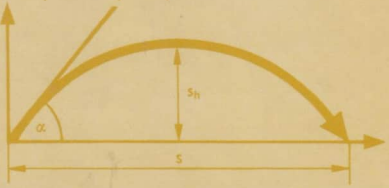
Grad	sin	cos	tan	cot	
0,0	0	1	0	—	90,0
,1	0,00175	1,0000	0,00175	573,0	,9
,2	00349	0000	00349	286,5	,8
,3	00524	0000	00524	191,0	,7
,4	00698	0000	00698	143,2	,6
,5	00873	0000	00873	114,6	,5
,6	0105	0,9999	0105	95,49	,4
,7	0122	9999			
,8	0140	9999			
,9	0157	9999			
1,0	0,0175	9998			

$$s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

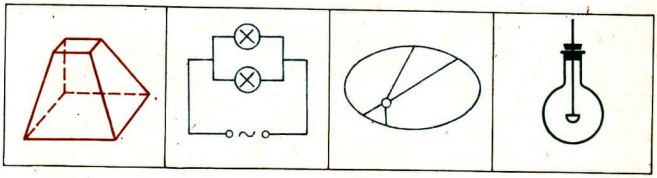


Wissensspeicher
Formeln · Werte

Wissensspeicher Formeln · Werte

Mathematik · Physik · Astronomie · Chemie

Das Wichtigste bis zum Abitur in Stichworten und Übersichten



Werner Golm, Karlheinz Martin, Klaus Sommer

4. Auflage

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1988

Autoren:
Werner Golm (Teile Physik und Astronomie), Karlheinz Martin (Teil Mathematik),
Klaus Sommer (Teil Chemie)

Golm, Werner:
Wissensspeicher Formeln, Werte : Mathematik,
Physik, Astronomie, Chemie. Das Wichtigste bis
zum Abitur in Stichworten und Übersichten /
Werner Golm; Karlheinz Martin; Klaus Sommer. –
4. Aufl. – Berlin : Volk u. Wissen, 1988, –
192 S. : Ill.
NE: 2. Verf.: ; 3. Verf.:

ISBN 3-06-00 17 19-0

© Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1982
4. Auflage
Lizenz Nr. 203 · 1000/87 (UN 00 17 19-4)
LSV 9807
Redaktion: Karlheinz Martin
Einband: Manfred Behrendt
Typographische Gestaltung: Egon Hunger
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: GGV Dresden
Schrift: 9/10 p Gill-Monotype
Redaktionsschluß: 1. Dezember 1987
Bestell-Nr.: 707 438 1
00580

Inhalt

MATHEMATIK Seite 7

Zeichen, Konstanten, Zahlendarstellung 1.1. Seite 7
Rechengesetze 1.2. Seite 13
Funktionen und Gleichungen 1.3. Seite 16
Geometrie 1.4. Seite 63
Binomischer Satz; Zahlenfolgen und Reihen 1.5. Seite 68
Differentialrechnung 1.6. Seite 72
Integralrechnung 1.7. Seite 80
Kombinatorik; Wahrscheinlichkeitsrechnung 1.8. Seite 83
Näherungsrechnen 1.9. Seite 87
Vektorrechnung und analytische Geometrie 1.10. Seite 88

PHYSIK Seite 103

Einheiten und Größen 2.1. Seite 103
Umrechnungsfaktoren von Einheiten 2.2. Seite 111
Wertetabellen 2.3. Seite 114
Größengleichungen aus der Mechanik 2.4. Seite 122
Statik 2.4.1. Seite 122
Kinematik 2.4.2. Seite 124
Dynamik 2.4.3. Seite 128
Arbeit und Energie 2.4.4. Seite 130
Impuls, Stoßvorgänge, Drehimpuls 2.4.5. Seite 131
Gravitationsfeld 2.4.6. Seite 133
Mechanik der Flüssigkeiten und Gase 2.4.7. Seite 134
Spezielle Relativitätstheorie 2.4.8. Seite 135
Größengleichungen aus der Elektrizitätslehre 2.5. Seite 136
Elektrischer Gleichstrom 2.5.1. Seite 136
Felder 2.5.2. Seite 137
Elektrischer Wechselstrom 2.5.3. Seite 139

Größengleichungen aus der Thermodynamik ➡ 2.6. Seite 140
Größengleichungen aus der Optik ➡ 2.7. Seite 143
Größengleichungen für Schwingungen und Wellen ➡ 2.8. Seite 145
Größengleichungen aus der Atomphysik ➡ 2.9. Seite 146

ASTRONOMIE Seite 147

CHEMIE Seite 155

Definitionen, Größengleichungen, Formeln ➡ 4.1. Seite 155
Werte chemischer Stoffe ➡ 4.2. Seite 166

REGISTER Seite 185

Zur Einführung

Der Wissensspeicher Formeln und Werte ist ein Tabellenbuch, das die Titel der Wissensspeicher-Reihe des Verlages ergänzt. Das Buch enthält wichtige Formeln, Gesetze, Konstanten, Sätze und Definitionen, die in den Unterrichtsfächern Mathematik, Physik, Astronomie und Chemie bis zum Abitur behandelt werden. Teilweise wurden auch Fakten berücksichtigt, die sich auf den fakultativen Unterricht beziehen.
Der Inhalt ist, unabhängig von der Reihenfolge der Behandlung im Unterricht, nach Sachgebieten zusammengefaßt und zahlreichen Schlagwörtern zugeordnet.
Wegen des Formats des Buches wurde für die Tafel der Winkelfunktionen auf den Seiten 55 bis 60 ein anderer Aufbau erforderlich als allgemein üblich.
Das Zeichen $\underline{5}$ bedeutet, daß eine 5 durch Aufrunden entstanden ist. Dagegen zeigt das Zeichen $\dot{5}$ an, daß die 5 durch Abrunden entstand.
Das Internationale Einheitensystem (SI) wird in diesem Buch konsequent angewandt. Die Namen und Zeichen für chemische Elemente und Verbindungen entsprechen den von der IUPAC festgelegten Regeln.

In diesem Buch werden folgende Symbole verwendet:

■ Beispiel

▶ Regeln und Erklärungen

↗ Hinweis auf ein anderes Schlagwort

Mathematik 1

1.1. Zeichen, Konstanten, Zahlendarstellung

Mathematische Zeichen

Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)
...	und so weiter (bis) ■ 1, 2, ..., k
$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$\approx$	rund, angenähert (↗ 12 f.)
$\equiv$	bedeutet nach Definition
$\triangleq$	entspricht ■ 1 kg Steinkohle ≙ 29 MJ
$<$	kleiner als
$>$	größer als
$\leq$	kleiner, gleich – kleiner oder gleich, höchstens gleich –
$\geq$	größer, gleich – größer oder gleich, mindestens gleich –
$\ll$	klein gegen
$\gg$	groß gegen
$\sim$	liegt vor
$\sim$	proportional; ähnlich
$\mid$	teilt ■ 6 | 30
$\nmid$	teilt nicht
%, ‰	Prozent; Promille
$\bar{a}$	a quer – zur Kennzeichnung einer Variablen gegenüber a –
$\sum_{n=1}^{m} a_n$	Summe a_n über alle n von 1 bis m (↗ 68)
$\prod_{n=1}^{m} a_n$	Produkt a_n über alle n von 1 bis m

Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)
$\parallel$	parallel zu ■ $g \parallel h$
$\nparallel$	nicht parallel zu
$\perp$	senkrecht auf ■ $g \perp h$
$\uparrow\uparrow$	gleich gerichtet mit
$\uparrow\downarrow$	entgegengesetzt gerichtet mit (zwischen zueinander parallelen Vektoren)
$\cong$	kongruent
$\sphericalangle$	Winkel ■ $\sphericalangle ABC$
$\measuredangle$	orientierter Winkel
$\triangle$	Dreieck
AB	Gerade AB – Gerade durch die Punkte A und B –
$\overline{AB}$	Strecke $\overline{AB}$ – Strecke mit den Endpunkten A und B –
$\overrightarrow{AB}$	gerichtete Strecke AB; Vektor AB
$\widehat{AB}$	Bogen AB
°, ′, ″	Grad, Minuten, Sekunden – Einheiten eines Winkels im Gradmaß
$\lvert z \rvert$	Betrag von z ■ $\lvert -2 \rvert = +2$
$\sqrt{\ }$	Wurzel aus (↗ 15)
∞	unendlich
(a, b)	offenes Intervall a, b
$\langle a, b \rangle$	abgeschlossenes Intervall a, b
$n!$	n Fakultät (↗ 83)

Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)
$\in$	Element von ■ $2 \in N$
$\notin$	nicht Element von ■ $2{,}5 \notin N$
$\subseteq$	Teilmenge von ■ $N \subseteq R$
$\subset$	echte Teilmenge von
$\{a, b, \ldots\}$	Menge der Elemente $a, b, \ldots$
$\bar{A}$	A quer (Komplementärmenge von A)
$\emptyset$	die leere Menge
$\cap$	geschnitten mit
$\cup$	vereinigt mit
$\setminus$	minus (Differenzmenge)
$\times$	Kreuz (Kreuzprodukt)
$[a, b]$	geordnetes Paar a, b
$\wedge$	und (Konjunktion)
$\vee$	oder (Alternative)
$\Rightarrow$	wenn ... so ... (Implikation)
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn ... (Äquivalenz)
$\neg$ oder $\sim$	nicht (Negation)
$\forall x$ oder $\bigwedge_x$	für alle x gilt
$\exists x$ oder $\bigvee_x$	es gibt ein x mit
$\vec{a}$	Vektor a
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Vektor a Punkt b (Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$) (↗ 93)
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektor a Kreuz b (Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$) (↗ 94)

Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)
$\binom{n}{p}$	n über p (Binomialkoeffizient (↗ 68)
sin	Sinus (↗ 47)
cos	Kosinus (↗ 47)
tan	Tangens (↗ 47)
cot	Kotangens (↗ 47)
$\lim_{n \to \infty}$	Limes für n gegen unendlich (↗ 71)
$\log_a x$	Logarithmus x zur Basis a (↗ 15)
lg	Zehnerlogarithmus
ld	Logarithmus dualis (Logarithmus zur Basis 2)
ln	Logarithmus naturalis oder natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e)
(a_n)	Folge a_n
Δx	Delta x
$f(x_0)$	f von x-Null (Wert der Funktion f an der Stelle x_0)
$f'(x)$	f-Strich-von x (Erste Ableitung der Funktion $f(x)$)
$f''(x)$	f-zwei-Strich-von x
$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x_0=3}$	dy – nach – dx an der Stelle x – Null gleich 3 (Differentialquotient an der Stelle 3)
$\frac{d^2y}{dx^2}$	d-zwei-y-nach-dx-Quadrat
$\int$	Integral
$\int_a^b$	Integral von a bis b

Griechisches Alphabet

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	ϑ	Theta
I	ι	Jota
K	$\varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ϱ	Rho
Σ	σ ς	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Konstanten in Verbindung mit π und e

$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ \ldots$
$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \ldots$

	n	$\lg n$		n	$\lg n$
π	3,1416	0,4971	$\frac{1}{\pi}$	0,3183	0,5029 — 1
2π	6,2832	0,7982	$\frac{1}{2\pi}$	0,1592	0,2018 — 1
3π	9,4248	0,9743	$\frac{1}{4\pi}$	0,0796	0,9008 — 2
4π	12,5664	1,0992	$\frac{3}{4\pi}$	0,2387	0,3779 — 1
$\frac{1}{2}\pi$	1,5708	0,1961	$\frac{180}{\pi}$	57,296	1,7581
$\frac{1}{3}\pi$	1,0472	0,0200	$\frac{360}{\pi}$	114,592	2,0592
$\frac{2}{3}\pi$	2,0944	0,3211	$\sqrt{\pi}$	1,772$\underline{5}$	0,2486
$\frac{4}{3}\pi$	4,1888	0,6221	$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991
$\frac{1}{4}\pi$	0,7854	0,8951 — 1	$2\sqrt{\pi}$	3,5449	0,5496
$\frac{1}{6}\pi$	0,5236	0,7190 — 1	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	0,8862	0,9475 — 1
$\frac{1}{12}\pi$	0,2618	0,4180 — 1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,5642	0,7514 — 1
$\frac{1}{180}\pi$	0,017$\underline{5}$	0,2419 — 2	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	0,2821	0,4504 — 1
$\frac{1}{360}\pi$	0,0087	0,9395 — 3	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,2533	0,0981
$\sqrt{2}\pi$	4,4429	0,6477	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,3989	0,6009 — 1
$\sqrt{3}\pi$	5,4414	0,7357	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,7979	0,9019 — 1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$	2,2214	0,3466	$\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	0,9772	0,9900 — 1
$\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$	1,8138	0,2586	$\sqrt{\frac{4}{\pi}}$	1,1284	0,0525

	n	$\lg n$
π^2	9,8696	0,9943
$4\pi^2$	39,478	1,5964
$\frac{\pi^2}{4}$	2,4674	0,3922
$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013	0,0057 — 1
$\frac{1}{4\pi^2}$	0,0253	0,4036 — 2
π^3	31,006	1,4914
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657
$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$	1,2407	0,0937
$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$	1,6120	0,2074
$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	0,6204	0,7926 — 1

	n	$\lg n$
e	2,7183	0,4343
e^2	7,3891	0,8686
$\sqrt{e}$	1,6487	0,2171
$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448
e^π	23,1407	1,3644
$e^{-\pi}$	0,0432	0,6356 — 2
$\frac{1}{e}$	0,3679	0,5657 — 1
$\frac{1}{e^2}$	0,1353	0,1314 — 1
	$\lg e = \frac{1}{\ln 10} = M$	
M	0,4343	0,6378 — 1

Primzahlen bis 1669 (Primzahlzwillinge wurden durch eine blaue Klammer verbunden)

2	83	197	331	461	607	751	907	1049	1213	1373	1531
3	89	199	337	463	613	757	911	1051	1217	1381	1543
5	97	211	347	467	617	761	919	1061	1223	1399	1549
7	101	223	349	479	619	769	929	1063	1229	1409	1553
11	103	227	353	487	631	773	937	1069	1231	1423	1559
13	107	229	359	491	641	787	941	1087	1237	1427	1567
17	109	233	367	499	643	797	947	1091	1249	1429	1571
19	113	239	373	503	647	809	953	1093	1259	1433	1579
23	127	241	379	509	653	811	967	1097	1277	1439	1583
29	131	251	383	521	659	821	971	1103	1279	1447	1597
31	137	257	389	523	661	823	977	1109	1283	1451	1601
37	139	263	397	541	673	827	983	1117	1289	1453	1607
41	149	269	401	547	677	829	991	1123	1291	1459	1609
43	151	271	409	557	683	839	997	1129	1297	1471	1613
47	157	277	419	563	691	853		1151	1301	1481	1619
53	163	281	421	569	701	857	1009	1153	1303	1483	1621
59	167	283	431	571	709	859	1013	1163	1307	1487	1627
61	173	293	433	577	719	863	1019	1171	1319	1489	1637
67	179	307	439	587	727	877	1021	1181	1321	1493	1657
71	181	311	443	593	733	881	1031	1187	1327	1499	1663
73	191	313	449	599	739	883	1033	1193	1361	1511	1667
79	193	317	457	601	743	887	1039	1201	1367	1523	1669

Positionssysteme und römische Zahlenschreibweise

Zehnersystem (dekadisches System): Jede natürliche Zahl $n \neq 0$ läßt sich als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen darstellen:
$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$
mit $0 \leqq a_n \leqq 9$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ und $1 \leqq a_k \leqq 9$.
Kurzschreibweise: $n = a_k\, a_{k-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0$

■ $576 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
$= \underbrace{5 \cdot 100}_{\text{Hunderter}} + \underbrace{7 \cdot 10}_{\text{Zehner}} + \underbrace{6 \cdot 1}_{\text{Einer}}$

10^3 1000	10^2 100	10^1 10	10^0 1
	5	7	6

Die Zahl 10 heißt Basis, die Zeichen „0", „1", ..., „9" heißen Grundziffern des dekadischen Systems.

Zweiersystem (Dualsystem, binäres oder dyadisches System): Jede natürliche Zahl $n \neq 0$ läßt sich als Summe von Vielfachen von Zweierpotenzen darstellen:
$n = a_k\, 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$
mit $a_n = 1$ oder $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ und $a_k = 1$.
Kurzschreibweise: $n = a_k\, a_{k-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0$

■ $[1010]_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
$= 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$

2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
		1	0	1	0

Die Zahl 2 ist Basis des Dualsystems. Zur Darstellung einer natürlichen Zahl im Dualsystem benötigt man zwei Grundziffern. Um Verwechslungen mit der dekadischen Darstellung zu vermeiden, verwendet man häufig die beiden Zeichen „0" und „L".
Umwandlung aus der dualen Darstellung in die dekadische:

■ $\text{L0L0} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$
$= 8 + 2 = \underline{\underline{10}}$

Umwandlung aus der dekadischen Darstellung in die duale:

■ $93 = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8$
$+ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
$= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3$
$+ 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$= \underline{\underline{\text{L0LLL0L}}}$

Nebenrechnung
93 : 64 = 1 R 29
29 : 16 = 1 R 13
13 : 8 = 1 R 5
5 : 4 = 1 R 1

Für die Addition von Zahlen in Dualdarstellung gilt:

0 + 0 = 0
0 + L = L
L + 0 = L
L + L = L0

■
```
  L0LLL0L
+   L0L0
---------
  LL00LLL
```

1/1

Für die Multiplikation von Zahlen in Dualdarstellung gilt:

$0 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot L = 0$
$L \cdot 0 = 0$ $L \cdot L = L$

■ LOLLLOL · LOLO

```
  LOLLLOL · LOLO
  ------------
   LOLLLOLO
  LOLLLOLO
  ------------
  LLLOLOOOLO
```

Römische Zahlzeichen:

I 1	V 5	X 10	L 50	C 100	D 500	M 1000

Dek. Syst.	Duales System	Röm. Zahlz.	Dek. Syst.	Duales System	Röm. Zahlz.	Dek. Syst.	Duales System	Röm. Zahlz.
1	L	I	21	LOLOL	XXI	41	LOLOOL	XLI
2	LO	II	22	LOLLO	XXII	42	LOLOLO	XLII
3	LL	III	23	LOLLL	XXIII	43	LOLOLL	XLIII
4	LOO	IV	24	LLOOO	XXIV	44	LOLLOO	XLIV
5	LOL	V	25	LLOOL	XXV	45	LOLLOL	XLV
6	LLO	VI	26	LLOLO	XXVI	46	LOLLLO	XLVI
7	LLL	VII	27	LLOLL	XXVII	47	LOLLLL	XLVII
8	LOOO	VIII	28	LLLOO	XXVIII	48	LLOOOO	XLVIII
9	LOOL	IX	29	LLLOL	XXIX	49	LLOOOL	IL
10	LOLO	X	30	LLLLO	XXX	50	LLOOLO	L
11	LOLL	XI	31	LLLLL	XXXI	51	LLOOLL	LI
12	LLOO	XII	32	LOOOOO	XXXII	52	LLOLOO	LII
13	LLOL	XIII	33	LOOOOL	XXXIII	53	LLOLOL	LIII
14	LLLO	XIV	34	LOOOLO	XXXIV	54	LLOLLO	LIV
15	LLLL	XV	35	LOOOLL	XXXV	55	LLOLLL	LV
16	LOOOO	XVI	36	LOOLOO	XXXVI	56	LLLOOO	LVI
17	LOOOL	XVII	37	LOOLOL	XXXVII	57	LLLOOL	LVII
18	LOOLO	XVIII	38	LOOLLO	XXXVIII	58	LLLOLO	LVIII
19	LOOLL	XIX	39	LOOLLL	XXXIX	59	LLLOLL	LIX
20	LOLOO	XX	40	LOLOOO	XL	60	LLLLOO	LX

Rundungsregeln

Beim Runden werden alle auf eine bestimmte Grundziffer folgenden Ziffern durch Nullen ersetzt. Dabei bleibt die **betreffende Grundziffer** unverändert, wenn ihr vor der Nulleneinsetzung eine 1, 2, 3 oder 4 folgte (Abrunden). Die betreffende Grundziffer wird um 1 erhöht, wenn ihr vor der Nulleneinsetzung eine 6, 7, 8 oder 9 folgte (Aufrunden). Im Falle der 5 hängt es davon ab, ob der

5 weitere Grundziffern folgen, die nicht sämtlich gleich 0 sind, oder ob nur Nullen folgen (↗ Übersicht). In den in der Übersicht folgenden Beispielen wurde die **betreffende Grundziffer** mit dem Zeichen „↓" gekennzeichnet.

Der letzten beibehaltenen Grundziffer folgte vor der Nulleneinsetzung

● eine 1, 2, 3, 4 Abrunden	■ 816 ≈ 800 826 ≈ 800 836 ≈ 800 846 ≈ 800
● eine 6, 7, 8, 9 Aufrunden	■ 866 ≈ 900 876 ≈ 900 886 ≈ 900 896 ≈ 900
● eine 5 und dann nur Nullen, und die betreffende Grundziffer „↓" stellt eine **gerade Zahl** dar: Abrunden	■ $\frac{1}{8} = 0{,}1250 \approx 0{,}12$ 850 ≈ 800
● eine 5 und dann nur Nullen, und die betreffende Grundziffer „↓" stellt eine **ungerade Zahl** dar: Aufrunden	■ $\frac{3}{8} = 0{,}3750 \approx 0{,}38$ 750 ≈ 800
● eine 5 und weitere Grundziffern, die nicht sämtlich gleich Null sind: Aufrunden	■ 856 ≈ 900 85010 ≈ 90000

Im Bankwesen und Geschäftsleben wird beim Runden einer Zahl im Falle einer 5 stets aufgerundet.

1.2. Rechengesetze

Umformen von Termen mit Klammern

$a + (b + c) = a + b + c$

$a - (b + c) = a - b - c$

$a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$

$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a(b - c) = ab - ac$

$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$

$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$

Spezialfall:
Binomische Formeln

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b) : c = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \; (c \neq 0)$

↗ Binomischer Satz (Pascalsches Dreieck), Seite 69

Prozent- und Zinsrechnung

$$\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$$ (G Grundbetrag, p Prozentsatz, P_w Prozentwert)

$$\frac{Z}{p} = \frac{G}{100}$$ (G Grundbetrag, p Zinssatz, Z Zinsen)

Werden die Zinsen jedes Jahr dem Grundbetrag zugeschlagen und erfolgen keine weiteren Einzahlungen, so gilt nach n Jahren:

$$G_n = G\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Mittelwerte von 2 Größen (von n Größen) a_i ($a_i > 0$)

Arithmetisches Mittel	$A_m = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$A_m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
Geometrisches Mittel	$G_m = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$	$G_m = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$
Harmonisches Mittel	$H_m = \frac{2\, a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}$	$H_m = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$

Potenzen und Wurzeln

Ganzzahlige Exponenten

$a^1 \underset{\mathrm{Df}}{=} a$; $\quad a^0 \underset{\mathrm{Df}}{=} 1$ $(a \neq 0)$; $\quad a^{-n} \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

$0^n \underset{\mathrm{Df}}{=} 0$ $(n > 0)$; $\quad 0^0$ nicht erklärt

Basen und Exponenten gleich	$a^m + a^m = 2\,a^m$; $\quad a^m - a^m = 0$ $a^m \cdot a^m = a^{2m}$; $\quad a^m : a^m = 1$	a, b beliebig reell, aber ungleich 0
Basen gleich	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$	
Exponenten gleich	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$; $\quad a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	
	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	

Rationale Exponenten

Es sei $a^n = b$ $(a, b \geqq 0;\ n \in N;\ n > 1)$; dann ist $a = \sqrt[n]{b}$.

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Df}}{=} \sqrt[n]{a} \quad (n > 1;\ n \in N;\ a \geqq 0;\ a \in R)$$

$$a^{\frac{p}{q}} \overset{\text{Df}}{=} \sqrt[q]{a^p} \quad (p, q \in Z;\ q > 1;\ a > 0;\ a \in R)$$

Basen gleich	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};\ a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$	a, b positiv reell; m, n, p, q ganzzahlig, $n \neq 0$, $q \neq 0$
Exponenten gleich	$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}};\ a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$	
	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}$	

Wurzelgesetze $(a \geqq 0;\ b \geqq 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\ (b > 0) \\ \sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[n \cdot q]{a};\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \end{array}\right\} \begin{array}{l} n, p, q > 0, \\ \text{ganzzahlig} \end{array}$$

Reelle Exponenten

Bei positiver Basis gelten die oben genannten Formeln für Potenzen mit reellen Exponenten.

Logarithmen

Es sei $a^n = b$ $(a, b > 0;\ a \neq 1)$; dann ist $n = \log_a b$.
$\log_a 1 \overset{\text{Df}}{=} 0$ $(a \neq 1;\ a > 0)$; $\log_1 a$ nicht erklärt

Logarithmengesetze $(b, b_1, b_2 > 0$; r beliebig reell; $a > 0,\ a \neq 1)$	$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$; $\quad \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Verschiedene Logarithmensysteme	Wenn $a, b, c > 0$, aber ungleich 1, gilt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$; $\quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

1/3

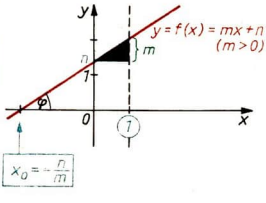
Speziell folgt daraus für die Berechnung von $\log_b c$ mit Hilfe dekadischer oder natürlicher Logarithmen $\log_b c = \frac{\lg c}{\lg b} = \frac{\ln c}{\ln b}$.

Bekannt sei der → / Gesucht sei der ↓	dekadische Logarithmus	natürliche Logarithmus	duale Logarithmus
dekadische Logarithmus	—	$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ $\lg x \approx 0{,}43429 \cdot \ln x$	$\lg x = \frac{\mathrm{ld}\, x}{\mathrm{ld}\, 10}$ $\lg x \approx 0{,}30103 \cdot \mathrm{ld}\, x$
natürliche Logarithmus $e \approx 2{,}718282$	$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$ $\ln x \approx 2{,}30258 \cdot \lg x$	—	$\ln x = \frac{\mathrm{ld}\, x}{\mathrm{ld}\, e}$ $\ln x \approx 0{,}69315 \cdot \mathrm{ld}\, x$
duale Logarithmus	$\mathrm{ld}\, x = \frac{\lg x}{\lg 2}$ $\mathrm{ld}\, x \approx 3{,}32193 \cdot \lg x$	$\mathrm{ld}\, x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ $\mathrm{ld}\, x \approx 1{,}44270 \cdot \ln x$	—

1.3. Funktionen und Gleichungen

Lineare Funktionen

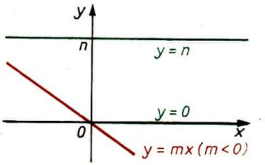
$y = mx + n$ (m, n beliebige reelle Konstanten)
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Wertebereich im Falle $m \neq 0$:
$-\infty < y < +\infty$
Graph: Gerade mit dem Anstieg $m = \tan\varphi$ ($-90° < \varphi < 90°$). Sie schneidet die y-Achse im Punkt $P(0; n)$ und die x-Achse im Falle $m \neq 0$ im Punkt $P\left(-\frac{n}{m}; 0\right)$.



Spezialfälle

$y = mx$ ($m \neq 0$)
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Wertebereich: $-\infty < y < +\infty$
Graph: Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

$y = n$; $y = 0$
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Wertebereich: $y = n$ bzw. $y = 0$
Graph: Gerade, die parallel zur Abszissenachse verläuft.



Jede Zahl aus dem Definitionsbereich einer Funktion nennt man Argument, die zugeordnete Zahl aus dem Wertebereich nennt man den zum Argument gehörenden Funktionswert.

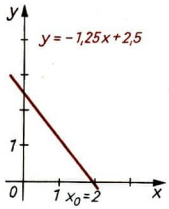
■ Gegeben: $y = -3x + 2$

Argumente x	-3	-2	0	$\frac{3}{2}$	2
Funktionswerte y	11	8	2	$-\frac{5}{2}$	-4

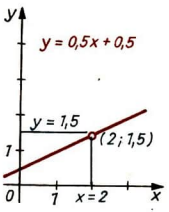
Lineare Gleichungen

Eine Gleichung mit einer Variablen	*Normalform:* $ax + b = 0$ (a, b konstant, $a \neq 0$) Die Gleichung hat genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$
Eine Gleichung mit zwei Variablen	$ax + by + c = 0$ (a, b und c konstant, $a \neq 0$, $b \neq 0$) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Jedes Paar [x; y], das die Gleichung $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ erfüllt, ist Lösung.
System von zwei Gleichungen mit zwei Variablen	(1) $a_1x + b_1y = c_1$ (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 und c_2 konstant) (2) $a_2x + b_2y = c_2$ *1. Fall:* $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ Das System hat genau eine Lösung $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$; $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ *2. Fall:* $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ und $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ Das System hat keine Lösung. Die Gleichungen widersprechen einander. *3. Fall:* $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ und $a_2c_1 - a_1c_2 = 0$ Das System hat unendlich viele Lösungen. Die Gleichungen sind voneinander abhängig.

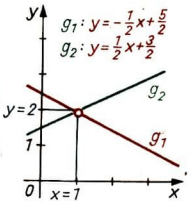
Graphische Lösungsverfahren		
Eine Gleichung mit einer Variablen: Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse ermitteln. ■ Lösung der Gleichung $-1{,}25x + 2{,}5 = 0$ ist $x = 2$ (↗ Bild Seite 18)	Eine Gleichung mit zwei Variablen: Jedes Koordinatenpaar, das einen Punkt des Graphen festlegt, ist Lösung. ■ [2; 1,5] ist ein Lösungspaar von $y = 0{,}5x + 0{,}5$ (↗ Bild Seite 18).	System zweier Gleichungen mit zwei Variablen: Das Koordinatenpaar ermitteln, das den Schnittpunkt beider Graphen festlegt. Bedingung: Die Graphen dürfen nicht parallel zueinander sein und nicht zusammenfallen. (siehe oben)



Lösung: $x = 2$



Eine der unendlich vielen Lösungen ist $x = 2$; $y = 1,5$



Lösung: $x = 1; y = 2$

Monotoniegesetze für lineare Ungleichungen

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

(1) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$ und $a - c < b - c$.

(2) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

(3) Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form:

$y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c beliebige reelle Konstanten; $a \neq 0$)

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

An der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ hat die Funktion ein Extremum: $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Es handelt sich um ein
- Minimum, falls $a > 0$,
- Maximum, falls $a < 0$.

Graph: Quadratische Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Spezialfälle:

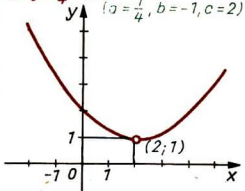
$y = x^2$

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

Wertebereich: $0 \leqq y < +\infty$

An der Stelle $x = 0$ hat die Funktion

■ $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$ ($a = \frac{1}{4}$, $b = -1$, $c = 2$)



$x_{min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{\frac{2}{4}} = 2$

$y_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$= \frac{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 - (-1)^2}{4 \cdot \frac{1}{4}}$

$= 1$

ein Minimum: $y = 0$.
Graph: Normalparabel mit dem Scheitel S (0; 0).

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Im Fall $a > 0$ hat die Funktion den Wertebereich $0 \leqq y < +\infty$ und an der Stelle $x = 0$ ein Minimum: $y = 0$.
Im Fall $a < 0$ hat die Funktion den Wertebereich $-\infty < y \leqq 0$ und an der Stelle $x = 0$ ein Maximum: $y = 0$.
Graph: Quadratische Parabel mit dem Scheitel S (0: 0).

$y = ax^2 + c$ $(a \neq 0;\ c \neq 0)$

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Im Fall $a > 0$ hat die Funktion den Wertebereich $c \leqq y < +\infty$ und an der Stelle $x = 0$ ein Minimum: $y = c$.
Im Fall $a < 0$ hat die Funktion den Wertebereich $-\infty < y \leqq c$ und an der Stelle $x = 0$ ein Maximum: $y = c$.
Graph: Quadratische Parabel mit dem Scheitel S (0; c).

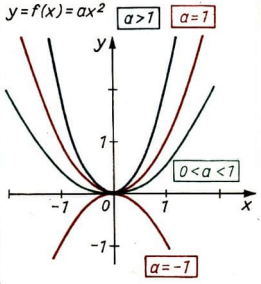
$y = x^2 + px + q$ (Normalform)

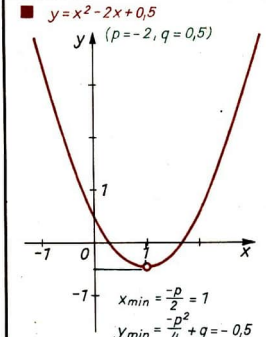
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

Wertebereich: $-\frac{p^2}{4} + q \leqq y < +\infty$

An der Stelle $x = -\frac{p}{2}$ hat die Funktion ein Minimum: $y = -\frac{p^2}{4} + q$.

Graph: Zur Normalparabel kongruente Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$.





Wertetafel der Funktion $y = x^2$ (Tafel der Quadrate)

Die folgende Tabelle liefert die Quadrate aller positiven Zahlen mit 3 wesentlichen Ziffern. Unter den **wesentlichen Ziffern** versteht man alle Ziffern der Ziffernfolge einer Zahl mit Ausnahme der Nullen, die links von der ersten und rechts von der letzten von Null verschiedenen Ziffer in der Ziffernfolge stehen (z. B. 0,045800 hat 3 wesentliche Ziffern, 25,08000 hat 4 wesentliche Ziffern). Die Quadrate sind in der Tabelle mit 4 zuverlässigen Ziffern angegeben, wobei die am weitesten rechts stehende Ziffer in vielen Fällen durch Aufrunden entstanden ist. Die gerundete 5 wird durch $\underline{5}$ gekennzeichnet, falls sie durch Auf-

runden entstanden ist, und durch 5, falls sie durch Abrunden entstanden ist. Beim weiteren Runden wird stets abgerundet, wenn es sich um eine 5 handelt, und aufgerundet, falls eine 5 verzeichnet ist.

↗ Rundungsregeln, Seite 12

Die Tafel der Quadrate kann auch zum Quadratwurzelziehen verwendet werden. Deshalb sind im folgenden Bild gleich beide Operationen angedeutet worden.

Beim **Ermitteln der Quadrate** geht man folgendermaßen vor:

■ Gesucht wird $y = 1{,}13^2$. Man geht in der Zeile 1,1 bis zur Spalte 3 und findet 1,277.

n	0	1	2	3	4
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796

→ Quadrieren → Quadratwurzelziehen

■ Gesucht wird $y = 11{,}3^2$.
Da
$11{,}3^2 = (10 \cdot 1{,}13)^2 = 10^2 \cdot 1{,}13^2 = 100 \cdot 1{,}13^2$,
sucht man $1{,}13^2$ auf und multipliziert mit 100, das heißt, man liest 1,277 ab und rückt das Komma um 2 Stellen nach rechts: $11{,}3^2 = 127{,}7$.

■ Gesucht wird $y = 0{,}113^2$.
Da
$$0{,}113^2 = \left(\frac{1}{10} \cdot 1{,}13\right)^2 = \frac{1}{100} \cdot 1{,}13^2,$$
sucht man $1{,}13^2$ auf und dividiert durch 100, das heißt, man liest 1,277 ab und rückt das Komma um 2 Stellen nach links: $0{,}113^2 = 0{,}01277$.

▶ Rückt das Komma in x eine (zwei, drei, ...) Stellen nach rechts (links), so rückt es in x^2 um zwei (vier, sechs, ...) Stellen nach rechts (links).

Wird das Quadrat einer Zahl gesucht, die mehr als 3 wesentliche Ziffern hat, so kann man auf 3 wesentliche Ziffern runden oder aber interpolieren (↗ 45).

■ Gesucht wird $y = 1{,}132^2$

Runden ergibt:
$1{,}132^2 \approx 1{,}13^2$
$1{,}13^2 = 1{,}277$

Interpolieren ergibt:
$1{,}130^2 = 1{,}277$ Diff.: 23
$1{,}140^2 = 1{,}300$ $2{,}3 \cdot 2 \approx 5$
$1{,}132^2 = 1{,}277 + 0{,}005 = 1{,}282$

Beim **Ziehen der Quadratwurzel** sucht man den Radikanden im Tabellenfeld und geht zum Tabelleneingang zurück (↗ Tabellenausschnitt oben).

■ Gesucht wird $n = \sqrt{1{,}53}$ Man erhält eine Näherung mit $\sqrt{1{,}538} \approx 1{,}24$.

$y = x^2$ 1,00 ... 5,09

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,422	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91

$y = x^2$ 5,00 ... 9,09

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	**25,00**	**25,10**	**25,20**	**25,30**	**25,40**	**25,50**	**25,60**	**25,70**	**25,81**	**25,91**
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	**36,00**	**36,12**	**36,24**	**36,36**	**36,48**	**36,60**	**36,72**	**36,84**	**36,97**	**37,09**
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	**49,00**	**49,14**	**49,28**	**49,42**	**49,56**	**49,70**	**49,84**	**49,98**	**50,13**	**50,27**
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	**64,00**	**64,16**	**64,32**	**64,48**	**64,64**	**64,80**	**64,96**	**65,12**	**65,29**	**65,45**
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	**81,00**	**81,18**	**81,36**	**81,54**	**81,72**	**81,90**	**82,08**	**82,26**	**82,45**	**82,63**

$y = x^2$										9,00 ... 10,09
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80
10,0	100,0	100,2	100,4	100,6	100,8	101,0	101,2	101,4	101,6	101,8

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$; a, b, c konstant)

Normalform: $x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
Zerlegung in Linearfaktoren: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ x_1 und x_2 sind Lösungen.	Im Falle $D > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen. Im Falle $D = 0$ gibt es eine (zweifache) reelle Lösung. Im Falle $D < 0$ gibt es keine reelle Lösung.
VIETAscher Wurzelsatz: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$	

Wertetafel der Funktion $y = x^3$ (Tafel der Kuben)

Die folgende Tabelle liefert die dritten Potenzen aller positiven Zahlen mit 3 wesentlichen Ziffern (Begriff „wesentliche Ziffer" ↗ Seite 19).
Beim **Aufsuchen der dritten Potenzen** der Zahlen 1,00 ... 9,99 verfährt man entsprechend der Beschreibung für das Aufsuchen der Quadrate auf Seite 19f.

■ Gesucht wird $y = 8{,}47^3$
Man geht in der Zeile 8,4 bis zur Spalte 7 und findet $8{,}47^3 = \underline{\underline{607{,}6}}$.

Bei Zahlen, die kleiner als 1 oder größer als 9,99 sind, muß man die Basis in ein Produkt aus einer Zehnerpotenz und einer Zahl im Intervall $\langle 1; 9{,}99 \rangle$ zerlegen.

■ Gesucht wird $y = 84{,}7^3$.

1/3

Da $84{,}7^3 = (10 \cdot 8{,}47)^3 = 10^3 \cdot 8{,}47^3 = 1000 \cdot 8{,}47^3$,
sucht man $8{,}47^3$ auf und multipliziert mit 1000, d. h., man liest 607,6 ab und rückt das Komma um 3 Stellen nach rechts: $84{,}7^3 = \underline{\underline{607\,600}}$.

■ Gesucht wird $y = 0{,}847^3$.

Da $0{,}847^3 = \left(\frac{1}{10} \cdot 8{,}47\right)^3 = \frac{1}{1000} \cdot 8{,}47^3$,

sucht man $8{,}47^3$ auf und dividiert durch 1000, d. h., man liest 607,6 ab und rückt das Komma um 3 Stellen nach links: $0{,}847^3 = 0{,}6076$.

▶ Rückt das Komma in x um eine (zwei, drei, ...) Stellen nach rechts (links), so rückt es in x^3 um drei (sechs, neun, ...) Stellen nach rechts (links).

Wird die dritte Potenz einer Zahl gesucht, die mehr als drei wesentliche Ziffern hat, so kann man auf 3 wesentliche Ziffern runden oder interpolieren, wenn man ein genaueres Resultat erhalten will.
↗ Interpolieren, Seite 45

■ Gesucht wird $y = 8{,}474^3$.

Runden ergibt:
$8{,}474^3 \approx 8{,}47^3$
$8{,}47^3 = \underline{\underline{607{,}6}}$

Interpolieren ergibt:
$8{,}470^3 = 607{,}6$ Diff.: 22
$8{,}480^3 = 609{,}8$ $2{,}2 \cdot 4 \approx 9$
$8{,}474^3 = \underline{\underline{608{,}5}}$

Beim **Ziehen der dritten Wurzel** sucht man die Radikanden im Tabellenfeld und geht zum Tabelleneingang zurück.

■ Gesucht wird $n = \sqrt[3]{0{,}124}$.
Man findet eine Näherung mit $\sqrt[3]{0{,}1243} = \underline{\underline{0{,}499}}$.

Eine spezielle Tafel zum Ziehen der dritten Wurzeln befindet sich auf den Seiten 33 bis 36. Im oben stehenden Beispiel liefert diese Tabelle eine zuverlässige Stelle mehr als die Kubiktafel der Seiten 24 bis 26, nämlich $\sqrt[3]{0{,}124} = 0{,}4987$.

$y = x^3$ · **1,00 ... 2,09**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129

$y = x^3$ 2,00 ... 6,09

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9

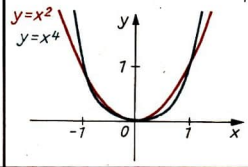
$y = x^3$ 6,00 ... 10,09

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	**216,0**	**217,1**	**218,2**	**219,3**	**220,3**	**221,4**	**222,5**	**223,6**	**224,8**	**225,9**
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	**343,0**	**344,5**	**345,9**	**347,4**	**348,9**	**350,4**	**351,9**	**353,4**	**354,9**	**356,4**
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	**512,0**	**513,9**	**515,8**	**517,8**	**519,7**	**521,7**	**523,6**	**525,6**	**527,5**	**529,5**
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	**729,0**	**731,4**	**733,9**	**736,3**	**738,8**	**741,2**	**743,7**	**746,1**	**748,6**	**751,1**
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0
10,0	**1000**	**1003**	**1006**	**1009**	**1012**	**1015**	**1018**	**1021**	**1024**	**1027**

Die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 1$; n ganzzahlig)

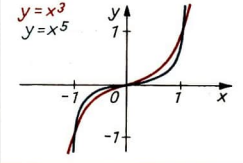
Exponent gerade: $y = x^{2k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Wertebereich: $0 \leqq y < +\infty$
Die Funktionen sind gerade, d. h., es gilt $f(-x) = f(x)$.
Die Graphen sind Parabeln 2-ten, 4ten, 6ten, ... Grades. Sie sind symmetrisch zur y-Achse und gehen alle durch die Punkte P_1 (0; 0), P_2 (−1; 1) und P_3 (1; 1).



Exponent ungerade: $y = x^{2k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

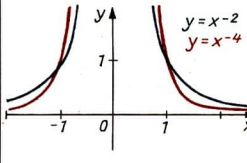
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$
Wertebereich: $-\infty < y < +\infty$
Die Funktionen sind ungerade, d. h., es gilt $f(-x) = -f(x)$.
Die Graphen sind Parabeln 3ten, 5ten, ... Grades. Sie sind zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung und gehen alle durch die Punkte P_1 (0; 0), P_2 (1; 1), P_3 (−1; −1).



Die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n < 0$; n ganzzahlig)

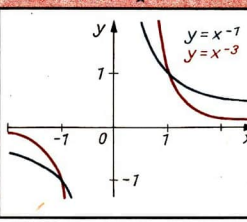
Exponent gerade: $y = x^{-2k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), also $y = \frac{1}{x^{2k}}$

Definitionsbereich: $-\infty < x < 0$ und $0 < x < +\infty$
Wertebereich: $0 < y < +\infty$
Die Funktionen sind gerade, denn es gilt für alle x des Definitionsbereichs $f(-x) = f(x)$.
Die Graphen heißen Hyperbeln. Sie sind symmetrisch zur y-Achse und gehen alle durch die Punkte P_1 (−1; 1) und P_2 (1; 1).



Exponent ungerade: $y = x^{-(2k+1)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), also $y = \frac{1}{x^{2k+1}}$

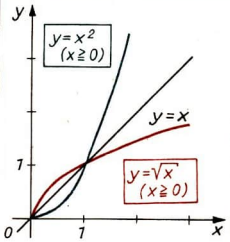
Definitionsbereich: $-\infty < x < 0$ und $0 < x < +\infty$
Wertebereich: $-\infty < y < 0$ und $0 < y < +\infty$
Die Funktionen sind ungerade, denn es gilt für alle x des Definitionsbereichs $f(-x) = -f(x)$.
Die Graphen heißen Hyperbeln. Sie sind zentralsymmetrisch und gehen alle durch die Punkte P_1 (−1; −1) und P_2 (1; 1).



Wurzelfunktionen

Die Funktion
$y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$

Definitionsbereich: $x \geqq 0$
Wertebereich: $y \geqq 0$
Die Funktion $y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ ist die *Umkehrfunktion* der quadratischen Funktion $y = x^2\ (x \geqq 0)$.



	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = x^2$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$

Umkehrfunktion

	Definitionsbereich	Wertebereich
$x = \sqrt[2]{y}$	$y \geqq 0$	$x \geqq 0$

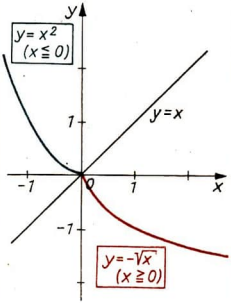
Bezeichnet man auch in dieser Funktion die Elemente des Definitionsbereichs mit x und die Elemente des Wertebereichs mit y, so erhält man

$y = \sqrt[2]{x}$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$

Der Graph der Funktion $y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ geht aus dem Graphen der Funktion $y = x^2\ (x \geqq 0)$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor.

Die Funktion
$y = -\sqrt{x}\ (x \geqq 0)$

Definitionsbereich: $x \geqq 0$
Wertebereich: $y \leqq 0$
Die Funktion $y = -\sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ ist die *Umkehrfunktion* der quadratischen Funktion $y = x^2\ (x \leqq 0)$.



	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = x^2$	$x \leqq 0$	$y \geqq 0$

Umkehrfunktion

	Definitionsbereich	Wertebereich
$x = -\sqrt[2]{y}$	$y \geqq 0$	$x \leqq 0$

Bezeichnen der Elemente des Definitionsbereichs mit x und der des Wertebereichs mit y:

$y = -\sqrt[2]{x}$	$x \geqq 0$	$y \leqq 0$

Der Graph der Funktion $y = -\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ geht aus dem Graphen der Funktion $y = x^2$ $(x \leqq 0)$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor.

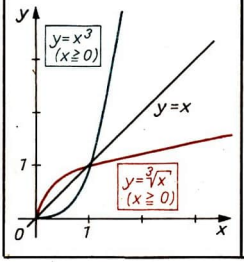
Die Funktion

$y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$

Definitionsbereich: $x \geqq 0$

Wertebereich: $y \geqq 0$

Die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^3$ $(x \geqq 0)$.



	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = x^3$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$

Umkehrfunktion

	Definitionsbereich	Wertebereich
$x = \sqrt[3]{y}$	$y \geqq 0$	$x \geqq 0$

Austausch der Bezeichnungen:

$y = \sqrt[3]{x}$	$x \geqq 0$	$y \geqq 0$

Der Graph der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ geht aus dem Graphen der Funktion $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor.

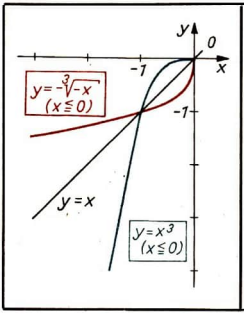
Die Funktion

$y = -\sqrt[3]{-x}$ $(x \leqq 0)$

Definitionsbereich: $x \leqq 0$

Wertebereich: $y \leqq 0$

Die Funktion $y = -\sqrt[3]{-x}$ $(x \leqq 0)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = x^3$ $(x \leqq 0)$.



	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = x^3$	$x \leqq 0$	$y \leqq 0$

Umkehrfunktion

	Definitionsbereich	Wertebereich
$x = -\sqrt[3]{-y}$	$y \leqq 0$	$x \leqq 0$

Austausch der Bezeichnungen:

$y = -\sqrt[3]{-x}$	$x \leqq 0$	$y \leqq 0$

Der Graph der Funktion $y = -\sqrt[3]{-x}$ $(x \leqq 0)$ geht aus dem Graphen der Funktion $y = x^3$ $(x \leqq 0)$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor.

1/3

Wertetafel der Funktion $y = \sqrt{x}$ (Tafel der Quadratwurzeln)

Die folgende Tabelle enthält in der Spalte ,0 die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen bis 100 mit 4 zuverlässigen Ziffern.

■ Gesucht wird $\sqrt{12}$. Man findet $\sqrt{12} = \underline{\underline{3{,}464}}$.

Man hat mit dieser Spalte gleichsam die Quadratwurzeln von 1,0; 2,0; 3,0; ...; 100,0 erfaßt. Tritt an der Stelle für die Zehntel die 1, 2, ..., 9 auf, so geht man zur entsprechenden Spalte über.

■ Gesucht wird $\sqrt{12{,}8}$.
Man geht in der Zeile 12 bis zur Spalte ,8 und findet $\sqrt{12{,}8} = \underline{\underline{3{,}578}}$.

Bei Zahlen, die kleiner als 1 oder größer als 100,9 sind, muß man den Radikanden in ein Produkt aus einer Zahl im Intervall $\langle 1; 100{,}9 \rangle$ und einer Zehnerpotenz mit geradzahligem Exponenten zerlegen.

■ Gesucht wird $\sqrt{1200}$.
Da $\sqrt{1200} = \sqrt{12{,}0 \cdot 100} = \sqrt{12{,}0 \cdot 10^2} = \sqrt{12{,}0} \cdot 10$, sucht man $\sqrt{12{,}0}$ auf und multipliziert mit 10, d. h., man liest 3,464 ab und rückt das Komma um eine Stelle nach rechts: $\sqrt{1200} = \underline{\underline{34{,}64}}$.

■ Gesucht wird $\sqrt{0{,}00135}$.

Da $\sqrt{0{,}00135} = \sqrt{13{,}5 \cdot \frac{1}{10000}} = \sqrt{13{,}5 \cdot \frac{1}{100^2}} = \sqrt{13{,}5} \cdot \frac{1}{100}$, sucht man $\sqrt{13{,}5}$ auf und dividiert durch 100, d. h., man liest 3,674 ab und rückt das Komma um zwei Stellen nach links: $\sqrt{0{,}00135} = \underline{\underline{0{,}03674}}$.

▶ Rückt das Komma in x zwei (vier, sechs, ...) Stellen nach rechts (links), so rückt es in $\sqrt{x}$ um eine (zwei, drei, ...) Stellen nach rechts (links).

Mitunter muß man vor dem Ablesen der Quadratwurzel runden.

