte Stimmgabel schreibt nun mittels der Spitze auf der be-

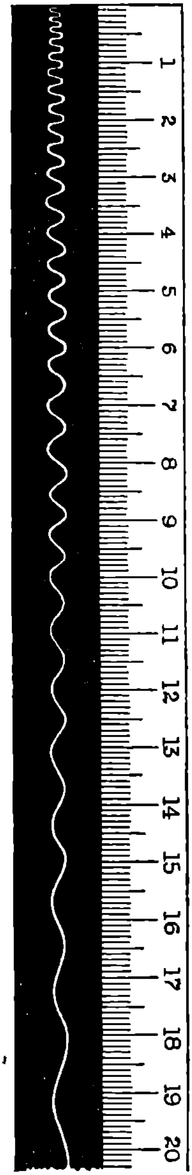


Abb. 8.

rußten Platte ihre Bewegung auf. Bringen wir die Platte durch Abbrennen des Aufhängefadens zum Fallen, so geschieht diese Aufzeichnung in Form einer Wellenlinie, deren Wellen immer langgezogener werden (Abb. 8).

Da die Stimmgabel zu einer ganzen Schwingung (d. h. einem vollständigen Hin- und Hergang) stets den gleichen Bruchteil einer Sekunde braucht, so gibt der Abstand der einzelnen Wellen (gemessen vom Wellenanfang zum nächstfolgenden, wobei eine Welle einen Wellenberg und das nachfolgende Wellental umfaßt) die in den einzelnen Zeiteinheiten von der fallenden Platte zurückgelegten Fallstrecken an. Diese Fallstrecken können wir hernach mit einem Maßstab genau messen.

Für den Fall, daß die Schwingungszahl der Stimmgabel 128 in der Sekunde beträgt, ist die für eine Schwingung, d. h. für die Erzeugung einer vollständigen Welle, erforderliche Zeit $\frac{1}{128}$ sek. Wegen der Kleinheit der Wellen ist es aus meßtechnischen Gründen zweckmäßig, den vierfachen Betrag hiervon, also $\frac{1}{32}$ sek, als Zeiteinheit zu wählen. Dieser entspricht dann der Abstand von einem Wellenanfang bis zum viertnächsten. Diese Abstände, die nach dem oberen Ende der Platte zu immer größer werden, messen wir mit einem Millimetermaßstab genau aus und stellen die Versuchsergebnisse übersichtlich zusammen.

e) Wertetabelle

I Beobachtungszeit t (Einheit $\frac{1}{32}$ sek)	II Gesamtfallstrecke s (in mm)	III Fallstrecke Δs in je $\frac{1}{32}$ sek (in mm)	IV Unterschied der Fallstrecken Δs je Zeiteinheit (in mm)
0	0	—	—
1	4,8	4,8	—
2	19,2	14,4	9,6
3	43,2	24,0	9,6
4	76,7	33,5	9,5
5	119,9	43,2	9,7
6	172,6	52,7	9,5
7	234,9	62,3	9,6
8	306,8	71,9	9,6
9	388,2	81,4	9,5
10	479,3	91,1	9,7
11	580,0	100,7	9,6
			Mittelwert 9,59

In der Spalte I sind die Werte der Zeiteinheiten (je $\frac{1}{32}$ sek) angegeben, in Spalte II die in diesen Zeiten zurückgelegten Gesamtfallstrecken (in Millimetern). In Spalte III stehen die Fallstrecken in den einzelnen aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten, also die Unterschiede (Differenzen) Δs je zweier aufeinander-folgender Werte von Spalte II. Spalte IV endlich enthält die Differenzen der aufeinanderfolgenden Werte der Spalte III, also die Unterschiede der in der zugrunde liegenden Zeiteinheit zurückgelegten Fallstrecken, deren Mittelwert 9,59 beträgt.

f) Graphische Darstellung

Die in Spalte I und II der Tabelle stehenden Wertepaare ergeben, als Koordinaten eingetragen, die einzelnen Punkte der Schaulinie für die Abhängigkeit des Weges von der Zeit (Abb. 9).

