Mathematik

Ergänzungsheft

zum Lehrbuch „Rechnen Messen Konstruieren“

für die Klasse 5

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1966

Verfasser:
Dr. Dieter Ilse und Dipl.-Math. Werner Tietz · Teil 1
Hans Simon · Teil 2

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack
Zeichnungen: Edeltraud Schwabe
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1965
ES 11 C · Bestell-Nr. 000504-3 · Preis: 0,20 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/64 (DN)
Druck: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft, Dresden

1. Ergänzungen zur Arithmetik

1.1. Die Ordnung der natürlichen Zahlen

Als **natürliche Zahlen** bezeichnen wir die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Bei Preisen und Stoffmengen hast du auch schon andere Zahlen kennengelernt. Das waren Zahlen, bei denen in der Folge der Grundziffern ein Komma auftrat; z. B. 4,35; 74,85 und ähnliche. Diese Zahlen sind keine natürlichen Zahlen. Du wirst sie in diesem Schuljahr noch näher kennenlernen.
Die natürlichen Zahlen erhält man, wenn man von 0 ausgehend fortlaufend die Zahl 1 addiert. Wenn a eine beliebige natürliche Zahl ist, so nennt man die natürliche Zahl $a + 1$ den unmittelbaren Nachfolger von a und a den unmittelbaren Vorgänger von $a + 1$. So ist z. B. 5 der unmittelbare Nachfolger von 4 und 4 der unmittelbare Vorgänger von 5. Vorläufig beschäftigen wir uns nur mit natürlichen Zahlen. Deshalb werden wir zur Abkürzung statt „natürliche Zahlen" kurz „Zahlen" sagen.

1. Bestimme jeweils den unmittelbaren Nachfolger von
8; 729; 4 698; 99 999; 0!

2. Bestimme jeweils den unmittelbaren Vorgänger von
500; 1; 3 680 000; 731; 100 000!

3. Welche natürliche Zahl hat keinen unmittelbaren Vorgänger? Gibt es eine natürliche Zahl, die keinen unmittelbaren Nachfolger hat?

4. Suche in den folgenden Zahlenpaaren jedesmal die größere der beiden Zahlen!

a)	25 837	und	25 872;	**b)**	263 488	und	264 488;
	7 843 495	und	7 943 495;		5 299 401	und	5 399 401;
	80 300 004	und	79 900 999;		28 378 288	und	28 379 289;
	728 476 221	und	728 480 000;		144 579 351	und	144 698 879;
	50 468 299	und	50 468 300;		399 555 888	und	401 222 111

5. Bilde aus folgenden Zahlen alle Zahlenpaare, in denen die kleinere Zahl links von der größeren steht:
388 277; 4 298 731; 55 288; 331 268 431; 1 972 688!

6. Wieviel Zahlen mit Nullen in den letzten
a) vier Stellen,
b) drei Stellen
liegen zwischen den Zahlen 472 620 und 498 414?
Beantworte jeweils dieselbe Frage für
8 634 291 und 8 745 382; 7 425 338 und 8 672 521!

7. a) Wie groß ist $a + b$, wenn $a = 26\,387$ und $b = 5\,285$ gilt?
   b) Für welche Zahlen b gilt die Ungleichung $5\,281 < b < 5\,293$?
   c) Für welche Zahlen b gilt die Ungleichung $6\,384 > b > 6\,379$?

8. Berechne die Summen $a + b$ für $a = 26\,387$ und für alle b, für die die Ungleichung $5\,281 < b < 5\,293$ gilt!
   Stelle jeweils fest, ob $a + b < 31\,674$, $a + b = 31\,674$ oder $a + b > 31\,674$ gilt!

9. Bestimme die Summe $a + b$ mit $563 < a < 565$ und $3\,008 < b < 3\,010$!

10. Bestimme alle möglichen Summen $x + y$ mit
    $4\,563\,212 < x < 4\,563\,217$ und $812\,061 < y < 812\,070$!
    Wieviel Summen sind kleiner als 5 375 278?

11. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	$a + 3b$
112	62	
198	150	
2 613	200	
5 000	702	

12. Berechne die Summe von $a + 3b$, wenn $a = 8\,574\,548$ und $4\,567 < b < 4\,569$ gilt!

13. Berechne alle möglichen Summen $a + 3b$!
    Dabei soll gelten: $a = 8\,486\,720$ und $4\,512\,483 < b < 4\,512\,487$.

14. Berechne alle möglichen Summen $26a + 2b$ mit $27\,041 < a < 27\,045$ und $360\,430 < b < 360\,433$!

15. Die Anzahl der Beschäftigten im Bergbau der Deutschen Demokratischen Republik veränderte sich folgendermaßen:
    Im Jahre 1955 waren es 188 916, im Jahre 1958 waren es 13 838 mehr als im Jahre 1955, im Jahre 1961 waren es 13 395 weniger als im Jahre 1958, und im Jahre 1962 waren es 2 336 mehr als im Jahre 1955.
    a) Stelle fest, wie groß die Anzahl der Beschäftigten in jedem der angeführten Jahre war!
    b) Ordne die gefundenen Zahlen nach ihre Größe!

16. Die folgende Tabelle gibt an, wie sich die Erzeugung von Braunkohlenbriketts in der Deutschen Demokratischen Republik entwickelt hat.

1950	37 697 000 t	1961	57 996 000 t
1955	50 967 000 t	1962	59 727 000 t
1958	54 008 000 t		

Ergänze die folgende Aufstellung!

von — bis	Produktionssteigerung (in Tonnen)
1950—1955	
1955—1958	
1958—1961	
1961—1962	
1950—1958	
1950—1961	
1950—1962	
1955—1961	
1958—1962	

17. Nenne alle Zahlen x, die die Ungleichung $60 < 9x < 100$ erfüllen!

18. Nenne alle Zahlen x, die die Ungleichung $99\,000 < 92x < 100\,000$ erfüllen!

19. Wieviel durch 1 000 teilbare Zahlen liegen zwischen 72 834 916 und 72 862 403?

20. Fünf Pioniere einer Klasse trafen sich zu einer Radwanderung. Als erster war Herbert am Treffpunkt. Jürgen kam, als Klaus und Dieter schon da waren. Dieter traf vor Werner, aber später als Klaus ein. Als Werner kam, sah er Jürgen schon am Treffpunkt stehen. In welcher Reihenfolge trafen die fünf Pioniere ein?

21. Für fünf Zahlen a, b, c, d, e gelten die folgenden Ungleichungen.

$d < b$; $a < e$; $c < a$; $e < b$;
$a < b$; $c < b$; $e < d$;
$a < d$; $c < e$;
$c < d$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen können wir die Zahlen nicht bestimmen. Wir können aber die Reihenfolge angeben, in der sie nach ihrer Größe geordnet sind.
Schreibe die fünf Zahlen in dieser Reihenfolge auf!

1.2. Das dekadische Stellenwertsystem

In der vierten Klasse haben wir gelernt, daß alle Zahlen mit Hilfe von zehn Grundziffern geschrieben werden können. Wir hatten bei der Zerlegung von Zahlen in Einer, Zehner, Hunderter usw. eine neue Schreibweise, die Potenzschreibweise, eingeführt:

$$10^2 = 10 \cdot 10 \qquad\qquad = \quad 100;$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \qquad = \ 1\,000;$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000.$$

Die hochgestellte Ziffer gibt an, wie oft man die Zahl 10 als Faktor setzen muß.

22. Zerlege die folgenden Zahlen in Vielfache von Zehnerpotenzen!
Sechsundsiebzig Millionen vierhundertundachttausendvierhundertunddrei;
vierhundertundacht Millionen zweihundertunddreizehntausendundzwölf;
fünf Millionen und acht;
dreiunddreißig Millionen dreihundertunddreiunddreißigtausenddreihundertdreiunddreißig;
neunzig Millionen vierhundertundzwanzigtausendundzwanzig.

23. Schreibe die zu folgenden Zerlegungen gehörenden Ziffern auf, und lies diese!
$7 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$;
$6 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1$;
$8 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 1$;
$2 \cdot 10^{10} + 0 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1$;
$3 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1$.

1.3. Addition von natürlichen Zahlen

24. Ergänze die folgende Tabelle, und überschlage vorher die Ergebnisse!

a	b	$a + b$
463 212	287 980	
4 573 819	4 002 008	
33 217 017	66 713	
74 917 581	75 082 421	
512 800 007	83 200 117	

Alle Additionsaufgaben unserer Tabelle haben die Form $a + b = c$; z. B. $340\,512 + 482\,601 = 823\,113$ mit $a = 340\,512$, $b = 482\,601$ und $c = 823\,113$.

▶ Sowohl die rechte als auch die linke Seite der Gleichung $a + b = c$ nennt man die Summe aus a und b. Die Glieder a und b einer Summe $a + b$ heißen Summanden.

Diese Bezeichnungen verwenden wir auch, wenn mehr als zwei Zahlen addiert werden. So heißen zum Beispiel in $a + b + c + d = e$ wieder beide Seiten der Gleichung S u m m e und die Glieder a, b, c und d S u m m a n d e n.

25. Ergänze die folgende Tabelle, und überschlage vorher die Ergebnisse!

a	b	$a + b$	$b + a$
7 338 279	582 638		
12 038 281	76 465 705		
63 218 003	9 044 017		
152 488 513	213 000 213		
7 065	18 992 007		

Wie in den letzten Aufgaben gilt für die Addition zweier Summanden a und b stets:

▶ $$a + b = b + a.$$

Dieses Gesetz heißt K o m m u t a t i o n s g e s e t z[1] der Addition. Es besagt, daß in einer zweigliedrigen Summe die Summanden vertauscht werden können.