$y = \sqrt{x}$										0,0 ... 10,9
x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	0,000	0,316	0,447	0,548	0,632	0,707	0,77$\underline{5}$	0,837	0,894	0,949
1	1,000	1,049	1,09$\underline{5}$	1,140	1,183	1,22$\underline{5}$	1,26$\underline{5}$	1,304	1,342	1,378
2	1,414	1,449	1,483	1,517	1,549	1,581	1,612	1,643	1,673	1,703
3	1,732	1,761	1,789	1,817	1,844	1,871	1,897	1,924	1,949	1,97$\underline{5}$
4	2,000	2,02$\underline{5}$	2,049	2,074	2,098	2,121	2,14$\underline{5}$	2,168	2,191	2,214
5	2,236	2,258	2,280	2,302	2,324	2,34$\underline{5}$	2,366	2,387	2,408	2,429
6	2,449	2,470	2,490	2,510	2,530	2,5$\underline{5}$0	2,569	2,588	2,608	2,627
7	2,646	2,66$\underline{5}$	2,683	2,702	2,720	2,739	2,757	2,77$\underline{5}$	2,793	2,811
8	2,828	2,846	2,864	2,881	2,898	2,91$\underline{5}$	2,933	2,9$\underline{5}$0	2,966	2,983
9	3,000	3,017	3,033	3,0$\underline{5}$0	3,066	3,082	3,098	3,114	3,130	3,146
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,22$\underline{5}$	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302

$y = \sqrt{x}$ 10,0 ... 50,9

x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302
11	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450
12	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592
13	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728
14	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860
15	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987
16	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111
17	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231
18	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347
19	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461
20	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572
21	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680
22	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785
23	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889
24	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990
25	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089
26	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187
27	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282
28	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376
29	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468
30	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559
31	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648
32	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736
33	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822
34	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908
35	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992
36	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075
37	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156
38	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237
39	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317
40	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395
41	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473
42	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550
43	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626
44	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701
45	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775
46	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848
47	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921
48	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993
49	7,000	7,007	7,014	7,021	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064
50	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134

$y = \sqrt{x}$ 50,0 ... 90,9

x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
50	**7,071**	**7,078**	**7,085**	**7,092**	**7,099**	**7,106**	**7,113**	**7,120**	**7,127**	**7,134**
51	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204
52	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273
53	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342
54	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409
55	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477
56	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543
57	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609
58	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675
59	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740
60	**7,746**	**7,752**	**7,759**	**7,765**	**7,772**	**7,778**	**7,785**	**7,791**	**7,797**	**7,804**
61	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7,861	7,868
62	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931
63	7,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994
64	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056
65	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118
66	8,124	8,130	8,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179
67	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240
68	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301
69	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361
70	**8,367**	**8,373**	**8,379**	**8,385**	**8,390**	**8,396**	**8,402**	**8,408**	**8,414**	**8,420**
71	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,468	8,473	8,479
72	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538
73	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597
74	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654
75	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712
76	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769
77	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	8,826
78	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	8,860	8,866	8,871	8,877	8,883
79	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939
80	**8,944**	**8,950**	**8,955**	**8,961**	**8,967**	**8,972**	**8,978**	**8,983**	**8,989**	**8,994**
81	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050
82	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105
83	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160
84	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214
85	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268
86	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322
87	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375
88	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429
89	9,434	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482
90	**9,487**	**9,492**	**9,497**	**9,503**	**9,508**	**9,513**	**9,518**	**9,524**	**9,529**	**9,534**

$y = \sqrt{x}$										90,0 ... 100,9
x	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
90	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534
91	9,539	9,54$\underline{5}$	9,5$\underline{5}$0	9,55$\underline{5}$	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586
92	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638
93	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,67$\underline{5}$	9,680	9,685	9,690
94	9,69$\underline{5}$	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742
95	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793
96	9,798	9,803	9,808	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844
97	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894
98	9,899	9,90$\underline{5}$	9,910	9,91$\underline{5}$	9,920	9,92$\underline{5}$	9,930	9,93$\underline{5}$	9,940	9,94$\underline{5}$
99	9,9$\underline{5}$0	9,95$\underline{5}$	9,960	9,96$\underline{5}$	9,970	9,97$\underline{5}$	9,980	9,98$\underline{5}$	9,990	9,99$\underline{5}$
100	10,000	10,00$\underline{5}$	10,010	10,01$\underline{5}$	10,020	10,02$\underline{5}$	10,030	10,03$\underline{5}$	10,040	10,04$\underline{5}$

Wertetafel der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ (Tafel der Kubikwurzeln)

Die folgende Tabelle gibt die Kubikwurzeln für alle natürlichen Zahlen von 0 bis 1009 an. Sie weicht in ihrem Aufbau grundsätzlich von der Tabelle der Quadratwurzeln auf den Seiten 30 bis 33 ab. In der folgenden Tabelle der Kubikwurzeln enthält die Spalte 0 die Kubikwurzeln der natürlichen Zahlen 0, 10, 20, 30, ..., 990, 1000, mit vier zuverlässigen Ziffern. Die rechts daneben liegende Spalte, die die 1 im Tabellenkopf trägt, enthält die Kubikwurzeln der natürlichen Zahlen 1, 11, 21, 31, ..., 991, 1001. Die Kubikwurzeln der Zahlen 0, 1, 2, 3, .. sind also zeilenweise geordnet, wobei die Ziffer im Spaltenkopf stets die zuletzt stehende Grundziffer des Radikanden angibt.

x	0	1	2	3
0	0,000	1,000	1,260	1,442
1	2,154	2,224	2,289	2,351
2	2,714	2,759	2,802	2,844
3	3,107	3,141	3,175	3,208
4	3,420	3,448	3,476	3,503

- Gesucht wird $\sqrt[3]{2}$.
  Man geht in der Zeile 0 bis zur Spalte 2 und findet $\sqrt[3]{2} = \underline{\underline{1{,}260}}$.
- Gesucht wird $\sqrt[3]{23}$.
  Man geht in der Zeile 2 bis zur Spalte 3 und findet $\sqrt[3]{23} = \underline{\underline{2{,}844}}$.

$\longrightarrow \sqrt[3]{2}$ $\longrightarrow \sqrt[3]{23}$

Bei Zahlen, die kleiner als 1 oder größer als 1009 sind, muß man den Radikanden in ein Produkt aus einer Zahl im Intervall $\langle 1; 1009 \rangle$ und einer Zehnerpotenz mit durch drei teilbarem Exponenten zerlegen.

- Gesucht wird $\sqrt[3]{12000}$.
  Da $\sqrt[3]{12000} = \sqrt[3]{12 \cdot 1000} = \sqrt[3]{12 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{12} \cdot 10$, sucht man $\sqrt[3]{12}$ auf und multipliziert mit 10, d. h., man liest 2,289 ab und rückt das Komma um eine Stelle nach rechts.

▶ Rückt das Komma in x um drei Stellen nach rechts (links), so rückt es in $\sqrt[3]{x}$ um eine Stelle nach rechts (links).

$y = \sqrt[3]{x}$ **0 ... 409**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	**0,000**	**1,000**	**1,260**	**1,442**	**1,587**	**1,710**	**1,817**	**1,913**	**2,000**	**2,080**
1	2,154	2,224	2,289	2,351	2,410	2,466	2,520	2,571	2,621	2,668
2	2,714	2,759	2,802	2,844	2,884	2,924	2,962	3,000	3,037	3,072
3	3,107	3,141	3,175	3,208	3,240	3,271	3,302	3,332	3,362	3,391
4	3,420	3,448	3,476	3,503	3,530	3,557	3,583	3,609	3,634	3,659
5	3,684	3,708	3,733	3,756	3,780	3,803	3,826	3,849	3,871	3,893
6	3,915	3,936	3,958	3,979	4,000	4,021	4,041	4,062	4,082	4,102
7	4,121	4,141	4,160	4,179	4,198	4,217	4,236	4,254	4,273	4,291
8	4,309	4,327	4,344	4,362	4,380	4,397	4,414	4,431	4,448	4,465
9	4,481	4,498	4,514	4,531	4,547	4,563	4,579	4,595	4,610	4,626
10	**4,642**	**4,657**	**4,672**	**4,688**	**4,703**	**4,718**	**4,733**	**4,747**	**4,762**	**4,777**
11	4,791	4,806	4,820	4,835	4,849	4,863	4,877	4,891	4,905	4,919
12	4,932	4,946	4,960	4,973	4,987	5,000	5,013	5,027	5,040	5,053
13	5,066	5,079	5,092	5,104	5,117	5,130	5,143	5,155	5,168	5,180
14	5,192	5,205	5,217	5,229	5,241	5,254	5,266	5,278	5,290	5,301
15	5,313	5,325	5,337	5,348	5,360	5,372	5,383	5,395	5,406	5,418
16	5,429	5,440	5,451	5,463	5,474	5,485	5,496	5,507	5,518	5,529
17	5,540	5,550	5,561	5,572	5,583	5,593	5,604	5,615	5,625	5,636
18	5,646	5,657	5,667	5,677	5,688	5,698	5,708	5,718	5,729	5,739
19	5,749	5,759	5,769	5,779	5,789	5,799	5,809	5,819	5,828	5,838
20	**5,848**	**5,858**	**5,867**	**5,877**	**5,887**	**5,896**	**5,906**	**5,915**	**5,925**	**5,934**
21	5,944	5,953	5,963	5,972	5,981	5,991	6,000	6,009	6,018	6,028
22	6,037	6,046	6,055	6,064	6,073	6,082	6,091	6,100	6,109	6,118
23	6,127	6,136	6,145	6,153	6,162	6,171	6,180	6,188	6,197	6,206
24	6,214	6,223	6,232	6,240	6,249	6,257	6,266	6,274	6,283	6,291
25	6,300	6,308	6,316	6,325	6,333	6,341	6,350	6,358	6,366	6,374
26	6,383	6,391	6,399	6,407	6,415	6,423	6,431	6,439	6,447	6,455
27	6,463	6,471	6,479	6,487	6,495	6,503	6,511	6,519	6,527	6,534
28	6,542	6,550	6,558	6,565	6,573	6,581	6,589	6,596	6,604	6,611
29	6,619	6,627	6,634	6,642	6,649	6,657	6,664	6,672	6,679	6,687
30	**6,694**	**6,702**	**6,709**	**6,717**	**6,724**	**6,731**	**6,739**	**6,746**	**6,753**	**6,761**
31	6,768	6,775	6,782	6,790	6,797	6,804	6,811	6,818	6,826	6,833
32	6,840	6,847	6,854	6,861	6,868	6,875	6,882	6,889	6,896	6,903
33	6,910	6,917	6,924	6,931	6,938	6,945	6,952	6,959	6,966	6,973
34	6,980	6,986	6,993	7,000	7,007	7,014	7,020	7,027	7,034	7,041
35	7,047	7,054	7,061	7,067	7,074	7,081	7,087	7,094	7,101	7,107
36	7,114	7,120	7,127	7,133	7,140	7,147	7,153	7,160	7,166	7,173
37	7,179	7,186	7,192	7,198	7,205	7,211	7,218	7,224	7,230	7,237
38	7,243	7,250	7,256	7,262	7,268	7,275	7,281	7,287	7,294	7,300
39	7,306	7,312	7,319	7,325	7,331	7,337	7,343	7,350	7,356	7,362
40	**7,368**	**7,374**	**7,380**	**7,386**	**7,393**	**7,399**	**7,405**	**7,411**	**7,417**	**7,423**

$y = \sqrt[3]{x}$ **400 ... 809**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	**7,368**	**7,374**	**7,380**	**7,386**	**7,393**	**7,399**	**7,405**	**7,411**	**7,417**	**7,423**
41	7,429	7,435	7,441	7,447	7,453	7,459	7,465	7,471	7,477	7,483
42	7,489	7,495	7,501	7,507	7,513	7,518	7,524	7,530	7,536	7,542
43	7,548	7,554	7,560	7,565	7,571	7,577	7,583	7,589	7,594	7,600
44	7,606	7,612	7,617	7,623	7,629	7,635	7,640	7,646	7,652	7,657
45	7,663	7,669	7,674	7,680	7,686	7,691	7,697	7,703	7,708	7,714
46	7,719	7,725	7,731	7,736	7,742	7,747	7,753	7,758	7,764	7,769
47	7,775	7,780	7,786	7,791	7,797	7,802	7,808	7,813	7,819	7,824
48	7,830	7,835	7,841	7,846	7,851	7,857	7,862	7,868	7,873	7,878
49	7,884	7,889	7,894	7,900	7,905	7,910	7,916	7,921	7,926	7,932
50	**7,937**	**7,942**	**7,948**	**7,953**	**7,958**	**7,963**	**7,969**	**7,974**	**7,979**	**7,984**
51	7,990	7,995	8,000	8,005	8,010	8,016	8,021	8,026	8,031	8,036
52	8,041	8,047	8,052	8,057	8,062	8,067	8,072	8,077	8,082	8,088
53	8,093	8,098	8,103	8,108	8,113	8,118	8,123	8,128	8,133	8,138
54	8,143	8,148	8,153	8,158	8,163	8,168	8,173	8,178	8,183	8,188
55	8,193	8,198	8,203	8,208	8,213	8,218	8,223	8,228	8,233	8,238
56	8,243	8,247	8,252	8,257	8,262	8,267	8,272	8,277	8,282	8,286
57	8,291	8,296	8,301	8,306	8,311	8,316	8,320	8,325	8,330	8,335
58	8,340	8,344	8,349	8,354	8,359	8,363	8,368	8,373	8,378	8,382
59	8,387	8,392	8,397	8,401	8,406	8,411	8,416	8,420	8,425	8,430
60	**8,434**	**8,439**	**8,444**	**8,448**	**8,453**	**8,458**	**8,462**	**8,467**	**8,472**	**8,476**
61	8,481	8,486	8,490	8,495	8,499	8,504	8,509	8,513	8,518	8,522
62	8,527	8,532	8,536	8,541	8,545	8,550	8,554	8,559	8,564	8,568
63	8,573	8,577	8,582	8,586	8,591	8,595	8,600	8,604	8,609	8,613
64	8,618	8,622	8,627	8,631	8,636	8,640	8,645	8,649	8,653	8,658
65	8,662	8,667	8,671	8,676	8,680	8,685	8,689	8,693	8,698	8,702
66	8,707	8,711	8,715	8,720	8,724	8,729	8,733	8,737	8,742	8,746
67	8,750	8,755	8,759	8,763	8,768	8,772	8,776	8,781	8,785	8,789
68	8,794	8,798	8,802	8,807	8,811	8,815	8,819	8,824	8,828	8,832
69	8,837	8,841	8,845	8,849	8,854	8,858	8,862	8,866	8,871	8,875
70	**8,879**	**8,883**	**8,887**	**8,892**	**8,896**	**8,900**	**8,904**	**8,909**	**8,913**	**8,917**
71	8,921	8,925	8,929	8,934	8,938	8,942	8,946	8,950	8,955	8,959
72	8,963	8,967	8,971	8,975	8,979	8,984	8,988	8,992	8,996	9,000
73	9,004	9,008	9,012	9,016	9,021	9,025	9,029	9,033	9,037	9,041
74	9,045	9,049	9,053	9,057	9,061	9,065	9,069	9,073	9,078	9,082
75	9,086	9,090	9,094	9,098	9,102	9,106	9,110	9,114	9,118	9,122
76	9,126	9,130	9,134	9,138	9,142	9,146	9,150	9,154	9,158	9,162
77	9,166	9,170	9,174	9,178	9,182	9,185	9,189	9,193	9,197	9,201
78	9,205	9,209	9,213	9,217	9,221	9,225	9,229	9,233	9,237	9,240
79	9,244	9,248	9,252	9,256	9,260	9,264	9,268	9,272	9,275	9,279
80	**9,283**	**9,287**	**9,291**	**9,295**	**9,299**	**9,302**	**9,306**	**9,310**	**9,314**	**9,318**

$y = \sqrt[3]{x}$ **800 ... 1009**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9,283	9,287	9,291	9,29$\underline{5}$	9,299	9,302	9,306	9,310	9,314	9,318
81	9,322	9,326	9,329	9,333	9,337	9,341	9,34$\underline{5}$	9,348	9,352	9,356
82	9,360	9,364	9,368	9,371	9,37$\underline{5}$	9,379	9,383	9,386	9,390	9,394
83	9,398	9,402	9,40$\underline{5}$	9,409	9,413	9,417	9,420	9,424	9,428	9,432
84	9,43$\underline{5}$	9,439	9,443	9,447	9,45$\underline{0}$	9,454	9,458	9,462	9,46$\underline{5}$	9,469
85	9,473	9,476	9,480	9,484	9,488	9,491	9,49$\underline{5}$	9,499	9,502	9,506
86	9,510	9,513	9,517	9,521	9,524	9,528	9,532	9,53$\underline{5}$	9,539	9,543
87	9,546	9,55$\underline{0}$	9,554	9,557	9,561	9,56$\underline{5}$	9,568	9,572	9,576	9,579
88	9,583	9,586	9,590	9,594	9,597	9,601	9,60$\underline{5}$	9,608	9,612	9,61$\underline{5}$
89	9,619	9,623	9,626	9,630	9,633	9,637	9,641	9,644	9,648	9,651
90	9,65$\underline{5}$	9,658	9,662	9,666	9,669	9,673	9,676	9,680	9,683	9,687
91	9,691	9,694	9,698	9,701	9,70$\underline{5}$	9,708	9,712	9,71$\underline{5}$	9,719	9,722
92	9,726	9,729	9,733	9,736	9,740	9,743	9,747	9,75$\underline{0}$	9,754	9,758
93	9,761	9,764	9,768	9,771	9,77$\underline{5}$	9,778	9,782	9,78$\underline{5}$	9,789	9,792
94	9,796	9,799	9,803	9,806	9,810	9,813	9,817	9,820	9,824	9,827
95	9,830	9,834	9,837	9,841	9,844	9,848	9,851	9,85$\underline{5}$	9,858	9,861
96	9,86$\underline{5}$	9,868	9,872	9,87$\underline{5}$	9,879	9,882	9,88$\underline{5}$	9,889	9,892	9,896
97	9,899	9,902	9,906	9,909	9,913	9,916	9,919	9,923	9,926	9,930
98	9,933	9,936	9,940	9,943	9,946	9,95$\underline{0}$	9,953	9,956	9,960	9,963
99	9,967	9,970	9,973	9,977	9,980	9,983	9,987	9,990	9,993	9,997
100	10,000	10,003	10,007	10,010	10,013	10,017	10,020	10,023	10,027	10,030

Exponentialfunktionen – Logarithmusfunktionen

Exponentialfunktionen

$y = a^x \; (a > 0; \quad a \neq 1)$

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

Wertebereich: $0 < y < +\infty$

Die Graphen gehen alle durch den gemeinsamen Punkt $P\,(0; 1)$.

■ $y = 2^x$; $y = 10^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Von besonderer Bedeutung ist die e-Funktion $y = e^x$, die Exponentialfunktion mit der Basis e. Die Zahl $e \approx 2{,}718281 \ldots$ ergibt sich als Grenzwert der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (↗ 71).

Logarithmusfunktionen

$y = \log_a x \; (a > 0; \quad a \neq 1)$

Definitionsbereich: $0 < x < +\infty$

Wertebereich: $-\infty < y < +\infty$

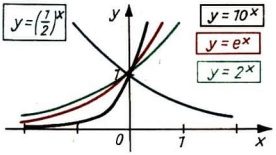
Die Graphen gehen alle durch den gemeinsamen Punkt $P\,(1; 0)$.

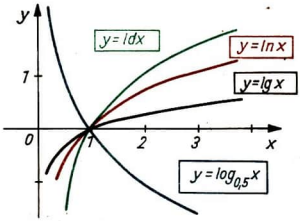
■ $y = \log_{10} x = \lg x$;

$y = \log_2 x = \mathrm{ld}\, x$; $y = \log_{0{,}5} x$

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = a^x$. Ihr Graph geht aus dem Graphen der Funktion $y = a^x$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor.

$a^x = e^{x \cdot \ln a}$





Die Tafel der Funktion $y = e^x$

Die folgende Tafel kann zum Ablesen einer großen Anzahl von Werten der Funktion $y = e^x$ verwendet werden. Die Anzahl erhöht sich durch die Anwendung der Potenzgesetze (↗ 14f).

■ Gesucht ist $e^{0,13}$.
Wegen $e^{0,13} = e^{0,10+0,03} = e^{0,10} \cdot e^{0,03}$ erhält man $1,1052 \cdot 1,0305 \approx 1,1389$,
also $e^{0,13} = \underline{\underline{1,1389}}$.

■ Gesucht ist $e^{1,84}$.
Wegen $e^{1,84} = e^{2 \cdot 0,92} = e^{0,92} \cdot e^{0,92}$ erhält man $2,5093^2 \approx 6,2966$,
also $e^{1,84} = \underline{\underline{6,2966}}$.

Die Tafel kann auch zum Ermitteln von Funktionswerten für andere Funktionen $y = a^x$ dienen. Wegen $a = e^{\ln a}$ folgt $y = a^x = e^{x \cdot \ln a}$, so daß zum Ermitteln der Funktionswerte von $y = a^x$ die verschiedenen Werte x jeweils mit $\ln a$ (↗ 39) multipliziert werden müssen, damit dann die Tafel der e-Funktion herangezogen werden kann.

■ Gesucht ist $2^{0,5}$.

$$2^{0,5} = e^{0,5 \cdot \ln 2} = e^{0,5 \cdot 0,6931} \approx e^{0,34} = \underline{\underline{1,40}}$$

Gesucht ist $2^{1,2}$.

$$2^{1,2} = e^{1,2 \cdot \ln 2} = e^{1,2 \cdot 0,6931} \approx e^{0,84} = \underline{\underline{2,32}}$$

(Durch die Rundung in der Zwischenrechnung, die in Abweichung der Rundungsregeln auf die Verwendung der nachstehenden Tafel zugeschnitten wurde, ist die Hundertstelstelle nicht zuverlässig.)
Andererseits können solche Funktionswerte $y = a^x$ auch mit Hilfe der Logarithmentafel auf den Seiten 43 bis 45 unter Anwendung der Logarithmengesetze (↗ 15) ermittelt werden:

■ Gesucht ist $2^{0,5}$.
$\lg 2^{0,5} = 0,5 \cdot \lg 2 = 0,5 \cdot 0,3010 = 0,1505$
$2^{0,5} = \underline{\underline{1,41}}$

Gesucht ist $2^{1,2}$.
$\lg 2^{1,2} = 1,2 \cdot \lg 2 = 0,3612$
$2^{1,2} = \underline{\underline{2,30}}$

$y = e^x$ 0,00 ... 0,80

x	e^x	e^{-x}
0,00	**1,0000**	**1,0000**
0,01	1,0101	0,9900
0,02	1,0202	0,9802
0,03	1,0305	0,9704
0,04	1,0408	0,9608
0,05	1,0513	0,9512
0,06	1,0618	0,9418
0,07	1,0725	0,9324
0,08	1,0833	0,9231
0,09	1,0942	0,9139
0,10	**1,1052**	**0,9048**
0,12	1,1275	0,8869
0,14	1,1503	0,8694
0,16	1,1735	0,8521
0,18	1,1972	0,8353
0,20	**1,2214**	**0,8187**
0,22	1,2461	0,8025
0,24	1,2712	0,7866
0,26	1,2969	0,7711
0,28	1,3231	0,7558
0,30	**1,3499**	**0,7408**
0,32	1,3771	0,7261
0,34	1,4049	0,7118
0,36	1,4333	0,6977
0,38	1,4623	0,6839
0,40	**1,4918**	**0,6703**
0,42	1,5220	0,6570
0,44	1,5527	0,6440
0,46	1,5841	0,6313
0,48	1,6161	0,6188
0,50	**1,6487**	**0,6065**
0,52	1,6820	0,5945
0,54	1,7160	0,5827
0,56	1,7507	0,5712
0,58	1,7860	0,5599
0,60	**1,8221**	**0,5488**
0,62	1,8589	0,5379
0,64	1,8965	0,5273
0,66	1,9348	0,5169
0,68	1,9739	0,5066
0,70	**2,0138**	**0,4966**
0,72	2,0544	0,4868
0,74	2,0959	0,4771
0,76	2,1383	0,4677
0,78	2,1815	0,4584
0,80	**2,2255**	**0,4493**

$y = e^x$ 0,80 ... 4,5

x	e^x	e^{-x}
0,80	**2,2255**	**0,4493**
0,82	2,2705	0,4404
0,84	2,3164	0,4317
0,86	2,3632	0,4232
0,88	2,4109	0,4148
0,90	**2,4596**	**0,4066**
0,92	2,5093	0,3985
0,94	2,5600	0,3906
0,96	2,6117	0,3829
0,98	2,6645	0,3753
1,0	**2,7183**	**0,3679**
1,1	3,0042	0,3329
1,2	3,3201	0,3012
1,3	3,6693	0,2725
1,4	4,0552	0,2466
1,5	**4,4817**	**0,2231**
1,6	4,9530	0,2019
1,7	5,4739	0,1827
1,8	6,0496	0,1653
1,9	6,6859	0,1496
2,0	**7,3891**	**0,1353**
2,1	8,1662	0,1225
2,2	9,0250	0,1108
2,3	9,9742	0,1003
2,4	11,023	0,0907
2,5	**12,182**	**0,0821**
2,6	13,464	0,0743
2,7	14,880	0,0672
2,8	16,445	0,0608
2,9	18,174	0,0550
3,0	**20,086**	**0,0498**
3,1	22,198	0,0450
3,2	24,533	0,0408
3,3	27,113	0,0369
3,4	29,964	0,0334
3,5	**33,115**	**0,0302**
3,6	36,598	0,0273
3,7	40,447	0,0247
3,8	44,701	0,0224
3,9	49,402	0,0202
4,0	**54,598**	**0,0183**
4,1	60,340	0,0166
4,2	66,686	0,0150
4,3	73,700	0,0136
4,4	81,451	0,0123
4,5	**90,017**	**0,0111**

$y = e^x$ 4,5 ... 9,0

x	e^x	e^{-x}
4,5	**90,017**	**0,0111**
4,6	99,484	0,0101
4,7	109,95	0,0091
4,8	121,51	0,0082
4,9	134,29	0,0074
5,0	**148,41**	**0,0067**
5,1	164,02	0,0061
5,2	181,27	0,0055
5,3	200,34	0,0050
5,4	221,41	0,0045
5,5	**244,69**	**0,0041**
5,6	270,43	0,0037
5,7	298,87	0,0033
5,8	330,30	0,0030
5,9	365,04	0,0027
6,0	**403,43**	**0,0025**
6,1	445,86	0,0022
6,2	492,75	0,0020
6,3	544,57	0,0018
6,4	601,85	0,0017
6,5	**665,14**	**0,0015**
6,6	735,10	0,0014
6,7	812,41	0,0012
6,8	897,85	0,0011
6,9	992,27	0,0010
7,0	**1096,6**	**0,0009**
7,1	1212,0	0,0008
7,2	1339,4	0,0007
7,3	1480,3	0,0007
7,4	1636,0	0,0006
7,5	1808,0	0,0006
7,6	1998,2	0,0005
7,7	2208,3	0,0005
7,8	2440,6	0,0004
7,9	2697,3	0,0004
8,0	**2981,0**	**0,0003**
8,1	3294,5	0,0003
8,2	3641,0	0,0003
8,3	4023,9	0,0002
8,4	4447,1	0,0002
8,5	4914,8	0,0002
8,6	5431,7	0,0002
8,7	6002,9	0,0002
8,8	6634,2	0,0002
8,9	7332,0	0,0001
9,0	**8103,1**	**0,0001**

Die Tafel der Funktion $y = \ln x$

Die folgende Tafel enthält die Werte der natürlichen Logarithmen von 1 bis 1009.

- Gesucht wird $y = \ln 6$.
  Man geht in der Zeile 0 bis zur Spalte 6 und erhält $\ln 6 = \underline{\underline{1{,}7918}}$.

- Gesucht wird $y = \ln 60$.
  Man geht in der Zeile 6 bis zur Spalte 0 und erhält $\ln 60 = \underline{\underline{4{,}0943}}$.

  Der Stern vor einer Ziffer (*) bedeutet, daß die Grundziffer vor dem Komma um 1 höher sein soll als es der ganz links stehende erste Wert dieser Zeile anzeigt.

- Gesucht wird $y = \ln 0{,}6$.
  Wegen $\ln 0{,}6 = \ln (6 : 10) = \ln 6 - \ln 10$ liest man ln 6 und ln 10 ab und erhält:
  $\ln 0{,}6 = 1{,}7918 - 2{,}3026 = \underline{\underline{-0{,}5108}}$.

$y = \ln x$ **0 ... 309**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	3979	4849	5649	6391	7081	7726	8332	8904	9444
2	2,9957	*044$\underline{5}$	*0910	*135$\underline{5}$	*1781	*2189	*2581	*2958	*3322	*3673
3	3,4012	4340	4657	496$\underline{5}$	5264	5553	583$\underline{5}$	6109	6376	6636
4	3,6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918
5	3,9120	9318	9512	9703	9890	*0073	*0254	*0431	*0604	*077$\underline{5}$
6	4,0943	1109	1271	1431	1589	1744	1897	2047	219$\underline{5}$	2341
7	4,248$\underline{5}$	2627	2767	290$\underline{5}$	3041	317$\underline{5}$	3307	3438	3567	3694
8	3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	585$\underline{0}$	5951
10	4,6052	6151	625$\underline{0}$	6347	6444	6540	6634	6728	6821	6913
11	4,700$\underline{5}$	709$\underline{5}$	718$\underline{5}$	7274	7362	7449	7536	7622	7707	7791
12	787$\underline{5}$	7958	8040	8122	8203	8283	8363	8442	8520	8598
13	867$\underline{5}$	8752	8828	8903	8978	9053	9127	9200	9273	934$\underline{5}$
14	4,9416	9488	9558	9628	9698	9767	9836	9904	9972	*0039
15	5,0106	0173	0239	0304	0370	0434	0499	0562	0626	0689
16	0752	0814	0876	0938	0999	1059	1120	1180	1240	1299
17	5,1358	1417	147$\underline{5}$	1533	1591	1648	170$\underline{5}$	1761	1818	1874
18	1930	198$\underline{5}$	2040	209$\underline{5}$	2149	2204	2257	2311	2364	2417
19	2470	2523	257$\underline{5}$	2627	2679	2730	2781	2832	2883	2933
20	5,2983	3033	3083	3132	3181	3230	3279	3327	337$\underline{5}$	3423
21	5,3471	351$\underline{9}$	3566	3613	3660	3706	3753	3799	384$\underline{5}$	3891
22	3936	3982	4027	4072	4116	4161	420$\underline{5}$	42$\underline{5}$0	4293	4337
23	4381	4424	4467	4510	4553	4596	4638	4681	4723	476$\underline{5}$
24	5,4806	4848	4889	4931	4972	5013	5053	5094	5134	517$\underline{5}$
25	521$\underline{5}$	525$\underline{5}$	5294	5334	5373	5413	5452	5491	5530	5568
26	5607	564$\underline{5}$	5683	5722	5759	5797	583$\underline{5}$	5872	5910	5947
27	5,5984	6021	6058	609$\underline{5}$	6131	6168	6204	6240	6276	6312
28	6348	6384	6419	6454	6490	652$\underline{5}$	6560	659$\underline{5}$	6630	6664
29	6699	6733	6768	6802	6836	6870	6904	6937	6971	7004
30	5,7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333

$y = \ln x$

300 ... 709

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	5,7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333
31	5,7366	7398	7430	7462	7494	7526	7557	7589	7621	7652
32	7683	7714	7746	7777	7807	7838	7869	7900	7930	7961
33	7991	8021	8051	8081	8111	8141	8171	8201	8230	8260
34	5,8289	8319	8348	8377	8406	8435	8464	8493	8522	8551
35	8579	8608	8636	8665	8693	8721	8749	8777	8805	8833
36	8861	8889	8916	8944	8972	8999	9026	9054	9081	9108
37	5,9135	9162	9189	9216	9243	9269	9296	9322	9349	9375
38	9402	9428	9454	9480	9506	9532	9558	9584	9610	9636
39	9661	9687	9713	9738	9764	9789	9814	9839	9865	9890
40	5,9915	9940	9965	9989	*0014	*0039	*0064	*0088	*0113	*0137
41	6,0162	0186	0210	0234	0259	0283	0307	0331	0355	0379
42	0403	0426	0450	0474	0497	0521	0544	0568	0591	0615
43	0638	0661	0684	0707	0730	0753	0776	0799	0822	0845
44	6,0868	0890	0913	0936	0958	0981	1003	1026	1048	1070
45	1092	1115	1137	1159	1181	1203	1225	1247	1269	1291
46	1312	1334	1356	1377	1399	1420	1442	1463	1485	1506
47	6,1527	1549	1570	1591	1612	1633	1654	1675	1696	1717
48	1738	1759	1779	1800	1821	1841	1862	1883	1903	1924
49	1944	1964	1985	2005	2025	2046	2066	2086	2106	2126
50	6,2146	2166	2186	2206	2226	2246	2265	2285	2305	2324
51	6,2344	2364	2383	2403	2422	2442	2461	2480	2500	2519
52	2538	2558	2577	2596	2615	2634	2653	2672	2691	2710
53	2729	2748	2766	2785	2804	2823	2841	2860	2879	2897
54	6,2916	2934	2953	2971	2989	3008	3026	3044	3063	3081
55	3099	3117	3135	3154	3172	3190	3208	3226	3244	3261
56	3279	3297	3315	3333	3351	3368	3386	3404	3421	3439
57	6,3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3578	3596	3613
58	3630	3648	3665	3682	3699	3716	3733	3750	3767	3784
59	3801	3818	3835	3852	3869	3886	3902	3919	3936	3953
60	6,3969	3986	4003	4019	4036	4052	4069	4085	4102	4118
61	6,4135	4151	4167	4184	4200	4216	4232	4249	4265	4281
62	4297	4313	4329	4345	4362	4378	4394	4409	4425	4441
63	4457	4473	4489	4505	4520	4536	4552	4568	4583	4599
64	6,4615	4630	4646	4661	4677	4693	4708	4723	4739	4754
65	4770	4785	4800	4816	4831	4846	4862	4877	4892	4907
66	4922	4938	4953	4968	4983	4998	5013	5028	5043	5058
67	6,5073	5088	5103	5117	5132	5147	5162	5177	5191	5206
68	5221	5236	5250	5265	5280	5294	5309	5323	5338	5352
69	5367	5381	5396	5410	5425	5439	5453	5468	5482	5497
70	6,5511	5525	5539	5554	5568	5582	5596	5610	5624	5639

$y = \ln x$										700 ... 1009
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	**6,5511**	**552$\underline{5}$**	**5539**	**5554**	**5568**	**5582**	**5596**	**5610**	**5624**	**5639**
71	6,5653	5667	5681	569$\underline{5}$	5709	5723	5737	5751	576$\underline{5}$	5779
72	5793	5806	5820	5834	5848	5862	5876	5889	5903	5917
73	5930	5944	5958	5971	598$\underline{5}$	5999	6012	6026	6039	6053
74	6,6067	6080	6093	6107	6120	6134	6147	6161	6174	6187
75	6201	6214	6227	6241	6254	6267	6280	6294	6307	6320
76	6333	6346	6359	6373	6386	6399	6412	642$\underline{5}$	6438	6451
77	6,6464	6477	6490	6503	6516	6529	6542	6554	6567	6580
78	6593	6606	6619	6631	6644	6657	6670	6682	669$\underline{5}$	6708
79	6720	6733	6746	6758	6771	6783	6796	6809	6821	6834
80	**6,6846**	**6859**	**6871**	**6884**	**6896**	**6908**	**6921**	**6933**	**6946**	**6958**
81	6,6970	6983	699$\underline{5}$	7007	7020	7032	7044	7056	7069	7081
82	7093	710$\underline{5}$	7117	7130	7142	7154	7166	7178	7190	7202
83	7214	7226	7238	725$\underline{0}$	7262	7274	7286	7298	7310	7322
84	6,7334	7346	7358	7370	7382	7393	740$\underline{5}$	7417	7429	7441
85	7452	7464	7476	7488	7499	7511	7523	7534	7546	7558
86	7569	7581	7593	7604	7616	7627	7639	765$\underline{0}$	7662	7673
87	6,768$\underline{5}$	7696	7708	7719	7731	7742	7754	776$\underline{5}$	7776	7788
88	7799	7811	7822	7833	784$\underline{5}$	7856	7867	7878	7890	7901
89	7912	7923	793$\underline{5}$	7946	7957	7968	7979	7991	8002	8013
90	**6,8024**	**803$\underline{5}$**	**8046**	**8057**	**8068**	**8079**	**8090**	**8101**	**8112**	**8123**
91	6,8134	814$\underline{5}$	8156	8167	8178	8189	8200	8211	8222	8233
92	8244	825$\underline{5}$	826$\underline{5}$	8276	8287	8298	8309	8320	8330	8341
93	8352	8363	8373	8384	839$\underline{5}$	840$\underline{5}$	8416	8427	8437	8448
94	6,8459	8469	8480	8491	8501	8512	8522	8533	8544	8554
95	856$\underline{5}$	857$\underline{5}$	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8648	8659
96	8669	8680	8690	8701	8711	8721	8732	8742	8752	8763
97	6,8773	8783	8794	8804	8814	8824	883$\underline{5}$	884$\underline{5}$	885$\underline{5}$	886$\underline{5}$
98	8876	8886	8896	8906	8916	8926	8937	8947	8957	8967
99	8977	8987	8997	9007	9017	9027	9037	9048	9058	9068
100	**6,9078**	**9088**	**9098**	**9108**	**9117**	**9127**	**9137**	**9147**	**9157**	**9167**

Tafel der vierstelligen Mantissen der Logarithmen

Die folgende Tafel wird zum Aufsuchen der dekadischen Logarithmen, d. h. der Logarithmen zur Basis 10, verwendet. Die dekadischen Logarithmen zeichnen sich vor allen anderen Logarithmensystemen dadurch aus, daß ihre Basis mit der Basis unseres Zahlensystems übereinstimmt (↗ „Positionssysteme und römische Zahlenschreibweise-Zehnersystem", Seite 11). Aufgrund der Beziehung $\log_a(a^z) = z$ (im Falle $a = 10$ also $\log_{10}(10^z) = z$) sind die Logarithmen der Zehnerpotenzen

$1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, ... und $0{,}1 = 10^{-1}$, $0{,}01 = 10^{-2}$, $0{,}001 = 10^{-3}$, ...

ganze Zahlen, so daß man schreiben kann:

$\lg 1 = \lg 10^0 = 0{,}0000$	$\lg 0{,}1 = \lg 10^{-1} = -1{,}0000$
$\lg 10 = \lg 10^1 = 1{,}0000$	$\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2{,}0000$
$\lg 100 = \lg 10^2 = 2{,}0000$	$\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3{,}0000$

Ein weiterer Vorteil der dekadischen Logarithmen besteht darin, daß man mit Hilfe eines bekannten Logarithmus aus dem Intervall $1 \leqq r < 10$ die Logarithmen aller Produkte – bestehend aus r und einer Zehnerpotenz – ermitteln kann. Wenn zum Beispiel $\lg 1{,}25 = 0{,}0969$ bekannt ist,

– so gilt für $12{,}5 = 1{,}25 \cdot 10^1$

$\lg 12{,}5 = \lg (1{,}25 \cdot 10^1) = \lg 1{,}25 + \lg 10^1 = 0{,}0969 + 1 = 1{,}0969$

– und für $0{,}0125 = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

$\lg 0{,}0125 = \lg (1{,}25 \cdot 10^{-2}) = \lg 1{,}25 + \lg 10^{-2} = 0{,}0969 - 2 = -1{,}9031.$

Allgemein:

$\lg x = \lg (r \cdot 10^k)$ mit $1 \leqq r < 10$

$= \lg r + \lg (10^k) = \lg r + k \cdot \lg 10 = \lg r + k$

Es reichen also die Logarithmen der Zahlen r im Intervall $1 \leqq r < 10$ aus, um alle Logarithmen berechnen zu können. Man bezeichnet k als **Kennzahl** und erhält mit ihr den Teil des Logarithmus, der links vom Komma steht. Mit $\lg r$ erhält man die **Mantisse** des Logarithmus; das ist die Ziffernfolge, die rechts vom Komma steht.

In $\lg 12{,}5 = 1{,}0969$ ist 1 die Kennzahl und 0969 die Mantisse. Aus der Anzahl der Stellen vor dem Komma bzw. aus der Anzahl der Nullen nach dem Komma läßt sich leicht die Kennzahl ermitteln. So liefert ein Numerus mit 3 Stellen vor dem Komma die Kennzahl 2 und ein Numerus mit einer Null rechts vom Komma vor den wesentlichen Ziffern die Kennzahl 0 und den Subtrahenden —2:

Numerus	1,25	12,5	125	1 250	12 500
Kennzahl	0, ...	1, ...	2, ...	3, ...	4, ...

Numerus	0,125	0,0125	0,00125	0,000125	
Kennzahl	0, ... —1	0, ... —2	0, ... —3	0, ... —4	

Die Tafel auf den Seiten 43 bis 45 enthält die auf 4 Stellen gerundeten Mantissen aller Logarithmen mit 3 wesentlichen Ziffern. Im Falle von mehr als 3 wesentlichen Ziffern muß gerundet werden.

↗ Tafel der Funktion $y = x^2$ – wesentliche Ziffern – Seite 19

■ Gesucht wird $y = \lg 5$.
Die Kennzahl ist 0; die Mantisse wird in der Zeile 50 im Feld der Spalte 0 abgelesen: $\lg 5 = \underline{\underline{0{,}6990}}$.

■ Gesucht wird $y = \lg 32{,}4$.
Die Kennzahl ist 1; die Mantisse wird in der Zeile 32 im Feld der Spalte 4 abgelesen: $\lg 32{,}4 = \underline{\underline{1{,}5105}}$.

■ Gesucht wird $y = \lg 0{,}08483$.
Die Kennzahl ist 0, ... —2; die Mantisse wird in der Zeile 84 im Feld der Spalte 8 abgelesen: $\lg 0{,}08483 = \underline{\underline{0{,}9284 - 2}}$.

■ Gesucht wird der Numerus x in $\lg x = 3{,}3307$
Die Mantisse 3307 findet man nicht in der Tafel. Man wählt deshalb die dicht

bei 3307 liegende Mantisse 3304 und ermittelt für den Logarithmus die Ziffernfolge 214. Die Kennzahl 3 weist auf 4 Stellen vor dem Komma, so daß sich $x = \underline{\underline{2140}}$ ergibt.

Bei Verwendung eines elektronischen Taschenrechners zum Ermitteln der Logarithmen erhält man im Anzeigefeld im Falle von Numeri, die kleiner als 1 sind, nicht Logarithmen in der Darstellung als Differenz, also 0, ... $-a$, sondern jeweils die negative Zahl, die dieser Differenz entspricht. So wurde weiter oben schon angedeutet, daß lg 0,0125 bei Verwendung der Tafel auf 0,0969 — 2 führt, während ein elektronischer Taschenrechner —1,9030899 anzeigt.

Vierstellige Mantissen von y = lg x 100 ... 309

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	00 432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

Vierstellige Mantissen von $y = \lg x$ 300 ... 709

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	**4771**	**4786**	**4800**	**4814**	**4829**	**4843**	**4857**	**4871**	**4886**	**4900**
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	**6021**	**6031**	**6042**	**6053**	**6064**	**6075**	**6085**	**6096**	**6107**	**6117**
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	**6990**	**6998**	**7007**	**7016**	**7024**	**7033**	**7042**	**7050**	**7059**	**7067**
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	**7782**	**7789**	**7796**	**7803**	**7810**	**7818**	**7825**	**7832**	**7839**	**7846**
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	**8451**	**8457**	**8463**	**8470**	**8476**	**8482**	**8488**	**8494**	**8500**	**8506**

Vierstellige Mantissen von y = lg x 700 ... 1009

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039

Interpolieren

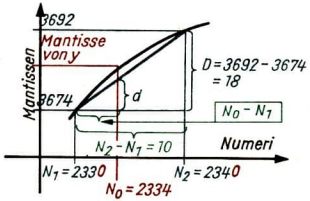
Häufig geschieht es bei der Benutzung einer Tafel, daß das Argument, für das wir den zugeordneten Funktionswert suchen, nicht im Tabelleneingang enthalten ist. So ist zum Beispiel in der Tafel der vierstelligen Mantissen auf den Seiten 43 bis 45 der Numerus 2334 nicht enthalten. Geht man anstelle dessen zum Numerus 2330 über, so fällt die Mantisse sicher zu klein aus. Mit Hilfe der **linearen Interpolation** kann man eine bessere Näherung erhalten. Dabei geht man von den beiden Numeri aus, zwischen denen der gegebene Numerus liegt,

und ersetzt den Graph in diesem Intervall durch eine Gerade (↗ Bild; die Kurve von $y = \lg x$ ist hier zur Veranschaulichung etwas überhöht gezeichnet). Dabei ergibt sich nach dem Strahlensatz die folgende Proportion:

$$\frac{10}{D} = \frac{N_0 - N_1}{d},$$

mit deren Hilfe ein Zuwachs d für die Mantisse N_1 ermittelt werden kann, der zwar nicht zum exakten Wert führt, aber eine bessere Näherung als N_1 oder N_2 liefert:

$$d = \frac{D\,(N_0 - N_1)}{10}.$$



■ Gesucht ist $y = \lg 2334$.

$\lg 2330 = 3{,}3674$
$\lg 2334 = y$
$\lg 2340 = 3{,}3692$

$$D = 3692 - 3674 = 18$$
$$N_0 - N_1 = 2334 - 2330 = 4$$
$$d = \frac{18 \cdot 4}{10} \approx 7$$

Somit folgt $\lg 2334 = 3{,}3674 + 0{,}0007 = \underline{\underline{3{,}3681}}$.

Umgekehrt kann die *gegebene Mantisse* zwischen zwei in der Tafel enthaltenen Mantissen liegen. In diesem Fall liefert die Anwendung der linearen Interpolation eine weitere Stelle des Numerus mit guter Näherung. Unter Anwendung der gleichen Proportion ermittelt man dabei $N_0 - N_1$:

$$N_0 - N_1 = \frac{d \cdot 10}{D}.$$

■ Gesucht ist x für $\lg x = 0{,}5725 - 1$.

$\lg 0{,}3730 = 0{,}5717 - 1$
$\lg x \quad = 0{,}5725 - 1$
$\lg 0{,}3740 = 0{,}5729 - 1$

$$D = 5729 - 5717 = 12$$
$$d = 5725 - 5717 = 8$$
$$N_0 - N_1 = \frac{8 \cdot 10}{12} = 6{,}6 \approx 7$$

Somit folgt $x = 0{,}3730 + 0{,}0007 = \underline{\underline{0{,}3737}}$.

Exponentialgleichungen

Bei den Exponentialgleichungen steht die gesuchte Variable (die Unbekannte) im Exponenten einer Potenz.

$a^x = b \; (a > 0;\; a \neq 1;\; b > 0)$

Lösung: Aus $x \cdot \lg a = \lg b$ (↗ 15) folgt $x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$ oder allgemein $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

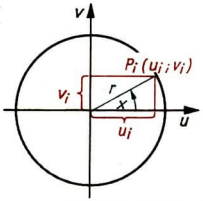
■ $5{,}3^x = 2{,}5$

$$x \cdot \lg 5{,}3 = \lg 2{,}5$$

$$x = \frac{\lg 2{,}5}{\lg 5{,}3} = \frac{0{,}3979}{0{,}7243} \approx \underline{\underline{0{,}5494}}$$

Winkelfunktionen

Definitionen der Winkelfunktionen



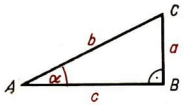
$$y = \sin x \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{v}{r} \qquad y = \tan x \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{u}$$

$$y = \cos x \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{u}{r} \qquad y = \cot x \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{v}$$

Bezogen auf ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle ABC = \beta = 90°$ gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) \qquad \tan\alpha = \frac{a}{c}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right) \qquad \cot\alpha = \frac{c}{a}\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\right)$$



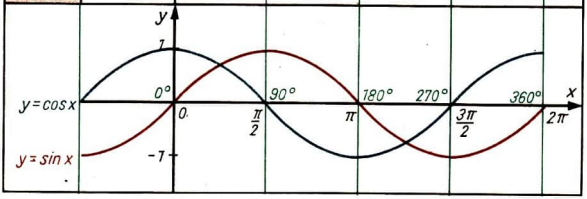
b ist Hypotenuse
a ist Gegenkathete bezüglich α
c ist Ankathete bezüglich α

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	Periodizität ($k \in Z$)
Sinus	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$
Kosinus	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$
Tangens	$-\infty < x < +\infty$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\ (k \in Z)$	$-\infty < y < +\infty$	$\tan x = \tan(x + k \cdot \pi)$
Kotangens	$-\infty < x < +\infty$, $x \neq k \cdot \pi\ (k \in Z)$	$-\infty < y < +\infty$	$\cot x = \cot(x + k \cdot \pi)$

1/3

Quadrantenbeziehungen (für alle x mit $0° < x < 90°$ bzw. $\bar{x} > 0°$)

	negative Winkel	I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
	$(-\bar{x})$	x	$(180°-x)$	$(180°+x)$	$(360°-x)$
sin	$-\sin\bar{x}$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$
cos	$\cos\bar{x}$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$

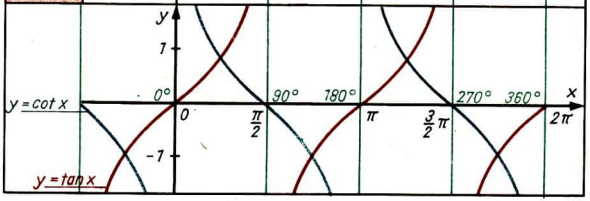


In der Spalte für negative Winkel wurde durch $\bar{x}$ angedeutet, daß keine Einschränkung auf $0° < x < 90°$ zu beachten ist. Man gelangt im Falle negativer Winkel über diese Spalte zu einem positiven Winkel, auf den dann die differenzierte Betrachtung in den 4 Quadranten anzuwenden ist.