Die Verbindungslinie dieser Punkte ist eine krumme Linie (Kurve), die der Platzersparnis wegen nicht in vollem Umfange der Tabelle gezeichnet worden ist. Dabei ist die Kurve noch durch ihr Spiegelbild in bezug auf die Ordinatenachse ergänzt worden (gestrichelt gezeichnet); sie wird eine quadratische Parabel genannt.

Überdies könnten wir auch die durch Spalte I und III und durch Spalte I und IV wiedergegebenen Abhängigkeiten in der gleichen Weise graphisch darstellen. Im ersten Falle würden wir als Schaulinie ungefähr eine gerade Linie erhalten, da die Ordinaten der einzelnen Punkte immer um den gleichen Betrag (im Mittel 9,59 mm) zunehmen. Dadurch würde sich also eine direkt proportionale Abhängigkeit der in I und III stehenden Wertepaare ausdrücken. Die zweite Schaulinie wäre eine parallele Gerade zur Abszissenachse; sie zeigt an, daß die Zahlen der Spalte IV sich überhaupt nicht mit der Zeit ändern, also konstante Werte sind.

g) Funktionsgleichung

Aus der Tabelle bereits erkennen wir, daß sich die gesamten Fallstrecken wie die Quadrate der zugehörigen Fallzeiten verhalten, was wir bereits früher (Versuche mit dem Metronom) feststellten. Dividieren wir nämlich die in Spalte II stehenden Zahlen der Reihe nach durch die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25 usw., so erhalten wir stets den gleichen Wert 4,8.

Das bedeutet aber, daß das Verhältnis jedes Fallweges s zum Quadrate t^2 der zugehörigen Fallzeit t immer das gleiche ist, also den konstanten Wert C hat, wobei für unseren Versuch C = 4,8 ist. Wir können daher schreiben

$$\frac{s}{t^2} = C \text{ oder } s = C \cdot t^2$$

und erhalten dadurch die Weg-Zeit-Gleichung des freien Falles.

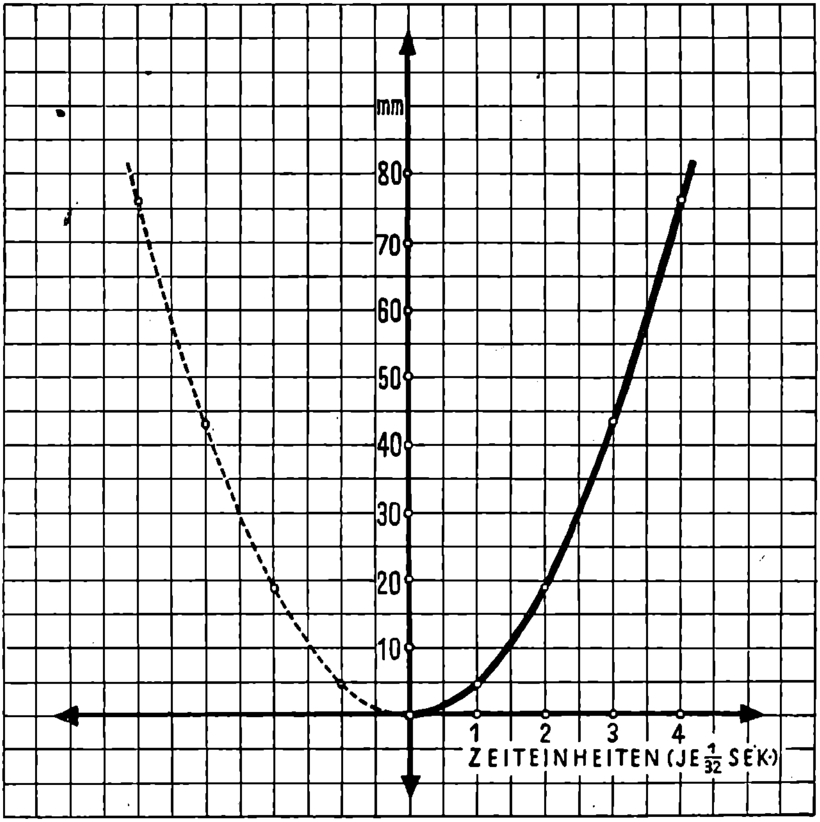


Abb. 9.