26. Ergänze die folgende Tabelle, und überschlage vorher die Ergebnisse!

a	b	c	$(b+c)$	$a+(b+c)$	$(a+b)$	$(a+b)+c$
376 581	2 702 895	463 512				
22 317 421	8 394 629	7 825				
204 038 700	35 961 300	200 117				
7 291 533	453 816	60 005 000				
112 113 114	277 416	53 212 005				

■ Beispiel für einen Überschlag:

$$\begin{array}{rcrcr} 370\,000 & < & 376\,581 & < & 380\,000 \\ 2\,700\,000 & < & 2\,702\,895 & < & 2\,710\,000 \\ 460\,000 & < & 463\,512 & < & 470\,000 \\ \hline 3\,530\,000 & < & \multicolumn{3}{l}{376\,581 + 2\,702\,895 + 463\,512 < 3\,560\,000} \end{array}$$

Für die Addition von drei Summanden gilt wie in den letzten Aufgaben stets:

▶ $$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Dieses Gesetz heißt A s s o z i a t i o n s g e s e t z[2] der Addition. Es besagt, daß bei der Addition von drei Summanden die Reihenfolge der beiden einzelnen Additionen beliebig ist. Deshalb kann man die Klammern fortlassen und einfach $a + b + c$ schreiben.

[1] lateinisch: commutare – vertauschen
[2] lateinisch: associare – vereinigen

27. Berechne folgende Summen im Kopf!

a) 17 000 + 5 320; 238 600 + 2 500; 5 680 000 + 440 000; 65 900 + 440; 39 500 000 + 720 000;

b) 8 300 + 900; 64 320 000 + 290 000; 7 560 000 + 70 000; 1 042 000 + 9 700; 683 000 + 15 000.

■ Beispiel: $17\,000 + 5\,320 = 17\,000 + (3\,000 + 2\,320)$
$17\,000 + 5\,320 = (17\,000 + 3\,000) + 2\,320$
$17\,000 + 5\,320 = 20\,000 + 2\,320$
$17\,000 + 5\,320 = 22\,320$

Aus dem Kommutationsgesetz und dem Assoziationsgesetz der Addition ergibt sich, daß die Reihenfolge der Summanden in einer mehrgliedrigen Summe beliebig ist. So gilt beispielsweise $a + b + c = c + b + a$. Das zeigen wir folgendermaßen:

$a + b + c = a + (b + c)$ [Nach dem Assoziationsgesetz können wir in einer Summe von drei Summanden Klammern beliebig setzen];

$a + b + c = a + (c + b)$ [Innerhalb der Klammern wurde das Kommutationsgesetz angewendet];

$a + b + c = (a + c) + b;$
$a + b + c = (c + a) + b;$
$a + b + c = c + (a + b);$
$a + b + c = c + (b + a);$
$a + b + c = c + b + a.$

● *Begründe jeden einzelnen Schritt, indem du jedesmal das verwendete Rechengesetz angibst!*

Die Regel, daß die Reihenfolge der Summanden beliebig ist, hast du bisher schon benutzt. Bei der Kontrolle des Ergebnisses einer Additionsaufgabe hast du nämlich die Summanden noch einmal in umgekehrter Reihenfolge addiert.

28. Berechne möglichst vorteilhaft im Kopf:

a) 8 + 7 + 2; 27 + 35 + 13; 125 + 317 + 75; 1 220 + 938 + 780; 17 + 28 + 13 + 12;

b) 46 800 + 23 800 + 1 200; 1 790 + 2 300 + 310; 8 750 + 2 000 + 250; 17 000 + 4 500 + 3 000 + 1 500; 750 + 28 300 + 1 250 + 3 700!

29. Ordne den beiden Zahlen in jedem der folgenden Zahlenpaare ihre Summe zu!

[26 371; 500 003]; [11 012; 12 011]; [2 608 377; 241 918]; [9 341 564; 5 062 804]; [9 030; 725 640].

■ Beispiel: [3; 5]; [3; 5; 8].

30. Stelle fest, ob in folgenden Dreiergruppen von Zahlen (Zahlentripel) die dritte Zahl kleiner oder größer als die Summe der beiden ersten Zahlen ist oder ob sie gleich dieser Summe ist!
[6 345; 7 288; 13 633];
[721 468; 582 891; 1 304 379];
[2 352 328; 5 271 482; 8 622 810];
[7 253 897; 5 384 139; 12 638 036];
[123 428 597; 248 537 619; 371 966 216].

1.4. Das Runden

31. Die folgenden Ungleichungen haben die Form $a < b < c$. Stelle fest, ob $b-a < c-b$ oder $c-b < b-a$ gilt, und schreibe für jede Ungleichung auf, welche der beiden äußeren Zahlen der mittleren am nächsten liegt!

a)
$12 < 17 < 23$;
$5 < 19 < 24$;
$97 < 105 < 112$;
$113 < 120 < 129$;
$50 < 58 < 62$;

b)
$173 < 178 < 185$;
$266 < 280 < 301$;
$1\,281 < 1\,300 < 1\,320$;
$4\,832 < 5\,012 < 5\,200$;
$17\,495 < 18\,001 < 18\,500$.

c)
$4\,638\,229 < 4\,638\,700 < 4\,639\,200$;
$65\,233\,452 < 66\,000\,000 < 66\,233\,452$;
$728\,218 < 729\,219 < 730\,218$;
$6\,424\,000 < 6\,430\,000 < 6\,435\,000$;
$782\,683\,417 < 782\,783\,417 < 782\,784\,418$;

d)
$3\,520 < 3\,528 < 3\,530$;
$100 < 102 < 110$;
$65\,000 < 65\,300 < 66\,006$;
$0 < 4 < 10$;
$275\,600 < 275\,680 < 275\,700$.

32. Unterstreiche in den folgenden Ungleichungen jeweils diejenige äußere Zahl, die der mittleren Zahl am nächsten liegt!

a)
$80 < 82 < 90$;
$150 < 157 < 160$;
$2\,370 < 2\,371 < 2\,380$;
$12\,420 < 12\,429 < 12\,430$;
$337\,510 < 337\,517 < 337\,520$;

b)
$300 < 340 < 400$;
$2\,700 < 2\,783 < 2\,800$;
$25\,642\,400 < 25\,642\,409 < 25\,642\,500$;
$73\,200 < 73\,251 < 73\,300$;
$8\,076\,100 < 8\,076\,125 < 8\,076\,200$;

c) 35 000 < 35 400 < 36 000;
286 000 < 286 430 < 287 000;
4 536 000 < 4 536 412 < 4 537 000;
74 000 < 74 790 < 75 000;
38 271 000 < 38 271 304 < 38 272 000.

33. Bestimme zu den folgenden Zahlen
bei a) die nächstliegende durch 10 teilbare Zahl,
bei b) die nächstliegende durch 100 teilbare Zahl,
bei c) die nächstliegende durch 10 000 teilbare Zahl!

a)	b)	c)
26;	74;	10 001;
27 577;	238;	5;
18;	25 719;	9 738;
241;	520;	6 541 270;
53;	1 412;	6 546 270;
1 097;	625 702;	603 400;
386 488;	34 289;	607 200.

34. Bestimme der Reihe nach die der Zahl 76 386 274 am nächsten liegenden Zahlen, die durch 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000 teilbar sind!
Löse die gleiche Aufgabe für die Zahlen 32 078 421 und 192 409 783!

In der Praxis ist es nicht immer erforderlich, die Grundziffern in allen Stellen zu berücksichtigen. Man besetzt daher die letzten Stellen bis zur geforderten Genauigkeit mit Nullen. Dieses Verfahren nennen wir das Runden einer Zahl. Dabei hat man darauf zu achten, daß die Differenz der gerundeten Zahl zur gegebenen Zahl möglichst klein wird.

■ Als Beispiel runden wir die Zahl 3 278 429:

a) 3 278 429 ≈ 3 278 430 (hier wurde auf volle Zehner aufgerundet)
b) 3 278 429 ≈ 3 278 400 (hier wurde auf volle Hunderter abgerundet)
c) 3 278 429 ≈ 3 278 000 (hier wurde auf volle Tausender abgerundet)
d) 3 278 429 ≈ 3 280 000 (hier wurde auf volle Zehntausender aufgerundet)
e) 3 278 429 ≈ 3 300 000 (hier wurde auf volle Hunderttausender aufgerundet)
f) 3 278 429 ≈ 3 000 000 (hier wurde auf volle Millionen abgerundet)

▶ Beim Runden einer Zahl wird die letzte von Null verschiedene Ziffer, die noch angegeben werden soll, um eine Einheit erhöht, wenn die Ziffer der nachfolgenden Stelle größer als 5 ist. In diesem Falle sagt man: Die Zahl ist aufgerundet worden.

▶ Ist die Ziffer der nachfolgenden Stelle kleiner als 5, so wird diese durch eine Null ersetzt, und alle anderen Ziffern bleiben stehen. In diesem Falle sagt man: Die Zahl ist a b g e r u n d e t worden.

35. Die nachfolgenden Ungleichungen haben die Form $a < b < c$. Bilde die Differenzen $b-a$ und $c-b$, und vergleiche sie miteinander!

$$\begin{aligned} 10 &< 15 < 20; \\ 3\,800 &< 3\,850 < 3\,900; \\ 250 &< 255 < 260; \\ 37\,400 &< 37\,450 < 37\,500; \\ 4\,300\,000 &< 4\,350\,000 < 4\,400\,000. \end{aligned}$$

▶ Ist beim Runden einer Zahl die letzte von Null verschiedene Ziffer eine 5, so rundet man so, daß nach dem Runden die letzte von Null verschiedene Ziffer gerade wird.