- $\sin 200° = \sin(180° + 20°) = -\sin 20°$

- $\cos(-30°) = \cos 30°$

	negative Winkel	I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
	$(-\bar{x})$	x	$(180°-x)$	$(180°+x)$	$(360°-x)$
tan	$-\tan\bar{x}$	$\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$-\tan x$
cot	$-\cot\bar{x}$	$\cot x$	$-\cot x$	$\cot x$	$-\cot x$



- $\tan(-15°) = -\tan 15°$; $\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30°$

- $\cot 200° = \cot(180° + 20°) = \cot 20°$

Darstellung einer Winkelfunktion durch eine andere Funktion desselben Winkels

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \; (x \in R)$ $\quad \tan x \cdot \cot x = 1 \left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2};\; k \in Z\right)$

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$
$\sin^2 x$	—	$1 - \cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{1}{1 + \cot^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	—	$\frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	—	$\frac{1}{\cot^2 x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	—

Komplementwinkelbeziehungen

$\sin(90^\circ - x) = \cos x$
$\cos(90^\circ - x) = \sin x$

$\left.\begin{array}{l}\tan(90^\circ - x) = \cot x \\ \cot(90^\circ - x) = \tan x\end{array}\right\} \left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2};\; k \in Z\right)$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

Summen, Differenzen, Produkte

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Funktionen des doppelten und des halben Winkels

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \; (\tan^2\alpha \neq 1) = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$$

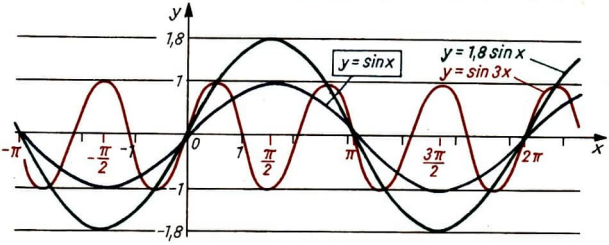
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \; \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}; \; \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}; \; \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

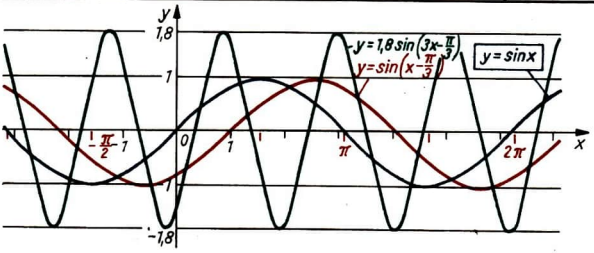
1/3

Die Funktion $y = a \cdot \sin(bx + c)$ $(a, b, c \in R;\ a \neq 0;\ b \neq 0)$

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	kleinste Periode	Nullstellen
$y = \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	2π	$k \cdot \pi\ (k \in Z)$
$y = a \cdot \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-a \leqq y \leqq a$	2π	
$y = \sin bx$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$k \cdot \frac{\pi}{b}\ (k \in Z)$
■ $y = 1{,}8 \cdot \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1{,}8 \leqq y \leqq 1{,}8$	2π	$k \cdot \pi\ (k \in Z)$
$y = \sin 3x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$	$k \cdot \frac{\pi}{3}$



Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	kleinste Periode	Phasendifferenz
$y = \sin(x + c)$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	2π	$-c$
$y = a \cdot \sin(bx + c)$	$-\infty < x < \infty$	$-a \leqq y \leqq a$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$-c$
■ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$	2π	$+\frac{\pi}{3}$
$y = 1{,}8 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-\infty < x < \infty$	$-1{,}8 \leqq y \leqq 1{,}8$	$\frac{2\pi}{3}$	$+\frac{\pi}{3}$



Trigonometrische Beziehungen im Dreieck:

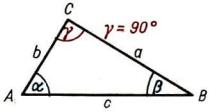
In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$ gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

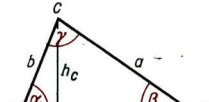
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot\beta = \frac{a}{b}$$



Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\,ab$

In jedem Dreieck ABC gilt:



Sinussatz $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$

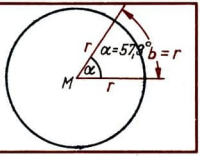
Flächeninhalt $\quad A = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta$

Höhe $h_c \qquad h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$

Winkelmessung

Das „Internationale Einheitensystem (SI)" legt für die Winkelmessung die Einheit Radiant (1 rad) fest. Darüber hinaus wird in der TGL 31 548 „Einheiten physikalischer Größen" für die Deutsche Demokratische Republik das Grad weiterhin unbefristet zugelassen, wogegen das Neugrad nur noch befristet gültig ist.

▶ 1 Radiant (1 rad) ist der ebene Winkel zwischen zwei Kreisradien, die aus dem Umfang einen Bogen b von der Länge des Radius r ausschneiden. Die Bezeichnung „rad" wird meistens weggelassen.



Bezeichnet man die Winkelgröße im Gradmaß mit α und die Winkelgröße im Bogenmaß mit $\operatorname{arc}\alpha$, so gilt:

$\frac{\operatorname{arc}\alpha}{\alpha} = \frac{2\pi}{360°}$, und es folgt

(1) $\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{180°}\,\alpha$ oder $\operatorname{arc}\alpha \approx 0{,}01745 \cdot \alpha$

für die Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und

(2) $\alpha = \frac{180°}{\pi}\operatorname{arc}\alpha$ oder $\alpha \approx 57{,}29578 \cdot \operatorname{arc}\alpha$

für die Umrechnung vom **Bogenmaß ins Gradmaß**

Umrechnung: Radiant in Grad

0,00	0,00°	**0,80**	45,84°	**1,60**	91,67°
0,02	1,15°	0,82	46,98°	1,62	92,82°
0,04	2,29°	0,84	48,13°	1,64	93,97°
0,06	3,44°	0,86	49,27°	1,66	95,11°
0,08	4,58°	0,88	50,42°	1,68	96,26°
0,10	5,73°	**0,90**	51,57°	**1,70**	97,40°
0,12	6,88°	0,92	52,71°	1,72	98,55°
0,14	8,02°	0,94	53,86°	1,74	99,69°
0,16	9,17°	0,96	55,00°	1,76	100,84°
0,18	10,31°	0,98	56,15°	1,78	101,99°
0,20	11,46°	**1,00**	57,30°	**1,80**	103,13°
0,22	12,61°	1,02	58,44°	1,82	104,28°
0,24	13,75°	1,04	59,59°	1,84	105,42°
0,26	14,90°	1,06	60,73°	1,86	106,57°
0,28	16,04°	1,08	61,88°	1,88	107,72°
0,30	17,19°	**1,10**	63,03°	**1,90**	108,86°
0,32	18,33°	1,12	64,17°	**2,0**	114,59°
0,34	19,48°	1,14	65,32°	2,1	120,32°
0,36	20,63°	1,16	66,46°	2,2	126,05°
0,38	21,77°	1,18	67,61°	2,3	131,78°
0,40	22,92°	**1,20**	68,75°	2,4	137,51°
0,42	24,06°	1,22	69,90°	**2,5**	143,24°
0,44	25,21°	1,24	71,05°	2,6	148,97°
0,46	26,36°	1,26	72,19°	2,7	154,70°
0,48	27,50°	1,28	73,34°	2,8	160,43°
0,50	28,65°	**1,30**	74,48°	2,9	166,16°
0,52	29,79°	1,32	75,63°	**3,0**	171,89°
0,54	30,94°	1,34	76,78°	3,2	183,35°
0,56	32,09°	1,36	77,92°	3,4	194,81°
0,58	33,23°	1,38	79,07°	3,6	206,26°
0,60	34,38°	**1,40**	80,21°	3,8	217,72°
0,62	35,52°	1,42	81,36°	**4,0**	229,18°
0,64	36,67°	1,44	82,51°	4,2	240,64°
0,66	37,82°	1,46	83,65°	4,4	252,10°
0,68	38,96°	1,48	84,80°	4,6	263,56°
0,70	40,11°	**1,50**	85,94°	4,8	275,02°
0,72	41,25°	1,52	87,09°	**5,0**	286,48°
0,74	42,40°	1,54	88,24°	6,0	343,77°
0,76	43,54°	1,56	89,38°	7,0	401,07°
0,78	44,69°	1,58	90,53°	8,0	458,37°
0,80	45,84°	**1,60**	91,67°	**10,0**	572,96°

$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	30,00°
$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$	45,00°
$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	60,00°
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	90,00°
$\frac{2\pi}{3} = 2{,}0944$	120,00°
$\frac{3\pi}{4} = 2{,}3562$	135,00°
$\frac{5\pi}{6} = 2{,}6180$	150,00°
$\pi = 3{,}1416$	180,00°
$\frac{7\pi}{6} = 3{,}6652$	210,00°
$\frac{5\pi}{4} = 3{,}9270$	225,00°
$\frac{4\pi}{3} = 4{,}1888$	240,00°
$\frac{3\pi}{2} = 4{,}7124$	270,00°
$\frac{5\pi}{3} = 5{,}2360$	300,00°
$\frac{7\pi}{4} = 5{,}4978$	315,00°
$\frac{11\pi}{6} = 5{,}7596$	330,00°
$2\pi = 6{,}2832$	360,00°

Umrechnung: Grad in Radiant

- $\text{arc } 133° = \text{arc } 100° + \text{arc } 33° = 1{,}7453 + 0{,}5760 = 2{,}3213$
- $\text{arc } 33{,}4° = \text{arc } 33° + \text{arc } \frac{4°}{10} = 0{,}5760 + 0{,}00698 = 0{,}58298 \approx 0{,}5830$

1°	0,0175	41°	0,7156	81°	1,4137	205°	3,5779
2°	0349	42°	7330	82°	4312	210°	6652
3°	0524	43°	7505	83°	4486	215°	7525
4°	0,0698	44°	0,7679	84°	1,4661	220°	3,8397
5°	0873	45°	7854	85°	4835	225°	9270
6°	1047	46°	8029	86°	5010	230°	4,0143
7°	0,1222	47°	0,8203	87°	1,5184	235°	4,1015
8°	1396	48°	8378	88°	5359	240°	1888
9°	1571	49°	8552	89°	5533	245°	2761
10°	**0,1745**	**50°**	**0,8727**	**90°**	**1,5708**	**250°**	**4,3633**
11°	0,1920	51°	0,8901	91°	1,5882	255°	4,4506
12°	2094	52°	9076	92°	6057	260°	5379
13°	2269	53°	9250	93°	6232	265°	6251
14°	0,2443	54°	0,9425	94°	1,6406	270°	4,7124
15°	2618	55°	9599	95°	6581	275°	7997
16°	2793	56°	9774	96°	6755	280°	8869
17°	0,2967	57°	0,9948	97°	1,6930	285°	4,9742
18°	3142	58°	1,0123	98°	7104	290°	5,0615
19°	3316	59°	0297	99°	7279	295°	1487
20°	**0,3491**	**60°**	**1,0472**	**100°**	**1,7453**	**300°**	**5,2360**
21°	0,3665	61°	1,0647	105°	1,8326	310°	5,4105
22°	3840	62°	0821	110°	9199	315°	4978
23°	4014	63°	0996	115°	2,0071	320°	5851
24°	0,4189	64°	1,1170	120°	2,0944	325°	5,6723
25°	4363	65°	1345	125°	1817	330°	7596
26°	4538	66°	1519	130°	2689	335°	8469
27°	0,4712	67°	1,1694	135°	2,3562	340°	5,9341
28°	4887	68°	1868	140°	4435	345°	6,0214
29°	5061	69°	2043	145°	5307	350°	1087
30°	**0,5236**	**70°**	**1,2217**	**150°**	**2,6180**	**360°**	**6,2832**
31°	0,5411	71°	1,2392	155°	2,7053	370°	6,4577
32°	5585	72°	2566	160°	7925	375°	5450
33°	5760	73°	2741	165°	8798	380°	6323
34°	0,5934	74°	1,2915	170°	2,9671	385°	7195
35°	6109	75°	3090	175°	3,0543	390°	8068
36°	6283	76°	3265	180°	1416	395°	8941
37°	0,6458	77°	1,3439	185°	3,2289	400°	6,9813
38°	6632	78°	3614	190°	3161	405°	7,0686
39°	6807	79°	3788	195°	4034	410°	1558
40°	**0,6981**	**80°**	**1,3963**	**200°**	**3,4907**	**420°**	**7,3304**

Zur Beachtung! In dieser Tabelle sind die Werte in der jeweils rechten Spalte Angaben in Radiant. Entsprechendes gilt für die rot unterlegten Spalten in der Tabelle auf Seite 52. Vielfach werden die jeweils zugeordneten Werte, also zum Beispiel 10° und 0,1745, zur Verdeutlichung als arc 10° = 0,1745 (gesprochen: arcus 10° gleich ...) dargestellt. Mit arc α wird dann das Bogenmaß des Winkels α bezeichnet.

Grad in Minuten und Sekunden

0,01°	0′ 36″	0,21°	12′ 36″	0,41°	24′ 36″	0,61°	36′ 36″	0,81°	48′ 36″
0,02°	1′ 12″	0,22°	13′ 12″	0,42°	25′ 12″	0,62°	37′ 12″	0,82°	49′ 12″
0,03°	1′ 48″	0,23°	13′ 48″	0,43°	25′ 48″	0,63°	37′ 48″	0,83°	49′ 48″
0,04°	2′ 24″	0,24°	14′ 24″	0,44°	26′ 24″	0,64°	38′ 24″	0,84°	50′ 24″
0,05°	3′ 0″	0,25°	15′ 0″	0,45°	27′ 0″	0,65°	39′ 0″	0,85°	51′ 0″
0,06°	3′ 36″	0,26°	15′ 36″	0,46°	27′ 36″	0,66°	39′ 36″	0,86°	51′ 36″
0,07°	4′ 12″	0,27°	16′ 12″	0,47°	28′ 12″	0,67°	40′ 12″	0,87°	52′ 12″
0,08°	4′ 48″	0,28°	16′ 48″	0,48°	28′ 48″	0,68°	40′ 48″	0,88°	52′ 48″
0,09°	5′ 24″	0,29°	17′ 24″	0,49°	29′ 24″	0,69°	41′ 24″	0,89°	53′ 24″
0,10°	6′ 0″	**0,30°**	18′ 0″	**0,50°**	30′ 0″	**0,70°**	42′ 0″	**0,90°**	54′ 0″
0,11°	6′ 36″	0,31°	18′ 36″	0,51°	30′ 36″	0,71°	42′ 36″	0,91°	54′ 36″
0,12°	7′ 12″	0,32°	19′ 12″	0,52°	31′ 12″	0,72°	43′ 12″	0,92°	55′ 12″
0,13°	7′ 48″	0,33°	19′ 48″	0,53°	31′ 48″	0,73°	43′ 48″	0,93°	55′ 48″
0,14°	8′ 24″	0,34°	20′ 24″	0,54°	32′ 24″	0,74°	44′ 24″	0,94°	56′ 24″
0,15°	9′ 0″	0,35°	21′ 0″	0,55°	33′ 0″	0,75°	45′ 0″	0,95°	57′ 0″
0,16°	9′ 36″	0,36°	21′ 36″	0,56°	33′ 36″	0,76°	45′ 36″	0,96°	57′ 36″
0,17°	10′ 12″	0,37°	22′ 12″	0,57°	34′ 12″	0,77°	46′ 12″	0,97°	58′ 12″
0,18°	10′ 48″	0,38°	22′ 48″	0,58°	34′ 48″	0,78°	46′ 48″	0,98°	58′ 48″
0,19°	11′ 24″	0,39°	23′ 24″	0,59°	35′ 24″	0,79°	47′ 24″	0,99°	59′ 24″
0,20°	12′ 0″	**0,40°**	24′ 0″	**0,60°**	36′ 0″	**0,80°**	48′ 0″	**1,00°**	60′ 0″

Minuten in Grad

1′	0,017°	21′	0,350°	41′	0,683°
2′	0,033°	22′	0,367°	42′	0,700°
3′	0,050°	23′	0,383°	43′	0,717°
4′	0,067°	24′	0,400°	44′	0,733°
5′	0,083°	25′	0,417°	45′	0,750°
6′	0,100°	26′	0,433°	46′	0,767°
7′	0,117°	27′	0,450°	47′	0,783°
8′	0,133°	28′	0,467°	48′	0,800°
9′	0,150°	29′	0,483°	49′	0,817°
10′	0,167°	**30′**	0,500°	**50′**	0,833°
11′	0,183°	31′	0,517°	51′	0,850°
12′	0,200°	32′	0,533°	52′	0,867°
13′	0,217°	33′	0,550°	53′	0,883°
14′	0,233°	34′	0,567°	54′	0,900°
15′	0,250°	35′	0,583°	55′	0,917°
16′	0,267°	36′	0,600°	56′	0,933°
17′	0,283°	37′	0,617°	57′	0,950°
18′	0,300°	38′	0,633°	58′	0,967°
19′	0,317°	39′	0,650°	59′	0,983°
20′	0,333°	**40′**	0,667°	**60′**	1,000°

Sekunden in Grad

2″	0,0005°	32″	0,0089°
4″	0,0011°	34″	0,0094°
6″	0,0017°	36″	0,0100°
8″	0,0022°	38″	0,0106°
10″	0,0028°	**40″**	0,0111°
12″	0,0033°	42″	0,0117°
14″	0,0039°	44″	0,0122°
16″	0,0044°	46″	0,0128°
18″	0,0050°	48″	0,0133°
20″	0,0056°	**50″**	0,0139°
22″	0,0061°	52″	0,0144°
24″	0,0067°	54″	0,0150°
26″	0,0072°	56″	0,0156°
28″	0,0078°	58″	0,0161°
30″	0,0083°	**60″**	0,0167°

■ 12,51° = 12°
+ 30′ 36″
= 12° 30′ 36″

Die Tafel der Winkelfunktionen (Winkel in Grad)

0° ... 4°				86° ... 90°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
0,0	0,0000	1,0000	0,0000	—	90,0
,1	0,0017$\underline{5}$	1,0000	0,0017$\underline{5}$	573,0	,9
,2	00349	0000	00349	286,$\underline{5}$	,8
,3	00524	0000	00524	191,0	,7
,4	00698	0000	00698	143,2	,6
,5	00873	0000	00873	114,6	,5
,6	0105$\underline{5}$	0,9999	0105$\underline{5}$	95,49	,4
,7	0122	9999	0122	81,8$\underline{5}$	,3
,8	0140	9999	0140	71,62	,2
,9	0157	9999	0157	63,66	,1
1,0	0,0175$\underline{5}$	0,9998	0,0175$\underline{5}$	57,29	89,0
,1	0,0192	0,9998	0,0192	52,08	,9
,2	0209	9998	0209	47,74	,8
,3	0227	9997	0227	44,07	,7
,4	0244	9997	0244	40,92	,6
,5	0262	9997	0262	38,19	,5
,6	0279	9996	0279	35,80	,4
,7	0297	9996	0297	33,69	,3
,8	0314	999$\underline{5}$	0314	31,82	,2
,9	0332	999$\underline{5}$	0332	30,14	,1
2,0	0,0349	0,9994	0,0349	28,64	88,0
,1	0,0366	0,9993	0,0367	27,27	,9
,2	0384	9993	0384	26,03	,8
,3	0401	9992	0402	24,90	,7
,4	0419	9991	0419	23,86	,6
,5	0436	9990	0437	22,90	,5
,6	0454	9990	0454	22,02	,4
,7	0471	9989	0472	21,20	,3
,8	0488	9988	0489	20,4$\underline{5}$	,2
,9	0506	9987	0507	19,74	,1
3,0	0,0523	0,9986	0,0524	19,08	87,0
,1	0,0541	0,998$\underline{5}$	0,0542	18,46	,9
,2	0558	9984	0559	17,89	,8
,3	0576	9983	0577	17,34	,7
,4	0593	9982	0594	16,83	,6
,5	0610	9981	0612	16,3$\underline{5}$	,5
,6	0628	9980	0629	15,89	,4
,7	064$\underline{5}$	9979	0647	15,46	,3
,8	0663	9978	0664	15,06	,2
,9	0680	9977	0682	14,67	,1
4,0	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	86,0
	cos	sin	cot	tan	Grad

4° ... 8°				82° ... 86°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
4,0	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	86,0
,1	0,071$\underline{5}$	0,9974	0,0717	13,9$\underline{5}$	,9
,2	0732	9973	0734	13,62	,8
,3	07$\underline{5}$0	9972	0752	13,30	,7
,4	0767	9971	0769	13,00	,6
,5	078$\underline{5}$	9969	0787	12,71	,5
,6	0802	9968	080$\underline{5}$	12,43	,4
,7	0819	9966	0822	12,16	,3
,8	0837	996$\underline{5}$	0840	11,91	,2
,9	0854	9963	0857	11,66	,1
5,0	0,0872	0,9962	0,087$\underline{5}$	11,43	85,0
,1	0,0889	0,9960	0892	11,20	,9
,2	0906	9959	0910	10,99	,8
,3	0924	9957	0928	10,78	,7
,4	0941	9956	094$\underline{5}$	10,58	,6
,5	0958	9954	0963	10,39	,5
,6	0976	9952	0981	10,20	,4
,7	0993	9951	0998	10,02	,3
,8	1011	9949	1016	9,84$\underline{5}$	,2
,9	1028	9947	1033	9,677	,1
6,0	0,104$\underline{5}$	0,994$\underline{5}$	0,1051	9,514	84,0
,1	0,1063	0,9943	0,1069	9,357	,9
,2	1080	9942	1086	20$\underline{5}$	,8
,3	1097	9940	1104	058	,7
,4	111$\underline{5}$	9938	1122	8,91$\underline{5}$	,6
,5	1132	9936	1139	777	,5
,6	1149	9934	1157	643	,4
,7	1167	9932	117$\underline{5}$	513	,3
,8	1184	9930	1192	386	,2
,9	1201	9928	1210	264	,1
7,0	0,1219	0,992$\underline{5}$	0,1228	8,144	83,0
,1	0,1236	0,9923	0,1246	8,028	,9
,2	1253	9921	1263	7,916	,8
,3	1271	9919	1281	806	,7
,4	1288	9917	1299	700	,6
,5	130$\underline{5}$	9914	1317	596	,5
,6	1323	9912	1334	49$\underline{5}$	,4
,7	1340	9910	1352	396	,3
,8	1357	9907	1370	300	,2
,9	1374	990$\underline{5}$	1388	207	,1
8,0	0,1392	0,9903	0,140$\underline{5}$	7,11$\underline{5}$	82,0
	cos	sin	cot	tan	Grad

8° ... 12°				78° ... 82°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
8,0	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	**82,0**
,1	0,1409	0,9900	0,1423	7,026	,9
,2	1426	9898	1441	6,940	,8
,3	1444	9895	1459	855	,7
,4	1461	9893	1477	772	,6
,5	1478	9890	1495	691	,5
,6	1495	9888	1512	612	,4
,7	1513	9885	1530	535	,3
,8	1530	9882	1548	460	,2
,9	1547	9880	1566	386	,1
9,0	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	**81,0**
,1	0,1582	0,9874	0,1602	6,243	,9
,2	1599	9871	1620	174	,8
,3	1616	9869	1638	107	,7
,4	1633	9866	1655	041	,6
,5	1650	9863	1673	5,976	,5
,6	1668	9860	1691	912	,4
,7	1685	9857	1709	850	,3
,8	1702	9854	1727	789	,2
,9	1719	9851	1745	730	,1
10,0	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	**80,0**
,1	0,1754	0,9845	0,1781	5,614	,9
,2	1771	9842	1799	558	,8
,3	1788	9839	1817	503	,7
,4	1805	9836	1835	449	,6
,5	1822	9833	1853	396	,5
,6	1840	9829	1871	343	,4
,7	1857	9826	1890	292	,3
,8	1874	9823	1908	242	,2
,9	1891	9820	1926	193	,1
11,0	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	**79,0**
,1	0,1925	0,9813	0,1962	5,097	,9
,2	1942	9810	1980	050	,8
,3	1959	9806	1998	005	,7
,4	1977	9803	2016	4,959	,6
,5	1994	9799	2035	915	,5
,6	2011	9796	2053	872	,4
,7	2028	9792	2071	829	,3
,8	2045	9789	2089	787	,2
,9	2062	9785	2107	745	,1
12,0	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	**78,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

12° ... 16°				74° ... 78°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
12,0	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	**78,0**
,1	0,2096	0,9778	0,2144	4,665	,9
,2	2113	9774	2162	625	,8
,3	2130	9770	2180	586	,7
,4	2147	9767	2199	548	,6
,5	2164	9763	2217	511	,5
,6	2181	9759	2235	474	,4
,7	2198	9755	2254	437	,3
,8	2215	9751	2272	402	,2
,9	2233	9748	2290	366	,1
13,0	0,2250	0,9744	0,2309	4,331	**77,0**
,1	0,2267	0,9740	0,2327	4,297	,9
,2	2284	9736	2345	264	,8
,3	2300	9732	2364	230	,7
,4	2317	9728	2382	198	,6
,5	2334	9724	2401	165	,5
,6	2351	9720	2419	134	,4
,7	2368	9715	2438	102	,3
,8	2385	9711	2456	071	,2
,9	2402	9707	2475	041	,1
14,0	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	**76,0**
,1	0,2436	0,9699	0,2512	3,981	,9
,2	2453	9694	2530	952	,8
,3	2470	9690	2549	923	,7
,4	2487	9686	2568	895	,6
,5	2504	9681	2586	867	,5
,6	2521	9677	2605	839	,4
,7	2538	9673	2623	812	,3
,8	2554	9668	2642	785	,2
,9	2571	9664	2661	758	,1
15,0	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	**75,0**
,1	0,2605	0,9655	0,2698	3,706	,9
,2	2622	9650	2717	681	,8
,3	2639	9646	2736	655	,7
,4	2656	9641	2754	630	,6
,5	2672	9636	2773	606	,5
,6	2689	9632	2792	582	,4
,7	2706	9627	2811	558	,3
,8	2723	9622	2830	534	,2
,9	2740	9617	2849	511	,1
16,0	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	**74,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

16° ... 20°				70° ... 74°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
16,0	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	**74,0**
,1	0,2773	0,9608	0,2886	3,46$\underline{5}$	,9
,2	2790	9603	290$\underline{5}$	442	,8
,3	2807	9598	2924	420	,7
,4	2823	9593	2943	398	,6
,5	2840	9588	2962	376	,5
,6	2857	9583	2981	354	,4
,7	2874	9578	3000	333	,3
,8	2890	9573	3019	312	,2
,9	2907	9568	3038	291	,1
17,0	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	**73,0**
,1	0,2940	0,9558	0,3076	3,251	,9
,2	2957	9553	3096	230	,8
,3	2974	9548	311$\underline{5}$	211	,7
,4	2990	9542	3134	191	,6
,5	3007	9537	3153	172	,5
,6	3024	9532	3172	152	,4
,7	3040	9527	3191	133	,3
,8	3057	9521	3211	11$\underline{5}$	,2
,9	3074	9516	3230	096	,1
18,0	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	**72,0**
,1	0,3107	0,950$\underline{5}$	0,3269	3,060	,9
,2	3123	9$\underline{5}$00	3288	042	,8
,3	3140	9494	3307	024	,7
,4	3156	9489	3327	006	,6
,5	3173	9483	3346	2,989	,5
,6	3190	9478	336$\underline{5}$	971	,4
,7	3206	9472	338$\underline{5}$	954	,3
,8	3223	9466	3404	937	,2
,9	3239	9461	3424	921	,1
19,0	0,3256	0,945$\underline{5}$	0,3443	2,904	**71,0**
,1	0,3272	0,9449	0,3463	2,888	,9
,2	3289	9444	3482	872	,8
,3	330$\underline{5}$	9438	3502	856	,7
,4	3322	9432	3522	840	,6
,5	3338	9426	3541	824	,5
,6	335$\underline{5}$	9421	3561	808	,4
,7	3371	941$\underline{5}$	3581	793	,3
,8	3387	9409	3600	778	,2
,9	3404	9403	3620	762	,1
20,0	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	**70,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

20° ... 24°				66° ... 70°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
20,0	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	**70,0**
,1	0,3437	0,9391	0,3659	2,733	,9
,2	3453	938$\underline{5}$	3679	718	,8
,3	3469	9379	3699	703	,7
,4	3486	9373	3719	689	,6
,5	3502	9367	3739	67$\underline{5}$	,5
,6	3518	9361	3759	660	,4
,7	353$\underline{5}$	9354	3779	646	,3
,8	3551	9348	3799	633	,2
,9	3567	9342	3819	619	,1
21,0	0,3584	0,9336	0,3839	2,60$\underline{5}$	**69,0**
,1	0,3600	0,9330	0,3859	2,592	,9
,2	3616	9323	3879	578	,8
,3	3633	9317	3899	56$\underline{5}$	,7
,4	3649	9311	3919	552	,6
,5	366$\underline{5}$	9304	3939	539	,5
,6	3681	9298	3959	526	,4
,7	3697	9291	3979	513	,3
,8	3714	928$\underline{5}$	4000	500	,2
,9	3730	9278	4020	488	,1
22,0	0,3746	0,9272	0,4040	2,47$\underline{5}$	**68,0**
,1	0,3762	0,926$\underline{5}$	4061	2,463	,9
,2	3778	9259	4081	450	,8
,3	379$\underline{5}$	9252	4101	438	,7
,4	3811	924$\underline{5}$	4122	426	,6
,5	3827	9239	4142	414	,5
,6	3843	9232	4163	402	,4
,7	3859	922$\underline{5}$	4183	391	,3
,8	387$\underline{5}$	9219	4204	379	,2
,9	3891	9212	4224	367	,1
23,0	0,3907	0,920$\underline{5}$	0,424$\underline{5}$	2,356	**67,0**
,1	0,3923	0,9198	0,426$\underline{5}$	344	,9
,2	3939	9191	4286	333	,8
,3	395$\underline{5}$	9184	4307	322	,7
,4	3971	9178	4327	311	,6
,5	3987	9171	4348	300	,5
,6	4003	9164	4369	289	,4
,7	4019	9157	4390	278	,3
,8	403$\underline{5}$	91$\underline{5}$0	4411	267	,2
,9	4051	9143	4431	257	,1
24,0	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	**66,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

24° ... 28°				62° ... 66°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
24,0	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	66,0
,1	0,4083	0,9128	0,4473	2,236	,9
,2	4099	9121	4494	225	,8
,3	4115	9114	4515	215	,7
,4	4131	9107	4536	204	,6
,5	4147	9100	4557	194	,5
,6	4163	9092	4578	184	,4
,7	4179	9085	4599	174	,3
,8	4195	9078	4621	164	,2
,9	4210	9070	4642	154	,1
25,0	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	65,0
,1	0,4242	0,9056	0,4684	2,135	,9
,2	4258	9048	4706	125	,8
,3	4274	9041	4727	116	,7
,4	4289	9033	4748	106	,6
,5	4305	9026	4770	097	,5
,6	4321	9018	4791	087	,4
,7	4337	9011	4813	078	,3
,8	4352	9003	4834	069	,2
,9	4368	8996	4856	059	,1
26,0	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	64,0
,1	0,4399	0,8980	0,4899	2,041	,9
,2	4415	8973	4921	032	,8
,3	4431	8965	4942	023	,7
,4	4446	8957	4964	014	,6
,5	4462	8949	4986	006	,5
,6	4478	8942	5008	1,997	,4
,7	4493	8934	5029	988	,3
,8	4509	8926	5051	980	,2
,9	4524	8918	5073	971	,1
27,0	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	63,0
,1	0,4555	0,8902	0,5117	954	,9
,2	4571	8894	5139	946	,8
,3	4586	8886	5161	937	,7
,4	4602	8878	5184	929	,6
,5	4617	8870	5206	921	,5
,6	4633	8862	5228	913	,4
,7	4648	8854	5250	905	,3
,8	4664	8846	5272	897	,2
,9	4679	8838	5295	889	,1
28,0	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62,0
	cos	sin	cot	tan	Grad

28° ... 32°				58° ... 62°	
Grad	sin	cos	tan	cot	
28,0	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62,0
,1	0,4710	0,8821	0,5340	1,873	,9
,2	4726	8813	5362	865	,8
,3	4741	8805	5384	857	,7
,4	4756	8796	5407	849	,6
,5	4772	8788	5430	842	,5
,6	4787	8780	5452	834	,4
,7	4802	8771	5475	827	,3
,8	4818	8763	5498	819	,2
,9	4833	8755	5520	811	,1
29,0	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	61,0
,1	0,4863	0,8738	0,5566	1,797	,9
,2	4879	8729	5589	789	,8
,3	4894	8721	5612	782	,7
,4	4909	8712	5635	775	,6
,5	4924	8704	5658	767	,5
,6	4939	8695	5681	760	,4
,7	4955	8686	5704	753	,3
,8	4970	8678	5727	746	,2
,9	4985	8669	5750	739	,1
30,0	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60,0
,1	0,5015	0,8652	0,5797	1,725	,9
,2	5030	8643	5820	718	,8
,3	5045	8634	5844	711	,7
,4	5060	8625	5867	704	,6
,5	5075	8616	5890	698	,5
,6	5090	8607	5914	691	,4
,7	5105	8599	5938	684	,3
,8	5120	8590	5961	678	,2
,9	5135	8581	5985	671	,1
31,0	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	59,0
,1	0,5165	0,8563	0,6032	1,658	,9
,2	5180	8554	6056	651	,8
,3	5195	8545	6080	645	,7
,4	5210	8536	6104	638	,6
,5	5225	8526	6128	632	,5
,6	5240	8517	6152	625	,4
,7	5255	8508	6176	619	,3
,8	5270	8499	6200	613	,2
,9	5284	8490	6224	607	,1
32,0	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	58,0
	cos	sin	cot	tan	Grad

32° ... 36°					54° ... 58°
Grad	sin	cos	tan	cot	
32,0	**0,5299**	**0,8480**	**0,6249**	**1,600**	**58,0**
,1	5314	0,8471	6273	1,594	,9
,2	5329	8462	6297	588	,8
,3	5344	8453	6322	582	,7
,4	5358	8443	6346	576	,6
,5	5373	8434	6371	570	,5
,6	5388	8425	6395	564	,4
,7	5402	8415	6420	558	,3
,8	5417	8406	6445	552	,2
,9	5432	8396	6469	546	,1
33,0	**0,5446**	**0,8387**	**0,6494**	**1,540**	**57,0**
,1	0,5461	0,8377	0,6519	1,534	,9
,2	5476	8368	6544	528	,8
,3	5490	8358	6569	522	,7
,4	5505	8348	6594	517	,6
,5	5519	8339	6619	511	,5
,6	5534	8329	6644	505	,4
,7	5548	8320	6669	499	,3
,8	5563	8310	6694	494	,2
,9	5577	8300	6720	488	,1
34,0	**0,5592**	**0,8290**	**0,6745**	**1,483**	**56,0**
,1	0,5606	0,8281	0,6771	1,477	,9
,2	5621	8271	6796	471	,8
,3	5635	8261	6822	466	,7
,4	5650	8251	6847	460	,6
,5	5664	8241	6873	455	,5
,6	5678	8231	6899	450	,4
,7	5693	8221	6924	444	,3
,8	5707	8211	6950	439	,2
,9	5721	8202	6976	433	,1
35,0	**0,5736**	**0,8192**	**0,7002**	**1,428**	**55,0**
,1	0,5750	0,8181	0,7028	1,423	,9
,2	5764	8171	7054	418	,8
,3	5779	8161	7080	412	,7
,4	5793	8151	7107	407	,6
,5	5807	8141	7133	402	,5
,6	5821	8131	7159	397	,4
,7	5835	8121	7186	392	,3
,8	5850	8111	7212	387	,2
,9	5864	8100	7239	381	,1
36,0	**0,5878**	**0,8090**	**0,7265**	**1,376**	**54,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

36° ... 40°					50° ... 54°
Grad	sin	cos	tan	cot	
36,0	**0,5878**	**0,8090**	**0,7265**	**1,376**	**54,0**
,1	0,5892	0,8080	0,7292	1,371	,9
,2	5906	8070	7319	366	,8
,3	5920	8059	7346	361	,7
,4	5934	8049	7373	356	,6
,5	5948	8039	7400	351	,5
,6	5962	8028	7427	347	,4
,7	5976	8018	7454	342	,3
,8	5990	8007	7481	337	,2
,9	6004	7997	7508	332	,1
37,0	**0,6018**	**0,7986**	**0,7536**	**1,327**	**53,0**
,1	0,6032	0,7976	0,7563	1,322	,9
,2	6046	7965	7590	317	,8
,3	6060	7955	7618	313	,7
,4	6074	7944	7646	308	,6
,5	6088	7934	7673	303	,5
,6	6101	7923	7701	299	,4
,7	6115	7912	7729	294	,3
,8	6129	7902	7757	289	,2
,9	6143	7891	7785	285	,1
38,0	**0,6157**	**0,7880**	**0,7813**	**1,280**	**52,0**
,1	0,6170	0,7869	0,7841	1,275	,9
,2	6184	7859	7869	271	,8
,3	6198	7848	7898	266	,7
,4	6211	7837	7926	262	,6
,5	6225	7826	7954	257	,5
,6	6239	7815	7983	253	,4
,7	6252	7804	8012	248	,3
,8	6266	7793	8040	244	,2
,9	6280	7782	8069	239	,1
39,0	**0,6293**	**0,7771**	**0,8098**	**1,235**	**51,0**
,1	0,6307	0,7760	0,8127	1,230	,9
,2	6320	7749	8156	226	,8
,3	6334	7738	8185	222	,7
,4	6347	7727	8214	217	,6
,5	6361	7716	8243	213	,5
,6	6374	7705	8273	209	,4
,7	6388	7694	8302	205	,3
,8	6401	7683	8332	200	,2
,9	6414	7672	8361	196	,1
40,0	**0,6428**	**0,7660**	**0,8391**	**1,192**	**50,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

40° ... 44°					46° ... 50°
Grad	sin	cos	tan	cot	
40,0	**0,6428**	**0,7660**	**0,8391**	**1,192**	**50,0**
,1	0,6441	0,7649	0,8421	1,188	,9
,2	6455	7638	8451	183	,8
,3	6468	7627	8481	179	,7
,4	6481	7615	8511	175	,6
,5	6494	7604	8541	171	,5
,6	6508	7593	8571	167	,4
,7	6521	7581	8601	163	,3
,8	6534	7570	8632	159	,2
,9	6547	7559	8662	154	,1
41,0	**0,6561**	**0,7547**	**0,8693**	**1,150**	**49,0**
,1	0,6574	0,7536	0,8724	1,146	,9
,2	6587	7524	8754	142	,8
,3	6600	7513	8785	138	,7
,4	6613	7501	8816	134	,6
,5	6626	7490	8847	130	,5
,6	6639	7478	8878	126	,4
,7	6652	7466	8910	122	,3
,8	6665	7455	8941	118	,2
,9	6678	7443	8972	115	,1
42,0	**0,6691**	**0,7431**	**0,9004**	**1,111**	**48,0**
,1	0,6704	0,7420	0,9036	1,107	,9
,2	6717	7408	9067	103	,8
,3	6730	7396	9099	099	,7
,4	6743	7385	9131	095	,6
,5	6756	7373	9163	091	,5
,6	6769	7361	9195	087	,4
,7	6782	7349	9228	084	,3
,8	6794	7337	9260	080	,2
,9	6807	7325	9293	076	,1
43,0	**0,6820**	**0,7314**	**0,9325**	**1,072**	**47,0**
,1	0,6833	0,7302	0,9358	1,069	,9
,2	6845	7290	9391	065	,8
,3	6858	7278	9424	061	,7
,4	6871	7266	9457	057	,6
,5	6884	7254	9490	054	,5
,6	6896	7242	9523	050	,4
,7	6909	7230	9556	046	,3
,8	6921	7218	9590	043	,2
,9	6934	7206	9623	039	,1
44,0	**0,6947**	**0,7193**	**0,9657**	**1,036**	**46,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

44° ... 45°					45° ... 46°
Grad	sin	cos	tan	cot	
44,0	**0,6947**	**0,7193**	**0,9657**	**1,036**	**46,0**
,1	0,6959	0,7181	0,9691	1,032	,9
,2	6972	7169	9725	028	,8
,3	6984	7157	9759	025	,7
,4	6997	7145	9793	021	,6
,5	7009	7133	9827	018	,5
,6	7022	7120	9861	014	,4
,7	7034	7108	9896	011	,3
,8	7046	7096	9930	007	,2
,9	7059	7083	9965	003	,1
45,0	**0,7071**	**0,7071**	**1,0000**	**1,0000**	**45,0**
	cos	sin	cot	tan	Grad

Spezielle Funktionswerte

		sin	cos	tan	cot
0°	0	0	1	0	nicht erklärt
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht erklärt	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	nicht erklärt
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nicht erklärt	0
360°	2π	0	1	0	nicht erklärt
		sin	cos	tan	cot

Die Tafel der Winkelfunktionen (Winkel in rad)

(Fortsetzung auf Seite 62 beachten)

rad	Grad	sin *x*	cos *x*	tan *x*
0,00	**0,00°**	**0,000**	**1,000**	**0,000**
0,01	0,57°	0,010	1,000	0,010
0,02	1,15°	0,020	1,000	0,020
0,03	1,72°	0,030	1,000	0,030
0,04	2,29°	0,040	0,999	0,040
0,05	2,86°	0,050	0,999	0,050
0,06	3,44°	0,060	0,998	0,060
0,07	4,01°	0,070	0,998	0,070
0,08	4,58°	0,080	0,997	0,080
0,09	5,16°	0,090	0,996	0,090
0,10	5,73°	**0,100**	**0,995**	**0,100**
0,12	6,88°	0,120	0,993	0,121
0,14	8,02°	0,140	0,990	0,141
0,16	9,17°	0,159	0,987	0,161
0,18	10,3°	0,179	0,984	0,182
0,20	11,5°	**0,199**	**0,980**	**0,203**
0,22	12,6°	0,218	0,976	0,224
0,24	13,8°	0,238	0,971	0,245
0,26	14,9°	0,257	0,966	0,266
0,28	16,0°	0,276	0,961	0,288
0,30	17,2°	**0,296**	**0,955**	**0,309**
0,32	18,3°	0,315	0,949	0,331
0,34	19,5°	0,333	0,943	0,354
0,36	20,6°	0,352	0,936	0,376
0,38	21,8°	0,371	0,929	0,399
0,40	22,9°	**0,389**	**0,921**	**0,423**
0,42	24,1°	0,408	0,913	0,447
0,44	25,2°	0,426	0,905	0,471
0,46	26,4°	0,444	0,896	0,495
0,48	27,5°	0,462	0,887	0,521
0,50	28,6°	**0,479**	**0,878**	**0,546**
0,52	29,8°	0,497	0,868	0,573
0,54	30,9°	0,514	0,858	0,599
0,56	32,1°	0,531	0,847	0,627
0,58	32,2°	0,548	0,836	0,655
0,60	34,4°	**0,565**	**0,825**	**0,684**
0,62	35,5°	0,581	0,814	0,714
0,64	36,7°	0,597	0,802	0,745
0,66	37,8°	0,613	0,790	0,776
0,68	39,0°	0,629	0,778	0,809
0,70	40,1°	**0,644**	**0,765**	**0,842**
0,72	41,3°	0,659	0,752	0,877
0,74	42,4°	0,674	0,738	0,913
0,76	43,5°	0,689	0,725	0,950
0,78	44,7°	0,703	0,711	0,989
0,80	45,8°	0,717	0,697	1,030

rad	Grad	sin *x*	cos *x*	tan *x*
1,20	68,8°	**0,932**	**0,362**	**2,572**
1,22	69,9°	0,939	0,344	2,733
1,24	71,0°	0,946	0,325	2,912
1,26	72,2°	0,952	0,306	3,113
1,28	73,3°	0,958	0,287	3,341
1,30	74,5°	**0,964**	**0,267**	**3,602**
1,32	75,6°	0,969	0,248	3,903
1,34	76,8°	0,973	0,229	4,256
1,36	77,9°	0,978	0,209	4,673
1,38	79,1°	0,982	0,190	5,177
1,40	80,2°	**0,985**	**0,170**	**5,798**
1,42	81,4°	0,989	0,150	6,581
1,44	82,5°	0,991	0,130	7,602
1,46	83,6°	0,994	0,111	8,989
1,48	84,8°	0,996	0,091	10,98
1,50	85,9°	**0,997**	**0,071**	**14,10**
1,52	87,1°	0,999	0,051	19,67
1,54	88,2°	1,000	0,031	32,46
1,56	89,4°	1,000	0,011	92,62
1,58	90,5°	1,000	—0,009	—109
1,60	91,7°	**1,000**	**—0,029**	**—34,2**
1,62	92,8°	0,999	—0,049	—20,31
1,64	94,0°	0,998	—0,069	—14,43
1,66	95,1°	0,996	—0,089	—11,18
1,68	96,3°	0,994	—0,109	—9,121
1,70	97,4°	**0,992**	**—0,129**	**—7,697**
1,72	98,5°	0,989	—0,149	—6,652
1,74	99,7°	0,986	—0,168	—5,854
1,76	100,8°	0,982	—0,188	—5,222
1,78	102,0°	0,978	—0,208	—4,710
1,80	103,1°	**0,974**	**—0,227**	**—4,286**
1,82	104,3°	0,969	—0,247	—3,929
1,84	105,4°	0,964	—0,266	—3,624
1,86	106,6°	0,958	—0,285	—3,361
1,88	107,7°	0,953	—0,304	—3,130
1,90	108,9°	**0,946**	**—0,323**	**—2,927**
1,92	110,0°	0,940	—0,342	—2,746
1,94	111,2°	0,933	—0,361	—2,584
1,96	112,3°	0,925	—0,379	—2,438
1,98	113,4°	0,917	—0,398	—2,306
2,00	114,6°	**0,909**	**—0,416**	**—2,185**

rad	Grad	sin x	cos x	tan x
0,80	45,8°	0,717	0,697	1,030
0,82	47,0°	0,731	0,682	1,072
0,84	48,1°	0,74$\underline{5}$	0,667	1,116
0,86	49,3°	0,758	0,652	1,162
0,88	50,4°	0,771	0,637	1,210
0,90	51,6°	0,783	0,622	1,260
0,92	52,7°	0,796	0,606	1,313
0,94	53,9°	0,808	0,590	1,369
0,96	55,0°	0,819	0,574	1,428
0,98	56,1°	0,830	0,557	1,491
1,00	57,3°	0,841	0,540	1,557
1,02	58,4°	0,852	0,523	1,628
1,04	59,6°	0,862	0,506	1,704
1,06	60,7°	0,872	0,489	1,784
1,08	61,9°	0,882	0,471	1,871
1,10	63,0°	0,891	0,454	1,965
1,12	64,2°	0,900	0,436	2,066
1,14	65,3°	0,909	0,418	2,176
1,16	66,5°	0,917	0,399	2,296
1,18	67,6°	0,92$\underline{5}$	0,381	2,427
1,20	68,8°	0,932	0,362	2,572

rad	Grad	sin x	cos x	tan x
2,00	114,6°	0,909	−0,416	−2,18$\underline{5}$
2,1	120,3°	0,863	−0,50$\underline{5}$	−1,710
2,2	126,1°	0,808	−0,589	−1,374
2,3	131,8°	0,746	−0,666	−1,119
2,4	137,5°	0,67$\underline{5}$	−0,737	−0,916
2,5	143,2°	0,598	−0,801	−0,747
2,6	149,0°	0,516	−0,857	−0,602
2,7	154,7°	0,427	−0,904	−0,473
2,8	160,4°	0,33$\underline{5}$	−0,942	−0,356
2,9	166,2°	0,239	−0,971	−0,246
3,0	171,9°	0,141	−0,990	−0,143
3,1	177,6°	0,042	−0,999	−0,042
3,2	183,3°	−0,058	−0,998	0,058
3,3	189,1°	−0,158	−0,987	0,160
3,4	194,8°	−0,256	−0,967	0,264
3,5	200,5°	−0,351	−0,936	0,37$\underline{5}$
3,6	206,3°	−0,443	−0,897	0,493
3,7	212,0°	−0,530	−0,848	0,62$\underline{5}$
3,8	217,7°	−0,612	−0,791	0,774
3,9	223,5°	−0,688	−0,726	0,947
4,0	229,2°	−0,757	−0,654	1,158
0,524	**30,0°**	**0,500**	**0,866**	**0,577**
0,785	**45,0°**	**0,707**	**0,707**	**1,000**
1,047	**60,0°**	**0,866**	**0,500**	**1,732**
1,571	**90,0°**	**1,000**	**0,000**	**—**
2,094	**120°**	**0,866**	**−0,500**	**−1,732**
2,618	**150°**	**0,500**	**−0,866**	**−0,577**
3,142	**180°**	**0,000**	**−1,000**	**0,000**

Rationale Funktionen

Ganze rationale Funktionen lassen sich darstellen in der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

(a_k reelle Konstanten; $n \in N$; $a_n \neq 0$)

- $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 + 1$ (ganze rationale Funktion dritten Grades)

Rationale Funktionen lassen sich darstellen in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

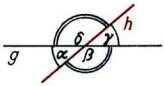
(a_i, b_k reelle Konstanten; $n, m \in N$; $b_m \neq 0$)

- $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{3x^3 - 2x + 1}$ (echt gebrochene rationale Funktion)

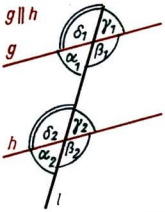
- Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen.
- Ist x_1 eine Nullstelle der ganzen rationalen Funktion $f(x)$, so ist $f(x)$ durch $(x - x_1)$ teilbar, d. h., es gibt eine ganze rationale Funktion $f_1(x)$ derart, daß für jedes x gilt: $f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$.