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß **beim freien Fall der Weg s eine rein quadratische Funktion der Zeit t** ist.

Um die Konstante C näher zu bestimmen, betrachten wir zunächst die in der Spalte III der Tabelle stehenden Fallstrecken Δs in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten von je $\frac{1}{32}$ sek. Sie geben zugleich die Mittelwerte der Geschwindigkeit an, bezogen auf die Zeiteinheit $\frac{1}{32}$ sek. Legen wir als Zeiteinheit 1 Sekunde zugrunde, so ergibt der Quotient $\Delta s : \frac{1}{32} = \Delta s \cdot 32$ die mittlere Geschwindigkeit zu den einzelnen Zeitpunkten der Beobachtung, und zwar in der

Benennung mm/sek. Wir brauchen daher nur die in Spalte III stehenden Zahlen einzeln je mit 32 zu multiplizieren, um die Werte der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ für die einzelnen Zeitpunkte 1, 2, 3 .... zu erhalten.

Dabei sei aber ausdrücklich vermerkt, daß diese Mittelwerte $\bar{v}$ keinesfalls die Momentangeschwindigkeit v bedeuten, denn für diese haben wir in b) den Wert $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ festgesetzt. Um aber diese Momentangeschwindigkeit zu bestimmen, müßten wir im Vergleich zu der an sich schon kleinen Zeit von $\frac{1}{32}$ sek noch wesentlich kleinere Zeitelemente Δt als Einheit zugrunde legen. Darüber würde aber die Möglichkeit der unmittelbaren Beobachtung selbst mit noch so verfeinerten Hilfsmitteln immer beschränkter und schließlich bei winzigen Werten von Δt unmöglich. Das ist ja auch nicht weiter verwunderlich, denn die Momentangeschwindigkeit nimmt bei diesem ständig rascher werdenden Bewegungsvorgang des Fallens von Augenblick zu Augenblick zu.

Die Unterschiede $\Delta \bar{v}$ der mittleren Geschwindigkeiten in je zwei aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten erhalten wir aus den Zahlen der Spalte IV der Tabelle, indem wir sie mit 32 multiplizieren. Da die Zahlen im wesentlichen den konstanten Mittelwert 9,59 mm haben, ist $\Delta \bar{v} = 9{,}59 \cdot 32 \text{ mm} = 306{,}9 \text{ mm} = 30{,}69 \text{ cm}$. Da wir aber als mittlere Beschleunigung $\bar{b}$ das Verhältnis des Geschwindigkeitszuwachses $\Delta \bar{v}$ zum Zeitzuwachs Δt bezeichnen, so ergibt sich nunmehr

$$\bar{b} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = 30{,}69 \cdot 32, \text{ da ja } \frac{1}{\Delta t} = 32 \text{ ist, oder}$$

$$\bar{b} = 982{,}1 \text{ cm/sek}^2.$$

Die Beschleunigung des freien Falles ist also konstant und hat abgerundet den Wert 10 m/sek². Es ist üblich, für diese Konstante allgemein den Buchstaben g zu gebrauchen. Durch verfeinerte Versuchsmethoden hat man für unsere Breiten den genaueren Wert

$$g = 981 \text{ cm/sek}^2$$

ermittelt. Die Größe von g ändert sich aber infolge der Abplattung der Erdkugel mit der geographischen Breite; am Äquator hat sie den Wert 978 cm/sek², an den Polen den Wert 983 cm/sek².

Da, wie wir nunmehr festgestellt haben, die Beschleunigung der Fallbewegung am gleichen Orte konstant ist, ist **der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung**. Für ihn gilt das bereits in b) erwähnte Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v = g \cdot t$.