■ Beispiele: Die Zahl 635 wird auf 640 aufgerundet.
Die Zahl 82 225 wird auf 82 220 abgerundet.
Die Zahl 37 500 wird auf 38 000 aufgerundet.
Die Zahl 213 450 wird auf 213 400 abgerundet.

Ist die 5, die beim Runden durch eine Null ersetzt werden soll, nicht die letzte von Null verschiedene Ziffer, so wird stets aufgerundet.

■ Beispiele: 4 352 wird auf 4 400 aufgerundet.
26 504 wird auf 27 000 aufgerundet.

Ist die 5, die beim Runden durch eine Null ersetzt werden soll, selbst durch Aufrunden entstanden, so wird abgerundet.

■ Beispiel: 7 478 wird auf 7 480 aufgerundet,
7 480 wird auf 7 500 aufgerundet,
7 500 wird jetzt auf 7 000 abgerundet.

1.5. Subtraktion von natürlichen Zahlen

36. Bestimme die Zahlen für x, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

a)
$$\begin{aligned} 376\,211 + 7\,058\,342 &= x; \\ 63\,845 + 102\,003 &= x; \\ 4\,733\,215 + 6\,300\,050 &= x; \\ 12\,218\,599 + 702\,461 &= x; \\ 909\,487 + 0 &= x; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4\,566 + x &= 7\,318; \\ x + 638\,527 &= 1\,213\,850; \\ x + 7\,565\,093 &= 28\,482\,003; \\ 621\,570 + x &= 621\,570; \\ x + 3\,006\,002 &= 5\,708\,090. \end{aligned}$$

Wie unterscheiden sich die Aufgaben der Gruppe a) von denen der Gruppe b)?

Bei Additionsaufgaben sind die Summanden gegeben, und die Summe soll berechnet werden.
Sind dagegen ein Summand und die Summe gegeben, so führt die Berechnung des anderen Summanden auf die Subtraktion. Man sagt deshalb:
Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.
Statt $x + b = a$ schreiben wir $a - b = x$. Beide Seiten der letzten Gleichung nennen wir die Differenz der Zahlen a und b. Die Zahl a heißt Minuend[1], die Zahl b heißt Subtrahend[2].

■ Beispiel: Statt $x + 4 = 7$ rechnen wir $x = 7 - 4$. Also gilt: $x = 3$.

Bei der Addition kannst du die Summanden ganz beliebig wählen. In jedem Falle läßt sich dann die Summe ausrechnen. Bei der Umkehrung der Addition, der Subtraktion, mußt du die Zahlen so wählen, daß der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

37. Ordne den folgenden Zahlenpaaren [a; b] die Differenz $a - b$ zu!
[4 231; 3 527]; [798 137; 56 529]; [87 385; 52 192]; [7 398 225; 37 006]; [12 571 999; 4 562 309].

■ Beispiel: [9; 7]; [9; 7; 2].

38. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	$a + b$
4 367		12 598
614 728	1 036 312	
	523 716	1 812 007
42 528 738	67 012 913	
	24 900 980	38 670 040
76 429		182 314
9 072 584		22 040 608
108 912	426 563	
	213 970 647	844 071 501
2 003 006		7 200 300

39. Welche Zahl muß man zu 43 266 addieren, um 94 397 zu erhalten?

40. Zu welcher Zahl muß 3 266 416 addiert werden, damit sich als Summe 5 987 219 ergibt?

41. Die Schüler einer Klasse haben sich verpflichtet, 1 500 kg Schrott zu sammeln. Bisher haben sie schon 963 kg gesammelt.

[1] lateinisch: minuere – vermindern
[2] lateinisch: subtrahere – wegziehen

42. Klaus läßt seine Mitschüler eine gedachte Zahl errechnen. Er sagt zu ihnen: „Wenn ihr zu meiner Zahl erst 2 000 und dann noch einmal 1 500 addiert, so erhaltet ihr 6 000."

43. Bestimme die Zahlen für x, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

a) $27 + x + 9 = 52;$
$x + 113\,708 + 421\,030 = 2\,633\,700;$
$7\,628\,352 + 814\,213 + x = 9\,021\,503;$
$x + 92\,754 + 268\,400 = 1\,900\,000;$
$344\,790 + x + 902\,416 = 5\,682\,094;$

b) $x = 8\,272 - 1\,300 - 4\,010;$
$x = 64\,526 - 28\,700 - 16\,453;$
$x = 2\,219\,861 - 1\,520\,327 - 604\,202;$
$x = 79\,374 - 17\,201 - 51\,474;$
$x = 466\,283\,513 - 43\,518\,799 - 231\,783\,017.$

Du kannst die Aufgaben aus 43a) und b) auf zwei Wegen lösen!

■ Beispiel 1:

1. *Weg*:
$$\begin{aligned} 83 + x + 57 &= 381; \\ x + 57 &= 381 - 83; \\ x + 57 &= 298; \\ x &= 298 - 57; \\ x &= 241; \end{aligned}$$

2. *Weg*:
$$\begin{aligned} 83 + x + 57 &= 381; \\ x + (83 + 57) &= 381; \\ x + 140 &= 381; \\ x &= 381 - 140; \\ x &= 241. \end{aligned}$$

■ Beispiel 2:

1. *Weg*:
$$\begin{aligned} x &= 17\,431 - 5\,386 - 9\,204; \\ x &= 12\,045 - 9\,204; \\ x &= 2\,841; \end{aligned}$$

2. *Weg*:
$$\begin{aligned} x &= 17\,431 - 5\,386 - 9\,204; \\ x &= 17\,431 - (5\,386 + 9\,204); \\ x &= 17\,431 - 14\,590; \\ x &= 2\,841. \end{aligned}$$

Aus den letzten Aufgaben hast du erkannt, daß man zwei Zahlen von einer Zahl subtrahieren kann, indem man die Subtrahenden addiert und die erhaltene Summe vom Minuenden subtrahiert. Allgemein gilt das Rechengesetz

▶ $$a - b - c = a - (b + c).$$

Dabei muß $b + c < a$ oder $b + c = a$ gelten. (Warum?)
Dieses Rechengesetz gilt nicht nur für zwei Subtrahenden. Sind zum Beispiel drei Subtrahenden gegeben, so rechnet man folgendermaßen:

$$a - b - c - d = a - (b + c + d).$$

Dabei mußt du wieder darauf achten, daß $b + c + d < a$ oder $b + c + d = a$ gilt.

44. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	c	$a + b + c$
4 367	5 698	11 312	
	12 798	15 378	42 512
97 318		101 513	231 486
5 367 817	7 113 503		17 331 005
	17 991 101	31 218 349	112 113 114
123 437 598		204 040 001	477 000 000

45. Rechne die folgenden Aufgaben vorteilhaft unter Verwendung der beiden zuletzt genannten Rechengesetze!

a) 100 − 17 − 13;
37 350 − 1 272 − 3 123;
6 312 000 − 8 400 − 3 600;
448 000 − 12 300 − 35 700;
95 637 200 − 630 900 − 6 300;

b) 7 300 − 820 − 1 200 − 2 480;
972 050 − 25 − 1 800 − 225;
482 900 − 40 450 − 10 000 − 1 450;
39 872 − 124 − 2 048 − 12 000;
8 200 − 1 025 − 800 − 175.

46. Rechne im Kopf!
837 − 101; 25 429 − 10 010; 9 631 − 1 001;
164 735 − 10 100; 61 637 − 1 010.

■ Beispiel: 42 639 − 1 001 = 42 639 − (1 000 + 1);
42 639 − 1 001 = 42 639 − 1 000 − 1;
42 639 − 1 001 = 41 639 − 1;
42 639 − 1 001 = 41 638.

● *Welches Rechengesetz haben wir verwendet?*

Um die Aufgabe 276 − 99 möglichst vorteilhaft zu lösen, subtrahieren wir zunächst 100 von 276. Das ergibt 176. Wir haben nun aber einen Einer zuviel subtrahiert und müssen ihn deshalb zu 176 wieder addieren. Wir erhalten als Endergebnis 177:

$$276 - 99 = 276 - 100 + 1;$$
$$276 - 99 = 176 + 1;$$
$$276 - 99 = 177.$$

Statt 99 können wir auch die Differenz $100 - 1$ schreiben. Wir rechnen dann folgendermaßen:

$$276 - (100 - 1) = 276 - 100 + 1;$$
$$276 - (100 - 1) = 177.$$

47. Rechne vorteilhaft!

432 109 − 999;
81 045 − 9 900;
3 291 411 − 999 999;
53 703 408 − 990 000;
25 823 − 9 990.

An den letzten Aufgaben erkennen wir wieder ein neues Rechengesetz. Wir subtrahieren eine Differenz $b - c$ von einer Zahl a nach folgendem Rechengesetz:

▶ $$a - (b - c) = a - b + c.$$

1.6. Multiplikation von natürlichen Zahlen

48. Ergänze die folgende Tabelle, und überschlage vorher die Ergebnisse!

a	b	$a \cdot b$
3 519	26	
28 463	17	
8 638	65	
4 503 706	82	
772 009	71	

Alle Multiplikationsaufgaben unserer Tabelle hatten die Form $a \cdot b = c$, z. B. $3\,519 \cdot 26 = 91\,494$ mit $a = 3\,519$, $b = 26$ und $c = 91\,494$.