1.4. Geometrie

Winkelpaare



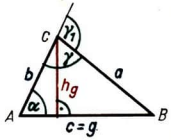
Nebenwinkel	Scheitelwinkel
$\alpha + \beta = 180°$ Entsprechend gilt: $\beta+\gamma=\gamma+\delta=\alpha+\delta=180°$	$\alpha = \gamma$ Entsprechend gilt: $\beta = \delta$



Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\alpha_1 = \alpha_2$ Entsprechend gilt: $\beta_1 = \beta_2;\ \gamma_1 = \gamma_2;\ \delta_1 = \delta_2$	$\alpha_1 = \gamma_2$ Entsprechend gilt: $\beta_1 = \delta_2;\ \gamma_1 = \alpha_2;\ \delta_1 = \beta_2$
Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen	
$\alpha_1 + \delta_2 = 180°$ Entsprechend gilt: $\beta_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \beta_2 = \delta_1 + \alpha_2 = 180°$	

Ebene Figuren (A Flächeninhalt; u Umfang)

Dreieck



$$A = \frac{1}{2}\, g\, h_g = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Innenwinkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Außenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$

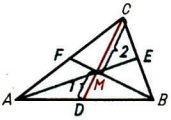
$\alpha_1 = \beta + \gamma;\ \beta_1 = \alpha + \gamma;\ \gamma_1 = \alpha + \beta$

Beziehungen zwischen den Seiten:

$a + b > c;\ b + c > a;\ a + c > b$

Höhen:
Zwei Höhen verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

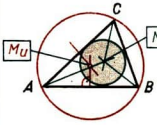


Seitenhalbierende:
Die Seitenhalbierenden teilen einander im Verhältnis 2:1.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = \frac{2}{1}$$

Heronische Formel: Für $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ gilt

$$A = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}\,.$$



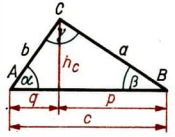
Inkreis: $\varrho = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ für $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Umkreis: $r = \frac{abc}{4A} = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Rechtwinkliges Dreieck
(γ sei 90°)



$A = \frac{1}{2}ab$

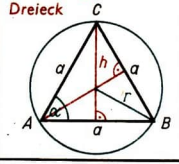
Satz des Pythagoras:
$a^2 + b^2 = c^2$

Satz des Euklid:
$a^2 = pc$; $b^2 = qc$

Höhensatz:
$h^2 = pq$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\tan\beta = \frac{b}{a}$
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$\cot\beta = \frac{a}{b}$

Gleichseitiges Dreieck



(Vgl. auch „Regelmäßige Polygone" ↗ 65)

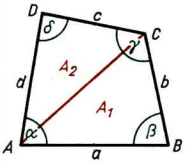
$A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \approx 0{,}4330\,a^2$; $\alpha = 60°$

Höhen: $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \approx 0{,}8660\,a$

Umkreis: $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \approx 0{,}5774\,a$

Seiten bezüglich r: $a = r\sqrt{3} \approx 1{,}7321\,r$

Viereck

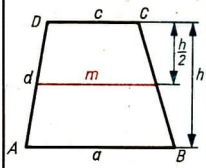


$A = A_1 + A_2$

$u = a + b + c + d$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Trapez Es gelte $a \parallel c$



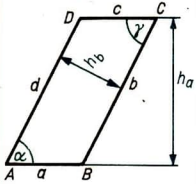
$A = \frac{1}{2}(a + c)\,h = mh$

$u = a + b + c + d$

$m = \frac{1}{2}(a + c)$

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

Parallelogramm



$A = a\,h_a = b\,h_b$

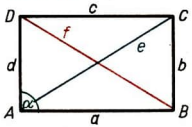
$= ab \cdot \sin\alpha$

$u = 2(a + b)$

$a = c$; $b = d$

$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$

Rechteck



$A = a\,b$

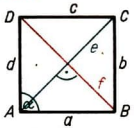
$u = 2\,(a + b)$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$

$a = c;\ b = d;\ e = f$

Quadrat



$A = a^2;\ u = 4\,a$

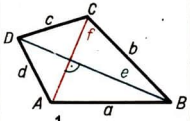
$e = a\sqrt{2} \approx 1{,}414\,a$

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$

$a = b = c = d$

(Vgl. auch „Regelmäßige Polygone" ↗ 65)

Drachenviereck

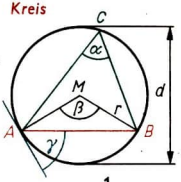


$A = \frac{1}{2}\,e\,f$

$a = b;\ c = d$

$u = 2\,(a + c)$

Kreis



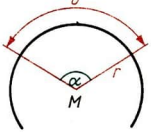
$A = \pi\,r^2 = \frac{1}{4}\,\pi\,d^2$

$\approx 0{,}7854\,d^2$

$u = 2\,\pi\,r = \pi\,d$

$\alpha = \gamma;\ 2\,\alpha = \beta$

Kreisbogen

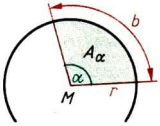


$\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$

$b = \frac{\pi}{180°}\,r\alpha \approx 0{,}0175\,r\alpha$

$= r\,\mathrm{arc}\,\alpha$

Kreisausschnitt



$\frac{A_\alpha}{A} = \frac{\alpha}{360°}$

$A_\alpha = \frac{\pi}{360°}\,r^2\alpha \approx 0{,}0087\,r^2\alpha$

$= \frac{1}{2}\,b\,r = \frac{1}{2}\,r^2\,\mathrm{arc}\,\alpha$

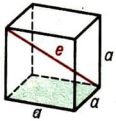
$u = b + 2\,r$

Regelmäßige Polygone (Vielecke) (*a* Seite; *r* Radius des Umkreises)

Eckenzahl	Innenwinkel	Seitenlänge *a* bezüglich *r*	Radius *r* bezüglich Seitenlänge *a*	Flächeninhalt	Umfang
3	60°	$a = \sqrt{3}\,r$ $\approx 1{,}7321\,r$	$r = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ $\approx 0{,}5774\,a$	$A = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,r^2$ $\approx 1{,}2990\,r^2$	$u = 3\sqrt{3}\,r$ $\approx 5{,}1962\,r$
4	90°	$a = \sqrt{2}\,r$ $\approx 1{,}4142\,r$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$ $\approx 0{,}7071\,a$	$A = 2\,r^2$	$u = 4\sqrt{2}\,r$ $\approx 5{,}6569\,r$
5	108°	$a \approx 1{,}1756\,r$	$r \approx 0{,}8506\,a$	$A = 2{,}3777\,r^2$	$u \approx 5{,}8779\,r$
6	120°	$a = r$	$r = a$	$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,r^2$ $\approx 2{,}5981\,r^2$	$u = 6{,}0000\,r$
8	135°	$a \approx 0{,}7654\,r$	$r \approx 1{,}3065\,a$	$A \approx 2{,}8284\,r^2$	$u \approx 6{,}1229\,r$

Körper (V Volumen; A_O Oberflächeninhalt; A_M Mantel)

Würfel

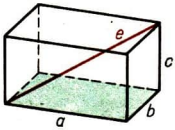


$V = a^3$

$A_O = 6\,a^2$

$e = \sqrt{3}\,a$

Quader

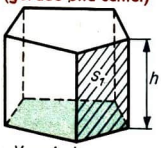


$V = a\,b\,c$

$A_O = 2\,(ab + ac + bc)$

$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

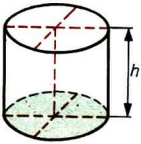
Prisma (gerade und schief)



$V = A_G\,h$

$A_O = 2\,A_G + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

Kreiszylinder



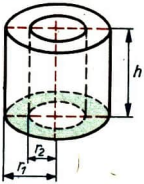
$V = \pi\,r^2\,h = \frac{\pi}{4}\,d^2\,h$

$A_O = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,rh$

$= \frac{\pi}{2}\,d^2 + \pi\,dh$

$A_M = \pi\,dh = 2\,\pi\,rh$

Hohlzylinder

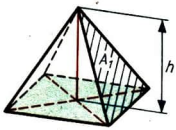


falls $r_1 > r_2$:

$V = \pi\,h\,(r_1^2 - r_2^2)$

$A_O = 2\,\pi\,r_1\,h + 2\,\pi\,r_2\,h + 2\,\pi\,(r_1^2 - r_2^2)$

Pyramide (gerade und schief)

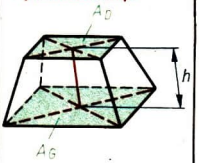


$V = \frac{1}{3}\,A_G\,h$

$A_O = A_G + A_M$

$A_M = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

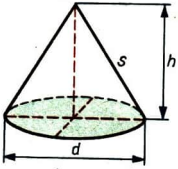
Pyramidenstumpf



$V = \frac{1}{3}\,h\left(A_G + \sqrt{A_G\,A_D} + A_D\right)$

$A_O = A_G + A_D + A_M$

Kreiskegel



$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h = \frac{1}{12}\,\pi\,d^2\,h$

$\approx 1{,}0472\,r^2\,h$

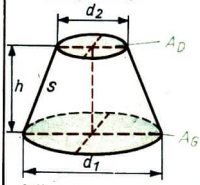
$\approx 0{,}2618\,d^2\,h$

$A_O = \pi\,r\,(r + s)$

$A_M = \pi\,rs = \frac{\pi}{2}\,ds$

$s^2 = r^2 + h^2$

Kreiskegelstumpf



falls $r_1 > r_2$:

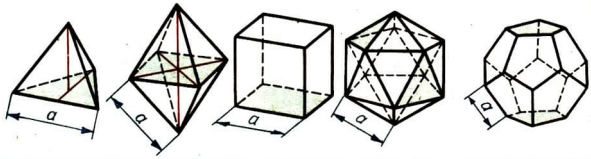
$V = \frac{1}{3}\,\pi\,h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1\,r_2)$

$A_O = \pi\,r_1^2 + \pi\,r_2^2 + \pi\,s\,(r_1 + r_2)$

$s^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2$

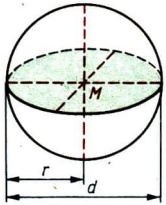
Regelmäßige Polyeder (*a* Kante des Polyeders)

Tetraeder *Oktaeder* *Hexaeder* *Ikosaeder* *Dodekaeder*



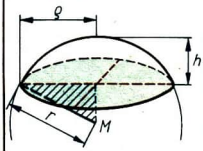
Name	Flächen	Volumen	Oberflächeninhalt
Tetraeder	4 gleichseitige Dreiecke	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ $\approx 0{,}1179\, a^3$	$A_O = \sqrt{3}\, a^2$ $\approx 1{,}7321\, a^2$
Oktaeder	8 gleichseitige Dreiecke	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ $\approx 0{,}4714\, a^3$	$A_O = 2\sqrt{3}\, a^2$ $\approx 3{,}4641\, a^2$
Hexaeder (Würfel)	6 Quadrate	$V = a^3$	$A_O = 6\, a^2$
Ikosaeder	20 gleichseitige Dreiecke	$V \approx 2{,}1817\, a^3$	$A_O \approx 8{,}6603\, a^2$
Dodekaeder	12 regelmäßige Fünfecke	$V \approx 7{,}6631\, a^3$	$A_O \approx 20{,}6457\, a^2$

Kugel



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}1888\, r^3$$
$$= \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 0{,}5236\, d^3$$
$$A_O = 4\pi r^2 \approx 12{,}5664\, r^2$$
$$= \pi d^2 \approx 3{,}1416\, d^2$$

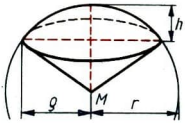
Kugelabschnitt (*Kugelsegment*)



$$\varrho = \sqrt{h\,(2\,r - h)}$$
$$V = \frac{1}{6}\pi\, h\,(3\,\varrho^2 + h^2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\, h^2\,(3\,r - h)$$
$$A_O = 2\,\pi\, rh + \varrho^2\,\pi$$
$$= \pi\, h\,(4\,r - h)$$

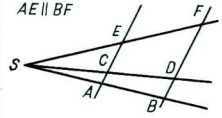
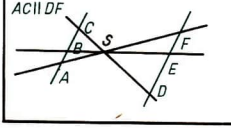
Kugelkappe (Oberfläche ohne Grundkreis) $A = 2\pi rh$

Kugelausschnitt (*Kugelsektor*)



$$\varrho = \sqrt{h\,(2\,r - h)}$$
$$V = \frac{2\pi}{3} r^2 h \approx 2{,}0944\, r^2 h$$
$$= \frac{\pi}{6} d^2 h \approx 0{,}5236\, d^2 h$$
$$A_O = \pi\,\varrho\, r + 2\,\pi\, rh$$

Strahlensätze

	1. Teil	2. Teil	3. Teil
	$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$ $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ $\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$	$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$ $\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$ $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$ $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BF}}$
	$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}}$	$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$ $\frac{\overline{SE}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ $\frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

1.5. Binomischer Satz; Zahlenfolgen und Reihen

Summenzeichen

$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\mathrm{Df}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ $(n \in N; a \in R)$ (lies: „Summe über a_k für k gleich 1 bis n")

■ $\sum_{k=1}^{5} \frac{2}{k} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} = \frac{137}{30}$

Rechenregeln:

$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Vorziehen einer Konstanten vor die Summe)

$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ Glieder}} = n\,c$ (Summation einer Konstanten)

$\sum_{a}^{b} a_k + \sum_{b}^{c} a_k = \sum_{a}^{c} a_k$ (falls $a < b < c$)

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k$ (Herauslösen des ersten Summanden)

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n$ (Herauslösen des letzten Summanden)

Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{p}$ lies: „n über p"

▶ DEFINITION: Mit n, p natürlich und $0 < p < n$ gilt:

$\binom{n}{p} \underset{\mathrm{Df}}{=} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{p!}$; $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} \underset{\mathrm{Df}}{=} 1$

■ $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10;$ $\binom{3}{3} = 1$

▶ Sätze: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p};$ $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

↗ Fakultät, Seite 83

Binomischer Satz

Wenn $a, b \in R$ und $n \in N$, so gilt:

$(a \pm b)^0 = 1$

$(a \pm b)^1 = a \pm b$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

$(a \pm b)^6$

PASCALsches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1}), \quad (n = 1, 2, \ldots)$

Zahlenfolgen

▶ DEFINITION:

Zahlenfolge $\overset{\text{Def}}{=}$ Funktion mit einer Menge natürlicher Zahlen als Definitionsbereich und einer Menge reeller Zahlen als Wertebereich.

Man schreibt: $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Monotonie von Folgen

Ist die Differenz $a_{k+1} - a_k$

- stets positiv, also $a_{k+1} - a_k > 0$ für jedes k, so ist die Folge streng monoton wachsend,
- positiv oder Null, also $a_{k+1} - a_k \geqq 0$ für jedes k, so ist die Folge monoton wachsend,
- stets negativ, also $a_{k+1} - a_k < 0$ für jedes k, so ist die Folge streng monoton fallend,
- negativ oder Null, also $a_{k+1} - a_k \leqq 0$ für jedes k, so ist die Folge monoton fallend.

Gilt stets $a_{k+1} - a_k = 0$, so heißt die Folge konstant.

Grenzwert einer Folge Die Zahlenfolge (a_n) hat die Zahl g als Grenzwert, wenn bei jedem positiven ε für fast alle n gilt: a_n liegt in einer ε-Umgebung von g, d. h., für fast alle n gilt

$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$ bzw. $|a_n - g| < \varepsilon$.

Arithmetische Folge $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$

n-tes Glied: $a_n = a_1 + (n-1)d$	konstante Differenz: $d = a_{k+1} - a_k$
explizites Bildungsgesetz: $a_k = a_1 + (k-1)d$	rekursives Bildungsgesetz: $a_{k+1} = a_k + d$

Summe: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} d$

Arithmetische Folgen sind monoton wachsend für $d \geqq 0$ und monoton fallend für $d \leqq 0$.

Geometrische Folge $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \ldots (a_1 \neq 0;\ q \neq 0)$

n-tes Glied: $a_n = a_1 q^{n-1}$	konstanter Quotient: $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$
explizites Bildungsgesetz: $a_k = a_1 q^{k-1}$	rekursives Bildungsgesetz: $a_{k+1} = a_k q$

Summe: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, falls $q \neq 1$

$= \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, falls $q \neq 1$

$s_n = a_1 n$, falls $q = 1$

Geometrische Folgen sind
- monoton wachsend für $a > 0$ und $q \geqq 1$ sowie für $a < 0$ und $0 < q \leqq 1$,
- monoton fallend für $a > 0$ und $0 < q \leqq 1$ sowie für $a < 0$ und $q \geqq 1$.

Partialsummenfolge Die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ heißt n-te Partialsumme der Folge (a_k); eine aus den Partialsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ aufgestellte Folge heißt Partialsummenfolge.

Zahlenfolge $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

zugehörige Partialsummenfolge $(s_k) = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$

Partialsummen

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

n-te Partialsumme $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$(a_k) = 2;\quad 4;\quad 6;\quad 8;\quad 10; \ldots; 2k; \ldots = (2n)$

$(s_k) = 2;\quad 6;\quad 12;\quad 20;\quad 30; \ldots; k(k+1); \ldots = (n \cdot (n+1))$

$s_1 = 2$

$s_2 = 2 + 4$

$s_3 = 2 + 4 + 6$

$\vdots$

$$s_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

Summe der ersten n Glieder einiger Folgen

Natürliche Zahlen	$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$
Gerade Zahlen	$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$
Ungerade Zahlen	$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
Quadratzahlen	$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Kubikzahlen	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Grenzwertsätze für unendliche konvergente Folgen

Falls die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ existieren, gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Einige wichtige Grenzwerte

Nullfolgen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ für $|a| < 1;\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$ für $a = 1;\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0;\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718\,281\,828\,4 \ldots$$

Reihen

Eine (unendliche) Reihe nennt man einen Ausdruck der Form $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, wobei die a_k die Glieder einer Folge sind. Hat diese Folge einen Grenzwert, so ist die Summe dieser Reihe durch den Grenzwert der Partialsummenfolge (s_n) mit

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

gegeben: $s = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$.

Unendliche geometrische Reihe:

$$(a_n) = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots \text{ mit } a_1 \neq 0 \text{ und } q \neq 0$$

Summe: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$, falls $|q| < 1$

1.6. Differentialrechnung

Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Grenzwert einer Funktion Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g, also $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$:

$\overline{\underline{\text{Df}}}$ (1) $f(x)$ ist in einer Umgebung von x_0 (eventuell unter Ausschluß der Stelle x_0) definiert.

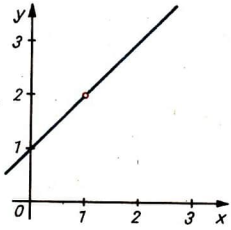
(2) Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) ($x_n \neq x_0$ für alle n), deren Glieder dieser Umgebung angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen g.

■ Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ den Grenzwert $g = 2$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

(1) $f(x)$ ist in einer Umgebung von $x_0 = 1$ definiert, an der Stelle $x_0 = 1$ selbst aber nicht. Für alle $x \neq 1$ stimmt die Funktion mit der Funktion $g(x) = x + 1$ überein.

(2) Betrachtet man z. B. die Folge $(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, die für $n \to \infty$ gegen 1 strebt, so strebt die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x))$ mit $f(x) = g(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$ gegen 2.



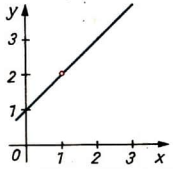
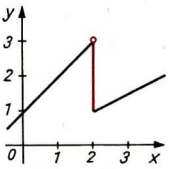
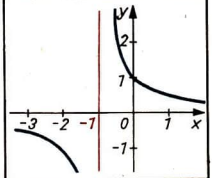
Stetigkeit Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig:

$\equiv$ Df (1) $f(x)$ ist an der Stelle x_0 definiert.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

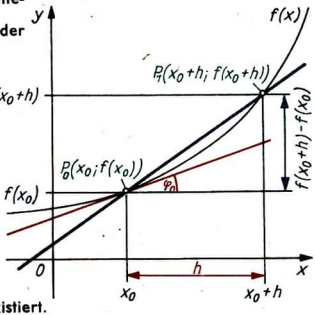
Unstetigkeitsstellen (Beispiele)

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ Lücke bei $x = 1$	$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ für } x < 2 \\ 0{,}5\,x \text{ für } x \geqq 2 \end{cases}$ Sprung bei $x = 2$	$f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ Pol bei $x = -1$
		
$f(x)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 1$. Es kann eine neue Funktion $g(x)$ gebildet werden, die auch bei $x_0 = 1$ stetig ist: $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ für } x \neq 1 \\ 2 \text{ für } x = 1 \end{cases}$ (hebbare Unstetigkeit)		x_0 ist ein Pol der rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ genau dann, wenn $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$.

Differenzierbarkeit

$\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ mit $h \neq 0$ ist der Differenzenquotient einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ ist der Differentialquotient oder die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Andere Schreibweisen sind $y'|_{x = x_0}$ oder $f'(x_0)$.



Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar

$\equiv$ Df (1) $f(x)$ ist in einer Umgebung von x_0 definiert.

(2) Der Grenzwert

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ existiert.

Differentiationsregeln

Konstante Funktion	$y = c$ (c konstant) $y' = 0$	$y = 5$ $y' = 0$
Konstanter Faktor c	$y = cv$ $y' = cv'$	$y = 5x^2$ $y' = 5 \cdot 2x = 10x$
Summenregel	$y = u \pm v$ $y' = u' \pm v'$	$y = 3x^2 - x$ $y' = 6x - 1$
Produktregel	$y = uv$ $y' = u'v + uv'$	$y = \sin x \cdot \cos x$ $y' = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$ $= \cos^2 x - \sin^2 x$
Quotientenregel	$y = \frac{u}{v}$ $(v \neq 0)$ $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{2x + 1}{x^2}$ $y' = \frac{2x^2 - (2x + 1)\,2x}{x^4}$ $= \frac{-2x - 2}{x^3}$
Kettenregel	$y = f(x) = u(v(x))$ $y' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ anders dargestellt: $y = u(z)$ mit $z = v(x)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$	$y = \sqrt{5x^2 + 7}$ $= (5x^2 + 7)^{\frac{1}{2}}$ $y' = \frac{1}{2}(5x^2 + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 5x$ $= \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$ anders dargestellt: $y = \sqrt{5x^2 + 7}$ $y = \sqrt{z}$; $z = 5x^2 + 7$ $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$; $\frac{dz}{dx} = 10x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{2\sqrt{z}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$

Schreibweise höherer Ableitungen

2. Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$; 3. Ableitung $\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$;

k-te Ableitung $\frac{d^ky}{dx^k} = y^{(k)} = f^{(k)}(x)$

Ableitungen spezieller Funktionen

$y = x^n$ (n beliebig reell, $x > 0$ bzw. $n \geqq 0$ ganz, x beliebig reell)	$y' = n \cdot x^{n-1}$ $y'' = n(n-1)\,x^{n-2}$; $y''' = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$ $y^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k} & \text{im Falle } k \leqq n \\ 0 & \text{im Falle } k > n \end{cases}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \quad y''' = -\cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x \quad y'' = -\cos x \quad y''' = \sin x$

$y = \tan x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}; \quad y''' = \frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$
$y = \cot x \ (x \neq k\pi)$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ $y'' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}; \quad y''' = -\frac{2 \sin^2 x + 6 \cos^2 x}{\sin^4 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x; \quad y'' = e^x$
$y = a^x \ (a > 0)$	$y' = a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$ $y'' = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a; \quad y''' = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a \cdot \ln a$
$y = \ln x$ $(x > 0)$	$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2}$ $y''' = \frac{2!}{x^3}; \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$
$y = \log_a x$ $(a > 0; a \neq 1;$ $x > 0)$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad y'' = -\frac{1!}{x^2 \cdot \ln a}$ $y''' = \frac{2!}{x^3 \cdot \ln a}; \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \cdot \ln a}$

Kurvendiskussion

Schnitt des Graphen mit den Achsen	
Schnitt mit der x-Achse (Nullstellen) Für ganze rationale Funktionen (↗ Seite 60) $y = f(x)$ gilt die Bedingung $f(x) = 0$. Für gebrochene rationale Funktionen $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ gelten die Bedingungen $u(x_0) = 0; \ v(x_0) \neq 0$.	■ $f(x) = x^2 - x - 6$ $x^2 - x - 6 = 0$ $\boxed{x_1 = -2 \quad x_2 = 3}$ ■ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ (1) Ermitteln der Nullstellen von u: $x_1 = -2; \ x_2 = 2$. (2) Überprüfen, ob v an den Nullstellen von u verschieden von 0 ist: $v(-2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$, $v(2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$. (3) Falls $v(x_0) \neq 0$, so sind die Zahlen x mit $u(x) = 0$ Nullstellen von $f(x)$.
Schnitt mit der y-Achse Für ganze rationale Funktionen $y = f(x)$ gilt die Bedingung $x = 0$. Für gebrochene rationale Funktionen $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ gelten die Bedingungen $x = 0; \ v(0) \neq 0$.	■ $f(x) = x^2 - x + 6$ $y = 0 - 0 + 6$ $\boxed{y = 6}$ ■ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ (1) $u(0) = -4$ (2) $v(0) = 1 \neq 0$ $\boxed{y = -4}$

- Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen.
- Ist x_1 eine Nullstelle der ganzen rationalen Funktion $f(x)$, so ist $f(x)$ durch $(x - x_1)$ teilbar, d. h., es gibt eine ganze rationale Funktion $f_1(x)$ derart, daß für jedes x gilt: $f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$.
- Hat eine ganze rationale Funktion $f(x)$ vom Grade n genau n Nullstellen, so läßt sie sich als Produkt aus n Linearfaktoren darstellen: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

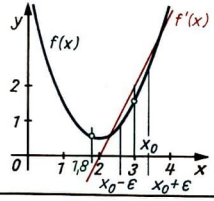
Monotonieverhalten

DEFINITION: Eine Funktion f heißt in einem Intervall I
- **monoton wachsend,** wenn aus $x_1 < x_2$ (mit $x_1, x_2 \in I$) stets $f(x_1) \leqq f(x_2)$ folgt,
- **streng monoton wachsend,** wenn aus $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) < f(x_2)$ folgt.

Wenn f eine im Intervall I differenzierbare Funktion ist und für alle x aus diesem Intervall $f'(x) \geqq 0$ gilt, so ist f in dem Intervall monoton wachsend.

DEFINITION: Eine Funktion f heißt in einem Intervall I
- **monoton fallend,** wenn aus $x_1 < x_2$ (mit $x_1, x_2 \in I$) stets $f(x_1) \geqq f(x_2)$ folgt,
- **streng monoton fallend,** wenn aus $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$ folgt.

Wenn f eine im Intervall I differenzierbare Funktion ist und für alle x aus diesem Intervall $f'(x) \leqq 0$ gilt, so ist f in dem Intervall monoton fallend.



$f(x) = x^2 - 4x + 4{,}5$; $f'(x) = 2x - 4$
An der Stelle $x_0 = 3$ gilt
$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$.
An der Stelle $x_0 = 1{,}8$ gilt
$f'(1{,}8) = 2 \cdot 1{,}8 - 4 = -0{,}4 < 0$.
Also ist $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$ lokal monoton wachsend und an der Stelle $x_0 = 1{,}8$ lokal monoton fallend.

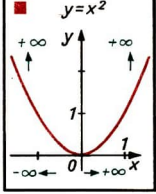
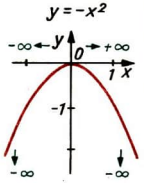
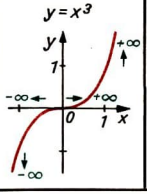
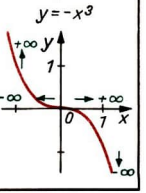
Verhalten im Unendlichen

Im Falle ganzer rationaler Funktionen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (a_k reelle Konstanten; $n \in N$)
hängt das Verhalten im Unendlichen von a_n und vom Verhalten von x^n ab; denn es gilt für $x \neq 0$:

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right),$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a_n \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x^n.$$

n gerade		n ungerade	
$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
			

Im Falle gebrochener rationaler Funktionen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad (a_n, b_m \text{ reelle Konstanten; } n, m \in N;\ b_m \neq 0)$$

formt man um zu

$$f(x) = \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \frac{b_{m-2}}{x^2} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)}$$

und erhält $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{n-m}$.

$n < m$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
	Die Abszissenachse ist Asymptote des Graphen von $f(x)$.		
$n = m$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
	Die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist Asymptote des Graphen von $f(x)$.		
$n > m$ ($n - m$ gerade)	$\frac{a_n}{b_m} > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
	$\frac{a_n}{b_m} < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$n > m$ ($n - m$ ungerade)	$\frac{a_n}{b_m} > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
	$\frac{a_n}{b_m} < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Lokale Extrema

Lokales Maximum	Lokales Minimum
Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum $\overset{\equiv}{\text{Df}}$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$.	Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum $\overset{\equiv}{\text{Df}}$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt $f(x) > f(x_0)$.

Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ ein lokales Extremum, wenn sie in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist und wenn $f'(x_0) = 0$ gilt und wenn außerdem $f'(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt.

Es handelt sich um ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$.	Es handelt sich um ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$.

Im Falle $f''(x_0) = 0$ kann vielfach durch weitere Ableitungen festgestellt werden, ob ein lokales Extremum oder ein Terrassenpunkt (ein Horizontalwendepunkt) vorliegt. Das Ergebnis $f'''(x_0) \neq 0$ weist auf einen Terrassenpunkt hin. Mitunter muß das Monotonieverhalten der Funktion zur Entscheidungsfindung hinzugezogen werden.

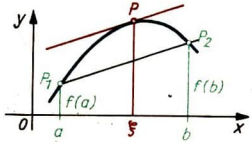
Konvexität – Konkavität

Konvexität	Konkavität
Die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ heißt in x_0 lokal konvex $\overset{\equiv}{\text{Df}}$ $f'(x)$ ist in x_0 lokal monoton wachsend. $f(x)$ ist an der Stelle x_0 lokal konvex, wenn $f''(x_0) > 0$.	Die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion $f(x)$ heißt in x_0 lokal konkav $\overset{\equiv}{\text{Df}}$ $f'(x)$ ist in x_0 lokal monoton fallend. $f(x)$ ist an der Stelle x_0 lokal konkav, wenn $f''(x_0) < 0$.

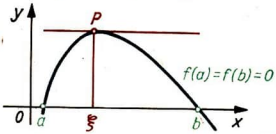
Mittelwertsatz; Satz von Rolle

Wenn eine Funktion $f(x)$ in $\langle a; b\rangle$ stetig und in $(a; b)$ differenzierbar ist, so gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Wenn eine Funktion $f(x)$ in $\langle a; b\rangle$ stetig und in $(a; b)$ differenzierbar ist, und wenn außerdem $f(a) = f(b) = 0$ gilt, so gibt es wenigstens eine Stelle ξ in $(a; b)$, an der $f'(\xi) = 0$ gilt.



Wendepunkt – Wendetangente

Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn sie in einer Umgebung von x_0 dreimal differenzierbar ist, wenn $f''(x_0) = 0$ gilt und wenn außerdem $f'''(x_0) \neq 0$ ist. Für die Wendetangente in x_0 an den Graph gilt: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Schrittfolge für eine Kurvendiskussion

(1) Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen)

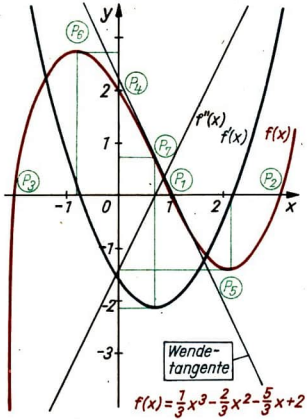
- **Im Falle ganzer rationaler Funktionen $f(x)$ wird $f(x) = 0$ gesetzt und die Gleichung gelöst.**
- **Handelt es sich um Gleichungen dritten und höheren Grades, eine Nullstelle (x_1) durch Probieren, eventuell auch mit Hilfe der Näherungsverfahren (↗ Seite 87), ermitteln und Gleichung mittels $f(x) : (x - x_1) = f_1(x)$ schrittweise reduzieren.**
- **Im Falle gebrochener rationaler Funktionen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ wird $u(x) = 0$ gesetzt und festgestellt, ob dann für alle Lösungen $x_{01} \ldots$ der Gleichung $v(x_0) \neq 0$ ist.**

(2) Schnittpunkt mit der y-Achse
$x = 0$ setzen und $f(0)$ berechnen.

(3) Pole
Gebrochene rationale Funktionen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ daraufhin untersuchen, ob es x_i gibt, für die $v(x_i) = 0$ und $u(x_i) \neq 0$.

(4) Lokale Extrema
Voraussetzung: $f(x)$ ist differenzierbar.

- **1. Ableitung, also $f'(x)$, bilden.**
- **$f'(x) = 0$ setzen und Gleichung lösen. Man erhält mit den Lösungen $x_{E_1}, x_{E_2}, \ldots$ die Abszissen der eventuellen Extremstellen.**
- **Ordinaten $f(x_{E_1}), f(x_{E_2}), \ldots$ der eventuellen Extremstellen berechnen.**
- **2. Ableitung, also $f''(x)$, bilden. Feststellen, ob $f''(x_{E_1}), f''(x_{E_2})$,**



■ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2$

$\underline{\underline{x_1 = 1;}}$

$y_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} + 2 = \underline{\underline{0}}$

$\boxed{f(x) : (x - x_1) = f_1(x)}$

$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2\right) : (x - 1)$

$= \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$

$\underline{\underline{x_2 = 3;\ x_3 = -2}}$

(2) $x_4 = 0;\ y_4 = 0 - 0 - 0 + 2 = \underline{\underline{2}}$

(4) $f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

... größer, kleiner oder gleich Null sind.
Auf diese Weise Maxima und Minima aussondern. Gegebenenfalls auch die 3. Ableitung $f'''(x)$ bilden.

(5) Wendepunkte, Wendetangenten
Voraussetzung: $f(x)$ ist dreimal differenzierbar.
- $f''(x) = 0$ setzen und Gleichung lösen. Man erhält mit $x_{W_1}, x_{W_2}, \ldots$ die Abszissen der eventuellen Wendepunkte.
- Ordinaten $f(x_{W_1}), f(x_{W_2}), \ldots$ der eventuellen Wendepunkte berechnen.
- 3. Ableitung, also $f'''(x)$, bilden. Feststellen, ob $f'''(x_W) \neq 0$.
- Gleichung der Wendetangenten ermitteln
  $y - y_{W_1} = f'(x_{W_1}) \cdot (x - x_{W_1})$.

(6) Verhalten im Unendlichen
Berechnen von
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$\underline{\underline{x_5 \approx 2{,}12}}$ $\quad$ $\underline{\underline{x_6 \approx -0{,}79}}$

$\underline{\underline{y_5 \approx -1{,}35}}$ $\quad$ $\underline{\underline{y_6 \approx 2{,}74}}$

$$f''(x) = 2x - \frac{4}{3}$$

$$f''(x_5) = 2 \cdot 2{,}12 - \frac{4}{3} > 0$$

$\cap$ Lok. Min. a. d. Stelle $x_5 \approx 2{,}12$

$$f''(x_6) = 2 \cdot (-0{,}79) - \frac{4}{3} < 0$$

$\cap$ Lok. Max. a. d. Stelle $x_6 \approx -0{,}79$

(5) $2x - \frac{4}{3} = 0$ $\quad$ $\underline{\underline{x_7 \approx 0{,}67}}$ $\quad$ $\underline{\underline{y_7 \approx 0{,}69}}$

$f'''(x) = 2 \neq 0$

Tangente an die Kurve im Wendepunkt:
$y = -2{,}11\,x + 2{,}10$

(6) $f(x) = x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3x} - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

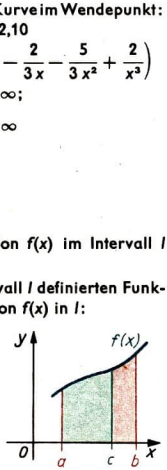
1.7. Integralrechnung

Stammfunktion – Unbestimmtes Integral

Die Funktion $F(x)$ heißt eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ im Intervall I $\overline{\text{DI}}$ Für jedes x aus I gilt $F'(x) = f(x)$.

Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ einer im Intervall I definierten Funktion $f(x)$ versteht man die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ in I:
$\int f(x)\,dx = F(x) + c$; $[\int f(x)\,dx]' = f(x)$.

Bestimmtes Integral



(1) $\int_a^a f(x)\,dx \overset{\text{DI}}{=} 0$ (falls f in a definiert ist)

(2) $\int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{DI}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (falls f in $\langle a, b\rangle$ stetig und c eine beliebige Zahl aus $\langle a, b\rangle$ ist) (↗ Bild)

Mittelwertsatz: Ist $f(x)$ im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetig, so gibt es wenigstens eine Zahl ξ mit $a \leqq \xi \leqq b$, für die gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b - a)$ (↗ Bild).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $f(x)$ eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion und $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Integrationsregeln

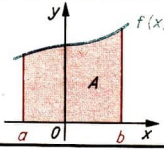
Konstanter Faktor	$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ ■ $\int 5 \sin x\,dx = 5 \int \sin x\,dx = \underline{\underline{-5 \cos x + c}}$
Summe, Differenz	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ ■ $\int [3x + 5x^2]\,dx = \int 3x\,dx + \int 5x^2\,dx$ $= \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + c}}$
Substitutionsregel	$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$ mit $x = \varphi(t)$ bzw. $t = \varphi(x)$ ■ $\int \sqrt[3]{(2x+5)^2}\,dx$ $2x + 5 = t$ $x = \varphi(t) = \frac{t}{2} - \frac{5}{2}$; $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$; $dx = \frac{1}{2}\,dt$ $\int \sqrt[3]{t^2} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{2}{3}}\,dt = \frac{1}{2} t^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{3}{5} + c$ $\int \sqrt[3]{(2x+5)^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+5)^5} + c}}$

Grundintegrale

$\int dx = x + c$	$(-\infty < x < +\infty)$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ mit $n \neq -1$ und	$\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \text{ falls } n \geqq 0 \\ -\infty < x < 0 \text{ und} \\ 0 < x < +\infty, \text{ falls } n < 0. \end{cases}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$(-\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty)$
$\int \frac{dx}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x + c$	$(x > 0)$
$= \log_a x + c$	$(a > 0;\ a \neq 1)$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$(-\infty < x < +\infty)$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$(-\infty < x < +\infty)$

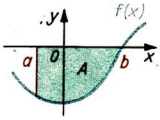
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	$(k\pi < x < (k+1)\pi$, k ganze Zahl)
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\left(k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}\right.$, k ganze Zahl$\left.\right)$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$	$(-\infty < x < +\infty;\ a > 0;\ a \neq 1)$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$(-\infty < x < +\infty)$

Flächeninhaltsberechnung



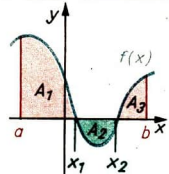
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

■ $$A = \int_{-2}^{3} (x^2 + 5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 5x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \frac{3^3}{3} + 5\cdot 3 - \left[\frac{(-2)^3}{3} + 5(-2)\right]$$
$$= \underline{\underline{36\frac{2}{3}}}$$



$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

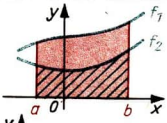
■ $$A = \left|\int_{-2}^{1} (x^2 - 5)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 5x\right]_{-2}^{1}\right|$$
$$= \left|\frac{1^3}{3} - 5\cdot 1 - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 5(-2)\right]\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3} - 5 + \frac{8}{3} - 10\right| = \underline{\underline{12}}$$



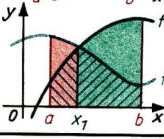
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$
$$= \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

■ Gegeben: $y = \sin x$ von 0 bis 3π

$$A = \int_0^{3\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} + \left|[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}\right| + [-\cos x]_{2\pi}^{3\pi}$$
$$= [-\cos\pi - (-\cos 0)] + \left|[-\cos 2\pi - (-\cos\pi)]\right| + [-\cos 3\pi - (-\cos 2\pi)] = 6$$



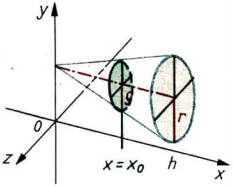
$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$



$$A = \int_a^{x_1} [f_2(x) - f_1(x)]\,dx + \int_{x_1}^{b} [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Volumenberechnung durch Integration

Berechnung aus der Querschnittsfläche



Ein Körper, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt und dessen Querschnittsfläche an der Stelle x ($a \leqq x \leqq b$) den Inhalt $A(x)$ hat, hat das Volumen

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

■ Ein Kreiskegel habe an der Stelle $x = x_0$ die Querschnittsfläche $A(x) = \pi\varrho^2$ (↗ Bild).
Wegen $h : r = x : \varrho$, also

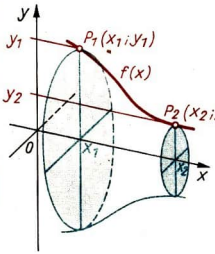
$$\varrho = \frac{r \cdot x}{h}$$

gilt:

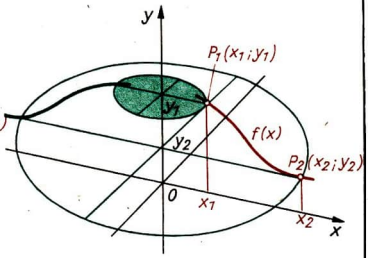
$$A(x) = \pi \frac{r^2 \cdot x^2}{h^2}.$$

$$V = \int_0^h \frac{\pi\, r^2\, x^2}{h^2}\,dx = \left[\frac{\pi\, r^2\, x^3}{h^2 \cdot 3}\right]_0^h = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 h}}$$

Rotation um die x-Achse



Rotation um die y-Achse



$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,dx \text{ (falls } x_1 < x_2) \qquad V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2\,dy \text{ (falls } y_1 < y_2)$$

1.8. Kombinatorik; Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fakultät

$n! \underset{\text{Df}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ ($n \in N$; $n \geqq 2$) (Lies: „n-Fakultät")

$0! \underset{\text{Df}}{=} 1$; $\quad 1! \underset{\text{Df}}{=} 1$

■ $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{\underline{120}}$

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!
1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Permutationen

Erklärung: Ist eine endliche Anzahl von Elementen gegeben, so bezeichnet man die Zusammenstellungen dieser Elemente in jeder möglichen Reihenfolge als **Permutationen** der gegebenen Elemente.

Anzahl der Permutationen einer Menge von n verschiedenen Elementen

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

■ Gegeben sei ●●●; gesucht ist P_n

Anzahl der Permutationen einer Menge von n Elementen, unter denen sich r, s, t gleiche Elemente befinden

$$P_n = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t!}.$$

■ Gegeben ●●●; gesucht ist P_n

Variationen

Erklärung: Ist eine endliche Anzahl von n Elementen gegeben, so bezeichnet man die Zusammenstellungen aus je k Elementen in jeder möglichen Reihenfolge als **Variationen**.

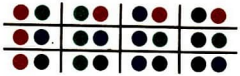
V_n^k (lies: „Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse")

Anzahl der Variationen ohne Wiederholung: Jedes Element kommt in einer Variation nur einmal vor:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

■ Gegeben sei ●●●
Zu bilden sind Variationen zur 2-ten Klasse ohne Wiederholung

$$V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}}$$

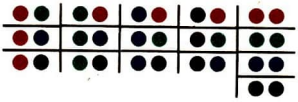


Anzahl der Variationen mit Wiederholung: Jedes Element kann in einer Variation mehrfach vorkommen:

$${}^{w}V_n^k = n^k.$$

■ Gegeben sei ●●●
Zu bilden sind Variationen zur 2-ten Klasse mit Wiederholung

$${}^{w}V_4^2 = 4^2 = \underline{\underline{16}}$$



Kombinationen

Erklärung: Ist eine endliche Anzahl von n Elementen gegeben, so bezeichnet man die Zusammenstellung von je k Elementen ohne Berücksichtigung ihrer Reihenfolge als **Kombinationen**. (Variationen sind Kombinationen mit Berücksichtigung der Reihenfolge.)

Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung:

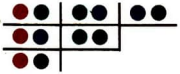
$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

(↗ Binomialkoeffizienten, Seite 68)

■ Gegeben sei ●●●●

Zu bilden sind Kombinationen zur 2-ten Klasse ohne Wiederholung

$$C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \underline{\underline{6}}$$



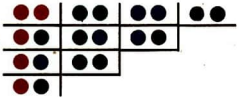
Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung:

$$^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

■ Gegeben sei ●●●●

Zu bilden sind Kombinationen zur 2-ten Klasse mit Wiederholung

$$^{w}C_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \underline{\underline{10}}$$



Wahrscheinlichkeitsrechnung

▶ *Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit:*

$P(A) = \frac{g(A)}{k}$, wobei

$g(A)$ die Anzahl der für A günstigen Ereignisse und k die Anzahl der möglichen Ereignisse ist.

Eigenschaften:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Zahl zwischen 0 und 1:

$0 \leqq P(A) \leqq 1$.

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses Ω ist $P(\Omega) = 1$. Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses $\emptyset$ ist $P(\emptyset) = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit des zu einem Ereignis A entgegengesetzten Ereignisses $\bar{A}$ ist $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

■ Zu ermitteln sei die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 4 oder eine 5 zu würfeln:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

■ Zu ermitteln sei die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel *keine* 4 oder 5 zu würfeln:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Summe von zwei Ereignissen A und B

(1) Die Ereignisse A und B sind unvereinbar, also $A \cap B = \emptyset$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(↗ Beispiel S. 86)

(2) Die Unvereinbarkeit von A und B wird nicht vorausgesetzt:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1/8

■ Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel eine Herzkarte –$P(A)$– oder ein Kreuz As –$P(B)$– zu ziehen, beträgt wegen

$$P(A) = \frac{8}{32} \text{ und } P(B) = \frac{1}{32}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}281}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel eine Herzkarte –$P(A)$– oder ein As –$P(B)$– zu ziehen, beträgt wegen

$$P(A) = \frac{8}{32},\ P(B) = \frac{4}{32} \text{ und } P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}344}}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A bezüglich B

Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A wird unter der Bedingung des eingetretenen Ereignisses B betrachtet.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

■ Beim Wurf mit einem Spielwürfel sei

– *das Ereignis* A ein Wurf mit einer Augenzahl, die nicht größer als 3 ist, also 1, 2 oder 3: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und

– *das Ereignis* B ein Wurf mit einer Augenzahl, die gerade ist, also 2, 4 oder 6: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ wegen $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, was dem Wurf 2 entspricht,

$$P(A/B) = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

Multiplikationsregel

Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens zweier Ereignisse A und B ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses und der bedingten Wahrscheinlichkeit des Eintretens des anderen Ereignisses unter der Bedingung des Eintretens des ersten.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

■ Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel zwei Asse zu ziehen, beträgt wegen

$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (4 Asse sind enthalten) und

$P(B/A) = \frac{3}{31}$ (in den nur noch 31 Spielkarten sind noch 3 Asse enthalten)

$$P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = \underline{\underline{\frac{3}{248}}} \approx 0{,}012$$

1.9. Näherungsrechnen

Fehler und Fehlerschranken

Es sei x der wahre (bzw. geforderte) Wert und x_0 der Meßwert oder Näherungswert.

Absoluter Fehler:

$\varepsilon = x_0 - x$

Relativer Fehler:

$\delta = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right|$

Schranken für den absoluten Fehler:

$-\Delta x \leqq \varepsilon \leqq \Delta x$ und weiter

$x_0 - \Delta x \leqq x \leqq x_0 + \Delta x$

Prozentualer Fehler: $\delta_{\%} = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| \cdot 100\%$

Es seien x, y wahre Werte, x_0 und y_0 ihre Näherungswerte und Δx, Δy ihre Fehlerschranken:

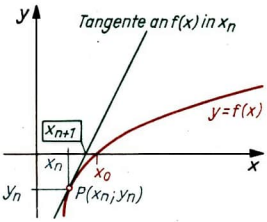
	Absolute Fehlerschranke	Relative Fehlerschranke
Summe $x + y$; Differenz $x - y$	$\Delta(x \pm y) \leqq \Delta x + \Delta y$	$\delta = \frac{\Delta x + \Delta y}{\lvert x_0 \pm y_0 \rvert}$
Produkt $x \cdot y$	$\Delta(x \cdot y) \leqq \lvert x_0 \rvert \cdot \Delta y + \lvert y_0 \rvert \cdot \Delta x$	$\delta_{x \cdot y} = \frac{\Delta x}{\lvert x_0 \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y_0 \rvert}$
Quotient $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$	$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) \leqq \frac{\lvert x_0 \rvert \cdot \Delta y + \lvert y_0 \rvert \cdot \Delta x}{y_0^2}$	$\delta_{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{\lvert x_0 \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y_0 \rvert}$

Näherungsverfahren zur Berechnung von Nullstellen (↗ Seite 75, 76)

NEWTONsches Näherungsverfahren

Falls x_n eine erste Näherung für x_0 ist, so gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; f'(x_n) \neq 0.$$

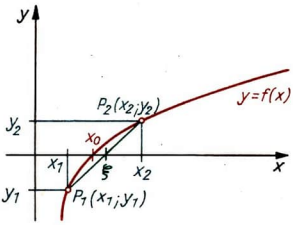


Regula falsi

Falls x_1 und x_2 Näherungswerte für x_0, wobei $y_1 = f(x_1) < 0$ und $y_2 = f(x_2) > 0$, so erhält man mit

$$\xi = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

eine bessere Näherung.



1.10. Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vektorräume

V sei eine Menge, für deren Elemente eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert ist. V heißt zusammen mit diesen Rechenoperationen Vektorraum genau dann, wenn für beliebige Elemente $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus V sowie für beliebige reelle Zahlen r und s gilt:

(1°) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz),

(2°) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativgesetz),

(3°) In V gibt es ein Element $\vec{o}$, so daß für jedes $\vec{a}$ aus V gilt: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$,

(4°) In V gibt es zu jedem Element $\vec{a}$ ein Element $-\vec{a}$, so daß gilt: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$,

(5°) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

(6°) $r(s\vec{a}) = (rs)\,\vec{a}$ (Assoziativgesetz),

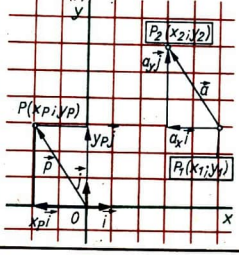
(7°) $(r + s)\,\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$ (1. Distributivgesetz),

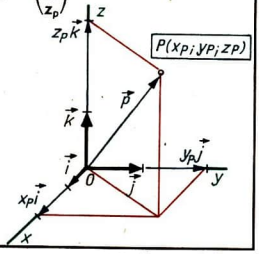
(8°) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ (2. Distributivgesetz).

Koordinatensystem

Kartesisches Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ mit O als Ursprung und den Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

in einer Ebene	im Raum
$\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$; $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = 1$.	$\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = \lvert\vec{k}\rvert = 1$.
Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes $P\,(x_p; y_p)$:	Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes $P\,(x_p; y_p; z_p)$:
– in Komponentendarstellung: $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_p\,\vec{i} + y_p\,\vec{j}$,	– in Komponentendarstellung: $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_p\,\vec{i} + y_p\,\vec{j} + z_p\,\vec{k}$,
– in Koordinatendarstellung: $\vec{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$.	– in Koordinatendarstellung: $\vec{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$.





Angabe eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$

– in Komponentendarstellung:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$

oder auch

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j},$

– in Koordinatendarstellung

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ oder auch

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$

■ Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ (↗ Bild):

$\vec{v} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Angabe eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$

– in Komponentendarstellung:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}$

oder auch

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k},$

– in Koordinatendarstellung

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$ oder auch

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$

Transformation eines Koordinatensystems in einer Ebene:

Wenn $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ und $\{O'; \vec{i}', \vec{j}'\}$ zwei Koordinatensysteme ein und derselben Ebene sind mit $|\vec{i}| = |\vec{i}'|$ und $|\vec{j}| = |\vec{j}'|$, so gelten für die Koordinaten eines Punktes P dieser Ebene die folgenden Beziehungen:

Translation

$\overrightarrow{OO'} = a_0\,\vec{i} + b_0\,\vec{j}\ (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$

$\sphericalangle(\vec{i}, \vec{i}') = \alpha = 0°$

$x = x' + a_0 \quad | \quad x' = x - a_0$

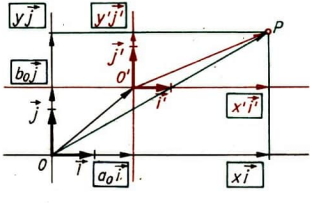
$y = y' + b_0 \quad | \quad y' = y - b_0$

■ $\overrightarrow{OO'} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

bezüglich $\{O'; \vec{i}', \vec{j}'\}$



Rotation

$\overrightarrow{OO'} = \vec{o};\ \sphericalangle(\vec{i}, \vec{i}') = \alpha \neq 0°$

$x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha$

$y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha$

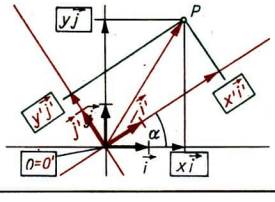
$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$

$y' = (-x) \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

■ $\alpha = 30°;\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos 30° + 3 \cdot \sin 30° \\ (-4) \cdot \sin 30° + 3 \cdot \cos 30° \end{pmatrix}$

$\approx \begin{pmatrix} 4{,}96 \\ 0{,}60 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{O'; \vec{i}', \vec{j}'\}$



Translation und zugleich Rotation

$\overrightarrow{OO'} = a_0 \vec{i} + b_0 \vec{j}$ $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$

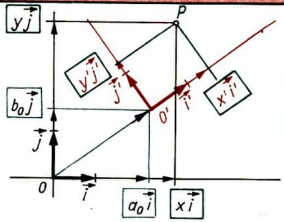
$\sphericalangle(\vec{i}, \vec{i'}) = \alpha \neq 0°$

$x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + a_0$

$y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + b_0$

$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$
$\quad - (a_0 \cdot \cos\alpha + b_0 \cdot \sin\alpha)$

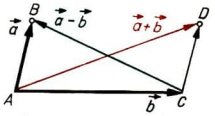
$y' = (-x) \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$
$\quad - [(-a_0) \sin\alpha + b_0 \cos\alpha]$



■ $\overrightarrow{OO'} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\alpha = 30°$. Für $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ folgt $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1{,}73 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich $\{O'; \vec{i'}, \vec{j'}\}$.