Nimmt aber die Geschwindigkeit je Sekunde um den Betrag g zu, so ist die durchschnittliche Geschwindigkeit in der ersten Sekunde, in der sie von 0 cm/sek² auf g cm/sek² wächst, $\frac{g}{2}$ cm/sek², in der zweiten $\frac{g+2g}{2}$ cm/sek²

$=\frac{3}{2}$ g cm/sek², in der dritten $\frac{3g+2g}{2}$ cm/sek² $=\frac{5g}{2}$ cm/sek² usw. Die Einzelwege in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten verhalten sich hiernach wie die ungeraden Zahlen 1:3:5:7: . . . . ., wie sich überdies auch durch Vergleich der in Spalte III der Wertetabelle stehenden Zahlen ergibt.

Der besseren Übersicht wegen stellen wir die Wege und Zeiten einer Fallbewegung noch einmal geordnet zusammen.

Zeit t in sek	Einzelwege in 1 sek	Gesamtwege s in t sek
1	$1 \cdot \frac{g}{2}$	$\frac{g}{2} = \frac{g}{2} \cdot 1^2$
2	$3 \cdot \frac{g}{2}$	$4 \cdot \frac{g}{2} = \frac{g}{2} \cdot 2^2$
3	$5 \cdot \frac{g}{2}$	$9 \cdot \frac{g}{2} = \frac{g}{2} \cdot 3^2$
4	$7 \cdot \frac{g}{2}$	$16 \cdot \frac{g}{2} = \frac{g}{2} \cdot 4^2$
......		....
t	$2(t-1) \cdot \frac{g}{2}$	$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$

Nachdem nunmehr für die weiter oben angegebene Konstante C der Wert $\frac{1}{2}$ g ermittelt worden ist, erhalten wir folgendes Ergebnis:

1. Das Weg-Zeit-Gesetz

$s=\frac{1}{2} gt^2$ (Schaulinie eine quadratische Parabel).

2. Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

$v=g \cdot t$ (Schaulinie eine Gerade mit dem Proportionalitätsfaktor g).

3. Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz

$b=g$ (Schaulinie eine Parallele zur Abszissenachse in Abstand g = 981 cm).

Dabei enthält die letzte Gleichung die Zeit überhaupt nicht mehr als Veränderliche, d. h. die Beschleunigung ist von der Zeit unabhängig, sie ist konstant.

Anmerkung: Wenn man den Wert von t aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen ausrechnet und den erhaltenen Wert $t=\frac{v}{g}$ in die erste Gleichung einsetzt, so ergibt sich

$$s=\frac{1}{2}g\cdot\frac{v^2}{g^2}=\frac{v^2}{2g}$$

Löst man diese Gleichung nach v auf und setzt für s den Buchstaben h ein, der die Fallhöhe bezeichnen soll, so folgt

$$v=\sqrt{2g\cdot h}.$$

Diese Gleichung drückt die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v von der Fallhöhe h aus, ist also auch eine Funktionsgleichung. Sie ermöglicht, die Geschwindigkeit zu berechnen, mit welcher ein frei fallender Körper am Ende der Fallhöhe h eintrifft. Wollen wir z. B. wissen, welche Geschwindigkeit ein Körper erreicht, der senkrecht die Strecke von 80 m herabgefallen ist, so erhalten wir, wenn wir $h=80$ m, $g\approx 10$ m ($\approx$ heißt angenähert) in der Gleichung einsetzen,

$$v=\sqrt{2\cdot 10\cdot 80}\ \text{m/sek}=\sqrt{1600}\ \text{m/sek}=40\ \text{m/sek}.$$

h) Folgerungen

Wollen wir den gefundenen Gesetzen über die Bewegung beim freien Fall allgemeine Gültigkeit zusprechen, dann dürfen wir uns keinesfalls mit einer einmaligen Versuchsreihe begnügen, sondern müssen möglichst viel Versuche, vor allem auch mit Körpern aus verschiedenem Stoff und von verschiedener Gestalt, anstellen.