▶ Beide Seiten der Gleichung $a \cdot b = c$ heißen das Produkt aus a und b. Die Glieder a und b eines Produktes $a \cdot b$ heißen Faktoren.

Diese Bezeichnungen verwenden wir auch, wenn mehr als zwei Glieder multipliziert werden. So heißen zum Beispiel in $a \cdot b \cdot c \cdot d = e$ wieder beide Seiten der Gleichung Produkt und die Glieder a, b, c und d Faktoren.

49. Ergänze die folgende Tabelle, und überschlage vorher die Ergebnisse!

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
81	17		
29	44		
76	39		
95	21		
40	64		

Vergleiche die Zahlen in der dritten und vierten Spalte miteinander!

Wie in Aufgabe 49. gilt für die Multiplikation zweier Faktoren stets:

▶ $$a \cdot b = b \cdot a.$$

Dieses Gesetz heißt Kommutationsgesetz der Multiplikation.

● *Formuliere es mit Worten!*

50. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	c	$(b \cdot c)$	$a \cdot (b \cdot c)$	$(a \cdot b)$	$(a \cdot b) \cdot c$
51	7	13				
215	3	24				
147	9	11				
832	2	37				
527	4	18				

Für die Multiplikation von drei Faktoren gilt wie in den Aufgaben 50. stets:

▶ $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Dieses Gesetz heißt Assoziationsgesetz der Multiplikation. Es besagt, daß bei der Multiplikation von drei Faktoren die Reihenfolge der beiden einzelnen Multiplikationen beliebig ist. Deshalb kann man die Klammern fortlassen und einfach $a \cdot b \cdot c$ schreiben.

Aus dem Kommutationsgesetz und dem Assoziationsgesetz der Multiplikation ergibt sich, daß die Reihenfolge der Faktoren in einem mehrgliedrigen Produkt beliebig ist. So gilt beispielsweise

$$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a.$$

Das zeigen wir folgendermaßen:

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (c \cdot b);$

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot c) \cdot b;$

$a \cdot b \cdot c = (c \cdot a) \cdot b;$

$a \cdot b \cdot c = c \cdot (a \cdot b);$

$a \cdot b \cdot c = c \cdot (b \cdot a);$

$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a.$

Die Familie Hertel zahlt für ihre Neubauwohnung monatlich 63,00 MDN Miete an die kommunale Wohnungsverwaltung. Die Familie Müller hat im gleichen Hause eine größere Wohnung und zahlt monatlich 72,00 MDN Miete. Wie hoch ist der Betrag, der jährlich für beide Wohnungen bei der Wohnungsverwaltung verbucht wird?

Für diese Aufgabe gibt es zwei Lösungswege:

1. Weg: Wir berechnen zuerst den Betrag, den beide Familien monatlich einzahlen: $63{,}00 + 72{,}00 = 135{,}00$, also 135,00 MDN. Dann multiplizieren wir 135,00 mit 12. Die Gesamtmiete beträgt dann also 1 620,00 MDN.

2. Weg: Wir errechnen zuerst die Miete, die jede der beiden Familien in einem Jahr zu zahlen hat:

$63{,}00 \cdot 12 = 756{,}00$, also 756,00 MDN, und

$72{,}00 \cdot 12 = 864{,}00$, also 864,00 MDN.

Nun addieren wir die beiden Jahresmieten:

$756{,}00 + 864{,}00 = 1\,620{,}00$, also 1620,00 MDN. Auch auf diesem Wege erhalten wir als Gesamtmiete 1620,00 MDN.

Schreiben wir die Rechnungen der beiden Lösungswege in Form von Gleichungen auf, so erhalten wir

$$(63 + 72) \cdot 12 = 1\,620;$$
$$63 \cdot 12 + 72 \cdot 12 = 1\,620.$$

Daraus folgt:

$$(63 + 72) \cdot 12 = 63 \cdot 12 + 72 \cdot 12.$$

51. Benutze zur Lösung folgender Aufgaben beide Lösungswege!

$(77 + 36) \cdot 23$; $(4\,366 + 7\,531) \cdot 72$;
$(158 + 207) \cdot 91$; $(75\,580 + 83\,219) \cdot 34$;
$(364 + 578) \cdot 57$.

Die Aufgaben sind Beispiele für das folgende Rechengesetz:

▶ $$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Wegen des Kommutationsgesetzes der Multiplikation gilt ebenso:

▶ $$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Man kann also eine Summe aus zwei Summanden mit einer Zahl multiplizieren, indem man jeden Summanden einzeln mit dieser Zahl multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert. Dieses Rechengesetz heißt **Distributionsgesetz**[1].

Das Distributionsgesetz gilt auch für mehr als zwei Summanden, zum Beispiel

▶ $$a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d.$$

[1] lateinisch: distribuere — verteilen

1.7. Erweiterung des schriftlichen Verfahrens der Multiplikation auf beliebig große Faktoren

52. Rechne zur Wiederholung, und überschlage vorher das Ergebnis!

a) 38 872 · 100;
176 350 · 10;
84 205 · 1 000;
2 518 · 10 000;
72 928 · 100;

b) 4 386 · 57;
12 593 · 43;
67 801 · 81;
163 477 · 27;
32 398 212 · 34.

Wir haben bisher nur Multiplikationsaufgaben schriftlich gelöst, bei denen im zweiten Faktor höchstens zwei von Null verschiedene Ziffern standen. Wir wollen jetzt das Verfahren der schriftlichen Multiplikation auf beliebig große Faktoren erweitern.

■ Beispiel: 53 717 · 349
Wir zerlegen den zweiten Faktor in 300 + 40 + 9.
53 717 · 349 = 53 717 · (300 + 40 + 9).
Jetzt wenden wir das Distributionsgesetz an:
53 717 · 349 = 53 717 · 300 + 53 717 · 40 + 53 717 · 9;
53 717 · 349 = 53 717 · 3 · 100 + 53 717 · 40 + 53 717 · 9;
53 717 · 349 = 161 151 · 100 + 2 148 680 + 483 453;
53 717 · 349 = 16 115 100 + 2 148 680 + 483 453;
53 717 · 349 = 18 747 233.

● *Welches Gesetz haben wir bei der Zerlegung*

53 717 · 300 = 53 717 · 3 · 100

benutzt?

Übersichtlicher und kürzer können wir die Rechnung folgendermaßen schreiben:

```
 53 717 · 349
─────────────
   16 115 100   (53 717 · 300)
    2 148 680   (53 717 ·  40)
      483 453   (53 717 ·   9)
─────────────
   18 747 233.
```

53. Rechne ebenso
286 914 · 431;
97 471 · 192;
3 644 020 · 516;
29 327 · 238!

Ist bei einer Multiplikation der zweite Faktor dreistellig, so stehen in den letzten beiden Stellen des ersten Teilproduktes und in der letzten Stelle des zweiten Teilproduktes stets Nullen. Bei der Addition der Teilprodukte spielen diese Nullen keine Rolle. Wir können sie deshalb weglassen. Die Rechnung unseres Beispiels läßt sich dann noch kürzer schreiben:

```
53717 · 349
-----------
161151
 214868
  483453
-----------
18747233.
```

Hat der zweite Faktor eines Produktes mehr als drei Stellen, so wird er ebenfalls in Summanden zerlegt. Man errechnet die Teilprodukte und addiert sie. Achte darauf, daß du die Teilprodukte richtig untereinanderschreibst!

■ Beispiel:

```
47802507 · 36914
----------------
143407521
 286815042
  430222563
    47802507
    191210028
----------------
1764581743398
```

54. Ordne den beiden Zahlen in jedem der folgenden Zahlenpaare ihr Produkt zu!

[3 621; 488]; [3 270 050; 25]; [991; 73 512];
[621 448; 378]; [25 608; 12 566].

■ Beispiel: [3; 12]; [3; 12; 36]

1.8. Division von natürlichen Zahlen

55. Bestimme die Zahlen für x, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

	a)	b)
	$76\,516 \cdot 1 = x$;	$x \cdot 57 = 9\,291$;
	$9\,426 \cdot 215 = x$;	$x \cdot 43 = 19\,909$;
	$236\,050 \cdot 431 = x$;	$37 \cdot x = 120\,916$;
	$69\,503 \cdot 32\,508 = x$;	$x \cdot 89 = 89$;
	$2\,603\,740 \cdot 912 = x$;	$56 \cdot x = 1\,668\,520$.

Wie unterscheiden sich die Aufgaben der Gruppe a) von denen der Gruppe b)?

Bei Multiplikationsaufgaben sind die Faktoren gegeben, und das Produkt soll berechnet werden.

Sind dagegen ein Faktor und das Produkt gegeben und soll der andere Faktor gefunden werden, so führt die Berechnung des anderen Faktors auf die Division. Man sagt deshalb:

▶ Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Statt $x \cdot b = a$ schreiben wir $a : b = x$. Beide Seiten der Gleichung nennen wir den Quotienten[1] der Zahlen a und b. Die Zahl a heißt Dividend[2], die Zahl b heißt Divisor[3].

Bei der Multiplikation kannst du die Faktoren ganz beliebig wählen. In jedem Falle läßt sich dann das Produkt ausrechnen. Bei der Umkehrung der Multiplikation, der Division, mußt du die Zahlen so wählen, daß der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Sonst ist die Division mit natürlichen Zahlen nicht ausführbar.

Außerdem können wir eine Zahl nicht durch Null dividieren.