Addition und Subtraktion von Vektoren

Ist $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, so ist $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Für den Nullvektor $\vec{o}$ gilt: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$.



$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a} \quad \vec{a} - \vec{o} = \vec{a} \quad \vec{o} - \vec{a} = -\vec{a} \quad -(-\vec{a}) = \vec{a} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativität) $\quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativität)

$-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} \quad -(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$

Unter Anwendung der Koordinatenmethode gilt:

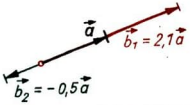
In einer Ebene mit $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$	Im Raum mit $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
Komponentendarstellung: $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$; $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j}$ Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{pmatrix}$	Komponentendarstellung: $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$; $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}$ Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Ist $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und r eine reelle Zahl, so ist $\vec{b} = r\vec{a}$

– im Falle $r > 0$ ein Vektor, gleich gerichtet zu $\vec{a}$ und mit dem r-fachen Betrag,

- im Fall $r < 0$ ein Vektor, entgegengesetzt gerichtet zu $\vec{a}$ und mit dem r-fachen Betrag;
- im Falle $r = 0$ der Nullvektor $\vec{o}$.



$1\vec{a} = \vec{a} \qquad 0\vec{a} = \vec{o} \qquad r\vec{o} = \vec{o} \qquad |r\vec{a}| = |r|\,|\vec{a}|$

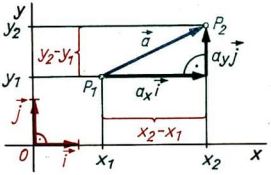
$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ (Assoziativgesetz); $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$; $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$

Unter Anwendung der Koordinatenmethode gilt:

in einer Ebene	im Raum
Komponentendarstellung: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $r\vec{a} = (rx)\vec{i} + (ry)\vec{j}$. Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $r\vec{a} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}$	Komponentendarstellung: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $r\vec{a} = (rx)\vec{i} + (ry)\vec{j} + (rz)\vec{k}$. Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $r\vec{a} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$

Betrag (Länge) eines Vektors $\vec{a}$; Abstand zweier Punkte P_1 und P_2

in einer Ebene	im Raum
Als Betrag eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ erhält man – für $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ $\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$ – für $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ bzw. $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$	Als Betrag des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ erhält man – für $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\boxed{\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ – Für $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ bzw. $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$



■ $P_1(2; -5; 2{,}8)$; $P_2(3; -2; -2{,}2)$

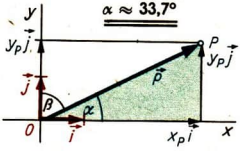
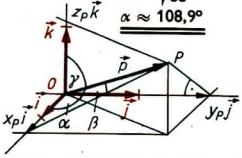
$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - 2)\vec{i} + (-2 + 5)\vec{j} + (-2{,}2 - 2{,}8)\vec{k}$

$\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

$\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert$ ist der Abstand der Punkte P_1 und P_2.

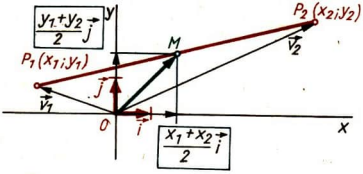
Richtungskosinus

Winkel des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ mit den Koordinatenachsen

in einer Ebene	im Raum
$\vec{p} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j}$	$\vec{p} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k}$
$\cos\alpha = \frac{x_p}{\lvert\vec{p}\rvert}$; $\cos\beta = \frac{y_p}{\lvert\vec{p}\rvert}$	$\cos\alpha = \frac{x_p}{\lvert\vec{p}\rvert}$; $\cos\beta = \frac{y_p}{\lvert\vec{p}\rvert}$; $\cos\gamma = \frac{z_p}{\lvert\vec{p}\rvert}$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
■ $\vec{p} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$	■ $\vec{p} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$
$\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$	$\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0{,}8320$	$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{38}} \approx -0{,}3244$
$\underline{\underline{\alpha \approx 33{,}7°}}$	$\underline{\underline{\alpha \approx 108{,}9°}}$
	

Mittelpunkt M einer Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}}{2}$$



Komponentendarstellung:	**Komponentendarstellung:**
$\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$; $\overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$	$\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$; $\overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$
$\overrightarrow{OM} = \frac{x_1 + x_2}{2}\vec{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\vec{j}$	$\overrightarrow{OM} = \frac{x_1 + x_2}{2}\vec{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\vec{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\vec{k}$
Koordinatendarstellung:	**Koordinatendarstellung:**
$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$;	$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$

Skalarprodukt von Vektoren

$\vec{a} \cdot \vec{b} \underset{\mathrm{Df}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ ($\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine reelle Zahl)

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$	$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ gdw. $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ und $0 \leqq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ gdw. $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ und $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leqq \pi$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gdw. $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ oder $\vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$.	

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$; $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (Distributivität)

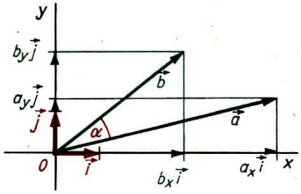
$r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$

Unter Anwendung der Koordinatenmethode gilt:

in einer Ebene	im Raum
Komponentendarstellung $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ Koordinatendarstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$	Komponentendarstellung $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ Koordinatendarstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Es sei $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$
bzw. im Raum
$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$
$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$
(Berechnung ↗ folgende Seite)

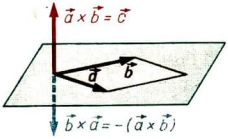


in einer Ebene	im Raum
$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}$ (falls $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$).	$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ (falls $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$).
■ $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$	■ $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\-5\\-1\end{pmatrix}$
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$
$\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$	$\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{0+25+1} = \sqrt{26}$
$\cos\alpha = \dfrac{3(-1)+2\cdot 5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}3807$	$\cos\alpha = \dfrac{(-3)\cdot(-5)+1\cdot(-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}7338$
$\underline{\underline{\alpha = 67{,}62^\circ}}$	$\underline{\underline{\alpha = 42{,}79^\circ}}$

Vektorprodukt zweier Vektoren

$\vec{a}\times\vec{b} = 0$, falls $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ oder $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$, falls $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, wobei



1. $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{b}$,
2. $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$,
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem.

Geometrische Deutung:

Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht, und sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$	$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$; $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$; $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (anstelle eines Kommutativgesetzes)

$(r\vec{a})\times\vec{b} = r(\vec{a}\times\vec{b})$; $\vec{a}\times(r\vec{b}) = r(\vec{a}\times\vec{b})$

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}\\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}\end{array}\right\}$ (Distributivgesetz)

Da $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ nicht stets gleich $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ist, gilt das Assoziativgesetz nicht.

Unter Anwendung der Koordinatenmethode gilt:

Komponentendarstellung

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$

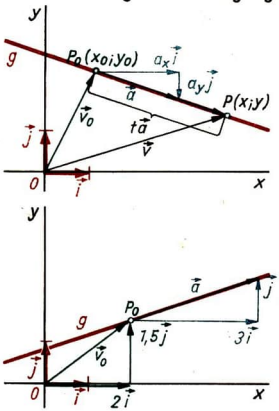
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$

Koordinatendarstellung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix},\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Gleichungen einer Geraden

Punktrichtungsgleichung: Die Gerade g einer Ebene ist durch einen Punkt und den Richtungsvektor $\vec{a}$ festgelegt (↗ Bild).



$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v} = \vec{v}_0 + t\,\vec{a} \\ \left(\vec{a} \neq \vec{o};\ -\infty < t < +\infty\right)\end{gathered}}$$

Für $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ und $\vec{v}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ sowie $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ gilt

- in Komponentendarstellung
  $\vec{v} = (x_0 + t\,a_x)\,\vec{i} + (y_0 + t\,a_y)\,\vec{j}$,
- in Koordinatendarstellung
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\,a_x \\ y_0 + t\,a_y \end{pmatrix}$
- als Gleichungssystem
  $x = x_0 + t\,a_x$
  $\underline{y = y_0 + t\,a_y}$.

Eine parameterfreie Darstellung ist

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$ mit $m = \tan\alpha = \dfrac{a_y}{a_x}$,

falls $a_x \neq 0$, wobei $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{i}, \vec{a}\right) \neq \pm\,90°$.

■ Gegeben: $P_0\,(2; 1{,}5)$ und $\vec{a} = 3\,\vec{i} + \vec{j}$ (↗ Bild). Als Punktrichtungsgleichung erhält man $\vec{v} = (2 + 3\,t)\,\vec{i} + (1{,}5 + t)\,\vec{j}$

oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3\,t \\ 1{,}5 + t \end{pmatrix}$ oder $\begin{aligned} x &= 2 + 3\,t \\ \underline{y} &\underline{= 1{,}5 + t} \end{aligned}$ oder $y = \dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{5}{6}$.

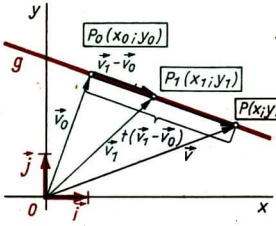
Im Raum gilt für $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ und $\vec{v}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ sowie $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$:

$\vec{v} = (x_0 + t\,a_x)\,\vec{i} + (y_0 + t\,a_y)\,\vec{j} + (z_0 + t\,a_z)\,\vec{k}$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\,a_x \\ y_0 + t\,a_y \\ z_0 + t\,a_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t\,a_x \\ y &= y_0 + t\,a_y\,. \\ \underline{z} &\underline{= z_0 + t\,a_z} \end{aligned}$$

1/10

Zweipunktegleichung: Die Gerade g einer Ebene ist durch zwei Punkte, P_0 und P_1 ($P_1 \neq P_0$), festgelegt (↗ Bild).



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + t\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_0\right) \quad (-\infty < t < +\infty)}$$

Für $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ und $\vec{v}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ sowie $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ gilt

– in Komponentendarstellung

$$\vec{v} = [x_0 + t(x_1 - x_0)]\,\vec{i} + [y_0 + t(y_1 - y_0)]\,\vec{j},$$

– in Koordinatendarstellung

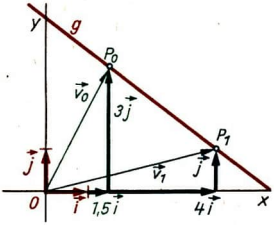
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{pmatrix},$$

– als Gleichungssystem

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$$
$$\underline{y = y_0 + t(y_1 - y_0)}.$$

Eine parameterfreie Darstellung ist

$$(y - y_0)(x_1 - x_0) = (x - x_0)(y_1 - y_0).$$



■ Gegeben: $P_0(1{,}5;\,3)$ und $P_1(4;\,1)$ (↗ Bild). Als Zweipunktegleichung erhält man

$$\vec{v} = (1{,}5 + 2{,}5\,t)\,\vec{i} + (3 - 2\,t)\,\vec{j}$$

oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 + 2{,}5\,t \\ 3 - 2\,t \end{pmatrix}$ oder $\begin{array}{l} x = 1{,}5 + 2{,}5\,t \\ \underline{y = 3 - 2\,t} \end{array}$ oder $y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{21}{5}$.

Im Raum gilt für $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ und $\vec{v}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ sowie $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$:

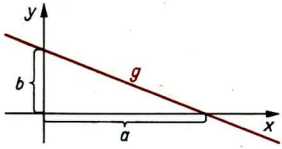
$$\vec{v} = [x_0 + t(x_1 - x_0)]\,\vec{i} + [y_0 + t(y_1 - y_0)]\,\vec{j} + [z_0 + t(z_1 - z_0)]\,\vec{k}$$

bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z_0 + t(z_1 - z_0) \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{array}{l} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ \underline{z = z_0 + t(z_1 - z_0)} \end{array}$.

Achsenabschnittsgleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a, b \neq 0)$$

Dabei sind a und b Abschnitte auf der x- bzw. y-Achse (↗ Bild).



Allgemeine Form der Geradengleichung:

$A\,x + B\,y + C = 0 \; (A^2 + B^2 \neq 0)$

Hier ist $m = -\dfrac{A}{B}$ der Anstieg und $-\dfrac{C}{B}$ der Abschnitt auf der y-Achse, falls $B \neq 0$.

Normalform:

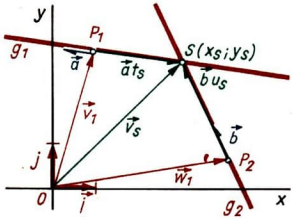
$y = m\,x + n$; m ist der Anstieg, n ist der Abschnitt auf der y-Achse.

Gegenseitige Lage zweier Geraden in einer Ebene

Es sei g_1: $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{a}\,t$ g_2: $\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{b}\,u$ mit $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{w_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$.	$g_1 \parallel g_2$ genau dann, wenn $\vec{b} = r\,\vec{a}\;(r \neq 0)$, d. h., wenn $\dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{b_y}{b_x}$. $g_1 = g_2$ genau dann, wenn $\dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{b_y}{b_x}$ und wenn darüber hinaus $\vec{v_1} - \vec{w_1} = s\,\vec{a}$. $g_1 \perp g_2$ genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, d. h. $a_x b_x + a_y b_y = 0$.

Falls die Geraden einander schneiden, gilt für den Schnittpunkt (↗ Bild) das Gleichungssystem:

$$x_1 + a_x t_S = x_2 + b_x u_S$$
$$y_1 + a_y t_S = y_2 + b_y u_S$$



■ Gegeben:

(1) $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + (\vec{i} - 7\,\vec{j})\,t$

(2) $\vec{w} = 4\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + (\vec{i} + 7\,\vec{j})\,u$

Daraus folgt

(1 a) $\vec{v} = (2 + t)\,\vec{i} + (-14 - 7\,t)\,\vec{j}$ und (2 a) $\vec{w} = (4 + u)\,\vec{i} + (5 + 7\,u)\,\vec{j}$.

Zur Ermittlung des Schnittpunktes geht man über zu

$$\begin{pmatrix} 2 + t \\ -14 - 7\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + u \\ 5 + 7\,u \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{array}{l} 2 + t = 4 + u \\ \underline{-14 - 7\,t = 5 + 7\,u} \end{array} \text{ und erhält } t = -\frac{5}{14}.$$

Setzt man für t in (1 a) ein, so erhält man $\vec{v_S} = \dfrac{23}{14}\vec{i} - \dfrac{23}{2}\vec{j}$ sowie $S\left(\dfrac{23}{14}; \dfrac{-23}{2}\right)$.

Es sei g_1: $y = m_1\,x + n_1$ g_2: $y = m_2\,x + n_2$	$g_1 \parallel g_2$ genau dann, wenn $m_1 = m_2$. $g_1 = g_2$ genau dann, wenn $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$. $g_1 \perp g_2$ genau dann, wenn $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

1/10

Falls die Geraden einander schneiden, gilt für den Schnittpunkt $S\,(x_S;\,y_S)$:

$$\boxed{x_S = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1}\,;\quad y_S = \frac{m_2\,n_1 - m_1\,n_2}{m_2 - m_1}}$$

■ Gegeben: (1) $y = \frac{2}{3}x + 1$ und (2) $y = -\frac{5}{6}x + 2$

Lösung:

$$\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{5}{6}x + 2$$

$$\frac{9}{6}x = 1$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + 1 = \frac{13}{9}$$

oder mit Hilfe der Formel:

$$x_S = \frac{1-2}{-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}} = \frac{-1}{-\frac{9}{6}} = \frac{2}{3}$$

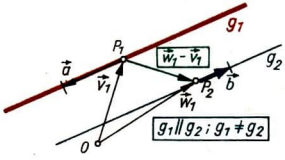
$$y_S = \frac{1\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) - 2\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{13}{6}}{-\frac{9}{6}} = \frac{13}{9}$$

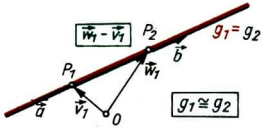
Gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum

Es sei
g_1: $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{a}\,t$
g_2: $\vec{w} = w_1 + \vec{b}\,u$
mit
$\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$,
$w_1 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$,
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,
$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

$g_1 \parallel g_2$, wobei $g_1 \neq g_2$, genau dann, wenn $\vec{b} = r\,\vec{a}\ (r \neq 0)$ und $w_1 - \vec{v_1} \nparallel \vec{a}$ (↗ Bild links)

$g_1 = g_2$ genau dann, wenn $\vec{b} = r\,\vec{a}\ (r \neq 0)$ und wenn darüber hinaus $w_1 - \vec{v_1} \parallel \vec{a}$ (↗ Bild rechts)





Falls die Geraden einander schneiden gilt
$\vec{x_S} = \vec{v_1} + t_S\,\vec{a} = w_1 + u_S\,\vec{b}$
und weiter

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t_S \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + u_S \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{aligned} x_1 + a_x t_S &= x_2 + b_x u_S \\ y_1 + a_y t_S &= y_2 + b_y u_S \\ z_1 + a_z t_S &= z_2 + b_z u_S \end{aligned}$$

Parametergleichung einer Ebene

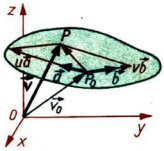
Es seien P_0 ein Punkt sowie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Richtungsvektoren dieser Ebene $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$. Dann gilt für einen Punkt P dieser Ebene mit dem Ortsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$
$\vec{v} = \vec{v_0} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$ (u, v reelle Zahlen) (↗ Bild)

Gleichungen der Koordinatenebenen

xy-Ebene: $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \\ z = 0 \end{cases}$

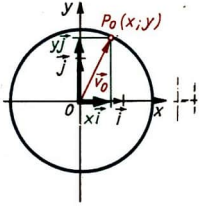
xz-Ebene: $\vec{v} = x\,\vec{i} + z\,\vec{k} \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ y = 0 \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$

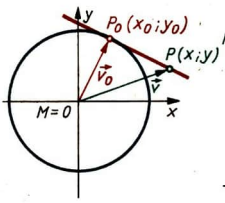
yz-Ebene: $\vec{v} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad \begin{cases} x = 0 \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$

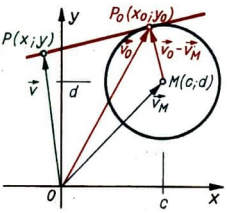


Kreisgleichung (vektorielle Darstellung)

	Mittelpunktslage (Mittelpunkt: O)	Allgemeine Lage (Mittelpunkt M: $\overrightarrow{OM} = \vec{v_M}$)
Kreis mit dem Radius r	$\vec{v} \cdot \vec{v} = r^2$ $\lvert\vec{v}\rvert = r$	$(\vec{v} - \vec{v_M}) \cdot (\vec{v} - \vec{v_M}) = r^2$ $\lvert\vec{v} - \vec{v_M}\rvert = r$
Tangente im Punkt P_0 $(x_0; y_0)$	$\vec{v} \cdot \vec{v_0} = r^2$ (↗ Bild in der Mitte)	$(\vec{v} - \vec{v_M}) \cdot (\vec{v_0} - \vec{v_M}) = r^2$ (↗ Bild rechts)







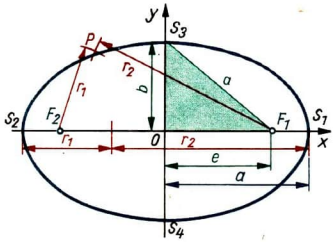
Kreisgleichung in Koordinatendarstellung

	in Mittelpunktslage, $M\,(0;\,0)$	in allgemeiner Lage, $M\,(c;\,d)$
Kreis mit dem Radius r	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$
Tangente im Punkt $P_0(x_0;\,y_0)$	$xx_0 + yy_0 = r^2$	$(x - c)\,(x_0 - c) + (y - d)\,(y_0 - d) = r^2$
Tangentengleichung (explizit)	$y = -\dfrac{x_0}{y_0}\,x + \dfrac{r^2}{y_0}$	$y = -\dfrac{x_0 - c}{y_0 - d}\,(x - c) + \dfrac{r^2 + d\,y_0 - d^2}{y_0 - d}$

Ellipse

$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{const.} > \overline{F_1F_2}$
($2a$: Länge der Hauptachse,
$2b$: Länge der Nebenachse)

Lineare Exzentrizität:
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$
(F_1, F_2: Brennpunkte,
S_1, S_2: Hauptscheitel,
S_3, S_4: Nebenscheitel)



Die rote Markierung im Bild dient als Anleitung zur punktweisen Konstruktion.

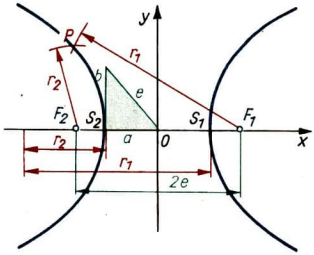
	Mittelpunktslage, $M\,(0;\,0)$	achsenparallele Lage, $M\,(c;\,d)$
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x - c)^2}{a^2} + \dfrac{(y - d)^2}{b^2} = 1$
Tangente in $P_0(x_0;\,y_0)$	$\dfrac{x\,x_0}{a^2} + \dfrac{y\,y_0}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x - c)\,(x_0 - c)}{a^2} + \dfrac{(y - d)\,(y_0 - d)}{b^2} = 1$
Tangentengleichung (explizit)	$y = -\dfrac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}\,x + \dfrac{b^2}{y_0}$	$y = -\dfrac{(x_0 - c)\,b^2}{(y_0 - d)\,a^2}\,(x - c) + \dfrac{b^2 + d\,y_0 - d^2}{y_0 - d}$

Hyperbel

$\overline{F_1P} - \overline{PF_2} = \text{const.} < \overline{F_1F_2}$
(2a: Länge der Hauptachse)

Lineare Exzentrizität:
$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
(F_1, F_2: Brennpunkte,
S_1, S_2: Scheitel)

Falls $a = b$, so nennt man die Hyperbel gleichschenklig.

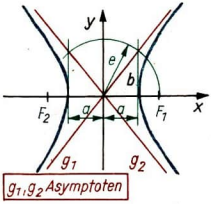


	Mittelpunktslage, $M(0;0)$	achsenparallele Lage, $M(c;d)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$
Tangente im Punkt $P_0(x_0; y_0)$	$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$	$\frac{(x-c)(x_0-c)}{a^2} - \frac{(y-d)(y_0-d)}{b^2} = 1$
Tangentengleichung (explizit)	$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - \frac{b^2}{y_0}$	$y = \frac{(x_0-c)\,b^2}{(y_0-d)\,a^2}(x-c) - \frac{b^2 - d\,y_0 + d^2}{y_0 - d}$

Gleichungen der Asymptoten an die Hyperbel

(1) $y = \frac{b}{a}x$ (2) $y = -\frac{b}{a}x$ (jeweils $a \neq 0$)

Zur Hyperbel
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
gehören die Asymptoten mit den Gleichungen
g_1: $y = \frac{3}{4}x$ und g_2: $y = -\frac{3}{4}x$.

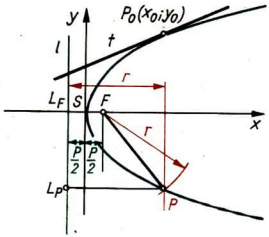


Parabel

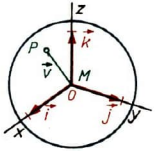
$\overline{L_p P} = \overline{PF}$ (l: Leitlinie, $2p$: Parameter, S: Scheitel, F: Brennpunkt)

Scheitelgleichung der Parabel mit dem Parameter $2p$	
im Falle $S(0;0)$	im Falle $S(c;d)$
$y^2 = 2px$	$(y-d)^2 = 2p(x-c)$

Tangente in $P_0(x_0; y_0)$ an die Parabel	
im Falle $S(0;0)$	im Falle $S(c;d)$
$y\,y_0 = p(x + x_0)$	$(y-d)(y_0-d) = p(x + x_0 - 2c)$

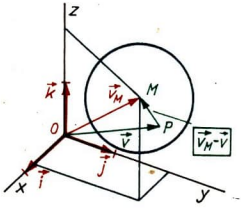


Tangentengleichung (explizit)	
im Falle $S(0;0)$	im Falle $S(c;d)$
$y = \frac{p}{y_0}x + \frac{p\,x_0}{y_0}$	$y = \frac{p}{y_0-d}x + \frac{p\,x_0 - 2cp}{y_0-d} + d$



Kugel mit dem Radius r

Darstellung	in Mittelpunktslage $M(0;0;0)$	in allgemeiner Lage $M(c;d;e)$
vektoriell	$\vec{v}\cdot\vec{v} = r^2$ $\lvert\vec{v}\rvert = r$	$(\vec{v} - \vec{v_M})\cdot(\vec{v} - \vec{v_M}) = r^2$
in Koordinaten	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$(x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2 = r^2$



Physik 2

2.1. Einheiten und Größen

Basiseinheiten des SI

Système International d'Unités – Internationales Einheitensystem (abgekürzt in allen Sprachen: SI)

Größe und Formelzeichen	Benennung der Basiseinheit und Einheitenzeichen	Definition der Basiseinheit
Länge l	Meter m	Das Meter ist gleich 1 650 763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus 2 p_{10} und 5 d_5 des Atoms Krypton 86 entspricht.
Masse m	Kilogramm kg	Das Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.
Zeit t	Sekunde s	Die Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Atoms Cäsium 133 entspricht.
Stromstärke I	Ampere A	Das Ampere ist die Stärke des zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt, die den Abstand 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im leeren Raum je 1 m Länge der Doppelleitung $2 \cdot 10^{-7}$ N beträgt.
Temperatur T	Kelvin K	Das Kelvin ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. Anmerkung: Bei Angabe der Celsius-Temperatur ($t = T - 273{,}15$ K) ist die Benennung Kelvin (K) durch Grad Celsius (°C) zu ersetzen.

Größe	Benennung der Basiseinheit	Definition der Basiseinheit
Stoffmenge *n*	Mol mol	Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus so vielen gleichartigen elementaren Teilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Nuklids ^{12}C enthalten sind.
Lichtstärke *I*	Candela cd	Die Candela ist die Lichtstärke, die 1/600000 m² der Fläche eines schwarzen Körpers bei der Erstarrungstemperatur des Platins beim Druck 101325 Pa senkrecht zu seiner Oberfläche ausstrahlt.

Vorsätze zum Bilden von Vielfachen und Teilen von Einheiten

Die Vorsätze sind so auszuwählen, daß die Zahlenwerte der Größen möglichst zwischen 0,1 und 1000 liegen.

Vorsatz	Vorsatzzeichen	Faktor, mit dem die Einheit multipliziert werden muß
Exa	E	1 000 000 000 000 000 000 (10^{18})
Peta	P	1 000 000 000 000 000 (10^{15})
Tera	T	1 000 000 000 000 (10^{12})
Giga	G	1 000 000 000 (10^{9})
Mega	M	1 000 000 (10^{6})
Kilo	k	1 000 (10^{3})
Hekto	h	100 (10^{2})
Deka	da	10 (10^{1})
Dezi	d	0,1 (10^{-1})
Zenti	c	0,01 (10^{-2})
Milli	m	0,001 (10^{-3})
Mikro	µ	0,000 001 (10^{-6})
Nano	n	0,000 000 001 (10^{-9})
Pico	p	0,000 000 000 001 (10^{-12})
Femto	f	0,000 000 000 000 001 (10^{-15})
Atto	a	0,000 000 000 000 000 001 (10^{-18})

Die Vorsätze werden nicht verwendet im Zusammenhang mit den Längeneinheiten „Astronomische Einheit" und „Seemeile"; der Flächeneinheit „Hektar"; den Zeiteinheiten „Minute", „Stunde" und „Tag"; den Winkeleinheiten „Grad", „Minute", „Sekunde"; den Frequenzeinheiten „Eins je Minute" und „Eins je Stunde"; der Masseeinheit „Kilogramm"; der Temperatureinheit „Grad Celsius".

Tabelle der Größen und Einheiten

In dieser Tabelle sind enthalten: Basiseinheiten des SI, abgeleitete SI-Einheiten, allgemeingültige SI-fremde Einheiten und auf Spezialgebieten gültige SI-fremde Einheiten.

Größe und Formelzeichen	Benennung der Einheit und Einheitenzeichen	Umrechnungsbeziehungen	Wichtige Größengleichungen
Raum und Zeit			
Länge l Höhe h Breite b Bogenlänge b Radius r Weglänge s Wellenlänge λ	**Meter** **m** Astronomische Einheit AE Lichtjahr ly Parsec pc	**Basiseinheit** (↗ Umrechnungsfaktoren, S. 111) $1\,\mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ $1\,\mathrm{ly} = 9{,}461 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$ $1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$	
Fläche, A **Flächeninhalt**	Quadratmeter m^2 Hektar ha	$1\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m}$ $1\,\mathrm{ha} = 1 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^2$ (↗ Umrechnungsfaktoren, S. 111)	$A = l^2$ (Quadrat)
Volumen V	Kubikmeter m^3 Liter l	$1\,\mathrm{m}^3 = 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m}$ $1\,\mathrm{l} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ (↗ 112)	$V = l^3$ (Würfel)
ebener Winkel $\alpha, \beta,$ (arc ↗ 51) $\gamma, \ldots$ **Drehwinkel** σ	Radiant rad Grad ° Minute ′ Sekunde ″	$1\,\mathrm{rad} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}$ $1° = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 1{,}745 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad}$ $1' = \frac{\pi}{10\,800}\,\mathrm{rad} \approx 2{,}909 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}$	$\mathrm{arc}\,\alpha = \frac{b}{r}$ $\sigma = \frac{s}{r}$
Raumwinkel Ω	Steradiant sr	$1\,\mathrm{sr} = \frac{1\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{m}^2}$	
Zeit t **Periode** T **(Umlaufzeit, Schwingungsdauer)**	**Sekunde** **s** Minute min Stunde h Tag d	**Basiseinheit** $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3\,600\,\mathrm{s}$ $1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h} = 1\,440\,\mathrm{min} = 86\,400\,\mathrm{s}$	$T = \frac{1}{f}$
Frequenz f, ν **Drehzahl, Umlauffrequenz** n	Hertz Hz	$1\,\mathrm{Hz} = 1 \cdot \mathrm{s}^{-1}$	$f = \frac{1}{T}$ $n = \frac{1}{T}$
Geschwindigkeit v, u	Meter je Sekunde $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}278\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v = \frac{s}{t}$; $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

Größe und Formelzeichen	Benennung der Einheit und Einheitenzeichen	Umrechnungsbeziehungen	Wichtige Größengleichungen
Beschleunigung a Fallbeschleunigung g	Meter je Quadratsekunde $\frac{m}{s^2}$	$1\,\frac{m}{s^2} = 1\,m \cdot s^{-2}$	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $a = \frac{dv}{dt}$
Winkelgeschwindigkeit ω, w	Radiant je Sekunde $\frac{rad}{s}$	$1\,\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}$	$\omega = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}$; $\omega = \frac{d\sigma}{dt}$
Winkelbeschleunigung α	Radiant je Quadratsekunde $\frac{rad}{s^2}$	$1\,\frac{rad}{s^2} = \frac{1}{s^2}$	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$; $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Volumenstrom (Volumendurchfluß) $\dot{V}, Q$	Kubikmeter je Sekunde $\frac{m^3}{s}$ Liter je Sekunde $\frac{l}{s}$	$1\,\frac{m^3}{s} = 1\,m^3 \cdot s^{-1}$ $1\,\frac{l}{s} = 1 \cdot 10^{-3}\,m^3 \cdot s^{-1}$	$\dot{V} = \frac{V}{t}$; $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$
Mechanik			
Masse m	**Kilogramm kg** Gramm g Tonne t Atomare Masseeinheit u	**Basiseinheit** $1\,g = 1 \cdot 10^{-3}\,kg$ $1\,t = 1 \cdot 10^{3}\,kg$ $1\,u = 1{,}660\,27 \cdot 10^{-27}\,kg$	$1\,u = \frac{1}{12} m_A\left({}^{12}_{6}C\right)$
Dichte ϱ	Kilogramm je Kubikmeter $\frac{kg}{m^3}$	$1\,\frac{kg}{m^3} = 1\,kg \cdot m^{-3}$	$\varrho = \frac{m}{V}$
Kraft F Gewichtskraft F_G, G	Newton N	$1\,N = 1\,kg \cdot m \cdot s^{-2}$ (↗ Umrechnungsfaktoren, S. 112)	$F = m \cdot a$ $F_G = m \cdot g$
Drehmoment M_D	Newtonmeter N · m	$1\,N \cdot m = 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	$M_D = F \cdot r$ (orthogonal)
Druck p	Pascal Pa	$1\,Pa = 1\,\frac{N}{m^2} = 1\,kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	$p = \frac{F}{A}$
Arbeit W, A Energie E, W	Joule, J Newtonmeter, N · m Wattsekunde, W · s Elektronenvolt eV	$1\,J = 1\,N \cdot m = 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ $1\,J = 1\,W \cdot s = 1\,V \cdot A \cdot s$ $1\,eV = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}\,J$ (↗ 113)	$W = F \cdot s$ $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ $W = P \cdot t$ $W_{el} = I \cdot U \cdot t$

Größe und Formelzeichen	Benennung der Einheit und Einheitenzeichen	Umrechnungsbeziehungen	Wichtige Größengleichungen
Leistung P	Watt W	$1\,W = 1\,\frac{J}{s}$ $= 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ $1\,W = 1\,V \cdot A$ (↗ 113)	$P = \frac{W}{t}$ $P = I \cdot U = I^2 \cdot R$ $P = \frac{U^2}{R}$
Kraftstoß S	Newton-sekunde N · s	$1\,N \cdot s$ $= 1\,kg \cdot m \cdot s^{-1}$	$S = \bar{F} \cdot \Delta t$ $S = \Delta p$
Impuls p			$p = m \cdot v$
Wärme			
Temperatur T (thermodynamisch)	**Kelvin K**	**Basiseinheit**	
Celsius-Temperatur ϑ, t	Grad Celsius °C	$\frac{\vartheta}{°C} = \frac{T}{K} - 273{,}15$	
Wärme Q, W (Wärmemenge)	Joule J	$1\,J = 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ $1\,J = 1\,N \cdot m$ $= 1\,W \cdot s$	$Q = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta$
Innere Energie U, W_i			
Spezifische Wärme q	Joule je Kilogramm $\frac{J}{kg}$	$1\,\frac{J}{kg} = 1\,m^2 \cdot s^{-2}$	$q = \frac{Q}{m}$
Wärmekapazität C	Joule je Kelvin $\frac{J}{K}$	$1\,\frac{J}{K}$ $= 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$	$C = \frac{Q}{\Delta\vartheta}$
Spezifische Wärmekapazität c, c_v, c_p	Joule je Kilogramm und Kelvin $\frac{J}{kg \cdot K}$	$1\,\frac{J}{kg \cdot K}$ $= 1\,m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$	$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\vartheta}$
Elektrizität und Magnetismus			
Elektrische Stromstärke I	**Ampere A**	**Basiseinheit**	
Elektrische Ladung, Elektrizitätsmenge Q	Coulomb C	$1\,C = 1\,A \cdot s$	$Q = I \cdot t$
Elektrische Arbeit W	Joule J	$1\,J = 1\,V \cdot A \cdot s$ $1\,J = 1\,W \cdot s$ $1\,J = 1\,N \cdot m$	

Größe und Formelzeichen	Benennung der Einheit und Einheitenzeichen	Umrechnungsbeziehungen	Wichtige Größengleichungen
Elektrische Leistung; Wirkleistung P	Watt W Voltampere VA Var var	$1\,W = 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ $1\,W = 1\,VA$ $1\,W = 1\,var$	$P = U \cdot I$
Elektrische Spannung U	Volt V	$1\,V = \frac{1\,W}{1\,A}$	$U = \frac{W}{Q}$; $U = I \cdot R$
Elektrische Feldstärke E	Volt je Meter $\frac{V}{m}$	$1\frac{V}{m} = 1\,kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	$E = \frac{F}{Q}$; $E = \frac{U}{s}$
Elektrische Kapazität C	Farad F	$1\,F = 1\frac{C}{V} = 1\frac{A \cdot s}{V}$	$C = \frac{Q}{U}$
Dielektrizitätskonst. ε	Farad je Meter $\frac{F}{m}$	$1\frac{F}{m} = 1\frac{s^4 \cdot A^2}{kg \cdot m^3}$	$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$
Elektrische Feldkonst. ε_0	Farad je Meter $\frac{F}{m}$	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\frac{F}{m}$	$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$
Elektrischer Widerstand R Wirkwiderstand R Blindwiderstand X Scheinwiderstand R_g	Ohm Ω	$1\,\Omega = 1\frac{V}{A}$ $1\,\Omega =$ $1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	$R = \frac{U}{I}$ $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$ $X = X_L - X_C$ $R_g = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
Spezifischer elektrischer Widerstand ϱ	Ohmmeter $\Omega \cdot m$	$1\,\Omega \cdot m = 1\,\Omega \cdot \frac{m^2}{m}$	$\varrho = \frac{R \cdot A}{l}$
Elektrischer Leitwert G	Siemens S	$1\,S = \frac{1}{\Omega}$	$G = \frac{1}{R}$
Magn. Fluß Φ	Weber Wb	$1\,Wb = 1\,V \cdot s$	$\Phi = B \cdot A$
Magnetische Flußdichte (Magnetische Induktion) B	Tesla T	$1\,T = 1\frac{Wb}{m^2} = 1\frac{V \cdot s}{m^2}$ $1\,T = 1\,kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$B = \frac{F}{I \cdot l}$; $B = \frac{\Phi}{A}$
Magnetische Feldstärke H	Ampere je Meter $\frac{A}{m}$	$1\frac{A}{m} = 1\,m^{-1} \cdot A$	$H = \frac{I_{err} \cdot N}{l}$
Induktivität L	Henry H	$1\,H = \frac{1\,Wb}{A} = \frac{1\,V \cdot s}{A}$ $= 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A_0}{l}$ $L = \frac{\Phi}{I}$

Größe und Formelzeichen	Benennung der Einheit und Einheitenzeichen	Umrechnungsbeziehungen	Wichtige Größengleichungen
Permeabilität μ	Henry je Meter $\frac{H}{m}$	$1\frac{H}{m} = 1\,m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = \frac{1\,V \cdot s}{A \cdot m}$	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_{rel}$
Magnetische Feldkonst. (Induktionskonstante) μ_0	Henry je Meter $\frac{H}{m}$	$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\,H \cdot m^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$	
Optische Strahlung			
Lichtstärke I_v	**Candela cd**	**Basiseinheit**	
Leuchtdichte L_v	Candela je Quadratmeter $\frac{cd}{m^2}$	$1\frac{cd}{m^2} = 1\,m^{-2} \cdot cd$	$L_v = \frac{I_v}{A}$
Lichtstrom Φ, Φ_v	Lumen lm	$1\,lm = 1\,cd \cdot sr$	$\Phi = I_v \cdot \Omega$
Beleuchtungsstärke E_v	Lux lx	$1\,lx = \frac{1\,lm}{1\,m^2} = 1\,m^{-2} \cdot cd \cdot sr$	$E_v = \frac{\Phi_v}{A}$
Physikalische Chemie			
Stoffmenge n	**Mol mol**	**Basiseinheit**	
Stoffmengen-bezogene Masse (m_{mo}) (molare Masse) M_m	Kilogramm je Mol $\frac{kg}{mol}$	$1\frac{kg}{mol} = 1\,kg \cdot mol^{-1}$	$M_m = \frac{m}{n}$
Stoffmengen-bezogenes Volumen (V_{mo}) (molares Volumen) V_m	Kubikmeter je Mol $\frac{m^3}{mol}$	$1\frac{m^3}{mol} = 1\,m^3 \cdot mol^{-1}$	$V_m = \frac{V}{n}$
Stoffmengen-bezogene innere Energie U_{mo}	Joule je Mol $\frac{J}{mol}$	$1\frac{J}{mol} = 1\,m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$	
Stoffmengen-bezogene Wärmekapazität (molare Wärmekapazität, Molwärme) C_{mo}	Joule je Mol und Kelvin $\frac{J}{mol \cdot K}$	$1\frac{J}{mol \cdot K} = 1\,m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	$C_{mo} = \frac{C}{m}$

Physikalische Konstanten

Größe	Formelzeichen	Wert der Konstanten
Atmosphärendruck, normaler	p_o	$1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa = 101,3 kPa (760 Torr)
Atomare Masseeinheit	1 u	$1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ kg
Erste kosmische Geschwindigkeit (Minimum-Kreisbahngeschwindigkeit)	v_k	$7{,}912\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ ($h = 0$)
Zweite kosmische Geschwindigkeit (planetare Flucht- oder Entweichgeschwindigkeit)	v_p	$11{,}190\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ ($h = 0$)
Dritte kosmische Geschwindigkeit (solare Fluchtgeschwindigkeit, Bewegung im Richtungssinn der Erdumlaufbewegung)	v_s	$16{,}7\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ ($h = 0$)
Boltzmann-Konstante	$k = \frac{R_o}{N_L}$	$1{,}38066 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Elementarladung	e	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ C
Faraday-Konstante	F	$9{,}64846 \cdot 10^4\ \mathrm{A \cdot s \cdot mol^{-1}}$
Feldkonstante, elektrische (Influenzkonstante)	ε_o	$8{,}85419 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ = $8{,}85419 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}}$
Feldkonstante, magnetische (Induktionskonstante)	μ_o	$1{,}25664 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$ = $4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}}$
Gaskonstante, universelle	R_o	$8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
Gravitationskonstante	γ	$6{,}6720 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2{,}99792 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Loschmidtsche Konstante	N_L, L	$6{,}02204 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Normvolumen des idealen Gases	V_{mo}	$22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$
Normfallbeschleunigung	g_n	$9{,}806\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \approx 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6{,}62618 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Ruhmasse eines Elektrons	m_{oe}	$0{,}91095 \cdot 10^{-30}$ kg
Ruhmasse eines Protons	m_{op}	$1{,}67265 \cdot 10^{-27}$ kg
Ruhmasse eines Neutrons	m_{on}	$1{,}67495 \cdot 10^{-27}$ kg

Größe	Formelzeichen	Wert der Konstanten
Spezifische Ladung eines Elektrons	$\frac{e}{m_{oe}}$	$1{,}75\,880 \cdot 10^{11}\ C \cdot kg^{-1}$
Spezifische Ladung eines Protons	$\frac{e}{m_{op}}$	$9{,}57\,876 \cdot 10^{7}\ C \cdot kg^{-1}$
Rydberg-Frequenz	R_y	$3{,}288 \cdot 10^{15} \cdot s^{-1}$

2.2. Umrechnungsfaktoren von Einheiten

Längeneinheiten

Einheit	Faktor für Umrechnung in						
	km	m	dm	cm	mm	µm	nm
1 km	1	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
1 m	10^{-3}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}
1 dm	10^{-4}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{5}	10^{8}
1 cm	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{4}	10^{7}
1 mm	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{3}	10^{6}
1 µm	10^{-9}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	1	10^{3}
1 nm	10^{-12}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-3}	1

Flächeneinheiten

Einheit	Faktor für Umrechnung in						
	km^2	hm^2(ha)	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 km^2	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}	10^{10}	10^{12}
1 hm^2 = 1 ha	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}	10^{10}
1 dam^2	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}
1 m^2	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}
1 cm^2	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}
1 mm^2	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1

Volumeneinheiten

Einheit	Faktor für Umrechnung in			
	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 m^3	1	10^3	10^6	10^9
1 dm^3	10^{-3}	1	10^3	10^6
1 cm^3	10^{-6}	10^{-3}	1	10^3
1 mm^3	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1

Einheit	Faktor für Umrechnung in				
	hl	l	dl	cl	ml
1 hl	1	10^2	10^3	10^4	10^5
1 l	10^{-2}	1	10	10^2	10^3
1 dl	10^{-3}	10^{-1}	1	10	10^2
1 cl	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	1	10
1 ml	10^{-5}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1

Einheiten der Zeit

Einheit	Faktor für Umrechnung in			
	s	min	h	d
1 s	1	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	$2{,}78 \cdot 10^{-4}$	$1{,}16 \cdot 10^{-5}$
1 min	60	1	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	$6{,}94 \cdot 10^{-4}$
1 h	$3{,}6 \cdot 10^3$	60	1	$4{,}17 \cdot 10^{-2}$
1 d	$8{,}64 \cdot 10^4$	$1{,}44 \cdot 10^3$	24	1

Einheiten der Kraft

Einheit	Faktor für Umrechnung in		
	N	kp	p
1 kp	9,81	1	10^3
1 p	$9{,}81 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	1

Die Einheiten kp und p sind nicht mehr gültig.

Einheiten des Drucks

Einheit	Faktor für Umrechnung in					
	$Pa = \frac{N}{m^2}$	$at = \frac{kp}{cm^2}$	atm	Torr	bar	$mmWs\left(\frac{kp}{m^2}\right)$
1 bar	10^5	1,02	0,987	750	1	$1{,}02 \cdot 10^4$
$1\ at\left(1\frac{kp}{cm^2}\right)$	$9{,}81 \cdot 10^4$	1	0,968	736	0,981	10^4
1 atm	$1{,}013 \cdot 10^5$	1,033	1	760	1,013	$1{,}033 \cdot 10^4$
1 Torr	133,32	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$	$1{,}32 \cdot 10^{-3}$	1	$1{,}33 \cdot 10^{-3}$	13,6
$1\ mm\ WS\left(1\frac{kp}{m^2}\right)$	9,81	10^{-4}	$9{,}68 \cdot 10^{-5}$	$7{,}36 \cdot 10^{-2}$	$9{,}81 \cdot 10^{-5}$	1

Einheiten der Arbeit, Energie, Wärme

Einheit	Faktor für Umrechnung in				
	J(N·m,W·s)	kWh	kcal	kp · m	eV
1 eV	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	$4{,}45 \cdot 10^{-26}$	$3{,}83 \cdot 10^{-23}$	$1{,}63 \cdot 10^{-20}$	1
1 kWh	$3{,}6 \cdot 10^6$	1	860	$3{,}67 \cdot 10^5$	$2{,}25 \cdot 10^{25}$
1 kcal	$4{,}19 \cdot 10^3$	$1{,}16 \cdot 10^{-3}$	1	427	$2{,}61 \cdot 10^{22}$
1 kp · m	9,81	$2{,}72 \cdot 10^{-6}$	$2{,}34 \cdot 10^{-3}$	1	$6{,}12 \cdot 10^{19}$

Einheiten der Leistung

Einheit	Faktor für Umrechnung in				
	W	kW	$\frac{kcal}{h}$	$\frac{kp \cdot m}{s}$	PS
$1\frac{kcal}{h}$	1,16	$1{,}16 \cdot 10^{-3}$	1	0,119	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$
$1\frac{kp \cdot m}{s}$	9,81	$9{,}81 \cdot 10^{-3}$	8,43	1	$1{,}33 \cdot 10^{-2}$
1 PS	736	0,736	632	75	1

Die Einheiten at, $kp \cdot cm^{-2}$, atm, Torr, mm WS, kp · m, cal, kcal, $kcal \cdot h^{-1}$, $kp \cdot m \cdot s^{-1}$ und PS sind nicht mehr gültig.