Wir beobachten zum Beispiel, daß ein von einem Baume fallender Apfel viel rascher fällt als ein gleichzeitig fallendes Blatt, ein Stein viel rascher als etwa ein Wattebausch. Diese Beobachtung zwingt uns, zu den gefundenen Gesetzen Einschränkungen zu machen. Suchen wir nach den Gründen der Verschiedenheit der in diesen Beispielen genannten Fallbewegungen, so würden wir bald als Ursache den Widerstand der Luft erkennen, den diese jeder Bewegung entgegensetzt. Der Luftwiderstand hängt außer von anderen Faktoren stark von der Gestalt des fallenden Körpers ab. Für ihn gelten besondere Gesetze, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

Schalten wir den Luftwiderstand aus, indem wir die Fallversuche in einem luftleeren Raum, z. B. in einer luftleer gepumpten Glasröhre, anstellen, so ergibt sich, daß dann alle Körper gleich schnell fallen. Die Fallgesetze haben daher nur eine allgemeine Gültigkeit für den luftleeren Raum. Für den lufterfüllten Raum gelten sie nur mehr oder weniger angenähert.

Die Frage nach der Ursache der Fallbewegung führt zu einer ganz neuen Aufgabe, deren Lösung wir dem bedeutenden englischen Physiker ISAAC NEWTON (1643–1727) zu danken haben. Durch einen fallenden Apfel soll er auf die Frage nach der Kraft gekommen sein, die diese Fallbewegung verursacht. Ihm ist der Nachweis gelungen, daß der Fall einem viel umfassenderen Gesetz unterworfen ist, das auch die Bewegungen am Himmel beherrscht. Das beühmte NEWTONsche Gravitationsgesetz, welches die funktionale Abhängigkeit der zwischen zwei Massen wirkenden Anziehungskraft von der Entfernung dieser Massen ausdrückt, ermöglicht es, auf rein theoretischem Wege durch Rechnung die Fallgesetze abzuleiten und so einer viel allgemeineren Gesetzmäßigkeit unterzuordnen.

i) Praktische Nutzanwendungen

Abgesehen vom theoretischen Werte sind die Nutzanwendungen der Fallgesetze nicht so verbreitet und treten nicht so offenkundig in Erscheinung wie die anderer physikalischer Gesetze. Wenn wir beispielsweise das Räderwerk einer Pendeluhr durch ein Laufgewicht antreiben, so werden wir uns dessen kaum bewußt, daß letztlich diesem Vorgange eine Fallbewegung — allerdings keine freie, sondern eine behinderte — zugrunde liegt. Auch bei den Bewegungsvorgängen auf der schiefen Ebene, die praktisch dazu verwendet wird, irgendwelches Material billig und bequem abwärts zu befördern, spielen die Fallgesetze eine Rolle. Erst ihre Verbindung mit anderen Bewegungsformen, wie z. B. beim Wurf, führt zu weiterreichenden Nutzanwendungen.

N A C H W O R T

Wohin wir auch in der Natur blicken, allenthalben treten uns Zusammenhänge entgegen, die letzten Endes funktionalen Charakter haben und uns bei näherer Untersuchung nicht selten gestatten, dieser Abhängigkeit in Form eines Gesetzes Ausdruck zu verleihen und das schlichte Gewand einer mathematischen Gleichung zu geben. Die Mathematik wird somit zum unentbehrlichen Gehilfen der exakten, d. h. messenden Naturwissenschaften.

Die Art funktionaler Abhängigkeit in der Natur ist mannigfaltig und vielgestaltig und ebenso auch ihre Darstellung in mathematischer Einkleidung. Von den überhaupt möglichen Funktionen sind die in den angeführten Beispielen dieser Schrift behandelten nur eine Auswahl besonders einfacher und wichtiger.

WIR HABEN KENNENGELERNT:

I. Die direkt proportionale Abhängigkeit. Sie wird durch eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen, die wir — wie in der Mathematik üblich — mit dem Buchstaben x und y bezeichnen wollen, von der Form

$$y = c\,x \text{ (c Konstante)}$$

wiedergegeben. Man nennt in diesem Falle y eine g a n z e l i n e a r e F u n k t i o n oder auch eine g a n z e F u n k t i o n e r s t e n G r a d e s von x. Das zugehörige Schaubild ist eine g e r a d e L i n i e (Abb. 3).