Wenn wir nämlich zum Beispiel $7 : 0$ berechnen wollen, müssen wir die Zahl x finden, die mit 0 multipliziert die Zahl 7 ergibt. Eine solche Zahl gibt es aber nicht, denn es gilt immer $x \cdot 0 = 0$ und niemals $x \cdot 0 = 7$.

Die Divisionsaufgabe $0 : 0$ hat kein bestimmtes Ergebnis. Wir müßten nämlich diejenige Zahl x finden, für die $x \cdot 0 = 0$. Das gilt aber für alle Zahlen x.

56. Ergänze die folgende Tabelle! Überschlage vorher das Ergebnis!

a	b	$a \cdot b$
75	683	
67		3 618
	63	10 269
	75	36 075
26		84 968
	82	647 554
93		2 186 616

Kontrolliere die Ergebnisse!

57. Mit welcher Zahl mußt du 2 681 multiplizieren, um 109 921 zu erhalten?

58. Welche Zahl muß mit 53 multipliziert werden, damit das Produkt gleich 1 988 136 wird?

59. Ein Dreher soll 416 Werkstücke anfertigen. Er stellt 32 Werkstücke je Tag her. Wieviel Tage arbeitet er an diesem Auftrag?

Wenn wir 5 642 durch 17 dividieren wollen, stellen wir fest, daß diese Division nicht ausführbar ist. Wir suchen die nächstkleinere Zahl zu 5 642, die durch 17 teilbar ist, indem wir das Verfahren der schriftlichen Division anwenden:

[1] lateinisch: quotiens — wie oft?

[2] lateinisch: dividere — teilen

[3] lateinisch: divisor — Verteiler

$$\begin{array}{l}
5642 : 17 \neq 331 \\
\underline{51} \\
54 \\
\underline{51} \\
32 \\
\underline{17} \\
15
\end{array}$$

Es bleibt der von Null verschiedene Rest 15. Da $17 \cdot 331 = 5\,627$ und nicht $17 \cdot 331 = 5\,642$ gilt, ist das Gleichheitszeichen nicht berechtigt. Wir schreiben deshalb nachträglich: $5\,642 : 17 \neq 331$.

Die nächstkleinere durch 17 teilbare Zahl ist $5\,642 - 15 = 5\,627$. Es gilt also:

$$5\,642 = 5\,627 + 15 = 17 \cdot 331 + 15.$$

60. Prüfe, ob folgende Divisionen ausführbar sind! Bleibt ein Rest, so schreibe das Ergebnis wie in dem eben gerechneten Beispiel!

a)	b)
$26\,413 : 23$;	$2\,731\,488 : 37$;
$641\,746 : 79$;	$103\,800 : 37$;
$226\,527 : 49$;	$4\,935\,260 : 83$;
$37\,880 : 51$;	$26\,030 : 25$;
$849\,648 : 62$;	$659\,500 : 19$.

1.9. Erweiterung des schriftlichen Verfahrens der Division auf beliebig große Divisoren

Bisher konntest du nur Divisionen ausführen, bei denen der Divisor eine zweistellige Zahl war. Wir wollen nun das schriftliche Divisionsverfahren auf Divisoren mit mehr als zwei Stellen erweitern.

■ Beispiel 1:

$$5\,616 : 234 = x$$

Wir rechnen:

$561 = \mathbf{2} \cdot 234 + 93$ Wir schreiben die **2**. Den Rest von 93 Zehnern verwandeln wir in 930 Einer und addieren zu ihnen die Einer des Dividenden. Das ergibt 936 Einer.

Wir rechnen weiter:

$936 = \mathbf{4} \cdot 234 + 0$ Wir schreiben die **4**.

Also gilt $x = 24$.

■ Beispiel 2:

$$5\,616 : 39 = x$$

Wir rechnen:

$56 = \mathbf{1} \cdot 39 + 17$ Wir schreiben die **1**. Den Rest von 17 Hundertern verwandeln wir in 170 Zehner und addieren zu ihnen den Zehner des Dividenden. Das ergibt 171 Zehner.

Wir rechnen weiter:

$171 = \mathbf{4} \cdot 39 + 15$ Wir schreiben die **4**. Den Rest von 15 Zehnern verwandeln wir in 150 Einer und addieren zu ihnen die 6 Einer des Dividenden. Das ergibt 156 Einer.

Wir rechnen schließlich:

$156 = \mathbf{4} \cdot 39 + 0$ Wir schreiben die **4** und erhalten insgesamt

$$x = 144.$$

Bei der Multiplikation konnten wir den einen Faktor jeder Aufgabe immer der Reihe nach in Einer, Zehner, Hunderter usw. zerlegen. An den zuletzt gerechneten Beispielen für die Division erkennst du, daß die Zerlegung des Dividenden vom Divisor abhängt.

● *Überlege, wie du dividieren mußt, wenn der Divisor mehr als drei Stellen hat!*

61. Rechne zur Übung, und mache die Probe!

202 692 : 381; 461 552 : 728;
149 862 482 : 4 081; 78 149 527 : 5 321;
256 082 : 437.

62. Prüfe, ob die folgenden Divisionen ausführbar sind!

9 530 068 : 372; 9 549 010 : 125;
12 955 696 : 2 048; 1 984 591 877 : 4 375;
399 612 336 : 74 388.

63. Ergänze die folgende Tabelle!

x	y	$x:y$
10 752	42	
10 752	84	
10 752	168	
10 752	336	
10 752	672	
10 752	1 344	
10 752	2 688	

Wie verändert sich der Quotient in Abhängigkeit vom Divisor?

64. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	$a:b$
68 352	534	
34 176	534	
17 088	534	
8 544	534	
4 272	534	
2 136	534	

Wie ändert sich der Quotient in Abhängigkeit vom Dividenden?

65. Ordne den folgenden Zahlenpaaren [a; b] den Quotienten $a:b$ zu!

[453 184; 97]; [3 626 325; 1 213];
[2 466 378; 438); [33 821 345; 6 385];
[1 380 498; 7 381].

1.10. Das Rechnen mit 0 und 1

An einigen Aufgaben hast du erkannt, daß bei der Addition der Null zu einem Summanden a die Summe gleich diesem Summanden a ist. Es gilt

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Für welche Zahl x gilt $a \cdot x = x \cdot a = a$?
Multiplizieren wir eine Zahl mit Null, so ist das Produkt stets gleich Null. Für jede Zahl a gilt also

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Addiert man zu einer Zahl a die Zahl 1, so erhält man den unmittelbaren Nachfolger von a. (Betrachte als Beispiel dafür mehrere Zahlen auf dem Zahlenstrahl!)
Subtrahiert man von einer Zahl a die Null, so ist die Differenz gleich dem Minuenden a:

$$a - 0 = a.$$

Wir wissen schon, daß man keine Zahl durch Null dividieren kann. Dagegen gilt für jede von Null verschiedene Zahl a stets:

$$0 : a = 0.$$

Für welche Zahl x gilt $\quad a : x = a$?

Folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung für das Rechnen mit 0 und 1.

Rechnen mit 0	Rechnen mit 1	
$a + 0 = 0 + a = a$	$a + 1 = 1 + a$	ist der unmittelbare Nachfolger von a
$a - 0 = a$	$a - 1$	ist der unmittelbare Vorgänger von a
$a \cdot 0 = 0$		
$a : 0$ ist sinnlos	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	
$0 : a = 0$	$a : 1 = a$	

1.11. Übungen zur Wiederholung der vier Grundrechenoperationen

Der Lehrer einer Klasse stellt die Additionsaufgabe $x = 720 + 1\,310$. Peter erhält durch seine Rechnung $x = 2030$. Thomas bekommt als Ergebnis $x = 1\,930$.

a) Hat einer von beiden richtig gerechnet?

b) Warum können nicht beide richtig gerechnet haben?

Man sagt: Wenn zwei Summanden gegeben sind, so ist ihre Summe eindeutig bestimmt,

oder: Zwei Zahlen ist ihre Summe eindeutig zugeordnet.

In der nächsten Stunde läßt der Lehrer Zahlen in Summanden zerlegen. Er stellt die Aufgabe: Zerlegt die Zahl 2030 in zwei Summanden. Peter zerlegt 2030 in 720 und 1 310. Thomas zerlegt in 800 und 1230.

a) Haben sie richtig gerechnet?

b) Gib weitere Zerlegungen der Zahl 2 030 an!

Wir stellen fest, daß die Zerlegung einer Zahl in Summanden nicht eindeutig ist.

66. Gib Zerlegungen der Zahl 75 320 an, bei denen ein Summand größer als 73 000 ist!

67. Zwei Zahlen wird durch die Subtraktion ihre Differenz zugeordnet.

a) Ist diese Zuordnung eindeutig oder nicht eindeutig?

b) Man kann umgekehrt jede Zahl in einen Minuenden und einen Subtrahenden zerlegen. Ist diese Zerlegung eindeutig?

■ Beispiel: 7 520 läßt sich in $9\,000 - 1\,480$ zerlegen.

68. Gib Zerlegungen der Zahl 27 342 an, bei denen der Minuend kleiner als 28 000 ist!

Durch die Multiplikation wird zwei Zahlen a und b ihr Produkt $a \cdot b$ zugeordnet. Umgekehrt kann man eine Zahl in Faktoren zerlegen. Was kannst du hier über die Eindeutigkeit sagen? Stelle entsprechende Überlegungen für die Division an!