2.3. Wertetabellen

Schallgeschwindigkeiten

Richtwerte für etwa 20 °C, für Gase bei Normaldruck: 101,3 kPa

Stoff	v in $\frac{m}{s}$
Aluminium	5 100
Benzin	1 160
Benzen (Benzol)	1 320
Beton	3 800
Blei	1 300
Eis	3 230
Ethanol (Äthanol)	1 160
Glas	4000 bis 5500
Gummi	40
Kohlendioxid	260
Kork	500

Stoff	v in $\frac{m}{s}$
Kupfer	3 900
Luft bei 0 °C	331
Luft bei 10 °C	337
Luft bei 20 °C	343
Luft bei 30 °C	349
Stahl	5 100
Ziegelmauerwerk	3 600
Zink	3 700
Wasserstoff	1 280
Wasser bei 4 °C	1 400
Wasser bei 15 °C	1 460

Reibungszahlen (Richtwerte)

Werkstoff	Haftreibungszahl μ_0	Gleitreibungszahl μ
Stahl auf Stahl, trocken	0,15	0,10
Stahl auf Bronze	0,18	0,16
Stahl auf Eis	0,027	0,014
Metall auf Holz	0,55	0,35
Holz auf Holz	0,65	0,35
Leder auf Metall (Dichtungen)	0,60	0,25
Lederriemen auf Metall	0,56	0,28
Lederriemen auf Holz	0,47	0,27
Beton auf Kies	0,87	
Gummireifen auf Asphalt, trocken	$< 0,9$	$< 0,3$
Gummireifen auf Asphalt, naß	$< 0,5$	$< 0,15$

Werkstoff	Rollreibungszahl f in cm
Grauguß auf Grauguß	0,08
Stahlreifen auf Schiene	0,05
Stahlkugeln gehärtet auf Stahl (Kugellager)	0,001

Elastizitätsmodul fester Körper

Stoff	E in $N \cdot m^{-2}$
Aluminium	$6,9 \cdot 10^{10}$
Blei	$2,9 \cdot 10^{10}$
Eisen	$19,6 \cdot 10^{10}$

Stoff	E in $N \cdot m^{-2}$
Kupfer	$11,8 \cdot 10^{10}$
Silber	$7,4 \cdot 10^{10}$
Stahl	$21,6 \cdot 10^{10}$

Dichte (bei 20 °C)

Stoff	ϱ in $\frac{g}{cm^3}$
Aluminium	2,7
Beton, Schwer-	1,9 bis 2,8
Bronze	8,7 bis 8,9
Braunkohle	1,2 bis 1,4
Dieselkraftstoff	0,9
Eis (bei 0 °C)	0,9
Glas	2,4 bis 2,6
Hartgummi	1,15 bis 1,5
Hartholz	1,2 bis 1,4
Konstantan	8,9
Kork	0,2
Kupfer	8,9

Stoff	ϱ in $\frac{g}{cm^3}$
Mauerwerk, Ziegel	1,4 bis 1,8
Messing	8,2 bis 8,7
Papier	0,7 bis 1,2
Paraffin	0,9
Petroleum	0,8
Porzellan	2,3
Quarzglas	2,2
Stahl, Fluß-	7,85
Steinsalz	2,17
Wolle	1,3 bis 1,4
Wasser (bei 4 °C)	0,999973
Wasser (bei 20 °C)	0,998099

Thermodynamische Eigenschaften von festen Stoffen

Stoff	Linearer Ausdehnungskoeffizient α in K^{-1}	Spezifische Wärmekapazität c in $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Schmelztemperatur (Luftdruck 101,3 kPa) ϑ_S in °C	Spezifische Schmelzwärme q_S in $J \cdot kg^{-1}$	Siedetemperatur (Luftdruck 101,3 kPa) ϑ_V in °C
Aluminium	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	896	660	$3{,}97 \cdot 10^5$	2 500
Beton	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	920			
Bismut	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	122	271	$0{,}52 \cdot 10^5$	1 560
Blei	$2{,}9 \cdot 10^{-5}$	126	327	$0{,}26 \cdot 10^5$	1 750
Bronze, Messing	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	394	≈ 900		
Diamant	$0{,}1 \cdot 10^{-5}$	464	3 540		4 347
Glas, Fenster-	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	860			
Gold	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	130	1 063	$0{,}65 \cdot 10^5$	2 700
Graphit	$0{,}2 \cdot 10^{-5}$	691	3 800		4 347
Hartgummi	$8{,}0 \cdot 10^{-5}$	1 425			
Holz, Eiche	$0{,}8 \cdot 10^{-5}$	2 390			
Konstantan	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	411			
Kupfer	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	395	1 083	$1{,}76 \cdot 10^5$	2 350
Magnesium	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$	920	650	$3{,}82 \cdot 10^5$	1 120
Mauerwerk	$0{,}5 \cdot 10^{-5}$	860			
Platin	$0{,}9 \cdot 10^{-5}$	134	≈ 1 770	$1{,}13 \cdot 10^5$	≈ 4 000
Polyvinylchlorid	$8{,}0 \cdot 10^{-5}$				
Porzellan	$0{,}4 \cdot 10^{-5}$	730			
Quarzglas	$0{,}1 \cdot 10^{-5}$	729	1 700		
Silber	$2{,}0 \cdot 10^{-5}$	234	960	$1{,}04 \cdot 10^5$	2 200
Stahl	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	≈ 470	≈ 1 500		
Wolfram	$0{,}4 \cdot 10^{-5}$	134	3 350	$1{,}92 \cdot 10^5$	6 000
Zink	$3{,}6 \cdot 10^{-5}$	391	419	$1{,}11 \cdot 10^5$	907
Zinn	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$	220	232	$0{,}59 \cdot 10^5$	2 350

Thermodynamische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Stoff	Kubischer Ausdehnungskoeffizient γ in K^{-1}	Spezifische Wärmekapazität c in $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Schmelztemperatur (Luftdruck: 101,3 kPa) ϑ_S in °C	Spezifische Schmelzwärme q_S in $J \cdot kg^{-1}$	Siedetemperatur (Luftdruck: 101,3 kPa) ϑ_V in °C
Aceton	$143 \cdot 10^{-5}$	2 100	— 95	$0{,}82 \cdot 10^5$	56
Benzen (Benzol)	$106 \cdot 10^{-5}$	1 700	5,5	$1{,}27 \cdot 10^5$	80
Diethylether	$162 \cdot 10^{-5}$	2 350	—123	$0{,}98 \cdot 10^5$	35
Ethanol	$110 \cdot 10^{-5}$	2 400	—114	$1{,}08 \cdot 10^5$	78
Glycerol	$49 \cdot 10^{-5}$	2 400	18		290
Methanol	$110 \cdot 10^{-5}$	2 400	— 98	$0{,}69 \cdot 10^5$	65
Paraffin	$76 \cdot 10^{-5}$				
Petroleum	$96 \cdot 10^{-5}$	2 000			
Quecksilber	$18 \cdot 10^{-5}$	140	— 39	$0{,}11 \cdot 10^5$	357
Trichlormethan (Chloroform)	$128 \cdot 10^{-5}$	950	— 64	$0{,}75 \cdot 10^5$	61
Wasser	$18 \cdot 10^{-5}$	4 186	0	$3{,}34 \cdot 10^5$	100

Spezifische Wärmekapazität von Gasen (bei 20 °C)

Stoff	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_V in $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p in $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Helium	3,161	5,238
Kohlendioxid	0,754	1,047
Luft	0,720	1,009
Sauerstoff	0,653	0,917
Stickstoff	0,745	1,038
Wasserstoff	10,13	14,27

Wärmeleitfähigkeit

Gute Wärmeleiter	λ in $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Aluminium	209
Blei	35
Kupfer	384
Silber	407
Stahl	47
Zinn	65

Schlechte Wärmeleiter	λ in $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Asbest	0,6
Beton	1
Glas	0,7
Porzellan	1,4
Ziegelstein	0,7
Wasser	0,58

Wärmeisolatoren	λ in $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Bettfedern	0,02
Glaswolle	0,05
Luft	0,03
Schamotte	0,04
Schaumstoff	0,036
Vakuum	0,00

Spezifische Verdampfungswärme bzw. Kondensationswärme (bei 101,3 kPa)

Stoff	q_V in $kJ \cdot kg^{-1}$	Stoff	q_V in $kJ \cdot kg^{-1}$
Ammoniak	1 370	Quecksilber	285
Benzen (Benzol)	394	Sauerstoff	213
Diethylether	384	Stickstoff	198
Ethanol (Äthanol)	842	Wasser	2 260
Luft	190	Wasserstoff	455

Mittlere Geschwindigkeiten von Gasmolekülen (bei 0 °C)

Gas	$\bar{v}$ in $m \cdot s^{-1}$	Gas	$\bar{v}$ in $m \cdot s^{-1}$
Helium	1 304	Sauerstoff	460
Kohlendioxid	394	Stickstoff	490
Luft	485	Wasserstoff	1 840

Abhängigkeit der Siedetemperatur und der spezifischen Verdampfungswärme des Wassers vom Druck

Druck p in Mpa	Siedetemperatur ϑ_S in °C	Spezifische Verdampfungswärme q_V in $kJ \cdot kg^{-1}$
0,01	46	2 392
0,05	81	2 304
0,1	100	2 258
0,2	120	2 202
0,5	152	2 109
1,0	180	2 015
5,0	264	1 640
10,0	311	1 317
20,0	366	583

Gaskonstante, spezifische

Stoff	R in $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	Stoff	R in $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Ammoniak	488	Luft	287
Argon	208	Methan	519
Ethan (Äthan)	277	Propan	189
Helium	2 077	Sauerstoff	260
Kohlendioxid	189	Stickstoff	297
Kohlenmonoxid	297	Wasserstoff	4 124

2/3

Heizwert einiger Brennstoffe (Mittelwerte)

Feste Brennstoffe	H in $MJ \cdot kg^{-1}$
Braunkohle, weich	8,5
Briketts	20
Holz, trocken	15
Torf, trocken	15
Steinkohle	
Gaskohle	29
Anthrazit	31
Braunkohlenschwelkoks	23
Zechenkoks	29

Flüssige Brennstoffe	H in $MJ \cdot kg^{-1}$
Benzen (Benzol)	40
Dieselkraftstoff	42
Heizöl	41
Steinkohlenteeröl	40
Spiritus	41
Vergaserkraftstoff	47

Technische Gase	H in $MJ \cdot kg^{-1}$
Butan	124
Erdgas	40
Propan	93
Stadtgas	18
Wassergas	10

Gehalt an Energie in einigen Nahrungsmitteln (je 100 g); Mittelwerte

Nahrungsmittel	Energie in kJ
Bockwurst	1 300
Geflügel (Ente)	1 200
Rindfleisch (fett)	1 100
Rindfleisch (mager)	600
Schweinefleisch (Kotelett)	1 500
Wurst (Salami)	1 900
Kabeljau-Filet	330
Räucherfisch	950
Butter (Marken-)	3 100
Fettkäse (45 % F. i. T.)	1 400
Hühnerei	350
Magerquark (10 % F. i. T.)	380
Margarine (Cama)	1 500
Pflanzenöl	3 900
Schmalz	4 000
Vollmilch (2,5 % Fett)	230
Bienenhonig	1 300
Marmelade	960
Zucker	1 600
Mischbrot	1 000
Roggenvollkornbrot	1 000
Weißbrot	1 100

Nahrungsmittel	Energie in kJ
Haferflocken	1 700
Reis (poliert)	1 500
Teigwaren	1 600
grüne Bohnen (frisch)	140
Blumenkohl	120
grüne Erbsen	375
Gurken (grün)	45
Kartoffeln	360
Kopfsalat	60
Mohrrüben	150
Paprikaschoten	110
Spinat	120
Tomaten	90
Weißkohl	115
Apfelsinen	240
Äpfel	230
Erdbeeren	150
schwarze Johannisbeeren	230
Süßkirschen	250
Zitronen	135
Schokolade	2 300

Relative Dielektrizitätskonstante (Dielektrizitätszahl)

Isolierstoff	ε_r
Bernstein	2,8
Glas	5 bis 16
Glimmer	4 bis 8
Hartgummi	2,5 bis 3,5
Hartpapier	3,5 bis 5
Luft	1,0006
Keramische Sonderwerkst.	100 bis 10 000
Marmor	8,5

Isolierstoff	ε_r
Papier	1,8 bis 2,6
Paraffin	2
Porzellan	6
Polystyren (Polystyrol)	2,4
Quarzglas	3,7
Schiefer	6 bis 8
Vakuum	1
Wasser	81

Relative Permeabilität (Permeabilitätszahl)

Magnetische Werkstoffe	Anfangs-permeabilität μ_{r_a}	Maximal-permeabilität $\mu_{r_{max}}$
Elektrolyteisen	600	15 000
Nickel-Eisen-Legierung	2 700	20 000
Technisch reines Eisen	250	7 000
Transformatorenblech	600	7 600

Paramagnetische Stoffe	μ_r
Aluminium	1,000 020
Chromium	1,000 275
Platin	1,000 264
Sauerstoff	1,000 002

Diamagnetische Stoffe	μ_r
Bismut	0,999 848
Kupfer	0,999 990
Wasser	0,999 991
Wasserstoff	0,999 998

Anmerkung: Die Permeabilität der magnetischen Werkstoffe ist stark von der Art der Legierung und von der Behandlung abhängig. Der Betrag der Permeabilität wächst mit der magnetischen Flußdichte zunächst stark bis zur Maximalpermeabilität an und nimmt danach bis auf 1 ab.

Spezifische elektrische Widerstände (bei 20 °C)

Metalle	ϱ in $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ $= 10^{-6} \Omega \cdot m$
Aluminium	0,028
Bismut	1,2
Blei	0,21
Eisen	0,10
Gold	0,024
Kupfer	0,017
Quecksilber	0,94
Silber	0,015
Wolfram	0,049
Zinn	0,10

Widerstandslegierungen	ϱ in $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ $= 10^{-6} \Omega \cdot m$
Bürstenkohle	50
Chromnickel	1,20
Eisenleg. (4 Si)	0,50
Konstantan	0,50
Manganin	0,43
Nickelin	0,40
Stahlguß	0,18

Isolierstoffe	ϱ in $\frac{\Omega \cdot cm^2}{cm}$ $= \Omega \cdot cm$
Bernstein	$> 10^{18}$
Glas	10^{11} bis 10^{15}
Glimmer	10^{14} bis 10^{17}
Hartgummi	10^{12} bis 10^{18}
Hartpapier	10^{15} bis 10^{18}
Holz (trocken)	10^{10} bis 10^{16}
Kolophon.	$5 \cdot 10^{16}$
Paraffin	10^{16} bis 10^{18}
Polystyren	bis 10^{14}
Porzellan	$3 \cdot 10^{14}$
PVC	$> 10^{14}$

Ablösearbeit der Elektronen für reine Metalloberflächen

Stoff	W_A in eV
Barium	2,52
Cadmium	4,04
Cäsium	1,93

Stoff	W_A in eV
Eisen	4,63
Wolfram	4,54
Zink	3,95

Lichtgeschwindigkeit

Stoff	c in $\frac{km}{s}$
Vakuum	299 792
Diamant	125 000
Flintglas	186 000

Stoff	c in $\frac{km}{s}$
Kronglas	200 000
Polystyren	189 000
Wasser	225 000

Elektromagnetisches Spektrum

Bezeichnung	Frequenz f in Hz	Wellenlänge λ
Wechselstrom	$16^2/_3$ bis 10^2	1 800 km bis 3 000 km
Leitungstelefonie	10^2 bis 10^4	3 000 km bis 30 km
Hertzsche Wellen	10^4 bis 10^{13}	30 km bis 0,03 mm
Langwellen	$1{,}5 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^5$	2 000 m bis 1 000 m
Mittelwellen	$0{,}5 \cdot 10^6$ bis $2 \cdot 10^6$	600 m bis 150 m
Kurzwellen	$0{,}6 \cdot 10^7$ bis $2 \cdot 10^7$	50 m bis 15 m
Ultrakurzwellen	$0{,}2 \cdot 10^8$ bis $3 \cdot 10^8$	15 m bis 1 m
Mikrowellen	$3 \cdot 10^8$ bis 10^{13}	1 m bis 0,03 mm

Bezeichnung	Frequenz f in Hz	Wellenlänge λ
Lichtwellen	10^{12} bis $5 \cdot 10^{16}$	0,3 mm bis 5 nm
infrarotes Licht	10^{12} bis $3{,}9 \cdot 10^{14}$	0,3 mm bis 770 nm
sichtbares Licht	$3{,}9 \cdot 10^{14}$ bis $7{,}7 \cdot 10^{14}$	770 nm bis 390 nm
ultraviolettes Licht	$7{,}7 \cdot 10^{14}$ bis $5 \cdot 10^{16}$	390 nm bis 5 nm
Röntgenstrahlen	$3 \cdot 10^{16}$ bis $3 \cdot 10^{20}$	10 nm bis 1 pm
Gammastrahlen	10^{18} bis 10^{22}	300 pm bis 0,03 pm
kosmische Strahlen	10^{22} bis 10^{24}	0,03 pm bis 0,0003 pm

Fraunhofersche Linien

Fraunhof. Linie	Wellenlänge λ in nm	zugehöriges chem. Element	Farbe
A	760,8	Kohlenstoff	äußerstes Rot
B	686,7	Sauerstoff	Hochrot
C	656,3	Wasserstoff	Rotorange
D	589,3	Natrium	Gelb
E	527,0	Eisen	Grün
F	486,1	Wasserstoff	Blau
G	430,8	Calcium	Indigo
H	396,8	Calcium	Violett

Brechzahlen

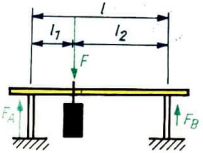
für den Übergang des Lichts aus Luft ($n_{Luft} \approx n_{Vakuum}$) in den betreffenden Stoff für die gelbe Natriumlinie ($\lambda = 589{,}3$ nm)

Stoff	n_D	Stoff	n_D
Diamant	2,417	Kohlendisulfid	1,629
Ethanol (Äthanol)	1,362	Quarzglas	1,459
Eis	1,310	Sauerstoff	0,99998
Flintglas, leicht	1,608	Titania (künstlich)	2,71
schwer	1,754	Vakuum	0,99971
Glycerol (Glyzerin)	1,469	Wasser	1,333
Kronglas, leicht	1,515	Wasserdampf	0,99986
schwer	1,615	Wasserstoff	0,99985

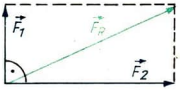
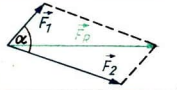
2.4. Größengleichungen aus der Mechanik

2.4.1. Statik

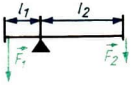
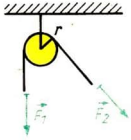
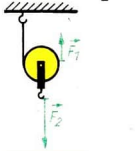
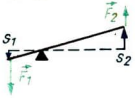
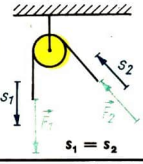
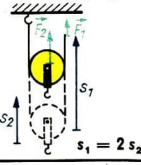
Druck, Kraft

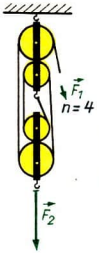
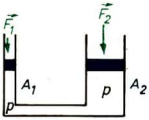
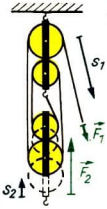
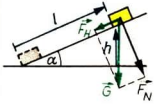
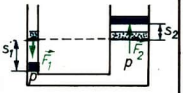
Druck Druckkraft	$p = \frac{F}{A}$ $F = p \cdot A$	p Druck F Druckkraft auf die Fläche A A gedrückte Fläche
Auflagekräfte	$F = F_A + F_B$ $F_A = \frac{F \cdot l_2}{l}$ $F_B = \frac{F \cdot l_1}{l}$	
Drehmoment	$M_D = F \cdot r$ $\vec{r} \perp \vec{F}$	F wirksame Kraft r Radius
Gleichgewichtsbedingung für einen Massepunkt	$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$	
Gleichgewichtsbedingung für einen starren Körper	$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$ $\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0;$ $\Sigma F_z = 0$	
Hookesches Gesetz	$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$	E Elastizitätsmodul (↗ 114) Δl Längenänderung l ursprüngliche Länge σ Spannung ε Dehnung

Zusammensetzen von Kräften

Bedingungen für die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$	Mathematische Gleichung für den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$	Zeichnerische Darstellung
Die Kräfte sind gleich gerichtet	$F_R = F_1 + F_2$	
Die Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet ($F_2 < F_1$)	$F_R = F_1 - F_2$	
Die Kräfte stehen senkrecht aufeinander ($\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$)	$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$	
Die Kräfte bilden einen beliebigen Winkel α miteinander	$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cdot \cos\alpha}$	

Kraftumformende Einrichtungen

Einrichtung	Hebel	feste Rolle	lose Rolle
Gleichgewicht	$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ 	$F_1 = F_2$ 	$F_1 = \frac{F_2}{2}$ 
Satz von der Gleichheit der mechanischen Arbeit	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$ $s_1 : s_2 = l_1 : l_2$ 	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$  $s_1 = s_2$	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$  $s_1 = 2\,s_2$

Einrichtung	Flaschenzug	geneigte Ebene	Hydraulische Anlagen
Gleichgewicht	$F_1 = \frac{F_2}{n}$ 	$F = F_H$	$F_1 \cdot A_2 = F_2 \cdot A_1$ 
Satz von der Gleichheit der mechanischen Arbeit	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$  $s_1 = 4\, s_2$	$F_H \cdot l = G \cdot h$ $F_H = G \cdot \sin\alpha$  $l = \frac{h}{\sin\alpha}$	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$ $s_1 \cdot A_1 = s_2 \cdot A_2$ 

2.4.2. Kinematik

Geschwindigkeit, Beschleunigung

Geschwindigkeit	$v = \frac{s}{t}$ $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $v = \frac{ds}{dt}$	s Weg t Zeit $\bar{v}$ Durchschnitts-geschwindigkeit

Beschleunigung	$a = \frac{v}{t}$ $\bar{a} = \frac{\triangle v}{\triangle t}$ $a = \frac{dv}{dt}$	a Beschleunigung $\bar{a}$ Durchschnitts-beschleunigung
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\sigma}{t}$ $\bar{\omega} = \frac{\triangle \sigma}{\triangle t}$ $\omega = \frac{d\sigma}{dt}$	ω Winkelgeschwindigkeit σ Drehwinkel $\bar{\omega}$ durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\omega}{t}$ $\bar{\alpha} = \frac{\triangle \omega}{\triangle t}$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	α Winkelbeschleunigung $\bar{\alpha}$ durchschnittliche Winkelbeschleunigung
Drehzahl	$n = \frac{1}{T}$	T Umlaufdauer

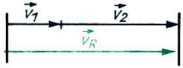
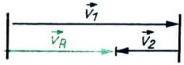
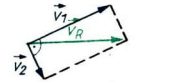
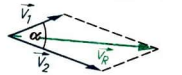
Bewegungsgesetze

Bewegungsart	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Weg, Ort, Drehwinkel
Geradlinige, gleichförmige Bewegung	$v = \frac{s}{t}$ $v =$ konstant	$a = 0$	$s = v \cdot t + s_0$ $x = v_x \cdot t + x_0$
Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung: aus der Ruhe (freier Fall mit $g = a$); mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (beim senkrechten Wurf gilt $g = a$, $s_h = s$, $t_h = t$)	$v = a \cdot t = \sqrt{2a \cdot s}$ $v = a \cdot t + v_0$	$a = \frac{v}{t}$ $v_0 = 0$ $a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$	$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2}$ $s = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0$ $x = \frac{a_x \cdot t^2}{2} + v_{0,x} \cdot t + x_0$ $s_h = \frac{v_0^2}{2g}$ mit $t_h = \frac{v_0}{g}$
ungleichförmige Bewegung	$v = \frac{ds}{dt}$; $v = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$

Bewegungsart	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Weg, Ort, Drehwinkel
Gleichförmige Kreisbewegung bzw. Rotation	$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ $v = 2\pi \cdot r \cdot n$ $\sigma = \frac{s}{r}$ $\omega = \frac{\sigma}{t} = \frac{v}{r}$	$a_r = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2$ $a_t = 0$	$s = v \cdot t + s_0$ $\sigma = \omega \cdot t + \sigma_0$
Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung bzw. Rotation	$v = \frac{ds}{dt}$ $\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$	$a = \frac{v}{t}$; $a = \frac{dv}{dt}$ $\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{a}{r}$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\sigma = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \sigma_0$

a Beschleunigung	s Weg	v Geschwindigkeit (Bahngeschw.)
a_r Radialbeschleunigung	σ Drehwinkel	v_0 Anfangsgeschwindigkeit
α Winkelbeschleunigung	σ_0 Ausgangswinkel	ω Winkelgeschwindigkeit
n Umlaufzahl (Umlauffrequenz)	t Zeit	
	t_h Steigzeit	
	T Umlaufzeit	

Zusammensetzen von Geschwindigkeiten

Bedingungen für die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$	Mathematische Gleichung für den Betrag der resultierenden Geschwindigkeit $\vec{v}_R$	Zeichnerische Darstellung
Die Geschwindigkeiten sind gleich gerichtet.	$v_R = v_1 + v_2$	
Die Geschwindigkeiten sind entgegengesetzt gerichtet ($v_2 < v_1$).	$v_R = v_1 - v_2$	
Die Geschwindigkeiten bilden einen rechten Winkel ($\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$).	$v_R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	
Die Geschwindigkeiten bilden einen beliebigen Winkel α miteinander.	$v_R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cdot \cos\alpha}$	

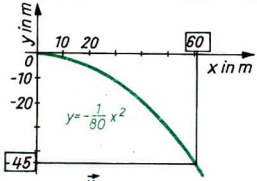
Wurfbewegungen

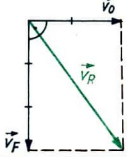
Waagerechter Wurf		
Wurfparabel	$y = -\frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2$	$\vec{v}_0$ Anfangsgeschwindigkeit v_R Betrag der resultierenden Geschwindigkeit zur Zeit t $\vec{v}_F$ Fallgeschwindigkeit zur Zeit t auf Grund der Gravitation
Ort-Zeit-Gesetz	$y = -\frac{g}{2}t^2;\ x = v_0 \cdot t$	
Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz	$v_R = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}$	

■ Ein mit $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ waagerecht geworfener Körper erreicht nach 3 s einen Punkt, der 60 m Abstand von der Vertikalen und rund 45 m von der Horizontalen hat: $x = 20 \cdot 3\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{m}$,

$y = -\frac{10}{2} \cdot 3^2\ \mathrm{m} = -45\ \mathrm{m}$. Die Augenblicksgeschwindigkeit beträgt nach 3 s etwa $36\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$:

$v_R = \sqrt{20^2 + 10^2 \cdot 3^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$\approx 36\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$





$v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_F = g \cdot t$
$\approx 10 \cdot 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$\approx 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Senkrechter Wurf		
	nach oben	nach unten
Ort-Zeit-Gesetz	$y = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2$	$y = -v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2$
Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz	$v_R = v_0 - g \cdot t$	$v_R = -v_0 - g \cdot t$

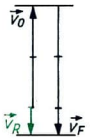
Beim senkrechten Wurf nach oben wird zur Zeit $t_h = \frac{v_0}{g}$ der höchste Punkt mit $s_h = \frac{v_0^2}{2g}$ erreicht.

■ Ein mit $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ senkrecht nach oben geworfener Körper erreicht nach 2,5 s eine Höhe von rund 19 m.

$y = 20 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m} - 5 \cdot 2{,}5^2\ \mathrm{m} = 18{,}75\ \mathrm{m}$

Die Augenblicksgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt

$v_R = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} - 10 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$= -5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
d. h., sie ist abwärts gerichtet.



$v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_F = -g \cdot t$
$v_F = -10 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_F = -25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

➡ 214

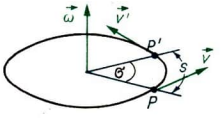
Schräger Wurf	
Wurfparabel	$y = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan \alpha$
Ort-Zeit-Gesetz	$y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha$ $x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$
Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz	$v_R = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t \cdot \sin \alpha}$
Wurfhöhe	Der höchste Punkt wird zur Zeit $t_h = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$ mit $s_h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$ erreicht.
Wurfweite	Der weiteste Punkt (beim Wurf in der Ebene) wird zur Zeit $t = \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$ mit $s_w = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ erreicht.
Bedeutung der Formelzeichen wie beim waagerechten Wurf	

2.4.3. Dynamik

Grundlagen

Grundgesetz der Translation (Newtonsches Grundgesetz)	$F \sim a$ $m \cdot a = F$	F Kraft m Masse des Körpers a Beschleunigung ϱ Dichte des betreffenden Stoffes G Gewichtskraft des Körpers F_R Reibungskraft F_N Normalkraft (wirkt senkrecht zur Auflagefläche) μ Reibungszahl (↗ 114)
Masse	$m = \frac{F}{a}$	
Dichte	$\varrho = \frac{m}{V}$	
Gewichtskraft	$G = m \cdot g$	
Reibungskraft	$F_R = \mu \cdot F_N$	

Gleichförmige Kreisbewegung eines Massepunktes

Drehwinkel	$\sigma = \frac{s}{r}$ (σ in rad)	
Radialbeschleunigung	$a_r = \frac{v^2}{r}$ $a_r = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = r \cdot \omega^2$	
Radialkraft	$F_r = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot a_r$; $F_r = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2} = m \cdot r \cdot \omega^2$	
Fliehkraft	$F_z = m \cdot r \cdot \omega^2$	

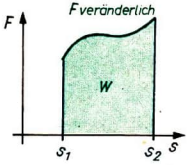
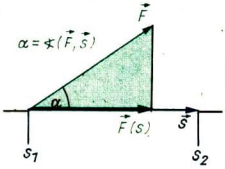
Drehbewegung (Rotation) eines starren Körpers

Drehmoment	$M_D = F \cdot r$ für $\vec{F} \perp \vec{r}$ $M_D = F \cdot r \cdot \sin \sphericalangle(\vec{F}, \vec{r})$; für $\sphericalangle(\vec{F}, \vec{r})$ beliebig	M_D Drehmoment $\sphericalangle(\vec{F}, \vec{r})$ Winkel zwischen der Richtung der Kraft F und der Richtung des Radius r
Gleichgewichtsbedingung für einen drehbaren Körper	$\Sigma \vec{M}_i = 0$ $\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = 0$ $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma F_z = 0$	
Trägheitsmoment (gilt für Rotation um eine bestimmte Drehachse)	Punktmasse $J = m \cdot r^2$ starrer Körper $J_A = \int r^2 \, dm$	
Grundgesetz der Rotation	$M = J \cdot \alpha$	
Drehimpuls	$D = J \cdot \omega$	
Satz von der Erhaltung des Drehimpulses	In einem abgeschlossenen System ($M_a = 0$) gilt: $D_{ges} = \sum_{k=1}^{n} (J_k \cdot \omega_k) = \text{konst.}$	
Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$	

Kreiszylinder:	$J_z = \frac{m \cdot r^2}{2}$	(bei Rotation um die Symmetrieachse)
Hohlzylinder:	$J_H = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2}$	
Kugel:	$J_K = \frac{2\,m \cdot r^2}{5}$	(bei Rotation um Achse durch den Mittelpunkt)
Stab:	$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$	

2.4.4. Arbeit und Energie

Arbeit

Arbeit (allgemein)	$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot \cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})\, ds$ $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds$ $W = \int_{s_1}^{s_2} P(t) \cdot dt$	allgemeiner Fall 
Arbeit (Sonderfälle) für $\vec{F} \parallel \vec{s}$, also $\cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s}) = 1$ für $F = F(s) =$ konst. für $F = F(s) =$ konst. und $\vec{F} \parallel \vec{s}$ für $P = P(t) =$ konst.	$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$ $W = F \cdot s \cdot \cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})$ $W = F \cdot s$ $W = P \cdot t$	für $F = F(s) =$ konst. 
Hubarbeit	$W_H = G \cdot h$ $W_H = m \cdot g \cdot h$	
Reibungsarbeit	$W_R = F_R \cdot s$ $W_R = \mu \cdot F_N \cdot s$	μ Reibungszahl (↗ 114)
Federspannarbeit	$W_F = \frac{1}{2} F_E \cdot s$ $W_F = \frac{1}{2} k \cdot s^2$	F_E Endkraft k Federkonstante
Beschleunigungsarbeit	$W_B = m \cdot a \cdot s$	

Arbeit im Gravitationsfeld	$W_G = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$	γ Gravitationskonstante (↗ 110) m Masse der Körper
Gesetz von der Gleichheit der mechanischen Arbeit	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$ $W_1 = W_2$	
Leistung	$P = \frac{W}{t} = F \cdot v$ $P = \frac{dW}{dt}$	
Wirkungsgrad	$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$ $\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{W_2}{W_1}$	

Energie

Potentielle Energie		Kinetische Energie	
Lageenergie	Federspannenergie	Translationsenergie	Rotationsenergie
$E_{pot} = F_G \cdot h$ $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$	$E_{pot} = \frac{1}{2} F_E \cdot s$ $E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot s^2$	$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$	$E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie (für ein abgeschlossenes reibungsfreies mechanisches System)	$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$ $E_a = E_e$ $E_{pot,a} + E_{kin,a} = E_{pot,e} + E_{kin,e}$
Die Indizes a und e bezeichnen die Zustände am Anfang bzw. am Ende des Prozesses.	
Arbeit-Energie-Beziehung	$W = E_{mech,e} - E_{mech,a}$ $W = \Delta (E_{pot} + E_{kin})$

2.4.5. Impuls, Stoßvorgänge, Drehimpuls

Impuls

Kraftstoß – für mittlere Kraft – für F = konst.	 $S = \bar{F} \cdot \Delta t$ $S = F \cdot \Delta t$	F Kraft $\bar{F}$ mittlere Kraft Δt Zeitdauer der Einwirkung

Impuls	$p = m \cdot v$	m Masse eines Körpers v Geschwindigkeit eines Körpers
Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impuls	$S = \Delta p$ $S = \Delta (m \cdot v)$ $\bar{F} \cdot \Delta t = \Delta (m \cdot v)$	
Gesetz von der Erhaltung des Impulses – für ein abgeschlossenes mechanisches System – für ein abgeschlossenes mechanisches System aus zwei Körpern	$\sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \text{konst.}$ $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$	v_1, v_2 Geschwindigkeit der Körper vor dem Stoß u_1, u_2 Geschwindigkeit der Körper nach dem Stoß m_1, m_2 Masse der Körper

Stoßvorgänge

	Elastischer Stoß (gerade, zentral)	Unelastischer Stoß (gerade, zentral)
Impuls	$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$	$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\, \vec{u}$
Energie	$E_{kin,a} = E_{kin,e}$ $\Delta E_{kin} = 0$	$E_{kin,a} > E_{kin,e}$ $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) - \frac{1}{2} u^2 (m_1 + m_2)$
Geschwindigkeiten nach dem Stoß	$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2 m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2 m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$	$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

Drehimpuls

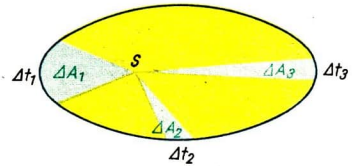
Drehimpuls	$D = J \cdot \omega$	J Trägheitsmoment ω Kreisfrequenz
Satz von der Erhaltung des Drehimpulses für $M_D = 0$	$D_{ges} = \sum_{k=1}^{n} \left(J_k \cdot \vec{\omega}_k\right) = \text{konst.}$	M_D Drehmoment

2.4.6. Gravitationsfeld

Gravitation

Gravitationsgesetz (Gravitationskraft)	$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	γ Gravitationskonstante (↗ 110) m Massen der Körper r Radien
Gravitationsfeldstärke	$E = \gamma \cdot \frac{m}{r^2}$	
Arbeit im Gravitationsfeld	$W_G = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$	

Keplersche Gesetze

Erstes Keplersches Gesetz	Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.	ΔA Teile der elliptischen Fläche (↗ Bild) T Umlaufzeit des Planeten um die Sonne a große Halbachse der Planetenbahn Δt ein Zeitintervall der Umlaufzeit des Planeten
	 $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$ $\Delta A_1 = \Delta A_2 = \Delta A_3$	
Zweites Keplersches Gesetz	In gleichen Zeiten ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$) überstreicht der Leitstrahl Sonne–Planet gleiche Flächen: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konst.}$	
Drittes Keplersches Gesetz	$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$; $T^2 \sim a^3$	

➡ 214

Kosmische Geschwindigkeiten

Kreisbahngeschwindigkeit	$v_k = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}}$; $v_{k,\,Erde} = 7{,}9\ km \cdot s^{-1}$
Parabelbahngeschwindigkeit	$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma \cdot M}{r}}$; $v_{p,\,Erde} = 11{,}2\ km \cdot s^{-1}$
Ellipsenbahn; Apogäumsentfernung	$r_2 = \frac{r_1}{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_1 \cdot v_1^2} - 1}$

r Abstand vom Mittelpunkt des Zentralkörpers
r_1 Perigäum
r_2 Apogäum
γ Gravitationskonstante (↗ 110)
M Masse des Zentralkörpers
v_1 Geschwindigkeit des Körpers im Perigäum

2.4.7. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

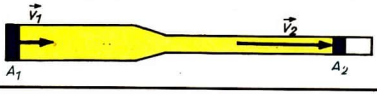
Ruhende Flüssigkeiten und Gase

Dichte	$\varrho = \frac{m}{V}$	ϱ Dichte m Masse V Volumen p Druck F Druckkraft A Fläche h Höhe g Fallbeschleunigung F_A Auftriebskraft V_K Volumen des Körpers
Kolbendruck	$p = \frac{F}{A}$	
Schweredruck	$p = h \cdot \varrho \cdot g$	
Auftriebskraft (Archimedisches Gesetz)	$F_A = F_{G,\,Fl}$ $F_A = V_k \cdot \varrho_{Fl} \cdot g$	

Hydraulische Anlagen

Satz von der Gleichheit der Arbeit	$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$	F Kraft, die auf die Fläche wirkt s Weg des Kolbens A Fläche
Gleichgewicht	$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$	

Strömende Flüssigkeiten und Gase

Kontinuitätsgleichung (stationäre Strömung in strömenden Flüssigkeiten oder in langsam strömenden Gasen)	$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ $\quad A \cdot v = konst.$ 

2.4.8. Spezielle Relativitätstheorie

Relativität von Zeit und Länge

Galilei-Transformation	$x = x' + u \cdot t$ (u = konst.) $y = y'$; $z = z'$; $t = t'$ $v = v' + u$	x, y, z Koordinaten im System S t Zeit im System S v Geschwindigkeit im System S x', y', z' Koordinaten im System S' v' Geschwindigkeit im System S' c Lichtgeschwindigkeit u Geschwindigkeit des Systems S' gegenüber dem System S l Länge im System S l' Länge im System S'
Lorentz-Transformation	Ortskoordinaten $x = \frac{x' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ $\quad x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ $y = y'$ $\quad y' = y$ $z = z'$ $\quad z' = z$ Zeitkoordinaten $t = \frac{t' + x' \cdot \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ $\quad t' = \frac{t - x \cdot \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$	
Zeitdilation (Zeitdehnung)	$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$; $t > t'$	
Längenkontraktion (Längenzusammenziehung)	$l = l' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; $l < l'$	
Addition von Geschwindigkeiten	$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v' \cdot u}{c^2}}$	

Masse-Energie-Beziehung

Relativistische Masse	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	m_0 Ruhemasse v Geschwindigkeit eines Körpers c Lichtgeschwindigkeit E Energie E_0 Ruheenergie E_{kin} Bewegungsenergie
Masse-Energie-Beziehung (Einsteinsche Gleichung)	$E = m \cdot c^2$ $\Delta E_0 = \Delta m_0 \cdot c^2$	
Gesamtenergie	$E = E_0 + E_{kin}$	
Ruheenergie	$E_0 = m_0 \cdot c^2$	

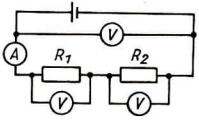
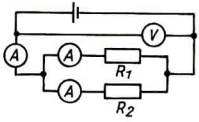
2.5. Größengleichungen aus der Elektrizitätslehre

2.5.1. Elektrischer Gleichstrom

Der einfache Stromkreis

Elektrische Stromstärke	$I = \frac{Q}{t}$	Q elektrische Ladung W_{el} Elektrische Arbeit ϱ spezifischer elektrischer Widerstand (↗ 120)
Elektrische Spannung	$U = \frac{W_{el}}{Q}$	
Ohmsches Gesetz (für ϑ konst.)	$I \sim U;\ I = \frac{U}{R}$	
Elektrischer Widerstand	$R = \frac{U}{I}$	
Widerstandsgesetz (für ϑ konst.)	$R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$	
Elektrische Arbeit	$W_{el} = U \cdot I \cdot t$ $W_{el} = U \cdot Q$ $W_{el} = I^2 \cdot R \cdot t$ $W_{el} = \frac{U^2 \cdot t}{R}$	
Elektrische Leistung	$P_{el} = U \cdot I$ $P_{el} = I^2 \cdot R$	

Unverzweigter und verzweigter Stromkreis

Art des Stromkreises	Unverzweigter Stromkreis (Reihenschaltung)	Verzweigter Stromkreis (Parallelschaltung)
Schaltplan		
Elektrische Stromstärke	$I_g = I_1 = I_2$	$I_g = I_1 + I_2$
Elektrische Spannung	$U_g = U_1 + U_2$	$U = U_1 = U_2$
Elektrischer Widerstand	$R_g = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};\ R_g = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
Wichtige Beziehungen	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$

2.5.2. Felder

Elektrostatisches Feld

Elektrische Feldstärke – in jedem Punkt des Raumes (bei einem geladenen Probekörper) – im homogenen Feld eines Plattenkondensators – im Abstand r von einer Punktladung	$E = \frac{F}{Q_p}$ $E = \frac{U}{s}$ $E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$	F Kraft Q_p Ladung des Probekörpers U Spannung zwischen den Platten s Plattenabstand ε Dielektrizitätskonstante
Elektrische Ladung, Elektrizitätsmenge – allgemein – für I = konst.	$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt$ $Q = I \cdot \Delta t$	
Kraft zwischen Ladungen (Coulombsches Gesetz)	$F_Q = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$	ε_0 elektrische Feldkonstante (↗ 110)
Elektrische Kapazität eines Kondensators – allgemein – für einen Plattenkondensator	$C = \frac{Q}{U}$ $C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{s}$	ε_r relative Dielektrizitätskonstante (↗ 119) A Fläche
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$	
Energie des elektrischen Feldes (im Plattenkondensator)	$E_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 \cdot V$ $E_{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} U \cdot Q$	E elektrische Feldstärke

Magnetostatisches Feld

Magnetische Feldstärke	$H = I_{err} \cdot \frac{N}{l}$	I_{err} Erregerstromstärke N Windungsanzahl l Länge der Spule
Magnetische Flußdichte (magnetische Induktion) – allgemein – bei homogenem Feld im Innern einer Spule	$B = \frac{F}{I \cdot l} = \frac{F}{Q \cdot v}$ $B = \mu \cdot I_{err} \cdot \frac{N}{l} = \mu \cdot H$	B magnetische Flußdichte F Kraft l Länge (des Leiterstücks oder der Spule) Q Ladung

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter	$F = I \cdot l \cdot B$	v mittlere Geschwindigkeit der Elektronen e Elementarladung (↗ 110) μ Permeabilität μ_0 magnetische Feldkonstante (↗ 109) μ_r relative Permeabilität (↗ 119) L Induktivität V Raum der Spule ($A \cdot l$)
Kraft auf einen bewegten Ladungsträger (Lorentzkraft) für $\vec{F}_L \perp \vec{B}$, $\vec{F}_L \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$	$F_L = e \cdot v \cdot B$	
Kraft zwischen parallelen Strömen	$F = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2\pi \cdot r}$	
Permeabilität	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$	
Energie des magnetischen Feldes (Spule)	$E_{mag} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot B^2 \cdot A \cdot l$ $E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$	

Elektromagnetisches Feld

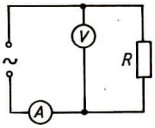
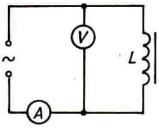
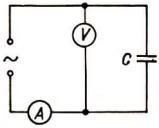
Induktionsgesetz, induzierte Spannung (Spule)	$U_{ind} = \frac{\Delta (B \cdot A)}{\Delta t}$; $A = N \cdot A_0 \cdot \cos\alpha$	A_0 Fläche einer Windung N Windungsanzahl B magn. Flußdichte Φ magnetischer Fluß L Induktivität ω Kreisfrequenz
Momentanwert der Spannung	$U_{ind} = \frac{d(B \cdot A)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$	
Magnetischer Fluß	$\Phi = B \cdot A$	
Selbstinduktionsspannung	$U_{ind} = \mu \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A_0 \cdot \frac{dI}{dt}$ $= L \frac{dI}{dt}$	
Induktivität (einer Spule)	$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A_0}{l}$ $= \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A_0$	
Momentanwert der Spannung beim Wechselstromgenerator	$U_{ind} = N \cdot B \cdot A_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$	

2.5.3. Elektrischer Wechselstrom

Stromstärke, Spannung, Frequenz

Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi f;\ \omega = \frac{2\pi}{T}$	f Frequenz des Wechselstromes T Periode, Schwingungsdauer i_{max} Maximalwert der Wechselstromstärke u_{max} Maximalwert der Wechselspannung
Momentanwert der Wechselstromstärke	$i = i_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	
Momentanwert der Wechselspannung	$u = u_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	
Effektivwert der Wechselstromstärke	$I = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i_{max} \approx 0{,}707 \cdot i_{max}$	
Effektivwert der Wechselspannung	$U = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot u_{max} \approx 0{,}707 \cdot u_{max}$	

Widerstand

Ohmscher Widerstand R (*)	Induktiver Widerstand X_L (*)	Kapazitiver Widerstand X_C (*)
		
$R = \frac{U}{I};\ R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ $\varphi = 0$	$X_L = \omega \cdot L;\ X_L = \frac{U}{I}$ dabei $\varphi = +\frac{\pi}{2}$	$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C};\ X_C = \frac{U}{I}$ dabei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
Scheinwiderstand bei Reihenschaltung	$R_g = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	
Blindwiderstand bei Reihenschaltung	$X = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$ $X = X_L - X_C$	

(*) bei konstanten Betriebszuständen

φ Winkel der Phasenverschiebung
L Induktivität
C Kapazität
ϱ spezifischer elektrischer Widerstand (↗ 120)
l Länge des Leiters
A Querschnitt des Leiters

Arbeit, Leistung

Scheinleistung	$P_s = U \cdot I$; $P_s = \frac{1}{2} u_{max} \cdot i_{max}$
Scheinarbeit	$W_s = P_s \cdot t = U \cdot I \cdot t$
Phasenverschiebung	$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$
Leistungsfaktor	$\cos \varphi = \frac{P_W}{P_s}$
Wirkleistung	$P_W = U \cdot I \cdot \cos \varphi = P_s \cdot \cos \varphi$
Wirkarbeit	$W_W = P_W \cdot t = U \cdot I \cdot t \cdot \cos \varphi$

Transformator

Energieübertragung	$I_1 \cdot U_1 \cdot \cos \varphi_1 = I_2 \cdot U_2 \cdot \cos \varphi_2 + P_v$	P_v Verlustleistung U_p, I_p, N_p Spannung, Stromstärke und Windungsanzahl im Primärstromkreis U_s, I_s, N_s Spannung, Stromstärke und Windungsanzahl im Sekundärstromkreis
Spannungsverhältnis am unbelasteten Transformator	$\frac{U_p}{U_s} = \frac{N_p}{N_s}$	
Stromstärkeverhältnis am belasteten Transformator	$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$	

2.6. Größengleichungen aus der Thermodynamik

Kinetische Gastheorie

Teilchenanzahldichte	$n = \frac{N}{V}$	N Teilchenanzahl
Grundgleichung für den Druck des idealen Gases	$p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot \bar{E}_{kin}$ $p = \frac{1}{3} \frac{N \cdot m_x \cdot \bar{v}^2}{V}$; $p = \frac{1}{3} \frac{m \cdot \bar{v}^2}{V}$	V Volumen des idealen Gases p Druck des idealen Gases m_x Masse eines Moleküls

Mittlere Geschwindigkeit der Moleküle des idealen Gases	$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{3p \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{\varrho}}$ $\bar{v} = \sqrt{3\,R \cdot T}$	R universelle Gaskonstante (↗ 110)
Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie der Moleküle des idealen Gases und der Temperatur	$\frac{1}{2} m_x \cdot \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k \cdot T$	k Boltzmann-konstante (↗ 110)
Mittlere kinetische Energie der Moleküle	$E_{kin} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \bar{E}_i}{N}$	$\bar{E}_i$ mittlere Energie im jeweiligen Intervall
Innere Energie des idealen Gases (und einatomiger realer Gase)	$U = N \cdot \bar{E}_{kin}$ $U = \frac{3}{2} m \cdot R \cdot T$	

Phänomenologische Thermodynamik

Zustandsgrößen: Temperatur T; Druck p; Volumen V; Masse m; innere Energie U

Prozeßgrößen: Wärme Q; Arbeit W

Erster Hauptsatz der Thermodynamik	$U = Q + W$; $U = U_e - U_a$ $U_e - U_a = Q + W$

Voraussetzung: Die kinetische und die potentielle Energie des entsprechenden Systems sind zu vernachlässigen; es erfolgt keine Übertragung von stoffgebundener Energie und Strahlungsenergie.

Volumenarbeit – bei konstantem Druck – bei veränderlichem Druck	$W_v = -\,p\,(V_e - V_a)$ $W_v = -\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \cdot \Delta V_i$ $\Delta V_i = (V_e - V_a)_i$	V_a Systemvolumen am Anfang des Prozesses V_e Systemvolumen am Ende des Prozesses ΔV_i Volumenänderung $\bar{p}_i$ mittlerer Druck
Kalorische Zustandsgleichung – bei konstantem Volumen – bei konstantem Druck (Grundgleichung der Wärmelehre)	$U_e - U_a = m \cdot c_v\,(T_e - T_a)$ $Q = m \cdot c_p\,(T_e - T_a)$	U_a innere Energie des Systems am Anfang des Prozesses U_e innere Energie des Systems am Ende des Prozesses T_a Anfangstemperatur T_e Endtemperatur c_p spezifische Wärmekapazität für Gase bei konstantem Druck (↗ 116)

		c_v spezifische Wärmekapazität für Gase bei konstantem Volumen (↗ 116) c spezifische Wärmekapazität für feste Stoffe und Flüssigkeiten (↗ 115)
Voraussetzung: m = konst.; keine Veränderung des Aggregatzustandes		
Isobare Wärmeübertragung (p = konst.)	$-Q_A = Q_B$ $-m_A \cdot c_{p,A}(T_e - T_a)_A = m_B \cdot c_{p,B}(T_e - T_a)_B$	
Richmannsche Mischungsregel	$T_m = \frac{m_A \cdot c_{p,A} \cdot T_{a,A} + m_B \cdot c_{p,B} \cdot T_{a,B}}{m_A \cdot c_{p,A} + m_B \cdot c_{p,B}}$	
Thermischer Wirkungsgrad	$\eta_{th} = \frac{\lvert W \rvert}{Q_{zu}}$ $\eta_{th} = 1 - \frac{\lvert Q_{ab} \rvert}{Q_{zu}}$ $\eta_{th} = 1 - \frac{T_{ab}}{T_{zu}}$	
Mit dem Index A werden die Größen am Anfang, mit dem Index B am Ende des Prozesses bezeichnet.		

Thermodynamisches Verhalten fester und flüssiger Stoffe

Spezifische Verdampfungswärme (p = konst.)	$q_V = \frac{Q_V}{m}$	α linearer Ausdehnungskoeffizient (↗ 115) γ kubischer Ausdehnungskoeffizient (↗ 116) $\gamma \approx 3\alpha$
Spezifische Schmelzwärme (p = konst.)	$q_S = \frac{Q_S}{m}$	
Längenänderung	$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$	
Linearer Ausdehnungskoeffizient	$\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T}$	
Länge eines Körpers	$l_2 = l_1 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$	
Volumenänderung	$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta T$	
Volumen eines Körpers	$V_2 = V_1 (1 + \gamma \cdot \Delta T)$	

Thermodynamisches Verhalten des idealen Gases

Die Gesetze für das ideale Gas können in guter Näherung für viele reale Gase verwendet werden, z. B. für Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Kohlendioxid und für Edelgase.