II. Die indirekt proportionale Abhängigkeit. Ihre Gleichung hat die Form

$$y = \frac{c}{x} \text{ (c Konstante).}$$

Hierbei heißt y eine g e b r o c h e n e F u n k t i o n e r s t e n G r a d e s v o n x. Als Schaubild ergibt sich eine g l e i c h s e i t i g e H y p e r b e l (Abb. 5).

III. Die rein quadratische Abhängigkeit. Ihre Gleichung hat die Form

$$y = cx^2 \text{ (c-Konstante),}$$

wobei y als eine r e i n q u a d r a t i s c h e F u n k t i o n oder auch eine F u n k t i o n z w e i t e n G r a d e s von x bezeichnet wird. Sie liefert als Schaubild eine q u a d r a t i s c h e P a r a b e l (Abb. 9).

Mit diesen Beispielen ist das weite Gebiet der Funktionen nicht im geringsten erschöpft. Die Beschäftigung mit ihnen und ihrer Beherrschung ist aber für denjenigen, der sich eingehender und verständnisvoll mit Naturwissenschaften befassen will, ebenso notwendig wie nützlich.

FACH- UND FREMDWÖRTER

Abkürzungen: lat = lateinisch, gr = griechisch

addieren	addere (lat) = beigeben – hinzufügen
Abszisse	abscissum (lat) das Abgeschnittene – Strecke, die auf einer Geraden abgetragen oder abgeschnitten wird
Diagramm	διά (dia, gr) = auseinander, γράφειν (graphein, gr) = schreiben – zeichnerische Darstellung von Beobachtungswerten
Differenz	differe (lat) = auseinander bringen, scheiden, trennen
graphisch	γράφειν (graphein, gr) = schreiben – zeichnerisch
deformieren	deformare (lat) = entstellen, die Form verändern – Veränderung des inneren Aufbaus
direkt	directus (lat) = geradegerichtet – unmittelbar, gleichsinnig
Elastizität	ἐλαύνω (elauno, gr) = ich treibe – Schnell- oder Federkraft, die sich Gestaltsänderungen widersetzt
empirisch	ἐμπειρία (empeiria, gr) = die Erfahrung – auf Erfahrung beruhend
exakte Wissenschaften	exactus (lat) = genau, pünktlich – solche Wissenschaften, die messend und bezeichnend die Naturvorgänge erforschen
Funktion	functio (lat) = Leistung, Tätigkeit — in der Mathematik: eine veränderliche Größe, die von einer anderen abhängig ist
funktional	functio (lat) = Leistung – Eigenschaftswort zu Funktion: veränderlich, zugeordnet
Harmonie	ἁρμονία (harmonia, gr) = Harmonie – wohlgefällige Übereinstimmung der Teile eines zusammenhängenden Ganzen
Hyperbel	ὑπερβολή (hyperbole, gr) = Übertreibung – in der Mathematik: eine krumme Linie, die beim ebenen Schnitt eines Kegelmantels entsteht
Hypotenuse	ὑποτείνειν (hypoteinein, gr) = darunter spannen – Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt
indirekt	in (lat Vorsilbe), directus (lat) = geradegerichtet – ungleichstimmig, Gegensatz zu direkt
Kathete	χαθίημι (kathiemi, gr) = herabschicken – Seite im rechtwinkligen Dreieck
kausal	causa (lat) = Grund, Ursache – ursächlich zusammenhängend
Konstante	constans (lat) = fest, folgerichtig – fester unveränderlicher Zahlenwert
Koordinate	coordinare (lat) = zuordnen — zusammengehörige, d. h. eine der zugeordneten Zahlenreihe
Limes	limes (lat) = Grenze – in der Mathematik: Grenzwert, dem ein Rechenwert zustrebt
Metronom	μέτρον (metron, gr) = Maß, νόμος (nomos, gr) = Gesetz, hier: Sangweise, Melodie – Taktweise – schwingendes Pendel mit verschiebbarem Gewicht
momentan	momentum (lat) = Bewegungsdauer, Umlauf – augenblicklich
mystisch	μυστήριον (mysterion, gr) = Geheimnis – sich von der Sinneswelt abschließend zum Zwecke der unmittelbaren Vereinigung mit der Gottheit
negativ	negare (lat) = verneinen – in der Mathematik: Zahlen, die beim Subtrahieren einer größeren Zahl von einer kleineren entstehen und daher mit dem Minuszeichen (–) versehen sind
Ordinate	ordinata linea (lat) = die zugeordnete Linie in der Mathematik: eine Strecke, deren Maßzahl einer zweiten Strecke (Abszisse) zugeordnet ist
Parabel	παραβολή (Parabole, gr) = das Daransetzen – in der Geometrie: eine krumme Linie (Kurve), die beim ebenen Schnitt eines Kegelmantels entsteht
parallel	παραλλάσσω (parallasso, gr) = an etwas vorbeigehen – nebeneinanderlaufend, gleichlaufend und daher nie zusammentreffend
Produkt	producere (lat) = erzeugen – in der Mathematik: die Verbindung von Zahlen durch Multiplikation (Vervielfachen)
reziprok	reciprocus (lat) = auf demselben Wege zurückkehren – in der Mathematik: Zahlen, die bei ihrer Multiplikation 1 ergeben, z. B. $\frac{2}{3}$ mal $\frac{3}{2}$
spezifisch	species (lat) = Art – eigentümlich, einem bestimmten Stoff zukommend
Spekulation	speculatio (lat) = Ausschau – Denken, das nicht auf Erfahrung beruht