69. Zerlege die folgenden Zahlen in Produkte aus zwei Faktoren:
1 560; 5 040; 44 200!

Wir geben alle Zerlegungen der Zahl 30 in zwei Faktoren an:
$30 = 1 \cdot 30$; $30 = 2 \cdot 15$; $30 = 3 \cdot 10$; $30 = 5 \cdot 6$.
Alle in den Produkten auftretenden Zahlen nennt man Teiler der Zahl 30. Wir schreiben die Teiler der Zahl 30 übersichtlich in eine Tabelle.

30	
1	30
2	15
3	10
5	6

● *Erkläre die Tabelle!*

70. Gib alle Teiler folgender Zahlen an, und schreibe sie in eine Tabelle: 48; 120; 576; 1 000!

71. Gib alle Teiler x von 4 620 an, für die $3 < x < 13$ gilt!

72. Ordne folgende Zahlen nach der Anzahl ihrer Teiler: 12; 25; 36; 99; 101!

▶ Alle natürlichen Zahlen, die den Teiler 2 haben, nennt man gerade natürliche Zahlen. Alle anderen heißen ungerade natürliche Zahlen.

73. Wieviel gerade und wieviel ungerade Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?
$50 < x < 100$; $501 < x < 633$;
$47 < x < 83$; $1\,222 < x < 1\,307$;
$123 < x < 212$.

▶ Alle Zahlen außer 0 und 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben, heißen Primzahlen.

74. Wieviel Primzahlen liegen zwischen den folgenden Zahlen?
1 und 10; 10 und 20; 20 und 30; 30 und 40; 40 und 50;
50 und 60; 60 und 70; 70 und 80; 80 und 90; 90 und 100.

1.12. Einführung in die Bruchrechnung

Bisher haben wir uns in der Hauptsache mit den natürlichen Zahlen beschäftigt. Das sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... Wir haben gelernt, daß sie ihrer Größe nach geordnet sind, und haben mit ihnen gerechnet. Bei der Addition konnten

wir für die Summanden beliebige natürliche Zahlen wählen. Stets erhielten wir als Summe wieder eine natürliche Zahl.
Wir wissen, daß dies bei der Subtraktion (Umkehrung der Addition) nicht möglich ist. Bei dieser Rechenoperation müssen wir die Zahlen so wählen, daß der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, damit wir die Subtraktion ausführen können.
Ähnlich verhält es sich bei der Multiplikation und der Division. Die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt stets wieder eine natürliche Zahl. Bei der Division müssen wir jedoch wieder eine Einschränkung machen. Der Dividend muß nämlich ein Vielfaches des Divisors sein, damit der Quotient wieder eine natürliche Zahl ist.

■ Beispiel:

a) Unter 32 Schülern einer Klasse werden 128 Schreibhefte gleichmäßig aufgeteilt. Wieviel Hefte bekommt jeder Schüler?
b) Auf einer Klassenwanderung kaufen sich Klaus, Peter und Uwe zwei Tafeln Schokolade und teilen sie unter sich gleichmäßig auf.

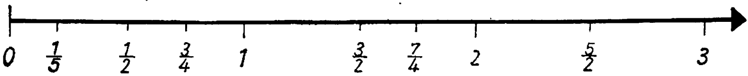
Im Beispiel a) rechnen wir 128 : 32 und erhalten als Ergebnis die natürliche Zahl 4.
Das Beispiel b) führt auf die Divisionsaufgabe 2 : 3. Der Quotient ist keine natürliche Zahl, da der Dividend nicht Vielfaches des Divisors ist. Es kann nicht jeder der Schüler eine ganze Tafel Schokolade bekommen. Sie müssen so teilen, daß jeder nur ein Bruchteil einer Tafel bekommt. Zahlreiche Anwendungsaufgaben führen auf die Notwendigkeit, ein Ganzes in Teile zu zerlegen. Du findest dazu Beispiele im Lehrbuch.

1.13. Erweitern und Kürzen von Brüchen

75. **a)** Stelle die natürlichen Zahlen von 0 bis 8 auf einem Zahlenstrahl dar!
b) Kannst du auch die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 auf einem Zahlenstrahl darstellen? Gib an, wie groß bei dieser Darstellung die Einheit in deinem Millimeterheft sein muß! (Beachte Lage und Größe des Heftes!)
c) Wie weit kannst du die Folge der natürlichen Zahlen auf deinem Zahlenstrahl an der Wandtafel darstellen, wenn du den gleichen Maßstab wie in b) verwendest?

Wir stellen fest: Wir können auf einem Zahlenstrahl die Folge der natürlichen Zahlen beliebig weit darstellen, wenn wir nur den Maßstab genügend klein und die Zeichenfläche genügend groß wählen. Jeder natürlichen Zahl kann also auf einem Zahlenstrahl genau ein Punkt zugeordnet werden.

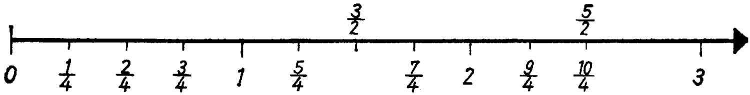
Wir wollen jetzt auch Brüche auf einem Zahlenstrahl darstellen:



76. Zeichne einen Zahlenstrahl in dein Heft, indem du für die Einheit 3 cm wählst! Trage auf diesem Zahlenstrahl die Brüche $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{10}{3}$ ein!

Die Brüche der Aufgabe 76 lassen sich bei dem gewählten Maßstab leicht eintragen. Das Eintragen von Brüchen mit großem Nenner, wie zum Beispiel $\frac{7}{571}$, ist bei dem gleichen Maßstab viel schwieriger. Dennoch ist jedem Bruch genau ein Punkt auf dem gezeichneten Zahlenstrahl zugeordnet.

An der folgenden Abbildung erkennst du, daß zum Beispiel dem Bruch $\frac{5}{2}$ ein ganz bestimmter Punkt zugeordnet ist. Umgekehrt sind diesem Punkt aber noch viel mehr Brüche zugeordnet, zum Beispiel $\frac{10}{4}$.



77. Gib zu jedem der eingezeichneten Punkte zwei weitere Brüche an, die diesen Punkten zugeordnet sind! Gibt es noch mehr?

Wir erkennen, daß jedem Punkt eines Zahlenstrahls, dem ein Bruch zugeordnet ist, sogar unendlich viele Brüche zugeordnet sind. Alle einem Punkt zugeordneten Brüche gehen durch Kürzen und Erweitern auseinander hervor.

78. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}$	8	8
2	5	4	10				
7	5	28	20				
10	6	5	3				
9	3	6	2				
5	1	20	4				

79. Ergänze die folgende Tabelle!

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
2	3	4	7	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	14	12
5	7	5	8				
18	5	9	2				
3	4	7	8				
6	3	12	5				
4	5	9	10				

Du erkennst, daß in der Tabelle von Aufgabe 78. für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Brüche stehen, die durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervorgehen. Für sie gilt $a \cdot d = b \cdot c$. In der Tabelle von Aufgabe 79. dagegen gehen die für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ eingesetzten Brüche nicht durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervor. Du erkennst ebenfalls an dieser Tabelle, daß für diese Brüche $a \cdot d \neq b \cdot c$ gilt.
Das Erweitern und Kürzen haben wir uns an anschaulichen Beispielen klargemacht. (Teilung eines Kuchens, eines Kreises, Zahlenstrahl usw.) Von diesen Beispielen ausgehend, setzen wir ganz allgemein fest:

▶ $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gehen durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervor, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

▶ $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gehen nicht durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervor, wenn $a \cdot d \neq b \cdot c$ ist.

80. Untersuche, welche Brüche der folgenden Paare durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervorgehen!
Schreibe diese Paare auf!

a) $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{7}$ | **b)** $\frac{2}{7}$ und $\frac{14}{49}$

$\frac{9}{8}$ und $\frac{5}{6}$ | $\frac{28}{12}$ und $\frac{14}{6}$

$\frac{12}{9}$ und $\frac{4}{3}$ | $\frac{17}{35}$ und $\frac{16}{34}$

$\frac{12}{15}$ und $\frac{14}{13}$ | $\frac{5289}{8322}$ und $\frac{1763}{2774}$

2. Grundbegriffe der Geometrie

2.1. Die Grundgebilde der Geometrie

1. a) Bei jedem Körper kannst du die Länge, die Breite und die Höhe messen. Wie viele Ausdehnungen hat also ein Körper?

b) Bei einer ebenen Figur, z. B. einem Rechteck, kannst du aber nur die Länge und die Breite messen; sie hat keine Höhe.
Das trifft auch auf gekrümmte Flächen zu, z. B. auf den Mantel eines Zylinders. Rolle ein rechteckiges Blatt Papier zu einem geraden Kreiszylinder zusammen, markiere vier Punkte und verbinde sie durch möglichst kurze Linien zu einem Viereck! Rollst du jetzt das Papier wieder auseinander, so erkennst du eine Figur, von der du wohl Länge und Breite, aber keine Höhe angeben kannst. Wie viele Ausdehnungen hat also eine Fläche?

c) Eine Strecke hat nur eine einzige Ausdehnung, die Länge.
Wenn ein Kraftwagen auf einer kurvenreichen Straße fährt, sein Weg also eine gekrümmte Linie ist, kannst du trotzdem die Länge der Fahrstrecke angeben, auf keinen Fall aber eine Breite oder eine Höhe. Wie viele Ausdehnungen hat also eine Linie?

d) Statt „Anzahl der Ausdehnungen" sagt man auch „Dimension". Ein Körper hat also die Dimension 3. Welche Dimensionen haben Fläche und Linie?