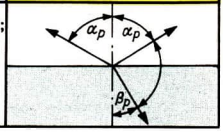
Thermische Zustandsgleichung des idealen Gases für eine abgeschlossene Gasmenge (m = konst.; R = konst.)	$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$ $\frac{p \cdot V}{T} = m \cdot R =$ konst. $\frac{p_a \cdot V_a}{T_a} = \frac{p_e \cdot V_e}{T_e}$	p Druck V Volumen V_m molares Volumen m Masse m_m molare Masse R spezifische Gaskonstante R_0 universelle Gaskonstante (↗ 110) T Temperatur
Universelle Gaskonstante	$R_0 = \frac{p_0 \cdot V_{m,0}}{T_0}$	
Spezifische Gaskonstante	$R = R_0 \frac{1}{m_{m,0}}$	
Isotherme Zustandsänderung (T = konst.)	$p \cdot V =$ konst.; $p_a \cdot V_a = p_e \cdot V_e$ Wegen $\Delta U = 0$ gilt: $-W_v = Q$	
Isochore Zustandsänderung (V = konst.)	$\frac{p}{T} =$ konst.; $\frac{p_a}{T_a} = \frac{p_e}{T_e}$ $p_e = p_a (1 + \gamma \cdot \Delta T)$ Wegen $W_v = 0$ gilt: $U_e - U_a = Q$	
Isobare Zustandsänderung (p = konst.)	$\frac{V}{T} =$ konst.; $\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_e}{T_e}$ $V_e = V_a (1 + \gamma \cdot \Delta T)$ $U_e - U_a = Q + W_v$	
Adiabatische Zustandsänderung ($Q = 0$)	$U_e - U_a = W_v$	

2.7. Größengleichungen aus der Optik

Strahlenoptik

Reflexionsgesetz	$\alpha = \alpha'$	α Einfallswinkel α' Reflexionswinkel β Brechungswinkel n_A Brechzahl (Übergang vom Stoff A zum Vakuum) n_B Brechzahl (Übergang vom Stoff B zum Vakuum) n Brechzahl (↗ 121) f Brennweite s Gegenstandsweite s' Bildweite y Gegenstandsgröße y' Bildgröße
Brechzahl (↗ 121)	$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$	
Brechungsgesetz	$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_B}{n_A}$	
Abbildungsgleichung (für dünne Linsen)	$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$	
Abbildungsmaßstab	$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'}$	

Wellenoptik

Phasengeschwindigkeit einer Welle (Grundgleichung der Wellenlehre)	$c = \lambda \cdot f$	λ Wellenlänge f Frequenz $n = 1, 2, 3, \ldots$ b Gitterkonstante s_n Abstand zwischen dem jeweiligen Maximum und dem Minimum 0. Ordnung e_n Abstand zwischen dem Interferenzstreifen und dem Gitter $m = 1, 2, 3, \ldots$ d_A Schichtdicke bei Auslöschung d_V Schichtdicke bei Verstärkung λ Wellenlänge λ_0 Wellenlänge im Vakuum
Interferenzgleichung für die Maxima der Wellenüberlagerung	$\frac{n \cdot \lambda}{b} = \frac{s_n}{e_n}$ $\frac{n \cdot \lambda}{b} = \sin \alpha_n$	
Interferenz an dünnen Schichten	$d_A = 2m \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{2m \cdot \lambda_0}{4n}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ $d_V = (2m - 1)\frac{\lambda}{4}$ $= (2m - 1)\frac{\lambda_0}{4n}$	
Brewstersches Gesetz (Lichtwellen)	$180° - (\alpha_p + \beta_p) = 90°$; $n = \tan \alpha$	

Quanteneigenschaften des Lichts

Energie eines Lichtquants (Photon)	$E = h \cdot f$	h Plancksches Wirkungsquantum (↗ 110) W_A Austrittsarbeit (↗ 120) f_G Grenzfrequenz ΔE Differenz der Energieterme im Atom R_y Rydberg-Frequenz (↗ 111)
Kinetische Energie der Elektronen (beim äußeren lichtelektrischen Effekt)	$E_{kin} = h \cdot f - W_A$	
Energiebilanz beim Fotoeffekt (Einsteinsche Gleichung)	$h \cdot f = E_{kin} + W_A$ $h \cdot f = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 + W_A$	
Austrittsarbeit	$W_A = h \cdot f_G$	
Frequenz des emittierten Lichts	$f = \frac{\Delta E}{h}$	
Termformeln für das H-Atom	$f = \frac{R_y}{m^2} - \frac{R_y}{n^2}$ mit $m = 1$ $n = 2, 3, 4, \ldots$ Lymann-Serie mit $m = 2$ $n = 3, 4, 5, \ldots$ Balmer-Serie	

2.8. Größengleichungen für Schwingungen und Wellen

Grundbegriffe

Periode, Schwingungsdauer	$T = \frac{t}{n}$; $T = \frac{1}{f}$	n Anzahl der Schwingungen t Zeit
Frequenz	$f = \frac{n}{t}$; $f = \frac{1}{T}$	
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi \cdot f$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$	

Schwingungen

Momentanwert einer sich zeitlich periodisch verändernden physikalischen Größe	$y = y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	y_{max} Maximalwert l Länge des Pendels g Fallbeschleunigung m Masse des Körpers J Trägheitsmoment D eine von den Abmessungen und dem Material des Drahtes abhängige Konstante k Federkonstante T Periode, Schwingungsdauer f Frequenz L Induktivität C elektrische Kapazität
Schwingungsdauer eines Pendelschwingers (kleiner Ausschlag; Massepunkt)	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$; $g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$	
Schwingungsdauer eines Federschwingers	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$	
Schwingungsdauer eines Torsionsschwingers	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$	
Thomsonsche Schwingungsgleichung	$T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$	

Wellen

Grundgleichung der Wellenlehre (Phasengeschwindigkeit der Welle)	$v = \lambda \cdot f$	λ Wellenlänge f Frequenz

↗ Reflexionsgesetz S. 143
↗ Brechungsgesetz S. 143
↗ Interferenzgleichung S. 144

2.9. Größengleichungen aus der Atomphysik

Aufbau der Atomkerne

Atomare Massen-einheit	$1\,u = \frac{1}{12}\, m_A\left({}^{12}_{6}\mathrm{C}\right)$	u atomare Massen-einheit (↗ 110) m_A Atommasse Z Kernladungszahl λ Zerfallskonstante
Relative Atommasse	$A_r = \frac{m_A}{u}$	
Massenzahl	$A = Z + N$	
Zerfallsgesetz	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	

Energiebilanz bei Kernreaktionen

Massendefekt	$\Delta m_0 = (Z \cdot m_{0,p} + N \cdot m_{0,n}) - m_{0,k}$	Z Kernladungszahl N Neutronenzahl $m_{0,p}$ Ruhmasse des Protons $m_{0,n}$ Ruhmasse des Neutrons $m_{0,k}$ Ruhmasse des Atomkerns c Lichtgeschwindigkeit
Kernbindungs-energie	$E_B = \Delta m_0 \cdot c^2$	

Astronomie 3

Einige wichtige Größen

Astronomische Einheit (AE)	$1\ \text{AE} = 149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}$
Parsec (pc)	$1\ \text{pc} = 30{,}86 \cdot 10^{12}\ \text{km} = 206\,265\ \text{AE}$
Lichtjahr (ly)	$1\ \text{ly} = 9{,}461 \cdot 10^{12}\ \text{km} = 0{,}3068\ \text{pc}$

Die Erde

Neigung der Erdachse (1975)	$\varepsilon = 23^\circ\, 26'\, 33{,}12'' \approx 23{,}5^\circ$
Radius (Äquator)	$a = 6{,}378 \cdot 10^3\ \text{km}$
(Pol)	$b = 6{,}357 \cdot 10^3\ \text{km}$
Abplattung	$(a - b) : a = 1 : 298 \approx 1 : 300$
Volumen	$V_E = 1{,}083 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$
Masse	$m_E = 5{,}975 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$
Mittlere Dichte	$\varrho_E = 5{,}524\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$
Fallbeschleunigung in Meeresniveau am Äquator; am Pol	$g_A = 9{,}78\ m \cdot \text{s}^{-2};\ g_P = 9{,}83\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Mittlere Geschwindigkeit in der Bahn	$v_E = 29{,}8\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$

Der Mond

Mittlere Entfernung von der Erde	$S_M = 3{,}844 \cdot 10^5\ \text{km}$
Mittlerer scheinbarer Radius	$R'_M = 15'\, 32{,}6'' = 0{,}259^\circ$
Radius	$R_M = 1{,}738 \cdot 10^3\ \text{km} = 0{,}27\ R_E$
Volumen	$V_M = 2{,}192 \cdot 10^{10}\ \text{km}^3 = 0{,}02\ V_E$
Masse	$m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} = 0{,}0123\ m_E$
Mittlere Dichte	$\varrho_M = 3{,}34\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3} = 0{,}61\ \varrho_E$
Fallbeschleunigung an der Oberfläche	$g_M = 1{,}62\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 0{,}166\ g_E$
Monatslänge synodisch; siderisch	$t_{syn} = 29{,}530\,59\ \text{d};\ t_{sid} = 27{,}321\,66\ \text{d}$

Die Sonne

Mittlere Entfernung von der Erde	$S_S = 149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}$
Mittlerer scheinbarer Radius	$R'_S = 16'\, 1{,}2'' = 0{,}267^\circ$
Radius	$R_S = 6{,}958 \cdot 10^5\ \text{km} = 109\ R_E$
Volumen	$V_S = 1{,}412 \cdot 10^{18}\ \text{km}^3 = 1{,}3 \cdot 10^6\ V_E$
Masse	$m_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg} = 3{,}33 \cdot 10^5\ m_E$
Mittlere Dichte	$\varrho_S = 1{,}41\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3} = 0{,}26\ \varrho_E$
Fallbeschleunigung an der Oberfläche	$g_s = 2{,}74 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 27{,}5\ g_E$
Solarkonstante	$S = 1{,}36\ \text{kW} \cdot \text{m}^{-2}$
Leuchtkraft	$L_S = 3{,}82 \cdot 10^{23}\ \text{kW} \approx 4 \cdot 10^{23}\ \text{kW}$

Die Planeten

Name des Planeten	Äquatorradius R in km	Äquatorradius R (R_E)	Abplattung $\frac{a-b}{a}$	Masse m in 10^{24} kg	Masse m in Erdmassen (m_E)	mittlere Dichte ϱ in $g \cdot cm^{-3}$	Rotationsperiode in Tagen	Entweichgeschwindigkeit in $km \cdot s^{-1}$
Merkur	2 400	0,38	0,000	0,33	0,056	5,44	58,65	4,3
Venus	6 100	0,95	0,000	4,87	0,815	5,23	243,09	10,4
Erde	6 378	1,00	0,003	5,98	1,000	5,52	1,00	11,2
Mars	3 400	0,53	0,013	0,64	0,107	3,95	1,03	5,0
Jupiter	71 800	11,26	0,061	1 899	317,82	1,30	0,41	59,5
Saturn	60 300	9,46	0,096	568	95,11	0,68	0,43	35,5
Uranus	25 900	4,06	0,06	87	14,52	1,21	0,45	21,2
Neptun	24 600	3,86	0,02	103	17,22	1,65	0,66	23,4
Pluto[1])	2 500	0,39	—	0,90	0,18	2	6,39	—
Zum Vergleich:								
Sonne	$6{,}96 \cdot 10^5$	109	0,000	$199 \cdot 10^6$	$333 \cdot 10^3$	1,41	25,38	618

[1]) Alle Werte sehr unsicher

Die Bahnen der Planeten

Name des Planeten	Große Bahnhalbachse a in AE	Große Bahnhalbachse a in 10^6 km	Siderische Umlaufzeit t_{sid} in Jahren	Mittlere Bahngeschwindigkeit v in $km \cdot s^{-1}$	Neigung i der Bahn gegen die Ekliptik in °
Merkur	0,39	58	0,24	47,9	7,0
Venus	0,72	108	0,62	35,0	3,4
Erde	1,00	150	1,00	29,8	—
Mars	1,52	228	1,88	24,1	1,8
Jupiter	5,20	778	11,86	13,1	1,3
Saturn	9,54	1 427	29,46	9,6	2,5
Uranus	19,18	2 870	84,02	6,8	0,8
Neptun	30,06	4 496	164,79	5,4	1,8
Pluto	39,75	5 946	247,7	4,7	17,1

Entfernungen einiger astronomischer Objekte

Bezeichnung des Objektes	Entfernung in pc
Proxima Centauri	1,31
Sirius	2,65
Wega	8,1
Regulus	23,8
Beteigeuze	91
Plejaden	140
Deneb	200
Krebsnebel	1 200
Zentrum der Milchstraße	10 000

Bezeichnung des Objektes	Entfernung in pc
Kugelsternhaufen M3 im Sternbild der Jagdhunde	12 300
Magellansche Wolken	60 000
Andromedanebel	540 000
Spiralsystem im Sternbild der Jagdhunde	5 500 000
Radioquelle Cygnus A	200 000 000
Quasar 3 C 2 7 3	500 000 000

Beobachtungsobjekte für Schulfernrohre

Doppelsterne					
Bezeichnung	Rektaszension α	Deklination δ in °	Scheinbare Helligkeit m A	Scheinbare Helligkeit m B	Abstand in ″
γ And	2^h01^{min}	42,1	$2^m,4$	$5^m,1$	10,0
σ Ori AD	5^h36^{min}	− 2,6	$3^m,8$	$6^m,9$	12,9
σ Ori AE	5^h36^{min}	− 2,6	$3^m,8$	$6^m,7$	41,5
ξ UMa	13^h22^{min}	+55,2	$2^m,4$	$4^m,1$	14,5
β Lyr	18^h48^{min}	+33,3	$3^m,4$	$6^m,7$	45,8
β Cyg	19^h29^{min}	+27,9	$3^m,2$	$5^m,3$	34,3

Galaktische Sternhaufen und Nebel, außergalaktische Sternsysteme						
Bezeichnung	Rektaszension α	Deklination δ in °	Scheinbare Helligkeit m	Durchmesser in ′	Entfernung r in pc	[1])
h Persei	2^h16^{min}	+56,9	$4^m,4$	36	2 250	o
χ Persei	2^h19^{min}	+56,9	$4^m,7$	36	2 250	o
Plejaden	3^h44^{min}	+24,0	$1^m,4$	100	140	o
M 35	6^h06^{min}	+24,3	$5^m,3$	40	830	o
Praesepe	8^h38^{min}	+19,9	$3^m,9$	95	160	o
M 39	21^h30^{min}	+48,2	$5^m,3$	30	280	o
M 13	16^h40^{min}	+36,6	$5^m,8$	10	7 000	k
Orionnebel	5^h33^{min}	− 5,4	$2^m,9$	60	400	n
Andromedanebel	0^h40^{min}	+41,0	$3^m,5$	90 × 200	$5{,}4 \cdot 10^5$	s
Triangelnebel	1^h31^{min}	+30,4	$5^m,8$	53 × 83	$5{,}6 \cdot 10^5$	s

[1]) Erläuterung: o: offener Sternhaufen
k: kugelförmiger Sternhaufen
n: Gas-Staub-Nebel in der Galaxis
s: außergalaktisches Sternsystem

Sternbilder des nördlichen Sternhimmels (Auswahl)

Internat. Abkürzung	Lateinischer Name		Deutscher Name
	Nominativ	Genitiv	
And	Andromeda	Andromedae	Andromeda
Aql	Aquila	Aquilae	Adler
Aur	Auriga	Aurigae	Fuhrmann
Boo	Bootes	Bootis	Bootes (Rinderhirt)
Cas	Cassiopeia	Cassiopeiae	Kassiopeia
Cep	Cepheus	Cephei	Kepheus

Internat. Abkürzung	Lateinischer Name Nominativ	Genitiv	Deutscher Name
CMa	Canis Maior	Canis Maioris	Großer Hund
CMi	Canis Minor	Canis Minoris	Kleiner Hund
Cyg	Cygnus	Cygni	Schwan
Gem	Gemini	Geminorum	Zwillinge
Leo	Leo	Leonis	Löwe
Lyr	Lyra	Lyrae	Leier
Ori	Orion	Orionis	Orion
Per	Perseus	Persei	Perseus
Tau	Taurus	Tauri	Stier
UMa	Ursa Maior	Ursae Maioris	Großer Bär
UMi	Ursa Minor	Ursae Minoris	Kleiner Bär
Vir	Virgo	Virginis	Jungfrau

In Verbindung mit einer Sternbezeichnung wird der Genitiv und dessen Abkürzung gebraucht, z. B.
α in der Leier = α Lyrae = α Lyr
β in den Zwillingen = β Geminorum = β Gem
Stern 31 („Reiterlein") im Großen Bären = 31 Ursae Maioris = 31 UMa

Wichtige Sternbilder in den Jahreszeiten

ganzjährig sichtbar	Großer und Kleiner Bär, Kassiopeia
Frühling	Bootes, Krone, Löwe, Jungfrau
Sommer	Schwan, Leier, Adler, Skorpion
Herbst	Andromeda, Stier, Fuhrmann, Perseus
Winter	Orion, Großer und Kleiner Hund, Zwillinge

3

Die hellsten bei uns sichtbaren Sterne (↗ auch S. 153)

Bezeichnung	Sternbild	Rektaszension α	Deklination δ in °
Spica (α Vir)	Jungfrau	13^h23^{min}	−10,9
Regulus (α Leo)	Löwe	10^h06^{min}	+12,2
Rigel (β Ori)	Orion	5^h12^{min}	− 8,3
Wega (α Lyr)	Leier	18^h35^{min}	+38,7
Sirius (α CMa)	Großer Hund	6^h43^{min}	−16,7
Deneb (α Cyg)	Schwan	20^h40^{min}	+45,1
Castor (α Gem)	Zwillinge	7^h31^{min}	+32,0
Atair (α Aql)	Adler	19^h48^{min}	+ 8,7
Prokyon (α CMi)	Kleiner Hund	7^h37^{min}	+ 5,4
Polarstern (α UMi)	Kleiner Bär	1^h49^{min}	+89,0
Capella (α Aur)	Fuhrmann	5^h13^{min}	+45,9
Sonne	—	—	—
Dubhe (α UMa)	Großer Bär	11^h01^{min}	+62,0
Pollux (β Gem)	Zwillinge	7^h42^{min}	+28,2
Arktur (α Boo)	Bootes	14^h13^{min}	+19,5
Aldebaran (α Tau)	Stier	4^h33^{min}	+16,4
Beteigeuze (α Ori)	Orion	5^h53^{min}	+ 7,4

	Entfernung r in pc	Scheinbare Helligkeit m	Absolute Helligkeit M	Spektralklasse	Leuchtkraft in L_S
Spica	58,8	$+1^m,00$	$-2^m,8$	B 2	1 140
Regul.	23,8	$+1^m,36$	$-0^m,5$	B 8	135
Rigel	167	$+0^m,15$	$-6^m,0$	B 8	21 000
Wega	8,1	$+0^m,03$	$-0^m,5$	A 0	60
Sirius	2,7	$-1^m,46$	$+1^m,4$	A 1	24
Deneb	200	$+1^m,26$	$-5^m,2$	A 1	10 400
Cast.	14,5	$+1^m,56$	$+0^m,8$	A 3	41
Atair	5,1	$+0^m,76$	$+2^m,2$	A 7	11
Prok.	3,5	$+0^m,37$	$+2^m,6$	F 5	8
Polar.	143	$+2^m,01$	$-3^m,8$	F 7	1 650
Cap.	14,1	$+0^m,08$	$-0^m,6$	G 1	150
Sonne	$4{,}8 \cdot 10^{-6}$	$-26^m,72$	$+4^m,8$	G 2	1
Dubhe	32,3	$+1^m,80$	$-0^m,7$	G 9	165
Poll.	10,8	$+1^m,14$	$+1^m,0$	K 0	35
Arkt.	10,9	$-0^m,05$	$-0^m,2$	K 2	105
Alde.	20,0	$+0^m,85$	$-0^m,7$	K 5	165
Betei.	91	$+0^m,1 \ldots 1^m,2$ [1]	$-3^m,9$ [2]	M 2	3 100 [2]

[1]) veränderlicher Stern [2]) Mittelwert

Chemie 4

4.1. Definitionen, Größengleichungen, Formeln

Relative Atommasse A_r

Quotient aus der Masse eines Atoms eines Elements und dem zwölften Teil der Atommasse des Kohlenstoffnuklids $^{12}_{6}C$.

Relative Molekülmasse M_r

Quotient aus der Masse eines Moleküls und dem zwölften Teil der Atommasse des Kohlenstoffnuklids $^{12}_{6}C$; Summe der relativen Atommassen aller Atome eines Moleküls.

Avogadrosche Konstante N_A

(auch Loschmidtsche Konstante N_L). Naturkonstante, gibt die molare Teilchenanzahl an:

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$$

Die Avogadrosche Konstante ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Teilchenanzahl N eines Stoffes und der Stoffmenge n.

$$N = N_A \cdot n$$

Stoffmenge n

Basisgröße; Größenart, die der Zählbarkeit von Teilchen und Teilchenprozessen[1]) zugeordnet ist.
Die Stoffmenge wird auch **Objektmenge** genannt.
Einheiten: mol, kmol

[1]) Als Teilchen (Objekte) werden definiert: Atome, Moleküle, Ionen, Radikale und andere Gruppen und Bruchteile von Teilchen, Formeleinheiten, Äquivalente, Elektronen, Protonen, Photonen und andere Elementarteilchen, darüber hinaus auch Formelumsätze.

Äquivalentmenge $n_{\ddot{A}}$

Stoffmenge von chemischen Äquivalenten; Produkt aus der wirksamen Wertigkeit z und der Stoffmenge.

$n_{\ddot{A}} = z \cdot n$	Einheit: mol

Stoff	Formel	wirksame Wertigkeit z	Stoffmenge n	Äquivalentmenge $n_{\ddot{A}}$
Schwefelsäure	H_2SO_4	2	1 mol	2 · 1 mol
Natriumhydroxid	NaOH	1	1 mol	1 · 1 mol
Eisen(III)-chlorid	$FeCl_3$	3	1 mol	3 · 1 mol

Molare Masse M

Quotient aus der Masse eines Stoffes und der Stoffmenge.

$M = \frac{m}{n}$	Einheit: $g \cdot mol^{-1}$

Der Zahlenwert der molaren Masse ist gleich der relativen Atommasse beziehungsweise relativen Molekülmasse eines Stoffes.

Molares Volumen V_m

Quotient aus dem Volumen eines Stoffes und der Stoffmenge beträgt bei Gasen im Normzustand stets annähernd $22{,}4\ l \cdot mol^{-1}$.

$V_m = \frac{V}{n}$	Einheit: $l \cdot mol^{-1}$

Stoff	Formel	molare Masse M in $g \cdot mol^{-1}$	molares Volumen V_m in $l \cdot mol^{-1}$
Wasserstoff	H_2	2	22,4
Schwefeldioxid	SO_2	64	22,4
Methan	CH_4	16	22,4

Zusammenhang zwischen molarem Volumen V_m, molarer Masse M und Dichte (Litermasse) ϱ

$\varrho = \frac{M}{V_m}$; $V_m = \frac{M}{\varrho}$ $M = \varrho \cdot V_m$	ϱ Dichte in $g \cdot l^{-1}$ M molare Masse in $g \cdot mol^{-1}$ V_m molares Volumen in $l \cdot mol^{-1}$

Massenanteil (Massengehalt) w_B

Massenanteil eines Stoffes zu der Gesamtmasse eines Stoffgemisches; Quotient aus der Masse m, des Stoffes B und der Masse m des Stoffgemisches.

$w_B = \frac{m_B}{m}$	Einheiten: 1, %, ‰

Volumenanteil (Volumengehalt) φ_B

Volumenanteil eines Stoffes an dem Gesamtvolumen eines Stoffgemisches; Quotient aus dem Volumen V_B des Stoffes B und dem Volumen V des Stoffgemisches.

$\varphi_B = \frac{V_B}{V}$	Einheiten: 1, %, ‰

Stoffmengenanteil (Stoffmengengehalt) x_B

Stoffmengenanteil eines Stoffes an der Gesamtstoffmenge eines Stoffgemisches; Quotient aus der Stoffmenge n_B des Stoffes B und der Stoffmenge n des Stoffgemisches.

$x_B = \frac{n_B}{n}$	Einheiten: 1, %, ‰

Stoffmengenkonzentration (Molarität) C_B

Quotient aus der Stoffmenge n_B des gelösten Stoffes B und dem Volumen V der Lösung; gibt die Stoffmenge an, die in der Lösung enthalten ist.

$C_B = \frac{n_B}{V}$	Einheiten: $mol \cdot m^{-3}$ $mol \cdot l^{-1}$

Äquivalentmengenkonzentration (Normalität) $C_{\ddot{A}_i}$

Quotient aus der Äquivalentmenge $n_{\ddot{A}_B}$ des gelösten Stoffes B und dem Volumen V der Lösung; gibt die Stoffmenge der Äquivalente an, die im Volumen der Lösung enthalten ist.

$C_{\ddot{A}_B} = \frac{n_{\ddot{A}_B}}{V}$	Einheiten: $mol \cdot m^{-3}$ $mol \cdot l^{-1}$

Molalität b_B

Quotient aus der Stoffmenge n_B des gelösten Stoffes B und der Masse m des Lösungsmittels.

$b_B = \frac{n_B}{m}$	Einheit: $mol \cdot kg^{-1}$

Berechnung von Mischungsverhältnissen

Das Mischungsverhältnis zweier Lösungen bekannter Massenanteile in % zur Herstellung einer Lösung gewünschten Massengehalts kann mit Hilfe der Mischungsgleichung ermittelt werden.

$m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2 = (m_1 + m_2) \cdot w_B$	m_1 Masse der Lösung 1 in g m_2 Masse der Lösung 2 in g w_1 Massenanteil der Lösung 1 in % w_2 Massenanteil der Lösung 2 in % w_B Massenanteil der Mischung in %

Eine Anwendung der Mischungsgleichung stellt das Mischungskreuz dar:

30%ige Natriumhydroxidlösung soll durch Mischen einer 40%igen Lösung mit einer 20%igen Lösung hergestellt werden. Welche Massenanteile beider Lösungen sind zu mischen?

40 30 — 20 = 10

30

20 40 — 30 = 10

10:10 = 1:1

1 Massenteil 40%ige Lösung ist mit 1 Massenteil 20%iger Lösung zu mischen.

Innere Energie U

Energie, die in einem chemischen System aufgrund der Zusammensetzung, Stoffmenge, Temperatur und des Druckes enthalten ist; Summe der Energien aller Teilchen des Systems.

Enthalpie H

Summe aus der inneren Energie U und der Volumenarbeit $p \cdot V$.

$$H = U + p \cdot V$$

Innere Energie und Enthalpie eines chemischen Systems lassen sich im allgemeinen nicht ermitteln. Dagegen kann die Änderung bestimmt werden.

Änderung der inneren Energie oder der Enthalpie

Differenz der inneren Energie oder der Enthalpie eines chemischen Systems beim Übergang von einem Zustand 1 in einen Zustand 2.

Änderung der inneren Energie ΔU:

$\Delta U = U_2 - U_1$

Wird durch Aufnahme oder Abgabe von Wärme Q sowie Arbeit W hervorgerufen.

$$\Delta U = Q + W \text{ (1. Hauptsatz der Wärmelehre)}$$

Die Abgabe oder Aufnahme von Arbeit erfolgt in vielen Fällen in Form von Volumenarbeit: $a = -p \cdot \Delta V$, also ist:

$$\Delta U = Q - p \cdot \Delta V$$

Änderung der Enthalpie ΔH:

$\Delta H = H_2 - H_1$

$$\Delta H = \Delta U + p \cdot \Delta V$$

Molare Reaktionswärme Q_m

Bei einer chemischen Reaktion aufgenommene oder abgegebene Energie; Quotient aus der Reaktionswärme und der Stoffmenge der Formelumsätze.

$$Q_m = \frac{Q}{n}$$

Molare Reaktionsenergie $\Delta_R U$: Molare Reaktionswärme bei konstantem Volumen; Quotient aus der Reaktionsenergie und der Stoffmenge der Formelumsätze.

$\Delta_R U = Q_m - p \cdot \Delta_R V_m; \quad \Delta_R V_m = 0$

$$\boxed{\Delta_R U = Q_{m,V}}$$

Molare Reaktionsenthalpie $\Delta_R H$: Molare Reaktionswärme bei konstantem Druck

$\Delta_R H = \Delta_R U + p \cdot \Delta_R V_m; \quad \Delta_R U = Q_m - p \cdot \Delta_R V_m$

$$\boxed{\Delta_R H = Q_{m,p}}$$

Wenn an der Reaktion nur feste oder flüssige Stoffe beteiligt sind, so ist die Volumenänderung ΔV geringfügig. Dann kann $p \cdot \Delta V$ vernachlässigt werden, so daß die Änderung der inneren Energie $\Delta_R U$ praktisch mit der Änderung der Enthalpie $\Delta_R H$ übereinstimmt.

$\Delta_R U \approx \Delta_R H$

Molare Bildungswärme

Molare Reaktionswärme, die bei der Synthese einer Verbindung aus den Elementen entsteht; wird auf die Stoffmenge 1 mol des Reaktionsproduktes bezogen.

Molare Bildungsenergie $\Delta_B U$: Molare Bildungswärme bei konstantem Volumen.

Molare Bildungsenthalpie $\Delta_B H$: Molare Bildungswärme bei konstantem Druck.

Die Wärmemengen für die Zerlegung einer chemischen Verbindung in die Elemente und die Bildung der Verbindung aus den Elementen sind dem Betrage nach gleich. Das gilt für alle chemischen Reaktionen.

Standardbedingungen

Festlegung der Standardtemperatur 298,2 K und eines Standarddruckes 101 325 Pa für chemische Reaktionen, an denen Gase und kondensierte reine Stoffe teilnehmen. Für Reaktionen, bei denen Lösungen teilnehmen, sind zusätzliche Annahmen über die Zusammensetzung notwendig.

Reaktionsgeschwindigkeit v

Quotient aus der Konzentrationsänderung und der dazu benötigten Zeit; kennzeichnet das Fortschreiten des Reaktionsverlaufs; wird durch den Differentialquotienten der Konzentration nach der Zeit ausgedrückt.

$$v = -\frac{\Delta C}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = -\frac{dC}{dt}}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist von der Art der reagierenden Stoffe, deren Konzentration und den Reaktionsbedingungen Druck und Temperatur abhängig.

Chemisches Gleichgewicht

Besonderer Zustand eines chemischen Systems.
Bei jeder umkehrbaren chemischen Reaktion bildet sich in einem abgeschlossenen Volumen unter gleichartigen Reaktionsbedingungen ein chemisches Gleichgewicht aus. Es ist eingestellt, wenn die Reaktionsgeschwindigkeiten für Hinreaktion und Rückreaktion einander gleich sind. Dann bleibt bei konstanten Reaktionsbedingungen ein konstantes Verhältnis zwischen den Konzentrationen der Ausgangsstoffe und Reaktionsprodukte erhalten.

$v_H = v_R \qquad v_H \neq 0$

$v_H = k_1 \cdot C_A \cdot C_B$

$v_R = k_2 \cdot C_C \cdot C_D$

Für das chemische Gleichgewicht gilt:

$k_1 \cdot C_A \cdot C_B = k_2 \cdot C_C \cdot C_D$

$$\frac{C_C \cdot C_D}{C_A \cdot C_B} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{C_C \cdot C_D}{C_A \cdot C_B} = K_C}$$

Massenwirkungsgesetz (MWG)

Im chemischen Gleichgewicht ist der Quotient aus dem Produkt der Konzentrationen der Reaktionsprodukte und dem Produkt der Konzentrationen der Ausgangsstoffe eine temperaturabhängige Konstante.
Für die chemische Reaktion
$\nu_A A + \nu_B B \rightleftarrows \nu_C C + \nu_D D$ gilt:

$$\boxed{\frac{C_C^{\nu_C} \cdot C_D^{\nu_D}}{C_A^{\nu_A} \cdot C_B^{\nu_B}} = K_C}$$

4/1

Die Gleichgewichtskonstante K_C ist von der Temperatur abhängig. Die Einheiten für die Gleichgewichtskonstante K_C können unterschiedlich sein.

■ $N_2 + 3H_2 \rightleftarrows 2NH_3$

$$\frac{C^2_{NH_3}}{C_{N_2} \cdot C^3_{H_2}} = K_C$$

Angabe der Konzentrationen der reagierenden Stoffe: $mol \cdot l^{-1}$.
Einheit für die Gleichgewichtskonstante K_C: $mol^{-2} \cdot l^2$.
Chemische Gleichgewichte zwischen gasförmigen Stoffen werden meist mit Hilfe der Partialdrücke p_i der reagierenden Stoffe im Gasgemisch berechnet. Die Gleichgewichtskonstante wird dann mit K_p bezeichnet.

Gleichgewichtskonstanten K_S und K_B

Gleichgewichtskonstanten für die Dissoziation von Säuren und Basen; für jede Säure und Base charakteristische Größe; steigen bei Temperaturerhöhung, sind aber unabhängig von der Konzentration.

$\frac{C_{H_3O^+} \cdot C_B}{C_{HB}} = K_S$	$\frac{C_{OH^-} \cdot C_{HB}}{C_B} = K_B$

Die Gleichgewichtskonstante für eine Säure wird auch als Säurekonstante K_S, die für Basen als Basekonstante K_B bezeichnet.

Ionenprodukt des Wassers

Gleichgewichtskonstante für das Autoprotolysegleichgewicht des Wassers; ist bei allen Reaktionen in wäßrigen Lösungen konstant; steigt bei Temperaturerhöhung.

$$C_{H_3O^+} \cdot C_{OH^-} = K_w$$

Temperaturabhängigkeit des Ionenprodukts des Wassers

Temperatur in °C	Ionenprodukt des Wassers K_w in $mol^2 \cdot l^{-2}$
0	$0{,}13 \cdot 10^{-14}$
20	$0{,}86 \cdot 10^{-14}$
22	$1 \cdot 10^{-14}$
40	$3{,}8 \cdot 10^{-14}$
60	$12{,}6 \cdot 10^{-14}$
80	$34 \cdot 10^{-14}$
100	$74 \cdot 10^{-14}$

Dissoziationsgrad α

Quotient aus der Konzentration C des dissoziierten Anteils eines Stoffes und der Ausgangskonzentration C_0.

$$\alpha = \frac{C}{C_0}$$

Der Dissoziationsgrad nimmt beim Verdünnen von Elektrolytlösungen zu (Ostwaldsches Verdünnungsgesetz) und ändert sich bei Temperaturänderung ebenfalls. Durch gleichionigen Zusatz wird die Dissoziation zurückgedrängt. Bei Elektrolyten, die in zwei Ionen zerfallen, besteht zwischen dem Dissoziationsgrad und der Dissoziationskonstanten folgende Beziehung:

$$K_D = \frac{C \cdot \alpha^2}{1 - \alpha}$$

pH-Wert

Negativer dekadischer Logarithmus des Zahlenwerts für die Konzentration der Hydronium-Ionen in mol · l⁻¹.

$pH = -\lg \frac{C_{H_3O^+}}{mol \cdot l^{-1}}$	$pH < 7$ sauer $pH = 7$ neutral $pH > 7$ basisch

Starke und schwache Säuren oder Basen

Die Stärke von Säuren und Basen kann durch den Zahlenwert der Säurekonstanten bzw. Basekonstanten definiert werden.

Stärke der Säure oder Base	Säurekonstante K_S bzw. Basekonstante K_B in mol · l⁻¹
sehr stark	> 1
stark	$1 \ldots 1 \cdot 10^{-4,5}$
mittelstark	$1 \cdot 10^{-4,5} \ldots 1 \cdot 10^{-9}$
schwach	$1 \cdot 10^{-9} \ldots 1 \cdot 10^{-14}$
sehr schwach	$< 1 \cdot 10^{-14}$

■ sehr starke Säure: Schwefelsäure
$K_S = 1{,}0 \cdot 10^3$ mol · l⁻¹
starke Säure: Fluorwasserstoffsäure
$K_S = 6{,}2 \cdot 10^{-4}$ mol · l⁻¹

mittelstarke Säure: Ethansäure (Essigsäure)

$K_S = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$

schwache Säure: Phenol

$K_S = 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$

sehr schwache Säure: Wasser

$K_S = 1{,}0 \cdot 10^{-14}\ \text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$

Löslichkeit

Die Löslichkeit eines Stoffes in einem Lösungsmittel ist die Konzentration des gelösten Stoffes in der gesättigten Lösung. Die Löslichkeit ist meist temperaturabhängig. Sie steigt bei festen Stoffen im allgemeinen bei Temperaturerhöhung; die Löslichkeit von Gasen nimmt bei Temperaturerhöhung ab.

Löslichkeitsprodukt

Gleichgewichtskonstante, die sich bei Anwendung des Massenwirkungsgesetzes auf das Löslichkeitsgleichgewicht eines schwerlöslichen Salzes ergibt. Produkt der Konzentrationen der aus dem schwerlöslichen Salz stammenden Ionen.

$$\boxed{c_{A^+} \cdot c_{B^-} = K_{L,AB}}$$

Erstes Faradaysches Gesetz

Beim Stromdurchgang durch die Lösung oder Schmelze eines Elektrolyten sind die umgesetzten Stoffmengen n an den Elektroden dem Produkt aus Stromstärke I und Zeit t proportional.

$$\boxed{n \sim I \cdot t}$$

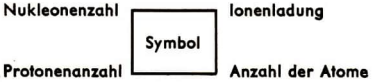
Zweites Faradaysches Gesetz

Bei gleichen Elektrizitätsmengen stehen die umgesetzten Massen m_1 und m_2 verschiedener Stoffe in demselben Verhältnis wie die jeweiligen Quotienten aus der molaren Masse M und der wirksamen Wertigkeit z der betreffenden Ionen.

$$\boxed{m_1 : m_2 = \frac{M_1}{z_1} : \frac{M_2}{z_2}}$$

Chemische Symbole und Formeln

Zeichen für chemische Elemente und Verbindungen. Formeln sind aus Symbolen zusammengesetzt.
An einem Symbol können vier verschiedene Angaben vermerkt sein: Nukleonenzahl, Protonenanzahl, Ionenladung, Anzahl der Atome.



■ Symbol für Kohlenstoffatome

Nukleonenzahl → ^{12}
Protonenanzahl → $_{6}$ **C**

Symbol für Calcium-Ionen

Ca^{2+} ← Ionenladung

Formel für Sauerstoffmoleküle

O$_2$ ← Anzahl der Atome

Stöchiometrisches Rechnen

Bei allen chemischen Reaktionen reagieren Stoffe in bestimmten Stoffmengenverhältnissen und proportional dazu in bestimmten Massen- und Volumenverhältnissen miteinander. Aus diesen bekannten proportionalen Zusammenhängen lassen sich Massen und Volumina von Stoffen einer chemischen Reaktion berechnen. Dafür gelten folgende allgemeinen Formeln:

gesuchte Größe	gegebene Größe	allgemeine Formel
m_1	m_2	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1 \cdot M_1}{n_2 \cdot M_2}$
m_1	V_2	$\frac{m_1}{V_2} = \frac{n_1 \cdot M_1}{n_2 \cdot V_m}$
V_1	m_2	$\frac{V_1}{m_2} = \frac{n_1 \cdot V_m}{n_2 \cdot M_2}$
V_1	V_2	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$

m Masse der beteiligten Stoffe in g
V Volumen der beteiligten Stoffe in l
M molare Masse in $g \cdot mol^{-1}$
V_m molares Volumen in $l \cdot mol^{-1}$

Stöchiometrische Aufgaben können nach einer Schrittfolge gelöst werden.

1.	Entwickeln der chemischen Gleichung für die Reaktion
2.	Zusammenstellen der gesuchten und gegebenen Größen
3.	Aufstellen der allgemeinen Größengleichung
4.	Einsetzen der gegebenen Größen in die Größengleichung
5.	Vereinfachen und Umformen der Größengleichung nach der gesuchten Größe
6.	Berechnen und Formulieren des Ergebnisses

4.2. Werte chemischer Stoffe

Chemische Elemente

Die Elemente sind in alphabetischer Reihenfolge geordnet.
(1) Die angegebenen Werte in eckigen Klammern sind die relativen Atommassen des längstlebigen z. Z. bekannten Nuklids des betreffenden Elements.
Die verbindlichen Namen für die Elemente 104 und 105 sind von der IUPAC noch nicht festgelegt.
(2) Nielsbohrium auch Hahnium (Ha)
(3) Kurtschatovium auch Rutherfordium (Rf)

Element	Symbol	Protonenanzahl = Ordnungszahl	Neutronenanzahl (häufig auftretende)	relative Atommasse
Actinium	Ac	89	138	[227]
Aluminium	Al	13	14	26,98
Americium	Am	95	148	[243]
Antimon	Sb	51	70; 72	121,75
Argon	Ar	18	22; 18; 20	39,95
Arsen	As	33	42	74,92
Astat	At	85	130; 133; 134	[210]
Barium	Ba	56	82; 81; 80; 79; 78	137,33
Berkelium	Bk	97	150	[247]
Beryllium	Be	4	5	9,01
Bismut	Bi	83	126	208,98
Blei	Pb	82	126; 124; 125; 122	207,2
Bor	B	5	6; 5	10,81
Brom	Br	35	44; 46	79,90
Cadmium	Cd	48	66; 64; 63; 62; 65	112,41
Caesium	Cs	55	78	132,91
Calcium	Ca	20	20; 24; 22; 28; 23	40,08
Californium	Cf	98	153	[251]

Element	Symbol	Protonenanzahl = Ordnungszahl	Neutronenanzahl (häufig auftretende)	relative Atommasse
Cerium	Ce	58	82; 84; 80; 78	140,12
Chlor	Cl	17	18; 20	35,45
Chromium	Cr	24	28; 29; 26; 30	51,996
Cobalt	Co	27	32	58,93
Curium	Cm	96	151	[247]
Dysprosium	Dy	66	98; 96; 97; 95; 94	162,50
Einsteinium	Es	99	155	[254]
Eisen	Fe	26	30; 28; 31; 32	55,85
Erbium	Er	68	98; 100; 99; 102; 96	167,26
Europium	Eu	63	99; 88	151,96
Fermium	Fm	100	157	[257]
Fluor	F	9	10	18,998
Francium	Fr	87	136	[223]
Gadolinium	Gd	64	94; 96; 92; 93; 91	157,25
Gallium	Ga	31	38; 40	69,72
Germanium	Ge	32	42; 40; 38; 41; 44	72,59
Gold	Au	79	118	196,967
Hafnium	Hf	72	108; 106; 105; 107; 104	178,49
Helium	He	2	2; 1	4,00
Holmium	Ho	67	98	164,93
Indium	In	49	66; 64	114,82
Iod	I	53	74	126,905
Iridium	Ir	77	116; 114	192,22
Kalium	K	19	20; 22	39,098
Kohlenstoff	C	6	6; 7	12,01
Krypton	Kr	36	48; 50; 47; 46; 44	83,80
Kupfer	Cu	29	34; 36	63,546
Kurtschatovium	(Ku)	104	157	[261]
Lanthan	La	57	82; 81	138,91
Lawrencium	Lr	103	157	[260]
Lithium	Li	3	4; 3	6, 94
Lutetium	Lu	71	104; 105	174,97
Magnesium	Mg	12	12; 13; 14	24,31
Mangan	Mn	25	30	54,94
Mendelevium	Md	101	157	[258]
Molybdän	Mo	42	56; 53; 50; 54; 58	95,94
Natrium	Na	11	12	22,989
Neodym	Nd	60	82; 84; 86; 83; 85	144,24
Neon	Ne	10	10; 12; 11	20,18
Neptunium	Np	93	144	[237]
Nickel	Ni	28	30; 32; 34; 33; 36	58,70

Element	Symbol	Protonenanzahl = Ordnungszahl	Neutronenanzahl (häufig auftretende)	relative Atommasse
Nielsbohrium	Ns	105	157	[262]
Niobium	Nb	41	52	92,91
Nobelium	No	102	152	[259]
Osmium	Os	76	116; 114; 113; 112; 111	190,2
Palladium	Pd	46	60; 62; 59; 64; 58	106,4
Phosphor	P	15	15	30,97
Platin	Pt	78	117; 116; 118; 120; 114	195,09
Plutonium	Pu	94	150	[244]
Polonium	Po	84	126; 127; 128; 130; 131	209
Praseodymium	Pr	59	82	140,91
Promethium	Pm	61	84	[145]
Protactinium	Pa	91	140	[231]
Quecksilber	Hg	80	122; 120; 119; 121; 118	200,59
Radium	Ra	88	135; 136; 138; 140	226,03
Radon	Rn	86	133; 134; 136	[222]
Rhenium	Re	75	112; 110	186,21
Rhodium	Rh	45	58	102,91
Rubidium	Rb	37	48; 50	85,47
Ruthenium	Ru	44	58; 60; 57; 55; 56	101,07
Samarium	Sm	62	90; 92; 85; 87; 86	150,4
Sauerstoff	O	8	8; 10; 9	15,999
Scandium	Sc	21	24	44,956
Schwefel	S	16	16; 18; 17	32,06
Selen	Se	34	46; 44; 42; 48; 43	78,96
Silber	Ag	47	60; 62	107,868
Silicium	Si	14	14; 15; 16	28,086
Stickstoff	N	7	7; 8	14,007
Strontium	Sr	38	50; 48; 49; 46	87,62
Tantal	Ta	73	108	180,948
Technetium	Tc	43	54	[97]
Tellur	Te	52	78; 76; 74; 73; 72	127,60
Terbium	Tb	65	94	158,93
Thallium	Tl	81	124; 122	204,37
Thorium	Th	90	142	232,04
Thulium	Tm	69	100	168,93
Titanium	Ti	22	26; 24; 25; 27; 28	47,90
Uranium	U	92	146; 143; 142	238,03
Vanadium	V	23	28; 27	50,94

Element	Symbol	Protonenanzahl = Ordnungszahl	Neutronenanzahl (häufig auftretende)	relative Atommasse
Wasserstoff	H	1	0; 1	1,008
Wolfram	W	74	110; 112; 108; 109; 106	183,85
Xenon	Xe	54	78; 75; 77; 80; 82	131,30
Ytterbium	Yb	70	104; 102; 103; 101; 106	173,04
Yttrium	Y	39	50	88,91
Zink	Zn	30	34; 36; 38; 37; 40	65,38
Zinn	Sn	50	70; 68; 66; 69; 67	118,69
Zirkonium	Zr	40	50; 54; 52; 51; 56	91,22

Elektronenkonfiguration der Atome im Grundzustand

Bei den mit * gekennzeichneten Atomen bestehen Abweichungen in der Anordnung der neu hinzukommenden Elektronen oder ist die Anordnung derselben nicht gesichert.