GLEICHZEITIG MIT DIESEM BANDE ERSCHEINEN

A	*Mathematik*	12502	Rechne rasch und richtig
B	*Physik*	12511	Vom Wesen der Wärme
K	*Meteorologie*	12501	Das Wetter im Sprichwort
N	*Allgemeine Geographie* .	12524	Das Gradnetz der Erde
O	*Länder und Völker* . . .	12518	Die lebende Landkarte
		12509	Steinzeitvölker der Gegenwart

DEMNÄCHST WERDEN FERTIGGESTELLT

B	*Physik*	12527	Über die Energie
C	*Chemie*	12503	Die Sprache des Chemikers
D	*Allgemeine Biologie* . . .	12513	Lebensbündnisse in Tier- und Pflanzenreich
E	*Botanik*	12546	Frühlingsblüher des Auwaldes
F	*Zoologie*	12526	Verborgenes Leben
		12530	Gefiederte Freunde in Haus, Hof und Garten
G	*Der Mensch*	12504	Blut und Lymphe
H	*Astronomie*	12505	Botschaften aus dem Weltall
		12547	Sonnenflecken
J	*Geophysik*	12542	Wie alt ist die Erde?
L	*Geologie*	12535	Eine Sandgrube
N	*Allgemeine Geographie* .	12517	Die Wegeaufnahme
O	*Länder und Völker* . . .	12507	Das weiße Land
P	*Reisen und Forschungen* .	12548	Neun Monate auf treibender Eisscholle
Q	*Der junge Naturforscher* .	12519	Meine Steinsammlung

Die Zahlen zwischen Serie und Titel sind die Bestellnummern. Weitere noch in Vorbereitung befindliche Bände werden fortlaufend an dieser Stelle angezeigt

* * * *

VIER STERNE

sind in der rechten oberen Ecke der Titelseite unter der Serien- und Bandbezeichnung angebracht. Sie bedeuten, daß der vorliegende Band für Leser bestimmt ist, die 16 Jahre und älter sind. Andere Bände unserer Gruppe werden sich in ihrem Inhalt und in ihrer Form an jüngere Leser wenden. Um auf den ersten Blick kenntlich zu machen, welche Altersstufe angesprochen werden soll, ist die Sternchenordnung eingeführt worden. Nach ihr sind Bände mit

einem Sternchen für Leser bis zu 8 Jahren,
zwei Sternchen für Leser bis zu 12 Jahren,
drei Sternchen für Leser bis zu 16 Jahren und
vier Sternchen für Leser über 16 Jahre

vorgesehen. Daß in der Gruppe „Natur und Wissen" die Bände mit drei und vier Sternchen vorherrschen, liegt im Gesamtthema begründet, das unserer Gruppe gestellt ist.

12521