2. a) Unterscheide ebenflächig und krummflächig begrenzte Körper, und nenne einige Beispiele für jede Art!

b) Unterscheide ebene und gekrümmte Flächen, und nenne Beispiele!

c) Unterscheide gerade und gekrümmte Linien, und nenne Beispiele!

d) Unterscheide Kreisfläche und Kreislinie! Welcher Körper entspricht diesen Gebilden?

3. a) Die sechs Seitenflächen eines Quaders stoßen in „Strecken" aneinander. Wie viele gibt es? Wie heißen sie?

b) Diese Seitenkanten haben wie jede Strecke keine Breite oder Dicke; nur die Länge kannst du angeben.
Wie viele verschiedene Längen kommen beim Quader vor und wie viele Kanten von jeder Länge?

c) Auch die Strecke, die du in dein Heft mit Hilfe des Lineals mit einem gut gespitzten Bleistift zeichnest, darf eigentlich keine Breite oder Dicke haben. Überlege dir, wie der Bleistiftstrich zustande kommt und ob es stimmt, daß er keine Breite oder Dicke hat! Nimm gegebenenfalls ein Vergrößerungsglas zu Hilfe!

Die gezeichnete Strecke ist in Wirklichkeit eine Anhäufung von kleinsten Teilchen der Bleistiftmine, die auf dem Zeichenpapier beim Zeichnen haftengeblieben sind. Sie hat neben der Länge eine — wenn auch sehr kleine — Breite und Höhe. Die gezeichnete Strecke ist also tatsächlich ein Körper und keine Strecke. Durch ihn wird die Strecke nur veranschaulicht. Die Strecke selbst kannst du dir nur vorstellen, wenn du den Bleistiftstrich in Gedanken immer dünner und dünner werden läßt, bis er gar keine Breite und Höhe mehr hat.

4. a) Man sagt gewöhnlich, das Blatt Papier, das vor uns auf dem Tisch liegt, sei ein Stück einer „Ebene". Stimmt das? Was ist das Papierblatt in Wirklichkeit?
   b) Zeichne auf möglichst dünnes Papier eine Kreislinie, schneide den Kreis aus, und lege die Kreisscheibe auf die flache Hand! Hältst du jetzt wirklich eine „Kreisfläche" in der Hand? Was stellt die Kreisscheibe in Wirklichkeit dar?

5. a) Man sagt, daß zwei Linien einander in einem Punkt schneiden. Zeichne einen Punkt, indem du zwei Linien zum Schnitt bringst!
   b) Bedenke, daß jede gezeichnete Linie aus haftengebliebenen Teilchen der Bleistiftmine besteht, also auch eine geringe Breite und Höhe besitzt! Wieviel Ausdehnungen hat also in Wirklichkeit das Gebilde, in dem sich deine beiden gezeichneten Linien schneiden (Abb. 1)?
   c) Bringe in Gedanken Linien zum Schnitt, d. h. Gebilde, die keine Breite und keine Höhe haben (Abb. 2)! Kannst du dann eine Länge oder Breite oder Höhe des Punktes angeben?
   Ein Punkt hat weder Länge noch Breite noch Höhe; er hat keine Ausdehnung. Man sagt auch: Der Punkt hat die Dimension 0.

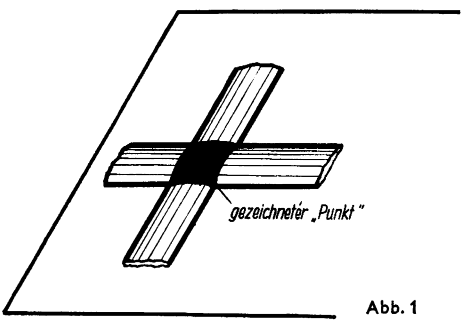
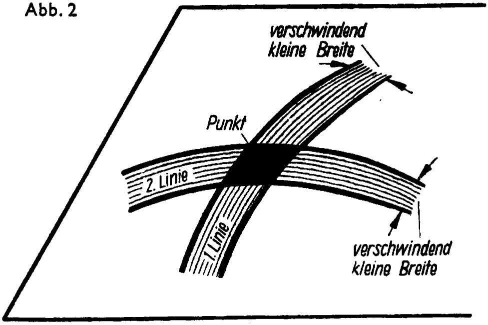


Abb. 1

Abb. 2



▶ Punkt, Linie (auch die Gerade), Fläche (auch die Ebene) und Körper sind die Grundgebilde der Geometrie.

6. Stelle eine Übersicht zusammen!

Grundgebilde der Geometrie	
Bezeichnung	Dimension

2.2. Beziehungen zwischen den Grundgebilden

Die Grundgebilde der Geometrie stehen untereinander in gewissen Beziehungen, so daß manche von ihnen dazu dienen können, um andere festzulegen oder zu erklären.

1. Beobachte die Spitze deines Bleistifts, wenn du mit ihm eine Linie zeichnest!
Die Bleistiftspitze kannst du dabei als Punkt ansehen. Dann läßt sich sagen:

▶ Bewegt sich ein Punkt, so entsteht eine Linie.

2. **a)** Was für ein Gebilde entsteht, wenn sich der Punkt immer in gleicher Richtung um ein begrenztes Stück vorwärtsbewegt?
b) Was entsteht, wenn sich der Punkt unbegrenzt in ein und derselben Richtung bewegt?
c) Welche Bewegungen sind nötig, damit eine Gerade entsteht?
d) Unter welchen Bedingungen entsteht die Kreislinie?

e) Ergänze folgende Übersicht!

Bewegt sich ein Punkt	so entsteht eine
nacheinander unbegrenzt in zwei entgegengesetzten Richtungen	Gerade
unbegrenzt in einer Richtung	
	Strecke
in der Ebene immer in gleichem Abstand um einen festen Punkt	

3. Gerade, Strahl, Strecke erhielten wir eben mit Hilfe des Punktes durch verschieden begrenzte oder unbegrenzte Bewegungen. Strahl und Strecke kann man sich aber auch aus dem Grundgebilde Gerade entstanden denken.
   a) Denke dir eine Gerade in einem beliebigen Punkt in zwei Teile zertrennt! Was für Grundgebilde ergeben sich?
   b) Eine Gerade möge in zwei verschiedenen beliebigen Punkten in drei Teile zerlegt werden. Was für Gebilde entstehen?
   c) Was ergeben sich für Gebilde, wenn du eine Gerade in drei, vier, fünf, ... Punkten aufteilst?

4. a) Befestige einen Schlüssel oder ähnliches an einer langen Schnur, und schleudere ihn im Kreis herum! Was für ein Gebilde beschreibt dabei die Schnur?
   b) Biege ein Stück Draht in Form einer Wellenlinie, und verschiebe das Modell so, wie es die Abbildung 3 andeutet!

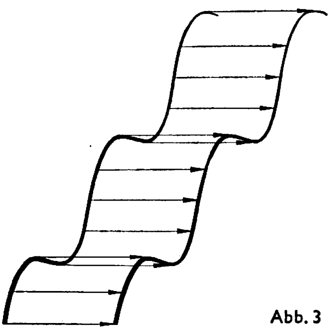


Abb. 3

Die Wellenlinie beschreibt eine Fläche, die der Oberfläche einer Tafel Wellblech ähnelt.

▶ Bewegt sich eine Linie, so entsteht im allgemeinen eine Fläche.

c) Was für eine Linie muß bewegt werden, damit eine Ebene entsteht?
d) Was für eine Linie muß bewegt werden, damit die Oberfläche einer Kugel entsteht?

5. a) Lege ein Stäbchen, deinen Bleistift oder ähnliches als „Strecke" in die „Ebene" deiner Tischplatte und bewege es in dieser Ebene in verschiedener Weise. Was für Gebilde entstehen?
b) Ordne die Gebilde
(1) nach der Art der Bewegung der Strecke,
(2) nach ihrer Dimension!
c) Welche Dimensionen können sich nicht ergeben?

▶ Bewegt sich eine Strecke in einer Ebene (nicht in ihrer eigenen Richtung), so entsteht eine ebene Figur.

6. a) Schneide aus Pappe ein Rechteck aus, bringe vier Löcher an, und ziehe zwei Fadenschlingen hindurch, wie es die Abbildung 4 zeigt!

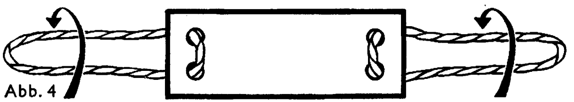


Abb. 4

b) Drille durch Drehen des Pappstücks die an den Enden festgehaltenen Schlingen zusammen (Abb. 4), und straffe sie plötzlich! Das Rechteck kommt in drehende Bewegung. Was für ein Gebilde entsteht dabei?
c) Verfahre genauso mit einem Kreis und mit einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 5)! Was entsteht jeweils?

▶ Bewegt sich eine Figur, so kann dabei ein Körper entstehen.

7. a) Bewege Rechteck, Kreis und Dreieck (ohne die Fäden zu benutzen) so, daß dabei andere Körper entstehen! Was für welche sind es?
b) Bewege die Figuren so, daß gar keine Körper entstehen!
c) Wie mußt du ein Quadrat bewegen, damit ein Würfel entsteht?
d) Welche Figur und welche Bewegung ergibt einen Quader?
e) Warum nennt man wohl Kugel, Kreiskegel, Kreiszylinder Drehkörper?

8. a) Was für eine Linie muß bewegt werden, damit eine Ebene entsteht? In welcher Richtung darf die Linie dabei aber nicht bewegt werden?