P Protonenanzahl = Kernladungszahl = Ordnungszahl

(1) auch Rutherfordium (Rf)

(2) auch Hahnium (Ha)

	P	Symbol	1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s
1. Periode	1	H	1						
	2	He	2						
2. Periode	3	Li	2	1					
	4	Be	2	2					
	5	B	2	2 1					
	6	C	2	2 2					
	7	N	2	2 3					
	8	O	2	2 4					
	9	F	2	2 5					
	10	Ne	2	2 6					
3. Periode	11	Na	2	2 6	1				
	12	Mg	2	2 6	2				
	13	Al	2	2 6	2 1				
	14	Si	2	2 6	2 2				
	15	P	2	2 6	2 3				
	16	S	2	2 6	2 4				
	17	Cl	2	2 6	2 5				
	18	Ar	2	2 6	2 6				

	P	Symbol	1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s
4. Periode	19	K	2	2 6	2 6	1			
	20	Ca	2	2 6	2 6	2			
	21	Sc	2	2 6	2 6 1	2			
	22	Ti	2	2 6	2 6 2	2			
	23	V	2	2 6	2 6 3	2			
	24	Cr	2	2 6	2 6 5	1			
	25	Mn	2	2 6	2 6 5	2			
	26	Fe	2	2 6	2 6 6	2			
	27	Co	2	2 6	2 6 7	2			
	28	Ni	2	2 6	2 6 8	2			
	29	Cu	2	2 6	2 6 10	1			
	30	Zn	2	2 6	2 6 10	2			
	31	Ga	2	2 6	2 6 10	2 1			
	32	Ge	2	2 6	2 6 10	2 2			
	33	As	2	2 6	2 6 10	2 3			
	34	Se	2	2 6	2 6 10	2 4			
	35	Br	2	2 6	2 6 10	2 5			
	36	Kr	2	2 6	2 6 10	2 6			
5. Periode	37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1		
	38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2		
	39	Y	2	2 6	2 6 10	2 6 1	2		
	40	Zr	2	2 6	2 6 10	2 6 2	2		
	41	Nb	2	2 6	2 6 10	2 6 4	1		
	42	Mo	2	2 6	2 6 10	2 6 5	1		
	43	Tc	2	2 6	2 6 10	2 6 5	2*		
	44	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 7	1		
	45	Rh	2	2 6	2 6 10	2 6 8	1		
	46	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10			
	47	Ag	2	2 6	2 6 10	2 6 10	1		
	48	Cd	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2		
	49	In	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 1		
	50	Sn	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 2		
	51	Sb	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 3		
	52	Te	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 4		
	53	I	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 5		
	54	Xe	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6		
6. Periode	55	Cs	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	1	
	56	Ba	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	2	
	57	La	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6 1	2	
	58	Ce	2	2 6	2 6 10	2 6 10 1	2 6 1	2*	
	59	Pr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 3	2 6	2	
	60	Nd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 4	2 6	2	
	61	Pm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 5	2 6	2*	
	62	Sm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 6	2 6	2	
	63	Eu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6	2	
	64	Gd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 1	2	
	65	Tb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 9	2 6	2	
	66	Dy	2	2 6	2 6 10	2 6 10 10	2 6	2	

	P	Symbol	1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s
	67	Ho	2	2 6	2 6 10	2 6 10 11	2 6	2	
	68	Er	2	2 6	2 6 10	2 6 10 12	2 6	2	
	69	Tm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 13	2 6	2	
	70	Yb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6	2	
	71	Lu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 1	2	
	72	Hf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 2	2	
	73	Ta	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 3	2	
	74	W	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 4	2	
	75	Re	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 5	2	
	76	Os	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 6	2	
	77	Ir	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 7	2	
	78	Pt	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9	1*	
	79	Au	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	1	
	80	Hg	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2	
	81	Tl	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 1	
	82	Pb	3	3 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 2	
	83	Bi	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 3	
	84	Po	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 4	
	85	At	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 5	
	86	Rn	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	
7. Periode	87	Fr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	1
	88	Ra	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	2
	89	Ac	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 1	2
	90	Th	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 2	2*
	91	Pa	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 2	2 6 1	2*
	92	U	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 3	2 6 1	2*
	93	Np	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 4	2 6 1	2*
	94	Pu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 6	2 6	2*
	95	Am	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6	2*
	96	Cm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 1	2*
	97	Bk	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 9	2 6	2*
	98	Cf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 10	2 6	2*
	99	Es	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 11	2 6	2*
	100	Fm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 12	2 6	2*
	101	Md	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 13	2 6	2*
	102	No	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6	2*
	103	Lr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 1	2*
	104	$(Ku)^1$	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 2	2*
	105	$(Ns)^2$	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 3	2*

Anorganische Stoffe (↗ auch S. 173)

Name	Symbol bzw. Formel	molare Masse in $g \cdot mol^{-1}$ (gerundet)	Aggregatzustand
Aluminium	Al	27	fest
Aluminiumoxid	Al_2O_3	102	fest
Aluminiumsulfat	$Al_2(SO_4)_3$	342	fest
Ammoniak	NH_3	17	gasförmig
Ammoniumchlorid	NH_4Cl	53,5	fest
Ammoniumnitrat	NH_4NO_3	80	fest
Ammoniumsulfat	$(NH_4)_2SO_4$	132	fest
Antimon	Sb	122	fest
Arsentrioxid	As_2O_3	198	fest
Barium	Ba	137	fest
Bariumchlorid	$BaCl_2$	208	fest
Bariumhydroxid	$Ba(OH)_2$	171	fest
Blei	Pb	207	fest
Blei(II)-nitrat	$Pb(NO_3)_2$	331	fest
Blei(II)-oxid	PbO	223	fest
Blei(II,IV)-oxid	Pb_3O_4	685	fest
Brom	Br_2	160	flüssig
Bromwasserstoff	HBr	81	gasförmig
Calcium	Ca	40	fest
Calciumchlorid	$CaCl_2$	111	fest
Calciumfluorid	CaF_2	78	fest
Calciumhydroxid	$Ca(OH)_2$	74	fest
Calciumcarbid	CaC_2	64	fest
Calciumcarbonat	$CaCO_3$	100	fest
Calciumoxid	CaO	56	fest
Calciumphosphat	$Ca_3(PO_4)_2$	310	fest
Calciumsulfat	$CaSO_4$	136	fest
Chlor	Cl_2	71	gasförmig
Chlorwasserstoff	HCl	36,5	gasförmig
Chromium	Cr	52	fest
Cobalt	Co	59	fest
Eisen	Fe	56	fest
Eisen(III)-chlorid	$FeCl_3$	162,5	fest
Eisen(II)-oxid	FeO	72	fest
Eisen(III)-oxid	Fe_2O_3	160	fest

Dichte ϱ in $g \cdot cm^{-3}$	Schmelztemperatur t_S in °C	Siedetemperatur t_V in °C	molare Bildungsenthalpie $\Delta_B H$ in $kJ \cdot mol^{-1}$
2,70	660	2 500	0
3,90	2 045	≈ 3 000	— 1 675
2,71	zersetzlich ab 600	—	— 2 930
0,77 $g \cdot l^{-1}$	— 78	— 33	— 46
1,54		sublimiert bei 335	— 316
1,73	169	zersetzlich ab 200	— 365
1,77	513	zersetzlich	— 1 179
6,69	630	1 635	0
3,86	290	457	— 656
3,65	710	1 696	— 0
3,09	955	1 562	— 861
4,5	78	103	— 946
11,34	327	1 750	0
4,53	zersetzlich ab 200	—	— 448
9,53	890	1 470	— 218
9,10	zersetzlich ab 830	—	— 713
3,14	— 7	59	0
2,17 $g \cdot l^{-1}$	— 87	— 67	— 36
1,54	845	1 439	0
2,15	772	> 1 600	— 798
3,18	1 392	2 500	— 1 215
2,23	zersetzlich	—	— 988
2,22	≈ 2 300		469
2,93	zersetzlich ab 825		— 1 206
3,40	≈ 2 570	2 850	— 635
3,14	1 730		— 4 116
2,96	≈ 1 300		— 1 418
3,214 $g \cdot l^{-1}$	— 101	— 34	0
1,639 $g \cdot l^{-1}$	— 112	— 85	— 92
7,19	≈ 1 900	≈ 2 300	0
88,83	1 490	≈ 3 000	0
7,86	1 535	≈ 3 000	0
2,80	304	319	— 392
5,70	1 360		— 267
5,24	1 565		— 822

Name	Symbol bzw. Formel	molare Masse in g · mol^{-1} (gerundet)	Aggregatzustand
Eisen(II)-sulfid	FeS	88	fest
Fluor	F_2	38	gasförmig
Fluorwasserstoff	HF	20	gasförmig
Gold	Au	197	fest
Helium	He	4	gasförmig
Iod	I_2	254	fest
Iodwasserstoff	HI	128	gasförmig
Kalium	K	39	fest
Kaliumbromid	KBr	119	fest
Kaliumchlorat	$KClO_3$	122,5	fest
Kaliumchlorid	KCl	74,5	fest
Kaliumdichromat	$K_2Cr_3O_7$	294	fest
Kaliumhydroxid	KOH	56	fest
Kaliumcarbonat	K_2CO_3	138	fest
Kaliumnitrat	KNO_3	101	fest
Kaliumpermanganat	$KMnO_4$	158	fest
Kaliumcyanid	KCN	65	fest
Kohlendioxid	CO_2	44	gasförmig
Kohlendisulfid	CS_2	76	gasförmig
Kohlenmonoxid	CO	28	gasförmig
Kohlenstoff (Diamant)	C	12	fest
Kupfer	Cu	63,5	fest
Kupfer(II)-chlorid	$CuCl_2$	134,5	fest
Kupfer(I)-oxid	Cu_2O	143	fest
Kupfer(II)-oxid	CuO	79,5	fest
Kupfer(II)-sulfat	$CuSO_4$	159,5	fest
Magnesium	Mg	24	fest
Magnesiumchlorid	$MgCl_2$	95	fest
Magnesiumoxid	MgO	40	fest
Magnesiumsulfat	$MgSO_4$	120	fest
Mangan	Mn	55	fest
Natrium	Na	23	fest
Natriumchlorid	$NaCl$	58,5	fest
Natriumhydroxid	$NaOH$	40	fest
Natriumcarbonat	Na_2CO_3	106	fest
Natriumnitrat	$NaNO_3$	85	fest
Natriumsulfat	Na_2SO_4	142	fest

Dichte ϱ in $g \cdot cm^{-3}$	Schmelztemperatur t_S in °C	Siedetemperatur t_V in °C	molare Bildungsenthalpie $\Delta_B H$ in $kJ \cdot mol^{-1}$
4,84	1 195		— 95
1,69 $g \cdot l^{-1}$ 0,99 (flüssig)	— 220 — 88	— 188 20	0 — 269
19,3	1 063	2 700	0
0,178 $g \cdot l^{-1}$	— 272,1	— 268,9	0
4,94 5,79 $g \cdot l^{-1}$	114 — 51	195 — 35	0 26
0,86 2,75 2,32 1,98 2,69 2,04 2,43 2,11 2,70 1,52	64 742 zersetzlich ab 356 770 395 360 897 308 zersetzlich ab 240 623	760 1 382 — 1 405 zersetzlich ab 500 1 327 — zersetzlich ab 400 —	0 — 394 — 382 — 435 — 2 045 — 427 — 1 181 — 494 — 808 — 119
1,977 $g \cdot l^{-1}$ 1,26 1,250 $g \cdot l^{-1}$ 3,51	— 79 — 112 — 205 3 540	— 57 46 — 192 4 347	— 394 116 — 112 0
8,92 3,05 6,0 6,45 3,61	1 083 630 1 232 zersetzlich ab 1 336 200	2 350 655 zersetzlich ab 650	0 — 224 — 170 — 165 — 772
1,74 2,32 3,65 2,66	650 712 2 640 1 127	1 120 1 420 2 800	0 — 642 — 602 — 1 311
7,21	1 244	≈ 2 100	0
0,97 2,16 2,13 2,53 2,25 2,69	98 800 122 852 310 884	883 1 465 1 390 zersetzlich ab 1 600 zersetzlich ab 380	0 — 412 — 427 — 1 132 — 468 — 1 391

Name	Symbol bzw. Formel	molare Masse in g · mol⁻¹ (gerundet)	Aggregatzustand
Nickel	Ni	59	fest
Ozon	O_3	48	gasförmig
Perchlorsäure	$HClO_4$	100,5	flüssig
Phosphor (weiß)	P	31	fest
Phosphorpentoxid	P_2O_5	142	fest
Phosphorsäure	H_3PO_4	98	fest
Platin	Pt	195	fest
Quecksilber	Hg	200,5	flüssig
Quecksilber(II)-chlorid	$HgCl_2$	271,5	fest
Quecksilber(II)-oxid	HgO	216,5	fest
Salpetersäure	HNO_3	63	flüssig
Sauerstoff	O_2	32	gasförmig
Schwefel (rhombisch)	S	32	fest
Schwefeldioxid	SO_2	64	gasförmig
Schwefelsäure	H_2SO_4	98	flüssig
Schwefeltrioxid	SO_3	80	fest
Schwefelwasserstoff	H_2S	34	gasförmig
Silber	Ag	108	fest
Silbernitrat	$AgNO_3$	170	fest
Silicium	Si	28	fest
Siliciumdioxid (Quarz)	SiO_2	60	fest
Stickstoff	N_2	28	gasförmig
Stickstoffdioxid	NO_2	46	gasförmig
Stickstoffmonoxid	NO	30	gasförmig
Wasser	H_2O	18	flüssig
Wasserstoff	H_2	2	gasförmig
Wasserstoffperoxid	H_2O_2	34	flüssig
Zink	Zn	65	fest
Zinkchlorid	$ZnCl_2$	136	fest
Zinkoxid	ZnO	81	fest
Zinn	Sn	119	fest

Dichte ϱ in $g \cdot cm^{-3}$	Schmelztemperatur t_S in °C	Siedetemperatur t_V in °C	molare Bildungsenthalpie $\Delta_B H$ in $kJ \cdot mol^{-1}$
8,90	1 453	≈ 2 900	0
2,22 $g \cdot l^{-1}$	— 251	— 113	142
1,76	— 112	39	
1,82 2,11 1,88	44 566 42	280 sublimiert bei 358	0 — 1 548 — 1 281
21,45	≈ 1 770	≈ 4 000	0
13,59 5,42 11,14	— 39 277 zersetzlich ab 100	357 304	0 — 230 — 90
1,51	— 47	zersetzlich ab 86	— 175
1,429 $g \cdot l^{-1}$	— 219	— 183	0
2,06 2,926 $g \cdot l^{-1}$ 1,83 2,75 1,529 $g \cdot l^{-1}$	113 — 76 11 17 — 86	445 — 10 zersetzlich ab 338 45 — 60	0 — 270 — 811 — 446 — 20
10,50 4,35	960 209	2 200 zersetzlich ab 444	0 — 123
2,33 2,65	1 413 ≈ 1 470	2 630 2 590	0 — 860
1,251 $g \cdot l^{-1}$ 1,340 $g \cdot l^{-1}$	— 210 — 11 — 164	— 195,8 21 — 152	0 33 90
1,0 0,089 $g \cdot l^{-1}$ 1,46	0 — 259,3 — 2	100 — 252,8 152	— 286 0 — 188
7,13 2,91 5,47	419 313 1 975	907 732 sublimiert bei 1 800	0 — 416 — 349
7,28	232	2 350	0

Organische Stoffe (↗ auch S. 179)

Name	Formel	molare Masse in g · mol⁻¹ (gerundet)	Aggregatzustand
Aminobenzen (Anilin)	$C_6H_5NH_2$	93	flüssig
Benzaldehyd	C_6H_5CHO	106	flüssig
Benzoesäure	C_6H_5COOH	122	fest
Benzen (Benzol)	C_6H_6	78	flüssig
Chlorethen (Vinylchlorid)	C_2H_3Cl	62,5	gasförmig
1,2-Dichlorbenzen	$C_6H_4Cl_2$	147	flüssig
1,3-Dichlorbenzen	$C_6H_4Cl_2$	147	flüssig
1,4-Dichlorbenzen	$C_6H_4Cl_2$	147	flüssig
Ethan	C_2H_6	30	gasförmig
Ethanal (Acetaldehyd)	CH_3CHO	44	flüssig
Ethanol	C_2H_5OH	46	flüssig
Ethansäure (Essigsäure)	CH_3COOH	60	flüssig
Ethen	C_2H_4	28	gasförmig
Ethin	C_2H_2	26	gasförmig
Glucose (Traubenzucker)	$C_6H_{12}O_6$	180	fest
Kohlensäurediamid (Harnstoff)	$CO(NH_2)_2$	60	fest
Methan	CH_4	16	gasförmig
Methanol (Formaldehyd)	$HCHO$	30	gasförmig
Methanol	CH_3OH	32	flüssig
Methansäure (Ameisensäure)	$HCOOH$	46	flüssig
Methylbenzen (Toluol)	$C_6H_5CH_3$	92	flüssig
Monochlorethan (Äthylchlorid)	C_2H_5Cl	64,5	flüssig
Nitrobenzen	$C_6H_5NO_2$	123	flüssig
Octadecansäure (Stearinsäure)	$C_{17}H_{35}COOH$	284	fest
Octadecan-(9)-säure (Ölsäure)	$C_{17}H_{33}COOH$	282	flüssig
Phenol	C_6H_5OH	94	flüssig
Phthalsäure	$C_6H_4(COOH)_2$	166	fest
Propan	C_3H_8	44	gasförmig
Propan-1-ol	C_3H_7OH	60	flüssig
Propan (Aceton)	CH_3COCH_3	58	flüssig
Terephthalsäure	$C_6H_4(COOH)_2$	166	fest
Tetrachlormethan (Tetrachlorkohlenstoff)	CCl_4	154	flüssig

Dichte ϱ in $g \cdot cm^{-3}$	Schmelztemperatur t_S in °C	Siedetemperatur t_V in °C	molare Bildungsenthalpie $\Delta_B H$ in $kJ \cdot mol^{-1}$
1,02	— 6,2	184,4	35
1,05	— 26	178	
1,27 (15 °C)	121,7	249	— 381
0,88	5,5	80,1	49
0,97 (—13 °C)	— 159,7	— 13,5	
1,31	— 17,5	— 179,2	
1,29	— 24,4	172	
1,26 (55 °C)	54	173,7	
1,356 $g \cdot l^{-1}$	— 172	— 88,5	— 85
0,788 (13 °C)	— 123	20,2	— 209
0,79	— 114,2	78,4	— 278
1,05	16,6	118,1	— 487
1,260 $g \cdot l^{-1}$	— 169,5	— 103,9	52
1,17 $g \cdot l^{-1}$	— 81,8	— 83,8	227
1,54 (25 °C)	146	zersetzlich ab 200	
1,34	132,7	zersetzlich	— 331
	— 184	— 164	— 75
0,82 (—20 °C)	— 92	— 21	— 116
0,79	— 97,7	64,7	— 239
1,23	8,4	100,5	— 409
0,87 (15 °C)	— 95,3	110,8	15
0,92 (6 °C)	— 138,7	13,1	
1,20	5,7	210,9	18
0,84 (80 °C)	69,4	291	
0,89 (25 °C)	14	205	— 155
1,05 (45 °C)	41	181,4	
1,59	208	zersetzlich ab 231	— 784
2,019 $g \cdot l^{-1}$	— 189,9	— 42,1	— 104
0,80	— 126	97,2	— 303
0,79	— 95	56,1	— 235
1,51	sublimiert	sublimiert	
1,60	— 22,9	76,7	— 142

Säurekonstanten einiger Säuren bei 22 °C

Säure	Formel	Säurekonstante K_S in mol · l^{-1}
Perchlorsäure	$HClO_4$	$1{,}0 \cdot 10^{10}$
Chlorwasserstoffsäure	HCl	$1{,}0 \cdot 10^{7}$
Schwefelsäure	H_2SO_4	$1{,}0 \cdot 10^{3}$
Salpetersäure	HNO_3	$2{,}1 \cdot 10^{1}$
Hydronium-Ionen	H_3O^+	$1{,}0 \cdot 10^{0}$
Hydrogensulfat-Ionen	HSO_4^-	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$
Orthophosphorsäure	H_3PO_4	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$
Hexaquoeisen(III)-Ionen	$[Fe(H_2O)_6]^{3+}$	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$
Fluorwasserstoffsäure	HF	$6{,}2 \cdot 10^{-4}$
Ethansäure	CH_3COOH	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
Hexaquoaluminium-Ionen	$[Al(H_2O)_6]^{3+}$	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$
Kohlensäure	H_2CO_3	$4{,}3 \cdot 10^{-7}$
Dihydrogenphosphat-Ionen	$H_2PO_4^-$	$6{,}3 \cdot 10^{-8}$
Ammonium-Ionen	NH_4^+	$5{,}6 \cdot 10^{-10}$
Hexaquozink-Ionen	$[Zn(H_2O)_6]^{2+}$	$2{,}5 \cdot 10^{-10}$
Phenol	C_6H_5CH	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$
Hydrogencarbonat-Ionen	HCO_3^-	$5{,}6 \cdot 10^{-11}$
Hydrogenphosphat-Ionen	HPO_4^{2-}	$2{,}2 \cdot 10^{-13}$
Wasser	H_2O	$1{,}0 \cdot 10^{-14}$

Basekonstanten einiger Basen bei 22 °C

Base	Formel	Basekonstante K_B in mol · l^{-1}
Oxid-Ionen	O^{2-}	$1{,}0 \cdot 10^{10}$
Amid-Ionen	NH_2^-	$1{,}0 \cdot 10^{9}$
Hydroxid-Ionen	OH^-	$1{,}0 \cdot 10^{0}$
Phosphat-Ionen	PO_4^{3-}	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$
Carbonat-Ionen	CO_3^{2-}	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$
Ammoniak	NH_3	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
Hydrogenphosphat-Ionen	HPO_4^{2-}	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$
Hydrogenkarbonat-Ionen	HCO_3^-	$2{,}3 \cdot 10^{-8}$
Acetat-Ionen	CH_3COO^-	$5{,}6 \cdot 10^{-10}$
Anilin	$C_6H_5NH_2$	$3{,}8 \cdot 10^{-10}$
Dihydrogenphosphat-Ionen	$H_2PO_4^-$	$1{,}3 \cdot 10^{-12}$
Harnstoff	$CO(NH_2)_2$	$1{,}5 \cdot 10^{-14}$
Wasser	H_2O	$1{,}0 \cdot 10^{-14}$

Löslichkeitsprodukte bei 25 °C

Name	Formel	Löslichkeits-produkt	Einheit
Silberbromid	$AgBr$	$7{,}7 \cdot 10^{-13}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Silberchlorid	ACl	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Silberiodid	AgJ	$1{,}5 \cdot 10^{-16}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Bariumcarbonat	$BaCO_3$	$8{,}0 \cdot 10^{-9}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Bariumsulfat	$BaSO_4$	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Calciumcarbonat	$CaCO_3$	$4{,}8 \cdot 10^{-9}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Calciumsulfat	$CaSO_4$	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Kupfer(II)-carbonat	$CuCO_3$	$1{,}4 \cdot 10^{-10}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Kupfer(I)-chlorid	$CuCl$	$1{,}8 \cdot 10^{-7}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Kupfer(I)-sulfid	Cu_2S	$2{,}5 \cdot 10^{-50}$	$mol^3 \cdot l^{-3}$
Kupfer(II)-sulfid	CuS	$4 \cdot 10^{-38}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Eisen(II)-sulfid	$Fe\,S$	$4 \cdot 10^{-19}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Quecksilber(I)-carbonat	Hg_2CO_3	$9 \cdot 10^{-17}$	$mol^3 \cdot l^{-3}$
Quecksilber(I)-sulfid	Hg_2S	$1 \cdot 10^{-45}$	$mol^3 \cdot l^{-3}$
Magnesiumcarbonat	$MgCO_3$	$1 \cdot 10^{-10}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Kaliumperchlorat	$KClO_4$	$8{,}9 \cdot 10^{-3}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Natriumhydrogencarbonat	$NaHCO_3$	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Mangancarbonat	$MnCO_3$	$1 \cdot 10^{-10}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Blei(II)-carbonat	$PbCO_3$	$1{,}5 \cdot 10^{-13}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Blei(II)-chlorid	$PbCl_2$	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$mol^3 \cdot l^{-3}$
Blei(II)-sulfid	PbS	$1 \cdot 10^{-29}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Blei(II)-sulfat	$PbSO_4$	$2 \cdot 10^{-8}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Zinkcarbonat	$ZnCO_3$	$6 \cdot 10^{-11}$	$mol^2 \cdot l^{-2}$
Bismut(III)-sulfid	Bi_2S_3	$1{,}6 \cdot 10^{-72}$	$mol^5 \cdot l^{-5}$

Elektrochemische Spannungsreihe

Reihe der Metalle, geordnet nach ihren Standardpotentialen, d. h. nach der Spannung zwischen der Standardelektrode des Metalls und der Standard-Wasserstoffelektrode

Metallelektrode (Standard-elektrode)	Standard-potential in V	Metallelektrode (Standard-elektrode)	Standard-potential in V
Li/Li^+	− 3,01	Ni/Ni^{2+}	− 0,23
K/K^+	− 2,92	Sn/Sn^{2+}	− 0,14
Ca/Ca^{2+}	− 2,84	Pb/Pb^{2+}	− 0,13
Na/Na^+	− 2,71	H/H^+	± 0,000
Mg/Mg^{2+}	− 2,38	Cu/Cu^{2+}	+ 0,34
Al/Al^{3+}	− 1,66	Ag/Ag^+	+ 0,80
Zn/Zn^{2+}	− 0,76	Hg/Hg^{2+}	+ 0,85
Cr/Cr^{3+}	− 0,71	Au/Au^{3+}	+ 1,42
Fe/Fe^{2+}	− 0,44		

Löslichkeit einiger Salze

Angabe in den weißen Feldern: 100 g Wasser lösen *a* g Salz bis zur Sättigung bei 101,325 kPa und 20 °C

Kation	Anion					
	Cl^-	Br^-	I^-	NO_3^-	SO_4^{2-}	CO_3^{2-}
Na^+	35,8	90,5	184,0	88,0	19,4	21,6
K^+	34,4	54,0	144,3	31,6	11,1	112,0
NH_4^+	29,7	77,0	172,0	187,7	75,4	100,0
Mg^{2+}	54,3	101,5	148,0	70,5	26,7	0,18
Ca^{2+}	74,5	142,0	204,0	127,0	0,2	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Ba^{2+}	37,5	104,0	170,0	9,0	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
Cu^{2+}	70,6	122,0	—	122,0	21,0	—
Ag^+	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$0,3 \cdot 10^{-6}$	218,0	0,8	$0,3 \cdot 10^{-2}$
Zn^{2+}	367,0	447,0	432,0	327,0	54,0	$6 \cdot 10^{-5}$
Hg^{2+}	6,6	0,6	0,01	127,0	—	—

Oxydationszahlen und Elektronegativitätswerte

Ausgewählte Elemente sind alphabetisch geordnet; angegeben sind die häufig auftretenden Oxydationszahlen in Verbindungen.

Name	Symbol	positive Oxydationszahlen	negative Oxydationszahlen	Elektronegativitätswert
Aluminium	Al	+3		1,5
Antimon	Sb	+3; +5	—3	1,9
Arsen	As	+3; +5	—3	2,0
Barium	Ba	+2		0,9
Bismut	Bi	+3	—3	1,9
Blei	Pb	+2; +4		1,8
Bor	B	+3		2,0
Brom	Br	+1; +5	—1	2,8
Cadmium	Cd	+2		1,7
Calcium	Ca	+2		1,0
Chlor	Cl	+1; +3; +5; +7	—1	3,0
Chromium	Cr	+2; +3; +6		1,6
Cobalt	Co	+2; +3		1,8
Eisen	Fe	+2; +3		1,8
Fluor	F		—1	4,0
Gold	Au	+1; +3		2,4
Iod	I	+1; +5	—1	2,5
Kalium	K	+1		0,8
Kohlenstoff	C	+2; +4	—4	2,5
Kupfer	Cu	+1; +2		1,9
Lithium	Li	+1		1,0
Magnesium	Mg	+2		1,2
Mangan	Mn	+2; +4; +6		1,5
Molybdän	Mo	+6		1,8
Natrium	Na	+1		0,9
Nickel	Ni	+2		1,8
Phosphor	P	+3; +5	—3	2,1
Platin	Pt	+2; +4		2,2
Quecksilber	Hg	+1; +2		1,9
Sauerstoff	O		—2	3,5
Schwefel	S	+4; +6	—2	2,5
Selen	Se	+4; +6	—2	2,4
Silber	Ag	+1		1,9
Silicium	Si	+4	—4	1,8
Stickstoff	N	+3; +5	—3	3,0
Strontium	Sr	+2		1,0
Uranium	U	+4; +5; +6		1,7
Wasserstoff	H	+1	—1	2,1
Wolfram	W	+6		1,7
Zink	Zn	+2		1,6
Zinn	Sn	+2; +4		1,8

Register

A

Abbildungsgleichung 143
Abbildungsmaßstab 143
Abhängigkeit der Siedetemperatur und der spezifischen Verdampfungswärme des Wassers vom Druck 117
Ableitung
– einer Funktion 73
– spezieller Funktionen 74
Ablösearbeit der Elektronen 120
Abrunden 12
Absoluter Fehler 87
Abstand zweier Punkte 91
Achsenabschnittsgleichung 96
Addition von Vektoren 90
Additionstheoreme von Winkelfunktionen 49
Adiabatische Zustandsänderung 143
Aggregatzustand
– anorganischer Stoffe 172/173 ff.
– organischer Stoffe 178/179
Allgemeine Form der Geradengleichung 97
Ampere 103
Analytische Geometrie 88 ff.
Anorganische Stoffe 172 ff.
Äquivalentmenge 156
Äquivalentmengenkonzentration 157
Arbeit
–, elektrische 107, 113 (Einheiten); 140 (Größengleichungen)
–, mechanische 106, 113 (Einheiten); 130 f. (Größengleichungen)
Arbeit-Energie-Beziehung 131
Archimedisches Gesetz 134
Arithmetische Folgen 70
Arithmetisches Mittel 14
Astronomie 147 ff.
Astronomische Einheit 147
Atmosphärendruck 110
Atomare Masseeinheit 110, 146
Atomphysik 146
Auflagekräfte 122
Aufrunden 12
Auftriebskraft 134
Ausdehnungskoeffizient
–, kubischer 116
–, linearer 115
Austrittsarbeit 144
Avogadrosche Konstante 155

B

Basekonstanten 180
Basen, starke – schwache 163
Basis eines Zahlensystems 11
Basiseinheiten 103 f.
Bedingte Wahrscheinlichkeit 86
Beleuchtungsstärke (Einheit) 109
Beschleunigung
–, Einheit 106
–, Größengleichungen 125
Beschleunigungsarbeit 130
Bestimmtes Integral 80
Betrag
– einer Zahl 7
– eines Vektors 91
Bewegungsgesetze 125 f.; 129 (Drehbewegung)
Binäres System 11 f.
Binomialkoeffizienten 68
Binomische Formeln 13
Binomischer Satz 69
Blindwiderstand 139
Bogenmaß eines Winkels 53
Boltzmannkonstante 110
Brewtersches Gesetz 144

C

Candela 104
Chemische Elemente 166 ff.
Chemische Symbole 165
Chemisches Gleichgewicht 161
Coulombsches Gesetz 137

D

Dekadisches System 11 f.
Diamagnetische Stoffe 119
Dichte
–, Einheit 106
–, Größengleichungen 128, 134
– verschiedener Materialien 115
– anorganischer Stoffe 172/173 ff.
– organischer Stoffe 178/179
Dielektrizitätskonstante
–, Einheit 108
–, Größengleichung 137
–, relative 119
Dielektrizitätszahl 119
Differentialquotient 73
Differentialrechnung 72 ff.
Differentiationsregeln 74 f.
Differenzenquotient 73
Differenzierbarkeit 73
Diskriminante 23
Dissoziationsgrad 163
Dodekaeder 67
Doppelsterne 149
Drachenviereck 65
Drehbewegung 129

Drehimpuls 129, 131, **132**
Drehmoment
–, Einheit 106
–, Größengleichungen 122, 129
Drehzahl 125
Dreieck 63
Druck
–, Einheiten **106**, 113
–, Größengleichung 122
Druckkraft 122
Dualsystem 11 f.
Dyadisches System 11 f.

E

ε-Umgebung 69
Effektivwert der Wechselspannung 139
Einheiten, physikalische 103 ff.
–, Umrechnungsfaktoren 111 ff.
Einheitsvektor 88
Einsteinsche Gleichung 135
Elastischer Stoß 132
Elastizitätsmodule fester Körper 114
Elektrische Arbeit
–, Einheit 107
–, Größengleichung 136
Elektrische Feldkonstante 108, 110
Elektrische Feldstärke
–, Einheit 108
–, Größengleichung 137
Elektrischer Gleichstrom 136
Elektrische Kapazität
–, Einheit 108
–, Größengleichung 137
Elektrische Ladung
–, Einheit 107
–, Größengleichung 137
Elektrische Leistung
–, Einheit 108
–, Größengleichung 136
Elektrische Spannung
–, Einheit 108
–, Größengleichung 136
Elektrische Stromstärke
–, Einheit 107
–, Größengleichung 136 (Gleichstrom); 139 (Wechselstrom)
Elektrischer Leitwert 108
Elektrischer Widerstand
–, Einheit 108
–, Größengleichung 136 (Gleichstrom); 139 (Wechselstrom)
–, spezifischer 108
Elektrizitätsmenge 107
Elektrochemische Spannungsreihe 182
Elektromagnetisches Feld 138
Elektromagnetisches Spektrum 120
Elektronegativitätswerte 183
Elektrostatisches Feld 137
Elementarladung 110
Elemente, chemische 166 ff.
Ellipse 100
Energie
–, Einheiten **106**, 113
–, Größengleichungen 130 ff.
–, innere 107
Energiebilanz
– bei Kernreaktionen 146
– beim Fotoeffekt 144
Energiegehalt 157
– des elektrischen Feldes 137
– des magnetischen Feldes 138
– in einigen Nahrungsmitteln 118
Energieübertragung am Transformator 140
Entgegengesetzt liegende Winkel 63
Enthalpie 159
Erde 147 f.
Exponentialfunktionen 36 ff.
Exponentialgleichungen 46

F

Fakultät 83
Fallbeschleunigung 110
Faradaykonstante 110
Faradaysches Gesetz 164
Federschwinger 145
Federspannarbeit 130
Federspannenergie 131
Fehler 87
Fehlerschranken 87
Felder 137 f.
Feldstärke
–, elektrische 108, 137
–, magnetische 108, 137
Flächeninhalt (↗ Quadrat usw.)
Flächeninhaltsberechnung durch Integration 82
Flaschenzug 124
Fliehkraft 129
Folgen 69 ff. (↗ Zahlenfolgen)
Fotoeffekt, Energiebilanz 144
Fraunhofersche Linien 121
Freier Fall 125
Frequenz
–, Einheit 105
–, Größengleichung 145
Funktionen 16 ff.
–, Exponentialfunktionen 36 ff.
–, gerade 27
–, lineare 16
–, Logarithmusfunktionen 36 ff.
–, Potenzfunktionen 27
–, quadratische 18 ff.
–, rationale 62
–, Umkehrfunktion 28
–, ungerade 27
–, Winkelfunktionen 47 ff.
–, Wurzelfunktionen 28

G

Galaktische Sternhaufen 150
Galilei-Transformation 135
Ganze rationale Funktionen 62
Gaskonstante, spezifische 117, 143
Gehalt an Energie in einigen Nahrungsmitteln 118
Geneigte Ebene 124
Geometrische Folgen 70
Geometrisches Mittel 14
Gerade Funktionen 27
Geradengleichungen 95 ff.
Geradlinige Bewegung 125
Gesamtenergie 135
Geschwindigkeit

–, Einheit 105
–, Größengleichungen 124
–, Zusammensetzen von Geschwindigkeiten 126
Gewichtskraft 128
Gleichförmige Bewegung 125
Gleichförmige Kreisbewegung 126, 129
Gleichgewichtsbedingungen 122
Gleichgewichtskonstanten 162
Gleichseitiges Dreieck 64
Gleichstrom 136
Gleichungen 16 ff.
–, Exponentialgleichungen 46
–, lineare 17
–, quadratische 23
Gleichungssystem 17
Gleitreibungszahlen 114
Graphische Lösungsverfahren 17
Gravitation 133
Gravitationsfeld 131, 133
Gravitationskonstante 110
Grenzwert
– einer Folge 69
– einer Funktion 72
–, wichtige Grenzwerte 71
Grenzwertsätze 71
Griechisches Alphabet 8
Größengleichungen aus der Mechanik 122 ff.
Grundgesetz der Translation 128
Grundintegrale 81
Grundziffern 11 f.

H

Haftreibungszahlen 114
Harmonisches Mittel 14
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 81
Hebel 123
Heizwert einiger Brennstoffe 118
Heronische Formel 63
Hexaeder 67
Höhensatz 64
Hohlzylinder 66
Hookesches Gesetz 122
Hubarbeit 130
Hydraulische Anlagen 124, 134
Hyperbel 27, **101**

I

Ideales Gas 140 f., 143
Ikosaeder 67
Impuls
–, Einheit 107
–, Größengleichungen 131 f.
Induktion, magnetische 108, 137
Induktionsgesetz 138
Induktionskonstante 109
Induktiver Widerstand 139
Induktivität
–, Einheit 108
–, Größengleichungen 138
Induzierte Spannung 138
Inkreis (Dreieck) 64
Innere Energie 107
Integralrechnung 80 ff.
Integrationsregeln 81
Interferenzgleichung 144
Interpolieren 24, **44**
Ionenladung 165
Ionenprodukt des Wassers 162
Isobare
– Wärmeübertragung 142
– Zustandsänderung 143
Isochore Zustandsänderung 143
Isolierstoffe 119 f.
Isotherme Zustandsänderung 143

J

Jupiter 148

K

Kalorische Zustandsgleichung 141
Kapazität, elektrische
–, Einheit 108
–, Größengleichung 137
Kapazitiver Widerstand 139
Karthesisches Koordinatensystem 88
Kelvin 103
Kennzahl (bei Logarithmen) 42
Keplersche Gesetze 133
Kernbindungsenergie 146
Kettenregel 74
Kinematik 124 ff.
Kinetische Energie 131
– der Elektronen 144
Kinetische Gastheorie 140
Klammern 13
Kolbendruck 134
Kombinationen 84
Kombinatorik 83 ff.
Komplementwinkelbeziehungen 49
Konstanten
–, mathematische 9
–, physikalische 110
Kontinuitätsgleichung 134
Konvexität – Konkavität 78
Koordinatenebenen 99
Koordinatensystem 88
Kosinus 47
Kosinussatz 51, 64
Kosmische Geschwindigkeiten 110, **134**
Kotangens 47
Kraft
–, Einheiten **106**, 112
–, Größengleichung 122, 128
–, Zusammensetzen von Kräften 123
Kraftumformende Einrichtungen 123
Kraftstoß
–, Einheit 107
–, Gleichungen 131 f.
Kreis 67
Kreisausschnitt 67
Kreisbewegung 126, 129
Kreisbogen 67
Kreisfrequenz 139, 145
Kreisgleichung 99 f.
Kreiskegel 66
Kreiskegelstumpf 66
Kreiszylinder 66
Kubischer Ausdehnungskoeffizient 116
Kugel 67, 102
Kugelabschnitt (-segment) 67
Kugelausschnitt (-sektor) 67

Kugelkappe 67
Kurvendiskussion 75
–, Schritte für eine 79

L

Ladung, elektrische
–, Einheit 107
–, Gleichung 137
Lageenergie 131
Längenänderung 142
Längenkontraktion 135
Leistung
–, elektrische 107, 113 (Einheiten); 140 (Größengleichungen)
–, mechanische 113 (Einheiten); 131 (Größengleichungen)
Leistungsfaktor 140
Leuchtdichte
–, Einheit 109
Lichtgeschwindigkeit 110, 120
Lichtjahr 147
Lichtstrom
–, Einheit 109
Lineare Exzentrizität 100 f.
Lineare Funktionen 16
Lineare Gleichungen 17
–, graphische Lösungsverfahren 17
Linearfaktoren
–, Produkt aus *n* 76
–, Zerlegung in 23
Linearer Ausdehnungskoeffizient 115, 142
Lineare Ungleichungen 18
Logarithmen
– Logarithmengesetze 15
– Logarithmusfunktionen 36
– Tafel der Logarithmen zur Basis e (natürliche Logarithmen) 39
–, Tafel der Mantissen 41
–, Verschiedene Logarithmensysteme 15 f.
Logarithmusfunktionen 36 ff.
Lokale Extrema 78 f.
Loschmidtsche Konstante 110
Lose Rolle 124
Löslichkeit 164
Löslichkeit einiger Salze 162
Löslichkeitsprodukte 181
Lorentzkraft 138
Lorentz-Transformation 135

M

Magnetische Feldkonstante 109 f.
Magnetische Feldstärke
–, Einheit 108
–, Gleichung 137
Magnetische Flußdichte
–, Einheit 108
–, Gleichung 137
Magnetische Induktion 108
–, Werkstoffe 119
Magnetischer Fluß
–, Einheit 108
–, Gleichung 137
Magnetostatisches Feld 137
Mantissen 42
Mars 148
Masse 128
Masse-Energie-Beziehung 135
Massedefekt 146
Massenanteil (Massengehalt) 157
Massenwirkungsgesetz 161
Massenzahl 146, 165
Mathematische Konstanten 9
Mathematische Zeichen 7
Maximum, Minimum 78
Mechanik der Flüssigkeiten und Gase 134
Merkur 148
Mischungsverhältnisse 158
Metallelektroden 182
Mittelpunkt einer Strecke 92
Mittelwert 14
Mittelwertsatz
– der Differentialrechnung 78
– der Integralrechnung 80
Mittlere Geschwindigkeit von Gasmolekülen 117
Momentanwert der Spannung
– (Gleichstrom) 138
– (Wechselstrom) 139
Mol 104
Molare Masse 156
Molare Reaktionswärme 159
– Bildungswärme 160
– Reaktionsenergie 160
– Reaktionsenthalpie 160
Molares Volumen 156
Molarität 158
Mond 147
Monotonie
– Monotoniegesetze für lineare Ungleichungen 18
– von Folgen 69
– Monotonieverhalten von Funktionen 76
Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl 90
Multiplikationsregel 86

N

Näherungsrechnen 87 ff.
Näherungsverfahren zur Berechnung von Nullstellen 87
Nebenwinkel 65
Neptun 148
Newtonsches Grundgesetz 128
Newtonsches Näherungsverfahren 87
Normalform
– der quadratischen Gleichung 19
Normalität 157
Normalkraft 128
Normalparabel 19
Normfallbeschleunigung 110
Normvolumen des idealen Gases 110
Nullstellen
– ganzer rationaler Funktionen 61
Nullstellenermittlung im Rahmen einer Kurvendiskussion 75, 77
– Berechnung durch Näherungsverfahren 87
Numerus 42

O

Ohmsches Gesetz 136
Ohmscher Widerstand 136, 139

Optik 143 f.
Optische Strahlung
–, Einheiten 109
Oktaeder 67
Organische Stoffe 178 f.
Ortsvektor 89
Ostwaldsches Verdünnungsgesetz 163
Oxydationszahlen 183

P

Parabel 27, **101**
Parallelogramm 64
Parallelschaltung 136
Paramagnetische Stoffe 119
Parametergleichungen einer Ebene 94
Parsec 147
Partialsummen 70
Pascalsches Dreieck 67
Pendelschwinger 145
Periode 145
Periodizität der Winkelfunktionen 47
Permeabilität 138
–, relative 119
Permeabilitätszahl 119
Permutationen 84
Phasengeschwindigkeit einer Welle 144 f.
Phasenverschiebung 140
Phänomenologische Thermodynamik 141
Photon 144
pH-Wert 163
Physikalische Chemie
–, Einheiten 109
Physikalische Einheiten 103 ff.
Plancksches Wirkungsquantum 110
Planeten 148
Plattenkondensator 137
Pluto 148
Pol 73, 79
Polyeder, regelmäßige 67
Positionssysteme 11
(Umwandlung aus der dualen Darstellung in die dekadische und umgekehrt)
Potentielle Energie 131
Potenzen 14
Potenzfunktionen 27 f.
Primzahlen 10
Prisma 68
Produktregel (Differentiation) 74
Protonenanzahl 165
Prozentrechnung 14
Punktrichtungsgleichung 95
Pyramide 68
Pyramidenstumpf 68

Q

Quader 68
Quadrantenbeziehungen 48
Quadrat 67
Quadratische Funktionen 18 ff.
– Wertetafel der Funktion $y = x^2$ 19 ff.
Quadratische Gleichungen 23
Quadratwurzelziehen mit Hilfe
– der Quadrattafel 20
– der Quadratwurzeltafel 30
Quadrieren mit Hilfe der Wertetafel 20
Quanteneigenschaften des Lichtes 144
Quotientenregel (Differentation) 74

R

Radialbeschleunigung 129
Radialkraft 129
Radiant 51
Rationale Funktionen 62
Reaktionsgeschwindigkeit 160
Rechteck 65
Rechtwinkliges Dreieck 64
Reflexionsgesetz 143
Regelmäßige Polyeder 67
Regelmäßige Polygone (Vielecke) 65
Regula falsi 87
Reibungsarbeit 130
Reibungskraft 128
Reibungszahlen 114
Reihe 72
Reihenschaltung 136
Relative Atommasse 146, 155
Relative Dielektrizitätskonstante 119
Relative Molkülmasse 155
Relative Permeabilität 119
Relativer Fehler 87
Relativistische Masse 135
Relativitätstheorie 135
Richmannsche Mischungsregel 142
Richtungskosinus 92
Rolle
–, feste 123
–, lose 123
Rollreibungszahlen 114
Römische Zahlzeichen 12
Rotation (Transformation eines Koordinatensystems) 89
– (Bewegungsgesetze) 126, 129
Rotationsenergie 129, 131
Ruheenergie 135
Ruhende Flüssigkeiten und Gase 134
Ruhmasse eines
– Elektrons, – Neutrons,
– Protons 110
Runden 12
Rydberg-Frequenz 111

S

Saturn 148
Satz
– des Euklid 64
– des Pythagoras 64
– Höhensatz 64
– Kosinussatz 64
– Sinussatz 64
Satz von Rolle 78
Säuren, starke – schwache 163
Säurekonstanten 180
Schallgeschwindigkeiten 114
Scheinarbeit 140
Scheinleistung 140
Scheinwiderstand 139
Scheitelgleichung
– der Parabel 101
Scheitelwinkel 63

Schmelztemperatur
– von festen Stoffen 115
– von Flüssigkeiten 116
Schmelzwärme, spezifische 115, 142
Schnittpunkt zweier Geraden 98
Schräger Wurf 128
Schweredruck 134
Schwingungen und Wellen 145
Schwingungsdauer 145
Selbstinduktion 138
Senkrechter Wurf 125, **127**
SI (Systéme International d'Unités) 103
Sicheres Ereignis 85
Siedetemperatur
– fester Stoffe 115
– von Flüssigkeiten 116
– in Abhängigkeit vom Druck 117
Sinus 47
Sinussatz 51, 64
Skalarprodukt 93
Sonne 147
Spannung, elektrische
–, Einheit 108
Spezielle Relativitätstheorie 135
Spezifische Gaskonstante 117, 143
Spezifische Ladung eines Protons 111
Spezifische Schmelzwärme 115 f., 142
Spezifische Verdampfungswärme 117, 142
– in Abhängigkeit vom Druck 117
Spezifische Wärme
–, Einheit 107
Spezifische Wärmekapazität
–, Einheit 107
– fester Stoffe 115
– von Flüssigkeiten 116
– von Gasen 116
Spezifischer elektrischer Widerstand
–, Einheit 108
– verschiedener Stoffe 120
Sprungstelle 73
Spule
–, magnetische Flußdichte 137
Stammfunktion 80
Standardbedingungen 160
Standardpotentiale 182 f.
Statik 122 ff.
Sternbilder 150 f.
Sterne 152
Sternhaufen 150
Stetigkeit 73
Stöchiometrisches Rechnen 165
Stoffmenge 109, 155
Stoffmengenanteil 157
Stoffmengenkonzentration 157
Stoßvorgänge 131 f.
Strahlenoptik 143
Strahlensätze 68
Strömende Flüssigkeiten und Gase 134
Stromkreis 136
Stromstärke 107, 136, 139
Stufenwinkel 63
Substitutionsregel
– der Integralrechnung 81
Summe einer Folge 71
Summenregel
– Differentiation 74
– Integration 81
Summe von zwei Ereignissen 85
System von zwei Gleichungen 17
–, graphisches Lösungsverfahren 17

T

Tafel
– der Quadrate ($y = x^2$) 19 ff.
– der Kuben ($y = x^3$) 23 ff.
– der Quadratwurzeln ($y = \sqrt{x}$) 30 ff.
– der Kubikwurzeln ($y = \sqrt[3]{x}$) 33 ff.
– der Funktion $y = e^x$ 36 ff.
– der Funktion $y = \ln x$ 39 ff.
– der vierstelligen Mantissen der Logarithmen 41 ff.
– der Winkelfunktionen:
Spezielle Funktionswerte 60
Winkel in Grad 55
Winkel in rad 61
Tangens 47
Tangente
– an einen Kreis 100
– an eine Ellipse 100
– an eine Parabel 101
– an eine Hyperbel 101
Temperatur
–, Einheit 107
Termformeln für das H-Atom 144
Tetraeder 67
Thermischer Wirkungsgrad 142
Thermodynamik 140 ff.
Thermodynamische Eigenschaften
– fester Stoffe 115
– von Flüssigkeiten 116
Thomsonsche Schwingungsgleichung 145
Torsionsschwinger 145
Trägheitsmoment 129
Transformation eines Koordinatensystems 89
Transformator 140
Translation
–, Verschiebung eines Koordinatensystems 89
–, Grundgesetz der 128
Translationsenergie 131
Trapez 64
Trigonometrische Beziehungen im Dreieck 51

U

Umkehrfunktion 28
Umkreis (Dreieck) 64
Umrechnungsfaktoren von Einheiten 111 ff.
Unbestimmtes Integral 80
Unelastischer Stoß 132
Unendliche Reihen 72
Ungerade Funktionen 27
Ungleichförmige Bewegung 125
Universelle Gaskonstante 110, 143
Unstetigkeitsstellen 73
Unverzweigter Stromkreis 136
Uranus 148

V

Variationen 84
Vektoraddition 90
Vektormultiplikation 90
Vektorprodukt 94
Vektorrechnung 88 ff.
Vektorräume 88
Venus 148
Verdampfungswärme, spezifische 142
Verhalten im Unendlichen 76
Verzweigter Stromkreis 136
Vierecke 64
Vierstellige Mantissen der Logarithmen 41 ff.
Vietascher Wurzelsatz 23
Volumen (↗ Würfel usw.)
Volumenänderung 142
Volumenanteil 157
Volumenarbeit 141
Volumenberechnung durch Integration 83
Volumenstrom
–, Einheit 106

W

Waagerechter Wurf 127
Wahrscheinlichkeitsrechnung 81 ff.
–, klassische Definition der Wahrscheinlichkeit 85
Wärme(menge)
–, Einheiten **107**, 113
Wärmekapazität, spezifische
–, Einheit 107
– von festen Stoffen 115
– von Flüssigkeiten 116
– von Gasen 116
Wärmeleitfähigkeit 116
Wärmeübertragung 142
Wechselstrom, elektrischer 139 f.
Wechselwinkel 63
Wellen 145
Wellenoptik 144
Wendepunkt 79 f.
Wendetangente 79 f.
Widerstand, elektrischer
–, Einheit 108
Widerstandsgesetz 136
Widerstandslegierungen 120
Winkelfunktionen 47
Winkelgeschwindigkeit
–, Einheit 106
–, Größengleichungen 125
Winkelmessung 51
Winkelpaare 63
Winkel zwischen Vektoren 93
Wirkarbeit 140
Wirkleistung
–, Einheit 108
–, Gleichung 140
Wirkungsgrad 131
–, thermischer 142
Wurfbewegungen 127 f.
Würfel 66
Wurzelfunktionen 28
Wurzelgesetze 15
Wurzeln 14

Z

Zahlenfolgen 69
– Arithmetische Folge 70
– Geometrische Folge 70
– Partialsummenfolge 70
Zahlensysteme 11 f.
Zehnersystem 11 f.
Zeitdilation 135
Zerfallgesetz 146
Zerlegung (einer quadratischen Gleichung) in Linearfaktoren 23
Zinsrechnung 14
Zusammensetzen von
– Kräften 123
– Geschwindigkeiten 126
Zustandsänderung des idealen Gases 143
Zweiersystem 11 f.
Zwei Geraden 97 f.
Zweipunktegleichung 96

Periodensystem der Elemente (Langperi

Periode	I. Hauptgruppe	II. Hauptgruppe	III. Nebengruppe	IV. Nebengruppe	V. Nebengruppe	VI. Nebengruppe	VII. Nebengruppe		VIII. Nebengruppe
1	1 1,008 2,1 **H** Wasserstoff								
2	3 6,94 1,0 **Li** Lithium	4 9,01 1,5 **Be** Beryllium							
3	11 22,99 0,9 **Na** Natrium	12 24,31 1,2 **Mg** Magnesium	21 44,96 1,3 **Sc** Skandium	22 47,90 1,5 **Ti** Titan	23 50,94 1,6 **V** Vanadin	24 51,996 1,6 **Cr** Chrom	25 54,94 1,5 **Mn** Mangan	26 55,85 1,8 **Fe** Eisen	27 58,93 1,8 **Co** Kobalt
4	19 39,10 0,8 **K** Kalium	20 40,08 1,0 **Ca** Kalzium	39 88,91 1,3 **Y** Yttrium	40 91,22 1,4 **Zr** Zirkonium	41 92,91 1,6 **Nb** Niob	42 95,94 1,8 **Mo** Molybdän	43 [97] 1,9 **Tc** Technetium	44 101,07 2,2 **Ru** Ruthenium	45 102,91 2,2 **Rh** Rhodium
5	37 85,47 0,8 **Rb** Rubidium	38 87,62 1,0 **Sr** Strontium	57* 138,91 1,1 **La** Lanthan	72 178,49 1,3 **Hf** Hafnium	73 180,95 1,5 **Ta** Tantal	74 183,85 1,7 **W** Wolfram	75 186,21 1,9 **Re** Rhenium	76 190,2 2,2 **Os** Osmium	77 192,22 2,2 **Ir** Iridium
6	55 132,91 0,7 **Cs** Zäsium	56 137,34 0,9 **Ba** Barium	89** [227] 1,1 **Ac** Aktinium	104 [260] **(Ku)** Kurtschatovium	105 [260] **(Ns)** Nielsbohrium				
7	87 [223] 0,7 **Fr** Franzium	88 226,02 0,9 **Ra** Radium							

Schlüssel

Eigenschaften der Oxide:

- basisch
- amphoter
- sauer
- Edelgase

Farbe

Elektronegativitätswert

Ordnungszahl

7 14,007
3,0
N
Stickstoff

Name Symbol relative Atommasse

* Lanthanide

6	58 140,12 1,1 **Ce** Zer	59 140,91 1,1 **Pr** Praseodym	60 144,24 1,1 **Nd** Neodym	61 [145] 1,1 **Pm** Promethium	62 150,35 1,2 **Sm** Samarium

** Aktinide

7	90 232,04 1,3 **Th** Thorium	91 231,03 1,5 **Pa** Protaktinium	92 238,03 1,7 **U** Uran	93 237,05 1,3 **Np** Neptunium	94 [244] 1,3 **Pu** Plutonium

Die re

odensystem)

			III. Hauptgruppe	IV. Hauptgruppe	V. Hauptgruppe	VI. Hauptgruppe	VII. Hauptgruppe	VIII. Hauptgruppe
								2 4,003 He Helium
			5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff	8 15,999 3,5 O Sauerstoff	9 18,998 4,0 F Fluor	10 20,18 Ne Neon
	I. Nebengruppe	II. Nebengruppe	13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silizium	15 30,97 2,1 P Phosphor	16 32,06 2,5 S Schwefel	17 35,45 3,0 Cl Chlor	18 39,95 Ar Argon
28 58,70 1,8 Ni Nickel	29 63,55 1,9 Cu Kupfer	30 65,38 1,6 Zn Zink	31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen	34 78,96 2,4 Se Selen	35 79,90 2,8 Br Brom	36 83,80 Kr Krypton
46 106,44 2,2 Pd Palladium	47 107,87 1,9 Ag Silber	48 112,40 1,7 Cd Kadmium	49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon	52 127,60 2,1 Te Tellur	53 126,90 2,5 J Jod	54 131,30 Xe Xenon
78 195,09 2,2 Pt Platin	79 196,97 2,4 Au Gold	80 200,59 1,9 Hg Quecksilber	81 204,37 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Wismut	84 [209] 2,0 Po Polonium	85 [210] 2,2 At Astat	86 [222] Rn Radon

63 151,96 1,2 Eu Europium	64 157,25 1,2 Gd Gadolinium	65 158,92 1,2 Tb Terbium	66 162,50 1,2 Dy Dysprosium	67 164,93 1,2 Ho Holmium	68 167,26 1,2 Er Erbium	69 168,93 1,2 Tm Thulium	70 173,04 1,2 Yb Ytterbium	71 174,97 1,2 Lu Lutetium

95 [243] 1,3 Am Amerizium	96 [247] 1,3 Cm Kurium	97 [247] 1,3 Bk Berkelium	98 [251] 1,3 Cf Kalifornium	99 [254] 1,3 Es Einsteinium	100 [257] 1,3 Fm Fermium	101 [258] 1,3 Md Mendelevium	102 [255] 1,3 No Nobelium	103 [260] 1,3 Lr Lawrenzium

lativen Atommassen in eckigen Klammern beziehen sich auf das längstlebige gegenwärtig bekannte Isotop des betreffenden Elements.