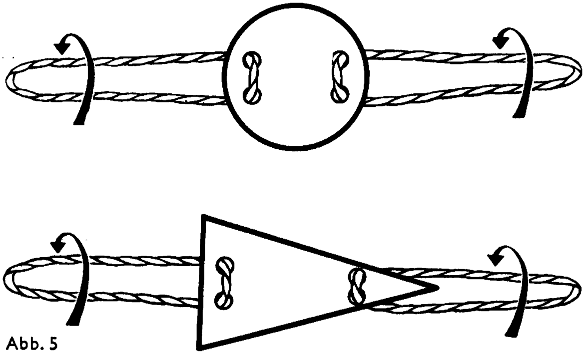


Abb. 5

b) Erkläre damit, weshalb in jede Ebene in jeder beliebigen Richtung beliebig viele Geraden „hineingelegt“ werden können!

9. a) Zeichne zwei Strecken, dann zwei Kreise und schließlich einen Kreis und eine Gerade, die jeweils einander schneiden! Was für Schnittgebilde entstehen?

b) Modelliere aus Knetmasse einen Quader, einen geraden Kreiszylinder und eine Kugel, und stecke jeweils einen Vierkant- oder Rundstab hindurch! Welche Gebilde erkennst du auf den einander schneidenden Oberflächen der beiden ineinandergesteckten Körper?

Zusammenfassung:

Bewegen sich	so entstehen
Punkte	Linien
Linien	Flächen
so entstehen	Schneiden sich

10. In der Planimetrie (ebenen Geometrie) werden nur solche Gebilde untersucht, die in einer Ebene liegen können, wie Strecken, Winkel, Dreiecke, Kreise usw. Alle diese Gebilde können mit Hilfe der Grundbegriffe Punkt, Gerade, Ebene und gewissen Zusammenhängen zwischen diesen (wie Schneiden, Bewegen, gegenseitige Lage usw.) erklärt werden.

■ Beispiele:

Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene und in ihr ein Dreieck.

Zwei Punkte auf einer Geraden legen eine Strecke fest.

▶ Punkt, Gerade und Ebene werden in der Planimetrie als Grundbegriffe verwendet. Alle anderen Gebilde werden mit Hilfe dieser Begriffe und gewisser Beziehungen zwischen ihnen beschrieben und erklärt.

● *Erkläre in dieser Weise die Begriffe „Strahl", „Winkel", „ebenes Viereck", „Kreis"!*

2.3. Winkelmaße

1. a) Auf Seite 93 deines Lehrbuches hast du gelernt, daß die Winkel in Grad gemessen werden. Der wievielte Teil eines Vollwinkels ist ein Grad (1°)?

b) Du kannst auch sagen, daß 1 Grad der neunzigste Teil eines rechten Winkels ist. Ein rechter Winkel hat dann also 90 Grad:

$$1^{\llcorner} = 90°.$$

Für „Rechter Winkel" schreibt man ein hochgestelltes Rechtwinkelzeichen, das wie ein großes gedrucktes L aussieht.

Es gilt also weiter: $180° = 2^{\llcorner}$;

$$360° = 4^{\llcorner}.$$

2. a) Was für Verwandlungszahlen sind bei den meisten Maßeinheiten (z. B. Längenmaßen, Flächenmaßen, Massemaßen) üblich?

b) Die Gradeinteilung des rechten Winkels paßt nicht gut in unser dezimales Maßsystem. Man teilt deshalb neuerdings den rechten Winkel in 100 Teile und nennt den hundertsten Teil des rechten Winkels einen Neugrad oder ein Gon (vom griechischen Wort für „Winkel" hergeleitet). Es gilt also:

$$1^{\llcorner} = 100^{g}.$$

Den neunzigsten Teil des rechten Winkels, den du bisher kurz als 1 Grad (1°) bezeichnet hast, nennt man im Gegensatz zu 1 Neugrad (1^{g}) dann meist Altgrad.

2.4. Bestimmen von Flächen- und Rauminhalten

Zur Übung und Systematisierung

1. **a)** Kannst du die Formel zur Berechnung der Quadratfläche auch zur Berechnung der Rechteckfläche benutzen?

b) Kannst du umgekehrt die Formel zur Berechnung der Rechteckfläche auch zur Berechnung der Quadratfläche benutzen?

c) Stelle ähnliche Überlegungen für die Formeln zur Berechnung des Volumens von Würfel und Quader an!

2. **a)** Welche der folgenden vier Aussagen sind richtig, welche sind falsch?

(1) Alle Rechtecke sind Quadrate.
(2) Alle Quadrate sind Rechtecke.
(3) Es gibt Rechtecke, die Quadrate sind.
(4) Es gibt Quadrate, die Rechtecke sind.

b) Stelle entsprechende Aussagen mit den Begriffen „Würfel" und „Quader" auf!

c) Welches ist die allgemeinere Figur, welches der Sonderfall, Quadrat oder Rechteck?

d) Mache eine entsprechende Aussage über Würfel und Quader!

e) Begründe damit deine Antworten unter 1.!

3. **a)** Ein Quadrat und ein nichtquadratisches Rechteck mögen Grundseiten von gleichen Längen haben. Welche Figur hat den größeren Flächeninhalt? Untersuche dabei zwei Fälle!

b) Ein Würfel und ein nichtwürfelförmiger Quader mögen gleich große Grundflächen haben. Welcher Körper hat das größere Volumen? Unterscheide dabei zwei Fälle!

4. **a)** Ein Quadrat habe eine Seitenlänge a von 3 cm. Wie groß ist sein Flächeninhalt? Wie groß ist sein Umfang?

b) Drei solcher Quadrate werden so nebeneinandergelegt, daß sich dadurch ein Rechteck ergibt. Wie groß ist dessen Flächeninhalt? Wie groß ist dessen Umfang?

5. **a)** Ein Würfel habe eine Seitenlänge von 5 cm. Wie groß ist sein Volumen? Wie groß ist seine Oberfläche?

b) Vier solcher Würfel werden so übereinandergestellt, daß sich dadurch ein gerades Prisma ergibt. Wie groß ist dessen Volumen? Wie groß ist dessen Oberfläche?

6. a) Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 3 cm soll in kleine Würfel von je 1 cm^3 Rauminhalt zerschnitten werden. Wie viele Schnitte müssen geführt werden?
   b) Wie viele kleine Würfel entstehen?
   c) Angenommen, der große Würfel war außen rot gefärbt. Wie viele von den Teilwürfeln enthalten dann nur farblose Seitenflächen, wie viele enthalten eine gefärbte, wie viele enthalten zwei gefärbte Seitenflächen? Gibt es auch Teilwürfel, die drei, vier, fünf oder sechs gefärbte Seitenflächen enthalten?

7. a) Beantworte die Fragen der Aufgabe 6 für ein gerades quadratisches Prisma, dessen Kanten *a*, *b*, *c* Längen von 2 cm, 2 cm und 5 cm haben!
   b) Desgleichen für ein gerades quadratisches Prisma mit den Kantenlängen 6 cm, 6 cm und 2 cm.
   c) Desgleichen für einen Quader, dessen Kanten *a*, *b*, *c* Längen von 4 cm, 6 cm und 9 cm haben.

8. Ein Schornstein in Quaderform ist 12 m hoch und hat Außenmaße *a* und *b* von 60 cm und 50 cm. Seine Wanddicke *d* beträgt überall 6,5 cm. Wie viele Kubikmeter Mauerwerk waren für den Bau erforderlich?

9. Ein Würfel hat Kanten *a* von 6 cm Länge, ein gerades quadratisches Prisma hat Kanten *a* und *b* von je 4 cm Länge und eine Kante c von 13,5 cm Länge; ein Quader hat Kanten *a*, *b*, *c* von 2 cm, 9 cm bzw. 12 cm Länge. Vergleiche die Rauminhalte und die Oberflächen der drei Körper!

10. a) Gegeben sind neun gleich große Würfel. Kannst du aus ihnen a) einen Würfel, b) ein gerades quadratisches Prisma und c) einen Quader aufbauen, ohne daß ein Würfel übrigbleibt?
   b) Geht es, wenn du 10 solcher Würfel hast?
   c) Ist es auch bei 16 Würfeln möglich?
   d) Welche Körperform kannst du, unabhängig von der Anzahl der gegebenen Würfel, stets herstellen?

INHALTSVERZEICHNIS

1. Ergänzungen zur Arithmetik 3

1.1. Die Ordnung der natürlichen Zahlen 3
1.2. Das dekadische Stellenwertsystem 5
1.3. Addition von natürlichen Zahlen 6
1.4. Das Runden 9
1.5. Subtraktion von natürlichen Zahlen 11
1.6. Multiplikation von natürlichen Zahlen 15
1.7. Erweiterung des schriftlichen Verfahrens der Multiplikation auf beliebig große Faktoren 18
1.8. Division von natürlichen Zahlen 19
1.9. Erweiterung des schriftlichen Verfahrens der Division auf beliebig große Divisoren 21
1.10. Das Rechnen mit 0 und 1 23
1.11. Übungen zur Wiederholung der vier Grundrechenoperationen 24
1.12. Einführung in die Bruchrechnung 25
1.13. Erweitern und Kürzen von Brüchen 26

2. Grundbegriffe der Geometrie 29

2.1. Die Grundgebilde der Geometrie 29
2.2. Beziehungen zwischen den Grundgebilden 31
2.3. Winkelmaße 35
2.4. Bestimmen von Flächen- und Rauminhalten 36